ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ

БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

Ерқара

Жолдыбайұлы Айдос

ЖОҒАРЫ

МАТЕМАТИКА-3

Өңделіп, толықтырылып бесінші басылуы

Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігі оқулық ретінде ұсынған

Алматы 2016

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

А 31

Пікір жазғандар:

Ж. Тоқыбетов–Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, ф.-м.ғ.к.,профессор;
С. Мухамбетжанов – Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, «Дифференциалдық теңдеулер» кафедрасының меңгерушісі,ф.-м.ғ.д.,проф;
А. Сақабеков – ҚБТУ, ф.-м.ғ.д., профессор;
Төреқожаев Ә.Н.– ҚР ҰИА және Нью-Йорк Академиясының академигі, Ресей жаратылыстану академиясының мүшесі, ф.-м.ғ.д., профессор.

А31 **Айдос Е.Ж.** Жоғары математика-3: Оқулық. – 3 кітапта. – Алматы: «Бастау », 3-кітап. 2016. – 634 б.

Бұл кітап жоғары математика пәні бойынша техникалық жоғары оқу орындарының бакалавриат деңгейіндегі типтік оқу бағдарлама-ларына сәйкес жазылған үш бөлімнен тұратын кітаптарымыздың үшіншісі. Мұнда жоғары математиканың «Көп айнымалды функциялар; Дифференциалдық теңдеулер; Еселі, қисық сызықты, беттік интегралдар; Қатарлар» атты бөлімдері қарастырылған. Кітап мынадай құрылымда жазылған**:** теориялық материал; сұрақтар мен тапсырмалар; 30 нұсқадан тұратын үй тапсырмалары (ҮТ); ҮТ орындау үлгілері; бақылау жұмысына арналған есептер. Техникалық жоғары оқу орындарының студенттері мен оқытушыларына арналған.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

ISBN 978-601-7275-07-5 (к.3)

ISBN 978-601-7275-04-4

© Айдос Е.Ж., 2016

© «Бастау», 2016

Алғы сөз

Алдыңыздағы кітап – жоғары математика пәні бойынша техникалық жоғары оқу орындарының бакалавриат деңгейіндегі типтік оқу бағдарламаларына сәйкес, оқытудың традициялық әдісі мен қазір қолданыла бастаған кредиттік технология жүйесін ұштастыра отырып жазылған, үш бөлімнен тұратын кітаптарымыздың үшіншісі. Бұл бөлімде жоғары математиканың «Көп айнымалды функциялар; Дифференциалдық теңдеулер; Еселі интегралдар, векторлық анализ» атты тараулары қарастырылады. Кітапты жазуда, біз әрине, білім беру саласында қолданылып жүрген, классикалық үлгідегі оқулықтар мен оқу құралдарының материалдарын кеңінен пайдаландық. Бірақ оларды сұрыптап талдап, сын көзбен қарай отырып, кейбір теориялық мәселелерге өзіміздің көзқарасымызға сай өзгерістер енгіздік. Сонымен бірге материалдың математикалық қатаңдығын сақтай отырып, оны оқушыға түсінікті, жеңіл тілмен жеткізуге тырыстық. Оқушы мен оқытушының қолдануына ыңғайлылығын көздеп, лекциялық курсты, практикалық есептерді, студенттердің өз бетінше орындауына арналған тапсырмаларды, аралық бақылауға арналған сұрақтарды бір оқулық ішінде қатар беруді жөн көрдік. Кітап мынадай құрылымда жазылған**:** теориялық материал (лекция); осы материалға арналған сұрақтар мен тапсырмалар; 30 вариантан тұратын үй тапсырмалары (ҮТ); үй тапсырмаларын орындау үлгілері; бақылау жұмысына арналған есептер. Теориялық бөлімде Е.Ж.Айдостың 2003 ж. баспадан шыққан, ҚР ОҒМ оқулық ретінде бекіткен «Жоғары математика (қысқаша курс)» атты оқулығы пайдаланылды. Ал студенттердің жеке үй тапсырмаларын жазуда, А.П.Рябушко және т.б. авторлардың «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике» атты үш бөлімнен тұратын оқу құралдарындағы материалдарын, қажетті есептермен толықтырып, оларды орындау үлгілеріне кейбір әдістемелік өгерістер енгізе отырып, пайдаландық.

Теоремалардың көпшілігінің дәлелдемесі келтірілген. Кейбір маңызды сұрақтардың мән-мағынасын қарсы мысал (контрпример) арқылы ашып көрсетіп отырдық.

Оқушыға қажет жағдайларда, элементар математика бойынша мәліметтерді [13] кітаптан қарауға болады.

Қазіргі кезде қазақша математикалық терминдер толық қалыптасып болған жоқ. Сондықтан кітабымызда оқушының көңілінен шықпай жатқан терминдер бар болса, оларды бірігіп талқылауға дайынбыз. Біз қолданған математикалық терминдер 1999 ж. жарық көрген [14] сөздіктен алынды.

Кітап үш тараудан тұрады. Әрбір тарау параграфтарға бөлінген. Кейбір параграфтар пункттерге бөлінеді. Теорема дәлелдеуінің немесе мысалдарды шығарудың басталуы мен аяқталуын сәйкес ▼ және ▲ белгілерімен көрсетіп отырамыз. Үй тапсырмаларындағы нөмірлердің бірінші цифры тарауға сәйкес, ал екінші цифры осы тарауға арналған тапсырма нөмірін көрсетеді, мысалы 9.2–ҮТ белгілеуі, тоғызыншы тарау бойынша студенттерге берілетін екінші үй тапсырмасы екенін көрсетеді. Әрбір тапсырма бірнеше есептен құралуы мүмкін.

Автор

9. КӨП АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАР

§ 9.1. *n* - өлшемді евклидтік кеңістік. Көп айнымалды функциялар. Анықталу аймағы. Функция шегі. Үзіліссіздік

Біз осыған дейін бір айнымалды функцияларды қарастырып келдік. Бірақ қандай да бір шама бір айнымалға ғана емес, екі немесе одан да көп айнымалдарға тәуелді болатын жағдайлар кездеседі.

Мысалы, қабырғалары x және y тік төртбұрыш ауданы

$$S = xy \qquad (А)$$

формуласымен өрнектеледі. Мұндағы S – екі айнымалды функция: әрбір x,y мәндер жұбына S ауданының анықталған бір мәні сәйкес келеді.

Қырларының ұзындықтары x,y,z-ке тең тік бұрышты параллелепипед көлемі

$$V=xyz \qquad (Б)$$

формуласымен өрнектеледі. Мұндағы V – үш айнымалды функция.

Тізбек бөлігіндегі электр тогының A жұмысы осы бөліктің ұштарындағы U потенциалдар айырымына, I ток күшіне және t уақытқа тәуелді

$$A=IUt. \qquad (В)$$

9.1.1. n өлшемді евклидтік кеңістік. Көп айнымалды функция анықтамасын берместен бұрын n өлшемді $(n=1,2,3,...)$ евклидтік кеңістік туралы қысқаша мәлімет берейік.

Барлық реттелген n нақты сандар $(x_1, x_2, ..., x_n)$ жүйелерінің жиыны ***n өлшемді нақты*** **(**немесе ***арифметикалық*****)** ***кеңістік*** деп аталады және R^n арқылы белгіленеді (§2.8, 1 бөлімді қараңыз).

Сандар жүйесін бір қою әріппен $\mathbf{x}=\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ белгілейді де, оны R^n ***кеңістігінің нүктесі*** немесе ***векторы*** деп, ал $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарын **x нүктесінің (векторының) координаттары** немесе **компоненттері (құраушылары)** деп атайды.

Барлық координаттары нөлге тең вектор ***нөл вектор*** деп аталады және оны $\mathbf{0}=(0,0,...,0)$ символымен белгілейді. Егер

$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ және $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$ векторларының сәйкес координаттары өзара тең болса: $x_i = y_i,\ \ i = 1,2,...,n,$ онда олар **тең векторлар** деп аталады да $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ символымен белгіленеді. Анықтама бойынша, **x** пен **y** **векторларының қосындысы** деп $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...,\ x_n + y_n),$ **олардың айырымы** деп $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ ...,\ x_n - y_n),$ ал α саны мен **x** векторының (немесе **x** векторы мен α санының) **көбейтіндісі** деп $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ ...,\ \alpha x_n)$ векторларын айтады.

Бұл амалдар үшін келесі қасиеттер орындалады ($\alpha,\ \beta -$сандар, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$):

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
3) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$;
4) $\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y})$;
5) $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} = (\alpha + \beta)\mathbf{x}$;
6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;
7) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ векторының **ұзындығы** немесе **нормасы** деп, келесі формуламен есептелетін санды айтады

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \qquad (1)$$

$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ пен $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$ **нүктелерінің арақашықтығы** келесі формуласымен анықталады

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}. \qquad (2)$$

Ескерту. Қажет жағдайда, **x, y** нүктелері (векторлары) қандай кеңістікте жатқанын көрсету үшін (1) және (2) формулаларды, сәйкес келесі түрлерде жазады:

$$\|\mathbf{x}\|_{R^n} = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \qquad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{R^n} = |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Мысалы,

$\|\mathbf{x}\|_{R^1} = |x_1|$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{R^1} = |x_1 - y_1|$, мұнда $\mathbf{x} = (x_1)$, $\mathbf{y} = (y_1)$;

$\|\mathbf{x}\|_{R^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{R^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$,

мұнда $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, т.с.с.

Екі, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ және $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ вектордың **скаляр көбейтіндісі** деп $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ немесе **ху** арқылы белгіленетін келесі санды айтады

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{3}$$

Скаляр көбейту амалы енгізілген R^n кеңістігі ***евклидтік кеңістік*** деп аталады.

Скаляр көбейтінді үшін келесі қасиеттер орындалады:

а) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, мұндағы теңдік $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ болса, және тек сонда ғана орындалады;

б) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

в) $(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

▼ Шынында да, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0$, ал мұндағы теңдік тек $x_1 = ... = x_n = 0$ болса ғана орындалатыны түсінікті.

Сонымен бірге, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ және

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta(y_1, y_2, ..., y_n) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha y_2 + \beta y_2, ..., \alpha y_n + \beta y_n)$$

теңдіктерін ескерсек $(\alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha x_j + \beta y_j) \cdot z_j =$

$= \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot z_j + \beta \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot z_j == \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ аламыз. ▲

x пен y векторларының арасындағы бұрыш деп

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos \omega, \quad 0 \le \omega \le \pi \tag{4}$$

теңдігі орындалатындай ω санын айтады.

Скаляр көбейтінді үшін келесі теңсіздіктер орындалатынын атап өтеміз:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \ \le \ |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \tag{5}$$

немесе координаттар тілінде (жоғарыдағы ескертуді қараңыз)

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2} \ \le \ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}. \tag{5′}$$

(5), (5′) ***Минковский теңсіздігі*** деп аталады.

(5) теңсіздіктен,

$$\big||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\big| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tag{6}$$

теңсіздігі шығады, өйткені

$$|\mathbf{x}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y}|, \quad |\mathbf{y}| = |(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{x}| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{x}|,$$

немесе $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| = -\big(|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\big) \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, ал бұдан $-|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, яғни (6) теңсіздікті аламыз.

(5) пен (6) ***үшбұрыштар теңсіздіктері*** деп те аталады: $\mathbf{x}, \ \mathbf{y}, \ \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}$ векторлары үшбұрыш қабырғалары болатындықтан, (5) теңсіздік - үшбұрыштың бір қабырғасының ұзындығы қалған екі қабырғасының ұзындықтарының қосындысынан үлкен емес, ал (6) теңсіздік - үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындықтарының айырымының абсолют шамасы үшінші қабырғасының ұзындығынан үлкен емес екенін көрсетеді.

R^n кеңістігінен кез келген $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ ..., \ x_n^0)$ нүктені алайық.

Радиусі $r > 0$, центрі $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ нүктесі болатын ***шар*** (немесе ***тұйық шар***) деп,

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\right| = \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le r \qquad (*)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ нүктелерінің жиынын айтады және оны $\overline{O}_r(\mathbf{x}_0)$, $\overline{U}_r(\mathbf{x}_0)$, т.с.с. белгілейді.

Радиусі r, центрі $\mathbf{x^0}$ болатын ***ашық шар*** деп,

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{x^0}\right| < r \qquad (**)$$

қатаң теңсіздігін қанағаттандыратын $\mathbf{x}$ нүктелер жиынын айтады және оны $O_r(\mathbf{x}_0), U_r(\mathbf{x}_0)$, т.с.с. белгілейді. Біз бұл жиынды (ашық шарды) $\mathbf{x^0}$ нүктесінің r **маңайы** деп атаймыз.

Енді $\mathbf{x} \in R^n$ нүктелерінің кез келген Е жиынын алайық. Анықтама бойынша, егер Е жиынының құрамында центрі $\mathbf{x^0} \in E$ нүктесі болатын ашық шар бар болса, онда $\mathbf{x^0}$ нүктесі Е ***жиынының ішкі нүктесі*** деп аталады.

Барлық нүктелері ішкі нүктелер болатын жиын ***ашық жиын*** деп аталады. **Мысалы**, бос жиын – ашық жиын, өйткені онда ішкі нүкте болмайтын бірде-бір нүкте жоқ;

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{x^0}\right| < r \qquad (7)$$

теңсіздігімен берілген ашық шардың ашық жиын болатынын көрсетейік. Шынында да, $\mathbf{y}$ ашық шардың кез келген нүктесі болсын, яғни

$$\left|\mathbf{y} - \mathbf{x^0}\right| = \rho < r\,. \qquad (8)$$

Онда

$$\left|\mathbf{z} - \mathbf{y}\right| < \varepsilon = r - \rho \qquad (9)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын **z** нүктелер жиыны (яғни центрі **y** нүктесі болатын (9)-шы ашық шар), (7)-ші ашық шарда жатады. Өйткені ((8), (9) қараңыз)

$$\left|\mathbf{z}-\mathbf{x}^{\mathbf{0}}\right|=\left|\mathbf{z}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{x}^{\mathbf{0}}\right|\le\left|\mathbf{z}-\mathbf{y}\right|+\left|\mathbf{y}-\mathbf{x}^{\mathbf{0}}\right|<\varepsilon+\rho<r-\rho+\rho=r\,.$$

Құрамында $\mathbf{x}^{\mathbf{0}}\in R^n$ нүктесі болатын кез келген ашық жиын осы $\mathbf{x}^{\mathbf{0}}$ **нүктесінің маңайы** деп аталады.

Егер Е жиынының кез келген екі $\mathbf{x}',\mathbf{x}''$ нүктелерін қосатын және осы жиында жататын үзіліссіз қисық табылса, онда Е **байланысты жиын** деп аталады. Байланысты ашық жиын **аймақ** деп аталады.

9.1.2. Көп айнымалды функциялар. Анықталу аймағы.

Материалды оқушыға жеткізуді жеңілдету мақсатында алдымызда қарастырылатын сұрақтарды $n=2$ немесе $n=3$ үшін келтіреміз және Ox_1, Ox_2, Ox_3 координаттарын сәйкес Ox, Oy, Oz арқылы белгілейміз (бұл сұрақтарды төрт және одан да көп айнымалдар үшін қарастыру аса назар аударатындай өзгерістер енгізе қоймайды). Егер $n>3$ болса, онда R^n кеңістігіндегі объектілер математикалық абстракция түрінде ғана зерттелетіндігі белгілі.

Анықтама. *Реттелген* $(x;\ y)$ *сандар жұбының D жиыны берілсін. Егер әрбір* $(x,\ y)\in D$ *сандар жұбына қандай да бір f ережесі бойынша z нақты саны сәйкес қойылса, онда D жиынында анықталған* ***екі айнымалды функция берілді*** *дейді де, оны* $z=f(x,y),\ (x,\ y)\in D$ *арқылы белгілейді.*

D - функцияның ***анықталу жиыны (аймағы)*** деп аталады.

Екі айнымалды функция - ***кесте*** немесе ***аналитикалық*** тәсіл арқылы (жоғарыдағы (А), (Б), (В) сияқты) берілуі мүмкін. Мысалы,

y \ x	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

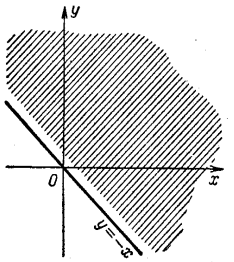
Бұл кестеде, жол мен баған қиылысында, берілген *x* пен *y* сандарының көбейтінділеріне сәйкес функция мәні *S* жазылған.

1-мысал. $z=\sqrt{4-x^2+2x-y^2+4y}$ функциясының анықталу жиыны $4-x^2+2x-y^2+4y\ge 0 \Leftrightarrow 4-(x-1)^2-(y-2)^2\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2\le 4$ теңсіздігін қанағаттандыратын, $(x,y)\in R^2$ нүктелер жиыны. Бұл теңсіздікті ((2)-теңдікті қараңыз)

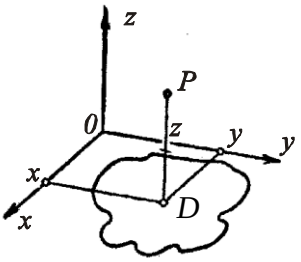
$(x-1)^2+(y-2)^2\le 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\le 2 \Leftrightarrow \|(x,y)-(1;2)\|_{R^2}\le 2$

түрлерінде жазуға болады. Бұдан берілген функцияның анықталу жиыны - радиусі $r=2$, центрі $(1;2)$ нүктесі болатын екі өлшемді шар ((*)–қараңыз), яғни дөңгелек болатынын көреміз**.**

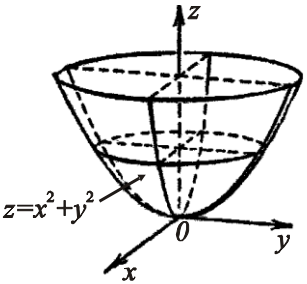
2-мысал. $z=\ln(x+y)$ функциясының D анықталу жиынын $D=\{(x,y)\in R^2:\ x+y>0\}$ немесе $D=\{(x,y)\in R^2:\ y>-x\}$ түрінде жазуға болады. Бұл $y=-x$ түзуінің үстіндегі жарты жазықтық (түзу бойындағы нүктелер D аймағына жатпайды (1-сурет). $z=f(x,y)$ функциясының **графигі** деп, абсциссалары мен ординаттары сәйкес х пен у мәндері, ал аппликатасы z мәні болатын $\mathbf{P}(x,y,z)\in R^3$ нүктелер жиынын (2-сурет) айтады. Мысалы, $z=x^2+y^2$ функциясының графигі – айналу параболоиды (3-сурет). Функцияны **графиктік тәсілмен беру** – осы функцияның графигін көрсету деген сөз.



1-сурет



2-сурет



3-сурет

Екі айнымалды функция анықтамасын үш немесе одан да көп айнымалды функциялар үшін жалпылауға болады.

Анықтама. *Егер әрбір реттелген* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ *сандар жүйесіне* (әрбір $\mathbf{P}(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ нүктесіне) *қандай да бір f ережесі бойынша* $w = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\mathbf{P})$ *нақты саны сәйкес қойылса, онда D жиынында анықталған n айнымалды* $f : R^n \to R$ ***сандық функция*** *берілді дейді.*

D жиыны $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясының **анықталу жиыны (аймағы)**, ал $E = \{w \in R : \ w = f(\mathbf{P}), \ \mathbf{P} \in D\}$ – функкцияның **мәндер жиыны** деп аталады.

▼ Мысалы, $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$ төрт айнымалды функциясының анықталу жиыны –

$$D = \{(x, y, z, u) \in R^4 : \ 1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geq 0\}$$

немесе $D = \{(x, y, z, u) \in R^4 : \ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 1\} =$

$$= \{(x, y, z, u) \in R^4 : \ \|(x, y, z, u) - (0, 0, 0, 0)\|_{R^4} \leq 1\}$$ жиыны.

Бұл – радиусі $r = 1$, центрі $\mathbf{O}(0, 0, 0, 0)$ нүктесі болатын шар ((*)–теңсіздігін қараңыз);

Функцияның мәндер жиыны $E = [0, 1] \subset R$ кесіндісі. ▲

Келесі

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, w) = 0 \qquad (10)$$

жазуы $x_1, x_2, ..., x_n, w$ айнымалдарының арасында функциялық байланыс бар екенін жалпы түрде көрсетеді, яғни осы айнымалдардың қандайда біреуі мысалы, w – қалған айнымалдардың функциясы. Бұл жағдайда, ***функция*** (10) теңдеу арқылы ***айқын емес түрде берілді*** дейді.

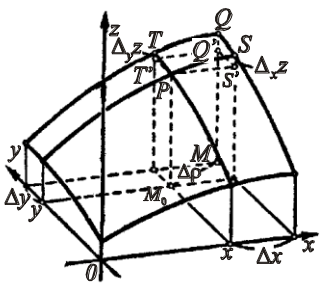
9.1.3. Функцияның дербес және толық өсімшелері. Шек және үзіліссіздік. Қандай да бір бетті анықтайтын $z = f(x, y)$ функциясы берілсін. Егер y аргументіне тұрақты y_0 мәнін беріп,

тек x-ті ғана өзгертіп отырсақ, онда z тәуелсіз бір айнымалды x-тің функциясы болар еді $z = f(x, y_0)$. Бұл жағдайда бір айнымалды функцияны зерттеудің белгілі әдістерін қолданып, z шамасының x-ке тәуелді өзгеру сипатын ала аламыз: $z = f(x, y)$ беті мен OXZ-ке параллель $y = y_0$ жазықтығының қиылысу сызығы PS (4-сурет).

Егер x-ке Δx өсімшесін берсек, онда оған сәйкес z те өсімшеге ие болады. Оны функцияның (x, y) **нүктедегі x бойынша дербес өсімшесі** дейді де, $\Delta_x z$ арқылы белгілейді:

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$

(4-суретте SS' кесіндісі).



4-сурет

Осы сияқты x-ке тұрақты x_0 мәнін беріп, y-ке тәуелді z-тің өзгеруін сипаттауға болады: $z = f(x, y)$ беті мен OYZ-ке параллель $x = x_0$ жазықтығының қиылысу сызығы – PT. Егер y-ке Δy өсімшесін берсек, онда z шамасы y **бойынша** $\Delta_y z$ **тең дербес өсімшеге** ие болады (4-суретте TT' кесіндісі): $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Егер x пен y аргументтеріне сәйкес Δx және Δy өсімшелерін берсек, онда z үшін жаңа Δz өсімшесін аламыз. Ол **функциясының** (x, y) **нүктедегі толық өсімшесі** деп аталады: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Ескерту. Жалпы жағдайда толық өсімше дербес өсімшелердің қосындысына тең емес, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$. **Мысалы,** $z = xy$ функциясы үшін,

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y \cdot \Delta x, \qquad \Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$$

аламыз. Ал оның (1;2) нүктедегі аргументтердің $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,3$ өсімшелеріне сәйкес келетін дербес және толық өсімшелері

$\Delta_x z = 0,4$, $\Delta_y z = 0,3$, $\Delta z = 0,76$ тең. Бұдан $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ екенін көреміз.

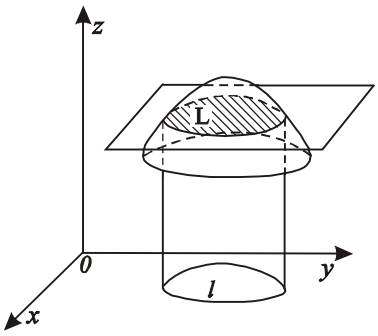
$n \geq 3$ *айнымалды функцияның толық және дербес өсімшелерінде осы сияқты анықтауға болады.*

z функциясының мәнін тұрақты етіп бекітіп қойып та $z = f(x, y)$ функциясын зерттеуге болады. Мысалы, $z = z_0$ деп алсақ,

$$f(x, y) = z_0 \qquad (11)$$

теңдеуі *x* пен *y* айнымалдарының арасындағы тәуелділікті береді ($z = z_0$). Бұл жағдайда $z = f(x, y)$ беті мен *OXY*-ке параллель $z = z_0$ жазықтығының *L* қиылысу сызығын аламыз (5-сурет).

(11) теңдеу *OXY* жазықтығында $f(x, y) = 0$, $z_0 = 0$ түрінде жазылады, ал бұл теңдеу *L* сызығының *OXY* жазықтығындағы *l* проекциясын анықтайды. Координаттары (x, y) болатын нүкте *l* қисығының бойымен қозғалғанда *z* функциясы тұрақты z_0 мәнін сақтайды.



5-сурет

Анықтама. *Егер* $(x, y) \in l$ *нүктелерінде* $z = f(x, y)$ *функциясының мәні тұрақты болса, онда* $l \subset OXY$ *қисығы (яғни,* $l = \{(x, y) : f(x, y) = z_0\} \subset OXY$ *қисығы) осы функцияның* ***деңгей сызығы*** *деп аталады.*

Деңгей сызығы қолданбалы ғылымда жиі қолданады. Мысалы, жер нүктесінің теңіз деңгейінен биіктігін екі айнымалды функция ретінде қарастырып, картаға осы функцияның деңгей сызықтарын салады. Оларды топографияда **горизонтальдар (жатық сызықтар)** деп атайды. Горизонтальдардың орналасуына қарай жер биіктігінің өзгеруін көруге болады.

Анықтама. *$f(x,y)$ функциясы $\mathbf{P}_0(x_0,y_0)$ нүктесінің белгілі бір $U(\mathbf{P}_0)$ маңайында анықталған болсын, ($\mathbf{P}_0(x_0,y_0)$ нүктесінде функцияның анықталуы міндетті емес, яғни $x \neq x_0$ немесе $y \neq y_0$).*

Егер әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы $0 < |\mathbf{P}(x,y) - \mathbf{P}_0(x_0,y_0)| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $\mathbf{P}(x,y)$ нүктелері үшін $|f(\mathbf{P}) - A| < \varepsilon$ шарты орындалатындай $\delta > 0$ ***оң саны табылса,*** *онда A* ***саны f функциясының*** *$\mathbf{P}_0(x_0,y_0)$* ***нүктесіндегі шегі*** *деп аталады да,*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \quad \textit{немесе} \quad \lim_{\mathrm{P}\to \mathrm{P}_0} f(\mathbf{P}) = A \quad \textit{деп жазылады.}$$

n айнымалды функция шегі де дәл осылай анықталады.

Назарыңызға! Анықтамадағы $0 < |\mathbf{P}(x,y) - \mathbf{P}_0(x_0,y_0)| < \delta$ теңсіздігіндегі норманы жоғарыдағы ескертуге сәйкес жазсақ: $0 < |\mathbf{P}(x,y) - \mathbf{P}_0(x_0,y_0)|_{R^2} < \delta$ немесе $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ болады. Бұл теңсіздіктерді қанағаттандыратын $\mathbf{P}(x,y)$ нүктелер жиыны – центрі алынып тасталған радиусі δ тең ашық шар (дөңгелек).

Ал $|f(\mathbf{P}) - A| < \varepsilon$ теңсіздігіндегі норманы жоғарыдағы ескертуге сәйкес жазсақ, $|f(\mathbf{P}) - A|_{R^1} < \varepsilon$ болады. Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын $\mathbf{P}(x,y)$ нүктелер жиыны – $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ түріндегі интервал.

3.4.2. п. қарастырылған бір айнымалды функция шегінің қасиеттері көп айнымалды функция шегі үшін де орындалады.

Егер A саны $f(\mathbf{P}) = f(x,y)$ функциясының $\mathbf{P}_0(x_0,y_0)$ нүктесіндегі шегі болса, онда ол сан $f(\mathbf{P}_0 + \mathbf{h})$ функциясының $\mathbf{h}$ бойынша нөл нүктесіндегі шегі: $\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0} f(\mathbf{P}_0 + \mathbf{h}) = A$, және керісінше.

$\mathbf{P}_0(x_0,y_0)$ нүктесінің белгілі бір маңайында анықталған f функциясын қарастырамыз (оның $\mathbf{P}_0$ нүктесінде анықталуы шарт емес).

Кез келген $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ бірлік вектор және $t \geq 0$ скаляр шамасы арқылы алынған $\mathbf{P}_0 + t\boldsymbol{\omega}$ түріндегі нүктелер жиыны P_0-ден шығатын $\boldsymbol{\omega}$ ***вектор бағытындағы сәулені*** құрайды. Әрбір $\boldsymbol{\omega}$ бірлік векторы үшін t айнымалға тәуелді

$$f(\mathbf{P}_0 + t\boldsymbol{\omega}) = f(x_0 + t\omega_1,\ y_0 + t\omega_2), \qquad 0 < t < \delta_\omega$$

функциясын қарастыруға болады (мұндағы δ_ω саны $\boldsymbol{\omega}$ векторына тәуелді сан).

Егер $\lim\limits_{t\to 0, t>0} f(\mathbf{P}_0 + t\boldsymbol{\omega}) = \lim\limits_{t\to 0, t>0} f(x_0 + t\omega_1,\ y_0 + t\omega_2)$ шегі бар болса, онда оны f **функциясының $\mathbf{P}_0$ нүктесіндегі $\boldsymbol{\omega}$ вектор бағыты бойынша шегі** деп атайды.

Анықтама. *Егер* $f(\mathbf{P}) = f(x, y)$ *функциясы* $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің белгілі бір маңайында және осы* $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің өзінде анықталып,*

$$\lim_{\mathrm{P}\to P_0} f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{P}_0) \quad \textit{немесе}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{12}$$

теңдігі орындалса, онда $f(\mathbf{P}) = f(x, y)$ ***функциясы*** $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ ***нүктесінде үзіліссіз*** *деп аталады.*

Егер $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ деп алсақ, онда (12) теңдікті

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{12′}$$

немесе

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = 0 \tag{12″}$$

түрінде де жазуға болады. Сонымен (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз функцияның осы нүктедегі шегі функцияның (x_0, y_0) нүктесіндегі мәніне тең болатынын көреміз.

Егер $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ деп алсақ, онда $(\Delta\rho \to 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $(\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0)$ парапарлықты пайдаланып, (12″) теңдікті келесі түрде жаза аламыз:

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0, \quad \Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \qquad (12''')$$

Аймақтың әрбір нүктесінде үзіліссіз функция **осы аймақта үзіліссіз** деп аталады.

Шектің қасиеттерінен $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ *нүктесінде үзіліссіз* $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ *функцияларының қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және (*$\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ *болса) қатынасы да осы нүктеде үзіліссіз функция болатыны шығады.*

1-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясы *x* пен *y*-тің кез келген мәндерінде, яғни *OXY* жазықтығының әрбір нүктесінде үзіліссіз, өйткені

$$\Delta z = \left[(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2\right] - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2) = 0.$$

2-мысал. $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ функциясы $x = 0$, $y = 0$ нүктесінен басқа барлық нүктелерде анықталған. $y = k \cdot x$ (k – тұрақты сан) түзуі бойындағы *z* мәндерін қарастырсақ, $z = \dfrac{2x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \dfrac{2k}{1 + k^2}$. Бұдан координат басы арқылы өтетін әрбір түзу бойындағы *z* мәндері *k* санына тәуелді белгілі бір тұрақты мәнге ие болатынын көреміз. Сондықтан $\mathbf{O}(0,0)$ нүктесіне әртүрлі түзулермен «келетін» болса (яғни $(x,y) \to (0,0)$), онда функция шегі әртүрлі мәнге ие болады, демек, $\mathbf{O}(0,0)$ нүктесінде $f(x,y)$ функциясының шегі жоқ. Сондықтан бұл нүктеде функция үзілісті. Алайда бұл функция жазықтықтың қалған нүктелерінде үзіліссіз болатынын көру қиын емес.

1-ескерту. Екі айнымалды функцияның үзіліс нүктелері тұтас

сызықтарды құрауы да мүмкін.

2-ескерту. Тәуелсіз айнымалдарының саны екіден көп болатын функция үзіліссіздігі де дәл осы сияқты анықталады.

§ 9.2. Туындылар мен дифференциалдар

9.2.1. Дербес туындылар. $f(x,y)$ ***функциясының*** $\mathbf{P}(x,y)$ ***нүктесіндегі*** x ***бойынша дербес туындысы*** деп, $\Delta_x z$ дербес өсімшесінің Δx өсімшесіне қатынасының $\Delta x \to 0$ ұмтылғандағы шегін (егер ол шек бар болса) айтады да, z'_x, $f'_x(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ символдарының біреуімен белгілейді. Сонымен, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$.

$f(x,y)$ **функциясының** $\mathbf{P}(x,y)$ **нүктесіндегі** y **бойынша дербес туындысы** да дәл осылай анықталады және ол z'_y, $f'_y(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ символдарының біреуімен белгіленеді:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Бұл анықтамадан дербес туындыларды есептеу ережелері бір айнымалды функцияның туындыларын есептеу ережелерімен бірдей екенін көреміз. Әрине, бұл жағдайда дербес туынды айнымалдардың қайсысы бойынша ізделініп отырғаны есте болуы керек, ал қалған айнымалдар тұрақты сан рөлін атқарады.

Мысал. $z = x^y$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

▼ z функциясын x бойынша дифференциалдасақ, ол **дәрежелік**, ал y бойынша дифференциалдасақ, **көрсеткіштік** функция болып қарастырылады. Сондықтан

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x. \qquad \blacktriangle$$

Ескерту. $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ – кез келген бірлік вектор болсын. Егер $\dfrac{\partial f}{\partial \omega} = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \dfrac{f(x+t\omega_1, y+t\omega_2) - f(x,y)}{t}$ шегі бар болса, онда ол $f(x,y)$ **функциясының** (x,y) **нүктесіндегі ω бағыты бойынша туындысы** деп аталады.

x немесе *y* өсінің оң бағыты бойынша туынды сәйкес *x* немесе *y* бойынша оң жақ дербес туындымен беттесетінін, ал *x* немесе *y* өсінің сол бағыты бойынша туындының таңбасы сәйкес *x* немесе *y* бойынша сол жақ дербес туындының таңбасына қарама-қарсы болатынын ескеру керек.

9.2.2. Толық дифференциал. $G \subset R_2$ ашық жиынында $z = f(x,y)$ функциясы берілсін және оның $(x,y) \in G$ нүктесінде үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. Бұдан (x,y) нүктесінің белгілі бір маңайында осы дербес туындылардың бар болатыны (олар (x,y)-тен басқа нүктелерде үзіліссіз болмауы да мүмкін) шығады. $(\Delta x, \Delta y)$ өсімшесін $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ шартын қанағаттандыратындай, ал $\delta > 0$ санын $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ нүктесі жоғарыдағы көрсетілген маңайдан шығып кетпейтіндей жеткілікті аз етіп алып, осы $(\Delta x, \Delta y)$ өсімшеге сәйкес келетін *f* функциясының өсімшесін қарастырайық: $\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y) =$

$$= \big[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) \big] + \big[f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \big].$$

Мұнда бірінші квадрат жақшада тұрған өрнекті тек *x*-ке тәуелді функцияның екі мәнінің айырымы (екінші аргументі тұрақты, $y+\Delta y$ мәні сақталады), ал екінші квадрат жақшада тұрған өрнекті тек *y*-ке тәуелді функцияның екі мәнінің айырымы (*x* тұрақты) етіп қарастыруға болады. Бұл айырымдарға Лагранждың орта мән туралы теоремасын қолданып,

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \Delta y \qquad (1)$$

аламыз (мұндағы $\bar{x} \in (x, x+\Delta x)$, $\bar{y} \in (y, y+\Delta y)$). Дербес туындылар (x, y) нүктесінде үзіліссіз болғандықтан және $(\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0) \Rightarrow (\bar{x} \to x,\ \bar{y} \to y)$ екенін ескерсек,

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \end{cases}$$

болады. Бұл теңдіктерді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \varepsilon_1, \\ \dfrac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \varepsilon_2. \end{cases} \qquad (2)$$

түрінде жазуға болады. Мұнда $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ нөлге ұмтылғанда ε_1 мен ε_2 шамалары нөлге ұмтылады, яғни

$$(\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0) \Rightarrow (\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0). \qquad (3)$$

(2) теңдіктерді (1) теңдікке қойсақ,

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \qquad (1')$$

аламыз. Бұл теңдіктегі соңғы екі қосылғыштардың қосындысы $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ шамасымен салыстырғанда жоғарғы ретті ақырсыз кішкене шама: $\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = o(\Delta\rho)$, $\Delta\rho \to 0$.

Шынында да, $\Delta x,\ \Delta y \le \Delta\rho$ болатындықтан, $\Delta\rho \to 0$ ұмтылса, онда ((3)-ті қараңыз) $\dfrac{|\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y|}{\Delta\rho} \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0$, $\Delta\rho \to 0$.

Сонымен мынадай маңызды теореманы дәлелдедік.

1-теорема. *Егер* $z = f(x, y)$ *функциясының* (x, y) *нүктесінде үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда оның осы нүктедегі* $(\Delta x, \Delta y)$*-ке сәйкес өсімшесін*

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta\rho), \quad \Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0 \qquad (4)$$

түрінде жазуға болады.

(4) теңдіктегі дербес туындылар $\Delta x, \Delta y$-ке тәуелді емес. Сондықтан теорема шартынан функция өсімшесін

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta\rho), \quad \Delta\rho \to 0 \qquad (5)$$

(мұндағы A мен B сандары, Δx, Δy-ке тәуелді емес) түрінде жазуға болатыны шығады.

Анықтама. *Егер* f *функциясының* (x, y) *нүктесіндегі* $(\Delta x, \Delta y)$*-ке сәйкес өсімшесін (5) теңдік түрінде жазуға болатын болса, онда* f ***функциясы*** (x, y) ***нүктесінде дифференциалданады*** *дейді.*

(5) теңдіктегі $A\Delta x + B\Delta y$ қосылғышы – $\Delta x, \Delta y$ өсімшелеріне қатысты сызықтық функция. Ол Δf өсімшесінің **басты сызықтық бөлігі** деп аталады. Ал қалған қосылғышы $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерімен күрделі тәуелділікте болады, және ол $\Delta x, \Delta y$ нөлге ұмтылғанда, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ шамасымен салыстырғанда нөлге жылдамырақ ұмтылады, яғни $\frac{o(\Delta\rho)}{\Delta\rho} \to 0, \ \Delta\rho \to 0$.

Егер f функциясы (x, y) нүктесінде дифференциалданса, яғни (5) теңдік орындалса, онда оның осы нүктеде $\frac{\partial f}{\partial x} = A, \ \frac{\partial f}{\partial y} = B$ теңдіктері орындалатындай дербес туындылары болатынын көреміз. Мысалы, (5) теңдіктен $\Delta x = h$, $\Delta y = 0$ деп алсақ, онда $(\Delta\rho = h \to 0)$ $\Delta z = \Delta_x z = Ah + o(h)$, $h \to 0$, ал бұдан $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta_x z}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = A$ аламыз.

2-теорема. *f функциясы нүктеде дифференциалдануы үшін оның осы нүктеде* ***дербес туындыларының бар болуы қажетті,*** *ал* ***үзіліссіз дербес туындыларының бар болуы жеткілікті.***

Назар аударыңыз! Бір айнымалды *f* функциясының *x* нүктесінде дифференциалдануы үшін оның осы нүктеде ақырлы туындысының бар болуы қажетті және жеткілікті болатын еді.

Анықтама. Егер *f* функциясы (x, y) нүктесінде дифференциалданса, онда оның осы нүктедегі өсімшесінің сызықты бас бөлігі *f* функциясының (**толық**) **дифференциалы** деп аталады да, *dz* немесе *df* арқылы белгіленеді:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y . \qquad (6)$$

Мұндағы $\Delta x, \Delta y$ – тәуелсіз айнымалдар өсімшелерін *x* пен *y* **тәуелсіз айнымалдарының дифференциалдары** деп атайды және оларды *dx* және *dy* арқылы белгілейді. Онда толық дифференциал келесі түрге ие болады:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy . \qquad (7)$$

Мысал. $z = xy$ функциясының (2;3) нүктесіндегі дифференциалын және өсімшесін $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$ үшін табу керек.

▼ Есептейміз:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y ,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y .$$

Олай болса

$$\Delta z = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72 ; \quad dz = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,70. \quad ▲$$

Назар аударыңыз! *Көп айнымалды функцияның дербес туындыларының бар болуы бұл функцияның дифференциалдануын қамтамасыз етпейді (яғни жеткіліксіз)!*

Мысалы, $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ функциясын $(0,0)$ нүктесінде қарастырайық.

▼ Егер $y=0$ болса, онда $z=x$ болатындықтан, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$ аламыз. Дербес жағдайда $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=1$. Осы сияқты $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=1$. Екі дербес туынды да $(0,0)$ нүктесінде бар және олар 1-ге тең. Бірақ $z=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ *функциясы* $(0,0)$ *нүктесінде дифференциалданбайды*!

Шынында да, егер бұл функция $(0,0)$ *нүктесінде* дифференциалданса, онда ((7) қараңыз) $dz(0,0)=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}dx+$

$+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}dy=dx+dy$ тең болар еді.

(4) пен (6) теңдіктерден

$$\Delta z=dz+\mathrm{o}(\Delta\rho),\quad \Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0,$$

ал бұдан (функция өсімшесі мен дифференциалының арасындағы қатыстан) $\Delta z-dz=o(\Delta\rho)$, $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$, аламыз. Олай болса, біздің мысалымыз үшін

$$\Delta z-(dx+dy)=o(\Delta\rho),\ \Delta\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}\to 0,$$

яғни келесі теңдік орындалуға тиіс:

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta z-(dx+dy)}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=0,\ \sqrt{dx^2+dy^2}\to 0, \qquad (8)$$

Бірақ егер $dx=dy$ деп алсақ (координаттық бұрыштың биссектрисасы бойынша шек алсақ),

$$\Delta z(0,0)=z(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-z(0,0)=z(\Delta x,\Delta y)-z(0,0)=$$

$$=\sqrt[3]{\Delta x^3+\Delta y^3}-\sqrt[3]{0^3-0^3}=\sqrt[3]{dx^3+dy^3}=\sqrt[3]{dx^3+dx^3}=\sqrt[3]{2}dx$$

болады да,

$$\frac{\Delta z-(dx+dy)}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{\sqrt[3]{2}dx-(dx+dx)}{\sqrt{dx^2+dx^2}}=\frac{(\sqrt[3]{2}-2)dx}{\sqrt{2}dx}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

аламыз. Ал бұл (8) теңдіктің орындалмайтынын көрсетеді. Бұл қарама-қайшылық қарастырылып отырған функция $(0,0)$ нүктесінде **дифференциалданбайтынын** көрсетеді. Мұның себебі $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларының $(0,0)$ нүктесінде **үзіліссіз болмағандығынан** екен! Расында да, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ (9) шектің нәтижесі $(x,y)\to(0,0)$ ұмтылу тәсіліне тәуелді, яғни (9) шек жоқ екенін көрсетейік:

1) $y=x$ болса, (9) шек $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$-ке тең;
2) $y=0$ болса, ол 1-ге тең;
3) $y=-x$ болса, (9)-шек ақырсыздыққа ұмтылады, т.с.с.

Ал бұл жағдай $(0,0)$ нүктесі $\frac{\partial z}{\partial x}$ туындысының үзіліс нүктесі екенін көрсетеді.

$\frac{\partial z}{\partial y}$ туындысы туралы да осыны айтуға болады. ▲

(5) теңдіктен, егер функция нүктеде дифференциалданса, онда оның осы нүктеде үзіліссіз болатыны шығады.

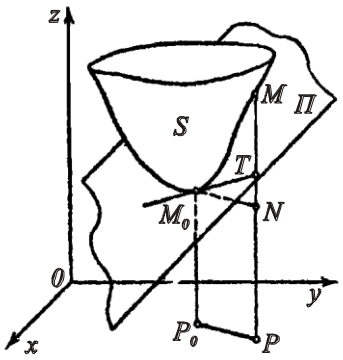
Осыған дейінгі пайымдаулар мен анықтамаларды аргумент-терінің саны кез келген функциялар үшін тиісінше жалпылауға болады.

9.2.3. Бетке жанама жазықтық. Толық дифференциалдың геометриялық көрінісі. S беті $S: z = f(x,y)$ функциясы арқылы берілсін және бұл функцияның x, y жазықтығында жатқан қандай да бір аймақта үзіліссіз дербес туындылары бар болсын.

S бетінің $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі **жанама жазықтығы** деп

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \qquad (11)$$

теңдеуімен берілген жазықтықты айтады. Мұнда $z_0 = f(x_0, y_0)$, ал



6-сурет

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ арқылы f функциясының дербес туындыларының $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ нүктедегі мәндері белгіленген.

(11) жазықтықты $П$ арқылы белгілеп, оның қасиетін қарастырайық.

OXY жазықтығында $\mathbf{P}(x,y)$ нүктесін $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ нүктесіне «жақын» етіп алайық (6-сурет). $\mathbf{P}(x,y)$ нүктесі арқылы өтетін z өсіне параллель түзу $П$ жазықтығының T нүктесінен, ал S бетінің M нүктесінен өтеді. M нүктесінің аппликатасы $z = f(x,y)$, ал T нүктесінің аппликатасы

$$z = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

болғандықтан, M мен T нүктелерінің арақашықтығы

$$|MT| = f(x,y) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0). \quad (12)$$

$\mathbf{P}$ мен $\mathbf{P}_0$ нүктелерінің арақашықтығы

$\rho = |\mathbf{PP}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ тең.

Шарт бойынша, f функциясының (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз туындылары бар болғандықтан, f функциясы осы нүктеде дифференциалданады. Сондықтан (12) теңдіктің оң жағындағы өрнек (функция өсімшесі мен дифференциалының айырымы ретінде) ρ-мен салыстырғанда нөлге жылдамырақ ұмтылады: $|MT| = o(\rho), \quad \rho \to 0.$

Сонымен S *бетінің* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *нүктесіндегі жанама жазықтық мынадай қасиетке ие болады екен*: ***S бетінің кез келген*** $(x, y, f(x,y))$ ***нүктесінен*** Oz ***өсінің бағыты бойынша*** $П$ ***жазықтыққа дейінгі қашықтық*** – $\mathbf{P}(x,y)$, $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ ***нүктелерінің арақашықтығымен салыстырғанда ақырсыз кішкене шама.***

(11) теңдіктің оң жағы f функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі $(x-x_0, y-y_0)$ өсімшеге сәйкес $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y-y_0)$ дифференциалы, ал сол жағы – жанама $П$ жазықтықтың аппликатасының сәйкес өсімшесі.

Олай болса f функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі $(x-x_0,\ y-y_0)$ өсімшеге сәйкес **дифференциалының геометриялық мағынасы:** $z = f(x,y)$ бетіне (x_0, y_0) нүктесінде жүргізілген жанама жазықтық нүктесінің **аппликатасының** осы $(x-x_0,\ y-y_0)$ өсімшеге сәйкес **өсімшесі**.

Беттің **нормалі** деп, жанама жазықтық пен беттің жанау нүктесі арқылы өтетін, жанама жазықтыққа перпендикуляр түзуді айтады.

Егер S беті $z = f(x,y)$ функциясы арқылы берілсе, онда оның $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі ***нормалінің теңдеуі*** мына түрде жазылады:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}. \qquad (13)$$

Егер S беті $F(x,y,z) = 0$ теңдеуімен берілсе, онда оның $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі ***жанама жазықтығының теңдеуі***

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+ \\ +F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \tag{14}$$

ал нормалінің теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \tag{15}$$

түрлерінде жазылады.

Ескерту. (14), (15) формулалары алдымызда §9,4.3п. дәлелденеді.

9.2.4. Толық дифференциалдың жуықтап есептеулерге қолданылуы. $f(x,y)$ функциясының аргументтерінің берілген $M_0(x_0,y_0)$ нүктедегі өсімшелері Δx пен Δy жеткілікті кішкене шама деп алып, осы функцияның толық өсімшесі мен толық дифференциалы арасында жуық теңдік жазуға болады:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx dz$$

немесе

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Бұдан $x_0+\Delta x=x$, $y_0+\Delta y=y$ деп алып, келесі жуық теңдікті жаза аламыз:

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{16}$$

Біз (16) формуладан $f(x,y)$ функциясын (x_0,y_0) нүктесінің маңайында **сызықтық функциямен** алмастыруға болатынын көреміз. Геометриялық тұрғыдан ол $z=f(x,y)$ бетінің шағын бөлігі осы бөліктің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтың сәйкес бөлігіне ауысқанын көрсетеді.

(16) формула $f(x,y)$ функциясының мәндерін (x-ті x_0-ге, ал y-ті y_0-ге жеткілікті жақын алсақ) белгілі $f(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ мәндері арқылы жуықтап есептеуге мүмкіндік береді.

Мысалы, $z = \ln(xy + 2y^2 - 2x)$ функциясының (1;1) нүкте маңайындағы мәндерін есептеуге арналған жуық формуласын жазайық.

▼ Мұнда $x_0 = 1,\ y_0 = 1.$ Біртіндеп есептейміз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{xy + 2y^2 - 2x}(y - 2), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy + 2y^2 - 2x}(x + 4y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 5.$$

$z(1,1) = 0$ болғандықтан, $\ln(xy + 2y^2 - 2x) \approx -(x-1) + 5(y-1).$ ▲

Толық дифференциалды тағы басқа да жуықтап есептеулерге қолдануға болады. Бірақ біз оларға тоқталмаймыз. Тек осы айтылғанның барлығын кез келген көп айнымалды функцияларға да жасауға болатынына назарларыңызды аударамыз.

§ 9.3. Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау

9.3.1. Күрделі функция туындысы. Толық туынды.

$$z = F(u, v) \tag{1}$$

теңдеуіндегі u және v айнымалдары тәуелсіз x және y айнымалдарының функциялары болсын

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y). \tag{2}$$

Онда z, тәуелсіз x және y айнымалдарының **күрделі функциясы** болады. Егер z-ті тікелей x, y арқылы өрнектесек,

$$z = F\left[\varphi(x, y), \psi(x, y)\right] = \Phi(x, y) \tag{3}$$

аламыз.

Енді $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ функцияларының барлық аргументтері бойынша дербес туындылары үзіліссіз деп алып, **(3)**

теңдеуді пайдаланбастан, (1)-(2) теңдеулері арқылы $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ есептейік. Ол үшін *y*-тің мәнін өзгертпестен, *x* аргументіне Δx өсімшесін береміз. Онда Φ функциясы $\Delta_x \Phi$ дербес өсімшесіне, ал *u* мен v сәйкес $\Delta_x u$ және $\Delta_x v$ өсімшелеріне ие болады. Сондықтан өз кезегінде $z = F(u,v)$ функциясы $\Delta F(u,v)$ өсімшесіне ие болады:

$$\Delta F(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + o(\Delta\rho), \quad \Delta\rho = \sqrt{(\Delta_x u)^2 + (\Delta_x v)^2} \ .$$

Енді $\Delta F(u,v)$ өсімшесі $\Delta_x \Phi$ тең екенін ескеріп ((1), (3) теңдіктерді қараңыз), соңғы теңдіктің барлық мүшелерін Δx-ке бөлеміз:

$$\frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x} = \frac{\Delta F(u,v)}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \frac{o(\Delta\rho)}{\Delta x} . \qquad (4)$$

Егер $\Delta x \to 0$ ұмтылса, онда

$$\frac{o(\Delta\rho)}{\Delta x} = \frac{o(\Delta\rho)}{\sqrt{(\Delta_x u)^2 + (\Delta_x v)^2}} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta_x u)^2 + (\Delta_x v)^2}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{o(\Delta\rho)}{\Delta\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)^2} \to 0, \qquad \Delta x \to 0.$$

Өйткені $\Delta x \to 0$ ұмтылса, *u* мен v үзіліссіз болғандықтан, $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x v \to 0$, демек, $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta_x u)^2 + (\Delta_x v)^2} \to 0$;

ал $\sqrt{\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)^2} \to \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$. Олай болса (4) теңдіктен $\Delta x \to 0$ ұмтылдыра отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (5)$$

Егер x аргументінің мәнін өзгертпей y айнымалысына Δy өсімшесін берген болсақ, онда дәл жоғарыдағыдай пайымдаулар арқылы келесі теңдікті алған болар едік:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (5')$$

Мысалы, $z=e^u\sin v,\quad u=xy,\quad v=x+y$ берілсін. (5) пен (5′) пайдаланып табамыз: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=$

$=e^{xy}\left[y\sin(x+y)+\cos(x+y)\right];$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}\left[x\sin(x+y)+\cos(x+y)\right].$

Мұнда функциялардың көбейтіндісінің туындысын табу ережесін қолдануға да болар еді. Мысалы, x айнымал бойынша дербес туындыны табайық. Ол үшін берілген функцияны келесі түрде $z=e^{xy}\sin(x+y)$ жазып аламыз да, көбейтіндінің туындысын табу ережесін қолданамыз

$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{xy}\right)_x'\cdot\sin(x+y)+e^{xy}\cdot\left(\sin(x+y)\right)_x'=e^{xy}\cdot y\cdot\sin(x+y)+$

$+e^{xy}\cos\left(x+y\right)=e^{xy}\left[y\sin(x+y)+\cos(x+y)\right].$ ▲

(5) пен (5′) формулалар тәуелсіз аргументтерінің және «аралық» айнымалдардың саны екіден көп болатын функцияларға да осы сияқты жалпыланады. Мысалы, аргументтері $u,v,...,w$ болатын z функциясы беріліп, ол аргументтер тәуелсіз $x,y,...,t$ айнымалдарының функциялары болса, онда:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Дербес жағдайда, $u,v,...,w$ аргументтері тәуелсіз бір айнымалды x-тің функциялары болса, онда іс жүзінде z тек осы бір x айнымалдың функциясы болады, сондықтан да $\frac{dz}{dx}$ туындысын табу туралы сұрақ қоюға болады. Бұл туынды жоғарыдағы теңдіктердің біріншісі бойынша есептеледі және оны **толық туынды** деп атайды:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}. \qquad (6)$$

Егер бұл формулада $u=x$ деп алсақ, онда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

Мысалы, $z=x^2+\sqrt{y}$, $y=\sin x$ берілсе, онда $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$; $\frac{dy}{dx}=\cos x$, демек, $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x.$

9.3.2.Айқындалмаған функциялардың туындысы. Тәуелсіз x-тің қандай да бір y функциясы

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

теңдеуімен айқын емес түрде берілсін.

Теорема. Координаттары (1) теңдеуді қанағаттандыратын (x,y) нүктесі G аймағында жатсын. *Егер G аймағында* $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ *функциялары үзіліссіз, ал* $F'_y(x,y)\neq 0$ *болса, онда* $y=y(x)$ *функциясының туындысы бар және*

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\ . \qquad (2)$$

Дәлелдеуі. x-тің қандай да бір мәніне функцияның y мәні сәйкес келсе, онда

$$F(x,y)=0 \qquad (3)$$

теңдігі орындалады. x-ке Δx өсімшесін берсек, y функциясы Δy өсімшесін алады және аргументтің $x+\Delta x$ мәніне функцияның $y+\Delta y$ мәні сәйкес келеді. Бұл мәндер (3) теңдікті қанағаттандыратындықтан, яғни $F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0$ орындалатындықтан, келесі теңдікті жаза аламыз:

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,y)=0\,. \qquad (4)$$

Бұл теңдіктің сол жағы екі айнымалды функцияның толық өсімшесі. F'_x, F'_y дербес туындылары G аймағында үзіліссіз болғандықтан,

$$\Delta F=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)=$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\cdot\Delta x+\varepsilon_2\cdot\Delta y\,.$$

Бұл теңдікке (4) теңдікті қолданып, $\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\cdot\Delta x+$

$+\varepsilon_2\cdot\Delta y=0$ аламыз. Соңғы теңдіктен $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ табамыз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\varepsilon_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\varepsilon_2}\,. \qquad (5)$$

Егер мұнда $\Delta x\to 0$ нөлге ұмтылса, онда $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$ нөлге ұмтылады және $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ болғандықтан, (5) теңдіктегі $\Delta x\to 0$ нөлге ұмтылдыра отырып,

$$y'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (6)$$

аламыз. ▲

Мысал. $e^y - e^x + xy = 0$ теңдеуі y-ті x-тің айқын емес функциясы ретінде анықтайды. Мұнда $F(x, y) = e^y - e^x + xy$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Сондықтан (6) формула бойынша $\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}$. ▲

Енді

$$F(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

түріндегі теңдеуді қарастырайық.

Егер қандай да бір аймақтан алынған әрбір x пен y сандар жұбына (7) теңдеуді қанағаттандыратын z-тің бір (немесе бірнеше) мәні сәйкес келсе, онда бұл теңдеу x және y айнымалдарының бір (немесе бірнеше) z функциясын анықтайды.

Мысалы, $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ теңдеуі x, y айнымалдарының екі үзіліссіз z функциясын анықтайды:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

(7) теңдеумен айқын емес түрде анықталған z функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табайық. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ізделінгенде y тұрақты деп есептеледі. Сондықтан (6) формуланы қолданамыз, тек тәуелсіз айнымал x, ал функция z болып саналады:

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{8}$$

Дәл осылай

$$z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{9}$$

Саны кез келген айнымалды айқындалмаған функция үшін де олардың дербес туындылары осылайша анықталады.

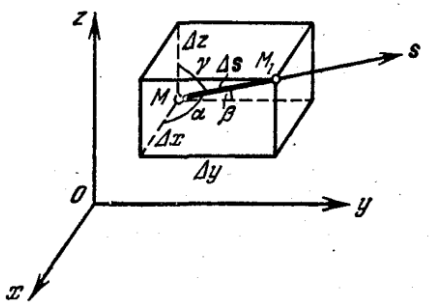
Мысалы, $e^z + x^2 y + z + 5 = 0$ теңдеуі берілсін. Мұнда

$$F(x,y,z) = e^z + x^2 y + z + 5, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$ болады.

§ 9.4. Бағыт бойынша туынды. Градиент және оның қасиеттері. Жанама жазықтық және нормаль

9.4.1. Бағыт бойынша туынды. Үш айнымалды $u = f(x,y,z)$ функциясы және оның барлық бірінші дербес туындылары D аймағында үзіліссіз болсын. Бағыттаушы косинустары $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ тең **S** векторы ($\mathbf{S}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$) берілсін. $u = f(x,y,z)$ функциясының **S** векторы бойынша $M(x,y,z) \in D$ нүктесіндегі туындысын анықтайық (7-сурет). Егер **S** векторының бойынан



7-сурет

$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нүктесін алсақ, онда M және M_1 нүктелерінің арақашықтығы $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ тең болады. Ал $u(x,y,z)$ функциясының толық өсімшесі келесі түрде жазылады

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y + \varepsilon_3 \cdot \Delta z. \qquad (1)$$

Мұндағы ε_1, ε_2, ε_3 шамалары $\Delta S \to 0$ ұмтылғанда нөлге ұмтылады. (1) теңдіктің барлық мүшелерін ΔS -ке бөлейік:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta S} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta S} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta S} + \varepsilon_3 \cdot \frac{\Delta z}{\Delta S}. \qquad (2)$$

Мұнда $\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta$, $\frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma$ болғандықтан, (2) теңдікті келесі түрде жаза аламыз:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma. \qquad (3)$$

$\frac{\Delta u}{\Delta S}$ қатынасының $\Delta S \to 0$ нөлге ұмтылғандағы шегі $u = u(x, y, z)$ функциясының (x, y, z) нүктесіндегі **S *вектор бағыты бойынша туындысы*** деп аталады да $\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial \mathbf{S}}$ арқылы белгіленеді. Бұл туынды (3) теңдіктің $\Delta S \to 0$ нөлге ұмтылғандағы шегіне тең

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{S}} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (4)$$

Назар аударыңыз! *Дербес туындылар – бағыт бойынша туындының дербес жағдайлары.* Мысалы, $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, яғни $\mathbf{S} = \mathbf{i} = (1,0,0) = 1\cdot\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$ болса, онда $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Мысал. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциясының $\mathbf{M}(1,1,1)$ нүктедегі $\mathbf{S} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ вектор бағыты бойынша туындысын табу керек.

▼ **S** векторының бағыттаушы косинустарын табамыз: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(4) формуланы қолданып табамыз,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{S}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cos\gamma =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ . \quad ▲$$

9.4.2. Градиент. $u = f(x, y, z)$ функциясының (x, y, z) нүктесіндегі **градиенті** деп **grad***f* арқылы белгіленетін, келесі векторды айтады

$$\mathbf{grad}f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (5)$$

Осы вектордың қасиеттерін көрсетейік.

(4) формуладан, *u* функциясының $\mathbf{S}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ бірлік векторының бағыты бойынша туындысы **grad***u* және $\mathbf{S}^0$ векторларының скаляр көбейтіндісі екенін көреміз:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{S}^0} = (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{S}^0)\,. \qquad (6)$$

Басқаша айтқанда, $\mathbf{S}^0$ бірлік векторының бағыты бойынша туынды - **grad***u* градиенттің $\mathbf{S}^0$ векторына проекциясына тең

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{S}^\circ} = |\mathbf{grad}u| \cdot \left|\mathbf{S}^0\right| \cos\omega = \ddot{I}\ \eth_{S^0}\mathbf{grad}u\,.$$

Сондықтан кез келген **S** векторы үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{S}} \le |\mathbf{grad}u|\,. \qquad (7)$$

Егер $\mathbf{S}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ векторының бағыты **grad***u*

векторының бағытымен бірдей болса, онда $\mathbf{grad}\,u \neq \vec{0}$ үшін (7)-де теңдік орындалады $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{S}} = |\mathbf{grad}\,u|$, ал бағыты одан басқа векторлар үшін қатаң теңсіздік орындалады.

Олай болса u **функциясының** (x, y, z) **нүктесіндегі градиентін** келесі екі қасиетке ие вектор ретінде анықтауға болатынын көреміз:

1) ол вектордың **модулі,** (x, y, z) нүктесіндегі бағыт бойынша алынған туындылардың ең үлкен шамасына тең;

2) ол вектордың **бағыты,** $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{S}}$ туындысы ең үлкен болатын $\mathbf{S}$ вектормен бағыттас.

9.4.3. Жанама жазықтық және нормаль. $\mathbf{S}$ беті $F(x, y, z) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілсін. $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінің қандай да бір маңайында F функциясының бір мезгілде нөлге тең емес, үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. Онда $\mathbf{grad}\,F(\mathbf{P}_0) = \left(F'_x(\mathbf{P}_0),\ F'_y(\mathbf{P}_0),\ F'_z(\mathbf{P}_0)\right) \neq 0$ болады. Анықтылық үшін $F'_z(\mathbf{P}_0) \neq 0$ деп алайық. Енді (§9.3, (8) және (9) қараңыз)

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \qquad z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

мәндерін S бетінің $\mathbf{P}_0$ нүктедегі жанама жазықтығының (§9.2, (11) қараңыз) $z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)\ (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ теңдеуіне қойып, оны түрлендірсек келесі теңдікті аламыз:

$$F'_x(\mathrm{P}_0)(x - x_0) + F'_y(\mathrm{P}_0)(y - y_0) + F'_z(\mathrm{P}_0)(z - z_0) = 0\,. \qquad (8)$$

Бұл S: $F(x, y, z) = 0$ бетінің $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі жанама жазықтығының теңдеуі. Ал S бетінің $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нүктесіндегі нормалінің теңдеуі келесі түрге ие болады:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(\mathbf{P}_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(\mathbf{P}_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(\mathbf{P}_0)}\ . \qquad (9)$$

(8) теңдіктен, $\mathbf{grad}\,F(\mathbf{P}_0)=\left(F'_x(\mathbf{P}_0),\ F'_y(\mathbf{P}_0),\ F'_z(\mathbf{P}_0)\right)$ *векторы S бетінің нормалі бойынша бағытталатынын* көреміз.

§ 9.5. Жоғарғы ретті дербес туындылар және жоғарғы ретті дифференциалдар. Тейлор формуласы

9.5.1. Жоғарғы ретті дербес туындылар. $z=f(x,y)$ функциясының $(x,y)\in G$ нүктелерінде дербес туындылары $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ бар болса, онда бұл туындыларды G жиынында берілген жаңа функциялар деп қарас-тыруға болады.

Осы функциялардан алынған дербес туындылар $f(x,y)$ функциясының **екінші ретті дербес туындылары** деп аталады да,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}=z''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}=z''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}=z''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}=z''_{yy}$$

түрлерінде белгіленеді.

f''_{yx} және f''_{xy} туындылары **аралас** деп аталады; оның біріншісі алдымен *x*, содан соң *y* бойынша, ал екіншісі, керісінше, алдымен *y*, содан соң *x* бойынша дифференциалдау арқылы алынған.

Ескерту. *Аралас дербес туындыларды белгілеуде бірдей ұстаным жоқ. Кейбір оқу құралдарында, мысалы,* f''_{yx} арқылы *алдымен y содан соң x бойынша, ал* f''_{xy} арқылы *алдымен x содан соң y бойынша алынған дербес туындыны белгілейді.*

Егер $(x,y)\in G$ нүктелерінде екінші ретті туындылар (барлығы немесе қандай да біреуі) бар болса, онда үшінші ретті туындылардың бар болуы туралы сұрақ туады. Жалпы, ***n*-ші ретті дербес туынды** деп, қандай да бір $(n-1)$-ші ретті туындының кез келген бір айнымал бойынша дербес туындысын айтады. Мысалы, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)=\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ – **бірінші ретті дербес** туындылар, ал f функциясысының өзі **нөлінші ретті дербес туынды** деп аталады.

Дербес туындыларды келесі символдармен де белгілейді: $D_x f=\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_x D_y f=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, ….

Егер $\mathbf{r}=(r_1,...,r_n)$ векторының координаттары теріс емес бүтін сандар болса, онда $D^{\mathrm{r}} f=D_{x_1}^{r_1}...D_{x_n}^{r_n} f=\frac{\partial^{r_1+...r_n} f}{\partial x_1^{r_1}...\partial x_n^{r_n}}$ деп жазады.

Мысалы, $f(x,y)=x^2+\sin xy$ функциясының $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}$ туындысын табайық.

▼ $\frac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^2\sin xy$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=-2x\sin xy-x^2 y\cos xy$. ▲

Дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау кезегіне тәуелді ме деген сұрақ тууы мүмкін. **Мысалы,** $\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^2\partial x}$ пен $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$ тең бе?

Жалпы жағдайда бұл сұраққа жауап теріс беріледі. Бірақ келесі теорема орындалады. Біз оның дәлелдеуін келтірмейміз (оны, мысалы, [2] қарауға болады).

Теорема ***(аралас туындылар туралы).*** $u = f(x,y)$ *функциясы мен оның* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *дербес туындылары* $P_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің белгілі бір маңайында анықталсын. Егер* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *және* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *аралас туындылары* P_0 *нүктесінде үзіліссіз болса, онда* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, *яғни дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау кезегіне тәуелсіз.*

Бұл теореманы индукция арқылы бір-бірінен дифференциалдау кезегі бойынша ғана ажыратылатын кез келген аралас дербес туындыларға қолдануға болады. Мысалы,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\} \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\} \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

Ескерту. *Егер үзіліссіздік шарты орындалмаса, онда* P_0 *нүктесінде аралас туындылар өзара тең болмауы да мүмкін.*

Мысалы, $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{егер} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{егер} \quad x = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

функциясының дербес туындыларын табайық.

$x^2 + y^2 \neq 0$ болса:

$$f'_x(x,y) = y \cdot \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{және} \quad f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0;$$

$$f'_y(x,y) = x^3 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{және} \quad f'_y(0,0) = 0 .$$

Анықтама бойынша табамыз:

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0 ,$$

бұл теңдіктерден $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$ көреміз.

Бұл аралас туындылар үшін $(0,0)$ – үзіліс нүктесі. Мысалы, $x^2 + y^2 \neq 0$ болса, $f''_{yx}(x,y) = \dfrac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}$, ал бұдан $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x=y}} f''_{yx}(x,y) = \dfrac{1}{2} \neq f''_{yx}(0,0) = 0$ шығады.

9.5.2. Жоғарғы ретті дифференциалдар. $z = f(x,y)$ функциясының бірінші ретті дербес туындылары $\mathbf{P} = (x,y) \in G$ нүктесінде үзіліссіз болсын. Онда (6.2.2 п. қараңыз) оның дифференциалы $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ түрінде жазылатын еді. Мұнда *dz* функциясы *x* және *y* айнымалдарына да, олардың *dx*, *dy* дифференциалдарына да тәуелді.

z функциясының дифференциалын *бірінші ретті дифференциал* деп те атайды.

$\mathbf{P} = (x,y)$ нүктесінде үзіліссіз дербес туындылары болатын кез келген $u = u(x,y)$ және $v = v(x,y)$ функциялары үшін келесі қасиеттер орындалатынын атай кетейік:

$$d(u \pm v) = du \pm dv , \quad d(u \cdot v) = udv + vdu ,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},\quad v\neq 0.$$

Мұнда жақшадағы функциялардың дербес туындылары $\mathbf{P}=(x,y)$ нүктесінде үзіліссіз. Бұл теңдіктердің, мысалы, үшіншісін дәлелдейік.

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)dy=\frac{u'_x\cdot v-v'_x\cdot u}{v^2}dx+\frac{u'_y\cdot v-v'_y\cdot u}{v^2}dy=$$

$$=\frac{1}{v^2}\left[(u'_xdx+u'_ydy)v-(v'_xdx+v'_ydy)u\right]=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Мұнда $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)$ мен $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)$ дербес туындыларының үзіліссіздігі үшінші теңдіктен u мен v функцияларына қойылған шарттарға байланысты шығады.

Енді $\mathbf{P}=(x,y)\in G$ нүктесінде $z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары үзіліссіз, ал x,y - ***тәуелсіз айнымалдар*** болсын. Ыңғайлылық үшін дифференциалды δ символымен белгілейік.

$dx=\Delta x,\ dy=\Delta y$ шамаларын *тұрақты көбейткіш деп аламыз* (сондықтан да оларды тәуелсіз дифференциалдар деп атайды), яғни $d(dx)=0,\ d(dy)=0.$ Онда dz тек x және y айнымалдарына ғана тәуелді (Δx-ке де Δy-ке де емес) функция болады және оның (x,y) нүктесіндегі дифференциалы

$$\delta(dz)=\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\delta y=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy\right)\delta x+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)\delta y. \qquad (1)$$

dz дифференциалынан $\delta x = dx,\ \delta y = dy$ *үшін* (x, y) *нүктесінде алынған* $\delta(dz)$ *дифференциалын* $z = f(x, y)$ **функциясының** (x, y) **нүктесіндегі екінші ретті дифференциалы** дейді және оны $d^2 z$ немесе $d^2 f(x, y)$ арқылы белгілейді. Өз кезегінде $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ үшін $d^2 z$-тің $\delta(d^2 z)$ дифференциалын $z = f(x, y)$ **функциясының** (x, y) **нүктесіндегі үшінші ретті дифференциалы** дейді және оны $d^3 z$ немесе $d^3 f(x, y)$ арқылы белгілейді және с.с. $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ үшін $d^{n-1} z$ дифференциалының $\delta(d^{n-1} z)$ дифференциалын $z = f(x, y)$ **функциясының** (x, y) **нүктесіндегі *n*-і ретті дифференциалы** дейді және оны $d^n z$ немесе $d^n f(x, y)$ арқылы белгілейді, яғни $d^n z = \delta(d^{n-1} z) \Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$.

(1) формуладан екінші ретті аралас туындылардың үзіліссіздігін ескеріп, екінші ретті дифференциал үшін

$$d^2 z = \delta(dz) \Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

аламыз. Сонымен

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \qquad (2)$$

Дәл осылайша кез келген жоғарғы ретті дифференциалды анықтауға болады, мысалы,

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \qquad (3)$$

Математикалық индукция әдісін қолданып, *n*-і ретті дифференциалды жазуға болады. Оны біз символдық түрде жазайық:

$$d^n z = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right\}^n z. \qquad (4)$$

Мұнда алдымен өрнекті n дәрежеге дәрежелейді де, содан соң ∂^n символының астына z жазады.

9.5.3. Тейлор формуласы. $z = F(x, y)$ функциясының $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ нүктесінің маңайында барлық l-ші ретті туындылары үзіліссіз болсын. Осы маңайдан $\mathbf{P}_1 = (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ нүктесін алып, $\mathbf{P}_0$ мен $\mathbf{P}_1$ нүктелерін кесіндімен қосайық. Ол кесіндіні келесі параметрлік теңдеумен жазуға болады:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot \Delta x; \\ y = y_0 + t \cdot \Delta y, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1. \qquad (*)$$

Онда осы кесінді бойындағы нүктелер үшін $z = f(x, y)$ функциясын

$$f(x, y) = f\left[x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y\right] = F(t) \qquad (1)$$

түрінде, яғни бір айнымал t-ның функциясы етіп жаза аламыз.

Бұдан келесі теңдікті аламыз:

$$\Delta f(P_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \qquad (2)$$

$F(t)$ функциясы үшін $t_0 = 0$ нүктесінің маңайында Маклорен формуласы келесі түрде жазылады:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \ldots + \frac{F^{(l-1)}(0)}{(l-1)!} t^{l-1} + \frac{F^{(l)}(\theta)}{l!} t^l, \quad 0 < \theta < 1.$$

Мұнда $t = 1$ деп алсақ,

$$F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(l)}(\theta)}{l!},\ 0 < \theta < 1, \qquad (3)$$

шығады. (3) теңдіктегі $F(t)$ функциясының туындыларын $f(x, y)$ арқылы есептейік. (1) қатыстан (§6.3. 1п. (6) қараңыз)

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \ |(*) \text{ теңдіктерді қараңыз}|=$$

$= \dfrac{\partial f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \dfrac{\partial f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)}{\partial y} \cdot \Delta y$, ал бұдан $t = 0$ үшін $F'(0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y = df(P_0)$ аламыз. Дәл осылай

$$F''(t) = f''_{xx}(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)\Delta x \cdot \Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)\Delta y^2,$$
$$F''(0) = d^2 f(\mathbf{P}_0) \quad \text{болады.}$$

Әрі қарай келесі туындыларды табамыз:

$$F'''(0) = d^3 f(\mathbf{P}_0), \quad \ldots \ , \quad F^{(l-1)}(0) = d^{l-1} f(\mathbf{P}_0) \ .$$

Осыларды ескеріп, (2) мен (3) теңдіктерден мына теңдікке келеміз:

$$\Delta f(P_0) = \frac{df(\mathrm{P}_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^{l-1} f(\mathrm{P}_0)}{(l-1)!} + \frac{1}{l!} d^l f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y). \qquad (4)$$

(4) формула, $z = f(x,y)$ **функциясының Тейлор формуласы** деп аталады.

§ 9.6. Көп айнымалды функциялардың экстремумдері

9.6.1. Экстремумнің қажетті және жеткілікті шарттары.

$z = f(x,y)$ функциясы $(x_0; y_0)$ нүктесінің белгілі бір маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Егер (x_0, y_0) нүктесі үшін

$$\forall (x;y) \in U(x_0;y_0) \quad \Rightarrow \quad f(x;y) \le f(x_0;y_0) \quad \big(f(x;y) \ge f(x_0;y_0)\big)$$

теңсіздігі орындалатындай оның $U(x_0;y_0)$ маңайы табылса, онда $z = f(x;y)$ **функциясының** $(x_0;y_0)$ **нүктесінде локальді (төңіректік) максимумы (минимумы) бар** дейді.

$(x_0;y_0)$ нүктесін **локальді максимум (минимум) нүктесі,** ал

функцияның осы нүктеге сәйкес мәнін **функцияның локальді максимум (минимум) мәні** деп атайды. Функцияның локальді максимум мен минимум мәндері оның **локальді экстремум мәндері** деп аталады. Экстремум анықтамасынан $(x_0; y_0)$ нүктесінің жеткілікті «кішкене» маңайында $\Delta f = f(x;y) - f(x_0;y_0)$ өсімшесінің таңбасы өзгермейтінін көреміз:

локальді максимум (max) үшін $\Delta f \le 0$;

локальді минимум (min) үшін $\Delta f \ge 0$.

Енді дифференциалданатын функциялар үшін экстремумнің қажетті шартын қарастырайық.

Теорема (экстремумнің қажетті шарты). Егер дифференциалданатын $z = f(x;y)$ функциясының $\mathbf{P}_0(x_0;y_0)$ нүктесінде экстремумі бар болса, онда оның осы нүктедегі дербес туындылары нөлге тең:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

▼ **Дәлелдеуі.** y-ті тұрақты деп ($y = y_0$) қарастырсақ, онда бір айнымал x-тің f функциясының $x = x_0$ нүктесінде экстремумі бар. Оның қажетті шарты бойынша $x = x_0$ нүктесінде функцияның x айнымал бойынша туындысы нөлге тең. Ал бұл туынды $f(x,y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі x бойынша дербес туындысы болғандықтан, $\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$. Осы сияқты $\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$ теңдігін алуға болады. ▲

Дифференциал мен градиент анықтамасынан келесі салдар шығады.

Салдар. Егер $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ нүктесінде дифференциалданатын $z = f(x,y)$ функциясының осы нүктеде экстремумі бар болса, онда

$$df(P_0) = 0 \quad \text{немесе} \quad \mathbf{grad} f(P_0) = \vec{0}.$$

1-ескерту. f функциясының $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ нүктесінде экстремумі бар болуы үшін (1) шарттың орындалуы жеткілікті емес.

Мысалы, $z = x^2 y$ функциясы үшін $(0,0)$ нүктесінде (1) шарт орындалатынын көреміз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(0;0)}{\partial x} = 2xy\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0, \\ \dfrac{\partial z(0;0)}{\partial y} = x^2\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \end{cases}.$$

Бірақ $(0;0)$ экстремум нүктесі емес, өйткені бұл нүктенің кез келген маңайында $\Delta z = x^2 y - 0 = x^2 y$ өсімшесінің таңбасы сақталмайды.

Егер f функциясының үзіліссіз дербес туындылары үшін $\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ нүктесінде (1) шарт орындалса, онда $\mathbf{P}_0$ нүктесі $f(x; y)$ функциясының **стационар нүктесі** деп аталады.

$z = f(x; y)$ бетінің $\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ стационар нүктесіндегі жанама жазықтықтың теңдеуі $z = z_0$ түрінде жазылады. Өйткені бұл нүктеде (1) шарт орындалады да, жанама жазықтық теңдеуінің:

$$z - z_0 = \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

оң жағы нөлге тең болады.

Дифференциалданатын $z = f(x; y)$ функциясының $\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ нүктесіндегі экстремумінің қажетті шартының геометриялық мағынасы - функция графигінің осы нүктедегі жанама жазықтығының x, y тәуелсіз айнымалдар жазықтығына параллель болатынын көрсетеді.

2-ескерту. Үзіліссіз функция берілген нүктелерде дифференциалданбаса да, ол нүктелер экстремум нүктелері болуы мүмкін.

Мысалы, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясы $(0,0)$ нүктесінде минимум мәнін қабылдайды, бірақ бұл нүктеде функция дифференциалданбайды.

f функциясының стационар нүктелері мен оның дифференциалданбайтын нүктелерін **критикалық (күдікті) нүктелер** деп атайды.

Сонымен, ***функция тек критикалық нүктелерде ғана экстремумге ие болуы мүмкін екен.***

Тәуелсіз айнымалдарының саны кез келген функциялар үшін де экстремум түсінігін осы сияқты анықтауға болады.

Енді ***экстремумнің жеткілікті шартын*** қарастырайық. Бұл жағдай бір айнымалды функцияға қарағанда күрделірек. Біз бұл шарттарды дәлелдеусіз келтіреміз (оның дәлелдеуін, мысалы, [2]-ден қарауға болады).

$z = f(x, y)$ функциясы $\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ стационар нүктесінің қандай да бір маңайында ***екі рет дифференциалданатын*** және оның ***екінші ретті дербес туындылары*** $\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ нүктесінде ***үзіліссіз*** болсын.

1) егер $f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot f''_{yy}(x_0; y_0) - \left[f''_{xy}(x_0; y_0) \right]^2 > 0$ болса, онда $\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ нүктесінде $z = f(x; y)$ функциясының экстремумі бар, атап айтқанда, $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$ болса, ол максимум, ал $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0$ болса, ол минимум мәнін қабылдайды;

2) егер $f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot f''_{yy}(x_0; y_0) - \left[f''_{xy}(x_0; y_0) \right]^2 < 0$ болса, онда $z = f(x; y)$ функциясының $\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ нүктесінде экстремумі жоқ;

3) егер $f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot f''_{yy}(x_0; y_0) - \left[f''_{xy}(x_0; y_0) \right]^2 = 0$ болса, онда функцияның осы нүктедегі сипаты оның екіден жоғары ретті дифференциалымен анықталады.

Ескерту. Көбінесе ықшамдылық үшін $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{yy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{xy}(x_0; y_0)$ деп алып, 1) – 3) тұжырымдарындағы шарттарды сәйкес келесі түрлерде жазады: 1) $A \cdot B - C^2 > 0$; 2) $A \cdot B - C^2 < 0$; 3) $A \cdot B - C^2 = 0$.

Мысал. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

▼ Функция жазықтықтың кез келген нүктесінде дифференциалданады. Олай болса оның критикалық нүктелері – тек стационар нүктелер, осы нүктелерді табайық:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Енді функцияның $\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ нүктесіндегі екінші ретті дербес туындыларын тауып, $A \cdot B - C^2$ санын есептейміз: $\dfrac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^2} = 2;$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} = -1, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Олай болса 1) тұжырымға сәйкес $\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ нүктесінде функция экстремумі бар, атап айтқанда, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$ болғандықтан, функция ол нүктеде локальді минимум мәнін қабылдайды:

$$z_{\min}\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}. \quad ▲$$

Экстремумның жеткілікті шартын жалпы жағдайда келесі түрде тұжырымдауға болады.

$\mathbf{P}_0(x_0; y_0)$ нүктесі $z = f(x; y)$ функциясының стационар нүктесі, ал функция $\mathbf{P}_0$ нүктесінің қандай да бір маңайында екі рет дифференциалданып, $\mathbf{P}_0$ нүктесіндегі барлық екінші ретті дербес туындылары үзіліссіз болсын.

Онда:

1) егер екінші ретті $d^2 z(P_0; \Delta x; \Delta y)$ дифференциал $\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}$ өсімшелерінің функциясы ретінде бір мезгілде нөлге тең емес $\Delta\mathbf{x}$ пен $\Delta\mathbf{y}$-тің барлық мәндерінде тұрақты таңба сақтаса, онда

$z = f(x;y)$ функциясының $\mathbf{P}_0$ нүктесінде экстремумі бар. Атап айтқанда, $d^2z(P_0;\Delta x;\Delta y) < 0$ болса, $\mathbf{P}_0$ – максимум нүктесі, $d^2z(P_0;\Delta x;\Delta y) > 0$ болса, $\mathbf{P_0}$ – минимум нүктесі.

2) егер $d^2z(P_0;\Delta x;\Delta y)$ функциясының $\Delta x, \Delta y$ -ке сәйкес мәндерінің таңбалары айнымал болса, онда $\mathbf{P}_0$ нүктесінде функцияның экстремумі жоқ;

3) егер $d^2z(P_0;\Delta x;\Delta y) \geq 0$ немесе $d^2z(P_0;\Delta x;\Delta y) \leq 0$ болып, екінші дифференциал нөлге тең болатындай $\Delta x, \Delta y$ мәндер жиынтығы бар болса ($\Delta x, \Delta y$ – бір мезгілде нөлге тең емес), онда екіден жоғарғы дифференциалдар арқылы қосымша зерттеу қажет.

Мысал. $z = 2x^2 + 8x + y^2$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

▼ Стационар нүктелері:

$$\begin{cases} z'_x = 4x + 8 = 0, \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{P}_0(-2;0).$$

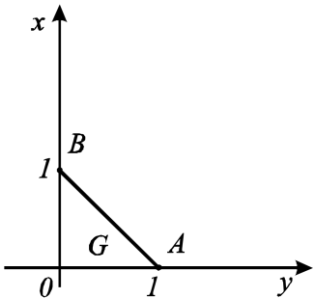
Екінші дифференциал

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = 4 \cdot dx^2 + 2 \cdot dy^2 > 0$$

болғандықтан, функция $\mathbf{P}_0(-2,0)$ нүктесінде минимум мәнін қабылдайды: $z_{\min}(-2,0) = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 0 = -8.$ ▲

9.6.2. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері. Егер $f(P)$ функциясы шенелген $\bar{G} = G \cup \Gamma$ тұйық аймақта дифференциалданса, онда f функциясы өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін стационар нүктелерде *немесе* аймақтың Γ шекарасындағы нүктелерде қабылдайды.

Мысал. $z = 1 - x + x^2 + 2y$ функциясының $x = 0,\ y = 0,$ $x + y = 1$ түзулерімен (8-сурет) шенелген G тұйық аймағындағы ең үлкен мәнін табу керек.



8-сурет

▼ Дербес туындылардың нөлге тең болатын нүктелерін іздейміз: $\begin{cases} z'_x = -1+2x = 0, \\ z'_y = 2 \neq 0 \end{cases}$, яғни стационар нүктелер жоқ. Функцияны $\Gamma = \text{OA} \cup \text{OB} \cup \text{BA}$ шекарасында зерттейміз.

1) $\text{OA}: \ y = 0, \quad 0 \le x \le 1.$

Онда $z = 1 - x + x^2, \ 0 \le x \le 1,$ болады да, алынған бір айнымалды функцияның $0 \le x \le 1$ кесіндідегі ең үлкен мәндерін табамыз:

$z'_x = -1 + 2x = 0, \ x = \dfrac{1}{2}$ – стационар нүкте. Осы нүкте мен О, А нүктелеріндегі функция мәнін табамыз: $z\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4};$

$z(0,0) = 1; \quad z(1,0) = 1.$

2) $\text{OB}: \quad x = 0, \quad 0 \le y \le 1.$ Онда $\mathbf{z} = 1 + 2\mathbf{y}, \quad 0 \le y \le 1.$

$z'_y = 2 \neq 0$, демек стационар нүкте жоқ. Ал В нүктедегі функция мәні $z(0,1) = 3$.

3) $\text{BA}: \quad x + y = 1, \quad 0 \le x \le 1.$ Онда $z = 3 - 3x + x^2, \quad 0 \le x \le 1$ болады да, $z'_x = 2x - 3 = 0, \ x = 1{,}5 \notin \Gamma,$ демек стационар нүкте жоқ. АВ кесіндісіндегі $z(\text{B}), \ z(\text{A})$ мәндері бұған дейін табылған.

Шекара бойындағы функция мәндерінің ең үлкені 3 екенін көреміз, оған функция $A(0,1)$ нүктесінде ие болады: $z_{\max}(0;1) = 3.$ ▲

9.6.3. Шартты экстремум. Практикада тәуелсіз айнымалдардың ғана емес, қандай да бір қосымша шарттар арқылы байланысқан (мысалы, қандай да бір берілген теңдеулерді қанағаттандыратын) көп айнымалды функция-ның максимумы мен минимумын табуға арналған есептер жиі кездеседі.

Келесі есепті қарастырайық. *Ауданы 2a тең қаңылтырдан көлемі ең үлкен, параллелепипед пішінді жабық қорап жасау керек.*

Қораптың енін, ұзындығын және биіктігін сәйкес x, y, z арқылы белгілесек, есеп $v = xyz$ функциясының

$$2xy + 2xz + 2yz = 2a \qquad (2)$$

шарты орындалатындай максимумын табуға саяды. Мұнда **шартты экстремум** есебі тұр: x, y, z айнымалдары (2) шарт арқылы байланысқан. Енді осындай есептерді шешу әдістерін қарастырамыз.

Алдымен айнымалдары жалғыз шарт арқылы байланысқан екі айнымалды функцияның шартты экстремумі туралы мәселені қарастырамыз.

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (3)$$

теңдеуімен байланысқан (оны байланыс теңдеуі деп атайды)* x *пен* y *айнымалдарының функциясының:

$$U = f(x, y) \qquad (4)$$

максимумі мен минимумін табу керек болсын.

Егер (3) теңдеуді y-ке қатысты шеше алсақ (мысалы, $y = \psi(x)$), онда оны (4)-тегі y орнына қойып, $U = f\left[x, \psi(x)\right] = \Phi(x)$ бір айнымалды функциясын алар едік. Бұл функцияның экстремум қабылдайтын **x** нүктесін тауып, байланыс теңдеуінен осы x нүктеге сәйкес келетін y мәнін анықтап, есептің шешімін табамыз.

Қойылған есепті (3) байланыс теңдеуін y-ке (немесе x-ке) қатысты іздемей-ақ шешуге болатынын көрсетейік.

(4) теңдіктен $\dfrac{dU}{dx}$-ті табамыз (y-ті x-тің функциясы деп аламыз): $\dfrac{dU}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$. Экстремум нүктелері үшін мына теңдік орындалуы тиіс:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0. \tag{5}$$

(3) байланыс теңдеуінен

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \tag{6}$$

алып, (6) теңдікті қазірше белгісіз λ коэффициентіне көбейтіп, нәтижесін (5) теңдікке мүшелеп қоссақ, $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+$ $+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0$ немесе

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=0. \tag{7}$$

(7) теңдік барлық экстремум нүктелері үшін орындалады. Енді λ санын (анықтылық үшін критикалық нүктелерде $\varphi'_y\neq 0$ болсын деп алайық), $\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$ теңдігі орындалатындай етіп таңдап алсақ, онда (7) теңдіктен $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$ шығады. Сонымен экстремум нүктелерінде x, y, λ белгісіздері бар келесі үш теңдеу қанағаттандырылады:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases} \tag{8}$$

(8) ден x, y және λ табамыз. Мұнда λ белгісізі тек көмекші рөл атқарады, бұдан кейін оның бізге қажеті болмайды.

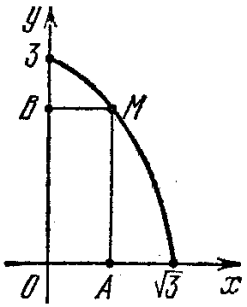
(8) жүйенің сол жағы

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \qquad (9)$$

функциясының x, y, λ айнымалдары бойынша дербес туындылары екенін байқаймыз.

(9) түрдегі функция **Лагранж функциясы**, λ **Лагранж көбейткіші**, ал шартты экстремум есебіне қолданылған әдіс – **Лагранж көбейткіштерінің әдісі** деп аталады.

(8) теңдеулер шартты экстремумнің қажетті шарты ғана болатынына назар аудару керек, яғни (8) жүйені қанағаттандыратын x, y (және λ) мәндерінде шартты экстремум болмауы да мүмкін. Табылған (x,y) стационар нүктесінде шартты экстремум бар немесе жоқ екенін білу үшін, Лагранж функциясының екінші дифференциалының таңбасын зерттеу қолайлы. Бірақ dy дифференциалы dx -ке тәуелді болатыны есте болуы керек.



9-сурет

1-мысал. xOy жазықтығында координат өстерімен және $\mathbf{y} + \mathbf{x}^2 - 3 = 0$, $0 \le x \le \sqrt{3}$, параболасымен шенелген фигура берілген. Осы фигураға, қабырғалары координат өстеріне параллель, төбелерінің $M(x,y)$ біреуі параболада жататын, ауданы ең үлкен тік төрт бұрышты іштей сызу керек.

▼ M төбесінің координаттары x және y болсын (9-сурет). Онда тік төртбұрыш ауданы $S = x \cdot y$ болады. $M(x,y)$ нүктесі параболада жатқандықтан, оның координаттары парабола теңдеуін қанағаттандырады:

$$y + x^2 - 3 = 0. \qquad (10)$$

Сонымен айнымалдары (10) байланыс теңдеуін қанағаттандыратын $S = xy$ функциясын шартты экстремумге зерттеу керек.

Лагранж функциясы $F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(y + x^2 - 3)$ түрінде жазылады. Стационар нүктелерді табайық.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = y + x^2 - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 1, \quad y = 2, \ \lambda = -1.$$

Сонымен $(1,2)$ – стационар нүкте және оған $\lambda = -1$ Лагранж көбейткіші сәйкес келеді. Енді $F(x, y, -1) = xy - y - x^2 + 3$ Лагранж функциясының $(1,2)$ нүктесіндегі екінші дифференциалын зерттейік:

$$d^2F(x, y, -1) = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 =$$

$$= -2dx^2 + 2dxdy = 2dx(dy - dx).$$

Егер dx пен dy-ті тәуелсіз айнымалдардың дифференциалы ретінде алсақ, онда $d^2F(x, y, -1)$ функциясының таңбасы сақталмайды (анық емес). Алайда байланыс теңдеуінен $dy = -2xdx$ шығады да, ол $(1,2)$ нүктесінде $dy = -2dx.$ Олай болса $d^2F(x, y, -1) = 2dx(-2dx - dx) = -6dx^2 < 0, \quad dx \neq 0,$ ал бұдан (10) парабола нүктелерінде $\Delta S = \Delta F$ болғандықтан, $S = xy$ функциясы (1,2) нүктесінде шартты максимумге ие болатынын көреміз.

Сөйтіп, көрсетілген барлық тік төртбұрыштардың ішінде қабырғалары: $OA = 1, \ OB = 2$ болатын тік төртбұрыштың ауданы ең үлкен болады екен. ▲

2-мысал. Белгілі бір кәсіпорынның шығаратын z өнімінің x өндірістік қор және y еңбекақыға төленетін шығын арқылы нарықтық өрнегі Кобб–Дугластың өндірістік функциясы деп аталатын $z = q \cdot x^2 \cdot y^{1-\alpha}$ функциясымен көрсетіледі (q, α –қандайда бір тұрақтылар). Өндірістік қорды дамытуға арналған және еңбекақыға төленетін шығындардың қосындысы **P** болсын, яғни

$$x + y = P. \qquad (11)$$

z – өнімі ең үлкен болатындай (11) теңдікті қанағаттандыратын x, y мәндерін табу керек, басқаша айтқанда, (11) шарты

орындалатындай $\mathbf{z}=\mathbf{q}\mathbf{x}^2\mathbf{y}^{1-\alpha}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ функциясының шартты максимумін табу керек.

▼ (11) теңдіктен $y=P-x$ тауып, оны z функциясындағы $\mathbf{y}$ орнына қойсақ, есеп бір айнымалды x функциясының максимумін табуға келеді. Есептейміз: $z=qx^{\alpha}y^{1-\alpha}=qx^{\alpha}(P-x)^{1-\alpha}$.

$$z'=q\left[\alpha x^{\alpha-1}(p-x)^{1-\alpha}-(1-\alpha)x^{\alpha}(P-x)^{-\alpha}\right]=$$

$$qx^{\alpha}(p-x)^{-\alpha}\left[\alpha\cdot x^{-1}(p-x)-(1-\alpha)\right]=0.$$

Бұдан ($x\neq 0$ ескеріп) $\dfrac{\alpha\cdot(p-x)}{x}-(1-\alpha)=0$, $\alpha(p-x)=x(1-\alpha)$, $\alpha p-\alpha x=x-\alpha x$, $x=\alpha p$, $\mathbf{y}=\mathbf{p}-\alpha\mathbf{p}=(1-\alpha)\mathbf{P}$ аламыз. Ал x пен y-тің алынған мәндерінде z функциясы шартты максимумге ие болатынын тексеруді оқушының өзіне қалдырамыз. ▲

Айнымалдар саны кез келген, көп айнымалды функциялар үшін шартты экстремум есебі осы сияқты қарастырылады.

$x_1,x_2,...x_n$ айнымалдары келесі m теңдеумен $(m<n)$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \varphi_m(x_1,x_2,...,x_n)=0, \end{cases} \tag{12}$$

байланысқан $U=f(x_1,x_2,...x_n)$ функциясының экстремумдерін табу керек болсын. Ол үшін Лагранж функциясын жазамыз:

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=$$

$$=\quad f(x_1,...x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,...,x_n)+...+\lambda_m\varphi_m(x_1,...,x_n)\ .$$

Оның $x_1,...,x_n$ айнымалдар бойынша дербес туындыларын нөлге теңестіреміз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}=0. \end{cases} \qquad (13)$$

(12) мен (13) теңдеулерден (олардың саны $m+n$) $x_1, x_2, \ldots x_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ табамыз.

3-мысал. Осы пункттің басында қойылған есепке қайта оралайық: x, y, z айнымалдары

$$xy+xz+yz-a=0,\ x>0,\quad y>0,\ z>0 \qquad (2')$$

шартын қанағаттандыратындай $v=xyz$ функциясының максимумін табу керек.

▼ Лагранж функциясын құрамыз: $F(x,y,z,\lambda)=x,y,z+$ $+\lambda(xy+xz+yz-a)$. Оның дербес туындыларын нөлге теңестіреміз:

$$\begin{cases} F'_x=yz+\lambda(y+z)=0, \\ F'_y=xz+\lambda(x+z)=0, \\ F'_z=xy+\lambda(x+y)=0, \\ F'_\lambda=xy+xz+yz-a=0. \end{cases} \qquad (14)$$

Алынған теңдеулер жүйесінің шешімі: $x=y=z=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$, $\lambda=-\sqrt{\dfrac{a}{6}}$. Бұл шешім y функциясының максимумін беретінін көрсетуге болады (оны оқушыға ұсынамыз).

Сонымен қораптың көлемі ең үлкен болуы үшін ол қабырғасы $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ тең куб болуы керек екен. ▲

9-тарау. Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Нақты ***n***-өлшемді R^n кеңістігінің векторларын қосу, азайту және санға көбейту амалдарын анықтап, олардың қасиеттерін атаңыз.

2. R^n кеңістігінің векторларының скаляр көбейтіндісін қалай анықтайды және оның қандай қасиеттері бар? Евклидтік кеңістік ұғымын анықтаңыз.

3. R^n кеңістігінің векторының нормасы және екі нүктенің арақашықтығы қандай формулалармен анықталады? R^n кеңістігінде шар, ашық шар, ашық жиын, нүктенің маңайы, аймақ ұғымдарын анықтаңыз.

4. Екі айнымалды функция, оның анықталу аймағы деген не? Мысал келтіріңіз. *n*-айнымалды функция ұғымын анықтаңыз.

5. Екі айнымалды функция үшін дербес және толық өсімшелер ұғымдарын анықтаңыз. Мысалдар келтіріңіз.

6. Екі айнымалды функцияның нүктедегі шегінің және үзіліссіздігінің анықтамаларын беріңіз. Мысал келтіріңіз.

7. Екі айнымалды функцияның нүктедегі дербес туындыларының анықтамаларын беріңіз. Көп айнымалды функцияның дербес туындыларын табу ережесін тұжырымдаңыз. Мысал келтіріңіз.

8. Қандай жағдайда $z = f(x, y)$ функциясы берілген нүктеде дифференциалданады?

9. $z = f(x, y)$ функциясының берілген нүктеде дифференциалдануының ***қажетті шартын***, ***жеткілікті шартын*** тұжырымдаңыз.

10. Екі айнымалды функцияның нүктедегі толық дифференциалы деген не? Мысал келтіріңіз.

11. Көп айнымалды функцияның берілген нүктеде дербес туындыларының бар болуы функцияның осы нүктеде толық дифференциалының бар болуына жеткілікті шарт бола алмайтынын мысал арқылы көрсетіңіз.

12. Беттің нүктесіне жүргізілген жанама жазықтықтың, нормальдың теңдеулерін жазыңыз. Екі айнымалды функцияның нүктедегі дифференциалының геометриялық мағынасын түсіндіріңіз. Толық дифференциалды жуықтап есептеулерге қалай пайдалануға болады? Мысал келтіріңіз.

13. Келесі түрде берілген $z = F(u,v),\ \ u = \varphi(x,y),\ \ v = \psi(x,y)$ күрделі функция үшін $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табу формулаларын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

14. Толық туынды деген не және оның формуласы қалай жазылады?

15. $F(x,y) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілген функцияның туындысын табу формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

16. $F(x,y,z) = 0$ теңдеуімен айқын емес түрде берілген z функциясының $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларының формулаларын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

17. $u = f(x,y,z)$ функциясының M нүктедегі S векторының бағыты бойынша туындысының формуласын қорытып шығарыңыз.

18. $u = f(x,y,z)$ функциясының берілген нүктедегі градиенті деген не? Градиенттің негізгі екі қасиетін тұжырымдаңыз.

19. Жоғары ретті дербес туындылардың анықтамасын беріңіз. Екі айнымалды функцияның аралас дербес туындыларының теңдігі туралы теореманы тұжырымдаңыз.

20. Екі айнымалды функцияның жоғары ретті дифференциалының анықтамасын беріңіз және оның формуласын символдық түрде жазып көрсетіңіз.

21. Екі айнымалды функцияның нүктедегі локальдік максимумі (локальдік минимумы) деген не? Екі айнымалды функцияның экстремумінің қажетті шартын қорытып шығарыңыз.

22. Екі айнымалды функцияның экстремумінің жеткілікті шартын және экстремумді табу ережесін тұжырымдаңыз. Мысал келтіріңіз.

23. Екі айнымалды функцияның тұйық аймақтағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу ережесін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

24. Екі айнымалды функцияның шартты экстремумі деген не? Екі айнымалды функцияның тәуелсіз айнымалдары бір ғана шартпен байланысқан жағдайдағы шартты экстремумдерін табу әдісін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

§ 10.1. Жалпы ұғымдар

Дифференциалдық теңдеу деп x тәуелсіз айнымал, y функция мен оның $y', y'', ...y^{(n)}$ туындылары арасындағы тәуелділікті айтады. ***Дифференциалдық теңдеудің реті*** деп, осы теңдеу құрамындағы функция туындысының ең жоғарғы ретін айтады. Мысалы, $4\sin x \cdot y'' + e^x y''' = 0$ – үшінші ретті дифференциалдық теңдеу.

Айталық, $t = 0$ уақыт кезеңінде температурасы θ_0 дене температурасы a-ға тең ортаға орналастырылсын $(a < \theta_0)$. Дене температурасының уақытқа тәуелді өзгеру заңдылығын табайық.

▼ Ізделінетін температура уақытқа тәуелді, сондықтан оны $\theta(t)$ арқылы белгілейік. Дененің суу (суитын) жылдамдығы дене мен оны қоршаған ортаның температурасының айырымына пропорционал болатыны физикадан белгілі. $\theta_0 > a$ шартынан $\theta(t)$ функциясы кемімелі болатынын көреміз. Туындының механикалық мағынасына байланысты $\dfrac{d\theta(t)}{dt} = -k \cdot [\theta(t) - a]$ теңдеуін аламыз. Мұндағы k – пропорционалдық коэффициент. Бұл теңдеуге белгісіз $\theta(t)$ функциясымен қоса, оның туындысы да қатысып отыр, яғни ол – дифференциалдық теңдеу және ол арқылы жоғарыдағы физикалық құбылыс сипатталады. ▲

Егер ізделінетін функция жалғыз айнымалға тәуелді болса, онда **дифференциалдық теңдеу қарапайым** деп аталады, ал функция бірнеше айнымалға тәуелді болса, онда ол **дербес туындылы дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Біз тек қарапайым дифференциалдық теңдеулерді ғана қарастырамыз, сондықтан да «қарапайым» деген сөзді атап жатпаймыз.

Кез келген n-ші ретті дифференциалдық теңдеу келесі түрде жазылады

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Мұндағы $F -$ $(n+2)$ айнымалды, үзіліссіз дифференциалданатын функция; $y = y(x)$ – ізделінетін функция;
x –тәуелсіз айнымал.

Егер (1) теңдеуді жоғарғы ретті туынды арқылы шешуге болатын болса:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

онда **(2) қалыпты (нормаль) дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

(1) немесе (2) *дифференциалдық теңдеудің* ***шешімі*** *деп, қандай да бір* (a,b) *аралығында n-ші ретке дейінгі туындылары:* $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ *бар және берілген теңдеуді қанағаттандыратын* $y(x)$ *функциясын айтады.*

n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі, анықтама бойынша, белгілі бір (a,b) аралығында "$n-1$" ретті туындылары үзіліссіз және *n*-ші ретті туындысы бар $y(x)$ функциясы. Біз *функцияның n-ші ретті туындысы да* (a,b) *аралығында үзіліссіз* деп санаймыз.

Дифференциалдық теңдеудің шешімінің графигін осы **теңдеудің интегралдық қисығы** деп атайды. Дифференциалдық теңдеулердің шешімін табу интегралдау амалы арқылы жүретіндіктен, бұл процесті **дифференциалдық теңдеуді интегралдау** дейді.

Дербес жағдайда, егер $n=1$ болса, онда бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді аламыз. Бұл жағдайда (1) мен (2) теңдеулер сәйкес келесі түрлерде жазылады

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (3)$$

$$y' = f(x, y), \qquad (4)$$

Егер Ω аймағының кез келген $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$ нүктесінде $F_1(x, y, y') = 0$, $F_2(x, y, y') = 0$ теңдеулерінің біреуінің $y(x)$, $x \in (a,b)$ шешімі екіншісінің де шешімі болса, онда бұл дифференциалдық теңдеулер **Ω жиынында эквивалентті** деп аталады. Ω

аймағында эквивалентті дифференциалдық теңдеулердің барлығын бір теңдеу деп есептейді.

***Назар аударыңыз*:** Дифференциалдық теңдеулерді түрлендіру кезінде олардың берілген Ω аймағында эквиваленттілігін сақтап отыруға тырысу керек. Олай болмаған жағдайда қандай шешімдердің жоғалғанын немесе пайда болған бөгде шешімдерді қадағалап отыру қажет.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің ***бастапқы шарт*** *деп аталатын* $y(x_0) = y_0$ *теңдігін қанағаттандыратын шешімін табу есебін* **Коши есебі** (О.Л.Коши (1789-1857) – аса көрнекті француз математигі) деп атайды.

Коши есебінің шешімі жалпы жағдайда бар болуы да, болмауы да мүмкін. Егер Коши есебінің шешімі бар болса, онда ол жалғыз ба? Бұл сұраққа келесі теорема жауап береді.

Теорема *(Коши есебінің шешімінің бар және оның жалғыз болуы туралы)***.** Егер $y' = f(x, y)$, $(x, y) \in G$ қалыпты дифференциалдық теңдеуіндегі $f(x, y)$ функциясы және оның $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ дербес туындысы $(x_0, y_0) \in G$ нүктесінің белгілі бір маңайында үзіліссіз болса, онда бұл теңдеудің $y(x_0) = y_0$ шартын қанағаттандыратын жалғыз $y = \varphi(x)$ шешімі бар.

Берілген $x = x_0$ мәнінде y функциясының берілген y_0 санына тең болу шартын (бастапқы шартты) көбінесе $y\big|_{x=x_0} = y_0$ түрінде жазады.

Бірінші ретті

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

дифференциалдық теңдеуді қарастырайық. Мұндағы F функциясы және оның $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ дербес туындылары (x, y, z) үш өлшемді кеңістіктің белгілі бір Ω аймағында үзіліссіз болсын.

Мына теңдіктің:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

сол жағындағы $\Phi(x, y, z)$ функциясы белгілі бір аймақтың (x, y, z) нүктелерінде ***үзіліссіз дифференциалданатын функция*** болсын. Егер осы теңдікті x бойынша дифференциалдаудан шыққан

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \tag{5}$$

теңдеумен бірге қарастырып, C тұрақтысын шығарып тастағанда пайда болған теңдеу (3) ***теңдеуге эквивалентті болса,*** онда (4) теңдік (3) дифференциалдық теңдеудің **жалпы интегралы** деп аталады.

(4) жалпы интегралды y арқылы шешіп алынған

$$y = \varphi(x, C) \tag{6}$$

функциясын (3) дифференциалдық теңдеудің **жалпы шешімі** деп атайды (оны кейде жалпы интеграл деп те атай береміз). Мұндағы C параметрдің кез келген мәніне сәйкес алынған $y = y(x)$ функциясы (3) дифференциалдық теңдеудің *дербес шешімі* болады.

1-мысал.

$$y' = 2y, \quad x, y \in R \tag{7}$$

дифференциалдық теңдеу үшін

$$y = Ce^{2x}, \quad -\infty < x < +\infty \tag{8}$$

функциясы C параметрінің кез келген мәнінде шешім болатынын көрсетейік. Шынында да, (8) теңдікті x бойынша дифференциалдасақ,

$$y' = C \cdot 2e^{2x}, \quad -\infty < x < +\infty \tag{9}$$

аламыз. Енді (8) және (9) теңдіктердің біреуінен C-ні тауып екіншісіне қойсақ, онда (7) дифференциалдық теңдеуді аламыз. Олай болса анықтама бойынша (8) теңдік – (7) дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы.

2-мысал. C параметріне тәуелді

$$y = (x - C)^3, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{10}$$

функцияны x бойынша дифференциалдасақ,

$$y' = 3(x-C)^2, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{11}$$

аламыз. (10) және (11) теңдіктерден C параметрін шығарып тастау үшін (11) теңдікті үшінші дәрежеге шығарамыз: $(y')^3 = 27(x-C)^6$.

Енді (10) теңдік пен осы алынған теңдіктен келесі дифференциалдық теңдеуді аламыз $(y')^3 = 27y^2$ немесе

$$(y')^3 - 27y^2 = 0 \, . \tag{12}$$

Демек, (10) теңдік – (12) дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы.

Мынадай мәселе бар: бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы өзінің құрамындағы C параметрінің мәндері арқылы осы дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің барлығын түгел көрсете ала ма? *Жалпы жағдайда жауап теріс*. Бірақта келесі теорема орын алады.

Теорема. Айталық,

$$F(x, y, y') = 0, \quad (x, y, y') \in \Omega \tag{3′}$$

дифференциалдық теңдеуінің сол жағындағы $F(x, y, z)$ функциясы және оның $\dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ ***дербес туындылары*** (x, y, y') ***нүктелерінің белгілі бір*** Ω ***жиынында үзіліссіз*** және (3′) дифференциалдық теңдеуінің C тұрақтысына қатысты шешілген

$$\Psi(x, y) = C \tag{13}$$

жалпы интегралындағы $\Psi(x, y)$ ***функциясы ху жазықтығының белгілі бір аймағында үзіліссіз дифференциалданатын*** болсын.

Егер $y = f(x)$, $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$ функциясы (13) теңдеудің C параметрінің белгілі бір мәніне сәйкес келетін (a, b) аралығында ***үзіліссіз дифференциалданатын*** шешімі болса, онда ол (3′) дифференциалдық теңдеуінің де шешімі ***және, керісінше***, (3′) дифференциалдық теңдеуінің әрбір шешімі (13) теңдеудің де (C-ның қандай да бір мәніне сәйкес) шешімі болады.

▼ $y = y(x), \quad a < x < b,$ функциясы (13) теңдеудің $C = C_0$ мәніне сәйкес үзіліссіз дифференциалданатын шешімі болсын $\Psi(x, y(x)) = C_0, \quad x \in (a, b).$

Алынған тепе-теңдікті x бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{\partial \Psi(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y(x))}{\partial y} \cdot y'(x) = 0, \quad x \in (a, b), \qquad (14)$$

аламыз, яғни $y(x)$ функциясы –

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot y' = 0 \qquad (15)$$

дифференциалдық теңдеуінің шешімі. Ал (15) теңдеу – (3′) дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралының анықтамасына сай алынған құрамында C параметрі жоқ дифференциалдық теңдеу. Сондықтан да (15) және (3′) дифференциалдық теңдеулері эквивалентті, яғни $y(x)$ – функциясы (3′) дифференциалдық теңдеуінің де шешімі.

Керісінше, $y(x)$, $a < x < b$, функциясы (3′) дифференциалдық теңдеудің шешімі болсын. Демек, ол – (3′) дифференциалдық теңдеуге эквивалентті (15) дифференциалдық теңдеудің де шешімі, яғни (14) тепе-теңдік орын алады. Ал (14) тепе-теңдікті келесі түрде жаза аламыз: $\Psi'_x(x, y(x)) = 0, \quad x \in (a, b)$ Бұл теңдікті x_0-ден x-ке дейін интегралдасақ $(x_0 \in (a, b))$,

$$0 \equiv \int_{x_0}^{x} \Psi'_x(x, y(x))dx = \Psi(x, y(x))\Big|_{x_0}^{x} =$$

$$= \Psi(x, y(x) - \Psi(x_0, y(x_0)) = \Psi(x, y(x)) - C_0,$$

яғни $y(x)$ функциясы (a, b) аралығында $\Psi(x, y) = C_0$ теңдеуінің де шешімі болатынын көреміз. ▲

Енді осы теореманы жоғарыдағы екі мысалға қолданып көрейік.

1-мысалда. $y' = 2y, \quad -\infty < y < +\infty,$ (7) дифференциалдық теңдеуінің жалпы интегралын C-ға қатысты шешеміз:

$$ye^{-2x} = C, \quad -\infty < x, \quad y < +\infty. \qquad (8')$$

Бұл теңдеудің сол жағындағы $\Psi(x,y)=ye^{-2x}$ функциясының дербес туындылары: $\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-2ye^{-2x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y}=e^{-2x}$ тікбұрышты (x,y) координаттар жазықтығының кез келген нүктесінде үзіліссіз, демек теорема бойынша (8′)-интеграл (7)-дифференциалдық теңдеуінің барлық шешімдерін қамтиды.

2-мысалда. $(y')^3-27y^2=0$ (12)

дифференциалдық теңдеуінің жалпы $y=(x-C)^3$, $-\infty<x<+\infty$, интегралын C-ға қатысты шешеміз:

$$x-y^{\frac{1}{3}}=C. \qquad (10')$$

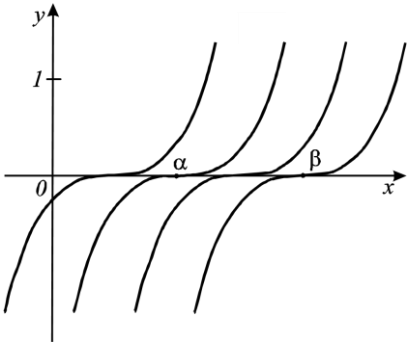
(12) дифференциалдық теңдеудегі $F(x,y,z)=(z)^3-27y^2$ функциясының дербес туындылары $\frac{\partial F}{\partial y}=-54y$, $\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2$, бүкіл $\{(x,y,z)\}\equiv\Omega$ кеңістікте үзіліссіз; Ал $\Psi(x,y)=x-y^{\frac{1}{3}}$ функциясының y бойынша дербес $\frac{\partial\Psi}{\partial y}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}$ туындысы $y=0$ өсінің бойында жоқ, демек теорема шарты орындалмайды. Олай болса (12) дифференциалдық теңдеудің кез келген шешімін оның жалпы ((10) немесе (10′)) интегралынан (C параметрінің қандай да бір мәніне сәйкес) аламыз деп айта алмаймыз. Басқаша айтқанда, (12) дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы ол теңдеудің барлық шешімін қамтымауы мүмкін.

12-суретте (12) дифференциалдық теңдеудің $y=(x-C)^3$ жалпы интегралындағы C-ның әртүрлі мәндеріне сәйкес келетін кубтық параболалар кескінделген.

Бұл параболалардың әрбіреуі – (12) дифференциалдық теңдеудің интегралдық қисығы. Бірақ (12) дифференциалдық теңдеудің осы (немесе (10′)) жалпы интегралдан өзге шешімдері де бар, мысалы, 12-суретте қою сызықпен көрсетілген

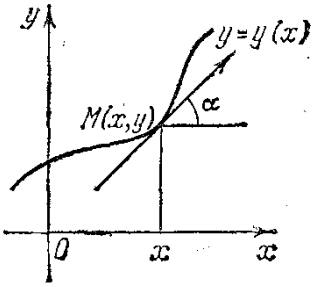
$$y(x)=\begin{cases}(x-\alpha)^3, & x\le\alpha,\\ 0, & \alpha<x<\beta,\\ (x-\beta)^3, & \beta\le x\end{cases}$$

қисығы. Мұндай қисықтар (шешімдер) ақырсыз жиынды құрайды, өйткені олар $\alpha<\beta$ болатын (α,β) сандар жұбына сәйкес алынады. Бұл қисықтарды *C*-ға қандай мән берсек те, жалпы интегралдан шығара алмаймыз.

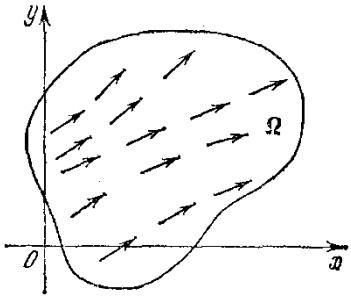


12-сурет

Егер (12) дифференциалдық теңдеуді $y>0$ (немесе $y<0$) жарты кеңістікте қарастырсақ, онда теорема шарты түгелдей орындалады да, (12) дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы оның барлық шешімін қамтиды.



13-сурет



14-сурет

Туынды арқылы шешілген $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ дифференциалдық теңдеу осы дифференциалдық теңдеудің интегралдық қисығының $M(x,y)$ нүктесінің координаттары мен осы нүктеде интегралдық қисыққа жүргізілген бұрыштық коэффициенттері $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ тең жанамасының арасындағы байланысты айқын көрсетіп тұрады (13-сурет). Басқаша айтқанда, егер $f(x,y)$ жазықтықтың қандай да бір Ω аймағында анықталса, онда әрбір $M \in \Omega$ нүктесіне бұрыштық коэффициенті $f(x,y)$ тең белгілі бір бағыт сәйкес келеді. Бұл бағыттарды осы M нүктесінен өтетін бірлік векторлармен кескіндесек Ω-да **бағыттар өрісін** аламыз (14-сурет).

Дифференциалдық теңдеуді шешу дегеніміз – әрбір нүктедегі жанамалардың бағыты өріс бағытымен беттесетін қисықты табу деген сөз.

§ 10.2. Интегралданатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің негізгі кластары

10.2.1. Дифференциал арқылы жазылған дифференциалдық теңдеу. $M(x,y)$ және $N(x,y)$ функциялары (x,y) жазықтығының қандай да бір Ω аймағында үзіліссіз болсын.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad (1)$$

түріндегі өрнек **дифференциал арқылы жазылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Бұл өрнек $y(x)$ функциясына да және $x(y)$ функциясына да қатысты, екі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерді қамтып тұр.

Бірінші жағдайда, (1) **дифференциалдық теңдеудің шешімі** деп, қандай да бір (a,b) аралығында анықталған, үзіліссіз туындысы бар және (1) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын $y = y(x)$ функциясын айтады. Егер (1) теңдеуді dx-ке бөлсек, (x тәуелсіз айнымалдың дифференциалы нөлге тең емес), онда $y(x)$ функциясы

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0,\ \ (x,y)\in\Omega, \qquad (2)$$

түріндегі бірінші ретті қалыпты дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады. (1) мен (2) дифференциалдық теңдеулер $y=y(x)$ түріндегі шешімге қатысты эквивалентті.

Екінші жағдайда да осылайша пайымдай отырып, $x=x(y)$ шешіміне қатысты (1) дифференциалдық теңдеуге эквивалентті

$$M(x,y)\frac{dx}{dy}+N(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Omega, \qquad (3)$$

бірінші ретті қалыпты дифференциалдық теңдеуді алуға болады.

(2) дифференциалдық теңдеуді ($y(x)$ қатысты) қарастырайық.

Егер $(x_0,y_0)\in\Omega$ ***нүктесінде*** $N(x_0,y_0)=0,\quad M(x_0,y_0)\neq 0$ *болса, онда (2) дифференциалдық теңдеудің* (x_0,y_0) *нүктесі арқылы өтетін шешімі болмайды; ал егер* $N(x_0,y_0)=0$, $M(x_0,y_0)=0$ *болса, онда* (2) *дифференциалдық теңдеудің* (x_0,y_0) *нүктесі арқылы өтетін бір немесе бірнеше (саны ақырсыз да) шешімдері болуы мүмкін.*

Енді M және N функциялары Ω аймағында нөлге тең емес болсын. Онда (2) дифференциалдық теңдеуді $\frac{dy}{dx}$-ке қатысты шешілген түрде ($N(x,y)\neq 0,\ \forall(x,y)\in\Omega$)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)},\ \ (x,y)\in\Omega \qquad (2')$$

жазып алсақ, бұдан $y'(x)$-тің таңбасы Ω-да өзгермейтінін аңғарамыз. Яғни $y=y(x)$ шешімі (a,b)-да өспелі немесе кемімелі (қатаң монотонды) функция болады, сондықтан оған кері қандай да бір (c,d) аралығында үзіліссіз дифференциалданатын $x=x(y)$ функциясы бар. Және $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{-\frac{M}{N}}=-\frac{N}{M}$, яғни кері функция (1) дифференциалдық теңдеуге эквивалентті (3) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады.

Сонымен, егер $N(x,y)\neq 0,\ M(x,y)\neq 0,\ \forall (x,y)\in\Omega$ болса, онда (1) дифференциалдық теңдеудің шешімі болатын $x=x(y)$ функция бар болады екен.

10.2.2. Айнымалдары ажыратылған дифференциалдық теңдеулер.

$$\varphi(x)dx=\psi(y)dy,\quad x\in(a,b),\quad y\in(c,d), \tag{4}$$

түрінде жазылады, мұндағы $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функциялары сәйкес (a,b) және (c,d) аралықтарында үзіліссіз.

(4) түрдегі теңдеулердің жалпы интегралы

$$\int\varphi(x)dx=\int\psi(y)dy+C \tag{5}$$

болатынын көрсетейік. Шынында да, егер $y=y(x),\ x\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, функциясы (4) дифференциалдық теңдеудің шешімі болса, онда $\varphi(x)dx=\psi[y(x)]\cdot dy(x),\ x\in(\alpha,\beta)$ тепе-теңдігін аламыз. Одан әрі $\int\varphi(x)dx=\int\psi[y(x)]dy(x)+C_1=\left|y(x)=y\right|=\int\psi(y)dy+C$ немесе

$$\int\varphi(x)dx-\int\psi(y)dy=C \tag{5′}$$

аламыз, яғни (4) дифференциалдық теңдеудің әрбір шешімі соңғы алынған (5) теңдеуді қанағаттандырады. (5′) немесе (5) теңдік (4) дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы болатынын тексерейік. Ол үшін оның анықтамасына сәйкес (5′) теңдігін $y=y\left(x\right)$ деп алып, x бойынша дифференциалдасақ,

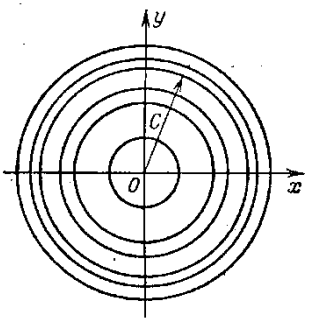
$\left[\int\varphi(x)dx-\int\psi\left[y(x)\right]y'(x)dx\right]_x'=0$ немесе $\varphi(x)dx=\psi(y)dy,$ бастапқы (4) дифференциалдық теңдеуді аламыз. Демек, (5′) немесе (5), анықтама бойынша, (4) – дифференциалдық теңдеудің $y=y(x)$ шешіміне қатысты жалпы интегралы.

Назар аударыңыз. (5′) теңдігінің сол жағын $F(x,y)=\int\varphi(x)dx-\int\psi(y)dy$ арқылы белгілесек, оның дербес

туындылары $\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \psi(y)$ үзіліссіз, яғни $F(x, y)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция екенін көреміз.

Ескерту. x пен y айнымалдарының рөлдерін ауыстырып, осындай пайымдаулар арқылы (5′) немесе (5) теңдік (4) дифференциалдық теңдеудің $x = x(y)$ шешіміне де қатысты жалпы интеграл болатынын көрсетуге болады.

1-мысал. Айнымалдары ажыратылған $xdx + ydy = 0$ дифференциалдық теңдеуді интегралдай отырып, оның $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$ жалпы интегралын аламыз. $x^2 + y^2 \geq 0$ болғандықтан, $2C_1 = C^2$ деп белгілесек, $x^2 + y^2 = C^2$, яғни центрі $O(0,0)$ және радиусі C тең концентрлі шеңберлер жиынтығын аламыз (15-сурет).



15-сурет

10.2.3. Айнымалдары ажыратылатын теңдеулер. Келесі теңдеуді

$$\varphi_1(x) \cdot \psi_1(y)dx + \varphi_2(x) \cdot \psi_2(y)dy = 0 \qquad (6)$$

 айнымалдары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп атайды. Бұл теңдеудің екі жағын $\varphi_2(x) \cdot \psi_1(y)$ көбейтіндіге бөлсек, (мұнда $\varphi_2(x) \cdot \psi_1(y) \neq 0$ екені есте болсын) айнымалдары ажыратылған $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = 0$ түріндегі дифференциалдық

теңдеуді аламыз. Бұл теңдеудің жалпы интегралы (5′) теңдігі сияқты табылады. Бірақ бастапқы (6) теңдеудің, $\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y)=0$ теңдеуін қанағаттандыратын шешімдері болуы да мүмкін.

2-мысал. $xdy+ydx=0$ – айнымалдары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу, мұнда $\varphi_1(x)=x,\ \psi_1(y)=1,\ \varphi_2(x)=1,\ \psi_2(y)=y.$ Теңдеудің екі жағын $x\cdot y\neq 0$ шартын сақтап, $x\cdot y$ көбейтіндісіне бөлсек $\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$ теңдеуін аламыз. Мұны интегралдап $\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{x}=C$ немесе $\ln|y|+\ln|x|=\ln|C|,\ C\neq 0$ аламыз. Мұнда ықшамдау ыңғайлылығына байланысты $C\in(-\infty;+\infty)$ параметрінің орнына $\ln|C|\in(-\infty;+\infty),\ C\neq 0,$ параметрін жаздық.

Соңғы өрнекті ықшамдап, жалпы интегралды табамыз:

$$\ln|y\cdot x|=\ln|C|,\ C\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad |yx|=|C|,\ C\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad yx=C,\ C\neq 0.$$

Бұл түрлендірулердің соңғысы былайша түсіндіріледі:

$$|yx|=|C|,\ C\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} yx=|C|, \quad yx>0,\ C\neq 0,\\ yx=-|C|,\ yx<0,\ C\neq 0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad yx=C,\quad C\in\left(-\infty,+\infty\right),\ C\neq 0.$$

Жалпы интеграл $x\neq 0, y\neq 0$ үшін жазылып тұр. Бірақ $x=0$, $y=0$ түзулері де бастапқы дифференциалдық теңдеудің интегралдық қисықтары болатынын көру қиын емес. Бұл соңғы шешімдерді жалпы интеграл құрамында жазу үшін $C\neq 0$ шектеуін алып тастаса болғаны. ***Жауабы:*** $yx=C$.

Бұл мысалдағы келесі теңдіктердің парапарлығын жиі пайдаланатын боламыз:

$$|yx|=|C| \quad\Leftrightarrow\quad yx=C. \qquad (*)$$

Назар аударыңыз! Тұрақтының қабылдайтын мәндерін сақтай отырып, өрнекті ықшам жазу үшін, оны басқа тұрақтымен белгілеп

отырады. Мысалы, егер $C \in (-\infty, +\infty)$ болса, онда оны $-C \in (-\infty, +\infty)$ немесе $\ln|C| \in (-\infty; +\infty),\ C \neq 0$ т.с.с. тұрақтыларымен ауыстыруға болады.

10.2.4. Біртекті теңдеулер. Егер кез келген x, y және $t > 0$ үшін $M(tx, ty) = t^m M(x, y)$ теңдігі орындалса, онда $M(x, y)$ функциясы ***m*-дәрежелі (немесе *m*- ретті) біртекті функция** деп аталады.

Мысалы, $M(x, y) = \sqrt{2x^2 + xy}$, $N(x, y) = xy - y^2$, $P(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ функциялары сәйкес бірінші дәрежелі, екінші дәрежелі және нөлінші дәрежелі біртекті функциялар. Өйткені $\forall\ t > 0,\ x, y$ үшін

$$M(tx, ty) = \sqrt{2(tx)^2 + tx \cdot ty} = \sqrt{t^2(2x^2 + xy)} = t \cdot \sqrt{2x^2 + xy} = $$
$$= tM(x, y);$$

$$N(tx, ty) = tx \cdot ty - (ty)^2 = t^2(xy - y^2) = t^2 N(x, y),$$

$$P(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{tx \cdot ty} = \frac{t^2 \cdot (x^2 - y^2)}{t^2 \cdot xy} = \frac{x^2 \cdot y^2}{xy} = P(x, y).$$

Егер

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (7)$$

дифференциалдық теңдеуіндегі $M(x, y)$ және $N(x, y)$ функциялары дәрежелері бірдей біртекті функциялар болса, онда (7) теңдеу **біртекті дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Біртекті (7) дифференциалдық теңдеуді былай түрлендіруге болады:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\left(|x| \cdot \dfrac{x}{|x|}, |x| \cdot \dfrac{y}{|x|}\right)}{N\left(|x| \cdot \dfrac{x}{|x|}, |x| \cdot \dfrac{y}{|x|}\right)} = -\frac{|x|^m M\left(\dfrac{x}{|x|}, \dfrac{y}{|x|}\right)}{|x|^m N\left(\dfrac{x}{|x|}, \dfrac{y}{|x|}\right)} =$$

$$= -\frac{M(\pm 1, \pm \frac{y}{x})}{N(\pm 1, \pm \frac{y}{x})} = f(\frac{y}{x}),$$ яғни

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \cdot \qquad (8)$$

Жалпы жағдайда біртекті дифференциалдық теңдеулердің айнымалдары ажыратылмайды. Бірақ оны $\frac{y}{x} = u$ немесе $y = xu$ айнымал ауыстыруын пайдаланып, яғни көмекші $u(x)$ функциясын енгізу арқылы айнымалдары ажыратылатын теңдеуге түрлендіруге болады.

Шынында да, осы ауыстыруды пайдалансақ, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ болады да, (8) дифференциалдық теңдеу $u + x\frac{du}{dx} = f(u)$ немесе $x\frac{du}{dx} = f(u) - u$ түріне келеді. Бұл теңдеудің айнымалдарын ажыратып интегралдасақ, $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + \ln|C|,$ $C \neq 0,$ $\ln|xC| = \int \frac{du}{f(u)-u}$,

$|xC| = e^{\int \frac{du}{f(u)-u}},$ $|x| = \frac{1}{|C|} e^{\int \frac{du}{f(u)-u}},$ $C \neq 0$ аламыз. Соңғы теңдікті (10.2.3 п. 2-мысал, $(*)$ қараңыз) келесі түрде жазуға болады: $x = Ce^{\int \frac{du}{f(u)-u}},$ $C \neq 0$. Мұнда $u = \frac{y}{x}$ ауыстыруын орнына қойып, бастапқы дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын аламыз.

3-мысал. Дифференциалдық теңдеуді шешу керек:

$$(x^2 - 2xy)dy + (y^2 - xy)dx = 0, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

▼ Мұндағы x^2-2xy және y^2-xy функциялары екінші дәрежелі біртекті функциялар (тексеріңіз), демек берілген теңдеу – біртекті. Оны $y=xu,\ \ dy=udx+xdu$ ауыстыруы арқылы

$$(x^2-2x\cdot xu)(udx+xdu)+(x^2u^2-x\cdot xu)dx=0,$$

$$(1-2u)udx+x\cdot(1-2u)du+(u^2-u)dx=0,$$

$x(1-2u)du+(-u^2)dx=0$ түріндегі айнымалдары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіреміз.

Одан әрі ($x\neq 0,\ y\neq 0,$),

$$\frac{1-2u}{u^2}du=\frac{dx}{x},\quad \int\left(u^{-2}-\frac{2}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x}+C,$$

$$\frac{1}{u}+2\ln|u|=-\ln|x|+\ln|C|,\ C\neq 0,$$

$$\ln e^{\frac{1}{u}}+\ln u^2=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,\quad C\neq 0,$$

$$\ln(e^{\frac{1}{u}}\cdot u^2)=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,\qquad u^2e^{\frac{1}{u}}=\frac{C}{x},\ C\neq 0.$$

Бұған $u=\frac{y}{x}$ қойсақ, $\frac{y^2}{x}e^{\frac{x}{y}}=C,\ C\neq 0$ жалпы интегралын табамыз. ▲

Ескерту. (8) дифференциалдық теңдеу келесі дифференциалдық теңдеудің

$$\frac{dy}{dx}=x^{\alpha-1}f\left(\frac{y}{x^\alpha}\right) \tag{9}$$

дербес $(\alpha=1)$ жағдайы. (9) теңдеу, $y=x^\alpha u$ ауыстыруы арқылы айнымалдары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келеді.

10.2.5. Сызықтық теңдеулер. Ізделінетін функция мен оның туындысына қатысты сызықтық,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x),\ x \in (a,b), \tag{10}$$

түріндегі теңдеу **сызықтық дифференциалдық теңдеу** деп аталады, мұндағы $p(x)$, $f(x)$ функциялары (a,b) аралығында үзіліссіз.

Егер $f(x) \equiv 0$ болса, онда

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{11}$$

- **сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеу** деп, ал (10) теңдеу - **сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Біз оларды, жаңылыс тудырмаса, қысқаша сәйкес біртекті теңдеу, біртекті емес теңдеу деп атаймыз.

Біртекті дифференциалдық теңдеу – айнымалдары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Оның жалпы шешімі келесі түрде жазылады

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{12}$$

Шынында да, $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, $y \neq 0$,

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C, \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|,\ C \neq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-\int p(x)dx + \ln|C|},\ C \neq 0, \ \Leftrightarrow \quad |y| = |C|\, e^{-\int p(x)dx,},\ C \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = C \cdot e^{-\int p(x)dx},\ C \neq 0.$$

Бірақ $y = 0$ функциясы да (11) біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімі болатынын көру қиын емес. Ал бұл шешімді жалпы шешімнен $C = 0$ мәні арқылы алуға болады. Олай болса, (10) дифференциалдық теңдеудің шешімдерін алу үшін жалпы шешімдегі $C \in (-\infty,\ +\infty)$ болуы керек.

Ал (10) түрдегі біртекті емес дифференциалдық теңдеуді **Бернулли әдісімен** шығарады. Бұл әдіс бойынша ізделінетін $y(x)$

функцияны екі функцияның көбейтіндісі $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ түрінде іздейді. Бұл екі функцияның біреуі теңдеу барынша ықшамдалатындай етіп таңдалады; ал екіншісі бірінші функцияға байланысты, және ол осы екі функцияның көбейтіндісі берілген дифференциалдық теңдеудің шешімі болатындай етіп алынады.

Сонымен $y'=u'v+uv'$ туындысы мен $y=uv$ функциясын бастапқы (10) дифференциалдық теңдеуге қоямыз

$uv'+u'v+p(x)uv=f(x)$, бұдан

$$uv'+v(u'+p(x)u)=f(x). \qquad (*)$$

Егер осы теңдеудің сол жағындағы қосындының екінші қосылғышын алып тастай алсақ, яғни u функциясын

$$u'+p(x)u=0 \qquad (A)$$

теңдеуінің дербес шешімі болатындай етіп алсақ, онда (*) теңдеуінің айнымалдарын ажыратуға болатынын байқаймыз. Ал (А) теңдеуі айнымалдары ажыратылатын (11) түрдегі ($y=u$) дифференциалдық теңдеу болғандықтан, оның (12) түрдегі жалпы шешімін $u=Ce^{-\int p(x)dx}$ түрде жаза аламыз. Бізге (А)-теңдеудің $u=e^{-\int p(x)dx}$ дербес шешімі жеткілікті. Бұл функцияны (*)-ға қоямыз да, алынған $e^{-\int p(x)dx}\cdot\dfrac{dv}{dx}=f(x)$ түріндегі айнымалдары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуді шешеміз:

$$dv=f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx, \qquad v=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Сонымен (10) сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$y=u\cdot v=e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)=$$

$$=e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (13)$$

Мұндағы екінші қосылғыш (11) сызықтық біртекті

дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, ал бірінші қосылғыш (10) біртекті емес теңдеудің дербес шешімі, өйткені ол (13) жалпы шешімнен $C = 0$ мәніне сәйкес алынады:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx.$$

Олай болса, ***сызықтық біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеуге сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мен біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімінің қосындысына тең болады екен.***

Ескерту. Әрбір мысалға (13) формуланы қолданып жатпастан, көрсетілген амалдарды түгел орындаған жөн.

4-мысал. Коши есебін шешу керек:

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}, \quad y(\pi) = 0.$$

▼ Берілген теңдеу – сызықтық. Олай болса, функция мен туындыны: $y = u \cdot v,\ y' = u'v + uv'$ теңдеуге қойып, оны жоғарыда көрсетілгендей әдіспен шығарамыз:

$$u'v + uv' + \frac{1}{x} uv = \frac{\sin x}{x},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x} v\right) = \frac{\sin x}{x}. \qquad (**)$$

Мұндағы v функциясын, $v' + \frac{1}{x} v = 0$ теңдеуінің дербес шешімі ретінде аламыз. Бұл (11) түрдегі біртекті сызықтық теңдеу болғандықтан оның дербес шешімін (12) теңдіктен $C = 1$ сәйкес аламыз: $v = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$. Мұндағы екі шешімнің біреуін аламыз: $v = \frac{1}{x}$. Бұл функцияны (**)-теңдеуге қоямыз: $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$, $du = \sin x dx, \quad u = -\cos x + C.$ Табылған u мен v көбейтіп,

$y = u \cdot \nu = (-\cos x + C) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x}$, жалпы шешімді аламыз. Енді осы жалпы шешімнен бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешім алу керек: $0 = \frac{-\cos \pi + C}{\pi} \Rightarrow C = -1.$

Жауабы: $y = -\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{x}$. ▲

1-ескерту. (10) біртекті емес дифференциалдық теңдеуді **тұрақтыны вариациялау әдісімен** де шығаруға болады. Ол үшін (11) біртекті теңдеудің (12) жалпы шешіміндегі С тұрақтысын *x*-тің функциясы деп есептеп, $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ өрнегін (10) біртекті емес дифференциалдық теңдеудің шешімі болатындай етіп іздейміз. Бірақ бұл $u = C(x), \quad v = e^{-\int p(x)dx}$ деп алған Бернулли әдісінің өзі.

2-ескерту. Дифференциалдық теңдеу *x* пен $\frac{dx}{dy}$-ке де қатысты сызықтық болып келуі мүмкін. Мысалы, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2xy+3}$ теңдеуі y пен $\frac{dy}{dx}$ бойынша сызықтық емес. Бірақ оны $y \neq 0$ деп алып, $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy+3}{y^2}$ немесе $\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = \frac{3}{y^2}$ түрінде жазсақ, ол x пен $\frac{dx}{dy}$ қатысты сызықтық теңдеу болады. Бұл теңдеуді шешу үшін $x(y) = u(y) \cdot v(y)$ деп алсақ, $x' = u'v + uv'$ және оларды соңғы дифференциалдық теңдеуге қойсақ, $u'\nu + u\nu' - \frac{2}{y} \cdot u\nu = \frac{3}{y^2}$ немесе

$$u'\nu + \left(\nu' - \frac{2}{y}\nu\right)u = \frac{3}{y^2} \qquad (***)$$

аламыз. Мұндағы ν функциясын $\nu' - \frac{2}{y}\nu = 0$ теңдеуінің дербес шешімі ретінде таңдаймыз:

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{2}{y}dy,\ \ln|\nu| = 2\ln|y| + \ln|C|,\ \ln|\nu| = \ln y^2 \cdot |C|,\ \ \nu = y^2 C \ \Rightarrow\ \nu = y^2.$$

Табылған $\nu = y^2$ функциясын (***) теңдеуіне қоямыз:

$$\frac{du}{dy}\cdot y^2 = \frac{3}{y^2},\ du = \frac{3}{y^4}dy,\ u = -\frac{1}{y^3} + C.$$

Енді u мен ν-ны көбейтіп, $x = y^2\left(C - \frac{1}{y^3}\right) = Cy^2 - \frac{1}{y}$ түріндегі жалпы шешімді аламыз. $y = 0$ түзуі де берілген теңдеудің шешімі болатынын көру қиын емес. Жауабы: $x = y^2\left(C - \frac{1}{y^3}\right) = Cy^2 - \frac{1}{y}$, $y=0$. ▲

10.2.6. Бернулли теңдеуі. (Я.Бернулли (1654-1705) – аса көрнекті Швейцария математигі). Бернулли теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$y' + p(x)y = y^{\alpha}\cdot f(x), \quad \alpha \in R, \tag{14}$$

Егер $\alpha = 0$ немесе $\alpha = 1$ болса, онда біз сызықтық дифференциалдық теңдеуді аламыз. Егер $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$ болса, онда $z = y^{1-\alpha}$ айнымал ауыстыруы $z(x)$ функциясы бойынша сызықтық теңдеуге алып келеді. Бірақ Бернулли теңдеуін бірден Бернулли әдісімен де шығаруға болады.

5-мысал. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$ теңдеуін шешу керек.

▼ Бұл – Бернулли ($\alpha = -1$) теңдеуі: $y = u\cdot v$ деп алсақ, $y' = u'v + uv'$. Бұларды теңдеуге қоямыз:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{x^2}{uv},$$

$$u'v + (v' - \frac{v}{x})u = \frac{x^2}{uv}. \qquad (*)$$

ν функциясын $v' - \frac{v}{x} = 0$ теңдеуінің дербес шешімі ретінде таңдаймыз: $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x|$, $v = x$. Енді $v = x$ функциясын (*)-теңдеуге қойып, $\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{x^2}{u \cdot x}$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$, $udu = dx$, $\frac{u^2}{2} = x + C \Rightarrow$ $u = \sqrt{2x + C}$ аламыз. Одан соң u мен ν көбейтіп, $y = u \cdot v = x\sqrt{2x + C}$ жалпы шешімді аламыз. ▲

§ 10.3. Толық дифференциалды дифференциалдық теңдеулер

Егер бірінші ретті

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

дифференциалдық теңдеудің сол жағы белгілі бір $U(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болса, яғни

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y)\,, \qquad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \qquad (2)$$

теңдіктері орындалса, онда (1**) - толық дифференциалды дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Бұл жағдайда (1) дифференциалдық теңдеу $Pdx + Qdy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU(x, y) = 0$ түрінде жазылады да, оның жалпы интегралы $U(x, y) = C$ (C- кез келген сан) болатыны түсінікті. Сондықтан біз мынадай екі басты сұраққа жауап іздеуіміз керек: 1) *Берілген теңдеудің толық дифференциалды теңдеу екенін қалай білуге болады*? 2) *Толық дифференциалы* (1) *теңдеудің сол жағындағы өрнекке тең болатын* $U(x, y)$ *функциясын қалай табуға болады*?

Қойылған сұрақтарға мына теорема жауап береді.

Теорема. Егер қарастырылатын G аймағында $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары үзіліссіз болса, онда осы аймақта (1) теңдеу толық дифференциалды дифференциалдық теңдеу болуы үшін

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{3}$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

▼ ***Қажеттілігі***. (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болсын, яғни қандай да бір $U(x,y)$ функциясы үшін (2) теңдіктер орындалсын. (2) теңдіктердің біріншісін y бойынша, ал екіншісін x бойынша дифференциалдайық: $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Теорема шарты бойынша бұл – теңдіктердің оң жақтары, олай болса сол жақтары да G аймағында үзіліссіз. Ал функцияның екінші ретті аралас туындылары олардың үзіліссіз нүктелерінде өзара тең болатын қасиеттен (3) теңдікті аламыз. Демек, (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болуы үшін, (3) теңдіктің орындалуы қажет екен.

Жеткіліктілігі. Енді (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болуы үшін, (3) теңдіктің орындалуы жеткілікті болатынын, басқаша айтқанда, (3) шарт орындалса (2) теңдіктерді қанағаттандыратын U(x,y) функциясы табылатынын көрсетейік.

(2) теңдіктердің біріншісінен

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y) \tag{4}$$

алуға болады. Мұндағы x_0 – шешімнің бар болу аймағындағы кез келген нүктенің абциссасы. Және интегралдау амалы x бойынша жүретіндіктен, y тұрақты деп есептеледі, сондықтан кез келген интегралдау тұрақтысы y-ке тәуелді болуы мүмкін. Енді осы $\varphi(y)$ функциясын (2) қатыстардың екіншісі орындалатындай етіп таңдаймыз. Ол үшін (4) теңдіктің екі жағын y бойынша дифференциалдап,

(2) теңдіктердің екінші шарты бойынша $Q(x,y)$-ке теңестіреміз:

$\frac{\partial U}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y)$. Бұл теңдікке (3) шартты пайдалансақ, $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\varphi'(y)=Q(x,y)$ немесе $Q(x,y)\big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=Q(x,y)$,

$Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)=Q(x,y)$, ал бұдан $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$ немесе

$\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_1$. Алынған өрнекті (4) теңдікке қойып,

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_1 \qquad (5)$$

аламыз. Мұндағы (x_0,y_0) нүктесі осы нүктенің маңайында (1) дифференциалдық теңдеудің шешімі бар болатындай етіп алынады.

Сонымен (3) шарттың орындалуынан (2) қатыстарды қанағаттандыратын $U(x,y)$ функциясын (***қандай да бір тұрақтыға дейінгі дәлдікпен***) алдық. ▲

Мысал. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$ теңдеуін шешу керек.

▼ Бұл толық дифференциалды теңдеу. Өйткені $(x>0)$

$P(x,y)=\frac{y}{x},\quad Q(x,y)=y^3+\ln x;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x}.$

1-тәсіл. (5) формуланы пайдалану үшін, (x_0,y_0) нүктесін $x>0$ шарты орындалатындай, мысалы, $x_0=1,\ y_0=0$ деп алуға болады (*әрбір интегралдың айнымалдарын шатастырмау керек*)

$$U(x,y)=\int\limits_{1}^{x}\frac{y}{x}dx+\int\limits_{0}^{y}(y^3+\ln 1)dy=y\ln x\Big|_{1}^{x}+\frac{y^4}{4}\Big|_{0}^{y}=y\ln x+\frac{y^4}{4}.$$

2-*тәсіл.* $U(x,y)$ функциясын (2) теңдіктер орындалатындай етіп іздейміз:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y}{x} \quad \text{және} \quad \frac{\partial U}{\partial y}=y^3+\ln x \tag{2′}$$

теңдіктерінің біріншісінен $(x>0)$

$$U(x,y)=\int\frac{y}{x}dx+C(y)=y\ln x+C(y) \tag{4′}$$

аламыз (функция x айнымал бойынша интегралданатындықтан $C(y)$ тұрақты шама қызметін атқарады). Алынған теңдікті y бойынша дифференциалдап алып (2′) теңдіктерінің екіншісіне қоямызда $C(y)$ табамыз

$$\frac{\partial U}{\partial y}=(y\ln x+C(y))'_y=\ln x+C'(y),\ \ln x+C'(y)=y^3+\ln x,\ \ C'(y)=y^3,$$

$C(y)=\int y^3dy+C_1=\frac{y^4}{4}+C_1$. Сонымен $U(x,y)=y\ln x+\frac{y^4}{4}+C_1$.

Ендеше бастапқы теңдеуді $d(y\ln x+\frac{y^4}{4}+C_1)=0$ немесе $d(y\ln x+\frac{y^4}{4})=0$ түрінде жаза аламыз. Бұдан $y\ln x+\frac{y^4}{4}=C$ аламыз. *Жауабы:* $y\ln x+\frac{y^4}{4}=C.$ ▲

Назар аударыңыз! $U(x,y)$ функциясы қандай да бір тұрақтыға дейінгі дәлдікпен табылады!

§ 10.4. Туындыға қатысты шешілмеген бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

дифференциалдық теңдеуді шешу үшін алдымен оны y′ туындысына қатысты шешіп алуға әрекет етуге болады. Егер оны іске асыра алсақ, онда

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{2}$$

түріндегі бір немесе бірнеше қалыпты дифференциалдық теңдеу аламыз және олардың әрбіреуінің кез келген шешімі (1) дифференциалдық теңдеудің де шешімі болады. Бірақ (2) дифференциалдық теңдеудің шешімдері (1) дифференциалдық теңдеудің шешімдерін түгел қамти ма? Осыны байқап отыру керек.

Мысалы,

$$(y')^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0 \tag{3}$$

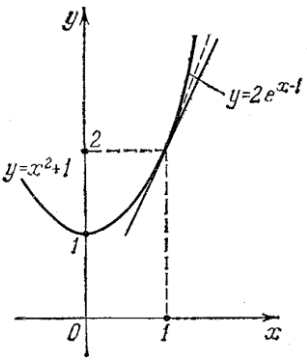
теңдеуін шешу үшін оның сол бөлігін көбейтіндіге тепе-тең түрлендірейік (оны квадрат үшмүшелікті көбейткіштерге жіктеу формуласы арқылы жасауға болады):

$$(y' - 2x)(y' - y) = 0 \tag{4}$$

Бұдан $y' = 2x$, $y' = y$ теңдеулерін аламыз, ал бұл теңдеулердің жалпы шешімдері сәйкес

$$y = x^2 + C_1, \quad y = C_2 e^x \tag{5}$$

болатынын көру қиын емес. Мұндағы C_1 мен C_2 параметрлерінің дербес мәндеріне сәйкес алынатын функциялар (3) дифференциалдық теңдеудің шешулері болатыны түсінікті. Бірақ соңғы екі дифференциалдық теңдеудің осы көрсетілген дербес шешімдерінен (3) дифференциалдық теңдеудің басқа дербес шешімдерін тұрғызуға болады. Мысалы, $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ 2e^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ функциясы (3) дифференциалдық теңдеудің шешімі болады. Бұл интегралдық қисық (5) жиынтықтарға жататын әртүрлі екі интегралдық қисықтан құралған (16-сурет).



16-сурет

Осы айтылған мәселемен қатар, (1) дифференциалдық теңдеу y' туындысына қатысты шешілмейтін немесе шешілсе де, одан алынған (2) дифференциалдық теңдеуді интегралдау қиынға соғатын жағдайлар кездеседі. Сондықтан (1) түрдегі дифференциалдық теңдеулерді

көбінесе параметр енгізу әдісімен шығарады.

Енді осы әдістің кейбір оңайлау вариантарын қарастырайық. Егер (1) дифференциалдық теңдеу ізделінетін y функциясына немесе x аргументіне қатысты шешілетін болса, яғни

$$y = f(x, y') \tag{6}$$

немесе

$$x = g(y, y'), \tag{7}$$

болса, онда (6), (7) теңдеулерді $\frac{dy}{dx} = p$ параметрін енгізу арқылы шешуге болады. Шынында да, осы параметрді (6) теңдеуге қойып $y = f(x, p)$, ал бұдан $dy = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p}dp$ және $dy = pdx$ ескеріп, $pdx = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p}dp$ аламыз. Бұл соңғы теңдеу – $M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0$ түріндегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеу. Егер оның шешімі $x = \Phi(p, c)$ болса, онда бастапқы теңдеудің шешімін келесі p параметрі арқылы жазуға болады: $\begin{cases} x = \Phi(p, c), \\ y = f(x, p). \end{cases}$

Егер $\frac{dy}{dx} = p$ параметрін (7) дифференциалдық теңдеуге енгізсек, онда $x = g(y, p)$, ал бұдан $dx = \frac{1}{p}dy = \frac{\partial g(y, p)}{\partial y}dy + \frac{\partial g(y, p)}{\partial p}dp,$ немесе $P(y, p)dy + Q(y, p)dp = 0$ түріндегі дифференциалдық теңдеу аламыз. Егер соңғы теңдеудің шешімі $y = \varphi(p, c)$ болса, онда (7) дифференциалдық теңдеудің шешімі келесі параметрлік түрде жазылады: $\begin{cases} y = \varphi(p, C), \\ x = g(y, p). \end{cases}$

Ескерту. Егер алынған параметрлік теңдеулердегі параметр шығарылып тасталса, онда берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын аламыз.

1-мысал. $y = y'\sin y' + \cos y'$ теңдеуін шешу керек.

▼ Берілген теңдеуде $y' = p$ деп алсақ, $y = p\sin p + \cos p$ аламыз. Енді x пен p арасындағы тәуелділікті табу үшін алынған теңдіктің екі жағын x бойынша дифференциалдаймыз:

$$y' = p = p'\sin p + p\cdot\cos p\cdot p' - \sin p\cdot p';\quad p = p\cos p\cdot\frac{dp}{dx};$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 = \cos p\cdot\dfrac{dp}{dx}, \\ p = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} dx = \cos p dp, \\ p = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \sin p + C, \\ p = 0. \end{array}\right.$$

Сонымен берілген теңдеудің шешімі

$$\left\{\begin{array}{l} p = 0, \\ y = p\sin p + \cos p \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x = \sin p + C, \\ y = p\sin p + \cos p \end{array}\right.,$$

немесе $p = 0$ мәнін екінші теңдеуге қойсақ,

$$\left[\begin{array}{l} y = 1; \\ \left\{\begin{array}{l} x = \sin p + C \\ y = p\sin p + \cos p. \end{array}\right. \end{array}\right.$$ ▲

2-мысал. $x = \ln y' + \sin y'$ теңдеуін шешу керек.

▼ Егер $y' = p$ деп алсақ, онда $x = \ln p + \sin p$. Енді y пен p параметрінің тәуелділігін табу үшін, алынған теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз ($\dfrac{dy}{dx} = p$ немесе $dx = \dfrac{dy}{p}$ екенін ескереміз)

$$\frac{dy}{p} = (\frac{1}{p} + \cos p)dp\ .$$

Егер бұл теңдеудің айнымалдарын ажыратып алып интегралдасақ, онда $y = \int(1 + p\cos p)dp + C$ немесе $y = p + \cos p + p\sin p + C.$

Сонымен берілген теңдеудің шешімін параметр арқылы

келесі түрде жазуға болады: $\begin{cases} x = \ln p + \sin p, \\ y = p + \cos p + p\sin p + C. \end{cases}$ ▲

Ескерту. $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ және $y = xy' + \psi(y')$ теңдеулері сәйкес **Ж.Лагранж** және **А. Клеро теңдеулері** деп аталады (18-ғ. француз математиктері). Оларды жоғарыда көрсетілген әдіспен шешуге болады. Клеро теңдеуі–Лагранж теңдеуінің дербес жағдайы.

3-мысал. $y = \sqrt{(y')^2 + 1} + xy'$ теңдеуін шешу керек.

▼ Бұл – Клеро теңдеуі. Мұнда $y' = p$ деп алсақ, онда $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$; Енді x пен p арасындағы тәуелділікті табу үшін, алынған теңдікті x бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p\dfrac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \ \vee \ p = C \ .$$

Сонымен берілген Клеро теңдеуінің шешімі

$$\begin{cases} p = C, \\ y = xp + \sqrt{1+p^2} \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y = xp + \sqrt{1+p^2}, \end{cases}$$

немесе p параметрін шығарып тастасақ,

$$y = Cx + \sqrt{1+C^2} \quad \text{және} \quad y = \sqrt{1-x^2} \ . \quad ▲$$

§ 10.5. Ерекше шешімдер

Келесі дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

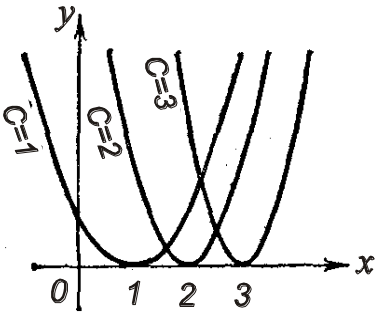
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ . \qquad (1)$$

Егер OXY жазықтығының (x_0, y_0) нүктесінің маңайында

шешімнің бар және оның жалғыз болуы туралы теореманың шарттары орындалса, онда осы нүкте арқылы жалғыз интегралдық қисық өтеді.

Егер шешімнің бар болуы теоремасының шарттары сақталмаса, онда әртүрлі жағдайлар болуы мүмкін: (x_0, y_0) нүктесі арқылы жалғыз ғана интегралдық қисық немесе бірнеше интегралдық немесе ақырсыз жиын құрайтын интегралдық қисықтар өтуі мүмкін немесе (x_0, y_0) нүктесі арқылы өтетін бірде-бір интегралдық қисық болмауы мүмкін.

Егер бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің **интегралдық қисығының әрбір нүктесі арқылы** осы теңдеудің басқа интегралдық қисығы (жанамалап) өтетін болса, онда бұл шешімді **ерекше** деп атайды. (1) дифференциалдық теңдеудегі $f(x, y)$ функциясы қандай да бір Ω аймағында үзіліссіз, ал оның дербес $\frac{\partial f}{\partial y}$ туындысы Ω аймағының барлық нүктелерінде ақырлы және үзіліссіз бола бермейтін жағдайлар жиі кездеседі. $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$ болатын да нүктелер кездеседі. Жалпы алғанда, осындай нүктелердің әрбіреуінде (1) дифференциалдық теңдеудің жалғыз шешімінің бар болу шарты бұзылады, ал егер осындай нүктелер тегіс сызық құраса, онда бұл сызық дифференциалдық теңдеудің ерекше шешімі болуы мүмкін. **Мысалы,** $y = 0$ функциясы $4xyy' - y'^3 - 8y^2 = 0$ теңдеуінің ерекше шешімі. Өйткені оның әрбір нүктесі арқылы осы теңдеудің $y = C(x - C)^2$ шешімі-не сәйкес келетін интегралдық қисықтар жанасады (17-сурет).



17-сурет

§ 10.6. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер

10.6.1. Жалпы ұғымдар және анықтамалар. *n*-ші ретті

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз. Мұндағы $F(u, v_0, v_1, ..., v_n)$ функциясы мен оның $\frac{\partial F}{\partial v_0}, \frac{\partial F}{\partial v_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial v_n}$ дербес туындылары (n+2) өлшемді кеңістіктегі қандай да бір Ω аймағының $(u, v_0, ..., v_n)$ нүктелерінде үзіліссіз деп ұйғарайық. (1) теңдеуді жоғарғы туынды арқылы шешсек,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

аламыз.

Теорема (*шешімнің бар және оның жалғыз болуы туралы*). (2) *теңдеудің оң жағындағы* (n+1) *айнымалды* $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *функциясы және оның* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *дербес туындылары* $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ *нүктесінің қандай да бір* Ω *маңайында үзіліссіз болсын. Онда* $(a; b)$ *аралығында n рет үзіліссіз дифференциалданатын, сонымен бірге* (2) *теңдеуді, әрі мына шарттарды*

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

қанағаттандыратын жалғыз y(x) функциясы мен (a,b) аралығы табылады.

Мұндағы $y(x)$ функциясын – дифференциалдық теңдеуді және ***бастапқы шарт*** деп аталатын (3) теңдіктерді қанағаттандыратын шешім дейді.

Берілген x_0 нүктесі үшін, әрбір $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, $\left(\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in \Omega\right)$ сандар жүйесіне дифференциалдық теңдеудің $y = y\left(x, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ түріндегі шешімі сәйкес келеді. Басқаша айтқанда, егер $y_0 = C_1, y_0' = C_2, ..., y_0^{(n-1)} = C_n$ деп алсақ, онда

берілген x_0 нүктесі үшін әрбір $C_1, C_2, ..., C_n$, $\left((x_0, C_1, C_2, ..., C_n) \in \Omega\right)$ сандар жүйесіне дифференциалдық теңдеудің

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n) \tag{4}$$

түрінде жазуға болатын шешімі сәйкес келеді. Нәтижеде дифференциалдық теңдеудің n параметрге: $C_1, C_2, ..., C_n$ тәуелді шешімдер жүйесін аламыз (оның әрбіреуінің өз анықталу аралығы болады).

(1) немесе (2) дифференциалдық теңдеудің **жалпы шешімі** деп, $C_1, C_2, ..., C_n$ параметрлерінің кез келген мәндерінде $\left((x, C_1, C_2, ..., C_n) \in \Omega\right)$ осы дифференциалдық теңдеудің шешімі болатын $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ функциясын айтады.

Жалпы шешімді айқын емес функция ретінде анықтайтын $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ теңдеуін дифференциалдық теңдеудің **жалпы интегралы** деп атайды.

Мысал. $y'' + y = 0$ теңдеуінің (0,1) нүктесінен өтетін және осы нүктеде бұрыштық коэффициенті $y'(0) = 0$ тең интегралдық қисықты табу керек.

▼ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ функциясы кез келген C_1 мен C_2 тұрақтылары үшін берілген теңдеудің шешімі болатынын тексеру қиын емес. Бұл функциядан $y(0) = C_1 = 1$, $y'(0) = C_2 = 0$ аламыз. Демек бастапқы шарт орындалуы үшін, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ деп алу керек екен. Сонымен ізделінген интегралдық қисық $y = \cos x$. ▲

10.6.2. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.

Ретін төмендетуге болатын n-ретті дифференциалдық теңдеулердің кейбір түрлерін қарастырамыз.

а) $y^{(n)} = f(x)$ түріндегі теңдеудің жалпы шешімін n-рет тікелей интегралдау арқылы ала аламыз

$$y = \underbrace{\int\int ... \int}_{n} f(x) \underbrace{dx dx ... dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1} x + C_n .$$

Мысалы, $y^{IV} = \sin x$ теңдеуінің жалпы шешімі оны төрт рет интегралдау арқылы табылады:

$$y''' = \int \sin dx + C_1 = -\cos x + C_1,$$

$$y'' = \int (-\cos x + C_1)dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int (-\sin x + C_1 x + C_2)dx + C_3 = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int (\cos x + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3)dx + C_4 = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Мұндағы тұрақтыларды өзгертіп белгілеп, жалпы шешімді аламыз: $y = \sin x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

б) Ізделінетін функция мен оның $(k-1)$-ретке дейінгі туындылары теңдеуге айқын түрде енбейтін $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеулердің ретін $y^{(k)} = p(x)$ ауыстыруы арқылы k бірлікке төмендетуге болады: $F(x, p, p', .., p^{(n-k)}) = 0$. Егер соңғы алынған теңдеудің жалпы шешімі $p(x) = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ болса, онда $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$, яғни **а)** түрдегі k-рет тікелей интегралдау арқылы шешілетін теңдеуге келеміз.

Мысал. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$ теңдеуінің $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $y''(1) = -1$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек.

▼ Берілген теңдеуде y пен y' айқын түрде қатыспаған. $y'' = p$ деп алсақ, берілген теңдеу $x^4 p' + 2x^3 p = 1$ түріне ие болады. Бұл – бірінші ретті сызықтық теңдеу. Оны, мысалы, Бернулли әдісімен шешіп, $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$ түріндегі жалпы шешімін аламыз. Бұл шешімнен $y''(1) = p(1) = -1$ бастапқы шартын пайдалансақ, $-1 = -1 + C_1$, $C_1 = 0$ шығады. Бұл мәнді жалпы шешімдегі орнына қойсақ $y'' = -\frac{1}{x^3}$, яғни **а)** түріндегі теңдеуді аламыз. Алынған теңдеуді тікелей интегралдасақ $y' = \frac{1}{2x^2} + C_2$, ал бұл шешімге

$y'(1)=\frac{1}{2}$ шартын пайдалансақ $C_2=0$. Тұрақтының осы мәнін орнына қойып $y'=\frac{1}{2x^2}$ аламыз да, оны тағы бір рет интегралдасақ $y=-\frac{1}{2x}+C_3$ аламыз. Осы шешімнен бастапқы шарттың $y(1)=\frac{1}{2}$ теңдігін пайдаланып C_3=1 аламыз. Сонымен ізделінген дербес шешім $y=1-\frac{1}{2x}$ түріндегі гипербола екен. ▲

в) Тәуелсіз айнымал айқын түрде қатыспайтын

$$F(y,y',...,y^{(n)})=0$$

теңдеуі $y'=p(y)$ ауыстыруы арқылы реті бірге төмендетілген теңдеуге келеді. Бұл алмастыру үшін

$$y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

$$y'''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dp}{dy}+p\cdot\frac{d^2p}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

т.с.с. теңдіктер орындалады.

Мысал. $y'^2+2y\cdot y''=0,\ y>0$ теңдеуін шешу керек.

▼ $y'=p(y), y''=p\frac{dp}{dy}$ ауыстыруын пайдалансақ, $p^2+2y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}=0$ аламыз. Алынған теңдеуді шешейік:

$$p^2+2y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} p=0, \\ \frac{dp}{p}=-\frac{dy}{2y}, \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} p=0, \\ \ln|p| = -\dfrac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|, \ C_1 \neq 0. \end{array}\right.$$

Мұндағы екінші теңдеуден $p = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$, $C_1 \neq 0$ немесе оны $p = 0$ түріндегі бірінші теңдеумен біріктіріп (ол үшін $C_1 \neq 0$ шартын алып тастаймыз), $p = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$, ал бұдан $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = C_1 dx$, $\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2$ аламыз. ▲

г) Егер

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

теңдеуінің сол жағы $y, y', ..., y^{(n)}$ айнымалдарына қатысты m-дәрежелі біртекті функция болса, яғни

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}), \quad t > 0$$

теңдігі орындалса, онда бұл теңдеудің ретін $y' = yz$, $y \neq 0$, түрінде жаңа функция енгізу арқылы төмендетуге болады.

Мысал. $x^2 y \cdot y'' = (y - x \cdot y')^2$ теңдеуін шешу керек.

▼ Бұл теңдеу y, y', y'' айнымалдарына қатысты 2 дәрежелі біртекті. $y = 0$ түзуі берілген теңдеудің шешімі болатыны көрініп тұр. Біз $y \neq 0$ деп ұйғарып, келесі амалдарды орындаймыз:

$$y' = yz, \quad y'' = (y')' = y'z + y \cdot z' = y \cdot z \cdot z + y \cdot z' = y(z^2 + z').$$

Осы туындыларды берілген теңдеуге қойсақ,

$x^2 y \cdot y(z^2 + z') - (y - xyz)^2 = 0$, $y^2[x^2(z^2 + z') - (1 - xz)^2] = 0$, ал бұдан $y \neq 0$ екенін ескерсек, $x^2 z^2 + x^2 \cdot z' - 1 + 2xz - x^2 z^2 = 0$, $x^2 \cdot z' + 2xz = 1$ сызықтық теңдеуді аламыз. Ал бұл теңдеудің сол жағы $(x^2 z)' = x^2 \cdot z' + 2xz$ түрінде жазылатынын байқасақ, $(x^2 z)' = 1$

болады. Соңғы теңдеуден $x^2 z = \int dx + C_1,\ x^2 z = x + C_1,\quad z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$

аламыз. Енді бұған $dy = yzdx$ немесе $\frac{dy}{y} = zdx$ теңдігін пайдаланып, оны интегралдаймыз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \right) dx + C_2,\ \ln|y| = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0,$$

$$|y| = e^{\ln|x \cdot C_2| - \frac{C_1}{x}} = |C_2 x| \cdot e^{-\frac{C_1}{x}},\ C_2 \neq 0,\ y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}},\ C_2 \neq 0.$$

Бұрынғы $y = 0$ шешімді осы жалпы шешім құрамында жазу үшін, $C_2 \neq 0$ шартын алып тастаса болғаны. Сонымен берілген теңдеу шешімі $y = C_2 x \cdot e^{-\frac{C_1}{x}}$. ▲

§ 10.7. Жоғарғы ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

10.7.1. Негізгі ұғымдар. *n*-ші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу деп

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + p_1(x) y' + p_0(x) y = f(x),\quad a < x < b \qquad (1)$$

түріндегі теңдеуді айтады. Мұндағы $f(x),\ p_i(x),\ i = 0,1,...,n-1$ функциялары $(a;b)$ аралығында үзіліссіз. (1) теңдеудегі ізделінетін $y(x)$ функциясы мен оның $y', y', ..., y^{(n-1)}$ туындыларының дәреже көрсеткіштері бірге тең, яғни теңдеу $y, y', ..., y^{(n-1)}$ айнымалдарына қатысты сызықтық. Теңдеудің сол жағындағы өрнекті $L_n[y]$ арқылы белгілеп: $L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + p_1(x) y' + p_0(x) y$, оны ***n*-ші ретті дифференциалдық оператор** деп атайды. Сұрақ тудырмайтын жағдайда бұл операторды $L[y]$ арқылы белгілейміз. Мысалы, егер $L_2[y] = y'' + y$ болса, онда $L[\sin x] = -\sin x + \sin x = 0;$ $L[x^2] = 2 + x^2.$

$L[y]$ ***операторы үшін келесі екі қасиет орындалады:***

1°. Кез келген C тұрақты үшін $L[C \cdot y] = C \cdot L[y]$ оператордың біртектілігі);

2°. $\forall\, y_1, y_2,\ L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ (оператордың аддитивтілігі).

Бұл теңдіктердің дұрыстығына туындының келесі сәйкес

$$[C \cdot y(x)]^{(n)} = C \cdot y^{(n)}(x) \text{ және}$$

$$[y_1(x) + y_2(x)]^{(n)} = y_1^{(n)}(x) + y_2^{(n)}(x)$$

қасиеттеріне сүйене отырып, көз жеткізуге болады. Мысалы,

$$L[y_1 + y_1] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + ... + p_1(x)(y_1 + y_2)' +$$
$$+ p_0(x)(y_1 + y_2) = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + p_{(n-1)}(x) \cdot y_1^{(n-1)} +$$
$$+ p_{(n-1)}(x) \cdot y_2^{(n-1)} + ... + p_0(x) \cdot y_1 + p_0(x) y_2 = L[y_1] + L[y_2],$$

яғни 2° дұрыс. 1° қасиетте осылай дәлелденеді.

Біртекті аддитивті оператор **сызықтық оператор** деп аталады.

Енді (1) теңдеуді ықшам түрде жазуға болады:

$$L[y] \equiv L_n[y] = f(x), \quad a < x < b. \tag{1′}$$

Егер $f(x) \equiv 0$ болса, онда

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0, \quad a < x < b, \tag{2}$$

немесе

$$L_n[y] = 0, \quad a < x < b, \tag{2′}$$

теңдеуін n-ші ретті сызықтық **біртекті** дифференциалдық теңдеу деп, ал (1) немесе (1′) теңдеуді n-ші ретті сызықтық **біртекті емес** дифференциалдық теңдеу деп атайды.

Егер $f(x)$***,*** $p_0(x), ..., p_{n-1}(x)$ ***функциялары*** (a, b) ***аралығында үзіліссіз болса, онда*** **(1)** ***дифференциалдық теңдеудің*** $(a; b)$ ***аралығында анықталған,*** $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ ***бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімі бар және ол тек қана біреу*** болатынын дәлелдеуге болады.

1-теорема. Егер $y_1,...,y_m$ функциялары (2) біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімдері болса, онда олардың сызықты комбинациясы да: $C_1y_1+...+C_my_m=\sum_{k=1}^{m}C_ky_k$ осы (2) біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімі.

▼ Теорема шарты бойынша $i=1,2,...,m$ нөмірлері үшін $L_n[y_i]=0$ болатындықтан, L операторының сызықтық қасиетін (біртектілігі, аддитивтілігі) пайдалансақ,

$$L_n\left[\sum_{k=1}^{m}C_ky_k\right]=\sum_{k=1}^{m}L_n\left[C_k\cdot y_k\right]=\sum_{k=1}^{m}C_kL_n\left[y_k\right]=\sum_{k=1}^{m}C_k\cdot 0=0,$$

яғни $\sum_{k=1}^{m}C_ky_k$ қосындысының (2) біртекті дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратынын көреміз. ▲

10.7.2. Сызықты тәуелді және сызықты тәуелсіз функциялар. Вронскиан. Егер кез келген $x\in(a;b)$ нүктесі үшін

$$\alpha_1y_1(x)+...+\alpha_m\cdot y_m(x)\equiv 0 \qquad (1)$$

тепе-теңдігі орындалатындай ең болмағанда біреуі нөлге тең емес $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ сандары табылса, онда $y_1(x),...,y_m(x)$ функциялары (a,b) **интервалында сызықты тәуелді** деп аталады. Басқаша айтқанда, егер $y_1(x),...,y_m(x)$ функцияларының біреуі $\forall x\in(a,b)$ нүктелері үшін қалған функциялардың сызықты комбинациясы болса: $y_i(x)=C_iy_1(x)+...+C_{i-1}y_{i-1}+\ +C_{i+1}y_{i+1}+...+C_my_m(x)$, онда функциялар $(a;b)$ **интервалында сызықты тәуелді** деп аталады.

Мысалы, $y_1=\cos^2x$ және $y_2=1+\cos2x$ функциялары $(-\infty;+\infty)$ интервалында сызықты тәуелді, өйткені $\forall x\in\left(-\infty;+\infty\right)$, $1\cdot\cos^2x-\frac{1}{2}\left(1+\cos2x\right)\equiv 0$ немесе $\cos^2x=\frac{1}{2}\left(1+\cos2x\right)$.

Егер (1) тепе-теңдік тек барлық $\alpha_i=0,\ i=1,...,m$ болғанда және тек сонда ғана орындалса, онда $y_1,...,y_m$ функциялары $(a;b)$ аралығында **сызықты тәуелсіз** деп аталады. Мысалы, $y_1=\operatorname{tg}x$

және $y_2 = \operatorname{ctg} x$ функциялары $(0;\frac{\pi}{2})$ интервалында сызықты тәуелсіз, өйткені осы интервалда $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg}^2 x \neq const$. Басқаша айтқанда, $\alpha_1 \cdot tgx + \alpha_2 \cdot ctgx = 0$ теңдігі, тек $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0$ болса ғана орындалады.

2-теорема. $(a;b)$ интервалында $(m-1)$ -ші ретке дейінгі туындылары бар $y_1(x),...,y_m(x)$ функциялары берілсін. Егер бұл функциялар $(a;b)$ интервалында сызықты тәуелді болса, онда әрбір $x \in (a,b)$ нүктесі үшін келесі тепе-теңдік орындалады:

$$W\left[x, y_1,...,y_m\right] = \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_m(x) \\ y_1'(x) & ... & y_m'(x) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(m-1)}(x) & ... & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Аталған анықтауыш ***вронскиан*** немесе ***Вронский анықтауышы*** деп аталады (Ю.Гене-Вронский (1778-1853) – Польша математигі).

▼ $y_1,...,y_m$ функциялары $(a;b)$ интервалында сызықты тәуелді болғандықтан, осы интервалда

$$\alpha_1 y_1(x) + ... + \alpha_m \cdot y_m(x) \equiv 0, \qquad a < x < b, \qquad (3)$$

тепе-теңдігі орындалатындай ең болмағанда біреуі нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m$ сандары табылады (анықтаманы қараңыз). (3) тепе-теңдікті $(m-1)$ рет дифференциалдай отырып, келесі m біртекті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + ... + \alpha_m \cdot y_m(x) \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) + ... + \alpha_m \cdot y_m'(x) \equiv 0, \\ ..... \\ \alpha_1 y_1^{(m-1)}(x) + ... + \alpha_m \cdot y_m^{(m-1)}(x) \equiv 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Бұл теңдеулер жүйесінің тривиалды емес $(\alpha_1,...,\alpha_m)$ шешімі бар. Егер (2) вронскиан ең болмағанда бір $x_0 \in (a,b)$ нүктесінде

нөлге тең болмаса $W[x_0, y_1, ..., y_m] \neq 0$, онда (4) біртекті теңдеулер жүйесінің x_0 нүктесінде жалғыз шешімі болар еді және ол шешім тривиал $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$ болар еді де, біз теорема шартының бұзылуына келер едік. Теорема дәлелденді. ▲

Салдар. Бұл теоремадан контрапозиция заңына $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ сүйеніп, келесі тұжырымды жасай аламыз.

Егеркез келген $x \in (a;b)$ ***үшін (2) теңдік орындалмаса, онда*** $y_1, ..., y_m$ ***функциялары*** $(a;b)$ ***аралығында сызықты тәуелді емес.***

1-мысал. $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2, ..., y_m = x^{m-1}$ функциялары кез келген (a,b) интервалында сызықты тәуелсіз.

▼ Өйткені, кез келген $x \in (-\infty; +\infty)$ нүктесі үшін

$$W[1, x, x^2, ..., x^{(m-1)}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & ... & x^{m-1} \\ 0 & 1 & 2 \cdot x & 3x^2 & ... & (m-1)x^{m-2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 \cdot 3 \cdot x & ... & (m-1)(m-2)x^{m-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ..... & (m-1)! \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2! \cdot 3! \ldots (m-1)! \neq 0. \quad ▲$$

2-мысал. $y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}, ..., y_m = x^{m-1}e^{kx}$ функциялары кез келген $(a;b)$ интервалында сызықты тәуелсіз.

▼ Бұл тұжырымды сызықты тәуелсіз функциялар анықтамасы арқылы дәлелдейік:

$$\alpha_1 e^{kx} + \alpha_2 x e^{kx} + ... + \alpha_m x^{m-1} e^{kx} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{kx}(\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + ... + \alpha_m \cdot x^{m-1}) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + ... + \alpha_m \cdot x^{m-1} = 0.$$

1, $x, \ldots, x^{m-1}$ функциялары кез келген $(a;b)$ интервалында сызықты тәуелсіз болғандықтан (1-мысал), соңғы теңдік, демек бастапқы теңдік, тек $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ болса ғана орындалады

$(e^{kx} \neq 0)$. ▲

3-мысал. Егер $k_1, k_2, ...k_m$ әртүрлі (өзара тең емес) сандар болса, онда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}, ..., y_m = e^{k_m x}$ функциялары кез келген $(a;b)$ интервалында сызықты тәуелсіз.

▼ $$W[e^{k_1 x}, ..., e^{k_m x}] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & ... & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & ... & k_m e^{k_m x} \\ ..... & & ..... \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & ... & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} ... e^{k_m x} \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ k_1 & .... & k_m \\ ..... & & ..... \\ k_1^{m-1} & .... & k_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Бұл анықтауыш **дәрежелік** немесе **Вандермонд анықтауышы** деп аталады және оның мәні

$(k_m - k_1) \cdot (k_{m-1} - k_1) \cdot ... \cdot (k_2 - k_1) \cdot (k_m - k_2) \cdot (k_{m-1} - k_2) \cdot ... \cdot (k_3 - k_2) \cdot$ $... \cdot (k_m - k_{m-2}) \cdot (k_{m-1} - k_{m-2}) \cdot (k_m - k_{m-1})$ тең екенін математикалық индукция әдісімен көрсетуге болады (А.Т.Вандермонд (1735-1796) – Франция математигі). Сонымен $k_1, ..., k_m$ әртүрлі сандар болса, онда $W\left[e^{k_1 x}, ..., e^{k_m x}\right] \neq 0, \ \forall x \in R.$ ▲

10.7.3. Дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерінің құрылымы. Алдымен келесі маңызды анықтаманы келтірейік.

$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0$, $x \in (a;b)$, (1) біртекті *n*-ші ретті дифференциалдық теңдеудің $p_i(x)$, i=0,1,…,n–1, коэффициенттері $(a;b)$ интервалында үзіліссіз болсын. Егер осы теңдеудің $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, $x \in (a,b)$ шешімдері $(a;b)$ интервалында сызықты тәуелсіз функциялар болса, онда бұл шешімдер **теңдеудің фундаменталды (**іргелі**) шешімдер жүйесі** деп аталады.

Назар аударыңыз. Мұнда дифференциалдық теңдеудің реті мен шешімдер саны бірдей: *n*-ге тең.

Енді жоғарғы ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдері туралы мәселені қарастырайық.

Алдымен сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімінің құрылымын қарастырайық.

3-теорема (*біртекті теңдеудің жалпы шешімі туралы*). Егер $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялары (1) біртекті теңдеудің (a,b) интервалында фундаменталды шешімдер жүйесін құраса, онда

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot y_k(x), \quad a < x < b, \tag{2}$$

(C_k, $k = 1,2,...,n$ – кез келген сандар) функциясы – (1) теңдеудің жалпы шешімі.

Басқаша айтқанда, C_k, $k = 1,2,...,n$ *тұрақтыларының кез келген мәндерінде* (2) *қосынды* (1) *теңдеудің шешімі болады және, керісінше,* (1) *теңдеудің әрбір шешімін* C_k *тұрақтыларының белгілі бір мәндеріне сәйкес* (2) *қосынды түрінде жазуға болады*.

▼ 1 теоремада (2) қосындының $L_n[y] = 0$ теңдеуінің шешімі болатынына көз жеткізгенбіз. Енді керісінше, (1) теңдеудің әрбір $z(x)$ шешімі (2) қосынды түрінде жазылатынын көрсетейік. Бұл шешімнің және оның туындыларының x_0 нүктесіндегі мәндері былай белгілейік:

$$z(x_0) = z_0, \; z'(x_0) = z_0', ..., \; z^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

Сонымен $z(x)$ функциясы (1) дифференциалдық теңдеудің (3) алғашқы шарттарды қанағаттандыратын шешімі болсын. Осы $z_0, z_0', ..., z_0^{(n-1)}$ сандары үшін C_k, $k = 1,2,...,n$ белгісіз сандарына қатысты теңдеулер жүйесін құрамыз және бұл жүйе (2) қосынды арқылы құрылады:

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = z_0, \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = z_0', \\ ..... \\ y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{4}$$

Бұл жүйенің анықтауышы $y_1, y_2, ..., y_n$ функцияларының вронскианы болатынын көреміз. Ал $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялары (a,b)

интервалында сызықты тәуелсіз болғандықтан, $W[x_0, y_1, ..., y_n] \neq 0$. Олай болса (4) жүйенің (берілген $z_0, z_0', ..., z_0^{(n-1)}$ сандарына сәйкес) жалғыз $(C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ шешімі бар. Осы алынған мәндерді (2)-ге қойып, (1) дифференциалдық теңдеудің

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x) \qquad (2')$$

түріндегі шешімін аламыз. Ал (3) бастапқы шарттарды $z(x)$ шешімімен қатар, (2′) шешім де қанағаттандыратыны (4) жүйеден көрініп тұр. Сондықтан 10.7.1 пунктте шешімнің жалғыз болуы туралы теорема бойынша $z(x) = y(x)$, $x \in (a,b)$ тепе-теңдігін аламыз. Олай болса $z(x)$ шешімі (2′) қосындысы түрінде жазылады. Ал (2′) теңдігі – (2) қосындысының $C_k = C_k^0$, $k = 1, 2, ..., n$ мәндеріне сәйкес түрі. Теорема дәлелденді. ▲

Енді сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімінің құрылымын қарастырайық.

4-теорема (біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі туралы)

$$L_n[y] = f(x), \quad a < x < b, \qquad (5)$$

біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі осы біртекті емес теңдеудің қандай да бір $\bar{y}$ **дербес шешімі** мен $L_n[y] = 0, \ a < x < b,$ - біртекті теңдеудің y_0 **жалпы шешімінің** қосындысына тең:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) \equiv \bar{y} + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k. \qquad (6)$$

▼ Шынында да, $L_n[\bar{y}] = f(x), \ L_n[y_0] = 0$ тепе-теңдіктерінен $L_n[y] = L_n[\bar{y} + y_0] = L_n[\bar{y}] + L_n[y_0] = f(x) + 0 = f(x),$ яғни $\bar{y} + y_0$ қосындысы (1) біртекті емес теңдеудің шешімі болатынын көреміз.

Керісінше, $y(x)$ функциясы (1) біртекті емес дифференциалдық теңдеудің қандай да бір шешімі болсын. Онда $y - \bar{y}$ айырымы – біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімі, өйткені $L_n[y - \bar{y}] = L_n[y] - L_n[\bar{y}] = f(x) - f(x) = 0.$ Сондықтан 3-теорема

бойынша $y(x)-\overline{y}(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x)$ немесе $y(x)=\overline{y}(x)+\sum_{k=1}^{n}C_k y_k(x)$ теңдігі орындалатындай C_k, $k=1,...,n$ мәндері табылады. Ал бұл – (6) теңдіктің C_k, $k=1,...,n$ мәндеріне сәйкес түрі. Теорема дәлелденді. ▲

Сонымен $L_n[y]=f(x)$ сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, осы теңдеудің қандай да бір $\overline{y}$ дербес шешімі мен $L_n[y]=0$ біртекті теңдеудің жалпы шешімін табу керек екен. Енді осы сұрақтардың шешу жолдарын қарастырайық.

Алдымен қарастыратынымыз – тұрақтыларды вариациялау әдісі.

§10.8. $L_n[y]=f(x)$ түріндегі теңдеудің дербес шешімін тұрақтыларды вариациялау арқылы табу (Лагранж әдісі)

Біртекті емес сызықтық *n*-ші ретті дифференциалдық теңдеуді

$$L_n[y]=y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x) \qquad (1)$$

қарастырайық. Мұндағы $p_i(x)$, $i=0,1,...,n-1$, және $f(x)$ функциялары (a,b) аралығында үзіліссіз.

Егер (1) теңдеуге сәйкес біртекті

$$L_n[y]=0 \qquad (2)$$

теңдеудің фундаменталды шешімдер жүйесі $y_1,y_2,...,y_n$ белгілі болса, онда (1) біртекті емес теңдеудің дербес шешімін **тұрақтыларды вариациялау (Лагранж әдісі)** арқылы табуға болады. Бұл әдіс бойынша, (1) теңдеудің дербес шешімі, (2) біртекті теңдеудің $y_0=\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot y_i(x)$ – жалпы шешіміндегі C_k, $k=1,...,n$ тұрақтыларын қандай да бір үзіліссіз дифференциалданатын $C_1(x)$, $C_2(x)$, ... , $C_n(x)$ функциялары ретінде ала отырып ізделінеді:

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x). \qquad (3)$$

Мұндағы $C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots, C_n(x)$ функцияларды табу үшін олардың туындыларына қатысты құрылған келесі теңдеулер жүйесін пайдаланады

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (4)$$

▼ Бұл жүйені құру схемасын үшінші ретті $(n=3)$ сызықтық теңдеу үшін келтірейік.Ол үшін (1) теңдеуді $n=3$ үшін жазайық:

$$L_3[y] = y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x). \qquad (5)$$

Бұл теңдеуге сәйкес біртекті $L_3[y]=0$ теңдеудің жалпы шешімін фундаменталды y_1, y_2, y_3 шешімдері арқылы жазайық

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x). \qquad (6)$$

(5) біртекті емес теңдеудің дербес шешімін (6) қосындыдағы C_1, C_2, C_3 тұрақтыларын қандай да бір үзіліссіз дифференциалданатын $C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x)$ функциялары ретінде аламыз

$$\overline{y} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + C_3(x) y_3(x). \qquad (7)$$

$C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x)$ функцияларын табу үшін осы үш белгісіз функцияларға қатысты үш теңдеу жүйесін алу керек. Екі теңдеуді $C_i(x),\ i=1,2,3$ функциялары келесі екі шартты қанағаттандыратындай етіп құрамыз:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_3'(x)y_3'(x) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ықшамдылық үшін, функцияларды аргументсіз жазып, (6) теңдікті (8) екі шартты пайдалана отырып дифференциалдаймыз

$$y' = \underline{C_1' \cdot y_1} + C_1 \cdot y_1' + \underline{C_2' \cdot y_2} + C_2 \cdot y_2' + \underline{C_3' \cdot y_3} + C_3 \cdot y_3' =$$

$$= C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3';$$

$$y'' = \underline{C_1' \cdot y_1'} + C_1 y_1'' + \underline{C_2' \cdot y_2'} + C_2 \cdot y_2'' + \underline{C_3' \cdot y_3'} + C_3 \cdot y_3'' =$$

$$= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'';$$

$$y''' = \underline{C_1' \cdot y_1''} + C_1 y_1''' + \underline{C_2' \cdot y_2''} + C_2 \cdot y_2''' + \underline{C_3' \cdot y_3''} + C_3 \cdot y_3''' =$$

$$= (C_1 y_1''' + C_2 y_2''' + C_3 y_3''') + (C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'')$$

(асты сызылған қосылғыштарға (8) шартты қолдандық). Табылған үш туынды мен (7) функцияны (5) теңдеуге қоямыз және алынған қосылғыштарды сәйкес y_1, y_2, y_3 функцияларының туындыларына қатысты жеке-жеке топтаймыз (y, y', y'', y''' функцияларын (5) теңдеуге қоймас бұрын, алдын ала оларды сәйкес $p_0, p_1, p_2, 1$ коэффициенттеріне көбейтіп алған дұрыс):

$$C_1(y_1''' + p_2 \cdot y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1) + C_2(y_2''' + p_2 \cdot y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2) +$$

$$+ C_3(y_3''' + p_2 \cdot y_3'' + p_1 y_3' + p_0 y_3) + (C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'') = f(x) .$$

Енді y_1, y_2, y_3 функциялары біртекті теңдеудің шешімдері, яғни $L_3[y_i] = 0$, $i = 1,2,3$ болатынын ескерсек, соңғы теңдіктен қажетті үшінші теңдеуді аламыз

$$C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'' = f(x) \quad (9)$$

Сонымен $C_1'(x),\ C_2'(x), C_3'(x)$ белгісіздеріне қатысты үш

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'\ (x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = f(x). \end{cases} \quad (10)$$

сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін алдық. Бұл жүйенің анықтауышы y_1, y_2, y_3 сызықты тәуелсіз функцияларының вронскианы, сондықтан ол нөлге тең емес. Демек (Кронекер-Капелли теоремасы), (10) жүйенің C_1', C_2', C_3' белгісіздеріне қатысты жалғыз шешімі бар: $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$, $C_3' = \varphi_3(x)$. Мұндағы $\varphi_i(x)$ функциялары (a,b) аралығында үзіліссіз болғандықтан, олардың осы аралықта алғашқы функциялары бар: $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \tilde{C}_i$, $i = 1,2,3$. Дербес шешім үшін $\tilde{C}_i = 0$, $i = 1,2,3$ деп алсақ болғаны. Бұл табылған функцияларды (7) теңдікке қойып, (5) біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін аламыз. ▲

Мысал. Біртекті емес $xy'' + 2y' + xy = 1$, $x \neq 0$, дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін, біртекті $xy'' + 2y' + xy = 0$, $x \neq 0$ дифференциалдық теңдеудің мына жалпы шешіміндегі

$$y = C_1 \cdot \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \tag{11}$$

C_1, C_2 тұрақтыларын вариациялау арқылы табу керек.

▼ (11) теңдіктегі C_1, C_2 тұрақтыларын функция ретінде жазсақ, біртекті емес теңдеудің дербес шешімі келесі түрге ие болады $\bar{y} = C_1(x) \cdot \frac{\cos x}{x} + C_2(x) \frac{\sin x}{x}$. Мұндағы $C_1(x)$, $C_2(x)$ функцияларын табу үшін (4) жүйені $n = 2$ деп алып пайдаланамыз.

Екінші $n = 2$ ***ретті дифференциалдық теңдеу үшін*** **(4)** жүйе келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases} \tag{12}$$

Мұнда $y_1 = \frac{\cos x}{x}$, $y_2 = \frac{\sin x}{x}$, ал $y_1' = \left(\frac{\cos x}{x} \right)' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$,

$y_2' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ тең болғандықтан келесі жүйені аламыз

$$\begin{cases} C_1' \cdot \frac{\cos x}{x} + C_2' \cdot \frac{\sin x}{x} = 0, \\ C_1' \cdot \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} + C_2' \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

(біздің мысалымызда $f(x) = \frac{1}{x}$, өйткені берілген дифференциалдық теңдеуді (1) түрге келтіру үшін, оның екі жағын x-ке бөлу керек). Бастапқы теңдеу $x \neq 0$ үшін берілгендіктен, алынған жүйе мына жүйеге парапар

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos x + C_2' \cdot \sin x = 0, \\ C_1' \cdot (-x\sin x - \cos x) + C_2' \cdot (x\cos x - \sin x) = x. \end{cases}$$

Бұл жүйені Крамер ережесі бойынша шешейік

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -x\sin x - \cos x & x\cos x - \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= x\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x + x\sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = x\ ;$$

$$C_1' = \frac{1}{x} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ x & x\cos x - \sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \cdot (-x \cdot \sin x) = -\sin x;$$

$$C_2' = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -x\sin x - \cos x & x \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \cdot x \cdot \cos x = \cos x.$$

Алынған функцияларды интегралдап, $C_1(x) = \cos x$, $C_2(x) = \sin x$ аламыз (біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі үшін интегралдаудан шығатын $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ тұрақтыларын нөлге тең деп алдық). Олай болса, біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі $\bar{y} = \cos x \cdot \frac{\cos x}{x} + \sin x \cdot \frac{\sin x}{x} =$

$= \frac{\cos^2 x}{x} + \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{x}$, ал оның жалпы шешімі $y = \overline{y} + y_0 =$

$= \frac{1}{x} + C_1 \cdot \frac{\cos x}{x} + C_2 \cdot \frac{\sin x}{x}$. ▲

Назарыңызға. $C_1(x) = \cos x + \tilde{C}_1$, $C_2(x) = \sin x + \tilde{C}_2$ функцияларын $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ тұрақтыларымен бірге (8) теңдікке қойып, біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін бірден алуға да болар еді. Осылай алынған жалпы шешім мен $y = \overline{y} + y_0$ қосындысынан алынған жалпы шешім бірдей болатынына көз жеткізіңіз.

§10.9. *n*-ші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі

Біз жоғарыда, егер $L_n[y] = 0$ біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің фундаменталды жүйесі (демек, жалпы шешімі) белгілі болса, онда $L_n[y] = f(x)$ біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін Лагранж әдісі арқылы табуға болатынын көрдік (мұнда *біртекті дифференциалдық теңдеудің фундаменталды шешімдер жүйесі белгілі* деп есептеп келгенімізге тағы да назарыңызды аударамыз). Бірақ біртекті дифференциалдық теңдеудің фундаменталды шешімдер жүйесін табудың жалпы жағдайда белгілі бір әдісі жоқ. Тек ***дербес жағдайларда, мысалы дифференциалдық теңдеудің коэффициенттері тұрақты сандар*** болғанда, біртекті теңдеудің шешімдерінің фундаменталды жүйесін табу әдісі бар. Енді осы жағдайды қарастырамыз.

Сонымен, ***p_i-коэффициенттері тұрақты сандар*** болатын ***n-ші ретті сызықтық біртекті***

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0, \quad -\infty < x < \infty \qquad (1)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу берілсін. Келесі *n*-ші дәрежелі алгебралық теңдеуді:

$$R_n(k) \equiv k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0 = 0 \qquad (2)$$

(1) дифференциалдық теңдеуді **сипаттаушы теңдеу** деп атайды. Сипаттаушы теңдеуді алу үшін (1) дифференциалдық теңдеудегі $y^{(i)}$ туындыларын, сәйкес k^i дәрежелерімен алмастырса болғаны ($y \equiv y^{(0)}$ деп есептелгендіктен, y-ті $k^0 = 1$-ге алмастырады). Керісінше, (2) сипаттаушы теңдеу бойынша (1) біртекті дифференциалдық теңдеуді тұрғызуға болады.

$y = e^{kx}$ функциясы үшін $L_n\left[e^{kx}\right] = e^{kx} R_n\left[k\right]$ теңдігі орындалатынын тексеру қиын емес. Мұнда $y = e^{kx} \neq 0, \ \forall x \in \left(-\infty; +\infty\right)$ болатынын ескерсек, келесі тұжырымды аламыз.

Егер k_0 ***саны сипаттаушы теңдеудің түбірі болса, онда*** $y = e^{k_0 x}$ ***функциясы*** **(1)** ***дифференциалдық теңдеудің шешімі және, керісінше,*** $y = e^{k_0 x}$ ***функциясы*** **(1)** ***дифференциалдық теңдеудің шешімі болса, онда*** k_0 ***саны*** **(2)** ***алгебралық теңдеудің түбірі болатынын көруге болады.***

(2) алгебралық теңдеудің түбірлерінің саны еселігімен қоса алғанда *n*-ге (теңдеудің дәреже көрсеткішіне) тең болатындықтан (7.2.1 п. қараңыз), $y = e^{kx}$ түріндегі дербес шешімдердің де жалпы саны еселігімен қоса алғанда *n*-ге тең болады.

1°. ***Сипаттаушы*** **(2)** ***теңдеудің*** $k_1, k_2, ..., k_n$ ***түбірлері әртүрлі (өзара тең емес) сандар болсын***. Онда келесі *n* функцияның:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, ..., \quad y_n = e^{k_n x} \tag{3}$$

әрбіреуі (1) дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі және (3) функциялар $(-\infty; +\infty)$ интервалында сызықты тәуелсіз (10.7.2. п. 2-мысал) болғандықтан, олар (1) біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің фундаменталды жүйесін құрайды. Сондықтан, бұл жағдайда (1) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде жазылады

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{k_i x}. \tag{4}$$

1-мысал. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

▼ Берілген теңдеудің сипаттаушы теңдеуін $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ шешейік:

$$k^2(k-2) - (k-2) = 0, \quad (k-2)(k^2-1) = 0, \quad k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1.$$

Бұлар өзара тең емес әртүрлі түбірлер болғандықтан, $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{-x}$ функциялары берілген дифференциалдық теңдеудің фундаменталды шешімдер жүйесін құрайды. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$. ▲

2°. ***Сипаттаушы теңдеудің түбірлері әртүрлі емес, олардың арасында өзара тең түбірлері бар болсын: айталық, k_1 түбірі m-еселі болсын.***

Онда бұларға сәйкес функциялар $y_1 = \ldots = y_m = e^{k_1 x}$ болады да, (3) жүйе сызықты тәуелсіз бола алмайды. Сондықтан бұл жағдайда $y_1 = e^{k_1 x}, \ldots, y_m = e^{k_1 x}$ функцияларын сәйкес

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x e^{k_1 x}, \ldots, \quad y_m = x^{m-1} e^{k_1 x} \tag{7}$$

функцияларымен алмастырады. (7) функциялардың әрбіреуі (1) дифференциалдық теңдеудің шешімі және барлық еселі түбірлері осылай етіп алмастырып алынған (3) жүйе сызықты тәуелсіз болатынын дәлелдеуге болады.

2-мысал. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$ теңдеуін шешу керек.

▼ Сипаттаушы теңдеуді құрамыз және оны шешеміз.

$k^3 + 6k^2 + 12k + 8 = 0, \quad (k+2)^3 = 0, \quad k_1 = k_2 = k_3 = -2.$ Берілген теңдеудің фундаментальды шешімдер жүйесін (7) жүйеге сәйкес жазамыз $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = x e^{-2x}$, $y_3 = x^2 e^{-2x}$, бұдан теңдеудің жалпы шешімін аламыз $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x e^{-2x} + C_3 \cdot x^2 e^{-2x}$. ▲

Ескерту. Егер p_i коэффициенттері нақты сандар болып, (2) сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің ішінде қандай да бір түбір $k_\nu = \alpha + i\beta$ түріндегі комплекс сан болса, онда қалған түбірлердің ішінде оған түйіндес $k_\mu = \alpha - i\beta$ комплекс түбір болады. Бұл түбірлерге сәйкес келетін

$$y_\nu = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$
$$y_\mu = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

функциялары немесе бұл екеуінің кез келген сызықтық комбинациясы, мысалы,

$$\frac{1}{2}y_\nu + \frac{1}{2}y_\mu = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad (5)$$

және

$$\frac{1}{2i}y_\nu - \frac{1}{2i}y_\mu = e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (6)$$

функциялары да – осы (1) дифференциалдық теңдеудің шешімі (10.7.1. п. 1-теорема). Түрлерін осылай етіп өзгертіп алған

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ldots,\ y_\nu = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ y_\mu = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ y_n = e^{k_n x}$$

функциялар жүйесі $(-\infty;\infty)$ интервалында сызықты тәуелсіз болатынын дәлелдеуге болады.

Көбінесе, $y_\nu = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_\mu = e^{(\alpha-i\beta)x}$ функцияларын, құрамында комплекс сандар жоқ (5) пен (6) нақты функцияларына алмастырып отырады.

3-мысал. $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0$ теңдеуін шешу керек.

▼ Сипаттаушы теңдеуді құрамыз және оны шешеміз.

$$k^3 - 4k^2 + 9k - 10 = 0, \quad k^3 - 2k^2 - 2k^2 + 4k + 5k - 10 = 0,$$

$$k^2(k-2) - 2k(k-2) + 5(k-2) = 0,,$$

$$(k-2)(k^2 - 2k + 5) = 0, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 1 + 2i, \quad k_3 = 1 - 2i.$$

Олай болса $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{(1+2i)x}$, $y_3 = e^{(1-2i)x}$ функциялары – берілген дифференциалдық теңдеудің фундаменталды шешімдер жүйесі. Бірақ y_2 мен y_3 функцияларын сәйкес $e^x \cos 2x$, $e^x \sin 2x$ функцияларымен алмастырсақ, жалпы шешім келесі түрде жазылады: $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x \cos 2x + C_3 \cdot e^x \sin 2x$. ▲

4-мысал. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ теңдеуін шешу керек.

▼ Сипаттаушы $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ теңдеудің төрт түбірі бар: $k_1 = k_2 = i$, $k_3 = k_4 = -i$ және олар қос-қостан еселі. Сондықтан $y_1 = \cos x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = \sin x$ функцияларын (7) функциялармен алмастырсақ, $y_1 = \cos x$, $y_2 = x \cdot \cos x$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = x \cdot \sin x$ аламыз. Сонымен берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot x \cdot \cos x + C_3 \cdot \sin x + C_4 \cdot x \cdot \sin x =$ $= (C_1 + C_2 x) \cdot \cos x + (C_3 + C_4 x) \cdot \sin x$. ▲

§10.10. Оң жағы арнайы түрде берілген коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімін анықталмаған коэффициенттер әдісі арқылы табу

$L_n[y] = f(x)$ біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табудың Лагранж әдісімен жоғарыда таныстық. Бұл әдістегі амалдар ішінде интегралдау амалы да қолданылатынын көрдік. Енді біз, біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін интегралдау амалын қолданбай-ақ, дифференциалдау және сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу сияқты амалдарды қолдануға арналған **анықталмаған коэффициенттер әдісін** қарастырамыз. Бұл әдіс біртекті емес теңдеудің оң жақ бөлігі

$$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx] \qquad (1)$$

түріне ие болғанда қолданылады. Мұндағы $P_m(x)$, $Q_n(x)$ сәйкес *m*-ші және *n*-ші дәрежелі көпмүшеліктер; *a* мен *b* – тұрақты сандар.

(1) өрнектің кейбір дербес түрлері. Егер

$f(x)=e^{ax}$ болса, $b=0$, $P_m(x)=1$;

$f(x)=P_m(x)$ болса, $a=0$, $b=0$;

$f(x)=e^{ax}P_m(x)$ болса, $b=0$;

$f(x)=P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx$ болса, $a=0$;

$f(x)=P_m(x)\cos bx$ болса, $a=0$, $Q_n(x)\equiv 0$;

$f(x)=Q_n(x)\sin bx$ болса, $a=0$, $P_m(x)\equiv 0$ т.с.с.

Егер

$$L_n[y]=y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+...+p_1y'+p_0y=f(x),\quad -\infty<x<+\infty, \qquad (2)$$

(p_i – тұрақты сандар) біртекті емес теңдеуінің оң жағы (1) түрде берілсе, онда осы дифференциалдық теңдеудің дербес $\bar{y}$ шешімінің құрылымы да (1)-ші өрнекке ұқсас, яғни,

$$\bar{y}=x^re^{ax}[\bar{P}_s(x)\cos bx+\bar{Q}_s(x)\sin bx] \qquad (3)$$

түрінде болады. Мұндағы $\bar{P}_s(x)$, $\bar{Q}_s(x)$ – дәрежесі $s=\max\{m,n\}$ тең көпмүшеліктер; *r* арқылы $L_n[y]=0$ біртекті теңдеудің $R_n[k]=0$ сипаттаушы теңдеуінің $a+ib$ санына тең түбірінің еселігі белгіленген: егер $a+ib$ саны сипаттаушы теңдеудің түбірі болмаса, онда $r=0$; егер $a+ib$ саны сипаттаушы теңдеудің екі еселі түбірі болса, онда $r=2$, т.с.с ($a+ib$ – **бақылау саны** деп аталады). Жоғарыдағы (3) функцияны анықтау үшін, тек $\bar{P}_s(x)$, $\bar{Q}_s(x)$ көпмүшеліктерінің коэффициенттерін тапса болғаны. Оларды табу үшін $\bar{y}$ және оның туындыларын (2) теңдеуге қойып, теңдіктің оң және сол жақ бөліктеріндегі ұқсас мүшелердің коэффициенттерін теңестірсек, белгісіз коэффициенттерді есептеуге жеткілікті сызықтық алгебралық теңдеулер аламыз.

1-мысал. $y'''-y''=12x^2+6x$ теңдеуін шешу керек.

▼ Бұл – теңдеудің оң жағы $a=0,\ b=0,\ s=2$ болатын (1) түрдегі функция. Сипаттаушы теңдеудің $k^3-k^2=0$ түбірлері $k_1=k_2=0,\ k_3=1$. Олай болса $y'''-y''=0$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі $y_0=C_1\cdot e^{0\cdot x}+C_2\cdot x\cdot e^{0\cdot x}+C_3\cdot e^{1\cdot x}=C_1+C_2x+C_3\cdot e^x$.

Бақылау саны: $a+ib=0+i0=0$ – сипаттаушы теңдеудің екі еселі түбірі болғандықтан $r=2$ деп аламыз. Ал $s=2$ екенін көру қиын емес.

Енді берілген біртекті емес дифференциалдық теңдеудің $\bar{y}$ дербес шешімін, $a=0,\ b=0,\ s=2$ ескеріп, (3) функцияға сәйкес жазамыз:

$$\bar{y}=x^2(Ax^2+Bx+C)=Ax^4+Bx^3+Cx^2\ . \qquad (4)$$

Бұл функцияның y'',y''' туындыларын тауып, оларды берілген дифференциалдық теңдеуге қоямыз:

$$\bar{y}'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx,\ \bar{y}''=12Ax^2+6Bx+2C,\ \ \bar{y}'''=24Ax+6B\ .$$

$$24Ax+6B-12Ax^2-6Bx-2C=12x^2+6x\ ,$$

$$-12Ax^2+(24A-6B)x+(6B-2C)=12x^2+6x.$$

Теңдіктің екі жақ бөлігіндегі ұқсас мүшелердің коэффициенттерін теңестіреміз де, алынған жүйені шешеміз:

$$\begin{cases}12A=12, & A=-1,\\ 24A-6B=6, & B=-5,\\ 6B-2C=0. & C=-15.\end{cases}$$

Бұл мәндерді (4) теңдікке қойып, біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін аламыз: $\bar{y}=-x^4-5x^3-15x^2$. Берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $y=y_0+\bar{y}=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2$. ▲

2-мысал. $y''+10y'+25y=4e^{-5x}$ теңдеуін шешу керек.

▼ Мұнда $a=-5,\ b=0,\ s=0$ мәндеріне сәйкес (1) түрдегі функция тұр. Сипаттаушы теңдеу $k^2+10k+25=0$, ал оның

түбірлері $k_1 = k_2 = -5$. Біртекті $y'' + 10y' + 25y = 0$ дифференциалдық теңдеу-дің жалпы шешімі $y_0 = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} = (C_1 + C_2 x)e^{-5x}$. Мұнда $a = -5,\ b = 0,\ P_n(x) = 4$ деп аламыз. Бақылау саны $a + ib = -5 + 0 \cdot i = -5$ - сипаттаушы теңдеудің екі еселі түбірі, демек $r = 2$. Сонымен бірге, $s = 0$ болғандықтан, көпмүшелікті нөлінші дәрежелі, яғни A деп алуға болады. Онда (3) функцияға сәйкес дербес шешім $\bar{y} = x^2 \cdot A \cdot e^{-5x}$ түріне ие болады. Оның y', y'' туындыларын табайық: $\bar{y}' = A(2xe^{-5x} - 5x^2 e^{-5x}) = A(2x - 5x^2)e^{-5x}$;

$y'' = A[(2 - 10x)e^{-5x} + (-10x + 25x^2)e^{-5x}] = A(2 - 20x + 25x^2)e^{-5x}$. Одан соң y, y', y'' өрнектерін сәйкес 25, 10, 1 сандарына көбейтіп, алынған нәтижелерді қосамыз және $4e^{-5x}$ -ке теңестіреміз: $2Ae^{-5x} = 4e^{-5x} \Rightarrow A = 2$, демек $\bar{y} = 2 \cdot x^2 e^{-5x}$. Ал берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $y = y_0 + \bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}$. ▲

3-мысал. $y'' + 3y' + 2y = x \sin x$ теңдеуінің дербес шешімінің түрін жазу керек (көпмүшеліктің коэффициенттерін табудың қажеті жоқ).

▼ Мұнда $a = 0,\ b = 1,\ s = 1$ мәндеріне сәйкес (1) түрдегі функция тұр. Сипаттаушы теңдеу $k^2 + 3k + 2 = 0$, ал оның түбірлері $k_1 = -1,\ k_2 = -2$. Бақылау саны $a + ib = 0 + 1 \cdot i = i$ - сипаттаушы теңдеудің түбірі емес, демек $r = 0$ және $s = 1$. Олай болса берілген біртекті емес дифференциалдық теңдеудің шешімі: $\bar{y} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$. ▲

Назар аударыңыз. Егер біртекті емес дифференциалдық теңдеудің оң жақ бөлігінің, яғни (1) түрдегі $f(x)$ функциясының құрамында косинус пен синус функцияларының ең болмағанда біреуі қатысса, онда (3) түрде ізделінетін дербес шешім құрамында косинус пен синустың екеуі де жазылуы керек.

Кейбір жағдайларда біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеудің оң жағы әртүрлі формадағы функциялардың қосындысы болып келуі мүмкін:

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x). \tag{5}$$

Онда **шешімдердің суперпозициялық принципі** деп аталатын келесі әдіс қолданылады. Егер $L_n[y] = f_1(x)$, $L_n[y] = f_2(x)$ теңдеулерінің шешімдері сәйкес $y_1(x)$ және $y_2(x)$, яғни $L_n[y_1] = f_1(x)$, $L_n[y_2] = f_2(x)$ болса, онда $y_1(x) + y_2(x)$ қосындысы (5) теңдеудің шешімі болатынын келесі теңдіктен көруге болады:

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2] = f_1(x) + f_2(x).$$

4-мысал. Келесі теңдеуді шешу керек:

$$y'' - 2y' + 5y = 3e^x + e^x \operatorname{tg} 2x. \tag{6}$$

▼ Алдымен біртекті $y'' - 2y' + 5y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табайық: $k^2 - 2k + 5 = 0$, $k_1 = 1 + 2i$, $k_2 = 1 - 2i$, олай болса $y_0 = C_1 \cdot e^x \cos 2x + C_2 \cdot e^x \sin 2x$.

Енді келесі біртекті емес теңдеулердің дербес шешімдерін жеке-жеке іздейміз:

$$y'' - 2y' + 5y = 3e^x, \tag{6}$$

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cdot tg\, 2x \tag{7}$$

(6) теңдеудегі $f_1(x) = 3e^x$ функция (1) арнайы берілген түрге жатады. Мұнда бақылау саны $a + bi = 1 + i \cdot 0 = 1$ сипаттаушы теңдеудің түбірі емес, яғни $r = 0$. Олай болса (6) теңдеудің дербес шешімін (3) сәйкес $\overline{y}_1 = Ae^x$ түрінде іздейміз. Онда

$$\overline{y}_1' = \overline{y}_1'' = Ae^x, \quad Ae^x - 2 \cdot A \cdot e^x + 5 \cdot A \cdot e^x = 3 \cdot e^x,$$

$$(A - 2A + 5A)e^x = 3 \cdot e^x, \text{ бұдан } A = \frac{3}{4};$$

Сонымен $\bar{y}_1 = \frac{3}{4}e^x$. Ал (7) теңдеудегі $f_2(x) = e^x \cdot \operatorname{tg} 2x$ функциясы (1) арнайы түрге келмейді. Сондықтан (7) теңдеудің дербес шешімін Лагранж әдісі арқылы іздейміз.

$$\bar{y}_2 = C_1(x)e^x \cos 2x + C_2(x)e^x \sin 2x. \qquad (8)$$

$$\begin{cases} C_1' e^x \cos 2x + C_2' e^x \sin 2x = 0, \\ C_1'(e^x \cos 2x)' + C_2'(e^x \sin 2x)' = e^x \operatorname{tg} 2x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' e^x \cos 2x + C_2' e^x \sin 2x = 0, \\ C_1'(e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x) + C_2'(e^x \sin 2x + 2e^x \cdot \cos 2x) = e^x \operatorname{tg} 2x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' e^x \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0, \\ C_1'(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2'(\sin 2x + 2\cos 2x) = \operatorname{tg} 2x. \end{cases}$$

Бұл жүйенің анықтауышы (вронскиан)

$$\Delta = W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = \sin 2x \cdot \cos 2x +$$

$$+2\cos^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x + 2\sin^2 2x = 2.$$

Крамер формуласы бойынша шешеміз:

$$C_1' = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \operatorname{tg} 2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 2x,$$

$$C_2' = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \operatorname{tg} 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos 2x \cdot \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Енді алынған функцияларды интегралдаймыз:

$$C_1 = \frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot \operatorname{tg} 2x dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{\cos 2x} - \int \cos 2x dx\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Табылған шамаларды (8) теңдікке қоямыз:

$$\bar{y}_2 = e^x\left(\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\cos 2x\right) =$$
$$= \frac{1}{4}e^x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x.$$

Шешімдердің суперпозициялық принципі бойынша берілген дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі осы екі $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ шешімдерінің қосындысына тең:

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}e^x\left[3 + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x\right],$$

ал оның жалпы шешімі келесі түрге ие болады:

$$y = y_0 + \bar{y} = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^x\left[3 + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\cdot\cos 2x\right]. \blacktriangle$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі, оның жалпы интегралы мен жалпы шешімі қалай анықталады? Мысал келтіріңіз. Коши есебінің шешімінің бар және оның жалғыз болуы туралы теореманың тұжырымын келтіріңіз.

2. Дифференциал арқылы жазылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді жазып, оған қатысты сұрақтарға талқылау жасаңыз. Айнымалдары ажыратылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын қалай табады? Мысал келтіріңіз.

3. Айнымалдары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді жазып, оны шешу әдісін көрсетіңіз. Мысал келтіріңіз.

4. *m*-ші дәрежелі біртекті функция деген не? Мысал келтіріңіз. Біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешуге қандай тәсіл қолданады? Мысал келтіріңіз.

5. Сызықтық бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді Бернулли тәсілімен шешу процесін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

6. Бернулли теңдеуін жазып, оны шығару тәсілін көрсетіңіз. *x* пен *x′*-ке қатысты сызықтық бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді жазыңыз және оны шешуге Бернулли тәсілі бойынша қолданатын айнымал ауыстыруын көрсетіңіз.

7. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің ***толық дифференциалды болуының*** критерийі туралы теореманы тұжырымдап, оны дәлелдеңіз. Мысал келтіріңіз.

8. $y = f(x, y')$ немесе $x = g(y, y')$ түріндегі теңдеуді шешу әдісін көрсетіңіз, Мысал келтіріңіз. Лагранж және Клеро теңдеулерін жазыңыз.

9. Мына реті төмендетілетін жоғары ретті дифференциалдық теңдеулерді: $y^{(n)} = f(x)$; $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ шешу тәсілдерін түсіндіріңіз. Мысалдар келтіріңіз.

10. Мына реті төмендетілетін жоғары ретті дифференциалдық теңдеуді: $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ шешу тәсілін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

11. Сызықтық *n*-ші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңыз. Келесі *n-ші* ретті дифференциалдық оператордың: $L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y$ ***біртектілік және аддитивтік қасиеттерін*** дәлелдеңіз.

12. Сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің дербес шешімдірінің негізгі қасиетін дәлелдеңіз.

13. Сызықты тәуелді және сызықты тәуелсіз функциялардың анықтамаларын беріңіз. Мысалдар келтіріңіз.

14. (*a*,*b*)-аралығында сызықты тәуелді функциялардың Вронский анықтауышы осы аралықта нөлге тепе-тең болатыны туралы теореманы дәлелдеңіз. Бұл теоремаға контрапозиция заңын қолданып, функциялардың (*a*,*b*)-аралығында сызықты тәуелсіз болуының шартын тұжырымдаңыз.

15. Келесі функциялар: $1, x, x^2, ..., x^{m-1}$ кез келген аралықта сызықты тәуелсіз болатынын дәлелдеңіз.

16. Мына $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_m x}$ ($k_1, k_2, ..., k_m$ өзара тең емес әртүрлі сандар) функциялар кез келген аралықта сызықты тәуелсіз болатыны белгілі. $e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}$ функциялардың кез келген аралықта сызықты тәуелсіз болатынын дәлелдеңіз.

17. ***Сызықтық біртекті*** жоғары ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі туралы теореманы дәлелдеңіз.

18. ***Сызықтық біртекті емес*** жоғары ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі туралы теореманы дәлелдеңіз.

19. ***Сызықтық біртекті емес*** **үшінші** ретті дифференциалдық теңдеудің ***дербес шешімін*** тұрақтыларды вариациялау (Лагранж) әдісін қолданып табу процесін түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

20. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері өзара тең емес әртүрлі сандар болған жағдайда коэффициенттері тұрақты сызықтық *n*-ші ретті ***біртекті*** дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қалай табылатынын түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз. Егер сипаттаушы теңдеудің түбірлері комплекс сандар болса, онда оларға сәйкес дербес шешімдерді қалай жазуға болады? Мысал келтіріңіз.

21. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің ішінде өзара тең сандар болған жағдайда коэффициенттері тұрақты сызықтық *n*-ші ретті ***біртекті*** дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қалай табылатынын түсіндіріңіз. Мысал келтіріңіз.

22. Егер коэффициенттері тұрақты сызықтық *n*-ші ретті ***біртекті емес*** дифференциалдық теңдеудің оң жағы арнайы $f(x) = e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx\right]$ түрінде берілсе, онда оның дербес шешімін қалай табуға болады? Мысал келтіріңіз.

23. $L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$ теңдеуінің дербес шешімі $L_n[y] = f_1(x)$, $L_n[y] = f_2(x)$ теңдеулерінің дербес шешімдерінің қосындысына тең болатынын дәлелдеңіз (шешімдер суперпозициясының принципі). Мысал келтіріңіз.

11. ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР. ВЕКТОРЛЫҚ АНАЛИЗ

§ 11.1. Еселі интегралдар

Біз бұрын $[a;b]$ кесіндісінде берілген $f(x)$ функциясының анықталған интегралын қарастырғанбыз және оны геометрияның, физиканың, механиканың кейбір есептерін шешуге қолданғанбыз.

Бірақ бұл интеграл формасы кез келген беттің ауданын, дене көлемін, пластиналардың механикалық параметрлерін табуға жарамсыз. Міне, осындай есептерді шешу жазықтықтағы қандай да бір аймақта анықталған екі айнымалды функцияны интегралдау аппаратын құруға алып келеді.

$OXYZ$ тік бұрышты координаттар жүйесі анықталған үш өлшемді кеңістікте үзіліссіз бет S: $z = f(Q) = f(x,y)$, $Q = (x,y) \in \Omega$ берілсін. Мұндағы Ω – ауданын (екі өлшемді өлшемін) анықтауға болатын шенелген жиын. Мысалы, Ω: дөңгелек, тік төртбұрыш, эллипс және т.с.с.

$f(x,y)$ функциясы оң мәнді деп санап, ***жоғарыдан*** S: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega \subset OXY$ ***бетімен, төменнен*** $z = 0$ ***жазықтығымен және бүйір жақтарынан*** Ω ***(жазық) жиынының шекарасы*** γ ***арқылы өтетін тік цилиндрлік бетпен шенелген дененің көлемін табу есебін*** қарастырамыз.

Бұл есепті шешу үшін келесі амалдарды жасаймыз.

1) Ω жиынын, шекаралары ғана ортақ

$$\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N \qquad (1)$$

бөліктеріне бөлеміз. Бұл бөліктердің аудандарын сәйкес $m\Omega_1, m\Omega_2, ..., m\Omega_{N2}$ арқылы белгілейміз ((1) бөліктер екі өлшемді өлшемі бар болатындай етіп бөлінуі керек).

Анықтама. *A* ***жиынының диаметрі*** *деп,* $d(A) = \sup\limits_{p',\, p'' \in A} |p' - p''|$ *шамасын, яғни* $\{|p' - p''|,\ p', p'' \in A\}$ *жиынының дәл жоғарғы шекарасын айтады.*

2) Әрбір Ω_j бөлігінен кез келген $Q_j = (\xi_j, \zeta_j)$, $j = 1,2,...,N$, нүктесін алып,

$$V_N = \sum_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j \qquad (2)$$

қосындысын құраймыз (Риман бойынша интегралдық қосынды). Бұл қосындыны дененің ізделініп отырған V көлемінің жуық мәні $V \approx V_N$ деп санауға болады. Мұнда Ω_j бөліктерінің $d\Omega_j$ диаметрлері неғұрлым кіші болса, жуық теңдік соғұрлым дәлірек болады. Сондықтан дененің көлемі деп,

3) (1) бөліктердің ең үлкен диаметрін нөлге ұмтылдыра отырып (2) қосындыдан алынған шекті айтуға болады

$$\lim_{\substack{\max d\Omega\, j \to 0 \\ j=1,2,...,n}} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j. \qquad (3)$$

Дене көлемін табу туралы есептен назарымызды аударып, (3) өрнекке Ω жиынында анықталған f функциясына жүргізілетін амал деп қарауға болады. Бұл амал ***f* функциясын Ω жиынында Риман бойынша екі еселі интегралдау амалы** деп аталады, ал оның нәтижесін f **функциясының Ω жиынында анықталған екі еселі (Риман) интегралы** дейді де,

$$V = \lim_{\max d\Omega_j \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j =$$

$$= \iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega} fdxdy = \int_{\Omega} f(Q)dQ = \int_{\Omega} fd\Omega$$

символдарының біреуімен белгілейді.

Енді $OXYZ$ тік бұрышты координаттар жүйесі анықталған үш өлшемді кеңістікте Ω ***денесі (жиыны) және оның үлестіру тығыздығы*** $\mu(x,y,z) = \mu(Q)$, $Q = (x,y,z) \in \Omega$, ***берілсін.*** Ω ***денесінің массасын табу керек*** болсын.

Бұл есепті шешу үшін келесі үш амалды орындаймыз (жоғарыдағы алғашқы есептің шешуімен салыстырыңыз).

1) Ω денесін $\Omega_1,...,\Omega_N$ бөліктеріне бөлеміз және олардың көлемдерін (үш өлшемді өлшемдерін) $m\Omega_1,...,m\Omega_N$ арқылы (бұл көлемдер бар деп ұйғарамыз) белгілейміз.

2) Осы бөліктердің әрбіреуінен кез келген $Q_j=\left(x_j,y_j,z_j\right)\in\Omega_j,\ \ j=1,2,...,N,$ нүктесін алып

$$M_N=\sum_{j=1}^{N}\mu(Q_j)m\Omega_j$$

қосындысын **(Риманның интегралдық қосындысын)** құраймыз. Ол ізделініп отырған M массасының жуық мәні: $M_N\approx M$.

3) Ізделетін M массасы осы интегралдық қосындысының $\max\limits_{j=1,2,...,N} d(\Omega_j)\to 0$ ұмтылғандағы шегі:

$$M=\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0}\sum_{j=1}^{N}\mu(Q_j)m\Omega_j. \qquad (4)$$

Тағы да (4) өрнекке Ω үш өлшемді жиынында берілген μ функциясына жасалған амал деп қарауға болады. Бұл амал **(Риман бойынша) – үш еселі интегралдау амалы**, ал оның нәтижесі **анықталған үш еселі Риман интегралы** деп аталады да,

$$M=\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0}\sum_{j=1}^{N}\mu(Q_j)m\Omega_j=$$
$$=\int\limits_{\Omega}\mu d\Omega=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)dxdydz$$

символдарының біреуімен белгіленеді.

Осы сияқты n еселі Риман интегралы да анықталады. Одан бұрын біз **аймақ өлшемі** туралы азын-аулақ мағлұмат беріп алайық.

Екі өлшемді жағдайда шекарасы (18-сурет) тегіс немесе шекарасы құрақты-тегіс (шекарасы ақырлы санды тегіс сызық-тардан құралған (19-сурет)) шенелген аймақтар қарастырылады. Бұл аймақтар өз кезегінде шекаралары құрақты-тегіс бөліктерге бөлінеді. Әрбір осындай ω аймаққа (және басқа да жиындарға)

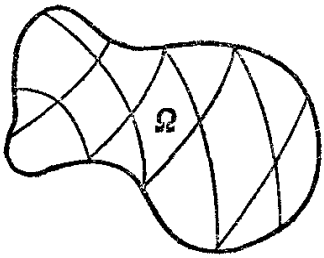
оның **ауданы** немесе **екі өлшемді Жордан өлшемі** деп аталатын $m\omega$ оң саны сәйкес келеді (К. Жордан (1838-1922) – француз математигі).

Сонымен бірге келесі қасиеттер орындалады:

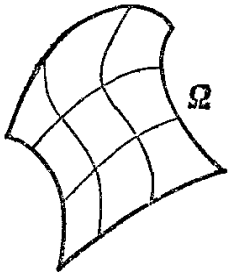
1) Егер Δ – табаны a, биіктігі b болатын тік төртбұрыш болса, онда $m\Delta = |\Delta| = ab$;

2) Егер $\omega_1 \subset \omega_2$, ал ω_1, ω_2 аймақтарының өлшемдері $m\omega_1, m\omega_2$ болса, онда $m\omega_1 \le m\omega_2$;

3) Егер ω аймағы құрақты-тегіс сызықтармен ω_1, ω_2 бөліктеріне бөлінсе ($\omega = \omega_1 + \omega_2$), онда $m\omega = m\omega_1 + m\omega_2$.



18-сурет



19-сурет

Екі өлшемді өлшемі нөлге тең жиындар болады: нүкте, кесінді, тегіс немесе құрақты-тегіс қисық.

Үш өлшемді жағдайда шекаралары тегіс, немесе құрақты-тегіс бет болатын аймақтар қарастырылады: шар, эллипсоид, куб т.с.с.

Анықтама. Егер беттің әрбір нүктесіне осы нүктемен бірге үзіліссіз өзгеріп отыратын жанама жазықтық жүргізуге болатын болса, онда ол тегіс бет деп аталады.

Егер бетті саны ақырлы тегіс беттерге бөліктеуге болса, онда ол құрақты-тегіс бет деп аталады. Бөліктеу сызықтары бойында беттің жанама жазықтықтары болмауы да мүмкін.

Құрақты-тегіс шекаралары бар шенелген үш өлшемді ω аймақтары үшін олардың көлемін (үш өлшемді өлшемін) анықтауға болады. Басқаша айтқанда, келесі қасиеттерге ие болатын оң $m\omega$ санын анықтауға болады:

1) Егер Δ – қабырғалары a,b,c параллелепипед болса, онда $m\Delta = |\Delta| = abc$;

2) Егер $\omega_1 \subset \omega_2$, ал ω_1, ω_2 аймақтарының өлшемдері $m\omega_1$, $m\omega_2$ болса, онда $m\omega_1 \le m\omega_2$;

3) Егер ω аймағы құрақты-тегіс беттер арқылы ω_1 және ω_2 $(\omega = \omega_1 \cup \omega_2, m(\omega_1 \cap \omega_2) = 0)$ бөліктеріне бөлінсе, онда $m\omega = m\omega_1 + m\omega_2$.

Үш өлшемді өлшемі нөлге тең жиындар болады: нүкте, кесінді, тік төртбұрыш, тегіс немесе құрақты-тегіс бет.

Осы сияқты құрақты-тегіс шекаралары бар n өлшемді ω $(\omega \subset R^n)$ аймақтары қарастырылады. Олардың n өлшемді өлшемін $(m\omega > 0)$ жоғарыдағы 1), 2), 3) қасиеттер орындалатындай етіп анықтайды.

Енді n еселі Риман интегралын анықтайық.

n өлшемді R^n кеңістігінде құрақты-тегіс шекарасы Г болатын шенелген Ω аймағы $\left(\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma\right)$ берілсін және Ω аймағында (немесе $\bar{\Omega}$) анықталған $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы берілсін.

1) Ω аймағын құрақты-тегіс шекаралары бойынша қиылыспайтын Ω_j, $j = 1,2,...,N$, бөліктеріне бөліктейміз. Мұны қысқаша «Ω жиынында ρ бөліктеуін жүргізу» деп атайтын боламыз;

2) Әрбір Ω_j, $j = 1,2,...,N$ бөліктен кез келген $\vec{\xi}^j = \left(\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_N^j\right)$, $\vec{\xi}^j \in \Omega$ нүктесін алып, ρ бөліктеуіне сәйкес f функциясының Риман бойынша интегралдық қосынды деп аталатын

$$S_\rho(f) = \sum_{j=1}^{N} f\left(\vec{\xi}^j\right) m\Omega_j \qquad (*)$$

қосындысын құраймыз.

3) Ω_j, $j = 1,2,...,N$ бөлік жиындарының ең үлкен диаметрін нөлге ұмтылдырып интегралдық қосындыдан шекке өтеміз:

$$\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} S_\rho(f) = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f\left(\vec{\xi}^{\,j}\right) m\Omega_j = \tag{5}$$

$$= \int_{\Omega} f d\Omega = \int\!\!\ldots\!\!\int_{\Omega} f\left(x_1,\ldots,x_n\right) dx_1 \ldots dx_n$$

(5) шек (егер ол $\vec{\xi}^{\,j} \in \Omega_j$ нүктелерін таңдауға және Ω аймағын бөліктеу тәсіліне тәуелсіз бар болса) f функциясының Ω (немесе $\bar{\Omega}$) жиынындағы n-еселі интегралы деп аталады.

Ескерту. (5) шекті есептеу нәтижесі Ω аймағы үшін болсын немесе оның $\bar{\Omega}$ тұйықтамасы үшін болсын, бірдей болады. Өйткені $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, ал мұндағы Γ (Ω аймағының шекарасы) – n өлшемді өлшемі нөлге тең құрақты-тегіс шекара.

Назар аударыңыз! Қарастырылатын аймақ шекарасының құрақты-тегіс болуы ол аймақтың өлшемі болуымен тікелей байланысты! Құрақты-тегіс қисық – Ω түзуленетін қисық, яғни (ұзындық өлшемі бар сияқты (9.3.1.п.))

§ 11.2. Еселі интегралдардың қасиеттері

Біз алдымызда қарастыратын Ω, Ω_1, Ω_2 аймақтарының шекараларын құрақты-тегіс беттер деп есептейміз. Алдымызда **x** арқылы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторын, $d\Omega$ арқылы $d\Omega = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ көбейтіндісін белгілейміз.

1°. Интеграл астындағы функция бірге тең болса, интеграл, интегралдау аймағының өлшеміне тең:

$$\int_{\Omega} d\Omega = m\Omega\,. \tag{1}$$

▼ §11.1 (∗) интегралдық қосындыда $f = 1$ деп алып, (5) теңдікті пайдаланамыз $\int_{\Omega} d\Omega = \lim_{\max d\Omega_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} m\Omega_k = m\Omega.$ ▲

Назар аударыңыз. (1) формула бойынша екі өлшемді жағдайда Ω аймағының ауданы, үш өлшемді жағдайда Ω

аймағының көлемі, ал n өлшемді жағдайда Ω аймағының n өлшемді өлшемі есептеледі.

Төмендегі қасиеттерде $f(x), \varphi(x), |f(x)|$ функциялары үшін қарастырылатын интегралдар бар деп ұйғарылады және 2° - 4° қасиеттер де 1° қасиет сияқты, шек анықтамасына сүйеніп дәлелденеді.

2°. Кез келген А және В тұрақтылары үшін

$$\int_{\Omega} \left[Af(\mathbf{x}) + B\varphi(\mathbf{x}) \right] d\Omega = A \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega + B \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) d\Omega. \qquad (2)$$

3°. Егер Ω аймағы құрақты-тегіс шекаралар арқылы өлшемі бар: Ω_1, Ω_2 $(\Omega = \Omega_1 + \Omega_2,\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = O)$ бөліктеріне бөлшектенсе, онда

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\Omega_1} f d\Omega + \int_{\Omega_2} f d\Omega. \qquad (3)$$

4°. Егер $\mathbf{x} \in \Omega$ нүктелерінде $f(\mathbf{x}) \le \varphi(\mathbf{x})$ теңсіздігі орындалса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \le \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) d\Omega. \qquad (4)$$

5°. Функция интегралының модулі функция модулінің интегралынан үлкен емес:

$$\left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \right| \le \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d\Omega. \qquad (5)$$

▼ $-|f(\mathbf{x})| \le f(\mathbf{x}) \le |f(\mathbf{x})|$ теңсіздіктерінен 4°, 2° қасиеттерді қолданып, $-\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d\Omega \le \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \le \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d\Omega$ аламыз, ал бұл соңғы теңсіздіктер (5) теңсіздікке парапар. ▲

Салдар. Егер $|f(\mathbf{x})| \le M$, $\mathbf{x} \in \Omega$, яғни f функциясы Ω жиынында шенелген болса, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| \le M \cdot m\Omega. \qquad (6)$$

▼ $5^0, 4^0, 2^0, 1^0$ қасиеттерді қолданып,

$$\left|\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega\right| \le \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|d\Omega \le \int_{\Omega} M d\Omega = M\int_{\Omega} d\Omega = M \cdot m\Omega$$

аламыз. ▲

Келесі қасиеттерді дәлелдеусіз келтіреміз (оны, мысалы [2-3] кітаптардан қарауға болады).

1-теорема. Егер $f(x)$ функциясы құрақты-тегіс шекарасы бар Ω шенелген аймағының $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында үзіліссіз болса, онда ол Ω мен оның $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында да интегралданады және келесі теңдік орындалады:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega = \int_{\bar{\Omega}} f(\mathbf{x})d\Omega. \qquad (7)$$

Егер $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ болса, онда

$$\int_{\bar{\Omega}} fd\Omega = \int_{\Omega} fd\Omega + \int_{\Gamma} fd\Omega = \int_{\Omega} fd\Omega + 0 = \int_{\Omega} fd\Omega$$

теңдігі орындалатынын атап көрсетеміз. Өйткені шарт бойынша Г – құрақты-тегіс қисық, ал оның n өлшемді өлшемі нөлге тең $(m\Gamma = 0)$ сондықтан $\int_{\Gamma} fd\Omega = 0$.

2-теорема (орта мән туралы). $f(\mathbf{x})$ функциясы Ω аймағының $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында үзіліссіз болса, онда

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega = f\left(\mathbf{x}^0\right)m\Omega \qquad (8)$$

теңдігі орындалатындай $\mathbf{x}^0 \in \bar{\Omega}$ нүктесі табылады.

Мұндағы $f(\mathbf{x}^0)$ саны $f(\mathbf{x})$ функциясының орта мәні деп аталады.

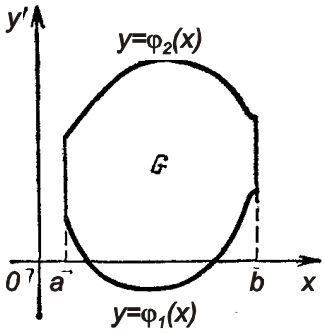
§ 11.3. Еселі интегралдарды қайталама интегралдарға келтіру

11.3.1. Екі еселі интегралдарды есептеу. G аймағының $\bar{G}$ тұйықтамасында үзіліссіз f(x,y) функциясы берілсін.

1-анықтама. Егер $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ функциялары үшін $\forall x \in [a,b]$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ теңсіздігі орындалса, онда $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$ сызықтарымен шенелген G аймағы бойынша (20-сурет) $f(x,y)$ функциясының қайталама интегралы деп

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

түріндегі анықталған интегралды айтады және G аймағын у өсінің бағыты бойынша дұрыс аймақ деп атайды. Мұнда G аймағының х өсіне проекциясы – $[a,b]$ кесіндісі: $Пр_{OX}G = [a,b]$.



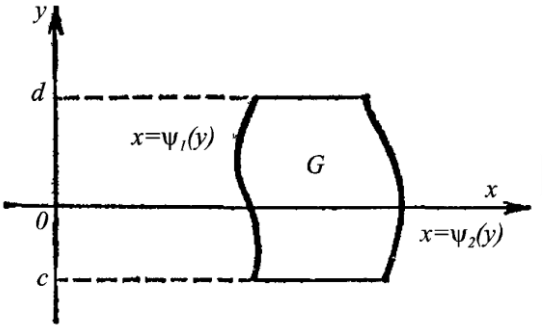
20-сурет

(1) қайталама интегралды есептеу үшін, х-ті тұрақты деп санап, ішкі интеграл астындағы $f(x,y)$ функциясын у айнымал бойынша $[\varphi_1(x); \varphi_2(x)]$ «кесіндісінде» интегралдайды да, алынған х-ке тәуелді функцияны сыртқы интеграл астына жазып оны х айнымал бойынша $[a,b]$ кесіндісінде интегралдайды.

2-анықтама. Егер $[c,d]$ кесіндісінде үзіліссіз $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ функциялары үшін $\forall y\in[c,d]$, $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ теңсіздігі орындалса (21-сурет), онда $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$ сызықтарымен шенелген G аймағы бойынша $f(x,y)$ функциясының қайталама интегралы деп,

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

түріндегі анықталған интегралды айтады және G аймағын *x* өсінің бағыты бойынша дұрыс аймақ деп атайды. Мұнда G аймағының у өсіне проекциясы – $[c,d]$ кесіндісі, $Пр_{Oy}G=[c,d]$.



21-сурет

(2) қайталама интегралдарды есептеу үшін, *y*-ті тұрақты деп санап, ішкі интеграл астындағы $f(x,y)$ функциясын х айнымал бойынша $[\psi_1(y);\ \psi_2(y)]$«кесіндісінде» интегралдайды да, алынған у-ке тәуелді функцияны сыртқы интеграл астына жазып, оны y бойынша $[c,d]$ кесіндісінде интегралдайды.

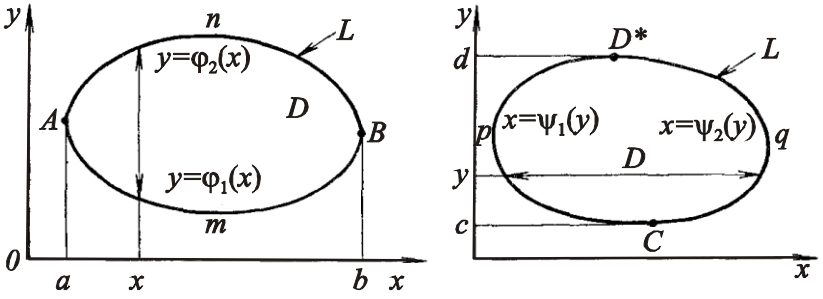
Егер аймақ у өсі бойынша да, х өсі бойынша да дұрыс аймақ болса, онда оны қысқаша дұрыс аймақ деп атайды (22-суретте D - дұрыс аймақ).

Теорема. Егер $f(x,y)$ функциясы Ω дұрыс аймақта үзіліссіз болса, онда f функциясының Ω аймағы бойынша екі еселі интегралы бар және келесі теңдіктер орындалады

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{a}^{b} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (3)$$

немесе

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{c}^{d} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (4)$$



22-сурет

(3) және (4) теңдіктерден келесі теңдік шығады:

$$\int_{a}^{b} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_{c}^{d} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (5)$$

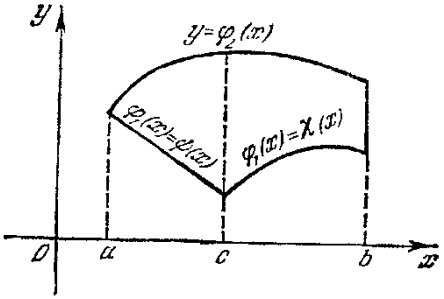
(5) теңдіктің сол жағынан оң жағына немесе оң жағынан сол жағына өтуді қайталама интегралдарда интегралдау ретін өзгерту деп атайды.

Ескерту. Егер Ω аймағын шектеп тұрған қисық әртүрлі аналитикалық өрнектермен берілсе, мысалы Ω аймағы төменнен екі құрақты-тегіс қисықпен шенелсе: $\varphi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & a \le x \le c, \\ \chi(x), & c \le x \le b \end{cases}$ (23-сурет), онда (3) теңдіктің оң жағын екі қайталама интегралдардың қосындысы түрінде жазуға болады:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{a}^{c} dx \int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int_{c}^{b} dx \int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,. \qquad (3')$$

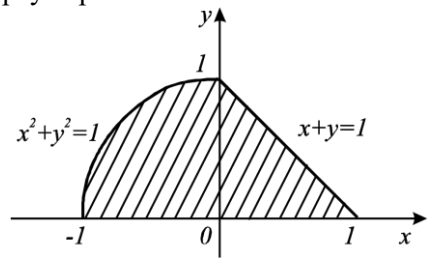
Бұл теңдік Ω аймағын $x=c$ түзуі арқылы Ω_1 және Ω_2 бөліктеріне бөліп ($\Omega=\Omega_1+\Omega_2$), содан соң интеграл қасиетін пайдаланып дәлелденеді. Мұнда Ω_1 аймағы $x=a$, $x=c$, $y=\psi(x)$,

$y=\varphi_2(x)$ қисықтарымен, ал Ω_2 аймағы $x=c$, $x=b$, $y=\chi(x)$, $y=\varphi_2(x)$ қисықтарымен шенелген.



23-сурет

1-мысал. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$ қайталама интегралдың интегралдау ретін өзгерту керек.



24-сурет

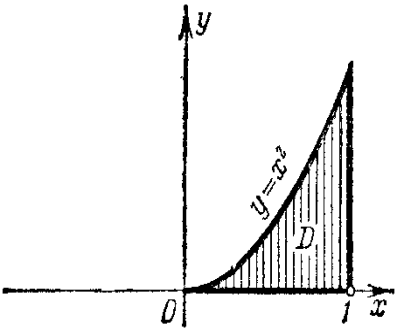
▼ Ω аймағы $\psi_1(y)=-\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y)=1-y$, $c=0, d=1$ қисықтарымен шенелген (24-сурет). Мұнда Ω жоғарыдан әртүрлі өрнектелетін қисықпен шенелген:

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\psi(x)=\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 0,\\ \chi(x)=1-x,\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Сондықтан $x=0$ түзуі арқылы Ω аймағын Ω_1 және Ω_2 аймақтарына бөлеміз (жоғарыдағы ескертуді қараңыз). Онда Ω_1: $x=-1, x=0, \varphi_1(x)=0, \psi(x)=\sqrt{1-x^2}$ қисықтарымен, Ω_2: $x=0, x=1, \varphi_1(x)=0, \chi(x)=1-x$ қисықтарымен

шенелген y өсі бойынша дұрыс аймақтар болады да, $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} fdxdy + \iint\limits_{\Omega_2} fdxdy$ аламыз. Олай болса (3′) теңдік бойынша $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy.$ ▲

2-мысал. Ω аймағы $y=0$, $x=1$, $y=x^2$ сызықтарымен шенелген (25-сурет). $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdy$ екі еселі интегралды есептеу керек.



25-сурет

▼ Жоғарыдағы қайталама интегралдардың екеуінде пайдаланайық.

1) Ω: x=0, x=1, y=0, y=x^2 сызықтарымен шенелген y өсі бойынша дұрыс аймақ болғандықтан (3) теңдікті қолданайық:

$\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2}\left(x^2+y^2\right)dy.$ Алдымен ішкі интегралды (x-ті тұрақты деп санап) y бойынша есептейміз:

$$\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy = \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\substack{y=x^2\\y=0}} = x^2\cdot x^2+\frac{(x^2)^3}{3}-0 = x^4+\frac{x^6}{3}$$

Алынған нәтижені сыртқы интеграл таңбасының астына жазып, оны x бойынша есептейміз:

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{3\cdot 7}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}-0=\frac{26}{105}.$$

2) Ω: $y=0$, $y=1$, $x=\sqrt{y}$, $x=1$ сызықтарымен шенелген x өсі бойынша да дұрыс аймақ болғандықтан (4) теңдікті қолданайық:

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^1(x^2+y^2)dx=\int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=1}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}-y^{\frac{5}{2}}\right)dy=\left(\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{15}-\frac{2}{7}=\frac{26}{105}.\quad\blacktriangle$$

Еселі интегралды есептеу күрделілігі көбінесе интегралдау ретіне байланысты болады, бірақ жоғарыда келтірілген теорема бойынша олардың нәтижелері өзара тең.

11.3.2. Үш еселі интегралдарды есептеу. Екі еселі интегралдарды қайталанған бір еселі интегралдарға келтіру арқылы есептеу әдісі кез келген өлшемді кеңістіктерде де қолданылады. Мысалы, Ω интегралдау аймағы төменнен $z=\psi_1(x,y)$, $(x,y)\in D\subset OXY$ бетімен, жоғарыдан $z=\psi_2(x,y)$, $(x,y)\in D\subset OXY$ бетімен ($\psi_1(x,y)\le\psi_2(x,y)$, $\forall(x;y)\in D$), бүйір жағынан D аймағының шекарасы арқылы өтетін тік цилиндрлік бетпен шенелсе (26-сурет), онда үш еселі интегралды келесі түрде жаза аламыз:

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz. \qquad (6)$$

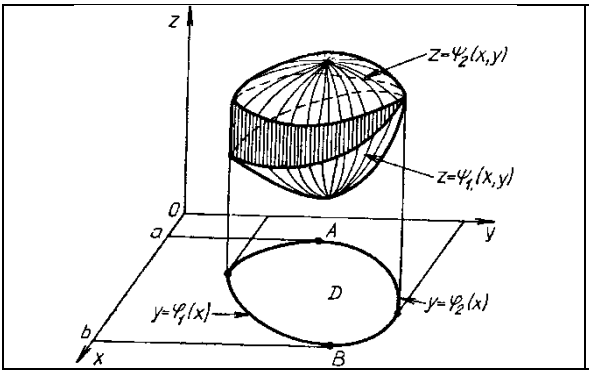
Мұндағы D аймағы бойынша екі еселі интегралды қайталама интегралдардың біреуімен жазсақ, онда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (7)$$

немесе

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (8)$$

аламыз. Мәселен, (7) теңдіктегі интегралдарды есептеу үшін,



26-сурет

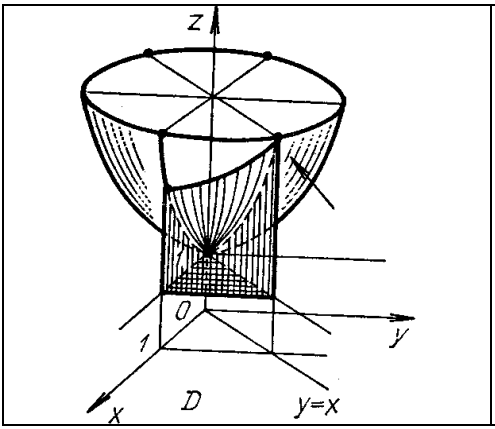
алдымен кез келген $(x,y) \in D$ нүктесі үшін $f(x,y,z)$ функциясын z айнымал бойынша $z = \psi_1(x,y)$-тен $z_2 = \psi_2(x,y)$-ке дейін интегралдайды (x пен y тұрақты деп саналады). Содан соң алынған (x,y)-ке тәуелді функцияны x-ті тұрақты деп алып y бойынша $y = \varphi_1(x)$-тен $y = \varphi_1(x)$-ке дейін интегралдайды. Соңында x-ке тәуелді функцияны $[a,b]$ аралығында x бойынша интегралдайды.

Мысал. Үш еселі интегралды есептеу керек: $\iiint\limits_{\Omega}(2x+y)dxdydz$. Мұндағы Ω: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 1$, $z = 1 + x^2 + y^2$ беттерімен шенелген аймақ (27-сурет).

▼ Ω аймағын x, y, z айнымалдарының өзгерулері арқылы жазуға болатынын көру қиын емес: Ω: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $1 \le z \le 1 + x^2 + y^2$. Сондықтан (7) формула бойынша есептейміз

$$\iiint_{\Omega}(2x+y)\,dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_1^{1+x^2+y^2}(2x+y)\,dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x (2x+y)\cdot z\Big|_{z=1}^{z=1+x^2+y^2}dy=$$



27-сурет

$$=\int_0^1 dx\int_0^x (2x+y)(x^2+y^2)dy=\int_0^1 dx\int_0^x (2x^3+y^3+2xy^2+x^2y)dy=$$

$$=\int_0^1\left(2x^3y+\frac{y^4}{4}+\frac{2}{3}xy^3+\frac{x^2y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1\frac{41}{12}x^4dx=\frac{41}{60}.$$ ▲

§ 11.4. Айнымалдарды ауыстыру

Ең қарапайым жағдай.

$$\iint_{\Omega} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \qquad (1)$$

интегралында u_1 және u_2 айнымалдарына өтейік. Келесі сызықтық айнымалдар ауыстыруы:

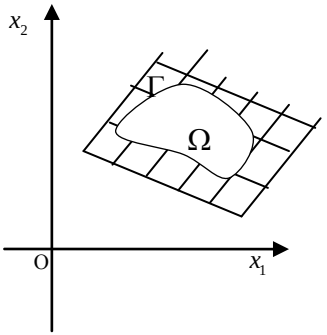
$$\begin{aligned} x_1 &= au_1 + bu_2, \\ x_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

(1) интеграл түрін қалай өзгертетінін көрейік.

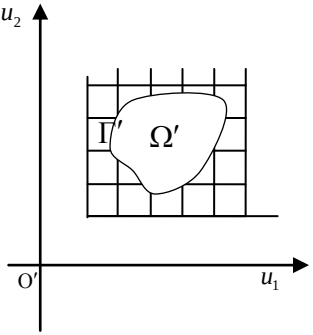
Ω аймағының Γ шекарасы құрақты-тегіс деп есептейміз (28-сурет). (2) ауыстыруға кері түрлендіру Ω аймағын (u_1, u_2) жазықтығындағы құрақты-тегіс Γ' шекарасы бар белгілі бір Ω' аймағына бейнелейді (29-сурет). Сонда Ω' аймағында

$$F(u_1, u_2) = f(au_1 + bu_2, cu_1 + du_2), \quad (u_1, u_2) \in \Omega', \tag{3}$$

функциясы да анықталады. Енді (u_1, u_2) жазықтығын қабырғасы h тең Δ' квадрат торларға бөлейік, яғни Ω' аймағында ρ' бөліктеуін



28-сурет



29-сурет

жүргізейік. Сонда әрбір квадрат төменгі сол жақ төбесінен шығатын

$$(h, 0) = h\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = h\mathbf{i}, \qquad (0, h) = 0\mathbf{i} + h\mathbf{j} = h\mathbf{j}$$

векторларымен анықталады: бірінші вектор Δ' квадратының табанымен, ал екінші вектор Δ' квадратының вертикал қабырғасымен беттеседі. Осы екі векторға (2) теңдіктер бойынша түрлендіру жасасақ, онда $h\mathbf{i} = (h, 0)$ векторы $x_1 = ah$, $x_2 = ch$, яғни $(ah, ch) = ah\mathbf{i} + ch\mathbf{j}$ векторына, ал $h\mathbf{j} = (0, h)$ векторы $x_1 = bh$, $x_2 = dh$, яғни $(bh, dh) = bh\mathbf{i} + dh\mathbf{j}$ векторына бейнеленеді. Демек, (2) түрлендірулер қабырғалары $(h, 0)$, $(0, h)$ болатын Δ' квадратын

қабырғалары (ah, ch), (bh, dh) болатын Δ параллелограмына бейнелейді. Сөйтіп, Ω аймағында ρ бөліктеуі анықталады.

$ah\vec{i} + bh\vec{j}$ және $ch\vec{i} + dh\vec{j}$ векторларымен анықталған Δ параллелограмының ауданы $|\Delta|$:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} ah & bh \\ ch & dh \end{vmatrix} = h^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = h^2 \cdot |D|$$

тең болғандықтан (ол аталған екі вектордың векторлық көбейтіндісінің модуліне тең екені белгілі), келесі теңдікті аламыз ((3) қараңыз):

$$\begin{aligned} S_\rho(f) &= \sum f(x_1, x_2)|\Delta| = \sum F(u_1, u_2) \cdot |D| \cdot h^2 = \\ &= \sum F(u_1, u_2)|D||\Delta'| = S_{\rho'}(|D| \cdot F). \end{aligned} \tag{4}$$

Бұл теңдіктен $h \to 0$ ұмтылдырып шекке өтсек,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{\Omega'} F(u_1, u_2)|D|du_1du_2. \tag{5}$$

Жоғарыдағы пайымдауларда f функциясы $\bar{\Omega}$ тұйықтамада үзіліссіз деп есептесек, F функциясы $\bar{\Omega}'$-да үзіліссіз болады. Алайда f функциясы Ω аймағында шенелген және Ω аймағының кейбір нүктелерінен немесе құрақты-тегіс сызықтарынан басқа нүкте-лерінде үзіліссіз болса да, нәтиже дұрыс болады.

Жалпы жағдай. Алдымен екі өлшемді жағдайды қарастырайық. Құрақты-тегіс шекарасы бар, қандай да бір шенелген аймақтың $\bar{\Omega}'$ тұйықтамасында үзіліссіз туындылары бар келесі екі функция берілсін:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(u_1, u_2), \\ x_2 = \psi(u_1, u_2), \end{cases} \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \Omega'. \tag{6}$$

(6) түрлендіру Ω' аймағын шекарасы құрақты-тегіс болатын белгілі бір Ω аймағына **өзара бір мәнді бейнелейді** деп есептейміз (басқаша айтқанда, Ω мен Ω' жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатылады).

$\bar{\Omega}$ аймағында үзіліссіз (немесе Ω аймағында шенелген және оның кейбір нүктелері мен құрақты-тегіс сызықтарынан басқа нүктелерінде үзіліссіз) $f(x_1, x_2)$ функциясын қарастырамыз. Егер осы шарттар орындалса, онда (5) айнымалдарды ауыстыру формуласы еселі интегралдар үшін сақталады, бірақ D анықтауышы Якоби анықтауышымен: $J(\mathbf{u}) = \dfrac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0$ алмастырылады (К.Г.Якоби (1804–1851) – немістің көрнекті математигі және механигі):

$$\iint\limits_{\Omega} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{\Omega'} f[\varphi(u_1, u_2), \psi(u_1, u_2)]\left|J(\mathbf{u})\right|du_1du_2. \qquad (7)$$

Назарыңызға! Жоғарыдағы $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ анықтауышы - $\begin{aligned} x_1 &= au_1 + bu_2, \\ x_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned}$ сызықтық жүйесінің Якоби анықтауышы.

Үш өлшемді жағдайда құрақты-тегіс шекарасы бар Ω' аймағының $\bar{\Omega}'$ тұйықтамасында үзіліссіз дифференциалданатын:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(u_1, u_2, u_3), \\ x_2 = \psi(u_1, u_2, u_3), \\ x_3 = \chi(u_1, u_2, u_3), \end{cases} \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \Omega' \qquad (8)$$

функциялары арқылы еселі интегралдағы айнымалдар ауыстыруы келесі түрде жазылады:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3,)dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} f[\varphi(u_1, u_2, u_3), \psi(u_1, u_2, u_3), \chi(u_1, u_2, u_3)] \cdot \left|J(\mathbf{u})\right|du_1du_2du_3. \qquad (9)$$

Мұндағы Якоби анықтауышы мынаған тең:

$$J(\mathbf{u})=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u_3}\\ \dfrac{\partial\chi}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\chi}{\partial u_2} & \dfrac{\partial\chi}{\partial u_3}\end{vmatrix},$$

(Ω аймағы Ω' аймағына (8) арқылы өзара бірмәнді бейнеленеді деп ұйғарылады). Ал $f(x_1,x_2,x_3)$ функциясы $\bar{\Omega}$ аймағында үзіліссіз немесе Ω аймағында шенелген, оның кейбір нүктелері мен құрақты-тегіс сызықтарынан және құрақты-тегіс беттерінен басқа нүктелерінде үзіліссіз деп есептеледі.

1-мысал. Ω аймағы $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=p$, $xy=q$ $(0<a<b,\quad 0<p<q)$ қисықтарымен шенелген.

$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}\,dxdy$ интегралын есептеу керек.

▼ Жаңа u,ϑ айнымалдарына

$$\begin{cases}ux=y^2,\\ \vartheta=xy\end{cases} \tag{10}$$

формулалары арқылы өтейік. Бұл жүйеден $x=u^{-\frac{1}{3}}\vartheta^{\frac{2}{3}}$, $y=u^{\frac{1}{3}}\vartheta^{\frac{1}{3}}$, ал бұдан $\dfrac{\partial x}{\partial u}=-\dfrac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\vartheta^{\frac{2}{3}}$, $\dfrac{\partial x}{\partial\vartheta}=\dfrac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}\vartheta^{-\frac{1}{3}}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\vartheta^{\frac{1}{3}}$, $\dfrac{\partial x}{\partial\vartheta}=\dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}\vartheta^{-\frac{2}{3}}$ аламыз. Демек,

$$J(u,\vartheta)=\begin{vmatrix}-\dfrac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\vartheta^{\frac{2}{3}} & \dfrac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}\vartheta^{-\frac{1}{3}}\\ \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\vartheta^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}\vartheta^{-\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3u},$$

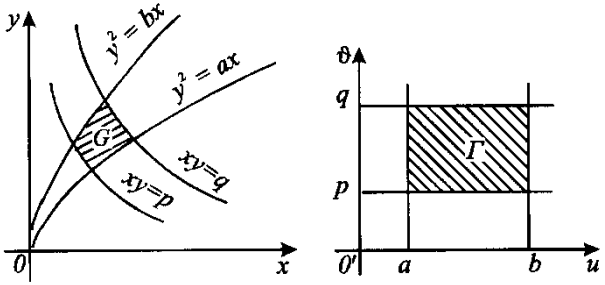
$$\left|J(u,\vartheta)\right|=\frac{1}{3u},\quad u>0.$$

Ω аймағын шектеп тұрған қисықтар мен (10) формулалардан

$u=a,\quad u=b,\quad \vartheta=p,\quad \vartheta=q$ теңдеулерін аламыз. Олай болса (10) теңдіктер арқылы oxy жазықтығындағы Ω аймағы $O'u\vartheta$ жазықтығындағы Ω' тік төртбұрышына бейнеленеді екен (30-сурет). (7) формуланы пайдаланамыз:

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}\,dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Omega'}\sqrt{\vartheta}\cdot\frac{1}{u}\,du\,d\vartheta=\frac{1}{3}\int\limits_{a}^{b}\frac{du}{u}\int\limits_{p}^{q}\sqrt{\vartheta}\,d\vartheta=\frac{1}{3}\ln u\Big|_{a}^{b}\cdot\frac{2}{3}\vartheta^{\frac{3}{2}}\Big|_{p}^{q}=$$

$$=\frac{2}{9}\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)\cdot\ln\frac{b}{a}.\quad\blacktriangle$$



30-сурет

Жазықтықтағы поляр координаттары. Екі өлшемді жағдайда көбірек қолданылатын айнымалдар ауыстыруы – (x,y) декарт координаттарынан (ρ,φ) поляр координаттарына өту. Мұндай айнымалдар ауыстыруы

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\qquad \rho\ge 0,\quad -\pi<\varphi\le\pi \tag{11}$$

формулалары арқылы жүзеге асырылады. Бұл түрлендірулер үшін Якоби анықтауышын есептейік:

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}(\rho\cos\varphi)'_{\rho} & (\rho\cos\varphi)'_{\varphi}\\ (\rho\sin\varphi)'_{\rho} & (\rho\sin\varphi)'_{\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\ \cos\varphi\end{vmatrix}=.$$

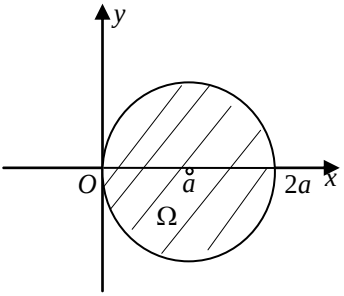
$$=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho\ .$$

Олай болса поляр координаттары үшін (7) формула келесі түрде жазылады:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\cdot\rho\, dr d\varphi\,. \qquad (7')$$

Ескерту. Полярлық координаттарға өту Ω аймағы дөңгелек, сақина немесе сақина секторы болған жағдайларда тиімді.

2-мысал. Полярлық координаттарын пайдаланып $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$ екі еселі интегралын есептеу керек, мұндағы Ω аймағы $x^2+y^2=2ax$ шеңберімен шенелген (31-сурет).



31-сурет

▼ (11) теңдіктер арқылы (7′) формуланы пайдалансақ, $x^2+y^2=\rho^2$ болғандықтан, $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_{\Omega'}\rho^2\cdot\rho d\rho d\varphi$ аламыз. Тік бұрышты декарт координаттары бойынша берілген $x^2+y^2=2ax$ - шеңбер теңдеуі поляр координаттары бойынша $\rho=2a\cos\varphi$ $(a>0)$ түрінде жазылады ((11) түрлендірулерді қараңыз), ал шеңбермен шенелген дөңгелектің нүктелерінің координаттары Ω': $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2a\cos\varphi$ аралығында жатады. Олай болса,

$$\iint\limits_{\Omega'}\rho^3 d\rho du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}\rho^3 d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = 4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 8a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4. \quad ▲$$

Кеңістіктегі полярлық координаттар (сфералық координаттар). Үш еселі интегралды есептеу үшін кейбір жағдайларда

$$x=\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \ y=\rho\cos\theta\sin\varphi,\ \ z=\rho\sin\theta \qquad (12)$$

түріндегі айнымалдар ауыстыруы арқылы (x,y,z) декарт координаттарынан (ρ,φ,θ) сфералық координаттарына өту тиімді (32-сурет). Мұнда:

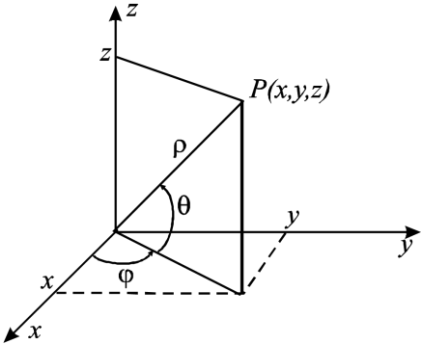
ρ арқылы $P(x,y,z)$ нүктесінен координат басына дейінгі қашықтық;

θ арқылы P радиус-векторы мен оның OXY жазықтығындағы проекциясының арасындағы бұрыш;

φ арқылы осы проекция мен x өсінің оң бағыты арасындағы бұрыш белгіленген.

Соңғы екі бұрыштың өзгеру аралықтары:

$$0\le\varphi<2\pi \quad \text{және} \quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$



32-сурет

(12) түрлендірудегі якобиан

$$J(\rho,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=$$

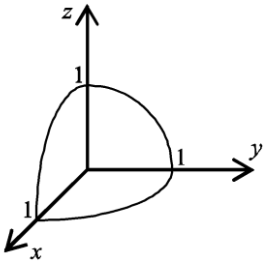
$= \rho^2 \cos\theta$ (тексеріңіз). Сонымен $J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \cos\theta$. Олай болса сфералық координаттар үшін (9) формула келесі түрде жазылады:

$$\iiint_{\Xi} f(x, y, z)\, dxdydz = \\ = \int\int\int_{\Omega'} f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta\, d\rho d\varphi d\theta. \tag{13}$$

Сфералық координаттар мысалына жер бетінің географиялық координаттары (бойлық (долгота) пен ендік (широта), ρ – жер центріне дейінгі қашықтық) жатады.

3-мысал. Есептеу керек: $\iiint_{\Omega} xyzdxdydz$, мұндағы Ω аймағы $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ беттерінің 1-октанттағы бөліктерімен шенелген (33-сурет).

▼ (12) сфералық координаттарды пайдаланайық. Ω аймағы үшін $0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ аламыз. (13)-формуланы пайдаланып есептейміз:



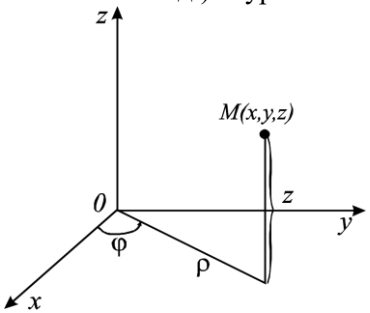
33-сурет

$$\iiint_{\Omega} xyzdxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^5 \cos^3\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d(\cos\varphi) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d(\cos\theta) \cdot \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{\cos^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}. \quad \blacktriangle$$

Цилиндрлік координаттар. Үш өлшемді кеңістікте x, y, z тік бұрышты координаттар жүйесі берілсін. Кеңістіктің кез келген $A = (x, y, z)$ нүктесін ρ, φ, z сандар үштігімен де анықтауға болады (34-сурет). Мұндағы z нүктенің бұрынғы аппликатасы, ал (ρ, φ) – (x, y) жазықтығындағы нүктенің полярлық координаттары (поляр өсі x өсінің оң бағытымен беттеседі). Суреттен келесі теңдіктерінің



34-сурет

орындалатынын байқаймыз:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad (14)$$

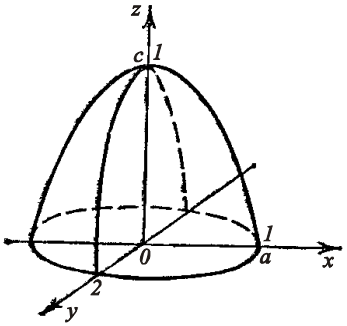
Бұл түрлендірудің якобианын есептейік:

$$J(\rho, \varphi, x) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Олай болса (9) формуланы келесі түрде жаза аламыз:

$$\iiint\limits_{\Omega}(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho d\rho d\varphi dz\ . \qquad (15)$$

4-мысал. $(x^2+y^2)^2+z=1$ және $z=0$ беттерімен шенелген дене көлемін табу керек (35-сурет).



35-сурет

▼ Еселік интегралдардың 1° қасиеті бойынша: $V=m\Omega=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz.$ Енді (14) цилиндрлік координаттарды енгізсек, $(x^2+y^2)^2=\rho^4$ теңдігін ескеріп, $\Omega:\ 0\le\rho\le1,\ 0\le\varphi\le2\pi,$ $0\le z\le1-\rho^4$ аламыз. Демек,

$$V=\iiint\limits_{\Omega'}\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int\limits_0^{1}\rho\ dp\int\limits_0^{1-\rho^4}dz=$$

$$=2\pi\cdot\int\limits_0^1(\rho-\rho^5)d\rho=2\pi\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}\pi.$$ ▲

§11.5. Беттің ауданы

x,y,z тікбұрышты координаттар жүйесі анықталған R^3 үш өлшемді кеңістікте S беті

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in\bar{G} \qquad (1)$$

теңдеуімен берілсін. Мұнда (x,y) жазықтығындағы G аймағы шенелген және оның шекарасы құрақты-тегіс, ал f функциясының дербес туындылары:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

$\bar{G}$ тұйықтамасында үзіліссіз. $\bar{G}$ -тұйықтамасын құрақты-тегіс сызықтар арқылы бөліктейміз: $\bar{G}=\sum_{j=1}^{N}G_i$. Әрбір G_j, $j=1,...,N$, бөліктің кез келген (x_j,y_j) нүктесіне беттің координаттары (x_j,y_j,f_j) болатын $P_j\in S$ нүктесі сәйкес келеді (мұнда $f_j=f(x_j,y_j)$). P_j нүктесі арқылы S бетіне L_j жанама жазықтығын жүргіземіз. G_j бөлігінің шекарасын бағыттаушы сызық ретінде алып, жасаушылары z өсіне параллель болатын цилиндрлік бет жүргіземіз. Ол бет L_j жанама жазықтығынан ℓ_j бөлігін кеседі. Осы бөліктің ауданы $|\ell_j|$ болсын.

Анықтама бойынша S **бетінің ауданы** деп, мына шекті айтады: $|S|=\lim\limits_{\max d(G_j)\to 0}\sum\limits_{j=1}^{N}|\ell_j|$.

L_j жанама жазықтығының теңдеуі

$$(z-z_j)-\frac{\partial f(x_j,y_j)}{\partial x}(x-x_j)-\frac{\partial f(x_j,y_j)}{\partial y}(y-y_j)=0,$$

немесе $p_j=\frac{\partial f(x_j,y_j)}{\partial x}$, $q_j=\frac{\partial f(x_j,y_j)}{\partial y}$ деп алсақ, ол

$(z-z_j)-p_j(x-x_j)-q_j(y-y_j)=0$ түрінде жазылатыны белгілі. Бұл жазықтықтың нормалі $\vec{n}_j=(-p_j,-q_j,1)$ болатындықтан, S бетінің P_j нүктедегі $\vec{n}_j$ нормалі мен z өсінің арасындағы бұрыштың

косинусі $\cos(\vec{n}_j, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+p_j^2+q_j^2}}$ тең. Ал G_j бөлігі жанама жазықтықтың ℓ_j бөлігінің (x, y) жазықтығына проекциясы болғандықтан, оның (екі өлшемді) ауданы $\left|G_j\right| = \left|\ell_j\right| \cdot \cos(\vec{n}_j, z)$. Бұл теңдіктен $\left|\ell_j\right| = \left|G_j\right| \cdot \dfrac{1}{\cos(\vec{n}_j, z)} = \left|G_j\right| \sqrt{1+p_j^2+q_j^2}$ шығады. Демек,

$$\left|S\right| = \lim_{\max d(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \left|\ell_j\right| = \lim_{\max d(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1+p_j^2+q_j^2}\left|G_j\right| = \iint\limits_G \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

Мұнда $\sqrt{1+p^2+q^2}$ функциясы $\bar{G}$ аймағында үзіліссіз болғандықтан, ол – интегралданатын функция.

Сонымен $S: z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{G}$ теңдеуімен берілген S бетінің ауданы мына формуламен өрнектеледі:

$$\left|S\right| = \iint\limits_G \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy\,. \qquad (3)$$

Осы сияқты, S беті

$$S: x = F(y, z)\,,\ (y, z) \in \mathrm{H} \qquad (1')$$

теңдеуімен берілсе, онда

$$\left|S\right| = \iint\limits_{\mathrm{H}} \sqrt{1+(F'_y)^2+(F'_z)^2}\,dydz \qquad (3')$$

ал

$$S:\ y = \Phi(x, z)\,,\ (x, z) \in D \qquad (1'')$$

теңдеуімен берілсе, онда

$$\left|S\right| = \iint\limits_D \sqrt{1+(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2}\,dxdz\,. \qquad (3'')$$

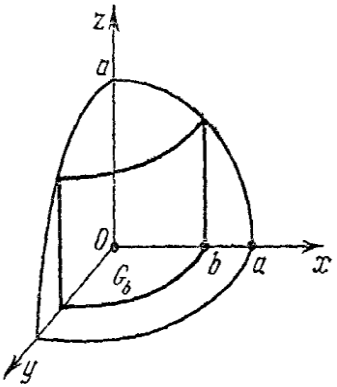
Мысал. $x^2+y^2+z^2 = a^2$ сферасының $x^2+y^2 = b^2$ $(b < a)$ цилиндр ішіндегі S_b бөлігінің ауданын табу керек.

▼ Бұл беттердің симметриялылығын ескерсек: $S_b = 8 \cdot S_1$, яғни S_b бетінің бірінші октанттағы бөлігінің ауданын 8-ге көбейткенге тең болады. Ал S_1 беті $S_1 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in G_b$ теңдеуімен анықталады. Мұнда G_b – радиусі b, центрі координаттың бас нүктесі болатын дөңгелектің XOY жазықтығындағы 1-ші ширекте жатқан бөлігі (36-сурет). (3) формуланы пайдаланамыз.

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},\ z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \text{ болғандықтан,}$$

$$\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\ .$$

Олай болса $S_b = 8S_1 = 8 \cdot \iint\limits_{G_b} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$. Мұнда



36 сурет

полярлық координаттарға өту тиімді:

$$S_b = 8a \int_0^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi a \left[-2(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^b \right] = 4\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})\ .$$ ▲

(3) интегралда келесі айнымалдар ауыстыруын жасайық:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, \vartheta), \\ y = \psi(u, \vartheta), \qquad (u, \vartheta) \in \bar{\Omega} \end{cases} \tag{4}$$

Мұндағы φ және ψ функциялары $\bar{\Omega}$ аймағында үзіліссіз дифференциалданады және якобианы нөлге тең емес, яғни

$$\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (u,v) \in \Omega \tag{5}$$

деп ұйғарылады.

$S: z = f(x,y)$, $(x,y) \in \bar{G}$ теңдігіндегі x пен y-ті (4)-нші өрнектермен алмастырсақ, $S: z = f[\varphi(u,\vartheta), \psi(u,\vartheta)] = \chi(u,\vartheta)$ аламыз. Алынған функцияның дербес туындыларын табамыз (күрделі функцияның дербес туындылары):

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{cases} . \tag{*}$$

Бұл жүйені $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ қатысты шешеміз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{D(z,y)}{D(u,\vartheta)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}},$$

осы сияқты, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{D(x,z)}{D(u,\vartheta)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}}$. Енді (3) формулаға §11.4 (7) формуланы қолданып (айнымал ауыстыруы),

$$|S|=\iint\limits_G\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_G\sqrt{1+\left[\frac{D(z,y)}{D(u,\vartheta)}/\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}\right]^2+\left[\frac{D(x,z)}{D(u,\vartheta)}/\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}\right]^2}\ \left|\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}\right|dud\vartheta$$

аламыз. Олай болса, S бетінің ауданын келесі формуламен өрнектеуге болады:

$$|S|=\iint\limits_G\sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}\right]^2+\left[\frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)}\right]^2}\,dud\vartheta\,. \qquad (6)$$

S тегіс бетін u,ϑ параметрлері арқылы

$$x=x(u,\vartheta)\,,\ \ y=y(u,\vartheta)\,,\ \ z=z(u,\vartheta)\,,\ \ (u,\vartheta)\in\Omega\,, \qquad (7)$$

үш теңдеумен беруге болады. Мұндағы x,y,z функцияларының дербес туындылары $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында үзіліссіз және

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}\right)^2+\left(\frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)}\right)^2>0\,,\ \ \forall(u,\vartheta)\in\Omega\,,$$

деп ұйғарылады. Мұнда

$$\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}=\begin{vmatrix}x'_u & x'_\vartheta\\ y'_u & y'_\vartheta\end{vmatrix},\qquad \frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)}=\begin{vmatrix}y'_u & y'_\vartheta\\ z'_u & z'_\vartheta\end{vmatrix},\qquad \frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)}=\begin{vmatrix}z'_u & z'_\vartheta\\ x'_u & x'_\vartheta\end{vmatrix}.$$

(7) үш параметрлік теңдеуді векторлық түрде де жазуға болады:

$$S:\vec{r}(u,\vartheta)=x(u,\vartheta)\vec{i}+y(u,\vartheta)\vec{j}+z(u,\vartheta)\vec{k},\quad (u,v)\in\Omega \qquad (8)$$

Мысал. Геликоид деп аталатын беттің параметрлік теңдеуі $S: x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = 4\varphi$, $0 < r < 3$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, берілген. Оның ауданын табу керек.

▼ Якобиандарды есептейік:

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\,;\quad \frac{D(y,z)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\sin\varphi\,;$$

$$\frac{D(z,x)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} = 4\cos\varphi\,.$$

Демек, $\left[\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(r,\varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(r,\varphi)}\right]^2 = r^2 + 16\,.$

(6) формула бойынша геликоид ауданын табамыз:

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{r^2+16}\;\; dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{3} \sqrt{r^2+16}\; dr d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{3} \sqrt{r^2+16} dr =$$

$$= 2\pi\left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2+16} + \frac{4^2}{2}\ln(r+\sqrt{r^2+16})\right]_0^3 = \pi(15+16\ln 2)\,. \;\blacktriangle$$

Жалпы жағдайда, егер S беті (7) параметрлік немесе (8) векторлық теңдеулермен берілсе, онда ***анықтама бойынша*** *оның ауданы деп,*

$$|S| = \iint\limits_{\Omega} \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_\vartheta\right| du d\vartheta \qquad (9)$$

шамасын айтады (мұнда $\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$, $\vec{r}_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\vec{k}$).

Расында да, (7) векторлардың векторлық көбейтіндісі

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_\vartheta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i}\,\frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)} + \vec{j}\,\frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)} + \vec{k}\,\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}. \qquad (8)$$

Олай болса (6) мен (9) формулалары – $|S|$ бетінің әртүрлі екі өрнекпен жазылған түрлері.

Ескерту. Беттің параметрлік теңдеулермен берілуі айқын теңдеулерге қарағанда жалпы жағдайларды қамтиды. Мысалы, радиусі 1, центрі нөл нүктесінде болатын сфераны

$$x = \cos\theta\cos\varphi, \quad y = \cos\theta\ \sin\varphi, \quad z = \sin\theta, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

параметрлік теңдеулермен беруге болады (θ,φ – параметрлер).

Ал сфераның теңдеуін функция ретінде жаза алмаймыз. Тек қана оның қандай да бір координаттар жазықтығына бірмәнді проекцияланатын бөлігін ғана айқын теңдеумен беруге болады.

Керісінше, егер бет $S: z = f(x,y), \quad (x,y) \in G$ теңдеуімен берілсе, онда оны векторлық түрде жазуға болады. Бұл жағдайда параметрлер ролін x, y айнымалдары атқарады: $S:\ \mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}, \quad (x,y) \in G$.

§11.6. Еселі интегралдардың механикада қолданылылуы

Тік бұрышты координаттар жүйесі анықталған кеңістікте массасы M_p-ге тең $P = (x_1, x_2, x_3)$ материалдық нүкте берілсін. Бұл нүктенің $x_i = 0$ жазықтығына салыстырғандағы **статикалық момент** деп, $K_{x_i} = M_p \cdot x_i$ көбейтіндісін айтады.

Массалары $M_j,\ j = 1,2,...,n$ тең $P_j = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}\right)$, $j = 1,2,...,n$ нүктелер жүйесінің $x_i = 0$ жазықтығына салыстырған-

дағы **статикалық момент** келесі теңдікпен анықталады: $K_{Xi} = \sum_{J=1}^{N} M_J \cdot x_i^{(j)}$.

Егер масса қандай да бір G жиыны бойынша үлестірілсе, онда G **денесінің** $x_i = 0$ **жазықтығына салыстырғандағы статикалық моменті**

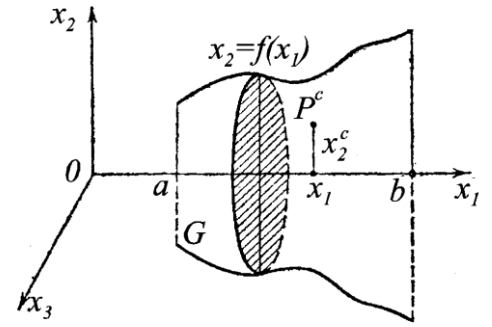
$$K_{x_i} = \int_G \rho(P) x_i dG = \int_G \rho(P) x_i dx_1 dx_2 dx_3$$

интегралымен анықталады, мұндағы $\rho(P)$ – массаның үлестіру тығыздығы.

G денесінің $P^c = \left(x_1^c, x_2^c, x_3^c\right)$ **ауырлық центрінің** координат-

тары $x_i^c = \frac{\int_G x_i \rho(p) dG}{\int_G \rho(p) dG}$, $i = 1,2,3$ формулалары арқылы анықталады.

Дербес жағдайда, егер $n = 2$ және G (x_1, x_2) жазықтығындағы жоғарыдан $x_2 = f(x_1) \geq 0$, $a \leq x_1 \leq b$, қисығымен; төменнен x_1 өсімен шенелген массасының үлестіру тығыздығы $\rho \equiv 1$ қисық сызықты трапеция болса (37-сурет), онда



37-сурет

$$x_2^c = \frac{\int\limits_G x_2 dx_1 dx_2}{\int\limits_G dx_1 dx_2} = \frac{\int\limits_a^b dx_1 \int\limits_0^{f(x_1)} x_2 dx_2}{mG} = \frac{1}{2mG}\int\limits_a^b f^2(x_1)dx_1 .$$

Бұдан келесі теңдікті аламыз:

$$2\pi x_2^c \cdot mG = \pi\int\limits_a^b f^2(x_1)dx_1. \qquad (1)$$

(1) теңдіктің оң жағында G **қисық сызықты трапецияның** x_1 **өсін айналуынан пайда болған дененің көлемі** тұр.

Сонымен келесі Гюльдин теоремасын алдық:

1-теорема. Айналу денесінің көлемі G қисық сызықты трапециясының ауданын осы трапецияның ауырлық центрінің x_1 өсін айналуынан шыққан шеңбер ұзындығына көбейткенге тең.

Егер $G: x_2 = f(x_1) \geq 0$, $a \leq x_1 \leq b$, теңдеуімен берілген біртекті қисық болса, онда $x_2^c = \frac{\int\limits_G x_2 d\ell}{mG} = \frac{\int\limits_G f(x_1)d\ell}{mG}$. Мұндағы mG – қисықтың $[a,b]$ аралығындағы ұзындығы, $d\ell$ – доға ұзындығының элементі. Ал $d\ell = \sqrt{1+[f'(x_1)]^2}\ dx_1$ тең болғандықтан, $x_2^c = \frac{1}{mG}\int\limits_a^b f(x_1)\sqrt{1+f'(x_1)^2}\ dx_1$ немесе

$$2\pi x_2^c \cdot mG = 2\pi\int\limits_a^b f(x_1)\sqrt{1+f'(x_1)^2}\ dx_1 . \qquad (2)$$

(2) теңдіктің оң жағында $G: x_2 = f(x_1)$, $a \leq x_1 \leq b$ қисығының x_1 өсін айналуынан шыққан беттің ауданы тұр. Олай болса (2) теңдік Гюльдиннің келесі теоремасын береді (П. Гюльдин (1557-1643) – Швейцария математигі).

2-теорема. Айналу бетінің ауданы $G: x_2 = f(x_1)$, $a \leq x_1 \leq b$ қисығының доға ұзындығын осы қисықтың ауырлық центрінің x_1 өсін айналуынан шыққан шеңбер ұзындығына көбейткенге тең.

Гюльдин теоремалары бойынша екі белгілі шама арқылы үшіншісін табуға болады.

1-мысал. $G=\left\{-R\le x\le R,\ x^2\le y\le R^2\right\}$ қисық сызықты трапецияның (38-сурет) $P^c=(x^c,y^c)$ ауырлық центрінің координаттарын табу керек.

▼ $\rho\equiv 1$ деп есептейміз. Симметриялылығына байланысты $x^c=0$ екені айқын. G трапециясының ауданын табайық:

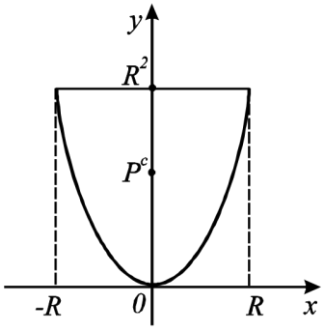
$$mG=2R\cdot R^2-2\int_0^R x^2dx=2R^3-\frac{2}{3}R^3=\frac{4}{3}R^3.$$

G аймағының x өсін айналуынан шыққан дененің көлемі

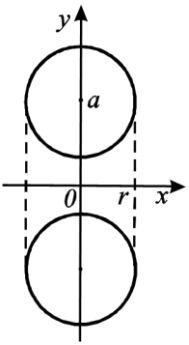
$$V=\pi(R^2)^2\cdot 2R-2\pi\int_0^R (x^2)^2dx=2\pi R^5-\frac{2}{5}\pi R^5=\frac{8}{5}\pi R^5.$$

Гюльдиннің 1-теоремасынан $y^c=\dfrac{V}{2\pi\cdot mG}=\dfrac{3}{5}R^2$. ▲

2-мысал. Центрі (o,a) нүктесінде болатын, радиусі r-ге тең $(r<a)$ $G=\left\{x^2+(y-a)^2\le r^2\right\}$ дөңгелегінің x өсін айналуынан шыққан дене көлемін табу керек (39-сурет).



38-сурет



39-сурет

▼ Біртекті дөңгелектің ауырлық центрі оның геометриялық

центрімен беттесетіні түсінікті, яғни $x^c = o, y^c = a$. Дөңгелек ауданы $mG = \pi r^2$. Сондықтан (1) бойынша $V = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 a$. ▲

3-мысал. 2-мысалдағы айналу денесінің бетінің ауданын табу керек.

▼ Бұл бетті $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ шеңберінің x өсін айналуынан шыққан бет ретінде алуға болады. Бұл шеңбер ұзындығы – $2\pi r$. Демек, Гюльдиннің 2-теоремасы бойынша $S = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$. ▲

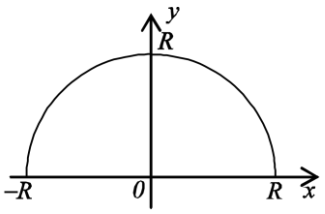
4-мысал. Біртекті: а) $x^2 + y^2 \le R^2$, $y > 0$ жарты дөңгелектің; б) $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$ жарты шеңбердің ауырлық центрін табу керек (40-сурет).

▼ Радиусі R-ге тең шар көлемі: $\frac{4}{3}\pi R^3$, ал оның беті $4\pi R^2$.

(1) формула бойынша $2\pi y^c_{жд} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow y^c_{жд} = \frac{4R}{3\pi}$.

Мұнда $y^c_{жд}$ – жарты дөңгелектің центрінің ординаты.

(2) формула бойынша жарты шеңбердің ауырлық центрінің $y^c_{жш}$ ординаты $2\pi \cdot y^c_{жш} \cdot \pi R = 2\pi R^2 \Rightarrow y^c_{жш} = \frac{2R}{\pi}$. ▲



40-сурет

Моменттер. Массасы M_p-ге тең P материалдық нүктесінің $x_i = 0$ жазықтығына салыстырғандағы ***q*-ші** $(q = 2,3,...)$ **ретті момент** деп, $I^{(q)}_{x_i} = M_p \cdot x_i^q$ көбейтіндісін айтады.

Егер масса G өлшенетін жиында $\rho(P)$ тығыздықпен үлестірілген болса, онда

$$I_{x_i}^{(q)} = \int\limits_G x_i^q \rho(P)\, dG\,, \quad i = 1,2,3. \tag{3}$$

Егер (3) теңдікте $q = 2$ болса, онда оны **инерция моменті** дейді, бұл жағдайда

$$I_{x_i}^{(2)} = \int\limits_G x_i^2 \rho(P)\, dG\,, \quad i = 1,2,3. \tag{3′}$$

G денесінің координат басына салыстырғандағы q-ші ретті моментін келесі түрде жазуға болады

$$I_0^{(q)} = \int\limits_G \rho(P) \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \right)^{\frac{q}{2}} dG\,. \tag{4}$$

G денесінің x_i, $i = 1,2,3$, координат өсіне салыстырғандағы q-ші ретті моментін жазуға болады, мысалы, x_1 өсіне салыстырғандағы G денесінің q ші ретті моменті $I_{x_2x_3}^{(q)} = \int\limits_G \rho(p) \left(x_2^2 + x_3^2 \right)^{\frac{q}{2}} dG$.

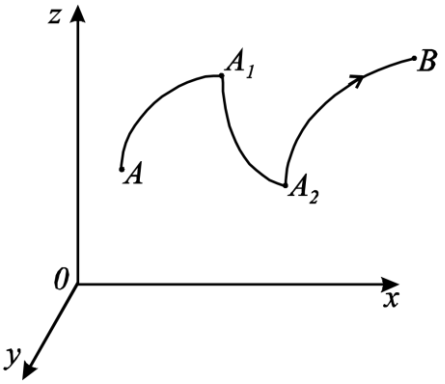
§11.7. Бағытталған құрақты-тегіс қисық

11.7.1. Кеңістіктегі бағытталған қисық. Γ қисығының векторлық теңдеуі берілсін:

$$\Gamma: \ \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k}\,, \ a \le t \le b\,. \tag{1}$$

Егер φ, ψ, χ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $[a = t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{N-1}, t_N = b]$ бөлікше кесінділердің әрбіреуінде φ, ψ, χ функцияларының бір мезгілде нөлге тең емес үзіліссіз туындылары бар болатындай етіп, $[a,b]$ кесіндісін саны ақырлы $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., N$, бөлікше кесінділерге бөліктеуге болатын болса, онда Γ **құрақты-тегіс қисық** деп аталады (41-сурет).

41-суретте A_1 мен A_2 нүктелерінде қисық үзіліссіз, бірақ $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ туындыларының бәрі немесе кейбірі (бірінші текті) үзілісті.



41-сурет

Г арқылы (x, y, z) нүктелерінің (1) теңдеумен анықталған геометриялық орнын ғана емес, t үздіксіз a-дан b-ға дейін өскенде $(a < b)$ осы нүктелердің орын ауыстыру бағытын да белгілейді. Міне осы мағынада Г **бағытталған қисық** деп аталады. 41-суретте t параметрі a-дан b-ға дейін үздіксіз өссе, (x, y, z) нүктесі Г қисығы бойынша меңзер ұшымен көрсетілген бағытта қозғалады $(a < b)$.

Г тегіс қисығы әртүрлі параметрлердің $t, \tau, \ldots$ көмегімен параметрлік түрде берілуі мүмкін. Мысалы, егер $t = \lambda(\tau)$ қандай да бір $[c, d]$ кесіндісінде үзіліссіз оң таңбалы $\lambda'(\tau) > 0$ туындысы бар функция және $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$ болса, онда

$$\vec{r}[\lambda(\tau)] = \varphi[\lambda(\tau)]\vec{i} + \psi[\lambda(\tau)]\vec{j} + \chi[\lambda(\tau)]\vec{k}, \quad c \le \tau \le d, \qquad (1')$$

теңдеуі осы бағытталған Г қисықты анықтайды. Қисық (1) теңдеуде t параметрі арқылы анықталса, $(1')$ теңдеуінде ол τ параметрі арқылы анықталып тұр. Бірақ егер $t = \lambda(\tau)$ айнымал ауыстыруында $\lambda'(\tau) < 0$, $\forall \tau : c \le \tau \le d$ $(c < d)$ болса, онда $\lambda(c) = b$, $\lambda(d) = a$ болады да, τ параметрі c-дан d-ға дейін өскенде t параметрі b-дан a-ға дейін кемиді, сөйтіп қисық бағыты кері қарай өзгереді. Сондықтан бұл $(\lambda'(\tau) < 0)$ жағдайда $(1')$ қисығын басқа, мысалы, Г_ символымен белгілейді.

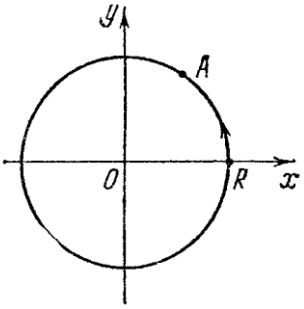
Сонымен Г_ қисығы бастапқы Г қисығымен беттескенімен, бағыты оған қарама-қарсы.

Ескерту. Г қисығының (1) векторлық теңдеуі келесі үш теңдеуге парапар: Г: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $a\le t\le b$.

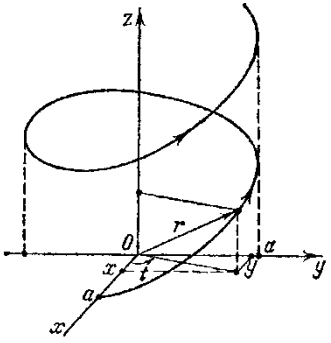
1-мысал. Г қисығы $\vec{r}(t)=\vec{i}R\cos t+\vec{j}R\sin t$ векторлық немесе $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$, параметрлік теңдеуімен берілсін.

Мұнда $x^2+y^2=(R\cos t)^2+(y\sin t)^2=R^2$ болғандықтан, берілген теңдеу радиусі R-ге тең, центрі координат басы болатын шеңберді анықтайды. t параметрі 0-ден 2π-ге дейін өскенде $A(x,y)$ нүктесі шеңбер бойымен сағат тіліне қарсы бағытта қозғалады. Параметрдің $t=0$ мен $t=2\pi$ мәндері үшін $\vec{r}(0)=\vec{r}(2\pi)=\vec{i}R$ аламыз (42-сурет).

2-мысал. $\vec{r}(t)=\vec{i}a\cos t+\vec{j}a\sin t+bt\vec{k}$, $0\le t<\infty$, $a,b>0$ қисығы **бұранда сызық** (**винтовая линия**) деп аталады. Оны алу үшін былай етеді. Ұзындығы a-ға тең z-ке перпендикуляр кесінді бір ұшымен z бойынша сырғи отырып z өсін айнала бұрылғанда, кесіндінің екінші ұшы бұранда сызығын сызып шығады. Кесіндінің z өсі бойынша көтерілу биіктігі бұрылу бұрышы t-ға пропорционал: $z=bt$. Айнымал t-нің қабылдайтын мәндеріне сәйкес (x,y,z) нүктесі 43-суретте көрсетілгендей орын ауыстырып отырады. Бұранда сызығы радиусі a-ға тең, жасаушысы z өсіне параллель дөңгелек цилиндрдің бүйір бетінде орналасқан.



42-сурет



43-сурет

11.7.2. Бірінші текті қисық сызықты интеграл және оның негізгі қасиеттері. Үзіліссіз құрақты-тегіс Γ қисығы

$$\Gamma:\ \vec{r}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\chi(t)\vec{k}\ ,\ 0\le t\le T \qquad (2)$$

векторлық теңдеуімен берілсін. $F(x,y,z)$ функциясы Γ қисығында немесе Γ қисығының қандай да бір маңайында үзіліссіз болсын.

Анықтама. $F(x,y,z)$ *функциясының* Γ *қисығы бойынша* ***бірінші текті қисық сызықты интегралы*** *деп мына шаманы айтады*

$$\int\limits_{\Gamma}F(x,y,z)ds=\int\limits_{0}^{T}F[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\cdot\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt\ . \qquad (3)$$

(3) теңдіктің сол жағы бірінші текті қисық сызықты интегралдың белгіленуі, ал оң жағы, оның анықтамасы. Ол – кәдімгі $[0,T]$ кесіндісіндегі t бойынша анықталған интеграл.

Мысалы, егер Γ қисығының $(x,y,z)\in\Gamma$ нүктесіндегі массасының үлестіру тығыздығы $F(x,y,z)$ болса, онда қисықтың M массасы (3) интеграл арқылы есептеледі. Өйткені t-нің $[t,t+dt]$ кесіндесіндегі өзгеруіне сәйкес келетін материалдық қисық элементінің массасы жоғарғы ретті ақырсыз кішкене шамаға дейінгі дәлдікпен $Fds=F[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt$ шамасына тең. Мұндағы ds шамасы – Γ доғасының дифференциалы.

Бірінші текті қисық сызықты интегралдың негізгі қасиеттері.

1°. *Интегралдау қисығының бағытын өзгерткеннен интеграл шамасы өзгермейді:*

$$\int\limits_{\Gamma}F(x,y,z)ds=\int\limits_{\Gamma_-}F(x,y,z)ds\ . \qquad (4)$$

▼ (2) мен анықталған Γ қисығына қарама-қарсы бағытталған Γ_- қисығын

$$\Gamma_-:\ \ x=\varphi(T-\tau)\ ,\ \ y=\psi(T-\tau)\ ,\ \ z=\chi(T-\tau)\ ,\ \ 0\le\tau\le T\ ,$$

теңдеуімен беруге болады (көз жеткізіңіз). Онда $T-\tau=t$ ауыстыруын жасап, анықталған интеграл қасиетіне сүйеніп, есептейміз:

$$\int\limits_{\Gamma_-} F(x,y,z)ds =$$

$$= \int\limits_0^T F[\varphi(T-\tau),\psi(T-\tau),\chi(T-\tau)]\sqrt{\varphi'\varphi(T-\tau)^2+\psi(T-\tau^2+\chi(T-\tau)^2}\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_T^0 F[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T F[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt = \int\limits_\Gamma F(x,y,z)ds. \quad \blacktriangle$$

2°. Егер $F \equiv 1$ болса, онда бірінші ретті қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының ұзындығына тең: $\int\limits_\Gamma ds = |\Gamma|$.

3-мысал. 2-ші мысалдағы бұранда сызығының массасының үлестіру тығыздығы $F(x,y,z) = z^2$ тең. Бұранда сызықтың t параметрдің $[0,3]$ кесіндісінде өзгеруіне сәйкес бөлігінің массасын табу керек.

▼ Бұранда сызықтың осы бөлігінің теңдеуін жазамыз: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 3$. Енді (3) теңдікті пайдаланып есептейміз:

$$M = \int\limits_0^3 F[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^3 b^2t^2\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = b^2\sqrt{a^2+b^2}\ \int\limits_0^3 t^2dt =$$

$$= 9b^2\sqrt{a^2+b^2}. \quad \blacktriangle$$

Жазықтықтағы $\Gamma \subset R^2$ қисығы үшін (3) теңдік келесі түрде жазылады

$$\int\limits_\Gamma F(x,y)\,ds = \int\limits_0^T F[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\ dt. \qquad (3')$$

Егер $\Gamma \subset R^2$ қисығы

$$\Gamma: y = f(x),\ \ a \le x \le b, \qquad (4)$$

теңдеуімен берілсе, онда параметрдің ролін x айнымалысы атқарады да, қисық $\Gamma: \mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$, $a \le x \le b$ векторлық теңдеуімен жазылады және (3′) теңдігі келесі түрге ие болады:

$$\int_{\Gamma} F(x,y)\,ds = \int_a^b F[(x, f(x)]\cdot\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\ dt. \qquad (5)$$

4-мысал. Есептеу керек: $\mathrm{I} = \int_{\Gamma} \dfrac{ds}{x+2y+5}$, мұндағы Г: $A(0,-2)$ мен $B(1,0)$ нүктелерін қосатын кесінді .

▼ A мен B нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі:

$$\frac{y+2}{0+2} = \frac{x-0}{1-0} \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x-2.$$

Демек, $\Gamma \equiv [AB]: y = 2x-2$, $0 \le x \le 1$, яғни қисықтың (4) түрдегі теңдеуін аламыз. Олай болса, (5) формула бойынша есептейміз:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+(2x-2)'^2}\,dx}{x+2(2x-2)+5} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{5x+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|5x+1\right|\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6\,. \ \blacktriangle$$

§11.8. Вектордың қисық бойынша интегралы (екінші текті қисық сызықты интеграл)

Вектор өрісі. R^3 кеңістігінде x, y, z тікбұрышты координаттар жүйесі берілсін. R^3 кеңістігіндегі Ω аймағының әрбір нүктесінен осы нүктеге тәуелді $\mathbf{a}$ векторы жүргізілсін. Онда оны келесі түрде жазады:

$$\mathbf{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}\,,\ (x,y,z) \in \Omega \qquad (1)$$

немесе қысқаша

$$\mathbf{a} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}. \qquad (1')$$

Мұнда P,Q,R арқылы тәуелсіз (x,z,y) айнымалдарының Ω аймағында анықталған функциялары белгіленген.

(1) теңдік Ω **аймағында а вектор өрісін** анықтайды. Егер P,Q,R функциялары Ω аймағында үзіліссіз болса, онда **а** векторы да Ω аймағында үзіліссіз вектор-функция болады.

Егер P,Q,R функцияларының дербес туындылары үзіліссіз болса, онда **а** векторы да осы қасиетке ие болады.

11.8.1. Вектордың қисық бойыша интегралы және оның қасиеттері. x,y,z тік бұрышты координаттар жүйесі анықталған R^3 кеңістігінде *бағытталған үзіліссіз құрақты-тегіс* Г қисығы берілсін. Г қисығының бастапқы нүктесі A_0, ал соңғы нүктесі A_1 болсын. Егер Г тұйық болса, онда A_0 мен A_1 нүктелері беттеседі.

Г қисығының теңдеуі: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ 0\le t\le T$, болсын ($t=0$ мәніне A_0 нүктесі, $t=T$ мәніне A_1 нүктесі сәйкес келеді). Онда Г қисығының әрбір ішкі (бұрыштық емес) A нүктесінде жүргізілген жанама арқылы осы жанамада жатқан t-нің өсу жағына қарай бағытталған ***τ* бірлік векторы** бірмәнді анықталады.

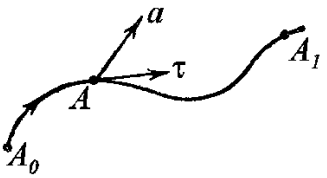
Г қисығында үзіліссіз $\mathbf{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+$ $+R(x,y,z)\mathbf{k}$ векторы (яғни, P,Q,R функциялары Г қисығында үзіліссіз) берілсін (44-сурет). *(Қисықтың әрбір* $(x,y,z)\in\Gamma$ *нүктесінде жүргізілген* **а** *векторының бағыты мен ұзындығы осы нүктеге тәуелді болатыны есте болуы керек (яғни,* $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z)$ *)).*

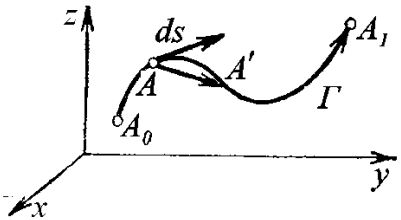
▼ **а** векторын күш деп алып, осы күштің әсерінен нүктенің Г қисығы бойымен A_0-ден A_1-ге орын ауыстырғандағы жұмысты табайық.

Параметрдің t мәніне Г қисығының A нүктесі, ал $t+dt$ мәніне $A'\in\Gamma$ нүктесі сәйкес келсін. Онда $\mathbf{AA}'$ векторы Г қисығына жүргізілген жанаманың бойымен t-нің өсу жағына қарай бағытталған

$$\mathbf{ds}=\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz,\quad (dx=\varphi'(t)dt,\ dy=\psi'(t)dt,\ dz=\chi'(t)dt),$$

векторына жуық түрде тең болады: $\mathbf{AA}'\approx\mathbf{ds}$ (45-сурет).





44-сурет 45-сурет

a күшінің параметр t мәнінен $t+dt$ мәніне дейін өзгергендегі элементар жұмысы жоғарғы ретті ақырсыз аз шамаға дейінгі дәлдікпен **a** мен **ds** векторларының скаляр көбейтіндісіне тең:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ds} = P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz =$$

$$= \left[P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\varphi'(t)) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\chi'(t) \right] dt$$

Ал бағытталған Г жолы бойынша толық жұмысты табу үшін, осы өрнекті t бойынша $[0,T]$ кесіндісінде интегралдау керек:

$$\int_{\Gamma}(\mathbf{a},\mathbf{ds}) = \int_0^T [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\varphi'(t)) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) +$$

$$+R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]dt \ . \qquad (2)$$

Бұл теңдіктің сол жағы **a векторының бағытталған Г жолы бойынша қисық сызықты интегралы** немесе қысқаша **a векторының Г қисығы бойынша интегралы** деп аталады.

((2) теңдіктің сол жақ бөлігі **a** векторының Г бойынша интегралының белгіленуі де, ал оң жақ бөлігі – оның анықтамасы.)

▲

(2) қисық сызықты интегралды келесі түрде де жазады:

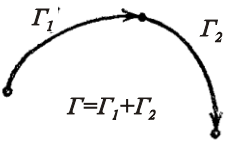
$$\int_{\Gamma}(\mathbf{a},\mathbf{ds}) = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \ . \qquad (3)$$

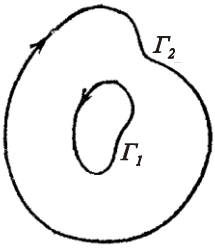
(3) теңдіктің сол жақ бөлігі де, оң жақ бөлігі де кейде **екінші текті қисықсызықты интеграл** деп аталады.

Екінші текті қисық сызықты интегралдардың негізгі қасиеттері.

1°. Егер бағытталған Г қисығы, бағытталған Γ_1 мен Γ_2 қисықтарының қосындысы болса $(\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2)$, онда (46, 47-суреттер) $\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{ds}) = \int\limits_{\Gamma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{ds}) + \int\limits_{\Gamma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{ds})$.



46-сурет



47-сурет

2°. Егер Γ_- мен Г – бір ғана қисық, бірақ Γ_- қисығы Г қисығына қарама-қарсы бағытталған болса, онда $\int\limits_{\Gamma_-} (\vec{a}, \overrightarrow{ds}) = -\int\limits_{\Gamma} (\vec{a}\overrightarrow{ds})$.

▼ Г қисығының жанамасының t параметрінің өсу жағына қарай бағытталған бірлік векторы τ болсын. Онда Г үшін $\mathbf{ds} = \boldsymbol{\tau} ds$, ал Γ_- үшін $\mathbf{ds} = -\boldsymbol{\tau} ds$ болады (мұндағы *ds* скаляры Г доғасының дифференциалы). Сондықтан $\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{ds}) = \int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau} \cdot ds) = \int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}) ds$. Бұл теңдіктің оң жақтағы бөлігі – $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau})$ функциясының Г бойынша бірінші текті интегралы. Оның Г бағытына тәуелсіз екені белгілі, олай болса $\int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{ds}) = \int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau} \cdot ds) = \int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau}) ds = \int\limits_{\Gamma_-} (\vec{a}, \vec{\tau}) ds$. Одан әрі векторлардың скаляр көбейтіндісі мен анықталған интегралдың қасиеттерін пайдалансақ және Γ_- қисығы үшін $\overrightarrow{ds} = -\vec{\tau} ds$ екенін ескерсек, $\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{ds}) = \int\limits_{\Gamma_-} (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}) ds = -\int\limits_{\Gamma_-} (\mathbf{a}, -\boldsymbol{\tau} ds) = -\int\limits_{\Gamma_-} (\mathbf{a}, \mathbf{ds})$ аламыз. ▲

Механикалық тұрғыдан **2°** қасиет оңай көрініп тұр: Г мен Γ_- қисықтарының бойындағы **a** күшінің жұмыстары тең, бірақ таңбалары қарама-қарсы.

Назар аударыңыз. 2° қасиет бірінші және екінші текті интегралдардың айырмашылығын айқын аңғартады. Ал Г қисығының бағытын өзгерткенмен, бірінші текті интегралдың таңбасы өзгермейтін еді.

1-мысал. $\mathrm{I}=\int\limits_{AB}(x^2dx+xydy)$ интегралын $(0,0)$ мен $(1,1)$ нүктелерін қосатын:

а) түзу кесінді бойынша;

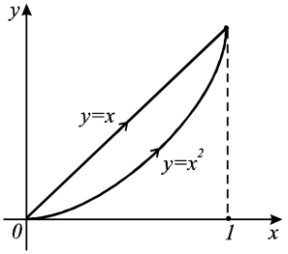
б) $y=x^2$ параболасы бойынша есептеу керек (48-сурет).

▼ а) $AB: y=x,\ \ 0\le x\le 1$ болғандықтан,

$$\mathrm{I}=\int\limits_{AB}(x^2dx+xydy)=\int\limits_0^1(x^2+x^2)dx=2\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}.$$

б) $AB: y=x^2,\ \ 0\le x\le 1$, демек,

$$\mathrm{I}=\int\limits_{AB}(x^2dx+x\cdot x\cdot 2xdx)=\int\limits_0^1(x^2+2x^4)dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}.$$ ▲



48-сурет

2-мысал. $\mathrm{I}=\int\limits_{AB}(x^2ydx+\frac{x^3}{3}dy)$ интегралын 1-мысалдағы қисықтар бойынша есептеу керек.

▼ а) $AB: y=x,\ \ 0\le x\le 1.\ \ \mathrm{I}=\int\limits_0^1(x^2\cdot xdx+\frac{x^3}{3}dx)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3};$

б) $AB: y=x^2,\ \ 0\le x\le 1.$

$$\mathrm{I}=\int\limits_0^1\left(x^2x^2dx+\frac{x^3}{3}\cdot 2xdx\right)=\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{2}{3}x^4\right)dx=\frac{5}{3}\int\limits_0^1 x^4dx=\frac{1}{3}.$$ ◀

1-мысалдан екінші текті интеграл интегралдау жолына тәуелді екені көрінеді.

2-мысалда екінші текті интеграл $(0,0)$ мен $(1,1)$ нүктелерін қосатын жолдардың әртүрлі болуына тәуелсіз, бір ғана мәнге ие болды. Мұның себебі төменде түсіндіріледі.

§11.9. Потенциалды өріс

11.9.1. Потенциал ұғымы және оның қасиеттері. Ω аймағында $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ вектор-лық өрісі берілсін**.**

Анықтама. *Егер* $\frac{\partial U}{\partial x} = P,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial U}{\partial z} = R,\ (x,y,z) \in \Omega$

теңдіктерін қанағаттандыратын дербес туындылары Ω *аймағында үзіліссіз* $U(x,y,z)$ *функциясы бар болса, онда* $U(x,y,z)$ *функциясы* **а** ***векторының*** Ω ***аймағында потенциал функциясы*** *немесе қысқаша* ***потенциалы*** *деп аталады.*

Бұл жағдайда **а** векторы $U(x,y,z)$ **функциясының градиенті** деп аталады да, келесі символмен белгіленеді:

$$\mathbf{a} = \mathbf{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\ .$$

1-мысал. $U(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ функцясы $O(0,0,0)$ нүктесінен басқа кеңістіктің барлық нүктелерінде анықталған. Оның градиенті

$$\mathbf{a} = \mathbf{grad}U = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathbf{k}$$

тең.

Егер $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ деп алсақ, онда **a** векторының потенциалы $U(x,y,z)=-\frac{1}{r}$, ал оның градиенті келесі түрде жазылады:

$$\mathbf{a}=\mathbf{grad}U=\frac{x}{r^3}\mathbf{i}+\frac{y}{r^3}\mathbf{j}+\frac{z}{r^3}\mathbf{k}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\mathbf{i}+\frac{y}{r}\mathbf{j}+\frac{z}{r}\mathbf{k}\right).$$

Мұндағы жақша ішінде бағыты (x,y,z) нүктесінің радиус-векторының бағытындай (**a** векторының бағытындай) бірлік вектор тұрғандықтан, $|\mathbf{a}|=\frac{1}{r^2}$ тең.

Бұған мынадай физикалық интерпретация беруге болады.

$O\ (0,0,0)$ нүктесінде бірлік электр заряды бар және (x,y,z) нүктесінде де таңбасы дәл осындай бірлік заряд орналасқан болсын. Бұл зарядтардың өзара әсер ету (тебу) күші (x,y,z) нүктесінен шығатын (x,y,z) нүктесінің радиус-векторымен бағыттас вектор және оның шамасы $\frac{1}{r^2}$ тең.

Вектор өрісінің потенциалына қатысты қасиеттерді қарастырайық.

1-теорема. Ω аймағында берілген **a** вектор өрісінің потенциалы болу үшін, келесі екі шарттың біреуінің орындалуы қажетті және жеткілікті:

1) **a** векторының Ω аймағында жататын кез келген тұйық құрақты-тегіс Γ контуры бойынша интегралы нөлге тең

$$\forall\Gamma\subset\Omega,\quad \oint_{\Gamma}(\mathbf{a},\mathbf{ds})=0.$$

2) **a** векторының Ω аймағының кез келген екі нүктесін қосатын әрбір $\Gamma\subset\Omega$ жолы бойынша интегралы интегралдау жолына тәуелсіз.

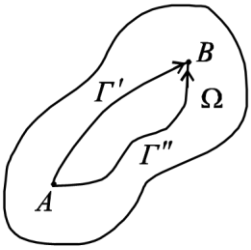
Егер **a** векторының $U(x,y,z)$ потенциалы бар болса, онда **a** векторының $A=(x_0,y_0,z_0)$, $B=(x,y,z)$ нүктелерін қосатын кез келген $\Gamma_{AB}\subset\Omega$ жолы бойынша интегралы

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{a}, \mathbf{ds}) = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \qquad (1)$$

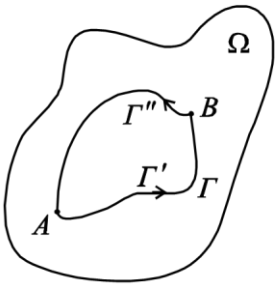
▼ 1) және 2) қасиеттердің парапар екенін көрсетейік (теорема дәлелдеуін келтірмейміз, оны, мысалы, [1] кітаптан қарауға болады).

1) қасиет орындалсын. Ω аймағында жатқан A мен B нүктелерін алайық (49-сурет). Оларды A нүктесінен B нүктесіне қарай бағытталған әртүрлі Γ' және Γ'' қисықтарымен $(\Gamma', \Gamma'', \subset \Omega)$ қосайық. Онда 1)-қасиет бойынша, $\int\limits_{\Gamma'} + \int\limits_{\Gamma''_-} = \int\limits_{\Gamma'+\Gamma''_-} = 0$, олай болса, $\int\limits_{\Gamma'} = -\int\limits_{\Gamma''_-} = \int\limits_{\Gamma''}$, яғни 2) қасиет орындалады.

Енді, керісінше, 2) қасиет орындалсын. Бағытталған тұйық кез келген Γ контурын алайық (50-сурет). Оның бойынан A мен B нүктелерін алып, қисықты бағытталған Γ', Γ'' қисықтарына бөлеміз: $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. 2)-қасиет бойынша $\int\limits_{\Gamma'} = \int\limits_{\Gamma''_-}$, ал бұдан $\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma'} + \int\limits_{\Gamma''} = \int\limits_{\Gamma'} - \int\limits_{\Gamma''_-} = 0$, яғни 1) қасиетті аламыз. ▲



49-сурет



50-сурет

2-мысал. 1-мысалда анықталған $\mathbf{a} = \mathbf{grad}U = \frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k}\right)$ күшінің (1,2,3) мен (3,0,4) нүктелерін қосатын жол бойымен жасайтын жұмысын табу керек.

▼ **a** күшінің $O(0,0,0)$ нүктесі алынып тасталған Ω аймағында потенциалы бар және ол $U(x,y,z)=-\frac{1}{r}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ тең еді (1-мысалды қараңыз). Сондықтан 1-теорема бойынша

$$\int_{\Gamma}(\mathbf{a},\mathbf{ds})=U(3,0,4)-U(1,2,2)=-\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=\frac{2}{15}. \blacktriangle$$

Егер $\mathbf{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ векторының $\Omega\subset R^3$ аймағында $U(x,y,z)$ потенциалы бар болса, онда 1-теорема бойынша **a** векторының $A(x_0,y_0,z_0)$ және $B(x,y,z)$ нүктелерін қосатын $\Gamma_{AB}\subset\Omega$ қисығы бойынша интегралы осы қисықтың бастапқы $A(x_0,y_0,z_0)$ нүктесі мен соңғы $B(x,y,z)$ нүктесіне ғана тәуелді. Сондықтан $\int\limits_{\Gamma_{AB}}(\mathbf{a},\mathbf{ds})=\int\limits_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)+R(x,y,z)dz$ интегралын $\int\limits_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x,y,z)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ түрінде жазуға болады. Сонымен бірге (1)-теңдіктегі $U(x,y,z)$ потенциалын табу үшін, мысалы, келесі формуланы пайдалануға болады:

$$\int\limits_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x,y,z)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz= \qquad (*)$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz=$$

$$=U(x,y,z)-U(x_0,y_0,z_0)$$

Екі өлшемді: $\mathbf{a}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$, $\Omega\subset R^2$ жағдайында (*) формуласы келесі түрге ие болады:

$$\int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = U(x, y) - U(x_0, y_0). \qquad (**)$$

Бұл формулалардағы $U(x, y, z)$ функциясы тұрақты қосылғышқа дейінгі дәлдікпен анықталатындықтан, $U(x_0, y_0, z_0)$ шамасы кез келген тұрақты рөлін атқарады.

Мысал. $\mathbf{a} = (e^y + x)\vec{i} + (xe^y - 2y)\vec{j}$ векторы потенциалды екені белгілі. Осы потенциалды табу керек.

▼ Бастапқы $A(x_0, y_0)$ нүктесі үшін $O(0,0)$ координат бас нүктесін аламыз және (**) формуланы пайдаланамыз:

$$U(x, y) - U(0,0) = \int_0^x (1 + x)dx + \int_0^y (xe^y - 2y)dy = \frac{(1+x)^2}{2}\Big|_0^x + (xe^y - y^2)\Big|_0^y =$$

$$= \frac{(1+x)^2}{2} + xe^y - x - y^2 = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + xe^y - y^2.$$

Мұнда $U(0,0) + \frac{1}{2} = C$ деп алсақ $U(x, y) = \frac{x^2}{2} + xe^y - y^2 + C$ аламыз. ▲

Ескерту. $U(x, y, z)$ функциясын табудың басқа тәсілін §10.3 тақырыптағы мысалдан қараңыз.

11.9.2. Вектор роторы. Енді **a** векторының берілген Ω аймағында потенциалы бар болуының шарттарын қарастырайық. Ол үшін келесі жаңа ұғымдарды енгіземіз.

$\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ символдық векторын **Гамильтон операторы** деп атайды. (У.Р.Гамильтон (1805–1865) – ағылшын механигі және математигі).

Анықтама. $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *векторының* ***роторы*** *деп* келесі түрдегі векторды айтады:

$$\mathbf{rota} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Сонымен **a** векторының роторын символдық ∇ векторы мен **a** векторының ***векторлық көбейтіндісі*** деп қарастыруға болады.

Ескерту. Екі өлшемді жағдайда $\Omega \subset R^2$ жазық аймағындағы вектор өрісі: $\mathbf{a} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ үшін $\mathbf{rot\,a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} =$

$= \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$ тең.

2-теорема. Егер $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ векторының Ω аймағында екінші ретті дербес туындылары үзіліссіз U потенциал функциясы бар болса, онда келесі теңдік орындалады: $\mathbf{rot\,a} = \mathbf{0}$ немесе $\mathbf{rot}\,\mathrm{grad}\,U = \mathbf{0}$.

▼ Теорема шарты бойынша: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = R$.

U функциясының екінші ретті дербес туындыларының үзіліссіздігін ескерсек, онда Ω аймағында

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0,$$

яғни $\mathbf{rot\,a} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$ аламыз. ▲

Бір байланысты аймақтарда бұған кері тұжырым да орындалады.

Егер Ω аймағындағы кез келген тұйық құрақты-тегіс γ қисығын Ω аймағында жататын нүктеге тартып әкелуге болатын болса, онда Ω **бір байланысты аймақ деп аталады.** Мұнда: 1) Тарту процесі кезінде γ қисығы Ω аймағынан шықпауға тиіс; 2) γ – өз-өзімен қиылыспайтын қисық. Мысалы, сферасыз (шекарасыз) шар, бүкіл кеңістік т.т. – бір байланысты аймақтар. Ал түзуін алып тастаған бүкіл (үш өлшемді) кеңістік – бір байланысты аймақ емес; нүктесі алынып тасталған жазықтық та (екі өлшемді кеңістік) бір байланысты аймақ емес.

3-теорема. Егер ***бір байланысты*** Ω аймағында ***компоненттері үзіліссіз дифференциалданатын*** $\mathbf{a}$ векторы беріліп, оның ***роторы нөлге*** тең болса: $\mathbf{rot}\vec{a} = \vec{0}$, онда $\mathbf{a}$ векторының Ω аймағында ***потенциалы*** бар.

▼ Бұл тұжырымның дұрыстығы үш өлшемді жағдайда Стокс формуласынан, ал екі өлшемді жағдайда Грин формуласынан шығады. Оларды біз төменде келтіреміз. ▲

Енді біз §11.8, 2-мысалдағы интегралдың нәтижесі неліктен интегралдау қисығының түріне тәуелсіз болғанын түсіндіре аламыз. Мұнда $\mathbf{a} = x^2 y\mathbf{i} + \dfrac{x^3}{3}\mathbf{j}$ векторының роторы нөл векторға тең болғандықтан (тексеріңіз), 3-теорема бойынша оның потенциалы бар. Сондықтан 1-теорема бойынша $\mathbf{a} = x^2 y\mathbf{i} + \dfrac{x^3}{3}\mathbf{j}$ векторының интегралы интегралдау қисығының формасына тәуелсіз!

3-мысал. $\mathbf{a} = p(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ векторының $O(0,0)$ нүктесі алынып тасталған G жазықтығында (олай болса, аймақ бір байланысты емес) үзіліссіз дербес туындылары бар. Берілген вектор үшін $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,

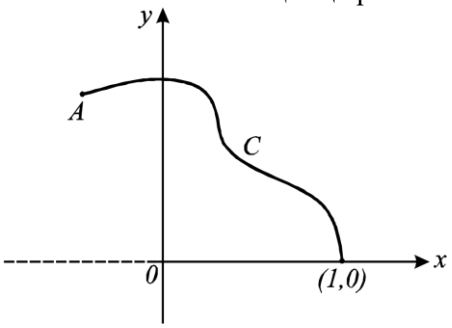
$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ болғандықтан, $\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$. 3-теореманың екі шарты орындалғанымен, тағы бір шарты орындалмай тұр (*G* аймағы бір байланысты емес!). Олай болса, берілген **a** векторының *G* аймағында потенциалы бар дей алмаймыз. Енді осыны көрсетейік. Мына $\gamma : x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ параметрлік теңдеуімен берілген γ қисығы (шеңбері) тұйық және ол *G* аймағында жатыр. Осы, γ қисығы бойынша интегралды есептейік:

$$\int_{\gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{ds}) = \int_{\gamma} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin\theta\right)\cdot\left(-\sin\theta\right) + \left(\cos\theta\cdot\cos\theta\cdot\right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0\,.$$

Сонымен $\gamma : x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ тұйық қисығы бойынша алынған **a** векторының интегралы нөлге тең емес. Олай болса, 1-теорема бойынша **a** векторының G аймағында потенциалы жоқ.

Енді *G* аймағын бір байланысты G_1 аймағына өзгертейік. Ол үшін (*x*,*y*) жазықтығынан *x* өсінің теріс жақ жартысын кесіп алып тастап, қалған нүктелер жиынын G_1 арқылы белгілесек болғаны (51-сурет). Енді *G* бір байланысты емес аймақтың орнына G_1 бір



51-сурет

байланысты аймақты алсақ, онда 3-теореманың шарттары түгел орындалады да, G_1 аймағында **a** векторының потенциалы бар және

оны $U(A)=U(x,y)=\int\limits_C \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ түрінде жазуға болады, мұндағы $C\subset G_1$ – қандай да бір берілген A_0 нүктесін, мысалы, A_0=(1,0) нүктесін, айнымал $A=(x,y)\in G_1$ нүктесімен қосатын бағытталған қисық.

C қисығының x өсінің теріс бөлігін қиып өтпеуі керек екені назарымызда болуы тиіс!

§11.10. Бірінші текті беттік интеграл

S тегіс беті келесі векторлық теңдеумен берілсін:

$$S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,\vartheta)=\varphi(u,\vartheta)\mathbf{i}+\psi(u,\vartheta)\mathbf{j}+\chi(u,\vartheta)\mathbf{k},\ (u,\vartheta)\in\Omega\leftrightarrow S \qquad (1)$$

($\Omega\leftrightarrow S$ символы, Ω мен S жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік бар дегенді білдіреді). Мұндағы φ,ψ,χ функциялары $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында үзіліссіз дифференциалданады (Ω аймағының шекарасы – құрақты-тегіс сызық) және келесі шарт орындалады

$$\left|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|>0,\ (u,\vartheta)\in\bar{\Omega}. \qquad (2)$$

Мұнда $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{u}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\vec{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\vec{j}+\dfrac{\partial\chi}{\partial u}\vec{k},\qquad \dot{\mathbf{r}}_\upsilon=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\vec{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\vec{j}+\dfrac{\partial\chi}{\partial\vartheta}\vec{k}.$

$\bar{S}$ тұйықтамасында үзіліссіз $F(x,y,z)$ функциясы берілсін. $\boldsymbol{\Omega}$ аймағын құрақты-тегіс сызықтар арқылы $\Omega_j,\ j=1,2,...,N,$ бөліктерге бөлеміз. Әрбір Ω_j бөлікке S бетінің анықталған S_j бөлігі сәйкес келеді. Әрбір S_j бөлігінің кез келген $A_j(x_j,y_j,z_j)$ нүктесін алып,

$$\Pi_N=\sum_{j=1}^{N}F(A_j)\cdot\left|S_j\right|$$

интегралдық қосындысын құраймыз (мұнда $\left|S_j\right|$ арқылы S_j бөлігінің ауданы белгіленген). Егер

$$\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0}\sum_{j=1}^{N}F(A_j)\left|S_j\right| = \int_S F(x,y,z)ds \qquad (2)$$

шегі бар болса, онда ол, F **функциясының** S **беті бойынша бірінші текті интегралы** деп аталады.

Мысалы, егер S бетінің массасының үлестіру тығыздығы F болса, онда F-тің S бойынша интегралы S бетінің жалпы массасын өрнектейді.

(2) интеграл мына формула арқылы есептеледі (дәлелдеуі төменде):

$$\int_S F(x,y,z)ds = \int_\Omega F\left[\varphi,\psi,\chi\right]\left|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|dud\vartheta. \qquad (3)$$

Дербес жағдайда, егер S беті $S: z=f(x,y),\ (x,y)\in G,$ теңдеуімен берілсе (f функциясының бірінші ретті дербес туындылары $\overline{G}$ аймағында үзіліссіз), онда оны x, y параметрлері арқылы берілді деп есептеуге де болады:

$S: x=x,\ y=y,\ z=f(x,y),(x,y)\in G$. Бұл жағдайда

$$\dot{\mathbf{r}}_x\times\dot{\mathbf{r}}_y=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&f_x'\\0&1&f_y'\end{vmatrix}=-f_x'\mathbf{i}-f_y'\mathbf{j}+\mathbf{k},\quad \left|\dot{\mathbf{r}}_x\times\dot{\mathbf{r}}_y\right|=\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2},$$

болады да, (3) теңдік мына түрде жазылады:

$$S: x=x,\ y=y,\quad z=f(x,y),(x,y)\in G.$$

$$\int_S F(x,y,z)ds=\int_G F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}dxdy. \qquad (4)$$

Енді жоғарыдағы (3) формуланы дәлелдейік.

▼ Интегралдық қосындыдағы $\left|S_j\right|$ ауданы (§11.5, (9))

$\left|S_j\right|=\int\limits_{\Omega_j}\left|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|dud\vartheta$ арқылы өрнектелетін еді. Бұл интегралға орта
мән туралы теореманы қолданамыз:

$$\Pi_N=\sum_{j=1}^{N}F(A_j)\cdot\left|S_j\right|=\sum_{j=1}^{N}F(A_j)\int_{\Omega_j}\left|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|dud\vartheta=\sum_{j=1}^{N}F(A_j)\left|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j^*\cdot\left|\Omega_j\right|$$

Мұндағы $\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j^*$ өрнегі $\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|$ өрнегіндегі (u, ϑ) нүктесінің орнына орта мән туралы теорема орындалатындай (u^*, ϑ^*) нүктесі қойылғанын білдіреді.

Енді $\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j^*$ өрнегіндегі (u^*, ϑ^*) нүктесін $A_j(x_j, y_j, z_j) \in S_j$ нүктесіне сәйкес келетін $(u_j, \vartheta_j) \in \bar{\Omega}_j$ нүктемен ауыстырсақ, онда

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \cdot \left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j \left|\Omega_j\right| + \varepsilon_N \to$$

$$\to \int_{\Omega} F\left[\varphi, \psi, \chi\right] \left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right| du\, d\vartheta, \quad \max d(\Omega_j) \to 0$$

аламыз. Мұндағы $\max d(\Omega_j) \to 0$ нөлге ұмтылғанда, $\varepsilon_N \to 0$ ұмтылатынын көрсетейік.

$F(x, y, z)$ функциясы $\bar{S}$ тұйықтамасында үзіліссіз болғандықтан, ол жоғарыдан, мысалы, K санымен шенелген: $F(x, y, z) \le K$;

$\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|$ функциясы $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан, **кез келген** $\eta > 0$ саны берілсе, $d\Omega_j < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелер үшін, $\left|\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j^* - \left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j\right| < \eta$ теңсіздігі орындалатындай η- ға тәуелді δ саны табылады $(d\Omega_j \to \delta)$.

Олай болса,

$$\left|\varepsilon_N\right| = \left|\sum_{j=1}^{N} F(A_j) \left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j^* \left|\Omega_j\right| - \sum_{j=1}^{N} F(A_j) \left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j \left|\Omega_j\right|\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{N} F(A_j) \cdot \left(\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j^* - \left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j\right) \left|\Omega_j\right|\right| \le \sum_{j=1}^{N} \left|F(A_j)\right| \cdot \left|\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j^* - \left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|_j\right| \cdot \left|\Omega_j\right| \le$$

$$\le K\eta \sum_{j=1}^{N} \left|\Omega_j\right| = K\eta \cdot \left|\Omega\right|,$$

ал бұл теңсіздіктен $\max d\Omega_j \to 0$ нөлге ұмтылса $(\eta \to 0)$, онда $\varepsilon_N \to 0$ ұмтылатынын көреміз $(\varepsilon_N > 0)$. ▲

Мысал. Есептеу керек: $\iint\limits_S zds$, мұнда $S: x^2+y^2+z^2=R^2, \quad z\ge 0.$

▼ S беті $z\ge 0$ нүктелеріне сәйкес сфераның жоғарғы жарты бөлігі болғандықтан, ол XOY жазықтығына бірмәнді проекцияланады және оның проекциясы – $G: x^2+y^2\le R^2$, $z=0$ дөңгелегі. Демек, S беті $S: z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$, $(x,y)\in G$, теңдеуімен анықталады да, беттік интегралды есептеуге (4) формуланы қолдануға болады.

S бетінің жоғарыдағы айқындалмаған теңдеуін пайдаланып, $z'_x=f'_x$, $z'_y=f'_y$ табайық. Мына $d(x^2+y^2+z^2)=d(R^2)$, $2xdx+2ydy+2zdz=0$ теңдіктерден $z'_x=-\dfrac{x}{z}$, $z'_y=-\dfrac{y}{z}$ аламыз.

Ендеше, $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}$.

Сонымен $\iint\limits_S zdz=\iint\limits_G \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,\dfrac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}dxdy=$

$$=R\iint\limits_G dxdy=R\cdot|G|=R\pi R^2=\pi R^3. \quad \blacktriangle$$

§11.11. Екінші текті беттік интеграл (вектордың бағытталған бет арқылы ағыны)

11.11.1. Бағытталған бет. Келесі векторлық теңдеумен

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,\vartheta)=\varphi(u,\vartheta)\mathbf{i}+\psi(u,\vartheta)\mathbf{j}+\chi(u,\vartheta)\mathbf{k}, \quad (u,\vartheta)\in\Omega\leftrightarrow S$$

анықталған тегіс S бетін қарастырамыз ($\Omega\leftrightarrow S$ символы, Ω мен S жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік бар дегенді білдіреді). Мұнда φ,ψ,χ функциялары Ω аймағының $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар (Ω аймағының шекарасы – құрақты-тегіс сызық) және $|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta|>0$, $(u,\vartheta)\in\bar{\Omega}$.

S бетінің кез келген нүктесіндегі бірлік нормаль (вектор), $\mathbf{n}^\circ = \pm\dfrac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta}{\left|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|}$, $(u,\vartheta) \in \bar{\Omega}$, формуласымен анықталады. Мұндағы «+» таңбасына S бетінің бір жағы, ал «–» таңбасына S бетінің екінші жағы сәйкес келеді.

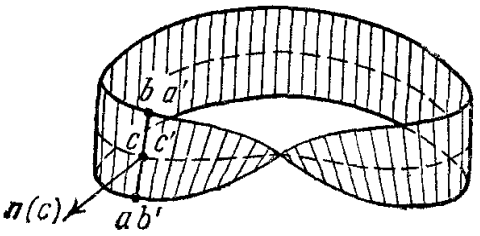
Анықтама. *Тегіс S бетінің* ***әрбір*** *A нүктесінде бірлік* $\mathbf{n}(A)$ *нормалін жүргізуге болатын болсын. Егер* $\mathbf{n}^\circ(A)$ *векторлық функциясы бүкіл S бетінде* ***үзіліссіз*** *болса, онда S* ***бағытталған бет*** *деп аталады.*

Бұл жағдайда беттің бағыты $\mathbf{n}^\circ(A)$ векторы арқылы анықталады.

Өзара қарама-қарсы бағытталған екі бетті S_+ және S_- символдарымен белгілейтін боламыз. **Мысалы,** *xOy* жазықтығы - бағытталған бет. *z* өсінің оң бағытымен бағыттас, *XOY* жазықтығына перпендикуляр бірлік векторлар осы жазықтықтың бір жағын, ал *z* өсінің теріс бағытымен бағыттас бірлік векторлар жазықтықтың екінші жағын анықтайды.

Эллипсоид беті де бағытталған: оның қандай да бір нүктесінен сыртына қарай жүргізілген нормаль бірлік векторды беттің барлық нүктесіне үзіліссіз орын ауыстыруға болады. Оған қарама-қарсы бағыт-талған бетін эллипсоидтың ішіне қарай бағыт-талған бірлік нормаль векторымен анықтайды.

Бағытталмайтын бет мысалына Мёбиус парағы жатады (52-сурет). Суретте cc' – тік бұрышты парақтың орта сызығы (мұнда с мен с′ нүктелері бір нүктеде қосылып жатыр). с нүктесіне жүргізілген бірлік $\mathbf{n}^\circ(c)$ нормальді орта сызықпен үздіксіз c нүктесінен c' нүктесіне қарай жылжытсақ, онда ол $-\mathbf{n}^\circ(c)$ векторына (қарама-қарсы вектор-ға) ұмтылады. Олай болса, $\mathbf{n}^\circ(c)$ вектор функциясы $c = c' \in S$ нүк-тесінде үзілісті. Сонымен Мёбиус

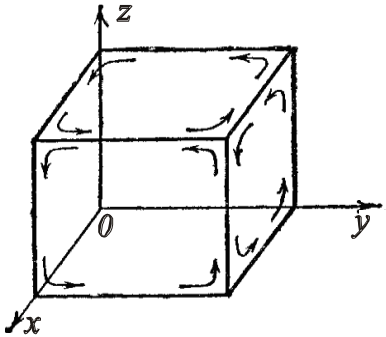


52-сурет

парағы – бағытталмайтын бет.

Анықтама. *S құрақты-тегіс беті берілсін. Егер оның әрбір бөлігі (кесегі)* ***бағытталған*** *және олардың ортақ контурларының бағыттары өзара* ***қарама-қарсы*** *болса, онда S* **бағытталған құрақты-тегіс бет** *деп аталады.*

53-суретте сыртқы нормаль арқылы бағытталған куб көрсетілген.



53- сурет

11.11.2. Вектордың бағытталған бет арқылы ағыны. Тік бұрышты координаттар жүйесі бар үш өлшемді кеңістікте *H* аймағы берілген және онда $\mathbf{a}(x,y,z)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ үзіліссіз вектор өрісі анықталсын. Осы *H* аймағында S^* бағытталған тегіс беті келесі векторлық теңдеумен берілсін:

$$S^*:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,\vartheta)=\varphi\mathbf{i}+\psi\mathbf{j}+\chi\mathbf{k},\ (u,\vartheta)\in\bar{\Omega},\ \left|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta\right|>0, \qquad (1)$$

мұндағы φ,ψ,χ (u,ϑ) параметрлер жазықтығындағы Ω аймағының $\bar{\Omega}$ тұйықтамасында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар (Ω аймағының шекарасы құрақты-тегіс сызық). S^* бетінің бірлік нормаль векторы мына теңдікпен анықталсын:

$$\mathbf{n}^\circ(A)=\frac{\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_\vartheta}{\left|\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}\right|}=(\cos(\mathbf{n},x),\cos(\mathbf{n},y),\cos(\mathbf{n},z)). \qquad (2)$$

Бұдан (§11.5, (10)) келесі теңдікті ескеріп,

$$\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta = \mathbf{i}\frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)} + \mathbf{j}\frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)} + \mathbf{k}\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)} \qquad (*)$$

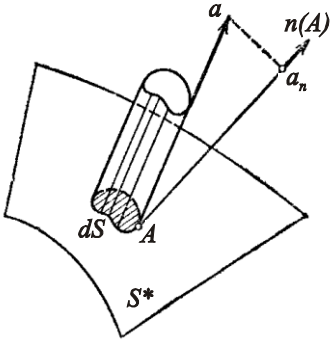
$\mathbf{n}^\circ = \mathbf{n}^\circ(A)$ векторының x, y, z өстерімен жасайтын бұрыштарының косинустарын жаза аламыз:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\mathbf{n},x) &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta|}\cdot\frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)},\\ \cos(\mathbf{n},y) &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta|}\cdot\frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)},\\ \cos(\mathbf{n},z) &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta|}\cdot\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Бағыты алынып тасталған S^* бетін S арқылы белгілейміз.

Енді **а** векторын H аймағында ағатын сұйық жылдамдығының өрісі деп алып, *бірлік уақыт аралығында* $\mathbf{n}^\circ(A)$ *бағытымен* S^* *беті арқылы өтетін сұйық мөлшерін* (W) *анықтау есебін шешейік.*

▼ Мұнда стационар ағын, яғни кез келген $A \in H$ нүктедегі сұйықтың жылдамдығы осы A нүктесіне тәуелді, бірақ t уақытына тәуелсіз болатын ағын туралы сөз болып отыр (54-сурет). Есепті



54-сурет

шешу үшін, қандай да бір $A \in S$ нүктесі жататын S бетінің dS элементін аламыз. Осы элемент арқылы $\mathbf{n}^\circ(A)$ бағытымен бірлік уақыт аралығында өтетін сұйық мөлшері жоғары ретті ақырсыз кішкене аз шамаға дейінгі дәлдікпен, **а** жылдамдық өрісінің $\mathbf{n}^\circ(A)$

нормаль бағытына түсірілген a_n проекциясы мен dS элемент ауданының көбейтіндісіне тең ($\mathbf{d}S^* = dS \cdot \mathbf{n}^\circ$):

$$dS \cdot a_n = dS \cdot \Pi p_{\vec{n}^\circ}\mathbf{a} = dS \cdot \left|\mathbf{n}^\circ\right| \cdot \Pi p_{\vec{n}^\circ}\mathbf{a} = dS(\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ) = (\mathbf{a}, dS \cdot \mathbf{n}^\circ) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}S^*).$$

Ал уақыт бірлігі ішінде S^* беті арқылы өтетін сұйық мөлшері $(\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)$ функциясының S беті бойынша бірінші текті интегралына тең:

$$W = \int_S (\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)dS. \qquad (*)$$

Мұндағы $(\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ) = P\cos(\mathbf{n}^\circ, x) + Q\cos(\mathbf{n}^\circ, y) + R\cos(\mathbf{n}^\circ, z)$ функциясы $\overline{S}$ аймағында үзіліссіз, демек бірінші текті (*) беттік интегралы бар. ▲

(*) интегралын $W = \int_{S^*} (\mathbf{a}, dS^*)$ түрінде де жазуға болады. Бұл түрде ол **екінші текті беттік интеграл** деп аталады. Жалпы жағдайда **a** векторы H аймағында анықталған үзіліссіз болса, онда W шамасы a векторының бағытталған S^* беті арқылы ағыны деп аталады.

Анықтама. a ***векторының бағытталған*** S^* ***беті арқылы ағыны*** *деп,* S^* *бетінің бағытын анықтайтын* $\mathbf{n}^\circ$ *бірлік нормаль векторы мен* **a** *векторының* ***скаляр көбейтіндісінің бірінші текті беттік интегралына*** *тең келесі шаманы айтады:*

$$\int_{S^*} (\mathbf{a}, \mathbf{d}S^*) = \int_S (\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)dS. \qquad (4)$$

(4) теңдіктің сол жағындағы өрнек – **екінші текті беттік интеграл.**

(2) мен (3) теңдіктерді ескеріп, §11.10, (3) формула бойынша беттік интегралды екі еселі интеграл арқылы жазамыз:

$$\int_S (\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)\, dS = \int_S \Big[P\cos(\mathbf{n}^\circ, x) + Q\cos(\mathbf{n}^\circ, y) + R\cos(\mathbf{n}^\circ, z) \Big] dS =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[P \cdot \frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)} + Q \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)} + R \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)} \right] \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta|} \cdot |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_\vartheta| \, du d\vartheta =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[P \cdot \frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)} + Q \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)} + R \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)} \right] du d\vartheta. \qquad (5)$$

Беттік интегралдарды тік бұрышты декарт координаттары арқылы есептеу ыңғайлы. Енді осы жағдайды тегіс S беті координаттық жазықтықтардың үшеуінің де өлшенетін бөліктеріне (на измеримые части) өзара бірмәнді проекцияланады деп ұйғарып, қарастырайық. Сонымен $\overline{S}$ тегіс бетін

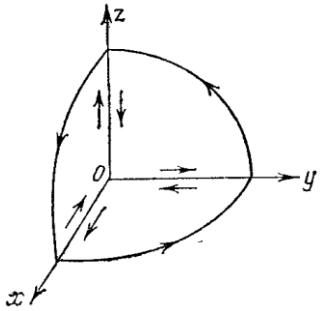
$$x = f_1(y,z), \ (y,z) \in \overline{S}_x, \qquad (6)$$

$$y = f_2(z,x), \ (z,x) \in \overline{S}_y, \qquad (7)$$

$$z = f_3(x,y), \ (x,y) \in \overline{S}_z \qquad (8)$$

теңдеулерінің кез келгенімен анықтауға болатын болсын. Бұл функциялар $\overline{S}$ бетінің сәйкес $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ жазықтықтарындағы $\overline{S}_x, \overline{S}_y, \overline{S}_z$ проекцияларында үзіліссіз және осы проекциялардың ішкі нүктелерінде үзіліссіз дифференциалданады.

Бағытталған S^* бетінің $x=0$, $y=0$, $z=0$ жазықтықтарындағы бағытталған проекцияларын сәйкес S_x^*, S_y^*, S_z^* арқылы белгілейміз (55-сурет).



55-сурет

S бетінің $\mathbf{n}^\circ$ нормалінің z өсімен арасындағы бұрышының косинусі

$$\cos(\mathbf{n}^\circ, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2}}. \qquad (9)$$

Мұндағы «+» немесе «–» таңбасы S^* бағытына байланысты алынады.

Шынында да, (8) теңдеуді параметрлік теңдеу түрінде жазуға болады (x пен y – параметрлер):

$$S: \ \mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f_3(x,y)\mathbf{k}, \ (x,y) \in \bar{S}_z. \qquad (8')$$

Бұдан $\left|\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2}$, $\frac{D(x,y)}{D(x,y)} = 1$, $\frac{D(y,x)}{D(x,y)} = -1$

аламыз да, осы алынған өрнектерді (3) жүйенің үшінші теңдігіне қойсақ (9) теңдікті аламыз.

§11.10, (4) формула бойынша, $\int\limits_S R\cos(\mathbf{n}^\circ, z)dS =$

$$= \int\limits_{S_z} R(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \pm \int\limits_{S_z} R(x,y,f_3(x,y))dxdy = \int\limits_{S_z^*} R(x,y,f_3(x,y))dxdy = \int\limits_{S^*} R(x,y,z)dxdy.$$

аламыз. Мұндағы ең соңғы өрнек алдыңғысының белгіленуі, ал соңғының алдындағы өрнекте беттің бағыты таңдалған S_z^* проекциясы тұр.

Осындай пайымдауларды S бетінің S_x^*, S_y^* проекциялары арқылы жүргіземіз:

$$\int\limits_S R\cos(\mathbf{n}^\circ, x)dS = \int\limits_{S_x^*} P(f_1(y,z),y,z)dydz = \int\limits_{S^*} P(x,y,z)dydz\,,$$

$$\int_S Q\cos(\mathbf{n}^\circ, y)dS = \int_{S_x^*} P(x, f_1(z,x), y)dzdx = \int_{S^*} Q(x,y,z)dzdx.$$

Енді (5) жүйенің бірінші теңдігінен осы соңғы үш теңдікті ескерсек

$$\int_S (\mathbf{an}^\circ)dS = \int_{S^*} \left[P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy\right] \quad (10)$$

теңдігі шығады. (10) теңдіктің оң жағы **екінші текті беттік интеграл** деп аталады.

Екінші текті интегралды есептеу үшін, жиі қолданылатын формулаларды келтіреміз.

Егер S беті $S: z = f(x,y),\ (x,y) \in S_z$, басқаша айтқанда, $S: x = x,\ y = y,\ z = f(x,y),\ (x,y) \in S_z$ параметрлік теңдеуімен берілсе, онда (5) формула

$$\iint_S (\mathbf{a},\mathbf{n})dS = \iint_{S_z} (\mathbf{a},\mathbf{n})\,dxdy \quad (11)$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$\mathbf{n} = \pm(\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y) = \pm\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = \pm(-f_x'\mathbf{i} - f_y'\mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad (11')$$

Егер $S: x = f(y,z),\ (y,z) \in S_x$, басқаша айтқанда, $S: x = f(y,z),\ y = y,\ z = z, (y,z) \in S_x$, теңдеуімен берілсе, онда

$$\iint_S (\mathbf{an}^\circ)\,dS = \iint_{S_x} (\mathbf{a},\mathbf{n})\,dydz, \quad (12)$$

мұндағы,

$$\mathbf{n} = \pm(\dot{\mathbf{r}}_y \times \dot{\mathbf{r}}_z) = \pm\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_y' & 1 & 0 \\ f_z' & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm(\mathbf{i} - f_y'\mathbf{j} + f_z'\mathbf{k}), \quad (12')$$

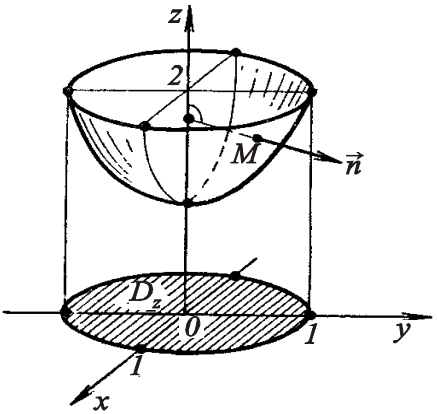
Егер $S: y = f(z,x), (z,x) \in S_y$, басқаша айтқанда, $S: x = x, y = f(z,x), z = z, (z,x) \in S_y$, теңдеуімен берілсе, онда

$$\iint\limits_S (\mathbf{a}\mathbf{n}^\circ)\, dS = \iint\limits_{S_y} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dzdx, \tag{13}$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$\mathbf{n} = \pm(\dot{\mathbf{r}}_z \times \dot{\mathbf{r}}_x) = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & f_z' & 1 \\ 1 & f_x' & 0 \end{vmatrix} = \pm(-f_x'\mathbf{i} - \mathbf{j} - f_z'\mathbf{k}), \tag{13′}$$

Мысал. $I = \iint\limits_{S^*} z dydz - 4ydzdx + 8x^2 dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы S^* интегралдау беті, $z = x^2 + y^2 + 1$ бетінің $z = 2$ жазықтығымен қиылған бөлігі (56-сурет). S^* бетінің нормалі z өсімен доғал бұрыш жасайды.



56-сурет

▼ Мұнда (10)-теңдіктің оң жағындағыдай екінші текті беттік интеграл тұр ($\mathbf{a} = z\vec{i} - 4y\vec{j} + 8x^2\vec{k}$). Бұл интегралды есептеу үшін (11), (11′) формулаларын пайдаланайық. Доғал бұрыштың косинусы теріс екенін ескеріп, (11′) формула бойынша $\mathbf{n} = (2x, 2y, -1)$ аламыз.

Осы $\mathbf{n}=(2x,2y,-1)$ мен $\mathbf{a}=(z,-4y,8x^2)$ векторларының скаляр көбейтіндісіне $z=x^2+y^2+1$ өрнегін қоямыз:

$$(\mathbf{a},\mathbf{n})=(2xz-8y^2-8x^2)\Big|_{z=x^2+y^2+1}=2x(x^2+y^2+1)-8(x^2+y^2).$$

Енді (11) формуласын пайдаланып есептейміз:

$$\iint\limits_S(\mathbf{an}^\circ)dS=\iint\limits_{S_z}(\mathbf{a},\mathbf{n})dxdy=\iint\limits_{S_z}\Big[2x(x^2+y^2+1)-8(x^2+y^2)\Big]dxdy=$$

$$=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi\\ y=\rho\sin\varphi, & 0\le\rho\le 1, \quad dxdy=\rho d\rho d\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_{S_z}\Big[2\rho\cos\varphi\cdot(\rho^2+1)-8\rho^2\Big]\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^{2\pi}\Big[2\rho\cos\varphi\cdot(\rho^2+1)-8\rho^2\Big]d\varphi=$$

$$=-\int\limits_0^1 16\pi\rho^3dp=-4\pi.\quad\blacktriangle$$

Екінші текті беттік интеграл сызықтық және аддитивтік қасиеттерге ие.

S бетінің бағытын қарама-қарсы бағытқа, яғни $\mathbf{n}^\circ$ ***векторын*** $-\mathbf{n}^\circ$ ***векторына ауыстырса, онда интеграл таңбасы өзгереді.***

Шынында да, $\int\limits_{S^*}(\mathbf{a},ds^*)=\int\limits_S(\mathbf{a},\mathbf{n}_\circ)ds=-\int\limits_S(\mathbf{a},-\mathbf{n}^\circ)ds=-\int\limits_{S_-^*}(\mathbf{a},ds_-^*).$

Ескерту. Егер бағытталған S беті координат жазықтықтарының бірінде жатса ($S = G$), онда **a** векторының G_+ беті арқылы ағыны екі еселі интегралға айналады.

Мысалы, $G_+=S$ беті $z = 0$ жазықтығының $(\mathbf{n}^\circ=+\mathbf{k})$ бөлігі болса, онда $(\cos(\mathbf{n}^\circ,z)=1)$

$$\int\limits_S(\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)ds=\int\limits_S R(x,y,o)dxdy=\int\limits_{G_+}R(x,y,o)dxdy=\int\limits_G R(x,y,o)dxdy.$$

Назарыңызға! Егер **a** векторының S аймағы бойынша ағыны нөлге тең болса, онда аймаққа ағып кірген сұйық мөлшері одан ағып шыққан сұйық мөлшеріне тең; нөлден үлкен болса, онда

аймақтан ағып шыққан сұйық мөлшері оған ағып кірген сұйық мөлшерінен артық, яғни аймақта бұлақ көздері бар; нөлден кіші болса, онда аймақтан ағып шыққан сұйық мөлшері оған ағып кірген сұйық мөлшерінен аз, яғни аймақта сұйық ағып кететін көздер бар деген физикалық мағынаны білдіреді.

§11.12. Дивергенция. Гаусс-Остроградский формуласы

(К.Ф.Гаусс (1777-1855) – аса дарынды неміс математигі.
М.В.Остроградский (1801-1861) – орыстың көрнекті математигі.)

R^3 үш өлшемді кеңістікте тік бұрышты x, y, z координаттар жүйесі берілсін. $G \subset R^3$ – осы кеңістіктегі құрақты-тегіс шекарасы бар аймақ, ал

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \ (x, y, z) \in G, \qquad (1)$$

G аймағында анықталған векторлық өріс болсын.

$P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ функциялары $\bar{G}$ *тұйықтамасында* үзіліссіз деп ұйғарамыз.

Анықтама. а *векторының дивергенциясы* *деп,* $\bar{G}$ *тұйықтамасында үзіліссіз*

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (x, y, z) \in G, \qquad (2)$$

функциясын айтады.

Дивергенция, $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – символдық векторы (Гамильтон операторы) мен **а** векторының скаляр көбейтіндісіне тең екенін көру қиын емес: $div\,\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a}$.

Келесі тұжырымда S тұйық беті G аймағының сыртына қарай бағытталған $\mathbf{n}^\circ$ бірлік векторы арқылы бағытталған деп есептейміз.

Теорема. Вектор дивергенциясының үш өлшемді G аймағы бойынша үш еселі интегралы вектордың S шекарасы арқылы

ағынына тең (ол аймақ сыртына қарай жүргізілген нормаль бойынша бағытталған):

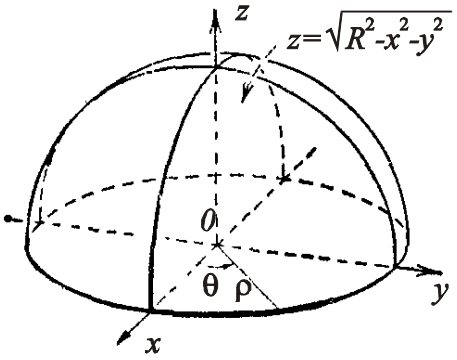
$$\iiint\limits_G div\,\mathbf{a}\,dG = \iint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)ds. \qquad (3)$$

(3) теңдікті **Гаусс-Остроградский формуласы** деп атайды (дәлелдеуін келтірмейміз, оны, мысалы, [3] кітаптан қараңыз).

Егер (3) формулада $P = x, Q = y, R = z$ деп алсақ, онда G аймағының көлемі аймақтың сыртқы нормалімен бағытталған S^* шекарасы бойынша алынған екінші текті беттік интегралы арқылы өрнектеледі: $|G| = \frac{1}{3}\iint\limits_{S^*} (xdydz + ydzdx + zdxdy)$.

Мысал. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ векторының $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4,$ $z = 0, z > 0,$ тұйық беті арқылы ағынын табу керек (57-сурет).

▼ (3) формула бойынша келесі интегралды аламыз:



57-сурет

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)ds = \iiint\limits_G div(x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})dG = \iiint\limits_G (2x + 2y + 2z)dG.$$

Алынған үш еселі интегралды есептеу үшін, сфералық координаттарды пайдаланамыз:

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi,\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ z = \rho\sin\theta,\ J = \rho^2\cos\theta.$$

Есептейік:

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{n}^\circ)ds = 2\iiint\limits_G (\rho\cos\theta\cos\varphi + \rho\cos\theta\sin\varphi + \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(\cos\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta)d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho =$$

$$= 2\cdot\frac{2^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{\theta+\frac{2\theta}{2}}{2}+\frac{\sin^{2\theta}}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 8\left[\frac{\pi}{4}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 8\cdot\frac{2\pi}{2} = 8\pi . \quad \blacktriangle$$

Дивергенция ұғымының физикалық мағынасын түсіну үшін, G аймағында кез келген (x,y,z) нүктеде жылдамдығы $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x,y,z)$ тең сұйықтың стационар ағыны бар деп есептейміз. Кез келген белгілі бір $A = (x,y,z) \in G$ нүктесін алып, оны радиусі $R = \varepsilon > 0$ болатын $V_\varepsilon \subset G$ шарымен қоршайық. Оның сыртқы нормаль арқылы бағытталған шекарасы S_ε^* болсын. Онда Гаусс-Остроградский формуласы бойынша $\iint\limits_{S_\varepsilon} (\mathbf{a},\mathbf{ds}) = \iiint\limits_{V_\varepsilon} div\mathbf{a}dxdydz$ аламыз. Бұл теңдіктің сол жақ бөлігі V_ε шардан бірлік уақыт ішінде ағып шығатын сұйықтың мөлшерін өрнектейді. Оның оң бөлігіне орта мән туралы теореманы қолдансақ,

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} (\mathbf{a},\mathbf{ds}) = |V_\varepsilon| \cdot div\ \mathbf{a}_1 \qquad (4)$$

аламыз. Мұнда $|V_\varepsilon|$ арқылы шар көлемі, ал $\mathbf{a}_1$ арқылы V_ε шарының белгілі бір нүктесіндегі сұйық жылдамдығы белгіленген. $div\mathbf{a}$ функциясы үзіліссіз болғандықтан, (4) теңдіктен

$$div\mathbf{a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|V_\varepsilon|}\iint\limits_{\mathbf{S}_\varepsilon} (\mathbf{a},\mathbf{ds}) \qquad (5)$$

аламыз. Сонымен $div\mathbf{a}$ дивергенциясы G аймағы бойынша үзіліссіз үлестірілген бұлақ көздерінің $A=(x,y,z)$ нүктесіндегі өнімділігін көрсетеді екен. Егер A нүктесінде (немесе бүкіл G аймағында) $div\mathbf{a}=0$ болса, онда A нүктесінде (немесе бүкіл G аймағында) бұлақ көздерінің өнімділігі нөлге тең; егер $div\mathbf{a}<0$ болса**,** онда ол – ***сұйықтың ағып кету нүктесі*;** егер $div\mathbf{a}>0$ болса**,** онда ол – ***бұлақ көзі болатын нүкте*.**

Гаусс-Остроградский формуласын жазықтық үшін жазайық. Онда G аймағы (x,y) жазықтығында жатады да, $\mathbf{a}(x,y)=$ $=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ осы аймақта анықталған векторлық өріс болады. Егер $\mathbf{n}(A)$ векторы G аймағының Г құрақты-тегіс контурының сыртқы нормалі болса, онда $\iint\limits_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=$ $=\int\limits_\Gamma(\mathbf{a},\mathbf{n})ds$. Мұндағы ds шамасы – Г доғасының дифференциалы.

Анықтама. *Егер* Ω *аймағында* $div\mathbf{a}=0$, $(x,y,z)\in\Omega$ *тең болса, онда* $\mathbf{a}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ *векторлық өрісі* ***соленоидты өріс*** *деп аталады.*

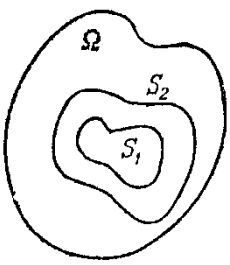
Гаусс-Остроградский формуласы бойынша соленоидты өріс үшін мына теңдік орын алады: $\iint\limits_S(\mathbf{a},\mathbf{ds})=\iiint\limits_\omega div\mathbf{a}dxdydz=0$.

Мұндағы $\omega\subset\bar{\omega}\subset\Omega$, яғни ω аймағы Ω аймағының ішінде, ал оның S шекарасы – ω аймағының сыртына қарай бағдарланған, құрақты-тегіс бет. Дербес жағдайда, егер ω аймағы S_2 және S_1 тұйық беттерінің аралығында болса (58-сурет), онда $(S=S_1+S_2)$

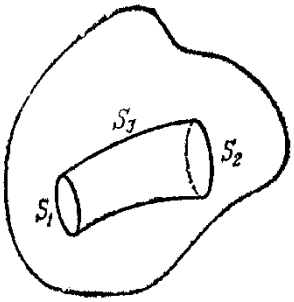
$$\iint\limits_S(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=\iint\limits_{S_1}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=0 \quad \text{немесе}$$

$$\iint\limits_{S_1}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=\iint\limits_{S_2^-}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds.$$

Шекарасы $S=S_1+S_2+S_3$ үш тегіс бөліктен тұратын, түтік тәрізді ω аймағын алайық. Мұнда (шарт бойынша) $\mathbf{a}$ векторы S_3 бетінің әрбір нүктесінде жанама болады (59-сурет).



58-сурет



59-сурет

Онда $\left((\mathbf{a},\mathbf{n})=0,\quad (x,y,z)\in S_3\right)$

$$0=\iint\limits_S(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=\iint\limits_{S_1}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds+\iint\limits_{S_3}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=$$

$$\iint\limits_{S_1}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds+o+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds \quad \text{немесе} \quad \iint\limits_{S_1}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=\iint\limits_{S_2^-}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds.$$

Бұл теңдік түтікке уақыт бірлігінде ағып кірген сұйық мөлшері одан ағып шыққан сұйық мөлшеріне тең болатынын көрсетеді.

§11.13. Стокс және Грин формулалары. Гамильтон операторына қатысты кейбір формулалар

11.13.1. Стокс формуласы. R^3 кеңістігінің қандай да бір аймағында үзіліссіз дифференциалданатын $\mathbf{a}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ векторлық өріс берілсін.

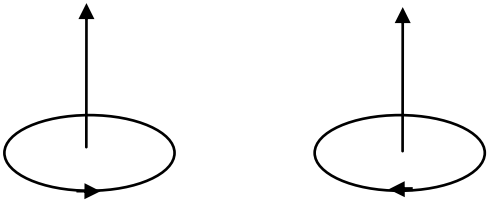
Тұйық Г контуры бойынша алынған **a** векторының қисық сызықты интегралы **a векторының Г бойынша циркуляциясы** деп аталады да, $\int\limits_\Gamma(\mathbf{a},\mathbf{dl})=\int\limits_\Gamma(Pdx+Qdy+Rdz)$ символымен белгіленеді. Мұндағы **dl** – ұзындығы Г доғасының дифференциалына тең, бағыты Г доғасына жүргізілген жанаманың оң бағытымен бағыттас вектор.

§11.9 параграфта біз **a** векторының роторын (құйынын) анықтағанбыз:

$$\mathbf{rota} = \nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} .$$

Енді S^* ***бетінің бағытына сәйкес бағытталған жиегі*** туралы ұғымды оң ойылған винт (штопор) арқылы анықтайық.

Оң кесілген винттің қалпақшасын *А-суретте* көрсетілген бағытта айналдырсақ, ол ілгері жылжиды, ал *Б-суретте* көрсетілген бағытта айналдырсақ ол кейін қарай жылжиды.



А – сурет *Б – сурет*

Егер *OXYZ* оң координаттар жүйесінде S^* бетінің бағыты $\mathbf{n}^\circ$ нормалімен анықталса, онда оның жиегінің бағытын табу үшін, $\mathbf{n}^\circ$ нормалін винттің өсі етіп S^* бетінен винттің қалпақшасын кесіп аламыз. Осылай алынған винт ілгері жылжитындай қалпақшаның айналу бағыты S^* бетінің жиегінің контурының бағытын береді.

Теорема. **rota** векторының бағытталған S^* беті арқылы ағыны, **a** векторының S^* бағытына сәйкес бағытталған **Г** жиегінің контуры бойынша алынған циркуляциясына тең

$$\iint\limits_{S^*} (\mathbf{rota}, \mathbf{ds}) = \iint\limits_{S} (\mathbf{n}^\circ, \mathbf{rota}) ds = \oint\limits_{\Gamma} (\mathbf{adl}). \qquad (1)$$

(дәлелдеуін, мысалы, [3] кітаптан қарауға болады). (1) теңдік – **Стокс формуласы** деп аталады.

Теорема. **rota** векторының бағытталған S^* беті арқылы ағыны **a** векторының S^* бағытына сәйкес бағытталған **Г** жиегінің контуры бойынша алынған циркуляцияға тең

$$\iint\limits_{S^*}(\mathbf{rota},\mathbf{ds})=\iint\limits_{S}(\mathbf{n}^\circ,\mathbf{rota})ds=\oint\limits_{\Gamma}(\mathbf{adl}). \qquad (1)$$

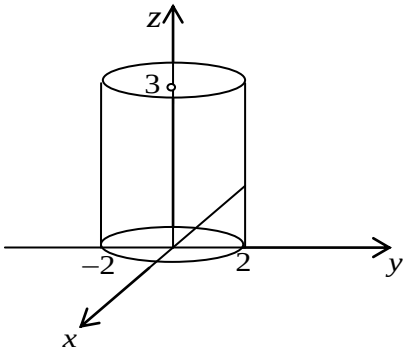
(дәлелдеуін, мысалы, [3] кітаптан қарауға болады). (1) теңдік – **Стокс формуласы** деп аталады.

1-ескерту. Егер бағытталған S^* бетінің шекарасының Г контурын, құрақты-тегіс сызықтар арқылы саны ақырлы тегіс бөлікшелерге бөлуге болатын болса, онда Стокс формуласы осы S^* беті үшін де дұрыс болады.

Жиегі тұйық Г *контуры болып келетін S бетін,* Г ***контурына тартылған бет*** *деп атайтын боламыз.*

2-ескерту. (1) формуладағы Г контурына тартылған S^* бетін Г контурына тартылған, тұжырымдағы шарт орындалатындай кез келген бетпен ауыстыруға болады.

Мысал. $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=3\end{cases}$ контуры бойынша $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ векторының циркуляциясын есептеу керек (60-сурет).



60-сурет

▼ Стокс формуласын пайдаланайық: $\oint\limits_{\Gamma}(\mathbf{a},\mathbf{dl})=\iint\limits_{S}(\mathbf{n}^{\circ},\mathbf{rota})ds.$

Мұнда S үшін Г шеңберіне тартылған дөңгелекті алған ыңғайлы. Онда ол беттің (дөңгелектің) бағыты $\mathbf{n}^{\circ}=\mathbf{k}$ векторымен анықталады. Ал

$$\mathbf{rota}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & 3x & -z\end{vmatrix}=o\cdot\mathbf{i}+o\cdot\mathbf{j}+(3-1)\mathbf{k}=2\mathbf{k},$$

демек, $(\mathbf{n}^{\circ},\mathbf{rota})=(\mathbf{k},2\mathbf{k})=2$.

Сонымен $\int\limits_{\Gamma}(\vec{a}\overrightarrow{d\ell})=\iint\limits_{S}2ds=2\cdot\pi\cdot 2^2=8\pi$. ▲

11.13.2. Бағытталған жазық аймақ. Жазықтықта тік бұрышты x,y координаттар жүйесі берілсін. Егер x өсінің оң бағытталған сәулесін y өсінің оң бағытталған сәулесімен беттестіру үшін, координаттың бас нүктесін айнала отырып жасалған 90°-қа бұрылу процесі сағат тілінің бағытына қарсы бағытта орындалса, онда тік бұрышты координат жүйесі **оң**, ал сағат тілінің бағытымен бағыттас болса **теріс** деп аталады (61, 62-сурет).

Жай контур деп ***тұйық, өзімен-өзі қиылыспайтын үзіліссіз құрақты-тегіс бағытталған*** γ қисығын айтатын боламыз.

Жазықтықта шекарасы Г саны ақырлы бір-бірімен өзара қиылыспайтын $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_N$ жай контурларынан тұратын, яғни $\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+....+\gamma_N$ сызықтарымен шенелген Ω аймағын қарастырамыз.

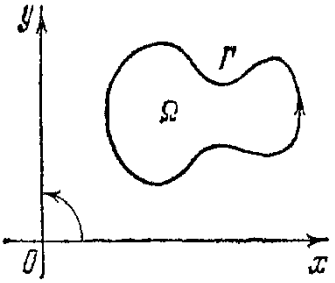
Егер $N=1$ болса, онда Ω аймағы **бір байланысты** (61, 62-сурет); $N=2$ болса, ол **екі байланысты** (63, 64-сурет), т.с.с. аталады.

Егер оң тік бұрышты координаттар жүйесіндегі аймақтың шекарасы бойымен қозғалғанда **аймақ сол жақта қалып отырса,** онда шекара және аймақ – **оң бағытталған, ал аймақ оң жақта**

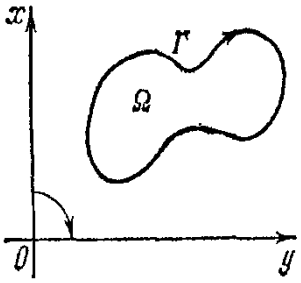
қалып отырса, онда шекара және аймақ **теріс бағытталған** деп саналады. Теріс тік бұрышты координаттар жүйесінде, керісінше, аймақ сол жақта қалып отырса, онда шекара және аймақ теріс бағытталған, ал аймақ оң жақта қалып отырса, онда шекара және аймақ оң бағытталған деп аталады.

61, 62 суреттерде – оң, ал 63, 64 суреттерде теріс бағытталған аймақтар көрсетілген.

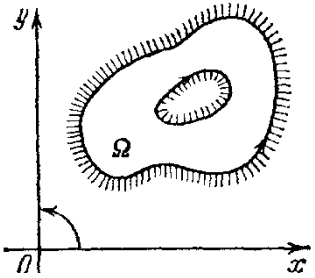
Оң бағытталған аймақ Ω немесе Ω_+ арқылы, теріс бағытталған аймақ Ω_- арқылы белгіленеді. Біз алдымызда, атап айтылмаса, тек оң тік бұрышты координаттар жүйесі мен оң бағытталған аймақ туралы сөз ететін боламыз.



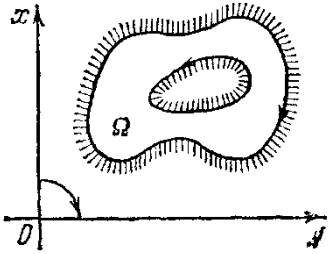
61-сурет



62-сурет



63-сурет



64-сурет

11.13.3. Грин формуласы және оның салдары. (Келесі тұжырымды дәлелдеусіз келтіреміз (оның дәлелдеуін, мысалы, [3] кітаптан қарауға болады)).

Теорема. $\Omega \subset R^2$ аймағының шекарасы кез келген тұйық құрақты-тегіс өзімен-өзі қиылыспайтын оң бағытталған Г контуры болсын. Егер $Q, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, P, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ функциялары $\bar{\Omega}$ тұйықтамада үзіліссіз болса, онда **Грин формуласы** деп аталатын келесі теңдік орындалады:

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (\Gamma.\Phi.)$$

Назарыңызға! Грин формуласы – Стокс формуласының дербес жағдайы.

Енді 11.9.2. п. қарастырған 3-теореманы екі өлшемді жағдай үшін қайта тұжырымдап, дәлелдеуін келтірейік.

3′-теорема. Егер:

1) жазық Ω аймағы ***бір байланысты*;**

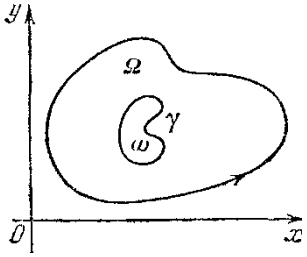
2) $\mathbf{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ векторы Ω аймағында ***үзіліссіз дифференциалданатын*** вектор;

3) **a** векторының ***роторы нөлге тең*:**

$$\mathbf{rota} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \mathbf{0}$$

болса, онда **a** векторының Ω аймағында потенциалы бар.

▼ Ω аймағында тұйық өзімен өзі қиылыспайтын үзіліссіз құрақты-тегіс оң бағытталған кез келген $\gamma \subset \Omega$ контурын алайық (65-сурет). Ол белгілі да бір ω аймағының шекарасы болады.



65-сурет

Грин формуласы бойынша

$$\int_{\gamma}(Pdx+Qdy)=\iint_{\omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{\omega}odxdy=0$$

және $\gamma\in\Omega$ кез келген тұйық контур болғандықтан, 1-теорема негізінде **a** векторының Ω аймағында потенциалы бар. ▲

1-ескерту. Грин формуласын келесі түрде жазуға болады:

$$\iint_{S^*}(\mathbf{rota},\mathbf{ds})=\iint_{S}(\mathbf{n}^{\circ},\mathbf{rota})ds=\int_{\Gamma}(\mathbf{a},\mathbf{dl}).$$

Шынында да, мұндағы беттік интеграл екі еселі интегралға тең екенін көрсетейік: $\mathbf{rota}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$, ал $\mathbf{n}^0=\vec{k}$ болғандықтан**,**

$$\iint_{S^*}(\mathbf{rota},\mathbf{ds})=\ =\iint_{S}(\mathbf{n}^{\circ},\mathbf{rota})dxdy=\iint_{\Omega}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{\Gamma}(\mathbf{a},\mathbf{dl})\,.$$

2-ескерту. Грин формуласындағы P мен Q функцияларын

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 1 \qquad (4)$$

болатындай етіп таңдап алсақ, онда екі еселі интеграл қасиеті бойынша Ω аймағының ауданының қисық сызықты интеграл арқылы түрлі өрнектерін алуға болады: $m\Omega=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy$. Мысалы,

$P=-\frac{y}{2}$, $Q=\frac{x}{2}$ болса, онда (4) теңдік орындалады, олай болса

$$m\Omega=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left(-ydx+xdy\right). \qquad (5)$$

4-мысал. Параметрлік теңдеулермен берілген:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$$

эллипстің ауданын табу керек.

▼ (5) формула бойынша есептейміз:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}(-ydx+xdy)=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(ab\sin^2 t+ab\cos^2 t)dt=\frac{1}{2}ab\int_{0}^{2\pi}dt=\pi\, ab\,.\blacktriangle$$

11.13.4. Гамильтон операторына қатысты кейбір формулалар. Бұл формулалар векторлық анализде жиі пайдаланылады. Мына $div\mathbf{a}=(\nabla,\mathbf{a})$, $\mathbf{rota}=\nabla\times\mathbf{a}$, $\operatorname{grad} f=\nabla f$ теңдіктерді пайдаланамыз (мұндағы f – скаляр функция).

1) $\mathbf{rot}\,\mathbf{a}[\operatorname{grad} f]=\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$, өйткені ∇ мен ∇f векторларының айырмашылығы тек скаляр көбейткіш қана, яғни бұл екі вектор – коллинеар. Бұл теңдікті біз §11.9, 2-теоремада дәлелдегенбіз.

2) $div\mathbf{rot}\,\mathbf{a}=(\nabla,\nabla\times\mathbf{a})=0$, өйткені ∇ мен $\nabla\times\mathbf{a}$ векторлары өзара ортогональ.

3) $div(fa)\equiv(\nabla, f\,\mathbf{a})=(\nabla f,\mathbf{a})+f\,(\nabla,\mathbf{a})$.

Шынында да, $(\nabla, f\,\mathbf{a})=div(f\,\mathbf{a})=\dfrac{\partial(fP)}{\partial x}+\dfrac{\partial(fQ)}{\partial y}+\dfrac{\partial(fR)}{\partial z}=$

$$=f'_x\cdot P+fP'_x+f'_y\cdot Q+fQ'_y+f'_z\cdot R+fR'_z=$$

$$=f'_x\cdot P+f'_y\cdot Q+f'_z\cdot R+f\,(P'_x+Q'_y+R'_z)=(\nabla f,\mathbf{a})+f\,(\nabla,\mathbf{a})\,.$$

4) $\nabla fg=f\nabla g+g\nabla f$, яғни ∇ операторы екі функция көбейтіндісін дифференциалдау операторы тәріздес әсер етеді.

5) $\mathbf{rot}(f,\mathbf{a})=f\,\mathbf{rota}+\operatorname{grad} f\times\mathbf{a}$ немесе

$\vec{\nabla}\times f\mathbf{a}=f\,(\vec{\nabla}\times\mathbf{a})+\vec{\nabla}f\times\mathbf{a}$.

6) $div(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b},\ \mathbf{rota})-(\mathbf{a},\ \mathbf{rotb})$ немесе

$(\vec{\nabla},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b},\ \vec{\nabla}\times\mathbf{b})-(\mathbf{a},\ \vec{\nabla}\times\mathbf{b})$.

7) $div\operatorname{grad} f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\equiv\Delta f$, мұндағы Δ Лаплас операторы деп аталады. Келесі теңдіктердің орындалатынын көру қиын емес: $(\vec{\nabla},\vec{\nabla}f)=div\vec{\nabla}f=div\operatorname{grad} f=\Delta f$.

12. ҚАТАРЛАР

§12.1. Сандық қатарлар және оларға амалдар қолдану

12.1.1. Сандық қатар ұғымы. $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ сандар тізбегінен құралған

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots \qquad (1)$$

символы ***сандық қатар*** деп аталады (бұдан кейін, атап көрсетілмесе, сандық қатарды қысқаша қатар деп атайтын боламыз). Мұндағы $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ сандары (олар комплекс сандар болуы да мүмкін, бірақ біз, атап айтылмаса, нақты сандарды ғана қарастырамыз) қатардың ***мүшелері,*** ал u_k қатардың ***жалпы*** немесе ***к-ші мүшесі*** деп аталады.

(1) қатарды

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad \sum_{1}^{\infty} u_k, \quad \sum u_k, \qquad (2)$$

және т.б. символдармен де белгілейді.

$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, ..., $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, … сандары (1) немесе (2) қатардың сәйкес 1-ші, 2-ші, …, *n*-ші, … **дербес қосындылары** деп аталады. Мысалы, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{n}{n+2} + \frac{n+1}{n+3} + \ldots.$ қатарының дербес қосындылары $S_1 = \frac{1}{3}$,

$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{5}{6}$, $S_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} = \frac{43}{30}$, ..., $S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{n}{n+2}$.

Егер дербес қосындылардан құралған $\{S_n\}$ сандар тізбегінің $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ нақты мәнді шегі бар болса, онда (1) немесе (2) **қатар жинақты (жинақталады)** дейді. Бұл жағдайда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = S \qquad (3)$$

деп жазады және S санын **қатардың қосындысы** деп атайды.

Егер $\{S_n\}$ сандық тізбегінің шегі *жоқ* немесе ол шек *ақырсыз* болса, онда (1) немесе (2) **қатар жинақсыз** деп аталады.

Мысал (12.1-ҮТ, №1есебі). Қатардың жинақтылығын дәлелдеу керек және оның қосындысын табу керек: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... +$$

$$+ (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Демек, берілген қатар жинақты және $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Әрбір қатарға $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сандар тізбегін – қатардың дербес қосындыларын – сәйкес қоюға болатынын көрдік. Керісінше, егер $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандар тізбегі берілсе, онда оған дербес қосындылары осы тізбектің сәйкес мүшелеріне тең болатын қатарды сәйкес қоюға болады. Шынында да, бұл жағдайда

$$u_1 = x_1, u_2 = x_2 - x_1, u_3 = x_3 - x_2, ..., u_n = x_n - x_{n-1}, ...$$

деп алсақ, онда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_{k-1})$, $(x_0 = 0)$ қатарының дербес

$$S_1 = u_1 = x_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = x_1 + (x_2 - x_1) = x_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3, \ ...,$$

қосындылары $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегінің сәйкес мүшелеріне тең.

Олай болса, қатар дегеніміз – сандар тізбегінің басқа түрі ғана.

Сондықтан: ***қатар үшін айтылған әрбір тұжырымды тізбектер тілінде және, керісінше, тізбектер үшін айтылған әрбір тұжырымды қатарлар тілінде айтуға болады***. Келесі теореманы осының бір көрінісі ретінде қабылдауға болады.

Теорема *(қатардың жинақтылығының Коши критерийі)***.** $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ қатары жинақты болуы үшін, әрбір $\varepsilon > 0$ саны бойынша барлық $n > n_0$ натурал сандары мен кез келген p натурал саны үшін

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай n_0 санының табылуы қажетті және жеткілікті. (*Осы* $A \Leftrightarrow B$ *түріндегі тұжырымның A және B шарттарын ажыратып көрсетіңіз*.)

Дербес жағдайда $p = 1$ үшін бұл теоремадан келесі тұжырымды аламыз.

Теорема *(қатардың жинақтылығының қажетті шарты*). Егер $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ қатары жинақты болса, онда оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,. \qquad (4)$$

▼Алдыңғы теореманы $p = 1$ үшін тұжырымдасақ, онда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ қатарының жинақтылығынан әрбір $\varepsilon > 0$ саны бойынша барлық $n > n_0$ натурал сандары үшін, $\left|S_{n+1} - S_n\right| = \left|u_{n+1}\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай n_0 санының табылатынын көреміз. Ал бұл $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = 0$ немесе $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ деген сөз.

Теореманы келесі әдіспен де дәлелдеуге болады. Қатар жинақты болғандықтан, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ теңдіктері

орындалатынын ескеріп $u_n = s_n - s_{n-1}$ теңдігінен шекке өту арқылы (4) теңдікті аламыз. ▲

(4)-теңдік қатардың жинақты болуының **қажетті шарты** болғанымен**,** ол жеткілікті шарт емес. Мысалы, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$ яғни (4) шарт орындалады, бірақ **гармониялық қатар** деп аталатын $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ қатары жинақсыз (оны төменде көрсетеміз).

Сонымен (4) шарт орындалғанмен, қатардың жинақты не жинақсыз болуы туралы ешнәрсе айта алмаймыз. Бірақ бұл теоремаға $(A\Rightarrow C)\Leftrightarrow(\bar{C}\Rightarrow\bar{A})$ контрапозиция заңына сүйне отырып келесі тұжырымға келеміз: ***егер*** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ ***теңдігі орындалмаса, онда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ ***қатары жинақсыз.***

Мысалы, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$ қатарының жалпы мүшесі үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\frac{2}{3}\neq 0,$ яғни қатардың жинақтылығына қажетті (4) шарт орындалмайды. Демек берілген қатар жинақсыз.

Жиі кездесетін

$$1+z+z^2+...+z^n+...\ =\sum_{k=0}^{\infty}z^k,\quad (z\neq 1) \tag{8}$$

қатарының (геометриялық прогрессия) дербес қосындысы $S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ тең. Бұдан:

егер $|z|<1$ болса, онда $z^{n+1}\to 0,\quad n\to\infty,$ сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-z},$ яғни (8) қатар жинақты $\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z},\ |z|<1;$

егер $|z| \geq 1$ болса, онда (8) қатардың жалпы мүшесі үшін $|z^n| = |z|^n \geq 1$ болады да $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n \geq 1$ аламыз, яғни қатардың жинақталуының қажетті (4) шарты орындалмайды. Демек, $|z| \geq 1$ үшін қатар жинақсыз.

Енді (1) қатардың алғашқы *n* мүшесін алып тастап, қалған мүшелерінен құралған қатарды қарастырайық:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \qquad (5)$$

Бұл қатардың m -ші дербес қосындысын

$$\overline{S}_m = u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+m} \;=\; S_{n+m} - S_n \qquad (6)$$

түрінде, яғни (1) қатардың дербес қосындылары арқылы өрнектеп жазуға болады. (6) теңдіктен $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{S}_m \;=\; \lim\limits_{m\to\infty} S_{n+m} \;-\; S_n$, ал бұдан, егер теңдіктің екі жағындағы шектің біреуі бар болса, онда екінші шектің де бар болатыны немесе ол екі шектің екеуі бірдей болмайтыны шығады. Басқаша айтқанда, **(1)** ***мен*** **(5)** ***қатарлар бір мезгілде екеуі бірдей жинақты*** *немесе* ***екеуі бірдей жинақсыз***.

Олай болса, *қатардың жинақты немесе жинақсыз болуы оның саны ақырлы алғашқы мүшелеріне тәуелді емес***.** Сондықтан *қатарды* ***жинақтылыққа зерттеу*** *үшін, оның (саны ақырлы) алғашқы мүшелерін алып тастап немесе жаңа мүшелер қосып алып, қандайда бір* n_0 *нөмірлі мүшесінен басталатын* $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + ...$ қатарды жинақтылыққа зерттеуге болады. Аталған (1) және (5) қатарлар жинақты болса, олардың қосындыларын сәйкес S және R_n арқылы белгілей отырып, соңғы теңдіктен

$$R_n = S - S_n \qquad (7)$$

аламыз. Мұндағы $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ өрнегі **(1) *қатардың n-ші қалдығы*** деп аталады.

(7) теңдіктен, егер (1) қатар жинақты болса, онда осы қатардың қалдығы нөлге ұмтылатынын:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0,$$

және керісінше, егер қатардың қалдығы нөлге ұмтылса, онда қатардың жинақты болатынын көреміз:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} S_n = S\,.$$

Егер (1) қатардың мүшелері **теріс емес** болса, онда оның дербес қосындылары кемімейтін, яғни монотонды тізбекті құрайды: $S_1 \le S_2 \le S_3 \le \ldots$. Сондықтан егер бұл тізбек шенелген болса: $S_n \le M$, $n = 1, 2, \ldots$, онда (1) қатар жинақты және $\lim_{n\to\infty} S_n = S \le M$ орындалады. Ал егер ол тізбек шенелмеген болса, онда $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, яғни қатар жинақсыз болады (бұл жағдайда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$ деп жазады).

Назар аударыңыз! Жалпы жағдайда, жинақсыз қатар үшін оның *дербес қосындылар тізбегінің шегі жоқ* немесе *ол шек ақырсыз* болатын болса, мүшелері теріс емес қатар үшін оның *дербес қосындылар тізбегінің шегі әрқашанда бар (*ол шек – *нақты мәнді* немесе *плюс ақырсыз)***.**

12.1.2. Қатарларға қолданылатын кейбір амалдар. Егер $\sum_{0}^{\infty} u_k$ және $\sum_{0}^{\infty} \vartheta_k$ қатарлары жинақты болса, онда $\sum_{0}^{\infty} \alpha u_k$, $\sum_{0}^{\infty} (u_k + \vartheta_k)$ **қатарлары да жинақталады** және келесі теңдіктер

орындалады (α – сан)

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k, \tag{9}$$

$$\sum_0^\infty (u_k + \vartheta_k) = \sum_0^\infty u_k + \sum_0^\infty \vartheta_k. \tag{10}$$

▼ Шынында да, $\sum_0^\infty \alpha u_k$ қатарының дербес қосындысы үшін

$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \alpha\, u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k$, ал $\sum_0^\infty (u_k + \vartheta_k)$ қатарының дербес қосындысы үшін

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n (u_k + \vartheta_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k + \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \vartheta_k = \sum_0^\infty u_k + \sum_0^\infty \vartheta_k$$

орындалады. Бұл теңдіктерден, сәйкес, (9) және (10) теңдіктерді аламыз. ▲

Егер $\sum_0^\infty \vartheta_k$ қатарын -1 санына көбейтсек, онда (9) теңдік бойынша $\sum_0^\infty (-\vartheta_k)$ қатары жинақты, ал бұдан өз кезегінде (10) теңдік бойынша $\sum_0^\infty (u_k - \vartheta_k) = \sum_0^\infty u_k - \sum_0^\infty \vartheta_k$ аламыз.

Ескерту. Жалпы жағдайда (10) теңдіктің сол жақ бөлігіндегі қатардың жинақталуынан оның оң жағындағы қатарлардың жинақтылығы шықпайды. Мысалы,

$$(1-1) + (1-1) + \ldots \tag{11}$$

қатары жинақты $(1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0$, бірақ $\sum_0^\infty 1$, $\sum_0^\infty 1$ қатарлары жинақсыз ((4) шарт орындалмайды).

§12.2. Мүшелері теріс емес қатарлардың жинақталуының кейбір белгілері

Қатарлар теориясындағы басты сұрақ – қатардың жинақты немесе жинақсыз болатынын білу. Бұл сұрақты әрбір қатарға Коши критерийін қолданып шешуге де болар еді. Бірақ бұл жағдайда берілген қатардың ерекшелігі ескерілуімен бірге, олардың әрбіреуі үшін жұмысты «бос орыннан» қайта бастап отырған болар едік. Сондықтан бізге қатарды жинақтылыққа зерттеудің ыңғайлы жалпы әдістерін білген жөн. Біз мұнда солардың бірнешеуін келтіреміз.

Мүшелері теріс емес,

$$1)\ \sum_{0}^{\infty} u_k, \qquad 2)\ \sum_{0}^{\infty} \vartheta_k$$

қатарлары берілсін.

1-теорема *(салыстыру белгісі*).

а) Осы екі қатардың мүшелері үшін $u_k \le \vartheta_k$, $k = 0,1,2,...$ теңсіздіктері орындалған жағдайда, егер 2)-ші қатар жинақты болса, онда 1)-ші қатар да жинақты, ал егер 1)-ші қатар жинақсыз болса, онда 2)-ші қатар да жинақсыз болады.

б) Егер

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{\vartheta_k} = A > 0 \qquad (1)$$

ақырлы шегі бар болса, онда 1) мен 2) қатарларының екеуі бірдей жинақты немесе екеуі бірдей жинақсыз болады.

▼ **а)** Егер 2) қатар жинақты болса: $\sum_{0}^{\infty} \vartheta_k = S$, онда теорема шарты бойынша $\sum_{0}^{n} u_k \le \sum_{0}^{n} \vartheta_k \le S$, $n = 0,1,2,...$ немесе $S_n = \sum_{k}^{n} u_k \le S$, $n = 0,1,2,...$, яғни 1) қатардың монотонды кемімейтін

дербес қосындылары жоғарыдан S санымен шенелген. Сондықтан монотонды шенелген тізбектің шегі туралы теорема бойынша 1) қатар жинақты және оның қосындысы $S' \le S$.

Енді 1) қатар жинақсыз болсын. Онда оның дербес қосындылары n санымен бірге ақырсыз өседі, олай болса

$\sum_{0}^{n} u_k \le \sum_{0}^{n} \vartheta_k$, $n = 0,1,2,...$ теңсіздігінің негізінде 2) қатардың да дербес қосындылары ақырсыз өседі, яғни 2) қатар жинақсыз. **а)** дәлелденді.

б) Егер (1) шарт орындалса, онда $A > 0$ болғандықтан, $A - \varepsilon_0 > 0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ саны табылады (мысалы, $\varepsilon_0 = \frac{A}{2}$) және берілген $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ саны бойынша барлық $k > k_0$ нөмірлері үшін $0 < A - \varepsilon_0 < \frac{u_k}{\vartheta_k} < A + \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай k_0 саны табылады (белгілеу ықшам болуы үшін k_0 – оң бүтін сан деп аламыз). Соңғы теңсіздіктер мына теңсіздіктерге парапар

$$0 < (A - \varepsilon)\vartheta_k < u_k < (A + \varepsilon)\vartheta_k, \quad k > k_0 \qquad (2)$$

Бұл теңсіздіктерден теореманың **а)** пункті бойынша:

егер 2) қатар жинақты болса (демек, $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (A + \varepsilon)\vartheta_k$ қатары жинақты), онда $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} u_k$ қатары (демек, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ қатары да) жинақты;

егер 1) қатар жинақты (демек, $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} u_k$ қатары жинақты) болса, онда $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (A - \varepsilon)\vartheta_k$ қатары (демек, 2) қатар да) жинақты

болатынын көреміз.

Ал екі қатардың бірінің жинақсыздығынан екіншісінің жинақсыздығы шығатынын дәлелдеуді оқырманның өзіне қалдырамыз. ▲

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатары жинақты, өйткені $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ қатары мен жинақталатын $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ қатарының (§12.1, 1-мысал) мүшелері үшін $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$, $n=1,2,...$ теңсіздігі орындалады.

2-мысал (12.1-ҮТ, №4-№6 есептер). $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек.

▼ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1>0$ және $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатары жинақты (1-мысал) болғандықтан, салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты. ▲

2-теорема (*Даламбер белгілері*). Мүшелері оң,

$$\sum_{0}^{\infty}u_k \tag{3}$$

қатары берілсін.

а) Егер

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\le q<1,\ k=0,1,2,... \tag{4}$$

теңсіздіктері орындалса, онда (3) қатар жинақты;

егер

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\ge 1,\quad k=0,1,2,..., \tag{5}$$

теңсіздіктері орындалса, онда (3) қатар жинақсыз.

б) Егер

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=q \tag{6}$$

теңдігінде (шек бар жағдайда) $q<1$ болса, онда (3) қатар жинақты; ал $q>1$ болса, онда (3) қатар жинақсыз.

(Ж. Даламбер (1717-1783) – француз математигі.)

▼ **а)** Қатардың u_n мүшесін

$$u_n=u_0\frac{u_1}{u_0}\frac{u_2}{u_1}\ldots\frac{u_n}{u_{n-1}},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

түрінде жазып алып, оған (4) теңдікті пайдалансақ,

$$u_n\le u_0\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q=u_0q^n,\quad q<1,\quad n=0,1,2,\ldots$$

шығады да, $\sum_{1}^{\infty}u_0q^n,\quad q<1$ қатарының жинақты болуынан (3) қатардың жинақтылығын аламыз (1-теорема, а) қараңыз).

(5) теңдіктен $u_0\le u_1\le u_2\le\ldots\le u_n$ немесе $u_0\le u_n$, $n=0,1,2,\ldots$ шығады да, $u_0>0$ болғандықтан, қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды: $\lim_{n\to\infty}u_n\ne 0,$ демек (3) қатар жинақсыз.

б) Егер (6) теңдікте $q<1$ болса, онда $q+\varepsilon<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon>0$ оң саны үшін (мысалы, $\varepsilon=\frac{1-q}{2}$ үшін) $\frac{u_{k+1}}{u_k}<q+\varepsilon<1,\quad k\ge k_0,$ теңсіздіктері орындалатындай жеткілікті үл-кен k_0 саны табылады, яғни теореманың **а)** пунктінің (4) теңсіздігі орындалады. Сондықтан $\sum_{k_0+1}^{\infty}u_k$ қатары, олай болса (3) қатар жинақты.

Егер (6) теңдікте $q>1$ болса, онда $\frac{u_{k+1}}{u_k}>q-\varepsilon>1,\ \ k\geq k_0,$ теңсіздіктері орындалатындай жеткілікті үлкен k_0 саны табылады ($q>1$ болса $q-\varepsilon>1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon>0$ саны бар, мысалы, $\varepsilon=\frac{q-1}{2}$), яғни теореманың **а)** пунктінің (5) теңсіздігі орындалады. Сондықтан $\sum\limits_{k_0+1}^{\infty}u_k$ қатары, олай болса (3) қатар жинақсыз. ▲

Ескерту. Даламбер белгісін көбінесе мүшелері факториалдық өрнектерден немесе көрсеткіштік функциялардан тұратын қатарлар үшін қолданады.

Мысал (12.1-ҮТ, №2 есебі). $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек.

▼ $u_k=\frac{2^k}{k!},\ \ u_{k+1}=\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$ үшін (6) теңдікті жазамыз

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}:\frac{2^k}{k!}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1}=0,$$

мұнда $q=0<1$ болғандықтан, Даламбер **б)** белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

Бұл қатардың жинақтылығын **а)** белгісі арқылы да көрсетуге болады: $\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{2}{k+1}\leq\frac{2}{3}<1,\ \ k=2,3,...$ ▲

3-теорема (Коши белгісі). $\sum\limits_{0}^{\infty}u_k$ (3) қатарының мүшелері оң сандар болсын.

а) Егер

$$\sqrt[k]{u_k} \le q < 1, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{8}$$

теңсіздігі орындалса, онда (3) қатар жинақты, ал егер

$$\sqrt[k]{u_k} \ge 1, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{9}$$

теңсіздігі орындалса, онда (3) қатар жинақсыз.

б) Егер

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q \tag{10}$$

теңдігінде (шек бар жағдайда) $q < 1$ болса, онда (3) қатар жинақты, ал $q > 1$ болса, онда (3) қатар жинақсыз болады.

▼ **а)** (8) теңдіктен $u_k \le q^k$, $q < 1$, $k = 0,1,2,\ldots$ шығады. Ал $\sum_{0}^{\infty} q^k$, $q < 1$ қатары жинақты болғандықтан, салыстыру белгісі бойынша соңғы теңсіздіктен (3) қатардың да жинақты болатынын көреміз. (9) теңсіздіктен $u_k \ge 1$, $k = 0,1,2,\ldots$ шығады да, қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайтынын көреміз – (3) қатар жинақсыз.

б) Егер (10) теңдікте $q < 1$ болса, онда $q + \varepsilon < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon > 0$ оң саны (мысалы, $\varepsilon = \frac{1-q}{3}$) бойынша барлық $k > k_0$ нөмірлері үшін

$$q - \varepsilon < \sqrt[k]{u_k} < q + \varepsilon, \tag{11}$$

теңсіздігі орындалатындай k_0 (оң бүтін) саны табылады. (11) теңсіздіктің оң жағынан шығатын $u_k < (q+\varepsilon)^k$, $k > k_0$, теңсіздігін және $\sum_{k_0}^{\infty} (q+\varepsilon)^k$, $q + \varepsilon < 1$ қатарының жинақтылығын ескеріп (ол – геометриялық прогрессия), салыстыру белгісі бойынша $\sum_{k_0}^{\infty} u_k$ қатарының, олай болса (3) қатардың жинақтылығын аламыз. Ал

егер $q>1$ болса, онда $q-\varepsilon>1$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\varepsilon>0$ саны (мысалы, $\varepsilon=\frac{q-1}{3}$) бойынша барлық $k>k_0$ нөмірлері үшін (11) теңсіздіктері орындалатындай k_0 (оң бүтін) саны табылады (мәнісі өзгермейтіндіктен, $\varepsilon>0$, k_0 сандарын өзгертпей белгіледік). Бұл теңсіздіктердің сол жағынан $\sqrt[k]{u_k}>q-\varepsilon>1$ немесе $u_k>1,\ k>k_0,$ теңсіздігін, яғни қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайтынын, сондықтан да $\sum_{k_0}^{\infty}u_k$ қатарының, олай болса, (3) қатардың жинақсыздығын аламыз. ▲

Ескерту. Коши белгісін көбінесе $\sqrt[k]{u_k}$ түбірі жеңіл есептелетін қатарларға пайдаланады.

Мысал (12.1-ҮТ №3 есебі). $\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$ қатарын жинақтылыққа зерттеу керек.

▼ Мұнда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$ Коши белгісі бойынша берілген қатар жинақты. ▲

Ескерту. Даламбер және Коши белгілері $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=1,$ $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=1,$ яғни $q=1$ болған жағдайларда, жарамсыз. Бұл жағдайда қатар жинақты да, жинақсыз да бола береді. Осы мағынада бұл екі белгіге қарағанда салыстыру және интегралдық белгілері «сезімтал».

Енді Кошидің ***интегралдық белгісі*** деп аталатын теореманы келтірейік.

4-теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[0;\ +\infty)$ аралығында **теріс емес, үзіліссіз** және **өспейтін** болса, онда

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \tag{12}$$

меншіксіз интегралы мен

$$\sum_0^{\infty} f(n) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots \tag{13}$$

қатары бір мезгілде жинақты немесе бір мезгілде жинақсыз болады.

▼ Теорема шартынан

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dx \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k),\ \ k = 0,1,2,\ldots$$

теңсіздіктері шығады. Бұларды «*k*» нөмірі бойынша қосындыласақ,

$$\sum_1^{n+1} f(k) = \sum_0^{n} f(k+1)\ \le\ \sum_0^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_0^{n+1} f(x)dx\ \le\ \sum_0^{n} f(k)$$

аламыз. Бұл теңсіздіктердің мүшелері теріс емес болғандықтан, n өскенде тізбектер монотонды кемімейді. Сондықтан теоремадағы тұжырым орындалады (көз жеткізіңіз). ▲

Мысал (12.1-ҮТ, №4-№6 есептер). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатары $\alpha > 1$ болса **жинақты**, $\alpha \le 1$ болса **жинақсыз** болатынын дәлелдеу керек.

▼ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ – меншіксіз интегралы $\alpha > 1$ болса жинақты, $\alpha \le 1$ болса жинақсыз еді (§9.2 қараңыз). Олай болса, 3-теорема бойынша берілген қатар да солай болады. ▲

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ – ***Дирихле қатары*** деп аталады. Дербес жағдайда егер $\alpha=1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – ***гармониялық қатарын*** аламыз.

Мысал (12.1-ҮТ, №4-№6 есептер). $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{1+\alpha}n},\quad \alpha>0,$ қатарының жинақты болатынын дәлелдеу керек.

▼

$$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^{1+\alpha}x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\ln^{-1-\alpha}x\,d(\ln x)=\lim_{b\to\infty}\frac{\ln^{-\alpha}x}{-\alpha}\Bigg|_{2}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\ln^{\alpha}b}-\frac{1}{\ln^{\alpha}2}\right)=\frac{1}{\alpha\ln^{\alpha}2}<\infty.$$ Олай болса, 4-теорема бойынша берілген қатар жинақты. ▲

Назар аударыңыз! Егер осы мысалдағы қатарда $\alpha=0$ болса, онда ол жинақсыз болады (Көз жеткізіңіз).

§12.3. Мүшелері айнымал таңбалы қатарлар. Абсолют жинақты және шартты жинақты қатарлар

Қатардың мүшелері нақты сандар болса, олар оң немесе теріс таңбалы болатындықтан оны **мүшелері айнымал таңбалы қатар** немесе жай ғана **айнымал таңбалы қатар** деп атайды. Егер қатардың кез келген екі көрші мүшелерінің таңбалары қарама-қарсы болса, онда оны **мүшелері ауыспа таңбалы қатар** немесе қысқартып, **ауыспа таңбалы қатар** дейді.

Егер $a_k>0$, $k=1,2,\ldots$ сандарынан құралған, ауыспа таңбалы $a_1-a_2+a_3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ қатары үшін келесі екі шарт

орындалса:

1) ол сандар монотонды өспейтін тізбек: $a_k \geq a_{k+1}$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0,$

онда ол **Лейбниц қатары** деп аталады.

Теорема. Лейбниц қатары жинақты және оның қосындысы қатардың бірінші мүшесінен аспайды: $S \leq a_1$.

▼ Қатардың жұп нөмірлі дербес қосындыларын келесі түрде топтасақ:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

теорема шарты бойынша жақша ішіндегі айырмалар теріс емес және $a_k > 0$, $k = 1,2,\ldots$ болғандықтан, $S_{2n} \leq a_1$ аламыз. Егер осы жұп нөмірлі дербес қосындыларды $S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n})$ түрінде топтасақ, онда тағы да жақша ішіндегі айырмалардың теріс еместігінен S_{2n} тізбегінің монотонды кемімейтінін көреміз.

Монотонды кемімейтін және жоғарыдан a_1 санымен шенелген тізбек үшін $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq a_1$ қатысы орындалатыны белгілі.

Тақ нөмірлі дербес қосындылардың да шегі осы сан болады: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - a_{2n}) = S - 0 = S.$ Олай болса $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leq a_1.$ ▲

Мысал. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ қатары – Лейбниц қатары. Шынында да, $\frac{1}{n} > 0$, $n = 1,2,\ldots$ оң сандарынан құралған ауыспа таңбалы қатар үшін 1) $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ шарттары орындалады. Олай болса қатар жинақты және оның қосындысы $S \leq 1.$ Бұл қосынды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$ тең болатыны

төменде көрсетіледі.

Назар аударыңыз. Егер

$$a_1 - a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \,, \quad a_k > 0, \quad k \in \mathbf{N}$$

қатары жинақты болса, онда $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ қатары да жинақты және оның қосындысы үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = \overline{S} \;\leq\; a_n .$$

Енді **мүшелері комплекс сандар** болатын

$$u_1 + u_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

қатарын және оның мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған

$$|u_1| + |u_2| + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \tag{2}$$

қатарын қарастырайық.

Егер (2) қатар жинақты болса, онда (1) қатар **абсолютті жинақты қатар** деп аталады. Ал (1) қатар жинақты, ал оның мүшелерінің абсолют шамасынан құралған (2) қатар жинақсыз болса, онда (1) қатар **шартты жинақты қатар** деп аталады.

1-теорема. Абсолют жинақты қатар жинақты.

▼ S_n және $\overline{S}_n$ символдары сәйкес (1) және (2) қатарлардың дербес қосындылары болсын. (2) қатар жинақты болса, онда Коши белгісі бойынша кез келген $\forall \varepsilon > 0$ саны арқылы барлық $n > N$ және p натурал сандары үшін $\left|\overline{S}_{n+p} - \overline{S}_n\right| = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай N саны табылады. Онда модуль қасиеті бойынша бұл шарт S_n дербес қосын-

дылары үшін де орындалады:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+p}\right|\le\left|u_{n+1}\right|+...+\left|u_{n+p}\right|<\varepsilon\ .$$

Олай болса Коши белгісі бойынша (1) қатар жинақты. ▲

***1-теоремаға кері тұжырым орындала бермейді*:**

Мысалы, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ қатары жинақты, ал оның мүшелерінің абсолют шамасынан құралған гармониялық қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ жинақсыз.

Сондықтан, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ – шартты жинақты қатар.

Назар аударыңыз! 1-теоремадан контрапозиция заңын қолдана отырып, келесі тұжырымды аламыз: *егер* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *қатары жинақсыз болса, онда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ *қатары да жинақсыз.*

2-теорема. Егер абсолют жинақты қатардың мүшелерінің кез келген ретпен орнын ауыстырсақ, онда алынған жаңа қатар да жинақты және оның қосындысы алғашқы қатардың қосындысына тең. (Дәлелдеуін, мысалы, [3] кітаптан қарауға болады).

Бұл теорема абсолют жинақты қатар үшін $a+b=b+a$ сияқты «коммутативтік қасиет» орындалатынын көрсетеді.

Бірақ кез келген қатар үшін бұл қасиет орындала бермейді. Мысалы, жоғарыдағы $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{M=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=\ln 2$ қатарының мүшелерін келесідей етіп орнын ауыстырып:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}\right)-\frac{1}{4k}+\ldots$$

жақша ішіндегі амалдарды орындасақ,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2\cdot 2k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\ln 2,$$

қосындысы берілген қатардың қосындысының жартысына тең қатарды аламыз. Бұл – берілген қатар мүшелерінің орын ауыстыруының бір ғана тәсілі.

Ал жалпы жағдайда шартты жинақы қатардың мүшелерінің орнын ауыстыра отырып, қосындысы алдын ала берілген санға тең болатын қатар алуға болатынын келесі теорема көрсетеді.

3-теорема. Егер

$$u_1+u_2+\ldots \qquad (3)$$

қатары шартты жинақты болса, онда берілген кез келген (ақырлы немесе ақырсыз) S саны бойынша осы S санына жинақталатын қатар шығатындай (3) қатардың мүшелерінің орын ауыстыруын табуға болады (дәлелдеуін, мысалы, [3] кітаптан қарауға болады).

§12.4. Функциялық қатарлар

12.4.1. Функциялық қатар ұғымы. Мүшелері функциялар болатын қатарларды қарастырайық.

Анықтама. *Мүшелері берілген D жиынында анықталған, нақты мәнді $a_k(x),\ k=0,1,2,\ldots$ функцияларынан құралған*

$$a_0(x)+a_1(x)+\ldots+a_n(x)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x) \qquad (1)$$

түріндегі өрнекті ***функциялық қатар*** *дейді. D - функциялық* ***қатардың анықталу жиыны (аймағы)*** *деп аталады.*

Егер x-ке белгілі бір мән берсек, онда (1) функциялық қатар сандық қатарға айналады. Функциялық қатар туралы ол «жинақты» немесе «жинақсыз» деп айтудың мағынасы жоқ. Өйткені ол x-тің кейбір мәндерінде жинақты болса, x-тің басқа кейбір мәндерінде жинақсыз болуы мүмкін.

Анықтама. *Аргумент x-тің берілген функциялық қатар жинақты болатындай мәндерінің жиыны* (1) *қатардың* ***жинақталу жиыны (аймағы)*** *деп аталады.*

Жинақталу аймағын G арқылы белгілесек, $G \subset D$ болатыны түсінікті.

1-мысал. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + ... + + \frac{1}{n^x} + ...$ қатарының анықталу жиыны $D = (-\infty; +\infty)$. Бұл қатар $x > 1$ болса жинақты, ал $x \le 1$ болса жинақсыз болатыны белгілі. Демек, оның жинақталу аймағы $G = (1; +\infty)$.

2-мысал. (12.1.1.п. 8-мысал) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$ қатарының анықталу жиыны – $D = (-\infty; +\infty)$. Оның жинақталу аймағы $G = \{x : |x| < 1\} = (-1; 1)$, өйткені ол осы аймақта еселігі $q = x$ тең геометриялық прогрессияның қосындысы, ал $|x| \ge 1$ болса қатар жинақсыз (жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды).

Мұнда ескеретін жайт: **1)** Функциялық қатардың $S_n(x),\ n = 1, 2, ...$ дербес қосындыларының анықталу жиыны да D болады; **2)** Әрбір $x \in G \subset D$ нүктесіне $\lim_{n \to \infty} S_n(x)$ ережесі бойынша S саны сәйкес келетіндіктен, (1) функциялық қатардың қосындысы G жиынында анықталған $S(x)$ функциясы болады. Сонымен бірге $\{S_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2,$ дербес қосындыларының шектері G аймағының әрбір x нүктесінде қарастырылатындықтан, (1) функциялық қатар $S(x)$ функциясына ***нүктелі жинақталады*** дейді, ал $S(x)$ функциясы (1) қатардың ***нүктелік шегі*** деп аталады.

(1) функциялық қатардың дербес қосындысы $S_n(x)$, қосындысы $S(x)$, қалдығы $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ болсын. $\Delta \subset G$ арқылы G жинақталу аймағындағы қандай да бір аралықты белгілейік.

Анықтама. *Егер* $\limsup\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\Delta}\left|R_n(x)\right| = \limsup\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\Delta}\left|S(x)-S_n(x)\right| = 0$ *теңдігі орындалса, онда* (1) *функциялық қатар* $S(x)$ функциясына Δ *аралығында* ***бірқалыпты жинақталады*** *дейді.*

Ескерту. $R_n(x)$ қалдығы Δ аралығының әрбір x нүктесінде нөлге ұмтылса да, ол Δ аралығында нөлге бірқалыпты ұмтылмауы мүмкін, яғни, $\forall x\in\Delta$, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ теңдігі орындалғанымен $\limsup\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\Delta}\left|R_n(x)\right|=0$ теңдігі орындалмауы мүмкін. Мысалы, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ қатарын $\Delta=G=(-1;1)$ аралығында қарастырайық. Бұл қатар үшін

$(x\in G=(-1;1))$ $\quad S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=\dfrac{1-x^n}{1-x}$, $\quad S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$,

$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1-x^n}{1-x}=\dfrac{x^n}{1-x}$ болғандықтан мұнда

$\forall x\in(-1,\ 1)$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1-x}=0$ теңдігі орындалады,

бірақ $\sup\limits_{x\in(-1;1)}R_n(x)=\sup\limits_{x\in(-1;1)}\dfrac{x^n}{1-x}=\infty$, демек $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)}\left|S(x)-S_n(x)\right|=\infty.$

Сондықтан, анықтама бойынша, берілген қатар $\Delta=(-1;1)$ аралығында бірқалыпты жинақты емес. Ал егер берілген қатар үшін кез келген $\Delta=[-q,\ q]\subset(-1,1)$ кесіндісін алсақ, онда

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[-q,q]}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q^n}{1-q}=0$ теңдігі орындалып, анықтама бойынша қатар $[-q;q]$ $(0<q<1)$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталады.

Қатардың бірқалыпты жинақтылығын анықтама бойынша тексеру жеңіл бола бермейді, сондықтан практикада функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақтылығының белгілері пайдала-

нылады.

Анықтама. Егер мүшелері теріс емес

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \tag{2}$$

сандық қатары мен

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \tag{3}$$

функциялық қатары үшін Δ аралығының әрбір $x \in \Delta$ нүктесінде

$$|a_k(x)| \le b_k, \quad x \in \Delta \tag{4}$$

теңсіздігі орындалса, онда (2) сандық қатары (3) функциялық қатарды Δ аралығында **мажорлаушы (жоғарыдан шенейтін) қатар** деп аталады.

Егер Δ аралығы көрсетілмесе, онда (4) теңсіздіктің кез келген x үшін орындалатынын білдіреді.

1-теорема (Вейерштрасс). Егер (3) функциялық қатарын Δ аралығында мажорлаушы (2) қатар бар және ол жинақты болса, онда (3) қатар Δ аралығында бірқалыпты және абсолют жинақты болады.

▼ (2) қатар жинақты болғандықтан, Коши критерийін және (4) теңсіздікті пайдалансақ, әрбір $\varepsilon > 0$ саны бойынша кез келген $n > N$, $p > 0$ сандары мен **кез келген** $x \in \Delta$ үшін

$$\varepsilon > b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p} \ge |a_{n+1}(x)| + |a_{n+2}(x)| + \ldots + |a_{n+p}(x)| \ge$$

$$\ge |a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)|$$

теңсіздігі орындалатындай N саны табылады. Бұл теңсіздіктен $\forall \varepsilon > 0$ және $\forall n > N$ сандары үшін $|R_n(x)| = \lim\limits_{p \to \infty} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le \varepsilon$, $\forall x \in \Delta$, олай болса $\sup\limits_{x \in \Delta} |R_n(x)| \le \varepsilon$, $\forall n > N$, аламыз. Ал бұл – $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in \Delta} |R_n(x)| = 0$ теңдігі орындалады

деген сөз. (3) қатардың абсолют жинақтылығы (4) теңсіздік пен (2) қатардың жинақтылығынан шығады. ▲

Мысал. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$ функциялық қатары бүкіл сан өсінде бірқалыпты және абсолют жинақты. Өйткені $\frac{\sin kx}{k^2}\le\frac{1}{k^2}$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$, сонымен бірге $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ – жинақты қатар.

Функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығын ерекше қарауымыздың себебі – мұндай қатарлар саны ақырлы қосылғыштардың қосындысының көптеген белгілі қасиеттеріне ие. Енді сол қасиеттердің кейбіреулерін келтірейік.

12.4.2. Бірқалыпты жинақталатын қатарлардың қасиеттері

2-теорема. Егер $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)$ функциялық қатары Δ аралығында бірқалыпты жинақты және оның барлық $a_k(x)$ мүшелері Δ аралығында үзіліссіз болса, онда осы қатардың $S(x)$ қосындысы да Δ аралығында үзіліссіз болады.

▼ Теорема шартынан $\sup\limits_{x\in\Delta}|R_n(x)|\to 0$, $n\to\infty$ аламыз. Олай болса, егер $\varepsilon>0$ саны берілсе, онда $|S(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x\in\Delta,$ теңсіздігі орындалатындай *n* нөмірі табылады. Одан әрі Δ аралығында $a_k(x)$ функциялары үзіліссіз болғандықтан, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)$ функциясы да Δ аралығында үзіліссіз болады, демек ***кез келген*** $x_0\in\Delta$ нүктесі үшін $|S_n(x)-S_n(x_0)|\le\frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ теңсіздігі орындалатындай $\delta>0$ саны табы-

лады. Осы екі теңсіздіктен кез келген $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ үшін келесі теңсіздік:

$$|S(x) - S(x_0)| = |S(x) - S_n(x) + S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x) - S_n(x_0)| \le$$

$$\le |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

шығады, ал бұл – $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$ деген сөз, яғни $S(x)$ функциясы кез келген $x_0 \in \Delta$ нүктесінде үзіліссіз. ▲

3-теорема. Егер $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k(x)$ функциялық қатары $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты және қатардың барлық $a_k(x)$ мүшелері $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда қатардың қосындысының $[\alpha, \beta]$ кесіндісіндегі интегралы қатардың қосылғыштарының интегралдарының қосындысына тең: $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\sum\limits_{0}^{\infty} a_k(x) \right) dx = \sum\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_k(x) dx.$

▼ Берілген қатардың қосындысы мен дербес қосындысын сәйкес $S(x)$ және $S_n(x)$ деп алайық. 2-теорема бойынша $S(x)$ және $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ функциялары $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ функциясын $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде интегралдауға болады:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\sum\limits_{0}^{n-1} a_k(x) + \sum\limits_{n}^{\infty} a_k(x) \right] dx = \left(\sum\limits_{0}^{n-1} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_k(x) dx \right) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n(x) dx \,. \quad (5)$$

Мұндағы соңғы қосылғыш үшін

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n(x) dx \right| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} |R_n(x)| dx \le (\beta - \alpha) \cdot \max_{x \in [\alpha, \beta]} |R_n(x)|$$

және теорема шарты бойынша $\max\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |R_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$ нөлге

ұмтылатындықтан, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta} R_n(x)dx = 0$ аламыз. Олай болса (5) теңдіктен шекке өте отырып, $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\sum\limits_{0}^{\infty} a_k(x)dx\right) = \sum\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta} a_k(x)dx$ теорема қорытындысын аламыз. ▲

Мысал. $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}$ қатары $|x|<1$ аралығында жинақты. Өйткені $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n} = \sum\limits_{0}^{\infty}(-x^2)^n$, мұнда $|-x^2| = |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x|<1$ (еселігі $-x^2$ тең геометриялық прогрессия), сондықтан оның қосындысы $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2}$ тең. Қатар Вейерштрасс белгісі бойынша $x\in[-q,q]$, $0<q<1$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты (***көз жеткізіңіз***) болғандықтан, 0-ден x-ке $(x<1)$ дейін мүшелеп интегралдай отырып,

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_{0}^{x}\frac{1}{1+x^2}dx = \sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_{0}^{x}x^{2n}dx = \sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

аламыз.

4-теорема. Мүшелері $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k(x)$ функциялық қатары қандай да бір $x_0\in[\alpha,\beta]$ нүктесінде жинақты болсын. Егер бұл қатардың мүшелерінің туындыларынан құралған $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k'(x)$ функциялық қатар $[\alpha,\beta]$

кесіндісінде бірқалыпты жинақталатын болса, онда ол бастапқы қатардың қосындысының туындысына тең: $\sum_{0}^{\infty} a_k'(x) = \left(\sum_{0}^{\infty} a_k(x) \right)'$.

▼ Берілген қатардың қосындысын $S(x)$ және $\sum_{0}^{\infty} a_k'(x) = F(x)$ деп алайық. 3-теорема бойынша $[x_0, x]$, $x_0 < x < \beta$, кесіндісінде келесі интегралдау амалын орындауға болады $\int_{x_0}^{x} F(t)dt = \sum_{0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_k'(t)dt = \sum_{0}^{\infty} \left[a_k(x) - a_k(x_0) \right] = S(x) - S(x_0)$.

Осы теңдіктің екі жағын x бойынша дифференциалдасақ, $\left(\int_{x_0}^{x} F(t)dt \right)' = S'(x) - 0$, $F(x) = S'(x)$ немесе $\sum_{0}^{\infty} a_k'(x) = \left(\sum_{0}^{\infty} a_k(x) \right)'$. ▲

Мысал. $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ қатарының қосындысын табу керек.

▼ Бұл қатардың мүшелері мына $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ қатардың мүшелерінің туындыларына тең екенін көреміз. Сонымен бірге кез келген $x \in [-q, q] \subset (-1,1)$ нүктелері үшін $\left| k \cdot x^{k-1} \right| = k|x|^{k-1} \le k \cdot q^{k-1}$, ал мажорлаушы $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$ сандық қатары жинақты (Даламбер белгісі бойынша тексеріңіз). Сондықтан берілген қатар $[-q, q]$, $0 < q < 1$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталады (Вейерштрасс белгісі). Олай болса 3-теорема бойынша $\left(\sum_{0}^{\infty} x^k \right)' = \sum_{0}^{\infty} \left(x^k \right)' = \sum_{1}^{\infty} kx^{k-1}$, ал $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ болғандықтан,

$\left(\sum_{0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ аламыз. Ендеше, осы теңдіктерден $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$ шығады. Дербес жағдайда, егер $x = \frac{1}{2}$ деп алсақ, онда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$ ▲

§12.5. Дәрежелік қатарлар. Тейлор қатары

12.5.1. Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы.

Анықтама. Әрбір мүшесі дәрежелік функция болатын

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

түріндегі функциялық қатарды **дәрежелік қатар** дейді.

Мұндағы c_k, $k = 0,1,2,\ldots$ *сандары дәрежелік қатардың* ***коэффициенттері*** *деп аталады.*

Дәрежелік қатар $x = 0$ нүктесінде әрқашанда жинақты. Дәрежелік қатардың жинақталу аймағын табуға келесі теореманы пайдалануға болады.

1-теорема. (***Абель теоремасы***). Егер (1) дәрежелік қатар:

а) x_0 нүктесінде $(x_0 \neq 0)$ жинақталса, онда ол $|x| < |x_0|$ нүктелерінде, яғни $\left(-|x_0|,\ |x_0|\right)$ аралығында ***абсолютті жинақты***;

б) x_1 нүктесінде жинақсыз болса, онда ол $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x нүктелерінде жинақсыз болады (84-сурет).

(Нильс Хенрик Абель – Норвегия математигі (1802-1829)).



84-сурет

▼ а) Теорема шарты бойынша $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^{\,k}$ қатары жинақты болғандықтан, $\lim_{k\to\infty} c_k x_0^k = 0$. Бұл теңдіктен $\{c_k x_0^k\}$ тізбегінің шенелгендігі шығады: $\left|c_k x_0^k\right| \le M$, $k = 0,1,2,...$ (көз жеткізіңіз). Осы теңсіздікті ескеріп,

$$\left|c_k x^k\right| = \left|c_k x_0^k\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \qquad (2)$$

аламыз. Ал $|x| < |x_0|$ немесе $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ болғандықтан, $\sum_{k=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$ қатары $\left(-|x_0|,\ |x_0|\right)$ аралығында жинақты (геометриялық прогрессия). Олай болса кез келген $x \in \left(-|x_0|,\ |x_0|\right)$ нүктелерінде ((2) қараңыз: $\sum_{k=0}^{\infty} \left|c_k x^k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$) $\sum_{k=0}^{\infty} \left|c_k x^k\right|$ қатары да жинақты. Олай болса $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ қатары $\left(-|x_0|,\ |x_0|\right)$ аралығында абсолют жинақты.

б) (1) дәрежелік қатар $|x_2| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x_2 нүктесінде жинақты болсын деп жориық. Онда **а)** қасиеті бойынша (1) дәрежелік қатар $|x_1| < |x_2|$ болатын x_1 нүктесінде жинақты болуы керек. Ал бұл **б) шартына** қайшы келеді. ▲

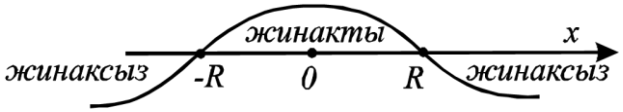
Абель теоремасынан (1) дәрежелік қатардың жинақталу аймағы 0 нүктесіне симметриялы $(-R,R)$ түріндегі аралық, ал оның жинақсыз болатын нүктелер жиыны $(-\infty;-r)$ мен $(r;\ +\infty)$ түрінде болатынын көреміз. Іс жүзінде $R=r$, яғни ***дәрежелік қатар*** $(-R,R)$ ***аралығында абсолютті жинақты, ал*** $(-\infty,-R)$, $(R,+\infty)$ ***аралықтарында жинақсыз болатын R саны табылады*** (85-сурет). Шынында да, қатардың жинақтылығының Коши белгісі бойынша:

$$\text{егер } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\ x^n\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n\ |}<1 \text{ немесе } |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n\ |}}$$

болса, онда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|c_k x^k\right|$ қатары жинақты, демек $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k x^k$ дәрежелік қатары абсолютті жинақты;

$$\text{егер } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|c_n\ x^n\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n\ |}>1 \text{ немесе } |x|>\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n\ |}} \text{ болса,}$$

онда Коши теоремасы бойынша, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|c_k x^k\right|$ қатары жинақсыз.



85-сурет

Енді

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n\ |}} \qquad (3)$$

деп белгілесек, жоғарыдағы тұжырым дұрыс екенін көреміз. Ал

$x = \pm R$ нүктелерінде $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ дәрежелік қатарының жинақтылығы қосымша зерттеледі.

Егер дәрежелік қатар тек қана $x = 0$ нүктесінде жинақты болса, онда $R = 0$, ал x-тің барлық мәндерінде жинақты болса, онда $R = +\infty$ деп есептеледі.

Ескерту. Біз $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c_n\, x^n\right|}$ шегі бар деп ұйғардық. Егер ол шек жоқ болса, онда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|c_n\, x^n\right|}$ жоғарғы шегі қарастырылады.

(3) формула арқылы есептелетін R саны (1) дәрежелік қатардың ***жинақталу радиусі***, ал $(-R, R)$ оның ***жинақталу аралығы*** деп аталады.

Жинақталу радиусін табу үшін Даламбер белгісінен шығатын

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|, \qquad (4)$$

формуланы да (шек бар болса) пайдаланады.

Мысал. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ дәрежелік қатардың жинақталу аймағын табу керек.

▼ Даламбер белгісін пайдаланайық:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| : \left| \frac{x^k}{k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{k+1} \cdot k}{(k+1)x^k} \right| = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = |x|.$$

Даламбер белгісі бойынша $|x| < 1$, яғни $(-1;1)$ аралығында қатар абсолют жинақты, ал $|x| > 1$ аралығында ($(-\infty;-1)$ және $(1;+\infty)$ аралықтарында) қатар жинақсыз. Сонымен $R = 1$, ал жинақталу аралығы – $(-1;1)$. Енді қатарды жинақтылыққа осы аралықтың ұштарындағы $x = \pm 1$ нүктелерінде қосымша зерттейік.

Егер:

$x=1$ болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ қатары жинақсыз;

$x=-1$ болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ қатары жинақты

болатыны белгілі.

Сонымен берілген қатардың жинақталу аймағы: $G=[-1,1)$. ▲

2-теорема. Егер $\sum_{k=1}^{\infty}c_k x^k$ дәрежелік қатарының жинақталу аралығы $(-R;R)$ болса, онда ол қатар осы аралықта жататын кез келген $[\alpha;\beta]\subset(-R;R)$ кесіндісінде абсолют және бірқалыпты жинақты болады.

▼ Шынында да, $\left|c_k x^k\right|\le\left|c_k\beta^k\right|$, $x\in[\alpha,\beta]$ және $\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k\beta^k\right|$ қатары жинақты (1-теорема). Олай болса, Вейерштрасс белгісі бойынша, $\sum_{k=1}^{\infty}c_k x^k$ дәрежелік қатары $[\alpha;\beta]\subset(-R;R)$ кесіндісінде абсолют және бірқалыпты жинақты. ▲

2-теоремадан бірқалыпты жинақталатын функциялық қатарларға қолданылатын амалдар мен қасиеттер дәрежелік қатарлар үшін де орындалатыны шығады:

1) Дәрежелік қатардың $S(x)$ қосындысы $(-R;R)$ жинақталу аралығында үзіліссіз;

2) Кез келген $[\alpha,\beta]\subset(-R,R)$ кесіндіде дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдауға болады:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\int_{\alpha}^{\beta}x^k dx=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\frac{\beta^{k+1}-\alpha^{k-1}}{k+1}.$$

3) Дәрежелік қатарды $(-R;R)$ жинақталу аралығында мүшелеп дифференциалдауға болады:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^{x-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{x-1}.$$

Назарыңызға. Бұл теңдіктің оң жағындағы дәрежелік қатардың жинақталу аралығы (1) дәрежелік қатардың жинақталу $(-R;R)$ аралығымен беттесетінін және осы қатар үшін 2-теорема орындалатынын жаттығу ретінде тексеріңіздер.

4) (1) дәрежелік қатардың қосындысы оның $(-R;R)$ жинақталу аралығында ақырсыз рет дифференциалданады.

▼ Осы қасиетке көз жеткізейік. **3)** қасиет бойынша $S'(x)$ функциясы – жинақталу аралығы тағы да сол $(-R;R)$ болатын дәрежелік қатардың қосындысы, сондықтан оны осы аралықта тағы да дифференциалдауға болады. $S''(x)$ туындысы тағы да жинақталу аралығы $(-R;R)$ болатын дәрежелік қатардың қосындысы болатындықтан, оны тағы да дифференциалдауға болады және т.с.с. ▲

Келесі функциялық қатарды:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \qquad (5)$$

центрі a **нүктесі болатын дәрежелік қатар** дейді.

Егер $x-a=y$ деп алса, онда (5) дәрежелік қатар (1) түрдегі дәрежелік қатарға келеді: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k$. Егер бұл қатардың жинақталу аралығы $|y|<R \Leftrightarrow (-R;R)$ болса, онда (5) қатардың жинақталу аралығы $|x-a|<R \Leftrightarrow (a-R;\ a+R)$. Міне, осы аралықта (5) қатарға дәрежелік қатардың барлық қасиеттерін қолдануға болады.

12.5.2.Тейлор қатары. Айталық a нүктесінің қандай да бір маңайында f функциясы анықталған және ақырсыз ретті $f^{(n)}(a)$, n=1,2,3, … туындылары бар болсын. Онда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

қатарын f ***функциясының a нүктедегі Тейлор қатары*** деп атайды. Егер $a = 0$ болса, онда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

 Маклорен қатары деп аталады.

Айталық, $f(x)$ функциясы ***жинақталатын*** $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ дәрежелік қатардың қосындысы болсын:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots . \qquad (6)$$

Онда 4-қасиетті пайдаланып, (6) дәрежелік қатарын $(a-R;\ a_0+R)$ жинақталу аралығында k рет дифференциалдасақ, $f^{(k)}(x) = k!c_k + (k+1)k \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_{k+1}(x-a) + \ldots$ аламыз. Мұнда x=a деп алсақ, $f^{(k)}(a) = k!c_k$ немесе $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k = 0,1,2,\ldots .$

Бұл теңдіктен $f(x)$ функциясының жинақталу аралығында дәрежелік қатарға жіктелуі жалғыз ғана түрде болатынын, сонымен бірге жинақталатын дәрежелік қатар өзінің қосындысының Тейлор қатары болатынын көреміз.

Енді f функциясының $(x-a)$ айырымының дәрежесі бойынша Тейлор қатары a нүктесінің қандай да бір маңайында

жинақты болатын және оның тап осы $f(x)$ функциясының өзіне жинақталу шартын келтірейік.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясының $[a-\delta;\ a+\delta]$ кесіндісінде кез келген ретті туындылары бар және оның Тейлор формуласының қалдығы нөлге ұмтылса,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \qquad x \in [a-\delta, a+\delta], \tag{7}$$

онда f функциясын қарастырылған кесіндіде (осы f функцияның өзіне жинақталатын) Тейлор қатарына жіктеуге болады.

▼ Теорема шартынан $f^{(k)}(x)$ туындыларының $[a-\delta, a+\delta]$ кесіндісінде үзіліссіз болатындықтан, f функциясының Тейлор формуласын жаза аламыз: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$, $x \in [a-\delta, a+\delta]$. (7-шарттан

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \lim_{n\to\infty} \big(f(x) - r_n(x) \big) = f(x) - \lim_{n\to\infty} r_n(x) = f(x),$$

яғни $f(x)$ функциясының Тейлор көпмүшелігі $[a-\delta, a+\delta]$ кесіндісінде, $n \to \infty$ ұмтылғанда, сол функцияның өзіне ұмтылады:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x), \quad x \in [a-\delta, a+\delta].$$

Сонымен $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, $x \in [a-\delta, a+\delta]$ алдық. ▲

Мысал. $y = e^x$ көрсеткіштік функциясы үшін

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad \forall k = 0,1,2,\ldots, \quad \text{бұдан} \quad f^{(k)}(0) = 1.$$

Бұл мәндерді (9) формулаға қойсақ, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ аламыз. Жоғарыдағы теорема шартын тексерейік. Кез келген берілген бекітілген x үшін функцияның Лагранж түріндегі Тейлор қалдығы

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{e^{|x|}\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (8)$$

Даламбер белгісі бойынша $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ қатары кез келген x нүктесі үшін жинақты болғандықтан, $\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\to 0$, $k\to\infty$, олай болса (8) теңдіктен $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ аламыз. Сонымен

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \qquad x\in(-\infty;+\infty). \qquad (9)$$

Келесі теңдіктер үшін жоғарыдағы теорема шартының орындалатынын тексеріңіздер:

$$\sin x = \sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x\in(-\infty;+\infty). \qquad (10)$$

$$\cos x = \sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x\in(-\infty;+\infty). \qquad (11)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad |x|<1. \qquad (12)$$

Дербес жағдайда, егер $\alpha=-1$ болса, онда

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad |x|<1; \qquad (12')$$

ал егер мұнда $x=-x$ деп алсақ, онда

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,\quad |x|<1; \tag{12″}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k},\quad x\in(-1;1]. \tag{13}$$

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad x\in[-1;1] \tag{14}$$

$$\arcsin x=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)},\quad x\in[-1;1] \tag{15}$$

мұнда $(2k-1)!!=1\cdot3\cdot5\ldots\cdot(2k-1)$, $(2k)!!=2\cdot4\cdot\ldots\cdot2k$.

$$\operatorname{s}hx=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ x\in(-\infty;+\infty);\quad \operatorname{c}hx=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!},\quad x\in(-\infty;+\infty). \tag{16}$$

§12.6. Фурье қатары

Функцияны дәрежелік қатарға жіктеудің кейбір мәселелері де бар. Біріншіден (қалдық мүшелерге қойылатын белгілі бір талаптар орындалса), дәрежелік қатарға ақырсыз рет дифференциалданатын функцияны ғана жіктеуге болады, сондықтан үзіліс нүктелері бар немесе дифференциалданбайтын функцияларды дәрежелік қатарға жіктеуге болмайтыны түсінікті. Екіншіден, дәрежелік функциялардан құралған $\{1,x,x^2,\ldots,\ldots\}$ базис ортогональ емес, яғни бұл базистегі түрлі функциялар бір-бірімен белгілі бір мағынада «перпендикуляр емес», сондықтан функцияның мұндай базистегі координаттарын табу процедуралары күрделі есептеулерді қажет етеді.

Осындай мәселелерден тригонометриялық функциялардан тұратын базис құтқарады. Функцияның тригонометриялық

қатарларға жіктелуі электротехникада, акустикада, жылу техникаларында және т.б. салаларда қолданылады.

12.6.1 Функциялар кеңістігіндегі скаляр көбейтінді. «Ортогональ функциялар», «екі функцияның арақашықтығы» сияқты ұғымдарды анықтау үшін, алдымен функциялардың скаляр көбейтіндісі ұғымын анықтап алайық.

Біз келесі анықтамадағы **Дирихле шартын** қанағаттандыран функцияларды ғана қарастырамыз.

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы:

а) $[a;b]$ кесіндіде шенелген болса;

б) $[a;b]$ кесіндісі әрбір Δ_i бөлікте $f(x)$ функциясы монотон ды болатындай саны ақырлы Δ_i аралықтарына бөлінсе,

онда $f(x)$ **функциясы** $[a;b]$ **кесіндісінде Дирихле шартын қанағаттандырады** дейді.

Дирихле шартын қанағаттандыратын функциялардың келесі қасиеттерін келтіреміз (дәлелдеуін, мысалы [2] қараңыз).

Дирихле шартын қанағаттандыратын функция:

1°. $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз немесе тек қана 1-і текті үзілісті болады;

2°. Мұндай функциялардың қосындысы, айырымы және көбейтіндісі $[a;b]$ кесіндісінде интегралданады.

Анықтама. $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының $[a;b]$ кесіндісіндегі **скаляр көбейтіндісі деп,** осы функциялардың көбейтіндісінің $[a;b]$ кесіндісі бойынша анықталған интегралын айтады және оны келесі түрде белгілейді: $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$

Бұл анықталған скаляр көбейтінді векторлардың скаляр көбейтіндісінің барлық қасиеттеріне ие (көз жеткізіңіз).

Анықтама. Егер $y = f(x)$ пен $y = g(x)$ функцияларының $[a;b]$ кесіндісіндегі скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда олар осы кесіндіде ***ортогональ*** деп аталады:

$$(f, g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \perp g \quad \text{(символдық белгілеуі).}$$

Анықтама. Егер келесі нөл емес функциялар жүйесінің:

$$\{f_1(x), f_2(x), ...\} \tag{2}$$

кез келген әртүрлі екеуінің $[a;b]$ кесіндісіндегі скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда бұл жүйені $[a;b]$ кесіндісінде **ортогональ жүйе** деп атайды: $(f_i, f_j) = 0, \ i \neq j \quad \Leftrightarrow \quad (2)$ – ортогональ жүйе.

R^3 үш өлшемді кеңістікте векторлардың ортогональ жүйесі (базис) тек үш вектордан, жалпы алғанда R^n кеңістігінде n вектордан құралса, функциялар кеңістігінде ортогональ жүйелерді құрайтын функциялардың саны ақырсыз. Сондықтан мұндай ***функциялар кеңістігін ақырсыз өлшемді*** деп есептеуге болады.

Вектордың модулі түсінігінің аналогы – функцияның кесіндідегі нормасын (мөлшерін) анықтайық.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндідегі **нормасы (мөлшері)** деп, $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ шамасын айтады.

Анықтама. $y = f(x)$ пен $y = g(x)$ **функцияларының** $[a;b]$ **кесіндісіндегі арақашықтығы** деп, келесі шаманы айтады

$$d(f; g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}.$$

Бұл анықтама кеңістіктегі нүктелер арасындағы қашықтықтың барлық аксиомаларын қанағаттандырады.

Енді ортогонал функциялар жүйесінің негізгі мысалын қарастырайық.

12.6.2. Тригонометриялық функциялар жүйесі және $[-\pi,\pi]$ кесіндідегі тригонометриялық қатар.

Анықтама. Келесі

$$\left\{\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\right\}, \qquad (3)$$

функциялар жүйесін $[-\pi,\pi]$ кесіндідегі **тригонометриялық функциялар жүйесі** деп атайды.

1-теорема. Тригонометриялық функциялар жүйесі $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде ортогональ жүйе және келесі теңдіктер орындалады:

$$\|\sin kx\|^2 = \|\cos kx\|^2 = \pi, \quad k = 0,1,2,..., \quad \left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

▼ (3) функциялар жүйесінің $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде ортогональдығын дәлелдеу үшін келесі теңдікті пайдаланып есептейміз: $\cos kx\cos mx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+k)x + \cos(m-k)x\right]$, $(m \neq k)$.

$$(\cos kx,\cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cdot\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+k)x+\cos(m-k)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+k)}\sin(m+k)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m-k)}\sin(m-k)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Осы сияқты, $\sin kx\sin mx = \frac{1}{2}\left[\cos(k-m)x - \cos(k+m)x\right]$,

$\sin kx\cos mx = \frac{1}{2}\left[\sin(k+m)x + \sin(k-m)x\right]$ теңдіктерін пайдалана отырып, $(\sin kx,\sin mx) = 0$, $k \neq m$ және $(\sin kx,\cos mx) = 0$ аламыз.

Ал $\left(\frac{1}{2},\cos kx\right) = 0$, $\left(\frac{1}{2},\sin kx\right) = 0$ теңдіктерін тексеру қиын емес.

Сонымен (3) жүйенің кез келген әртүрлі функциялары ортогональ, олай болса (3) жүйе – ортогональ жүйе.

(4) теңдіктерді де тікелей тексеруге болады (тексеріңіздер).

▲

Анықтама. Келесі функциялық қатар

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots \quad =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5}$$

тригонометриялық қатар, ал a_k мен b_k оның коэффициенттері деп аталады.

2-теорема. Егер (5) қатардың коэффициенттерінен құрылған қатарлар абсолют жинақты болса, онда (5) тригонометриялық қатар $(-\infty, +\infty)$ аралығында **бірқалыпты жинақты;** оның қосындысы $S(x)$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығында **үзіліссіз** және 2π **периодты**. Қатардың коэффициенттері $S(x)$ арқылы келесі формулалармен өрнектеледі:

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos kx \, dx, & k = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin kx \, dx, & k = 1, 2, \ldots \quad . \end{cases} \tag{6}$$

▼ Шарт бойынша ($\dfrac{|a_0|}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + |b_k|\right) = \dfrac{|a_0|}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$)

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + |b_k|\right) \tag{7}$$

сандық қатары жинақты, ал $|\cos kx| \le 1$ және $|\sin kx| \le 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Демек, (7) қатар (5) қатарды мажорлайды (жоғарыдан шенейді).

Олай болса Вейерштрасс белгісі бойынша (5) қатар $(-\infty,+\infty)$ аралығында бірқалыпты жинақты. Бұл қатардың мүшелері $(-\infty,+\infty)$ аралығында үзіліссіз болғандықтан, 1° қасиет бойынша (5) қатардың қосындысы $S(x)$ функциясы $(-\infty,+\infty)$ аралығында үзіліссіз.

Тригонометриялық қатардың барлық дербес қосындыларының периодтары 2π болғандықтан, шекке өтсек, онда $S(x)$ қосындысының да периоды 2π болады.

(6) формулаларды дәлелдеу үшін, (5) қатардың барлық мүшелерін $\cos nx$ -ке көбейтеміз (n – бекітілген сан):

$$S(x)\cdot\cos nx=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx\cos nx+b_k\sin x\cos nx\right). \qquad (8)$$

(7) қатар (8) қатарды да мажорлайтындықтан, (8) қатар $(-\infty,+\infty)$ аралығында бірқалыпты жинақты, сондықтан

$$\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos nxdx=a_0\left(\frac{1}{2},\cos nx\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k(\cos kx,\cos nx)+b_k(\sin kx,\cos nx)\right].$$

1-теорема бойынша бұл қатардағы $a_n(\cos nx,\cos nx)$ мүшесінен басқа мүшелерінің бәрі нөлге тең. Ал (4) формуладан

$$\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos nxdx=a_n\left(\cos nx,\cos nx\right)=a_n\left\|\cos nx\right\|^2=a_n\pi$$

немесе $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos nxdx$ теңдігі шығады.

(6) формуланы a_0 мен b_k коэффициентері үшін өз беттеріңізше дәлелдеңіздер. ▲

12.6.3. 2π **периодты Фурье қатары.** Берілген $y=f(x)$ функциясын тригонометриялық қатар арқылы жазу керек. Ол үшін (6) формулаларды пайдаланайық.

Анықтама. $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде анықталған $y=f(x)$ функциясының **Фурье қатары** деп, коэффициенттері

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, & k=0,1,2,... \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, & k=1,2,... \end{cases} \tag{9}$$

формулаларымен есептелген келесі тригонометриялық қатарды айтады:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx\cdot\cos kx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx\cdot\sin kx\right).$$

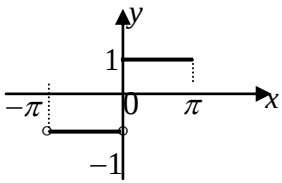
(9) коэффициенттерді **Фурье коэффициенттері** деп атайды.

Келесі теорема «Қандай жағдайда, функцияның Фурье қатарының қосындысы осы функцияның өзіне тең болады?» деген сұраққа жауап береді.

3-теорема. 2π периодты $y=f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде Дирихле шартын қанағаттандырса, онда осы функцияның Фурье қатары x-тің кез келген мәнінде жинақты және оның $S(x)$ қосындысы $f(x)$ үзіліссіз болатын нүктелерде осы $f(x)$ функциясына тең. Ал $f(x)$ функциясының x_0 үзіліс нүктесінде $S(x_0)$ мәні $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі сол және оң жақ шектерінің арифметикалық ортасына тең: $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Ескерту. Егер функция тек $(-\pi,\pi]$ аралығында ғана берілсе, онда оны барлық сан өсіне 2π периодты етіп жеткізе анықтап алып, содан соң ол функцияны Фурье қатарына жіктеуге болады.

Мысал. Функция 2π периодты және оның $(-\pi,\pi]$ аралығындағы түрі (86-сурет): $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\pi],\\ -1, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$ Осы функцияны Фурье қатарына жіктеу керек.



86-сурет

▼ Есептейміз: $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot dx\right)=0;$

$k>0$ үшін:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{\pi}^{0}(-1)\cos kxdx+\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\cos kxdx\right]=-\frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin k\pi}{k\pi}\Big|_{0}^{\pi}=0;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\sin kxdx+\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\sin kxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

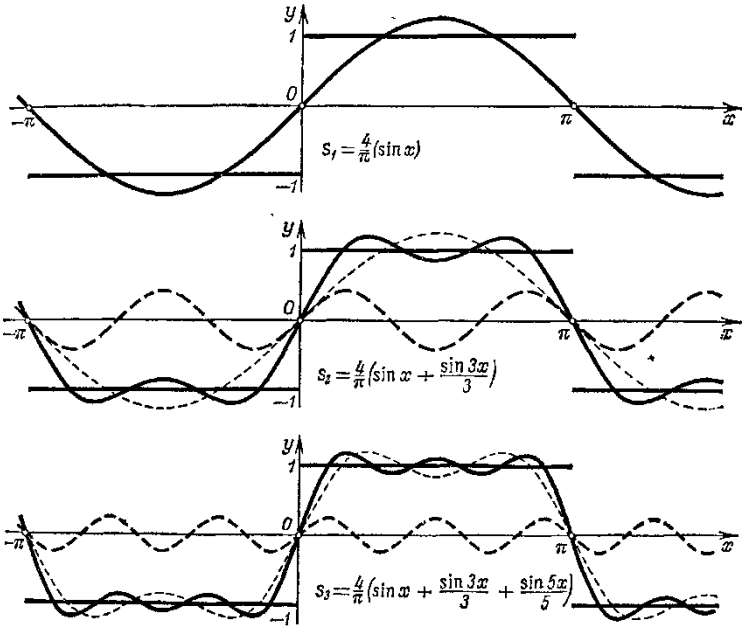
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}-\frac{\cos(-k\pi)}{k}-\frac{\cos k\pi}{k}+\frac{1}{k}\right)=\frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k)=\frac{2\left[1-(-1)^k\right]}{\pi k}=$$

$$=\begin{cases}0, & k-\text{жуп болса},\\ \dfrac{4}{\pi k}, & k-\text{так болса}.\end{cases}$$

Бұл коэффициенттерді тригонометриялық қатарға қойсақ,

$$S(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

аламыз. Бұл қосынды $x_k = \pi k$, $k \in Z$, нүктелерінен (үзіліс нүктелерінен) басқа барлық нүктелерде $f(x)$ функциясымен беттеседі. Ал осы үзіліс нүктелерінде $S(x_k) = 0$. 87-суретте тұтас сызықпен $f(x)$ графигі және Фурье қатарының алғашқы үш дербес қосындысы көрстілген.



87-сурет

12.6.4. Фурье қатарлары (жалпы жағдай). 2ℓ периодты функциялар үшін $[-\ell, \ell]$ кесіндісінде келесі тригонометриялық функциялар жүйесі

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{\pi x}{\ell}, \cos\frac{2\pi x}{\ell}, \sin\frac{2\pi x}{\ell}, \ldots\right\}$$

ортогональ жүйе болады (тексеріңіз). Олардың тригонометриялық қатары келесі түрде жазылады:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{\ell}+b_1\sin\frac{\pi x}{\ell}+a_2\cos\frac{2\pi x}{\ell}+b_2\sin\frac{2\pi x}{\ell}+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right). \qquad (10)$$

Егер $y=f(x)$ функциясы үшін (10) тригонометриялық қатардың коэффициенттері келесі формулаларымен есептелсе:

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\dfrac{\pi kx}{\ell}dx, \quad k=0,1,2,\ldots \\ b_k=\dfrac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\dfrac{\pi kx}{\ell}dx, \quad k=1,2,\ldots \end{cases} \qquad (11)$$

онда ол қатар $f(x)$ функциясының $[-\ell,\ell]$ **кесіндідегі Фурье қатары** деп аталады.

Бұл жағдайда 3-теоремадағы $[-\pi,\pi]$ кесіндісін $[-\ell,\ell]$ кесіндісіне ауыстыра отырып тұжырым жасауға болады. Ал оның дәлелдеуі $t=\dfrac{\pi x}{\ell}$ ауыстыруы арқылы дәл 3-теорема дәлелдемесіндей болады.

Мынадай үш қасиетті біз дәлелдегенбіз:

1°. Егер $f(x)$ функциясының периоды $T=a$ және ол $[0,a]$ кесіндісінде интегралданса, онда кез келген λ саны үшін

$$\int\limits_0^a f(x)dx=\int\limits_{\lambda}^{a+\lambda}f(x)dx. \qquad (12)$$

2°. Егер $f(x)$ функциясы $[-a;a]$ кесіндісінде жұп болса, онда

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx. \qquad (13)$$

3°. Егер $f(x)$ функциясы $[-a;a]$ кесіндісінде тақ болса, онда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad (14)$$

Ескерту. (12) теңдік бойынша (11) формулаларды

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{\lambda}^{\lambda+2\ell} f(x)\cos\frac{\pi kx}{\ell}dx,\ k = 0,1,2,...$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int_{\lambda}^{\lambda+2\ell} f(x)\sin\frac{\pi kx}{\ell}dx,\ k = 1,2,... \qquad (11')$$

түрінде жазуға болады.

12.6.5. Жұп және тақ функциялардың Фурье қатарлары.

4-теорема. $T = 2\ell$ периодты $y = f(x)$ функциясы $[-\ell, \ell]$ кесіндісінде Дирихле шартын қанағаттандырсын.

а) Егер $f(x)$ жұп функция болса, онда оның Фурье қатары

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi kx}{\ell},$$

$$(b_k \equiv 0),\quad a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi kx}{\ell}dx,\ k = 0,1,2,... . \qquad (15)$$

түрінде болады;

в) егер $f(x)$ тақ функция болса, онда оның Фурье қатары

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi kx}{\ell},$$

$$(a_k \equiv 0),\quad b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi kx}{\ell}dx,\quad k = 1,2,..., \qquad (16)$$

түрінде жазылады.

▼ Екі жұп функциялардың көбейтіндісі де, екі тақ функциялардың көбейтіндісі де – жұп функция, ал жұп пен тақ функциялардың көбейтіндісі тақ функция болатынын ескерсек, (11)

формулалардан (13) пен (14) қасиеттер бойынша теореманың дұрыстығы шығады. ▲

(15) пен (16) теңдіктерді сәйкес, **косинус және синус бойынша жіктелулер** дейді.

Егер $y = f(x)$ функциясы тек $[0, \ell]$ кесіндісінде анықталса, онда оны қосындысы $2l$ периодты функция болатын тригонометриялық қатарға ақырсыз көп тәсілдермен жіктеуге болады. Олардың ішінен екі негізгі әдісті қарастырамыз.

а) $f(x)$ функциясын $[-\ell, 0]$ кесіндісінде $f(x) = f(-x)$ теңдігі орындалатындай, яғни алынған функция $[-\ell, \ell]$-де жұп болатындай етіп жалғастырамыз. Содан соң оны бүкіл сан өсіне 2ℓ периодты етіп созамыз. Нәтижеде алынған функция (15) формула бойынша, Фурье қатарына косинустар бойынша жіктеледі.

в) $f(x)$ функциясын $[-\ell, 0]$ кесіндісінде тақ болатындай етіп жалғастырамыз: $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$. Содан соң оны бүкіл сан өсіне 2ℓ периодты болатындай етіп созамыз. Алынған функция (16)-формула арқылы синустар бойынша Фурье қатарына жіктеледі.

Мысал. $[0,1]$ кесіндісінде $f(x) = x$ функциясы берілген. Осы функцияны Фурье қатарына екі тәсілмен жіктейік:

а) косинустар бойынша; **б)** синустар бойынша.

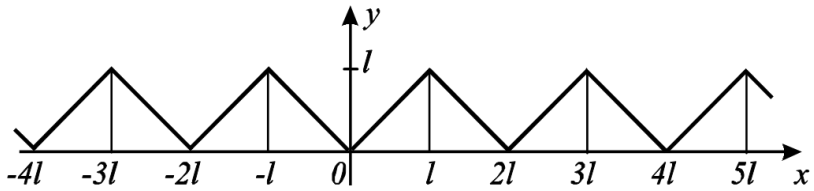
▼ **а)** Берілген функцияны $[-1,1]$ кесіндісінде жұп болатындай етіп жалғастырсақ $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1], \\ -x, & x \in (-1;0) \end{cases}$ аламыз. Бұл функцияны $(-\infty, +\infty)$ аралығында $2l = 2$ периодты етіп созамыз (88-сурет). Осылай алынған функция жұп болғандықтан $b_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots$.

Енді a_k коэффициенттерін есептейік. Егер $k = 0$ болса, онда $a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x dx = x^2\Big|_0^1 = 1$ аламыз.

Ал егер $k > 0$ болса, онда

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\pi kx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ \cos\pi kx dx = d\vartheta & \vartheta = \dfrac{\sin\pi kx}{\pi k} \end{array} \right| =$$

$$= 2\left(x\frac{\sin\pi kx}{\pi k}\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi k}\int_0^1 \sin\pi kx dx \right) = \frac{2}{\pi^2 k^2}\cos\pi kx\Big|_0^1 =$$



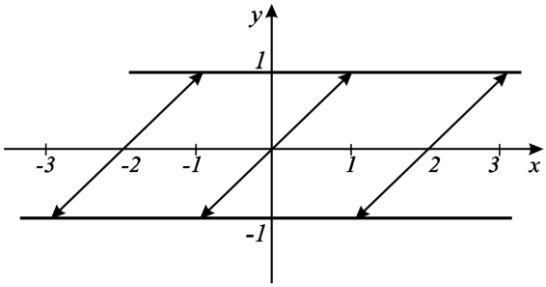
88-сурет

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2}\left(\cos\pi k - 1\right) = \frac{2\left[(-1)^k - 1\right]}{\pi^2 k^2} = \begin{cases} 0, & k - \text{жуп сан}, \\ -\dfrac{4}{\pi^2 k^2}, & k - \text{так сан}. \end{cases}$$

Алынған коэффициенттерді (15) қатарға қоямыз:

$$S_{ж}(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \ldots \right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$$

б) Енді функцияны (13) арқылы синустар бойынша жіктейік. Берілген функцияны [-1,1] аралығында тақ болатындай етіп жалғастырсақ $f(x) = x,\ \ x \in (-1;1]$ аламыз. Алынған функцияны $(-\infty,\ +\infty)$ аралығында $2l = 2$ периодты етіп созамыз (89-сурет).



89-сурет

Бұл фунция тақ болғандықтан $a_k = 0,\ k = 0,1,2,\ldots$. Осы функцияның b_k Фурье коэффициентін табамыз:

$$b_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin k\pi x dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ \sin \pi kx dx = d\vartheta, & \vartheta = -\dfrac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| =$$

$$= 2\left(-x\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\bigg|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x dx \right) =$$

$$= 2\left(\frac{-\cos k\pi}{k\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi x\bigg|_0^1 \right) = \frac{-2\cdot(-1)^k}{k\pi} = \frac{2\cdot(-1)^{k-1}}{k\pi}\ .$$

Алынған коэффициентті (16) қатарға қоямыз:

$$S_T(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x = \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots \right).$$

$S_{жс}(x)$ пен $S_T(x)$ функцияларының графиктерінің айырмашылығы елеулі болғанымен, $[0,1)$ аралығында $S_{жс}(x) = S_T(x)$ болатынын көреміз.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Жинақты және жинақсыз сандық қатарлар анықтамасын келтіріңіз. Жинақты қатардың қосындысы, мысал.
2. Қатардың жинақтылығының қажетті шартын жазыңыз. Мысал арқылы аталған шарттың орындалуы қатардың жинақталуына жеткіліксіз болатынын көрсетіңіз.
3. Қатардың ақырлы санды мүшелерін алып тастағаннан оның жинақтылығы (немесе жинақсыздығы) өзгермейтінін көрсетіңіз. Қатардың n-ші қалдығы деген не?
4. Мүшелері теріс емес қатардың дербес қосындылар тізбегінің шегі бар болатынын көрсетіңіз (ол шек ақырлы немесе плюс ақырсыздық).
5. Геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған қатарды жинақтылыққа зерттеңіз.
6. Жинақталатын қатарларға қолданылатын амалдарды жазып көрсетіңіз және дәлелдеңіз.
7. Мүшелері оң қатарларды салыстыру туралы теореманы дәлелдеңіз, мысал келтіріңіз.
8. Мүшелері оң қатарлардың жинақтылығының Даламбер белгісін дәлелдеңіз, мысал келтіріңіз.
9. Мүшелері оң қатарлардың жинақтылығының Коши белгісін дәлелдеңіз, мысал келтіріңіз.
10. Қатарлардың жинақтылығы туралы Кошидің интегралдық белгісін дәлелдеңіз, мысал келтіріңіз.
11. Дирихле қатарын: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ жинақтылыққа зерттеңіз.
12. Абсолют жинақты және шартты жинақты қатарлардың анықтамасын беріңіз және оларға мысалдар келтіріңіз.
13. Абсолют жинақты қатардың жинақты болатынын дәлелдеңіз.
14. Лейбниц қатарының жинақты болатыны туралы теореманы дәлелдеңіз.

15. Функциялық қатардың жинақталу аймағы деген не? Мысал келтіріңіз.
16. Функциялық қатардың берілген аралықта ***бірқалыпты жинақтылығының*** анықтамасын беріңіз. Мысал.
17. Функциялық қатардың абсолют және бірқалыпты жинақтылығының Вейерштрасс белгісін тұжырымдаңыз және мысал келтіріңіз.
18. Бірқалыпты жинақты функциялық қатарлардың негізгі қасиеттерін тұжырымдаңыз.
19. Дәрежелік қатарға арналған Абель теоремасын дәлелдеңіз.
20. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусін есептеуге арналған формулаларын қорытып шығарыңыз. Мысал келтіріңіз.
21. Дәрежелік қатардың негізгі қасиеттерін атаңыз.
22. Функцияны Тейлор қатарына жіктеу туралы теореманы тұжырымдаңыз. Кейбір қажетті элементар функциялардың Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
23. Берілген кесіндіде Дирихле шартын қанағаттандыратын функцияның анықтамасын және оның қасиеттерін тұжырымдаңыз. Функциялардың кесіндідегі скаляр көбейтіндісі, нормасы деген не?
24. Тригонометриялық функциялардың нормаларына қатысты орындалатын теңдіктерді жазыңыз және оларды дәлелдеңіз.
25. Фурье қатары деген не? Фурье қатарының коэффициенттерінің формулаларын қорытып шығарыңыз.
26. Функцияның Фурье қатарына жіктелуінің жеткілікті шартын тұжырымдаңыз және мысал келтіріңіз.
27. Функцияның $[-l,l]$ кесіндідегі Фурье қатарын жазыңыз.
28. Жұп және тақ функциялардың Фурье қатарларын жазып көрсетіңіз және оларға мысалдар келтіріңіз.

Көп айнымалды функциялар
9.1–ҮТ

1. Көрсетілген функциялардың анықталу аймағын табу керек.

1.1. $z = \dfrac{3xy}{(2x-5y)}$.

1.2. $z = \arcsin(x-y)$.

1.3. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

1.4. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

1.5. $z = \dfrac{2}{6 - x^2 - y^2}$.

1.6. $z = \sqrt{y^2 + x^2 - 5}$.

1.7. $z = \arccos(x+y)$.

1.8. $z = \dfrac{3x+y}{2-x+y}$.

1.9. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

1.10. $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$.

1.11. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$.

1.12. $z = \dfrac{4xy}{x-3y+1}$.

1.13. $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$.

1.14. $z = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

1.15. $z = \ln(y^2 - x^2)$.

1.16. $z = \dfrac{x^3 y}{3+x-y}$.

1.17. $z = \arccos(x+2y)$.

1.18. $z = \arcsin(2x-y)$.

1.19. $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

1.20. $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

1.21. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$.

1.22. $z = \dfrac{4x + y}{2x - 5y}$.

1.23. $z = \dfrac{\sqrt{3x - 2y}}{x^2 + y^2 + 4}$.

1.24. $z = \dfrac{5}{4 - x^2 - y^2}$.

1.25. $z = \ln(2x - y)$.

1.26. $z = \dfrac{7x^3 y}{x - 4y}$.

1.27. $z = \sqrt{1 - x - y}$.

1.28. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

1.29. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 6}$.

1.30. $z = \dfrac{4xy}{x^2 - y^2}$.

2. Келесі функциялардың дербес туындылары мен дербес дифференциалдарын табу керек.

2.1. $z = \ln\left(y^2 - e^{-x}\right)$.

2.2. $z = \arcsin\sqrt{xy}$.

2.3. $z = \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^2\right)$.

2.4. $z = \cos\left(x^3 - 2xy\right)$.

2.5. $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$.

2.6. $z = \operatorname{tg}\left(x^3 + y^2\right)$.

2.7. $z = \operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$.

2.8. $z = e^{-x^2 + y^2}$.

2.9. $z = \ln\left(3x^2 - y^4\right)$.

2.10. $z = \arccos\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2.11. $z = \operatorname{arcctg}\left(xy^2\right)$.

2.12. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

2.13. $z = \sin\sqrt{x - y^3}$.

2.14. $z = \operatorname{tg}\left(x^3 y^4\right)$.

2.15. $z = \operatorname{ctg}(3x - 2y)$.

2.16. $z = e^{2x^2 - y^5}$.

2.17. $z = \ln\left(\sqrt{xy} - 1\right)$.

2.18. $z = \arcsin\left(2x^3 y\right)$.

2.19. $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)$.

2.20. $z = \cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right)$.

2.21. $z = \sin\dfrac{x + y}{x - y}$.

2.22. $z = \operatorname{tg}\dfrac{2x - y^2}{x}$.

2.23. $z = \operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x - y}}$.

2.24. $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2.25. $z = \ln\left(3x^2 - y^2\right)$.

2.26. $z = \arccos\left(x - y^2\right)$.

2.27. $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$.

2.28. $z = \cos\dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$.

2.29. $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x + y}}$.

2.30. $z = e^{-\left(x^3 + y^3\right)}$.

3. Берілген $f(x,y,z)$ функциясының $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктедегі дербес $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ туындыларының мәндерін үтірден соң, екі таңбаға дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

3.1. $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(0,-1,1)$.

(Жауабы: $f'_x(0,-1,1)=0$, $f'_y(0,-1,1)=1$, $f'_z(0,-1,1)=1$**).**

3.2. $f(x,y,z)=\ln\left(x+\dfrac{y}{2z}\right)$, $M_0(1,2,1)$.

(Жауабы: $f'_x(1,2,1)=0.5$, $f'_y(1,2,1)=0.25$, $f'_z(1,2,1)=-0.25$**).**

3.3. $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{6},1,2\right)$.

(Жауабы: $f'_x(\dfrac{\pi}{6},1,2)=0.87$, $f'_y(\dfrac{\pi}{6},1,2)=-0.35$, $f'_z\left(\dfrac{\pi}{6},1,2\right)=-0.17$**).**

3.4. $f(x,y,z)=\ln\left(x^3+2y^3-z^3\right)$, $M_0(2,1,0)$.

(Жауабы: $f'_x(2,1,0)=1.2$, $f'_y(2,1,0)=0.6$, $f'_z(2,1,0)=0$**).**

3.5. $f(x,y,z)=x/\sqrt{y^2+z^2}$, $M_0(1,0,1)$.

(Жауабы: $f'_x(1,0,1)=1$, $f'_y(1,0,1)=0$, $f'_z(1,0,1)=-1$**).**

3.6. $f(x,y,z)=\ln\cos\left(x^2y^2+z\right)$, $M_0\left(0,0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(Жауабы: $f_x'\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad f_y'\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad f_z'\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)=-1$**).**

3.7. $f\left(x,y,z\right)=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3},\quad M_0(3,4,2)$**.**

(Жауабы: $f_x'(3,4,2)=1,\quad f_y'(3,4,2)=8,\quad f_z'(3,4,2)=12$**).**

3.8. $f\left(x,y,z\right)=\operatorname{arctg}\left(xy^2+z\right),\quad M_0\left(2,1,0\right)$**.**

(Жауабы: $f_x'(2,1,0)=0.2,\quad f_y'\left(2,1,0\right)=0.8,\quad f_z'(2,1,0)=0.2$**).**

3.9. $f\left(x,y,z\right)=\arcsin\left(\frac{x^2}{y}-z\right),\quad M_0\left(2,5,0\right)$**.**

(Жауабы: $f_x'(2,5,0)=1.33,\ f_y'\left(2,5,0\right)=-0.27,\quad f_z'\left(2,5,0\right)=-1.67$**).**

3.10. $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{z}\sin\left(\frac{y}{x}\right),\ M_0\left(2,0,4\right).$

(Жауабы: $f_x'(2,0,4)=0,\quad f_y'(2,0,4)=1,\ f_z'(2,0,4)=0$**).**

3.11. $f\left(x,y,z\right)=\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}},\ M_0\left(-1,1,0\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(-1,1,0\right)=1,\ f_y'\left(-1,1,0\right)=1,\ f_z'\left(-1,1,0\right)=0$**).**

3.12. $f\left(x,y,z\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{xz}{y^2}\right),\ M_0\left(2,1,1\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(2,1,1\right)=0.2,\ f_y'\left(2,1,1\right)=-0.8,\ f_z'\left(2,1,1\right)=0.4$**).**

3.13. $f(x,y,z)=\ln\sin\left(x-2y+\dfrac{z}{4}\right),\ M_0\left(1;\dfrac{1}{2};\pi\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(1;\dfrac{1}{2};\pi\right)=1,\ f_y'\left(1;\dfrac{1}{2};\pi\right)=-2,\ f_z'\left(1;\dfrac{1}{2};\pi\right)=0,25$**).**

3.14. $f(x,y,z)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z},\ M_0(1,1,2).$

(Жауабы: $f_x'(1,1,2)=-1.5,\ f_y'(1,1,2)=-1,\ f_z'(1,1,2)=1.25$**).**

3.15. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}},\ M_0(1,2,2).$

(Жауабы: $f_x'(1,2,2)=-1,\ \ f_y'(1,2,2)=-2,\ f_z'(1,1,2)=2$ **).**

3.16. $f(x,y,z)=\ln\left(x+y^2\right)-\sqrt{x^2-z^2},\ M_0(5,2,3).$

(Жауабы: $f_x'(5,2,3)=-1.14,\ f_y'(5,2,3)=0.44,\ f_z'(5,2,3)=0.75$**).**

3.17. $f(x,y,z)=\sqrt{z}x^y,\ M_0(1,2,4).$

(Жауабы: $f_x'(1,2,4)=4,\ \ f_y'(1,2,4)=0,\ f_z'(1,2,4)=0.25$ **).**

3.18. $f(x,y,z)=-\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ M_0\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=0.25,\ f_y'\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=0.25,$

$f_z'\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-0.5$**).**

3.19. $f(x,y,z)=\ln\left(x^3+\sqrt[3]{y}-z\right),\ M_0(2,1,8).$

(Жауабы: $f'_x(2,1,8)=12,\ f'_y(2,1,8)=0.33,\ f'_z(2,1,8)=-1$**).**

3.20. $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^4+y^2},\ M_0(2,3,25).$

(Жауабы: $f'_x(2,3,25)=-1.28,\ f'_y(2,3,25)=-0.24,\ f'_z(2,3,25)=0.04$**).**

3.21. $f(x,y,z)=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z},\ M_0(3,2,1).$

(Жауабы: $f'_x(3,2,1)=2.7,\ f'_y(3,2,1)=0.4,\ f'_z(3,2,1)=0.1$**).**

3.22. $f(x,y,z)=\ln\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z\right),\ M_0(1,1,1).$

(Жауабы: $f'_x(1,1,1)=0.2,\ f'_y(1,1,1)=0.25,\ f'_z(1,1,1)=-1$**).**

3.23. $f(x,y,z)=-\dfrac{2x}{\sqrt{y^2+z^2}},\ M_0(3,0,1).$

(Жауабы: $f'_x(3,0,1)=-2,\ f'_y(3,0,1)=0,\ f'_z(3,0,1)=6$**).**

3.24. $f(x,y,z)=ze^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}},\ M_0(0,0,1).$

(Жауабы: $f'_x(0,0,1)=0,\ f'_y(0,0,1)=0,\ f'_z(0,0,1)=1$**).**

3.25. $f(x,y,z)=\dfrac{\sin(x-y)}{z},\ M_0\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\sqrt{3}\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)=0.5,\ f_y'\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)=-0.5,\ f_z'\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)=-0.17$**).**

3.26. $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{z}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right),\ M_0\left(4,1,4\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(4,1,4\right)=0.17,\ f_y'\left(4,1,4\right)=0.33,\ f_z'\left(4,1,4\right)=0.27$**).**

3.27. $f\left(x,y,z\right)=\frac{xz}{x-y},\ M_0\left(3,1,1\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(3,1,1\right)=-0,25,\ f_y'\left(3,1,1\right)=0.75,\ f_z'\left(3,1,1\right)=1,5$**).**

3.28. $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z},\ M_0\left(3,4,\frac{\pi}{2}\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(3,4,\frac{\pi}{2}\right)=0.6,\ f_y'\left(3,4,\frac{\pi}{2}\right)=0,8,\ f_z'\left(3,4,\frac{\pi}{2}\right)=2,4$**).**

3.29. $f\left(x,y,z\right)=ze^{-xy},\ M_0\left(0,1,1\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(0,1,1\right)=-1,\ \ f_y'\left(0,1,1\right)=0,\ \ f_z'\left(0,1,1\right)=1$**).**

3.30. $f\left(x,y,z\right)=\arcsin\left(x\sqrt{y}\right)-yz^2,\ M_0\left(0,4,1\right).$

(Жауабы: $f_x'\left(0,4,1\right)=2,\ \ f_y'\left(0,4,1\right)=-1,\ \ f_z'\left(0,4,1\right)=-8$**).**

4. Көрсетілген функциялардың толық

дифференциалын табу керек.

4.1. $z = 2x^3y - 4xy^5.$

4.2. $z = x^2 y \sin x - 3y.$

4.3. $z = \text{arctgx} + \sqrt{y}.$

4.4. $z = \arcsin(xy) - 3xy^2.$

4.5. $z = 5xy^4 + 2x^2y^7.$

4.6. $z = \cos\left(x^2 - y^2\right) + x^3.$

4.7. $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right).$

4.8. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4.$

4.9. $z = \arcsin(x + y).$

4.10. $z = \text{arctg}(2x - y).$

4.11. $z = 7x^3y - \sqrt{xy}.$

4.12. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}.$

4.13. $z = \ell^{x+y-4}.$

4.14. $z = \cos(3x + y) - x^2.$

4.15. $z = \text{tg}\dfrac{x+y}{x-y}.$

4.16. $z = \text{ctg}\dfrac{y}{x}.$

4.17. $z = xy^4 - 3x^2y + 1.$

4.18. $z = \ln(x + xy - y^2).$

4.19. $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3.$

4.20. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}.$

4.21. $z = \arcsin\dfrac{x+y}{x}.$

4.22. $z = \text{arctg}(x - y).$

4.23. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}.$

4.24. $z = y^2 - 3xy - x^4.$

4.25. $z = \arccos(x + y).$

4.26. $z = \ln\left(y^2 - x^2 + 3\right).$

4.27. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x.$ **4.28.** $z = 7x - x^3y^2 + y^4.$

4.29. $z = e^{y-x}.$ **4.30.** $z = \operatorname{arctg}(2x - y).$

5. Күрделі $u = u(x, y), \quad x = x(t), \; y = y(t)$ функциясының $t = t_0$ нүктедегі туындысының мәнін үтірден соң, екі таңбаға дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

5.1. $u = e^{x-2y}, \; x = \sin t, \; y = t^3, \; t_0 = 0.$ **(Жауабы: 1).**

5.2. $u = \ln\left(e^x + e^{-y}\right), \; x = t^2, \; y = t^3, \; t_0 = -1.$ **(Жауабы: -2,5).**

5.3. $u = y^x, \; x = \ln(t-1), \; y = e^{\frac{t}{2}}, \; t_0 = 2.$ **(Жауабы: 1).**

5.4. $u = e^{y-2x+2}, \; x = \sin t, \; y = \cos t, \; t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$ **(Жауабы: -1).**

5.5. $u = x^2e^y, \; x = \cos t, \; y = \sin t, \; t_0 = \pi.$ **(Жауабы: -1).**

5.6. $u = \ln\left(e^x + e^y\right), \; x = t^2, \; y = t^3, \; t_0 = 1.$ **(Жауабы: 2,5).**

5.7. $u = x^y, \; x = e^t, \; y = \ln t, \; t_0 = 1.$ **(Жауабы: 1).**

5.8. $u = e^{y-2x}, \; x = \sin t, \; y = t^3, \; t_0 = 0.$ **(Жауабы: -2).**

5.9. $u = x^2e^{-y}, \; x = \sin t, \; y = \sin^2 t, \; t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$ **(Жауабы: 0).**

5.10. $u = \ln\left(e^{-x} + e^y\right), \; x = t^2, \; y = t^3, \; t_0 = -1.$ **(Жауабы: 2,5).**

5.11. $u = e^{y-2x-1},\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$ **(Жауабы: 2).**

5.12. $u = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$ **(Жауабы: 1).**

5.13. $u = \arccos\left(\dfrac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$ **(Жауабы: -2).**

5.14. $u = \dfrac{x^2}{(y+1)},\ x = 1-2t,\ y = \operatorname{arctgt},\ t_0 = 0.$ **(Жауабы: -5).**

5.15. $u = \dfrac{x}{y},\ x = e^t,\ y = 2-e^{2t},\ t_0 = 0.$ **(Жауабы: 3).**

5.16. $u = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right),\ x = t^2,\ y = \dfrac{1}{3}t^3,\ t_0 = 1.$ **(Жауабы: -2).**

5.17. $u = \sqrt{x + y^2 + 3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1.$ **(Жауабы: 1,25).**

5.18. $u = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$ **(Жауабы: 0).**

5.19. $u = \dfrac{y^2}{x},\ x = 1-2t,\ y = 1+\operatorname{arctg} t,\ t_0 = 0.$ **(Жауабы: 4).**

5.20. $u = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$ **(Жауабы: -4).**

5.21. $u = \sqrt{x^2 + y + 3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1.$ **(Жауабы: 0,5).**

5.22. $u=\arcsin\dfrac{x}{2y},\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi.$ **(Жауабы: 0,5).**

5.23. $u=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x},\ x=\sin 2t,\ y=\operatorname{tg}^2 t,\ t_0=\dfrac{\pi}{4}.$ **(Жауабы: -8).**

5.24. $u=\sqrt{x+y+3},\ x=\ln t,\ y=t^2,\ t_0=1.$ **(Жауабы: 0,75).**

5.25. $u=\dfrac{y}{x},\ x=e^t,\ y=1-e^{2t},\ t_0=0.$ **(Жауабы: -2).**

5.26. $u=\arcsin\dfrac{2x}{y},\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi.$ **(Жауабы: 2).**

5.27. $u=\ln\left(e^{2x}+e^{y}\right),\ x=t^2,\ y=t^4,\ t_0=1.$ **(Жауабы: 4).**

5.28. $u=\operatorname{arctg}\left(x+y\right),\ x=t^2+2,\ y=4-t^2,\ t_0=1.$ **(Жауабы: 0).**

5.29. $u=\sqrt{x^2+y^2+3},\ x=\ln t,\ y=t^3,\ t_0=1.$ **(Жауабы: 1,5).**

5.30. $u=\operatorname{arctg}\left(xy\right),\ x=t+3,\ y=e^t,\ t_0=0.$ **(Жауабы: 0,4).**

6. Айқын емес түрде берілген $z\left(x,y\right)$ функциясының $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ нүктедегі дербес туындыларының мәнін үтірден соң, екі таңбаға дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

6.1. $x^3+y^3+z^3-3xyz=4,\ M_0\left(2,1,1\right)$**.**

(Жауабы: $z'_x\left(2,1,1\right)=3, z'_y\left(2,1,1\right)=-1$**).**

6.2. $x^2+y^2+z^2-xy=2,\ M_0(-1,0,1)$.

(Жауабы: $z'_x(-1,0,1)=-1, z'_y(-1,0,1)=0.5$**).**

6.3. $3x-2y+z=xz+5,\ M_0(2,1,-1)$.

(Жауабы: $z'_x(2,1,-1)=4, z'_y(2,1,-1)=-2$**).**

6.4. $\ell^z+x+2y+z=4,\ M_0(1,1,0)$.

(Жауабы: $z'_x(1,1,0)=-0.5, z'_y(1,1,0)=-1$**).**

6.5. $x^2+y^2+z^2-z-4=0,\ M_0(1,1,-1)$.

(Жауабы: $z'_x(1,1,-1)=0.67, z'_y(1,1,-1)=0.67$**).**

6.6. $z^3+3xyz+3y=7,\ M_0(1,1,1)$.

(Жауабы: $z'_x(1,1,1)=-0.5, z'_y(1,1,1)=-1.0$**).**

6.7. $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=\frac{3}{2},\ M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

(Жауабы: $z'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-1, z'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=1$**).**

6.8. $e^{z-1}=\cos x\cos y+1,\ M_0\left(0,\frac{\pi}{2},1\right)$.

(Жауабы: $z'_x\left(0,\frac{\pi}{2},1\right)=0, z'_y\left(0,\frac{\pi}{2},1\right)=-1$**).**

6.9. $x^2+y^2+z^2-6x=0,\ M_0(1,2,1)$.

(Жауабы: $z'_x(1,2,1)=2, z'_y(1,2,1)=-2$**).**

6.10. $xy=z^2-1,\ M_0(0,1,-1)$.

(Жауабы: $z'_x(0,1,-1)=-0.5, z'_y(0,1,-1)=0$**).**

6.11. $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=2,\ M_0(1,1,1)$.

(Жауабы: $z'_x(1,1,1)=-0.4, z'_y(1,1,1)=0.8$**).**

6.12. $x^2+y^2+z^2+2xz=5,\ M_0(0,2,1)$.

(Жауабы: $z'_x(0,2,1)=-1, z'_y(0,2,1)=-2$**).**

6.13. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=\dfrac{\pi}{2},\ M_0\left(0,\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

(Жауабы: $z'_x\left(0,\dfrac{\pi}{2},\pi\right)=0, z'_y\left(0,\dfrac{\pi}{2},\pi\right)=1$**).**

6.14. $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z=4,\ M_0(2,1,2)$.

(Жауабы: $z'_x(2,1,2)=7, z'_y(2,1,2)=-16$**).**

6.15. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z+2=0,\ M_0(1,1,1)$.

(Жауабы: $z'_x(1,1,1)=0.5, z'_y(1,1,1)=1$**).**

6.16. $x+y+z+2=xyz,\ M_0(2,-1,-1)$.

(Жауабы: $z'_x(2,-1,-1)=0, z'_y(2,-1,-1)=-1$**).**

6.17. $x^2+y^2+z^2-2xz=2,\ M_0(0,1,-1)$**.**

(Жауабы: $z'_x(0,1,-1)=1, z'_y(0,1,-1)=1$**).**

6.18. $e^z-xyz-x+1=0,\ M_0(2,1,0)$.

(Жауабы: $z'_x(2,1,0)=-1, z'_y(2,1,0)=0$**).**

6.19. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y-15=0,\ M_0(1,-1,2)$**.**

(Жауабы: $z'_x(1,-1,2)=-0.6, z'_y(1,-1,2)=0.13$**).**

6.20. $x^2-2xy-3y^2+6x-2y+z^2-8z+20=0,\ M_0(0,-2,2)$.

(Жауабы: $z'_x(0,-2,2)=2.5, z'_y(0,-2,2)=2.5$**).**

6.21. $x^2+y^2+z^2=y-z+3,\ M_0(1,2,0)$.

(Жауабы: $z'_x(1,2,0)=-2, z'_y(1,2,0)=-3$**).**

6.22. $x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z=0,\ M_0(1,-1,1)$.

(Жауабы: $z'_x(1,-1,1)=2, z'_y(1,-1,1)=2$**).**

6.23. $x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y+12=0,\ M_0(0,1,-1)$.

(Жауабы: $z'_x(0,1,-1)=-0.25, z'_y(0,1,-1)=0.75$**).**

6.24. $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3,\ M_0(4,3,1)$.

(Жауабы: $z'_x(4,3,1)=0.8, z'_y(4,3,1)=0.6$**).**

6.25. $x^2+2y^2+3z^2=59,\ M_0(3,1,4)$.

(Жауабы: $z'_x(3,1,4)=-0.25, z'_y(3,1,4)=-0.17$**).**

6.26. $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=17,\ M_0(-2,-1,2)$.

(Жауабы: $z'_x(-2,-1,2)=0,6, z'_y(-2,-1,2)=0,2$**).**

6.27. $x^3+3xyz-z^3=27,\ M_0(3,1,3)$.

(Жауабы: $z'_x(3,1,3)=2, z'_y(3,1,3)=1.5$**).**

6.28. $\ln z=x+2y-z+\ln 3,\ M_0(1,1,3)$.

(Жауабы: $z'_x(1,1,3)=\frac{3}{4}, z'_y(1,1,3)=\frac{3}{2}$**).**

6.29. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+6=0,\ M_0(2,1,1)$**.**

(Жауабы: $z'_x(2,1,1)=0, z'_y(2,1,1)=0,27$**).**

6.30. $z^2=xy-z+x^2-4,\ M_0(2,1,1)$**.**

(Жауабы: $z'_x(2,1,1)=1.67, z'_y(2,1,1)=0,67$**).**

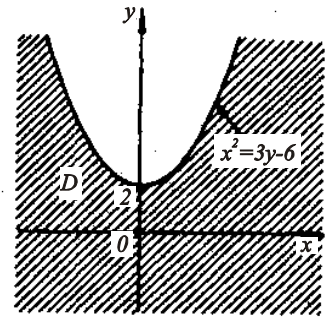
9.1–ЖҮТ шығару үлгілері

1. $z=\ln\left(x^2-3y+6\right)$ функциясының анықталу жиынын табу керек.

► Логарифмдік функция аргументінің оң мәнінде ғана анықталатындықтан, $x^2-3y+6>0$ немесе $y<\frac{1}{3}x^2+2$ аламыз.

$\left\{p(x,y)\in R^2:\quad y=\frac{1}{3}x^2+2\right\}$ нүктелер жиыны – парабола, ал

$\left\{p(x,y)\in R^2:\quad y<\frac{1}{3}x^2+2\right\}$ – ординаттары осы парабола нүктелерінің сәйкес ординаттарынан кіші болатын нүктелер жиыны. Олай болса функцияның анықталу жиыны – параболаның сыртында жатқан нүктелер жиыны (10-сурет).



10-сурет

Ескерту. 9.1.2. п. 1 және 2-мысалдарды қараңыз ◄

2. $z = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$ функциясының дербес туындылары мен дербес дифференциалдарын табу керек.

► Кез келген айнымал бойынша туынды – басқа айнымалдар тұрақты деп қабылданып, бір айнымалды функция туындысын табу ережелері мен формулалары бойынша ізделінеді:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}\left(x^2+5y^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x\right) = -\frac{2x}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2+5y^2\right)^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}\left(x^2+5y^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 10y\right) =$$

$$= -\frac{10y}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2+5y^2\right)^2}}.$$

Енді дербес дифференциалдарды табамыз:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx = -\frac{2x}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dx,$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}dy = -\frac{10y}{3}e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dy. \quad ◄$$

Ескерту. 9.2.1. *п. мысалды қараңыз.*

3. Берілген $f(x, y, z) = \sqrt{xy}\cos z$ функциясының $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{3}\right)$ нүктедегі дербес туындыларын: $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ үтірден кейінгі екі таңбаға дейінгі дәлдікпен табу керек.

► Алдымен функцияның дербес туындыларын тауып, содан соң олардың $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{3}\right)$ нүктедегі мәндерін есептейміз:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \cdot \cos z, \quad f'_x\left(1, 1, \frac{\pi}{3}\right) = 0,25,$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \cdot \cos z, \quad f'_y\left(1, 1, \frac{\pi}{3}\right) = 0,25,$$

$$f'_z(x, y, z) = -\sqrt{xy} \cdot \sin z, \quad f'_z\left(1, 1, \frac{\pi}{3}\right) = -0,86. \quad ◄$$

4. $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{y}}$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

► Берілген функцияның дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x+y} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{2(x+y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{\sqrt{\dfrac{x}{y}}}{2(x+y)}\cdot\cdot$$

Енді 6.2.2.п. (7)-формуланы пайдаланамыз:

$$dz=\frac{\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{2(x+y)}dx-\frac{\sqrt{\dfrac{x}{y}}}{2(x+y)}dy. \qquad \blacktriangleleft$$

Ескерту. *9.2.2.п. мысалды қараңыз.*

5. Күрделі $z=\arccos\dfrac{x^2}{y}$, мұнда $x=1+\ln t,\quad y=-2e^{-t^2+1}$ функциясының t_0=1 сәйкес туындысының мәнін үтірден кейінгі екі таңбаға дейінгі дәлдікпен табу керек.

► $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ формуласын қолданамыз (9.3.1п. (6)-қараңыз). $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{y^2}}}\dfrac{2x}{y}\dfrac{1}{t}-$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{y^2}}}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(-2e^{-t^2+1}\right)(-2t).$$

Енді $t_0 = 1$ үшін $x = 1$, $y = -2$ болатынын ескереміз: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. ◄

Ескерту. 9*.3.1. п. мысалдарды қараңыз.*

6. $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz = 3 - z^2$ теңдеуімен айқын емес түрде берілген $z(x, y)$ функциясының $M_0(0,1,-1)$ нүктедегі дербес туындыларының мәнін үтірден кейінгі екі таңбаға дейінгі дәлдікпен табу керек.

► Біздің жағдайымызда

$F(x, y, z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3$, бұдан,

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z, \quad F'_y = -9y^2 + 2xz, \quad F'_z = 2xy - 4x + 2z.$$

Олай болса,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Енді $M_0(0,1,-1)$ нүктедегі $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ мәндерін есептейміз:

$$\frac{\partial z(0,1,-1)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z(0,1,-1)}{\partial y} = -4,5$$

Ескерту. 9*.3.2. п. мысалдарды қараңыз.*

9.2–ҮТ

1. Берілген *S* бетінің $M_0\left(x_0, y_{0,}\, z_0\right)$ нүктедегі жанама жазықтық пен нормалінің теңдеулерін табу керек.

1.1 $S: x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0,\ \ M_0(2,1,-1).$

1.2 $S: x^2+z^2-4y^2=-2xy,\ \ M_0(-2,1,2).$

1.3. $S: x^2+y^2+z^2-xy+3z=7,\ \ M_0(1,2,1).$

1.4. $S: x^2+y^2+z^2+6y+4x=8,\ \ M_0(-1,1,2).$

1.5. $S: 2x^2-y^2+z^2-4z+y=13,\ \ M_0(2,1,-1).$

1.6. $S: x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0,\ \ M_0(2,1,-1).$

1.7. $S: x^2+z^2-5yz+3y=46,\ \ M_0(1,2,-3).$

1.8. $S: x^2+y^2-xz-yz=0,\ \ M_0(0,2,2).$

1.9. $S: x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2,\ \ M_0(1,\ 1,\ 1).$

1.10. $S: y^2-z^2+x^2-2xz+2x=z,\ \ M_0(1,\ 1,\ 1).$

1.11. $S: z=x^2+y^2-2xy+2x-y,\ \ M_0(-1,\ -1,\ -1).$

1.12. $S: z=y^2-x^2+2xy-3y,\ \ M_0(1,\ -1,\ 1).$

1.13. $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,\ \ M_0(-1,\ 1,\ 1).$

1.14. $S: x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13,\ \ M_0(3,\ 1,\ 2).$

1.15. $S: 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,\ \ M_0(1,\ -2,\ 1).$

1.16. $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2,\ \ M_0(2,\ 1,\ 0).$

1.17. $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3,\ \ M_0(1,\ 2,\ 1).$

1.18. $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,\ \ M_0(3,\ 1,\ 4).$

1.19. $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,\ \ M_0(1,\ 1,\ 2).$

1.20. $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5,\ \ M_0(-2,\ 1,\ 0).$

1.21. $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11,\ \ M_0(1,\ 4,\ -1).$

1.22. $S: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8,\quad M_0(0, 2, 0).$

1.23. $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0,\quad M_0(-1, -1,\ 1).$

1.24. $S: x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z,\quad M_0(1, 0,\ 1).$

1.25. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0,\quad M_0(1, -1,\ 1).$

1.26. $S: x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8,\quad M_0(1, 1,\ 0).$

1.27. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10,\quad M_0(-1, 1,\ 3).$

1.28. $S: z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15,\quad M_0(-1, 3,\ 4).$

1.29. $S: z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10, \quad M_0(-7, 1, 8).$

1.30. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, \quad M_0(1, -1, 2).$

2. Көрсетілген функциялардың екінші ретті дербес туындыларын табу керек және $z''_{xy} = z''_{yx}$ теңдігіне көз жеткізу керек.

2.1. $z = e^{x^2 - y^2}$.

2.2. $z = \operatorname{ctg}(x + y)$.

2.3. $z = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

2.4. $z = \cos\left(xy^2\right)$.

2.5. $z = \sin\left(x^2 - y\right)$.

2.6. $z = \operatorname{arctg}(x + y)$.

2.7. $z = \arcsin(x - y)$.

2.8. $z = \arccos(2x + y)$.

2.9. $z = \operatorname{arctg}(x - 3y)$.

2.10. $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$.

2.11. $z = e^{2x^2 + y^2}$.

2.12. $z = \operatorname{ctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

2.13. $z = \operatorname{tg}\sqrt{xy}$.

2.14. $z = \cos\left(x^2 y^2 - 5\right)$.

2.15. $z = \sin\sqrt{x^3 y}$.

2.16. $z = \arcsin(x - 2y)$.

2.17. $z = \arccos(4x - y)$.

2.18. $z = \operatorname{arctg}(5x + 2y)$.

2.19. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

2.20. $z = \ln\left(4x^2 - 5y^3\right)$.

2.21. $z = e^{\sqrt{x+y}}$.

2.22. $z = \arcsin(4x + y)$.

2.23. $z = \arccos(x - 5y)$.

2.24. $z = \sin\sqrt{xy}$.

2.25. $z = \cos\left(3x^2 - y^3\right)$.

2.26. $z = \operatorname{arctg}(3x + 2y)$.

2.27. $z = \ln\left(5x^2 - 3y^4\right)$.

2.28. $z = \operatorname{arcctg}(x - 4y)$.

2.29. $z = \ln(3xy - 4)$.

2.30. $z = \operatorname{tg}\left(xy^2\right)$.

3. Берілген u функциясының көрсетілген теңдеуді қанағаттандыратынын тексеру керек.

3.1. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \dfrac{y}{x}$.

3.2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3\left(x^3 - y^3\right), \; u = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$.

3.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \ln\left(x^2\left(y+1\right)^2\right)$.

3.4. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad u = x^y$.

3.5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, \; u = \dfrac{xy}{x+y}$.

3.6. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; u = e^{xy}$.

3.7. $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u = \sin^2(x - ay).$

3.8. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}.$

3.9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\ u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

3.10. $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u = e^{-\cos(x+ay)}.$

3.11. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0,\ u = (x - y)(y - z)(z - x).$

3.12. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u,\ u = x\ln\dfrac{y}{x}.$

3.13. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ u = \ln\left(x^2 + y^2\right).$

3.14. $x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0,\ u = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy).$

3.15. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy,\ \ u = 0, u = e^{xy}.$

3.16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,\ u = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}.$

3.17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right).$

3.18. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0,\ \ u=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}.$

3.19. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1,\ \ u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

3.20. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u,\ \ u=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}.$

3.21. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=e^{-(x+3y)}\sin\left(x+3y\right).$

3.22. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=xe^{y/x}.$

3.23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}.$

3.24. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ u=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}.$

3.25. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \ u=\ln\left(x+e^{-y}\right).$

3.26. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ u=\arcsin\dfrac{x}{x+y}.$

3.27. $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2},\ u=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}.$

3.28. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y},\ u=\frac{x^2+y^2}{x-y}.$

3.29. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{u},\ u=\sqrt{2xy+y^2}.$

3.30. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln\left(x^2-y^2\right).$

4. Келесі функцияларды экстремумге зерттеу керек.

4.1. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y.$ **(Жауабы:** $z_{\max}\left(4,4\right)=28.$**)**

4.2. $z=x^3+8y^3-6xy+5.$ **(Жауабы:** $z_{\min}\left(1;0,5\right)=4.$**)**

4.3. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\max}\left(-4,-1\right)=31.$**)**

4.4. $z=1+6x-x^2-xy-y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\max}\left(4,-2\right)=13.$**)**

4.5. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20.$ **(Жауабы:** $z_{\min}\left(5,6\right)=-86.$**)**

4.6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5.$ **(Жауабы:** $z_{\min}\left(1,1\right)=3.$**)**

4.7. $z=3x^3+3y^3-9xy+10.$ **(Жауабы:** $z_{\min}\left(1,1\right)=7.$**)**

4.8. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1.$ **(Жауабы:** $z_{\min}\left(-1,1\right)=0.$**)**

4.9. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(2,-2) = 8.$**)**

4.10. $z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(1,-1) = 6.$**)**

4.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$ **(Жауабы:** $z_{\min}(1,4) = -21.$**)**

4.12. $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$ **(Жауабы:** $z_{\min}(2,\ 0) = -10.$**)**

4.13. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$ **(Жауабы:** $z_{\min}(5,\ 0) = 1.$**)**

4.14. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$ **(Жауабы:** $z_{\min}(1,\ 1) = -1.$**)**

4.15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(0,\ 0) = 0.$**)**

4.16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(4,\ 4) = 15.$**)**

4.17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(0,\ 0) = 2.$**)**

4.18. $z = xy(12 - x - y).$ **(Жауабы:** $z_{\max}(4,\ 4) = 64.$**)**

4.19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(0,\ 0) = 9.$**)**

4.20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(0,\ 0) = 10.$**)**

4.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$ **(Жауабы:** $z_{\min}(1,\ 0{,}5) = 0.$**)**

4.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(4,\ 4) = 12.$**)**

4.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$ **(Жауабы:** $z_{\min}(-4,\ 1) = -1.$**)**

4.24. $z = xy(6 - x - y).$ **(Жауабы:** $z_{\max}(2,\ 2) = 8.$**)**

4.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$ **(Жауабы:** $z_{\min}(-1,\ -1) = -1.$**)**

4.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$ **(Жауабы:** $z_{\min} = (1, 0) = -1.$**)**

4.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\min} = (1, 0) = 0.$**)**

4.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\max} = (0, 0) = 0.$**)**

4.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2.$ **(Жауабы:** $z_{\min} = (0, -2) = 0.$**)**

4.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$ **(Жауабы:** $z_{\max}(1,1) = 2.$**)**

5. $z = z(x, y)$ функциясының берілген сызықтармен шенелген $\bar{D}$ аймағындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

5.1. $z = 3x + y - xy,\ \ \bar{D}:\ y = x,\quad y = 4,\quad y = 0.$

(Жауабы: $z_{e,y}(2, 2) = 4,\quad z_{e,k}(0, 0) = z(4, 4) = 0.$**)**

5.2. $z = xy - x - 2y,\ \ \bar{D}:\ x = 3,\quad y = x,\quad y = 0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0, 0) = z(3, 3) = 0,\quad z_{e.k}(3, 0) = -3.$**)**

5.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,\ \ \bar{D}:\ x = 0,\quad x = 1,\quad y = 0,\quad y = 2.$

(Жауабы: $z_{e.y}(1, 2) = 17,\ \ z_{e.k}(1, 0) = -3.$**)**

5.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2,\ \ \bar{D}:\ x = 0,\quad x = 1,\quad y = 0,\quad y = 1.$

(Жауабы: $z_{e.y}(1, 0) = 5,\quad z_{e.k}(0, 0) = 0.$**)**

5.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,\ \bar{D}:\ x - y + 1 = 0,\quad x = 3,\quad y = 0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(3,3) = 6,\quad z_{e.k}(2,0) = -4.$ **)**

5.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8,\quad \bar{D}:\ x = 0,\quad y = 0,\quad x + y - 1 = 0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,0) = 8,\quad z_{e.k}(0{,}5;\ 0{,}5) = 6{,}5.$ **)**

5.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2,\quad \bar{D}:\ x = 0,\quad x = 1,\quad y = 0,\quad y = 6.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,6) = 36,\quad z_{e.k}(0,0) = 0.$ **)**

5.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,\quad \bar{D}:\ x = 0,\quad x = 1,\quad y = 0,\quad y = 1.$

(Жауабы: $z_{e.y}(1,1) = 6,\quad z_{e.k}(0,0) = 0.$ **)**

5.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ \bar{D}:\ x = 0,\quad y = 0,\quad x + y - 3 = 0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,0) = -1,\quad z_{e.k}(0,3) = -19.$ **)**

5.10. $z = x^2 + 2xy - 10,\quad \bar{D}:\ y = 0,\quad y = x^2 - 4.$

(Жауабы: $z_{e.y}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}\right) = -\frac{62}{27},\quad z_{e.k}(1,-3) = -15.$ **)**

5.11. $z = xy - 2x - y,\quad \bar{D}:\ x = 0,\quad x = 3,\ y = 0,\quad y = 4.$

(Жауабы: $z_{e.y}(3,4) = 2,\quad z_{e.k}(3,0) = -6.$ **)**

5.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy,\quad \bar{D}:\ y = 8,\quad y = 2x^2.$

(Жауабы: $z_{e.y}(-2,8)=18,\quad z_{e.k}(2,8)=-14.$**)**

5.13. $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2,\ \bar{D}:\ x=0,\quad y=0,\quad x+y-1=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,1)=z(1,0)=3,\quad z_{e.k}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$**)**

5.14. $z=2x^2+3y^2+1,\quad \bar{D}:\ y=\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2},\quad y=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,3)=28,\quad z_{e.k}(0,0)=1.$**)**

5.15. $z=x^2-2xy-y^2+4x+1,\ \bar{D}:\ x=-3,\quad y=0,\quad x+y+1=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(-3,2)=6,\quad z_{e.k}(-2,0)=-3.$**)**

5.16. $z=3x^2+3y^2-x-y+1,\ \bar{D}:\ x=5,\quad y=0,\quad x-y-1=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(5,4)=115,\quad z_{e.k}(1,0)=3.$**)**

5.17. $z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4x,\quad \bar{D}:\ y=2x,\quad y=2,\quad x=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,0)=z(1,2)=0,\ z_{e.k}(0,2)=-2.$**)**

5.18. $z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x,\quad \bar{D}:\ x=0,\quad x=2,\quad y=0,\quad y=2.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,2)=10,\quad z_{e.k}\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)=-1{,}67.$**)**

5.19. $z=xy-3x-2y,\quad \bar{D}:\ x=0,\quad x=4,\quad y=0,\quad y=4.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,0)=0,\quad z_{e.k}(4,0)=-12.$**)**

5.20. $z=x^2+xy-2,\quad \bar{D}:\ y=4x^2-4,\quad y=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}\left(-\frac{2}{3},-2{,}22\right)=-0{,}07,\quad z_{e.k}(0{,}5,-3)=-3{,}25.$**)**

5.21. $z=x^2y(4-x-y),\ \bar{D}:\ x=0,\quad y=0,\quad y=6-x.$

(Жауабы: $z_{e.y}(2,1)=4,\quad z_{e.k}(4,2)=-64.$**)**

5.22. $z=x^3+y^3-3xy,\ \bar{D}:\ x=0,\quad x=2,\quad y=-1,\quad y=2.$

(Жауабы: $z_{e.y}(2,-1)=13,\quad z_{e.k}(0,-1)=-1.$**)**

5.23. $z=4(x-y)-x^2-y^2,\ \bar{D}:\ x+2y=4,\quad x-2y=4,\quad x=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)=\frac{36}{5},\quad z_{e.k}(0,2)=-12.$**)**

5.24. $z=x^2+2xy-y^2-4x,\ \bar{D}:\ x=3,\quad y=0,\quad y=x+1.$

(Жауабы: $z_{e.y}(3,3)=6,\quad z_{e.k}(2,0)=-4.$**)**

5.25. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y,\quad \bar{D}:\ x=0,\quad x=1,\quad y=0,\ y=2$

(Жауабы: $z_{e.y}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3},\quad z_{e.k}(0,2)=-28.$**)**

5.26. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y,\quad \bar{D}:\ y=x+2,\quad y=0,\quad x=2.$

(Жауабы: $z_{e.y}(2,3)=9,\ \ z_{e.k}(1,0)=-1.$**)**

5.27. $z=4-2x^2-y^2,\ \ \bar{D}:\ y=0,\quad y=\sqrt{1-x^2},$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,0)=4,\ \ z_{e.k}(-1,0)=z(1,0)=2\ .$**)**

5.28. $z=5x^2-3xy+y^2+4,\ \ \bar{D}:\ x=-1,\quad x=1,\quad y=-1,\ y=1\ .$

(Жауабы: $z_{e.y}(-1,1)=z(1,-1)=13,\ \ z_{e.k}(0,0)=4.$**)**

5.29. $z=x^2+2xy+4x-y^2,\ \ \bar{D}:\ x+y+2=0,\quad x=0,\quad y=0.$

(Жауабы: $z_{e.y}(0,0)=0,\ \ z_{e.k}(-2,0)=z(0,-4)=-4$**)**

5.30. $z=2x^2y-x^3y-x^2y^2,\ \ \bar{D}=D\cup\Gamma:\ x=0,\ y=0,\ x+y=2.$

(Жауабы: $z_{e.y}(1,\quad 0{,}5)=0{,}25,\ \ z_{e.k}(\Gamma)=0.$**)**

9.2–тапсырманы шығару үлгісі

1. $S:\ z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ бетінің $M_0(-1,0,1)$ нүктесіндегі жанама жазықтық пен нормальдің теңдеуін табу керек.

► Дербес туындыларды табамыз: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 4,$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3x + 2.$ Алынған өрнектерге $M_0(-1,0,1)$ нүктесінің координаттарын қоямыз:

$$A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -6, \quad B = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -1, C = -1.$$

Енді 9.2.3. п. (11) – формула бойынша жанама жазықтық теңдеуін аламыз: $-6(x+1) - y - (z-1) = 0$ немесе $6x + y + z + 5 = 0$ және 9.2.3.п (13) формула бойынша нормаль теңдеуін аламыз: $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}.$ ◄

2. $z = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ функциясының екінші дербес туындыларын табу керек.

► Алдымен бірінші дербес туындыларды табамыз:

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y-x}},,$$

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}..$$

Алынған туындылардың әрқайсысын x бойынша және y бойынша дифференциалдап, екінші дербес туындыларды табамыз:

$$z''_{xx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y-x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{2x(y-x)} = \frac{y-x-x}{4x\sqrt{x}\sqrt{y-x}(y-x)} =$$

$$= \frac{y-2x}{4x\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\right)(y-x)^{-3/2} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$z''_{yy} = \frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{\sqrt{y-x}+\frac{y}{\left(2\sqrt{y-x}\right)}}{y^2(y-x)}\right) = -\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)},$$

$$z''_{yx} = \frac{1}{2y}\frac{\frac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x} = \frac{y-x+x}{4y(y-x)\sqrt{x}\sqrt{y-x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}}$$

Аралас дербес туындылардың тең екенін көреміз $z''_{xy} = z''_{yx}$. ◄

Ескерту. *9.5.1. п. теореманы және мысалды қарап, оқып шығыңыз.*

3. $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$ функциясы $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{4y^2x}{x^2+y^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}$

теңдеуін қанағаттандыратынын тексеру керек.

► Бірінші және екінші дербес туындыларды табамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Алынған туындыларды теңдеудің сол жағына қоямыз:

$$\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Бастапқы теңдеудің оң жағынан келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{4y^2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Алынған нәтижелерді салыстырып, берілген функция теңдеуді қанағаттандырмайтынын көреміз. ◄

4. $z=xy\left(x+y-2\right)$ функциясын локальдік экстремумге зерттеу керек.

► Функцияның бірінші дербес туындыларын табамыз:

$$z'_x=2xy+y^2-2y,\quad z'_y=x^2+2xy-2x.$$

Оларды нөлге теңестіріп, теңдеулер жүйесін аламыз: $\left.\begin{aligned} y(2x+y-2)=0,\\ x(x+2y-2)=0. \end{aligned}\right\}$. Теңдеулер жүйесін шешіп, келесі төрт стационар нүктелерді анықтаймыз: $M_1(0,0)$, $M_2(2,0)$, $M_3(0,2)$, $M_4\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Алынған нүктелерде функцияны экстремумге зерттеу үшін алдымен екінші дербес туындыларды табамыз: $z''_{xx}=2y$, $z''_{xy}=2x+2y-2$, $z''_{yy}=2x$.

Енді 9.6.1 п. көрсетілген ереже бойынша әрбір стационар нүктедегі $f''_{xx}\cdot f''_{yy}-\left(f''_{xy}\right)^2=\Delta$ өрнегінің мәнін анықтаймыз:

$M_1(0,0)$ үшін, $\Delta=-4<0$; $M_2(2,0)$ үшін, $\Delta=-4<0$; $M_3(0,2)$ үшін, $M_4\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ үшін, $\Delta=\frac{12}{9}>0$ және $f''_{xx}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}>0$.

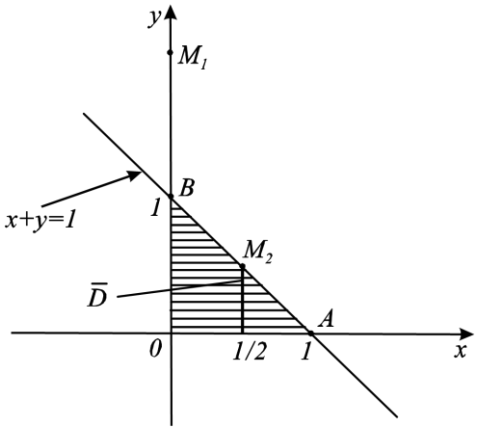
Аталған ережеге сүйеніп, келесі тұжырымға келеміз: M_1, M_2, M_3 нүктелерінде функцияның экстремумі жоқ; M_4 нүктесінде функция локальді минимум мәнін қабылдайды, ол

$z_{\min}=z\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}$ тең. ◄

Ескерту. 9*.6.1 п. мысалдарды қараңыз****.***

5. $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ функциясының берілген $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$ сызықтарымен шектелген $\overline{D}$ аймағындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек (11-сурет).

► Берілген $\overline{D}$ аймағының ішінде жатқан стационар нүктелерді іздейміз: $\left.\begin{array}{l} z'_x = y+3=0, \\ z'_y = x-2y+4=0. \end{array}\right\}$.



11-сурет

Жүйені шешіп, $M(-10,-3)$ стационар нүктесін аламыз. Ол $\overline{D}$ аймағының сыртында, сондықтан оны есепке алмаймыз. Функция мәндерін $\overline{D}= D \cup \Gamma$ тұйық аймағының $\Gamma = OA \cup OB \cup AB$ - шекараларында зерттейміз:

OAB үшбұрышының OA: $y=0$, $0 \le x \le 1$ қабырғасы үшін функция $z=3x$ түріне ие болады. Ал $z'=3>0$ болғандықтан OA кесіндісінде стационар нүкте болмайды; O мен A нүктелерінде сәйкес $z(0,0)=0$, $z(1,0)=3$ тең. Үшбұрыштың OB: $x=0$, $0 \le y \le 1$

қабырғасында функция $z=-y^2+4y,\ z'=-2y+4.$ Ал $-2y+4=0$ теңдеуінен y=2 аламыз, демек стационар $\mathrm{M}_1(0,2)\notin \overline{D}$. Функцияның B нүктедегі мәні $z(0,1)$=3;

Үшбұрыштың AB: $x+y=1$ немесе $y=1-x$ қабырғасында функция $z=-2x^2+2x+3,\ z'=-4x+2$ және $z'=0$ теңдеуінен $x=\frac{1}{2}$. Табылған $M_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ стационар нүктесі $\overline{D}$ аймағының шекарасында жатыр. Бұл нүктедегі функция мәні $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3,5.$ Функцияның алынған барлық мәндерін салыстырып, $z_{e.y}=z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3,5,\ z_{e.k}=z(0,0)=0$ екенін көреміз. ◄

Ескерту. 9.6.2. п. мысалды қараңыз.

Дифференциалдық теңдеулер

10.1- ҮТ

Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табу керек.

1.

1.1. $e^{x+3y}dy = xdx.$ **(Жауабы:** $e^{3y} = 3\left(C - xe^{-x} - e^{-x}\right).$ **)**

1.2. $y'\sin x = y\ln y.$ **(Жауабы:** $\ln y = C\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$ **)**

1.3. $y' = (2x-1)ctgy.$ **(Жауабы:** $\ln|\cos y| = x - x^2 + C.$ **)**

1.4. $\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,ydx + \sec^2 y\,\mathrm{tg}\,xdy = 0.$ **(Жауабы:** $C = \mathrm{tg}\,y \cdot \mathrm{tg}\,x.$ **)**

1.5. $\left(1+e^x\right)ydy - e^y dx = 0.$ **(Жауабы:** $-e^{-y}\left(y+1\right) = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C$ **.)**

1.6. $\left(y^2+3\right)dx - \frac{e^x}{x}ydy = 0.$ **Жауабы:** $\ln\left(y^2+3\right) = 2\left(C - xe^{-x} - e^{-x}\right).$**)**

1.7. $\sin y\cos xdy = \cos y\sin xdx.$ **(Жауабы:** $C = \frac{\cos x}{\cos y}.$ **)**

1.8. $y' = (2y+1)\,\mathrm{tg}\,x.$ **(Жауабы:** $\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\cos x}.$ **)**

1.9. $\left(\sin\left(x+y\right) + \sin\left(x-y\right)\right)dx + \frac{dy}{\cos y} = 0.$

(Жауабы: $\operatorname{tg} y = C + 2\cos x.$ **)**

1.10. $\left(1+e^x\right)yy' = e^x.$ **(Жауабы:** $y^2 = 2\ln C\left(e^x+1\right).$ **)**

1.11. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0.$ **(Жауабы:** $\ln\left|\sin y\right| = C + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x.$ **)**

1.12. $3e^x \sin y dx + \left(1-e^x\right)\cos y dy = 0.$ **(Жауабы:** $\sin y = C\left(e^x-1\right)^3.$ **)**

1.13. $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}.$ **(Жауабы:** $y\left(\ln y - 1\right) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + C.$ **)**

1.14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0.$ **(Жауабы:** $3^y = \dfrac{1}{2}3^{-x^2} + C\ln 3.$ **)**

1.15. $\left(\cos\left(x-2y\right) + \cos\left(x+2y\right)\right)y' = \sec x.$

(Жауабы: $\sin 2y = \operatorname{tg} x + C.$ **)**

1.16. $y' = e^{x^2}x\left(1+y^2\right).$ **(Жауабы:** $\operatorname{arctg} y = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + C.$ **)**

1.17. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0.$ **(Жауабы:** $\operatorname{tg}^2 y = \operatorname{ctg}^2 x + 2C.$ **)**

1.18. $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x.$ **(Жауабы:** $y = C\sin x - 2.$ **)**

1.19. $1 + \left(1+y'\right)e^y = 0.$ **(Жауабы:** $C\left(e^y - 1\right) = e^{-x}.$ **)**

1.20. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2.$ **(Жауабы:** $C = \cos x + 2.$ **)**

1.21. $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0.$ **(Жауабы:** $\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{4}\sin 2y = C - \dfrac{1}{2}e^{x^3}.$ **)**

1.22. $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0.$ **(Жауабы:** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)\right| = C - e^x$ **)**

1.23. $\left(1+e^{3y}\right)xdx = e^{3y}dy$ **(Жауабы:** $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{3}\ln\left(1+e^{3y}\right)+C.$ **)**

1.24. $\left(\sin\left(2x+y\right)-\sin\left(2x-y\right)\right)dx = \frac{dy}{\sin y}$

(Жауабы: $\operatorname{ctg} y = C - \sin 2x.$ **)**

1.25. $\cos y dx = 2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}dy$

(Жауабы: $2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)\right| + y = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$ **)**

1.26. $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$**.** **(Жауабы:** $\operatorname{tg} y = \arcsin x + C$ **)**

1.27. $e^x \operatorname{tg} y dx = \left(1-e^x\right)\sec^2 y dy.$ **(Жауабы:** $\operatorname{tg} y = \frac{C}{\left(e^x-1\right)}$ **)**

1.28. $y' + \sin\left(x+y\right) = \sin\left(x-y\right).$ **(Жауабы:** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = C - 2\sin x.$ **)**

1.29. $\cos^3 y \cdot y' - \cos\left(2x+y\right) = \cos\left(2x-y\right).$

(Жауабы: $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y = \sin 2x + C$ **.)**

1.30. $3^{y^2-x^2} = \frac{yy'}{x}.$ **(Жауабы:** $3^{-y^2} = 3^{-x^2} - 2C\ln 3.$**)**

2.

2.1. $\left(xy+x^3y\right)y'=1+y^2.$ **(Жауабы:** $Cx=\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}.$ **)**

2.2. $\frac{y'}{7^{y-x}}=3.$ **(Жауабы:** $7^{-y}=3\cdot 7^{-x}+C\ln 7.$ **)**

2.3. $y-xy'=2\left(1+x^2y'\right).$ **(Жауабы:** $y=\frac{Cx}{\sqrt{1+2x^2}}+2.$ **)**

2.4. $y-xy'=1+x^2y'.$ **(Жауабы:** $y=\frac{Cx}{\left(x+1\right)+1}.$ **)**

2.5. $\left(x+4\right)dy-xydx=0.$ **(Жауабы:** $y=\frac{Ce^x}{\left(x+4\right)^4}.$ **)**

2.6. $y'+y+y^2=0.$ **(Жауабы:** $\frac{y}{\left(y+1\right)}=C-x.$ **)**

2.7. $y^2\ln xdx-\left(y-1\right)xdy=0.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{y}+\ln y=C+\frac{1}{2}\ln^2 x.$ **)**

2.8. $\left(x+xy^2\right)dy+ydx-y^2dx=0.$ **(Жауабы:** $y+\ln\frac{\left(y-1\right)^2}{y}=C+\ln x.$ **)**

2.9. $y'+2y-y^2=0.$ **(Жауабы:** $\sqrt{\frac{\left(y-2\right)}{y}}=Ce^x.$ **)**

2.10. $\left(x^2+x\right)ydx+\left(y^2+1\right)dy=0.$ **(Ж-ы:** $\frac{y^2}{2}+\ln y=C-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}.$ **)**

2.11. $\left(xy^3+x\right)dx+\left(x^2y^2-y^2\right)dy=0.$ **(Жауабы:** $\sqrt[3]{y^3+1}=\dfrac{C}{\sqrt{x^2-1}}.$ **)**

2.12. $\left(1+y^2\right)dx-\left(y+yx^2\right)dy=0.$ **(Жауабы:** $\dfrac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right)=C+\operatorname{arctg}x.$ **)**

2.13. $y'=2xy+x.$ **(Жауабы:** $\dfrac{1}{2}\ln\left|2y+1\right|=\dfrac{x^2}{2}+C.$ **)**

2.14. $y-xy'=3\left(1+x^2y'\right).$ **(Жауабы:** $y=\dfrac{C\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+3}}+3.$ **)**

2.15. $2xyy'=1-x^2.$ **(Жауабы:** $y^2=\ln\left|x\right|-\dfrac{x^2}{2}+C.$ **)**

2.16. $\left(x^2-1\right)y'-xy=0.$ **(Жауабы:** $y=C\sqrt{x^2-1}.$ **)**

2.17. $\left(y^2x+y^2\right)dy+xdx=0.$ **(Жауабы:** $y^3=3\left(C-x+\ln\left|x+1\right|\right.$. **)**

2.18. $\left(1+x^3\right)y^3dx-\left(y^2-1\right)x^3dy=0.$

(Жауабы: $\ln y+\dfrac{1}{2y^2}=C+x-\dfrac{1}{2x^2}.$ **)**

2.19. $xy'-y=y^2.$ **(Жауабы:** $\dfrac{y}{y+1}=Cx.$ **)**

2.20. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy.$ **(Жауабы:** $\sqrt{y^2+1}=\ln Cx.$ **)**

2.21. $y'-xy^2=2xy.$ **(Жауабы:** $\ln\left|\dfrac{y}{y+2}\right|=C+x^2.$ **)**

2.22. $2x^2yy' + y^2 = 2.$ **(Жауабы:** $\ln\left|2 - y^2\right| = C + \frac{1}{x}.$ **)**

2.23. $y' = \frac{\left(1+y^2\right)}{\left(1+x^2\right)}.$ **(Жауабы:** $\operatorname{arctg} y = C + \operatorname{arctg} x.$ **)**

2.24. $y'\sqrt{\left(1+y^2\right)} = \frac{x^2}{y}.$ **(Жауабы:** $\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}' = C + x^3.$ **)**

2.25. $\left(y+1\right)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy.$ **(Жауабы:** $y + \ln y = \arcsin x + \frac{x^2}{2} + C.$ **)**

2.26. $\left(x^2+1\right)y' + y\sqrt{\left(1+x^2\right)} = xy.$ **(Жауабы:** $y = \frac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$ **)**

2.27. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}.$ **(Жауабы:** $2y^2 - y^4 = 4\ln\left|x\right| + 2x^2 + C.$ **)**

2.28. $\left(xy-x\right)^2 dy + y\left(1-x\right)dx = 0.$

(Жауабы: $\frac{y^2}{2} - 2y + \ln\left|y\right| = \ln\left|x\right| + \frac{1}{x} + C.$ **)**

2.29. $\left(x^2y - y\right)^2 y' = x^2y - y + x^2 - 1.$

(Жауабы: $\frac{y^2}{2} - y + \ln\left|y+1\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$ **)**

2.30. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$ **(Жауабы:** $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C.$ **)**

3.

3.1. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$. **(Жауабы:** $\sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{|x|}$. **)**

3.2. $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$. **(Жауабы:** $y^2 - x^2 = Cy^3$. **)**

3.3. $\left(x + 2y\right)dx - xdy = 0$. **(Жауабы:** $y = Cx^2 - x$. **)**

3.4. $\left(x - y\right)dx + \left(x + y\right)dy = 0$. **(Ж:** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^2 + x^2}{x^2} = \ln\frac{C}{x}$. **)**

3.5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. **(Жауабы:** $\frac{y}{\left(x - y\right)} = Cx$. **)**

3.6. $y^2 + x^2y' = xyy'$. **(Жауабы:** $e^{\frac{y}{x}} = Cy$. **)**

3.7. $xy' - y = x\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$. **(Жауабы:** $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$. **)**

3.8. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$. **(Жауабы:** $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx$. **)**

3.9. $xy' - y = \left(x + y\right)\ln\frac{x + y}{x}$. **(Жауабы:** $\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| = Cx$. **)**

3.10. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$. **(Жауабы:** $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right) = \ln Cx$. **)**

3.11. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$. **(Жауабы:** $y = \frac{x}{4}\ln^2 Cx$. **)**

3.12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$ **(Жауабы:** $\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx.$ **)**

3.13. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right).$ **(Жауабы:** $-e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx.$ **)**

3.14. $y' = \frac{y}{x-1}.$ **(Жауабы:** $y = x\ln\frac{C}{x}.$ **)**

3.15. $y'x + x + y = 0.$ **(Жауабы:** $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.$ **)**

3.16. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0.$ **(Жауабы:** $\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = \ln Cx.$ **)**

3.17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$ **(Жауабы:** $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$ **)**

3.18. $\left(4x^2 + 3xy + y^2\right)dx + \left(4y^2 + 3xy + x^2\right)dy = 0.$

(Жауабы: $(x+y)\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} = C.$ **)**

3.19. $\left(x - y\right)ydx - x^2dy = 0.$ **(Жауабы:** $y = \frac{x}{\ln Cx}.$ **)**

3.20. $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'.$ **(Жауабы:** $\frac{y}{x} + 2\ln\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}.$ **)**

3.21. $\left(x^2 - 2xy\right)y' = xy - y^2.$ **(Жауабы:** $\frac{x}{y} + 2\ln\frac{y}{x} = -\ln Cx.$ **)**

3.22. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0.$ **(Жауабы:** $y = x\ln^2|Cx|.$ **)**

3.23. $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0.$ **(Жауабы:** $y = xe^{\frac{C}{x}}.$ **)**

3.24. $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0.$ **(Жауабы:** $y^2 = \frac{C^3}{3^x} - \frac{x^2}{3}.$ **)**

3.25. $\left(y^2 - 2xy\right)dx - x^2dy = 0.$ **(Жауабы:** $y - 3x = Cx^3y$ **)**

3.26. $\left(x + 2y\right)dx + xdy = 0.$ **(Жауабы:** $y = \frac{C^3}{3x^2} - \frac{x}{3}.$ **)**

3.27. $\left(2x - y\right)dx + \left(x + y\right)dy = 0.$

(Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln Cx.$ **)**

3.28. $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right).$ **(Жауабы:** $y^2 = \frac{x^2}{\ln\left(Cx\right)^4}$ **)**

3.29. $x^2y' = y\left(x + y\right).$ **(Жауабы:** $y = -\frac{x}{\ln\left(Cx\right)}$ **)**

3.30. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$ **(Жауабы:** $y^2 = x^2\ln\left(Cx\right)^2$ **)**

4. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін (дербес интегралын) табу керек.

4.1. $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3,\ \ \mathrm{y}\left(0\right)=0.$ **(Жауабы:** $y=\dfrac{\left(x^3+3x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ **)**

4.2. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sec x,\ \ \mathrm{y}\left(0\right)=0.$ **(Жауабы:** $y=\sin x.$ **)**

4.3. $\left(1-x\right)\left(y'+y\right)=e^{-x},\ \ y\left(0\right)=0.$ **(Жауабы:** $y=e^{-x}\ln\dfrac{1}{1-x}.$ **)**

4.4. $xy'-2y=2x^4,\ \ y\left(1\right)=0.$ **(Жауабы:** $y=x^4-x^2.$ **)**

4.5. $y'=2x\left(x^2+y\right),\ \ \mathrm{y}\left(0\right)=0.$ **(Жауабы:** $y=-x^2-1+e^{x^2}.$ **)**

4.6. $y'-y=e^x,\ \ y\left(0\right)=1.$ **(Жауабы:** $y=\left(x+1\right)e^x.$ **)**

4.7. $xy'+y+xe^{-x^2}=0,\ \ y\left(1\right)=\dfrac{1}{2e}.$ **(Жауабы:** $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2x}.$ **)**

4.8. $\cos y dx=\left(x+2\cos y\right)\sin y dy,\ \ \mathrm{y}\left(0\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

(Жауабы: $x=\left(\sin^2 y-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{\cos y}.$ **)**

4.9. $x^2y'+xy+1=0,\ \ y\left(1\right)=0.$ **(Жауабы:** $y=-\dfrac{\left(\ln x\right)}{x}.$ **)**

4.10. $yx'+x=4y^3+3y^2,\ \ y\left(2\right)=1.$ **(Жауабы:** $x=y^3+y^2.$ **)**

4.11. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy,\ \ y(0)=1.$ **(Ж.:** $x = 2\ln y + 1 - y.$ **)**

4.12. $y' = \dfrac{y}{\left(3x - y^2\right)},\ \ y(0)=1$ **(Жауабы:** $x = y^2 - y^3.$ **)**

4.13. $(1-2xy)y' = y(y-1),\ \ y(0)=1.$ **(Ж:** $x(y-1)^2 = y - \ln y - 1$ **)**

4.14. $x(y'-y) = e^x,\ \ y(1)=0.$ **(Жауабы:** $y = e^x \ln x.$ **)**

4.15. $y = x(y' - x\cos x),\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.$ **(Жауабы:** $y = (\sin x - 1)x.$ **)**

4.16. $(xy'-1)\ln x = 2y,\ \ y(e)=0.$ **(Жауабы:** $y = \ln^2 x - \ln x.$ **)**

4.17. $\left(2e^y - x\right)y' = 1,\ \ y(0)=0.$ **(Жауабы:** $y = e^y - e^{-y}.$ **)**

4.18. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x},\ \ y(1)=0.$ **(Жауабы:** $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)e^{-x}.$

)

4.19. $\left(x + y^2\right)dy = ydx,\ \ y(0)=0.$ **(Жауабы:** $x = y^2 - y.$ **)**

4.20. $\left(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y\right)y' = 1,\ \ y(0) = \dfrac{\pi}{2}.$ **(Жауабы:** $x = -\sin y\cos y.$ **)**

4.21. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2,\ \ y(0)=0.$ **(Жауабы:** $y = \dfrac{3x^4 + 4x^3}{12(x+1)}.$**)**

4.22. $xy' - 2y + x^2 = 0,\ \ y(1)=0.$ **(Жауабы:** $y = -x^2 \ln x.$ **)**

4.23. $xy' + y = \sin x,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$ **(Жауабы:** $y = \frac{(1-\cos x)}{x}.$ **)**

4.24. $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x,\ \ y\left(\sqrt{2}\right) = 1.$ **(Жауабы:** $y = x^2 - 1.$ **)**

4.25. $\left(1 - x^2\right)y' + xy = 1,\ \ y(0) = 1.$ **(Ж:** $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x + 1).$ **)**

4.26. $y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x,\ \ y(0) = 0.$ **(Ж:** $y = \frac{6\sin x - 2\sin^3 x}{3\cos x}.$ **)**

4.27. $x^2y' = 2xy + 3,\ \ y(1) = -1.$ **(Жауабы:** $y = -\frac{1}{x}.$ **)**

4.28. $y' + 2xy = xe^{-x^2},\ \ y(0) = 0.$ **(Жауабы:** $y = 0.5x^2e^{-x^2}.$ **)**

4.29. $y' - 3x^2y - x^2e^{x^3} = 0,\ \ y(0) = 0.$ **(Жауабы:** $y = \frac{1}{3}x^3e^{x^3}.$ **)**

4.30. $xy' + y = \ln x + 1,\ \ y(1) = 0.$ **(Жауабы:** $y = \ln x.$ **)**

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

5.1. $y' + y = x\sqrt{y}.$ **(Жауабы:** $y = \left(xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C\right)^2 e^{-x}.$ **)**

5.2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 ydy.$ **(Ж:** $x = \frac{\left(y\operatorname{tg} y + \ln\left|\cos y\right| + C\right)^2}{y^2}.$ **)**

5.3. $y' + 2y = y^2 e^x$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{1}{\left(Ce^{2x} + e^x\right)}$. **)**

5.4. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{1}{\left(\cos x \sqrt[3]{C - \operatorname{tg} x}\right)}$. **)**

5.5. $xydy = \left(y^2 + x\right)dx$. **(Жауабы:** $y = x\sqrt{2\left(\dfrac{C-1}{x}\right)}$. **)**

5.6. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{1}{x^2\sqrt{2\left(e^x + C\right)}}$. **)**

5.7. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$. **(Жауабы:** $x = \sqrt{\dfrac{y}{(C - \cos y)}}$. **)**

5.8. $\left(2x^2 y \ln y - x\right)y' = y$. **Жауабы:** $x = \dfrac{1}{\left(y\left(C - \ln^2 y\right)\right)}$. **)**

5.9. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$. **(Жауабы:** $y = \sqrt{C - \sqrt{x^2 - 1}}\ \sqrt[4]{x^2 - 1}$. **)**

5.10. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{x^4}{4}\left(C + \ln x\right)^2$. **)**

5.11. $xy^2 y' = x^2 + y^3$. **(Жауабы:** $y = x\sqrt[3]{3\left(\dfrac{C-1}{x}\right)}$. **)**

5.12. $(x+1)\left(y^2 + y'\right) = -y$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{1}{\left((x+1)\left(C + \ln|x+1|\right)\right)}$. **)**

5.13. $y'x + y = -xy^2$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{1}{\left(x\left(C + \ln x\right)\right)}$. **)**

5.14. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\left(C + x\right)}}$. **)**

5.15. $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$. **(Жауабы:** $y = x\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)^2$. **)**

5.16. $y' + xy = x^3 y^3$. **Жауабы:** $y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}$. **)**

5.17. $y' = \dfrac{x}{y} e^{2x} + y$. **(Жауабы:** $y = e^x \sqrt{x^2 + C}$. **)**

5.18. $x'y + x = -yx^2$. **(Жауабы:** $x = \dfrac{1}{\left(y\left(\ln y + C\right)\right)}$. **)**

5.19. $x\left(x - 1\right)y' + y^3 = yx$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{2\left(x - \ln x + C\right)}}$. **)**

5.20. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{\sqrt{C - x}}{x^{\frac{3}{2}}}$. **)**

5.21. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy$. **(Жауабы:** $x = \dfrac{y}{\left(y^2 + C\right)}$. **)**

5.22. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$. **(Жауабы:** $y = e^{3x}\left(\dfrac{x}{3} e^{-2x} + \dfrac{1}{6} e^{-2x} + C\right)^{\frac{3}{2}}$. **)**

5.23. $xy' + y = y^2 \ln x.$ **(Жауабы:** $y = \dfrac{1}{(\ln x + 1 + Cx)}.$ **)**

5.24. $xdx = \left(\dfrac{x^2}{2} - y^3\right)dy.$ **(Жауабы:** $x = y\sqrt{C - y^2}.$ **)**

5.25. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$ **(Жауабы:** $y = 2e^{-x^2} \cdot \sqrt{2x^2e^{-2x^2} + e^{-x^2} + 4C}.$ **)**

5.26. $y' + y = \dfrac{x}{y^2}$ **(Жауабы:** $y = e^{-x}\sqrt[3]{xe^{3x} - \dfrac{1}{3}e^{3x} + C}.$ **)**

5.27. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2\cos x = 0.$ **(Жауабы:** $y = \dfrac{1}{((x + C)\cos x)}.$ **)**

5.28. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$ **(Жауабы:** $y = \left(\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\cos x| + C}{x}\right)^2.$ **)**

5.29. $y' - y + y^2\cos x = 0.$ **(Жауабы:** $y = \dfrac{2e^x}{e^x(\cos x + \sin x) + C}.$ **)**

5.30. $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}.$ **(Жауабы:** $y = \left(\dfrac{1}{3}\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{4}} + C\right)^2\sqrt{x^2 - 1}.$ **)**

6. Келесі дифференциалдық теңдеулерді интегралдау керек.

6.1. $\dfrac{1}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0.$ **(Жауабы:** $y / x = C.$ **)**

6.2. $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$ **(Жауабы:** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C.$**)**

6.3. $\left(2x-y+1\right)dx+\left(2y-x-1\right)dy.$

(Жауабы: $x^2+y^2-\ xy+x-y=C.$**)**

6.4. $xdx+ydy+\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0.$ **(Жауабы:** $\dfrac{x^2+y^2}{2}+\ \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+C.$**)**

6.5. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx-\dfrac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$ **(Жауабы:** $\sqrt{x^2-y^2}-x=C.$**)**

6.6. $\dfrac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\dfrac{e^y}{1+x^2}dy=0.$ **(Жауабы:** $\dfrac{e^y-1}{1+x^2}=C.$**)**

6.7. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$ **(Жауабы:** $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C.$

)

6.8. $\left(x^3-xy\right)dx+\left(y^2-\dfrac{x^2}{2}\right)dy=0.$ **(Жауабы:** $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{yx^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}=C$ **)**

6.9. $x\left(2x^2+y^2\right)+y\left(x^2+2y^2\right)y'=0.$

(Жауабы: $x^4+x^2y^2+\ y^4=C.$**)**

6.10. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$.

(Жауабы: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.**)**

6.11. $\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$

(Жауабы: $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=C.$**)**

6.12. $\left(3x^2\operatorname{tg} y-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0.$

(Жауабы: $x^3\operatorname{tg} y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C.$**)**

6.13. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy.$ **(Жауабы:** $x^2+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=C.$ **)**

6.14. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$

(Жауабы: $\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}=C.$**)**

6.15. $\left(3x^2-2x-y\right)dx+\left(2y-x+3y^2\right)dy=0.$

(Жауабы: $x^3+y^3-x^2-xy+y^2=C.$**)**

6.16. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0.$ **(Жауабы:** $\frac{y}{x}+\sqrt{x^2+y^2}=C.$**)**

6.17. $\left(3x^2y+y^3\right)dx+\left(x^3+3xy^2\right)dy=0.$ **(Жауабы:** $xy\left(x^2+y^2\right)=C.$**)**

6.18. $y\left(x^2+y^2+a^2\right)dy+x\left(x^2-y^2-a^2\right)dx=0.$

(Жауабы: $\left(x^2+y^2\right)^2+2a^2\left(y^2-x^2\right)=C.$**)**

6.19. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

(Жауабы: $\operatorname{tg} xy-\cos x-\cos y=C.$**)**

6.20. $\left(3x^2+4xy\right)dx+\left(2x^2+y^3\right)dy=0.$ **(Жауабы:** $x^3+2x^2y+\frac{y^4}{4}=C.$**)**

6.21. $\left(3x^2-y\cos xy+y\right)dx+\left(x-x\cos xy\right)dy=0.$

(Жауабы: $x^3-\sin xy+xy=C.$**)**

6.22. $\left(12x^3-e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}\right)dx+\left(16y+\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0.$

(Жауабы: $3x^4+8y^2-e^{\frac{x}{y}}=C.$**)**

6.23. $\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}+2xy\sin x^2y+4\right)dx+\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}+x^2\sin x^2y\right)dy=0.$

(Жауабы: $\sqrt{xy}-\cos x^2y+4x=C.$**)**

6.24. $y\cdot 3^{xy}\ln 3dx+\left(x\cdot 3^{xy}\ln 3-3\right)dy=0.$ **(Жауабы:** $3^{xy}-3y=C.$**)**

6.25. $\left(\frac{1}{x-y}+3x^2y^7\right)dx+\left(7x^3y^6-\frac{1}{x-y}\right)dy=0.$

(Жауабы: $\ln|x-y|+x^3y^7=C.$**)**

6.26. $\left(\frac{2y}{x^3}+y\cos xy\right)dx+\left(\frac{1}{x^2}+x\cos xy\right)dy=0.$ **(Ж:** $\sin xy-\frac{y}{x^2}=C.$**)**

6.27. $\left(\frac{y}{\sqrt{-x^2y^2}}-2x\right)dx+\frac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}}=0.$

(Жауабы: $\arcsin xy-x^2=C.$**)**

6.28. $\left(5x^4y^4+28x^6\right)dx+\left(4x^5y^3-3y^2\right)dy=0.$

(Жауабы: $x^5y^4-y^3+4x^7=C.$**)**

6.29. $\left(2xe^{x^2+y^2}+2\right)dx+\left(2ye^{x^2+y^2}-3\right)dy=0.$

(Жауабы: $e^{x^2+y^2}+2x-3y=C.$**)**

6.30. $\left(3y^3\cos 3x+7\right)dx+\left(3y^2\sin 3x-2y\right)dy=0.$

(Жауабы: $y^3\sin 3x-y^2+7x=C.$**)**

10.1–ҮТ шығару үлгісі

Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін (жалпы интегралын) табу керек:

1. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$.

▼ Берілген теңдеуді түрлендіреміз: $y\left(1-x^2\right)dy=-x\left(y^2+1\right)dx.$ Бұл – айнымалдары ажыратылатын теңдеу. Айнымалдарды ажыратамыз: $\dfrac{ydy}{y^2+1}=\dfrac{-xdx}{1-x^2}$, $1-x^2\neq 0.$ Соңғы теңдіктің екі бөлігін интегралдаймыз:

$$\int\frac{ydy}{y^2+1}=-\int\frac{xdx}{1-x^2}+C,\quad \frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln|C|,\quad C\neq 0.$$

Біз мұнда ықшамдауға ыңғайлы болуы үшін $C\in\left(-\infty;+\infty\right)$ ***параметрін*** $\dfrac{1}{2}\ln|C|\ \in\left(-\infty;+\infty\right),\ C\neq 0$ ***параметріне ауыстырдық.*** Одан әрі $y^2+1=|C|\cdot\left|x^2-1\right|$ немесе $y^2-\left|C\left(x^2-1\right)\right|+1=0,$ $C\neq 0$ жалпы интегралын аламыз. Енді айнымалдары ажыратылған теңдеу $1-x^2\neq 0$ шарты үшін ғана алынғандықтан, $x=1$ және $x=-1$ мәндері бастапқы теңдеудің шешімдері болатынын немесе болмайтынын тексереміз. Оның екеуі де бастапқы теңдеуді қанағаттандыратынын көру қиын емес.

Жауабы: $y^2-\left|C\left(x^2-1\right)\right|+1=0$, $C\neq 0$; $x=1$; $x=-1.$ ▲

Ескерту. *10.2.2 п. 1- мысалды, 10.2.3 п. 2- мысалды қараңыз.*

2. $\sec^2 x\ \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y\ \operatorname{tg} x dy = 0.$

▼ Бұл – айнымалдары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Теңдеудің айнымалдарын ажыратамыз және интегралдаймыз:

$$\frac{\sec^2 y dy}{\operatorname{tg} y} = -\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}, \quad \sin y \neq 0, \quad \sin x \neq 0;$$

$$\int \frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} = -\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} + C, \quad \ln|tgy| = -\ln|tgx| + \ln|C|, \quad C \neq 0;$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{C}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} x = C, \quad C \neq 0.$$

Алынған жалпы интегралда $\sin y \neq 0$ немесе $y \neq k\pi$ және $\sin x \neq 0$ немесе $x \neq n\pi$ шарттары бар. Тексеру арқылы $y = k\pi$, $x = n\pi$ бастапқы дифференциалдық теңдеудің шешімдері екенін көреміз. Бұл шешімдерді жалпы интеграл құрамында жазу үшін, $C \neq 0$ шартын алып тастаймыз.

Жауабы: $\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} x = C.$ ▲

3. $y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}$ **.**

▼ Берілген теңдеуден $\frac{dy}{dx}$ табамыз: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}$. Бұл – ***бірінші ретті біртекті теңдеу.*** $y = x \cdot u(x)$ ауыстыруын жасаймыз:

$$y' = u'x + u, \qquad u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux}, \qquad u'x + u = \frac{u-1}{1+u},$$

$$u'x = \frac{u-1}{u+1} - u = \frac{-u^2-1}{u+1}, \qquad x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Айнымалдары ажыратылатын теңдеу алдық. Оны шешеміз:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x}\ , \quad \int\frac{u+1}{u^2+1}du = -\int\frac{dx}{x}\ ,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2udu}{u^2+1} + \int\frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|\ ,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) + \operatorname{arctg}u = \ln\left|\frac{C}{x}\right|\ , \quad \operatorname{arctg}u = \ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right|\ ,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Бастапқы теңдеудің жалпы интегралын таптық. Мұнда $C \neq 0$.

Ескерту. 10.2.4 п. 3- мысалды қараңыз**.** ▲

4. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$, $y(0) = \ln 5$.

▼ Теңдеуден туындыны ажыратамыз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1-x}\ , \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{1-x}{1-x}y = \frac{e^{-x}}{1-x}\ .$$

Бірінші ретті сызықтық теңдеу алдық. Оны $y = u(x)\cdot v(x)$ алмастыруы арқылы шешеміз:

$$y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\right) = \frac{e^{-x}}{1-x}\ . \qquad (1)$$

$v(x)$ функциясын $\frac{dv}{dx} + v = 0$ шартынан табамыз:

$$\frac{dv}{dx} = -v\ ,\ \ \frac{dv}{v} = -dx\ ,\ \ \ \int\frac{dv}{v} = -\int dx\ ,\ \ \ \ \ln|v| = -x\ ,\ \ v = e^{-x}\ .$$

Алынған өрнекті (1) теңдеуге қоямыз:

$$\frac{du}{dx}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x}\ ,$$

$$du = \frac{dx}{1-x}\ , \qquad \int du = \int\frac{dx}{1-x}\ ,$$

$$u = -\ln|1-x| + \ln C\ , \qquad u = \ln\frac{C}{|1-x|}\ .$$

Сонда $y = uv = e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}$, $C > 0$ бастапқы теңдеудің жалпы шешімі болады. Алғашқы шартты пайдаланып, C табамыз: $y(0) = \ln C = \ln 5$.

Дербес шешім келесі түрде болады: $y = e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}$. ◄

Ескерту. 10.2.5. п. 4-мысалды қараңыз және ондағы ескертуге назар аударыңыз.

5. Теңдеудің жалпы шешімін табу керек:

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=xy+x^2y^2.$$

► Теңдеудің түрін анықтау үшін, оны түрлендіреміз:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1+x^2}y=\frac{x^2}{1+x^2}y^2.$$

Бұл – Бернулли теңдеуі. Оны $y=u(x)\cdot v(x)$ ауыстыруы арқылы шешеміз: $y'=u'v+uv'$, $u'v+uv'-\frac{x}{1+x^2}uv=\frac{x^2}{1+x^2}u^2v^2$,

$$u'v+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{xv}{1+x^2}\right)=\frac{x^2u^2v^2}{1+x^2}. \qquad (1)$$

$v(x)$ функциясын $\frac{dv}{dx}-\frac{xv}{1+x^2}=0$ шартынан табамыз:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{xv}{1+x^2},\quad \frac{dv}{v}=\frac{xdx}{1+x^2},$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{xdx}{1+x^2},\quad \ln|v|=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),\quad v=\sqrt{1+x^2}$$

Алынған $v(x)$ функциясын (1) теңдеуге қоямыз:

$$\frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2u^2\left(1+x^2\right)}{1+x^2},\quad \frac{du}{u^2}=\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}},\quad \int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{c} u_1(x) = x,\ du_1 = dx, \\ dv_1 = \dfrac{x dx}{\sqrt{1+x^2}},\ v_1 = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Соңғы теңдеуден

$$2\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - 2C,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - C$$

аламыз. Олай болса, $-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - C$,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C,$$

$$u = \left(\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C\right)^{-1}.$$

Сонымен $y = \sqrt{1+x^2}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C\right)^{-1}$. ◄

Ескерту. 10.2.6. п. 5- мысалды қараңыз.

6. Теңдеуді интегралдау керек: $\left(\frac{1}{x}-y^3+4\right)dx+\left(-\frac{1}{y}-3xy^2\right)dy=0$.

► Келесі белгілеулерді енгіземіз: $P(x,y)=\frac{1}{x}-y^3+4$, $Q(x,y)=-\frac{1}{y}-3xy^2$ (§ 10.3 (1) және (2) қараңыз). Онда:

$\frac{\partial P}{\partial y}=-3y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2$. Мұнда $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ тепе-теңдігі орындалып тұр, демек бастапқы теңдеу – толық дифференциалды теңдеу. Оның жалпы интегралын § 10.3 мысалда көрсетілген әдіс бойынша табуға болар еді. Бірақ жалпы интегралды оқушыға $\int\limits_{x_0}^{x}p(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$ формуласын пайдаланып та табуға болатынын көрсетеміз. Есептейміз:

$$\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x}-y^3+4\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{y}-3x_0y^2\right)dy=C_0.$$

Одан әрі, $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}-\int\limits_{x_0}^{x}y^3dx+4\int\limits_{x_0}^{x}dx-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}-3x_0\int\limits_{y_0}^{y}y^2dy=C_0,$

$$\ln|x|\Big|_{x_0}^{x}-y^3x\Big|_{x_0}^{x}+4x\Big|_{x_0}^{x}-\ln|y|\Big|_{y_0}^{y}-3x_0\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{y_0}^{y}=C_0\ ,$$

$$\ln|x|-\ln|x_0|-xy^3+x_0y^3+4x-4x_0-\ln|y|+$$

$$+\ln|y_0|-x_0y^3+x_0y_0^3+C_0,\quad \ln\left|\frac{x}{y}\right|-xy^3+4x=C,$$

мұндағы $C = C_0 + \ln\left|\frac{x_0}{y_0}\right| + 4x_0 - x_0 y_0^3.$

Ескерту. § 10.3 мысалды қараңыз. ◄

10.2–ҮТ

1. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек және алынған $y = \varphi(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктеге сәйкес мәнін үтірден соң, екі таңбаға дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

1.1. $y''' = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

(Жауабы:1,2,3.)

1.2. $y''' = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2, \quad y(1) = \frac{1}{4}, \quad y'(1) = y''(1) = 0.$ **(Жауабы: 0,38.)**

1.3. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{3}{5}.$ **(Жауабы:2,69.)**

1.4. $y''' = \frac{6}{x^3}, \quad x_0 = 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 5, \quad y''(1) = 1.$

(Жауабы: 6,07.)

1.5. $y'' = 4\cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$ **(Жауабы:4,36.)**

1.6. $y'' = \frac{1}{\left(1 + x^2\right)}, \quad x_0 = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$ **(Жауабы:0,44.)**

1.7. $xy''' = 2, \quad x_0 = 2, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = y''(1) = 0.$ **(Жауабы:0,77.)**

1.8. $y''' = e^{2x}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \; y(0) = \frac{9}{8}, y'(0) = \frac{1}{4}, \; y''(0) = -\frac{1}{2}.$

(Жауабы: 1,22.)

1.9. $y''' = \cos^2 x, \quad x_0 = \pi, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{8}, \; y''(0) = 0.$

(Жауабы: 3,58.)

1.10. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x_0 = 1, y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$ **(Жауабы:5,57.)**

1.11. $y'' = \frac{1}{sin^2 2x}, \quad x_0 = \frac{5}{4}\pi, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

(Жауабы: 3,93.)

1.12. $y'' = x + \sin x, \quad x_0 = \pi, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0.$ **(Жауабы:5,31.)**

1.13. $y'' = \operatorname{arctg} x, x_0 = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$ **(Жауабы: 0,15.)**

1.14. $y'' = tgx \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0.$

(Жауабы: -0,39.)

1.15. $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1, \quad x_0 = 2, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 2.$

(Жауабы: 25,08.)

1.16. $y'' = \frac{x}{e^{2x}}, \quad x_0 = -\frac{1}{2}, y_0(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = -\frac{1}{4}.$ **(Жауабы: 0,34.)**

1.17. $y'' = \sin^2 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}, y(0) = -\frac{\pi^2}{576}, \quad y'(0) = 0.$

(Жауабы: 0,01.)

1.18. $y''' = x \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$

(Жауабы:0,14.)

1.19. $y''' \sin^4 x = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{5\pi}{2}, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \; y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

(Жауабы:7,85.)

1.20. $y''=\cos x+e^{-x},\quad x_0=\pi, y(0)=-e^{-\pi}, y'(0)=-1.$

(Жауабы:1,00.)

1.21. $y''=\sin^3 x,\ x_0=2{,}5\pi,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{7}{9},\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

(Жауабы:- 0,78.)

1.22. $y'''=\sqrt{x}-\sin 2x, x_0=1, y(0)=-\frac{1}{8},\ \ y'(0)=\frac{1}{8}\cos 2,\ \ y''(0)=\frac{1}{2}.$

(Жауабы:0,08.)

1.23. $y''=\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},\ x_0=4\pi,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$ **(Жауабы:12,56.)**

1.24. $y''=2\sin x\cos^2 x,\ x_0=\frac{\pi}{2},\ y(0)=-\frac{5}{9},\ y'(0)=-\frac{2}{3}.$

(Жауабы: 1,00.)

1.25. $y''=2\sin^2 x\cos x,\quad x_0=\pi,\quad y(0)=\frac{1}{9},\quad y'(0)=1.$

(Жауабы: 4,14.)

1.26. $y''=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x,\quad x_0=\frac{\pi}{2},\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$

(Жауабы:1,90.)

1.27. $y''=2\cos x\sin^2 x-\cos^3 x,\quad x_0=\frac{\pi}{2},\quad y(0)=\frac{2}{3},\ \ y'(0)=2.$

(Жауабы:3,47.)

1.28. $y''=x-\ln x,\quad x_0=2,\quad y(1)=-\frac{5}{12},\quad y'(1)=\frac{3}{2}.$ **(Жауабы:1,62.)**

1.29. $y''\frac{1}{x^2},\quad x_0=2,\quad y(1)=3, y'(1)=1.$ **(Жауабы:4,31.)**

1.30. $y''' = \cos 4x, \quad x_0 = \pi, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{15}{16}, \; y''(0) = 0..$

(Жауабы:5,14.)

2. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

2.1. $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' = 2.$ **(Жауабы:** $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2.$ **)**

2.2. $2xy'y'' = y'^2 - 1.$

(Жауабы: $9C_2\left(y - C_2\right)^2 = 4\left(C_1 x + 1\right)^3, \; y = \pm x + C.$ **)**

2.3. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$ **(Жауабы:** $y = C_1 \ln x + \frac{l}{x} + C_2.$ **)**

2.4. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$ **(Жауабы:** $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2.$ **)**

2.5. $y'' x \ln x = y'.$ **(Жауабы:** $y = C_1 x\left(\ln x - 1\right) + C_2.$ **)**

2.6. $xy'' - y' = x^2 e^x.$ **(Жауабы:** $y = e^x\left(x - 1\right) + C_1 x^2 + C_2.$ **)**

2.7. $y'' x \ln x = 2y'.$ **(Жауабы:** $y = C_1\left(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x\right) + C_2.$ **)**

2.8. $x^2 y'' + xy' = 1.$ **(Жауабы:** $y = \frac{\left(\ln^2 x\right)}{2} + C_1 \ln x + C_2.$ **)**

2.9. $y'' = -\frac{x}{y'}.$ **(Жауабы:** $y = \frac{C_1^2}{2}\arcsin\frac{x}{C_1} + \frac{x}{2}\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_2.$ **)**

2.10. $xy'' = y'$. **(Жауабы:** $y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$. **)**

2.11. $y'' = y' + x$. **(Жауабы:** $y = -\frac{x^2}{2} - x + C_1 e^x + C_2$. **)**

2.12. $xy'' = y' + x^2$. **(Жауабы:** $y = \frac{x^3}{3} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$. **)**

2.13. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$. **(Жауабы:** $y = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x+1} + C_2$. **)**

2.14. $xy'' + y' = \ln x$. **(Жауабы:** $y = (x + C_1)\ln x - 2x + C_2$. **)**

2.15. $y'' tgx = y' + 1$. **(Жауабы:** $y = -C_1 \cos x - x + C_2$. **)**

2.16. $y'' + 2xy'^2 = 0$. **(Жауабы:** $y = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{x - C_1}{x + C_1} + C_2$. **)**

2.17. $2xy'y'' = y'^2 + 1$. **(Жауабы:** $y = \frac{2}{3C_1}(C_1 x - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$. **)**

2.18. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$. **(Жауабы:** $y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} - C_1 x + C_2$. **)**

2.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$. **(Жауабы:** $y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2 x + C_3$. **)**

2.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$. **(Ж:** $y = -\sin^3 \frac{x}{3} + \frac{C_1 x}{2} - C_1 \frac{\sin 2x}{4} + C_2$. **)**

2.21. $y'' + 4y' = 2x^2$. **(Жауабы:** $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{16} - \frac{C_1 e^{-4x}}{4} + C_2$. **)**

2.22. $xy'' - y' = 2x^2 e^x$. **(Жауабы:** $y = 2e^x(x-1) + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$. **)**

2.23. $x(y''+1) + y' = 0$. **(Жауабы:** $y = -\dfrac{x^2}{4} + C_1 \ln x + C_2$. **)**

2.24. $y'' + 4y' = \cos 2x$.

(Жауабы: $y = \dfrac{1}{10}\sin 2x - \dfrac{1}{20}\cos 2x - \dfrac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$. **)**

2.25. $y'' + y' = \sin x$. **(Жауабы:** $y = -\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x - C_1 e^{-x} + C_2$. **)**

2.26. $x^2 y'' = y'^2$. **(Жауабы:** $y = C_1 x - C_1^2 \ln(x + C_1) + C_2$. **)**

2.27. $2xy''y' = y'^2 - 4$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{2}{3C_1}(C_1 x + 4)^{\frac{3}{2}} + C_2$. **)**

2.28. $y'''x\ln x = y''$. **(Жауабы:** $y = \dfrac{C_1 x^2}{4}(2\ln x - 3) + C_2 x + C_3$. **)**

2.29. $y''\operatorname{ctg} x + y' = 2$. **(Жауабы:** $y = 2x + C_1 \sin x + C_2$. **)**

2.30. $(1+x^2)y'' = 2xy'$. **(Жауабы:** $y = C_1 \dfrac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$. **)**

3. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеуге арналған Коши есебін шешу керек.

3.1. $y'' = y'e^{y},\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$ **(Жауабы:** $y=-\ln|1-x|, y=0.$ **)**

3.2. $y'^{2}+2yy''=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

(Жауабы: $y=\left(1\pm\frac{3x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, y=1.$ **)**

3.3. $yy''+y'^{2}=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

(Жауабы: $y=\sqrt{2x+1}, y=1.$ **)**

3.4. $y''+2yy'^{3}=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=\frac{1}{3}.$

(Жауабы: $x=\frac{y^{3}}{3}-y-\frac{2}{3}, y=2.$ **)**

3.5. $y''\operatorname{tg} y=2y'^{2},\quad y(1)=\frac{\pi}{2},\quad y'(1)=2.$

(Жауабы: $y=\operatorname{arctg}(2-2x), y=\frac{\pi}{2}.$ **)**

3.6. $2yy''=y'^{2},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$ **(Жауабы:** $y=\left(\frac{x}{2}+1\right)^{2}, y=1.$ **)**

3.7. $yy''-y'^{2}=y^{4}, y(0)=1, y'(0)=1.$

(Жауабы: $x = \pm\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \pm \ln\dfrac{y}{1+\sqrt{y^2+1}}$.**)**

3.8. $y'' = -\dfrac{1}{\left(2y^3\right)}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

(Жауабы: $y = \sqrt{x\sqrt{2} + \dfrac{1}{4}}$.**)**

3.9. $y'' = 1 - y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

(Жауабы: $x = \pm\ln|e^y + \sqrt{e^{2y}-1}|$.**)**

3.10. $y''^2 = y', \quad y(0) = 2/3, \quad y'(0) = 1.$

(Жауабы: $y = \dfrac{(x+2)^3}{12}, y = \dfrac{2}{3}$.**)**

3.11. $2yy'' - y'^2 + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

(Жауабы: $y = \left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2 + 1$.**)**

3.12. $y'' = 2 - y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$ **(Жауабы:** $y = 2\sin x + 2$.**)**

3.13. $y'' = \dfrac{1}{y^3}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$ **(Жауабы:** $x = \sqrt{y^2 - 1}$.**)**

3.14. $yy'' - 2y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ **.**

(Жауабы: $y=\dfrac{1}{1-2x}, y=1.$**)**

3.15. $y''=y'+y'^2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

(Жауабы: $x=\ln\dfrac{2e^y-1}{e^y}, y=0.$**)**

3.16. $y''+\dfrac{2}{1-y}y'^2=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

(Жауабы: $y=1-\dfrac{1}{x+1}, y=0.$**)**

3.17. $y''(1+y)=5y'^2, y(0)=0, y'(0)=1.$

(Жауабы: $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4(1+y)^4}, y=0.$**)**

3.18. $y''(2y+3)-2y'^2=0, y(0)=0, y'(0)=3.$

(Жауабы: $y=\dfrac{3}{2}\left(e^x-1\right), y=0.$**)**

3.19. $4y''^2=1+y'^2, y(0)=1, y'(0)=0.$

(Жауабы: $x=2\ln\dfrac{1}{2}|y+1+\sqrt{(y+1)^2-4}|.$**)**

3.20. $2y'^2=(y-1)y'', \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$

(Жауабы: $y = 1 + \frac{1}{1-2x}, y = 2.$**)**

3.21. $1 + y'^2 = yy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(Жауабы: $x = \ln | y + \sqrt{y^2 - 1} |.$**)**

3.22. $y'' + yy'^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

(Жауабы: $y = \sqrt[3]{6x+1}, y = 1.$**)**

3.23. $yy'' - y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2\ .$

(Жауабы: $y = e^{2x}, y = 1\ .$**)**

3.24. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

(Жауабы: $x = \ln | \ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1} |.$**)**

3.25. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0, \ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1\ .$

(Жауабы: $x = \frac{1}{1 - \ln y} - 1, y = 1.$**)**

3.26. $y''(1 + y) = y'^2 + y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

(Жауабы: $y = 2e^x, y = 2.$**)**

3.27. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}, y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$ **(Жауабы:** $y = (x + 1)^2, y = 1.$**)**

3.28. $y''=\dfrac{1+y'^2}{2},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

(Жауабы: $x=\ 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^y-1}.$**)**

3.29. $yy''-2yy'\ln y=y'^2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

(Жауабы: $y=e^{tgx}, y=1.$**)**

3.30. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}, y(0)=y'(0)=0.$ **(Жауабы:** $x=\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{4}}.$**)**

10.2–ҮТ шығару үлгісі

1. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек және алынған $y=\varphi(x)$ функциясының $x=-3$ нүктедегі мәнін үтірден кейінгі екі таңбаға дейінгі дәлдікпен есептеу керек:

$$y''(x+2)^5=1,\quad y(-1)=\frac{1}{12},\quad y'(-1)=-\frac{1}{4}.$$

▼ Берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз (10.6.2. п. а) түрін қараңыз): $y''=\dfrac{1}{(x+2)^5},\quad y'=\int\dfrac{dx}{(x+2)^5}=-\dfrac{1}{4(x+2)^4}+C_1,$

$$y=\int\left(-\frac{1}{4(x+2)^4}+C_1\right)dx=\frac{1}{12(x+2)^3}+C_1x+C_2.$$

Алғашқы шартты пайдаланып, C_1 мен C_2 мәндерін табамыз:

$$y(-1)=\frac{1}{12}-C_1+C_2=\frac{1}{12},\ \ C_2-C_1=0,$$

$$y'(-1) = -\frac{1}{4} + C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Алғашқы шартты қанағаттандыратын дербес шешім келесі түрге ие болады: $y = \dfrac{1}{\left(12(x+2)^3\right)}$.

Енді $y(x)$ функциясының $x = -3$ нүктедегі мәнін есептейміз:

$$y(-3) = \frac{1}{12(-3+2)^3} = -\frac{1}{12} = -0,08.$$

Ескерту. 10.6.2. п. мысалды қараңыз. ◄

2. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:

$$y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0.$$

▼ Берілген теңдеу – 10.6.2. п. б) түріндегі теңдеу. Сондықтан $y' = z(x)$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $y'' = \dfrac{dz}{dx}$ және $\dfrac{dz}{dx}\left(e^x + 1\right) + z = 0$, $\dfrac{dz}{dx}\left(e^x + 1\right) = -z$, $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{e^x + 1}$, $\int \dfrac{dz}{z} = -\int \dfrac{dx}{e^x + 1}$.

Енді $e^x + 1 = t$ айнымал ауыстыруы арқылы

$$\ln|z| = \ln\left(e^x + 1\right) - \ln e^x + \ln C_1$$

аламыз. Соңғы өрнекті потенциалдап, бастапқы теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$z = C_1 \frac{e^x + 1}{e^x}, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{e^x + 1}{e^x},$$

$$y = C_1 \int \frac{e^x + 1}{e^x} dx = C_1 \left(x - e^{-x} \right) + C_2.$$

Ескерту. 10.6.2. п. б) жағдайындағы мысалды қараңыз. ◄

3. Дифференциалдық теңдеудің берілген шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек: $y^3 y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

► Берілген теңдеу 10.6.2. п. в) түріне жатады. Сондықтан теңдеудің ретін $y' = p(y)$ алмастыруының көмегімен төмендетеміз.

Сонда $y'' = p \frac{dp}{dy}$. Одан әрі $y^3 p \frac{dp}{dy} = -1$, $pdp = -\frac{dy}{y^3}$,

$$\int pdp = -\int \frac{dy}{y^3}, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C_1, \quad p^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1, \quad p = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}}{y}, \quad dx = \pm \frac{ydy}{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}},$$

$$x = \pm \int \frac{ydy}{\sqrt{1 + 2C_1 y^2}} + C_2 = \frac{\pm 1}{4C_1} \int \left(1 + 2C_1 y^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1 + 2C_1 y^2\right),$$

$$x = \pm \frac{1}{2C_1} \sqrt{1 + 2C_1 y^2} + C_2.$$

яғни алғашқы теңдеудің жалпы шешімін аламыз. Бастапқы шарттарды пайдаланып, C_1 мен C_2 мәндерін анықтаймыз.

$x=1$, $y=1$ және $y'=0$ үшін $1=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1}+C_2$,

$0=\pm\sqrt{1+2C_1}$ аламыз, ал бұлардан $1+2C_1=0$, $C_1=-\frac{1}{2}$, $C_2=1$ шығады. Олай болса ізделінген шешім келесі түрде болады: $x=\mp\sqrt{1-y^2}+1$. Мұның геометриялық кескіні – $(x-1)^2+y^2=1$ шеңберінің сол немесе оң жақ жартысы.

Ескерту. 10.6.2. п. в) жағдайының мысалын қараңыз. ◄

10.3–ҮТ

Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

1.

1.1. а) $y''+4y=0$; **б)** $y''-10y'+25y=0$; **в)** $y''+3y'+2y=0$.

1.2. а) $y''-y'-2y=0$; **б)** $y''+9y=0$; **в)** $y''+4y'+4y=0$.

1.3. а) $y''-4y'=0$; **б)** $y''-4y'+13y=0$; **в)** $y''-3y'+2y=0$.

1.4. а) $y''-5y'+6y=0$; **б)** $y''+3y'=0$; **в)** $y''+2y'+5y=0$.

1.5. а) $y''-2y'+10y=0$; **б)** $y''+y'-2y=0$; **в)** $y''-2y'=0$.

1.6. а) $y''-4y=0$; **б)** $y''+2y'+17y=0$; **в)** $y''-y'-12y=0$.

1.7. а) $y''+y'-6y=0$; **б)** $y''+9y'=0$; **в)** $y''-4y'+20y=0$.

1.8. а) $y''-49y=0$; **б)** $y''-4y'+5y=0$; **в)** $y''+2y'-3y=0$.

1.9. а) $y''+7y'=0$; **б)** $y''-5y'+4y=0$; **в)** $y''+16y=0$.

1.10. а) $y''-6y'+8y=0$; **б)** $y''+4y'+5y=0$; **в)** $y''+5y'=0$.

1.11. а) $4y''-8y'+3y=0$; **б)** $y''-3y'=0$; **в)** $y''-2y'+10y=0$.

1.12. а) $y''+4y'+20y=0$; **б)** $y''-3y'-10y=0$; **в)** $y''-16y=0$.

1.13. а) $9y''+6y'+y=0$; **б)** $y''-4y'-21y=0$; **в)** $y''+y=0$.

1.14. а) $2y''+3y'+y=0$; **б)** $y''+4y'+8y=0$; **в)** $y''-6y'+9y=0$.

1.15. а) $y''-10y'+21y=0$; **б)** $y''-2y'+2y=0$; **в)** $y''+4y'=0$.

1.16. а) $y''+6y'=0$; **б)** $y''+10y'+29y=0$; **в)** $y''-8y'+7y=0$.

1.17. а) $y''+25y=0$; **б)** $y''+6y'+9y=0$; **в)** $y''+2y'+2y=0$.

1.18. а) $y''-3y'=0$; **б)** $y''-7y'-8y=0$; **в)** $y''+4y'+13y=0$.

1.19. а) $y''-3y'-4y=0$; **б)** $y''+6y'+13y=0$; **в)** $y''+2y'=0$.

1.20. а) $y''+25y'=0$; **б)** $y''-10y'+16y=0$; **в)** $y''-8y'+16y=0$.

1.21. а) $y''-3y'-18y=0$; **б)** $y''-6y'=0$; **в)** $y''+2y'+5y=0$.

1.22. а) $y''-6y'+13y=0$; **б)** $y''-2y'-15y=0$; **в)** $y''-8y'=0$.

1.23. а) $y''+2y'+y=0$; **б)** $y''+6y'+25y=0$; **в)** $y''-4y'=0$.

1.24. а) $y''+10y'=0$; **б)** $y''-6y'+8y=0$; **в)** $4y''+4y'+y=0$.

1.25. а) $y''+5y=0$; **б)** $9y''-6y'+y=0$; **в)** $y''+6y'+8y=0$.

1.26. а) $y''+6y'+10y=0$; **б)** $y''-4y'+4y=0$; **в)** $y''-5y'+4y=0$.

1.27. а) $y''-y=0$; **б)** $4y''+8y'-5y=0$; **в)** $y''-6y'+10y=0$.

1.28. а) $y''+8y'+25y=0$; **б)** $y''+9y'=0$; **в)** $9y''+3y'-2y=0$.

1.29. а) $6y''+7y'-3y=0$; **б)** $y''+16y=0$; **в)** $4y''-4y'+y=0$.

1.30. а) $9y''-6y'+y=0$; **б)** $y''+12y'+37y=0$; **в)** $y''-2y'=0$.

2. Сызықтық біртекті теңдеудің дербес шешімін табу керек.

2.1. $y'''-7y''+6y'=0,\ y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=30.$

(Жауабы: $y=5-6e^{x}+e^{6x}$.**)**

2.2. $y^{V}-9y'''=0,\quad y(0)=1, y'(0)=-1, y''(0)=0, y'''(0)=0, y^{IV}(0)=0.$

(Жауабы: $y=1-x$.**)**

2.3. $y'''-y''=0,\ y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=-1.$

(Жауабы: $y=1+x-e^{x}$.**)**

2.4. $y'''-4y'=0,\ y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=4.$

(Жауабы: $y=e^{2x}-1$.**)**

2.5. $y'''+y'=0,\ y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=1.$

(Жауабы: $y=1-\cos x-\sin x$.**)**

2.6. $y'''-y'=0,\ y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=4.$

(Жауабы: $y=-4+e^{-x}+3e^{3x}$. **)**

2.7. $y^{IV}+2y'''-2y'-y=0 \quad y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=0, y'''(0)=8.$

(Жауабы: $y=2e^{-x}-4xe^{-x}-4x^2e^{-x}-2e^{x}$. **)**

2.8. $y'''+y''-5y'+3y=0 \quad y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-14.$

(Жауабы: $y=e^{x}-3xe^{x}-e^{-3x}$ **)**

2..9. $y'''+y''=0, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-1.$

(Жауабы: $y=1-e^{-x}$. **)**

2.10. $y'''-5y''+8y'-4y=0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-1, y''(0)=0.$

(Жауабы: $y=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{5}{8}xe^{2x}$. **)**

2.11. $y'''+3y''+2y'=0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0, y''(0)=2$.

(Жауабы: $y=1-2e^{-x}+e^{-2x}$. **)**

2.12. $y'''+3y''+3y'+y=0, \quad y(0)=-1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=1.$

(Жауабы: $y=-e^{-x}(1+x)$. **)**

2.13. $y'''-2y''+9y'-18y=0, \quad y(0)=-2.5,\ y'(0)=0, y''(0)=0.$

(Жауабы: $y=-\frac{45}{26}e^{2x}-\frac{10}{13}\cos 2x+\frac{15}{13}\sin 2x$. **)**

2.14. $y''' + 9y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 9, y''(0) = -18.$

(Жауабы: $y = -2 + 2\cos 3x + 3\sin 3x.$ **)**

2.15. $y''' - 13y'' + 12y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1, y''(0) = 133.$

(Жауабы: $y = 10 - 11e^{x} + e^{12x}.$ **)**

2.16. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2, y'''(0) = 0.$

(Жауабы: $y = -e^{x} - \frac{7}{3}e^{-x} + \frac{7}{12}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}.$ **)**

2.17. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0, y''(0) = 8, y'''(0) = 24.$

(Жауабы: $y = -2e^{x} + e^{-x} + e^{3x}.$ **)**

2.18. $y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(0) = 1, y''(0) = 0.$

(Жауабы: $y = \sin x.$ **)**

2.19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0, y''(0) = 4.$

(Жауабы: $y = 2x^{2}e^{x}.$ **)**

2.20. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0, y''(0) = -6.$

(Жауабы: $y = -2e^{x} + \cos 2x + \sin 2x.$ **)**

2.21. $y^{IV} - 2y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 2.$

(Жауабы: $y = 1 - e^{x} + xe^{x}.$ **)**

2.22. $y^{IV} - y = 0,\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = -4.$

(Жауабы: $y = e^{-x} - e^{x} + 2\sin x.$**)**

2.23. $y^{IV} - 16y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -8.$

(Жауабы: $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin 2x.$**)**

2.24. $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0,\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 12.$

(Жауабы: $y = e^{2x} + 3e^{-2x} - 4e^{-x}.$**)**

2.25. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = -3,\ \ y''(0) = -9.$

(Жауабы: $y = \cos 3x - \sin 3x.$**)**

2.26. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$

$y''(0) = 0,\ \ y'''(0) = 0,\ \ y^{IV}(0) = 27.$

(Жауабы: $y = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^{2} - e^{3x} + xe^{3x}.$**)**

2.27. $y''' + 2y'' + y' = 0,\quad y(0) = 0, y'(0) = 2,\ y''(0) = -3.$

(Жауабы: $y = 1 - e^{-x} + xe^{-x}.$**)**

2.28. $y''' - y'' - y' + y = 0,\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1.$

(Жауабы: $y = -4e^{x} + 7xe^{x} + 3e^{-x}.$**)**

2.29. $y^{IV}+5y''+4y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=4,\ y''(0)=-1,\ y'''(0)=-16.$

(Жауабы: $y=2\sin 2x+\cos x.$**)**

2.30. $y^{IV}+10y''+9y=0,\ y(0)=1, y'(0)=3,\ y''(0)=-9,\ y'''(0)=-27.$

(Жауабы: $y=\sin 3x+\cos 3x.$**).**

3. Дифференциалдық теңдеуді тұрақтыларды вариациялау әдісімен шешу керек.

3.1. $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}.$

(Жауабы: $y=\left(-\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)+C_1\right)e^{-x}+\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}+C_2\right)e^x.$**)**

3.2. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}.$

(Жауабы: $y=\left(\dfrac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|+C_1\right)\cos 2x+\left(\dfrac{1}{2}x+C_2\right)\sin 2x.$**)**

3.3. $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}.$

(Жауабы: $y=\left(\ln\left|\cos 2x\right|+C_1\right)e^{2x}\cos x+\left(x+C_2\right)e^{2x}\sin x.$**)**

3.4. $y'''+y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}.$

(Жауабы: $y=\dfrac{1}{\cos x}+C_1+(\ln|\cos x|+C_2)\cos x+(x-\operatorname{tg}x+C_3)\sin x.$**)**

3.5. $y''+9y=\dfrac{1}{\sin 3x}.$

(Жауабы: $y=\left(-\dfrac{1}{3}x+C_1\right)\cos 3x+\left(\dfrac{1}{9}\ln|\sin 3x|+C_2\right)\sin 3x.$**)**

3.6. $y''+2y'+y=xe^x+\dfrac{1}{xe^x}.$

(Жауабы: $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\dfrac{x}{4}e^x-\dfrac{1}{4}e^x-xe^{-x}+xe^{-x}\ln x.$**)**

3.7. $y''+2y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{\cos x}.$

(Жауабы: $y=\left(\ln|\cos x|+C_1\right)e^{-x}\cos x+\left(x+C_2\right)e^{-x}\sin x.$**)**

3.8. $y''-2y'+2y=\dfrac{e^x}{\sin^2 x}.$

(Жауабы: $y=\left(\ln\left(ctg\dfrac{x}{2}\right)+C_1\right)e^x\cos x+\left(\dfrac{1}{\sin x}+C_2\right)e^x\sin x.$**)**

3.9. $y''+2y'+2y=e^{-x}\operatorname{ctg}x.$

(Жауабы: $y=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x+e^{-x}\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|.$**)**

3.10. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.

(Жауабы: $y = \left(-x + C\right)_1 e^{-x} \cos x + \left(\ln\left|\sin x\right| + C_2\right) e^x \sin x.$ **)**

3.11. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$.

(Жауабы: $y = \left(-\ln x + C_1\right) e^x + \left(-\dfrac{1}{x} + C_2\right) x e^x.$ **)**

3.12. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

(Жауабы: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|.$ **)**

3.13. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$

(Жауабы: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln\left|\operatorname{tg} x\right|.$ **)**

3.14. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} x$.

(Жауабы: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{4} \sin x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|.$ **)**

3.15. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

(Жауабы: $y = \left(-x + C_1\right) e^x + \left(\ln x + C_2\right) x e^x.$ **)**

3.16. $y'' + 2y' + y = e^{-\frac{x}{x}}$.

(Жауабы: $y=\left(-x+C_1\right)e^{-x}+\left(\ln x+C_2\right)xe^{-x}$**.)**

3.17. $y''+y'=\dfrac{1}{\cos x}$.

(Жауабы: $y=\left(\ln\left|\cos x\right|+C_1\right)\cos x+\left(x+C_2\right)\sin x$**.)**

3.18. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

(Жауабы: $y=\left(-x+C_1\right)\cos x+\left(\ln\left|\sin x\right|+C_2\right)\sin x$**.)**

3.19. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$.

(Жауабы: $y=\left(-\dfrac{x}{2}+C_1\right)\cos 2x+\left(\dfrac{1}{4}\ln\left|\sin x\right|+C_2\right)\sin 2x$**.)**

3.20. $y''+4y=\operatorname{tg}2x$.

(Жауабы: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\cos 2x$**.)**

3.21. $y''+4y'+4y=e^{-\frac{2x}{x^3}}$. **(Жауабы:** $y=\left(C_1+C_2\dfrac{x+1}{(2x)}\right)e^{-2x}$**.)**

3.22. $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x^3}$. **(Жауабы:** $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\dfrac{e^{2x}}{2x}$**.)**

3.23. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

(Жауабы: $y=\left(-\frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}+2\sqrt{(x+1)^3}+C_1\right)e^{-x}+\left(2\sqrt{(x+1)^3}+C_2\right)xe^{-x}$. **)**

3.24. $y''+y=-\operatorname{ctg}^2 x$.

(Жауабы: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+2$. **)**

3.25. $y''-y'=e^{2x}\cdot\cos\left(e^x\right)$.

(Жауабы: $y=C_1+C_2e^x-\cos\left(e^x\right)$. **)**

3.26. $y''-y'=e^{2x}\cdot\sin\left(e^x\right)$.

(Жауабы: $y=C_1+C_2e^x-\sin\left(e^x\right)$. **)**

3.27. $y''+y=\operatorname{tg}^2 x$.

(Жауабы: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-2$. **)**

3.28. $y''+y=\frac{2}{\sin^2 x}$.

(Жауабы: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|-2$. **)**

3.29. $y''+2y'+5y=\frac{e^{-x}}{\sin 2x}$.

(Жауабы: $y=\left(-\frac{x}{2}+C_1\right)e^{-x}\cos 2x+\left(\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|+C_2\right)e^{-x}\sin 2x.$**)**

3.30. $y''+9y=\frac{1}{\cos 3x}.$

(Жауабы: $y=\left(\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+C_1\right)\cos 3x+\left(\frac{x}{3}+C_2\right)\sin 3x.$**)**

4

Екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек

4.1. $y''+y'=2x-1.$

(Жауабы: $y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x.$**)**

4.2. $y''-2y'+5y=10e^{-x}\cos 2x.$

(Жауабы: $y=\ e^x\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+e^{-x}\cos 2x.$**)**

4.3. $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x.$

(Жауабы: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}+3\cos 2x$ **.)**

4.4. $y''-12y'+36y=14e^{6x}.$

(Жауабы: $y=C_1e^{6x}+C_2xe^{6x}+7x^2e^{6x}.$**)**

4.5. $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$.

(Жауабы: $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+(4-2x)e^{-x}$.**)**

4.6. $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.

(Жауабы: $y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{-x}$.**)**

4.7. $y''+y=2\cos x-(4x+4)\sin x$.

(Жауабы: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+(x^2+2x)\cos x$.**)**

4.8. $y''+6y'+10y=74e^{3x}$.

(Жауабы: $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+2e^{3x}$.**)**

4.9. $y''-3y'+2y=3\cos x+19\sin x$.

(Жауабы: $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+6\cos x+\sin x$.**)**

4.10. $y''+6y'+9y=(48x+8)e^{x}$.

(Жауабы: $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+(3x-1)e^{x}$.**)**

4.11. $y''+5y'=72e^{2x}$. **(Жауабы:** $y=C_1+C_2e^{-5x}+3e^{2x}$.**)**

4.12. $y''-5y'-6y=3\cos x+19\sin x$.

(Жауабы: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}+\cos x-2\sin x$.**)**

4.13. $6y''-y'-y=3e^{2x}$. **(Жауабы:** $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{3}}+e^{2x}$.**)**

4.14. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.

(Жауабы: $y = e^{-4x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + \frac{1}{5}e^{5x}$.**)**

4.15. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$. **(Жауабы:** $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} + 3e^{-2x}$.**)**

4.16. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$.

(Жауабы: $y = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x - x^3 + 2x + 1$.**)**

4.17. $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$.

(Жауабы: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\left(\cos x - 2\sin x\right)$.**)**

4.18. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$.

(Жауабы: $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x} + \sin 3x$.**)**

4.19. $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$.

(Жауабы: $y = e^{-3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + 4\cos 2x - 3\sin 2x$.**)**

4.20. $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$.

(Жауабы: $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 4\cos 3x + 5\sin 3x$.**)**

4.21. $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$.

(Жауабы: $y = e^{2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right) + 5\cos 5x + \sin 5x$.**)**

4.22. $y'' - 4y' + 5y = \left(24\sin x + 8\cos x\right)e^{-2x}$.

(Жауабы: $y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-2x}\left(\cos x + \sin x\right).$ **)**

4.23. $y'' + 16y = 8\cos 4x.$

(Жауабы: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x \sin 4x.$ **)**

4.24. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27.$

(Жауабы: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x^4 - 3.$ **)**

4.25. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}.$

(Жауабы: $y = e^{6x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + \frac{1}{2}e^{6x}.$ **)**

4.26. $y'' + 4y' = e^x\left(24\cos 2x + 2\sin 2x\right).$

(Жауабы: $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + 2e^x \sin 2x.$ **)**

4.27. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}.$ **(Жауабы:** $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3x^2 e^{-x}.$ **)**

4.28. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74.$

(Жауабы: $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x\right) + x^2 - x + 2.$ **)**

4.29. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}.$ **(Жауабы:** $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{3}} + e^{2x}.$ **)**

4.30. $2y'' + 7y' + 3y = -222\sin 3x.$

(Жауабы: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + 7\cos 3x + 5\sin 3x.$ **)**

5

Екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек

5.1. $y''-8y'+17y=10e^{2x}$.

(Жауабы: $y=e^{4x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+2e^{2x}$.**)**

5.2. $y''+y'-6y=\left(6x+1\right)e^{3x}$.

(Жауабы: $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+\left(x-1\right)e^{3x}$.**)**

5.3. $y''-7y'+12y=3e^{4x}$. **(Жауабы:** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+3xe^{4x}$.**)**

5.4. $y''-2y'=6+12x-24x^2$.

(Жауабы: $y=C_1+C_2e^{2x}+4x^3+3x^2+3x$.**)**

5.5. $y''-6y'+34y=18\cos 5x+60\sin 5x$.**.**

(Жауабы: $y=e^{3x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)+2\cos 5x$.**)**

5.6. $y''-2y'=\left(4x+4\right)e^{2x}$. **(Жауабы:** $y=C_1+C_2e^{2x}+\left(x^2+x\right)e^{2x}$.**)**

5.7. $y''+2y'+y=4x^3+24x^2+22x-4$.**.**

(Жауабы: $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+4x^3-2x$.**)**

5.8. $y''-4y'=8-16x$. **(Жауабы:** $y=C_1+C_2e^{4x}+2x^2-x$.**)**

5.9. $y''-2y'+y=4e^{x}$. **(Жауабы:** $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+2x^2e^{x}$.**)**

5.10. $y'' - 8y' + 20y = 16\left(\sin 2x - \cos 2x\right).$

(Жауабы: $y = e^{4x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + \sin 2x.$**)**

5.11. $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x} \sin 2x.$

(Жауабы: $y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + \frac{3}{13} e^{-3x}(2\cos 2x + 3\sin 2x).$**)**

5.12. $y'' + 2y' - 3y = \left(12x^2 + 6x - 4\right)e^x.$

(Жауабы: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \left(x^3 - x\right)e^x.$**)**

5.13. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}.$

(Жауабы: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 3x^2 e^{-2x}.$**)**

5.14. $y'' + 3y' = 10 - 6x.$ **Жауабы:** $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - x^2 + 4x.$**)**

5.15. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3.$

(Жауабы: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} - 8x^3 + 4x.$**)**

5.16. $y'' + 4y' + 20y = -4\cos 4x - 52\sin 4x.$

(Жауабы: $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right) + 3\cos 4x - \sin 4x.$**)**

5.17. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5.$

(Жауабы: $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + x^2 - 8x + 7.$**)**

5.18. $y''+2y'+y=(12x-10)e^{-x}$.

(Жауабы: $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\left(2x^3-5x^2\right)e^{-x}$.**)**

5.19. $y''-4y=(-24x-10)e^{2x}$.

(Жауабы: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\left(3x^2+x\right)e^{2x}$.**)**

5.20. $y''+6y'+9y=72e^{3x}$. **(Жауабы:** $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+2e^{3x}$.**)**

5.21. $y''+16y=80e^{2x}$. **(Жауабы:** $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+4e^{2x}$.**)**

5.22. $y''+4y'=15e^{x}$. **(Жауабы:** $y=C_1+C_2e^{-4x}+3e^{x}$.**)**

5.23. $y''+y'-2y=9\cos x-7\sin x$.

(Жауабы: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+3\sin x-2\cos x$.**)**

5.24. $y''+2y'+y=(18x+8)e^{-x}$.

(Жауабы: $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\left(3x^3+4x^2\right)e^{-x}$.**)**

5.25. $y''-14y'+49y=144\sin 7x$.

(Жауабы: $y=C_1e^{7x}+C_2xe^{7x}+2\cos 7x$.**)**

5.26. $y''+9y=10e^{3x}$. **(Жауабы:** $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+e^{3x}$.**)**

5.27. $4y''-4y'+y=-25\cos x$.

(Жауабы: $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}+3\cos x+4\sin x$.**)**

5.28. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x.$

(Жауабы: $y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 e^{2x} + \cos 2x - 2\sin 2x.$ **)**

5.29. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}.$

(Жауабы: $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right) + e^{-x}.$ **)**

5.30. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x.$

(Жауабы: $y = C_1 e^{\frac{x}{4}} + C_2 e^{-x} + 2\sin x - \cos x.$ **)**

6. Дифференциалдық теңдеудің берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

6.1. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$

(Жауабы: $y = -2e^x - 4xe^x + 3\sin 2x.$ **)**

6.2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$

(Жауабы: $y = -6e^{3x} + 22xe^{3x} + x^2 - 3x + 5.$ **)**

6.3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$

(Жауабы: $y = e^{-x}\left(\cos x + 3\sin x\right) + x^2 + 2x.$ **)**

6.4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$

(Жауабы: $y = e^{3x}\left(2\cos 4x - 3\sin 4x\right) + \sin 4x.$**)**

6.5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7.$

(Жауабы: $y = 3e^{7x}\sin 2x + x^3 + x.$**)**

6.6. $y'' + 6y = e^x\left(\cos 4x - 8\sin 4x\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$

(Жауабы: $y = \sin 4x - \cos 4x + e^x\cos 4x.$**)**

6.7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

(Жауабы: $y = e^{2x}\left(\cos 4x - \dfrac{1}{4\sin 4x}\right) + xe^{2x}.$**)**

6.8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

(Жауабы: $y = e^{6x} - 2xe^{6x} + \cos 2x.$**)**

6.9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$

(Жауабы: $y = 4\cos x + 2\sin x + x^3 - 4x^2 + x - 2.$**)**

6.10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

(Жауабы: $y =$ $y = e^x - e^{-x} + \left(4x^2 - 3x\right)e^{-x}.$**)**

6.11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

(Жауабы: $y = -2e^{-4x} - 6xe^{-4x} + x^2 - 2x + 5.$**)**

6.12. $y''+10y'+34y=-9e^{-5x},\ \ y(0)=0,\quad y'(0)=6.$

(Жауабы: $y=e^{-5x}\left(\cos 3x+2\sin 3x\right)-e^{-5x}.$**)**

6.13. $y''-6y'+25y=(32x-12)\sin 3x-36x\cos 3x,\ \ y(0)=4,\ \ y'(0)=0.$

(Жауабы: $y=e^{3x}\left(4\cos 4x-3\sin 4x\right)+2x\sin 3x.$**)**

6.14. $y''+25y=e^{x}\left(\cos 5x-10\sin 5x\right),\ \ y(0)=3,\quad y'(0)=-4.$

(Жауабы: $y=2\cos 5x-\sin 5x+e^{x}\cos 5x.$**)**

6.15. $y''+2y'+5y=-8e^{-x}\sin 2x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=6.$

(Жауабы: $y=e^{-x}\left(2\cos 2x+3\sin 2x\right)+2xe^{-x}\cos 2x.$**)**

6.16. $y''-10y'+25y=e^{5x},\ \ y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

(Жауабы: $y=3e^{5x}-2xe^{5x}+x^{2}e^{5x}.$**)**

6.17. $y''+y'-12y=(16x+22)e^{4x},\quad y(0)=3,\quad y'(0)=5.$

(Жауабы: $y=e^{3x}+e^{-4x}+(2x+1)e^{4x}.$**)**

6.18. $y''-2y'+5y=5x^{2}+6x-12,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2.$

(Жауабы: $y=e^{x}\left(2\cos 2x-\sin 2x\right)+x^{2}+2x-2.$**)**

6.19. $y''+8y'+16y=16x^{3}+24x^{2}-10x+8,\quad y(0)=1,\ y'(0)=3.$

(Жауабы: $y=4xe^{-4x}+x^{3}-x+1.$**)**

6.20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$

(Жауабы: $y = e^x \sin 6x + 3xe^x \sin 6x.$ **)**

6.21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 14.$

(Жауабы: $y = 2e^{8x} - 3 + 4x^4 - 2x.$ **)**

6.22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(Жауабы: $y = \cos 6x + 8\sin 6x + 2x^3 - 2x.$ **)**

6.23. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

(Жауабы: $y = 4e^{-3x} - 7 + (4x + 3)e^{2x}.$ **)**

6.24. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 2.$

(Жауабы: $y = 2e^{6x} - 3e^{3x} - \sin x + \cos x.$ **)**

6.25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2.$

(Жауабы: $y = 3 + 2e^{-8x} - x^4 + 3x^3.$ **)**

6.26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7.$

(Жауабы: $y = e^x + 2e^{2x} - \cos x + 2\sin x.$ **)**

6.27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

(Жауабы: $y = 3 - e^{-2x} + x^3 - x^2.$ **)**

6.28. $y''+16y=32e^{4x}, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=0.$

(Жауабы: $y=\cos 4x-\sin 4x+e^{4x}.$**)**

6.29. $y''+5y'+6y=52\sin 2x, \quad y(0)=-2, \quad y'(0)=-2.$

(Жауабы: $y=2e^{-2x}+e^{-3x}-5\cos 2x+\sin 2x.$**)**

6.30. $y''-4y=8e^{2x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-8.$

(Жауабы: $y=3e^{-2x}-2e^{2x}+2xe^{2x}.$**)**

7. $f(x)$ функциясының түрі бойынша біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеудің дербес шешімінің құрылымын жазу керек.

7.1. $2y''-7y'+3y=f(x)$; **а)** $f(x)=(2x+1)e^{3x}$; **б)** $f(x)=\cos 3x.$

7.2. $3y''-7y'+2y=f(x)$; **а)** $f(x)=3xe^{2x}$;

б) $f(x)=\sin 2x-3\cos 2x.$

7.3. $2y''+y'-y=f(x)$; **а)** $f(x)=(x^2-5)e^{-x}$; **б)** $f(x)=x\sin x.$

7.4. $2y''-9y'+4y=f(x)$; **а)** $f(x)=-2e^{4x}$; **б)** $f(x)=e^{x}\cos 4x.$

7.5. $y''+49y=f(x)$; **а)** $f(x)=x^3+4x$; **б)** $f(x)=3\sin 7x.$

7.6. $3y''+10y'+3y=f(x)$; **а)** $f(x)=e^{-3x}$;

б) $f(x)=2\cos 3x-\sin 3x$.

7.7. $y''-3y'+2y=f(x)$; **а)** $f(x)=(x+2)e^{x}$; **б)** $f(x)=3\cos 4x$.

7.8. $y''-4y'+4y=f(x)$; **а)** $f(x)=e^{x}\sin 2x$; **б)** $f(x)=x^{2}-4$.

7.9. $y''-y'+y=f(x)$; **а)** $f(x)=e^{x}\cos x$; **б)** $f(x)=7x+2$.

7.10. $y''-3y'=f(x)$; **а)** $f(x)=2x^{2}-5x$; **б)** $f(x)=e^{-x}\sin 2x$.

7.11. $y''+3y'-4y=f(x)$; **а)** $f(x)=3xe^{-4x}$; **б)** $f(x)=x\sin x$.

7.12. $y''+36y=f(x)$; **а)** $f(x)=4xe^{-x}$; **б)** $f(x)=2\sin 6x$.

7.13. $y''-6y'+9y=f(x)$; **а)** $f(x)=(x-2)e^{3x}$; **б)** $f(x)=4\cos x$.

7.14. $4y''-5y'+y=f(x)$; **а)** $f(x)=(4x+2)e^{x}$; **б)** $f(x)=e^{x}\sin 3x$.

7.15. $4y''+7y'-2y=f(x)$; **а)** $f(x)=3e^{-2x}$; **б)** $f(x)=(x-1)\cos 2x$.

7.16. $y''-y'-6y=f(x)$; **а)** $f(x)=2xe^{3x}$; **б)** $f(x)=9\cos x-\sin x$.

7.17. $y''-16y=f(x)$; **а)** $f(x)=-3e^{4x}$; **б)** $f(x)=\cos x-4\sin x$.

7.18. $y''-4y'=f(x)$; **а)** $f(x)=(x-2)e^{4x}$; **б)** $f(x)=3\cos 4x$.

7.19. $y''-2y'+2y=f(x)$; **а)** $f(x)=(2x-3)e^{4x}$; **б)** $f(x)=e^{x}\sin x$.

7.20. $5y''-6y'+y=f(x)$; **а)** $f(x)=x^{2}e^{x}$; **б)** $f(x)=\cos x-\sin x$.

7.21. $5y''+9y'-2y=f(x)$;

а) $f(x)=x^3-2x$; **б)** $f(x)=2\sin 2x-3\cos 2x$.

7.22. $y''-2y'-15y=f(x)$; **а)** $f(x)=4xe^{3x}$; **б)** $f(x)=x\sin 5x$.

7.23. $y''-3y'=f(x)$; **а)** $f(x)=2x^3-4x$; **б)** $f(x)=2e^{3x}\cos x$.

7.24. $y''-7y'+12y=f(x)$; **а)** $f(x)=xe^{3x}$; **б)** $f(x)=3x\sin 2x$.

7.25. $y''+9y'=f(x)$; **а)** $f(x)=x^2+4x-3$; **б)** $f(x)=xe^{2x}\sin x$.

7.26. $y''-4y'+5y=f(x)$;

а) $f(x)=-2xe^{x}$; **б)** $f(x)=x\cos 2x-\sin 2x$.

7.27. $y''+3y'+2y=f(x)$;

а) $f(x)=(3x-7)e^{-x}$; **б)** $f(x)=\cos x-3\sin x$.

7.28. $y''-8y'+16y=f(x)$;

а) $f(x)=2xe^{4x}$; **б)** $f(x)=\cos 4x+2\sin 4x$.

7.29. $y''+y'-2y=f(x)$; **а)** $f(x)=(2x-1)e^{-x}$; **б)** $f(x)=3x\cos 2x$.

7.30. $y''+3y'-4y=f(x)$; **а)** $f(x)=6xe^{-x}$; **б)** $f(x)=x^2\sin 2x$.

10.3–ҮТ шығару үлгісі

Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:

1. а) $4y''-11y'+6y=0$; б) $4y''-4y'+y=0$;

в) $y''-2y'+37y=0$.

▼ Берілген теңдеулердің әрбіреуі үшін сипаттаушы теңдеу құрамыз және оны шешеміз. Сипаттаушы теңдеудің алынған түбірлерінің түрі бойынша (§ 10.9 1^0, 2^0- қараңыз) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін жазамыз:

а) $4\lambda^2-11\lambda+6=0$, түбірлері $\lambda_1=\frac{3}{4}$, $\lambda_2=-2$ әртүрлі нақты сандар. Сондықтан теңдеудің жалпы шешімі $y=C_1e^{\frac{3x}{4}}+C_2e^{2x}$;

б) $4\lambda^2-4\lambda+1=0$, түбірлері $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ – өзара тең нақты сандар, демек теңдеудің жалпы шешімі $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}$;

в) $\lambda^2-2\lambda+37=0$, түбірлері $\lambda_{1,2}=1\pm 6i$ түйіндес комплекс сандар, сондықтан теңдеудің жалпы шешімі мынау: $y=e^x\left(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x\right)$. ▲

Ескерту. § 10.9 1, 2, 3-мысалдарды қараңыз.

2. Сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:

$$y^{IV}-y=0,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=3,\quad y''(0)=y'''(0)=0.$$

▼ Сипаттаушы теңдеу құрып, оны шешеміз:

$$\lambda^4 - 1 = 0, \quad \left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i.$$

Бастапқы теңдеудің жалпы шешімі келесі түрге ие болады: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

Одан әрі есептейміз: $y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x,$

$$y'' = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x,$$

$$y''' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x.$$

Алғашқы шарттарды пайдалана отырып, C_1, C_2, C_3, C_4 мәндерін анықтау үшін жүйе құрамыз және оны шешеміз:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 5, \\ -C_1 + C_2 + C_4 &= 3, \\ C_1 + C_2 - C_3 &= 0, \\ -C_1 + C_2 - C_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2C_1 + 2C_2 &= 5, \\ -2C_1 + 2C_2 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

бұдан $C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = \frac{5}{2}, \quad C_4 = \frac{3}{2}.$

Бастапқы теңдеудің дербес шешімі келесі түрге ие болады: $y = \frac{1}{2} e^{-x} + 2e^{x} + \frac{5}{2} \cos x + \frac{3}{2} \sin x.$ ◄

Ескерту. § 10.9 1^0 *қараңыз.*

3. Дифференциалдық теңдеуді тұрақтыларды вариациялау әдісімен шешу керек: $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$.

▼ Біртекті теңдеуді шешеміз: $y''-y=0,\ \lambda^2-1=0,\ \lambda_1=-1,$ $\lambda_2=1.$ Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y_0=C_1e^{-x}+C_2e^x.$ Мұндағы C_1 мен C_2 тұрақтыларын x-тің функциясы деп аламыз, яғни, $y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^x.$ Мұндағы $C_1(x)$ пен $C_2(x)$ -ті табу үшін келесі жүйені пайдаланамыз: $\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x),\end{array}\right\}$ (§ 10.8 қараңыз). Біздің теңдеуіміз үшін бұл жүйе келесі түрде жазылады:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x=0,\\ -C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x=\dfrac{2e^x}{\left(e^x-1\right)}\end{array}\right\}.$$

Бұл жүйеден $C_2'(x),\quad C_1'(x),$ содан соң $C_2(x),\quad C_1(x)$ табамыз: $C_2'=\dfrac{1}{e^x-1},\ C_2(x)=\int\dfrac{dx}{e^x-1}=\left|\begin{array}{c} t=e^x,\ x=\ln t,\\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{array}\right|=\int\dfrac{dt}{t(t-1)}=$

$$=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|+C_2=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C_2=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C_2,$$

$$C_1'(x)=-C_2'(x)e^{2x}=-\frac{e^{2x}}{\left(e^x-1\right)},$$

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = e^x,\ dt = e^x dx, \\ x = \ln t \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{tdt}{t-1} = -\int \frac{t-1+1}{t-1}\,dt = -t - \ln|t-1| + C_1 = -e^x - \ln|e^x - 1| + C_1 .$$

Олай болса, бастапқы теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде жазылады: $y = \left(-e^x - \ln|e^x - 1| + C_1\right)e^{-x} + \left(\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C_2\right)e^x =$

$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^x + e^x \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| - e^{-x}\ln|e^x - 1| - 1.$$

Ескерту. § 10.8-мысалды қараңыз. ▲

4. Екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$.

▼ Сипаттаушы $k^2 - 3k - 4 = 0$ теңдеудің түбірлері $k_1 = 4$, $k_2 = -1$. Олай болса біртекті теңдеудің жалпы шешімі келесі формуламен анықталады: $y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$. Бастапқы теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 6xe^{-x}$ функциясы бойынша теңдеудің дербес шешімінің құрылымын жазамыз (§ 10.10 (3)-формуланы қараңыз): $\bar{y} = (Ax + B)e^{-x}x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^{-x}$. Мұнда $(Ax + B)e^{-x}$ өрнегі x-ке көбейтілді, өйткені $a + ib = -1$ бақылау саны – сипаттаушы теңдеудің түбірі. A мен B коэффициенттерін анықталмаған коэффициенттер әдісімен іздейміз. Ол үшін келесі туындыларды табамыз:

$$\overline{y}' = \left(2Ax + B\right)e^{-x} - \left(Ax^2 + Bx\right)e^{-x},$$

$$\overline{y}'' = 2Ae^{-x} + \left(Ax^2 + Bx\right)e^{-x} - 2\left(2Ax + b\right)e^{-x}.$$

Алынған өрнектерді бастапқы теңдеуге қоямыз және оның екі жақ бөлігін e^{-x} бөліп, содан соң x^2, x және x^0 айнымалдарының коэффициенттерін өзара теңестіреміз:

$$2A + Ax^2 + Bx - 4Ax - 2B - 6Ax - 3B + 3Ax^2 + 3Bx - \\ -4Ax^2 - 4Ax^2 - 4Bx = 6x$$

$$\left.\begin{array}{r|c} x^2 & A + 3A - 4A = 0, \\ x & B - 4A - 6A + 3B - 4B = 66 \\ x^0 & 2A - 2B - 3B = 0, \end{array}\right\}$$

Онда $\overline{y} = -\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}$ және берілген біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі келесі формуламен анықталады:

$$y = y_0 + \overline{y} = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}. \qquad \blacktriangleleft$$

Ескерту. (§ 10.10 1, 2, 3-мысалдарын қараңыз).

5. Екінші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + y' = 5x + \cos 2x.$

▼ Сипаттаушы теңдеудің түбірлерін табамыз: $k^2 + k = 0;\ k_1 = 0,$

$k_2 = -1$. Олай болса сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі келесі

түрге ие болады: $y_o = C_1 + C_2 e^{-x}$. Теңдеудің оң жақ бөлігіндегі $f(x) = 5x + \cos 2x$ функциясы – $f_1(x) = 5x$ және $f_2(x) = \cos 2x$ функциялардың қосындысы. Оларға екі дербес шешім сәйкес келеді: $\bar{y}_1 = Ax^2 + Bx$, $\bar{y}_2 = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x$, сондықтан

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = Ax^2 + Bx + A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x.$$

Туындыларды табамыз: $\bar{y}' = 2Ax + B - 2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x$,

$$\bar{y}'' = 2A - 4A_1 \cos 2x - 4B_1 \sin 2x.$$

Алынған өрнектерді бастапқы теңдеуге қойып, A, B, A_1, B_1 коэффициенттерін есептейміз:

$$2A - 4A_1 \cos 2x - 4B_1 \sin 2x + 2Ax + B - 2A_1 \sin 2x + 2B_1 \cos 2x =$$

$$= 5x + \cos 2x,$$

$$\begin{array}{c|l} x & 2A = 5, \\ x^0 & 2A + B = 0, \\ \cos 2x & -4A_1 + 2B_1 = 1, \\ \sin 2x & -2A_1 - 4B_1 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ 10B_1 = 1, \\ A_1 = -2B_1, \end{array}$$

бұдан $A = \frac{5}{2}$, $B = -5$, $A_1 = -\frac{1}{5}$, $B_1 = \frac{1}{10}$.

Сонымен, бастапқы теңдеудің дербес шешімі келесі түрге ие болады: $\bar{y} = \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x$, ал оның жалпы шешімі мынау: $y = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x$. ◄

Ескерту. § 10.10 4-мысалды қараңыз.

6. Дифференциалдық теңдеудің берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек:

$$y''+16y=(34x+13)e^{-x},\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=5.$$

▼ Сипаттаушы $\lambda^2+16=0$ теңдеуінің жорамал $\lambda_{1,2}=\pm 4i$ түбірлері бар. Сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі келесі формуламен анықталады: $y_o=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x,$ ал ал берілген теңдеудің дербес шешімін $\bar{y}=(Ax+B)e^{-x}$ түрінде іздейміз: $\bar{y}'=Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x}$, $\bar{y}''=-2Ae^{-x}+(Ax+B)e^{-x}.$ Алынған өрнектерді бастапқы теңдеуге қоямыз: $-2A+Ax+B+16Ax+16B=34x+13.$ Бұдан $A=2,\quad B=1$. Сонда $\bar{y}=(2x+1)e^{-x}$ және бастапқы теңдеудің жалпы шешімі келесі түрге ие болады: $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+(2x+1)e^{-x}.$

Алғашқы $y(0)=-1,\quad y'(0)=5$ шарттарын пайдалана отырып, C_1 мен C_2 мәндерін есептеу үшін жүйе құрамыз: $\left.\begin{array}{l} y(0)=-1=C_1+1,\\ y'(0)=5=4C_2+2-1,\end{array}\right\}$. Оның шешімі: $C_1=-2,\quad C_2=1$. Бұл мәндерді жалпы теңдеуге қойып, бастапқы теңдеудегі дербес шешімін табамыз: $y=\sin 4x-2\cos 4x+(2x+1)e^{-x}$. ◄

7. Сызықтық біртекті емес $y''-9y=f(x)$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін f(x) функциясының түрі бойынша анықтау керек және оны жазу керек:

а) $f(x)=(5-x)e^{3x}$; ***б)*** $f(x)=x\sin 2x$.

▼ Сипаттаушы теңдеудің түбірлерін табамыз: $k^2-9=0$, $k_1=-3,\ \ k_2=3.$

а) $f(x)=(5-x)e^{3x}$ болғандықтан, дербес шешім келесі түрге ие болады (§ 10.10 (3)-формуланы қараңыз): $\bar{y}=(Ax+B)e^{3x}x=$ $=\left(Ax^2+Bx\right)e^{3x}$. Мұндағы x көбейткішінің болу себебі – бақылау $a+ib=3$ саны сипаттаушы теңдеудің түбірі;

б) $f(x)=x\sin 2x$ болғандықтан, (§ 10.10 (3)-формула)

$$\bar{y}=\left(A_1x+B_1\right)\cos 2x+\left(A_2x+B_2\right)\sin 2x.$$ ◄

10.4–ҮТ

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін екі тәсілмен шешу керек:
а) жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеуге келтіру;
б) сипаттама теңдеу арқылы

1.1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t} \\ y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^{t} \end{cases}$ **.)**

1.2. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t} \\ y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t} \end{cases}$ **.)**

1.3. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{3t} - \frac{1}{4} C_2 e^{-3t} \end{cases}$ **.)**

1.4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t} \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^{-3t} - C_2 e^{t} \end{cases}$ **.)**

1.5. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{5t} \\ y = C_1 - 4C_2 e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.6. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} \\ y = 3C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} \end{cases}$ **.)**

1.7. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t} \\ y = 3C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.8. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} \\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} \end{cases}$ **.)**

1.9. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} \end{cases}$ **.)**

1.10. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} \\ y = -C_1 e^{t} - \dfrac{3}{2} C_2 e^{2t} \end{cases}$ **.)**

1.11. $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-2t} \\ y = C_1 e^{t} + C_2 \end{cases}$ **.)**

1.12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t} \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{8t} \end{cases}$ **.)**

1.13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t} \\ y = 2C_1 e^{2t} + \dfrac{1}{3} C_2 e^{7t} \end{cases}$ **.)**

1.14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ **Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \end{cases}$ **.)**

1.15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t} \\ y = -C_1 e^{-t} + \dfrac{5}{3} C_2 e^{7t} \end{cases}$ **.)**

1.16. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t} \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 + 3C_2 e^{7t} \end{cases}$ **.)**

1.17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{9t} \\ y = -C_1 e^{t} + C_2 e^{9t} \end{cases}$ **.)**

1.18. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.19. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{-t} + \dfrac{1}{2} C_2 e^{3t} \end{cases}$ **.)**

1.20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t} \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{7t} \end{cases}$ **.)**

1.21. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = -\dfrac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t} \\ y = -C_1 e^{4t} + \dfrac{1}{3} C_2 e^{8t} \end{cases}$ **.)**

1.23. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t} \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{6t} \\ y = -\dfrac{1}{4} C_1 + \dfrac{1}{2} C_2 e^{6t} \end{cases}$ **.)**

1.25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t} \\ y = -\dfrac{3}{4} C_1 e^{-t} + \dfrac{1}{2} C_2 e^{9t} \end{cases}$ **.)**

1.26. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} \end{cases}$ **.)**

1.27. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} \\ y = C_1 e^{-4t} - \dfrac{1}{5} C_2 e^{2t} \end{cases}$ **.)**

1.28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} \\ y = \dfrac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} \end{cases}$ **.)**

1.29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} \\ y = -\dfrac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t} \end{cases}$ **.)**

1.30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$ **(Жауабы:** $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t} \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t} \end{cases}$ **.)**

10.4 –ҮТ шығару үлгісі

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесін екі тәсілмен:

а) жоғары ретті дифференциалдық теңдеуге келтіру;

б) сипаттаушы теңдеу көмегімін шешу керек:

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \quad x = x(t), \quad x' = \dfrac{dx}{dt}, \\ y' = -2x - 5y, \quad y = y(t), \quad y' = \dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

▼**а)** Бірінші теңдеуді дифференциалдаймыз: $x'' = -7x' + y'$.

Мұндағы y'-ты оның екінші теңдеудегі өрнегімен ауыстырамыз: $x'' = -7x' - 2x - 5y$. Бұл теңдеудегі y-ті бірінші теңдеуден табылған $y = x' + 7x$ өрнегімен ауыстырамыз. Сонда екінші ретті дифференциалдық теңдеу аламыз: $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$, $x'' + 12x' + 37x = 0$. Соңғы теңдеуді бізге белгілі әдіспен шешеміз (§ 10.9 қараңыз):

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 37} = -6 \pm i,$$

$$x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

Бұдан $x'' = -6e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-6t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right)$.

x пен x' - үшін алынған өрнектерді $y = x' + 7x$ -ке қоя отырып,

$$y = -6e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-6t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right) + \\ + 7e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

аламыз. Олай болса келесі функциялар ізделінген шешім болады:

$$x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right),$$

$$y = e^{-6t}\left(C_1\left(\cos t - \sin t\right) + C_2\left(\cos t + \sin t\right)\right);$$

б) Сипаттаушы теңдеу құрамыз және оны шешеміз:

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (7+\lambda)(5+\lambda) + 2 = 0,$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -6 \pm i.$$

Бірінші түбір $\lambda_1 = -6 + i$ үшін келесі жүйені аламыз:

$$\left.\begin{aligned} (-7+6-i)\alpha + \beta &= 0, \\ -2\alpha + (-5+6-i)\beta &= 0, \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} -(1+i)\alpha + \beta &= 0, \\ -2\alpha + (1-i)\beta &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

Мұнда $\alpha = 1$, $\beta = 1+i$ деп алып, бастапқы теңдеуден бірінші дербес шешімін табамыз: $x_1 = e^{(-6+i)t}$, $y_1 = (1+i)e^{(-6+i)t}$.

Екінші түбір $\lambda_2 = -6 - i$ үшін келесі жүйені аламыз:

$$\left.\begin{aligned} (-7+6+i)\alpha + \beta &= 0, \\ -2\alpha + (-5+6+i)\beta &= 0, \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} (-1+i)\alpha + \beta &= 0, \\ -2a + (1+i)\beta &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Мұнда $\alpha = 1$ және $\beta = 1-i$ деп алып, бастапқы теңдеудің екінші дербес шешімін аламыз: $x_2 = e^{(-6-i)t}$, $y_2 = (1-i)e^{(-6-i)t}$. Шешімдердің жаңа фундаменталды (іргелі) жүйесіне келесі формулалар бойынша өтеміз:

$$\overline{x}_1 = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, \quad \overline{x}_2 = \frac{(x_1 - x_2)}{(2i)},$$

$$\overline{y}_1 = \frac{(y_1 + y_2)}{2}, \quad \overline{y}_2 = \frac{(y_1 - y_2)}{(2i)}.$$

Эйлер формуласын: $e^{(\alpha \pm \beta i)t} = e^{at}(\cos\beta t \pm i \sin\beta t)$, пайдалана отырып, $\overline{x}_1 = e^{-6t}\cos t$, $\overline{x}_2 = e^{-6t}\sin t$,

$\overline{y}_1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t)$, $\overline{y}_2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t)$ аламыз.

Бастапқы теңдеудің жалпы шешімі $x = C_1\overline{x}_1 + C_2\overline{x}_2$, $y = C_1\overline{y}_1 + C_2\overline{y}_2$, яғни $x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$,

$$y = e^{-6t}\left(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)\right). \quad \blacktriangleleft$$

Еселі интегралдар. Векторлық анализ

11.1–ҮТ

1. Екі еселі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ интегралды: 1) сыртқы интегралы х бойынша интегралданатын; 2) сыртқы интегралы у бойынша интегралданатын қайталама интеграл түрінде, екі тәсілмен жазыңыз. Мұндағы D интегралдау аймағы көрсетілген сызықтармен шенелген.

1.1. D: $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\geq 0$.

1.2. D: $x^2=2y$, $5x-2y-6=0$.

1.3. D: $x=\sqrt{8-y^2}$, $y\geq 0$, $y=x$.

1.4. D: $x\geq 0$, $y\geq 0$, $y\leq 1$, $y=\ln x$.

1.5. D: $x^2=2-y$, $x+y=0$.

1.6. D: $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$.

1.7. D: $y=x^2-2$, $y=x$.

1.8. D: $x\geq 0$, $y\geq 1$, $y\leq 3$, $y=x$.

1.9. D: $y^2=2x$, $x^2=2y$, $x\leq 1$.

1.10. D: $x\geq 0$, $y\geq x$, $y=\sqrt{9-x^2}$.

1.11. D: $y^2=2-x$, $y=x$.

1.12. D: $x=\sqrt{2-y^2}$, $x=y^2$, $y\ge 0$.

1.13. D: $y\ge 0$, $x+2y-12=0$, $y=\lg x$.

1.14. D: $x\le 0$, $y\ge 1$, $y\le 3$, $y=-x$.

1.15. D: $y=0$, $y\ge x$, $y=-\sqrt{2-x^2}$.

1.16. D: $y\ge 0$, $x=\sqrt{y}$, $y=\sqrt{8-x^2}$.

1.17. D: $y=-x$, $y^2=x+3$.

1.18. D: $y=\sqrt{4-x^2}$, $x\ge 0$, $x=1$, $y=0$.

1.19. D: $x=-1$, $x=-2$, $y\ge 0$, $y=x^2$.

1.20. D: $y\le 0$, $x^2=-y$, $x=\sqrt{1-y^2}$.

1.21. D: $y\ge 0$, $y\le 1$, $y=x$, $x=-\sqrt{4-y^2}$.

1.22. D: $x\le 0$, $y=1$, $y=4$, $y=-x$.

1.23. D: $y=3-x^2$, $y=-x$.

1.24. D: $x=0$, $x=-2$, $y\ge 0$, $y=x^2+4$.

1.25. D: $x=0$, $y=0$, $y=1$, $(x-3)^2+y^2=1$.

1.26. D: $x=\sqrt{9-y^2}$, $y=x$, $y\ge 0$.

1.27. $D:\quad x+2y-6=0,\quad y=x,\quad y\geq 0.$

1.28. $D:\quad y=-x,\quad 3x+y=3,\quad y=3.$

1.29. $D:\quad x\geq 0,\quad y=1,\quad y=-1,\quad y=\log_{1/2} x.$

1.30. $D:\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad y=1,\quad x=\sqrt{4-y^2}.$

2. Екі еселі интегралды көрсетілген сызықтармен шенел-ген D аймағы бойынша есептеңіз.

2.1. $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy,\quad D:\quad y=x^2,\quad x=y^2.$

2.2. $\iint\limits_D xy^2dxdy,\quad D:\quad y=x^2,\quad y=2x.$

2.3. $\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy,\quad D:\quad y^2=x,\quad y=x.$

2.4. $\iint\limits_D x^2ydxdy,\quad D:\quad y=2-x,\quad y=x,\quad x\geq 0.$

2.5. $\iint\limits_D \left(x^3-2y\right)dxdy,\quad D:\quad y=x^2-1,\quad x\geq 0,\quad y\leq 0.$

2.6. $\iint\limits_D \left(y-x\right)dxdy,\quad D:\quad y=x,\quad y=x^2.$

2.7. $\iint\limits_D \left(1+y\right)dxdy,\quad D:\quad y^2=x,\quad 5y=x.$

2.8. $\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy,\quad D:\quad y=x^2-1,\quad y=-x^2+1.$

2.9. $\iint\limits_D x(y-1)\,dxdy, \quad D: \quad y=5x, \quad y=x, \quad x=3.$

2.10. $\iint\limits_D (x-2)\,ydxdy, \quad D: \quad y=x, \quad y=\frac{1}{2}x, \quad x=2.$

2.11. $\iint\limits_D \left(x-y^2\right)dxdy, \quad D: \quad y=x^2, \quad y=1.$

2.12. $\iint\limits_D x^2 ydxdy, \quad D: \quad y=2x^3, \quad y=0, \quad x=1.$

2.13. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy, \quad D: \quad x=y^2, \quad x=1.$

2.14. $\iint\limits_D xydxdy, \quad D: \quad y=x^3, \quad y=0, \quad x=2.$

2.15. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy, \quad D: \quad y=x^3, \quad y=8, \quad y=0, \quad x=3.$

2.16. $\iint\limits_D x(2x+y)\,dxdy, \quad D: \quad y=1-x^2, \quad y\geq 0.$

2.17. $\iint\limits_D y(1-x)\,dxdy, \quad D: \quad y^3=x, \quad y=x, \ x\geq 0.$

2.18. $\iint\limits_D xy^3dxdy, \quad D: \quad y^2=1-x, \quad x\geq 0.$

2.19. $\iint\limits_D x(y+5)\,dxdy, \quad D: \quad y=x+5, \quad x+y+5=0, \quad x\leq 0.$

2.20. $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy, \quad D: \quad y=x^2-1, \quad y=3.$

2.21. $\iint\limits_D (x+1)y^2 dxdy, \quad D: \quad y=3x^2, \quad y=3.$

2.22. $\iint\limits_D xy^2 dxdy, \quad D: \quad y=x, \quad y=0, \quad x=1.$

2.23. $\iint\limits_D \left(x^3+y\right) dxdy, \quad D: \quad x+y=1, \quad x+y=2, \quad x\le 1, \quad x\ge 0.$

2.24. $\iint\limits_D xy^3 dxdy, \quad D: \quad y=x^3, \quad y\ge 0, \quad y=4x.$

2.25. $\iint\limits_D \left(x^3+3y\right) dxdy, \quad D: \quad x+y=1, \quad y=x^2-1, \quad x\ge 0.$

2.26. $\iint\limits_D xydxdy, \quad D: \quad y=\sqrt{x}, \quad y=0, \quad x+y=2.$

2.27. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2} dxdy, \quad D: \quad y=x, \quad xy=1, \quad y=2.$

2.28. $\iint\limits_D y\left(1+x^2\right) dxdy, \quad D: \quad y=x^3, \quad y=3x.$

2.29. $\iint\limits_D y^2 (1+2x) dxdy, \quad D: \quad x=2-y^2, \quad x=0.$

2.30. $\iint\limits_D e^y dxdy, \quad D: \quad y=\ln x, \quad y=0, \quad x=2.$

3. Полярлық координаттарды пайдаланып қайталама интегралды есептеңіз

3.1. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy.$

3.2. $\int_{-\sqrt{3}}^1 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

3.3. $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

3.4. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy.$

3.5. $\int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx.$

3.6. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2}dy.$

3.7. $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dy.$

3.8. $\int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} tg\left(x^2+y^2\right)dy.$

3.9. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\left(x^2+y^2\right)dy.$

3.10. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$

3.11. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy.$

3.12. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(1+x^2+y^2\right)dy.$

3.13. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}.$

3.14. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.15. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R-x^2}}^0 \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

3.16. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.17. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.18. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2} dy.$

3.19. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\, ctg\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.20. $\int\limits_{-3}^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2} dy.$

3.21. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \cos\left(x^2+y^2\right) dy.$

3.22. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right) dy.$

3.23. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy.$

3.24. $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dy.$

3.25. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right) dy.$

3.26. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$

3.27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

3.28. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dy$.

3.29. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right) dy.$

3.30. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

4. Берілген сызықтармен шенелген жазық D аймағының ауданын есептеңіз

4.1. D: $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y \geq 0$. $\left(\textbf{Жауабы:} \frac{10}{3}\right)$

4.2. D: $y = 6x^2$, $x + y = 2$, $x \geq 0$. $\left(\textbf{Жауабы:} \frac{5}{8}\right)$

4.3. D: $y^2 = x + 2$, $x = 2$. $\left(\textbf{Жауабы:} \frac{32}{3}\right)$

4.4. D: $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$. $\left(\textbf{Жауабы:} \frac{16}{3}\right)$

4.5. D: $y=\dfrac{8}{x^2+4}$, $x^2=4y$. $\left(\textbf{Æàóàáû}: 2\pi-\dfrac{4}{3}\right)$

4.6. D: $y=x^2+1$, $x+y=3$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{9}{2}\right)$

4.7. D: $y^2=4x$, $x^2=4y$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{16}{3}\right)$

4.8. D: $y=\cos x$, $y\le x+1$, $y\ge 0$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{3}{2}\right)$

4.9. D: $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\ge 0$, $\left(\textbf{Жауабы}: 2\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

4.10. D: $y=x^2+2$, $x\ge 0$, $x=2$, $y=x$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{14}{3}\right)$

4.11. D: $y=4x^2$, $9y=x^2$, $y\le 2$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{20\sqrt{2}}{3}\right)$

4.12. D: $y=x^2$, $y=-x$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{1}{6}\right)$

4.13. D: $x=y^2$, $x=\dfrac{3}{4}y^2+1$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{8}{3}\right)$

4.14. D: $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$

4.15. D: $y=x^2+4x$, $y=x+4$. $\left(\textbf{Жауабы}: \dfrac{125}{6}\right)$

4.16. D: $2y=\sqrt{x}$, $x+y=5$, $x\ge 0$ (**Жауабы:** $\frac{28}{3}$)

4.17. D: $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=2$, $x=0$. $\left(\text{**Жауабы:** } \frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}\right)$

4.18. D: $y=-2x^2+2$, $y\ge -6$. (**Жауабы:** $\frac{64}{3}$)

4.19. D: $y^2=4x$, $x=8/\left(y^2+4\right)$. $\left(\text{**Жауабы:** } 2\pi-\frac{4}{3}\right)$

4.20. D: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$. (**Жауабы:** 9)

4.21. D: $x=y^2+1$, $x+y=3$. $\left(\text{**Жауабы:** } \frac{9}{2}\right)$

4.22. D: $x^2=3y$, $y^2=3x$. $\left(\text{**Жауабы:** } 3\right)$

4.23. D: $x=\cos y$, $x\le y+1$, $x\ge 0$. (**Жауабы:** $\frac{1}{2}$)

4.24. D: $x=4-y^2$, $x-y+2=0$. $\left(\text{**Жауабы:** } \frac{125}{6}\right)$

4.25. D: $x=y^2$, $x=\sqrt{2-y^2}$. $\left(\text{**Жауабы:** } \frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)$

4.26. D: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, $y\le \frac{1}{2}x$, $y\ge 0$. (**Æàóàáû:** $\frac{\pi}{4}$)

4.27. D: $y^2=4-x$, $y=x+2$, $y=2$, $y=-2$. $\left(\text{**Жауабы:** } \frac{56}{3}\right)$

4.28. D: $y = x^2$, $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$. (**Жауабы :** $\frac{8}{3}$)

4.29. D: $x = y^2$, $y^2 = 4 - x$. $\left(\textbf{Жауабы :} \frac{16\sqrt{2}}{3}\right)$

4.30. D: $xy = 1$, $x^2 = y$, $y = 2$, $x = 0$ $\left(\textbf{Жауабы :} \frac{2}{3} + \ln 2\right)$

5. Берілген сызықтармен шенелген жазық фигураның ауданын екі еселі интегралдарды пайдаланып полярлық координаттар бойынша есептеңіз

5.1. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(4x^2 + y^2\right)$.

5.2. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2x^2y^2$.

5.3. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2x^2(4x^2 + 3y^2)$.

5.4. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(3x^2 + 2y^2\right)$.

5.5. $x^4 - y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^3$.

5.6. $\rho = a\sin^2 2\varphi$

5.7. $\rho = a\sin^2\varphi$

5.8. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$

5.9. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(2x^2 + 3y^2\right)$.

5.10. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(5x^2 + 3y^2\right)$.

5.11. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(7x^2 + 5y^2\right)$.

5.12. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$.

5.13. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2$.

5.14. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^4y^2$.

5.15. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^4x^2$.

5.16. $\rho = a\cos^2\varphi$

5.17. $\rho^2 = a^2(1+\sin^2\varphi)$ **5.18.** $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^4.$

5.19. $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4\left(3x^2+4y^2\right).$ **5.20.** $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^2y^2.$

5.21. $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2(x^4+y^4).$ **5.22.** $\left(x^2+y^2\right)^3 = 2ay^3.$

5.23. $\left(x^2+y^2\right)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2).$ **5.24.** $\rho = a\sin 2\varphi$

5.25. $\rho = a\cos 5\varphi$ **5.26.** $\rho = 4(1+\cos\varphi)$

5.27. $\rho = 2a(2+\cos\varphi)$ **5.28.** $\rho^2 = a^2\cos 3\varphi$

5.29. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ **5.30.** $\rho = a\sin 3\varphi$

6. Берілген беттермен шенелген дененің көлемін есептеңіз

6.1. $z = x^2+y^2,\quad x+y=1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$ (**Жауабы :** $\frac{1}{6}$)

6.2. $z = 2-(x^2+y^2),\quad x+2y=1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$ (**Жауабы :** $\frac{53}{96}$)

6.3. $z = x^2,\quad x-2y+2=0,\quad x+y-7=0,\quad z\ge 0.$ (**Жауабы :** 32)

6.4. $z = 2x^2+3y^2,\quad y=x^2,\quad y=x,\quad z\ge 0.$ (**Жауабы :** $\frac{29}{140}$)

6.5. $z = 2x^2+y^2,\quad y\le x,\quad y=3x,\quad x=2,\quad z\ge 0.$ (**Жауабы :** $\frac{152}{3}$)

6.6. $z = x, \quad y = 4, \quad x = \sqrt{25 - y^2} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** $\frac{118}{3}$)

6.7. $y = \sqrt{x}, \quad y = x, \quad x + y + z = 2, \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** $\frac{11}{60}$)

6.8. $y = 1 - x^2, \quad x + y + z = 3, \quad y \geq 0, \qquad z \geq 0.$ (**Жауабы :** $\frac{104}{30}$)

6.9. $z = 2x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** 64)

6.10. $z = 4 - x^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** 3π)

6.11. $2x + 3y - 12 = 0, \quad 2z = y^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** 16)

6.12. $z = 10 + x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x = 1, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** $\frac{65}{12}$)

6.13. $z = x^2, \quad x + y = 6, \quad y = 2x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** 4)

6.14. $z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \quad y = x^2 - 1, \quad y = 1 \quad z \geq 0$ (**Жауабы :** $\frac{264\sqrt{2}}{35}$)

6.15. $3y = \sqrt{x}, \quad y \leq x, \quad x + y + z = 10, \quad y = 1, \quad z = 0.$ (**Жауабы :** $\frac{303}{20}$)

6.16. $y^2 = 1 - x, \quad x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad z = 0.$ (**Жауабы :** $\frac{49}{60}$)

6.17. $y = x^2, \quad x = y^2, \quad z = 3x + 2y + 6, \qquad z = 0.$ (**Жауабы :** $\frac{11}{4}$)

6.18. $x^2 = 1 - y, \quad x + y + z = 3, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ (**Жауабы :** $\frac{52}{15}$)

6.19. $x = y^2, \quad x = 1, \quad x + y + z = 4, \qquad z = 0.$ **(Жауабы :** $\frac{68}{15}$**)**

6.20. $z = 2x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{1}{4}$**)**

6.21. $y = x^2, \quad y = 4, \quad z = 2x + 5y + 10, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{704}{3}$**)**

6.22. $y = 2x, \quad x + y + z = 2, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{4}{9}$**)**

6.23. $y = 1 - z^2, \quad y = x, \quad y = -x, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{8}{15}$**)**

6.24. $x^2 + y^2 = 4y, \quad z^2 = 4 - y, \quad z \geq 0$ **(Жауабы :** $\frac{256}{15}$**)**

6.25. $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$ **(Жауабы :** $\frac{3}{2}\pi$**)**

6.26. $y = x^2, \quad z = 0, \quad y + z = 2.$ **(Жауабы :** $\frac{32}{15}\sqrt{2}$**)**

6.27. $z^2 = 4 - x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{256}{15}$**)**

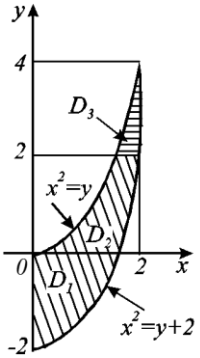
6.28. $z = x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x \geq 0, \quad y = 0, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{7}{12}$**)**

6.29. $z = y^2, \quad x + y = 1, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{1}{12}$**)**

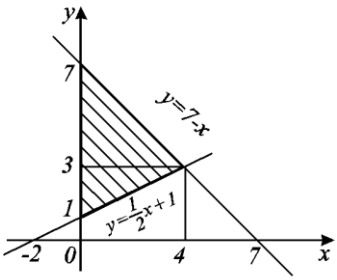
6.30. $y^2 = x, \quad x = 3, \quad z = x, \quad z \geq 0.$ **(Жауабы :** $\frac{36\sqrt{3}}{5}$**)**

11.1–тапсырманы шығару үлгісі

1. Екі еселі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ интегралын екі әдіспен қайталама интеграл арқылы өрнектеу керек: 1-әдіс) қайталама интегралдың сыртқысы x бойынша интегралданады; 2-әдіс) қайталама интегралдың сыртқысы y бойынша интегралданады. Мұнда D аймағы $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt{2+y}$, $x = 0, x = 2$ сызықтарымен шенелген.



66-сурет



67-сурет

▼ $x^2 = y + 2, \; x^2 = y$ параболалары және $x = 0, \; x = 2$ түзулерімен шенелген D аймағы 66-суретте бейнеленген. Сондықтан

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,y)dy =$$

$$= \int_{-2}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{2} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)d\overline{x} \ . \ \blacktriangleleft$$

Ескерту. 11.3.1.п., 1 және 2-мысалдарды қараңыз.

2. Екі еселі $\iint (x-2y)dxdy$ интегралын $x=0,\ y=z-x,$ $y=\frac{1}{2}x+1$ сызықтарымен шенелген D аймағы бойынша есептеу керек.

► D аймағы 67-суретте бейнеленген. Егер сыртқы интегралдауды y бойынша, ал ішкісін x бойынша таңдасақ, онда екі еселі интеграл жалғыз қайталама интегралмен өрнектеледі:

$$\iint\limits_{D} f(x-2y)dxdy = \int_{0}^{4} dx \int_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} (x-2y)\,dy = \int_{0}^{4} \left(xy-y^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} dx =$$

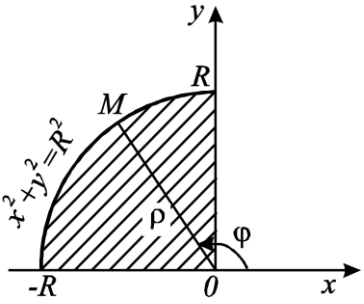
$$= \int_{0}^{4} \left(7x - x^2 - 49 + 14x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx =$$

$$= \int_{0}^{4} \left(-\frac{9}{4}x^2 + 21x - 48\right) dx = \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 48x\right)\Big|_{0}^{4} = -72 \ . \blacktriangleleft$$

Ескерту 11.3.1 п., 2-мысалды қараңыз.

3. ***олярлық координаттарды пайдаланып, екі еселі*** $I=\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ ***интегралды есептеу керек. Оның*** $R=1$ ***сәйкес мәнін табу керек.***

► Интегралдау аймағы $D:\ x=-R,\ \ x=0,\ y=0,\ y=\sqrt{R^2-x^2}$ сызықтарымен шенелген (68-сурет). Полярлық координаттарға өтеміз: $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}\ \ I=\rho$.



68-сурет

Суреттен $0\le\rho\le R,\ \ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$ болатынын көруге болады. Олай болса $I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\rho d\rho=\left|\begin{matrix}u=\ln(1+\rho),du=d\rho/(1+\rho),\\ dv=d\rho,v=\rho,\end{matrix}\right|=$

$$=\rho\Big|_{\pi/2}^{\pi}\left(\rho\ln(1+\rho)\Big|_0^R-\int\limits_0^R\frac{\rho}{1+\rho}d\rho\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R)-\rho\Big|_0^R+\ln(1+\rho)\Big|_0^R\right)=\frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R)-R+\ln(1+R)\right).$$

Мұнда $R=1$ деп алсақ, $I=\frac{\pi}{2}\left(2\ln 2-1\right)$. ◄

№4. $y=x^2-3x$ ***және*** $3x+y-4=0$ ***сызықтарымен шенелген фигура ауданын табу керек.***

► Берілген жазық фигура төменнен $y=x^2-3x$ параболасымен, жоғарыдан $3x+y-4=0$ түзуімен шенелген (69-сурет). Олай болса $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2-3x}^{4-3x}dy=\int\limits_{-2}^{2}\left(4-3x-x^2+3x\right)dx=$

$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}. \quad ◄$$

№5. Екі еселі интегралда полярлық координаттарды пайдаланып, $\left(x^2+y^2\right)^2=2y^3$ сызығымен шенелген фигура ауданын табу керек.

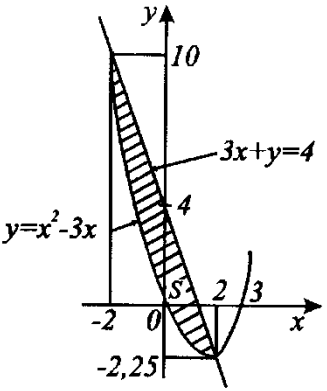
► Сызықты полярлық координаттар бойынша жазамыз: $\rho=2\sin^3\varphi$. Бұл сызықпен шенелген D аймағы 70-суретте бейнеленген. O полюсі D аймағының шекарасында болғандықтан, $D\colon 0\le\varphi\le\pi$, $0\le\rho\le 2\sin^3\varphi$. Олай болса

$$S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{2\sin^3\varphi}\rho d\rho=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\sin^3\varphi}=$$

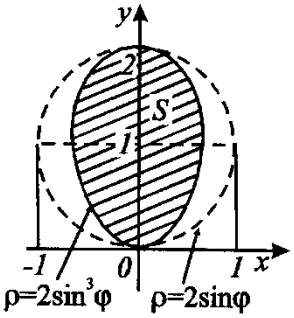
$$=2\int\limits_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos 2\varphi\right)^3 d\varphi=$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(1-3\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi-\cos^3 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\pi-\frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi-\int_0^{\pi}\cos 2\varphi\left(1-\sin^2 2\varphi\right)d\varphi\right]=\frac{5}{8}\pi\ .$$



69-сурет



70-сурет

▲

№6. $z=\sqrt{1-y},\quad y=x,\quad y=-x,\quad z=0$ ***беттерімен шенелген дененің көлемін табу керек.***

▼ Берілген дене жоғарыдан $z=\sqrt{1-y}$ параболалық цилиндрмен шенелген. Олай болса

$$V=\iint_D\sqrt{1-y}\,dxdy=2\int_0^1 dy\int_0^y\sqrt{1-y}\,dx=2\int_0^1\sqrt{1-y}\ \cdot x\Big|_0^y dy=2\int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy=$$

$$=\ \left|\sqrt{1-y}=t,\ y=1-t^2,\ dy=-2dt,\ y=0\ \textit{болса}\ t=1,\ y=1\ \textit{болса}\ t=0\right|=$$

$$= 2\int_0^1 \left(1-t^2\right)t\left(-2tdt\right) = -4\int_1^0 \left(t^2-t^4\right)dt = -4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_1^0 = \frac{8}{15}. \quad \blacktriangleleft$$

11.2–YT

1. V аймағы көрсетілген беттермен шенелген. Интегралдау аймағын сызыңыз. Үш еселі $\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz$ интегралының интегралдау шектерін қойыңыз.

1.1. $V: x=2, y=4x, y=3\sqrt{x}; z\geq 0,\ z=4$.

1.2. $V: x=1, y=3x, y\geq 0; z\geq 0, z=2\left(x^2+y^2\right)$.

1.3. $V: x=1, y=4x, z\geq 0, z=\sqrt{3y}$.

1.4. $V: x=3, y=x, y\geq 0; z\geq 0, z=3x^2+y^2$.

1.5. $V: y=2x, y=2; z\geq 0, z=2\sqrt{x}$.

1.6. $V: x=0, y=x, y=5; z\geq 0, z=2x^2+y^2$.

1.7. $V: x\geq 0, y=2x, y=1; z\geq 0, x+y+z=3$.

1.8. $V: x\geq 0, y=3x, y=3; z\geq 0, x=3\sqrt{z}$.

1.9. $V: x=5, y=\frac{x}{5}, y\geq 0; z\geq 0, z=x^2+5y^2$.

1.10. $V: x=2, y=4x, z\geq 0, y=2\sqrt{z}$.

1.11. $V: x=3, y=\dfrac{x}{3}, y\geq 0; z\geq 0, z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

1.12. $V: x=4, y=\dfrac{x}{4}, z\geq 0, z=4y^2$.

1.13. $V: x\geq 0, y=3x, y=3; z\geq 0, z=2\left(x^2+y^2\right)$.

1.14. $V: x\geq 0, y=4x, y=8; z\geq 0, z=3x^2+y^2$.

1.15. $V: x\geq 0, y=5x, y=10; z\geq 0, z=x^2+y^2$.

1.16. $V: y=x, y=-x, y=2; z\geq 0, z=3\left(x^2+y^2\right)$.

1.17. $V: x=1,\ y=2x,\ y=3x;\ z\geq 0,\ z=2x^2+y^2$.

1.18. $V: y=x,\ y=-2x, y=1;\ z\geq 0,\ z=x^2+4y^2$.

1.19. $V: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=1,\ z=3x^2+2y^2$.

1.20. $V: x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0,\ 3x+2y=6,\ z=x^2+y^2$.

1.21. $V: x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0,\ x+y=3,\ z=9-x^2-y^2$.

1.22. $V: x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0,\ x+y=3,\ z=9-x^2-y^2$.

1.23. $V: x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0,\ 3x+4y=12, z=6-x^2-y^2$.

1.24. $V: x\geq 0, z\geq 0,\ y=x, y=3, z=18-x^2-y^2$.

1.25. $V: x=2,\ y\geq 0, z\geq 0, y=3x, z=4\left(x^2+y^2\right)$.

1.26. $V: x \geq 0,\ y = 2x,\ y = 4, z \geq 0,\ z = 10 - x^2 - y^2$.

1.27. $V: x = 3,\ y \geq 0, z \geq 0,\ y = 2x,\ z = 4\sqrt{y}$.

1.28. $V: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + 3y = 6, \quad z = 3 + x^2 + y^2$.

1.29. $V: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \quad x + y = 4,\ z = 16 - x^2 - y^2$.

1.30. $V: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,\ \ 5x + y = 5, z = x^2 + y^2$.

2. Берілген үш еселі интегралдарды есептеңіз.

2.1. $\iiint\limits_V \left(2x^2 + 3y + z\right) dxdydz,\ \ V: 2 \leq x \leq 3,\ \ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 4.$

2.2. $\iiint\limits_V x^2 yz dxdydz,\ \ V: -1 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 3,\ 2 \leq z \leq 3.$

2.3. $\iiint\limits_V \left(x + y + 4z^2\right) dxdydz,\ \ V: -1 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 2,\ \ -1 \leq z \leq 1.$

2.4. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz,\ \ V: 0 \leq x \leq 3,\ \ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2.$

2.5. $\iiint\limits_V x^2 y^2 z dxdydz,\ \ V: -1 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq y \leq 2,\ \ -2 \leq z \leq 5.$

2.6. $\iiint\limits_V \left(x + y + z\right) dxdydz,\ \ V: 0 \leq x \leq 1,\ \ -1 \leq y \leq 0,\ 1 \leq z \leq 2.$

2.7. $\iiint\limits_V \left(2x - y^2 - z\right) dxdydz,\ \ V: 1 \leq x \leq 5,\ \ 0 \leq y \leq 2,\ \ -1 \leq z \leq 0.$

2.8. $\iiint\limits_V 2xy^2 z\,dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 3,\ \ -2 \le y \le 0,\ 1 \le z \le 2.$

2.9. $\iiint\limits_V 5xyz^2\,dxdydz,\ \ V: -1 \le x \le 0,\ \ 2 \le y \le 3,\ 1 \le z \le 2.$

2.10. $\iiint\limits_V \left(x^2 + 2y^2 - z\right)dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 3,\ \ -1 \le z \le 2.$

2.11. $\iiint\limits_V \left(x + 2yz\right)dxdydz,\ \ V: -2 \le x \le 0,\ \ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2.$

2.12. $\iiint\limits_V \left(x + yz^2\right)dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2,\ \ -1 \le z \le 3.$

2.13. $\iiint\limits_V \left(xy + 3z\right)dxdydz,\ \ V: -1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2.$

2.14. $\iiint\limits_V \left(xy - z^2\right)dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 3.$

2.15. $\iiint\limits_V \left(x^3 + yz\right)dxdydz,\ \ V: -1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

2.16. $\iiint\limits_V \left(x^3 + y^2 - z\right)dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 2,\ \ -1 \le y \le 0,\ 0 \le z \le 1.$

2.17. $\iiint\limits_V \left(2x^2 + y - z^3\right)dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 1,\ \ -2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

2.18. $\iiint\limits_V x^2 yz^2 dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 2,\ \ 1 \le y \le 2,\ \ -1 \le z \le 0.$

2.19. $\iiint\limits_V \left(x + y - z\right)dxdydz,\ \ V: 0 \le x \le 4,\ \ 1 \le y \le 3,\ \ -1 \le z \le 5.$

2.20. $\iiint\limits_V \left(x+2y+3z^2\right)dxdydz,\ \ V: -1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1,\ 1\le z\le 2.$

2.21. $\iiint\limits_V \left(3x^2+2y+z\right)dxdydz,\ \ V: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\ \ -1\le z\le 3.$

2.22. $\iiint\limits_V \left(xy-z^3\right)dxdydz,\ \ V: 0\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3.$

2.23. $\iiint\limits_V x^3yzdxdydz,\ \ V: -1\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 3,\ 0\le z\le 1.$

2.24. $\iiint\limits_V xy^2zdxdydz,\ \ V: -2\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3.$

2.25. $\iiint\limits_V xyz^2dxdydz,\ \ V: 0\le x\le 2,\ \ -1\le y\le 0,\ 0\le z\le 4.$

2.26. $\iiint\limits_V \left(x+yz\right)dxdydz,\ \ V: 0\le x\le 1,\ \ -1\le y\le 4,\ 0\le z\le 2.$

2.27. $\iiint\limits_V \left(x+y^2-z^2\right)dxdydz,\ \ V: -2\le x\le 0,\ \ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 5.$

2.28. $\iiint\limits_V \left(x+y+z^2\right)dxdydz,\ \ V: -1\le x\le 0,\ \ 0\le y\le 1,\ 2\le z\le 3.$

2.29. $\iiint\limits_V \left(x+y^2-2z\right)dxdydz,\ \ V: 1\le x\le 2,\ \ -2\le y\le 3,\ 0\le z\le 1.$

2.30. $\iiint\limits_V \left(x-y-z\right)dxdydz,\ \ V: 0\le x\le 3,\ \ 0\le y\le 1,\ -2\le z\le 1.$

3. Үш еселі интегралды цилиндрлік немесе сфералық координаттар көмегімен есептеңіз

3.1. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz,\ \ V: x^2+y^2+z^2=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{16\pi}{5}$.)

3.2. $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V:\ z\geq 0, z=2\ y\geq \pm x, z^2=4\left(x^2+y^2\right).$

(Жауабы: $\frac{\sqrt{2}}{10}$.)

3.3. $\iiint\limits_V z^2 dxdydz,\ \ V: 1\leq x^2+y^2\leq 36,\ x\geq 0,\ y\geq x,\ z\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{1555\pi}{12}$.)

3.4. $\iiint\limits_V ydxdydz,\ V: x^2+y^2+z^2=32,\ \ y^2=x^2+z^2, y\geq 0.$

(Жауабы: 128π .)

3.5. $\iiint\limits_V xdxdydz,\ \ V: x^2+y^2+z^2=8,\ \ x^2=y^2+z^2,\ x\geq 0.$

(Жауабы: 8π .)

3.6. $\iiint\limits_V ydxdydz,\ \ V: 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 16,\ \ y\leq \sqrt{3x},\ y\geq 0,\ \ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{15\pi}{2}$.)

3.7. $\iiint\limits_V ydxdydz,\ \ V: z=\sqrt{8-x^2-y^2},\ \ z=\sqrt{x^2+y^2},\ y\geq 0.$

(**Жауабы:** $8\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.)

3.8. $\iiint\limits_V \frac{y^2dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)},\ \ V:\ x\geq 0,\ y\geq\sqrt{3x},\ z\geq 0,\ \ 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 36.$

(**Жауабы:** $\frac{52}{27}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.)

3.9. $\iiint\limits_V \frac{y^2zdxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},\ \ V:\ y\geq 0,\ y\leq\sqrt{3x},\ \ z=3\left(x^2+y^2\right),\ z=3.$

(**Жауабы:** $\frac{3\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{20}$.)

3.10. $\iiint\limits_V \frac{x^2dxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}},\ \ V:\ x^2+y^2+z^2=16,\ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{16\pi}{3}$.)

3.11. $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ V:\ z=2\left(x^2+y^2\right), y\geq 0,\ y\leq\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ \ z=18.$

(**Жауабы:** 81 .)

3.12. $\iiint\limits_V \frac{xydxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},\ V:\ z=x^2+y^2, y\geq 0,\ y\leq x,\ \ z=4.$

(Жауабы: $\frac{4}{3}$ **.)**

3.13. $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\ V:\ x^2+y^2=4y,\ y+z=4,\ z\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{1472}{45}$ **.)**

3.14. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\ V:\ x^2+y^2=2x,\ x+z=4,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{4}{5}$ **.)**

3.15. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\ V:\ x^2+y^2=16y, y+z=16,\ x\geq 0,\ z\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{2048}{5}$ **.)**

3.16. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz,\ \ V:\ x^2+y^2=2x, x+z=2,\ \ z\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{128}{45}$ **.)**

3.17. $\iiint\limits_V xydxdydz,\ V:\ 2\leq x^2+y^2+z^2\leq 8, z^2=x^2+y^2, x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{31\left(4\sqrt{2}-5\right)}{15}$.)

3.18. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V:\ x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y,\ x\geq 0,\ z\geq 0, z=6.$

(**Жауабы:** 24 .)

3.19. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, $V:\ x^2+y^2+z^2=36,\ y\geq 0\ \ z\geq 0,\ y\leq -x.$

(**Жауабы:** 81π .)

3.20. $\iiint\limits_V \frac{xydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V:\ x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ z\geq 0, z=4, y\geq 0, y\leq x.$

(**Жауабы:** $10\sqrt{2}$.)

3.21. $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V:\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 9, y\geq 0, y\leq \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ \ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{13\pi}{8}$.)

3.22. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, $V:\ x^2-2x+y^2=0,\ y\geq 0\ \ z\geq 0,\ x+z=2.$

(**Жауабы:** $\frac{64}{45}$.)

3.23. $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, $V:\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 16, y\geq 0,\ y\leq x,\ \ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{341(\pi+2)}{20}$.)

3.24. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V:\ x^2+y^2=4y,\ x+z=4,\ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{64}{3}$.)

3.25. $\iiint\limits_V \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V:\ 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 16,\ y\geq 0,\ y\leq \sqrt{3}x,\ \ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{7\pi}{3}$.)

3.26. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, $V:\ x^2+y^2=2x,\ y\geq 0\ \ z\geq 0,\ z=3.$

(**Жауабы:** 8.)

3.27. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V:\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4,\ x\geq 0,\ y\leq x,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

(**Жауабы:** $\frac{7\sqrt{2}\pi}{3}$.)

3.28. $\iiint\limits_V xdxdydz$, $V:\ x^2=2\left(y^2+z^2\right),\ x=4,\ x\geq 0.$

(**Жауабы:** 32π .)

3.29. $\iiint\limits_V \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V:\ 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 9,\ y\leq x,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{13\sqrt{2}\pi}{2}$.)

3.30. $\iiint\limits_V xdxdydz,\ \ V:\ z=\sqrt{18-x^2-y^2},\ \ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x\geq 0.$

(Жауабы: $\frac{81}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.)

4. Көрсетілген беттермен шенелген дененің көлемін үш еселі интеграл арқылы есептеңіз. Сызбасын салыңыз.

4.1. $z^2=4-x,\ x^2+y^2=4x.$ **(Жауабы:** $\frac{512}{15}$.)

4.2. $z=4-y^2,\ x^2+y^2=4,\ z\geq 0.$ **(Жауабы:** 12π.)

4.3. $x^2+y^2=1,\ z=2-x-y,\ z\geq 0.$ **(Жауабы:** 2π.)

4.4. $z=y^2,\ x\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=2.$ **(Жауабы:** $\frac{4}{3}$.)

4.5. $y\geq 0,\ z\geq 0,\ z=2,\ x=\sqrt{9-y^2},\ x=\sqrt{25-y^2}$ **(Жауабы:** $\frac{98}{3}$.)

4.6. $x^2+y^2=4,\ z=4-x-y,\ z\geq 0.$ **(Жауабы:** 16π.)

4.7. $z\geq 0,\ z=x^2,\ x-2y+2=0,\ x+y=7.$ **(Жауабы:** 32.**)**

4.8. $x\geq 0,\ z\geq 0,\ z=y,\ x=4,\ y=\sqrt{25-x^2}.$ **(Жауабы:** $\frac{118}{3}$.)

4.9. $z \geq 0,\ z = 4 - x,\ x = 2\sqrt{y},\ y = 2\sqrt{x}.$ (**Жауабы:** $\frac{176}{15}$.)

4.10. $y \geq 0,\ z \geq 0,\ 2x - y = 0,\ x + y = 9,\ z = x^2.$ (**Жауабы:** $\frac{1053}{2}$.)

4.11. $y \geq 0,\ z \geq 0,\ x = 4,\ y = 2x,\ z = x^2.$ (**Жауабы:** 128.)

4.12. $x \geq 0,\ z \geq 0,\ y = 2x,\ y = 3,\ z = \sqrt{y}.$ (**Жауабы:** $\frac{9\sqrt{3}}{5}$.)

4.13. $y \geq 0,\ z \geq 0,\ x = 3,\ y = 2x,\ z = y^2.$ (**Жауабы:** 54.)

4.14. $z \geq 0,\ y^2 = 2 - x,\ z = 3x.$ (**Жауабы:** $\frac{32\sqrt{2}}{5}$.)

4.15. $z \geq 0,\ y = \sqrt{9 - x^2},\ z = 2y.$ (**Жауабы:** 36.)

4.16. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y = 2,\ z = x^2 + y^2.$ (**Жауабы:** $\frac{8}{3}$.)

4.17. $z \geq 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 5 - x - y.$ (**Жауабы:** 45π.)

4.18. $z \geq 0,\ z = x,\ x = \sqrt{4 - y^2}.$ (**Жауабы:** $\frac{16}{3}$.)

4.19. $y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y = 2,\ z = x^2.$ (**Жауабы:** $\frac{4}{3}$.)

4.20. $y \geq 0,\ z \geq 0,\ y = 4,\ z = x,\ x = \sqrt{25 - y^2},\ z = 2y.$ (**Жауабы:** $\frac{118}{3}$.)

4.21. $z \geq 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = y^2.$ (**Жауабы:** $\frac{81}{8\pi}$.)

4.22. $x \geq 0,\ z \geq 0,\ y \geq x,\quad z = 1 - x^2 - y^2.$ (**Жауабы:** $\frac{\pi}{16}.$)

4.23. $z \geq 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = x^2 + y^2.$ **(Жауабы:** $8\pi.$**)**

4.24. $z \geq 0,\ y = 2,\ y = x,\ z = x^2.$ (**Жауабы:** $\frac{4}{3}.$)

4.25. $z \geq 0,\ y + z = 2,\ x^2 + y^2 = 4.$ (**Жауабы:** $8\pi.$)

4.26. $y \geq 0,\ z \geq 0,\ x - y = 0,\ 2x + y = 2,\ 4z = y^2.$ **Жауабы:** $\frac{1}{162}.$)

4.27. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \ 2x + y = 2,\ z = y^2.$ (**Жауабы:** $\frac{2}{3}.$)

4.28. $z \geq 0,\ x = y^2,\ \ x = 2y^2 + 1,\ z = 1 - y^2.$ (**Жауабы:** $\frac{8}{5}.$)

4.29. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \ y = 3 - x,\ z = 9 - x^2.$ (**Жауабы:** $\frac{135}{4}.$)

4.30. $x \geq 0,\ z \geq 0,\ \ x + y = 4,\ z = 4\sqrt{y}.$ (**Жауабы:** $\frac{512}{15}.$)

11.2–тапсырманы шығару үлгісі

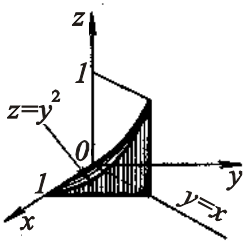
№1. Үш еселі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ интегралының интегралдау шектерін қою керек. Мұнда V аймағы $x=1,\ y=x,$ $z=0,\ z=y^2$ беттерімен шенелген. Интегралдау аймағын салу керек.

▼ 11.3.2 п. (7)-формула бойынша

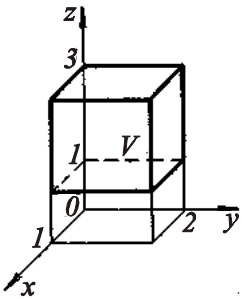
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{y^2} f(x,y,z)\,dz$$

аламыз. Интегралдау аймағы 72-суретте бейнеленген. ◄

Ескерту. 11.3.2 п. мысалды қараңыз.



72-сурет



73-сурет

№2. ***Есептеу керек:*** $\iiint\limits_V f\left(3x+2y-z^3\right)dxdydz,$

мұндағы $V: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2,\quad 1\le z\le 3.$

▼ Берілген V аймағы (73-сурет) 11.3. 2п. (7)-формула бойынша

$$\iiint\limits_V \left(3x+2y-z^3\right)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^3 \left(3x+2y-z^3\right)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(3xz+2yz-\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_1^3 dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(6x+4y-20\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(6xy+2y^2-20y\right)\Big|_0^2 dx = \int\limits_0^1 \left(12x-32\right)dx =$$

$$= \left(6x^2-32x\right)\Big|_0^1 = -26\,. \qquad \blacktriangleleft$$

Ескерту. 11.3.2 п. мысалды қараңыз.

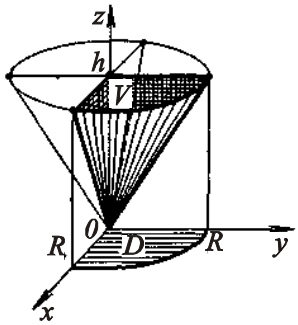
№3. Үш еселі $\iiint\limits_V \frac{xz\ dx\ dy\ dz}{x^2+y^2-R^2}$ интегралын $x=0,\ y=0,\ z=h$ беттерімен және $z^2=\frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)$ конусымен шенелген, I-октантта орналасқан аймақ бойынша есептеу керек.

▼ 74-суретте V интегралдау аймағы және оның oxy жазықтығындағы D проекциясы бейнеленген. § 11.4 (14) және (15) формулалар бойынша цилиндрлік (ρ,φ,z) координаттарына өтеміз. Берілген аймақ үшін айнымал-дардың өзгеру шектері $0\le z\le h,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le R$ болатындықтан:

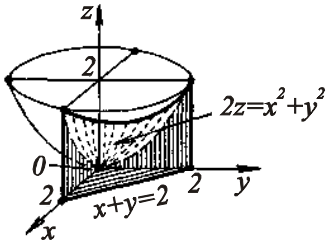
$$z^2=\frac{h^2\rho^2}{R^2},\quad z=\frac{h\rho}{R}\,,$$

$$\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{x^2+y^2-R^2} = \iiint\limits_V \frac{\rho^2\cos\varphi z d\varphi dpdz}{\rho^2-R^2} = \int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2-R^2}d\rho \int\limits_{hp/R}^h zdz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2-R^2}\frac{z^2}{2}\Bigg|_{hp/R}^h d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2-R^2}\left(h^2-\frac{h^2}{R^2}\rho^2\right)d\rho =$$



74-сурет



75-сурет

$$= -\frac{h^2}{2R^2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = -\frac{h^2}{2R^2}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R = -\frac{1}{6}Rh^2.$$

Ескерту. § 11.4. 4- мысалды қараңыз.

№4. Үш еселі интеграл арқылы $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=2,$ $2z=x^2+y^2$ беттерімен шенелген дене көлемін табу керек.

▼ $2z=x^2+y^2$ теңдеуі айналу параболоидын, ал қалған теңдеулер жазықтықтарды анықтайды (75-сурет). Осы беттермен шенелген $V\in R^3$ денесінің көлемін § 11.2 1^0 қасиетті пайдаланып табамыз:

$$\upsilon = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{(x^2+y^2)/2} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} z\Big|_0^{\left(x^2+y^2\right)/2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_0^{2-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(2x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx = = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(2-x)^4 \right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

11.3–YT

1. Көрсетілген сызықтармен шенелген біртекті емес D пластинаның массасын табыңыз. Пластинаның әрбір нүктесіндегі беттік тығыздық $\mu = \mu(x, y)$ тең.

1.1. $D:\ y^2 = x,\ \ x = 3,\ \ \mu = x.$ (**Жауабы:** $\frac{36\sqrt{3}}{5}$.)

1.2. $D:\ x = 0, y = 0, x + y = 1,\ \ \mu = x^2.$ (**Жауабы:** $\frac{1}{12}$.)

1.3. $D:\ x = 0, y = 0,\ 2x + 3y = 6,\ \ \mu = \frac{y^2}{2}.$ (**Жауабы:** 1.)

1.4. $D:\ x^2 + y^2 = 4x,\ \ \mu = 4 - x.$ (**Жауабы:** 8π .)

1.5. $D:\ x=0, y=1, y=x,\quad \mu=x^2+2y^2.$ **(Жауабы:** $\frac{7}{12}$.)

1.6. $D:\ x^2+y^2=1,\quad \mu=2-x-y.$ **(Жауабы:** 2π .)

1.7. $D:\ x^2+y^2=4y,\quad \mu=\sqrt{4-y}.$ **(Жауабы:** $\frac{256}{15}$.)

1.8. $D:\ y=x, y=-x, y=1,\quad \mu=\sqrt{1-y}.$ **(Жауабы:** $\frac{8}{15}$.)

1.9. $D:\ x=0, y=2x, x+y=2,\quad \mu=2-x-y.$ **(Жауабы:** $\frac{4}{9}$.)

1.10. $D:\ x=1, x=y^2,\quad \mu=4-x-y.$ **(Жауабы:** $\frac{68}{15}$.)

1.11. $D:\ y=0, x^2=1-y,\quad \mu=3-x-y.$ **(Жауабы:** $\frac{14}{5}$.)

1.12. $D:\ y=x^2, x=y^2,\ \mu=3x+2y+6.$ **(Жауабы:** $\frac{11}{4}$.)

1.13. $D:\ y=x^2, y=4,\ \mu=2x+5y+10.$ **(Жауабы:** $\frac{752}{3}$

.)

1.14. $D:\ x=0, y=0, x+y=1,\quad \mu=2x^2+y^2.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{4}$.)

1.15. $D:\ x=0, y^2=1-x,\ \mu=2-x-y.$ **(Жауабы:** $\frac{32}{15}$.)

1.16. $D\colon\ y=\sqrt{x},\ y=x,\quad \mu=2-x-y.$ **(Жауабы:** $\frac{51}{60}$.)

1.17. $D\colon\ y=x^2-1,\ y=1,\quad \mu=3x^2+2y^2+1.$ **(Жауабы:** $\frac{264\sqrt{2}}{35}$.)

1.18. $D\colon\ x=1,\ y=0,\ x=y,\quad \mu=x^2+2y^2+10.$ **(Жауабы:** $\frac{65}{12}$.)

1.19. $D\colon\ y=0, y=2x, x+y=6,\ \mu=x^2.$ **(Жауабы:** 104.)

1.20. $D\colon\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2=4,\quad \mu=4-x^2.$ **(Жауабы:** 3π.)

1.21. $D\colon\ y=x^2,\ y=2,\quad \mu=2-y.$ **(Жауабы:** $\frac{32\sqrt{2}}{15}$.)

1.22. $D\colon\ x=0, y=0, x+y=1,\ \mu=x^2+y^2.$ **(Жауабы:** $\frac{1}{6}$.)

1.23. $D\colon\ y=x^2+1, x+y=3,\quad \mu=4x+5y+2.$ **(Жауабы:** $\frac{351}{6}$.)

1.24. $D\colon\ y=x^2-1, x+y=1,\quad \mu=2x+5y+8.$ **(Жауабы:** 45.)

1.25. $D\colon\ x=0, y=0, y=4,\ x=\sqrt{25-y^2},\ \mu=x.$ **(Жауабы:** $\frac{118}{3}$.)

1.26. $D\colon\ x=2, y=x, y=3x,\quad \mu=2x^2+y^2.$ **(Жауабы:** $\frac{152}{3}$.)

1.27. $D\colon\ y=x, y=x^2,\ \mu=2x+3y.$ **(Жауабы:** $\frac{11}{30}$.)

1.28. $D:\ x=0,\ x+2y+2=0,\ x+y=1,\quad \mu=x^2.$ (**Жауабы:** $\frac{32}{3}$.)

1.29. $D:\ x=0,\ y=0,\ x+2y=1,\quad \mu=2-\left(x^2+y^2\right).$ (**Жауабы:** $\frac{43}{96}$.)

1.30. $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=2,\quad \mu=x^2+y^2.$ (**Жауабы:** $\frac{8}{3}$.)

2. Поляр координаттарын пайдалана отырып, берілген сызықтармен шенелген біртекті D пластинасының көрсетілген өске салыстырғандағы статикалық моментін есептеңіз.

2.1. $D:\ x^2+y^2-2ay=0,\ \ x-y\le 0,\ \ Ox.$

2.2. $D:\ x^2+y^2-2ax=0,\ \ x+y\le 0,\ \ Oy.$

2.3. $D:\ x^2+y^2+2ay=0,\ \ x-y\ge 0,\ \ Ox.$

2.4. $D:\ x^2+y^2+2ax=0,\ \ x+y\ge 0,\ \ Ox.$

2.5. $D:\ x^2+y^2+2ax\ge 0,\ \ x^2+y^2+2ax\le 0,\ x\le 0,\quad Ox.$

2.6. $D:\ x^2+y^2-2ay\ge 0,\ \ x^2+y^2+2ax\le 0,\ y\ge 0,\quad Oy.$

2.7. $D:\ x^2+y^2-2ax\le 0,\ \ x^2+y^2-2ax\ge 0,\ x\ge 0,\quad Ox.$

2.8. $D:\ x^2+y^2-2ax\le 0,\ \ x^2+y^2+2ay\ge 0,\ y\le 0,\quad Oy.$

2.9. $D:\ x^2+y^2-2ax\ge 0,\ \ x^2+y^2+2ay\le 0,\ x\ge 0,\quad Ox.$

2.10. $D:\ x^2+y^2+2ax\le 0,\ \ x^2+y^2+2ay\ge 0,\ y\le 0,\quad Oy.$

2.11. $D:\ x^2+y^2-2ay\le 0,\ \ x^2+y^2+2ax\ge 0,\ x\le 0,\quad Ox.$

2.12. $D:\ x^2+y^2-2ay\ge 0,\ \ x^2+y^2-2ax\le 0,\ y\ge 0,\quad Oy.$

2.13. $D:\ x^2+y^2+2ay=0,\ \ x^2+y^2+ay=0,\ x\le 0,\quad Ox.$

2.14. $D:\ x^2+y^2-2ax=0,\ \ x^2+y^2-ax=0,\ y\ge 0,\quad Oy.$

2.15. $D:\ x^2+y^2+2ay=0,\ \ x^2+y^2+ay=0,\ x\ge 0,\quad Ox.$

2.16. $D:\ x^2+y^2-2ay=0,\ \ x^2+y^2-ay=0,\ x\ge 0,\quad Ox.$

2.17. $D:\ x^2+y^2-2ay=0,\ \ x^2+y^2-ay=0,\ x\le 0,\quad Ox.$

2.18. $D:\ x^2+y^2+2ax=0,\ \ x^2+y^2+ax=0,\ y\ge 0,\quad Oy.$

2.19. $D:\ x^2+y^2-2ax=0,\ \ x^2+y^2-ax=0,\ y\le 0,\quad Ox.$

2.20. $D:\ x^2+y^2+2ax=0,\ \ x^2+y^2+ax=0,\ y\le 0,\quad Oy.$

2.21. $D:\ x^2+y^2+2ay=0,\ \ x+y\le 0,\ x\ge 0,\quad Ox.$

2.22. $D:\ x^2+y^2-2ay=0,\ \ y-x\ge 0,\ x\ge 0,\quad Ox.$

2.23. $D:\ x^2+y^2+2ax=0,\ \ y-x\ge 0,\ y\le 0,\quad Oy.$

2.24. $D:\ x^2+y^2-2ay=0,\ \ y+x\ge 0,\ x\le 0,\quad Ox.$

2.25. $D:\ x^2+y^2+2ax=0,\ \ y+x\le 0,\ y\ge 0,\quad Oy.$

2.26. $D:\ x^2+y^2-2ax=0,\ \ y-x\le 0,\ y\ge 0,\quad Ox.$

2.27. $D:\ x^2+y^2-2ax=0,\ \ y-x\le 0,\ x+y\ge 0,\quad Oy.$

2.28. $D:\ x^2+y^2-2ay=0,\ \ y-x\ge 0,\ x+y\ge 0,\quad Ox.$

2.29. $D:\ x^2+y^2+2ax=0,\ \ y+x\le 0,\ y-x\ge 0,\quad Oy.$

2.30. $D:\ x^2+y^2+2ay=0,\ \ y-x\le 0,\ y+x\le 0,\quad Ox.$

3. Көрсетілген беттермен шенелген V біртекті дене массасының центрінің координаттарын есептеңіз.

3.1. $V: x=6\left(y^2+z^2\right),\ \ y^2+z^2=3,\ \ x=0.$ (**Жауабы:** $(6,0,0).$)

3.2. $V: x=3\sqrt{x^2+z^2},\ \ x^2+z^2=36,\ \ y=0.$ (**Жауабы:** $\left(0,\frac{27}{4},0\right).$)

3.3. $V: x=7\left(y^2+z^2\right),\quad x=28.$ (**Жауабы:** $\left(\frac{56}{3},0,0\right).$)

3.4. $V: z=2\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$ (**Жауабы:** $(0,0,6).$)

3.5. $V: z=5\left(x^2+y^2\right),\ \ x^2+y^2=2,\ z=0.$ (**Жауабы:** $\left(0,0,\frac{10}{3}\right).$)

3.6. $V: x=6\sqrt{y^2+z^2},\ y^2+z^2=9,\ x=0.$ (**Жауабы:** $\left(\frac{27}{4},0,0\right).$)

3.7. $V: z=8\left(x^2+y^2\right),\quad z=32.$ (**Жауабы:** $\left(0,0,\frac{64}{3}\right).$)

3.8. $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2},\ y = 9.$ **(Жауабы:** $\left(0, \frac{27}{4}, 0\right).$**)**

3.9. $V: 9y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 = 4,\ y = 0.$ **(Жауабы:** $\left(0, \frac{4}{27}, 0\right).$**)**

3.10. $V: 3z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0.$ **(Жауабы:** $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right).$**)**

3.11. $V: x^2 + z^2 = 6y,\quad y = 8.$ **(Жауабы:** $\left(0, \frac{16}{3}, 0\right).$**)**

3.12. $V: 8x = \sqrt{z^2 + y^2},\ x = \frac{1}{2}.$ **(Жауабы:** $\left(\frac{3}{8}, 0, 0\right).$**)**

3.13. $V: 2x = y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 = 4,\ x = 0.$ **(Жауабы:** $\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right).$**)**

3.14. $V: 4y = \sqrt{x^2 + z^2},\ x^2 + z^2 = 16,\ y = 0.$ **(Жауабы:** $\left(0, \frac{3}{8}, 0\right).$**)**

3.15. $V: y^2 + z^2 = 8x,\quad x = 2.$ **(Жауабы:** $\left(\frac{4}{3}, 0, 0\right).$**)**

3.16. $V: z = 9\sqrt{x^2 + y^2},\quad z = 36.$ **(Жауабы:** $(0, 0, 27).$**)**

3.17. $V: z = 3\left(x^2 + y^2\right),\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0.$ **(Жауабы:** $(0, 0, 9).$**)**

3.18. $V: x = 2\sqrt{y^2 + z^2},\ y^2 + z^2 = 4,\ x = 0.$ **(Жауабы:** $\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right).$**)**

3.19. $V: x^2 + z^2 = 4y, \quad y = 9.$ **(Жауабы:** $(0,6,0).$ **)**

3.20. $V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2}, \quad x = 20.$ **(Жауабы** $(15,0,0).$ **)**

3.21. $V: y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 = 10, \quad y = 0.$ **(Жауабы:** $\left(0, \frac{10}{3}, 0\right).$ **)**

3.22. $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2},\ x^2 = z^2 = 16, \quad y = 0.$ **(Жауабы:** $\left(0, \frac{9}{2}, 0\right).$ **)**

3.23. $V: y^2 + z^2 = 3x, \quad x = 9.$ **(Жауабы:** $(6,0,0).$ **)**

3.24. $V: y = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = 4.$ **(Жауабы:** $(0,3,0).$ **)**

3.25. $V: x = y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 = 9, \quad x = 0.$ **(Жауабы:** $(3,0,0).$ **)**

3.26. $V: x = 0,\ y = 0, z = 0, \quad x + y + z = 3.$ **(Жауабы:** $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$ **)**

3.27. $V: z = 2\sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0.$ **(Жауабы:** $\left(0,0, \frac{9}{4}\right).$ **)**

3.28. $V: x^2 + y^2 = 2z, \quad z = 3.$ **(Жауабы:** $(0,0,2).$ **)**

3.29. $V: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 4.$ **(Жауабы:** $(0,0,3).$ **)**

3.30. $V: z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0.$ **(Жауабы:** $\left(0,0, \frac{4}{3}\right).$ **)**

4. Көрсетілген беттермен шенелген V біртекті дененің көрсетілген координаттық өске салыстырғандағы инерция моментін есептеңіз. Дененің δ тығыздығын 1-ге тең деп есептеу керек.

4.1. $V: y^2 = x^2 + z^2,\ y = 4,\ Oy.$ (**Жауабы:** $\frac{512\pi}{5}$.)

4.2. $V: x = y^2 + z^2,\ x = 4,\ Ox.$ (**Жауабы:** $\frac{4\pi}{3}$.)

4.3. $V: y^2 = x^2 + z^2,\ y = 2,\ Oy.$ (**Жауабы:** $\frac{16\pi}{5}$.)

4.4. $V: x = y^2 + z^2,\ x = 9,\ Ox.$ (**Жауабы:** $\frac{243\pi}{2}$.)

4.5. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ x = 2,\ Ox.$ (**Жауабы:** $\frac{16\pi}{5}$.)

4.6. $V: y = x^2 + z^2,\ y = 2,\ Oy.$ (**Жауабы:** $\frac{4\pi}{3}$.)

4.7. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ x = 3,\ Ox.$ (**Жауабы:** $\frac{243\pi}{10}$.)

4.8. $V: x = y^2 + z^2,\ x = 3,\ Ox.$ (**Жауабы:** $\frac{9\pi}{2}$.)

4.9. $V: y = 2\sqrt{x^2 + z^2},\ y = 2,\ Oy.$ (**Жауабы** $\frac{\pi}{5}$.)

4.10. $V: y = x^2 + z^2,\ y = 3,\ Oy.$ (**Жауабы:** $\frac{9\pi}{2}$.)

4.11. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ \ Ox.$ **(Жауабы:** $\frac{2\pi}{5}$.)

4.12. $V: x = y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 = 1, x = 0,\ \ Ox.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{3}$.)

4.13. $V: z^2 = x^2 + y^2,\ z = 3,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{243\pi}{10}$.)

4.14. $V: z = x^2 + y^2,\ z = 3,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{9\pi}{2}$.)

4.15. $V: y^2 = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 = 4, y = 0,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{64\pi}{5}$.)

4.16. $V: 2y = x^2 + z^2,\ \ y = 2,\ \ Oy.$ **(Жауабы:** $\frac{64\pi}{3}$.)

4.17. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ \ x = 2,\ \ Ox.$ **(Жауабы:** $\frac{16\pi}{5}$.)

4.18. $V: 2z = x^2 + y^2,\ z = 2,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{16\pi}{3}$.)

4.19. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ \ y^2 + z^2 = 4, x = 0,\ \ Ox.$ **(Жауабы:** $\frac{64\pi}{5}$.)

4.20. $V: 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{32\pi}{3}$.)

4.21. $V: z = 2\left(x^2 + y^2\right),\ \ z = 2,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{3}$.)

4.22. $V: x = 1 - y^2 - z^2,\ x = 0,\ \ Ox.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{6}$.)

4.23. $V: y = 4 - x^2 - z^2,\ y = 0,\ \ Oy.$ **(Жауабы:** $\frac{32\pi}{3}$.)

4.24. $V: x = 3\left(y^2 + z^2\right),\ x = 3,\ \ Ox.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{2}$.)

4.25. $V: z = 9 - x^2 - y^2,\ \ z = 0,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{243\pi}{2}$.)

4.26. $V: z = 4\sqrt{x^2 + y^2},\ \ z = 2,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{80}$.)

4.27. $V: z = 3\left(x^2 + y^2\right),\ \ z = 3,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{2}$ **.)**

4.28. $V: x = 2\sqrt{y^2 + z^2},\ x = 2,\ \ Ox.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{5}$.)

4.29. $V: y = 3\left(x^2 + z^2\right),\ \ y = 3,\ \ Oy.$ **(Жауабы:** $\frac{\pi}{2}$.)

4.30. $V: z = 3 - x^2 - y^2,\ \ z = 0,\ \ Oz.$ **(Жауабы:** $\frac{9\pi}{2}$.)

11.3–тапсырманы шығару үлгісі

№1. $y = 2x - x^2,\ \ y = x$ сызықтарымен шенелген D біртек-ті емес пластинаның массасын табу керек. Пластинаның әрбір нүктесіндегі беттік тығыздығы $\mu = x^2 + 2xy$ **.**

▼ § 11.1 үш еселі интегралды анықтау барысында $\Omega \subset R^3$ денесінің массасы табылған еді. Ал $D \subset R^2$ жазық пластинасының

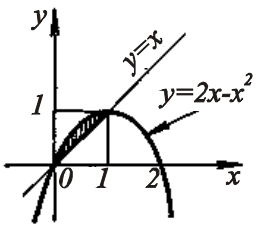
массасы $m=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy$, $\left(\mu(x,y)\right.$ – беттік тығыздық) формуласымен есептеледі(*D*–интегралдау аймағы 76-суретте бейнеленген).

$$m=\iint\limits_D \left(x^2+2xy\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x-x^2}\left(x^2+2xy\right)dy=\int\limits_0^1 (x^2y+xy^2)\Big|_x^{2x-x^2}dx=$$

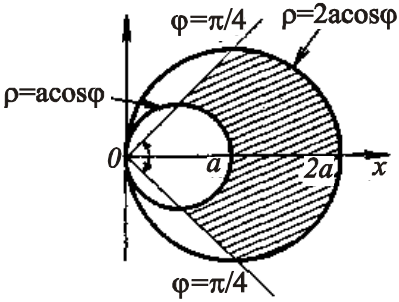
$$=\int\limits_0^1\left(2x^3-x^4-x^3+4x^3-4x^4+x^5-x^3\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^5-5x^4+4x^3\right)dx=\left(\frac{x^6}{6}-x^5+x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}. \qquad \blacktriangle$$

№2. Поляр координаттарын пайдалана отырып, $x^2+y^2-2ax=0$, $x^2+y^2-ax=0$, $y-x=0$, $y+x=0$ сызықтарымен шенелген біртекті *D* пластинасының (77-сурет) *Oy* өсіне салыстырғандағы статикалық моментін есептеу керек. Пластинаның беттік тығыздығы $\mu=2$.



76-сурет



77-сурет

▼ *OY* осіне салыстырғандағы статикалық момент келесі

формуласымен есептеледі $M_y = \iint\limits_D x \cdot \mu(x;y)\,dxdy$ (μ-беттік тығыздық). Мұнда поляр координаттарына өтсек D аймағы D' : $a\cos\varphi \le \rho \le 2a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ аймағына түрленеді. Олай болса,

$$M_y = \iint\limits_{D'} 2\rho\cos\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} d\varphi = 2 \cdot \frac{7a^3}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

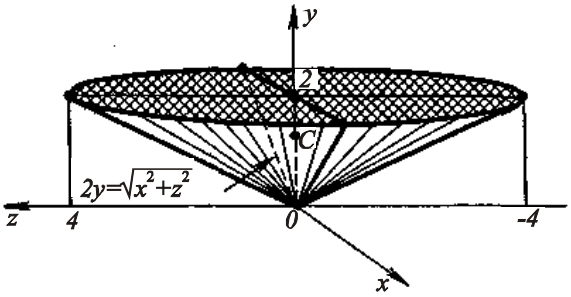
$$\frac{28}{3}a^3 \int\limits_0^{\pi/4} \frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4} d\varphi = \frac{7}{3}a^3 \int\limits_0^{\pi/4} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{7a^3}{3}\left((\varphi + \sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\rho \right) = \frac{7}{3}a^3\left(\frac{3}{8}\pi + 1\right). \quad \blacktriangle$$

№3 $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 2$ беттерімен шенелген V біртекті дененің массасының центрінің координаттарын есептеу керек.

▼ Берілген дене OY өсіне салыстырғанда симметриялы (78-сурет). Сондықтан $x_c = z_c = 0$, ал (§11.6, (*)-формуланы қараңыз) $y_c = \frac{\iiint\limits_V y dxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz}$. Мұндағы үш еселі интегралдарды есептеу үшін алдымен цилиндрлік координаттарға өтеміз:

$x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $y=y,$ $J=\rho.$ Енді берілген $y=2$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}$ теңдеулер жүйесін шешіп, беттердің қиылысу сызығын аламыз: $x^2+z^2=16.$ Бұдан дененің OXZ жазықтығына проекциясы осы шеңбермен шектелген дөңгелек екенін көреміз.



78-сурет

Олай болса, цилиндрлік координаттардың өзгеру аралықтары $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 4,\ \frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}=\frac{1}{2}\rho\le y\le 2$ болатынын ескеріп үш еселі интегралдарды есептейміз

$$\iiint\limits_V ydxdydz=\iiint\limits_{V'} y\rho d\rho\ d\varphi\ dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4\rho d\rho\int\limits_{\rho/2}^2 ysdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4\rho\left(4-\frac{1}{4}\rho^2\right)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{16}\right)\Bigg|_0^4 d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 16\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi,$$

$$\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_{V'}\rho d\rho\ d\varphi\ dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4\rho d\rho\int\limits_{\rho/2}^2 dy=$$

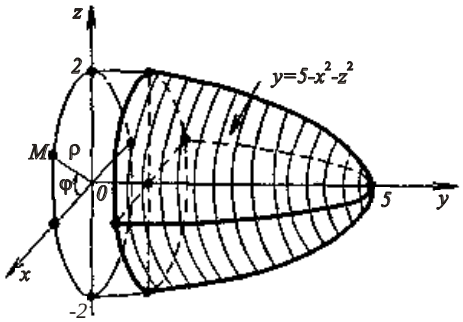
$$= 2\pi \cdot \int_0^4 \rho\left(2 - \frac{\rho}{2}\right) d\rho = 2\pi \cdot \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{6}\right)\Big|_0^4 = 2\pi \cdot \frac{16}{3} = \frac{32\pi}{3}.$$ Демек,

$y_c = \dfrac{16\pi \cdot 3}{32\pi} = \dfrac{3}{2}$, сонымен масса центрі $C\left(0, \dfrac{3}{2}, 0\right)$. ▲

№4 $y = 5 - x^2 - z^2$ бетімен және $y = 1$ жазықтығымен шенелген V біртекті дененің ОУ өсіне салыстырғандағы инерция моментін есептеу керек.

▼ Егер §11.6, (5)-формулада $q = 2$ деп алсақ, онда ізделінген момент ((5)-формулада $q = 2$, $\rho(p) = \delta$ деп алайық):

$$I_y = \iiint_V \delta(x, y, z)(x^2 + z^2)\,dxdydz = \delta \iiint_V \left(x^2 + z^2\right) dxdydz$$ (V аймағы – 79-суретте). Цилиндірлік координаттарға өтеміз: $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $y = y$. Онда



79-сурет

$$I_y = \delta \iiint_V \rho^2 \rho d\rho d\varphi dy = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_1^{5-\rho^2} dy =$$

$$= \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 y\Big|_1^{5-\rho^2} \cdot \rho^3 d\rho = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 (5-\rho^2-1) d\rho =$$

$$= \delta \int_0^{2\pi} (\rho^4 - \frac{\rho^6}{6}) \Big|_0^2 d\varphi = \delta(2^4 - \frac{2^6}{6}) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{32}{3}\pi\delta. \quad \blacktriangleleft$$

11.4–YT

Берілген қисықсызықты интегралдарды есептеңіз.

1

1.1. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, мұнда L_{AB} : $y = x^2$ параболасының $A(-1,1)$ нүктесінен $B(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы. (**Жауабы:** – 6.)

1.2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, мұнда L_{AB} : $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$ астроидасының $A(2,0)$ нүктесінен $B(0,2)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{3\sqrt[3]{2\pi}}{8}$.)

1.3. $\int\limits_{L_{OA}} \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy$, мұнда L_{OA} : $y = x^3$ кубтық параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $A(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{4}{3}$.)

1.4. $\oint\limits_L (x+2y)dx+(x-y)dy$, мұнда L : айналу бағыты оң $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ шеңбері. (**Жауабы:** -4π.)

1.5. $\oint\limits_L \left(x^2y-x\right)dx+\left(y^2x-2y\right)dy$, мұнда L: айналу бағыты оң $x=3\cos t,\ y=2\sin t$ эллипсінің доғасы . (**Жауабы:** $-7{,}5\pi$.)

1.6. $\oint\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx+x^2ydy$, мұнда L_{AB} : $x=\cos t,\ y=2\sin t$ эллипсінің $A(1,0)$ нүктесінен $B(0,2)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{4}{3}$.)

1.7. $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx-x^2dy$, мұнда L_{OBA} : OBA сынық сызығы, $O(0,0)$; $B(2,0)$; $A(2,1)$. (**Жауабы:** –4.)

1.8. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, мұнда L_{AB} : AB – түзуінің кесіндісі, $A(1,1)$; $B(3,4)$. (**Жауабы:** $11\frac{5}{6}$.)

1.9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos ydx-\sin xdy,$ мұнда L_{AB} : AB түзуінің кесіндісі, $A(2\pi,-2\pi)$; $B(-2\pi,2\pi)$. (**Жауабы:** 0.)

1.10. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, мұнда L_{AB} : AB түзуінің кесіндісі; $A(1,2)$; $B(0,2)$. (**Жауабы:** $\frac{4}{5}\ln 3$.)

1.11. $\int\limits_{L_{AB}} xydx+(y-x)dy$, мұнда L_{AB} : $y=x^3$ кубтық параболасының $A(0,0)$ нүктесінен $B(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{1}{4}$.)

1.12. $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, мұнда L_{ABC} : ABC сынық сызығы; $A(1,2)$; $B(3,2)$; $C(3,5)$. **Жауабы:** $64\frac{2}{3}$.)

1.13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz,$ мұнда L_{OB} : OB түзуінің кесіндісі; $O(0,0,0)$; $B(-2,4,5)$. (**Жауабы:** 91.)

1.14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx+xdy,$ мұнда L_{OA} : $x=R\cos t,\quad y=R\sin t$ шеңберінің доғасы, $O(R,0)$; $A(0,R)$. (**Жауабы:** 0.)

1.15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx+(y-x)dy,$ мұнда L_{OA} : $y^2=x$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $A(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{17}{30}$.)

1.16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx+ydy+(x-y+1)dz,$ мұнда L_{AB} : AB түзуінің кесіндісі, $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$. (**Жауабы:** 7.)

1.17. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2 ydy$, мұнда L_{AB} : $y^2 = 4-4x$ параболасының $A(1,0)$ нүктесінен $B(0,2)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{17}{15}$.)

1.18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx + (y-x)dy$, мұнда L_{OB}: $y = x^2$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $B(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{1}{12}$.)

1.19. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, мұнда L_{OB}: $y = x^2$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $B(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{43}{60}$.)

1.20. $\int\limits_{L_{AB}} xdy - ydx$, мұнда L_{AB}: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ астроидасының $A(2,0)$ нүктесінен B(0,2) нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{3\pi}{4}$.)

1.21. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-y)dx + \frac{1}{2}x^2 dy$, мұнда L_{AB}: $y^2 = 4x$ параболасының $A(0,0)$ нүктесінен $B(1,2)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** 0,5.)

1.22. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2 ydy$, мұнда L_{AB} : AB түзуінің кесіндісі, $A(1,0)$; $B(0,2)$. (**Жауабы:** 1.)

1.23. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2 dy + z^2 dz$, мұнда L_{AB} : $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ винттік сызығының бір орамы, $A(1,0,0)$; $B(1,0,4\pi)$.

(**Жауабы:** $64\pi^3/3$.)

1.24. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx + xdy$, мұнда L_{AB} : $y = \ln x$ сызығының $A(1,0)$ нүктесінен $B(e,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы. (**Жауабы:** $e-1/2$.)

1.25. $\oint\limits_{L} ydx - xdy$, мұнда L : $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ эллипсінің оң бағытпен алынған доғасы, (**Жауабы:** -12π .)

1.26. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2 dy$, мұнда L_{OA} : $y = x^2/4$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $A(2,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** 0.)

1.27. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy$, мұнда L_{AB} : $y = |x|$ сызығының $A(-1,1)$ нүктесінен $B(2,2)$ нүктесіне дейінгі бөлігі.

(**Жауабы:** 6.)

1.28. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, мұнда L_{OA} : түзудің $O(0,0,0)$ мен $A(2,1,-1)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** $11/6$.)

1.29. $\oint\limits_L xdy - ydx$, мұнда L : төбелері $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ болатын үшбұрыштың оң бағытпен алынған контуры.

(**Жауабы:** 2.)

1.30. $\int\limits_{L_{ACB}} \left(x^2+y\right)dx + \left(x+y^2\right)dy$, мұнда L_{ACB} : ACB сынық сызық, $A(2,0)$; $C(5,0)$; $B(5,3)$. (**Жауабы:** 63.)

2

2.1. $\int\limits_L \sqrt{2-z^2}\left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, мұнда L: $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$ қисығының доғасы. (**Жауабы:** $4\pi^2\left(1+\pi^2\right)$.)

2.2. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, мұнда L : $x^2+y^2=4$ шеңбері.

(**Жауабы:** 16π .)

2.3. $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, мұнда L_{OB} : түзудің $O(0,0)$ және $B(2,2)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** $\pi/2$.)

2.4. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl,$ мұнда L_{AB} : AB түзуінің кесіндісі; $A(-1,0)$; $B(0,1)$. (**Жауабы:** $-5\sqrt{2}$.)

2.5. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}\,(x-y)}$, мұнда L_{AB} : түзудің $A(0,4)$ және $B(4,0)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** 0.)

2.6. $\int\limits_{L} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, мұнда L : $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi/2$ кардиоидасының доғасы. (**Жауабы:** $\frac{16}{3}$.)

2.7. $\int\limits_{L_{AB}} ydl,$ мұнда L_{AB} : $x=\cos^3 t,$ $y=\sin^3 t$ кардиоидасының $A(1,0)$ мен $B(0,1)$ нүктелерінің арасындағы доғасы.

(**Жауабы:** $0,6$.)

2.8. $\int\limits_{L_{OB}} ydl$, мұнда L_{OB} : $y^2=\frac{2}{3}x$ параболасының $O(0,0)$ және $B\left(\frac{\sqrt{35}}{6},\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ нүктелерінің арасындағы доғасы.

(**Жауабы:** $7\frac{26}{27}$.)

2.9. $\int\limits_{L} \left(x^2+y^2+z^2\right)dl,$ мұнда L : $x=\cos t,$ $y=\sin t,$ $z=\sqrt{3}t,$ $0\le t\le 2\pi$ қисығының доғасы. (**Жауабы:** $4\pi\left(1+4\pi^2\right)$.)

2.10. $\int\limits_{\mathrm{L}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl$, мұнда L : $\rho=(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ кардиоидасының доғасы. (**Жауабы:** $(\pi+2)\sqrt{2}-8$.)

2.11. $\int\limits_{L}\sqrt{2y}dl$, мұнда L : $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ циклоидасының бірінші аркасы. (**Жауабы:** $8\pi\sqrt{2}$.)

2.12. $\int\limits_{L_{OA}}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, мұнда L_{OA} : түзудің $O(0,0)$ мен $A(1,2)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** $\ln\left(\left(\sqrt{5}+3\right)/2\right)$.)

2.13. $\int\limits_{L}\frac{\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dl$, мұнда L : $\rho=9\sin 2\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ қисығының доғасы. (**Жауабы:** $-\frac{9}{8}$.)

2.14. $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, мұнда L_{OABC} : төбелері $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$ болатын үшбұрыш контуры. (**Жауабы:** 24 .)

2.15. $\int\limits_{L_{ABO}}(x+y)dl$, мұнда L_{ABO} : төбелері $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$ болатын үшбұрыш контуры. (**Жауабы:** $-\sqrt{2}$.)

2.16. $\int\limits_{L}\frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, мұнда L : $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$ винттік сызығының бірінші орамы. (**Жауабы:** $\frac{16}{3}\sqrt{2}\pi^3$.)

2.17. $\int\limits_{L_{OAB}} (x+y)\,dl$, мұнда L_{OAB} : төбелері $O(0;0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$ болатын үшбұрыш контуры. (**Жауабы:** 0 .)

2.18. $\int\limits_{L} (x+y)\,dl$, мұнда L: $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ Бернулли лемнискатасының доғасы. (**Жауабы:** $\sqrt{2}$.)

2.19. $\int\limits_{L} \left(x^2+y^2\right) dl$, мұнда L: $x^2+y^2 = 2y$ шеңбері.

(**Жауабы:** 8 .)

2.20. $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, мұнда L_{OABC} : төбелері $O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(5,3)$, $C(0,3)$ болатын үшбұрыш контуры. (**Жауабы:** -15 .)

2.21. $\int\limits_{L} \left(x^2+y^2\right) dl$, мұнда L: $x^2+y^2 = 4x$ шеңбері.

(**Жауабы:** 32π .)

2.22. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right) dl$, мұнда L_{AB}: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ астроидасының $A(1,0)$ мен $B(0,1)$ нүктелерінің арасындағы доғасы. (**Жауабы:** 1.)

2.23. $\int\limits_{L} xydl$, мұнда L : қабырғалары $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ болатын квадрат контуры. (**Жауабы:** 0 .)

2.24. $\int\limits_L y^2 dl$, мұнда L : $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ циклоидасының бірінші аркасы. (**Жауабы:** $17\frac{1}{15}$.)

2.25. $\int\limits_{L_{ABCD}} xydl$, мұнда L_{ABCD} : төбелері $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$ болатын төртбұрыш контуры. (**Жауабы:** 45.)

2.26. $\int\limits_L ydl$, мұнда L: $y^2 = 2x$ параболасының $x^2 = 2y$ параболамен қиылған доғасы. (**Жауабы:** $\frac{\left(5\sqrt{5}-1\right)}{3}$.)

2.27. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, мұнда L_{AB} : түзудің $A(4,0)$ мен $B(6,1)$ нүктелерінің арасындағы кесіндісі. (**Жауабы:** $\sqrt{5}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$.)

2.28. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)^2 dl$, мұнда L : $\rho = 2$ шеңберінің бірінші ширектегі бөлігі. (**Жауабы:** 16π .)

2.29. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, мұнда L_{AB} : түзудің $A(1,1,1)$ мен $B(2,2,2)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** $\ln 2$.)

2.30. $\int\limits_L (x - y)dl$, мұнда L: $x^2 + y^2 = 2x$ шеңбері.

(**Жауабы:** 2π .)

3

3.1. $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,dl$, мұнда L : $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$ шеңбері. (**Жауабы:** $2\pi a^2$.)

3.2. $\int\limits_L xyz\,dl$, мұнда L : $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$ шеңберінің бірінші октанттағы бөлігі. (**Жауабы:** $R^4\dfrac{\sqrt{3}}{32}$.)

3.3. $\int\limits_L \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dl$, мұнда L : $\rho=2\varphi$ – Архимед спиралінің радиусі R центрі полюсте болатын дөңгелектің ішінде жатқан доғасы. (**Жауабы**: $\left(\left(R^2+4\right)^{\frac{3}{2}}-8\right)/12$.)

3.4. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, мұнда L : $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\le t\le 2\pi$ қисығы. (**Жауабы:** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,\dfrac{\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)}{3}$.)

3.5. $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, мұнда L : $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ – конустық винттік сызығының бірінші орамы.

(**Жауабы:** $2\sqrt{2}\left(\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)/3$.)

3.6. $\int\limits_L (x+z)\,dl$, мұнда $L:\ x=t$, $y=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)t^2$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$ қисығы. (**Жауабы:** $\left(\frac{56\sqrt{7}-1}{54}\right)$.)

3.7. $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, мұнда $L:\ \left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $x\ge 0$ қисығы. (**Жауабы:** $2a^3\frac{\sqrt{2}}{3}$.)

3.8. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где $L:\ \rho^2=a^2\cos 2\varphi$ лемнискатасының бірінші орамы. (**Жауабы:** $a^2\sqrt{2}$.)

3.9. $\int\limits_L xy\,dl$, мұнда $L:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсінің бірінші ширектегі бөлігі. (**Жауабы:** $ab\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)}{\left(3(a+b)\right)}$.)

3.10. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, мұнда $L:\ x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, шеңберінің бірінші октантта жатқан бөлігі. (**Жауабы:** $R^2\sqrt{2}$.)

3.11. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-z}$, мұнда $L_{AB}:\ z=\frac{x}{-2}$, $y=0$ түзуінің $A(0,0,-2)$ мен $B(4,0,0)$ нүктелерін қосатын кесіндісі.

(**Жауабы:** $\sqrt{5}\ln 2$.)

3.12. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, мұндағы L , $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$ циклоидасының бірінші аркасы. (**Жауабы:** $4\pi a\sqrt{a}$.)

3.13. $\int\limits_L \left(x-y\right)dl$, мұнда L : $x^2+y^2=ax$ шеңбері.

(**Жауабы:** $\frac{\pi a^2}{2}$.)

3.14. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, мұнда L : $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ винттік сызығының бірінші орамы. (**Жауабы:** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$.)

3.15. $\int\limits_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, мұнда L : $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=at$ винттік сызығының бірінші орамы. (**Жауабы:** $8a\pi^3\frac{\sqrt{2}}{3}$.)

3.16. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, мұнда L : $x=a\left(\cos t+t\sin t\right)$, $y=a\left(\sin t-t\cos t\right)$, $0\le t\le 2\pi$ шеңберінің жазбасы.

(**Жауабы:** $a^2\left(\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)/3$.)

3.17. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, мұнда L_{AB} : түзудің $A(0,-2)$ мен $B(4,0)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** $\ln\left(\left(3\sqrt{5}-7\right)/2\right)$.)

3.18. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, мұнда L : $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, $z=t$ $x=a\cos t$, $y=a\sin t,$, винттік сызығының бірінші орамы.

(**Жауабы:** $\frac{\sqrt{26}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2\pi}{5}$.)

3.19. $\int\limits_{L_{OABC}} yzdl$, мұнда L_{OABC} : төбелері $O(0,0,0)$, $A(0,4,0)$, $B(0,4,2)$, $C(0,0,2)$ нүктелерінде болатын тік төртбұрыш контуры.

(**Жауабы:** 24.)

3.20. $\int\limits_L x^2dl$, мұнда L : $x^2+y^2=a^2$ шеңберінің жоғарғы жартысы. (**Жауабы:** $\pi a^3/2$.)

3.21. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, мұнда L : $x=\cos 4t$, $y=4\sin t$, $z=3t$ винттік сызығының бірінші орамы.

(**Жауабы:** $10\pi\left(48+36\pi^2\right)/3$.)

3.22. $\int\limits_L ydl$, мұнда L : $y^2=6x$ параболасының $x^2=6y$ параболамен қиылған доғасы. (**Жауабы:** $3\left(5\sqrt{5}-1\right)$.)

3.23. $\int\limits_{L_{AB}} xdl$, мұнда L_{AB} : $y=x^2$ параболасының $A(2,4,)$ нүктесінен $B(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)/12$.)

3.24. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, мұнда L : $\rho^2 = 7\cos 2\varphi$ лемнискатасының бірінші орамы. (**Жауабы:** $7\sqrt{2}$.)

3.25. $\int\limits_L \left(z^2+y^2\right)dl$, мұнда $L: z^2+y^2=4$ шеңбері.

(**Жауабы:** 256π .)

3.26. $\int\limits_L y^2 dl$, мұнда L : $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ циклоидасының бірінші аркасы. (**Жауабы:** $458\frac{4}{5}$.)

3.27. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, мұнда L : $x=6(\cos t+t\sin t)$, $y=6(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ шеңберінің жазбасы.

(**Жауабы:** $12\left(\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$.)

3.28. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, мұнда L : $x=9\cos t$, $y=9\sin t$, $z=9t$ винттік сызығының бірінші орамы. (**Жауабы:** $24\pi\sqrt[3]{2}$.)

3.29. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^2 dl$, мұнда $L: x=3\cos t$, $y=3\sin t$ шеңбері.

(**Жауабы:** 486π .)

3.30. $\int\limits_L ydl$, мұнда L : $y^2 = 12x$ параболасының $x^2 = 12y$ параболамен қиылған доғасы. (**Жауабы:** $12\left(5\sqrt{5}-1\right)$.)

4

4.1. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, мұнда L_{OA} : $y = 2x^2$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $A(1,2)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{31}{30}$.)

4.2. $\int\limits_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, мұнда L_{OBA} : OBA – сынық сызығы; $O(0,0,0)$; $B(0,2,0)$; $A(0,2,1)$. (**Жауабы** -4 .)

4.3. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy$, мұнда $L : x = a\left(t - \sin t\right)$, $y = a\left(1 - \cos t\right)$, $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$ циклоидасы. (**Жауабы:** $\frac{a\pi^2}{24} + \frac{a}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\ln 3$.)

4.4. $\int\limits_L yzdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz$, мұнда L : – $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{(2\pi)}$ қисығының $z = 0$ жазықтығымен қиылысу нүктесінен $z = a$ жазықтығымен қиылысу нүктесіне дейінгі бөлігі.

(**Жауабы:** 0 .)

4.5. $\int\limits_{L_{OA}} 2xzdy - y^2dz$, мұнда L_{OA} : $z = \dfrac{x^2}{4}$ параболасының $O(0,0,0)$ нүктесінен $A(2,0,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** 0 .)

4.6. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x - \dfrac{1}{y}\right)dy$, мұнда L_{AB} : $y = x^2$ параболасының $A(2,0,1)$ нүктесінен $B(2,4)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\dfrac{14}{3} - \ln 4$.)

4.7. $\int\limits_{L_{AB}} \cos z dx - \sin x dz$, мұнда L_{AB} : түзудің $A(2,0,-2)$ мен $B(-2,0,2)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** $-2\sin 2$.)

4.8. $\int\limits_{L} ydx - xdy$, мұнда L : $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ шеңберінің бірінші ширекте жатқан бөлігі, ал бағыт - сағат тілінің айналу бағытына қарсы. (**Жауабы:** 0 .)

4.9. $\int\limits_{L_{OA}} (xy - x)dx + \dfrac{x^2}{y}dy$, мұнда $y = 2\sqrt{x}$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $A(1,2)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\dfrac{1}{2}$.)

4.10. $\oint\limits_L ydx - xdy$, мұнда L : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипсінің доғасы, бағыт - сағат тілінің айналу бағытына қарсы.

(**Жауабы:** $-2\pi ab$.)

4.11. $\oint\limits_L xdy$, мұнда L: – $y = x$, $x = 2$, $y = 0$ түзулерінен құралған үшбұрыш контуры, ал бағыт - сағат тілінің айналу бағытына қарсы. (**Жауабы:** 2 .)

4.12. $\int\limits_L xdy$, мұнда L : $y = \sin x$ синусоидасының $(\pi, 0)$ нүктесінен $(0, 0)$ нүктесіне дейінгі доғасы. (**Жауабы:** 2 .)

4.13. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, мұнда L : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипсінің жоғарғы жартысы, бағыт - сағат тілінің айналу бағытымен бағыттас.

(**Жауабы:** $\frac{4ab^2}{3}$.)

4.14. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + x\,dy$, мұнда L_{OB} : $y = 2\sqrt{x}$ параболасының $O(0, 0)$ нүктесінен $B(1, 2)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $-\frac{8}{15}$.)

4.15. $\int\limits_L xdx + xydy$, мұнда L : $x^2 + y^2 = 2x$ шеңберінің оң бағытпен айналатын жоғарғы жартысы. (**Жауабы:** $-\frac{4}{3}$.)

4.16. $\int\limits_L (x-y)dx+dy$, мұнда L: $x^2+y^2=R^2$ шеңберінің оң бағытпен айналатын жоғарғы жартысы. (**Жауабы:** $\frac{\pi R^2}{2}$.)

4.17. $\int\limits_L \left(x^2-y\right)dx$, мұнда L : $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ түзулерімен құралған тік төртбұрыштың оң бағытпен айналатын контуры. (**Жауабы:** 2 .)

4.18. $\int\limits_{L_{OB}} 4x\sin^2 ydx+y\cos 2xdy$, мұнда L_{OB} : түзудің $O(0,0)$ мен $B(3,6)$ нүктелерін қосатын кесіндісі. (**Жауабы:** 18 .)

4.19. $\int\limits_L ydx-xdy$, мұнда L : $x=6\cos t$, $y=4\sin t$ эллипсінің оң бағытпен айналатын контуры. (**Жауабы:** -48π .)

4.20. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx-x^2dy$, мұнда L_{OA} : $x=2y^2$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $A(2,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** 2, 4 .)

4.21. $\int\limits_{L_{AB}} xye^x dx+(x-1)e^x dy$, мұнда L_{AB} : $A(0,2)$ мен $B(1,2)$ нүктелерін қосатын кез келген қисық. (**Жауабы:** 2.)

4.22. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, мұнда L: төбелері $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ болатын үшбұрыштың оң бағытпен айналатын

контуры. (**Жауабы:** $-\frac{1}{3}$.)

4.23. $\int\limits_{L_{ABO}} \left(xy - x\right)dx + \frac{x^2}{2}dy$, L_{ABO} : ABO – сынық сызық, мұнда $\left(O(0,0); A(1,2); B\left(\frac{1}{2}, 3\right)\right)$. (**Жауабы:** $-\frac{1}{2}$.)

4.24. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, мұнда L_{OA} : түзудің $O(0,0)$ нүктесінен $A(1,2)$ нүктесіне дейінгі кесіндісі. (**Жауабы:** $\frac{1}{3}$.)

4.25. $\int\limits_{L_{OA}} xdy - ydx$, мұнда L_{OA} : $y = x^3$ кубтық параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $A(2,8)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** 8 .)

4.26. $\int\limits_{L_{AB}} 2y\sin 2xdx - \cos 2xdy$, мұнда L_{AB} : $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ нүктесінен $B\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ нүктесіне дейінгі кез келген сызық.

(**Жауабы:** $-\frac{1}{2}$.)

4.27. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - x\right)dx + \frac{x^2}{2}dy$, мұнда L_{OB} : $y = 4x^2$ параболасының $O(0,0)$ нүктесінен $B(1,4)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{3}{2}$.)

4.28. $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx+(x-y)dy$, мұнда L_{AB} $y=x^2$ параболасының $A(-1,1)$ нүктесінен $B(1,1)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** 2 .)

4.29. $\int\limits_{L_{AB}} xdy$, мұнда L_{AB} : $x^2+y^2=a^2$ оң жақ жарты шеңберінің $A(0,-a)$ нүктесінен $B(0,a)$ нүктесіне дейінгі доғасы.

(**Жауабы:** $\frac{\pi a^2}{2}$.)

4.30. $\int\limits_{L} y^2dx+x^2dy$, мұнда L : $x=5\cos t$, $y=2\sin t$ эллипсінің жоғарғы жарты доғасы, бағыт - сағат тілінің айналу бағытымен бағыттас (**Жауабы:** $\frac{80}{3}$.)

11.4-тапсырманы шығару үлгісі

№1. Қисық сызықты интегралды есептеу керек:

$$\int_L (x^2+y^2)^n\,dl\,, \quad L: x^2+y^2=a^2\,.$$

▼ Алдымен $x^2+y^2=a^2$ шеңбер теңдеуін параметрлік түрде жазамыз: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$ Бұдан $x'_t=-a\sin t$ аламыз. Олай болса 11.7.2п. (3) теңдікте $z=0$ деп алсақ

$$\int_L (x^2+y^2)dl = a^{2n+1}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^{2n+1}\,.$$

Ескерту. 11.7.2п. 3-мысалын қараңыз. ▲

№2. Қисық сызықты интегралды есептеу керек: $\int_{L_{OB}} x dl$, L_{OB} : түзудің $O(0,0)$ нүктесінен $B(1,2)$ нүктесіне дейінгі кесіндісі.

▼ Берілген екі нүкте бойынша кесінді теңдеуін жазамыз.

$[OB]$: $y=2x$, $0\le x\le 1$. Одан әрі (11.7.2п. (4)-формуланы қараңыз) $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$, $dl=\sqrt{5}dx$,

$$\int_{L_{JB}} x dl = \sqrt{5}\int_0^1 x dx = \sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\,. \quad ▲$$

Ескерту. 11.7.2п. 4-мысалды қараңыз.

№3. Қисық сызықты интегралды есептеу керек: $I=\int\limits_L 2x(y-1)dx+x^2dy$, $L:\ y=x^2$ параболасы және $y=9$ түзуімен шектелген фигураның оң бағытпен алынған контуры.

▼ Екінші ретті қисық сызықты интегралдың қасиетін қолданамыз: $I=\int\limits_{L_1} 2x(y-1)dx+x^2dy+\int\limits_{L_2} 2x(y-1)dx+x^2dy$, мұндағы $L_1:\ y=x^2$ параболасының доғасы, ал $L_2:\ y=9$ түзуінің кесіндісі. Парабола мен түзу (-3,9) және (3,9) нүктелерінде қиылысатындықтан $I=\int\limits_{-3}^{3}\left(4x^3-2x\right)dx+16\int\limits_{3}^{-3}xdx=0$. ▲

Ескерту. §11.8, 1-мысал және 2-мысалды қараңыз.

№4. Қисық сызықты интегралды есептеу керек:

$$I=\int\limits_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy\ ,\ L:\ \ x=8\cos^3 t,\ \ y=8\sin^3 t$$

астроидасының (8,0) нүктесінен (-8,0) нүктесіне дейінгі жоғарғы доғасы.

▼ Есептейміз: $dx=24\cos^2 t(-\sin t)dt$,

$dy=24\sin^2 t\cos tdt,\quad 0\le t\le\pi$.

$$I=\int\limits_0^{\pi}(2\cos t+8\sin^3 t)(-24\sin t\cos^2 t)dt-(2\sin t+8\cos^3 t)\cdot 24\sin^2 t\cos tdt=$$

$$= \int_0^{\pi} (-48\sin t\cos^3 t - 192\sin^4 t\cos^2 t - 48\sin^3 t\cos t - 192\sin^2 t\cos^2 t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (-24\sin 2t - 48\sin^2 2t)dt = 12\cos 2t\Big|_0^{\pi} - 24\int_0^{\pi}(1-\cos 4t)dt =$$

$$= -24\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi} = -24\pi. \qquad \blacktriangle$$

Ескерту. §11.9, 4-мысалды қараңыз.

11.5–ҮТ

1. Берілген өрнек $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болатынын көрсетіңіз. $u(x,y)$ функциясын табыңыз.

1.1. $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy.$ (**Ж:** $x^2+x+2y-3xy^2+C.$)

1.2. $(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}-3)dx(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}-5)dy.$ (**Ж:** $\ln(1+x^2y^2)-3x-5y+C.$)

1.3. $-(\frac{1}{2}\cos 2y + y\sin 2x)dx + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)dy$.

(**Жауабы:** $y\cos^2 x - \frac{x}{2}\cos 2y + y + C.$)

1.4. $(y^2e^{xy^2}+3)dx + (2xye^{xy^2}-1)dy.$ (**Жауабы:** $3x + e^{xy^2} - y + C.$)

1.5. $(\frac{1}{x+y} + \cos x\cos y - 3x^2)dx + (\frac{1}{x+5} - \sin x\sin y + 4y)dy.$

(**Жауабы:** $\ln(x+y)+\sin x\cos y-x^3+2y^2+C.$)

1.6. $(y/x+\ln y+2x)dx+(\ln x+x/y+1)dy.$

(**Жауабы:** $x^2+y\ln x+x\ln y+y+C.$)

1.7. $(e^{x+y}-\cos x)dx+(e^{x+y}-\sin y)dy.$ (**Ж:** $e^{x+y}-\cos y-\sin x+C.$)

1.8. $(y/\sqrt{1-x^2y^2}+2x)dx+(x/\sqrt{1-x^2y^2}+6y)dy.$

(**Жауабы:** $\arcsin xy+x^2+3y^2+C.$)

1.9. $(e^{xy}+xye^{xy}+2)dx+(x^2e^{xy}+1)dy.$ (**Жауабы:** $xe^{xy}+2x+y+C.$)

1.10. $(ye^{xy}+y^2)dx+(xe^{xy}+2xy)dy.$ (**Жауабы:** $e^{xy}+xy^2+C.$)

1.11. $(y\cos(xy)+2x-3y)dx+(x\cos(xy)-3x+4y)dy.$

(**Жауабы:** $\sin(xy)+x^2-3xy+2y^2+C.$)

1.12. $(y\sin(x+y)+xy\cos(x+y)-9x^2)dx+(x\sin(x+y)+xy\cos(x+y)+2y)dy.$

(**Жауабы:** $xy\sin(x+y)-3x^3+y^2+C.$)

1.13. $(5y+\cos x+6xy^2)\ dx+(5x+6x^2y)dy.$

(**Жауабы:** $(\sin x+5xy+3x^2y^2+C.)$)

1.14. $(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy.$ (**Жауабы:** $ye^{xy}-3x+C.$)

1.15. $(1+\cos(xy))ydx+(1+\cos(xy))xdy.$ (**Жауабы:** $xy+\sin(xy)+C.$)

1.16. $(y-\sin x)dx+(x-2y\cos y^2)dy.$ (**Ж:** $\cos x+xy-\sin y^2+C.$)

1.17. $(\sin 2x-\frac{1}{x^2y})\,dx-\frac{1}{xy^2}dy.$ (**Жауабы:** $\frac{1}{xy}-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$)

1.18. $\frac{x+y}{xy}dx+\frac{y-x}{y^2}dy.$ (**Жауабы:** $\frac{\ln(xy)+x}{y+C}.$)

1.19. $(20x^3-21x^2y+2y)dx+(3+2x-7x^3)dy.$

(**Жауабы:** $5x^4-7x^3y+2xy+3y+C.$)

1.20. $(ye^{xy}-2\sin x)dx+(xe^{xy}+\cos y)dy.$ (**Ж:** $e^{xy}+2\cos x+\sin y+C.$)

1.21. $y(e^{xy}+5)dx+x(e^{xy}+5)dy.$ (**Жауабы:** $e^{xy}+5xy+C$.)

1.22. $(x-\frac{y}{x^2-y^2})\,dx+(\frac{x}{x^2-y^2}-y)dy.$ (**Ж:** $\frac{x^2}{2}+arctg\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2}+C.$)

1.23. $\frac{x\ln y+y}{x}dx+\frac{y\ln x+x}{y}dy$. (**Жауабы:** $y\ln x+x\ln y+C.$)

1.24. $e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy.$ (**Жауабы:** $e^{x-y}(x+y)+C.$)

1.25. $(3x^2-2xy+y)dx+(x-x^2-3y^2-4y)dy.$

(**Жауабы:** $x^3-x^2y-y^3+xy-2y^2+C.$)

1.26. $(2xe^{x^2-y^2}-\sin x)dx+(\sin y-2ye^{x^2-y^2})dy.$

(**Жауабы:** $e^{x^2-y^2}+\cos x-\cos y+C.$)

1.27. $(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}+x^2})dx+(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}+y})dy.$

(**Жауабы:** $\frac{x^3}{3}+\arcsin(xy)+\frac{y^2}{2}+C.$)

1.28. $\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{1-2x}{xy^2}dy.$ (**Жауабы:** $\frac{2-1}{\text{xy}}+\frac{1}{x}+C.$)

1.29. $(\frac{1}{\text{y-1}}-\frac{y}{(x-1)^2}-2)dx+(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(y-1)^2}+2y)dy.$

(**Жауабы:** $\frac{y}{x-1}+\frac{x}{y-1}-2x+y^2+C.$)

1.30. $(3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy.$

(**Жауабы:** $x^3-x^2y+xy^2+y^3+C.$)

2

2.1. Шынжыр сызығының $y=\frac{(e^x+e^{-x})}{2}$, $x\in[0;1]$ доғасының ұзындығын есептеңіз. (**Жауабы:** $\frac{(e^2-1)}{(2e)}$.)

2.2. Біртекті $2x+y=1$ түзуінің координат өстерінің арасындағы кесіндісінің осы өстермен салыстырғандағы инерция моменттерін есептеңіз. (**Жауабы:** $I_x=\frac{\sqrt{5}}{6},\ I_y=\frac{\sqrt{5}}{24}.$)

2.3. Біртекті $x^2+y^2=a^2$ шеңберінің бірінші ширекте жатқан бөлігінің масса центрінің координаттарын табыңыз.

(**Жауабы:** $(\frac{2a}{\pi},\ \frac{2a}{\pi})$.)

2.4. $y=\ln x$ қисығының абсциссалары $x=\sqrt{3}$ және $x=\sqrt{8}$ тең нүктелерінің арасында жатқан доғасының массасын есептеңіз. Доғаның әрбір нүктесіндегі тығыздығы осы нүктенің абсциссасының квадратына тең. (**Жауабы:** $\frac{19}{3}.$)

2.5. $y^2=x^3$ жартыкубтық параболаның абсциссалары $x=0$ және $x=\frac{4}{3}$ тең нүктелерінің арасында жатқан доғасының Oy өсіне салыстырғандағы инерция моментін есептеңіз.

(**Жауабы:** $I_y=\frac{107\cdot 2^{10}}{(105\cdot 3^6)}\approx 1{,}13.$)

2.6. Қабырғлары $x=\pm a,\ \ y=\pm a$ болатын квадрат контурының координат бас нүктесіне салыстырғандағы инерция моментін есептеңіз. Квадраттың тығыздығы тұрақты деп есептеңіз.

(**Жауабы:** $I_o=\frac{32}{3}$.)

2.7. $x = 2 - \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^6}{6}$ қисығының координата өстерімен қиылысу нүктелерімен шенелген доғасының ұзындығын есептеңіз.

(**Жауабы:** $\frac{13}{3}$.)

2.8. Біртекті Ox өсімен салыстырғандағы $x^2 + y^2 = 4$ жарты шеңберінің масса центрінің координаттарын есептеңіз. (**Ж:** $(\frac{4}{\pi}, 0)$.)

2.9. Біртекті $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$ циклоиданың бір аркасының масса центрінің координаттарын есептеңіз. (**Ж:** $(\pi, \frac{4}{3})$.)

2.10. Түзудің $A(2,\ 0)$ мен $B(0,\ 1)$ нүктелерінің арасында жатқан кесіндісінің координат бас нүктесімен салыстырғандағы инерция моментін есептеңіз. Кесіндінің әрбір нүктесіндегі сызықтық тығыздығы 1-ге тең. (**Жауабы:** $I_0 = 5\sqrt{\frac{5}{3}}$.)

2.11. Сфералық $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$ үшбұрыштың біртекті контурының масса центрінің координаттарын есептеңіз. (**Жауабы:** $(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$.)

2.12. $x = 2\cos^3 t, \quad y = 2\sin^3 t$ астроидасының бірінші квадрантта орналасқан доғасының координат өстерімен салыстырғандағы статикалық моменттерін есептеңіз. (**Ж:** $M_x = 2,4, \quad M_y = 2,4.$)

2.13. $y = 2 - x$ түзуінің координат өстер арасында орналасқан кесіндісінің массасын есептеңіз. Кесіндінің әрбір нүктесіндегі сызықтық тығыздығы осы нүктенің абсциссасының квадратына пропорционал, ал $(2,0)$ нүктесінде 4 тең. (**Жауабы:** $8\sqrt{\frac{2}{3}}$.)

2.14. Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ лемнискатасының бірінші орамының біртекті доғасының Oy өсімен салыстырғандағы статикалық моментін табыңыз. (**Жауабы:** $M_y = a^2\sqrt{2}$.)

2.15. $F = xi + (x+y)j$ күшінің нүктелік m массасының $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипс доғасымен орын ауыстырғандағы жұмысын табыңыз. (**Жауабы:** $12\pi m$.)

2.16. $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t$ винттік сызығының бірінші орамының біртекті доғасының Oz өсімен салыстырғандағы инерция моментін есептеңіз. (**Жауабы:** $I_z = 8\sqrt{5\pi}$.)

2.17. $\rho = 3\sin\varphi,\quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, қисық доғасының массасын есептеңіз. Оның әрбір нүктедегі тығыздығы полюске дейінгі қашықтыққа пропорционал және $\varphi = \frac{\pi}{4}$ үшін 3 тең. (**Ж:** $\frac{9(2-\sqrt{2})}{2}$.)

2.18. $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad z = 2t$ винттік сызығының бірінші орамының біртекті доғасының масса центрінің координаттарын есептеңіз. (**Жауабы:** $(0,0,2\pi)$.)

2.19. $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t$ шеңберінің бірінші квадрантта жатқан ширек доғасының координат өстерімен салыстырғандағы инерция моменттерін есептеңіз. (**Жауабы:** $I_x = 2\pi, \quad I_y = 2\pi.$)

2.20. $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = t,$ винттік сызығының бірінші орамының біртекті доғасының масса центрінің координаттарын есептеңіз. Доғаның әрбір нүктесіндегі сызықтық тығыздығы нүктенің аппликатасына пропорционал және $t = \pi$ нүктесінде 1 тең.

(**Жауабы:** $(0, -\frac{2}{\pi}, \frac{4\pi}{3}).$)

2.21. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ эллипсінің бірінші квадрантта жатқан ширегі доғасының массасын есептеңіз. Доғаның әрбір нүктесіндегі сызықтық тығыздығы осы нүктенің координаттарының көбейтіндісіне тең. (**Жауабы:** $\frac{14}{9}$.)

2.22. Материалдық нүктенің $y = x$ түзу бойымен $(0,0)$ нүктесінен (1,1). нүктесіне дейін орын ауыстырғандағы $F = xyi + (x + y)j$ күшінің жұмысын есептеңіз. (**Жауабы:** $\frac{4}{3}$.)

2.23. Шынжыр сызығының біртекті $y = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ доғасының Ox өсімен салыстырғандағы статикалық моментін есептеңіз. (**Жауабы:** $\frac{(e - 1/e + 2)}{8}$.)

2.24. Материалдық нүктенің, қабырғалары $x = \pm 1,\ y = \pm 1$ болатын квадрат контурының бойымен орын ауыстырғандағы $F = (x - y)i + xj$ күшінің жұмысын есептеңіз. (**Жауабы:** 8 .)

2.25. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. кардиоидасының біртекті доғасының Ox өсімен салыстырғандағы статикалық моментін есептеңіз.

(**Жауабы:** $\frac{32a^2}{5}$)

2.26. $x = 3(t - \sin t)$ циклоидасының бір арка доғасының ұзындығын есептеңіз. (**Жауабы:** 24 .)

2.27. Материалдық нүктенің $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ шеңбер бойымен, сағат тілінің айналу бағытымен бағыттас орын ауыстырғандағы $F = (x + y)i - xj$ күшінің жұмысын есептеңіз. (**Жауабы:** 8π .)

2.28. Материалдық нүктенің $y = x^2$ параболасының бойымен координат бас нүктесінен (1, 1) нүктесіне дейін орын ауыстырғандағы $F = yi + (x + y)j$ күшінің жұмысын есептеңіз. (**Ж:** $\frac{17}{12}$.)

2.29. Материалдық нүктенің $y = -3x^2$ параболасының бойымен координат бас нүктесінен (1, –3) нүктесіне дейін орын ауыстырғандағы $F = (x - y)i + 2yj$ күшінің жұмысын есептеңіз.

(**Жауабы:** 10,5 .)

2.30. $y = 2x$ түзуінің (1, 2) мен (2, 4) нүктелерінің арасындағы біртекті кесіндісінің координат өстерімен салыстырғандағы инерция моменттерін есептеңіз.(**Ж:** $I_x = 28\sqrt{\frac{5}{3}},\ I_y = 7\sqrt{\frac{5}{3}}.$)

11.5–ЖҮТ. Шығару үлгілері

№1. $\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy$ өрнегі $U(x,y)$ функциясының толық дифференциалы екенін көрсету керек және $U(x,y)$ функциясын табу керек.

▼ $U(x,y)$ функциясы үшін толық дифференциал шарты: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ орындалатынын тексереміз:

$$P(x,y)=\frac{y}{1+x^2y^2}-1\ ,\quad Q(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)=\frac{1+x^2y^2-y\cdot 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)=\frac{1+x^2y^2-x\cdot 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2},$$

Берілген өрнек $U(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болады екен. Осы $U(x,y)$ функциясын табу үшін келесі екі теңдікті пайдаланамыз: $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)$ (1) $\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$ (2)

(1)-теңдікті x бойынша интегралдаймыз. Бұл жағдайда y тұрақты деп алынатындықтан, $C=\varphi(y)$ деп аламыз.

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)=\int\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\varphi(y)=$$

$$=\int\frac{d(xy)}{1+(xy)^2}-x+\varphi(y)=\operatorname{arctg}xy-x+\varphi(y)\ . \qquad (*)$$

Мұндағы $\varphi(y)$ табу үшін (2)-теңдікті пайдаланамыз. Ол үшін (*) теңдігін y бойынша дифференциалдап, алынған өрнекті $Q(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10$ функциясына теңестіреміз:

$$\frac{dU}{dy}=\frac{x}{1+x^2y^2}+\varphi'(y)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10\ .$$

Одан әрі $\varphi'(y)=-10$, $\varphi(y)=-10y+C.$ Табылған $\varphi(y)$ функциясын $(*)$ теңдігіне қойып, $U(x,y)$ функциясын таба-мыз: $u=(x,y)=\operatorname{arctg}xy-x-10y+C$. ▲

№2. $4x+2y=3$ түзуінің $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ және $\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ нүктелерінің арасындағы кесіндісінің координат өстерімен салыстырғандағы инерция моменттерін табу керек.

▼ Мына формулаларды пайдаланамыз: $I_x=\int\limits_L y^2dl,\ I_y=\int\limits_L x^2dl,$ мұндағы $L: y=-2x+\frac{3}{2}$, $0\le x\le 2$, $dl=\sqrt{5}dx$:

$$I_x = \sqrt{5}\int_0^2 \left(-2x+\frac{3}{2}\right)^2 dx = -\frac{\sqrt{5}}{2}\left.\frac{\left(-2x+\frac{3}{2}\right)^3}{3}\right|_0^2 = -\frac{\sqrt{5}}{6}\left(\frac{125}{8}+\frac{27}{8}\right) = \frac{49\sqrt{5}}{24},$$

$$I_y = \int_l x^2 dl, \quad I_y = \sqrt{5}\int x^2 dx = \sqrt{5}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8\sqrt{5}}{3}. \qquad \blacktriangle$$

11.6-YT

1. $u(M) = u(x, y, z)$ функциясы мен M_1 , M_2 нүктелері берілген. 1) осы функцияның M_1 нүктедегі $\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}$ векторының бағыты бойынша туындысын; 2) grad $u(M_1)$ табыңыз.

1.1. $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,4,-1)$.

1.2. $u(M) = 5xy^3z^2$, $M_1(2,1,-1)$, $M_2(4,-3,0)$.

1.3. $u(M) = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $M_1(-1,2,1)$, $M_2(3,1,-1)$.

1.4. $u(M) = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_1(0,0,0)$, $M_2(3,-4,2)$.

1.5. $u(M) = \ln(xy+yz+xz)$, $M_1(-2,3,-1)$, $M_2(2,1,-3)$.

1.6. $u(M) = \sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,2,1)$.

1.7. $u(M) = x^2y + xz^2 - 2$, $M_1(1,1,-1)$, $M_2(2,-1,3)$.

1.8. $u(M) = xe^y + ye^x - z^2$, $M_1(3,0,2)$, $M_2(4,1,3)$.

1.9. $u(M)=3xy^2+z^2-xyz$, $M_1(1,1,2)$, $M_2(3,-1,4)$.

1.10. $u(M)=5x^2yz-xy^2z+yz^2$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(9,-3,9)$.

1.11. $u(M)=\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)}$, $M_1(1,2,2)$, $M_2(-3,2,-1)$.

1.12. $u(M)=y^2z-2xyz+z^2$, $M_1(3,1,-1)$, $M_2(-2,1,4)$.

1.13. $u(M)=x^2+y^2+z^2-2xyz$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(5,-1,4)$.

1.14. $u(M)=\ln(1+x+y^2+z^2)$, $M_1(1,1,1)$, $M(3,-5,1)$.

1.15. $u(M)=x^2+2y^2-4z^2-5$, $M_1(1,2,1)$, $M_2(-3,-2,6)$.

1.16. $u(M)=\ln(x^3+y^3+z+1)$, $M_1(1,3,0)$, $M_2(-4,1,3)$.

1.17. $u(M)=x-2y+e^z$, $M_1(-4,-5,0)$, $M_2(2,3,4)$.

1.18. $u(M)=x^y-3xyz$, $M_1(2,2,-4)$, $M_2(1,0,-3)$.

1.19. $u(M)=3x^2yz^3$, $M_1(-2,-3,1)$, $M_2(5,-2,0)$.

1.20. $u(M)=e^{xy+z^2}$, $M_1(-5,0,2)$, $M_2(2,4,-3)$.

1.21. $u(M)=x^{yz}$, $M_1(3,1,4)$, $M_2(1,-1,-1)$.

1.22. $u(M)=(x^2+y^2+z^2)^3$, $M_2(1,2,-1)$, $M_2(0,-1,3)$.

1.23. $u(M)=(x-y)^z$, $M_1(1,5,0)$, $M_2(3,7,-2)$.

1.24. $u(M)=x^2y+y^2z-3z$, $M_1(0,-2,-1)$, $M_2(12,-5,0)$.

1.25. $u(M)=\dfrac{10}{(x^2+y^2+z^2+1)}$, $M_1(-1,2,-2)$, $M_2(2,0,1)$.

1.26. $u(M)=\ln\left(1+x^2-y^2+z^2\right)$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(5,-4,8)$.

1.27. $u(M)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{x}$, $M_1(-1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$.

1.28. $u(M)=x^3+xy^2-6xyz$, $M_1(1,3,-5)$, $M_2(4,2,-2)$.

1.29. $u(M)=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{z}-\dfrac{x}{z}$, $M_1(2,2,2)$, $M_2(-3,4,1)$.

1.30. $u(M)=e^{x-yz}$, $M_1(1,0,3)$, $M_2(2,-4,5)$.

2. S беті бойынша бірінші текті беттік интегралды есептеңіз, мұнда S – координаттық жазықтықтармен қиыл-ған (p) жазықтығының бөлігі.

2.1. $\iint\limits_s (2x+3y+2z)\,dS$, (p) : $x+3y+z=3$. (**Жауабы:** $\dfrac{15\sqrt{11}}{2}$.)

2.2. $\iint\limits_s (2+y-7x+9z)dS$, (p) : $2x-y-2z=-2$. (**Жауабы:** 12 .)

2.3. $\iint\limits_s (6x+y+4z)dS$, (p) : $3x+3y+z=3$. (**Жауабы:** $\dfrac{19\sqrt{19}}{6}$.)

2.4. $\iint\limits_s (x+2y+3z)dS$, (p) : $x+y+z=2.$ **(Жауабы:** $8\sqrt{3}$.)

2.5. $\iint\limits_s (3x-2y+6z)dS$, (p) : $2x+y+2z=2.$ **(Жауабы:** $\frac{5}{2}$.)

2.6. $\iint\limits_s (2x+5y-z)dS$, (p) : $x+2y+z=2.$ **(Жауабы:** $\frac{7\sqrt{6}}{3}$.)

2.7. $\iint\limits_s (5x-8y-z)dS$, (p) : $2x-3y+z=6.$ **(Жауабы:** $25\sqrt{14}$.)

2.8. $\iint\limits_s (3y-x-z)dS$, (p) : $x-y+z=2.$ **(Жауабы:** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.)

2.9. $\iint\limits_S (3y-2x-2z)dS$, (p) : $2x-y-2z=-2.$ **(Жауабы:** 3 .)

2.10. $\iint\limits_s (2x-3y+z)dS$, (p) : $x+2y+z=2.$ **(Жауабы:** $\sqrt{6}$.)

2.11. $\iint\limits_s (5x+y-z)dS$, (p) : $x+2y+2z=2.$ **(Жауабы:** 5 .)

2.12. $\iint\limits_s (3x+2y+2z)dS$, (p) : $3x+2y+2z=6.$ **(Жауабы:** $9\sqrt{17}$.)

2.13. $\iint\limits_s (2x+3y-z)dS$, (p) : $2x+y+z=2.$ **(Жауабы:** $2\sqrt{6}$.)

2.14. $\iint\limits_s (9x+2y+z)dS$, (p) : $2x+y+z=4.$ **(Жауабы:** $40\sqrt{6}$.)

2.15. $\iint\limits_S (3x+8y+8z)dS$, (p) : $x+4y+2z=8.$ **(Жауабы:** $96\sqrt{21}$.)

2.16. $\iint\limits_S (4y - x + 4z)\,dS$, (p) : $x - 2y + 2z = 2.$ **(Жауабы:** -1 .)

2.17. $\iint\limits_S (7x + y + 2z)\,dS$, (p) : $3x - 2y + 2z = 6.$ **(Жауабы:** $17\frac{\sqrt{17}}{2}$.)

2.18. $\iint\limits_S (2x + 3y + z)\,dS$, (p) : $2x + 3y + z = 6.$ **(Жауабы:** $18\sqrt{14}$.)

2.19. $\iint\limits_S (4x - y + z)\,dS$, (p) : $x - y + z = 2.$ **(Жауабы:** $8\sqrt{3}$.)

2.20. $\iint\limits_s (6x - y + 8z)dS$, (p) : $x + y + 2z = 2.$ **(Жауабы:** $6\sqrt{6}$.)

2.21. $\iint\limits_s (4x - 4y - z)dS$, (p) : $x + 2y + 2z = 4.$ **(Жауабы:** 44 .)

2.22. $\iint\limits_s (2x + 5y + z)dS$, (p) : $x + y + 2z = 2.$ **(Жауабы:** $5\sqrt{6}$.)

2.23. $\iint\limits_s (4x - y + 4z)dS$, (p) : $2x + 2y + z = 4.$ **(Жауабы:** 44 .)

2.24. $\iint\limits_s (5x + 2y + 2z)dS$, (p) : $x + 2y + z = 2.$ **(Жауабы:** $16\frac{\sqrt{3}}{6}$.)

2.25. $\iint\limits_s (2x + 5y + 10z)dS$, (p) : $2x + y + 3z = 6.$ **(Жауабы:** $56\sqrt{14}$.)

2.26. $\iint\limits_s (2x + 15y + z)dS$, (p) : $x + 2y + 2z = 2.$ **(Жауабы:** 10.)

2.27. $\iint\limits_s (3x + 10y - z)dS$, (p) : $x + 3y + 2z = 6.$ **(Жауабы:** $35\sqrt{14}$.)

2.28. $\iint\limits_s (2x+3y+z)dS$, (p) : $2x+2y+z=2.$ (**Жауабы:** $\frac{7}{6}$.)

2.29. $\iint\limits_s (5x-y+5z)dS$, (p) : $3x+2y+z=6.$ (**Жауабы:** $37\sqrt{14}$.)

2.30. $\iint\limits_s (x+3y+2z)dS$, (p) : $2x+y+2z=2.$ (**Жауабы:** $\frac{9}{2}$.)

3. Екінші текті беттік интегралды есептеңіз.

3.1. $\iint\limits_s (y^2+z^2)dydz$, мұнда S : $x=9-y^2-z^2$ параболоид бетінің $x=0$ жазықтығымен қиылған бөлігі ($\mathbf{n}$ нормаль векторы $\mathbf{i}$ ортымен сүйір бұрыш жасайды). (**Жауабы:** $81\frac{\pi}{2}$.)

3.2. $\iint\limits_S z^2dxdy$, мұнда S : $x^2+y^2+2z^2=2$ эллипсоид бетінің сыртқы жағы. (**Жауабы:** 0.)

3.3. $\iint\limits_S zdxdy+ydxdz+xdydz$, мұнда S : $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$ жазықтықтарымен шенелген куб бетінің сыртқы жағы. (**Жауабы:** 3.)

3.4. $\iint\limits_S (z+1)dxdy$, мұнда S : $x^2+y^2+z^2=16$ сфералық беттің сыртқы жағы. (**Жауабы** $256\frac{\pi}{2}$.)

3.5. $\iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, мұнда S : $x + y + z = 4$ жазықтығының координаттық жазықтықтармен қиылған жоғарғы жағы. (**Жауабы:** 32.)

3.6. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, мұнда S : $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ сферасының бірінші октантта жатқан бөлігінің жоғарғы жағы.

(**Жауабы:** 96π.)

3.7. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, мұнда S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферасының сыртқы жағы. (**Жауабы:** 4π.)

3.8. $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, мұнда S : $x + y + z = 1$ жазық-тығының координаттық жазықтықтармен қиылған бөлігінің жоғарғы жағы. (**Жауабы:** $\frac{1}{8}$.)

3.9. $\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, мұнда S : $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрінің $z = 0,\ z = 5$ жазықтықтарымен қиылған бөлігінің сыртқы жағы. (**Жауабы:** 25π.)

3.10. $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$, мұнда S : $z = x^2 + y^2$ параболоид бетінің $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрімен қиылған бөлігі

(**n** нормаль векторы **k** ортымен доғал бұрыш жасайды).

(**Жауабы:** $\frac{\pi}{8}$.)

3.11. $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)zdxdy$, мұнда S : $x^2+y^2+z^2=9$ сферасының төменгі жартысының сыртқы жағы. (**Жауабы:** $\frac{\pi}{5}$.)

3.12. $\iint\limits_S x^2dydz+z^2dxdy$, мұнда S : $z^2=x^2+y^2$ конусының $z=0$, $x=1$ жазықтықтар арасында жатқан бөлігі (**n** нормаль векторы **k** ортымен доғал бұрыш жасайды). (**Жауабы:** $-\frac{\pi}{2}$.)

3.13. $\iint\limits_S \left(2y^2-z\right)dxdy$, мұндағы S , $z=x^2+y^2$ параболоид бетінің $z=2$ жазықтығымен қиылған бөлігі (**n** нормаль векторы **k** ортымен доғал бұрыш жасайды). (**Жауабы:** 0.)

3.14. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, мұнда S : $x^2+y^2=z^2+1$ гиперболоид бетінің $z=0$, $z=\sqrt{3}$ жазықтықтарымен қиылған бөлігі

(**n** нормаль векторы **k** ортымен доғал бұрыш жасайды).

(**Жауабы:** $-2\sqrt{3}\pi$.)

3.15. $\iint\limits_S xydydz+yzdxdz+xzdxdy$, мұнда S : $x^2+y^2+z^2=1$ сферасының бірінші октантта жатқан бөлігінің сыртқы жағы.

(**Жауабы:** $\frac{3\pi}{16}$.)

3.16. $\iint\limits_S x^2dydz + zdxdy$, мұнда S : $z = x^2 + y^2$ параболоид бетінің $z = 4$ жазықтығымен қиылған бөлігі (**n** нормаль векторы **k** ортымен доғал бұрыш жасайды). (**Жауабы:** $8\pi.$)

3.17. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz - zdxdy$, мұнда S : $z^2 = x^2 + y^2$ конусының $z = 0$ және $z = 3$ жазықтықтарымен қиылған бөлігі (**n** -нормаль векторы **k** ортымен сүйір бұрыш жасайды).

(**Жауабы:** $-18\pi.$)

3.18. $\iint\limits_S x^2dydz - z^2dxdz + zdxdy$, мұнда S : $z = 3 - x^2 - y^2$ параболоид бетінің $z = 0$ жазықтығымен қиылған бөлігі (**n** нормаль векторы **k** ортымен сүйір бұрыш жасайды).

(**Жауабы:** $\frac{9\pi}{2}$.)

3.19. $\iint\limits_S yzdydz - x^2dxdz - y^2dxdy$, S : $x^2 + z^2 = y^2$ конус бетінің $y = 0$, $y = 1$ жазықтықтарымен қиылған бөлігі (**n** нормаль векторы **j** ортымен доғал бұрыш жасайды). (**Жауабы:** $\frac{\pi}{4}$.)

3.20. $\iint\limits_S x^2dydz + 2y^2dxdz - zdxdy$, мұнда S : $z = x^2 + y^2$ параболоид бетінің $z = 1$ жазықтығымен қиылған бөлігі (**n** нормаль векторы **k** ортымен сүйір бұрыш жасайды). (**Жауабы:** $-\frac{\pi}{2}$.)

3.21. $\iint\limits_S 2xdydz + (1-z)dxdy$, мұнда S : $x^2 + y^2 = 4$ цилиндрінің $z = 0$ мен $z = 1$ жазықтықтарымен қиылған бөлігінің ішкі жағы. (**Жауабы:** -8π.)

3.22. $\iint\limits_S 2xdydz - ydxdz + zdxdy$, мұнда S : $3z = x^2 + y^2$ параболоиды мен $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ жарты сферасы арқылы құралған тұйық беттің сыртқы жағы . (**Жауабы:** $19\frac{\pi}{3}$.)

3.23. $\iint\limits_S 4xdydz + 2ydxdz - zdxdy$, мұнда S : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ сферасының сыртқы жағы. (**Жауабы:** $160\frac{\pi}{3}$.)

3.24. $\iint\limits_S (x+z)dydz + (z+y)dxdz$, мұнда S : $x^2 + y^2 = 1$ цилиндрінің $z = 0$ мен $z = 2$ жазықтықтаымен қиылған бөлігінің сыртқы жағы. (**Жауабы:** 2π .)

3.25. $\iint\limits_S 3xdydz - ydxdz - zdxdy$, мұнда S : $9 - z = x^2 + y^2$ параболоид бетінің $z = 0$ жазықтықпен қиылған бөлігі (**n** - нормаль векторы **k** ортымен сүйір бұрыш жасайды). (**Жауабы:** $243\frac{\pi}{2}$.)

3.26. $\iint\limits_S (y-x)dydz + (z-y)dxdz + (x-z)dxdy$, мұнда S : $x^2 = y^2 + z^2$ конусы мен $x = 1$ жазықтығы арқылы құралған тұйық беттің ішкі жағы. (**Жауабы:** π.)

3.27. $\iint\limits_S 3x^2dydz - y^2dxdz - zdxdy$, мұнда S : $1 - z = x^2 + y^2$ параболоид бетінің бөлігі (**n** -нормаль векторы **k** ортымен сүйір бұрыш жасайды). (**Жауабы:** $-\frac{\pi}{2}$.)

3.28. $\iint\limits_S \left(1 + 2x^2\right)dydz + y^2dxdz + zdxdy$, мұнда S : $x^2 + y^2 = z^2$ конус бетінің $z = 0$ мен $z = 4$ жазықтықтарымен қиылған бөлігі (**n** - нормаль векторы **k** ортымен доғал бұрыш жасайды).

(**Жауабы:** $128\frac{\pi}{3}$.)

3.29. $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdz + ydxdy$, мұнда S : $x^2 + y^2 = 4 - z$ пара-болоид бетінің $z = 0$ жазықтығымен қиылған бөлігі (**n** - нормаль векторы **k** ортымен сүйір бұрыш жасайды). (**Жауабы:** 0 .)

3.30. $\iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right)dydz - y^2dxdz + 2yz^2dxdy$, мұнда S: $x^2 + z^2 = y^2$ конус бетінің $y = 0$ мен $y = 1$ жазықтықтарымен қиылған бөлігі (**n** - нормаль векторы **j** ортымен доғал бұрыш жасайды).

(**Жауабы:** $\frac{\pi}{2}$.)

4. Векторлық $\mathbf{a}(M)$ өрісінің (p) жазықтығымен және координаттық жазықтықтармен құралған пирамиданың сыртқы беті арқылы ағынын екі түрлі әдіспен: а) ағын анықтамасын

пайдаланып; б) Гаусс-Остроградский формуласын пайдаланып, есептеңіз.

4.1. $\mathbf{a}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, (p) : $x+3y+z=3$.

(Жауабы: $\frac{9}{2}$.)

4.2. $\mathbf{a}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$, (p) : $2x-y-2z=2$.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$.)

4.3. $\mathbf{a}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, (p) : $3x+3y+z=3$.

(Жауабы: 1 .)

4.4. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$, (p) : $x+y+z=2$.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$.)

4.5. $\mathbf{a}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, (p) : $2x+y+2z=2$.

(Жауабы: 0 .)

4.6. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$, (p) : $x+2y+z=2$.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$.)

4.7. $\mathbf{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, (p) : $2x-3y+z=6$.

(Жауабы: 42 .)

4.8. $\mathbf{a}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, (p) : $x-y+z=2$.

(Жауабы: -4 .)

4.9. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, (p) : $2x-y-2z=-2$.

(Жауабы: -1 .)

4.10. $\mathbf{a}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, (p) : $x+2y+z=2$.

(Жауабы: $\frac{2}{3}$.)

4.11. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, (p) : $2x+y+z=2$.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$.)

4.12. $\mathbf{a}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$, (p) : $x+2y+2z=2$.

(Жауабы: $\frac{4}{3}$.)

4.13. $\mathbf{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, (p) : $3x+2y+2z=6$.

(Жауабы: 9 .)

4.14. $\mathbf{a}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, (p) : $2x+y+z=2$.

(Жауабы: $\frac{80}{3}$.)

4.15. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$, (p) : $x+4y+2z=8$.

(Жауабы: $\frac{128}{3}$.)

4.16. $\mathbf{a}(M)=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, (p) : $x-2y+2z=2$.

(Жауабы: 0 .)

4.17. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(z+x)\vec{k}$, (p) : $3x-2y+2z=6$.

(Жауабы: 12 .)

4.18. $\mathbf{a}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, (p) : $2x+3y+z=6$.

(Жауабы: –36 .)

4.19. $\mathbf{a}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, (p) : $x-y+z=2$.

(Жауабы: $\frac{20}{3}$.)

4.20. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$, (p) : $x+2y+2z=4$.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$.)

4.21. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, (p) : $x+y+2z=2$.

(Жауабы: $-\frac{2}{3}$.)

4.22. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $x+y+2z=2$.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$.)

4.23. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, (p) : $2x+2y+z=4$.

(Жауабы: $\frac{8}{3}$.)

4.24. $\mathbf{a}(M)=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $x+2y+z=2$.

(Жауабы:2.)

4.25. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$, (p) : $2x+y+3z=6$.

(Жауабы: 18.)

4.26. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $x+2y+2z=2$.

(Жауабы: 2.)

4.27. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $x+3y+2z=6$.

(Жауабы: 12.)

4.28. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, (p) : $2x+2y+z=2$.

(Жауабы: $-\frac{2}{3}$.)

4.29. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, (p) : $3x+2y+z=6$.

(Жауабы: 6.)

4.30. $\mathbf{a}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $2x+y+2z=2$. (**Ж:** $\frac{1}{3}$.)

11.6 –тапсырманы шығару үлгісі

№1. $u(\mathrm{M})=\frac{\sqrt{x}}{z}-\frac{\sqrt{y}}{x}+2xyz$ функциясы мен $\mathrm{M}_1(1,1-1,)$, $\mathrm{M}_1(-2,-1\ 1,)$ нүктелері берілген. Есептеу керек: 1) функцияның M_1 нүктедегі $\vec{M_1M_2}$ вектор бағыты бойынша туындысын; 2) $\overrightarrow{\mathrm{grad}U}(M_1)$.

► 1) $U(M)=u(x,y,z)$ функциясының M_1 нүктедегі $\vec{M_1M_2}=(-3,-2,2)$ вектор бағыты бойынша туындысы (4-бөлім, 6.4.1п. (4)-формула):

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}}=\left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1}\cdot\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\frac{1}{2z\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz,\ \left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1}=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y}=-\frac{1}{2x\sqrt{y}}+2xz,\qquad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1}=-\frac{5}{2},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z}=-\frac{\sqrt{x}}{z^2}+2xy,\ \left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1}=1,$$

$$\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{17}},\quad \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{17}},\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{17}},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}\right) - \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}}.$$

2) Анықтама бойынша (4-бөлім, 6.4.2п. (5)-формула),

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} i + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} j + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} k = -\frac{3}{2}i - \frac{5}{2}j + k\ . \quad \blacktriangleleft$$

Ескерту. 4-бөлім 6.4.1п. мысалды қараңыз.

№2. Бірінші текті беттік интегралды есептеу керек: $\iint\limits_S (3x - y + z)\,ds$, мұндағы S – координат жазықтықтарымен қиылған $p: x + z - 2y = 2$ жазықтығының бөлігі.

► Жазықтық теңдеуінен, $z = 2 - x + 2y$, $z'_x = -1$, $z'_y = 2$, $ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \sqrt{6}dxdy$ аламыз. Беттік интегралды, S бетінің OXY жазықтығындағы проекциясы болатын үшбұрыш $AOB = D$ аймағы бойынша екі еселі интегралмен өрнектейміз (80-сурет).

$$\iint\limits_S (3x - y + z)dS = \iint\limits_D (3x - y + 2 - x + 2y)\sqrt{6}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (2x + y + 2)\sqrt{6}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{2+2y} (2x + y + 2)\,dx = \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0} dy\left(x^2 + (y+2)x\right)\Big|_0^{2+2y} =$$

$$= \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0} \left(4 + 8y + 4y^2 + 2y + 2y^2 + 4 + 4y\right)dy =$$

$$= \sqrt{6} \int_{-1}^{0} \left(6y^2 + 14y + 8\right) dy = \sqrt{6} \left(2y^3 + 7y^2 + 8y\right)\Big|_{-1}^{0} = 3\sqrt{6}. \qquad \blacktriangleleft$$

Ескерту. §11.10. мысалды қараңыз.

№3. Екінші текті беттік интегралды есептеу керек:

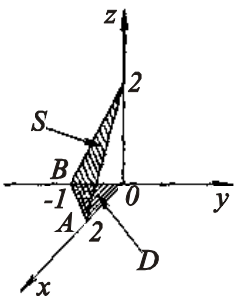
$I = \iint\limits_S (x^2 + z^2)dxdz + x^2 dydz - 2z^2 dxdy$, мұнда S арқылы $4 - y = x^2 + z^2$ параболоид бетінің $y = 0$ жазықтығымен қиылған бөлігі белгіленген (беттің нормал векторы j ортымен сүйір бұрыш жасайды).

► 11.11.2п. беттік интегралдың (4) және (10) түрлерде жазылатынын ескерсек,

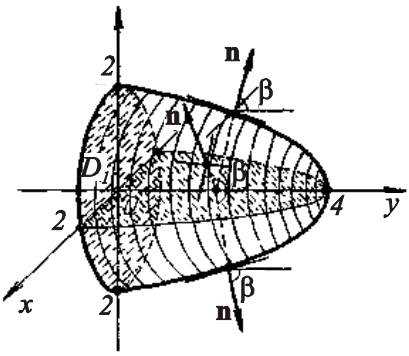
$\vec{a} = P\vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k} = x^2\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} - 2z^2\vec{k}$, ал

S: $y = 4 - x^2 - z^2$ теңдеуімен берілгендіктен 11.11.2п (13) және (13') формулалар бойынша $I = \iint\limits_{S_y} (\vec{a}, \vec{n})dzdx$, $\vec{n} = \pm(-f_x'\vec{i} + \vec{j} - f_z'\vec{k})$ аламыз. Есептің шарты бойынша $\cos\beta > 0$ болғандықтан (β-беттің нормалі мен $\vec{j}$ ортының арасындағы бұрыш, және ол сүйір), $\vec{n} = -f_x'\vec{i} + \vec{j} - f_z'\vec{k} = 2x\vec{i} + \vec{j} + 2z\vec{k}$. Олай болса, $\vec{a}\vec{n} = 2x^3x^2 + x^2 + z^2 - 4z^3$. Одан әрі, $I = \iint (2x^3 + x^2 + z^2 - 4z^3)dzdx$ екі еселі интегралын $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dzdx = \rho d\varphi d\rho$ полярлық координаттарды пайдаланып

есептейміз. Мұнда (81-сурет) S_y: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$ болғандықтан, $I = \iint\limits_S \left(2\rho^3 \cos^3\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi - 4\rho^3 \sin^3\varphi\right)\rho d\varphi d\rho =$



80-сурет



81-сурет

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left[\rho^3 + \left(2\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi\right)\rho^4\right] d\rho =$$

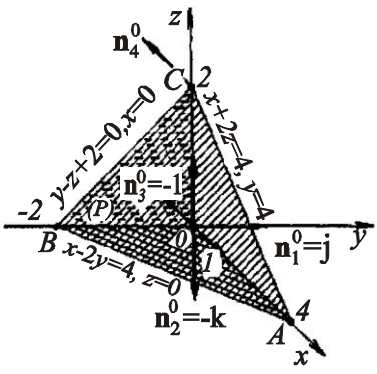
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} + \left(2\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi\right)\frac{\rho^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{2^4}{4} + \left(2\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi\right)\frac{2^5}{5} \right] d\varphi \ = 4\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi \ .$$

Ескерту. 11.11.2п. мысалды қараңыз. ▲

№4. $\mathbf{a}=(x+z)\mathbf{i}+(2y-x)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ вектор өрісінің (P): $x-2y+2z=4$ жазықтығы және координат жазықтықтарынан құралған пирамиданың сыртқы беті арқылы ағынын екі тәсілмен: 1) ағын анықтамасын пайдаланып; 2) Гаусс-Остоградский формуласын пайдаланып есептеу керек:

► 1) Вектор өрісінің ағынын $\iint\limits_S \mathbf{an}ds$ формуласының көмегімен есептейміз (мұнда S арқылы $ABCO$ пирамидасының сыртқы беті белгіленген, 82-сурет). Пирамиданың AOC жағы



82-сурет

$y=0$ жазықтығында жатқандықтан, оның нормалі $\mathbf{n}=\mathbf{j}$, ал $ds=dxdz$ болады. Сондықтан $\mathbf{an}=(2y-x)\big|_{y=0}=-x$. Есептейміз:

$$I_1=-\iint\limits_{\Delta AOC} xdS=-\iint\limits_{\Delta AOC} xdxdz=-\int\limits_0^4 xdx\int\limits_0^{2-x/2} dz=$$

$$=-\int\limits_0^4 x\left(2-\frac{x}{2}\right)dx=-\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4=-\frac{16}{3}.$$

Пирамиданың AOB жағы $z=0$ жазықтығында жатыр, оған нормаль $\mathbf{n}_2^0=-\mathbf{k}$ және $ds=dxdy$, ал $\mathbf{an}^0=-z\,\big|_{z=0}=0$.

Сондықтан $I_2=\iint\limits_{\Delta AOB}0\cdot dxdy=0$.

Пирамиданың BOC жағы $x=0$ жазықтығында жатыр, оның нормалі $\mathbf{n_3}=-\mathbf{i}$ және $ds=dydz$, ал $\mathbf{an}^0=-\big(x+z\big)\big|_{x=0}=-z.$ Олай болса

$$I_3=-\iint\limits_{\Delta BOC}zdydz=-\int\limits_0^2zdz\int\limits_{z-2}^0dy=-\int\limits_0^2z\big(-z+2\big)dz=-\left(-\frac{z^3}{3}+z^2\right)_0^2=-\frac{4}{3}.$$

Пирамиданың ABC жағы $x-2y+2z-4=0$ жазықтығында жатыр, оның бірлік нормалі $\mathbf{n}_4^0=\dfrac{i-2j+2k}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{i-2j+2k}{3}$.

Сондықтан $dS=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}dxdy=\frac{3}{2}dxdy,$

$$\Pi_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\Big(\big(x+z\big)-2\big(2y-x\big)+27\Big)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\big(x+z-4y+2x+2z\big)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\big(3x-4y+3z\big)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta AOB}\left(3x-4y-\frac{3}{2}x+3y+6\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta AOB}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0dy\int\limits_0^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0dy\left(\frac{3}{4}x^2+\big(6-y\big)x\right)\Bigg|_0^{2y+4}=$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \left(\frac{3}{4}(2y+4)^2 + (6-y)(2y+4) \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \left(3\left(y^2+4y+4\right) + 12y + 24 - 2y^2 - 4y \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \left(y^2+20y+36\right) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y \right)\Bigg|_{-2}^{0} = \frac{52}{3}.$$

Енді пирамиданың толық беті арқылы ағынын табамыз: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{32}{3}$.

2) Пирамиданың тұйық беті арқылы ағынан келесі Гаусс-Остроградский формуласын пайдаланып табамыз

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz .$$

Есептейміз:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial (x+z)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial (2y-x)}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Геометриялық мағынасы бойынша $\iiint_V dxdydz$ – пирамиданың көлемі екенін ескереміз: $I = \iiint_V (1+2+1)\, dxdydz = 4\iiint_V dxdydz = \frac{32}{3}$.

◄

Ескерту. §11.12. мысалды қараңыз.

11.7-ҮТ

1. Векторлық $\mathbf{a}(M)$ өрісінің (p) : $Ax+By+Cz=D$ жазықтығы мен координаттық жазықтықтардың қиылысуы нәтижесінде пайда болған үшбұрыштың $\mathbf{n}=(A,B,C)$ нормаль векторға салыстырғанда оң бағытпен айналатын контуры бойын-ша циркуляциясын екі әдіспен: 1) циркуляция анықта-масын пайдаланып; 2) Стокс формуласын пайдаланып есептеңіз.

1.1. $\mathbf{a}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $2x+y+2z=2.$

(Жауабы: $\frac{5}{2}$.)

1.2. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, (p) : $3x+2y+z=6$.

(Жауабы: –24 .)

1.3. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, (p) : $2x+2y+z=2.$

(Жауабы: 2.)

1.4. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $x+3y+2z=6$.

(Жауабы: –12.)

1.5. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$, (p) : $x+2y+2z=2.$

(Жауабы: $\frac{3}{2}$.)

1.6. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$,$(p): 2x+y+3z=6.$

(Жауабы: 24.)

1.7. $\mathbf{a}(M)=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+2y+z=2..$

(Жауабы: 0.)

1.8. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $(p): 2x+2y+z=4.$

(Жауабы: –12.)

1.9. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$,$(p): x+y+2z=2$.

(Жауабы: 4.)

1.10. $\mathbf{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$, $(p): x+2y+2z=4.$

(Жауабы: –12.)

1.11. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, $(p): x+y+2z=2.$

(Жауабы: 1.)

1.12. $\mathbf{a}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $(p): x-y+z=2.$

(Жауабы: 2.)

1.13. $\mathbf{a}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, $(p): 2x+3y+z=6.$

(Жауабы: 0.)

1.14. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$, $(p): 3x-2y+2z=6.$

(Жауабы: $\frac{-3}{2}$.)

1.15. $\mathbf{a}(M)=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, $(p):\ x-2y+2z=2.$

(Жауабы: –1.)

1.16. $\mathbf{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$, $(p):\ x+4y+2z=8.$

(Жауабы: 40.)

1.17. $\mathbf{a}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, $(p):2x+y+z=4.$

(Жауабы: 36.)

1.18. $\mathbf{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, $(p):3x+2y+2z=6.$

(Жауабы: $\frac{39}{2}$.)

1.19. $\mathbf{a}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$,$(p):x+2y+2z=2.$

(Жауабы: $\frac{-3}{2}$.)

1.20. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, $(p):\ 2x+y+z=2.$

(Жауабы: 0.)

1.21. $\mathbf{a}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$,$(p):x+2y+z=2.$

(Жауабы: –5 .)

1.22. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, (p) : $2x-y-2z=-2.$

(Жауабы: –2.)

1.23. $\mathbf{a}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, (p) : $x-y+z=2.$

(Жауабы: –4.)

1.24. $\mathbf{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$,(p) : $2x-3y+z=6.$

(Жауабы: 12.)

1.25. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$, (p) : $x+2y+z=2.$

(Жауабы: 1.)

1.26. $\mathbf{a}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$,(p) : $2x+y+2z=2.$

(Жауабы: $\frac{-7}{2}$.)

1.27. $\mathbf{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$,(p) : $x+y+z=2.$

(Жауабы: 0)

1.28. $\mathbf{a}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, (p) : $3x+3y+z=3.$

(Жауабы: $\frac{3}{2}$.)

1.29. $\mathbf{a}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$, (p) : $2x-y-2z=-2.$

(Жауабы: 0.)

1.30. $\mathbf{a}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, (p) : $x+3y+z=3$.

(**Жауабы:** – 6.)

2. $u(M)=u(x,y,z)$ функциясының $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктедегі ең үлкен өзгерісінің шамасы мен бағытын табыңыз.

2.1. $u(M)=xyz$, $M_0(0,1,-2)$. (**Жауабы:** 2.)

2.2. $u(M)=x^2yz$, $M_0(2,0,2)$. (**Жауабы:** 12.)

2.3. $u(M)=xy^2z$, $M_0(1,-2,0)$. (**Жауабы:** 4.)

2.4. $u(M)=xyz^2$, $M_0(3,0,1)$. (**Жауабы:** 3.)

2.5. $u(M)=x^2y^2z$, $M_0(-1,0,3)$. (**Жауабы:** 0.)

2.6. $u(M)=x^2yz^2$, $M_0(2,1,-1)$. (**Жауабы:** $4\sqrt{6}$.)

2.7. $u(M)=xy^2z^2$, $M_0(-2,1,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{33}$.)

2.8. $u(M)=y^2z-x^2$, $M_0(0,1,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{5}$.)

2.9. $u(M)=x^2y+y^2z$, $M_0(0,-2,1)$. (**Жауабы:** $4\sqrt{2}$.)

2.10. $u(M)=x(y+z)$, $M_0(0,1,2)$. (**Жауабы:** 3.)

2.11. $u(M)=xy-xz$, $M_0(-1,2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{3}$.)

2.12. $u(M)=x^2yz$, $M_0(1,-1,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{6}$.)

2.13. $u(M)=xyz$, $M_0(2,1,0)$. (**Жауабы:** 2.)

2.14. $u(M)=xyz^2$, $M_0(4,0,1)$. (**Жауабы:** 4.)

2.15. $u(M)=2x^2yz$, $M_0(-3,0,2)$. (**Жауабы:** 36.)

2.16. $u(M)=x^2yz$, $M_0(1,0,4)$. (**Жауабы:** 4.)

2.17. $u(M)=(x+y)z^2$, $M_0(0,-1,4)$. (**Жауабы:** 24.)

2.18. $u(M)=(x+z)y^2$, $M_0(2,2,2)$. (**Жауабы:** $12\sqrt{2}$.)

2.19. $u(M)=x^2\left(y^2+z\right)$, $M_0(4,1,-3)$. (**Жауабы:** $16\sqrt{6}$..)

2.20. $u(M)=\left(x^2+z\right)y^2$, $M_0(-4,1,0)$. (**Жауабы:** $\sqrt{33}$..)

2.21. $u(M)=x^2\left(y+z^2\right)$, $M_0(3,0,1)$. (**Жауабы:** 21.)

2.22. $u(M)=\left(x^2-y\right)z^2$, $M_0(1,3,0)$. (**Жауабы:** 0.)

2.23. $u(M)=x\left(y^2+z^2\right)$, $M_0(1,-2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{15}$.)

2.24. $u(M)=x^2+3y^2-z^2$, $M_0(0,0,1)$. (**Жауабы:** 2.)

2.25. $u(M)=x^2z-y^2$, $M_0(1,1,-2)$. (**Жауабы:** $\sqrt{21}$.)

2.26. $u(M)=x^2z+y$, $M_0(2,2,1)$. (**Жауабы:** $3\sqrt{2}$.)

2.27. $u(M)=x^2y-z$, $M_0(-2,2,1)$. (**Жауабы:** 9.)

2.28. $u(M)=xy^2-z$, $M_0(-1,2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{33}$.)

2.29. $u(M)=y(x+z)$, $M_0(0,2,-2)$. (**Жауабы:** $\sqrt{3}$.)

2.30. $u(M)=z(x+y)$, $M_0(1,-1,0)$. (**Жауабы:** 2.)

3. Векторлық $\mathbf{a}(M)=(x,y,z)$ өрісінің $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктедегі циркуляциясының ең үлкен тығыздығын табыңыз.

3.1. $\mathbf{a}(M)=x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, $M_0(0,1,-2)$. (**Жауабы:** 1.)

3.2. $\mathbf{a}(M)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xzj+xz\vec{k}$, $M_0(2,0,3)$. (**Жауабы:** $\sqrt{13}$.)

3.3. $\mathbf{a}(M)=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}-x^2\vec{k}$, $M_0(1,-2,0)$. (**Жауабы:** $2\sqrt{5}$.)

3.4. $\mathbf{a}(M)=xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k}$, $M_0(3,0,1)$. (**Жауабы:** 3.)

3.5. $\mathbf{a}(M)=xy\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$, $M_0(-1,0,3)$. (**Жауабы:** $\sqrt{2}$.)

3.6. $\mathbf{a}(M)=yz\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$, $M_0(2,1,-1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{21}$.)

3.7. $\mathbf{a}(M)=y^2\vec{i}-xy\vec{j}+z^2\vec{k}$, $M_0(-2,1,1)$. (**Жауабы:** 1.)

3.8. $\mathbf{a}(M)=xz\vec{i}-xyz\vec{j}+x^2z\vec{k}$, $M_0(0,1,1)$. (**Жауабы:** 1.)

3.9. $\mathbf{a}(M)=xy\vec{i}-y^2z\vec{j}-xz\vec{k}$, $M_0(0,-2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{17}$.)

3.10. $\mathbf{a}(M)=xz\vec{i}-y\vec{j}-zy\vec{k}$, $M_0(0,1,2)$. (**Жауабы:** 2.)

3.11. $\mathbf{a}(M)=y^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, $M_0(-1,2,1)$. (**Жауабы:** 8.)

3.12. $\mathbf{a}(M)=xy\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, $M_0(1,-1,1)$. (**Жауабы:** 2.)

3.13. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$, $M_0(2,1,0)$. (**Жауабы:** $\sqrt{2}$.)

3.14. $\mathbf{a}(M)=xy\vec{i}-(y+z)\vec{j}+xz\vec{k}$, $M_0(4,0,1)$. (**Жауабы:** $3\sqrt{2}$.)

3.15. $\mathbf{a}(M)=x\vec{i}-zy\vec{j}+x^2z\vec{k}$, $M_0(-3,0,2)$. (**Жауабы:** 12.)

3.16. $\mathbf{a}(M)=(x+y^2)\vec{i}+yz\vec{j}-x^2\vec{k}$, $M_0(1,0,4)$. (**Жауабы:** 2.)

3.17. $\mathbf{a}(M)=xz\vec{i}-y\vec{j}+yz\vec{k}$, $M_0(0,-1,4)$. (**Жауабы:** 4.)

3.18. $\mathbf{a}(M)=xy\vec{i}-x\vec{j}+yz\vec{k}$, $M_0(2,2,2)$. (**Жауабы:** $\sqrt{13}$.)

3.19. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$, $M_0(4,1,-3)$. (**Жауабы:** $\sqrt{33}$.)

3.20. $\mathbf{a}(M)=(x-y)\vec{i}+yz\vec{j}-y\vec{k}$, $M_0(-4,1,0)$. (**Жауабы:** $\sqrt{5}$.)

3.21. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$, $M_0(3,0,1)$. (**Жауабы:** $3\sqrt{3}$.)

3.22. $\mathbf{a}(M)=xz\vec{i}-z^2\vec{j}+(x+y)z\vec{k}$, $M_0(1,3,0)$. (**Жауабы:** 3.)

3.23. $\mathbf{a}(M)=z^2\vec{i}-xz\vec{j}+z^2\vec{k}$, $M_0(1,-2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{6}$.)

3.24. $\mathbf{a}(M)=xy\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$, $M_0(0,0,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{6}$.)

3.25. $\mathbf{a}(M)=xz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+x^2z\vec{k}$, $M_0(1,1,-2)$. (**Жауабы:** $\sqrt{26}$.)

3.26. $\mathbf{a}(M)=(x-z)\vec{i}+xy\vec{j}+y^2z\vec{k}$, $M_0(2,2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{21}$.)

3.27. $\mathbf{a}(M)=(x-z)\vec{i}+xyz\vec{j}+x\vec{k}$, $M_0(-2,2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{24}$.)

3.28. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\vec{i}+y\vec{j}-z^2\vec{k}$, $M_0(-1,2,1)$. (**Жауабы:** $\sqrt{2}$.)

3.29. $\mathbf{a}(M)=(x-y)\vec{i}-x\vec{j}+xz\vec{k}$, $M_0(0,2,-2)$. (**Жауабы:** 2.)

3.30. $\mathbf{a}(M)=(x-z)\vec{i}+y\vec{j}+xy\vec{k}$, $M_0(1,-1,0)$. (**Жауабы:** 0.)

4

4. $\mathbf{a}(M)=(x,y,z)$ - соленоидты векторлық өріс болады ма?

4.1. $\mathbf{a}(M)=(\alpha-\beta)x\vec{i}+(\gamma-\alpha)y\vec{j}+(\beta-\gamma)z\vec{k}$.

4.2. $\mathbf{a}(M)=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}$.

4.3. $\mathbf{a}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+2y)\vec{j}+xy\vec{k}$.

4.4. $\mathbf{a}(M)=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}$.

4.5. $\mathbf{a}(M)=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$.

4.6. $\mathbf{a}(M)=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}$.

4.7. $\mathbf{a}(M)=(x^2-y^2)\vec{i}+(y^2-z^2)\vec{j}+(z^2-x^2)\vec{k}$.

4.8. $\mathbf{a}(M)=yz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+z^2\vec{k}$.

4.9. $\mathbf{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}.$

4.10. $\mathbf{a}(M)=3x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}-2xyz\vec{k}.$

4.11. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}-2(y+z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}.$

$\mathbf{a}(M)=(x,y,z)$ - потенциалды векторлық өріс болады ма?

4.12. $\mathbf{a}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+zy)\vec{j}+xy\vec{k}..$

4.13. $\mathbf{a}(M)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}..$

4.14. $\mathbf{a}(M)=6xy\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}-2xyz\vec{k}.$

4.15. $\mathbf{a}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}.$

4.16. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}.$

4.17. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x^2-y^2)\vec{k}.$

4.18. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}-2xz\vec{j}-3(y+z)\vec{k}.$

4.19. $\mathbf{a}(M)=z^2\vec{i}+(xz+y)\vec{j}+x^2y\vec{k}.$

4.20. $\mathbf{a}(M)=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3z^2\vec{k}.$

4.21. $\mathbf{a}(M)=6x^2\vec{i}+3\cos(3x+2z)\vec{j}+\cos(3y+2z)\vec{k}.$

4.22. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}.$

4.23. $\mathbf{a}(M)=3(x-z)\vec{i}+\left(x^2-y^2\right)\vec{j}+3z\vec{k}.$

4.24. $\mathbf{a}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+2xyz\vec{k}.$

4.25. $\mathbf{a}(M)=3x^2\vec{i}+4(x-y)\vec{j}+(x-z)\vec{k}.$

$\mathbf{a}(M)=(x,y,z)$ **-** гармоникалық векторлық өріс бола ма?

4.26. $\mathbf{a}(M)=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}.$

4.27. $\mathbf{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x+z)\vec{k}.$

4.28. $\mathbf{a}(M)=\frac{x}{y}\vec{i}+\frac{y}{z}\vec{j}+\frac{z}{x}\vec{k}.$

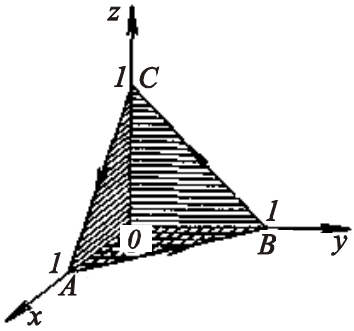
4.29. $\mathbf{a}(M)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}.$

4.30. $\mathbf{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}.$

11.7–тапсырманы шығару үлгісі

1. $\mathbf{a}(M)=(x-2z)\,\mathbf{i}+(x+3y+z)\,\mathbf{j}+(5x+y)\mathbf{k}$ вектор өрісінің $(P): x+y+z=1$ жазықтығының координат жазықтықтарымен қиылысу нәтижесінде алынған үшбұрыш контуры бойынша екі әдіспен: 1) циркуляция анықтамасын пайдаланып; 2) Стокс формуласының көмегімен (§11.13, (1) формула) есептеу керек. Мұндағы үшбұрыш контуры үшін (P) жазықтығының $\mathbf{n}=(1,1,1)$ нормаль векторына салыстырғандағы оң айналу бағыты алынады.

► (*P*) жазықтығы мен координат жазықтықтарының қиылысуынан *ABC* үшбұрышын аламыз (83-сурет).



83-сурет

Есеп шарты бойынша контурмен айналғандағы оң бағыт *ABCA* алынады.

1) Циркуляцияны (*Ц*) §11.8, (3) формула бойынша есептейміз:

$Ц=\oint\limits_{ABCA}\mathbf{a}d\mathbf{s}=\int\limits_{AB}\mathbf{a}d\mathbf{s}+\int\limits_{BC}\mathbf{a}d\mathbf{s}+\int\limits_{CA}\mathbf{a}d\mathbf{s}$. *AB* кесіндісі үшін: $z=0,$ $x+y=1,\ y=1-x,\ x_1=1,\ x_2=0,\ dy=-dx,$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (x+3y)\mathbf{j} + (5x+y)\mathbf{k}, \quad \mathbf{ds} = dx\cdot\mathbf{i} + dy\cdot\mathbf{j},$$

$$\mathbf{ads} = xdx + (x+3y)dy,$$

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\cdot\mathbf{ds} = \int\limits_{AB} xdx + (x+3y)dy = \int\limits_{1}^{0} \big(x - x - 3(1-x)\big)dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{0} \big(x - x - 3(1-x)\big)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 3x\right) = \frac{3}{2}.$$

BC кесіндісі үшін:

$$x = 0,\ y + z = 1,\ z = 1 - y,\quad y_1 = 1,\quad y_2 = 0,\quad dz = -dy,$$

$$\mathbf{a} = -2z\mathbf{i} + (3y+z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}, \quad \mathbf{ds} = dy\cdot\mathbf{j} + dz\cdot\mathbf{k},$$

$$\mathbf{ads} = (3y+z)dy + y\cdot dz,$$

$$\int\limits_{BC} \mathbf{a}\cdot\mathbf{ds} = \int\limits_{BC} (3y+z)dy + ydz = \int\limits_{1}^{0} (3y+1-y-y)dy =$$

$$= \int\limits_{1}^{0} (y+1)dy = \frac{(y+1)^2}{2}\bigg|_{1}^{0} = -\frac{3}{2}..$$

CA кесіндісі үшін:

$$y = 0,\ x + z = 1,\ z = 1 - x,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 1,\quad dz = -dx,$$

$$\mathbf{ads} = (x - 2z)dx + 5x\,dz,$$

$$\int\limits_{CA} \mathbf{ads} = \int\limits_{CA} (x-2z)dz + 5x\,dz = \int\limits_{0}^{1} (x - 2 + 2x - 5x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (-2x-2)dx = \left(-x^2 - 2x\right)\ \Big|_{0}^{1} = -3.$$

Сонымен, $Ц = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3$.

2) Циркуляцияны Стокс формуласының көмегімен (§11.13,(1) есептейміз. Ол үшін $\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{a}(M)$ табамыз (11.9.2п.).

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{k}} =$$
$$= (1-1)\mathbf{i} + (-2-5)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = -7\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Стокс формуласындағы S беті ретінде пирамиданың ABC жағы алынады: $S = ABC:\ z = 1 - x - y, (x, y) \in OAB \subset OXY$.

Стокс формуласы бойынша:

$$Ц = \oint_{\Gamma} \mathbf{a}\ \mathbf{dl} = \iint_{S} \left(\text{r}\overrightarrow{\text{ot}}\ \mathbf{a}, \mathbf{n}\right)_{z=f(x,y)} dxdy.$$

Мұнда $S_z \equiv OAB, \quad \mathbf{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad z = f(x,y) = 1 - x - y,$
$\overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = -7 + 1 = -6$.

Сондықтан $Ц = \iint\limits_{OAB} (-6)\,dxdy = -6 \iint\limits_{OAB} dxdy = -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -3$.

Соңғы интегралды оның геометриялық мағынасын пайдаланып есептедік. ◄

Назарыңызға: §11.13 мысалды қараңыз.

2. $u(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ функциясының $M_0(1,1,1)$ нүктедегі ең үлкен өзгеруінің шамасын және бағытын табу керек.

► $U(M)$ формуласының M_0 нүктедегі дербес туындылары

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = 10xyz - 7y^2z + 5yz^2 \Big|_{(1,1,1)} = 8;$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = 5x^2z - 14xyz + 5xz^2 \Big|_{(1,1,1)} = -4;$$

$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = 5x^2y - 7xy^2 + 10xyz \Big|_{(1,1,1)} = 8,$ ал $\overrightarrow{\text{grad}}u(M_0) = 8i - 4j + \vec{k}$.

Өрістің M_0 нүктедегі ең үлкен өзгеру жылдамдығы $\overrightarrow{\text{grad}}u(M_0)$ бағытында жетеді (6.4.2п., (7) теңсіздік) және оның сан мәні $\left|\overrightarrow{\text{grad}}u(M_0)\right|$ тең:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \overrightarrow{\text{grad}}u} = \max \frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}u(M_0)\right| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 8^2} = 12 \text{ .} \quad \blacktriangleleft$$

3. $\mathbf{a}(M) = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$ вектор өрісінің $M_0(2,-1,1)$ нүктедегі циркуляциясының ең үлкен тығыздығын табу керек.

► $\mathbf{a}(M)$ вектор өрісінің M_0 нүктедегі циркуляциясының тығыздығы ротор бағытында ең үлкен мәніне жетеді және оның сан мәні $\left|rot\,\mathbf{a}(M_0)\right|$ тең. Есептейміз:

$$\overrightarrow{rot}\,\mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(xz - 2x^2yz\right) - \mathbf{j}\left(yz - 2xy^2z\right),$$

$$\overrightarrow{rot}\,\mathbf{a}(M_0) = 10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \quad \left|\text{r}\vec{\text{o}}\text{t}\,a(M_0)\right| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5} \text{ .} \quad \blacktriangleleft$$

4. Вектор $\mathbf{a}(M)=(y+z)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-xz\mathbf{k}$ өрісі соленоидты бола ма?

► Егер $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=0$ теңдігі вектор өрісінің әрбір нүктесінде орындалса, $\mathbf{a}(M)$ – соленоидты (§11.12 қараңыз). Табамыз:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(z+y)+\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\frac{\partial}{\partial z}(-xz)=0+x-x=0.$$

Жауабы: Соленоидты ◄

Қатарлар 12.1-ҮТ

1. Қатардың жинақтылығын дәлелдеңіз және оның қосындысын табыңыз

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{3}{4}$.)

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{5}{6}$.)

1.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{10}$.)

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{5}{4}$.)

1.5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{5}$.)

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{3}{4}$.)

1.7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{14}$.)

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{6}$.)

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{7}$.)

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{3}{4}$.)

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{10}$.)

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{4}$.)

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{8}$.)

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{7}{6}$.)

1.15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{2}$.)

1.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{5}{6}$.)

1.17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{3}$.)

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{7}{12}$.)

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{5}$.)

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{12}$.)

1.21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{2}$.)

1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{2}{3}$.)

1.23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{6}$.)

1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{3}$.)

1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{6}$.)

1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{9}{14}$.)

1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{12}$.)

1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$. (**Жауабы:** $S = \frac{5}{14}$.)

1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$. (**Жауабы:** $S = \frac{1}{15}$.)

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$. **(Жауабы:** $S = \frac{7}{8}$.**)**

Төмендегі, мүшелері оң қатарларды жинақтылыққа зерттеңіз

2

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$. **(Жауабы:** жинақсыз.)

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n (n+1)!}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) tg \frac{\pi}{3^n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$. **(Жауабы:** жинақсыз.)

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}$. **(Жауабы:** жинақсыз.)

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2\pi}{3^n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(n+3)!}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n-4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}$. **(Жауабы:** жинақсыз.)

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$. **(Жауабы:** жинақсыз.)

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\,\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5^n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n!}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)}$. (**Жауабы:** жинақты.)

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n-1)\sin\dfrac{\pi}{4^n}$. (**Жауабы:** жинақты.)

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n!}$. (**Жауабы:** жинақты.)

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$. (**Жауабы:** жинақты.)

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{4n!}$. (**Жауабы:** жинақты.)

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdots(5n-3)}$. (**Жауабы:** жинақты.)

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)!}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^3}{(2n)!}$. (**Жауабы:** жинақты.)

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$. **(Жауабы:** жинақты.)

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot 2^n}}$. **(Жауабы:** жинақты.)

3

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$. **(Жауабы:** жинақсыз.)

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$ **(Жауабы:** жинақты.)

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}\right)^n$ **(Жауабы:** жинақты)

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(ln(n+2)\right)^n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n}\right)^{3n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$. **(Жауабы:** жинақты.)

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n}\right)^n$. **(Жауабы:** жинақты.)

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^n}$. (**Жауабы:** жинақты.)

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1n(n+1)\right)^{2n}}$. (**Жауабы:** жинақты.)

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(ln(n+3)\right)^n}$ (**Жауабы:** жинақты)

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$. (**Жауабы:** жинақты.)

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\left((n+1)/n\right)^{n^2}}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(ln\left(n+1\right)\right)^{n}}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$. (**Жауабы:** жинақты.)

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)^{n}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$. (**Жауабы:** жинақты.)

3.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^{n}$. (**Жауабы:** жинақты.)

3.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ (**Жауабы:** жинақты.)

3.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$ (**Жауабы:** жинақты)

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left(n+1\right)/n\right)^{n^2}}{5^n}$. (**Жауабы:** жинақты)

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n}$ (**Жауабы:** жинақты)

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^{n}$. **(Жауабы:** жинақты)

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}$. **(Жауабы:** жинақты)

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}}{\left(ln\left(n+5\right)\right)^{2}}$. **(Жауабы:** жинақты)

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^{n}$. **(Жауабы:** жинақты.)

4

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^{2}+1}\right)^{2}$.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(3n+2\right)ln\left(3n+2\right)}$.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)1n^{3}\left(2n+1\right)}$.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\left(4n+5\right)^{3}}}$.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(3n+4\right)1n^{2}\left(3n+4\right)}$.

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\left(7n-5\right)^{5}}}$.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7+n}{49+n^{2}}\right)^{2}$.

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(3n-1\right)ln\left(3n-1\right)}$.

4.9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}1n\frac{n+1}{n-1}$.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(5n-2\right)ln\left(5n-2\right)}$.

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2}$.

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$.

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$.

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)ln(n+2)}$.

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5)ln(10n+5)}$.

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$.

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2}$.

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)1n(n+3)ln(n+3)\ )}$.

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)ln^5(3+2n)}$.

4.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$.

4.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4)ln^2(9n-4)}$.

4.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{9+n^2-2n}$.

4.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+8)ln^3(5n+8)}$.

4.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$.

4.**25.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)ln(n+4)ln(ln(n+4))}$.

4.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n)ln^3(3+8n)}$.

4.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$.

4.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3)ln^2(10n+3)}$.

4.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}$.

4.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)ln(n+5)ln(ln(n+5))}$.

5

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1n(n+2)}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n+3)}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$. (**Жауабы:** жинақсыз)

5.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-n+1}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$. (**Жауабы:** жинақты)

5.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2\pi}{3^n}$. (**Жауабы:** жинақты)

5.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n-1}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{4n}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+5}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$. (**Жауабы:** жинақты.)

5.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}$. (**Жауабы:** жинақсыз.)

5.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3}$. (**Жауабы:** жинақты)

5.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}$. (**Жауабы:** жинақты)

6

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$.

6.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+1}$.

6.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$.

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

6.6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^7 n}$.

6.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$.

6.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}$.

6.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^2}$.

6.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$.

6.11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

6.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$.

6.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$.

6.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$.

6.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3^n}$.

6.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

6.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

6.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$.

6.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$.

6.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$.

6.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$.

6.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!}$.

6.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(7n-1)}$.

6.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

6.25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}$.

6.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{9^n}$.

6.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{3n^4+5n-2}$.

6.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$.

6.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$.

6.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-1)!}$.

Төмендегі, ауыспа таңбалы қатарларды жинақтылыққа және абсолют жинақтылыққа зерттеңіз.

7

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$. (**Жауабы:** абсолют жинақты.)

7.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$. (**Жауабы:** шартты жинақты.)

7.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$. (**Жауабы:** шартты жинақты.)

7.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$. **(Жауабы:** жинақсыз.**)**

7.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты.**)**

7.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. **(Жауабы:** шартты жинақты.**)**

7.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты.**)**

7.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)n}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты.**)**

7.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. **(Жауабы:** шартты жинақты.**)**

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты.**)**

7.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$. **(Жауабы:** шартты жинақты.**)**

7.12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n+5}{3^n}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты.**)**

7.13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$. **(Жауабы**: жинақсыз.**)**

7.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n-1}$. **(Жауабы:** шартты жинақты.**)**

7.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты**.)**

7.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$. **(Жауабы:** шартты жинақты**.)**

7.17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$. **(Жауабы:** жинақсыз**.)**

7.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}$. **(Жауабы**: абсолют жинақты**.)**

7.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты**.)**

7.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты**.)**

7.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты**.)**

7.22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{1n(n+1)}$. **(Жауабы:** шартты жинақты**.)**

7.23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$. **(Жауабы:** шартты жинақты**.)**

7.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. **(Жауабы:** шартты жинақты**.)**

7.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты**.)**

7.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$. **(Жауабы:** шартты жинақты**.)**

7.27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты.)

7.28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$. **(Жауабы:** абсолют жинақты**.)**

7.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$. **(Жауабы:** абсолют жинақты**.)**

7.30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \, ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. **(Жауабы:** шартты жинақты**.)**

8

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

8.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$.

8.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

8.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{ln(n+1)}$.

8.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$.

8.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4}$.

8.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{3^n}$.

8.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$.

8.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

8.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\left(ln\left(n+1\right)\right)^n}$.

8.11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\left(ln\, n\right)^2}$.

8.12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

8.13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, ln\, n}$.

8.14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!}$.

8.15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{12^n}$.

8.16. $\sum_{n=1}^{p} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$.

8.17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{9n-1}$.

8.18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n\left(n+1\right)}$.

8.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+1)^n}$.

8.20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ln\, n}{7^n}$.

8.21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.

8.22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^2+1}$.

8.23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{8^n}$.

8.24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2n+2}$.

8.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$.

8.26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{6n}$.

8.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+2)}$.

8.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n-3}{n^2-1}$.

8.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{(n+1)^2}}$.

8.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{4n}{5n+1}\right)^{n}$.

12.1–тапсырманы шығару үлгісі

№1.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ қатарының жинақтылығын дәлелдеу керек және оның қосындысын табу керек (12.1.1 п. қараңыз).

▼ Қатардың жалпы $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ мүшесін ең қарапайым бөлшектер қосындысы түрінде жазамыз:

$$a_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\frac{C}{n+1}+\frac{D}{(n+1)^2},$$

$$2n+1=A\,n(n+1)^2+B\,(n+1)^2+C\,n^2(n+1)+D\,n^2,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} n=0 & B=1,\\ n=-1 & D=-1,\\ n^3 & 0=A+C,\\ n & 2=A+2B \end{array}\right\} \Rightarrow A=0,\ C=0,\ \text{сондықтан}\ a_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Қатардың n-ші дербесі қосындысын табамыз:

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ \ldots \ + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Енді қатардың қосындысын есептейміз:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1.$$

Олай болса қатар жинақты және оның қосындысы $S = 1$. ▲

Төмендегі, мүшелері оң қатарларды

жинақтылыққа зерттеу керек.

№2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

▼ Даламбер белгісін пайдаланамыз (§12.2, 2-теорема, б):

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1, \quad \text{олай болса берілген қатар жинақты.}$$

Назарыңызға! §12.2, 2-теорема мысалын қараңыз! ▲

№3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$.

▼ Коши белгісін қолданамыз (§12.2, 3-теорема):

$$a_n=\frac{(n+1)^n}{n^{n^2}\cdot 3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1,$$

яғни қатар жинақты.

Назарыңызға! §12.2, 3-теорема ескертулерін қараңыз! ▲

№4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n^2}}$.

▼ Кошидің интегралдық белгісін пайдаланамыз (§12.2, 4-теорема). Ол үшін меншіксіз интегралды зерттейміз:

$$\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{2^{x^2}}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}x\cdot 2^{-x^2}\,dx=\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_1^{\beta}2^{-x^2}\,d(-x^2)\right)=\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{-x^2}}{\ln 2}\right)\Bigg|_1^{\beta}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln 2\cdot 2^{\beta^2}}+\frac{1}{4\ln 2}\right)=\frac{1}{4\ln 2}\quad.$$

Меншіксіз интеграл жинақты, демек §12.2, 4-теорема бойынша берілген қатар да жинақты. ▲

№5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

▼ Қатарды (шек арқылы) салыстыру белгісі бойынша зерттейміз (§12.2, 1-теорема, б), (1)-теңдік). Салыстыру үшін бізге белгілі жинақсыз, жалпы мүшесі $v_n = \dfrac{1}{n}$ тең гармониялық қатарды аламыз, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\left(\dfrac{\pi^2}{16n}\right) \cdot \dfrac{16}{\pi^2}} = \dfrac{\pi^2}{16} > 0$ (мұнда бірінші тамаша шек пайдаланылды). Олай болса §12.2, 1-теорема, б) бойынша берілген қатар жинақты. ▲

№6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \dfrac{1}{n}\right)$.

▼ Мұнда қатардың жинақталуының қажетті (4)-шарты орындалмайтынын көреміз (12.1.1, (4)-теңдік). Шынында да,

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \sin \dfrac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$. Демек, берілген қатар жинақсыз. ▲

Төмендегі, ауыспа таңбалы қатарды жинақтылыққа және абсолют жинақтылыққа зерттеу керек.

№7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}$.

▼ Қатарды алдымен абсолютты жинақтылыққа зерттейміз.

Ол үшін $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 7^n}$ қатарына Даламбер белгісін қолданамыз: $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{n\cdot 7^n}{(n+1)\cdot 7^{n+1}}=\frac{1}{7}\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{7}<1,$ яғни берілген қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған қатар жинақты. Демек, берілген қатар абсолют жинақты. (§12.3., 1-теореманы қараңыз). ▲

№8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$

▼ Мұндағы бірінші қатар үшін Лейбниц шарттары орындалады (§12.3, 1-теорема), сондықтан ол жинақты қатар. Ал екінші қатар жинақсыз (гармониялық қатар!), демек бірінші қатар шартты жинақты. Жинақсыз және жинақты қатарлардың қосындысы жинақсыз қатар. Сонымен берілген қатар жинақсыз. ▲

12.2–ҮТ

1

Қатардың жинақталу аймағын табыңыз

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$**.)**

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$. **(Жауабы: (-6; 6).)**

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$. **(Жауабы:(-2; 2).)**

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$. **(Жауабы:** $\left[-2; 2\right)$ **.)**

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. **(Жауабы:** $\left[-1; 1\right)$ **.)**

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. **(Жауабы:** $\left[-1; 1\right)$ **.)**

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ **.)**

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1n\, x\right)^n$. **(Жауабы:** $\left(\frac{1}{e}; e\right)$ **.)**

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\left(n+1\right)}$. **(Жауабы:** $\left[-1; 1\right]$ **.)**

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n\left(n^2+1\right)}$. **(Жауабы:** $\left[-2; 2\right]$ **.)**

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\left(n+1\right)x^n\right.$. **(Жауабы:** $\left(-1; 1\right)$ **.)**

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$. **(Жауабы: (-2; 2).)**

1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right]$ **.)**

1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$. **(Жауабы:** $(-e, e)$ **.)**

1.15. $\sum\limits_{n}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} n}$. **(Жауабы:** $[-5; 5)$ **.)**

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. **(Жауабы:** $[-1; 1]$ **.)**

1.17. $\sum\limits_{n=}^{\infty} \frac{(0{,}1)^n x^{2n}}{n}$. **(Жауабы:** $\left(-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$ **.)**

1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n$. **(Жауабы:** $\left(\frac{1}{10}; 10\right)$ **.)**

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$. **(Жауабы:** $(-5; 5)$ **.)**

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{5}\right]$ **.)**

1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. **(Жауабы:** $[-1; 1]$ **.)**

1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ **.)**

1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$. **(Жауабы:** $[-1;1]$**.)**

1.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$**.)**

1.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}}$. **(Жауабы:** $[-2;2)$**.)**

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$**.)**

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$. **(Жауабы:** $(-2;2)$**.)**

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$. **(Жауабы:** $\left[-\frac{6}{5};\frac{6}{5}\right)$**.)**

1.29. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$. **(Жауабы:** $[-1;1)$**.)**

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$. **(Жауабы:** $(-5e;5e)$**.)**

2

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{n!}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}} x^n}{(n+1)!}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^n}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-2)^n}$.

2.15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{2n+1}}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx)^n}$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2.21. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$.

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

2.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$.

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

3

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$. **(Жауабы:** $3 \le x < 5$ **.)**

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$. **(Жауабы:** $1 \le x < 3.$ **)**

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$. **(Жауабы:** $0 < x < 4$ **.)**

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$. **(Жауабы:** $0 < x < 2$ **.)**

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$. **(Жауабы:** $-9 \le x \le -7$ **.)**

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+x\right)^n$. **(Жауабы:** $-3<x<-1$ **.)**

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^n}{2^n\left(n+3\right)}$. **(Жауабы:** $-1\le x<3$ **.)**

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$. **(Жауабы:** $-6\le x\le -4$ **.)**

3.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\left(x+2\right)^n$. **(Жауабы:** $-2,5<x<-1,5$ **.)**

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^n}{2^n\ln\left(n+1\right)}$. **(Жауабы:** $-1\le x<3$ **.)**

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\left(x+10\right)^n}{n^n}$. **(Жауабы:** $-e-10<x<e-10$ **.)**

3.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left(x-3\right)^{2n}}{n\,l\,\mathrm{n}\,n}$. **(Жауабы:** $2<x<4.$ **)**

3.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3\left(n+1\right)}}{n+1}\left(x+1\right)^n$. **(Жауабы:** $0\le x<2.$ **)**

3.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2-x\right)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$. **(Жауабы:** $0<x<4.$ **)**

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3-2x\right)^n}{n-l\,\mathrm{n}^2\,n}$. **(Жауабы:** $1<x\le 2$ **.)**

3.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$. **(Жауабы:** $1 \le x < 5$.**)**

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$. **(Жауабы:** $1 \le x \le 3$.**)**

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$. **(Жауабы:** $0 \le x < 4$.**)**

3.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$ **(Жауабы:** $1 < x \le 3$**)**

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ **(Жауабы:** $-7 < x < -3$.**)**

3.21. $\dfrac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}$. **(Жауабы:** $-2 < x < 0$.**)**

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$. **(Жауабы:** $-4 \le x \le -2$.**)**

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$. **(Жауабы:** $-3 \le x \le -1$.**)**

3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$ **(Жауабы:** $1 \le x \le 3$.**)**

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$ **(Жауабы:** $-2 < x < 4$.**)**

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)l\,\mathrm{n}(n+1)}$. **(Жауабы:** $1<x\le 3.$**)**

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$. **(Жауабы:** $-2\le x<8.$**)**

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$. **(Жауабы:** $-\frac{5}{4}<x<\frac{13}{4}.$**)**

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)l\,\mathrm{n}(n+1)}$. **(Жауабы:** $2<x<4.$**)**

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$. **(Жауабы:** $2<x\le 8.$**)**

4

$f(x)$ функциясын Маклорен қатарына жіктеңіз. Алынған қатардың осы функцияға жинақталу аймағын табыңыз.

4.1. $f(x)=\cos 5x$. **(Жауабы:** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^{2n}x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty$ **.)**

4.2. $f(x)=x^3\,\mathrm{arctg}\,x$. **(Жауабы:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n+2}}{2n-1},\ |x|\le 1$ **.)**

4.3. $f(x)=\sin x^2$. **(Жауабы:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{(2n-1)!},\ |x|<\infty$ **.)**

4.4. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2},\ |x|<1$**.)**

4.5. $f(x)=\cos\dfrac{2x^3}{3}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2^{2n}x^{6n}}{3^{2n}(2n)!},\ |x|<\infty$**.)**

4.6. $f(x)=\cos 3x^2$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^{2n}}{(2n)!}x^{4n},\ |x|<\infty$**.)**

4.7. $f(x)=e^{3x}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{n!},\ |x|<\infty$**.)**

4.8. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1$**.)**

4.9. $f(x)=ch\left(2x^3\right)$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^{6n}}{n!},\ |x|<\infty$**.)**

4.10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{2^n n!},\ |x|<\infty$**.)**

4.11. $f(x)=ch\,x$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty$**.)**

4.12. $f(x)=e^{-x^4}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n}}{n!},|x|<\infty$**.)**

4.13. $f(x)=2^{-x^2}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln^n\cdot 2}{n!}x^{2n},\ |x|<\infty$**.)**

4.14. $f(x)=5^x$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln^n 5}{n!},\ |x|<\infty$**.)**

4.15. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!},\ 0\le x<\infty$**.)**

4.16. $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$. **(Жауабы:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-2},\ |x|<\infty$**.)**

$f(x)$ функциясын көрсетілген x_0 нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктеңіз. Алынған қатардың осы функцияға жинақталу аймағын табыңыз

4.17. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-2$.

(Жауабы: $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n},\ -4<x<0$**.)**

4.18. $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $x_0=-2$.

(Жауабы: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n,\ -3<x<-1$**.)**

4.19. $f(x)=e^x$, $x_0=1$. **(Жауабы:** $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!},\ |x|<\infty$**.)**

4.20. $f(x)=\frac{1}{2x+5}$, $x_0=3$.

(Жауабы: $\frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^n(x-3)^n,\quad -\frac{5}{2}<x<\frac{17}{2}$**.)**

4.21. $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2},\ x_0=1$**.**

(Жауабы: $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-1)^n,\quad -1<x<3$**.)**

4.22. $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4},\ x_0=2$**.**

(Жауабы: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!},\quad |x|<\infty$**.)**

4.23. $f(x)=ln(5x+3),\ x_0=\frac{2}{5}$**.**

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 5^n}{n}\left(x+\frac{2}{5}\right)^n,\quad -\frac{7}{5}<x\le\frac{3}{5}$**.)**

4.24. $f(x)=\ln\frac{1}{x^2-2x+2},\ x_0=1$**.**

(Жауабы: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n},\quad 0\le x\le 2$**.)**

4.25. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x}},\ x_0=-3$**.**

(Жауабы: $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^n n!}(x+3)^n,\quad -4<x\le -2$**.)**

4.26. $f(x)=\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

(Жауабы: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n,\quad |x|<\infty$**.)**

4.27. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}},\ x_0=2$.

(Жауабы: $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}(x-2)^n,\ 1<x\le 3$**.)**

4.28. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3},\ x_0=-2$.

(Жауабы: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{6\cdot 3^n}-\frac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n\right),\quad -5<x<1$**.)**

4.29. $f(x)=\sin x,\ x_0=a$.

(Жауабы: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n,\quad |x|<\infty$**.)**

4.30. $f(x)=l\,\mathrm{n}(5x+3),\ x_0=1$.

(Жауабы: $l\,\mathrm{n}\,8+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{5}{8}\right)^n(x-1)^n,\quad -\frac{3}{5}<x\le\frac{13}{5}$**.)**

5. Дәрежелік қатарға жіктеу арқылы, көрсетілген шаманың α дәлдікпен жуық мәнін табыңыз.

5.1. $e, \alpha = 0,0001$. **(Жауабы: 2,7183.)**

5.2. $\sqrt[5]{250}, \alpha = 0,01$. **(Жауабы: 3,017.)**

5.3. $\sin 1, \alpha = 0,00001$. **(Жауабы: 0,84147.)**

5.4. $\sqrt{1,3}, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 1,140.)**

5.5. $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{10}, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 0,304.)**

5.6. $\ln 3, \alpha = 0,0001$. **(Жауабы: 1,0986.)**

5.7. $\operatorname{ch} 2, \alpha = 0,0001$. **(Жауабы: 3,7622.)**

5.8. $\lg e, \alpha = 0,0001$. **(Жауабы: 0,4343.)**

5.9. $\pi, \alpha = 0,00001$. **(Жауабы: 3,14159.)**

5.10. $e^2, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 7,389.)**

5.11. $\cos 2^0, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 0,999.)**

5.12. $\sqrt[3]{80}, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 4,309.)**

5.13. $\ln 5, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 1,609)**

5.14. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 0,464.)**

5.15. $\sqrt[6]{738}, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 3,006.)**

5.16. $\sqrt[3]{e}, \alpha = 0,00001.$ **(Жауабы: 1,3956.)**

5.17. $\sin 1^0, \alpha = 0,0001.$ **(Жауабы: 0,0175.)**

5.18. $\sqrt[3]{8,36}, \alpha = 0,001.$ **(Жауабы: 2,030.)**

5.19. $\ln 10, \alpha = 0,0001.$ **(Жауабы: 2,3026.)**

5.20. $\arcsin \frac{1}{3}, \alpha = 0,001.$ **(Жауабы: 0,340.)**

5.21. $\lg 7, \alpha = 0,001.$ **(Жауабы: 0,8451.)**

5.22. $\sqrt{e}, \alpha = 0,0001.$ **(Жауабы: 1,6487.)**

5.23. $\cos 10^0, \alpha = 0,0001.$ **(Жауабы: 0,9848.)**

5.24. $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}, \alpha = 0,001.$ **(Жауабы: 0,302.)**

5.25. $\sqrt[10]{1080}, \alpha = 0,001.$ **(Жауабы: 2,031.)**

5.26. $\frac{1}{e}, \alpha = 0,0001.$ **(Жауабы: 0,3679.)**

5.27. $\sin \frac{\pi}{100}, \alpha = 0,0001.$ **(Жауабы: 0,0314.)**

5.28. $\sqrt[4]{90}, \alpha = 0,001.$ **(Жауабы: 3,079.)**

5.29. $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}, \alpha = 0,001.$ **(Жауабы: 0,496.)**

5.30. $\sqrt[3]{e}, \alpha = 0,001$. **(Жауабы: 0,716.)**

6. Интеграл астындағы функцияны дәрежелік қатарға жіктеп, көрсетілген анықталған интегралды 0,001 дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

6.1. $\int_0^{0,25} l\,\mathrm{n}\left(1+\sqrt{x}\right)dx$. **(Жауабы: 0,070.)**

6.2. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$. **(Жауабы: 0,162.)**

6.3. $\int_0^{0,2} \sqrt{x}e^{-x}dx$. **(Жауабы: 0,054.)**

6.4. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$. **(Жауабы: 0,487.)**

6.5. $\int_0^{0,2} \sqrt{x}\cos x dx$. **(Жауабы: 0,059.)**

6.6. $\int_0^{0,5} l\,\mathrm{n}\left(1+x^3\right)dx$. **(Жауабы: 0,015.)**

6.7. $\int_0^1 x^2 \sin x dx$. **(Жауабы: 0,223.)**

6.8. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. **(Жауабы: 0,855.)**

6.9. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx$. **(Жауабы: 0,480.)**

6.10. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$. **(Жауабы: 0,484.)**

6.11. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$. **(Жауабы: 1,027.)**

6.12. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x}dx$. **(Жауабы: 0,493.)**

6.13. $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx$. **(Жауабы: 0,103.)**

6.14. $\int_0^{0,5} x^2\cos 3x dx$. **(Жауабы: 0,018.)**

6.15. $\int_0^{0,5} l\,\mathrm{n}\left(1+x^2\right)dx$. **(Жауабы: 0,385.)**

6.16. $\int_0^{0,4} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{4}}dx$. **(Жауабы: 0,159.)**

6.17. $\int_{0,3}^{0,5} \frac{1+\cos x}{x^2}dx$. **(Жауабы: 2,568.)**

6.18. $\int_0^{0,5} \frac{\mathrm{arctg}\,x^2}{x^2}dx$. **(Жауабы: 0,498.)**

6.19. $\int_0^{0,8} \frac{1-\cos x}{x}\,dx$. **(Жауабы: 0,156.)**

6.20. $\int_0^1 \sin x^2\,dx$. **(Жауабы: 0,310.)**

6.21. $\int_0^{0,1} \frac{l\,n(1+x)}{x}\,dx$. **(Жауабы: 0,098.)**

6.22. $\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}\,dx$. **(Жауабы: 0,718.)**

6.23. $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$. **(Жауабы: 0,364.)**

6.24. $\int_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$. **(Жауабы: 0,976.)**

6.25. $\int_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx$. **(Жауабы: 0,994.)**

6.26. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$. **(Жауабы: 0,318.)**

6.27. $\int_0^{0,5} \frac{x-\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\,dx$. **(Жауабы: 0,039.)**

6.28. $\int_0^{0,4} \sqrt{1-x^3}dx$. **(Жауабы: 0,397.)**

6.29. $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$. **(Жауабы: 0,461.)**

6.30. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$. **(Жауабы: 0,508.)**

7. Дифференциалдық теңдеудің шешімінің x-тің дәрежесі бойынша дәрежелік қатарға жіктелуін табыңыз (осы жіктелудің алғашқы үш нөл емес мүшесін жазыңыз)

7.1. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots$**)**

7.2. $y' = x^2y^2 + 1$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$**)**

7.3. $y' = x^2y^2 + 1$, $y(0) = \frac{1}{2}$. **(Жауабы:** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$**)**

7.4. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$. **(Жауабы:** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots$**)**

7.5. $y' = x + y^2$, $y(0) = -1$. **(Жауабы:** $y = -1 + x + 3x^2 + \ldots$**)**

7.6. $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \ldots$**)**

7.7. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$**)**

7.8. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \ldots$**)**

7.9. $y' = x + y + y^2$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \ldots$**)**

7.10. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + x^2 + \ldots$**)**

7.11. $\dot{y} = x^2 y^2 + y \sin x$, $y(0) = \frac{1}{2}$. **(Жауабы:** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^3}{12} + \ldots$**)**

7.12. $y' = 2y^2 + ye^x$, $y(0) = \frac{1}{3}$. **(Жауабы:** $y = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}x + \frac{26}{27}x^2 + \ldots$**)**

7.13. $y' = e^{3x} + 2xy^2$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \ldots$**)**

7.14. $y' = x + e^y$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots$**)**

7.15. $y' = y \cos x + 2 \cos y$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = 2x + x^2 - x^3 + \ldots$**)**

7.16. $y' = x^2 + 2xy^2$, $y(0) = 0,2$.

(Жауабы: $y = 0,2 + 0,08x + 0,032x^2 + \ldots$**)**

7.17. $y' = x^2 + xy + y^2$, $y(0) = 0,5$.

(Жауабы: $y = 0,5 + 0,25x + 0,375x^2 + \ldots$**)**

7.18. $y' = e^{\sin x} + x$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$**)**

7.19. $y' = xy - y^2$, $y(0) = 0,2$.

(Жауабы: $y = 0,2 - 0,04x + 0,108x^2 + \ldots$**)**

7.20. $y' = 2x + y^2 + e^x$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + 2x + 3{,}5x^2 + \ldots$**)**

7.21. $y' = x\sin x - y^2$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 - x + x^2 + \ldots$**)**

7.22. $y' = 2x^2 - xy$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = \frac{4x^3}{3!} - \frac{16x^5}{5!} + \frac{96x^7}{7!} - \ldots$**)**

7.23. $y' = x - 2y^2$, $y(0) = 0{,}5$. **(Жауабы:** $y = 0{,}5 - 0{,}5x + x^2 + \ldots$**)**

7.24. $y' = xe^x + 2y^2$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots$**)**

7.25. $y' = xy + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \ldots$**)**

7.26. $y' = xy + e^x$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots$**)**

7.27. $y' = ye^x$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + x^2 + \ldots$**)**

7.28. $y' = 2\sin x + xy$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{11}{360}x^6 + \ldots$**)**

7.29. $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$. **(Жауабы:** $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots$**)**

7.30. $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$**)**

8.

Тізбектей дифференциалдау әдісін пайдаланып, дифференциалдық теңдеудің бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімінің дәрежелік қатарға жіктелуінің алғашқы k мүшесін табыңыз

8.1. $y' = \arcsin y + x$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $k = 4$.

(Жауабы: $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi x}{6} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{3\sqrt{x}}\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{27\sqrt{3}}\right)x^3 + \ldots$**)**

8.2. $y' = xy + \ln(y + x)$, $y(1) = 0$, $k = 5$.

(Жауабы: $y = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} + \ldots$**)**

8.3. $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $k = 3$. **(Жауабы:** $y = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots$**)**

8.4. $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(0) = 1$, $k = 5$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \ldots$**)**

8.5. $y^{IV} = xy + y'x^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$, $k = 7$.

(Жауабы: $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{4x^6}{6!} + \ldots$**)**

8.6. $y' = 2x - 0{,}1y^2$, $y(0) = 1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 1 - 0{,}1x + 0{,}01x^2 + \ldots$**)**

8.7. $y''' = y'' + y'^2 + y^3 + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0{,}5$, $k = 6$.

(Жауабы: $y = 1 + 2x + \frac{x^2}{4} + \frac{11}{12}x^3 + \frac{29}{48}x^4 + \frac{25}{48}x^5 + \ldots$**)**

8.8. $y' = x^2 - xy$, $y(0) = 0{,}1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 0{,}1 - 0{,}05x^2 + 0{,}333x^3 + \ldots$**)**

8.9. $y'' = 2yy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{12x^5}{5!} + \ldots$**)**

8.10. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $k = 5$. **(Жауабы:** $y = x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \ldots$**)**

8.11. $y''' = ye^x - xy'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 1$, $k = 6$.

(Жауабы: $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + 0 \cdot x^5 + \ldots$**)**

8.12. $y' = 3x - y^2$, $y(0) = 2$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 2 - 4x - \frac{13}{2}x^2 - \ldots$**)**

8.13. $y'' = xyy'$, $y(0) = y'(0) = 1$, $k = 6$.

(Жауабы: $y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots$**)**

8.14. $y' = x^2 - 2y$, $y(0) = 1$, $k = 3$. **(Жауабы:** $1 - 2x + 2x^2 + \ldots$**)**

8.15. $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $k = 4$.

(Жауабы: $y = 1\frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$**)**

8.16. $y' = x^2 + 0,2y^2$, $y(0) = 0,1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 0,1 + 0,002x + 0,00004x^2 + \ldots$**)**

8.17. $y'' = y'^2 + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$, $k = 5$.

(Жауабы: $y = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \ldots$**)**

8.18. $y' = xy + y^2$, $y(0) = 0,1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 0,1 + 0,01x + 0,051x^2 + \ldots$**)**

8.19. $y''' = e^y \sin y'$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 1 + \frac{\pi}{2}(x - \pi) + \frac{e}{2}(x - \pi)^2 + \ldots$**)**

8.20. $y' = 0,2x + y^2$, $y(0) = 0,1$, $k = 3$. **(Жауабы:** $y = 1 + x + 1,1x^2 + \ldots$**)**

8.21. $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 0,5$, $k = 4$.

(Жауабы: $y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \ldots$**)**

8.22. $y' = x^2 + xy + e^{-x}$, $y(0) = 0$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^3}{3!} + \ldots$**)**

8.23. $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$, $k = 5$.

(Жауабы: $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{17}{9}x^4 + \ldots$**)**

8.24. $y'' = +y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$**)**

8.25. $y'' = y\cos y' + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{\pi}{3}$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 1 + \frac{\pi}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \ldots$**)**

8.26. $y' = \cos x + x^2$, $y(0) = 0$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$**)**

8.27. $y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x}$, $y(0) = 2$, $k = 4$.

(Жауабы: $y = 2 + 9x + \frac{31}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + \ldots$**)**

8.28. $(1-x)y'' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \ldots$**)**

8.29. $4x^2y'' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \ldots$**)**

8.30. $y' = 2x^2 + y^3$, $y(1) = 1$, $k = 3$.

(Жауабы: $y = 1 + 3(x-1) + \frac{13}{2}(x-1)^2 + \ldots$**)**

12.2–тапсырманы шығару үлгісі (§12.4)

Келесі есептерде қатардың жинақталу аймағын табу керек.

№1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{x^n}{n^2+1}}$.

▼ Даламбер белгісін пайдаланамыз:

$$u_n=\sqrt{\frac{x^n}{n^2+1}},\qquad u_{n+1}=\sqrt{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{x^{n+1}}\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}\ \ \sqrt{x^n}}\right|=\sqrt{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}}=\sqrt{x}\ .$$

Жинақталу интервалы $\sqrt{x}<1$ теңдігімен анықталады, бұдан $0<x<1$ аламыз. Интервалдың шекаралық нүктелерін зерттейміз. $x=0$ мәні үшін мүшелері нөлге тең сандық қатар аламыз, ол қатардың жинақты болатыны түсінікті. $x=1$ мәні үшін $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n^2+1}}$ сандық қатарын аламыз. Оны жалпы мүшесі $v_n=\dfrac{1}{n}$ болатын жинақсыз гармониялық қатармен салыстырамыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1\neq 0$. Олай болса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{x^n}{n^2+1}}$ сандық қатары да жинақсыз. Сонымен жинақталу аймағына $x=0$ нүктесі жатады, ал $x=1$ нүктесі жатпайды, яғни қатардың жинақталу аймағы $0\le x<1$.

Назарыңызға! 12.4.1. 1 және 2 мысалдарды қараңыз! ▲

№2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)^n$.

▼ Даламбер белгісін пайдаланамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+1}}{\frac{n^2+1}{n^2}}\cdot\frac{\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|^{n+1}}{\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|^{n}} =$$

$$= \left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(n^2+2n+2\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+1\right)} = \left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| < 1,$$

$$-1 < \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} < 1. \qquad (*)$$

Алынған қос теңсіздікті шешеміз:

$$-1 < \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}, \quad \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}+1 > 0, \quad \frac{2x^2+4}{x^2+3x+2} > 0.$$

Бұдан $x^2+3x+2>0,$ немесе $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;\infty)$.

Енді қос теңсіздіктің оң жағын шешеміз:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} < 1, \quad \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}-1 < 0, \quad \frac{-6x}{x^2+3x+2} < 0,$$

$$\frac{x}{x^2+3x+2} > 0.$$

Соңғы теңсіздікті, мысалы, интервалдар әдісімен шығара отырып, оның шешімі $x\in(-2;-1)\cup(0;+\infty)$ болатынын көреміз.

Сонымен (*) қос теңсіздігінің шешімі: $(0;\ +\infty)$.

Интервалдың шекаралық $x=0$ мәніне $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$ сандық қатары сәйкес келеді. Ол қатардың жалпы мүшесі үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=1\neq 0$, яғни жинақталудың қажетті шарты орындалмайды. Сондықтан бұл нүктеде сандық қатар жинақсыз. Берілген қатардың жинақталуы аймағы: $0<x<\infty$. ▲

№3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3-x^2\right)^n$.

▼ Коши белгісін пайдаланамыз:

$$u_n=\left(3-x^2\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|3-x^2\right|^n}=\left|3-x^2\right|<1,\quad -1<3-x^2<1.$$

Алынған қос теңсіздікті шешеміз:

$$3-x^2>-1,\quad x^2-4<0,\quad x\in(-2;2);$$

$$3-x^2<1,\quad x^2-2>0,\quad x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\infty\right).$$

Табылған шешімдердің қиылысуы берілген қатардың жинақталу интервалын береді: $x\in\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$. Қатарды осы интервалдардың шеткі нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз: $x=\pm 2$ мәндерінде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ жинақсыз сандық қатарын аламыз.

Өйткені мұнда қатардың жинақталуының қажетті шарты орындалмайды: $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}(-1)^n$ шегі жоқ!

$x=\pm\sqrt{2}$ нүктелер үшін $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ жинақсыз сандық қатарын аламыз (мұнда да $\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$). Олай болса берілген қатардың жинақталу аймағы $\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$. ▲

№4.

$y=\cos^2 x$ функциясын $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктеу керек. Алынған қатардың осы функцияға жинақталу аймаған табу керек.

▼ Берілген функцияны түрлендіреміз: $y=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$. Алынған функцияны Тейлор қатарына жіктейміз. Ол үшін функцияның және оның *n*-ші ретке дейінгі туындыларының $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ нүктесіне сәйкес мәндерін табамыз:,

$$f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

$$f'(x)=-\sin 2x,\qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f''(x) = -2\cos 2x, \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{2\pi}{3} = 1;$$

$$f'''(x) = 4\sin 2x, \quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3};$$

.....

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Алынған туынды мәндерін $x_0 = \frac{\pi}{3}$ нүктедегі Тейлор қатарына қоямыз:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(-2^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n.$$

Алынған қатардың жинақталу аймағын табу үшін, *x*-тің қандай мәндерінде Тейлор қатарының қалдық мүшесі нөлге ұмтылатын білу керек:

$$R_n(x) = \frac{-2^n}{(n+1)!}\sin\left(2\xi + n\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1},$$

мұндағы $\xi \in (x; x_0)$. Бұл өрнекте $\left|\sin\left(2\xi + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$ орындалатындықтан, жалпы мүшесі $\frac{2^n}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$ болатын қатардың жинақталу аймағын тапсақ болғаны. Даламбер белгісіне сәйкес есептейміз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\left(x-\pi/3\right)^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\cdot 2^n\left(x-\pi/3\right)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left|x-\pi/3\right|}{n+2} = 0 < 1.$$

Алынған қатар x-тің кез келген мәнінде жинақты. Олай болса оның $f(x) = \cos^2 x$ функциясына жинақталу аймағы: $-\infty < x < +\infty$.

Ескерту. Берілген функцияны Тейлор қатарына 12.5.2. (10) және (11) формулаларды пайдаланып та жіктеуге болады:

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{2\pi}{3} -$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\cos 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}.$$

▲

№5.

$y = e^x$ функциясының дәрежелік қатарға жіктелуін (12.5.2. (9)-формула) пайдаланып, $\frac{1}{\sqrt{e}}$ мәнін $\alpha = 0,0001$ дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

▼ 12.5.2п., (9)-формула бойынша $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}\right)$ $e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2!} - \frac{1}{8 \cdot 3!} + \frac{1}{16 \cdot 4!} - \frac{1}{32 \cdot 5!} + \ldots$ аламыз. Бұл – ауыспа таңбалы қатар. Функция мәнін $\alpha = 0,0001$ дейінгі дәлдікпен есептеу үшін, алып тасталатын мүшелердің біріншісі 0,0001-ден кіші болуы қажет (§12.3, ескерту): $a_7 = \frac{1}{64 \cdot 6!} = \frac{1}{64 \cdot 720} = \frac{1}{46080} < \frac{1}{1000} =$ $= 0,0001$. Сонымен берілген дәлдікпен $e^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} +$ $+ \frac{1}{384} - \frac{1}{3840}$ аламыз, немесе $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - 0,5 + 0,125 - 0,02083 +$ $+ 0,00260 - 0,00026 \approx 0,6065$. ▲

№6.

Интеграл астындағы функцияның дәрежелік қатарға жіктелуін пайдаланып, $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{8 - x^3}}$ анықталған интегралын 0,001 дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

▼ 12.5.2п., (12) формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{28}{27}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^9+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{7x^9}{18176}+\ldots\right),$$

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}\approx\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{7x^9}{18176}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^4}{4\cdot24}+\frac{x^7}{7\cdot288}+\frac{7x^{10}}{10\cdot18176}+\ldots\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{96}+\frac{1}{2016}-\frac{7}{181760}+\ldots\right),$$

$\frac{1}{2016}<0,001$. Сонымен 0,001 дейінгі дәлдікпен

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{192}\approx\ 0,5-0,0052\approx0,495$$ аламыз. ▲

№7.

$y'=2x+y^3$, $y(1)=1$ түріндегі Коши есебінің шешімін $x-1$ айырымының дәрежесі бойынша дәрежелік қатарға жіктеу керек (осы жіктелудің нөлден өзгеше алғашқы үш мүшесін жазу керек).

▼ Дифференциалдық теңдеудің шешімін келесі қатар ретінде іздейміз:

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

Мұнда $f(x)=1,\quad f'(1)=2+1^3=3,\quad f''(x)=2+3y^2y'$, $f'''(1)=2+3\cdot1^2\cdot3=11$. Алынған мәндерді қатарға қойып, берілген теңдеудің шешімін аламыз: $y=1+\frac{3}{1!}(x-1)+\frac{1!}{2!}(x-1)^2+\ldots$. ▲

№8

Тізбектей дифференциалдау әдісімен $4x^2y''+y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=\frac{1}{2}$ түріндегі Коши есебінің дәрежелік қатарға жіктелуінің алғашқы 5 мүшесін табу керек.

▼ Берілген теңдеудің шешімін келесі қатар түрінде іздейміз:

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{iv}(1)}{4!}(x-1)^4+\ldots,$$

$$f(1)=1,\quad f'(1)=\frac{1}{2};\qquad f''(x)=-\frac{y}{4x^2},\quad f''(1)=-\frac{1}{4};$$

$$f'''(x)=-\frac{y'x^2-2xy}{4x^4},\quad f'''(1)=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot1-2\cdot1}{4}=\frac{3}{8};$$

$$f^{IV}(x)=-\left(\left(y''x^2+2xy'-2y-2xy'\right)x^4-4x^3\left(y'x^2-2xy\right)\right)/\left(4x^8\right);$$

$$f^{IV}(1)=-\frac{15}{16}.$$

Табылған мәндерді қатардағы орындарына қойып, дифференциалдық теңдеудің шешімін аламыз:

$$y=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{15}{16\cdot 4!}(x-1)^4+\ldots,$$

$$y=1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}-\frac{5(x-1)^4}{128}+\ldots\ . \qquad \blacktriangle$$

12.3–ҮТ

1. $[-\pi;\pi]$ кесіндісінде берілген $\omega=2\pi$ периодты $f(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

1.1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x-1, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi-2}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{\pi-2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$**)**

1.2. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=-\frac{\pi+1}{2}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{2(\pi+2)}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.3. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0,\\ x+2, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi+4}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{\pi+4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$ **.)**

1.4. $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, & -\pi \le x \le 0,\\ 0, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi+1}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}-$

$-\frac{\pi+1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$ **.)**

1.5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0,\\ \frac{x}{2}, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi-4}{8}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{\pi-4}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$ **.)**

1.6. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi \le x \le 0,\\ 0, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{3-\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{2(\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$ **.)**

1.7. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 3-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{6-\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{6-\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$**)**

1.8. $f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=-\frac{\pi+4}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{4+\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$ **.)**

1.9. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{2\pi-3}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$$+\frac{2(2\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

1.10. $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi+10}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}-$

$$-\frac{\pi+10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

1.11. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{3\pi-2}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$$+\frac{3\pi-2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

1.12. $f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi+3}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}-$

$$-\frac{2(\pi+3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

1.13. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0,\\ \dfrac{(\pi - x)}{2}, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}$**.)**

1.14. $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi \le x \le 0,\\ 0, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{2-5\pi}{4}+\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\dfrac{5\pi-2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-5\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.15. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0,\\ 1-4x, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{1-2\pi}{2}+\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\dfrac{2-4\pi}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.16. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi \le x \le 0,\\ 0, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{4-3\pi}{4}+\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\dfrac{3\pi-4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-3\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.17. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{4-\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\dfrac{2(4-\pi)}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.18. $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.19. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{3\pi-5}{2}-\dfrac{12}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\dfrac{2(3\pi-5)}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-6\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.20. $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{3\pi+14}{4}-\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}-$

$-\dfrac{14+3\pi}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+3\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.21. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.22. $f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=-\dfrac{3\pi+2}{4}+\dfrac{12}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\dfrac{2(3\pi+2)}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-6\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$.)

1.23. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 4-9x, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{8-9\pi}{4}+\dfrac{18}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$$+\frac{8-9\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

1.24. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=-\dfrac{\pi+18}{12}+\dfrac{2}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$$+\frac{18+\pi}{9\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

1.25. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{5\pi-3}{2}-\dfrac{20}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$$+\frac{2(5\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-10\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.)$$

1.26. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{4}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi+8}{16}-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}-$

$-\frac{8+\pi}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.27. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ \frac{x}{5}-2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{\pi-20}{20}+\frac{2}{5\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{\pi-20}{5\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$**.)**

1.28. $f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=-\frac{\pi+11}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$+\frac{2(\pi+11)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$.)

1.29. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 3-8x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{3-4\pi}{2}+\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$$+\frac{2(3-4\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}+8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

1.30. $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=-\frac{7\pi+2}{4}+\frac{14}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+$

$$+\frac{7\pi+2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-7\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}\textbf{.)}$$

2. $(0;\pi)$ интервалында берілген $f(x)$ функциясын жұп және тақ етіп созып (жеткізе анықтап), Фурье қатарына жіктеңіз. Әрбір созылған функцияның графигін салыңыз.

2.1. $f(x)=e^x$. **(Жауабы:** $e^x=\frac{e^n-1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n e^n-1\right)\cos nx}{1+n^2}$,

$$e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n e^n\right)\frac{n\sin nx}{1+n^2}\textbf{.)}$$

2.2. $f(x)=x^2$.

(Жауабы: $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}$, $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n e^n\right)\frac{n\sin nx}{1+n^2}$**.)**

2.3. $f(x)=2^x$.

(Жауабы: $2^x=\dfrac{2^n-1}{\pi\ln 2}+\dfrac{2\ln 2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(-1)^n-1n\sin nx}{n^2+\ln^2 2}\cos nx,$

$$2^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n+1}{n^2+\ln^2 2}n\sin nx\textbf{.)}$$

2.4. $f(x)=chx.$ **(Жауабы:** $\operatorname{ch}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\pi}\left(1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{1+n^2}\right),$

$$chx=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{1+n^2}n\sin nx\textbf{.)}$$

2.5. $f(x)=e^{-x}$. **(Жауабы:** $e^{-x}=\dfrac{1-e^{-\pi}}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)\cos nx}{1+n^2},$

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)\frac{n\sin nx}{1+n^2}\textbf{.)}$$

2.6. $f(x)=(x-1)^2$.

(Жауабы:

$$(x-1)^2=\frac{\pi^2-3\pi+3}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-\pi}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k)^2},$$

$$(x-1)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi^2-2\pi+2}{2k-1}+\frac{4}{(2k-1)^3}\right)\sin\left((2k-1)x\right)+2(2-\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.)$$

2.7. $f(x)=3^{-\frac{x}{2}}$. **(Жауабы:** $3^{-\frac{x}{2}}=\frac{2\left(1-3^{-\frac{\pi}{2}}\right)}{\pi\ln 3}+\frac{4\ln 3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 3^{-\frac{x}{2}}}{4n^2+(\ln 3)^2}$;

$$3^{-\frac{x}{2}}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 3^{-\frac{x}{2}}}{4n^2+(\ln 3)^2}n\sin nx\textbf{.)}$$

2.8. $f(x)=2shx$. **(Жауабы:** $\operatorname{sh}2x=\frac{\operatorname{ch}2\pi}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}2\pi(-1)^n-1}{4+n^2}\cos nx$,

$$\operatorname{sh}2x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\operatorname{sh}2\pi}{4+n^2}\sin nx\textbf{.)}$$

2.9. $f(x)=e^{2x}$. **(Жауабы:** $e^{2x}=\frac{e^{2n}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n e^{2n}-1\right)\cos nx}{4+n^2}$,

$$e^{2x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n e^{2\pi}\right)\frac{n\sin nx}{4+n^2}\textbf{.)}$$

2.10. $f(x)=(x-2)^2$. **(Жауабы:**

$$(x-2)^2=\frac{\pi^2-6\pi+12}{3}+\frac{4(4-\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k)^2},$$

$$(x-2)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-2}{n^3}+(-1)^n\frac{2-n^2(2-\pi)}{n^3}\right)\sin(nx)\textbf{.)}$$

2.11. $f(x)=4^{\frac{x}{3}}$. **(Жауабы:**

$$4^{\frac{x}{3}}=\frac{3\left(4^{\frac{n}{3}}-1\right)}{\pi}+\frac{6\ln 4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^{\frac{\pi}{3}}-1}{9n^2+(\ln 4)^2}\cos nx,$$

$$4^{\frac{x}{3}}=\frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 4^{\frac{\pi}{3}}}{9n^2+(\ln 4)^2}n\sin nx\textbf{.)}$$

2.12. $f(x)=\operatorname{ch}\frac{x}{2}$. **(Жауабы:**

$$ch\frac{x}{2}=\frac{2sh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}+\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{1+4n^2},$$

$$\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\frac{2ch\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{1+4n^2}n\sin nx\textbf{.)}$$

2.13. $f(x)=e^{4x}$. **(Жауабы:** $e^{4x}=\frac{e^{4n}-1}{4\pi}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n e^{4n}-1\right)\cos nx}{16+n^2}$,

$$e^{4x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n e^{4\pi}\right)\frac{n\sin nx}{16+n^2}\textbf{.)}$$

2.14. $f(x)=(x+1)^2$. **(Жауабы:**

$$(x+1)^2=\frac{\pi^2+3\pi+3}{3}-\frac{4(\pi+2)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k)^2},$$

$$(x+1)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-n^2)+(-1)^n((\pi-1)^2n^2-2)}{n^3}\sin(nx)\textbf{.)}$$

2.15. $f(x)=5^{-x}$. **(Жауабы:**

$$5^{-x}=\frac{1-5^{-\pi}}{\pi\ln 5}+\frac{2\ln 5}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-5^{-\pi}(-1)^n}{n^2+(\ln 5)^2}\cos nx,$$

$$5^{-x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 5^{-\pi}}{n^2+(\ln 5)^2}n\sin nx)$$

2.16. $f(x)=\operatorname{sh}3x$. **(Жауабы:**

$$sh3x=\frac{ch3\pi-1}{3\pi}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ch3\pi(-1)^n-1}{9+n^2}\cos nx,$$

$$sh3x=\frac{2sh3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{9+n^2}n\sin nx\textbf{.)}$$

2.17. $f(x)=e^{-\frac{x}{4}}$. **(Жауабы:**

$$e^{-\frac{x}{4}}=\frac{4\left(1-e^{-\frac{\pi}{4}}\right)}{\pi}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n e^{-\frac{\pi}{4}}\right)\cos nx}{1+16n^2},$$

$$e^{e^{-\frac{x}{4}}} = \frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n e^{-\frac{\pi}{4}}\right)\frac{n\sin nx}{1+16n^2}.)$$

2.18. $f(x)=(2x-1)^2$. **(Жауабы:**

$$(2x-1)^2 = \frac{4\pi^2-6\pi+3}{3}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\pi-1)^2+1}{n^2}\cos(nx),$$

$$(2x-1)^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-8+(-1)^n\left(8-(1-2n)^2\right)}{n^3}\sin(nx).)$$

2.19. $f(x)=6^{\frac{x}{4}}$. **(Жауабы:**

$$6^{\frac{x}{4}} = \frac{4\left(6^{\frac{\pi}{4}}-1\right)}{\pi\ln 6}+\frac{8\ln 6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^{\frac{\pi}{4}}-1}{(\ln 6)^2+16n^2}\cos nx,$$

$$6^{\frac{x}{4}} = \frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n 6^{\frac{\pi}{4}}\right)\frac{n\sin nx}{(\ln 6)^2+16n^2}.)$$

2.20. $f(x)=ch4x$. **(Жауабы:**

$$ch4x = \frac{sh4\pi}{4\pi}+\frac{8sh4\pi}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+16}*\cos nx,$$

$$ch4x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n ch4\pi}{n^2+16}).$$

2.21. $f(x)=e^{-3x}$. **(Жауабы:** $e^{-3x} = \frac{1-e^{-3x}}{3\pi}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-3\pi}}{n^2+9}\cos nx,$

$$e^{-3x} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-3\pi}}{n^2+9} n\sin nx\textbf{).}$$

2.22. $f(x) = x^2 + 1$. **(Жауабы:** $x^2 + 1 = \frac{\pi^2+3}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$**,**

$$x^2 + 1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-2)+(2-n)^2(\pi^2+1)(-1)^n}{n^3}\sin nx\textbf{).}$$

2.23. $f(x) = 7^{-x/7}$. **(Жауабы:**

$$7^{-x/7} = \frac{7(1-7^{-\pi/7})}{\pi\ln 7} + \frac{14\ln 7}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 7^{-\pi/7}}{49n^2+(\ln 7)^2}\cos nx,$$

$$7^{-x/7} = \frac{98}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n 7^{-\pi/7}}{49n^2+(\ln 7)^2} n\sin nx\textbf{).}$$

2.24. $f(x) = sh\frac{x}{5}$. **(Жауабы:**

$$sh\frac{x}{5} = \frac{5\left(ch\frac{\pi}{5}-1\right)}{\pi} + \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n ch\frac{\pi}{5}-1}{1+25n^2}\cos nx,$$

$$sh\frac{x}{5} = \frac{50sh\frac{\pi}{5}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+25n^2} n\sin nx\textbf{.)}$$

2.25. $f(x) = e^{-\frac{2x}{3}}$. **(Жауабы:**

$$e^{-\frac{2x}{3}}=\frac{3\left(1-e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)}{2\pi}+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}}{9n^2+4}\cos nx,$$

$$e^{-\frac{2x}{3}}=\frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\frac{2\pi}{3}}}{9n^2+4}n\sin nx\ .)$$

2.26. $f(x)=(x-\pi)^2$. **(Жауабы:** $(x-\pi)^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ **,**

$$(x-\pi)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2\pi^2+2)(-1)^n-1}{n^3}\sin nx\ .)$$

2.27. $f(x)=10^{-x}$. **(Жауабы:**

$$10^{-x}=\frac{1-10^{-\pi}}{\pi\ln 10}+\frac{2\ln 10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-10^{-\pi}(-1)^n}{n^2+(\ln 10)^2}\cos nx,$$

$$10^{-x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 10^{-\pi}}{n^2+(\ln 10)^2}n\sin nx\ .)$$

2.28. $f(x)=ch\frac{x}{\pi}$. **(Жауабы:** $ch\frac{x}{\pi}=sh1+2sh1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{1+\pi^2n^2}$,

$$ch\frac{x}{\pi}=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n ch1}{1+\pi^2n^2}n\sin nx.)$$

2.29. $f(x)=e^{\frac{4x}{3}}$. **(Жауабы:**

$$e^{\frac{4x}{3}}=\frac{3\left(e^{\frac{4\pi}{3}}-1\right)}{4\pi}+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{\frac{4\pi}{3}}-1}{9n^2+16}\cos nx,$$

$$e^{\frac{4x}{3}}=\frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{\frac{4\pi}{3}}}{9n^2+16}n\sin nx\text{).}$$

2.30. $f(x)=(x-5)^2$. **(Жауабы:**

$$(x-5)^2=\frac{\pi^2-15\pi+75}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi-5)^2(-1)^n+5}{n^2}\cos nx,$$

$$(x-5)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(25n^2-2\right)+(-1)^n\left(2-n^2(5-\pi)^2\right)}{n^3}\sin nx\text{).}$$

3. $\omega=2l$ периодты $f(x)$ функциясын көрсетілген интервалда Фурье қатарына жіктеңіз.

3.1. $f(x)=|x|,\ -1<x<1,\ l=1.$

(Жауабы: $|x|=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2n+1)\pi x\right)}{(2n+1)^2}$**.)**

3.2. $f(x)=2x,\ -1<x<1,\ l=1.$ **(Жауабы:** $2x=1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}$**.)**

3.3. $f(x)=e^{x},\ -2<x<2,\ l=2.$

(Жауабы: $e^{x}=sh2\left(\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2\cos\frac{n\pi x}{2}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{2}}{4+n^{2}\pi^{2}}\right)$**.)**

3.4. $f(x)=|x|-5,\ -2<x<2.$

(Жауабы: $|x|-5=-4-\frac{8}{\pi^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2}}\cos\frac{\left((2n+1)\pi x\right)}{2}$**.)**

3.5. $f(x)=\begin{cases}1,\ -1\le x<0\\ x,\ 0<x\le 1\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^{2}\pi}+\sin(n\pi x)$**.)**

3.6. $f(x)=x,\ 1<x<3,\ l=1.$

(Жауабы: $x=2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}$**.)**

3.7. $f(x)=\begin{cases}0,-2\le x<0\\ x,\ 0\le x<1,\ l=2\\ 2-x,\ 1\le x\le 2\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^{2}\pi}+\sin(n\pi x)$**.)**

3.8. $f(x)=10-x,\ 5<x<15,\ l=5.$

(Жауабы: $10-x=\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi x}{5}\right)}{n}$**.)**

3.9. $f(x)=\begin{cases}1, -1\le x<0\\ \dfrac{1}{2},\ x=0,\ l=1\\ x,\ 0<x\le 1\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n\pi x)}{n}$**.)**

3.10. $f(x)=5x-1,\ -5<x<5,\ l=5.$

(Жауабы: $5x-1=-1+\dfrac{50}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi x}{5}\right)}{n}\right)$**.)**

3.11. $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\le 0,\\ x, & 0<x<3,\end{cases}\quad l=3$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{3}\right)}{(2n-1)^2}-\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{3}\right)$**.)**

3.12. $f(x)=3-x,\ -2<x<2,\ l=2.$

(Жауабы: $3-x=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-1\right)^{n+1}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n}\right)$**.)**

3.13. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ -1, & 1<x<2,\end{cases}\ l=1$

(Жауабы: $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}$**.)**

3.14. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0,\\ 2, & 0<x<2,\end{cases}\quad l=2$

(Жауабы: $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$**.)**

3.15. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3\end{cases}\ l=3$

(Жауабы: $f(x)=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2\pi nx}{3}\right)}{n^2}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi x)}{k^2}$**.)**

3.16. $f(x)=2x-3,\ -3<x<3,\ l=3.$

(Жауабы: $2x-3=-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-1\right)^{n+1}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}{n}\right)$**.)**

3.17. $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{3}{2},\\ -1, & \frac{3}{2}<x<3,\end{cases}\quad l=3$

(Жауабы: $f\left(x\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\cos\frac{\left(2n+1\right)\pi x}{3}}{2n+1}$**.)**

3.18. $f\left(x\right)=3-\left|x\right|,\ -5<x<5,\ l=5$

(Жауабы: $3-\left|x\right|=\frac{1}{2}+\frac{20}{\pi^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^{2}}\cos\frac{\left(\left(2n+1\right)\pi x\right)}{5}$**.)**

3.19. $f\left(x\right)=\begin{cases}-x, & -4<x<0\\ 1, & x=0,\ l=4\\ 2, & 0<x<4\end{cases}$ **(Жауабы:**

$$f\left(x\right)=2-\frac{8}{\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi x}{4}\right)}{\left(2n-1\right)^{2}}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)}{n}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\left(2k-1\right)\pi x}{4}\right)}{2k-1}$$**.)**

3.20. $f(x)=1+x,\ -1<x<1,\ l=1.$

(Жауабы: $1+x=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n}\right)$**.)**

3.21. $f(x)=\begin{cases}-1,\ -2<x<0\\ -\frac{1}{2},\ x=0,\ l=2\\ \frac{x}{2},\ 0<x<2\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}+$

$+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{2n-1}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{2k}$**.)**

3.22. $f(x)=2x+2,\ -1<x<3,\ l=2.$

(Жауабы: $2x+2=2-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n}\right)$**.)**

3.23. $f(x)=\begin{cases}3,\ -3<x<0\\ \dfrac{3}{2},\ x=0,\ l=3\\ -x,\ 0<x<3\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{3}\right)}{(2n-1)^2}-$

$-\dfrac{9}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{3}\right)}{2n-1}+\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{2k\pi x}{3}\right)}{2k}$**.)**

3.24. $f(x)=1-|x|,\ -3<x<3,\ l=3$

(Жауабы: $1-|x|=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{12}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{\left((2n-1)\pi x\right)}{3}$**.)**

3.25. $f(x)=\begin{cases}-2,\ -4<x<0\\ -\dfrac{1}{2},\ x=0,\ l=4\\ 1+x,\ 0<x<4\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{32}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{4}\right)}{(2n-1)^2}+$

$$+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{4}\right)}{2n-1}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{2k}.)$$

3.26. $f(x)=4x-3,\ -5<x<5,\ l=5.$

(Жауабы: $4x-3=-3+\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)}{n}\right).)$

3.27. $f(x)=\begin{cases}x+2, & -2<x<-1\\ -\frac{1}{2}, & -1\le x\le 1,\ l=2\\ 1+x, & 1<x<2\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2(2k-1)\pi x}{2}\right)}{\left(2(2k-1)\right)^2}.)$

3.28. $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & -6<x<0,\\ 1, & 0<x<6,\end{cases}\quad l=6$

(Жауабы: $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{6}.)$

3.29. $f(x)=\begin{cases}-2x, & -2<x<0\\ 2, & x=0,\ l=2\\ 4, & 0<x<2\end{cases}$

(Жауабы: $f(x)=3-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$**.)**

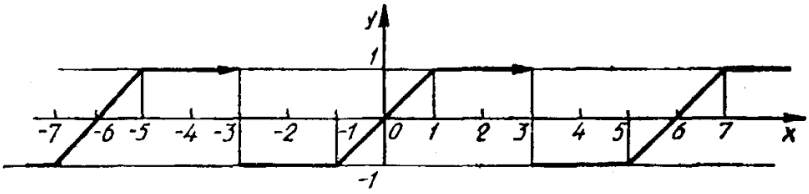
3.30. $f(x)=|x|-3,\ -4<x<4,\ l=4$

(Жауабы: $|x|-3=-1-\frac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{((2n-1)\pi x)}{2}-$

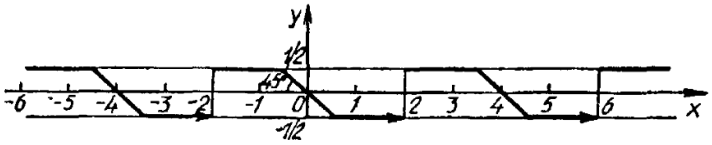
$-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{2n}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{((2k-1)\pi x)}{2}$.)

4. Графикпен берілген функцияны Фурье қатарына жіктеңіз.

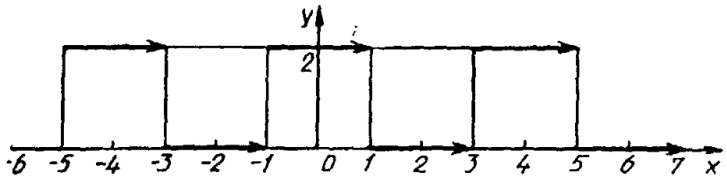
4.1.



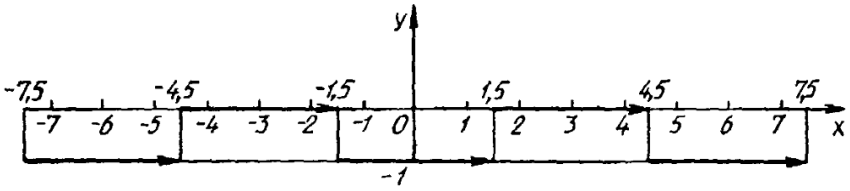
4.2.


y
1/2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
-1/2

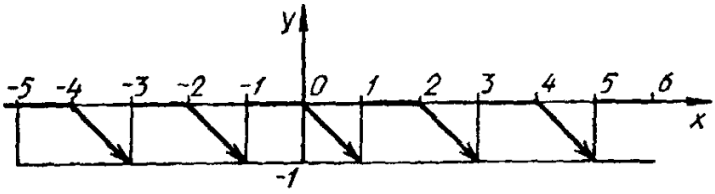
4.3.


y
2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

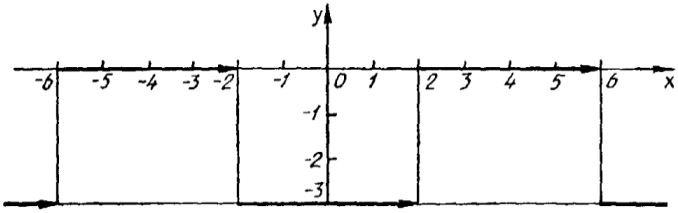
4.4.


y
-7,5
-4,5
-1,5
1,5
4,5
7,5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
-1

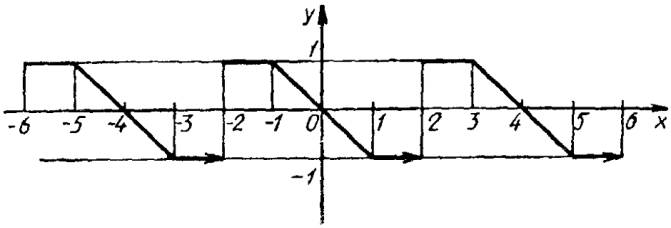
4.5.


y
x
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
-1

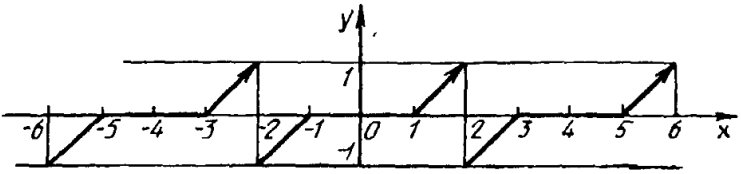
4.6.


y
x
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
-1
-2
-3

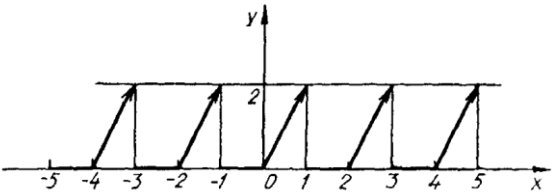
4.7


y
x
1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
-1

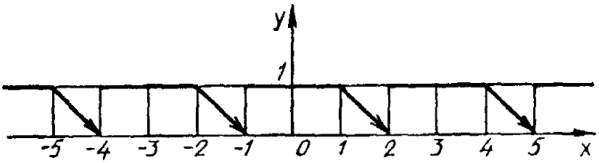
4.8.



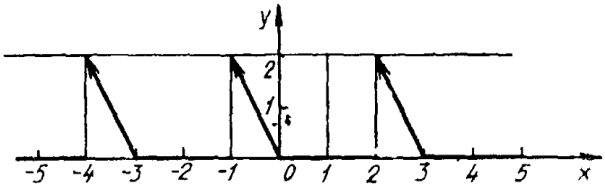
4.9.



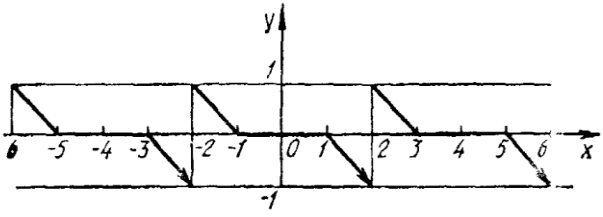
4.10.



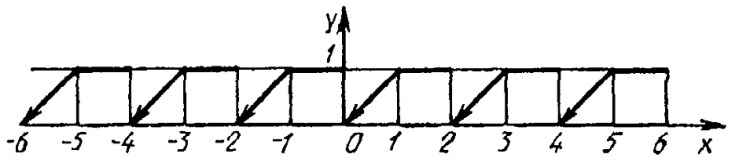
4.11.



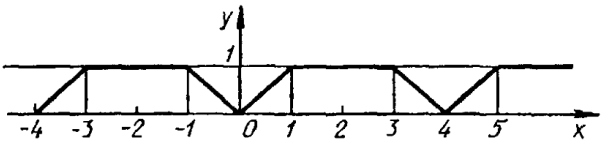
4.12.



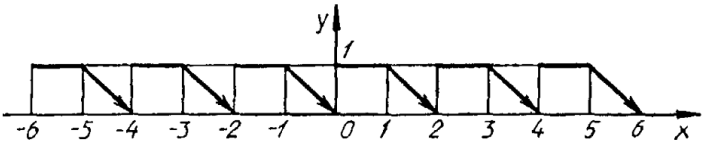
4.13.



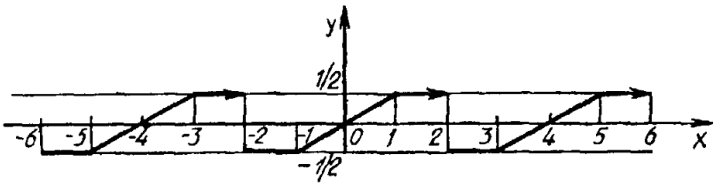
4.14.



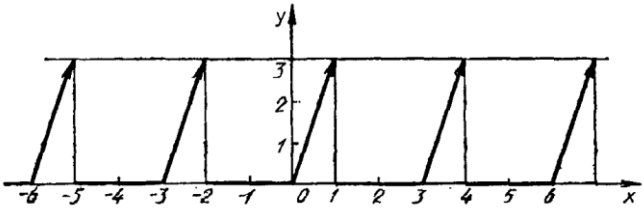
4.15.



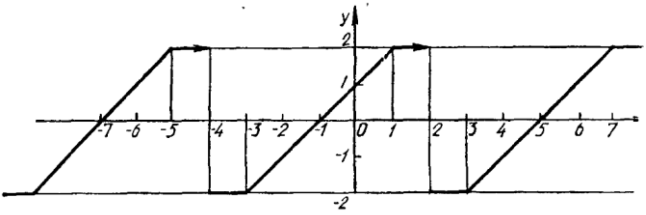
4.16.



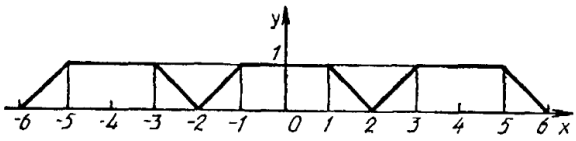
4.17.


y
3
2
1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 x

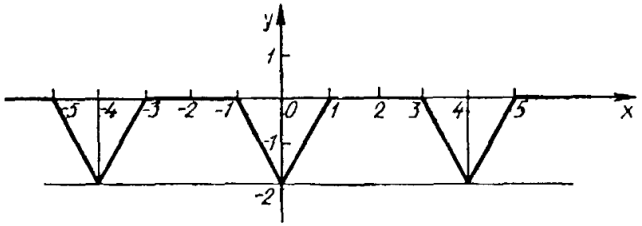
4.18.


y
2
1
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
-1
-2

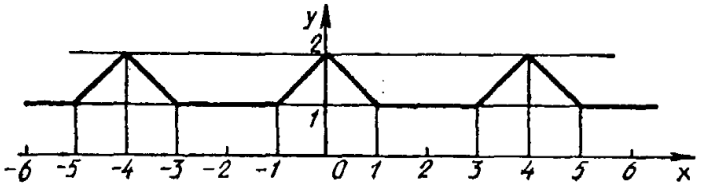
4.19.


y
1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 x

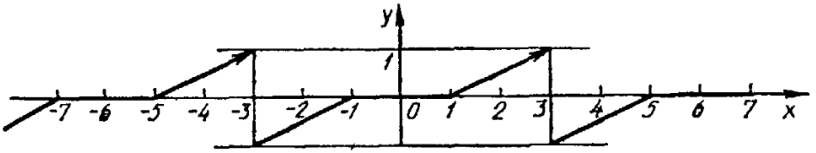
4.20.


y
1
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
x
-1
-2

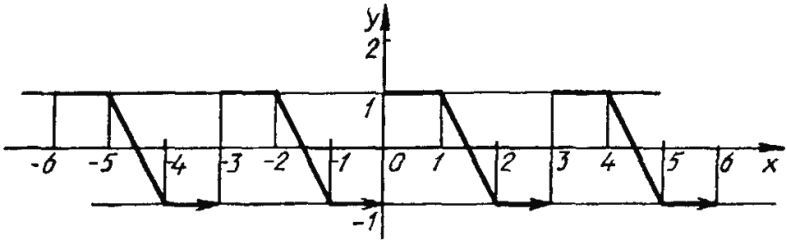
4.21.


y
2
1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
x

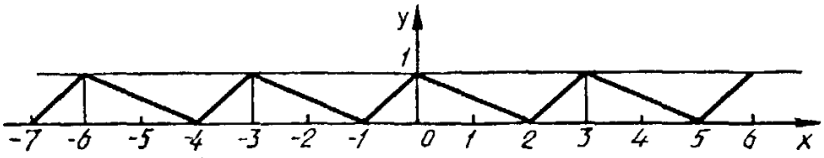
4.22.


y
1
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
x

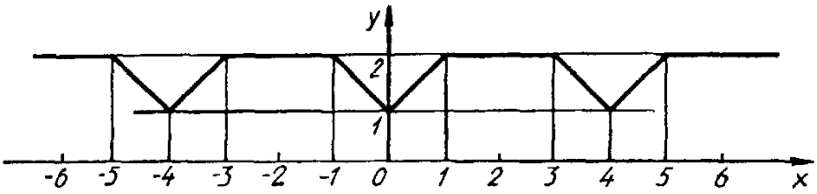
4.23.


y
2
1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 x
-1

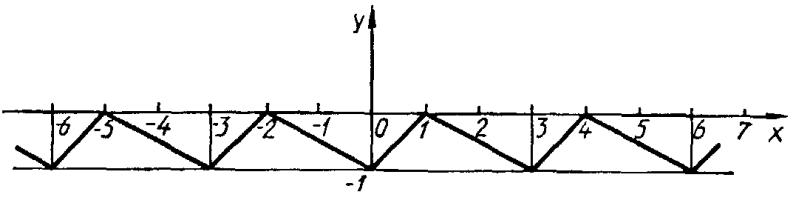
4.24.


y
1
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 x

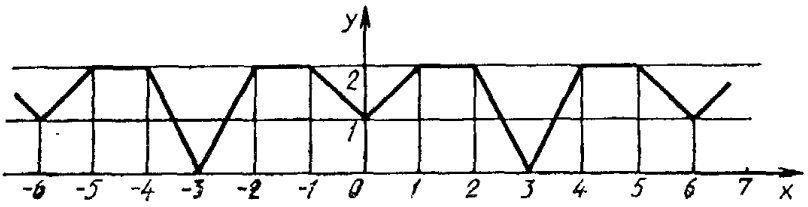
4.25.


y
2
1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 x

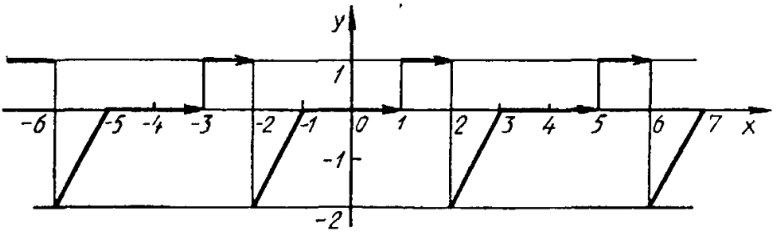
4.26.


y
x
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
-1

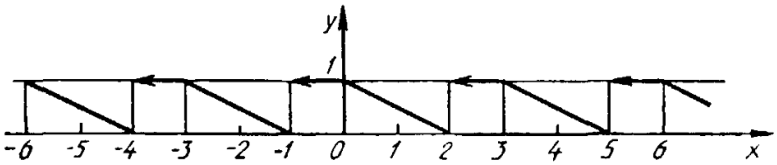
4.27.


y
x
2
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

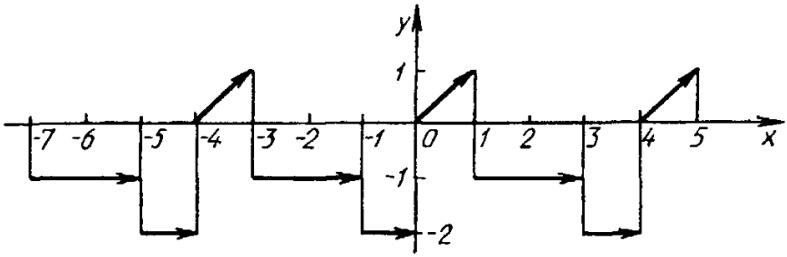
4.28.


y
x
1
-1
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

4.29.



4.30.



5. $f(x)$ функциясын көрсетілген интервалда Фурье қатарына жіктелімін пайдаланып, берілген қатардың қосындысын табыңыз.

5.1. $f(x)=|x|,(-\pi;\pi),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$. **(Жауабы:** $\dfrac{\pi^2}{8}$**.)**

5.2. $f(x)=|\sin x|,(-\pi;\pi),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$. **(Жауабы:** $\dfrac{1}{2}$**.)**

5.3. $f(x)=x^2,(-\pi;\pi),\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{12}$**.)**

5.4. $f(x)=x,(-\pi;\pi)$ **косинустар бойынша** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

(Жауабы: $\frac{\pi^2}{8}$**.)**

5.5. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0,\\ \frac{x^2}{\pi}, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-(-1)^n}{n^2}$ **(Жауабы:** $\frac{7\pi^2}{12}$**.)**

5.6. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=-\pi,x=0,x=\pi,\end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi}{4}$**.)**

5.7. $f(x)=\frac{\pi}{4},\ (0;\pi),\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi}{4}$**.)**

5.8. $f(x)=\cos x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)}$. **(Жауабы:** $\frac{2-\pi}{4}$**.)**

5.9. $f(x)=x,\ (-\pi;\pi),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{6}$**.)**

5.10. $f(x)=x^2,\ (-\pi;\pi),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{6}$**.)**

5.11. $f(x)=x(\pi-x),\ (0;\pi)$ **синустар бойынша** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

(Жауабы: $\frac{\pi^3}{32}$ **.)**

5.12. $f(x)=|\sin x|, (-\pi;\pi), \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ **.** **(Жауабы:** $\frac{2-\pi}{4}$ **.)**

5.13. $f(x)=\begin{cases}0,-3<x\le 0\\ x,0<x<3\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ **.** **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{8}$ **.)**

5.14. $f(x)=\begin{cases}1,-1\le x<0\\ x,0\le x\le 1\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$**.** **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{8}$ **.)**

5.15. $f(x)=|x|,\ (-1;1),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ **.** **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{8}$ **.)**

5.16. $f(x)=x^2,\ (-\pi;\pi),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ **.** **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{8}$ **.)**

5.17. $f(x)=\begin{cases}1,-1\le x<0\\ \frac{1}{2},x=0\\ x,0<x\le 1\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ **.** **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{8}$ **.)**

5.18. $f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\ -1,1<x<2\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ **.** **(Жауабы:** $\frac{\pi}{4}$ **.)**

5.19. $f(x)=\begin{cases}-x,-4<x<0\\ 1,x=0\\ 2,0<x<4\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$**.** **(Жауабы:** $\frac{\pi^2}{8}$ **.)**

5.20. $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x<\dfrac{3}{2}\\ -1, \dfrac{3}{2}<x<3\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$. **(Жауабы:** $\dfrac{\pi}{4}$**.)**

5.21. $f(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x<2\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$. **(Жауабы:** $\dfrac{\pi^2}{8}$**.)**

5.22. $f(x)=\begin{cases}-2x, -2<x<0\\ 2, x=0\\ 4, 0<x<2\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$. **(Жауабы:** $\dfrac{\pi^2}{8}$**.)**

5.23. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0\\ x-1, 0\le x\le\pi\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$. **(Жауабы:** $\dfrac{\pi^2}{8}$**.)**

5.24. $f(x)=\begin{cases}2x, -\pi\le x\le 0\\ 3x, 0<x\le\pi\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2}$. **(Жауабы:** $\dfrac{7\pi^2}{20}$**.)**

5.25. $f(x)=\pi^2-x^2, (-\pi;\pi), \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. **(Жауабы:** $\dfrac{\pi^2}{12}$**.)**

5.26. $f(x)=x\sin x, \quad [\pi;\pi], \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n^2-1)}$. **(Жауабы:** $\dfrac{1}{4}$**.)**

5.27. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0\\ 1, 0\le x\le\pi\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$. **(Жауабы:** $\dfrac{\pi}{4}$**.)**

5.28. $f(x)=\begin{cases}-a, -\pi \le x < 0\\ a, \quad 0 \le x \le \pi\end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi}{4}$**.)**

5.29. $f(x)=|\cos x|, [-\pi;\pi]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi-2}{4}$**.)**

5.30. $f(x)=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$, $[-\pi;\pi]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{1-4n^2}$. **(Жауабы:** $\frac{\pi-2}{4}$**.)**

12.3–тапсырманы шығару үлгісі

№1

Келесі $\omega = 2\pi$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу керек.

$$f(x)=\begin{cases}\pi + x, & -\pi \le x < 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$$

▼ Фурье коэффициенттерін есептейміз (12.6.п., (9)-формула).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\frac{(\pi+x)^2}{2}\ \Big|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nxdx=\left|\begin{array}{ll}u=\pi+x, & du=dx,\\ dv=\cos nxdx, & v=\frac{1}{n}\sin nx,\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi+x}{n}\sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\ \Big|_{-\pi}^{0}=$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{2}{\pi(2n-1)^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\sin nx dx = \left| \begin{array}{c} u = \pi + x, \quad du = dx, \\ dv = \sin nx dx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi+x}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) = -\frac{1}{n}.$$

Берілген функцияның Фурье қатары келесі түрде жазылады:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}.$$

Назарыңызға! 12.6.3п., мысалды қараңыз! ▲

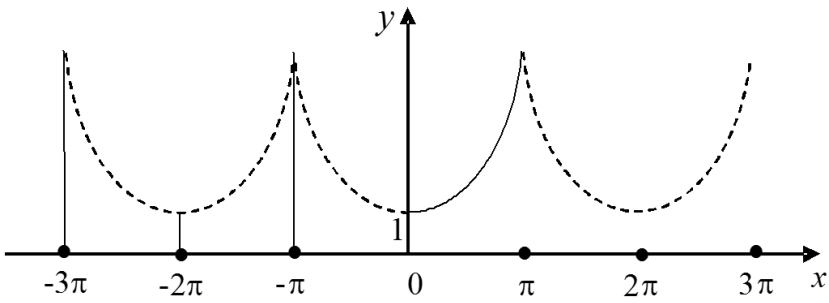
№2

$(0;\pi)$ интервалында берілген $f(x) = 8^{\frac{x}{2}}$ функциясын жұп және тақ функция болатындай етіп жалғастырып, Фурье қатарына жіктеу керек. Әрбір жалғанған функцияның графигін салу керек.

▼ Функцияны жұп болатындай етіп жалғастырамыз (89-сурет).

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{\frac{x}{2}}dx = \frac{2}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{8^{\frac{x}{2}}}{\ln 8}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi\ln 8}\left(8^{\frac{\pi}{2}}-1\right), \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{\frac{x}{2}}\cos nx dx.$$

Анықталмаған $\int 8^{\frac{x}{2}} \cos nx\ dx$ интегралын екі рет бөліктеп, интегралдап табуға болады:



89-сурет

$$\int 8^{\frac{x}{2}}\ \cos nxdx = \left| \begin{array}{l} u = 8^{\frac{x}{2}},\ du = \frac{1}{2}\cdot 8^{\frac{x}{2}} \ln 8 dx, \\ dv = \cos nxdx,\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| = \frac{1}{n} 8^{\frac{x}{2}} \sin nx - \frac{\ln 8}{2n} \int 8^{\frac{x}{2}} \sin nxdx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 8^{\frac{x}{2}},\ du = \frac{1}{2}\cdot 8^{\frac{x}{2}} \ln 8 dx, \\ dv = \sin nxdx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx, \end{array} \right| = \frac{1}{n}\cdot 8^{\frac{x}{2}} \sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{\frac{x}{2}} \cos nxdx -$$

$$-\frac{\ln^2 8}{4n^2} \int 8^{\frac{x}{2}} \cos nxdx,$$

$$\left(1 + \frac{\ln^2 8}{4n^2}\right) \int\ 8^{\frac{x}{2}} \cos nxdx = \frac{1}{n}\cdot 8^{\frac{x}{2}} \sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot \int 8^{\frac{x}{2}} \cos nxdx =$$

$$= \frac{4n^2}{4n^2 + \ln^2 8}\left(\frac{1}{n} 8^{\frac{x}{2}} \sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{\frac{x}{2}} \cos nx\right).$$

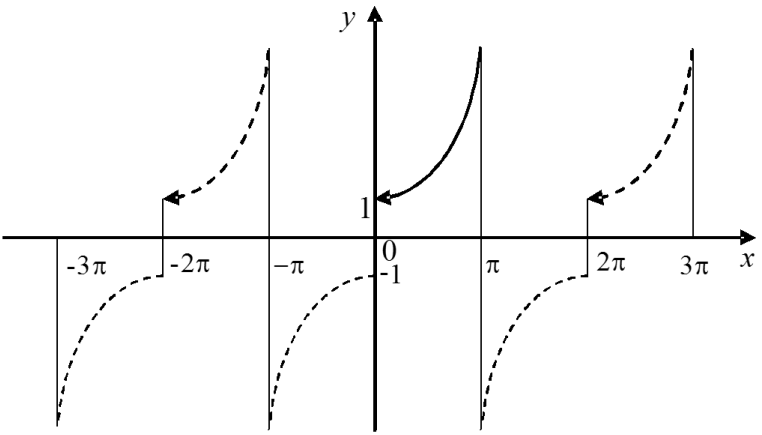
Одан әрі a_n коэффициентін есептейміз:

$$a_n = \frac{8n^2}{\pi\left(4n^2 + (\ln 8)^2\right)}\left(\frac{1}{n}\cdot 8^{\frac{x}{2}}\sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{\frac{x}{2}}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4\ln 8\left(8^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n - 1\right)}{\pi\left(4n^2 + (\ln 8)^2\right)}.$$

Олай болса берілген функцияның косинустар бойынша жіктелуі мына түрде болады:

$$8^{\frac{x}{2}} = \frac{2\left(8^{\frac{n}{2}} - 1\right)}{\pi\ln 8} + \frac{4\ln 8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{\frac{n}{2}}\cdot(-1)^n - 1}{4n^2 + (\ln 8)^2}\cos nx.$$

Енді берілген функцияны тақ болатындай етіп жалғастырамыз (90-сурет). Онда: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{\frac{x}{2}}\sin x dx,$



90-сурет

$$\int 8^{\frac{x}{2}} \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = 8^{\frac{x}{2}},\ du = \dfrac{1}{2} \cdot 8^{\frac{x}{2}} \ln 8 dx, \\ dv = \sin nx dx,\ v = -\dfrac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = -\frac{1}{n} 8^{\frac{x}{2}} \cos nx + \frac{\ln 8}{2n} \int 8^{\frac{x}{2}} \cos nx dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 8^{\frac{x}{2}},\ du = \dfrac{1}{2} 8^{\frac{x}{2}} \ln 8 dx, \\ dv = \cos nx dx,\ v = \dfrac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = -\frac{1}{n} \cdot 8^{\frac{x}{2}} \cos nx + \frac{\ln 8}{2n^2} \cdot 8^{\frac{x}{2}} \sin nx -$$

$$- \frac{\ln^2 8}{4n^2} \int 8^{\frac{x}{2}} \sin nx dx,$$

$$b_n = \frac{8n^2}{\pi\left(4n^2 + (\ln 8)^2\right)} \left(-\frac{1}{n} 8^{\frac{x}{2}} \cos nx + \frac{\ln 8}{2n^2} \cdot 8^{\frac{x}{2}} \sin nx \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{8n\left(8^{\frac{\pi}{2}} (-1)^{n+1} + 1 \right)}{\pi\left(4n^2 + (\ln 8)^2\right)}.$$

Олай болса берілген функцияның синустар бойынша жікте-луі мына түрде болады: $8^{\frac{x}{2}} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\ (-1)^{n+1}}{4n^2 + \ln^2 8} n\ \sin\ nx.$

Назарыңызға! 12.6.5п., мысалды қараңыз! ▲

№3

Периоды $\omega = 2$ тең келесі функцияны Фурье қатарына жіктеу керек: $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0, \\ 0.5, & x = 0 \\ x, & 0 < x \le 1. \end{cases}$

▼ Фурье коэффициенттерін есептейміз (12.6.4п. (11)).

$$a_0 = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} x dx = x \Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} \cos(n\pi x)\, dx + \int_{0}^{1} x \cos(n\pi x)\, dx = \left| \begin{array}{c} u = x,\ du = dx, \\ dv = \cos(n\pi x)\, dx, \quad v = \dfrac{\sin(n\pi x)}{\pi n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi x) \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi} x \sin(n\pi x) \Big|_{0}^{1} - \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{1} \sin(n\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1 \right).$$

Егер мұндағы n жұп болса, онда $a_n = 0$, ал ол тақ болса, онда $a_n = \dfrac{-2}{\pi^2 (2n-1)^2}$.

Одан әрі $b_n = \int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)\, dx + \int_{0}^{1} x \sin(n\pi x)\, dx =$

$$= \left| \begin{array}{c} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin(n\pi x)\, dx, \quad v = \dfrac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \end{array} \right| = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{-1}^{0} -$$

$$-\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{0}^{1} + \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{1} \cos(n\pi x)\, dx = -\frac{1}{n\pi} \left(1 - (-1)^n \right) -$$

$$-\frac{1}{n\pi} (-1)^n - \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) \Big|_{0}^{1} = \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi}.$$

Сонымен келесі Фурье қатарын аламыз:

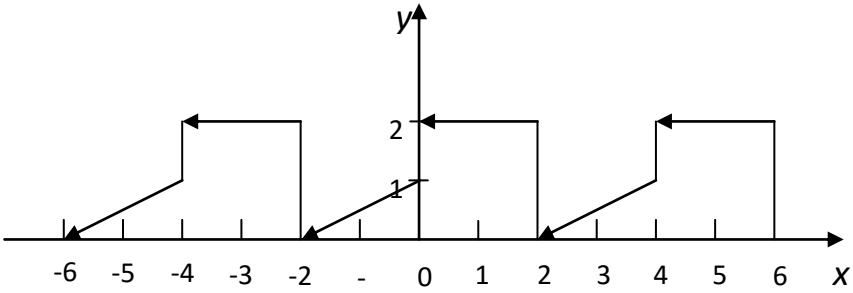
$$f(x)=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\ ((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ (n\pi x)}{n}. \qquad \blacktriangle$$

№4

Графикпен берілген (91-сурет) функцияны Фурье қатарына жіктеу керек.

▼ Берілген функцияның аналитикалық өрнегін жазамыз:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x^2+1, & -2<x\le 0,\\ 2, & 0\ <\ \le 2,\end{cases} \qquad \omega=4.$$



91-сурет

Фурье коэффициенттерін есептейміз (12.6.4п. (11)):

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_{-2}^{0}+x\Big|_{0}^{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}(1-2)+2=\frac{5}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \dfrac{x}{2} + 1,\ du = \left(\dfrac{1}{2}\right) dx, \\ dv = \cos\dfrac{n\pi x}{2}\, dx, \quad v = \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\frac{x}{2}+1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_{-2}^{0} - \frac{1}{2n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}\, dx + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\left(-1\right)^{n+1} + 1\right) = \frac{2}{\pi^2\left(2n-1\right)^2};$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\, dx + \int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \dfrac{x}{2} + 1,\ du = \left(\dfrac{1}{2}\right) dx, \\ dv = \sin\dfrac{n\pi x}{2}\, dx,\ v = -\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\frac{x}{2}+1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_{-2}^{0} + \frac{1}{2n\pi}\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}\, dx - \frac{2}{n\pi}\left(\left(-1\right)^n - 1\right) - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_{0}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_{-2}^{0} - \frac{2}{n\pi}\left(-1\right)^n + \frac{2}{n\pi} = \frac{1}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}\left(-1\right)^n = \frac{\left(1 + 2\left(-1\right)^{n+1}\right)}{n\pi}.$$

Олай болса Фурье қатары мына түрде болады:

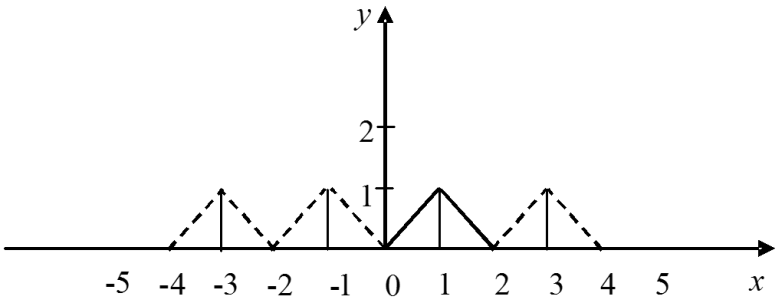
$$f\left(x\right) = \frac{5}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\left(2n-1\right)\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\left(2n-1\right)^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1 + 2\left(-1\right)^{n+1}\right)}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}. \ \blacktriangle$$

№5

Мына, $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1<x\le 2, \end{cases}$ функцияны (92-сурет) $[0;2]$ кесіндісінде Фурье қатарына косинустар бойынша жіктеу керек және $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ қатарының қосындысын табу керек.

▼ Функцияны жұп болатындай жалғаймыз және Фурье коэффициенттерін (12.6.4 п(11)) есептейміз:

$$a_0=\int\limits_0^1 x\,dx+\int\limits_1^2(2-x)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=1,$$



92-сурет

$$a_n=\int\limits_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int\limits_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\left|\begin{array}{c} u=x,\ du=dx, \\ dv=\cos\dfrac{n\pi x}{2}\,dx,\ v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right|+$$

$$+\left|\begin{array}{c} u=2-x,\ du=-dx, \\ dv=\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx,\ v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+$$

$$+\frac{2(2-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_1^2+\frac{2}{n\pi}\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_0^1-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\ \Bigg|_1^2=-\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}.$$

Олай болса $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

Мұнда $x=0$ деп алсақ,

$$0=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Сонымен Фурье қатарының көмегімен сандық қатардың қосындысын таптық. ▲

Бақылау жұмысына арналған есептер

1.

1. Функцияның M(1;1;0) нүктедегі U'_y туындысының мәнін табу керек: $U = \ln\left(2x - y^3 + 3z^2\right)$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = xe^{2y}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = x\sqrt{y} + 3x^2 + y - 39x$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 2xy^2 dxdy, \quad D$: $-3 \le x \le 3; 0 \le y \le 2$.

5. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $xy' + 2y = e^x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 2y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $(x^2 + 3)y' + 2xy = 1, y(0) = 1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + \ln^2 n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \frac{1}{3 + 9 \cdot x}$

2

1. Функцияның M(-1;1;1) нүктедегі U'_z туындысының мәнін табу керек: $U = e^{(3x+4y+z^3)}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{xy} туындысын табу керек: $z = \dfrac{x^2}{1+2y}$

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 8x^3 + y^3 + 6xy - 5$.

4 Есептеу керек: $\iint\limits_D 2x^3 y \; dxdy$, D: $0 \le x \le 2; 0 \le y \le 3$.

5 Сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $2xy' + y = 5$.

6 Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 16y = 0$.

7 Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}, y(0) = 0.$

8 Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{1/2} + 1}{n^2}$.

9 Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = 2x^2 + \cos x$.

3

1. Функцияның M (-1;1;2), нүктедегі U'_x туындысының мәнін табу керек: $U = \ln\left(x^2 + 2y - 3z\right)$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек: $z = 2xe^{2y}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 1 - 5x + 3x^2 + xy - 4y^2$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D (9x + 3y)\,dxdy$, D: $-2 \le x \le 2; -3 \le y \le 3$.

5. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + \frac{1}{x}y = \frac{4}{x^2}$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $16y'' + y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' - 4y = x, y(0) = 1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10 \cdot n^2 + 55}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \sin x - \cos x$.

4

1. Функцияның $M\left(\frac{\pi}{2};0;0\right)$ нүктедегі U'_x туындысының мәнін табу керек: $U=\cos\left(2x-3y^3+4z^2\right)$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z=\frac{3x^2}{1+2y^2}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z=1-4x+2x^2+3xy-2y^2$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, D: $-4\le x\le 1; 0\le y\le 5$.

5. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'-\frac{2y}{x}=\frac{2e^x}{x}$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+2y=0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y'-\frac{16y}{x}=8, y(0)=2$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot\sqrt{n^2+1}}$.

9. Функцияның $x=0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына

жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \frac{1}{3 - x^2}$.

5

1. Функцияның M (0;π/2;0) нүктедегі U′$_z$ туындысының мәнін табу керек: U= $\sin(x^3 + 2y - 3z^2)$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек: $z = x^2 y - xy^2$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 2x^3 - 3y^2 + 9xy + 41x - 11y + 21$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D (x + 9y)\,dxdy$, D: $-3 \le x \le -1; 2 \le y \le 4$.

5. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + y = 2e^x$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $(x^2 - 1)y' + y = 0, y(0) = 2.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{10^n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = (x - 1)^3 - e^x$.

6

1. Функцияның z'_y туындысын табу керек: $z = x^3y^2 + x^2y$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = x^2e^y$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 3x^3 - 4y^3 + 10xy - 15$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 4x^2 y dxdy$, D: $-3 \le x \le 3; 0 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' = 2y.$

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' + 5y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$xy' - 2y = 0, y(1) = -1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2 - n}{7n^2 + 5n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \cos(x - 2)$.

7

1. Функцияның z'_x туындысын табу керек: $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек:

$$z = \frac{3x^2}{4 + 2y}.$$

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 4x^3 - 2y^3 + 6xy - 16$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 4xy^2 dxdy$, D: $0 \le x \le 3; -2 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$x^2 y' - y = 0.$

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' - 2y' + y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$y' + 4y = 0, y(1) = 4.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + \ln(2n)}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \sin(2x + 4)$

8

1. Функцияның z'_y туындысын табу керек: $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{xx} туындысын табу керек:
$z = \dfrac{2x^2}{4 - y^2}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x - 6y - 25.$

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D (9x + 4y)\,dxdy$, D: $0 \le x \le 4; -2 \le y \le 1$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' = \dfrac{4x}{1 - x^2}$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' - 4y' + 4y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$xy' + 5y = 6, y(1) = 2$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек:
$y = (x + 2)^2 - e^{3x}$.

9

1. Функцияның z'_y туындысын табу керек: $z = e^{-\frac{2y}{x}}$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек:
$z = \sin x^2 - 2\cos y^2$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 2(x+3y) + 3x^2 - 2y^2$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 9xy^2 dxdy$, D: $-4 \le x \le -2; 3 \le y \le 6$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$xy' + 4y = 0.$

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' + 3y' = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$(x^2+2)y' - 8xy = 7, y(1) = 1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{3n!}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \frac{2x}{1-2x^2}$.

10

1. Функцияның z'_y туындысын табу керек: $z = \dfrac{x^2 - y}{x + y^2}$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = 2x^3 \cos y$ равна

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 8(x + y) + 5x^2 - 2y^2$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D (3x + y)\,dxdy$, D: $-3 \le x \le 3; 3 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$xy' - 4y = 0$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' - 6y' + 9y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$yy' = \sin x, y(0) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2}{n^2 \ln^2 n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек:
$y = 3x - 2x^2 + \sin 3x$.

11

1. Функцияның M(1;-1;1) нүктедегі U'_z туындысының мәнін табу керек: $U = e^{(x^3-2y^2+5z)}$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = 2xe^{x-y}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 16y$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(4x^2y + 1\right) dxdy$, D: $2 \le x \le 3; 1 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' - 4y = \sin x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' + 5y' - 3y = 0$.

7. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $xy' - y = e^x, y(0) = 1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{3n!}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \frac{2}{1-2x^2}$.

12

1. Функцияның M(-1;-1;1) нүктедегі u'_y туындысының мәнін табу керек: $u = e^{(x^3-2y^2+z)}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{xx} туындысын табу керек: $z = x^3 - 2xy^2 + x^2y$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = (2x+1)^2 - 3y^2 + 13$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D (2xy^2 - 3)\,dxdy$, D: $-3 \le x \le 2; -1 \le y \le 3$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + 4y = x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' - 64y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $x^2y' - 4y = 0, y(0) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 1}{2n^4 + 1}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = 2 - 3x - 4x^2 + e^{2x}$.

13

1. Функцияның M(1;-1) нүктедегі $z_y^{'}$ туындысының мәнін табу керек: $z = \ln(3x^2 + 2y^3)$.

2. Функцияның аралас z_{xy}'' туындысын табу керек: $z = \dfrac{2x^2}{1-3y^3}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = \left(2x+3\right)^2 + 2y^3 - 1$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(3x^2 - 2y\right) dxdy$, D: $-3 \le x \le 0; -2 \le y \le 0$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' - 9y = x^2 - 1$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 25y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' = 4y, y(1) = 0$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = x - 3x^2 + \sin 2x$.

14

1. Функцияның M(-1;2;1) нүктедегі u'_y туындысының мәнін табу керек: $u = e^{(x^2+2y^3-3z^2)}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{xx} туындысын табу керек: $z = x^2(3y^3 - 2xy + x + 1)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = x^3 + y^3 + 3xy - x + y - 1$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 3x^2 y dxdy$, D: $-4 \le x \le 0; -1 \le y \le 3$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + xy = 4x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 18y' + 4y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' = \frac{2x}{1-4x^2}, y(0) = 1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{n+1}}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \frac{2x^2}{x^2 - 3}$.

15

1. Функцияның M(-2;1;2) нүктедегі u'_x туындысының мәнін табу керек: $u = e^{(3x^2+2y-3z^2)}$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = \dfrac{y^2}{\sin x}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = x + y - 2xy - x^2 + 4y^2$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(2x^2 + y\right) dxdy$, D: $-3 \le x \le 3; 1 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' - 4xy = e^{2x}$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' + 4y' + 4y = 0$.

7. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $xy' - y = 5, y(1) = 1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{n^3}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 3}$.

16

1. Функцияның M(-1;2;-2) нүктедегі u'_y туындысының мәнін табу керек: $u = e^{(2x^2+4y^3-3z^2)}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек: $z = \cos\left(2x^2 - y^3\right)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 3x\sqrt{y} + 2x^2 + 4y - 8x + 13$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 5x^2 y dxdy$, D: $-3 \le x \le 3; 2 \le y \le 5$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + 2y = 2x^2$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' - 2y' + 2y = 0$.

7. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' - \frac{2y}{x} = \frac{2e^x}{x}, y(1) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{3(n-1)!}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = (1+x)^3 + 3\cos x$.

17

1. Функцияның M(1;-3;1) нүктедегі u'_z туындысының мәнін табу керек: $u = e^{(4x^3+3y^2-2z^3)}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{xx} туындысын табу керек:
$z = \dfrac{x^2}{x+y}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = x + y - 3xy + 4x^2 + 2y^2 - 2$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 5xy^2 dxdy$, D: $-2 \le x \le 2; -3 \le y \le 3$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' + e^{2x} y = 1$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' - 8y' = 0$.

7. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' + \dfrac{2}{x} y = -\dfrac{4}{x^2}, y(0) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}}{2^{n+1}}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек:

$y = \left(1 - x^2\right)^2 + \sin x$.

18

1. Функцияның M (0;0;π/2) нүктедегі U′$_z$ туындысының мәнін табу керек: $U = \cos(x^3 + 2y\ - 3z^3)$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = x^2 y(15 + x - y)$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(3x - 5y\right) dxdy$, D: $-2 \le x \le 0; -3 \le y \le 1$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' - 2y = x + 4$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 7y' + 12y = 0$.

7. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' + y = e^{2x}$:, $y(1) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n^2+5}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = 3e^{1-2x}$.

19

1. Функцияның M (π/2;0;0)нүктедегі U'_x туындысының мәнін табу керек: $U = \cos(3x^2 - 2y^2 + z^3)$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = \sqrt{x^2 + 4y}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 2x - 4y - xy - x^2 + y^2 + 16$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 3xy^2 dxdy$, D: $2 \le x \le 4; 0 \le y \le 3$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' - 2xy = 4x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' + 6y' + 9y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$xy' + y = 0, y(1) = -1.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}(n+1)^2$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек:
$y = \cos(3x - 1) + x^3$.

20

1. Функцияның M (-1;2;1) нүктедегі U'_x туындысының мәнін табу керек: $U = \ln\left(2x^3 + 3y^2 - 4z^3\right)$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек: $z = \sqrt{2x + 4y^2}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 2x - 3y - 5xy + 3x^2 - 2y^2 - 14$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(x^2 + 2y^2\right) dxdy$, D: $-2 \le x \le 3; 1 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + 6y = 2x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $xy' - 2y = 0, y(1) = -2.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n \ln^2 n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \frac{1}{1 + 2x^3}$.

21

1. Функцияның z'_x туындысын табу керек: $z = \dfrac{xy^2}{x^2 - 2y}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек:
$z = x(y\sin x + \cos y)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = x - 2y - x^3 + 4y^3 + 6xy - 10$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D x^2 y dx dy$, D: $-3 \le x \le 3; 0 \le y \le 2$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' + 2xy = 16$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' + 9y' + 20y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$y' + 4xy = 2x, y(1) = -2.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{4(n-1)!}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = x\sin(1 - x)$.

22

1. Функцияның z'_x туындысын табу керек: $z = \ln(2x^2 - y^2)$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек:
$z = xy\sin(x - 2y)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 4 - y\sqrt{x} + 2y^2 - x - 3y$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, D: $0 \le x \le 2; -2 \le y \le 1$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' - 4y = 2e^{2x}$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' - 2y' + 10y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$y' + 2y = 4, y(1) = -2.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 1}}{n^2}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек:
$y = (1 + x^2)\sin(1 - 2x)$.

23

1. Функцияның z'_x туындысын табу керек: $z = e^{-\frac{y}{x}}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек:
$z = \ln\left(x^2 - 2y^2\right)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек:
$z = 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 16x + 46y + 25$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(x + y^2\right) dxdy$, D: $-2 \le x \le 2; -1 \le y \le 1$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y' + 4xy = 2$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек:
$y'' - 36y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек:
$y' - \cos x \cdot y = 0, y(-\frac{\pi}{2}) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!\left(n+1\right)}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = (1-x)e^{3-x}$.

24

1. Функцияның M(-1;1;0) нүктедегі U'_y туындысының мәнін табу керек: $U = \ln\left(2x^2 + 3y^2 - 2z^3\right)$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек: $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = xy(9 + 3x - y)$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, D: $-3 \le x \le 1; 0 \le y \le 2$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' - 4y = e^{-2x}$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' - 4y' + 5y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' - 2y = 4e^{-x}, y(-1) = -e$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^4}{2^{n+1}}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = x^2 - 2x\sin 2x$.

25

1. Функцияның M(-1;2;-2) нүктедегі U'_z туындысының мәнін табу керек: $U = \ln\left(2x + 3y^2 - 4z^3\right)$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{xx} туындысын табу керек: $z = \ln\left(2x^2 - 3y^2\right)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 2x^2 - y^2 + 3xy - 2x + y - 16$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, D: $-3 \le x \le 2; 1 \le y \le 2$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' - 4x^2 y = 2$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' - 12y' = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' + 2y = 0, y(1) = 3.$

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5+n}{(n+1)^2 + 3n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \dfrac{x}{1 - x^5}$.

26

1. Функцияның M(-1;2;-2) нүктедегі U'_z туындысының мәнін табу керек: $U = e^{(2x^2+3y-3z^3)}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{yy} туындысын табу керек: $z = \sqrt{x^2 - xy + 2y^2}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 2x^2 - 3xy - y^2 + 2x - y - 13$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 2x^2 y dx dy$, D: $-2 \le x \le 1; -1 \le y \le 2$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' - \cos x \cdot y = 2$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 2y' - 8y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' - \frac{2y}{x^2} = 0, y(0) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{n^2+1}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = x + x^2 e^{-x}$.

27

1. Функцияның M(1;-2;0) нүктедегі U'_x туындысының мәнін табу керек: $U = e^{(4x^2+5y-2z^2)}$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} + \sqrt{y}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = (x+1)^2 - 2y^2 + 1$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 2(x^2 - y^2)dxdy$, D: $-1 \le x \le 3; 1 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' - \frac{y}{2x^2} = 9$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' - 4y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' + 2xy = 0, y(1) = 2$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+5}}{n!}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = x\cos(4x+1)$.

28

1. Функцияның M(1;-2) нүктедегі $z_y^{'}$ туындысының мәнін табу керек: $z = \ln(x^2 - 3y^2)$.

2. Функцияның екінші ретті $z_{yy}^{''}$ туындысын табу керек: $z = y\sin\left(x^2 - y^2\right)$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 2x + 3y - 4xy + 3x^2 - 2y^2 - 5$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D \left(x^2 - 4y\right)dxdy$, D: $1 \le x \le 3; -3 \le y \le 3$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' - 4y = \sin x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 6y' + 9y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' - 4x^2 y = 0, y(1) = 2$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2 - 3}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = (1+x)^2 \sin(2x - 1)$.

29

1. Функцияның M(-2;1;-1) нүктедегі U'_z туындысының мәнін табу керек: $U = e^{(5x^2-3y+2z^2)}$.

2. Функцияның аралас z''_{xy} туындысын табу керек: $z = y\cos x - x\sin xy$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = x^2 - 3(y+2)^2 + 4x - 9$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 8x^2y^2dxdy$, D: $-1 \le x \le 3; -1 \le y \le 3$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + 4xy = 4x$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 2y' - 15y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' + 6xy = 0, y(-2) = 1$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n-1)!}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = x^2e^{1-x^2}$.

30

1. Функцияның M(1;-2;2) нүктедегі u'_x туындысының мәнін табу керек: $u = e^{(2x^2+5y-3z)}$.

2. Функцияның екінші ретті z''_{xx} туындысын табу керек: $z = \sqrt{x^2 - y^2} - 2e^{x+y}$.

3. Функцияны экстремумге зерттеу керек: $z = 2(x^2 - y^2) + x - 4y + 2xy - 1$.

4. Есептеу керек: $\iint\limits_D 2\left(x^2 + y^2\right) dxdy$, D: $-3 \le x \le 2; 1 \le y \le 4$.

5. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y' + 4y = e^{-4x}$.

6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек: $y'' + 2y' + y = 0$.

7. Дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек: $y' + 4y = e^{2x}, y(1) = -2$.

8. Қатарды жинақтылыққа зерттеу керек: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{(3n^2 - 1)\ln n}$.

9. Функцияның $x = 0$ нүктесінің маңайындағы Тейлор қатарына жіктелімінің алғашқы үш мүшесін табу керек: $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Бугров Я.С., С.М.Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.

2. Бугров Я.С., С.М.Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.

3. Темірғалиев Н. Математикалық анализ, 2-бөлім. Алматы: «Ана тілі» баспасы, 1991.

4. Темірғалиев Н. Математикалық анализ, 3-бөлім. Алматы: Мектеп, 1995.

5. Қ.Ж.Наурызбаев, М.Е.Берікханова. Жоғары математика есептері. – Алматы: Қазақ университеті, 1-дәптер. 2000.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978, т.1, 2.

7. А.Ф.Бермант, И.Г.Араманович. Краткий курс математического анализа для втузов. –М.: Наука, 1967.

8. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс), «Иль-Тех-Кітап», 2003.

9. А.П.Рябушко и др. Индивидуальные задания по высшей математике, Ч.2; Ч.3. – Минск «Вышэйшая школа», 2002.

10. Айдос Е.Ж. Өрістер теориясы, «Бастау», 185 б. Алматы 2012.

11. Айдос Е.Ж., Боровский Ю.В. Комплекс айнымалды функциялар теориясы. Операциялық қисап, ТЕ сериясы, 2002 (русс-каз.).

12. Сборник задач по матматике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа.//Под ред. А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1981.

13. Айдос Е.Ж., Балықбаев Т.О. Математика пәні бойынша жоғары оқу орындарына түсушілерге арналған оқу құралы.-ЖШС РНПК «Дәуір», Алматы, 200. – 464 бет.

14. Қазақша-орысша орысша-қазақша терминологиялық сөздік: Математика, – «Рауан» баспасы, Алматы 1999.

Мазмуны

Алғы сөз.....3

9. КӨП АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАР.....5

§9.1. n-өлшемді евклидтік кеңістік. Көп айнымалды функциялар. Анықталу аймағы. Функция шегі. Үзіліссіздк.....5

9.1.1. n-өлшемді евклидтік кеңістік.....5

9.1.2. Көп айнымалды функциялар. Анықталу аймағы.....10

9.1.3. Функцияның дербес және толық өсімшелері. Шек және үзіліссіздік.....12

§9.2. Туындылар мен дифференциалдар.....18

9.2.1. Дербес туындылар.....18

9.2.2. Толық дифференциал.....19

9.2.3. Бетке жанама жазықтық. Толық дифференциалдың геометриялық көрінісі.....25

9.2.4. Толық дифференциалдың жуықтап есептеулерге қолданылуы.....27

§9.3. Күрделі және айқындалмаған функияларды дифференциалдау.....28

9.3.1. Күрделі функция туындысы. Толық туынды.....28

9.3.2. Айқындалмаған функциялардың туындысы.....31

§9.4. Бағыт бойынша туынды. Градиент және оның

қасиеттері. Жанама жазықтық және нормаль 34
9.4.1. Бағыт бойынша туынды 34
9.4.2. Градиент 36
9.4.3. Жанама жазықтық және нормаль 37
§9.5. Жоғарғы ретті дербес туындылар және жоғарғы ретті дифференциалдар. Тейлор формуласы 38
9.5.1. Жоғарғы ретті дербес туындылар 38
9.5.2. Жоғарғы ретті дифференциалдар 41
9.5.3. Тейлор формуласы 44
§9.6. Көп айнымалды функциялардың экстремумдері 45
9.6.1. Экстремумнің қажетті және жеткілікті шарттары 45
9.6.2. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері 50
9.6.3. Шартты экстремум 52
Сұрақтар мен тапсырмалар 58
10. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР 60
§10.1. Жалпы ұғымдар 60
§10.2. Интегралданатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің негізгі кластары 68
10.2.1. Дифференциал арқылы жазылған дифференциалдық теңдеу 68
10.2.2. Айнымалдары ажыратылған дифференциалдық

теңдеулер 70
10.2.3. Айнымалдары ажыратылатын теңдеулер 71
10.2.4. Біртекті теңдеулер 73
10.2.5. Сызықтық теңдеулер 76
10.2.6. Бернулли теңдеуі 80
§10.3. Толық дифференциалды дифференциалдық теңдеулер 81
§10.4. Туындыға қатысты шешілмеген бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер 84
§10.5. Ерекше шешімдер 88
§10.6. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер 90
10.6.1. Жалпы ұғымдар және анықтамалар 90
10.6.2. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер 91
§10.7. Сызықтық жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер 95
10.7.1. Негізгі ұғымдар 95
10.7.2. Сызықты тәуелді және сызықты тәуелсіз функциялар. Вронскиан 97
10.7.3. Дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерінің құрылымы 100
§10.8. Тұрақтыларды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі) 103

§10.9. Коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті n-ші ретті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі 108
§10.10. Оң жағы арнайы түрде берілген коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес теңдеулердің дербес шешімі 112
10-тарау. Сұрақтар мен тапсырмалар 118
11. ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР. ВЕКТОРЛЫҚ АНАЛИЗ.... 121
§11.1. Еселі интегралдар 121
§11.2. Еселі интегралдардың қасиеттері 126
§11.3. Еселі интегралдарды қайталама интегралдарға келтіру 129
11.3.1. Екі еселі интегралдарды есептеу 129
11.3.2. Үш еселі интегралдарды есептеу 134
§11.4. Айнымалдарды ауыстыру 136
Сфералық координаттар 143
§11.5. Беттің ауданы 146
§11.6. Еселі интегралдардың механикада қолданылылуы 153
§11.7. Бағытталған құрақты-тегіс қисық 158
11.7.1. Кеңістіктегі бағытталған қисық 158

11.7.2. Бірінші текті қисық сызықты интеграл және оның негізгі қасиетері 161
§11.8. Вектордың қисық бойынша интегралы (екінші текті қисық сызықты интеграл) 163
11.8.1. Қисық бойымен алынған вектор интегралы және оның қасиеттері 164
§11.9. Потенциалды өріс 168
11.9.1. Потенциал ұғымы және оның қасиеттері 168
11.9.2. Вектор роторы 172
§11.10. Бірінші текті беттік интеграл 176
§11.11. Екінші текті беттік интеграл (вектордың бағытталған бет арқылы ағыны) 179
11.11.1. Бағытталған бет 179
11.11.2. Вектордың бағытталған бет арқылы ағыны 181
§11.12. Дивергенция. Гаусс-Остроградский формуласы 189
§11.13. Стокс және Грин формулалары. Гамильтон операторына қатысты кейбір формулалар 193
11.13.1. Стокс формуласы 193
11.13.2. Бағытталған жазық аймақ 196
11.13.3. Грин формуласы және оның салдары 198

11.13.4. Гамильтон операторына қатысты кейбір формулалар 200
12. ҚАТАРЛАР 201
§12.1. Сандық қатарлар және оларға амалдар қолдану 201
12.1.1. Сандық қатар ұғымы 201
12.1.2. Қатарларға қолданылатын кейбір амалдар 206
§12.2. Мүшелері теріс емес қатарлардың жинақталуының белгілері 208
§12.3. Айнымал таңбалы қатарлар. Абсолют жинақты және шартты жинақты қатарлар 216
§12.4. Функциялық қатарлар 220
12.4.1. Функциялық қатар ұғымы 220
12.4.2. Бірқалыпты жинақталатын қатарлардың қасиеттері 224
§12.5. Дәрежелік қатарлар. Тейлор қатары 228
12.5.1. Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы 228
12.5.2. Тейлор қатары 234
§12.6. Фурье қатары 237
12.6.1. Функциялар кеңістігіндегі скаляр көбейтінді 238
12.6.2. Тригонометриялық функциялар жүйесі және $[-\pi, \pi]$ кесіндісіндегі тригонометриялық қатар 240

12.6.3. 2π периодты Фурье қатары 243
12.6.4. Фурье қатарлары (жалпы жағдай) 245
12.6.5. Жұп және тақ функциялардың Фурье қатарлары 247
12-тарау. Сұрақтар мен тапсырмалар 251

Көп айнымалды функциялар

9.1-ҮТ 253
Шығару үлгілері 269
9.2-ҮТ 274
Шығару үлгілері 287

Дифференциалдық теңдеулер

10.1-ҮТ 293
Шығару үлгілері 312
10.2-ҮТ 319
Шығару үлгілері 329
10.3-ҮТ 332
Шығару үлгілері 357
10.4-ҮТ 365
Шығару үлгілері 369

Еселі интегралдар. Векторлық анализ

11.1-ҮТ 373
Шығару үлгілері 387

11.2-ҮТ 392
Шығару үлгілері 405
11.3-ҮТ 408
Шығару үлгілері 418
11.4-ҮТ 423
Шығару үлгілері 444
11.5-ҮТ 446
Шығару үлгілері 455
11.6-ЖҮТ 457
Шығару үлгілері 472
11.7-ҮТ 479
Шығару үлгілері 490

Қатарлар

12.1-ҮТ 495
Шығару үлгілері 515
12.2-ҮТ 519
Шығару үлгілері 545
12.3-ҮТ 554
Шығару үлгілері 593
Бақылау жұмысына арналған есептер 603
Пайдаланылған әдебиеттер..... 633

Ерқара Жолдыбайұлы
Айдос

ЖОҒАРЫ
МАТЕМАТИКА-III

ISBN (к.1)

ISBN

Басуға 2015 жылы қол қойылды.
Форматы 60х84 1/16. Көлемі 40 табақ.
Times гарнитурасы. Офсеттік басылым.
Тапсырыс № ___. Тиражы – 1000 дана.

«Бастау» баспасы
Мемлекеттік лицензия – № 0000036
ҚР Білім және ғылым министрлігі.
ҚР Ұлттық мемлекеттік кітап палатасының
халықаралық код беру туралы №155 –
978-601-281 сертификаты.
Қазақстан Республикасы Ұлттық бизнес-рейтингінің
«Лидер отрасли – 2015» ұлттық сертификаты.
Алматы қаласы, Сейфуллин даңғылы, 458/460-95.
Тел.: 279 49 53, 279 97 32.

«Полиграфсервис» баспаханасында басылды (тел.: 233 32 53).
Алматы қаласы, 050050, Зеленая көшесі, 13-а.33)