Ахметов Б.С., Горбаченко В.И., Кузнецова О.Ю.

АНЫҚ ЕМЕС ЖҮЙЕЛЕР ЖӘНЕ ЖЕЛІЛЕР

Университеттің Ғылыми-әдістемелік
кеңесімен оқу құралы ретінде ұсынылған

Алматы, 2014

УДК 004 (075.8)
ББК 32.973-018.2я73
А93

А93 Ахметов Б.С., Горбаченко В.И., Кузнецова О. Ю.
Анық емес жүйелер және желілер. Оқу құралы. – Алматы:-ҚазҰТУ, 2014.– 108 б.
Ил. 71. Кесте 4. Библиогр. – 104 атау.

ISBN 978-601-239-355-2

Оқу құралы анық емес жүйелер және желілердің негіздеріне арналған: анық емес көпмүшелер теориясы, анық емес қатынастар, анық емес логика, анық емес енгізу жүйелері және анық емес нейронды желілер қарастырылған. «Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету», «Ақпараттық қауіпсіздік жүйелері», «Ақпараттық жүйелер» мамандықтары бойынша бакалавр, магистр және докоранттарды дайындауға және басқа да жасанды желілер сұрақтарына қызығушылық танытатын мамандарға арналған.

Оқу құралы Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінің және Пенза мемлекеттік университетінің сәйкес қарым қатынас жөніндегі Меморандумына байланысты авторлар коллективімен құрылған.

УДК 004 (075.8)
ББК 32.973-018.2я73

Рецензенттер:
Тукеев У.А. – Аль-Фараби атындағы ҚазҰУ профессоры, техн.ғыл.д-ры.
Малыгин А.Ю., – Пенза мемлекеттік университетінің профессоры, техн. ғыл.д-ры.
Джурунтаев Д.З. – Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ профессоры, техн. ғыл. д-ры.

Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ ғылыми-әдістемелік кеңесінің шешімі бойынша баспаға шығарылады

ISBN 978-601-239-355-2

© Ахметов Б.С., Горбаченко В.И., Кузнецова О.Ю. 2014
© «ҚазҰТУ» , 2014

МАЗМҰНЫ

Кіріспе 4

1. Анық емес көпмүше негіздері 6
1.1. Анық емес көпмүшелер түсінігі 6
1.2. Тиістілік функциясы 8
1.2.1. Үзінді-сызықты тиістілік функциялары 10
1.2.2. Z-бейнелі және S-бейнелі тиістілік функциялары 12
1.2.3. П-бейнелі тиістілік функциялары 14
1.3. Тиістілік функцияларын құру 16
1.4. Анық емес көпмүшелердің негізгі сипаттамалары 18
1.5. Анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялар 21
1.6. Анық емес қатынастар 31
1.7. Лингвистикалық айнымалы. Анық емес көлемдер, сандар және интервалдар 35

2. Анық емес логика негіздері. Анық емес шығару жүйелері 46
2.1. Анық емес пікірлер. Анық емес пікірлермен жүргізілетін логикалық операциялар 46
2.2. Анық емес логикадағы шығарулар 52
2.3. Анық емес лингвистикалық пікірлер 55
2.4. Анық емес өнімдердің тәртіптері 55
2.5. Анық емес шығару кезеңдері 58
2.6. Анық емес шығару алгоритмдері 65

3. Анық емес нейронды (гибридті) желілер түсінігі 68
3.1. Анық емес нейронды (гибридті) желілердің негізгі түсініктері және анықтамалары 69
3.1.1. ANFIS (Adaptive Network based Fuzzy Inference System) анық емес нейронды желілердің архитектурасы 76
3.1.2. NNFLC (Neurons network fuzzy logic controller) архитектурасы 78
3.1.3. TSK (Takagi, Sugeno, Kang'a) архитектурасы 81
3.2 Анық емес нейронды желілерді оқыту 84
3.2.1. ANFIS анық емес нейронды желісін оқыту 85
3.2.2. TSK анық емес нейронды желісін оқыту 87
3.2.3. C-means анық емес өзінұйымдасыру алгоритмі 90
3.2.4. TSK желісіне арналған қатені кері тарату алгоритмі 92
3.3 Анық емес нейронды желілерді тиімділеу алгоритмдері 95

Қорытынды 104
Әдебиеттер тізімі 106

КІРІСПЕ

Анық емес көпмүшелер теориясы (fuzzy sets theory) өзінің бастауын 1965 ж. алады, ол кезде Беркли университетінің профессоры Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) өзінің негізге алынған «Fuzzy Sets» жұмысын «Information and Control» [6,32] журналына басып шығарды. «Fuzzy» сын есімін, қазақ тіліне анық емес, жуылып кеткен, қылшықты, үлпілдек сияқты аударуға болады, ол дәстүрлі нақты математикадан, нақты түсініктерге негізделетін: «тиісті – тиісті емес», «ақиқат – жалған» дегеннен алшақтату мақсатында жаңа теория ретінде енгізілген.

Анық емес көпмүшелердің практика жүзінде қолданылуының басталуын 1975ж. деп айтуға болады, ол кезде Мамдани және Ассилиан (Mamdani and Assilian) қарапайым бу қозғалтқышын басқаруға арналған бірінші анық емес контроллерді құрастырды. 1982 жылы Холмблад және Остергад (Holmblad and Osregaad) бірінші өндірістік анық емес контроллерді өңдеді, ол Даниядағы цемент зауытындағы кірпіш күйдіру процессін басқару үшін енгізілді. Бірінші өндірістік контроллердің табысы, «егер–онда» анық емес лингвистикалық тәртіптерге негізделе отырып математиктер мен инженерлер арасында анық емес көпмүшелер теориясына деген қызығушылықты одан әрі арттырды. Азын аулақ уақыттан кейін Бартоломей Коско (Bart Kosko) [28-29] анық емес аппроксимация (Fuzzy Approximation Theorem) [5] теориясын дәлелдеп шықты, оған сәйкес кез келген математикалық жүйе анық емес логикаға негізделіп жүйемен аппроксимациялануы мүмкін. Басқаша айтатын болсақ, «Егер–онда» пікір–тәртіптерді табиғи–тілдердің көмегімен, одан кейінгі олардың анық емес көпмүшелер теорияларының құралдарымен рәсімделуі, әрі олардың арасындағы «кірістер–шығыстар» байланысының өзбетінше нақты қанша болса да, әдетте дәстүрлі басқару және идентификациялауда қолданылатын қиын дифференциальды және интегральды аппараттарды қолданбай ақ бейнелеу мүмкіндігі [24].

Осы теориялар негізінде ақпараттық модельдерді құрастыру әдістері дәстүрлі компьютерлерді қолдану аймағын маңызды

түрде кеңейтеді және өзбетінше ғылыми–қолданбалы зерттеулер бағытын құрады, олар арнайы – *анық емес модельдеу* атына ие болады.

Анық емес көпмүшелерге негізделген жүйелер келесі аймақтарға табысты енгізілген және өңделген, олар: технологиялық процесстерді басқару, көліктерді басқару, медициналық диагностика, техникалық диагностика, қаржылық менеджмент, биржалық болжау, бейнелерді танып білу. Қосымшалар спектрі өте кең – бейнекамералар және тұрмыстық кір жуу машиналарынан басталып ӘШҚ (әуе шабуылына қарсы қорғаныш) ракеталарын дәлдеу және әскери тіқұшақтарды басқаруға дейін. Анық емес логикалық жүйелерді өңдеудің іс–жүзіндегі тәжірибесі, оларды жобалау бағасы және уақыты, дәстүрлі математикалық аппараттарды қолданғанға қарағанда әлдеқайда аз екендігіне куәлендіреді, бұл кезде талап етілген робастылық және модельдер айқындығы қамтамасыздандырылады.

1. АНЫҚ ЕМЕС КӨПМҮШЕ НЕГІЗДЕРІ

1.1. Анық емес көпмүшелер түсінігі

Анық емес жүйелердің негізгі түсініктерін ең маңызды математикалық түсініктерді кірістіре отырып қарастырамыз. Анық емес жүйелерге арналған көптеген жұмыстардың арасында [4-12, 26] (орыс тілінде тек негізгі кейбір жұмыстар ғана келтірілген) жиі бірегей терминологиялар жоқ. Басқаларына қарамастан келесі қабылданған терминологияларды қолданамыз [12].

Классикалық көпмүшелер теориясында кейбір x элемент немесе кейбір A көпмүшесіне тиісті немесе кейбір A көпмүшесіне тиісті емес. Көпмүшеге тиістілікті *сипаттамалық функция* $\chi_A(x)$ көмегімен сипаттауға болады, ол келесі екі мәнді қабылдай алады

$$\chi_A(X)=\begin{cases}1, & \text{егер } x \in A\\ 0, & \text{егер } x \notin A\end{cases}$$

Анық емес көпмүшелер (fuzzy set) табиғаты еркінше элементтер жиынын көрсететін, біркелкі оларға байланысты толық анықтылықпен–не ол не бұл элемент қарастырылып отырған көпмүшелер жиынына тиісті ма әлде жоқ па екендігін айтуға болмайды [12]. Басқаша айтар болсақ, анық емес көпмүшелер әдеттегі көпмүшелерден оның элементтері және оның барлық бөліктері «Қарастырылып отырған элемент анық емес көпмүшеге тиісті ма әлде жоқ па» деген сұраққа біркелкі жауап бере алмайтындығымен ерекшеленеді. Бұл сұрақты басқаша беруге де болады: «Оның элементтерінің осы анық емес көпмүшелерді беру үшін қолданылатын кейбір сипаттамалық қасиеттері бар ма әлде жоқ па?».

Анық емес көпмүшелерді анықтау үшін сипаттамалық функция түсінігін жинақтау қолданылады – *тиістілік функциясы* $\mu_A(x)$, ол A анық емес көпмүшесіне x элементінің тиістілік дәрежесін көрсетеді. Бұл кезде үш жағдай мүмкін болады:

$\mu_A(x)=1$ A анық емес көпмүшесіне x элементінің толық тиістілігін көрсетеді;

$\mu_A(x)=0$ A анық емес көпмүшесіне x элементінің тиістілігі жоқ екендігін көрсетеді;

$0<\mu_A(x)<1$ A анық емес көпмүшесіне x элементінің астикалық тиістілігін көрсетеді.

Онда анық емес көпмүшелер тәртіптелген көпмүшелер жұбы ретінде анықталуы мүмкін $A=\{x,\mu_A(x)\}$. Элементтерінің ақырғы саны бар $A=\{x,\mu_A(x)\}$ анық емес көпмүшелер жиі келесі түрде жазылады

$$A=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}.$$

Бұл кезде горизонтальды сызық бөлу белгісі болып табылмайды, тек нақты анықталған тиістілік дәрежесі бар нақты элементтерге қосып жазылады. «+» белгісі теориялық-көпмүшелік элементтерді біріктіруді білдіреді.

Егер анық емес көпмүшелер элементі X шексіз элементтер саны бар кеңістігіне тиісті болатын болса, онда анық емес көпмүше кейде символикалық келесі түрде жазылады

$$A=\int_{X}\frac{\mu_A(x)}{x}.$$

Анық еместілікті жиі ықтималдылықпен шатастырады. Анықталмағандылықтың арасынан стохастикалық және лингвистикалық анықталмағандылықты ерекшелейді. Стохастикалық анықталмағандылық келешекте орындалуы мүмкін, не орындалмауы мүмкін нақты сипатталған уақиғалар үшін бар болады. Егер уақиға орындалған болса, онда оны орындаған ықтималдылық түсінігі мәнін жоғалтады.

Лексикалық анықталмағандылық оны қараудағы уақытқа тәуелділігін ескермей уақиғаны сипаттауды білдіреді. Мысалы, «Адам дамуы» анық емес көпмүшесі «ұзын», «орташа», «қысқа» мәндерімен берілсін. «Ұзын» тиістілік функциясы, мысалы, 0,25 тең болуы, оның ықтималдылығын 0,25 теңеп таңдау кезінде тек

ұзын адамдар кездесетіндігіне кепіл бермейді. Тиістілік функциясы тек «ұзын» түсінігінің «Адам дамуы» көпмүшесіне тиістілік дәрежесінің субъективтілік бағалауын ғана білдіреді.

Анық емес көпмүшелермен байланысты кейбір түсініктерді енгізейік.

Бос анық емес көпмүше $\varnothing$ деп бір де бір элементі жоқ анық емес көпмүшені айтамыз. Формальды бос көпмүшенің тиістілік функциясы оның барлық элементтері үшін нөлге тең.

Универсум (*универсальды көпмүше*) – әдеттегі көпмүше, кейбір контекстер аймағында барлық мүмкін болатын элементтерден тұрады. Формальды универсумның тиістілік функциясы оның барлық элементтері үшін бірге тең. Универсумды X белгісі арқылы белгілейміз.

А анық емес көпмүшесінің таратушысы деп X тағайындау аймағындағы барлық элементтерден тұратын анық ішкікөпмүшені айтамыз, олар үшін A анық емес көпмүшесінің тиістілік функциялары нөлден ерекшеленеді

$$S(A) = \mathrm{supp}(A) = \{x:\ \mu_A(x) > 0,\ x \in X\}.$$

Анық емес көпмүше *ақырғы* деп аталады, егер оның таратушысы ақырғы көпмүше болып табылса. Таратушысы ақырғы болып табылмайтын анық емес көпмүшелер *шексіз* деп аталады.

1.2. Тиістілік функциясы

Анық емес көпмүшелер негізгі екі әдіспен берілуі мүмкін:

1. Барлық элементтерін санап шығуы және олардың сәйкес тиістілік функцияларының мәндері бар айқын тізім формасында. Тиістілік функцияларында нөлдік элементтері бар элементтер әдетте берілген тізімде көрсетілмейді. Бұл әдіс ақырғы дискретті таратушылары бар және саны аз элементтері бар кіші анық емес көпмүшелерді беру үшін қолданылады.

2. Сәйкес тиістілік функциясы үшін аналитикалық және/немесе графикалық математикалық өрнек формасында. Бұл әдіс еркін-

ше ақырлы және шексіз таратушылары бар анық емес көпмүшелерді беру үшін қолданылады.

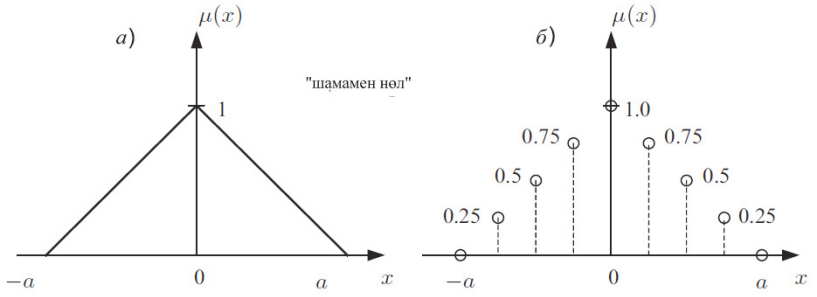
Анық емес көпмүшелердің формальды анықтамасы нақты тиістілік функциясын таңдау және оны көрсету үшін ешбір шектеулер қоймайды. Бірақ тәжірибе жүзінде қарапайым математикалық функция түріндегі аналитикалық көрсетілімдерді қолданған ыңғайлы деп есептеледі. Бұл сәйкес сандық есептеулерді ғана жеңілдетіп қана қоймай, сонымен қатар осы тиістілік функцияларының жеке мәндерін сақтау үшін керекті есептеу ресурстарын да азайтады. Жеке тиістілік функцияларын типизациялау қажеттілігі сонымен қатар ары қарай қарастырылатын аспаптық құралдар арқылы сәйкес функцияларды тарату шарттарының бар болуымен байланысты.

Мысал ретінде «Үлкен емес сан» анық емес көпмүшесін қарастырайық [14]. Берілген мысал үшін тиістілік функциясының кестелік берілуі келесі түрде болады кесте 1.

Кесте 1 – Функцияның кестелік берілуінің мысалы

x	x_1=a	x_2= –0.75a	x_3= –0.50a	x_4= –0.25a	x_5=0	x_6= 0.25a	x_7= 0.50a	x_8= 0.75a	x_9=a
$\mu_A(x)$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.75	0.50	0.25	0.00

Тиістілік функциясын берудің графикалық формасы сурет 1 көрсетілген. Тиістілік функциясының формулалық көрсетілімі төменде қарастырылатын болады.



Сурет 1 – Үздіксіз (а) және дискретті тиістілік функциясының берілуінің графикалық формасы

Тәжірибе жүзінде тиістілік функциясының әртүрлі типтері қолданылады. Соның ішінде кеңінен таралғандары болып: үзіндісызықты тиістілік функциялары, Z-бейнелі тиістілік функциялары, S-бейнелі тиістілік функциялары, П-бейнелі тиістілік функциялары. [12, 14] әртүрлі тиістілік функцияларының мысалдарын және әрбір типтің артықшылықтары мен кемшіліктерінің талдауын табуға болады.

1.2.1. Үзінді-сызықты тиістілік функциялары

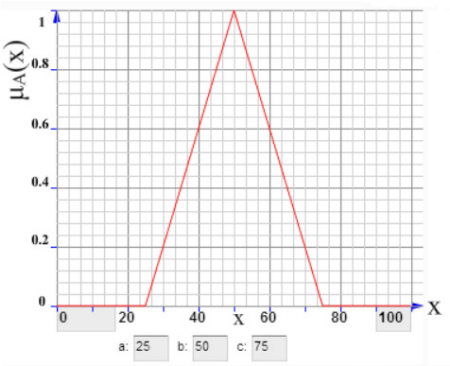
Тиістілік функциясының бірінші типі ретінде атауында көрсетіліп тұрғандай түзу сызықтардың үзінділерінен тұратын, үздіксіз немесе үзінді-сызықты функцияларды бейнелейтін функцияларды қарастырайық. Ерекше сипаты жағынан келетін мұндай функция болып «үшбұрышты» және «трапеция түріндегі» тиістілік функциялары айтуға болады. Үшбұрышты тиістілік функциясы, келесі өрнектермен сипатталады [12, 14]:

$$\mu_A(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b<x\le c,\\ 0, & c<x,\end{cases} \qquad (1.1)$$

мұндағы *a, b* және $c - a \le b \le c$ қатынастарымен байланысты, кейбір сандық параметрлер.

Үшбұрышты тиістілік функциясының графигі сурет 2[1] көрсетілген.

[1] Тиістілік функциясының графигі http://nrsu.bstu.ru/chap22.html көрсетілген аспаптардың көмегімен тұрғызылған.



Сурет 2 – Үшбұрышты тиістілік функциясының графигі

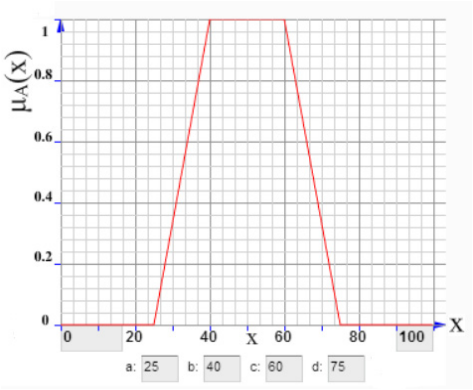
Үшбұрышты тиістілік функциясы, анық емес айнымалы кейбір мәндер диапазонымен шектелген кезде және айнымалының орташа мәні шамамен белгілі болған кезде қолданылады. Онда a – айнымалының минимальды мәні, b – орташа, c – максимальды мәні.

Трапеция түріндегі тиістілік функциясы келесі өрнекпен сипатталады [12, 14]:

$$\mu_A(x;a,b,c,d)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & b<x\le c,\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c<x\le d,\\ 0, & d<x,\end{cases} \qquad (1.2)$$

мұндағы $a,\ b,\ c,\ d$ – $a\le b\le c\le d$ қатынастарымен байланысты, кейбір сандық параметрлер.

Трапеция түріндегі тиістілік функциясының графигі сурет 3 көрсетілген.



Сурет 3 – Симметриялы емес трапеция түріндегі тиістілік функциясының графигі

Трапеция түріндегі тиістілік функциясы анық емес параметрді өзгерту диапазоны және орташа мәнін өзгертудің мүмкін диапазоны белгілі болған кезде қолданылады.

Бұл функциялар типтің анықталмағандығын сипаттайтын «шамамен тең», «орташа мәні», «интервалда орналасқан», «объектіге ұқсас», «затқа ұқсас» сияқты көпмүше қасиеттерін беру үшін қолданылады.

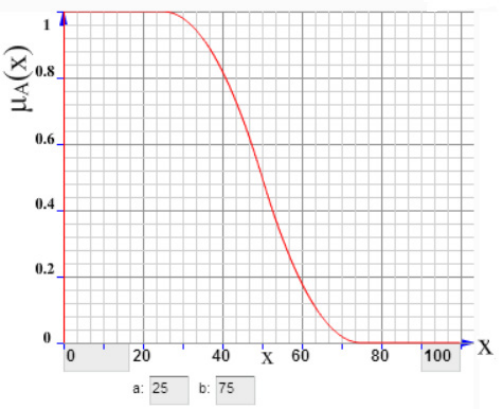
1.2.2. Z-бейнелі және S-бейнелі тиістілік функциялары

Бұл тиістілік функциялары сондай-ақ қисықтардың түрлері бойынша, олардың графиктерін көрсететін атауына да ие. Бұл топтың бірінші функциясы Z-бейнелі қисық немесе сплайн-функция деп аталады және жалпы жағдайда аналитикалық түрде келесі өрнекпен беріледі [12, 14]:

$$\mu_A(x;a,b)=\begin{cases}1, & x<a\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right), & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases} \qquad (1.3)$$

мұндағы *a, b – a < b* қатынасымен тәртіптелген, еркінше шынайы мәндерді қабылдайтын кейбір сандық параметрлер.

Трапеция түріндегі тиістілік функциясының графигі сурет 4 көрсетілген.



Сурет 4 – Z-бейнелі тиістілік функциясының графигі

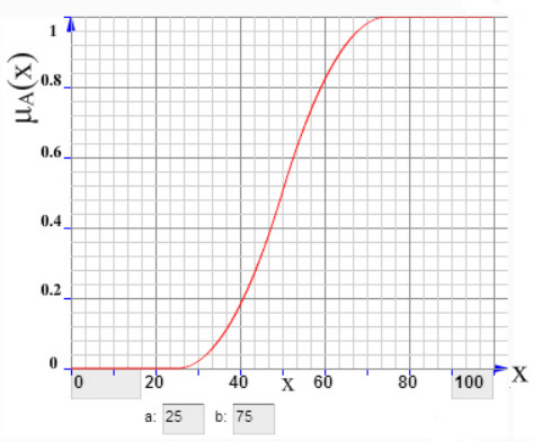
Бұл функция анықталмағандылық типімен сипатталатын «кіші саны», «үлкен емес мәні», «маңызды емес өлшем», «өнімнің төменгі өзіндік құны», «төменгі баға немесе кіріс деңгейі», «төменгі пайыздық мөлшерлеме» сияқты анық емес көпмүшелердің қасиеттерін көрсету үшін қолданылады. Мұндай жағдайлардың барлығына жалпы болып сол немесе басқа сапалық және сандық белгілерді көрсету деңгейлерінің әлсіздігі табылады. Бұл кездегі анық емес модельдеу ерекшелігі өспейтін (монотонды кемитін) тиістілік функцияларының көмегімен сәйкес анық емес көпмүшелерді көрсету болып табылады.

Қарастырылып отырған топтағы функциялардың екіншісі S-бейнелі қисық немесе сплайн функция деп аталады және жалпы жағдайда аналитикалық түрде келесі өрнекпен беріледі [12, 14]:

$$\mu_A(x;a,b)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right), & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases} \qquad (1.4)$$

мұндағы *a, b – a < b* қатынасымен тәртіптелген, еркінше шынайы мәндерді қабылдайтын кейбір сандық параметрлер.

Трапеция түріндегі тиістілік функциясының графигі сурет 5 көрсетілген.



Сурет 5 – S-бейнелі тиістілік функциясының графигі

Қарастырылып отырған S-бейнелі функциялар анықталмағандылық типімен сипатталатын «үлкен саны», «үлкен мәні», «маңызды өлшем», «кіріс және бағаның жоғарғы деңгейі», «пайданың жоғарғы нормасы», «қызметтің жоғарғы сапасы», «қызмет көрсетудің жоғарғы деңгейі» сияқты анық емес көпмүшелердің қасиеттерін көрсету үшін қолданылады. Мұндай жағдайлардың барлығына жалпы болып сол немесе басқа сапалық және сандық белгілерді көрсету деңгейлерінің күштілігі табылады. Бұл кездегі анық емес модельдеу ерекшелігі кемімейтін (монотонды өсетін) тиістілік функцияларының көмегімен сәйкес анық емес көпмүшелерді көрсету болып табылады.

1.2.3. П-бейнелі тиістілік функциялары

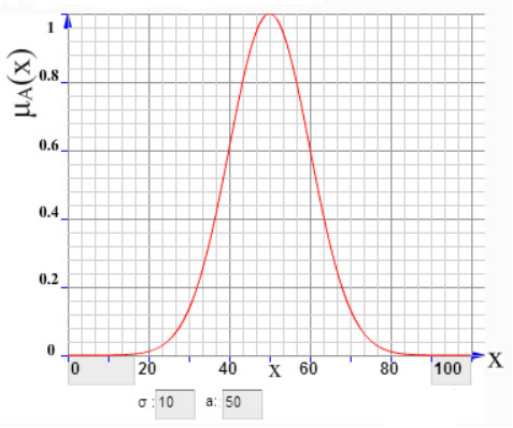
Беріліп отырған тиістілік функцияларының типіне, формасы жағынан қоңырауды, үтікпен басылған трапецияны немесе «П»

әріпін еске түсіретін қисықтардан тұратын кластар жиынын жатқызуға болады. П-бейнелі функция да, жалпы жағдайда аналитикалық түрде келесі өрнекпен беріледі [12, 14]:

$$\mu_A(x;a,\sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \qquad (1.5)$$

мұндағы σ, a – сандық параметрлер, бұл кезде олардың біріншісінің квадраты σ^2 ықтималдылықтар теориясында тарату дисперсиясы деп аталады, ал екінші параметр a – математикалық күту деп аталады.

Трапеция түріндегі тиістілік функциясының графигі сурет 6 көрсетілген.



Сурет 6 – Гаусс тиістілік функциясы

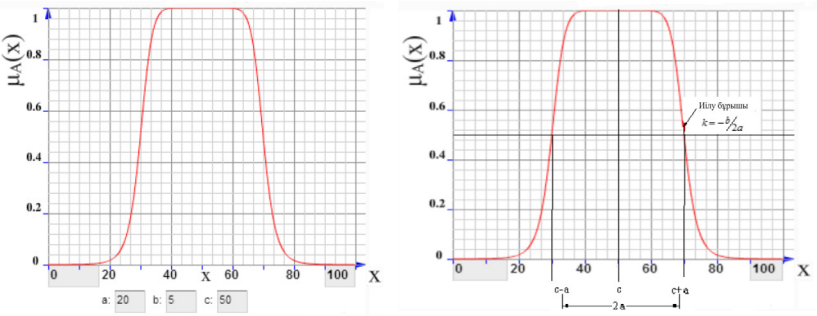
П-бейнелі функцияларға сонымен қатар қоңырау бейнелі (bell-shaped) деп аталатын функцияларды да жатқызуға болады, ол жалпы жағдайда аналитикалық түрде келесі өрнекпен беріледі:

$$\mu_A(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}} \qquad (1.6)$$

мұндағы a, b, c – $a < b < c$ қатынасымен тәртіптелген, бұл кезде параметр $b > 0$ болуы керек, еркінше шынайы мәндерді қабыл-

дайтын кейбір сандық параметрлер. Мұндағы $|x|$ функциясы шынайы санның модульін бейнелейді.

Трапеция түріндегі тиістілік функциясының графигі сурет 7 көрсетілген.



Сурет 7 – Қоңыраубейнелі тиістілік функциясы

Анықталмағандылық типімен «шамамен дейін және шейін аралығында», «шамамен тең», «шамамен» сияқты берлетін П-бейнелі тиістілік функциялары.

1.3. Тиістілік функцияларын құру

Анық емес көпмүшелердің тиістілік функциясын құруды қарастырайық. Қарапайым болып *тікелей тиістілік функцияларын құру әдістері* табылады. Тікелей әдістерде эксперт x әрбір мәні үшін $\mu_A(x)$ тиістілік функциясын береді. Тәртіп бойынша, тікелей әдістерді құрудың тиістілік функциялары кейбір сандық шкалаларда өлшенуі мүмкін қасиеттері үшін қолданылады. Бұл кезде анық емес көпмүшелер теориясы мүлде нақты тиістілік функциясын беруді талап етпейтіндігін ескерген жөн. Жиі тиістілік функциясының түрін (типін) және ең өзіндік мәндерін ғана айқындап кету жеткілікті болып саналады [12].

Тиістілік функциясын құрудың жанама әдістері әдетте анық емес көпмүшелер арқылы анықталған, оңай өлшеу қасиеттері жоқ кезде қолданылады. Ең танымал жанама әдістері ретінде

қос қостан салыстыру әдісін алуға болады [19, 20, 23, 24]. Егер тиістілік функциясының ізделетін мәні бізге мәлім болып және ол $\mu_A(x_i) = w_i$, мұндағы $i = 1, 2, \ldots, n$ тең болса, онда қос қостан салыстыруды қатынастар матрицасы ретінде көрсетуге болады, мұндағы $a_{ij} = w_i / w_j$, ал «/» символ бөлу операциясын көрсетеді. *A* матрицасы оң болып табылады, себебі оның элементтер оң, матрицаның диагональды элементтері бірге тең, матрица кері симметриялы болып табылады: $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Мұндай матрица белгілідей [20], модуль бойынша максимальды, *n* матрица өлшеміне тең, жеке шынайы саны болады, оған шынайы жеке вектор сәйкес келеді, ал қалғандарының бәрінің жеке сандары нөлге тең. Егер *w* арқылы вектор-бағанды белгілейтін болсақ $[w_1\ w_2 \ldots w_n]^{\mathrm{T}}$, онда $Aw = nw$ тең екендігін жеңіл тексеруге болады. Жоғарыда айтылған *A* матрицасының қасиеттерін ескере отырып, тиістілік фукнциясының векторын жеке вектор ретінде есептің максимальды жеке санына сәйкес $Aw = \lambda w$ жеке мәндерін табуға мүмкін болатындығын аламыз. Шындығында *A* матрицасы субъективті пікірлер негізінде қалыптасады, бірақ белгілідей [20], кейбір үлкен емес өзгертулерден кейін оң кері-симметриялы матрицалардың жеке мәндері де болмашы өзгереді. Сондықтан субъективті пікірлер жағдайында тиістілік функциясының векторы, *A* матрицасының максимальды жеке санына сәйкес, жеке вектор ретінде табылуы әбден мүмкін. Табылған $\lambda_{\max}$ және *n* арасындағы айырмашылық эксперттің қос қостан салыстырғандағы келісілмегенділік өлшем қызметін атқарады. Және, сәйкесінше, алынған нәтижелерге сенімділік деңгейін ерекшелейді. Бұл ерекшелік неғұрлым көп болған сайын, оған сенім соғұрлым азаяды. Іс жүзінде *w* векторы қалыптастырады, яғни оны максимальды компоненттерге бөледі.

Іс жүзінде қос қостан салыстыру матрицасын құру кезінде эксперт u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ анық емес көпмүшелердің элементтерін қарастырады және бір элементтің анық емес көпмүше қасиеттеріне қарағанда басқа бір элементтерден артықшылықтарын бағалайды. Онда a_{ij} матрицасының элементі – бұл u_i элементінің u_j элементінен артықшылық деңгейі көрсетеді, ол Саати тоғызбаллдық шкаласы бойынша анықталады [19]:

1 – егер u_i элементінің u_j элементінен артықшылығы жоқ болса;

3 – егер u_i элементінің u_j элементінен шамалы артықшылығы бар болса;

5 – егер u_i элементінің u_j элементінен мағызды артықшылығы болса;

7 – егер u_i элементінің u_j элементінен айқын артықшылығы болса;

9 – егер u_i элементінің u_j элементінен абсолютті артықшылығы болса;

2,4,6,8 – аралық салыстыру бағалары: 2 –жоққа жуық артықшылық, 4 – маңыздыға жуық артықшылық, 6 – айқынға жуық артықшылық, 8 – абсолюттіге жуық артықшылық.

Және де қос қостан салыстыру матрицаларында келесі шарт сақталады $a_{ij} = 1/a_{ji}$.

Іс жүзінде тиістілік функцияларын *параметрлік формада* беріп кету ыңғайлы: тиістілік функциясының формасы таңдалады [12, 14, 23, 24] және анық емес көпмүшелердің ерекшеліктерінен функция параметрлерін таңдайды.

1.4. Анық емес көпмүшелердің негізгі сипаттамалары

Тиістілік функциясының түсінігін қарастырып, анық емес көпмүшелердің негізгі сипаттамаларымен танысуды ұсынайық [12, 14].

α-деңгейдегі көпмүшелер – бұл анық емес көпмүшелердегі таратушы түсінігінің жалпылануы. Бұл $A\alpha$ әдеттегі көпмүшесі, ол $A_\alpha = \{x \in \mathbf{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ α шартын қанағаттандырады, мұндағы α – [0,1] интервалынан алынған кейбір шынайы сан.

Анық емес көпмүшелердің биіктігі анық жоғарғы шекпен келесі түрде анықталады

$$h_A = \sup_{x \in \mathbf{X}} \left(\mu_A(x) \right)$$

Анық емес көпмүше *қалыпты* деп аталады, егер оның тиістілік функциясының максимальды мәні 1 тең болса және бұл кезде көпмүше элементтері бар болса, әрі олардың тиістілік функциясы

1 тең болса. Формальды түрде бұл, келесі шарттың орындалуын керек ететін қалыпты анық емес көпмүшені береді:

$$\mu_A(x) = 1, \quad (\exists x \in \mathbf{X})$$

Анық емес көпмүше *субқалыпты* деп аталады, егер оның тиістілік функциясының максимальды мәні 1 кем болса.

Унимодальды анық емес көпмүшелер. Анық емес көпмүше унимодальды (қатал унимодальды) деп аталады, егер оның тиістілік функциясы $\mu_A(x)$ унимодальды (қатал унимодальды) болып табылса. $\mu_A(x)$ тиістілік функциясы унимодальды (қатал унимодальды) деп аталады, егер ол сәйкесінше анық емес көпмүшелер таратушысында унимодальды (қатал унимодальды) болса.

A анық емес көпмүшесінің *ядросы* деп қарапайым, элементтері келесі шартты қанағаттандыратындар айтылады:

$$C(A) = \mathrm{core}(A) = \{x \in \mathbf{X} \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

Дискретті анық емес көпмүшелердің қуаттылығы (*кардинальды сан*) оның барлық элементтерінің тиістілік фукнцияларының қосындысы ретінде анықталады

$$\|A\| = \mathrm{card}(A) = \sum_{x \in S(A)} \mu_A(x),$$

мұндағы *S*(*A*) – анық емес көпмүше таратушысы.

Үздіксіз анық емес көпмүше қуаттылығы тиістілік фукнциясын интеграциялау арқылы есептеледі

$$\|A\| = \mathrm{card}(A) = \int_{x \in S(A)} \mu_A(x)\,dx.$$

Анық емес көпмүшелер шекарасы деп универсумның 0-ден 1-ге дейін ерекшеленетін тиістілік фукциясының мәндерін атаймыз. Басқаша айтатын болсақ, $A_\alpha = \{x, \mu_A(x)\}$ анық емес көпмүшелер шекарасы $x \in \mathbf{X}$ универсумының $0 < \mu_A(x) < 1$ шартты орындайтын элементтері ғана кіргізіледі.

Анық емес көпмүшелердің өту нүктесі. $\mu_A(x) = 0.5$ шарты орындалатын $y \in A$ анық емес көпмүшесінің элементтері, осы анық емес көпмүшенің өту нүктесі деп аталады.

Ең жақын анық емес көпмүшелер. Жиі A анық емес көпмүшесіне жақын, A анық көпмүшесі түсінігін білген пайдалы. Мұндай көпмүшенің сипаттамалық функциясы келесі өрнектермен анықталуы мүмкін:

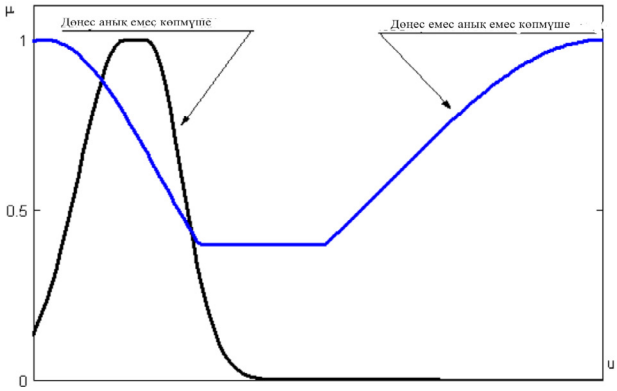
$$\chi_{A(x)} = \begin{cases} 0, & \text{егер } \mu_A(x) < 0.5 \\ 1, & \text{егер } \mu_A(x) > 0.5 \\ 0 \text{ немесе } 1, & \mu_A(x) = 0.5 \end{cases}$$

Анық емес көпмүшелерді сипаттау үшін сондай-ақ дөңестік түсінігі қолданылады, ол тиістілік функциясының сәйкес графикалық бейнесімен ассоциацияланады.

Дөңес анық емес көпмүшелер. $A_\alpha = \{x, \mu_A(x)\}$ анық емес көпмүшесін X универсумымен бірге дөңес деп атайды, егер оның $\mu_A(x)$ тиістілік функциясы келесі шартты қанағаттандыратын болса:

$$\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}$$

кез-келген мәндер үшін $x, a, b \in \mathbf{X}$, бұл кезде a < x < b және a ≠ b



Сурет 8 – Дөңес және дөңес емес анық емес көпмүшелердің тиістілік функцияларының графигі

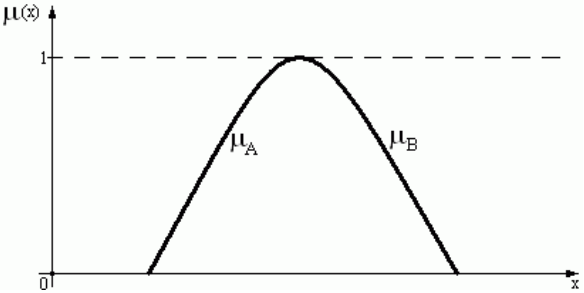
1.5. Анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялар

Анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялардың үш ерекшелігі бар [12]: біріншіден, анық емес көпмүшелермен жүргізілетін барлық операциялар классикалық көпмүшелермен жүргізілетін операциялардың жалпылауы болып табылады. Себебі жалпылаудың әртүрлі вариантты мүмкін, бұл анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялардың әртүрлі варианттарына әкеледі. Екіншіден, анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операцияларды орындау мүмкін, егер анық емес көпмүшелермен бір ғана универсумда анықталған болса. Үшіншіден, анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялар олардың тиістілік функцияларының операцияларына қиындастырылған болса. Осы ерекшеліктерді ескере отырып анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялардың негізгілерін қарастырайық. Бұл операциялар егжей-тегжейлі [4, 12, 14] келтірілген. Ескере кететініміз, барлық көпмүшелер теориясының аксиомалары анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялар үшін орындала бермейді [4, 14].

Айталық A және B анық емес көпмүшелер, олар X әмбебап көпмүшелері арқылы берілген. A және B анық емес көпмүшелері *тең* болып есептеледі, егер олардың тиістілік функциялары келесі универсумда бірдей мәндер қабылдаса

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Онда анық емес көпмүшелер теңдігі келесідегідей жазылады $A = B$.



Сурет 9 – Анық емес көпмүшелердің теңдігі

A анық емес көпмүшесі *жеке емес ішкікөпмүшесі* деп *B* анық емес көпмүшесі аталады ($A \subseteq B$ деп белгіленеді), егер

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

A анық емес көпмүшесі *B* аныс емес көпмүшесінің *меншікті ішкікөпмүшесі* деп аталады ($A \subset B$ ретінде жазылады), егер

$$\mu_A(x) < \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Анық емес көпмүшелердің біріктіру және қиылысу операциялары нақты есептердің ерекшеліктеріне байланысты әртүрлі әдістермен анықталуы мүмкін. Бұл операцияларды үшбұрышты норма және үшбұрышты конорма түсініктерін қолдана отырып сипаттау ыңғайлы болады [4, 12, 14].

Үшбұрышты норма (*T*-норма, *t*-норма) – бұл [0,1] интервалында әрекеттесетін және келесі аксиоманы қанағаттандыратын функция:

– $T(x,0)=0; \quad T(x,1)=1$	шектеулік
– $T(x,y)=T(y,x)$	коммутативтілік
– $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$	ассоциативтілік
– $T(x,y) \le T(x,z)$, если $y \le z$	монотондылық

Үшбұрышты конорма (*T*-конорма, *s*-норма) – бұл [0,1] интервалында әрекеттесетін және келесі аксиоманы қанағаттандыратын функция:

– $S(x,0)=x; \quad S(x,1)=1$	шектеулік
– $S(x,y)=S(y,x)$	коммутативтілік
– $S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)$	ассоциативтілік
– $S(x,y) \le S(x,z)$, если $y \le z$	монотондылық

Бұл екі үшбұрышты нормалар тек шектеулік аксиомаларымен ғана ерекшеленеді.

t-норм және *s*-норм қарапайым мысалдары ретінде келесілер табылады [5, 25, 27]:

$T(x, y) = \min(x, y)$ – Заде минимумы;

$S(x, y) = \max(x, y)$ – Заде максимумы;

$T(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ – Лукасевичтің *t*-нормасы;

$S(x, y) = \min(x + y, 1)$ – Лукасевичтің *s*-нормасы (шектелген қосынды);

$T(x, y) = x \cdot y$ – көбейтінді;

$S(x, y) = x + y - x \cdot y$ – ықтималдылық қосынды

Анық емес шығаруларда сонымен қатар өлшенген *t*-нормлар және *s*-нормалар кездеседі:

$$T(x, y, w_1, w_2) = T\left(1 - w_1(1 - x), 1 - w_2(1 - y)\right),$$

$$S(x, y, w_1, w_2) = S(w_1 x, w_2 y).$$

Үшбұрышты нормаларды бірнеше айнымалылар жағдайына жалпылауға болады.

Жалпы түрде бір *X* универсумында берілген *A* және *B* *анық емес көпмүшелерінің қиылысуы*, осы универсумда берілген, үшінші *C* анық емес көпмүшесі аталады, оның тиістілік функциясы келесі түрде анықталады

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = T\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right),$$

мұндағы T – *t*-норма.

Әртүрлі *t*-нормалардың таратылуы анық емес көпмүшелердің қиылысу операцияларының әртүрлі таратылуларына әкеледі [22, 25].

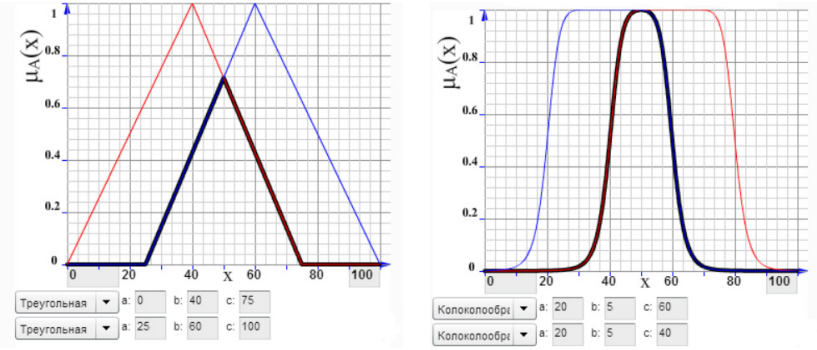
min-қиылысу операциясы, немесе $\wedge$-қиылысу $A \cap B$ тиістілік функциясымен анықталады (сурет 10):

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad (1.7)$$

Алгебралық қиылысу операциясы, немесе *prod*-қиылысу $A \bullet B$ тиістілік функциясымен анықталады

$$\mu_{A \bullet B}(x) = \mathrm{prod}\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Екі анық емес көпмүшелердің қиылысу операцияларының нәтижелерін графикалық түрде бейнелеу ыңғайлы (сурет 10).



Сурет 10 – үшбұрышты *min*-қиылысу операциялары және П-бейнелі тиістілік функцияларының графикалық көрсетілімдері

Шекаралық қиылысу операциялары $A \circ B$ келесі тиістілік функциясымен анықталады

$$\mu_{A \circ B}(x) = \max\left\{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1,\ 0\right\} \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Драстикалық қиылысу операциялары (ағылшын сөзінің *drastic* – шешуші, радикальды) $A \Delta B$ тиістілік функциясымен анықталады

$$\mu_{A \Delta B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{если } \mu_B(x) = 1, \\ \mu_B(x), & \text{если } \mu_A(x) = 1, \\ 0, & \text{если } \mu_A(x) < 1,\ \mu_B(x) < 1, \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbf{X}$$

Ягер (*Yager R.*) қиылысу операциясы [4] келесі тиістілік функциясымен анықталады

Жалпы түрде X универсумында берілген, A және B *анық емес көпмүшелерінің біріктірілуі*, осы универсумда берілген, үшінші C анық емес көпмүшесі аталады, оның тиістілік функциясы келесі түрде анықталады

$$\mu_C(x) = \mu_{A\cup B}(x) = S\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right),$$

мұндағы S – s-норма (t-конорма).

Әртүрлі s-нормаларының таратылуы анық емес көпмүшелердің қиылысу операцияларының әртүрлі таратылуларына әкеледі [12, 14].

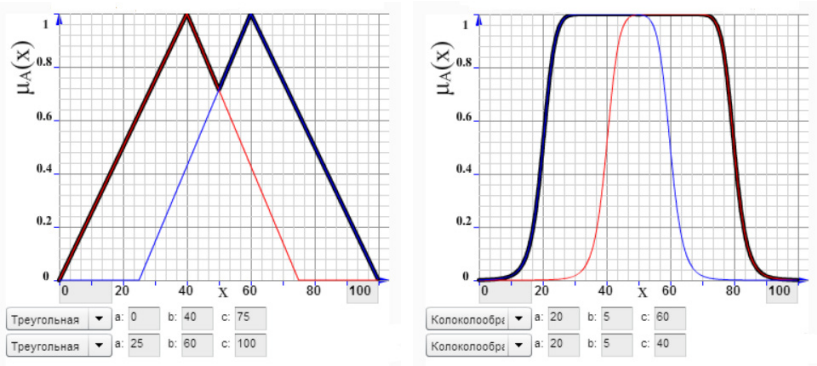
min-біріктіру операциясы, немесе $\vee$-біріктіру $A \cup B$ тиістілік функциясымен анықталады

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad (1.8)$$

Алгебралық біріктіру операциясы $A + B$ тиістілік функциясымен анықталады

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Екі шексіз анық емес көпмүшелердің біріктіру операцияларының нәтижелерін графикалық түрде бейнелеу ыңғайлы (сурет 11).



Сурет 11 – үшбұрышты *max*-біріктіру операциялары және П-бейнелі тиістілік функцияларының графикалық көрсетілімдері

Шекаралық біріктіру операциялары $A \oplus B$ келесі тиістілік функциясымен анықталады:

$$\mu_{A \otimes B}(x) = \min\left\{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x),\ 1\right\} \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Драстикалық біріктіру операциялары $A \nabla B$ тиістілік функциясымен анықталады

$$\mu_{A \nabla B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), \text{егер} \quad \mu_B(x) = 0, \\ \mu_B(x), \text{ егер} \quad \mu_A(x) = 0, \\ 1, \qquad \text{егер} \quad \mu_A(x) < 1,\ \mu_B(x) < 1, \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Ягер біріктіру операциясы келесі тиістілік функциясымен анықталады

$$\mu_{A \cup B}(x) = \min\left\{1,\ \left[\left(\mu_A(x)\right)^p + \left(\mu_B(x)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\} \quad p \geq 1,\ \forall x \in \mathbf{X}.$$

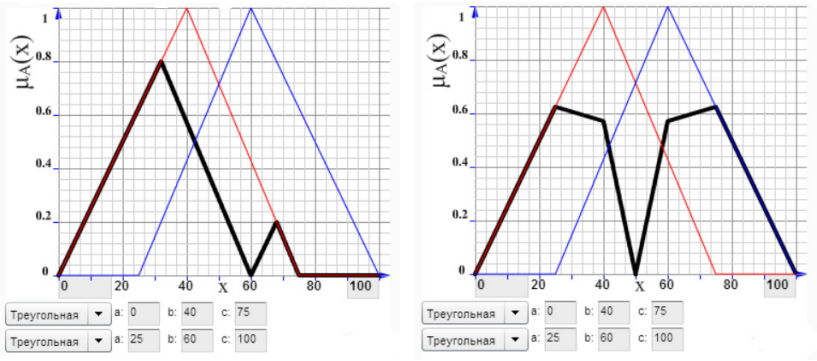
X универсумында берілген, *A* және *B* *анық емес көпмүшелердің айырымы*, осы универсумда берілген, үшінші $C = A \setminus B$ анық емес көпмүшесі аталады, оның тиістілік функциясы келесі түрде анықталады

$$\mu_C(x) = \mu_{A \setminus B}(x) = \max\left\{\mu_A(x) - \mu_B(x),\ 0\right\} \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Айырым операциясы коммутативті болып табылмайды, яғни $A \setminus B \neq B \setminus A$. Қарапайым көпмүшелердің аналогиясы бойынша кейде *симметриялы айырым* $C = A - B$ операциясын қолданады, оның тиістілік функциясы келесі түрде анықталады

$$\mu_C(x) = \mu_{A-B}(x) = \left|\mu_A(x) - \mu_B(x)\right| \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Екі шексіз анық емес көпмүшелердің айырымы операцияларының нәтижелерін графикалық бейнелеу ыңғайлы (сурет 12).

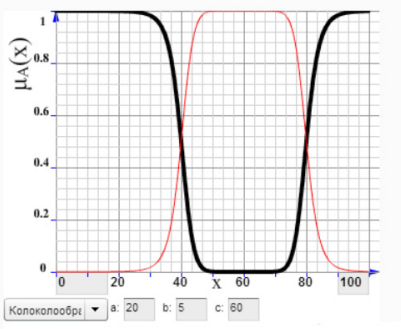


Сурет 12 – Үшбұрышты тиістілік функциясына арналған айырым және симметриялы операциялардың графикалық көрсетілімі

A ($\overline{A}$ арқылы белгіленеді) анық емес көпмүшесінің т*олықтыру* (инверсия) операциясының тиістілік функциясы келесідегідей анықталады

$$\mu_C(x) = \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Көрсетілген операцияны сонымен қатар Заде инверсиясы деп те атайды.



Сурет 13 – П-бейнелі тиістілік функцияларына арналған *толықтыру* операциясының графикалық көрсетілімі

Сондай-ақ Ягер инверсиясы $\mu_C(x) = \left(1 - x^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$ және Сугено инверсиясы да белгілі

$$\mu_C(x) = \frac{1-x}{1+px}, \quad p > -1.$$

Егер $A - X$ универсумында берілген, еркінше алынған анық емес көпмүше, a – оң сан, бұл кезде $a \cdot h_A \le 1$, мұндағы h_A h_A – көпмүше биіктігі, онда *А анық емес көпмүшесін а санына көбейту* нәтиже осы X универсумында берілген, $C = a \cdot A$ анық емес көпмүшесі ретінде анықталады, оның тиістілік функциясы келесіге тең

$$\mu_C(x) = \mu_{a \cdot A}(x) = a\mu_A(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

X универсумында берілген, *А анық емес көпмүшені k дәрежесіне шығару* операциясының нәтижесі ретінде, мұндағы k – оң шынайы сан, C анық емес көпмүшесі болып табылады, оның тиістілік функциясы келесі формула бойынша анықталады

$$\mu_C(x) = \left(\mu_A(x)\right)^k \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Дәрежеге шығару операциясы A^k деп белгіленеді.

Жоғарыда берілгендерге қарағанда туынды болып табылатын анық емес көпмүшелерді құру үшін, *лингвистикалық модификаторлар* қолданылады. Мысалы, егер «салқын» анық емес көпмүшесі бар болса, онда оның негізінде лингвистикалық модификаторлардың көмегімен «өте салқын» немесе «тым немесе аздап салқын» көпмүшелерін алуға болады.

Негізгі үш лингвистикалық модификаторлар (операторлар) бар:

- шоғырландыру операторы,
- созғылау операторы,
- қарама-қарсылықты арттыру/кеміту операторы.

Шоғырландыру операциясы, A анық емес көпмүшеге қолданылған, жаңа C анық емес көпмүшесін береді, оның тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады:

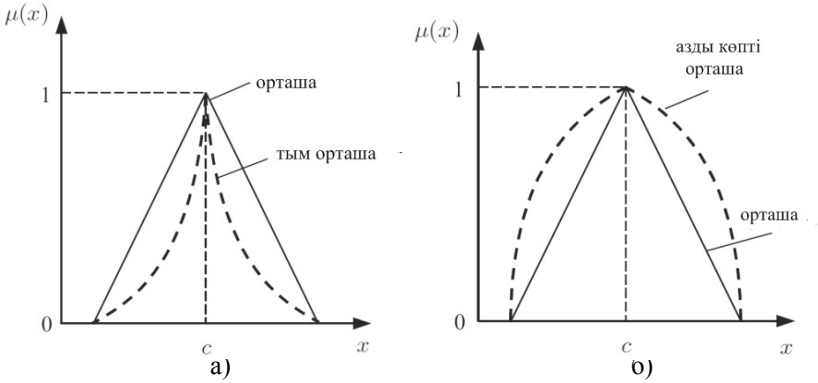
$$\mu_C(x) = \mu_{\text{con}(A)}(x) = \left(\mu_A(x)\right)^2 \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Шоғырландыру операциясы $C = \text{con}(A)$ деп белгіленеді – ағылшын сөзінің *concentration* – шоғырландыру (концентрация).

Созғылау операциясы, $\text{dil}(A)$ арқылы белгіленеді (ағылшын сөзінің *dilatation* – созғылау(растяжение)), нәтижесінде C анық емес көпмүшесін береді, оның тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады:

$$\mu_C(x) = \mu_{\text{dil}(A)}(x) = \left(\mu_A(x)\right)^{0,5} \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Шоғырландыру операциясы анық емес көпмүшенің тиістілік дәрежесін азайтуға әкеледі, ал созғылау операциясы – тиістілік дәрежесін арттыруға әкеледі. Шоғырлану және созғылау операторларының үшбұрышты тиістілік функциясына әрекет ету нәтижесі келесі сурет 14 көрсетілген.



Сурет 14 – Үшбұрышты тиістілік функциясына арналған шоғырлану (а) және созғылау (б) операцияларының әрекет етуінің графикалық көрсетілімі

Анық емес көпмүшелер арасындағы шекаралар су шайып кеткендей болып табылады. *Қарама-қарсылық артуының* о*ператоры* (int – ағылшын сөзінің intensification – күшейту, арттыру) анық

емес көпмүшелерді тым анық түрге келтіреді. Тиістілік функциясының бұтақтарының еңкіштік бұрыштарын өзгерте отырып, ол бір анық емес көпмүшеден екіншісіне өтудің шекараларын тым анық етіп ерекшелеуге мүмкіндік жасайды. *A* анық емес көпмүшелеріне қолданылған *қарама-қарсылықты арттыру операциясы*, нәтижесінде *C* анық емес көпмүшесін береді, оның тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады

$$\mu_C(x) = \mu_{\text{int}(A)}(x) = \begin{cases} 2^{n-1}\left(\mu_A(x)\right)^n & \text{үшін} \quad (x) < 0{,}5, \quad \forall x \in \mathbf{X} \\ 1 - 2^{n-1}\left(1 - \mu_A(x)\right)^n & \text{үшін} \quad (x) \geq 0{,}5, \quad \forall x \in \mathbf{X} \end{cases}$$

мұндағы *n* – бүтін сан, әдетте *n* = 2.

n шексіздікке ұмтылуы кезінде тиістілік функциясы тікбұрышты форманы қабылдайды, ал анық емес көпмүше әдеттегі нақты шекаралары бар анық көпмүше айналады.

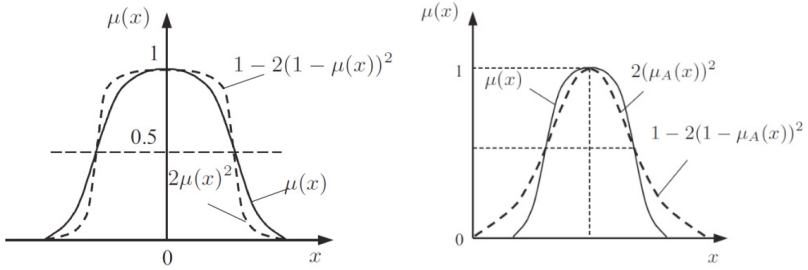
Қарама-қарсылықты кеміту операциясы (белгіленуі blr – ағылшын сөзінің blurring – су шайып кету), *A* анық емес көпмүшеге қолданылған, нәтижесінде *C* анық емес көпмүше береді, оның тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады:

$$\mu_C(x) = \mu_{\text{blr}(A)}(x) = \begin{cases} 1 - 2^{n-1}\left(1 - \mu_A(x)\right)^n & \text{үшін} \quad \mu_A(x) < 0{,}5, \quad \forall x \in \mathbf{X} \\ 2^{n-1}\left(\mu_A(x)\right)^n & \text{үшін} \quad \mu_A(x) \geq 0{,}5, \quad \forall x \in \mathbf{X} \end{cases}$$

мұндағы *n* – бүтін сан, әдетте *n* = 2.

n шексіздікке ұмтылуы кезінде анық емес көпмүше нүктеге айналады, ол анық емес көпмүшенің ядросының орташа мәнімен сәйкес болады (анық емес көпмүшенің модальды мәнімен).

Қарама-қарсылықты арттыру және кеміту әрекеттерінің тиістілік функцияларының графикалық көрсетілімі сурет 15 көрсетілген.



а) б)

Сурет 15 – $m = 2$ үшін қарама-қарсылықты арттыру (а) және кеміту (б) операцияларының әрекеттерінің графикалық көрсетілімі

1.6. Анық емес қатынастар

Қарастырылған анық емес көпмүшелердің анықтау аймағы ретінде бірөлшемді кеңістіктер алынды. Анық емес жүйелерде жиі анық емес көпмүшелерді анықтау аймағы болып көпөлшемді кеңістіктер табылады. Бұл кезде ерекше қызығушылыққа ие болатын көпмүшелер ол екіөлшемді анықтау аймағындағылар болып табылады. Көп өлшемді анықтау аймағындағы анық емес көпмүшелер *анық емес қатынастар* ретінде беріледі. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ көпмүшелері (универсумдары) арқылы берілген анық емес *k*-арлы қатынастар, $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \ldots \times \mathbf{X}_k$ декарттық туынды арқылы анықталған *R* анық емес көпмүшесі деп аталады. Басқаша айтар болсақ, анық емес қатынастар – бұл көптеген көпмүшелер жұбы $R = \left\{ \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle, \mu_R\left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right) \right\}$, мұндағы $\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle$ – *k* элементтерінің *кортежі*, олардың әрбірі өзінің универсумынан таңдалады $x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2, \ldots, x_k \in \mathbf{X}_k$, $\mu_R\left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right)$ – анық емес қатынастың тиістілік функциясы, ол $\mu_R : x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2, \ldots, x_k \in \mathbf{X}_k \to [0,1]$. бейнесі ретінде анықталады. Ескере кетейік, $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \ldots \times \mathbf{X}_k$ ақырғы санының декарттық туындысы деп *k* ұзындықтағы барлық $\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle$ кортеждер көпмүшесін айтамыз, олар осы көпмүшелердің элементтерінен құрылған: $x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2, \ldots, x_k \in \mathbf{X}_k$.

Қатынас (анық немесе анық емес), екі көпмүше негізінде құрылғандар, *бинарлы* деп аталады, үш көпмүше негізінде құрыл-

ғандар – *тернарлы*, ал *k* көпмүше негізінде құрылғандар – *k-арлы*. Қатынастар бір универсумда берілуі мүмкін. Мысалы, *X* универсумда берілген бинарлы анық емес қатынастардың берілу түрі $R = \left\{ \left\langle x_i, x_j \right\rangle, \mu\left(\left\langle x_i, x_j \right\rangle \right) \right\}$, бұл кезде $x_i \in \mathbf{X}$ және $x_j \in \mathbf{X}$.

Анық емес қатынастар әртүрлі әдістермен беріледі:

• Барлық қатынас кортеждерін және оларға сәйкес тиістілік функциялары айқын санау тізім формасында. Бұл әдіс кортеждерінің саны үлкен емес қатынастар үшін қолданылады.

• Тиістілік функциясы үшін аналитикалық өрнек формасында.

Бинарлы қатынастар үшін қосымша келесі әдістер қолданылуы мүмкін:

Графикалық кейбір беттер түрінде. Бұл кезде X_1 және X_2 универсумдарындағы мәндер тәуелсіз айнымалылар болып табылады, ал үшінші координата тиістілік функциясының сәйкес мәнін көрсетеді.

Ақырлы бинарлы қатынастың матрицасы түрінде, олардың жолдары кортеждің бірінші элементтеріне, ал бағандары – кортеждің екінші элементтеріне сәйкес келеді. Матрица элементтері болып сәйкес тиістілік функцияларының мәндері табылады.

Төбелері X_1 және X_2 универсумдарының элементтеріне сәйкес, ал төбелерді қосатын қабырғалары $x_i \in \mathbf{X}$ ж»не $x_j \in \mathbf{X}$, кортеждің $\left\langle x_i, x_j \right\rangle$ қатынасына енгізілгендігін көрсететін анық емес граф түрінде.

Келесі мысалды қарастырайық. Екі көпмүше берілсін делік: $\mathbf{X}_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ – Internet пайдаланушыларының көпмүшесі және $\mathbf{X}_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_4\}$ – Internet көпмүшесі. Матрицалық түрдегі декарттық туынды $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ формасы келесі түрде беріледі

$$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \\ a_5b_1 & a_5b_2 & a_5b_3 & a_5b_4 \\ a_6b_1 & a_6b_2 & a_6b_3 & a_6b_4 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ берілген анық емес қатынас мысалы ретінде, «браузерді пайдаланушылар» қатынасы алынады. Матрицалық формада мұндай тиістілік қатынасының әрбір элементі, біздің мысалымызда – әрбір браузердің әрбір пайдаланушысының әйгілілігі.

Себебі анық емес қатынас анық емес көпмүше болып табылады, яғни қатынастармен жүргізілетін анықтамалар сақталады. Мысалы, [12], *екі анық емес қатынастың қиылысуы* $Q = \left\{ \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle, \mu_Q \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right) \right\}$ және $R = \left\{ \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle, \mu_R \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right) \right\}$ деп осы $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \ldots \times \mathbf{X}_k$ универсумдардың декарттық туындылары арқылы берілген S анық емес қатынасы аталады, оның тиістілік функциясы келесі формула бойынша анықталады

$$\mu_S \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right) = \min \left\{ \mu_Q \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right), \mu_R \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right) \right\},$$

$$\forall \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \ldots \times \mathbf{X}_k .$$

Екі анық емес қатынастың бірігуі Q және R деп осы $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \ldots \times \mathbf{X}_k$ универсумдардың декарттық туындылары арқылы берілген S анық емес қатынасы аталады, оның тиістілік функциясы келесі формула бойынша анықталады

$$\mu_S \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right) = \max \left\{ \mu_Q \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right), \mu_R \left(\left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \right) \right\},$$

$$\forall \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \right\rangle \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \ldots \times \mathbf{X}_k .$$

Анық емес қатынастармен жүргізілетін операциялар *t*-норм және *s*-норм көмегімен анықталуы мүмкін.

Жиі әртүрлі X_1 және X_2 универсумдарында берілген, анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операцияларды орындау талап етіледі. Мұндай көпмүшелер $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ декарттық туындылары арқылы берілген, цилиндрлық жалғастыру (кеңейту) операцияларының көмегімен алдынала анық емес қатынастарға әкеледі, ал одан кейін бір универсумда берілген қатынастармен жүргізілетін операцияларды орындайды. *Цилиндрлық жалғастыру* келесі түрде анықталады [14]. Айталық X_1 және X_2 – анық көпмүшелер (олар-

дың элементтерінің тиістілік функциялары бірге тең), ал A – X_1 арқылы берілген анық емес көпмүше. $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ анықтау аймағындағы A^* көпмүшесінің A цилиндрлық жалғасы деп, $A \times \mathbf{X}_2$ өзімен декарттық туындыны көрсететін қатынасты айтамыз. A^* тиістілік функциясы келесі түрде беріледі

$$\mu_{A^*}(x_1, x_2) = \min\left\{\mu_A(x_1), \mu_{\mathbf{X}}(x_2)\right\} = \min\left\{\mu_A(x_1), 1\right\} = \mu_A(x_1)$$
$$\forall \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 .$$

Матрицалық көрсетілімде A^* қатынасы тиістілік функциясының матрицасының бағандары, бірдей болады және A^* анық емес көпмүшесінің тиістілік функциясының мәндеріне тең.

Сонымен қатар цилиндрлық жалғастыруға қарама-қайшы кескін операциясы қолданылады. Егер $A - \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ анықтау аймағы бар анық емес қатынас болса, онда X_1 көпмүшесіне осы қатынастың *қарама-қайшылығы* деп A^* анық емес көпмүшесі аталады, оның тиістілік функциясы келесі түрде беріледі

$$\mu_{A^*}(x_1, x_2) = \max_{\forall x_2 \in \mathbf{X}_2} \mu_A(x_1, x_2).$$

Сонымен қатар *бинарлы қатынастардың композициясы (комбинациясы)* операцияларын қарастырайық. Айталық $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ декарттық туындысында берілген $Q = \left\{\langle x_i, x_j \rangle, \mu_Q\left(\langle x_i, x_j \rangle\right)\right\}$ бинарлы анық емес қатынас болсын, ал $\mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_3$ декарттық туындысында берілген, $R = \left\{\langle x_j, x_k \rangle, \mu_R\left(\langle x_j, x_k \rangle\right)\right\}$ анық емес қатынас. Q және R бинарлық қатынастардың композициясы деп, $Q \otimes R$ (сонымен қатар $Q \circ R$ белгілеуі де қолданылады[18]) арқылы белгіленетін, $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_3$ декарттық туындысы арқылы берілген, тиістілік функциясы келесі формуламен анықталатын қатынасты айтамыз

$$\mu_{Q \otimes R}\left(\langle x_j, x_k \rangle\right) = \max_{x_j \in \mathbf{X}_2}\left\{\min\left\{\mu_Q\left(\langle x_i, x_j \rangle\right), \mu_R\left(\langle x_j, x_k \rangle\right)\right\}\right\},$$

$$\forall \langle x_i, x_k \rangle \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_3 .$$

Мұндай композицияны тағы (*max-min*)-*композициясы* немесе *анық емес қатынастардың максиминді түйіні* деп атайды.

$\min\left\{\mu_Q\left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right), \mu_R\left(\left\langle x_j, x_k\right\rangle\right)\right\}$ операциясының орнына композицияда келесі операцияны қолдануға болады

$$\text{prod}\left(\mu_Q\left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right), \mu_R\left(\left\langle x_j, x_k\right\rangle\right)\right) = \mu_Q\left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right) \cdot \mu_R\left(\left\langle x_j, x_k\right\rangle\right).$$

Анық емес шығаруда маңызды рөлді $A \subseteq \mathbf{X}$ *анық емес көпмүшесінің композициясы (комбинациясы) және* $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ *анық емес қатынасы ойнайды*, олар $A \otimes R$ (немесе $A \circ R$) деп белгіленеді және $B \subseteq \mathbf{Y}$ анық емес көпмүшесі ретінде анықталады және тиістілік функциясы [18]

$$\mu_{A \otimes R}(y) = \max_{x \in \mathbf{X}}\left\{\min\left\{\mu_A(x), \mu_R\left(\left\langle x, y\right\rangle\right)\right\}\right\}. \qquad (1.9)$$

Композицияда min операциясының орнына prod операциясын қолдануға болады. Бұл анық емес қатынастармен жүргізілетін операциялармен жақынырақ [4, 12, 14, 18] танысуға болады.

1.7. Лингвистикалық айнымалы. Анық емес көлемдер, сандар және интервалдар

Анық емес айнымалы [12] кортеж сияқты анықталады $\left\langle \alpha, \mathbf{X}, A\right\rangle$, мұндағы α – анық емес айнымалы атауы, X – анық емес айнымалы анықталатын аймақ болып табылатын универсум, $A = \left\{x, \mu_A(x)\right\}$ – анық емес айнымалының мүмкін мәндерін анықтайтын анық емес көпмүше.

Мысалы, «температурасы көтеріңкі науқас» анық емес айнымалы мүмкін мәндер аймағымен және тиістілік функциясымен анықталады.

Лингвистикалық айнымалы сандық айнымалыдан оның мәндері ретінде сандар емес, ал табиғи тілдегі сөздер немесе сөз құрамдары алынатындығымен ерекшеленеді, ол адамдарға сандарға қарағанда табиғи болып табылады.

Лингвистикалық айнымалы кортеж сияқты анықталады $\langle \alpha, T, \mathbf{X}, G, M \rangle$, мұндағы α – лингвистикалық айнымалы атауы; T – лингвистикалық айнымалының базалық *терм-көпмүшесі*, немесе оның мәндерінің көпмүшесі (*термдер*), олардың әрбірі *жеке анық емес айнымалының атауларын* көрсетеді; X – терм-көпмүшеге кіретін анық емес айнымалылардың анықталу аймағы (универсум); G – базалық терм-көпмүшелерден туындайтын *синтаксистік тәртіптер,* T нақты бір жағдайға арналған мәні бар лингвистикалық айнымалының жаңа мәндерінің көпмүшесі; M – лингвистикалық айнымалының әрбір мәніне сәйкес қойылатын семантикалық тәртіптер, олар G тәртіптерінің көмегімен алынатын кейбір анық емес көпмүшелер.

Мысалы, «адам денесінің температурасы» лингвистикалық айнымалысы үшін терм-көпмүше келесі түрде беріледі:

T = { “төменгі”, “қалыпты”, “өте жоғары”, “жоғары”}.

Анықталу аймағы X – бұл адам денесінің температурасының өзгеру диапазоны. G – «Және», «Немесе» логикалық бумаларының көмегімен жаңа термдерді қалыптастыру және «Жоқ», «Өте», «Сәл» түріндегі модификаторлар. Мысалы, «өте жоғары температура». «Жоқ» модификаторы толықтыру (инверсия) операциясының көмегімен беріледі, «Өте» модификаторы шоғырландыру операциясының көмегімен беріледі, «Сәл» модификаторы –созғылау операциясымен (1.5 бөлімді қара). M тәртіптері X анық емес айнымалыларымен беріледі – T көпмүшесіндегі термдер және G тәртіптер. Тәртіптер логикалық бумалар және модификаторларды ескере отырып тиістілік функциясын қалыптастыруға келтіреді. Лингвистикалық айнымалылар сөздік мәндерден басқа сандық мәндерді де қабылдауы мүмкін.

Анық емес өлшем деп өзбетінше алынған $A = \{x, \mu_A(x)\}$ анық емес көпмүшесі аталады, ол R нақты сандар көпмүшесінде беріледі. Егер универсум ретінде R_+ нақты теріс сандар ішкікөпмүшесі болса, онда A_+ *теріс болмайтын анық емес өлшемдер* анықтамасы алынады.

Анық емес интервал деп анық емес өлшемдегі дөңес тиістілік функциялар аталады. Ескере кететін жағдай, кейбір интервалда анықталған $f(x)$ функциясы, дөңес, егер x_1, x_2 аргументтерінің кез келген мәні үшін және $\alpha \in [0,1]$ кез келген санға теңсіздік орындалады

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \le \alpha f\left(x_1\right) + (1-\alpha) f\left(x_2\right)$$

Егер бұл теңсіздік барлық $\alpha \in [0,1]$ үшін қатал болып табылса, онда функция *қатал дөңес* деп аталады; егер кері теңсіздік орындалса, онда функция *ойыстық*, немесе *жоғарыға дөңес* деп аталады. Бір айнымалының дөңес дифференциалданатын функцияның графигі, осы графикке жүргізілген кез келген дөңестік аралығының нүктесінде жанамадан төмен жатпайды.

Анық емес сан деп тиістілік функциясы дөңес және унимодальды болып табылатын анық емес өлшем аталады. Ескере кететін жағдай, $f(x)$ функциясы унимодальды деп аталады, егер берілген бөлікте олардың бір ғана максимум (минимум) $f(x^*)$ болса, әрі x^* сол жағындағы функция монотонды өседі (минимум кезінде кемиді), ал оң жағынан – монотонды кемиді (артады). Анық емес санның тиістілік функциясының графигінің бір ғана максимумы бар, әдетте бірге тең. Анық емес интервалдың тиістілік функциясының графигі кейбір интервалда максимальды мән қабылдайды.

Себебі анық емес сандар және интервалдар анық емес көпмүшелерді құрайды, яғни оларға анық емес көпмүшелер үшін анықталған барлық қасиеттер және операциялар әділетті. Қосымша *анық емес нөл* түсінігін ерекшелейді – ол модальды мәні (модасы) бар анық емес нөлге тең сан, және *оң* (немесе *теріс*) анық емес сан, оның таратушысы қатал оң (немесе қатал теріс) болуы керек.

Анық емес сандар және интервалдармен операциялар орындау кезін *Заде жалпылау әдісі* қолданылады [6, 16, 24]. Айталық $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ анық емес сандар арқылы берілген n айнамалылардың анық емес функциясы. Онда $\tilde{y} = f\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\right)$ функциясының мәні деп келесі тиістілік функциясы бар $\tilde{y}$ анық емес саны аталады

$$\mu_{\tilde{y}}\left(y^*\right)=\sup_{\substack{y^*=f\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)\\ x_i^*\in\mathrm{supp}\left(\tilde{x}_i\right),\quad i=\overline{1,n}}}\left[\min_{i=\overline{1,n}}\left(\mu_{\tilde{x}_i}\left(x_i^*\right)\right)\right], \tag{1.10}$$

мұндағы, sup функциясы жоғарғы шекара, ал supp – анық емес көпмүшенің таратушысы.

Көрсетіліп отырған формуладағы есептеулер үлкен әрі қолайсыз, дискретті таратушылар арқылы берілген анық емес сандар үшін келесі түрде таратылуы мүмкін [16, 24]:

Қадам 1. $y=y^*$ функциясының мәнін жазып қою.

Қадам 2. $y^*=f\left(x_{1j}^*,x_{2j}^*,\ldots,x_{nj}^*\right)$ және $x_{ij}^*\in\mathrm{supp}\left(\tilde{x}_i\right),\ i=\overline{1,n}$ шарттарын қанағаттандыратын $\left\{x_{1j}^*,x_{2j}^*,\ldots,x_{nj}^*\right\},\ j=1,P$ барлық аргументтері көпмүшелерін табу .

Қадам 3. y^* элементінің тиістілік функциясының мәнінің $\tilde{y}$ анық емес санына жататындығын келесі формула бойынша есептеу

$$\mu_{\tilde{y}}\left(y^*\right)=\max_{j=1,\ldots P}\min_{i=1,n}\left(\mu_{\tilde{x}_i}\left(x_{ij}^*\right)\right).$$

Қадам 4. Егер барлық y^* элементтер қарастырылса, онда 5 қадамға көш, әйтпесе y^* жаңа мәнін таңда және 2 қадамға көш.

Қадам 5. Соңы.

Егер анық емес аргументтердің $\tilde{x}_i$ тиістілік функциясы, $i=1,n$ үздіксіз функциялар болып табылса, онда анық емес аргументтер дискреттеледі [24], ал $\tilde{y}$ санының үздіксіз тиістілік функциясын $\mu_{\tilde{y}}\left(y^*\right)$ дискретті функциясының аппроксимациясының нәтижесінде алынады. Заде жалпылау принципін қолдану үлкен есептеу қиындықтарымен байланысты. Басқа да [16, 24], есептеу қиындықтары азырақ жалпылау принциптары бар.

Анық емес сандар және интервалдар үшін арифметикалық операциялар Заде жалпылау принципінің көмегімен анықталуы мүмкін. Айталық, $A\in\mathrm{R}$ және $B\in\mathrm{R}$ – $\mu_A\left(x\right)$ және $\mu_B\left(y\right)$ тиістілік функциялары бар өзбетінше алынған анық емес санадар немесе интервалдар, R – айғақты сандар көпмүшесі. Әрі A және B көпмүшелері шексіз болуы мүмкін.

Қарама-қарсы анық емес сандар (интервалдар) алу операциясы үшін $-A = C = \{z, \mu_C(z)\}$ тиістілік функциясы келесі формула бойынша анықталады

$$\mu_C(z) = \sup_{z=-x} \{\min(\mu_A(x))\}. \quad (1.11)$$

Кері анық емес сандар (интервалдар) алу операциясы үшін $A^{-1} = C = \{z, \mu_C(z)\}$ тиістілік функциясы келесі формула бойынша анықталады

$$\mu_C(z) = \sup_{z=\frac{1}{x}} \{\min(\mu_A(x))\}. \quad (1.12)$$

Екіорынды арифметикалық операциялар (қосу, азайту, көбейту және бөлу) $\mathrm{R} \times \mathrm{R}$ декарттық туындысында анықталған.

Анық емес сандардың (интервалдардың) $A + B = C = \{z, \mu_C(z)\}$ *қосындысы* операциясының тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады

$$\mu_C(z) = \sup_{z=x+y} \{\min(\mu_A(x)), (\mu_B(y))\}. \quad (1.13)$$

Анық емес сандардың (интервалдардың) $A - B = C = \{z, \mu_C(z)\}$ *азайтындысы* операциясының тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады

$$\mu_C(z) = \sup_{z=x-y} \{\min(\mu_A(x)), (\mu_B(y))\}. \quad (1.14)$$

Анық емес сандардың (интервалдардың) $A \bullet B = C = \{z, \mu_C(z)\}$ *көбейтіндісі* операциясының тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады

$$\mu_C(z) = \sup_{z=x\cdot y} \{\min(\mu_A(x)), (\mu_B(y))\}. \quad (1.15)$$

Анық емес сандардың (интервалдардың) $A / B = C = \{z, \mu_C(z)\}$ *бөліндісі* операциясының тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады

$$\mu_C(z) = \sup_{z=x/y} \left\{ \min\left(\mu_A(x)\right), \left(\mu_B(y)\right) \right\}. \qquad (1.16)$$

– формулаларында теңдік белгісінің оң жағында супремум (supp) функциясы орналасқан, көрсетілгендей универсумның элементтерінің көпмүшесінің мәндерінің әрбірі бойынша алынады, олар өз кезегінде операцияларды анықтау аймағындағы элементтерінің сандық мәндерімен жүргізілетін сәйкес қарапайым арифметикалық операциялар нәтижесі болып табылады. *A* және *B* ақырғы көпмүшелер үшін супремум операциясының орнына максимум операциясын қолдануға болады.

Заде жалпылау принципі негізінде арифметикалық операцияларды орындау тіпті қиынға түседі. (*L-R*)-*функциялары* [12, 14, 17, 26] деп аталатын түрде берілетін, анық емес сандар және интервалдармен жүргізілетін операциялар іс жүзінде кеңінен таралған. Анық емес сандар және интервалдардың (*L-R*)-*функциялары* түрінде көрсету қарапайым анық емес сандар және интервалдар үшін мүмкін. Іс жүзінде қолданылатын сандар және интервалдар қарапайым болып табылады, сондықтан бұл шектеу маңызды болып табылмайды.

(*L-R*)-*функциялар* – *R* шынайы сандар көпмүшесінде берілген, және $\mathrm{R} \to [0,1]$ бейнелеуін жүзеге асыратын, $[0,+\infty)$ интервалында өспейтін әрі келесі көрсетілген қосымша шарттарды қанағаттандыратын өзбетінше функциялар

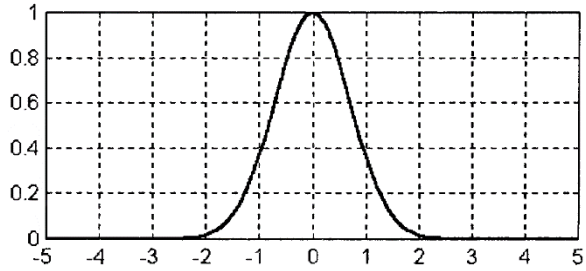
$L(-x) = L(x), \quad R(-x) = R(x)$ нақтылық шарты

$L(0) = R(0)$ қалыптылық шарты

(*L-R*)-функцияларның мысалы ретінде үшбұрышты және трапеция түріндегі тиістілік функциялары, сонымен қатар $f(x) = e^{-|x|^p}$ (сурет 16) табылады,

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^p},$$

мұндағы $p \geq 0$



Сурет 16 – $p = 2$ кезіндегі $f(x) = e^{-|x|^p}$ функциясының графигі

(L-R)-типіндегі анық емес сан деп композиция түріндегі кейбір *L*-функция (ағылшын сөзінің *left* – сол) және кейбір *R*-функциясы (ағылшын сөзінің *right* – оң) түрінде көрсетілуі мүмкін тиістілік функциясы бар $A = \{x, \mu_A(x)\}$ анық емес өлшемін айтамыз:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a - x}{\alpha}\right), & \text{егер}, x \le a \\ R\left(\dfrac{x - a}{\beta}\right), & \text{егер}, x \ge a \end{cases} \qquad (1.17)$$

мұндағы α – анық емес санның модальды мәні (модасы), $\alpha > 0$ және $\beta > 0$ – анық еместіліктің сол және оң коэффициенттері.

Сонымен, (*L*-*R*)-типіндегі анық емес сан фиксирленген *L* және *R* функциялары кезінде үштік параметрмен анықталады $\langle a, \alpha, \beta \rangle$. (*L*-*R*)-типіндегі анық емес сандармен жүргізілетін операциялар осы үштік параметрлерімен қиындастырылады. (*L*-*R*)-типіндегі анық емес сандар жиі $A_{LR} = \langle a, \alpha, \beta \rangle$ ретінде белгіленеді.

(L-R)-типіндегі анық емес интервал деп композиция түріндегі кейбір *L*-функция және кейбір *R*-функциясы түрінде көрсетілуі мүмкін тиістілік функциясы бар $A = \{x, \mu_A(x)\}$ анық емес өлшемін айтамыз:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & \text{егер} \quad x \le a \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & \text{егер} \quad x \ge a \end{cases} \tag{1.18}$$

мұндағы a және b – анық емес көпмүшенің ядросын анықтайтын төменгі және жоғарғы модальды мәндер ($a < b$); $\alpha > 0$ және $\beta > 0$ – анық еместіліктің сол және оң коэффициенттері.

(*L*-*R*)-типіндегі анық емес сан фиксирленген *L* және *R* функциялары кезінде төрттік параметрмен анықталады $\langle a, b, \alpha, \beta \rangle$. (*L*-*R*)-типіндегі анық емес сандармен жүргізілетін операциялар осы төрттік параметрлерімен қиындастырылады. (*L*-*R*)-типіндегі анық емес сандар жиі $A_{LR} = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle$ ретінде белгіленеді.

(*L*-*R*)-типіндегі анық емес сандар және интервалдармен жүргізілетін арифметикалық операциялардың нәтижесі нақты немесе оған жуық сондай L-типі және R-типіндегі функциялары бар (*L*-*R*)-типіндегі анық емес сан немесе интервалға тең, ал функция параметрлері алғашқы сан және интервалдар параметрлерінің негізінде есептеледі. Айталық $A_{LR} = \langle a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$ және $B_{LR} = \langle a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$ – (*L*-*R*)-типіндегі анық емес өзбетінше сандар, $C_{LR} = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle$ – операция нәтижесі болып табылатын анық емес сан. Еш дәлелдеусіз (*L*-*R*)-типіндегі [14] (кесте 2) анық емес сандармен жүргізілетін арифметикалық операциялар үшін нәтиже параметрлерін есептеуге арналған формуланы келтірейік. Кейбір [12] келтірілген формулалар ерекшеленеді.

Кесте 2 – (L-R)-типіндегі анық емес сандармен жүргізілетін арифметикалық операциялардың параметрлерінің нәтижесі

Операция	a	a	β
Қарама қарсы анық емес сандар $C = -A$	$-a_1$	β_1	a_1
Кері анық емес сан $C = -A^{-1}$	$\frac{1}{a_1}$, $a_1 \neq 0$	$\frac{\beta_1}{a_1(a_1+\beta_1)}$, $a_1 \neq 0$	$\frac{\alpha_1}{a_1(a_1-\alpha_1)}$, $a_1 \neq \alpha_1$

Анық емес сандардың қосындысы $C = A + B$	$a_1 + a_2$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$\beta_1 + \beta_2$
Анық емес сандардың азайтындысы $C = A - B$	$a_1 - a_2$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$\beta_1 + \beta_2$
Оң анық емес сандардың көбейтіндісі $A > 0$, $B > 0$ (бұлардың таратушылары тек оң сандардан тұрады) $A \bullet B$	$a_1 a_2$	$a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2$	$a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + \beta_1\beta_2$
Оң $A > 0$ және теріс $B < 0$ анық емес сандардың көбейтіндісі $A \bullet B$	$a_1 a_2$	$a_1\alpha_2 - a_2\beta_1 + \alpha_2\beta_1$	$a_1\beta_2 - a_2\alpha_1 - \alpha_1\beta_2$
Теріс $A < 0$ және оң $B > 0$ анық емес сандардың көбейтіндісі $A \bullet B$	$a_1 a_2$	$-a_1\beta_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\beta_2$	$-a_1\alpha_2 + a_2\beta_1 - \alpha_2\beta_1$
Теріс анық емес сандардың $A < 0$ және $B < 0$ көбейтіндісі $A \bullet B$	$a_1 a_2$	$-a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - \beta_1\beta_2$	$-a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$
Анық емес нөлдердің («шамамен» анық емес сандар») көбейтіндісі	0	$\max(\alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1)$	$\max(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2)$
Анықталмаған белгідегі екі анық емес сандардың көбейтіндісі (*өзбетінше сандар* – тартушы элементтері әртүрлі болуы мүмкін) $A \bullet B$		$a_1 a_2 - \min\big[(a_1 - \alpha_1)(a_2 - \alpha_2),$ $(a_1 - \alpha_1)(a_2 + \beta_2),$ $(a_1 + \beta_1)(a_2 - \alpha_2),$ $(a_1 + \beta_1)(a_2 + \beta_2)\big]$	$-a_1 a_2 + \max\big[(a_1 - \alpha_1)(a_2 - \alpha_2),$ $(a_1 - \alpha_1)(a_2 + \beta_2),$ $(a_1 + \beta_1)(a_2 - \alpha_2),$ $(a_1 + \beta_1)(a_2 + \beta_2)\big]$

Оң анық емес сандарды бөлу $A \div B$	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{a_1\beta_2 + a_2\alpha_1}{a_2(a_2+\beta_2)},\ a_2 \neq 0$	$\frac{a_1\alpha_2 + a_2\beta_1}{a_2(a_2-\alpha_2)},\ a_2 \neq 0,$ $a_2 - \alpha_2 \neq 0$
Оң анық емес санды теріс анық емес санға бөлу	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{a_1\beta_2 - a_2\beta_1}{a_2(a_2+\beta_2)},\ a_2 \neq 0$	$\frac{a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1}{a_2(a_2-\alpha_2)},\ a_2 \neq 0,$ $a_2 - \alpha_2 \neq 0$
Теріс анық емес санды оң анық емес санға бөлу	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{-a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1}{a_2(a_2-\alpha_2)},\ a_2 \neq 0,$ $a_2 - \alpha_2 \neq 0$	$\frac{-a_1\beta_2 + a_2\beta_1}{a_2(a_2+\beta_2)},\ a_2 \neq 0$
Теріс анық емес сандарды бөлу	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{-a_1\alpha_2 - a_2\beta_1}{a_2(a_2-\alpha_2)},\ a_2 \neq 0,$ $a_2 - \alpha_2 \neq 0$	$\frac{-a_1\beta_2 - a_2\alpha_1}{a_2(a_2+\beta_2)},\ a_2 \neq 0$
Анықталмаған белгідегі екі анық емес санды бөлу	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{a_1}{a_2} - \min\left(\frac{a_1-\alpha_1}{a_2-\alpha_2}, \frac{a_1-\alpha_1}{a_2+\beta_2}, \frac{a_1+\beta_1}{a_2-\alpha_2}, \frac{a_1+\beta_1}{a_2+\beta_2}\right),$ $a_2 - \alpha_2 \neq 0$	$-\frac{a_1}{a_2} - \max\left(\frac{a_1-\alpha_1}{a_2-\alpha_2}, \frac{a_1-\alpha_1}{a_2+\beta_2}, \frac{a_1+\beta_1}{a_2-\alpha_2}, \frac{a_1+\beta_1}{a_2+\beta_2}\right),$ $a_2 - \alpha_2 \neq 0$

Жалпылау принциптарын және L-R-көрсетілімдерді қолдана отырып орындалған арифметикалық операциялардың нәтижелерін салыстырғанымызда, олардың нәтижелерінде ұқсас, бірдей модальды мәндер және шашылған өлшемдер бар екендігін, бірақ тиістілік функциясының сәйкее келмейтіндігін байқаймыз. Анық емес сандармен жүргізілетін операцияларды орындау кезінде барлық уақытта анық емес сандар алынады. Сондықтан екі бірдей анық емес сандардың айырмашылығы $A - A$ анық емес нөлге тең.

Іс жүзінде кеңінен *(L-R)-типіндегі үшбұрышты анық емес сандар және (L-R)-типіндегі трапеция түріндегі анық емес интервалдар* қолданылады. Үшбұрышты тиістілік функциясын (L-R)-типіндегі анық емес санның тиістілік функциясымен салыстыра отырып, (*L-R*)-типіндегі $\langle b, b-a, c-b \rangle$ үшбұрышты санды сипаттайтын үштікті аламыз, мұндағы *a, b* және *c* – үшбұрышты тиістілік функциясының параметрлері . Трапеция түріндегі тиістілік функциясын (L-R)-типіндегі анық емес интервалдың тиістілік функциясымен салыстыра отырып (*L-R*)-типіндегі

$\langle b, c, b-a, d-c \rangle$ анық емес интервалды сипаттайтын төрттікті аламыз, мұндағы a, b, c, d – трапеция түріндегі тиістілік функциясының параметрлері . (*L-R*)-типіндегі үшбұрышты анық емес сандармен және (*L-R*)-типіндегі трапеция түріндегі анық емес интервалдармен жүргізілетін операциялар (*L-R*)-типіндегі анық емес сандардың операцияларының тәртіптеріне сәйкес өңделеді, бірақ есептеулер маңызды жеңілдетіледі.

2. АНЫҚ ЕМЕС ЛОГИКА НЕГІЗДЕРІ. АНЫҚ ЕМЕС ШЫҒАРУ ЖҮЙЕЛЕРІ

2.1. Анық емес пікірлер. Анық емес пікірлермен жүргізілетін логикалық операциялар

Элементарлы анық емес пікірлер деп кейбір жағдайлардың сенімділік деңгейімен жорамалдауға мүмкін сәйкесінше тек ақиқат немесе жалған екендігін көрсететін, аяқталған ойды білдіретін, хабарлы сөйлем аталады. Анық емес пікірлердің толық түсінігі 2.3 бөлімде қарастырылады. Анық емес пікірдің мысалы ретінде «Науқастың жоғары температурасы» пікірі болып табылады. Классикалық математикалық логикадағы ақиқаттылықтың көптеген мәндерінің элементарлы пікірлері екі элементтен тұрады: {«ақиқат», «жалған»} немесе $\{1, 0\}$. *A* элементарлы анық емес пікірлері анық емес логикада *ақиқаттылық мәні* (*деңгейі*) [1-2] ретінде тұйық $[0,1]$ интервалындағы мәндерді қабылдайды. 0 және 1 мәндері ақиқаттылық деңгейінің шекті мәні болып табылады және «ақиқат» және «жалған» мәндерімен сәйкес келеді. Ақиқаттылықтың анық емес логикасында өздерінің тиістілік функциялары, «ақиқат» және «жалған» термдері бар лингвистикалық айнымалы ретінде қарастырылатын. Мысалы, Заде [6] «ақиқат» және «жалған» термдері үшін келесі тиістілік функцияларын ұсынады

$$\mu_{\text{ақиқат}"}(u)=\begin{cases}0, & 0\le u\le a,\\ 2\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, & a<u\le\dfrac{a+1}{2},\\ 1-2\left(\dfrac{u-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2}<u\le 1,\end{cases}$$

$$\mu_{\text{жалған}"}(u)=\mu_{\text{ақиқат}"}(1-u),$$

мұндағы $u \in [0,1]$ – ақиқаттылық мәні; $a \in [0,1]$ – «ақиқат» және «жалған» анық емес көпмүшелердің таратушыларын беретін параметр. «Ақиқат» анық емес көпмүшесі үшін таратушы ретінде $(a,1]$ интервалы, ал «жалған» анық емес көпмүшесі үшін – $[0,a)$ алынады.

«Өте», «азды-көпті» лингвистикалық модификаторлары «өте жалған», «азды-көпті жалған» термдерін алуға мүмкіндік береді және т.б.

Анық емес логикада логикалық операцияларды анықтау үшін ақиқаттылық кестесін қолданады. Бірақ анық емес пікірлер анық емес пікірлер көпмүшесінің элементтері болып табылады, сондықтан логикалық операциялар үшін 1.5 бөлімде қарастырылған анық емес көпмүшелермен жүргізілетін операциялар қолданылады. Анық емес пікірлермен жүргізілетін негізгі операцияларды қарастырайық. Ұқсастығы бойынша анық емес көпмүшелерді жалпы A және B анық емес пікірлері арқылы белгілейік, ал осы пікірлердің ақиқаттылық мәндерін беретін тиістілік функцияларын $\mu_A(u)$ және $\mu_B(u)$, $u \in U$ арқылы белгілейміз, мұндағы U – элементарлы анық емес пікірлердің көпмүшесі.

$\bar{A}$ анық емес пікірлердің терістеуі (сонымен қатар $\neg A$, not A, не A белгілеулері қолданылады) операциясы деп, нәтижесі анық емес пікірлер болып табылатындар аталады, оның тиістілік функциясы келесі түрде беріледі

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u).$$

A және *B анық емес пікірлердің логикалық конъюнкция* ($A \wedge B$ түрінде белгіленеді, сонымен қатар $A \& B$, A and B, A және B белгілеулері де қолданылады) – бұл логикалық операция, оның нәтижесі ретінде анық емес пікірлер алынады, әрі тиістілік функциясы *t*-нормалардың (1.5 бөлім) қолданылуы арқылы есептеледі. Мысалы, *min-конъюнкция* келесі формуламен анықталады

$$\mu_{A \wedge B}(u) = \min\left(\mu_A(u), \mu_B(u)\right).$$

Конъюнкцияны анықтау үшін сонымен қатар тиістілік функциясының *алгебралық көбейтіндісі* $\mu_{A\wedge B}(u)=\mu_A(u)\cdot\mu_B(u)$, *шекаралық көбейтіндісі* $\mu_{A\wedge B}(u)=\max\{\mu_A(u)+\mu_B(u)-1,0\}$, драстикалық көбейтінді қолданылуы мүмкін

$$\mu_{A\wedge B}(x)=\begin{cases}\mu_A(u), & \text{егер } \mu_B(u)=1,\\ \mu_B(u), & \text{егер } \mu_A(u)=1,\\ 0, & \text{басқа жағдайларда}\end{cases}$$

A және *B анық емес пікірлердің дизъюнкциясы* деп ($A\vee B$ ретінде белгіленеді, сонымен қатар *A*|*B*, *A* or *B*, *A* және *B* белгілеулері де қолданылады) нәтижесі анық емес пікірлер болып табылатындар аталады, оның тиістілік функциясы *s*-нормаларды (1.5 бөлім) қолдану арқылы есептеледі. Мысалы, *max-конъюнкция* келесі формуламен анықталады

$$\mu_{A\vee B}(u)=\max\left(\mu_A(u),\mu_B(u)\right).$$

Дизъюнкцияны анықтау үшін сонымен қатар тиістілік функциясының *алгебралық қосындысы*

$$\mu_{A\vee B}(u)=\mu_A(u)+\mu_B(u)-\mu_A(u)\cdot\mu_B(u),$$

шекаралық қосындысы $\mu_{A\vee B}(u)=\min\{\mu_A(u)+\mu_B(u),\ 1\}$,

$\mu_{A\wedge B}(u)=\max\{\mu_A(u)+\mu_B(u)-1,0\}$, драстикалық қосындысы қолданылуы мүмкін

$$\mu_{A\vee B}(x)=\begin{cases}\mu_A(u), & \text{егер } \mu_B(u)=0,\\ \mu_B(u), & \text{егер } \mu_A(u)=0,\\ 0, & \text{басқа жағдайларда}\end{cases}$$

A және *B анық емес пікірлердің эквиваленттілігі* деп ($A\equiv B$ ретінде белгіленеді, сонымен қатар $A\approx B$, $A\Leftrightarrow B$, $A\leftrightarrow B$ белгі-

леулері де қолданылады) нәтижесі анық емес пікірлер болып табылатын логикалық операция, оның тиістілік функциясы келесі формула бойынша есептеледі

$$\mu_{A\equiv B}(u)=\min\left\{\max\left\{\mu_{\bar{A}}(u),\mu_B(u)\right\},\max\left\{\mu_A(u),\mu_{\bar{B}}(u)\right\}\right\}.$$

Анық емес логикада маңызды рөлді *анық емес импликация* орындайды. Ескере кететініміз, классикалық математикалық логикада импликация деп *A* және *B* пікірлерімен орындалатын операциялар аталады, оның нәтижесі *A* пікірлердің ақиқаттылығы жағдайында және *B* пікірлерінің жалғандығы жағдайында «жалған» нәтижесін қабылдайды. Басқа жағдайларда импликация нәтижесі «ақиқат» болып табылады. Импликация $A\to B$ ретінде белгіленеді, сонымен қатар $A\Rightarrow B$, $A\supset B$, if A then B, A онда *B* белгілеулері де қолданылады. $A\to B$ пікірлері «*A*, *B* кірістіреді,», «*A*, *B* шығады, «, «егер *A* онда *B*,» (ең соңғы белгілеудің оқылу формасын өнім тәртіптерімен шатастыруға болмайды) ретінде оқылады.

Белгілідей [4, 12, 14] анық емес импликацияның тиістілік функцияларының бірнеше есептеу формулалары. *Мамдани* (*E. Mamdani*) *модельінде* тиістілік функциясы келесі формуламен анықталады

$$\mu_{A\to B}(u)=T\left(\mu_A(u),\mu_B(u)\right),$$

T – өзбетінше t-норма.

Ең жиі *«min» типіндегі тәртіптер* қолданылады, оны тағы *Мамдани анық емес импликациясы* деп те атайды

$$\mu_{A\to B}(u)=\min\left(\mu_A(u),\mu_B(u)\right). \qquad (1.19)$$

Сонымен қатар *«көбейту» типіндегі тәртіптер,* немесе *Ларсен* (*Larsen*) *тәртібі* қолданылады

$$\mu_{A\to B}(u)=\mu_A(u)\cdot\mu_B(u). \qquad (1.20)$$

Мамдани типіндегі тәртіптер логикалық мәні жағынан импликация болып табылмайды, себебі $\mu_A(u)$ және $\mu_B(u)$ аралығындағы мәндер, 0 және 1 тең, тәртіптер анық логиканың классикалық импликациясының нәтижесін бере алмайды. Оны тексеру оңай, Мамдани тәртіптері бұл шарттар кезінде келесі мәндерді береді $\mu_{A\to B}(u)=1$ бірақ бұл кезде $\mu_A(u)=1$ и $\mu_B(u)=1$. Барлық басқа мәндерде $\mu_{A\to B}(u)=0$, ол классикалық математикалық логикаға үйлеспейді.

Импликацияның тиістілік функцияларын есептеудің бірнеше формулалары ұсынылған, олар логикалық мәндегі импликацияны береді [27]. Бәрінен бұрын, бұл Заде (*Zadeh L.*) классикалық импликациясы

$$\mu_{A\to B}(u)=\max\left\{\min\left\{\mu_A(u),\mu_B(u)\right\},1-\mu_A(u)\right\}.$$

Сонымен бірге келесі формулалар қолданылады:

• *Клин-Динестің* (*Kleene-Dienes*) *бинарлы импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(u)=\max\left\{1-\mu_A(u),\mu_B(u)\right\};$$

• *Лукасев*(*Łukasiewicz*) *импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(u)=\min\left\{1,\ 1-\mu_A(u)+\mu_B(u)\right\};$$

• *Райхенбаха (Reichenbach) импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(u)=1-\mu_A(u)+\mu_A(u)\cdot\mu_B(u);$$

• *Фодора (Fodor) импликациясы*

$$\mu_{AB}(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } \mu_A(u)\le\mu_B(u),\\ \max\left\{1-\mu_A(u),\ \mu_B(u)\right\}, \text{ егер } \mu_A(u)>\mu_B(u);\end{cases}$$

• *Решер* (*Rescher*) *импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } \mu_A(u)\le\mu_B(u),\\ 0, \text{ егер } \mu_A(u)>\mu_B(u);\end{cases}$$

• *Гогуен* (*Goguen*) *импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(x)=\begin{cases}\min\left\{1,\ \dfrac{\mu_B(u)}{\mu_A(u)}\right\}, & \text{егер } \mu_A(u)>0,\\ 1, & \text{егер } \mu_A(u)=0;\end{cases}$$

• *Гёдель* (*Gödel*) *импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(x)=\begin{cases}1, & \text{егер } \mu_A(u)\le\mu_B(u),\\ \mu_B(u), & \text{егер } \mu_A(u)>\mu_B(u);\end{cases}$$

• *Ягер* (*Yager*) *импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(x)=\begin{cases}1, & \text{егер } \mu_A(u)=0,\\ \mu_B(u)^{\mu_A(u)}, & \text{егер } \mu_A(u)>0;\end{cases}$$

• *Вильмотт* (*Willmott*) *импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(x)=\min\left\{\begin{array}{l}\max\{1-\mu_A(u),\ \mu_B(u)\}\\ \max\left\{\mu_A(u),1-\mu_B(u),\ \min\{1-\mu_A(u),\ \mu_B(u)\}\right\}\end{array}\right\};$$

• *Дюбу-Прайд (Dubois-Prade) импликациясы*

$$\mu_{A\to B}(x)=\begin{cases}1-\mu_A(u), & \text{егер } \mu_B(u)=0,\\ \mu_B(u), & \text{егер } \mu_A(u)=1,\\ 1, & \text{басқа жағдайларда}\end{cases}$$

Бұдан басқа да формулалар белгілі [12, 14].

2.2. Анық емес логикадағы шығарулар

Классикалық математикалық логикадағы шығарулардың тәртіптерін қарастырайық. Логикалық шығарулар жиі сұлбалар түрінде беріледі: горизонтальды сызықтың үстіне барлық пікірлер жазылады, олардың негізінде шешімдер қабылданады, ал сызықтың астына – шығарулардың нәтижелері жазылады. Егер сызықтың үстіндегі барлық пікірлер ақиқат болса, онда сызықтың астындағы пікірлер де ақиқат болады (ақиқат пікірлерден тек ақиқат нәтижелер ғана шығаруға болады).

Математикалық логикада екі негізгі шығару тәртіптері қолданылады:

• *modusponens* (латынша мақұлданған модус, «модус поненс» деп оқылады);

• *modustollens* (латынша терістейтін модус, «модус толленс» деп оқылады).

Modusponens тәртібі бойынша шығару сұлбасының түрі келесідегідей болады:

Пікірлер Импликация	A $A \to B$
Шығару	B

Modustollens тәртібі бойынша шығару сұлбасының түрі келесідегідей болады:

Пікірлер Импликация	$\overline{B}$ $A \to B$
Шығару	$\overline{A}$

Мұндағы A және B – кейбір пікірлер.

Анық емес шығаруларда *modusponens* және *modustollens* тәртіптеріндегі пікірлер кейбір анық емес көпмүшелермен сипатталады. Осылайша анық емес логикадағы шығарулардың жалпыланған тәртіптерін аламыз. *Modusponens анық емес жалпыланған тәртіптер* келесі шығару сұлбасымен анықталады

Пікірлер Импликация	x, A' үшін бар Егер x, A үшін бар болса онда y, B үшін бар
Шығару	y, B' үшін бар

мұндағы $A, A' \subseteq \mathbf{X}$ және $B, B' \subseteq \mathbf{Y}$ – анық емес көпмүшелер; x және y – лингвистикалық айнымалылар.

Мысалды қарастырайық [18]. Айталық анық емес шығарулар сұлбасы бар болсын:

Пікірлер Импликация	Автокөлік жылдамдығы үлкен Егер автокөлік жылдамдығы өте үлкен, онда шудың деңгейі жоғары
Шығару	Автокөліктегі шудың деңгейі өте жоғары емес

Лингвистикалық айнымалылар ретінде: x – «автокөлік жылдамдығы», y – «шудың деңгейі» алынады. x лингвистикалық айнымалының терм-көпмүшесі болып келесі көпмүше табылады

$$T_1 = \{\text{"аз жылдамдық","орташа жылдамдық","үлкен жылдамдық",өте үлкен жылдамдық"}\},$$

y лингвистикалық айнымалының терм-көпмүшесі болып келесі көпмүше табылады

$$T_2 = \{\text{"шудың деңгейі төмен","шудың деңгейі орташа","шудың деңгейі өте жоғары емес","шудың деңгейі жоғары"}\}$$

Терм-көпмүшелерінің T_1 және T_2 әрбір элементіне сәйкес, кейбір тиістілік функциясы бар анық емес көпмүшелерді қоюға болады. Мысалда A' – «автокөліктің жылдамдығы үлкен « және B – «шудың деңгейі жоғары» анық емес көпмүшелерін ерекшелеуге болады. Концентрациялау модификаторының көмегімен (1.5 бөлім) A – «автокөліктің жылдамдығы өте үлкен» көпмүшесі үшін тиістілік функциясын құруға болады. Созғылау модификаторының көмегімен B' – «шудың деңгейі өте жоғары емес» көпмүшесін құруға болады.

Анық емес шығарулар анық шығарулардан ерекшеленеді. Анық шығаруда анық тәртіптердің импликациясынан A пікір-

лерінің осы тәртіптердің шарттарында бар болуы. Анық емес шығаруларда A' пікірлері жалпы жағдайда тек шамамен ғана анық емес импликациядан алынған A пікіріне тең. Нәтижесінде B' анық емес шығарулар қорытындысы B анық емес импликация қорытындысынан ерекшеленеді.

B' анық емес шығарулар қорытындысының тиістілік функциясының қалыптастырылуын қарастырайық. $A \to B$ анық емес импликациясы анық емес қатынас болып табылады. Себебі $A, A' \subseteq \mathbf{X}$ және $B, B' \subseteq \mathbf{Y}$, онда $A \to B$ анық емес импликациясы $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ анықтау аймағындағы қатынасты көрсетеді және тиістілік функциясы $\mu_{A \to B}(x, y)$. Анық емес импликацияның тиістілік функцияларын есептеуге болады (2.1 бөлім). B' қорытындысы A' анық емес көпмүшесінің композициясын (комбинациясын) және анық емес қатынас – импликациясын $A \to B$ (1.6 бөлім) көрсетеді, яғни $B' = A' \otimes (A \to B)$, олардың тиістілік функциялары есептелуі мүмкін, мысалы, бойынша. Бұл жағдайда біз *Заде анық емес шығарулардың композициялық тәртіптерімен* істі боламыз [23, 24].

Modustollens анық емес жалпыланған тәртіптер шығарулар сұлбасымен анықталады

Пікірлер Импликация	*y*, *B′* үшін бар Егер *x, A* үшін бар болса онда *y*, *B* үшін бар
Шығару	*x, A′* үшін бар

мұндағы $A, A' \subseteq \mathbf{X}$ және $B, B' \subseteq \mathbf{Y}$ – анық емес көпмүшелер; *x* және *y* – лингвистикалық айнымалылар.

Қарастырылған мысалда анық емес шығарулардың сұлбасын қарастырайық:

Пікірлер Импликация	Автокөліктегі шудың деңгейі өте жоғары емес Егер автокөлік жылдамдығы өте үлкен болса, онда шудың деңгейі өте жоғары
Шығару	Автокөлік жылдамдығы үлкен

A' анық емес қорытындысының анық емес қатынастардың композициясынан және анық емес $A' = (A \to B) \otimes B'$ көпмүшесімен анықталатындығын көру қиын емес.

2.3. Анық емес лингвистикалық пікірлер

Анық емес лингвистикалық пікірлер деп келесі үш түрдегі анық емес пікірлерді айтамыз [12]:

Анық емес пікірлер «β, α үшін бар» («β is α»), мұндағы β – лингвистикалық айнымалының атауы, α – дегеніміз β – лингвистикалық айнымалының T базалық терм-көпмүшелерінен алынатын жеке лингвистикалық терм сәйкес келетін, лингвистикалық айнымалының мәні. Лингвистикалық терм өзінің тиістілік функциясымен беріледі.

«β, $\nabla\alpha$ үшін бар» пікірлері, мұндағы ∇ – «ӨТЕ», «АЗДЫ НЕМЕСЕ КӨПТІ», «ӨТЕ ҮЛКЕН» және басқалар сияқты сөздерге сәйкес лингвистикалық модификатор. $\nabla\alpha$ мәні берілген лингвистикалық айнымалының G және M процедураларын қолдана отырып қалыптастырылады.

Құрама пікірлер, 1 және 2 пікірлердің түрлері арқылы құрылатын және «ЖӘНЕ», «НЕМЕСЕ», «ЕГЕР-ОНДА», «ЕМЕС» байланыс формалары арқылы құрылған анық емес логикалық операциялар.

Ары қарай анық емес лингвистикалық пікірлерді қарапайым анық емес пікірлер деп атаймыз.

Мысалы, «науқастың температурасы өте жоғары» пікірі екінші түрдегі пікір болып табылады. «Науқастың температурасы» лингвистикалық айнымалысы «Өте жоғары температура» мәндерін қабылдайды. Бұл «жоғары температура» тиістілік функциясына «ӨТЕ» модификаторының мәнін қолдану арқылы пайда болды.

2.4. Анық емес өнімдердің тәртіптері

Анық емес өнімдердің тәртіптері (немесе қарапайым – *анық емес өнімдер*) деп келесі өрнекті айтамыз

$$(i):\ Q; P; A \to B; S; F; N,$$

мұндағы – анық емес өнімдердің атауы; Q – өнім көрсететін, анық емес өнімдердің қолдану аймағы, яғни білімдердің пәндік

аймағы; P – анық емес өнімдердің ядроларының қолданылу шарты (логикалық өрнектер, олардың ақиқаттылығы кезінде өнімдер ядросының активизациясы мүмкін болады; өнімнің бұл элементі жиі түсіріледі немесе ядро өнімдеріне енгізіледі); $A \to B$ – анық емес өнімдерінің ядросы; A – ядро шарты (ағылшын сөзінен *antecedent* – антецедент); B – ядроның аяқталуы (ағылшын сөзінің *consequent* – консеквент); S –A ақиқаттылық шартының деңгейінің белгілі мәні негізінде B ядросының ақиқаттылық қорытындылау деңгейінің сандық мәнін анықтау әдісі немесе тәсілдер (S әдісі алгоритмді анықтайды немесе анық емес шығарулар сұлбасы деп аталады); F – анық емес өнімдердің анықталғандылық немесе сенімділік коэффициенті (анық емес өнімдердің тәртіптерінің салмақтық коэффициенті), [0, 1] интервалындағы мәндерді қабылдайды (барлық шығару алгоритмдерінде қолданыла бермейді); N – өнімнің кейінгі шарттары – өнімдердің ядросын тарату жағдайларында орындалуы керек әрекеттер (B ақиқаттылығы жағдайында).

Әдетте өнімдердің ядросы «ЕГЕР A ОНДА B» (ағылшын сөзі: «IF A THEN B») формасында жазылады. Анық емес шығарулар жүйесінде A шарты және B қорытындысының өнімдер ядросы анық емес лингвистикалық пікірлер формасында қалыптастырылады (2.3 бөлім). Онда анық емес өнімдердің тәртіптері келесі түрде жазылады, мысалы:

ТӘРТІП $\langle \# \rangle$: ЕГЕР «β_1, α_1 үшін бар», ОНДА «β_2, α_2 үшін бар», * MERGEFORMAT (1.21)

мұндағы $\langle \# \rangle$ – тәртіп нөмірі, «β_1, α_1 үшін бар» – тәртіптің шарты, «β_2, α_2 үшін бар» – тәртіптің қорытындысы, себебі $\beta_1 \neq \beta_2$.

Өнімдердің анық емес тәртіптерінің жүйесі немесе *Өнімдердің анық емес жүйесі* – бұл «ЕГЕР A ОНДА B» формасындағы жеке анық емес өнімдердің келісілген көпмүшесі, мұндағы A және B – 1, 2 немесе 3 түрдегі анық емес лингвистикалық пікірлер.

Анық емес өнімдердің шарттары немесе қорытынды тәртіптері ретінде, анық емес логикалық операциялармен байланысқан, жиі құрама, 1 және 2 (ішкішарттар) түріндегі пікірлер арқылы құ-

рылған анық емес пікірлер алынады. Бір ғана лингвистикалық айнымалыларға жататын анық емес пікірлер анық емес логикалық операциялармен байланысқан болсын. Мысалы, «β, α_1 үшін бар» НЕМЕСЕ «β, α_2 үшін бар». Бұл пікірлер «β, α_3 үшін бар» анық емес пікірлеріне эквивалентті, мұндағы α_3 терм-көпмүшесіне α_1 және α_2 термдеріне сәйкес келетін анық емес көпмүшелердің қиылысуына тең анық емес көпмүшелер сәйкес. Мысалы,

«науқастың температурасы жоғары» НЕМЕСЕ *«науқастың температурасы өте жоғары»* анық емес пікірлері

«науқастың температурасы жоғары немесе өте жоғары»

пікірлеріне эквивалентті.

«Жоғары немесе өте жоғары» тиістілік функциясы қарастырылған тәртіптер бойынша есептеледі. Мысалда *«өте»* модификаторы қолданылған. Сонымен бірге «β, α_1 үшін бар» ЖӘНЕ «β, α_2 үшін бар» түріндегі пікірлер де өңделеді.

Егер ішкішарттар әртүрлі лингвистикалық айнымалылардан тұрса, мысалы,

ТӘРТІП $\langle\#\rangle$: ЕГЕР «β_1, α_1 үшін бар», ЖӘНЕ «β_2, α_2 үшін бар»
ОНДА«β_3, α_3 үшін бар», (1.22)

немесе

ТӘРТІП $\langle\#\rangle$: ЕГЕР «β_1, α_1 үшін бар», НЕМЕСЕ «β_2, α_2 үшін бар»
ОНДА«β_3, α_3 үшін бар», (1.23)

мұндағы $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$, онда тәртіптердің сол жақ бөлігінде агрегирленген шарттар қолданылады (2.5 ішкібөлігі).

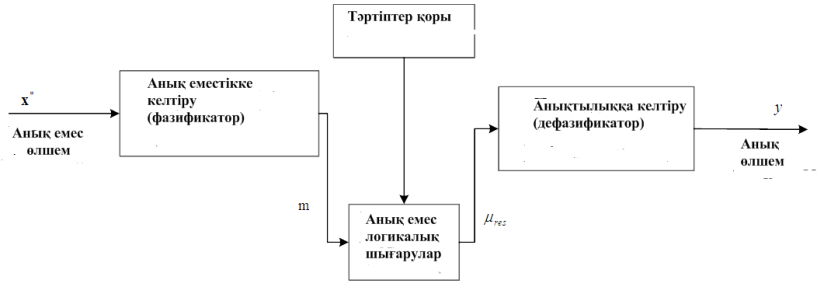
Анық емес өнімдердің тәртіптерінің қорытындысы да құрама болуы мүмкін, яғни бірнеше ішкіқорытындылардан тұруы мүмкін. Егер ішкіқорытындылар бір ғана лингвистикалық айнымалыдан тұратын болса, онда анық емес логикалық операциялар қолданылады. Егер ішкіқорытындылар әртүрлі лигвистикалық айнымалылардан тұратын болса, мысалы,

ТӘРТІП $\langle\#\rangle$: ЕГЕР «β_1, α_1 үшін бар», ОНДА «β_2, α_2 үшін бар»
ЖӘНЕ «β_3, α_3 үшін бар», (1.24)

мұндағы $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$, онда анық емес өнімдердің тәртіптерінде қорытынды аккумуляция қолданылады (2.5 ішкібөлім).

2.5. Анық емес шығару кезеңдері

Анық емес шығарулар процессінің типтік құрылымы келесі сурет 17 көрсетілген.



Сурет 17 – Анық емес шығарулар процессі

Бәрінен бұрын, анық емес өнімдердің тәртіптерінің ақырлы көпмүшесін көрсететін тәртіптер базасы қалыптастырылуы керек. Тәртіптер базасының қалыптастырылуы кіріс және шығыс лингвистикалық айнымалыларын, және сондай-ақ жеке тәртіптерін анықтаудан тұрады. Кіріс лингвистикалық айнымалылары деп тәртіптердің ішкішарттарында қолданылатын лингвистикалық айнымалыларды айтамыз. Шығыс айнымалылары – ішкіқорытындыларды қолданылатын айнымалылар. Лингвистикалық айнымалыларды анықтау деп терм-көпмүшелерінің тиістілік функцияларын және базалық терм-көпмүшелерінің айнымалыларын анықтауды айтамыз. Тәртіптер 2.4 бөлімде көрсетілгендей қалыптастырылады. Әрбір тәртіпке [0,1] интервалынан алынған мәнді қабылдайтын салмақ тіркелуі мүмкін. Егер салмағы болмаса, онда оның салмағы нөлге тең деп есептеуге болады.

Анық емес шығару жүйесінің кірісіне β_i лингвистикалық айнымалысының *анық* мәндері $\mathbf{x}^* = \left[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_i^*, \ldots \right]^{\mathrm{T}}$ векторына келіп түседі. *Фаззификация* блогы (ағылшын сөзінің *fuzzification* – анық еместілікке әкелу) осы лингвистикалық айнымалылардың мәндерінің анық емес көпмүше мәндеріне тиістілік деңгейін есептейді. Бұл үшін лингвистикалық айнымалылардың әрбір термінің функциялары мәлім болуы керек.

Фаззификация келесі түрде шығарылады. Айталық β_i кіріс лингвистикалық айнымалысының әрқайсысы үшін оның сандық x_i^* мәні белгілі болсын. β_i айнымалысы қатысқан ішкішарттардың әрбір пікірлерін қарастырамыз, мысалы, «β_i, α_i үшін бар», мұндағы α_i – белгілі $\mu_i(x)$ тиістілік функциясы бар терм. x_i^* мәні $\mu(x)$ аргументі ретінде қолданылады, оның нәтижесінде $m_i = \mu_i(x_i^*)$ табылады. Бұл кезде модификаторлар қолданылуы мүмкін. Осылайша анық емес шығарулардың барлық ішкішарттар жүйесінің ақиқаттылық мәндері есептеледі. Ішкішарттардағы пікірлер сандармен ауыстырылады. Фаззификация блогының шығысында $\mathbf{m} = \left[\mu_1(x_1^*), \mu_2(x_2^*), \ldots \mu_i(x_i^*), \ldots\right]^{\mathrm{T}}$ векторы қалыптастырылады, ол шығыс блогының кірісі болып табылады.

Анық емес логикалық шығару блогы кірісіне **m** барлық ішкішарттарының ақиқаттылық деңгейінің векторын алады және шығару мәнінің $\mu_{рез}$ нәтижелік тиістілік функциясын есептейді (шығару жүйесінің бірнеше шығыстары болуы мүмкін, онда әңгіме шығыс векторы жайында жүреді). Нәтижелік тиістілік функциясы келесі процедуралар арқылы есептеледі [12] (жақшада IEC 1131 – Programmable Controllers. Part 7 – Fuzzy Control Programming [12] контроллерлерді программалау тілдерінің халықаралық стандарттарына сәйкес процедуралар атаулары көрсетілген):

• шарттардың ақиқаттылық деңгейін есептеу (*Aggregation* – агрегирлеу);

• қорытындылардың активтендірілген тиістілік функцияларын анықтау (*Activftion* – активизация);

• шығыс лингвистикалық айнымалылардың нәтижелік тиістілік функцияларын анықтау (*Accumulation* – аккумуляция).

Шарттардың ақиқаттылық деңгейлерін есептеу процедурсында анық емес шығарулар (*агрегирлеу*) жүйесінің тәртіптерінің әрқайсысында анық емес шығару жүйесінің тәртіптерінің шарттарының әрбірі қарастырылады және шарттардың ақиқаттылық деңгейі есептеледі. Бастапқы деректер ретінде фаззификация блогында есептелген ішкішарттар ақиқаттылығының деңгейі (**m** векторы) алынады. Егер шартта түріндегі анық емес пікірлердің бірі бар болса, онда шарттың ақиқаттылық деңгейі шарттың пікірлерінің ақиқаттылық деңгейіне тең болады. Егер шарт конъ-

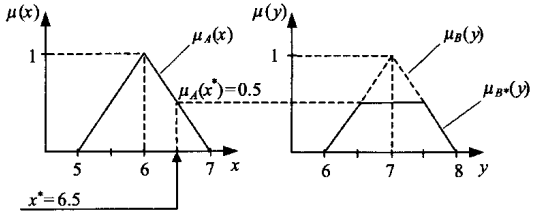
юнкция , немесе дизъюнкциямен байланысқан , екі ішкішарттарынан тұратын болса, шарттың орындалу деңгейі үшбұрышты нормалардың (1.5 бөлім) көмегімен есептеледі. Мысалы, ЕГЕР тәртібінің шарты үшін ЕГЕР «β_1, α_1 үшін бар», ЖӘНЕ «β_2, α_2 үшін бар» болса келесіні аламыз

$$\mu\left(x_1^*, x_2^*\right) = T\left(\mu_{\alpha_1}\left(x_1^*\right), \mu_{\alpha_2}\left(x_2^*\right)\right),$$

x_1^* және x_2^* – x_1 және x_2 кіріс айнымалыларының мәні, T – t-норманың операторларының бірі, $\mu_{\alpha_1}(x)$ және $\mu_{\alpha_2}(x)$ – α_1 және α_2 термдерінің тиістілік функциялары.

тәртібінің шарттары үшін ұқсас: $\mu\left(x_1^*, x_2^*\right) = S\left(\mu_{\alpha_1}\left(x_1^*\right), \mu_{\alpha_2}\left(x_2^*\right)\right)$, мұндағы S – s-нормның операторларының бірі. Егер шарт көптеген дизъюнкциялар мен конъюнкциялармен байланысқан ішкішарттардан тұратын болса, онда бірінші конъюнкциялармен байланысқан ішкішарттардың ақиқаттылық деңгейлері есептеледі, содан кейін – дизъюнкциялармен байланысқандары есептеледі. Әдеттегідей, жақшалар орындалу тәртіптерін бұзады. Ақиқаттылықты есептеудің келісілген тәртіптерін қолдану ұсынылады [12]. Мысалы, егер анық емес конъюнкцияны есептеу үшін *min*-қиылысу операциясы қолданылса, онда сәйкесінше анық емес дизъюнкцияны есептеу үшін *max*-бірігу операциясын қолдану керек .

Қорытындылардың активтендірілген тиістілік функцияларын анықтау (*активизация*) процедурасы анық емес импликация (2.1 бөлім) операциясына негізделген. Процедура үшін кіріс деректері ретінде тәртіп шарттарының ақиқаттылық деңгейі және шығыс өлшемдерінің тиістілік функциялары алынады, ал шығыс ретінде – барлық ішкіқорытындылардың тиістілік функциялары алынады. Мысал қарастырайық [14]. Айталық тәртіп келесі түрде берілсін делік ЕГЕР *(x=A)* ОНДА *(y=B)*, $\mu_A(x)$ және $\mu_B(y)$ тиістілік функциялары– үшбұрышты (сурет 18), $x^* = 6{,}5$ кіріс мәні, $\mu_A\left(x^*\right) = 0{,}5$ шарттың ақиқаттылық деңгейі (сурет 18 қараңыз).

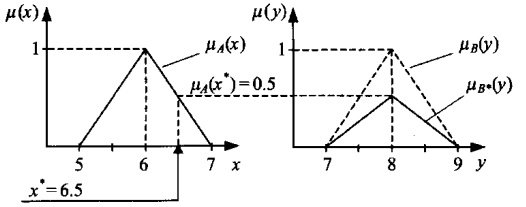


Сурет 18 – Мамдани импликациясын қолданған қорытындының активтендірілуі

Мамдани импликациясын қолданайық:

$$\mu_{A\to B}\left(x^*, y\right) = \min\left(\mu_A\left(x^*\right), \mu_B\left(y\right)\right).$$

Іс жүзінде қорытындының активтендірілген тиістілік функциясы Мамдани импликациясын қолданған кезінде қарапайым $\mu_B\left(y\right)$ қорытындылаудың тиістілік функциясының $\mu_A\left(x^*\right)$ (сурет 18) шарттың ақиқаттылық дәрежесінің деңгейіне дейінгі қиюы болып табылуы. Басқа да анық емес импликация операторларын қолдануға болады. Мысалы, «көбейту» тәртібін қолданып қорытындылауды активтендіру нәтижесі, сурет 19 көрсетілген.



Сурет 19 – «Көбейту» тәртібін қолданып қорытындыны активтендіру

Іс жүзінде, әсіресе тәртіптерде бірнеше ішкішарттардың бар болуын, Мамдани [12] (алгоритм 2.6 бөлімде қарастырылады) шығарулары алгоритміне негізделген *активтендірілген процедураларын* қолданған ыңғайлы. Бұл алгоритмде әрбір тәртіп үшін салмақтылық коэффициенті $F_i \in \left[0,1\right]$ беріледі. Егер салмақтық

коэффициент айқын түрде берілмесе, онда $F_i = 1$ осы мәнге тең болуы мүмкін. Бір тәртіптің жеке ішкіқорытындылары үшін әртүрлі салмақтық коэффициенттер берілуі мүмкін. *i*-ші тәртіптердің барлық ішкіқорытындылары үшін ақиқаттылық деңгейі келесі формула бойынша есептеледі $c_i = F_i \mu_{A_i}\left(x_i^*\right)$.

i-ші тәртіптің *j*-ші ішкіқорытындыларының активтендірілген тиістілік функциялары келесі анық емес композиция әдісіне негізделген формулалардың бірімен есептеледі:

min-активизация $\mu_j^*(y) = \min\left\{c_i, \mu_j(y)\right\}$;

prod-активизация $\mu_j^*(y) = c_i \cdot \mu_j(y)$.

Қарастырылған алгоритм бірнеше түрдегі ішкіқорытындылардан тұрған кезде ерекше ыңғайлы.

Себебі бір ғана ішкіқорытындыларға жататын шығыс лингвистикалық айнымалылары, жалпы түрде әртүрлі тәртіптерге жатады, яғни әрбір шығыс айнымалысы үшін *нәтижелік тиістілік функциясын* құру керек. Бұл процедура *аккумуляция* деп аталады. Аккумуляция *s*-норма активтендірілген тиістілік функцияларының бірін әрбір шығыс лингвистикалық айнымалымен біріктіру көмегімен шығарылады. Нәтижесінде әрбір шығыс айнымалысы үшін бір тиістілік функциясы, өте қиын формада, пайда болуы мүмкін.

Дефаззификация (*анықтылыққа әкелу*) – әрбір шығыс лингвистикалық айнымалысы үшін кейбір мәнде жақсы бейнеде анық емес айнымалыларды көрсететін анық мәндерді табу. Дефаззификацияның керектігі жүйенің шығысында анық емес шығарулардың керек болатындығымен түсіндіріледі, тәртіп бойынша, келіп түсетін анық мәндер, мысалы, орындалатын механизмдер. Себебі анық емес айнымалыларды бір санмен көрсетудің әртүрлі критерилері мүмкін, яғни әртүрлі дефаззификация әдістері кездеседі [12, 14, 24]. Шығыс лингвистикалық айнымалылардың нәтижелік тиістілік функцияларын анықтау нәтижесінде $\mu_{res}(y)$ нәтижелік тиістілік функциялары алынады. Унимодальды тиістілік функциясы үшін дефаззификацияның қарапайым әдісі болып тиістіліктің максимальды деңгейіне сәйкес келетін анық санды табу әдісі табылады. Бұл әдісті көпмодальды функцияларға жалпылау деп сол және оң модальды мәндер әдісі табылады.

Сол модальды мәндер әдісінде (*LM –LostMostMaximum*), басқа *бірінші максимум әдісі* деп те аталады (FM – FirstofMaxima) [14], немесе *максимумдардың ішіндегі ең азы* (*SOM – Smallest Of Maximums*) [24] анық мәні ретінде $y = \min\{x_m\}$ алынады, мұндағы x_m – нәтижелік тиістілік функциясының модальды мәні. Басқаша айтар болсақ, анық шығыс айнымалысы ретінде ең аз мода (сол жағында орналасқаны) алынады.

Оң модальды мәндер әдісінде (*RM* –RightMostMaximum), басқа *соңғы максимум әдісі* деп те аталады (LM – LastofMaxima), немесе *максимумдардың ішіндегі ең көбі* (*LOM – Largest Of Maximums*) анық мәні ретінде $y = \max\{x_m\}$ алынады, мұндағы x_m – нәтижелік тиістілік функциясының модальды мәні, яғни модалардың ішіндегі ең көп мода (оң жағында орналасқан). Сол және оң модальды мәндерді қолданып көрсетілген дефаззификация мысалдары сурет 20а және 20б келтірілген.

Орташа максимум әдісінде (*MM – MidleofMaxima*), немесе *максимумдар орталығы әдісінде* (*MOM – MeanOfMaximums)* тиістіліктің максимальды деңгейіне ие болатын әмбебап көпмүшелердің элементтерінің орташа арифметикалық ортасы орналасады

$$y = \frac{\int_G udu}{\int_G du},$$

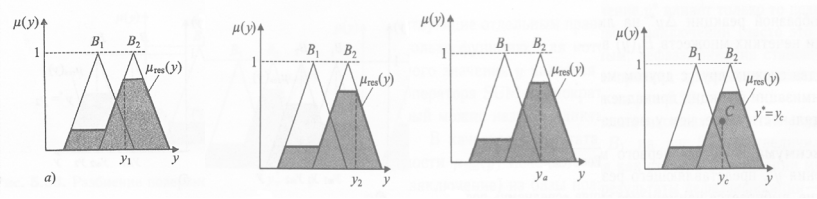
мұндағы G – анық емес көпмүшеге жататын максимальды деңгейі бар, интервалдан алынған барлық элементтердің көпмүшесі. Орталық максимум әдісін қолданып жасалған дефаззификация мысалы сурет 20в келтірілген.

Ауырлық түсу ортасы әдісі бойыша дефаззификация (CG – Center of Gravity, Centroid) анық емес көпмүшенің тиістілік функциясының графигі және кординаттар өзегімен шектелген жазық фигураның ауырлық түсу ортасын анықтау келесі формула бойынша жүргізіледі

$$y = \frac{\int_{Min}^{Max} x\mu(x)dx}{\int_{Min}^{Max} \mu(x)dx},$$

мұндағы *Min* және *Max* – шығыс айнымалысының таратушысының сол және оң жақ интервал нүктесі.

Ауырлық түсу ортасы әдісін қолданып жасалған дефаззификация мысалы сурет 20в көрсетілген.



а) б) в) г)

Сурет 20 – Дефаззификация мысалдары

а) – сол модальды мәндер әдісі бойынша дефаззификация нәтижесі $y = y_1$,

б) – оң модальды мәндер әдісі бойынша дефаззификация нәтижесі $y = y_2$,

в) – орташа максимум әдісі бойынша дефаззфификация нәтижесі,

г) – ауырлық түсу ортасы әдісі бойынша дефаззификация әдісі.

Аудан орталығы әдісі бойынша дефаззификация (CA – Center of Area, Bisector of Area, Bisector) y санын табудан тұрады,

$$\int_{Min}^{y} \mu(x)dx = \int_{y}^{Max} \mu(x)dx.$$

Әдістің геометриялық мәні абсцисса осіндегі нүктені табу, және осы нүктеде қалпына келтірілген перпендикуляр, ауданды тиістілік функциясының қисығы астынан теңдей екіге бөледі.

2.6. Анық емес шығару алгоритмдері

Анық емес шығарулар әртүрлі алгоритмдер бойынша таратылуы мүмкін, себебі шығарудың әртүрлі кезеңдері әртүрлі есептеу әдістерін және параметрлерін қолдануға мүмкіндік береді. Ең танымал алгоритмдерді қарастырайық.

Мамдани (*Mamdani E.H.*) алгоритімінің білімдер қорының тәртіптері келесі түрде болады:

(ЕГЕР «x_1 a_{1j} *үшін бар*»Θ «x_2 a_{2j} *үшін бар*» Θ... «x_n a_{nj} *үшін бар*») ОНДА y_k d_{kj} *үшін бар,* оның салмағы w_j,

мұндағы x_i – i-ші (i = 1, ..., n) кіріс лингвистикалық айнымалы, a_{ij} – j-ші тәртіптегі (j = 1, ..., m), i-ші айнымалының термі, y_k – k-шы шығыс айнымалысы (k = 1, ..., n), d_{kj} – j-ші тәртіптегі k-шы айнымалының қорытындысы (тәртіп логикалық операциялармен байланысқан бірнеше ішкіқортындылардан тұруы мүмкін), w_j – j-ші тәртіптің салмағы, Θ – ЖӘНЕ немесе НЕМЕСЕ логикалық операциялары.

Агрегирлеу процедурасында (шарттың ақиқаттылық деңгейін есептеу) кіріс векторы $\mathbf{x}^* = \left[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \right]$ үшін анық емес шығарулар жүйесінің әрбір тәртібіне келесі формула қолданылады

$$\mu_j\left(\mathbf{x}^*\right) = \chi_j\left(\mu_1\left(x_1^*\right), \mu_2\left(x_2^*\right), \ldots, \mu_n\left(x_n^*\right), \right),$$

мұндағы $\mu_j\left(\mathbf{x}^*\right)$ – j-ші тәртіптің ақиқаттылық шартының деңгейі, $\mu_i\left(x_i^*\right)$ – x_i кіріс айнымалысының фаззификациясының нәтижесі, χ_j t-норманы көрсетеді, егер j-ші тәртіпте тек ЖӘНЕ логикалық операциясы қолданылса, және s-норманы көрсетсе, егер j-ші тәртіпте тек НЕМЕСЕ логикалық операциясы қолданылса. Мамдани алгоритмінде t-нормалар әдетте минимум операцияларымен таратылады, ал s-нормалар – максимум операцияларымен. Егер шартта әртүрлі логикалық операциялар бар болса, онда жақшалардың болмаған кезінде бірінші ЖӘНЕ (t-нормалар), содан кейін – НЕМЕСЕ (s-нормалар) операциялары орындалады. Жақшалар операция тәртіптерін бұзады.

Әрбір ішкіқорытындылардың ақиқаттылығы (активизация процедурасы) $\mu_{d_{kj}^*}(y) = \min\left\{w_j \mu_j\left(\mathbf{x}^*\right), \mu_{d_{kj}}(y)\right\}$ тең, мұндағы w_j – j-ші тәртіптің салмағы; $\mu_j\left(\mathbf{x}^*\right)$ – j-ші тәртіптің агрегирлеу процедурасы кезінде табылған шартының ақиқаттылық деңгейі; $\mu_{d_{kj}}(y)$ – j-ші тәртіптегі k-шы шығыс өлшемінің тиістілік функциясы.

Мамдани алгоритміндегі әрбір шығыс айнымалысындағы (аккумуляция процедурасы) μ_{y_k} бірегей нәтижелік тиістілік функциясы бір шығыс айнымалысына жататын ішкіқорытындылардың ішкішарттарының тиістілік функцияларымен жүргізілетін максимум операциясының көмегімен табылады.

y_k' (дефаззификация процедурасы) шығыс айнымалысының анық мәні әдетте ауырлық түсу ортасының әдісі бойынша орындалады

$$y_k' = \frac{\int_{Min}^{Max} x\mu_{y_k}(x)dx}{\int_{Min}^{Max} \mu_{y_k}(x)dx},$$

мұндағы *Min* және *Max* – y_k шығыс айнымалысының сол және оң интервал нүктесінің таратушысы.

Сугено-Такаги (Takagi T., Sugeno M.) алгоритмінің ерекшеліктері ретінде келесі түрдегі білімдер қорының тәртіптерінің көрсетілімі табылады

(ЕГЕР «x_1 a_{1j} *үшін бар*»Θ «x_2 a_{2j} *үшін бар*» Θ... «x_n a_{nj} *үшін бар*») ОНДА $y_k = c_{j0} + c_{j1}x_1 + \ldots + c_{jn}x_n$

мұндағы x_i – i- (i = 1, 2, ..., n) кіріс лингвистикалық айнымалысы, a_{ij} – j-ші тәртіптегі (j = 1, 2, ..., m) i-ші айнымалының термі, y_k – k-ші шығыс айнымалысы (k = 1, 2, ..., n), $c_{j0}, c_{j1}, \ldots, c_{jn}$ – нақты сандар, Θ – ЖӘНЕ немесе НЕМЕСЕ логикалық операциялары.

Сугено-Такаги білімдер қорына тәртіптерді қорытындылау кіріс сызықты функциялары болып табылады.

Фаззификация процедурасы Мамдани алгоритміндегі фаззификациядан ешқандай айырмашылығы жоқ. Ішкішарттарды агрегирлеу процедурасында, тәртіп бойынша, min-конъюнкция операциясы қолданылады. Қорытындыларды активизациялау процедурасында *j*-ші тәртіптердің шығару айнымалыларының анық мәндері фаззификацияланбаған айнымалылардың $y_{kj} = c_{j0} + c_{j1}x_1^* + \ldots + c_{jn}x_n^*$ кіріс мәндерінің сызықты функциялары ретінде оқылады. Берілген алгоритмде қорытындылардың аккумуляция кезеңдері болмайды, себебі шығару айнымалылары анық болып табылады. Формальды шығару көпмүшелері бірнүктелі көпмүшелер болып табылады. Сондықтан дефаззификация үшін бірнүктелі көпмүшелерге арналған ауырлық түсу ортасы әдісін қолдануға болады

$$y'_k = \frac{\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_{kj}}{\sum_{j=1}^{m} \mu_j},$$

мұндағы y'_k – шығару айнымалысының анық мәндері y_k, μ_j – *j*-ші шарттың ақиқаттылық деңгейі, y_{kj} – *j*-ші шартта есептелген, y_k шығару айнымалысының мәні.

Басқа анық емес шығарулардың алгоритмдерімен [5, 7, 12, 24] танысуға болады.

3. АНЫҚ ЕМЕС НЕЙРОНДЫ (ГИБРИДТІ) ЖЕЛІЛЕР ТҮСІНІГІ

Анық емес шығарулардың процедураларында негізгі компоненттер ретінде анық емес өнімдердің тәртіптер қоры табылады. Сонымен қатар қолданбалы есептердің біршама класстары бар, бұл класстарда анық емес өнімдердің тәртіптерін құру және табу мүмкін емес немесе концептуальды сипаттағы біршама қиындыққа әкелетіндігімен байланысты. Мұндай есептерге бейнелерді тану, функциональдық экстраполяция және интерполяция тәуелділіктері, классификация және болжау, сызықты емес және ситуациялық басқару, сонымен қатар деректердің интеллектуальды талдауы (Data Mining) жатады.

Мұндай есептердің жалпы ерекшеліктері «қара жәшік» деп аталатын формада көрсетілген, жүйе модельдерінің кіріс және шығыс айнымалыларын байланыстыратын кейбір тәуелділіктер немесе қатынастардың бар болуы табылады. Бұл кезде модельденетін пәндік аймақта айқын теориялы-көпмүшелік немесе аналитикалық түрде мүмкін болмайтын ақпараттардың жетіспеушілігі салдарынан әйтпесе берілген тәуелділікті табу және анықтау, әйтпесе берілген тәуелділіктің сипатына әсер ететін факторлардың көптүрлілігін есептеу қиындығы.

Мұндай есептерді конструктивті шешу үшін, нейронды желілер деп аталатын атауға ие, арнайы математикалық аппарат өңделген. Нейронды желілер негізінде тұрғызылған модельдердің артықшылықтары ретінде кейбір болжамдар формасында пәндік аймақтың жаңа ақпараттарын алуға мүмкіндік беруін айтамыз. Бұл кезде нейронды желілерді баптау және құру оларды бар және қолжетімді ақпараттар негізінде оқыту арқылы жүзеге асырылады.

Нейронды желілердің кемшіліктеріне пәндік аймақ жайындағы білімдерді арнайы түрде көрсету болып табылады, олар бар байланыстар және қатынастардың мазмұндық интерпретациясының мүмкіндіктерінен біршама ерекшеленеді.

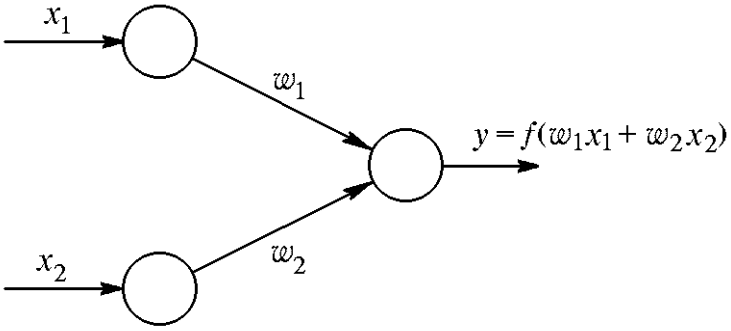
Анық емес нейронды желілер немесе гибридті желілер оларды өңдеушілердің ойы бойынша нейронды желілер және анық емес

шығарулардың артықшылықтарын біріктіру үшін жасалған. Бір жағынан, олар мазмұндық интерпретацияның қарапайымдылығы және көрнекілігінің болуымен, анық емес өнімдердің тәртіптерінің формасында жүйе модельдерін көрсетіп және өңдеуге мүмкіндік берсе. Басқа жағынан, анық емес өнімдердің тәртіптерін құру үшін нейронды желілер әдістерін қолданады, ол тым ыңғайлы және жүйелік аналитиктерге арналған еңбек сыйымдылық процессі азырақ болып табылады. Соңғы уақытта гибридті желілер аппараты жаппай мамандармен қолданбалы жүйелік талдаудың жаман құрылымдалған есептері үшін болашағы күштілердің бірі ретінде мойындалған.

3.1. Анық емес нейронды (гибридті) желілердің негізгі түсініктері және анықтамалары

Анық емес нейронды желі (fuzzy-neural networks) анық нақты сандар негізінде стандартты түрде функциональданады. Анық емес болып тек нәтижелердің интерпретациясы табылады.

Анық емес нейронды желілердің мәнін түсіндіру үшін, қарапайым екі кіріс және тек бір ғана нейроны бар нейронды желілерді қарастырайық (сурет 21).



Сурет 21 – Қарапайым нейронды желі

Мұндағы x_i кіріс сигналдары w_i өлшемімен «әрекеттеседі» әрі келесі көбейтіндіні құрады

$$p_i = x_i w_i, \quad i = 1,2$$

Мұндай жеке ақпарат (көбейтінді) қосу операциясын қолдану арқылы біріктіріледе, нейронның *net* кірісін құрады:

$$net = p_1 + p_2 = x_1 w_1 + x_2 w_2$$

Нейрон шығысы *net* кірісінің кейбір активациялық функциясының арқасында өзгеруінің нәтижесінде құрылады:

$$y = f\left(net\right) = f\left(x_1 w_1 + x_2 w_2\right),$$

мысалы, сигмоидальды тип

$$f\left(x\right) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \ .$$

Көбейту, қосу және сигмоидальды активизация функциясы операцияларын қолданатын, көрсетілген бірқабатты нейронды желілерді, енді стандартты нейронды желілер деп атаймыз.

Басқа операцияларды қолдану жағдайларында, мысалы t-норма немесе t-конорма (1.5 ішкібөлім), нейронды желілерге келеміз, олар анық емес нейронды желілер деп аталатын болады.

Анық емес нейронды (гибридті) желі – бұл өлшемі және активациялық функцияларымен, анық сигналдары бар нейронды желі, бірақ t-норма, t-конормаларды немесе басқа да кейбір үздіксіз операцияларды қолдану арқылы x_i және w_i, p_1 және p_2 біріктіріледі. Анық емес нейронды желілердің кіріс, шығыс және өлшемі, [0, 1] қимасына жататын нақты сандар болады. Анық емес нейронды желілер деп әдетте «ЖӘНЕ», «НЕМЕСЕ» нейрондарын қолданып жасаған көпқабатты архитектура негізінде құрылған анық нейронды желіні айтамыз.

Келесі қарапайым анық емес желілердің мысалдарын қарастырайық.

«ЖӘНЕ» анық емес нейроны. Берілген жағдайда x_i және w_i сигналдары үшбұрышты конорма көмегімен біріктіріледі:

$$p_i = S\left(x_i w_i\right), \quad i = 1,2$$

ал шығыс үшбұрышты конорманы қолдану арқылы құрылады (сурет 22):

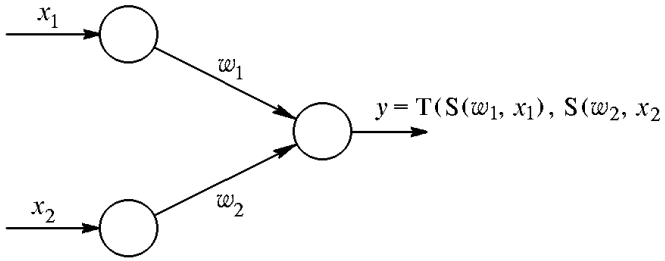
$$y = \mathrm{AND}(p_1, p_2) = T(p_1, p_2) = T\big(S(w_1, x_1), S(w_2, x_2)\big)$$

Егер

$$T = \min,\ S = \max,$$

болса, онда «ЖӘНЕ» анық емес нейроны min-max композициясын құрады:

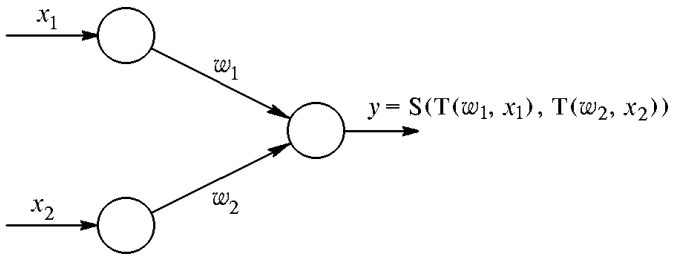
$$y = \min\big(w_1 \vee x_1, w_2 \vee x_2\big).$$



Сурет 22 – «ЖӘНЕ» гибридті нейронының құрылымы

«НЕМЕСЕ» анық емес нейроны. Мұнда x_i және w_i сигналдары үшбұрышты нормалардың көмегімен біріктіріледі:

$$p_i = T\big(x_i w_i\big), \quad i = 1,2,$$



Сурет 23 – «НЕМЕСЕ» гибридті нейронының құрылымы

ал шығыс үшбұрышты конорманы қолдану арқылы құрылады (сурет 23):

$$y = \mathrm{OR}\left(p_1, p_2\right) = S\left(p_1, p_2\right) = S\left(T\left(w_1, x_1\right), T\left(w_2, x_2\right)\right)$$

Егер $T = \min,\ S = \max$ қабылдайтын болсақ, онда «НЕМЕСЕ» анық емес нейроны max-min композициясымен таратылады:

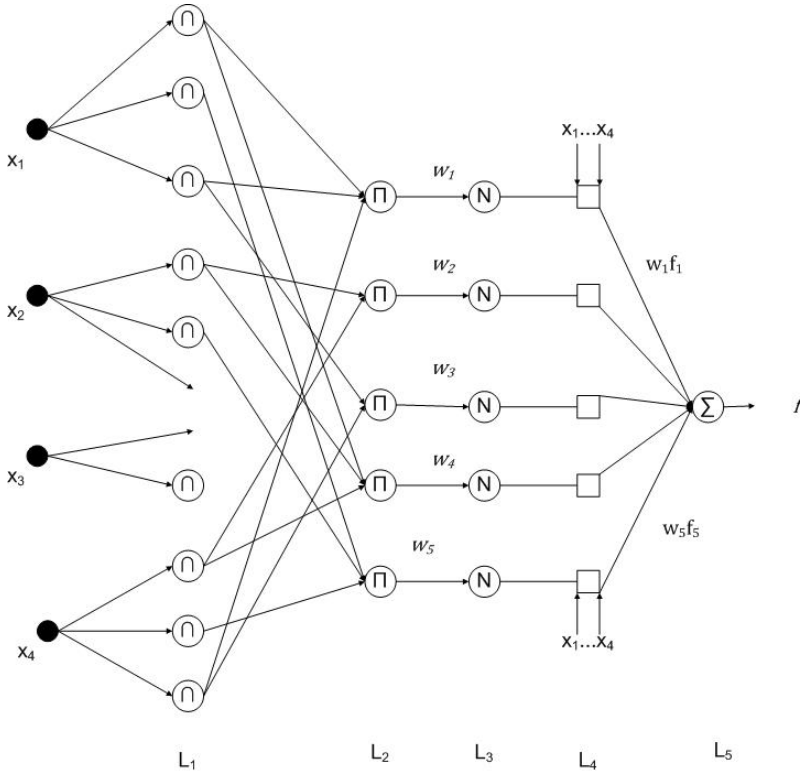
$$y = \max\left(w_1 \wedge x_1, w_2 \wedge x_2\right).$$

Тәртіп бойынша анық емес нейронды желілер төрт қабаттан тұрады: кіріс айнымалыларының фазификация қабаты, шартты активизациялаудың мәндерін агрегирлеу қабаты, анық емес тәртіптерді агрегирлау қабаты және шығыс қабаты.

Анық емес нейронды желілер анық емес тәртіптердің жиынын көрсетеді, олар бар бастапқы деректердің жиынының класстарын және диагностика нәтижелерін алу мақсатында олардың қайта өңделуіне арналған шығарулардың анық емес жүйелерін сипаттайды [12]. Анық емес нейронды желілердің фрагменті келесі сурет 24 көрсетілген.

Сұлбада төрт кірісі бар (n = 4) анық емес нейронды желі көрсетілген. Қабаттары L1-ден L5-ке дейінгі символдармен белгіленеді. Элементтер, П (мультипликатор) символымен белгіленеді, ∑ (сумматорлар) символымен белгіленген-оларды қосатын, барлық кіріс сигналдарын, элементтерін арттырады. Қабаттардың тағайындалуы келесідегідей болады: бірінші қабат – кіріс айнымалыларының термдері; екінші қабат – анық емес тәртіптердің антецеденттері (сәлемдемелері); үшінші қабат – тәртіптерді орындау деңгейлерінің қалыптастырылуы; төртінші қабат – тәртіптердің қорытындысы; бесінші қабат – әртүрлі тәртіптер бойынша алынған нәтижелерді агрегирлеу. Желінің кірістері жеке қабаттарға ерекшеленбейді.

1 (L1) қабаттың әрбір элементі тиістілік функциясы бар бір термді көрсетеді. Желінің кірістері тек өзінің термдерімен ғана байланысқан. Бірінші қабаттың түйіндерінің саны кіріс айнымалыларының терм-көпмүшесінің қуаттылығының қосындысына



Сурет 24 – Анық емес нейронды желі сұлбасы

тең. Түйіннің шығысы болып $\mu_{A_k}\left(\overline{x_i}\right)$. анық емес термине сәйкес кіріс айнымалыларының мәнінің тиістілік дәрежесі табылады. Негізінде, бұл қабатта $\overline{x_i}$ кіріс деректерінің тиістілік дәрежесінің A_k анық емес көпмүшесіне сәйкестігі бағаланады. Бұл желідегі түйіндердің кіріс және шығыстарындағы функциональды тәуелділігі келесі формуламен анықталады:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^{2b}},$$

Оның параметрлері *c, σ* және *b* оқыту процессінде модификацияланады, ол анық емес көпмүшелерді таңдауды жақсартуға мүмкіндік береді. Бұл параметрлердің физикалық интерпретациясы факті анық емес көпмүшелердің тиістілік функцияларын бастапқы жақсы орнасатыруға, сонымен қатар оны оқыту процессінде талдауға мүмкіндік береді.

2 (L2) қабаттың түйіндерінің саны m тең. Бұл қабаттың әрбір түйіні бір анық емес тәртіпке сәйкес келеді. Екінші қабаттың түйіні сәйкес тәртіптердің антецеденттерін қалыптастыратын бірінші қабаттың түйіндерімен байланысқан. Сәйкесінше, екінші қабаттың әрбір түйіні 1-ден n-ге дейінгі кіріс сигналдарын қабылдай алады. Түйіннің шығысы ретінде тәртіптердің орындалу деңгейлері алынады (кейбір тәртіптердің салмағы).

$$\omega_i = \mu_{A_i}(x) \times \mu_{B_i}(x), \quad i = 1,2,3,4,5.$$

Бұл қабаттың элементтерінің саны *N* тәртіптерінің санына тең. Әрбір түйін алдыңғы қабатпен осы тәртіптердің анық емес көпмүшелерінің пікірлерімен сәйкес, L1 қабаттың барлық түйіндерімен байланысқан, *k*-шы тәртіпке сәйкес L2 қабаттың түйіндері.

3 (L3) қабаттың әрбір *i*-ші түйіні барлық тәртіптердің салмақтарының қосындысына *v*-ші тәртіптің салмағының қатынасымен анықталады:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_i}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5}, \; i = 1,2,3,4,5$$

3-ші қабаттың шығыс сигналдары *қалыптастырылған салмақтар* деп атайды.

4(L4) қабаттың әрбір түйіні үшінші қабаттың бір түйінімен, сонымен қатар желінің барлық кірістерімен байланысады. Төртінші қабаттың түйіні желінің шығысына бір анық емес тәртіптің салымын есептейді:

$$O_i^4 = \overline{\omega}_i f_i = \overline{\omega}_i \left(p_i x + q_i y + r_i \right)$$

мұндағы $\overline{\omega_i}$ – 3-ші қабаттың шығыс сигналдары, $\{p_i, q_i, r_i\}$ – берілген қабаттың параметрлерінің жиыны (тағы басқа *шығыс параметрлері* деп те атайды).

5 (L5) қабат тәуелділікті тарататын, дефазификация тарату блогын көрсетеді.

$$O_i^5 = \sum_i \overline{\omega_i} f_i = \frac{\sum_i \omega_i f_i}{\sum_i \omega_i}$$

y деп белгіленетін және L4 қабатының жоғарғы түйініне жететін байланыстардың салмағы, A_k анық емес көпмүшелерінің тиістілік функцияларының орталығы ретінде интерпретацияланады. Бұл салмақтар, L1 қабатындағы x_i параметрлерінің мәндері сияқты оқыту процессінде модификацияланады. L5 қабатының шығысында «анық» (дефазификацияланған) *y* басқарудың шығыс модулынің мәні қалыптастырылады. Сурет 24 көрсетілген құрылым нейронды желілермен жалпы ұқсастықтары көп – ол анық емес шығарулар идеясына негізделген көпқабатты желіні көрсетеді. «Таза» нейронды желілерден айырмашылығы, әрбір қабат толығымен және оны құратын жеке оның элементтері, оның байланыстарының конфигурациясы сияқты, барлық параметрлері және салмақтарының физикалық интерпретациясы болады. Бұл қасиет ерекше маңызды болып табылады, себебі білімдер желі арқылы таратылмайды және жеңіл тоқтатылатын әрі керек болған кезде эксперт-бақылаушымен түзетілуі мүмкін.

Жоғарыда қарастырылған анық емес шығарулардың кезеңдері бірмәнді емес түрде таратылуы мүмкін, себебі өзіне жеке параметрлерді қосады, олар бекітілген немесе спецификацияланған болуы керек. Осы арқылы әрбір кезеңнің нақты бір варианттарды таңдау кейбір алгоритмдерді анықтайды, олар анық емес өнімдер тәртіптеріндегі жүйенің анық емес шығаруларын таратады. Осындай алгоритмдердің біріне – Сугено алгоритмі жатады. Оның негізгі ерекшелігі ретінде, оның қорытынды тәртіптері кірістердің сызықты функцияларымен берілетіндігімен анықталады. Оқытудың жылдам алгоритмдері және жиналған білім-

дердің интерпретациялануы – бұл факторлар қазіргі кезде анық емес нейронды желілерді ең келешегі мол және тиімді биязы есептеулер аспабы жасады. Соның ішінде қазіргі кезде ең көп таралғандарының қатарына ANFIS және TSK түріндегі анық емес нейронды желілердің архитектурасын жатқызуға болады. Мұндай желілер әмбебап аппроксиматорлар болып табылатындығы дәлелденген.

3.1.1. ANFIS (Adaptive Network based Fuzzy Inference System) анық емес нейронды желілердің архитектурасы

ANFIS нейро-анық емес шығарулардың адаптивті жүйесін көрсетеді. Бір жағынан, ANFIS желісі бір ғана шығысы және бірнеше кірістері бар нейронды желілерді, соның ішінде олар анық емес лингвистикалық айнымалыларды көрсетеді. Бұл кезде кіріс лингвистикалық айнымалылары стандартты 1.2 бөлімде келтірілген тиістілік функцияларымен сипатталады, ал шығарулар айнымалыларының термдері сызықты немесе тұрақты тиістілік функцияларымен беріледі. Басқа жағынан, ANFIS желісі анық емес шығарулар жүйесін көрсетеді, ондағы анық емес өнімдердің тәртіптерінің әрбірінің тұрақты 1тең салмағы болады. Берілген ANFIS желісі тиістілік функциясын жөнге келтіру үшін табысты қолданылуы мүмкін және анық емес эксперттік жүйеде тәртіптер қорын жөнге келтіру үшін де қолданылады. Адаптивті анық емес жүйелерді оқыту алгоритмдері, нейронды желілерді оқыту алгоритмдерімен салыстырғанда, салыстырмалы түрде көпбейнетті және қиын, және, тәртіп бойынша, екі кезеңнен тұрады: 1. Лингвистикалық тәртіптердің генерациясы; 2. Тиістілік функциясын түзету. Бірінші есеп асып кету типіне жатады, екіншісі – үздіксіз кеңістіктегі тиімділеуге жатады.

Төменде екі тәртіптен тұратын адаптивті ANFIS желісінің моделы көрсетілген:

ЕГЕР $x_1 = A_1$ ЖӘНЕ $x_2 = B_1$, ОНДА $y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$,
ЕГЕР $x_1 = A_2$ ЖӘНЕ $x_2 = B_2$, ОНДА $y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$

Желінің шығыстары келесі формула бойынша қалыптастыры-

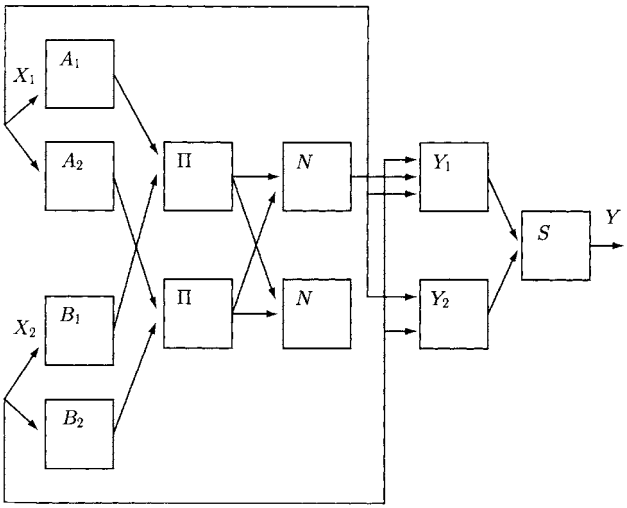
лады:

$$y = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2}{w_1 + w_2}$$

ANFIS желісінің қабаттары келесі функцияларды орындайды.

1 қабат. Радиальды базистік (РБФ)-нейрондармен көрсетіледі және тиістілік функцияларын модельдейді.

2 қабат. Бұл «ЖӘНЕ» нейрондарының қабаты, олар $w_i = \mu_{A_i}(x_1) \cdot \mu_{B_i}(x_2) \cdot \ldots$ көбейтіндімен ЖӘНЕ логикалық тізбектерді модельдейді



Сурет 25 – ANFIS желісінің құрылымы

3 қабат. Нормаланған тәртіптердің күштерін есептейді:

$$\langle w_i \rangle = \frac{w_i}{w_1 + w_2}$$

4 қабат. Шығару айнымалыларының мәндерін қалыптастырады:

$$y(x_1, x_2) = \langle w_i \rangle \cdot y_i = \langle w_i \rangle \cdot (c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2)$$

5 қабат. Дефаззификацияны орындайды:

$$y = \langle w_i \rangle \cdot y_1 + \langle w_i \rangle \cdot y_2$$

ANFIS архитектурасының гибридті желісі қатені кері тарату алгоритімінің көмегімен оқытылуы мүмкін.

3.1.2. NNFLC (Neurons network fuzzy logic controller) архитектурасы

NNFLC – нейронды желілер негізіндегі анық емес контроллерлер. NNFLC құрылымы сурет 26 келтірілген. NNFLC құрылымының ерекшеліктері – бұл қабаттардың әртүрлі функциональдылығы. Қысқаша қабаттардың функцияларын сипаттайық.

1 қабат. $y_i^{(1)}(x) = \exp\left[-(x_i - c_i)^2 \Big/ 2\sigma_i^2 \right]$.

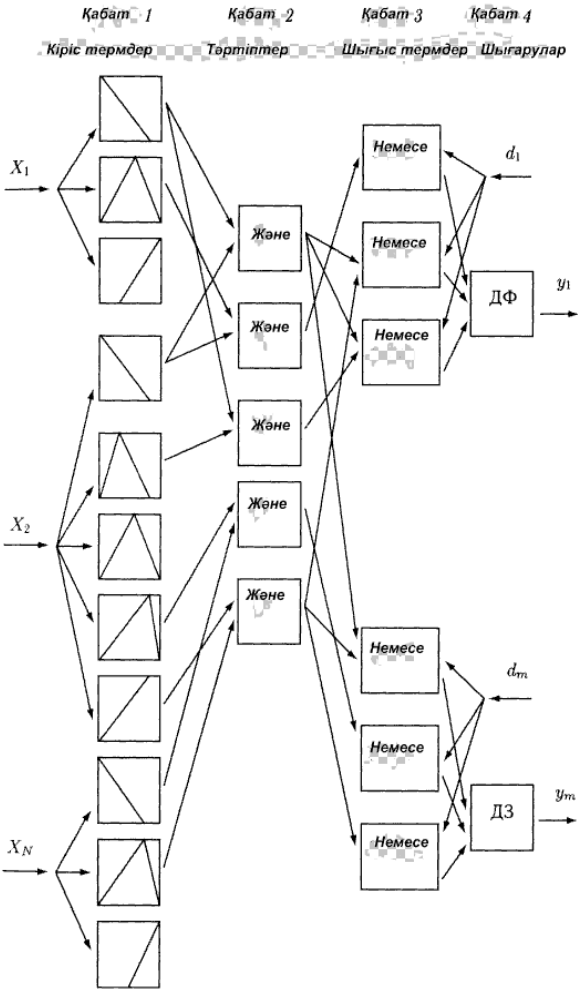
2 қабат. $y_i^{(2)} = \min\left[y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)} \right]$. 2 қабат ЖӘНЕ-шарттарының тәртіптерін модельдейді.

3 қабат. $y_i^{(3)} = \max\left[y_1^{(2)}, ..., y_n^{(2)} \right]$ – жұмыс режимінің функциясы, олар консеквенттердегі бірдей термдердің НЕМЕСЕ-комбинациясының тәртіптерін көрсетеді. Оқыту режимінде қабат шығыс айнымалыларының тиістілік функцияларының параметрлерін күйге келтіреді.

4 қабат. Жұмыс режимінде нейрондар дефаззификацияны орындайды, ал оқыту режимінде бұл нормализацияны орындайтын қосымша кіріс:

$$z_i^{(4)} = \sum\nolimits_j w_{ji} y_i^{(3)}, \qquad y_i^{(4)}\left(z_i^{(4)}\right) = \sum\nolimits_j y_i^{(3)} \left[\frac{w_{ji}}{\sum_j w_{ji}} \right]$$

Қиын архитектурадағы (әртүрлі функциональды қабаттармен) нейронды желілерді оқыту әдетте көпкезеңдер арқылы жүргізі-



Суре 26 – NNFLC желісінің құрылымы

леді, әрі әрбір кезеңде әртүрлі оқыту алгоритмдері қолданылады: алдыңғы оқыту (offline), оперативті (online), оқытушысыз, оқытушымен бірге. NNFLC анық емес нейронды желілерінің құрылымы тәртіптердің толық матрицасын қалыптастыру принципі бойынша инициализацияланады. Егер x_i – кіріс айнымалылары,

$\tau(x_i)$ – x_i анық емес белгілердің саны (ұсақтау), онда бастапқы тәртіптер саны: $T = \prod_{i=1}^{n} \tau(x_i)$

Анық емес NNFLC еместердің жалпы оқыту сұлбасы келесі кезеңдерден тұрады:

1. үйретуші деректерді қалыптастыру;
2. өзін өзі ұйымдастыратын кластеризация (тиістілік функциясының күйге келтірілуі);
3. жарыс түріндегі оқыту (жеңімпаз алгоритмі);
4. тәртіптерді жою;
5. тәртіптерді комбинациялау;
6. қателерді кері тарату алгоритмінің көмегімен тиістілік функциясының параметрлерін (тюнинг) ақырғы күйге келтіру.

Ары қарай оқыту кезеңдерінің мазмұндық сипаттамаларын келтіреміз. Тиістілік функциясының параметрлерін күйге келтіру тиістілік функциясы үшін σ_i ені және орталықтарды оқыту c_i тұрады, ол келесі форма функциясымен көрсетілген:

$$y_i^{(1)}(x) = \exp\left[-(x_i - c_i)^2 \Big/ 2\sigma_i^2 \right]$$

Жеңімпаз алгоритмі c_i: $\Delta c_\omega(t) = \eta(t)(x - c_\omega(t))$ түрде берілді, мұндағы $\eta(t)$ – монотонды кеміп отыратын оқыту деңгейі. Енін күйге келтіру σ_i эвристикалық жүзеге асырылады, мысалы «бірінші жақын көрші» принципі бойынша: $\sigma_i = (\sigma_i - \sigma_\omega)/\lambda$, λ – жабу параметрлері. w_{ji} салмақтар матрицасын табу керек, ол жеңімпаз алгоритмінің негізінде тәртіптердің оң және сол бөліктерінің байланыстарының сапасын бағалайды

$$\Delta w = y_j^{(3)}\left(y_i^{(2)} - w_{ji} \right).$$

Тәртіптерді комбинациялауды жиі эксперттердің қатысуымен орындаған дұрыс. Тиістілік функциясының ақырғы күйге келтірілуін қателер функциясы үшін $e_i = \left(y_i^{(4)} - d_k \right)^2$ қателерді кері тарату

алгоритмінің көмегімен орындайды. Тәртіптер тізбегі қателерді 1 қабатқа дейін айналмалы роутингпен таратады. Бұл арқылы, NNFLC архитектурасы Такаги-Сугено анық емес шығарулар жүйесі сияқты интерпретациялана алуы мүмкін екендігін айтуға болады.

3.1.3. TSK (Takagi, Sugeno, Kang'a) архитектурасы

TSK анық емес желісінің құрылымы Такаги-Сугэно-Канга анық емес шығарулар жүйесіне негізделген. Бұл кезде x_j әрбір айнымалысы үшін фаззификация функциясы ретінде жалпыланған Гаусс функциясы қолданылады:

$$\mu_A(x_j) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - c_j}{\sigma_j} \right)^{2b_j}} \tag{1.25}$$

i-ші тәртіптің шартының агрегациясы үшін TSK шығару жүйесінде алгебралық көбейту операциясы қолданылады:

$$\mu_A^{(i)}(x) = \prod_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - c_j^{(i)}}{\sigma_j^{(i)}} \right)^{2b_j^{(i)}}} \right]. \tag{1.26}$$

M шығару тәртіптері кезінде желінің шығару нәтижелерін агрегирлеу формула бойынша орындалады, оны келесі түрде көрсетеміз:

$$y(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M} w_i} \sum_{i=1}^{M} w_i y_i(x), \tag{1.27}$$

мұндағы $y_i(x) = p_{i0} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} x_j$, импликация агрегациясы. Бұл өрнекте кездесетін w_i салмақтары формуласымен анықталған $\mu_A^{(i)}(x)$ компоненттері ретінде интерпретацияланады. Бұл кезде формулаға сурет 27 бейнеленген желінің көпқабатты құрылымын сәйкестендіруге болады. Мұндай желілерде бес қабат ерекшеленеді:

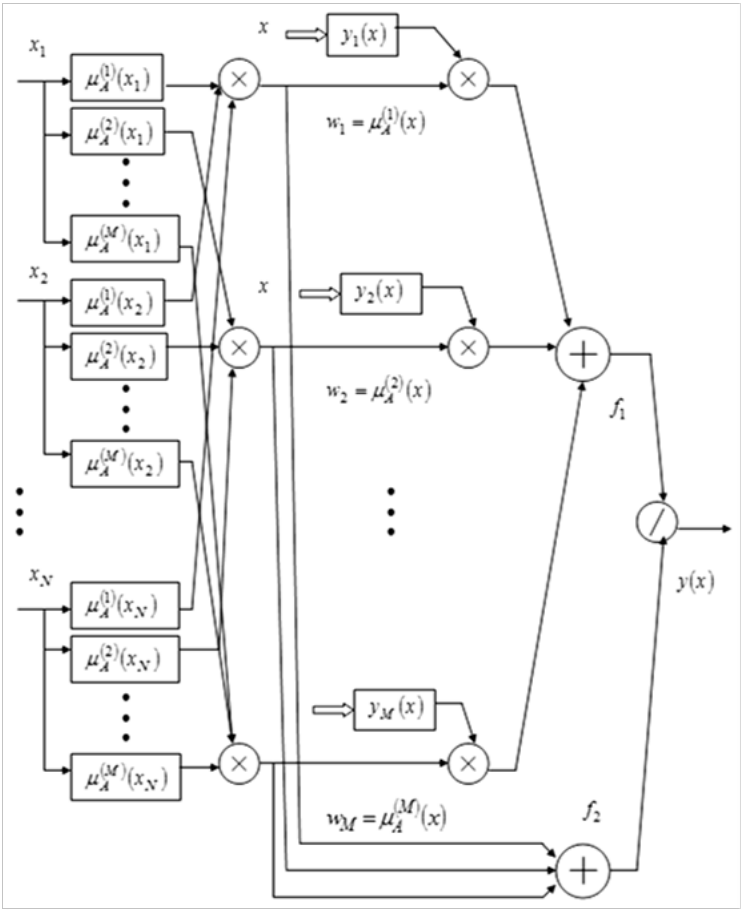
1 қабат. Әрбір x_j(j = 1, 2, ..., N) айнымалысы үшін әрбір i-ші тәртіптерге арнап қолданылатын фаззификация функциясынна сәйкес $\mu_A^{(i)}(x_j)$ тиістілік коэфицентінің шығару мәнін анықтай отырып жеке фаззификацияны орындайды. Бұл $\left(c_j^{(i)}, \sigma_j^{(i)}, b_j^{(i)}\right)$ параметрлері берілген параметрлік қабат, оқыту процессі кезіндегі адаптацияны керек етеді.

2 қабат. формулаға сәйкес x векторы үшін $w_i = \mu_A^{(i)}(x)$ тиістілік коэфицентінің нәтижелік мәнін анықтайтын x_j жеке айнымалыларының агрегирленуін орындайды. Бұл қабат параметрлі емес.

3 қабат. $y_i(x) = p_{i0} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} x_j$ мәндерін есептейтін TSK функциясының генераторын көрсетеді. Бұл қабатта сонымен қатар алдыңғы қабатта қалыптастырылған w_i мәндеріне $y_i(x)$ сигналдарын көбейту орындалады. Бұл параметрлік қабат, олар TSK моделінің зерттеу функциясын анықтайтын i = 1, 2, ..., M және j = 1, 2, ..., N үшін p_{ij} адаптацияны керек ететін сызықты салмақтары.

4 қабат. Екі нейрон-қосындылағышты құратын қабат, олардың бірі $y_i(x)$ өлшенген сигналдардың қосындысын есептейді, ал екіншісі $\sum_{i=1}^{M} w_i$ салмақтарының қосындысын анықтайды. Бұл қабат параметрлі емес.

5 қабат. Бір шығару нейронынан тұрады – бұл қалыптастыратын қабат, мұнда салмақтар формулаға сәйкес қалыптастыруға ұшырайды. $y(x)$ шығару сигналы тәуелділікке сәйкестендірілген келесі өрнекпен анықталады:



Сурет 27 – TSK анық емес нейронды желісінің құрылымы

$$y = \sum_{i=1}^{M} \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{M} w_i} \left(p_{io} + \sum_{J=1}^{N} p_{ij} x_j \right),$$

Олар $j = 1, 2, ..., N$ үшін x_j барлық жүйенің кіріс айнымалыларына салыстырмалы түрде сызықты. w_i салмақтары y функциясының сызықты емес параметрлері болып табылады, әрі оқыту

процессінде нақтыланады. p_0, p_1, ..., p_N коэффициенттері – оқыту прцессі кезінде таңдалатын салмақтар.

$$y(x) = f(x) = \frac{f_1}{f_2}. \tag{1.28}$$

Бұл қабатта параметрлі емес қабат.

TSK желісінің функциональды тәуелділігін анықтау кезінде келесі формуланы аламыз:

$$y(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M}\left[\prod_{j=1}^{N}\mu_A^{(i)}(x_j)\right]}\sum_{i=1}^{M}\left[\prod_{j=1}^{N}\mu_A^{(i)}(x_j)\right]\left[p_{i0} + \sum_{j=1}^{N} p_j x_j\right]. \tag{1.29}$$

Егер нақты уақыт моментінде шарттың параметрлері тіркелген деп қабылданған болса, онда $y(x)$ функциясы x_j (j = 1, 2, ..., N) айнымалыларына қарағанда сызықты болып табылады.

N кіріс айнымалыларының бар болған кезінде ғана әрбір тәртіп TSK N + 1айнымалыларының p_{ij} сызықты тәуелділіктерін қалыптастырады. M шығыс тәртіптер кезінде бұл $M(N+1)$ желінің сызықты параметрлерін береді. Өз кезегінде әрбір тиістілік функциясы адаптацияға ұшырауы керек үш параметрді қолданады. Себебі әрбір x_j айнымалы өзінің тиістілік функциясымен сипатталады, одан біз $3MN$ сызықты емес параметрлерді аламыз. Қосындысында бұл $M(4N + 1)$ сызықты және сызықты емес параметрлерін береді, олардың мәндері желіні оқыту процессінде таңдалуы керек.

3.2 Анық емес нейронды желілерді оқыту

Анық емес нейронды желілері бар жүйелерде маңызды сұрақтардың бірі ретінде анық емес нейронды желілердің конструктивті және тиімді модельдерін алу үшін, үйретуші іріктеулерден шығатын анық емес тәртіптер қорын күйге келтірудің тиімді әдістерін әзірлеу болып табылады. Негізінен анық емес тәртіптер эксперттермен және операторлармен, олардың сәйкесінше процесстеріне байланысты білімдері және тәжірибелерін ескеріп

сипатталады. Бірақ анық емес нейронды желілерді өңдеу жағдайында анық емес тәртіптердің немесе тиістілік функцияларының анықталмағандығының салдарынан бірден алу қиын немесе тіпті мүмкін емес, ол сипатталатын жүйенің толық еместігіне немесе қиындығына байланысты. Мұндай жағдайларда арнайы оқыту алгоритмдерін қолдана отырып тиістілік функцияларын және анық емес тәртіптерді нақтылау мақсатты деп есептеледі.

3.2.1. ANFIS анық емес нейронды желісін оқыту

Бұдан бұрын сипатталған ANFIS анық емес желілері сигналдарды тікелей тарататын көпқабатты құрылым түрінде, ал шығыс айнымалыларының мәндерін қабат элементтерінің параметрлерін жөндей отырып көрсетілетін болғандықтан, бұл желілерді оқыту үшін градиентті алгоритмдерді қолдануға болады. Берілген тәсілдің негізгі сипаттамалық ерекшелігі ретінде, тәртіптер қорының [7] модификациясынсыз жүзеге асырылатын тиістілік функцияларының параметрлерін күйге келтіруді айтуға болады. Айталық көптеген мысалдардан тұратын, таңдап оқытуы берілсін, $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_m^{(k)}$ – кіріс айнымалыларының мәндері $x_1, x_2, ..., x_m$, $y^{(k)}$ – k-шы мысалдағы y шығыс айнымалысының мәндерінің эталоны, K – таңдап оқытудағы мысалдардың жалпы саны. ANFIS анық емес нейронды желілері үшін күйге келтірілетін параметрлері бар Сугено алгоритмдері ретінде келесі формуламен есептелетін тиістілік функциясының параметрлері табылады, мұндағы a_{ij} – тиістілік функциясының орталығы, b_{ij} – берілген функцияның ені.

Таңдап оқытудың әрбір мысалы үшін оқытудың бірінші кезеңінде $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_m^{(k)}$ кіріс айнымалыларының мәндері бойынша анық емес желілер $y'^{(k)}$ шығыс айнымалысының мәндерін есептейді.

Екінші кезеңде таңдап оқытудың барлық мысалдары үшін қате функциялары есептеледі:

$$E^{(k)} = \sum \frac{\left(y'^{(k)} - y^{(k)}\right)^2}{2}, \; k = 1, ..., K \qquad (1.30)$$

Берілген жағдайда қате функциясы келесі аргументтерге тәуелді функция ретінде жазылады:

$$E^{(k)} = E^{(k)}\left(a_{ij}, b_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(y'^{(k)}\left(a_{ij}, b_{ij}\right) - y^{(k)}\right)^2,\ k = 1,...,K \quad (1.31)$$

Үшінші кезеңде таңдап оқытудың әрбір мысалы бойынша $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$ мәндері келесі байланыстардан шығып қалыптастырылады

$$\begin{aligned} a_{ij}(t+1) &= a_{ij}(t) - \eta \frac{\partial E^{(k)}(t)}{\partial a_{ij}(t)}, \\ b_{ij}(t+1) &= b_{ij}(t) - \eta \frac{\partial E^{(k)}(t)}{\partial b_{ij}(t)}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

мұндағы t – оқыту итерациясының нөмірі, $\eta \in [0,1]$ – оқыту жылдамдығын сипаттайтын коэффициент.

1–3 кезеңдер итерационды түрде қайталанады, және барлық параметрлердің мәндерін қалыптастыру процедурасы аяқталған деп есептеледі, егер таңдап оқытудың әрбір мысалы бойынша қателер функциясының мәндері қойылған шектен шықпайтын болса:

$$E^{(k)} < \varepsilon,\ k = 1,...,K,$$

әйтпесе анық емес желілердің орташа қосындысын тапқандағы таңдап оқытудың барлық мысалдарын ескере отырып бағалау, қойылған шектен шығуға болмайды:

$$E = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(y'^{(k)} - y^{(k)}\right)^2 < \varepsilon.$$

Бұл жағдайда анық емес желіні табысты оқып шықты деп есептеледі.

Қатені кері тарату алгоритмінің көмегімен оқыту кезінде тиістілік функциясының параметрлерінің *байланысқан* адаптациясының арқасында лингвистикалық термдердің бірегейлік көрсетілім қасиеттері қамтамасыздандырылады.

3.2.2. TSK анық емес нейронды желісін оқыту.

Оқытудың гибридті алгоритмдерін қарастырайық. Берілген алгоритм TSK анық емес желілерін оқыту үшін қызмет етеді. Берілген модельдің анық емес тәртіптері келесі формулада келтірілген түрде болады:

$$R_k: \text{Егер } x^1 \in A_k^1 \text{ және...және } x^n \in A_k^n, \text{ онда класс}$$

$$y = p_{ko} + \sum_{j=1}^{N} p_{kj} x^j$$

мұндағы R_k – k-шы тәртіп белгісі, $x = (x^1, \ldots x^n)$ – n–өлшемді шығыс векторының белгілері, y –шығыс белгісі, A_k^j – $p_0, ..., p_N$ – салмақтағы R_k анық емес тәртіптердің алғышарттары.

Гибридті алгоритмде адаптацияға ұшырауы керек параметрлер 2 топқа бөлінеді. Олардың біріншісі p_{kj} үшінші қабаттың (салмақтың) сызықты параметрлерінен тұрады, ал екінші топ – бірінші қабаттың тиістілік функцияларының сызықты емес параметрлерінен тұрады – бұл p_{k0} параметрлері. Параметрлерді нақтылау 2 кезеңнен тұрады.

Бірінші кезеңде тиістілік функциясының параметрлерінің жеке мәндерінің фиксациясы кезінде (бірінші циклда – бұл инициализация жолымен алынған мән), сызықты теңдіктердің жүйесін шеше отырып, p_{kj} сызықты параметрлері есептеледі. Бізге белгілі тиістілік функцияларының мәндерінде шығыс үшін тәуелділікті p_{kj} параметрінің салыстырмалы сызықты форма түрінде көрсетуге болады [7]:

$$y_k(x) = \sum_{k=1}^{M} \omega_k' \left(p_{k0} + \sum_{j=1}^{N} p_{kj} x_j \right),$$

мұндағы, $\omega_k' = \dfrac{\prod_{j=1}^{N} \mu_A^{(k)}(x_j)}{\sum_{r=1}^{M} \prod_{j=1}^{N} \mu_A^{(r)}(x_j)}$, $k = \overline{1, M}$

Таңдап оқытудың өлшемі кезінде $L\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right),\ k = 1,..., K$ және желінің шығыс сигналдарын ауыстыру кезінде күтілетін $y'^{(k)}$ мәнімен K сызықты теңдіктерінің түрінен тұратын жүйені аламыз

$$\begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{11}x_1^{(1)} \ldots \omega'_{11}x_N^{(1)} \ldots \omega'_{1M} & \omega'_{1M}x_1^{(1)} \ldots \omega'_{1M}x_N^{(1)} \\ \omega'_{21} & \omega'_{21}x_1^{(2)} \ldots \omega'_{21}x_N^{(2)} \ldots \omega'_{2M} & \omega'_{2M}x_1^{(2)} \ldots \omega'_{2M}x_N^{(2)} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\ \omega'_{K1} & \omega'_{K1}x_1^{(K)} \ldots \omega'_{K1}x_N^{(K)} \ldots \omega'_{KM} & \omega'_{KM}x_1^{(K)} \ldots \omega'_{KM}x_N^{(K)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{11} \\ \ldots \\ p_{1N} \\ \ldots \\ p_{M0} \\ p_{M1} \\ \ldots \\ p_{MN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'^{(1)} \\ y'^{(2)} \\ \ldots \\ y'^{(K)} \end{bmatrix}$$

мұндағы ω'_{ik} k-шы тәртіптің $x^{(i)}$–ға i-ші кіріс векторын ұсынған кездегі шарттың активизациясының (салмағының) деңгейін көрсетеді. Бұл өрнекті матрицалық түрде жазып көрсетуге болады:

$$Ap = y'$$

A матрицасының өлшемі $K \times (N+1)M$ теңестіріледі. Бұл кезде K жолдарының саны әдетте біршама $(N+1)M$ бағандардың саны қарағанда әлдеқайда көп болады.

Кіріс N айнымалыларының бар болған кезінде әрбір R_k тәртіптері $(N + 1)$ айнымалыларын $y^{(k)}$–ның p_{kj} сызықты тәуелділіктерін қалыптастырады. M шығыс тәртіптері кезінде желінің сызықты параметрлерін $(N + 1)M$ бар екенін білеміз.

Бұл теңестіру жүйесінің шешімін псевдоинверсиялы A матрицасын қолдана отырып алуға болады:

$$p = A^{+}y',$$

мұндағы A^{+} – псевдоинверсиялы матрица. Матрица псевдоинверсиясы минимизация есебін шешумен айналысады:

$$\min \left\| A^{+} A - E \right\|,$$

мұндағы E – бірегей матрица.

Фиксациядан кейін екінші кезеңде p_{kj} сызықты параметрлердің мәні шындығында $y^{(k)}$ шығыс сигналдары, $k = 1, ..., K$ есептеледі, бұл үшін сызықты тәуелділік қолданылады:

$$y^{(k)} = Ap$$

Бұдан кейін $\varepsilon = y - y'$ қате векторы және критерийлер есептеледі.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \left(y^{(k)} - y'^{(k)} \right)^2$$

Қате сигналдары желі арқылы кері тәртіп арқылы Back Propagation әдісіне сәйкес бірінші қабатқа дейін бағытталады, мұнда *a, b* компоненттері есептелуі мүмкін. Векторлы градиентті есептегеннен кейін гардиентті әдіспен түсіру қадамы орындалады.

Сызықты емес параметрлерді нақтылағаннан кейін қайта сызықты параметрлер (бірінші кезең) және сызықты емес параметрлерді (екінші кезең) процесстерінің адаптациясы жіберіледі. Бұл цикл процесстің барлық параметрлері тұрақтанғанға дейін қайталана береді.

Анық емес желілерді оқытудың гибридті әдісінің іс жүзінде таратылуы кезінде олардың адаптациясының басыңқы факторы ретінде бірінші кезеңді есептеуге болады, ол кезде p_{kj} салмағы бір қадам арқылы псевдоинверсияны қолданумен құрылады. Оның тигізетін әсерлерін жақсарту үшін екінші кезең цикл арқылы көп рет қайталанады.

Сонымен, келтірілген талдаудан, қателерді кері тарату алгоритімін қолданып тиістілік функциясын тиімді нақтылау орындалатындығын көруге болады, ол аз шығын жібере отырып нақты есептерді шешу үшін анық емес нейронды желілерді жақсы дайындауға мүмкіндіктер береді. Тиімділік әдісін қолданумен (ең кіші квадраттар әдісі) тәртіптерді қорытындылау коэффициент-

тері бағаланады, себебі олар желінің шығыстарымен сызықты байланысқан. Күйге келтіру процедурасының әрбір итерациясы екі кезең арқылы орындалады. Бірінші кезеңде кіріске таңдап оқыту беріледі, және желілердің арасындағы қажеттік және шынайылық тәртіптерінің үйлеспегендіктеріне байланысты ең кіші квадраттардың интерационды әдісімен төртінші қабаттың түйіндерінің тиімді параметрлері табылады. Екінші кезеңде қалдық үйлеспегендік желінің шығысынан кірісіне беріледі, және қателерді кері тарату әдісімен бірінші қабаттың түйіндерінің параметрлері модицияланады. Бұл кезде бірінші кезеңде табылған тәртіптерді қорытындылау коэффициенттері өзгермейді. Күйге келтірудің итерационды процедурасы үйеспегендіктің алдын ала қойылған мәнінен аспағанша қайталана береді. Тиістілік функциясын күйге келтіру үшін қателерді кері тарату әдісінен басқа да тиімділік алгоритмдері қолданылуы мүмкін.

3.2.3. C-means анық емес өзінұйымдасыру алгоритмі

Өзінұйымдастыру алгоритмі x векторын сәйкес c_i орталығымен ұсынылатын деректер тобына Кохонен желісіне ұқсас оқытудың бәсекелес типтерін қолданып тіркейді. Оқыту кезінде бұл типтегі өзінұйымдастыру процессі x векторын ұсынған кезде мүмкін болады.

Айталық, желіде c_i (i = 1, 2, ..., M) нүктелеріндегі анық емес нейрондардың орталықтары бар M бар болсын дейік. Бұл орталықтардың бастапқы мәндері кездейсоқ оқыту үшін қолданылатын x (t = 1, 2, ..., p) сәйкестендірілген векторларының компонентерінің мүмкін болатын аймағынан таңдалуы мүмкін. Фуззификация функциясы формулада өрнектелген жалпыланған Гаусс функциясының формасымен берілсін делік.

Желінің кірісіне берілетін x векторы әртүрлі c_i орталықтарымен берілетін u_{it} деңгейіндегі топтарға тиісті болады, бұл кезде $0 \le u_{it} \le 1$, ал барлық топтардағы тиістілік деңгейінің қосындысы, әлбетте бірге тең. Сондықтан

$$\sum_{i=1}^{M} u_i = 1 \qquad (1.33)$$

$t = 1, 2, ..., p$ үшін беріледі. Мұндай көрсетілімге сәйкес қателік функциясын, u_{it} тиістілік деңгейін ескере отырып c_i орталықтарына тиістілігінің жеке қателіктердің қосындысы реніде анықтауға болады. Сәйкесінше

$$E = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{P}\left(u_{it}\right)^m \left\|c_i - x_t\right\|^2, \tag{1.34}$$

мұндағы m – бұл [1, ∞) интервалынан алынған мәндерді қабылдайтын салмақтық коэффициент, іс жүзінде жиі *m=2* қабылдайды. Өзінұйымдастыруды оқыту мақсаты шектеу шарттарын бір уақытта сақтау кезінде функция минимумына жетуді қамтамасыздандыру үшін берілген оқыту көпмүшесінің векторларына $x^{(t)}$ арналған c_i орталықтарды таңдау болып табылады. Осылайша p шектелген типтегі сызықты емес функциялардың минимизациясы есебі пайда болады. Бұл есептің шешімін келесі түрде анықталған Лагранж минимизация функциясына келтіруге болады [13].

$$LE = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{P}\left(u_{it}\right)^m \left\|c_i - x_t\right\|^2 + \sum_{t=1}^{P}\lambda_t\left(\sum_{i=1}^{M}u_{it} - 1\right), \tag{1.35}$$

мұндағы $\lambda_t\left(t = 1,2,...,p\right)$ – бұл Лагранж көпмүшелері. Есепті келесі түрде көрсетуге болатындығы дәлелденген

$$c_i = \frac{\sum_{t=1}^{P}\left(u_{it}\right)^m x_t}{\sum_{t=1}^{P}\left(u_{it}\right)^m}, \tag{1.36}$$

$$u_{it} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{d_{it}^2}{d_{kt}^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}, \tag{1.37}$$

мұндағы d_{it} – бұл c_i орталығы және x_t векторы арасындағы эвклид арақашықтық, $d_{it} = \left\|c_i - x_t\right\|$. Себебі c_i орталықтарының нақты мәні процесстің басында белгілі емес, ал оқыту алгоритмі итерационды болуы керек:

1. u_{it} коэффициенттерінің кездейсоқ инициализациясын орындау, [0,1] интервалынан олардың мәндерін таңдай отырып шартты сақтау.

2. c_i орталықтарының M сәйкестендіріп анықтау.

3. қателіктер функциясының мәнін сәйкестендіріп есептеу. Егер оның мәні қойылған шектен төмен болса, әйтпесе егер алдыңғы итерациямен салыстырғанда бұл қателіктің азайуы меншінбестей аз болса, онда есептеуді тоқтату. Әйтпесе, 4 қ. өту.

4. u_{it} жаңа мәнін формула бойынша есептеу және 2 қ. өту.

Итерационды процедураны көпретті қайталау E функциясының минимумына жетуге әкеледі, ол глобальды болуға міндетті емес.

E функциясының мәні c_i орталығы және u_{it} бастапқы инициализациясының мәнінен маңызды түрде тәуелді болады. Сондықтан, алдын ала инициализация алгоритмін қолданған дұрыс, бұл алгоритмдердің ішінде ең танымалдарына қарбалас және айырымдық топтау алгоритмдерін жатқызуға болады.

3.2.4. TSK желісіне арналған қатені кері тарату алгоритмі

Анық емес нейронды TSK желісінің сигналды тікелей тарататын көпқабатты құрылымы бар, олардың шығыс мәндерін қабат элементтерінің параметрлерін қалыптастырып отырып өзгертуге болады, ол бұл желіні оқыту үшін қатені кері тарату алгоритмін [11] қолдануға мүмкіндік береді. Бұл үшін *(x, d)* жұбы түріндегі таңдап оқыту керек болады, мұндағы $x=[x_1, \ldots, x_N]^T$ – бұл кіріс векторы, а d – эталонды сигнал. Мұндай желі параметрлерінің коррекциясы есебінің міндеті, өрнекпен сипаттау, бұл кезде келесі өрнекпен берілетін қателік өлшемі:

$$E = \frac{1}{2}\big(y(x) - d\big)^2, \qquad (1.38)$$

минимальды болуы керек.

Егер қарапайым асажылдам түсіру әдісі қолданылатын болса, онда сәйкесінше адаптация формулалар келесі формада беріледі:

$$p_j^{(k)}(n+1) = p_j^{(k)}(n) - \eta_c \frac{\partial E(n)}{\partial p_j^{(k)}}, \tag{1.39}$$

$$c_j^{(k)}(n+1) = c_j^{(k)}(n) - \eta_c \frac{\partial E(n)}{\partial c_j^{(k)}}, \tag{1.40}$$

$$\sigma_j^{(k)}(n+1) = \sigma_j^{(k)}(n) - \eta_\sigma \frac{\partial E(n)}{\partial \sigma_j^{(k)}}, \tag{1.41}$$

мұндағы *n* кезектегі итерация нөмірін белгілейді.

(–) формулалар тиістілік функцияларының параметрлеріне байланысты мақсатты функция градиентін есептеуді талап етеді. Бұл формулалардың соңғы түрі желі шығысындағы қолданылатын қателік функцияларының анықтамаларына тәуелді болады. Мысалы, Гаусс функциясын қолданған кезде

$$\mu_A(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - c_i}{\sigma_i} \right)^2 \right], \tag{1.42}$$

(x, d) оқыту деректерінің бір жұбы үшін мақсатты градиент функциясының сәйкесінше формулалары келесі түрді қабылдайды [21]:

$$\frac{\partial E}{\partial p_j^{(k)}} = \big(y(k) - d\big) w_r x_j,$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_j^{(k)}} = \big(y - d\big)\big(y_k(x) - y\big) w_k \frac{2\big(x_j - c_{kj}\big)}{\big(\sigma_{kj}\big)^2},$$

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma_j^{(k)}} = \big(y - d\big)\big(y_k(x) - y\big) w_k \frac{2\big(x_j - c_{kj}\big)^2}{\big(\sigma_{kj}\big)^3},$$

мұндағы

$$w_k = \frac{\prod_{j=1}^{N} \mu_A^{(k)}(x_j)}{\sum_{r=1}^{N} \left[\prod_{j=1}^{N} \mu_A^{(r)}(x_j) \right]}, \; y_k(x) = p_{k0} + \sum_{j=1}^{N} p_{kj} x_j \tag{1.43}$$

Градиент векторының компонентерін бейнелейтін, келтірілген формулалардың қиындығына қарамастан, олар анық емес желілердің параметрлерін нақтылау үшін керекті өлшемдерін аналитикалық анықтауға мүмкіндік береді.

Жылдам түсіру әдісінің сызықты жинақтылығы бар, себебі онда Тейлор қатарына мақсатты функциясын жіктеу кезінде тек бірінші реттегі қосылғыш ғана қолданылады. Көрсетілген кемшілік, сонымен қатар тиімді шешімдердің жақын маңдағы нүктелеріндегі минимизацияны шұғыл баяулатады, ол кезде градиент тым аз мәндерді қабылдайды, ол жылдам түсіру алгоритімін төменгі тиімділікті етеді. Тиімділікті өсіру үшін градиенттің бағытын анықтайтын өрнектердің эвристикалық модификациясы жолдарымен арттыруға болады.

Модификациялардың біріне моменті бар оқыту алгоритмі ие болды. Бұл кезде желінің салмағын анықтау келесі формула бойынша орындалады:

$$w_{ij}(t+1) = w_j(t) - \eta \cdot \frac{\partial E(t)}{\partial w_j(t)} + \alpha(w_j(t) - w_j(t-1)) \qquad (1.44)$$

мұндағы α – бұл [0, 1] интервалындағы мәндерді қабылдайтын момент коэффициенті.

формуладағы бірінші қосылғыш формуладағы жылдам түсіру алгоритміне сәйкес келеді, ал екінші қосылғыш салмақтардың соңғы өзгерісін ескере отырады және градиенттің шынайы мәніне тәуелді болмайды. α коэффицентінің мәні үлкен болған сайын, солғұрлым салмақтарды іріктеу моментінің көрсеткішінің мәні маңызды болады. Оқыту коэффицентінің тұрақты мәні кезінде $\eta(t)=\eta$ салмақтардың үстемеленуі шамамен бірдей болып қалады, яғни $\Delta w_{ij}(t) = \eta p(t) + \alpha \Delta w_{ij}(t)$, сондықтан салмақтардың тиімді үстемеленуін келесі формуламен жазуға болады:

$$\Delta w_{ij}(t) = \frac{\eta}{1-\alpha} p(t)$$

α=0,9 мәніне тең болған кезде, бұл оқыту коэффицентінің мәнінің он еселенген артуына сәйкес келеді және, сәйкесінше, оқыту процессін он еселік жылдамдатылуына әкеледі. Градиенттің шағын мәндері кезінде момент көрсеткіші доминациялана бастайды, ол мақсатты функция мәндерін арттыруға сәйкес, салмақты арттыруға әкелетін локальды минимум аймағынан шығуға мүмкіндік береді. Бірақ момент көрсеткіші, барлық оқыту процессі кезіндегі басым болмауы керек, себебі бұл алгоритмнің тұрақсыздығына әкеледі. Іс жүзінде, мақсатты функцияны 4% артық емес ғана арттыруға болады. Басқа жағдайда, $\Delta w_{ij}(t) = 0$. Бұл кезде гаридиент көрсеткіші момент көрсеткішінен басым бола бастайды және процесс вектормен берілген градиентте минимизация бағытында дамиды [17].

3.3 Анық емес нейронды желілерді тиімділеу алгоритмдері

Анық емес деректер қорымен сипатталатын модельдің адекваттылығы, берілген эксперименттің тәртіптер салмағы мен тиістілік функцияларын күйге келтірудің сапасы және типімен анықталады, олардың көмегімен модельдің параметрлерінің лингвистикалық бағалары сандық формаға ауысады.

Тиістілік функциялары өз кезегінде экспертті әдістермен [15] анықталатын болғандықтан, анық емес модельдердің толығымен адекваттылығы эксперттердің квалификациясына тәуелді болады. Одан басқа, барлық уақытта сол немесе басқа объектіні (процессті) модельдеу үшін эксперттерді қатыстыру мүмкін болмайды, ол оның қиындығымен немесе анықталған жаңалығымен байланысты демек – меңгерудің жетіспеушілігі. Осыған байланысты анық емес деректер қорын құру процессін автоматизациялау мүмкіндігі жайында сұрақтар туындайды, олар зерттеу нәтижесінде алынған бар эспериментальды деректер негізінде берілген деректерді модельдейді. Сонымен, экспериментальды деректерді анық емес деректер қорына ауыстыру медицина саласында және басқа да тұлғалар шешім қабылдайтын, қатал сандық

салыстыруларға қарағанда (олар кейбір жағдайларда объективті себептермен болмауы да мүмкін) сөздік тәртіптерімен берілетін жеңіл және айқын интерпретацияларды қолдануды артық көреді. Тәртіптер қорының квалификациялық мүмкіндіктерін жақсарту үшін әртүрлі тиімділік алгоритмдерін қарастырайық.

Зерттеулер үшін орта масштабты шектеулері бар сызықты емес программалау тиімділігі, және Калман фильтріне негізделген алгоритмдерді қолданып тиімділеу [3, 8, 31] таңдалған болатын.

Осылай болғандықтан таңдау көлемі жеткіліксіз үлкен болса, онда орта масштабты тиімділік қолданылады. Жалпы жағдайда, бұл есеп сызықты емес программалауға немесе шектеулері бар сызықты емес тиімділікке жатады [3, 8, 31]. Берілген әдістің әрбір итерациясында Квадратты Программалаудың ішкіесептері шешіледі. Бұл кезде квадратты есеп жеткілікті қарапайым, және ол үшін тиімді (соның ішінде ақырлы) шешімін табу әдістері бар. Осылайша, берілген жолдың басқаларға қарағанда іс жүзінде мәні бар, мысалы, тым жоғары тәртіптегі аппроксимацияны қолдану. Басқа жағынан, Тізбекті Квадратты Программалау әдісін (SQP) [24] функциональды шектеулері бар тиімділік есептеріне ньютон әдістерінің фундаментальды идеяны тарату нәтижесі ретінде қарастырайық. Мысалы, есептің таза шектеулер-теңдіктер әдісінің жағдайында SQP Лагранж жүйесінің шешімдерін арнайы ньютонның әдістер арқылы тарату ғана болып табылады. Қазіргі күні SQP әдісі жалпы тағайындалудағы тиімділік әдістерінің ішіндегі тым тиімділерінің қатарына кірістірілген.

Шектеулері бар сызықты емес программалауды қолданып тиімділеу анық емес нейронды желілерді адаптивті оқытудың алгоритмінің кезеңдеріне жатады. Тиімділік салмақтық коэффициенттердің $w = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ тәртіптерінің параметрлерін табуды көрсетеді, олар кейбір критерилердің мәні бойынша тиімді болып табылады. Бұл жағдайда мұндай есеп $0 \le g_i(w) \le 1$ $(i = 1,2,...m)$ теңсіздік түрінде немесе w_L, w_U параметрлік шекаралар түрінде шектеулері бар мақсатты функциялардың минимизациясына әкелінеді. Жалпы параметрлік тиімділеу есебінің қалыптастырылуы келесі түрде көрсетіледі: w векторын табу талап етіледі, ол қамтамасыздандырады:

$$f(w) \to \min_{x \in R^n} \tag{1.45}$$

шектеулер кезінде

$$0 \le g_i(w) \le 1 \ (i = 1,2,...m), \tag{1.46}$$

мұндағы w – тиімділік параметрлерінің векторы $(w \in R^n)$, $f(w)$ – $(f(w): R^n \to R)$ векторлық аргументтің скалярлы мақсатты функциясы, g_i (w) – векторлық аргументтердің кейбір скалярлы функциялары. Беріліп отырған есеп SQP әдісін қолдану арқылы шешілуі мүмкін. Қазіргі уақытта, Фаркаш леммасын қолданып Куна-Таккер деп аталатын әдісті қолдану өте тиімді деп есептеледі, олар екі сызықты теңдеулер және теңсіздіктер жүйесінің [24] тек біреуі ғана бар болатындығын сендіреді. Онда, теңдігінен $\nabla f(w^*) \ge 0$ шығады, ол, көптеген теріс скалярлы тұрақтылардың бар екендігін береді, яғни

$$\begin{aligned} &\nabla f(w^*) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(w^*), \\ &\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(w^*) = 0, \ \lambda_i \ge 0, \ 1 \le i \le m. \end{aligned} \tag{1.47}$$

мұндағы ∇ − векторлы дифференциальды оператор, w^* – шектеулер кезіндегі, $f(w)$ функцияның сызықты тәуелділік түріндегі регулярлық шартын қанағаттандыратын минимумының нүктесі болып табылады, λ_i – Лагранж теріс емес көпмүшесі, l – активті шектеулердің көптеген индекстері.

Сондықтан $j \in l$ кезінде $\nabla g_i(w^*) = 0$ функциясы, ал $j \notin l$ $\lambda_i = 0$ кезінде, барлық $j \notin l$ үшін $g_i(w^*) < 0$ болады. Осылайша нөлдік мәндердегі градиенттер шығысқа жатады, яғни Лагранж $(\lambda_i, \ i = 1,...,m)$ көпмүшесі бастапқы берілген шектеулер градиенті және мақсатты функция өлшемі бойынша ауытқуларды теңестіру үшін керекті болады. Осылайша берілген нөлге теңестіру процедурасына тек активті шектеулер ғана қатыстырылатын болса, онда шектеулер активті емес және берілген процедураға ұшырамауы керек әрі осылайша Лагранжтың сәйкесінше

көпмүшелері нөлге тең болады. Куна-Таккер теңдігінің шешімі тізбекті квадратты программалау үшін негіз болып табылады. Бұл алгоритмде Лагранж көпмүшелерін тікелей есептеу қолданылады. Айталық $j, g_i, i \le i \le m$, кейбір ашық R^n кеңістігінің көпмүшесіне w^* тұратын, жеке үздіксіз туындыларын иемденеді. Егер $w^* \quad 0 \le g_i(w) \le 1 \ (i = 1,2,...m)$ шектеулер кезіндегі сызықты тәуелсіздік түріндегі регулярлы шарттарды қанағаттандыратын $f(w)$ функцияның минимум нүктесі болып табылса, онда $(\lambda_i, \ i = 1,...,m)$ Лагранж теріс емес көпмүшелері бар болады, ол

$$L(w,\lambda) = f(w) + \lambda^T g(w) \tag{1.48}$$

Тізбекті квадратты программалауды қолдана отырып оның әрбір қадамында шектеулері және мақсатты функциялары квадраттық жақындаулармен ауыстырылады, және квадратты программалаудың ішкіесептерін келесісі шешіледі: d векторын табу, оның көмегімен $w_{i+1} = w_i + d$ векторының салмағы қалыптастырылады ол кезде d квадратты программалау есебінің шешімі болып табылады:

$$\min_d \left(\nabla L(w,\lambda)^T d + \frac{1}{2} d^T H(w) d, \ \nabla g(w) + A(w) d \right) = 0 \tag{1.49}$$

мұндағы ∇ − векторлы дифференциальды оператор, H – симметриялы және оң анықталған екінші жеке және аралас туындылар матрицасы (Гессе матрицасы), A – шектеулер якобианы.

H матрицасы (Лагранж гессианы) ретінде толық гессиан ретінде қолданылуы мүмкін:

$$\nabla_w^2 L(w,\lambda) = \nabla_w^2 f(w) + \nabla_w^2 (\lambda^T g(w)) = H_1(w) + H_2(w,\lambda), \tag{1.50}$$

сонымен қатар толық емес:

$$H^{GN}(w,\lambda) = H_1(w), \tag{1.51}$$

мұндағы

$$H_1(w) = \nabla_w^2 f(w) = \nabla_w^2 \sum_{i=1}^{m} (\hat{w}_i - w_i)^2 = -\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 0_m \end{bmatrix}, \quad (1.52)$$

$$H_2(w, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_w^2 (\lambda_i g_i(w)) \quad (1.53)$$

0_{n_m} – нөлдік n_m өлшеміндегі квадратты матрица.

Айталық, шектеулер якобианы $g(w)$, $A(w)$ тең болсын делік, яғни

$$A(w) = \nabla_w c(w) \quad (1.54)$$

Ескертейік, ары қарай, $g(w)$ шектеулері тек якобиан өрнегіне және гессиан шектеулеріне кіреді, сол себепті, сәйкесінше, осы матрицалар ғана мақсатты функцияның сандық интегрияларының сұлбасына тәуелді болады.

Толық емес гессиан $\nabla_w^2 L(w, \lambda)$ оң анықталғандығының жоқ болғандығын толықтыру үшін және есептеу қиындығын азайту үшін қолданылады. Сонымен қатар толық емес гессианды қолдану оның өңделуін жылдамдатады әрі программалық кодты жеңілдетуді орындайды, бұл кезде, келесіде көрсетілгендей, шешу үшін алгоритмнің жинақтылығының жылдамдығы кейбір шарттарды орындау кезіндегіге қарағанда жоғары болады. Лагранж функциясы үшін Гессе матрицасының түрі BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) [28] әдістің көмегімен әрбір итерация сайын жаңаланып отырады.

Екінші H_i туынды аппроксимация матрицасын қолданатын BFGS тиімділеу әдісі төменде көрсетілген.

Бірінші қадамда H_0 матрицасы есептеледі. H_0 ретінде бірлік матрица таңдалады. Екінші қадамда ағымдағы нүктедегі градиент есептеледі. Үшінші қадамда $d_i = -\nabla^T f(w_i) H_i^{-1}$ бағыттары есептеледі. Төртінші қадамда қадамдардың есебі жасалады. Бесінші қадамда жаңа $d_i = w_{i+1} - w_i$ нүктесі есептеледі. Алгоритмнің ал-

тыншы қадамда BFGS әдісіне сәйкес H_{i+1} матрицасының қайта есептелуі жүргізіледі.

$$H_{i+1} = H_i + \frac{q_i q_i^T}{q_i^T d_i} - \frac{H_i^T d_i^T d_i H_i}{d_i^T H_i d_i}, \qquad (1.55)$$

$$q_i = \nabla f(w_{k+1}) + \nabla f(w_k)$$

Жетінші қадамда q_i d_i тоқтату критериінің тексеруі жүргізіледі. Егер ол орындалмаса, онда $i = i + 1$ орында және екінші қадамға өт.

H матрицасы екі қасиетке ие болуы керек:

1. Симметриялық.

2. Оң анықталғандылық.

H_i матрицасын квадратты модельдер үшін сызықты интерполяция шарттарынан іздеуге болады.

$$\nabla^T f(w_i) + H_i(w_{i+1} - w_i) = \nabla^T f(w_{i+1}) \qquad (1.56)$$

Егер $d_i = w_{i+1} - w_i$, $q_i = \nabla^T f(w_{i+1}) - \nabla^T f(w_i)$, онда тиімділік үшін қималардың арақатынасы келесі түрде беріледі:

$$H_{i+1} d_i = q_i \qquad (1.57)$$

H_{i+1} қайта есептеу келесі формуламен есептеледі .

Бройден [27] әдісінің мәні, Гессе матрицасын аналитикалық немесе бірінші итерациядағы ақырғы айырымдар әдісінің көмегімен есептеу үшін қолданылады, ал бұдан кейін әрбір қадам сайын Гессе матрицасын, олардың функциясының мәнін және олардың туындыларын есептемей тұрып жаңартып отыру керек.

Келесі Сугено [24] типіндегі ANFIS анық емес нейронды желілердегі білімдер қорына пайдаланылатын тиімділік алгоритмін қарастырайық. Айталық, Сугено анық емес білімдер қоры берілсін делік және M эксперименталды деректер жұбының таңдап оқытуы бар болсын, олар (X_r, y), $r = 1, M$ тәуелділіктерін зерттейтін y шығысын $X_r = (x_{r1}, x_{r2}, ..., x_{rn})$ кірістерімен байланыстырады. Сугено анық емес білімдер қорының параметрлік идентификациясы келесі (P, W) векторын көрсетілген формула

бойынша табу есебіне әкеледі:

$$\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1,M}\left(y_i - F\left(P,W,X_i\right)\right)^2} \to \min \qquad (1.58)$$

Бұл тиімділік есебінде P басқару айнымалыларына шектеулер қойылады, олар терм-көпмүшелерінің сызықты тәртіптелген элементтерін қамтамасыздандырады. Мұндай шектеулер тиімділік алгоритмдерінің «төменгі» анық емес көпмүшелердің «жоғарғы» анық емес көпмүшелерден асып кетпеуін қадағалайды. W векторын алатын болсақ, онда оның координаттары [0,1] диапазонында болуы керек. Анық емес білімдер қорына кірістірілген ЕГЕР-ОНДА әрбір тәртібіндегі эксперттің сенімділігі әртүрлі болуы мүмкін. Тәртіптердің маңыздылығын бейнелеу үшін олардың салмақтары енгізілген. Бұл тәртіптегі эксперттің сенімділігінің субъективті өлшемін сипаттау үшін тәртіптер салмағы. Іс жүзінде мұндай есептерді шешу үшін Калман [24] фильтрінің негізіндегі алгоритмдер қолданылады, олар анық емес білімдер қорындағы сызықты параметрлерді ғана тиімдейді – тәртіптердің қорытындысындағы коэффициенттер. Мұндай есептер W анық емес тәртіптерге қорытындыланған коэффициенттерін табуға әкелінеді, олар квадратты үйлеспеушіліктің минимумымен қамтамасыздандырады:

$$\sum_{r=1,M}\left(y - y^f\right)^2 \to \min, \qquad (1.59)$$

мұндағы $y^f - X_r$ таңдау жолынан алынған кіріс мәндері кезіндегі W параметрі бар анық емес білімдер қорының шығыстарының нәтижесі. $X_r = \left(x_{r1}, x_{r2}, ..., x_{rn}\right)$ кіріс векторына келесі түрдегі анық емес шығыстар нәтижесі сәйкес келеді:

$$y^f = \frac{\sum_{j=1,m}\mu_d\left(X_r\right)d}{\sum_{j=1,m}\mu_d\left(X_r\right)}, \qquad (1.60)$$

мұндағы $d = b_j + \sum_{r=1,n} b_j x_r$ – j-ші қорытындысы, $\mu_d\left(X_r\right)$ – j-ші тәртіпті орындау деңгейі.

X_r кірісі үшін салыстырмалы j-ші тәртіптің орындалу деңгейін келесідегідей белгілейміз:

$$\beta_к = \frac{\mu_d(X_r)}{\sum\limits_{k=1,m} \mu_d(X_r)}, \qquad (1.61)$$

Онда формуланы келесі түрде жазуға болады:

$$y^f = \sum_{j=1,m} \beta_r d = \sum_{j=1,m} \beta_r w + \beta_r b x_{r1} + \beta_r w x_{r2} + ... + \beta_r w x_{rm}$$

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$Y^f = \left(y_1^f, y_2^f, ..., y_M^f\right);$$

$$Y^f = \left(y_1, y_2, ..., y_M\right);$$

$$A = \begin{bmatrix} \beta_{11}, ..., \beta_{1m}, x_{11}\beta_{11}, ..., x_{11}\beta_{1m}, ...x_{1n}\beta_{11}, ..., x_{1n}\beta_{1m} \\ \beta_{M1}, ..., \beta_{Mm}, x_{M1}\beta_{1m}, ..., x_{M1}\beta_{1m}, ...x_{Mn}\beta_{M1}, ..., x_{Mn}\beta_{Mm} \end{bmatrix}.$$

Онда күйге келтіру есебі матрицалық формада W векторын табу келесі түрде қойылады:

$$E = \left(Y - Y^f\right)^T \left(Y - Y^f\right) \to \min,$$

мұндағы $Y^f = AW$.

Квадратты үйлеспеушілік E минимальды мәніне $Y^f = Y$ жетеміз, ол келесі өрнектің шешіміне сәйкес келеді

$$Y = AW \qquad (1.62)$$

Берілген алгоритмнің кемшілігі нақты есептерді шешу кезінде күйге келтірілетін параметрлердің саны таңдалатын деректер көлемінен аз болатындығы, сәйкесінше, теңсіздіктің нақты шешімі жоқ. Шешімін табу кезіндегі қиындықтар сонымен қатар A матрицасының сингулярлығымен байланысты. Берілген алгоритмнің итерацияларының саны эксперименталды деректерді таңдау

көлеміне тең. Алгоритмнің бірінші қадамында W векторының координаттары деректерді таңдаудың бірінші жолы бойынша күйге келтіріледі. Екінші итерацияда W векторының координаттары «кірістер–шығыстар» екінші жұбына үйлестіріледі және т.б. Берілген алгоритмнің келесі бір кемшілігі ол үлкен таңдап оқыту кезіндегі қанағаттанғандық әсер алу – тиімділік нақтылығы іс жүзінде бақылаулардың санының көбейуінен жақсартылмайды.

Сызықты емес тиімділік жолы айыпты параметрлердің мәндерінде үлкен емес параметрлердің шектеулерін маңызды салыммен қамтамасыздандырады, ол шешім табу нүктесіне жақын активті шектеулер үшін ерекше актуальды. Берілген тиімділік әдісінің артықшылығы ретінде оның қарапайымдылығы және оның айқын мазмұнының интерпретациясында қорытындыланады. Қателер пайызы бейнелерді танудың әртүрлі оқыту жүйелерінің критерийлері ретінде қолданылады. Тиімділік есебінің мақсатты функциясы дискретті мәндерді қабылдайды.

Осылайша, жүргізілген талдаудан, тәртіптердің қорытындысының салмақтарын тиімді күйге келтіру, шектеулері бар сызықты емес тиімділік алгоритмдерін қолдана отырып жүргізіледі, ол аз есептеулері бар нақты есептерді шешу үшін анық емес нейронды желілерді дұрысырақ дайындауға мүмкіндік береді. Бұл берілген алгоритмді ары қарай эксперименттер жүргізу үшін таңдауды болжайды.

ҚОРЫТЫНДЫ

Қазіргі заманғы интеллектуальды информатикада фундаментальды және технологиялық есептердің арақатынастары технологиялық жағына көп жиналады. Белгілеп кетейік, модельдеудің фундаментальды есептері сезім, қабылдау, бейнелерді танып білу, оқыту және паттерндерді сақтау когнитивті ғылымның негізгі есептері болып табылады.

Технологиялық есептер кластеризация есептерін шешудегі анық емес нейронды желілерді қолдану тиімділігін арттырумен байланысты, бейнелер классификациясы және көріністер, табиғаты техникалық, экономикалық және биологиялық процесстер үшін аппроксимация функцияларынан тұрады. Нейроинформатиканың жетістіктері технологиялық есептерді шешу кезінде әртүрлі нейронды желілердің мақсатты спектрлерін құруға әкеледі: сигналдарды тікелей тарату желілері, рекуррентті желілер, радиальды-базистік желілер. Дамыған гибридті жүйелердің архитектуралары құрылған: анық емес нейронды желілер, генетикалық параметрлерді күйге келтіру анық емес нейронды желілері.

Генетикалық параметрлерді тиімдейтін анық емес нейронды желілердің кешенді құрылымдары және оқытудың қиын алгоритмдері бар, әртүрлі нейронды желілердің құрылымдық бөліктерін интеграциялайды.

Сәйкесінше, тек гибридті жүйелер, болжауға болатындай, күшті когнитивті потенциалға ие болуы керек.

Бізге белгілі гибридті жүйелердің архитектурасын және оларды оқыту алгоритмдерін зерттеу, оларды тұлға қызметінің когнитивтілігі кезіндегі қабылдау және логикалық ой қорытындысының арақатынасын адекватты бейнелейтін модель деп санауға мүмкіндік береді. Нақты есептерді шешу кезінде тұлғалар ойлау процесстерін (компьютерлі аналог – логикалық шығару) құрамдастыру, түсіру (саналы түрде «ішкі» бейнелерді ұяту), айналадағы заттарды қабылдау (танып білу) және, мүмкін, қозғалыстары (денені басқару). Оқытылған анық емес нейронды желілер және паттерндерді сақтау, және логикалық операцияларды орын-

дау, себебі ЖӘНЕ, НЕМЕСЕ-нейрондарынан тұрады, әрі танып білуден логикалық шығаруларға ауысады, себебі әдеттегідей бірнеше жеке әртүрлі функциялары бар оқытылған желілерден тұрады. Осылайша, анық емес нейронды желілердің, процесстерді басқару үшін арналған анық емес нейро контроллерлер ретінде құрылғандығына қарамастан, олар когнитивті қызметтер кезіндегі қабылдау және ойлау процесстерінің арақатынасын зерттеу үшін когнитивті модель ретінде қызмет етеді.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Айвазян, С. А. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

2 Аюев, В. В. Кластерный метод восстановления пропусков в данных для обучения ИНС / З. Е. Аунг, Чжо Мин Тейн, М. Б. Логинова // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2009. – № 7. – С. 23–34.

3 Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Под ред. В. А. Волынского – Москва.: Радио и связь, 1988. – 128 стр.

4 Батыршин, И. З. Основные операции нечеткой логики и их обобщения. – Казань: Отечество, 2001. – 100 с.

5 Борисов, В. В. Нечеткие модели и сети / В. В. Борисов, В. В. Круглов, А. С. Федулов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 284 с.

6 Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 166 с.

7 Зайченко, Ю. П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. К.: Слово, 2008. – 344с.

8 Измаилов, А. Ф. Численные методы оптимизации. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2008.

9 Комарцова, Л. Г. Нейрокомпьютеры. – М: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 400 с.

10 Конышева, Л. К. Основы теории нечетких множеств. – Спб.: Питер, 2011. – 192 с.

11 Круглов, В. В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети / В. В. Круглов, М. И. Дли, Р. Ю. Голунова. – М.: Физматлит, 2001. – 224 с.

12 Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ–Петербург, 2005. – 736 с.

13 Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

14 Пегат, А. Нечеткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. –796 с.

15 Ротштейн, А.П. Медицинская диагностика на нечеткой логике. – Винница: Континент-ПРИМ, 1996. – 132 с.

16 Ротштейн, А. П. Интеллектуальные технологии идентификации // http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book5/index.php/

17 Рудковская, Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 452 с.

18 Рутковский, Л. Методы и технологии искусственного интеллекта. – М.: Горячая линия–Телеком, 2010. – 520 с.

19 Саати, Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.

20 Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

21 Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс. – М.: Вильямс, 2006. – 1104 с.

22 Шамис, А. Л. Пути моделирования мышления: Активные синергические нейронные сети, мышление и творчество, формальные модели поведения и «распознавания с пониманием». – М.:КомКнига, 2006. – 336 с.

23 Штовба, С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. – [Электронный ресурс]. – http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/

24 Штовба, С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 288 с.

25 Ярушкина, Н. Г. Нечеткие нейронные сети в когнитивном моделировании и традиционных задачах искусственного интеллекта // VII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2005»: Лекции по нейроинформатике. – М.: МИФИ, 2005. – С. 166–213.

26 Яхъяева, Г. Э. Нечеткие множества и нейронные сети. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 316 с.

27 Broyden, C. G. The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 1970. – pp. 90.

28 Kelly, C.T. Iterative methods for Optimization// North Caroline State University, Raleigh, North Carolina, 1999. – pp. 177.

29 Kosko, B. Fuzzy Systems as Universal Approximators // IEEE Transactions On Computers. – 1994, Vol. 43. – No. 11. – P. 1329–1333.

30 Levey AS, Bosch JP, Lewis JB, Greene T, Rogers N, Roth D: A more accurate method to estimate glomerular filtration rate from serum creatinine: A new prediction equation. Modification of Diet in Renal Disease Study Group. Ann Intern Med 130:461-470, 1999

31 Qi L. Superlinearly convergent approximate newton methods for LC1 optimization problems // Math. Program. – 1994. – V. 64, № 3. – P. 277-294.

32 Zadeh L.A. Discussion: Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive // Technometrics. – 1995. – Vol.37. – N 3. – P.271-276.

Ахметов Б.С., Горбаченко В.И., Кузнецова О.Ю.

АНЫҚ ЕМЕС ЖҮЙЕЛЕР ЖӘНЕ ЖЕЛІЛЕР

Подписано в печать 26.12.2014.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Объем 6,75 печ. л. Тираж 500 экз. Заказ № 2589.

Отпечатано в ТОО «Издательство LEM»
050008, г. Алматы, ул. Ауэзова, 82, уг. ул. Мынбаева, тел./факс 375-51-33.