

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

КАЗАХСКАЯ ГОЛОВНАЯ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
МЕЖДУНАРОДНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ КОРПОРАЦИЯ

С.Х. Достанова, Г.Т. Касымова

РАСЧЕТ ПЛИТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Численные методы в строительной механике»
к выполнению расчетно-графической работы для магистрантов,
бакалавров по специальности «Строительство»

Алматы, 2014

УДК 624.078 (072)
ББК 38.5
Д 70

Рецензенты: Байтурсынов Д.М., д.т.н., профессор КазГАСА
Дюсембаев И.Н., д.т.н., профессор КазНТУ им. К.И.
Сатпаева

Рекомендовано к изданию Методическим советом Факультета общего строительства, **протокол № 3 от 07.12.2013 г.**

Печатается по плану издания Казахской головной архитектурно-строительной академии на 2013-2014 уч. год.

Достанова С.Х., Касымова Г.Т.

Расчет плит методом конечных элементов: Учебно-методическое пособие по дисциплине «Численные методы в строительной механике» к выполнению расчетно-графической работы для магистрантов, бакалавров по специальности «Строительство». – Алматы: КазГАСА, 2014. – 144 с.; библиогр. 120 наим.

ISBN 978-601-71-37-8

Плиты и пластины являются самыми распространенными элементами любой конструкции. В данном пособии даны краткие сведения по теории упругости, численным методам и представлен алгоритм расчета пластин и жестких плит методом конечных элементов, приведены примеры расчета для плоской задачи тонких пластин и для расчета жестких плит.

Учебно-методическое пособие рекомендовано магистрантов, бакалавров, инженеров-проектировщиков в области строительных конструкций.

УДК 624.078 (072)
ББК 38.5

ISBN978-601-71-37-8

© Казахская головная
архитектурно-строительная
академия, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Разрешающие уравнения для плоской задачи при расчете пластин	17
2 Разрешающие уравнения при изгибе пластин	20
3 Алгоритм расчета методом конечных элементов	34
3.1 Метод конечных элементов. Основные уравнения	36
3.2 Метод конечных элементов (МКЭ) в варианте метода перемещений для плоской задачи.....	46
4 Метод конечных элементов к расчету стержневых систем.....	47
4.1 Составление матриц жесткости для балок с различными соединениями по торцам	48
4.2 Составление матрицы жесткости для плоской рамы методом конечных элементов.....	52
5 Метод конечных элементов для решения плоских задач	60
5.1 Составление матрицы жесткости для треугольного элемента	61
5.2 Составление матрицы жесткости для прямоугольного элемента	68
5.3 Составление матрицы жесткости системы в блочном виде	73
5.4 Примеры расчета плоской задачи для тонкой пластины МКЭ	74
6 Расчет плит на изгиб методом конечных элементов.....	83
6.1 Составление матрицы жесткости для треугольного элемента	84
6.2 Составление матрицы жесткости для четырехугольного элемента	88
7 Примеры расчета плиты МКЭ	97
Список использованных источников	133

ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) – основной метод современной строительной механики, лежащий в основе подавляющего большинства современных программных комплексов, предназначенных для выполнения расчетов строительных конструкций на ЭВМ.

Диапазон его применения чрезвычайно широк: строительство и машиностроение, гидро- и аэродинамика, горное дело и новейшая техника, а также различные задачи математической физики – теплопроводности, фильтрации, распространения волн и т. д.

Метод конечных элементов впервые был применен в инженерной практике в начале 50-х гг. XX в. Первоначально он развивался по двум независимым один от другого направлениям – инженерному и математическому. На раннем этапе формулировки МКЭ основывались на принципах строительной механики, что ограничивало сферу его применения. И только когда были сформулированы основы метода в вариационной форме, стало возможным распространение его на многие другие задачи. Быстрое развитие МКЭ шло параллельно с прогрессом современной компьютерной техники и ее применением в различных областях науки и инженерной практики.

Значительный вклад в разработку МКЭ был сделан Дж. Аргирисом. Им впервые дана общая матричная формулировка расчета стержневых систем на базе фундаментальных энергетических принципов, определена матрица податливости, а также введено понятие матрицы жесткости (как обратной матрицы податливости). Работы Дж. Аргириса и его сотрудников, опубликованные в период 1954–1960 гг., дали отправную точку для матричной формулировки известных численных методов и применения ЭВМ в расчетах конструкций.

Для развития МКЭ особое значение имели вариационные принципы механики и математические методы, основанные на этих принципах. Дискретизацию задачи на основе вариационного метода Ритца впервые в 1943 г. применил Р. Курант. Лишь в 50-е гг. появились аналогичные работы Ж. Поли, Ж. Герша и др.

Первая работа, в которой была изложена современная концепция МКЭ, относится к 1956 г. Американские ученые М. Тэрнер, Р. Клафф, Г. Мартин и Л.Топп, решая плоскую задачу теории упругости, ввели элемент треугольного вида, для которого сформировали матрицу жесткости и вектор узловых сил. Название – метод конечных элементов ввел в 1960 г. Р. Клафф. В период 1960–1965 гг. опубликованы работы, в которых на основе вариационных принципов получены конечные элементы для решения задач изгиба плит, тонких оболочек, массивов. Среди них можно отметить работы Р. Мак-Лейа, Р. Мелоша, Дж. Бесселина, Ф. де Веубеке, М. Джонса, Т. Пиана.

В 1967 г. издана первая монография о МКЭ О. Зенкевича и И. Чанга, в которой изложены основы метода и области его применения.

К семидесятым годам относится появление математической теории конечных элементов. Здесь можно выделить труды И. Бабушки, Р. Галлагера, Ж. Дек-лу, Дж. Одена, Г. Стренга, Дж. Фикса. Значительный вклад в разработку теоретических основ МКЭ внесли и российские ученые. В. Г. Корнеев указал на совпадение математической сущности МКЭ и ВРМ. Сопоставление МКЭ с рядом вариационных методов приведено в трудах Л. А. Розина. Под руководством А.С. Сахарова разработана моментная схема конечных элементов.

Период последних десятилетий особенно характерен для развития и применения МКЭ в таких областях механики сплошных сред, как оптимальное проектирование, учет нелинейного поведения, динамика конструкций и т. п. Достоверность полученных результатов зависит от выбора расчетной модели, связанной с физическим и математическим упрощениями реального объекта. Эта идеализация позволяет решать сложные задачи и в нужном направлении корректировать полученные решения. В дальнейшем под идеализацией будем понимать процесс перехода от исходной физической системы к математической модели. Этот процесс является наиболее важным шагом при решении технической или инженерной задачи. Ключевым пунктом в этом процессе является понятие модели, которую можно определить как символическое устройство, построенное для моделирования и предсказания поведения системы. Математическое моделирование, или идеализация, есть процесс, с помощью которого инженер переходит от реальной физической системы к математической модели системы. Данный процесс называется идеализацией, поскольку математическая модель необходимо абстрагируется от физической реальности.

В качестве примера реальной физической системы рассмотрим инженерную конструкцию в виде плоской пластины, нагруженную поперечными силами. Математические модели данной системы, которые инженер может использовать для анализа напряжений в пластине, могут быть следующими:

1. Модель очень тонкой пластины, основанная на теории изгиба мембран.
2. Модель тонкой пластины, основанная на классической теории Кирхгоффа.
3. Модель достаточно толстой пластины, основанная, например, на теории Миндлина-Рейсснера.
4. Модель очень толстой пластины, основанная на трехмерной теории упругости.

Очевидно, инженер должен обладать достаточными теоретическими знаниями, чтобы правильно выбрать соответствующую математическую модель системы (конструкции), которую ему необходимо исследовать.

Метод конечных элементов, как и многие другие численные методы, основан на представлении реальной континуальной конструкции ее дискретной моделью и замене дифференциальных уравнений, описывающих НДС сплошных тел, системой алгебраических уравнений. Вместе с тем МКЭ допускает ясную геометрическую, конструктивную и физическую интерпретацию.

Суть метода заключается в том, что область (одно-, двух- или трехмерная), занимаемая конструкцией, разбивается на некоторое число малых, но конечных по размерам подобластей (рис. 1). Последние носят название конечных элементов (КЭ), а сам процесс разбивки – дискретизации.

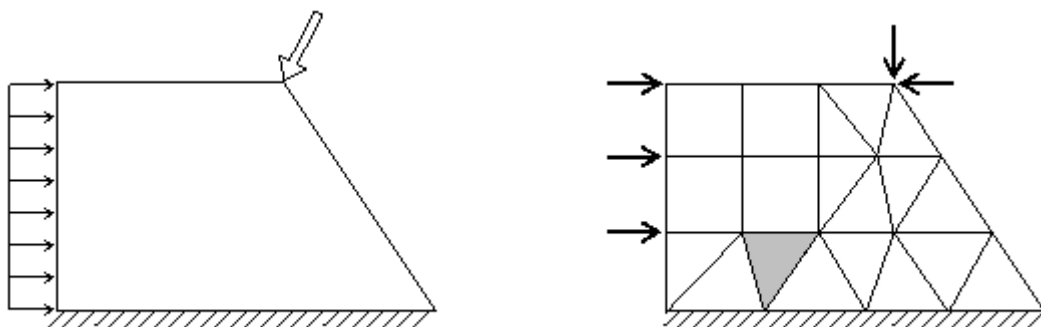


Рис. 1. Дискретизация плоского тела

В зависимости от типа конструкции и характера ее деформации КЭ могут иметь различную форму. Так, при расчете стержневых систем (фермы, балки, рамы) КЭ представляют собой участки стержней; для двумерных континуальных конструкций (пластины, плиты, оболочки) чаще всего применяют треугольные и прямоугольные (плоские или изогнутые) КЭ; а для трехмерных областей (толстые плиты, массивы) – КЭ в форме тетраэдра или параллелепипеда. В отличие от реального сооружения в дискретной модели конечные элементы связываются между собой только в отдельных точках (*узлах*) определенным конечным числом узловых параметров.

Важное значение при расчете МКЭ имеет степень свободы системы в целом и степень свободы одного элемента. Степени свободы определяют физическое состояние элемента, т.е. физическое поле, которое описывает данный элемент. Благодаря общим степеням свободы в соседних элементах осуществляется сборка модели и формирование глобальной системы конечно-элементных уравнений. В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах. В первом случае элементы относятся к типу лагранжевых элементов; во втором случае – типу эрмитовых элементов. Например, в простейшей задаче о растяжении стержня неизвестной функцией является продольное перемещение стержня. Соответственно в качестве степеней свободы выступают узловые значения данной функции и, следовательно, конечный элемент относится к

лагранжевому типу. Наоборот, в задаче об изгибе стержня неизвестной функцией является поперечное перемещение центральной оси стержня, а в качестве степеней свободы используются как узловые значения самой функции, так и ее производной по продольной координате. Физический смысл этой производной – угол поворота поперечного сечения стержня. Таким образом, конечный элемент, применяемый в расчетах стержня на изгиб, относится к типу эрмитовых элементов. Заметим также, что данные обозначения происходят от названия полиномов Лагранжа и Эрмита, широко используемых в прикладной математике для интерполяции функций по узловым значениям.

МКЭ – это вариационный метод. Функционал энергии для всей рассматриваемой области здесь представляется в виде суммы функционалов отдельных ее частей – конечных элементов. По области каждого элемента, независимо от других, задается свой закон распределения искомых функций. Такая кусочно-непрерывная аппроксимация выполняется с помощью специально подобранных аппроксимирующих функций, называемых также координатными или интерполирующими. С их помощью искомые непрерывные величины (перемещения, напряжения и т.д.) в пределах каждого КЭ выражаются через значения этих величин в узловых точках, а произвольная заданная нагрузка заменяется системой эквивалентных узловых сил.

При такой кусочно-непрерывной аппроксимации обеспечивается условие совместности лишь в узлах, а в остальных точках по границам КЭ это условие удовлетворяется в общем случае приближенно (в связи с этим различают КЭ разной степени совместности).

Наибольшее распространение получил метод конечных элементов в перемещениях, имеющий много общего с методом Ритца и вариационно-разностным методом (в дальнейшем мы будем в основном рассматривать именно этот вариант МКЭ). Различие между традиционной схемой метода Ритца и МКЭ в форме метода перемещений заключается в выборе системы аппроксимирующих функций. Если в методе Ритца аппроксимация перемещений производится по всей области их определения, то в МКЭ – по каждому конечному элементу в отдельности, что позволяет использовать аппроксимирующие функции более простого вида. В первом случае функционал полной потенциальной энергии варьируется по неопределенным коэффициентам a_i , во втором – по перемещениям в узлах сетки, что приводит к системе алгебраических уравнений метода перемещений (основными неизвестными являются непосредственно узловые перемещения). При этом использование кусочно-непрерывной аппроксимации позволяет получить редко заполненную или ленточную структуру матрицы коэффициентов системы уравнений и таким образом дает возможность применения более эффективных методов ее решения.

Число узлов и число перемещений в узле (степень свободы узла), принятые для конечного элемента, могут быть различными, однако не

должны быть меньше минимально необходимых для описания напряженно-деформированного состояния КЭ в рамках принятой физической модели. Число независимых перемещений во всех узлах элемента определяет степень свободы КЭ. Степень свободы всей конструкции и соответственно порядок системы разрешающих уравнений определяется суммарным числом перемещений всех ее узлов. Поскольку основными неизвестными МКЭ в форме метода перемещений считаются узловые перемещения, степень свободы КЭ и всей конструкции в целом является чрезвычайно важным понятием в МКЭ. Понятия о степени свободы узла, КЭ и конструкции и степени их же кинематической неопределимости идентичны.

Способ разбивки рассматриваемой области на конечные элементы, их число и число степеней свободы, а также вид аппроксимирующих функций в конечном итоге определяют точность расчета конструкции. Следует отметить, что простым увеличением числа конечных элементов не всегда удастся достичь повышения точности расчетов. Вопросы устойчивости и сходимости решения, а также оценки точности полученных результатов являются основными при использовании МКЭ.

По сравнению с другими численными методами МКЭ в лучшей степени алгоритмизирован и более гибок при описании геометрии и граничных условий рассчитываемой области. Кроме того, к достоинствам метода следует отнести его физическую наглядность и универсальность.

Применительно к стержневым системам МКЭ в форме метода перемещений может рассматриваться как матричная форма классического метода перемещений, отличающаяся только более глубокой формализацией алгоритма и ориентацией его на использование ЭВМ.

Метод конечных элементов позволяет практически полностью автоматизировать расчет стержневых систем, хотя, как правило, требует выполнения значительно большего числа вычислительных операций по сравнению с классическими методами строительной механики. Однако в современных условиях большой объем вычислений не является серьезной проблемой, и, в связи с этим, при внедрении ЭВМ в инженерную практику МКЭ получил широчайшее распространение. Поэтому, знание основ метода конечных элементов и современных программных средств, позволяющих на его основе решать разнообразные задачи, в наше время для инженера является абсолютно необходимым.

Виды МКЭ

По способу получения основных, т. е. разрешающих, уравнений различают четыре основных вида метода конечных элементов: прямой, вариационный, взвешенных невязок и энергетического баланса.

Прямой метод аналогичен матричному методу перемещений для стержневых систем, в основе его лежат положения, которые использовались на ранней стадии развития МКЭ. Этот метод удобен своей простотой и очевидным геометрическо-физическим значением отдельных шагов

аппроксимации. Соотношения для КЭ здесь строятся непосредственно на основе трех групп уравнений (трех сторон задачи): статической, геометрической и физической. Однако область применения прямого метода весьма ограничена: его можно использовать лишь для конечных элементов простой геометрии с малым числом степеней свободы в узле.

Вариационный метод основан на принципах стационарности некоторой переменной, зависящей от одной или нескольких функций (такая переменная носит название функционала). Применительно к механике деформируемого твердого тела эта переменная представляет собой потенциальную (*функционал Лагранжа*) или дополнительную (*функционал Кастилиано*) энергию системы или формируется на основе этих двух энергий (*функционалы Хеллингера-Рейсснера, Ху-Вашизу*). Если в функционал подставить аппроксимирующие выражения искомых функций и применить к нему экстремальные принципы (соответственно *принцип Лагранжа, принцип Кастилиано* и т. д.), получим систему алгебраических уравнений, решением которой будут значения узловых неизвестных. В отличие от прямого вариационный метод может одинаково успешно применяться как к простым, так и сложным задачам.

Метод невязок представляет собой наиболее общий подход к построению основных соотношений МКЭ. Этот метод целесообразно применять при решении задач, у которых трудно или невозможно сформулировать вариационное уравнение, т.е. функционал. Суть метода взвешенных невязок заключается во введении некоторой *невязки* – отклонении приближенного аппроксимативного решения от точного решения дифференциальных уравнений для данной задачи. Чтобы получить «наилучшее» решение, необходимо минимизировать некоторый интеграл от невязок по расчетной области. Для повышения эффективности в подынтегральное выражение наряду с самой невязкой обычно вводится так называемая *весовая функция*, в этом случае метод называется *методом взвешенных невязок*. Выбор схемы минимизации и весовых функций определяет различные варианты метода невязок. Наиболее часто применяемые из них – это *метод Галеркина*, который приводит к тем же уравнениям, что и вариационный подход, а также *метод наименьших квадратов*.

Метод энергетического баланса (метод Одена) основан на балансе различных видов энергии, записанном в интегральной форме. Этот метод успешно применяется при решении нелинейных и динамических задач.

Из приведенных видов МКЭ в строительной механике особенно актуальны вариационный метод и метод взвешенных невязок Галеркина, которые для рассматриваемой задачи представляют собой два взаимно дополняющих метода одинаковой точности. Широкое применение этих методов обусловлено тем, что выражения в функционале или во взвешенном интеграле, как правило, имеют низший порядок производных по сравнению с производными в соответствующем дифференциальном уравнении для данной

задачи. Это позволяет выбирать аппроксимирующие функции из более широкого семейства простых функций. Можно сказать, что вариационный вид МКЭ вышел из классического метода Ритца, а метод Галеркина – из обобщенного метода Бубнова-Галеркина. В принципе, из других методов также выводятся соответствующие виды МКЭ, однако их применяют значительно реже.

Формы МКЭ

В МКЭ, аналогично классическим методам строительной механики, за основные неизвестные могут приниматься величины разного типа: кинематические (перемещения, деформации), статические (внутренние силы, напряжения и др.) или смешанные кинематические и статические параметры. В зависимости от выбора узловых неизвестных различают три формы МКЭ: метод перемещений, метод сил и смешанный метод. С этой точки зрения МКЭ можно рассматривать как обобщение традиционных методов строительной механики стержневых систем применительно к расчету континуальных систем.

Метод перемещений – в настоящее время наиболее распространенная форма МКЭ. Это объясняется тем, что для заданной конструкции легче получить кинематически определимую основную систему метода перемещений, нежели статически определимую основную систему метода сил. Кроме того, матрица жесткости метода перемещений составляется без особых затруднений и, как правило, имеет разряженную или ленточную структуру.

В основе математической формулировки МКЭ в форме метода перемещений лежит вариационный принцип Лагранжа, т. е. принцип минимума потенциальной энергии системы. Основными неизвестными здесь являются перемещения узловых точек дискретной схемы, напряжения же вторичны и определяются путем численного дифференцирования перемещений.

К достоинствам метода относятся: простота реализации; удовлетворительные точность и устойчивость решения с гарантированной сходимостью к нижней границе. Минусы: точность определения напряжений намного ниже, чем перемещений, хотя именно значения напряжений важны при прочностных расчетах, к тому же поскольку приближенное решение отвечает нижней границе, то значения и перемещений, и напряжений оказываются заниженными.

Принцип минимума дополнительной энергии и связанные с ним схемы МКЭ в форме *метода сил*, а также *вариационный принцип Рейсснера (смешанный метод)* не получили такого широкого распространения. Однако во многих случаях они могут быть эффективны, особенно в отношении вычисления напряжений. К тому же выполнение двойственных расчетов на основе альтернативных форм МКЭ позволяет, как правило, получить двухстороннюю оценку точного решения соответствующей задачи.

Главным плюсом МКЭ в форме *метода сил* является то, что основные неизвестные здесь – напряжения. И если бы в реализации метода сил не было определенных сложностей, значения напряжений можно было получать той же степени точности, что и перемещения в методе перемещений. Кроме того, использование принципа Кастилиано дает верхнюю границу приближенного решения (т. е. напряжения завышены), что в принципе лучше при расчетах на прочность, нежели заниженная оценка. Тем не менее, пока нет алгоритмов, в той же степени простых и устойчивых, имеющих гарантированную сходимость в обширном классе задач, подобно МКЭ в форме метода перемещений.

В основе вариационной формулировки *смешанного метода* лежит принцип стационарности различных форм функционала Рейсснера. При данном подходе перемещения и напряжения в пределах каждого КЭ аппроксимируются одновременно, поэтому нет необходимости завышать требования к непрерывности искомых функций и их производных. Напротив, можно задавать именно нужные аппроксимации, а поскольку смешанные вариационные принципы приводят и к смешанному виду соотношений между напряжениями и перемещениями для конечного элемента, можно получать более точное решение.

Однако имеются и большие минусы. Так, функционал Рейсснера не является выпуклым, поверхность его в точке стационарности имеет вырожденную седлообразную форму. Система разрешающих уравнений, отвечающая формулировке смешанного метода, не является положительно определенной. Эти обстоятельства значительно затрудняют прямое использование функционала Рейсснера в методе конечных элементов.

Также существуют различные *гибридные формы* как метода перемещений, так и метода сил. По сути, гибридные подходы схожи со смешанным методом. Отличает их то, что в гибридных моделях внутри конечного элемента за основные неизвестные принимаются величины одного типа, а на границах элемента независимо и в другой форме – величины другого или же обоих типов.

Как правило, гибридные формулировки приводят к значительному усложнению алгоритма, поэтому эффективны лишь для ограниченного класса задач. Например, если в *гибридном методе сил* внутри элемента задать аппроксимацию компонент напряжений, в традиционной форме метода сил это бы привело к решению, соответствующему верхней границе. Однако аппроксимация перемещений вдоль контура элемента накладывает некоторые ограничения на математическую модель, уменьшает податливость и тем самым смещает получаемое решение в сторону точного. Сложность в том, что имеется возможность перегрузить ограничениями функционал дополнительной энергии и легко проскочить точное решение в сторону нижней границы.

Аппроксимация

МКЭ относится к методам дискретного анализа. Однако в отличие от численных методов, основывающихся на математической дискретизации дифференциальных уравнений, МКЭ базируется на физической дискретизации рассматриваемого объекта. Реальная конструкция как сплошная среда с бесконечно многим числом степеней свободы заменяется дискретной моделью связанных между собой элементов с конечным числом степеней свободы. Так как число возможных дискретных моделей для континуальной области неограниченно велико, то основная задача заключается в том, чтобы выбрать такую модель, которая лучше всего аппроксимирует данную область.

Сущность аппроксимации сплошной среды по МКЭ состоит в следующем:

1) рассматриваемая область разбивается на определенное число КЭ, семейство элементов по всей области называется *системой* или *сеткой конечных элементов*;

2) предполагается, что КЭ соединяются между собой в конечном числе точек – *узлов*, расположенных по контуру каждого из элементов;

3) искомые функции в пределах каждого КЭ (например, распределение перемещений, деформаций, напряжений и т. д.) с помощью *аппроксимирующих функций* выражаются через узловые значения, представляющие собой *основные неизвестные МКЭ*;

4) для анализа и расчета полученной системы конечных элементов действительны все принципы и методы, применяемые для любых дискретных систем.

Аппроксимирующие функции

Аппроксимация, как правило, дает приближенное, а не точное, описание действительного распределения искомых величин в элементе. Поэтому результаты расчета конструкции в общем случае также являются приближенными. Закономерно может быть поставлен вопрос о точности, устойчивости и сходимости решений, полученных МКЭ.

Под ***точностью*** понимается отклонение приближенного решения от *точного* или *истинного решения*. ***Устойчивость***, прежде всего, определяется ростом *ошибок* при выполнении отдельных вычислительных операций. Неустойчивое решение является результатом неудачного выбора аппроксимирующих функций, «плохой» разбивки области на КЭ, некорректного представления граничных условий и т. п. Под ***сходимостью*** подразумевается постепенное приближение последовательных решений к *предельному*, по мере того как уточняются параметры дискретной модели, такие как размеры элементов, степень аппроксимирующих функций и т. п. В этом смысле понятие сходимости аналогично тому значению, которое оно имеет в обычных итерационных процессах. Таким образом, в сходящейся процедуре различие между последующими решениями уменьшается, стремясь в пределе к нулю.

Перечисленные выше понятия иллюстрируются рис. 2. Здесь абсцисса обозначает степень уточнения параметров дискретной модели, а ордината определяет полученное при этом уточнении приближенное решение. На графике показан монотонный тип сходимости, при котором точность решения повышается плавно.



Рис.2. Монотонный тип сходимости

Ошибки метода конечных элементов

Как следует из вышеизложенного, критерии устойчивости, сходимости и точности в основном определяются погрешностями различного рода операций, проводимых в МКЭ. Наряду с обычными ошибками округления и погрешностью приближенных методов линейной алгебры, применяемых в МКЭ, есть и ошибки, имеющие непосредственное отношение к методу конечных элементов:

- *ошибки дискретизации*, являющиеся результатом различий между действительной геометрией рассчитываемой области и ее аппроксимацией системой конечных элементов;
- *ошибки аппроксимации*, обусловленные разностью между действительным распределением искомых функций в пределах КЭ и их представлением с помощью аппроксимирующих функций.

Ошибки дискретизации уменьшаются с увеличением числа конечных элементов и соответственно с уменьшением их размеров, причем они стремятся к нулю, когда размер элемента стремится к нулю. Эти ошибки уменьшаются и с применением криволинейных элементов на соответствующих границах области. Ошибки аппроксимации не обязательно уменьшаются по мере уменьшения размеров элементов или повышения степени аппроксимации, поэтому могут ухудшать сходимость к точному решению или даже приводить к расходимости. Однако эти ошибки можно свести к минимуму, если при построении аппроксимирующих функций обеспечить:

- 1) *непрерывность* искомой функции и ее производных в области КЭ до степени $m-1$ включительно (m – наибольший порядок производных искомой функции, используемых в качестве основных неизвестных в эрмитовых элементах);
- 2) выполнение условий *полноты*, т. е. при уменьшении размеров КЭ аппроксимирующие функции должны обеспечить стремление значений искомой функции, а также ее производных к постоянным значениям;

3) выполнение условий *совместности* искомой функции и частично ее производных на границе между смежными элементами;

4) приближенное удовлетворение условий совместности не основных переменных (например, напряжений, если основные неизвестные – перемещения) на границах КЭ, а также *граничных условий* в рассматриваемой области;

5) исключение *концентрации напряжений* в КЭ, если в рассматриваемой области такие концентрации заведомо отсутствуют;

6) при перемещениях КЭ как *жесткого целого* в нем не должны возникать деформации.

Требование полноты аппроксимирующих функций необходимо для учета смещения КЭ как жесткого целого и обеспечения состояния постоянных деформаций в элементе. Механический смысл совместности заключается в непрерывности основных неизвестных на смежных границах соседних КЭ. В сложных эрмитовых элементах выполнение условий совместности достигается сложнее. Между тем имеются случаи, когда несовместные элементы дают очень хорошие результаты при быстрой сходимости решения к точному.

Выбор конечных элементов

Выбор конечных элементов зависит от формы, объема рассматриваемых тел, т.е. конечные элементы могут быть линейными, плоскими или объемными. Например, для стержневой системы (балки, рамы, фермы) в качестве конечного элемента можно рассматривать отдельный стержень, для тонкой пластины – прямоугольник или треугольник, т.е. срединная плоскость заменяется совокупностью прямоугольных или треугольных элементов, соединенных между собой в узловых точках. Для объемных тел конечный элемент можно представить в виде параллелепипеда или тетраэдра, соединенных между собой в вершинах. Пусть область расчетной схемы двумерна, т.е. все ее характеристики зависят от двух координат (Рисунок 4). Каждый КЭ этой области сохраняет все физические и геометрические свойства исходной среды. На границе области заданы граничные условия, т.е. компоненты сил или перемещений.

КЭ соединены в общих точках – узлах. Узел расчетной схемы может быть общим для нескольких КЭ. Узлам расчетной схемы придаются дополнительные связи, число которых определяется особенностями рассматриваемой задачи. Между узловыми реакциями и перемещениями узлов устанавливается соответствие, в упругой стадии деформирования между реакциями в дополнительных связях узлов и узловыми перемещениями существует линейная зависимость.

1)

3)

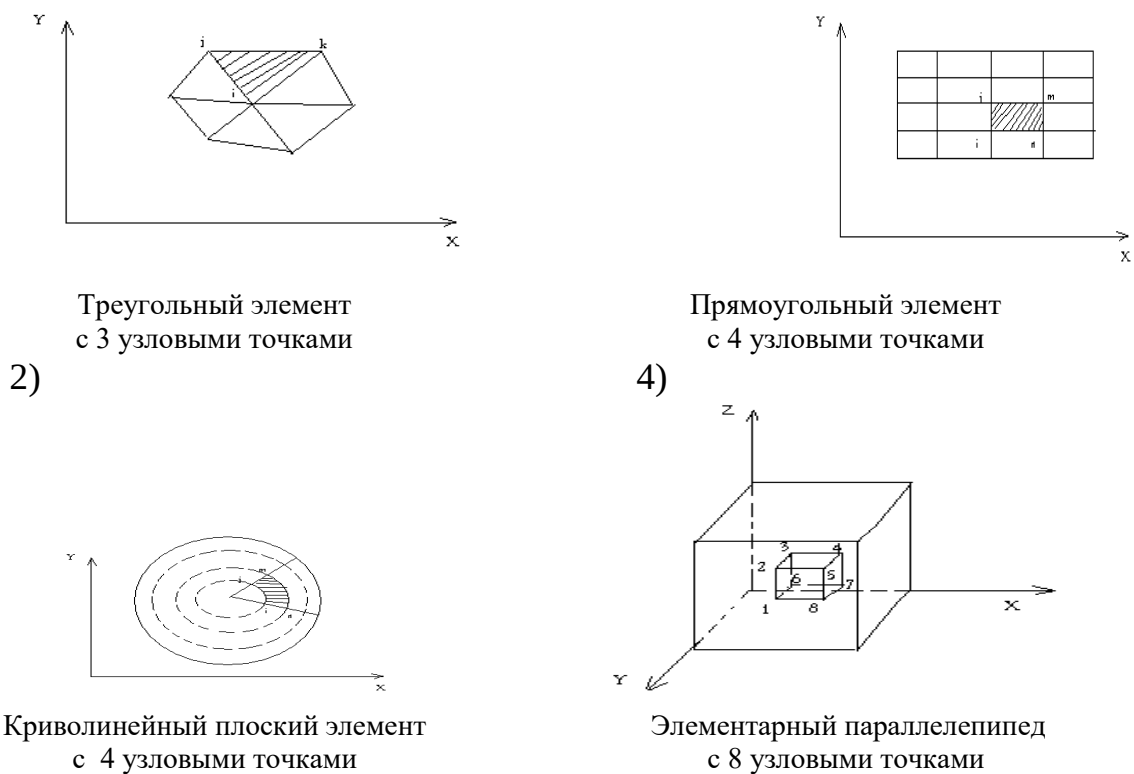


Рис. 4. Типы конечных элементов

В общем случае количество коэффициентов определяется степенью свободы узловых точек элемента. Например, при плоском напряженном состоянии для треугольного элемента степень свободы равна 6 (рис. 5).

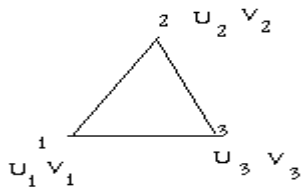


Рис. 5 Треугольный конечный элемент

При плоском напряженном состоянии для прямоугольного элемента степень свободы равна 8 (рис. 6).

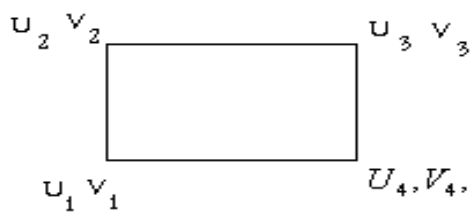


Рис. 6. Прямоугольный конечный элемент для плоской задачи

Для прямоугольного элемента на рисунке 7 степень свободы равна 12.

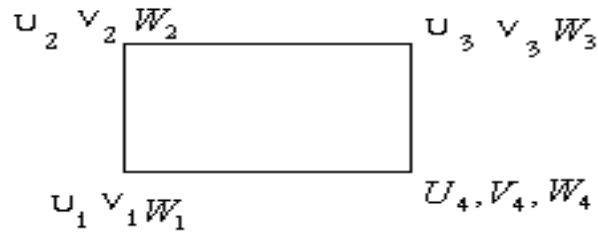


Рис. 7. Прямоугольный лагранжевый элемент для пространственной задачи

Для прямоугольного конечного элемента при изгибе с учетом мембранных усилий степень свободы равна 20 (рис. 8).

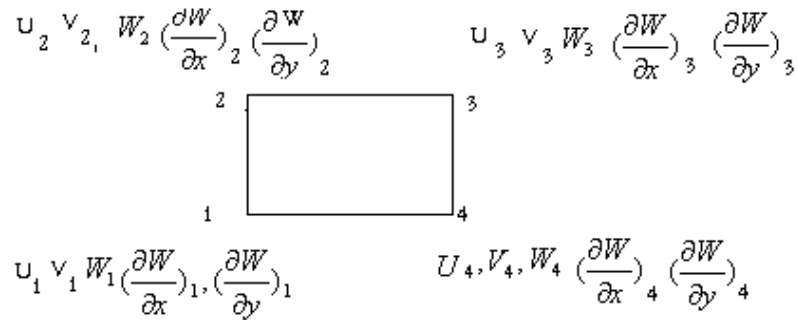


Рис. 8. Прямоугольный эрмитовый элемент для пространственной задачи

Для прямоугольного конечного элемента при изгибе без учета мембранных усилий степень свободы равна 12 (рис. 9).

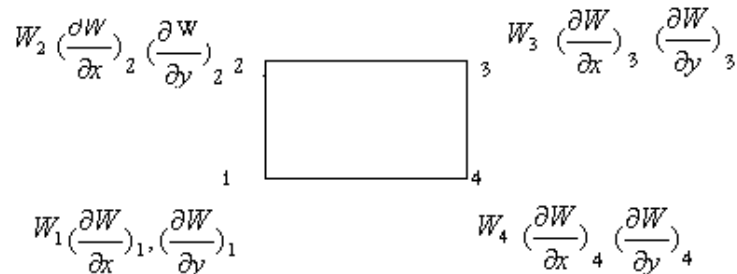


Рис. 9. Конечный элемент для жестких плит

Для толстых плит при изгибе в каждой точке возможны 3 линейных смещений и 2 угловых смещений:

$$u_1, v_1, w_1, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1, \quad u_2, v_2, w_2, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2, \quad \dots, \quad u_8, v_8, w_8, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_8, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_8$$

Для конечного элемента в виде параллелепипеда (рис. 10) в общем случае степень свободы (зафиксировано 8 точек и каждая точка имеет степень свободы равной 5) равна 40.

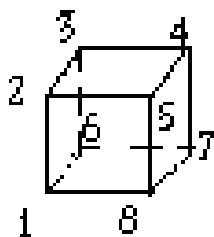


Рис. 10. Конечный элемент в виде параллелепипеда

На рис. 11 представлен четырехугольный криволинейный конечный элемент для плоской задачи в полярной системе координат.

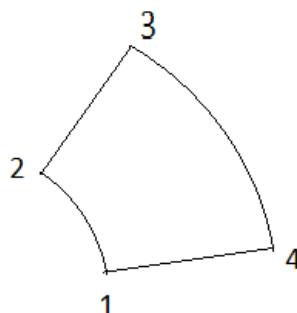


Рис. 11. Криволинейный конечный элемент

1 Разрешающие уравнения для плоской задачи при расчете пластин

Плоская задача. Функция напряжения. Бигармоническое уравнение. Граничные условия

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются, если все напряжения параллельны одной плоскости, например, в случае тонкой пластины (брус, стержень), подверженной действию сил, приложенных к ее контуру, параллельно плоскости пластины и равномерно распределены по ее толщине (рис. 1.1).

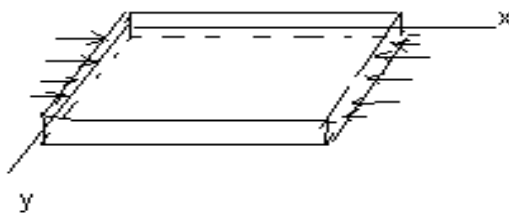


Рис. 1.1. Действие внешней нагрузки

В этом случае составляющие напряжений в направлении оси z равны нулю на обеих поверхностях пластинки и можно полагать, что они отсутствуют и по всей толщине пластины, т.е. распределение напряжений является плоским. Естественно предположить, что другие компоненты напряжений (σ_x , σ_y , $\tau_{x,y}$, $\tau_{y,x}$) не зависят от координаты z , т.е. остаются постоянными по толщине пластины. Если зарисовать срединную плоскость пластины, то по граням элементарного прямоугольника действуют следующие напряжения (рис. 1.2):

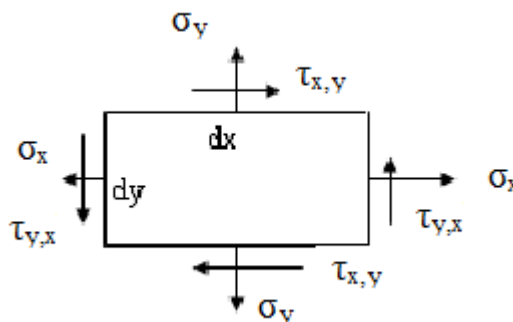


Рис. 1.2. Напряжения по граням элементарного прямоугольника

Будем полагать, что объемной силой является только сила тяжести, т.е. $Z=X=0$, $Y\rho=-q$. Тогда уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y\rho &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x \cos(x, \nu) + \tau_{xy} \cos(y, \nu), \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_y \cos(y, \nu) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Зависимости Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.3)$$

Уравнения неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

Обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \sigma_y], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \sigma_x], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Плоская задача теории упругости сводится к решению 8 уравнений с 8 неизвестными: 3 компоненты напряжений, 3 компоненты деформаций и 2 компоненты перемещений.

Плоская задача теории упругости упрощается, если ввести функцию напряжений φ . Представим, что существует такая функция $\varphi = \varphi(x, y)$, при помощи которой напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + qx \quad (1.6)$$

Если подставить правую часть выражений для напряжений в уравнения равновесия, то они обращаются в тождество, а уравнение совместности деформаций обращается в бигармоническое уравнение относительно функции напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$, называемой функцией Эри. Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к решению следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1.7)$$

Граничные условия через функцию напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(x, \nu) + \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + qx\right) \cos(y, \nu), \\ p_{y\nu} &= \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + qx\right) \cos(x, \nu) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(y, \nu) \end{aligned} \quad (1.8)$$

2 Разрешающие уравнения при изгибе пластин

Техническая теория изгиба пластин. Основные гипотезы. Уравнение Софи - Жармен. Статические и кинематические граничные условия

Плоской пластиной средней толщины, или тонкой плитой называется упругое тело призматической или цилиндрической формы с малой по сравнению с размерами основания высотой (толщиной). Техническая теория изгиба пластин применима для следующих пластин:

1. Отношение толщины к наименьшему другому размеру плиты должно быть меньше 1/10, т.е. $h/b < 1/10$;
2. Ожидаемые прогибы плиты малы по сравнению с толщиной ($w < 1/5h$).

Плоскость, параллельную основанию пластины и делящая пополам ее высоту называют срединной плоскостью, а поверхность, в которую она обращается при изгибе, называют упругой поверхностью.

В дальнейшем будут рассматриваться пластины постоянной толщины, загруженные поперечной нагрузкой $q(x, y)$, распределенной по верхней поверхности пластинки (рис. 2.1).

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНА

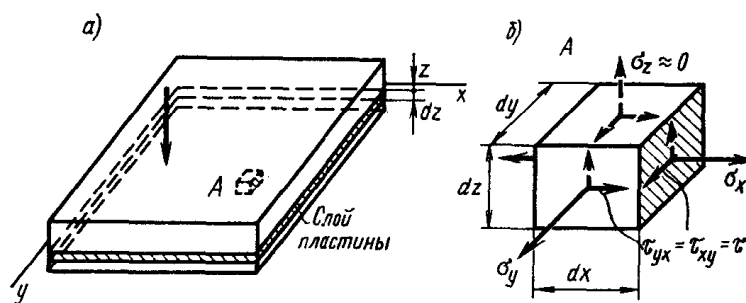


Рис. 2.1. Усилия в прямоугольной пластине: а – расчетная схема – срединная плоскость; б – напряжения по граням элементарного параллелепипеда

Техническая теория изгиба пластин построена на следующих двух гипотезах, которые упрощают решение задач.

1. Кинематическая гипотеза: совокупность точек, лежащих до деформации пластины на какой-либо прямой, перпендикулярной к срединной плоскости, остается на прямой, нормальной к упругой поверхности деформированной пластины. Прямолинейный элемент сохраняет свою длину.

2. Статическая гипотеза: пренебрегаем нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной плоскости, возникающими вследствие нажатия горизонтальных слоев пластины друг на друга.

Нормальные напряжения в направлении оси z отсутствуют в силу принятых гипотез. Внутренние усилия в пластине представлены на рис. 2.2: M_x , M_y , M , Q_x , Q_y – соответственно изгибающие и крутящие моменты и поперечные силы. Обозначим через w прогиб срединной поверхности, т.е. вертикальное расстояние между точкой, взятой на срединной плоскости до деформации, и положением той же точки на упругой поверхности. В силу принятой кинематической гипотезы трехмерная задача теории упругости сводится к более простой двумерной задаче, а именно, к задаче об определении усилий и перемещений, относящихся к точке на срединной плоскости, т.е. $w=w(x,y)$. Горизонтальные смещения точек, не принадлежащих срединной плоскости, соответственно параллельно осям x , y , обозначим через u , v . На рис. 2.3 изображена пластина в разрезе до и после деформации.

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

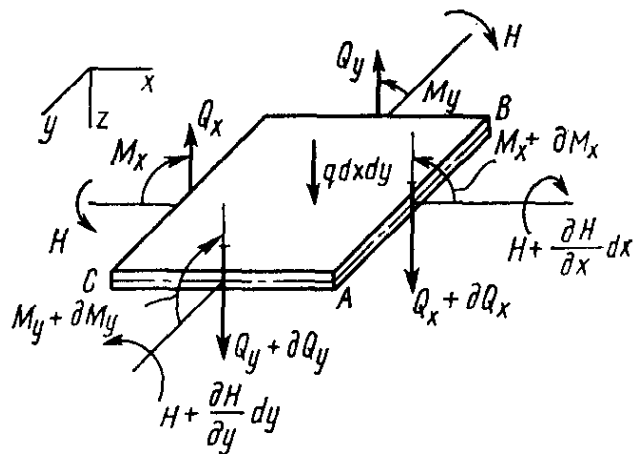


Рис. 2.2. Внутренние усилия при изгибе пластин

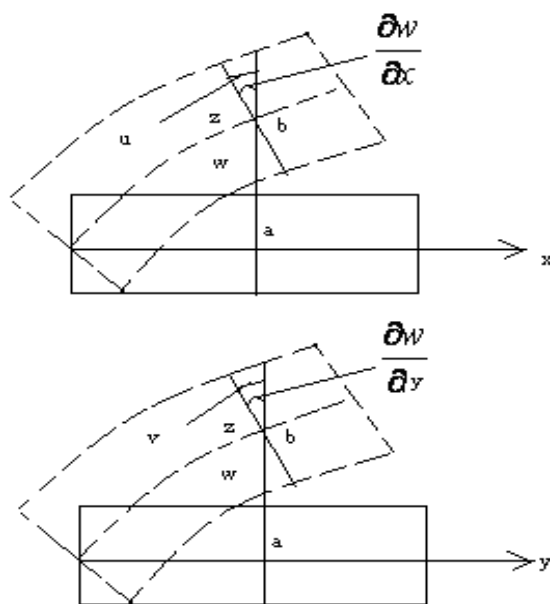


Рис. 2.3. Углы поворота при изгибе пластин

Из рис. 2.3 следует:

$$\begin{aligned}
 u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, & v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Используя (2.1), закон Гука, уравнения равновесия и граничные условия:

$$z = \pm \frac{h}{2} \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$z = \frac{h}{2} \quad \sigma_z = q(x, y),$$

$$z = -\frac{h}{2} \quad \sigma_z = 0$$

Получаем дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}, \quad \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) представляет основное уравнение изгиба плоской пластины средней толщины при отсутствии сил в срединной плоскости или параллельных ей, оно называется уравнением Софи Жармен. Это уравнение можно переписать в явном виде:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} w + \frac{\partial^4}{\partial y^4} w = \frac{q}{D} \quad (2.3)$$

Здесь q – интенсивность внешней нормальной нагрузки;

W – нормальные перемещения или прогибы точек срединной плоскости;

D – цилиндрическая жесткость при изгибе пластины.

Уравнение (2.3) является разрешающим уравнением, так как все внутренние усилия выражаются через функцию w соответствующими дифференциальными зависимостями, т.е. зная решение уравнения 1, можно определить напряженно- деформированное состояние пластины.

При интегрировании уравнения 2.3 необходимо использовать граничные условия, т.е. условия на опорном контуре пластины. Эти условия могут иметь статический или кинематический характер. Например, для случая защемления, шарнирного опирания или свободного края они записываются следующими зависимостями:

1. допустим левый край защемлен: при $x=0$ и при любом y должно быть

$$W=0 \text{ (отсутствие прогиба) и } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ (отсутствие угла наклона срединной}$$

плоскости по отношению к оси ox) (кинематические условия).

2. допустим верхний край шарнирно-оперт: при $y=0$ и при любом x должны отсутствовать прогибы и изгибающие моменты т.е.

$$W=0 \text{ и } M_y = 0 \text{ (смешанные граничные условия)}$$

3 допустим правый край свободный: при $x=a$ должны отсутствовать все напряжения (статические условия), т.е.

$$\sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0$$

Внутренние усилия выражаются через функцию прогиба w следующими дифференциальными зависимостями:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), & M_2 &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M &= D(1-\nu)\chi = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & Q_1 &= \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, & Q_2 &= \frac{\partial M_2}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В (2.4) ν - коэффициент Пуассона, D – цилиндрическая жесткость.

Основные уравнения и зависимости теории изгиба пластин в полярных координатах

В общем случае несимметричного изгиба круглых пластин удобно пользоваться полярными координатами.

Положение точки на срединной плоскости пластинки определяется расстоянием r от начала координат O и углом θ между этим направлением r и некоторой осью Ox , занимающей определенное положение на плоскости (рис. 2.4). Взамен параллелепипеда с прямоугольной формой граней теперь выделяем малый элемент $abcd$, вырезанный из пластинки двумя радиальными сечениями Oc и Ob , перпендикулярными к пластинке цилиндрическими поверхностями ad и bc , радиусы кривизны которых равны r и $r+dr$. При изгибе по граням элемента действуют изгибающие моменты: M_r , M_θ , крутящий момент M , поперечные силы: Q_r , Q_θ .

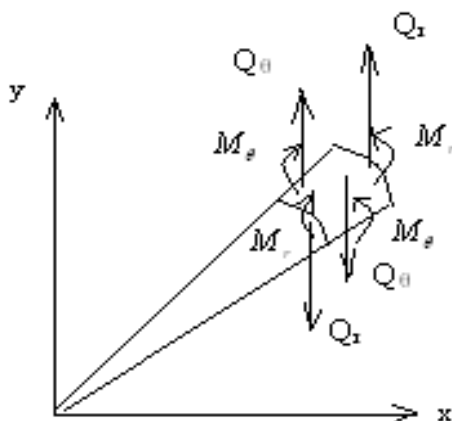


Рис. 2.4. Внутренние усилия для круглой пластины

Все основные уравнения изгиба пластин можно преобразовать к полярной системе координат, используя следующие формулы:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2.5)$$

Основное уравнение изогнутой поверхности пластины имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (2.6)$$

В (2.6) w – прогиб; D – цилиндрическая жесткость; $q(r, \theta)$ – интенсивность нормальной нагрузки.

Изгибающие и крутящий моменты, поперечные силы определяются через функцию прогиба следующими дифференциальными зависимостями:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], & M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \\ M &= (1-\nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), & Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right], \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \end{aligned}$$

Граничные условия

1. если край пластины радиуса a – защемлен, то

$$r=a \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

2. при шарнирном опирании

$$r=a \quad w=0, \quad M_r = 0$$

3. для свободного края

$$r=a \quad M_r = 0, \quad Q_r = 0$$

Нормальные и касательные напряжения определяются в виде:

$$\sigma_r = \frac{M_r}{I} z, \quad \sigma_\theta = \frac{M_\theta}{I} z, \quad \tau_{zr} = \frac{Q_r S_r}{I}, \quad \tau_{z\theta} = \frac{Q_\theta S_\theta}{I}, \text{ где}$$

$I = \frac{h^3}{12}$ – момент инерции сечения, S_r, S_θ – статические моменты сечения.

Симметричный изгиб круглой пластины

Рассмотрим симметричный изгиб круглой пластины (рис. 2.5). Если действующая на круглую пластину нагрузка распределена по ней симметрично относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через ее центр, то изогнутая поверхность, в которую обратится срединная плоскость пластины, так же получится симметричной. Во всех точках, равноудаленных от центра пластинки, прогибы будут одинаковы, и потому можно удовлетвориться рассмотрением их лишь в одном единственном диаметрально сечении, проходящем через ось симметрии.

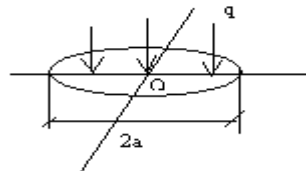


Рис. 2.5. Срединная плоскость пластины

Поместим начало координат O в центре неизогнутой пластинки (рис. 2.5), через r обозначим радиальные расстояния точек, лежащих в срединной плоскости, а через w – их прогибы вниз. Тогда дифференциальное уравнение равновесия изогнутой срединной поверхности пластины будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D} \quad (2.7)$$

Если круглая пластина радиуса «а» несет нагрузку интенсивностью q , равномерно распределенную по всей поверхности пластинки, то величина перерезывающей силы Q на расстоянии r от центра пластинки определяется из уравнения равновесия всех внешних и внутренних сил $\sum F_n = 0$

Уточненная теория изгиба

Техническая теория изгиба и колебаний пластинок, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява, дает достаточно точные результаты в случае, если отношение толщины пластины к наименьшей длине волны деформации не превышает 1/10. При определении высших частот и форм собственных колебаний или амплитуд вынужденных колебаний при высокочастотном возбуждении эта теория, вообще говоря, не применима, и пластина должна рассматриваться как трехмерное упругое тело, колебания которого описываются точными уравнениями теории упругости. Поскольку решение трехмерной динамической задачи теории упругости наталкивается на серьезные трудности, сделаны попытки построить уравнения, которые

занимали бы промежуточное место между уравнениями технической теории и точными уравнениями теории упругости, например, уравнений, учитывающих сдвиг, инерцию вращения и др. Уточненные теории изгиба и колебаний пластинок, учитывающие осредненный поворот и искривления нормали элемента, можно привести в прямоугольных координатах x, y, z [187, 201] к следующему виду:

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi + w) &= -\frac{2(1+\nu)}{\beta E h} \left(q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \\ \Delta \varphi &= -\frac{\nu(1+\nu)}{E h} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \left(q - \frac{\rho h}{6} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{6\beta(1-\beta)}{h^2} (\varphi + w) + \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \Delta \psi &= \frac{12\beta}{h^2} \psi + \frac{2(1+\nu)\rho}{E} E \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Здесь w – прогиб пластины; φ, ψ – функции, определяемые следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u z dz, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v z dz. \quad (2.9)$$

Компоненты смещения u, v в направлении осей x, y связаны с функциями φ, ψ формулами, учитывающими осредненный поворот и искривление нормали элемента:

$$\begin{aligned}u &= -[z + f_1(z)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + f_1(z) \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -[z + f_1(z)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + f_1(z) \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Компоненты напряжений выражаются через изгибающие, крутящие моменты и поперечные силы по формулам:

$$\begin{aligned}o_x &= -\frac{12}{h^3} \left[M_x z + f_1 \left[M_x - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha \nu h^3 \rho}{12\beta(1-\nu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right], \\ o_y &= -\frac{12}{h^3} \left[M_y z + f_1 \left[M_y - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\alpha \nu h^3 \rho}{12\beta(1-\nu)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{12}{h^3} \left[M_{xy} z + f_1 \left[M_{xy} - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right], \\ \tau_{xz} &= -\frac{(1+\nu) G F'(z)}{E F(h/2)} Q_x, \\ \tau_{yz} &= -\frac{(1+\nu) G F'(z)}{E F(h/2)} Q_y.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 M_x &= D \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] - \frac{\alpha \nu h^2}{12 \beta (1 - \nu^2)} \left[q - (1 - \beta) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right], \\
 M_y &= D \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] - \frac{\alpha \nu h^2}{12 \beta (1 - \nu^2)} \left[q - (1 - \beta) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \\
 M_{xy} &= \frac{D(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \\
 Q_x &= \frac{\beta E h}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 Q_y &= \frac{\beta E h}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Функции $f_1(z)$, $F(z)$, связанные соотношением

$$f_1(z) = \frac{h^3 F(h/2)}{12 \int_{-h/2}^{h/2} z F(z) dz} - z,$$

могут иметь различный вид. Обычно полагают

$$F'(z) = 1 - \frac{4z^2}{h^2}.$$

При этом $\beta=5/6$, а α принимают либо равным нулю (если пренебречь напряжением σ_z), либо равным единице.

Граничные условия имеют вид (например, на краю $x=\text{const}$):

Для защемленного края

$$w = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0;$$

для шарнирно опертого края

$$w = 0, M_x = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0;$$

для свободного края

$$M_x = 0, \quad M_{xy} = 0, \quad Q_x = 0.$$

Гибкие пластины

При малых толщинах пластины, когда ее прогибы от поперечной нагрузки превышают $1/4 - 1/5$ толщины, техническая теория дает искаженные результаты, и пластина должна рассматриваться как гибкая. Теория гибких пластин основывается на учете наряду с поперечным изгибом также и деформирования пластин в своей плоскости. Уравнения колебаний гибкой пластины в прямоугольной системе координат имеют вид [187, 201]:

$$D\Delta\Delta w - h\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t),$$

$$\Delta\Delta\Phi = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],$$
(2.13)

где Φ – функция напряжений, связанная с напряжениями в срединной поверхности пластины соотношением:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}.$$
(2.14)

Эти уравнения называются нелинейными уравнениями Кармана. Граничные условия для разрешающих уравнений наряду с ограничениями, накладываемыми на прогиб w и его производные, содержат также параметры, выражаемые через функцию напряжений. Условия закрепления дополняются следующими зависимостями:

1) край, незакрепленный от смещений вдоль нормали к нему (нормальные напряжения равны нулю):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = b;$$

2) край, не закрепленный от продольных смещений вдоль края (тангенциальное напряжение равно нулю):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad x = a \quad \text{и} \quad \text{при} \quad y = b;$$

3) параллельные края $x=0$, $x=a$ или $y=0$, $y=b$ закреплены таким образом, что взаимное смещение их точек вдоль общей нормали невозможно. В этом случае граничные условия имеют интегральный вид:

$$\begin{aligned} 4) \quad & \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx = 0, \\ & \int_0^b \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dy = 0. \end{aligned}$$

Теория изгиба пластин с учетом касательных перерезывающих напряжений

При выводе уравнений равновесия приняты следующие гипотезы:

1. Прямолинейный элемент (нормальный до деформации к срединной плоскости пластины) в процессе деформации искривляется так, что сдвиги по толщине пластины изменяются по параболическому закону.

2. Напряженное состояние пластины является обобщенным плоским напряженным состоянием, которое аппроксимируется системой изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил.

3. Эти гипотезы позволяют определять касательные перерезывающие напряжения непосредственно по деформациям с помощью законов Гука и, следовательно, более полно удовлетворять условиям совместности.

Пусть пластина толщиной h находится под действием поперечной нагрузки интенсивности $q(x, y)$ и изгибающих моментов M_n , крутящих моментов M_{nt} , перерезывающих сил Q_n , распределенных по контуру.

В прямоугольной системе координат плоскость x, y совместима с срединной плоскостью пластины; ось z направим вниз. Обозначим через u, v, w перемещение точки в направлении координатных осей x, y, z и примем их в виде [187, 197, 201]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\tau_{xz}^0}{G}, \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\tau_{yz}^0}{G}, \\ w(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $\tau_{xz}^0 = \tau_{xz}(x, y, 0)$, $\tau_{yz}^0 = \tau_{yz}(x, y, 0)$ – суть касательные напряжения в срединной поверхности пластины; углы поворота элемента u срединной поверхности равны

$$\theta_x = -\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}, \quad \theta_y = -\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} \quad (2.19)$$

С учетом сдвига [2] углы поворота складываются из угла поворота нормали к срединной поверхности и углов сдвига у срединной поверхности и, следовательно, имеют вид:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\tau_{xz}^0}{G}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\tau_{yz}^0}{G}, \quad (2.20)$$

где τ_{xz}^0 , τ_{yz}^0 – касательные напряжения в срединной плоскости с учетом сдвига, G – модуль сдвига, w – перемещения плиты по нормали к срединной плоскости. Сами же касательные перерезывающие напряжения, а, следовательно, и сдвиги изменяются по толщине по параболическому закону, обращаясь на верхней и нижней граничных поверхностях пластины $z = \pm h/2$ в нуль, и достигают наибольших значений у срединной поверхности. Прямолинейные элементы, нормальные до деформации к срединной плоскости пластины, в процессе деформации искривляются, оставаясь нормальными к верхней и нижней граничным поверхностям пластины. Наибольшая степень искривления соответствует части элемента, находящейся в непосредственной близости от нейтрального слоя.

Дифференциальные уравнения свободных колебаний пластины с учетом поступательных и вращательных инерционных сил имеют следующий вид [197, 201-202]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - I\rho \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - I\rho \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_{xy} – соответственно поперечные силы, изгибающие моменты, крутящий момент; w – перемещения плиты по нормали к срединной плоскости; I – момент инерции сечения; ρ – плотность материала; θ – угол поворота сечения с учетом сдвига; m – масса единицы объема.

Используя зависимости Коши, получена система линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами относительно искомых функций w , θ_x , θ_y , которую для собственных колебаний пластины с учетом сдвига можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \nabla^2 w = \frac{3}{2Gh} q_n(x, y, t), \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \theta_x + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) = \frac{5hG}{6D} \left(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q_x(x, y, t)$$

$$\nabla^2 \theta_y + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) = \frac{5hG}{6D} \left(\theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q_y(x, y, t)$$

где в правой части $q(x, y, t)$ – составляющие поступательных и вращательных инерционных сил.

Если обозначить направление нормали к контуру пластины через n , а касательной – t , то граничные условия можно записать в виде:

1. Контур свободно оперт:
 $w=0, M_n=0, M_{nt}=0.$
2. Контур шарнирно-закреплен:
 $w=0, \theta_t=0, M_n=0.$
3. Контур свободно защемлен:
 $w=0, \theta_n=0, M_{nt}=0.$
4. Контур жестко защемлен:
 $w=0, \theta_n=0, \theta_t=0.$
5. Контур свободен от напряжения:
 $M_n=0, M_{nt}=0, Q_n=0.$

Для прямоугольной в плане пластины индексы n, t необходимо поменять на x, y .

Разрешающие уравнения уточненной теории изгиба по С.П. Тимошенко

Обычная теория тонкой пластины дает для прогиба дифференциальное уравнение четвертого порядка с двумя граничными условиями, которые должны удовлетворяться по каждому краю. Для пластины конечной толщины необходимо выполнение трех граничных условий вместо двух. Это объясняется тем, что в элементарной теории при выводе соотношения между напряжением и прогибом игнорируется искажение элементов пластины, производимое перерезывающими силами Q_x, Q_y . Пренебрежение деформаций, вызванной поперечными силами, равносильно допущению, что модуль сдвига $G=\infty$. В силу этого допущения, пластина не реагирует на кручение, производимое некоторой парой, приложенной к цилиндрической поверхности пластины, если вектор пары совпадает с нормалью к этой

поверхности. Вводится некоторое среднее для всей толщины пластины значения w поперечного перемещения, равно как и некоторые средние значения φ_x , φ_y для угловых деформаций (поворотов) сечений соответственно $x=\text{const}$, $y=\text{const}$. Эти величины определяются из равенства работы результирующих пар на средних углах поворота и работы равнодействующих сил на среднем перемещении работе соответствующих напряжений на фактических перемещениях u_0 , v_0 , w_0 в том же сечении. Используя средние значения нормального перемещения и углов поворота, путем преобразований можно изгибающие и крутящие моменты представить в виде [187, 201]:

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}, \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}, \\ M_{xy} &= (1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия, получаем систему трех дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций среднего прогиба w и поперечных сил Q_x , Q_y :

$$\begin{aligned} Q_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}, \\ D\Delta\Delta w &= q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение последнего уравнения представляется в виде суммы

$$w = w' + w'', \quad (2.25)$$

где w' – частное решение уравнения

$$D\Delta\Delta w' = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q,$$

w'' – общее решение уравнения

$$\Delta\Delta w'' = 0. \quad (2.26)$$

Как и в обычной теории пластин, необходимо удовлетворить всем четырем граничным условиям.

Вводя новую функцию напряжений ψ , можно вместо трех дифференциальных уравнений рассматривать два уравнения:

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w &= q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q, \\ \Delta\psi - \frac{10}{h^2} \psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Поперечные силы выражаются через прогибы и функцию напряжений в виде:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ Q_y &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

На каждом крае пластины должны удовлетворяться по три граничных условий.

3 Алгоритм расчета методом конечных элементов

Алгоритм расчета деформируемых тел методом конечных элементов состоит из следующих этапов:

1. Исследуемая область с помощью сетки дискретизации разделяется на определенное количество элементов, которые, как предполагается, в результате будут взаимосвязаны в итоговом количестве узловых точек, располагающихся на границах элементов. Неизвестными параметрами решаемой задачи и будут выступать обобщенные перемещения этих узловых точек, а их число будет неразрывно связано с известным числом их степеней свободы.

2. Вводятся функции для характеристики обобщенных перемещений, которые будут определять распределение в каждом из элементов через обобщенные перемещения узловых точек. Также эти функции будут определять поля деформации и усилий внутри элементов, и на границах в том числе.

Определение внутренних усилий (напряжений)

3. Результатом решения системы разрешающих уравнений МКЭ в форме метода перемещений будут компоненты узловых перемещений дискретной модели конструкции.

4. Вычисление же необходимых компонент напряженного состояния конструкции производится поэлементно в следующем порядке:

а) формируется вектор узловых перемещений для каждого конечного элемента q^e (посредством выборки из глобального вектора узловых перемещений q соответствующих компонент);

б) если локальная система координат для отдельного КЭ не совпадает с глобальной, производится преобразование вектора узловых перемещений q^e данного элемента;

в) на основе геометрических и физических соотношений формируется матрица усилий (напряжений) для КЭ – G ;

г) вычисляется вектор узловых значений внутренних усилий (напряжений) для КЭ – S^e , который связан с узловыми перемещениями в общем случае следующим соотношением:

$$S^e = G q^e.$$

Основные этапы статического расчета конструкций МКЭ и последовательность их выполнения состоят в следующем:

1 – Дискретизация конструкции;

2 – Формирование глобальных матриц жесткости (МЖ) и матриц внешних нагрузок (ВН);

3 – Учет заданных граничных условий;

4 – Решение системы разрешающих уравнений;

5 – Определение внутренних усилий.

Блок схема МКЭ приведена в виде схемы на рис. 3.1.

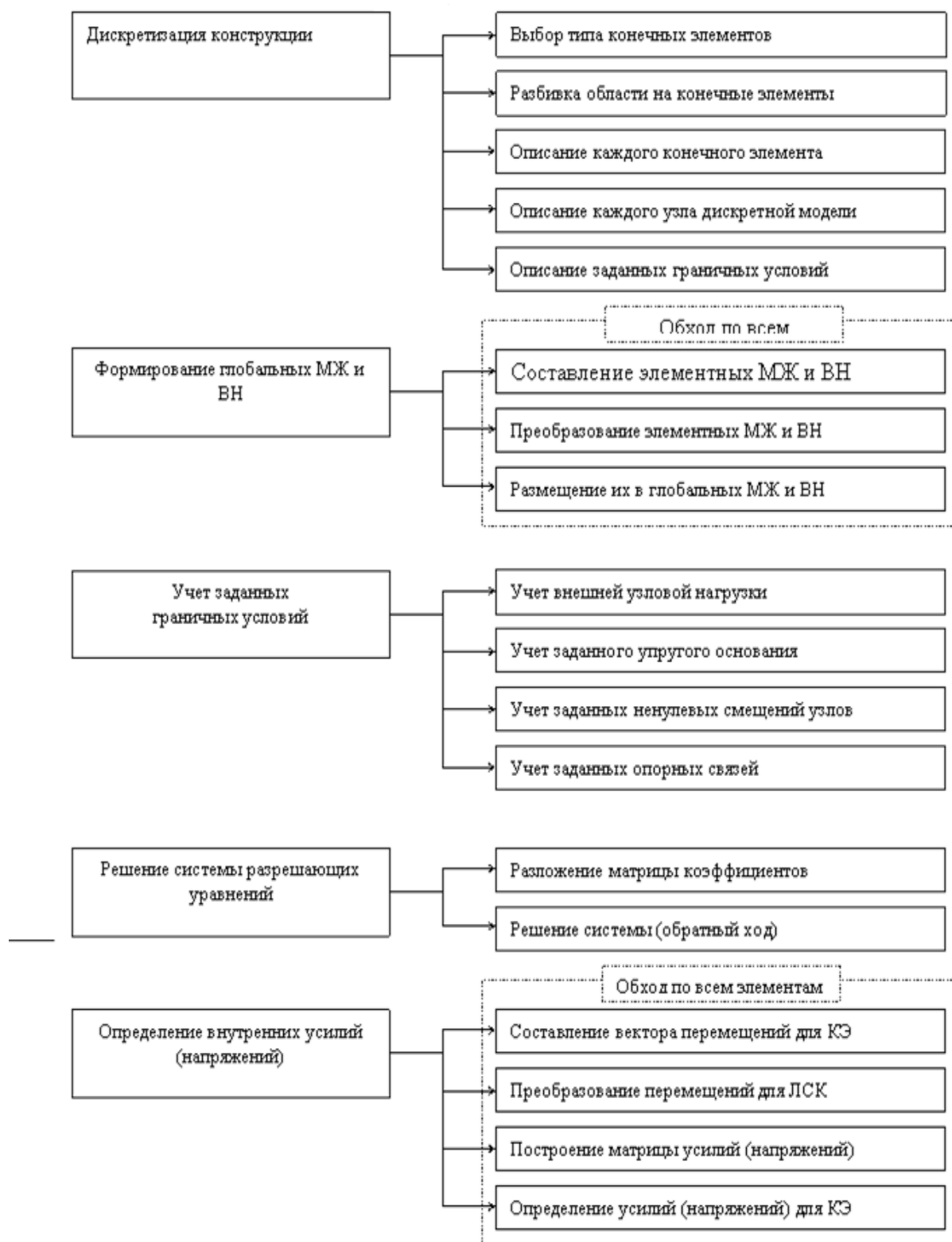


Рис. 3.1. Блок-схема МКЭ.

3.1 Метод конечных элементов. Основные уравнения

В общем случае основные зависимости и уравнения в механике деформируемого твердого тела можно записать в векторной форме.

Рассмотрим тело объемом V , ограниченного поверхностью S , находящееся под действием объемных сил P и поверхностной нагрузкой P_s . Для определения напряженно-деформированного состояния тела необходимо записать основные уравнения и зависимости. Для упругого тела они состоят из следующих уравнений:

1.уравнения равновесия (3.1.1);

$$A\vec{\sigma} + \vec{P} = 0,$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix},$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$
(3.1.1)

2.уравнения непрерывности или совместности деформаций (зависимости Коши):

$$\vec{\varepsilon} = A^T \vec{Z},$$

$$\vec{\varepsilon} - \text{вектор деформаций,}$$

$$\vec{Z} - \text{вектор перемещений,}$$
(3.1.2)

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \quad (3.1.3)$$

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

3. физические уравнения (обобщенный закон Гука) для анизотропного тела, имеющего разные модули и коэффициент Пуассона по трем направлениям, имеют вид:

$$\vec{\varepsilon} = B\vec{\sigma}, \quad (3.1.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\mu_{xy}}{E_y} & -\frac{\mu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\mu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{zx}}{E_x} & -\frac{\mu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

Частный случай – изотропное тело

$$Y_{\text{ч}}=Y_{\text{н}}=Y_{\text{я}}=Y_{\text{б}} \quad \Pi_{\text{чн}}=\Pi_{\text{ня}}= \Pi_{\text{яч}}=\Pi \quad (3.1.6)$$

$\mu_{xy}=\mu_{xz}=\mu_{yx}=\mu_{yz}=\mu_{zy}=\mu_{zx}=\mu$, тогда матрица B упрощается и имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

Поверхностные условия

Пусть на части поверхности S_1 заданы напряжения (статические граничные условия), а на части поверхности S_2 заданы перемещения (кинематические граничные условия), тогда

а) статические граничные условия

$$P_s = P_{s_1} = A_s \vec{\sigma}, \quad x, y, z \in S_1$$

(3.1.8)

Цб) кинематические граничные условия

$$\vec{Z}_s = \vec{Z}_{s_2}, \quad x, y, z \in S_2$$

(3.1.9)

Для составления матрицы жесткости пластины необходимо использовать соответствующую теорию и упрощения. Для жестких пластин можно использовать техническую теорию изгиба пластин. Для гибких пластин – мембранную теорию, для толстых плит – теорию с учетом сдвига и поперечных сил. Рассмотрим в дальнейшем каждую теорию в отдельности.

Вариационный принцип Лагранжа

Вариационный принцип (и уравнение) Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: из множества кинематически допустимых перемещений, перемещения, действительно имеющие место, сообщают потенциальной энергии упругой системы минимальное значение. Соответствующее уравнение записывается так

$$d \mathcal{E} = 0$$

(3.1.10)

Если функционал энергии представить в виде функции некоторых параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$, т.е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то в состоянии равновесия функционал энергии должен иметь стационарное значение, т.е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_n} = 0$$

(3.1.11)

Система уравнений (3.1.11) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров a_i ($i=1, 2, \dots, n$).

При использовании метода конечных элементов в качестве неизвестных можно взять узловые значения перемещений. Например, для r -го треугольного плоского элемента вектор узловых перемещений имеет вид:

$$\bar{z}^r = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

Обозначим вариации перемещений и деформаций через δu ; $\delta \varepsilon$. Тогда напряжения, перемещения и деформации с учетом возможных перемещений можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u + \delta u, & \bar{\varepsilon} &= \varepsilon + \delta \varepsilon, \\ \bar{\sigma} &= \sigma \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Используя зависимости Коши,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \bar{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, & \bar{Z} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Для треугольного элемента вектор перемещений имеет в каждом узле 2 компоненты, полный вектор перемещений состоит из 6 компонент:

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.15)$$

$$B^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.1.16)$$

Деформации можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= B^T \vec{Z}, \\ \vec{\sigma} &= D \vec{\varepsilon} = DB^T \vec{Z} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Для плоской задачи вектора можно представить:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \\ D &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Для плоской деформации матрица имеет вид:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

Символ δ означает вариацию, т.е. возможное изменение, P^r – вектор узловых нагрузки.

Полная энергия системы состоит из суммы работы внешних сил A и потенциальной энергии деформации системы W , т.е. $\mathcal{E} = A - W$. Вариации работы внешних сил и потенциальной энергии можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\delta A &= (\delta \mathbf{z})^T \mathbf{P}^r, \\ \delta W &= \int_{V^r} (\delta \varepsilon)^T \sigma dV\end{aligned}\quad (3.1.20)$$

Т.к. вариация полной энергии в стационарном состоянии должна быть равна нулю, т.е. $\delta \mathcal{E} = \delta A - \delta W = 0$, то вектор внешней нагрузки имеет вид:

$$\mathbf{P}^r = \left(\int_{V^r} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{z}^r, \mathbf{P}^r = \mathbf{K}^r \mathbf{z}^r, \mathbf{K}^r = \int_{V^r} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.1.21)$$

Величина $\mathbf{K}^r$ представляет собой реакции от единичных перемещений, т.е. матрицу жесткости для r -го элемента.

Построение матрицы жесткости конечного элемента

Напомним, что бесконечно малое изменение, называемое варьированием, и обозначенное символом d , подобно дифференцированию. Оно выполняется по тем же правилам, но не связано с действительным изменением независимых переменных.

Полная потенциальная энергия упругой системы $\mathcal{E}$ может быть разделена на две части, одна из которых соответствует работе (энергии деформации) внутренних сил W , а другая определяется работой приложенных (в частности внешних) сил A (3.1.22).

После разбиения области на элементы это равенство должно быть записано в виде суммы

Полная энергия системы состоит из суммы работы внешних сил A и потенциальной энергии деформации системы W , т.е. $\mathcal{E} = A - W$. Вариации работы внешних сил и потенциальной энергии можно представить в виде:

$$\mathcal{E} = \sum_{r=1}^s (W^r - A^r) \quad (3.1.22)$$

где s – общее количество конечных элементов.

Энергия деформации бесконечно малого объема dV W в случае статического приложения внешних сил и наличия вынужденных деформаций может быть вычислена по формуле:

$$dW^r = \frac{1}{2} \{\bar{\varepsilon}\}^T \cdot \{\bar{\sigma}\}. \quad (3.1.23)$$

Полная энергия деформации получается интегрированием этой величины по объему тела.

Энергия деформации W^r отдельного элемента r с применением (3.1.22) и формул (3.1.20) и (3.1.23) с учетом начальных деформаций ε_0 имеет вид:

$$W^r = \int_{V^r} \frac{1}{2} (\{\delta^r\}^T \cdot [B^r]^T \cdot [D^r] \cdot [B^r] \{\delta^r\} - 2 \{\delta^r\}^T \cdot [B^r]^T \cdot [D^r] \cdot [B^r] \cdot \{\varepsilon_0^r\}) dV \quad (3.1.24)$$

Напомним, что транспонирование произведения двух матриц выполняется по формуле

$$[E]^T = ([B] \{\delta\})^T = \{\delta\}^T [B]^T \quad (3.1.25)$$

Ввиду симметрии матрицы упругих постоянных $[D]^T = [D]$. Работа, совершаемая приложенными силами, может быть разделена на три различные части: работа A_p , совершаемая внешними сосредоточенными силами; работа A_s , которая получается в результате действия поверхностных сил (компонент напряжений) на гранях конечного элемента; работа A_v , совершаемая объемными силами.

Работу сосредоточенных сил легко определить, если в каждой точке приложения сосредоточенной силы поместить узел. Поверхностные и объемные силы в простейшем случае можно также привести к системе узловых сосредоточенных сил. Работа сосредоточенной силы равна произведению величины этой силы на длину пути, на котором эта сила действует. Обозначим узловые силы через $\{P\}$, а узловые перемещения через $\{\delta\}$ совершенную работу можно записать в виде произведения матриц:

$$A_p = \{\delta\}^T \cdot \{P\} = \{P\}^T \cdot \{\delta\} \quad (3.1.26)$$

Используя формулы (3.1.23) и (3.1.24), (3.1.25), получим выражение для полной потенциальной энергии конечного элемента

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \int_{V^r} \frac{1}{2} \{\delta^r\}^T \cdot [B^r]^T \cdot [D^r] \cdot [B^r] \{\delta^r\} dV - \\ & - \{\delta^r\}^T \{P^r\} + \int_{V^r} \{\delta^r\}^T [B^r]^T [D^r] \cdot [B^r] \cdot \{\varepsilon_0^r\} dV \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Чтобы минимизировать величину $\mathcal{E}$, дифференцируем выражение (3.1.27) по $\{\delta\}$ и приравняем результат к нулю. В итоге получается

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \{\delta\}} = \int_{V^r} [B^r]^T \cdot [D^r] \cdot [B^r] dV \{\delta^r\} - \\ - \int_{V^r} [B^r]^T [D^r] \cdot \{\epsilon_0^r\} dV - \{P^r\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Запишем (3.1.28) в другой форме

$$[K^r] \{\delta^r\} = \{F^r\} \quad (3.1.29)$$

В (3.1.29) объемный интеграл

$$[K^r] = \int_{V^r} [B^r]^T \cdot [D^r] \cdot [B^r] dV \quad (3.1.30)$$

определяет матрицу жесткости конечного элемента. Вектор внешней нагрузки

$$\{F^r\} = \int_{V^r} [B^r]^T \cdot [D^r] \cdot \{\epsilon_0\} dV + \{P^r\} \quad (3.1.31)$$

В случае постоянной толщины r -го конечного элемента

$$K^r = \int_{V^r} B^T D B dV = B^T D B \int_{V^r} dV = B^T D B h A \quad (3.1.32)$$

где h – толщина, A – площадь элемента.

Общее выражение для матричного произведения, входящего в (3.1.32), не приведено из-за его громоздкости. Матрица жесткости является квадратной; ее порядок равен числу степеней свободы конечного элемента. Для рассматриваемого треугольного, трехузлового конечного элемента порядок МЖ – 6×6 . Нетрудно показать, что МЖ является симметричной и имеет блочную структуру

симметрично

$$[K]^r = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{ik}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jk}] \\ [K_{ki}] & [K_{kj}] & [K_{kk}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \quad (3.1.33)$$

где $[K_{ij}]$ – квадратная симметричная подматрица порядка r ($r = 2$ – число степеней свободы компонент перемещений в каждом из узлов элемента), элементами которой являются реактивные усилия по соответствующим направлениям (x или y) в i -м узле, отвечающие единичным перемещениям по направлению, которое определено индексом j .

Интеграл, связанный с начальной деформацией в случае постоянной толщины элемента

$$[B]^r]^T \cdot [D]^r \cdot \{\epsilon_0^r\} \int_{V^r} dV = [B]^r]^T \cdot [D]^r \cdot \{\epsilon_0^r\} \cdot h^r \cdot A^r \quad (3.1.34)$$

Если начальная деформация элемента вызвана его тепловым расширением, и $\{\epsilon_0\}^T = \alpha \Delta T \{1 \ 1 \ 0\}$, то для случая плоского напряженного состояния

$$[B]^r]^T \cdot [D]^r \cdot \{\epsilon_0^r\} \cdot h^r \cdot A^r = \frac{\alpha E h \Delta T}{2(1-\nu)} \{b_i c_i b_j c_j b_k c_k\}^T \quad (3.1.35)$$

где α – коэффициент температурного расширения; ΔT – изменение температуры.

3.2 Метод конечных элементов (МКЭ) в варианте метода перемещений для плоской задачи

Плоская задача характеризуется двумя степенями свободы в каждой узловой точке. Например, для треугольного элемента степень свободы для плоской задачи равна 6 (рис. 3.2.1).

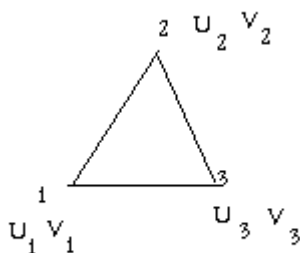


Рис. 3.2.1. Треугольный конечный элемент

Для прямоугольного элемента степень свободы равна 8 (рис. 3.2.2).

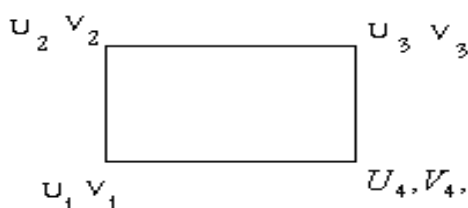


Рис. 3.2.2. Прямоугольный конечный элемент для плоской задачи

МКЭ для решения задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) для плоской задачи состоит из следующих этапов:

1. Рассматриваемая континуальная область данного тела дискретизируется путем разбиения на конечные элементы. Узловые точки определяются вершинами элементов (рис. 3.2.1).

2. Перемещения внутри элемента аппроксимируются линейными функциями от координат (x, y) , перемещения в направлении осей x, y для треугольного элемента записываются в виде:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$a_1, a_2, \dots, a_6$ - неизвестные коэффициенты.

Аналогично для четырехугольного элемента количество неизвестных коэффициентов в линейных функциях перемещений должно быть равно 8.

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy; \\ v &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned}$$

3. Строятся матрицы жесткости всех элементов в локальных системах координат $R_{\text{лок}}$.

4. Строятся матрицы жесткости всей системы в глобальной системе координат R.

5. Строится вектор внешней нагрузки $\vec{P}$, учитываются граничные условия.

6. Составляется система уравнений: уравнения равновесия. Эти уравнения можно получить из условия минимизации полной энергии системы.

$$R\vec{Z} + \vec{P} = 0 \quad (3.2.2)$$

В левой части:

$\vec{Z} = [u, v]^T$ - неизвестный вектор перемещений

$\vec{P} = [X, Y]^T$ - вектор внешней нагрузки

$$\vec{Z} = -R^{-1}\vec{P} \quad (3.2.3)$$

7. Определяются перемещения всех узлов конечных элементов. Зная вектор перемещений, можно определить деформации и напряжения во всех узлах системы:

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= A^T \vec{Z}, \\ \vec{\sigma} &= B^{-1} \vec{\varepsilon} = B^{-1} A^T \vec{Z} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

4 Метод конечных элементов к расчету стержневых систем

Для расчета пластины можно рассматривать следующий приближенный метод. Расчетная схема пластины представляет собой дискретную систему, состоящую из отдельных балок, плотно прилегающих друг к другу и образующих сплошную среду. Рассматривая пластину, состоящую из узких полос, для каждого элемента (балки) можно составить матрицы жесткости для различных вариантов закрепления.

4.1 Составление матрицы жесткости для балок с различными соединениями по торцам

1. Стержень, шарнирно неподвижная опора на левом торце и защемленный на правом конце.

Вначале укажем направления узловых перемещений (рис. 4.1.1).



Рис. 4.1.1. Направления и нумерация реакций по торцам стержня

В общем случае для стержня, защемленного двумя концами, матрица жесткости имеет порядок, равный трем. Т.к. стержень шарнирно оперт на левом торце, то первая строка и первый столбец имеет нулевые значения, т.е. матрица жесткости имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

где E – модуль упругости 1-го рода;

A – площадь поперечного сечения;

EA – жесткость на растяжение (сжатие);

EI – жесткость на изгиб;

L – длина стержня.

Выбрасывая нулевые строки и столбец, получаем матрицу жесткости пятого порядка:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

2. Шарнирно-подвижная опора слева и жесткое соединение справа (рис. 4.1.2).



Рис. 4.1.2. Направления и нумерация реакций по торцам стержня

По аналогии с предыдущим случаем в общем виде матрица жесткости имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Отбрасывая нулевые строки и столбцы, матрица жесткости будет 4-го порядка и имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

3. Заделка слева и шарнирно-подвижная опора справа (рис. 4.1.3).



Рис. 4.1.3. Направления и нумерация реакций по торцам стержня

По аналогии с предыдущим случаем матрица жесткости будет 4-го порядка и имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

4.3. Защемление на левом и шарнирное соединение на правом концах (рис. 4.1.4).



Рис. 4.1.4. Направления и нумерация реакций по торцам стержня

В общем случае матрица жесткости имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Выбрасывая нулевые 4-ую строку и 4-ый столбец, получаем матрицу жесткости в следующем виде:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

4. Защемление с двух концов (рис. 4.1.5).



Рис. 4.1.5. Направления и нумерация реакций по торцам стержня

По аналогии матрица жесткости имеет порядок, равный 6, и имеет следующий вид:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

4.2 Составление матрицы жесткости для плоской рамы методом конечных элементов

Составим матрицу жесткости для плоской рамы (рис. 4.2.1). Введены следующие обозначения:

f, j, k – обозначения стержней; 1, 2, 3, 4 – номера узлов; X' , Y' – локальная система координат; X , Y – глобальная система координат. Локальная система связана со стержнем: ось X' направлена вдоль оси стержня от начала к концу, ось Y' перпендикулярна к оси X' . Локальные системы указаны на рис. 4.2.1.

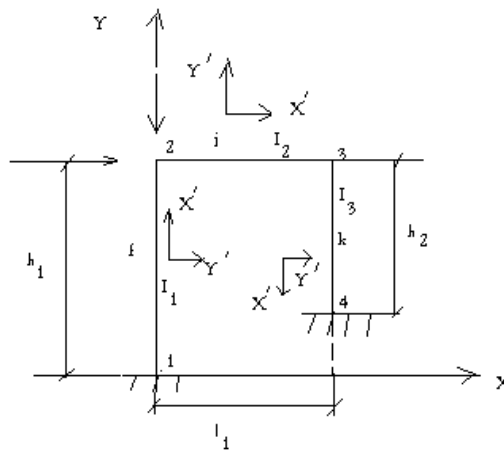


Рис. 4.2.1. Расчетная схема рамы

Алгоритм составления матрицы жесткости для рамы состоит из следующих процедур:

1. Составить матрицу жесткости R' для каждого стержня в локальной системе координат (x' , y'). Ось x' совпадает с осью стержня, ось y' перпендикулярна оси x' (рис. 4.2.1).

2. Составить матрицу направляющих косинусов для каждого стержня «С»/

3. Составить матрицу, которая преобразует перемещения $\bar{Z}'$ в локальной системе координат (x', y') в перемещения $\bar{Z}$ в глобальной системе координат (x, y) , т.е.

$$\bar{Z}' = V\bar{Z},$$

$$V = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

4. Составить матрицу жесткости R для каждого стержня в глобальной системе координат

$$R = V^T R' V$$

V^T – транспонированная матрица; R' – матрица жесткости в локальной системе координат; V – матрица преобразования.

5. Составить матрицу жесткости R в блочном виде

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

Степень свободы каждого узла в плоскости равна 3, поэтому общая степень свободы равна 12. Первый индекс указывает номер узла, в котором возникает блок реакций, второй индекс – номер узла, перемещением которого вызваны эти реакции.

6. Путем суммирования соответствующих элементов матриц жесткости отдельных стержней составить элементы общей матрицы R (рис. 4.2.1, рис. 4.2.2).

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{HH}^f, & R_{13} &= 0, & R_{14} &= 0, \\ R_{12} &= R_{HK}^f, & R_{21} &= R_{KH}^f, \\ R_{22} &= R_{KK}^f + R_{HH}^j, & R_{24} &= 0, & R_{31} &= 0, \\ R_{23} &= R_{HK}^j, & R_{32} &= R_{KH}^j, & R_{33} &= R_{KK}^j + R_{HH}^K, \\ R_{43} &= R_{KH}^K, & R_{44} &= R_{KK}^K, & R_{34} &= R_{HK}^K, \\ R_{HK}^J &= (R_{KH}^J)^T, & R_{KH}^K &= (R_{HK}^K)^T \end{aligned}$$

7. Составить матрицу жесткости системы без учета продольных сил.

8. Составить основную систему метода перемещений.

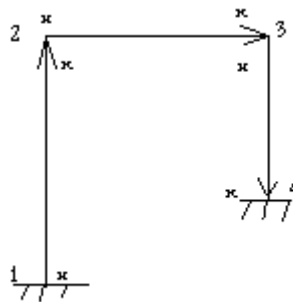
9. Составить единичные и грузовые эпюры и соответствующие им матрицы влияния.

10. Выполнить действия над матрицами.

11. Зарисовать эпюры внутренних усилий: изгибающих моментов M , поперечных сил Q , продольных сил N .

Примечания

На рис. 4.2.2 представлена ориентация стержней. На рисунке 4.2.3 показаны положительные направления концевых перемещений «i» стержня в общей и местной системах координат. На рисунке 4.2.3а: Z_1, Z_4 – угловые перемещения; Z_2, Z_5 – перемещения в направлении оси X ; Z_3, Z_6 – перемещения в направлении оси Y , аналогично на рис. 4.2.3б эти же перемещения в местной системе координат X', Y' .



н – начало стержня; к – конец стержня

Рис. 4.2.2. Ориентация стержней.

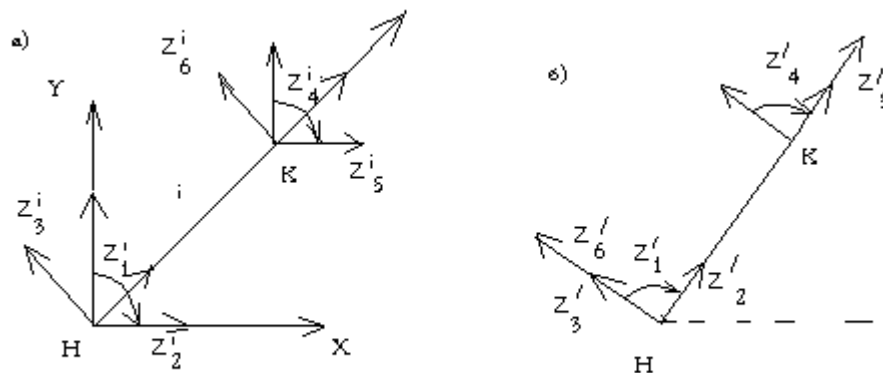


Рис. 4.2.3. Положительные направления концевых перемещений «i» стержня:

а) в общей X, Y системе координат; б) в локальной системе координат X', Y' .

Пример

Сформировать матрицу жесткости для рамы, изображенной на рис. 4.2.4.

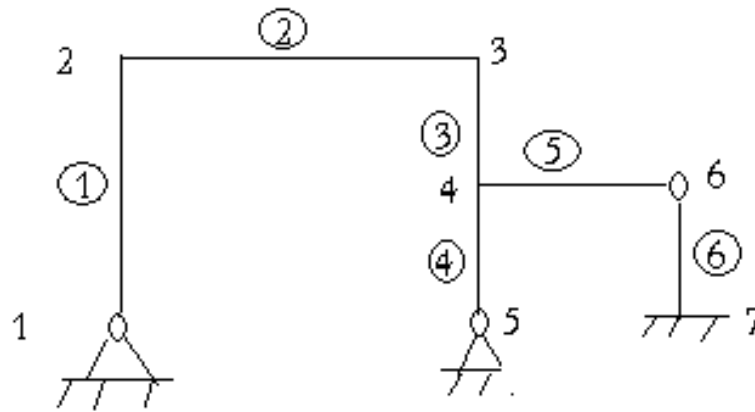


Рис. 4.2.4. Расчетная схема плоской рамы

Матрица жесткости для каждого элемента составлена в местной и глобальной системах координат.

$$R = \begin{pmatrix} R_{nn} & R_{nk} \\ R_{kn} & R_{kk} \end{pmatrix}$$

С каждым узлом связано определенное количество возможных перемещений: в 1, 5 и 6 узлах одно возможное перемещение (угловое) и соответствующие 2 реакции (в направлениях осей x , y); в узлах 2,3,4 – 3 возможных перемещений (угол поворота и два поступательных перемещений) и соответственно 3 реакции (момент и 2 реакции в направлениях осей x , y).

Составим матрицу реакции для всей системы в блочном виде с соответствующими возможными перемещениями.

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} & R_{17} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} & R_{27} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} & R_{37} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} & R_{67} \\ R_{71} & R_{72} & R_{73} & R_{74} & R_{75} & R_{76} & R_{77} \end{bmatrix}$$

В этой матрице первый индекс - номер узла, в котором возникает блок реакций, а второй – номер узла, смещением которого эти реакции вызваны. Нулевые блоки обозначают, что соответствующие узлы не связаны непосредственно стержнем и прямы не взаимодействуют, т.е. не передают реакции с узла в узел. Общая матрица жесткости получается суммированием соответствующих блоков матрицы жесткости отдельных стержней.

Для каждого элемента находим его положение в общей структуре конструкции и составляем матрицу жесткости каждого элемента:

$$R^1 = \begin{bmatrix} R_{HH}^1 & R_{HK}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{KH}^1 & R_{KK}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{HH}^2 & R_{HK}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{KH}^2 & R_{KK}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{HH}^3 & R_{HK}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{KH}^3 & R_{KK}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{HH}^4 & R_{HK}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{KH}^4 & R_{KK}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{HH}^5 & 0 & R_{HK}^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{KH}^5 & 0 & R_{KK}^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{HH}^6 & R_{HK}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{KH}^6 & R_{KK}^6 \end{bmatrix}$$

Общая матрица жесткости суммируется из матриц жесткостей, т.е. имеет вид:

$$R = \sum_{i=1}^6 R^i = R^1 + R^2 + R^3 + R^4 + R^5 + R^6$$

Например, для указанной схемы суммирование будет в узлах 2, 3, 4, 6:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} = R_{HH}^1 & R_{12} = R_{HK}^1 & R_{13} = 0 & R_{14} = 0 & R_{15} = 0 & R_{16} = 0 & R_{17} = 0 \\ R_{21} = R_{KH}^1 & R_{22} = R_{KK}^1 + R_{HH}^2 & R_{23} = R_{HK}^2 & R_{24} = 0 & R_{25} = 0 & R_{26} = 0 & R_{27} = 0 \\ R_{31} = 0 & R_{32} = R_{KH}^2 & R_{33} = R_{HH}^2 + R_{HH}^3 & R_{34} = R_{HK}^3 & R_{35} = 0 & R_{36} = 0 & R_{37} = 0 \\ R_{41} = 0 & R_{42} = 0 & R_{43} = R_{KH}^3 & R_{44} = R_{KK}^3 + R_{HH}^4 + R_{HH}^5 & R_{45} = R_{HK}^4 & R_{46} = R_{HK}^5 & R_{47} = 0 \\ R_{51} = 0 & R_{52} = 0 & R_{53} = 0 & R_{54} = R_{KH}^4 & R_{55} = R_{KK}^4 & R_{56} = 0 & R_{57} = 0 \\ R_{61} = 0 & R_{62} = 0 & R_{63} = 0 & R_{64} = R_{KH}^5 & R_{65} = 0 & R_{66} = R_{KK}^5 + R_{HH}^6 & R_{67} = R_{HK}^6 \\ R_{71} = 0 & R_{72} = 0 & R_{73} = 0 & R_{74} = 0 & R_{75} = 0 & R_{76} = R_{KH}^6 & R_{77} = R_{KK}^6 \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости всей системы в глобальной системе координат в блочном виде имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} R_{HH}^1 & R_{HK}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{KH}^1 & R_{KK}^1 + R_{HH}^2 & R_{HK}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{KH}^2 & R_{HH}^2 + R_{HH}^3 & R_{HK}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{KH}^3 & R_{KK}^3 + R_{HH}^4 + R_{HH}^5 & R_{HK}^4 & R_{HK}^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{KH}^4 & R_{KK}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{KH}^5 & 0 & R_{KK}^5 + R_{HH}^6 & R_{HK}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{KH}^6 & R_{KK}^6 \end{bmatrix}$$

Составим вектор внешней узловой нагрузки. Компоненты вектора внешней нагрузки имеют вид::

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} M \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} M \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} M \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \quad P_6 = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \quad P_7 = \begin{bmatrix} M \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

Матрица внешней нагрузки

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{bmatrix}$$

Вектор перемещений

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad Z_3 = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad Z_4 = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_x \\ v_y \end{bmatrix},$$

$$Z_5 = \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad Z_6 = \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad Z_7 = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Вектор перемещений узловых точек в общей системе координат

$$Z = R^{-1} \cdot P$$

Граничные условия:

В узлах 1,5-шарнирно-неподвижные опоры, поэтому линейные перемещения в направлении осей X,Y должны быть равны нулю, а внешняя нагрузка воспринимается опорными реакциями, т.е. равна нулю; в узле 7-заделка, поэтому угловое и два линейных перемещений должны быть равны нулю и по аналогии внешняя нагрузка должна быть равна нулю, поэтому

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, если соответствующие матрицы жесткости заменяются единичными (1, 5, 7 узлах), т.е.

$$R = \begin{bmatrix} E & R_{12}=0 & R_{13}=0 & R_{14}=0 & R_{15}=0 & R_{16}=0 & R_{17}=0 \\ R_{21}=0 & R_{22} & R_{23} & R_{24}=0 & R_{25}=0 & R_{26}=0 & R_{27}=0 \\ R_{31}=0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35}=0 & R_{36}=0 & R_{37}=0 \\ R_{41}=0 & R_{42}=0 & R_{43} & R_{44} & R_{45}=0 & R_{46} & R_{47}=0 \\ R_{51}=0 & R_{52}=0 & R_{53}=0 & R_{54}=0 & R_{55}=E & R_{56}=0 & R_{57}=0 \\ R_{61}=0 & R_{62}=0 & R_{63}=0 & R_{64} & R_{65}=0 & R_{66} & R_{67}=0 \\ R_{71}=0 & R_{72}=0 & R_{73}=0 & R_{74}=0 & R_{75}=0 & R_{76}=0 & R_{77}=E \end{bmatrix}$$

Вектор узловых усилий для i-го элемента в общей системе координат

$$S_i = R_i \cdot Z_i$$

Вектор узловых усилий для i-го элемента в местной системе координат

$$S'_i = V_i \cdot S_i$$

5 Метод конечных элементов для решения плоских задач

В механике конструкций плоский тонкий лист материала называется *пластиной*. Расстояние между верхней и нижней поверхностью пластины называется *толщиной* и обозначается через h . Пластина имеет также *срединную плоскость*, лежащую между двух поверхностей на одинаковом расстоянии. Направление перпендикулярное срединной плоскости называется *трансверсальным*. Как правило, глобальная ось z направлена перпендикулярно срединной плоскости, в то время как оси x и y лежат в

срединной плоскости, образуя глобальную декартову систему координат (рис. 5.1). Таким образом, уравнение срединной плоскости имеет вид: $z=0$.

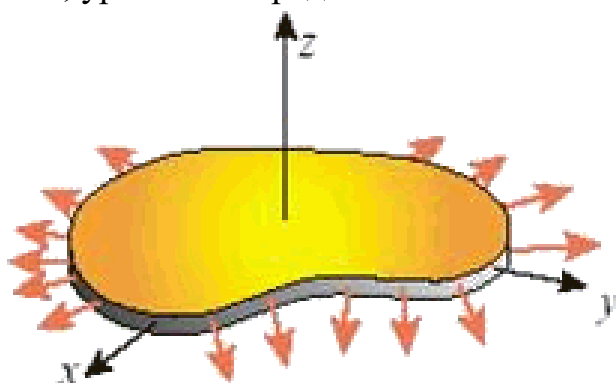


Рис. 5.1. Двумерная конструкция в плоско-напряженном состоянии

Для того чтобы пластина находилась в *плоско-напряженном* состоянии, необходимо чтобы выполнялись следующие условия:

1. Все внешние нагрузки: поверхностные, действующие на точки боковой поверхности пластины, и объемные, действующие на внутренние точки пластины, - перпендикулярны оси z , т.е. лежат в плоскости xy , и симметричны относительно срединной плоскости.

2. Все условия закрепления симметричны относительно срединной плоскости.

3. Внутренние перемещения, деформации и напряжения принимаются постоянными по толщине пластины.

4. Нормальные и сдвиговые компоненты тензора напряжений в направлении оси z равны нулю или пренебрежимо малы.

5. Пластина изготовлена из материала, не меняющего своих свойств по толщине. Такие пластины называются трансверсально-однородными.

Замечание 1. Если принято, что напряжения вдоль оси z имеют место, то состояние пластины носит название обобщенного плоско-напряженного состояния.

Замечание 2. Кроме плоско-напряженного состояния в теории упругости широко применяется понятие плоско-деформированного состояния, согласно которому деформация вдоль оси z равна нулю. Физически это соответствует протяженным конструкциям, нагруженным силами перпендикулярно оси z .

Математическая модель

Математическая модель пластины в плоско-напряженном состоянии есть двумерная краевая задача теории упругости, заданная в области Ω с границей Γ , как показано на рис. 5.1.

Все основные переменные, входящие в исходные уравнения, представляют собой функции двух переменных x и y и считаются осредненными по толщине пластины. Например, внешние силы,

действующие в области Ω и входящие в правую часть уравнения движения точек сплошной среды, есть не что иное, как интегралы по толщине пластины от заданных объемных сил.

5.1 Составление матрицы жесткости для треугольного элемента

Матрица жесткости для двумерных тел (плоская задача).

Матрица жесткости в местной и глобальной системах координат.

Треугольный конечный элемент

На тело, находящееся в условиях плоского напряженного состояния, наложим сетку треугольных конечных элементов (рис. 5.1.1). К телу приложены узловые силы. Пусть внутри каждого элемента реализуется однородное напряженное состояние.

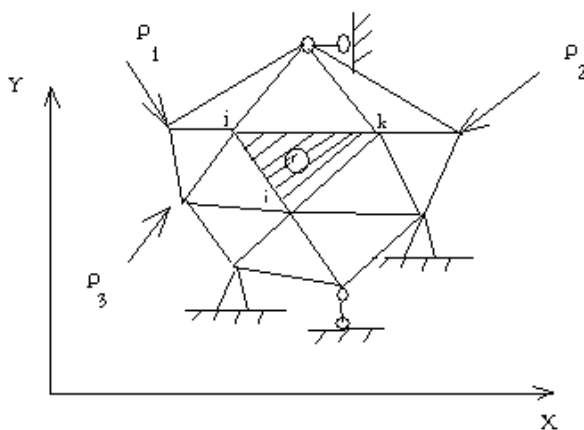


Рис. 5.1.1. Дискретизация плоского тела

Рассмотрим один треугольный элемент. Направления реакций в узлах треугольного элемента указаны на рис. 5.1.2.

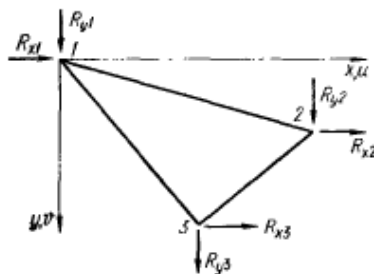


Рис. 5.1.2. Направления реакций в узлах треугольного элемента

В соответствии с принятым однородным деформированным состоянием, перемещения точек в пределах r -го элемента с точками i , j , k аппроксимируем линейными функциями от координат:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

где $\alpha_1 \dots \alpha_6$ – неизвестные коэффициенты.

На основании (5.1.1) вектор узловых перемещений элемента можно связать с вектором коэффициентов $\bar{\alpha}$ следующим образом:

$$\bar{z}^r = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}^r = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

$$\text{Или } \bar{z}^r = H\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} = H^{-1} \bar{z}^r$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1}$$

Вычислив величину компонент $\bar{\alpha}$ и подставив в соотношение (5.1.1), получим

$$u = \frac{1}{2\Delta} \left[(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k \right]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} \left[(a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_k + b_k x + c_k y) v_k \right]$$

$$a_i = x_i y_k - x_k y_i, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j \quad (5.1.3)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

Δ – площадь треугольника. Величины $a_j, b_j, c_j, a_k, b_k, c_k$ получаются аналогично (5.1.3) перестановкой индексов.

$$\begin{aligned} a_j &= x_j y_k - x_k y_j, & b_j &= y_i - y_k, & c_j &= x_k - x_i; \\ a_k &= x_k y_i - x_i y_k, & b_k &= y_j - y_i, & c_k &= x_i - x_j \end{aligned}$$

Соотношение между вектором перемещений произвольной точки конечного элемента и вектором узловых перемещений можно записать также в общей матричной форме:

$$U = [uv]^T = L \cdot Z^r, \quad (5.1.4)$$

где L – матрица функций формы конечного элемента.

Деформации в элементе определяются по соотношениям Коши и равны:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta}(c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k + b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k)\end{aligned}\quad (5.1.5)$$

Или в матричной форме

$$\begin{aligned}\varepsilon^r &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \bar{z}^r = B^r \bar{z}^r. \\ B^r &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.1.6)$$

Связь между деформациями и напряжениями в линейной теории упругости описывается законом Гука, который в матричной форме для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \\ \sigma &= D\varepsilon, \\ D &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.1.7)$$

D – матрица жесткости. Для плоской деформации имеет вид:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.1.8)$$

Для вычисления матрицы жесткости элемента используем принцип возможных перемещений. Дадим узлам конечного элемента возможные перемещения $\delta \bar{q}$, которым соответствует вариации деформаций $\delta \bar{\varepsilon}$. Тогда работа внешних сил равна:

$$\begin{aligned} \delta A &= (\delta \bar{z})^T \bar{P}^r, \\ \delta W &= \int_{V^r} (\delta \bar{\varepsilon})^T \sigma dV \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

V^r – объем конечного элемента.

Приравнивая работы внешних и внутренних сил, получим с учетом (5.1.8) и (5.1.9), после сокращения на величину $\delta \bar{z}^T$,

$$\bar{R}^r = \left(\int_{V^r} \bar{B}^T D B dV \right) \bar{z}^r, \bar{P}^r = R^r \bar{z}^r, R^r = \int_{V^r} B^T D B dV \quad (5.1.10)$$

R^r – матрица жесткости конечного элемента. Формула (5.1.10) справедлива для конечного элемента любой формы.

Матрица жесткости r -го элемента в блочном виде имеет вид:

$$R^r = \begin{bmatrix} r_{ii} & r_{ij} & r_{ik} \\ r_{ji} & r_{jj} & r_{jk} \\ r_{ki} & r_{kj} & r_{kk} \end{bmatrix} \quad (5.1.11)$$

Где блоки матрицы размером 2×2 определяются:

$$r_{ij} = B_i^T D B_j h \Delta_r \quad (5.1.12)$$

где h – толщина элемента, Δ_r – площадь r -го элемента.

Физический смысл элемента R^r : элементы этой матрицы представляют собой обобщенные реакции по направлению обобщенного перемещения.

Вектор перемещений и узловая нагрузка связаны между собой следующим уравнением:

$$\bar{z}^r = R^{-r} \cdot \bar{p}^r \quad (5.1.13)$$

Для простоты обозначим узловые точки через 1,2,3 и введем следующие параметры:

$$C = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)A},$$

$$A = \Delta_r, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad x_{ij} = x_i - x_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.1.14)$$

μ – коэффициент Пуассона.

$$R^r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} \quad (5.1.15)$$

Используя 5.1.12, компоненты матрицы жесткости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= C(y_{23}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{32}^2), & r_{12} = r_{21} &= C(\frac{1+\mu}{2} x_{32} \cdot y_{23}), & r_{13} = r_{31} &= C(y_{23} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} \cdot x_{32}), \\
r_{41} = r_{14} &= C(\mu y_{23} \cdot x_{31} + \frac{1-\mu}{2} y_{13} \cdot x_{32}), \\
r_{51} = r_{15} &= C(y_{23} \cdot y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} \cdot x_{32}), & r_{16} = r_{61} &= C(\mu y_{23} \cdot x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{12} \cdot x_{32}), \\
r_{22} &= C(x_{32}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{32}^2), & r_{23} = r_{32} &= C(\mu x_{23} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} \cdot y_{32}), \\
r_{24} = r_{42} &= C(x_{23} \cdot x_{31} + \frac{1-\mu}{2} y_{13} \cdot y_{32}), \\
r_{25} = r_{52} &= C(\mu x_{32} \cdot y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} \cdot x_{23}), & r_{26} = r_{62} &= C(x_{32} \cdot x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{12} \cdot y_{23}), \\
r_{33} &= C(y_{31}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{13}^2), & r_{34} = r_{43} &= C(\frac{1+\mu}{2} x_{13} \cdot y_{31}), & r_{35} = r_{53} &= C(y_{12} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} \cdot x_{13}), \\
r_{36} = r_{63} &= C(\mu x_{21} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} \cdot y_{12}), & r_{44} &= C(x_{13}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{31}^2), \\
r_{45} &= C(\mu y_{12} \cdot x_{13} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} \cdot x_{21}), & r_{46} = r_{64} &= C(x_{13} \cdot x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} \cdot y_{12}), \\
r_{55} &= C(y_{12}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{21}^2), & r_{65} = r_{56} &= C(\frac{1+\mu}{2} x_{21} \cdot y_{12}), & r_{66} &= C(x_{21}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{12}^2) \quad (5.1.16)
\end{aligned}$$

5.2 Составление матрицы жесткости для прямоугольного элемента

Построим матрицу жесткости для прямоугольного элемента (рис. 5.2.1). Перемещения точек внутри элемента с координатами ξ, η выражаются через перемещения узловых точек в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta) &= \eta_1(\xi, \eta)u_1 + \eta_2(\xi, \eta)u_2 + \eta_3(\xi, \eta)u_3 + \eta_4(\xi, \eta)u_4, \\
v(\xi, \eta) &= \eta_1(\xi, \eta)v_1 + \eta_2(\xi, \eta)v_2 + \eta_3(\xi, \eta)v_3 + \eta_4(\xi, \eta)v_4 \quad (5.2.1)
\end{aligned}$$

Вектор перемещений выражается в матричной форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\bar{z}(\xi, \eta) &= \begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} n_1(\xi, \eta) & 0 & n_2(\xi, \eta) & 0 & n_3(\xi, \eta) & 0 & n_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & n_1(\xi, \eta) & 0 & n_2(\xi, \eta) & 0 & n_3(\xi, \eta) & 0 & n_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \bar{z} \quad (5.2.2)
\end{aligned}$$

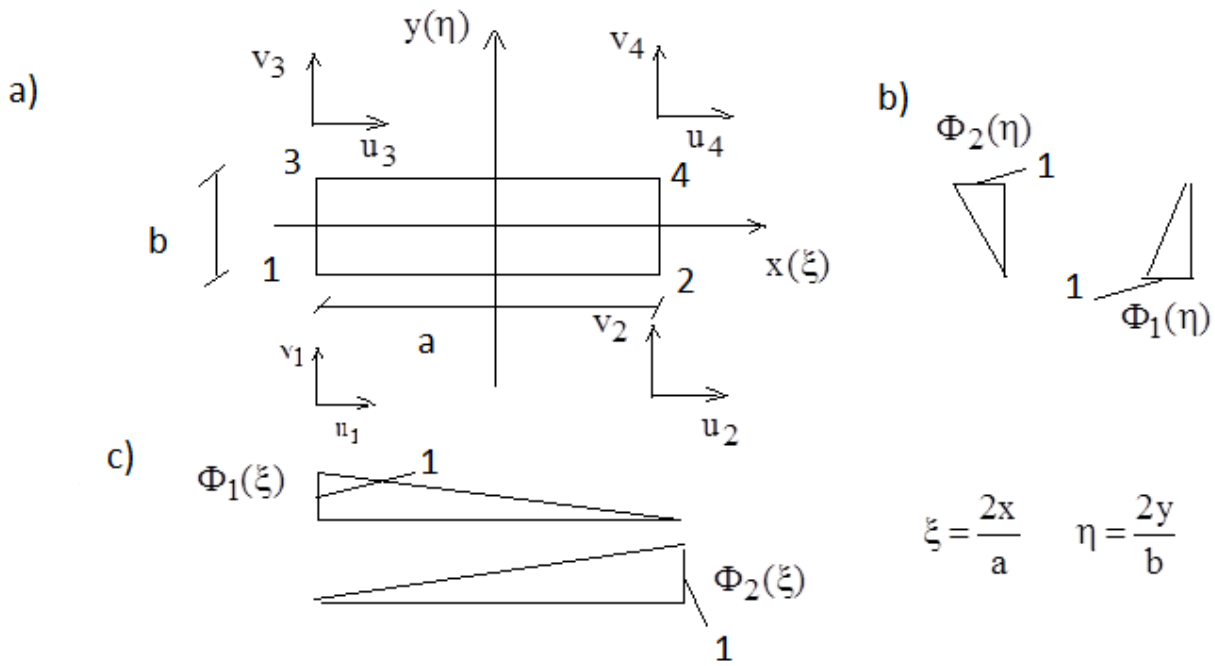


Рис. 5.2.1. Прямоугольный элемент: а – нумерация и направления узловых перемещений; б – графики функции $\Phi(\eta)$ вдоль оси y ; с – графики функции $\Phi(\xi)$ вдоль оси x

Для построения функций $n_i(\xi, \eta)$ используются следующие функции:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi), \quad \Phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta), \quad \Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi), \\ \Phi_2(\eta) &= \frac{1}{2}(1+\eta) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Тогда функций $n_i(\xi, \eta)$ записываются в виде:

$$\begin{aligned} n_1(\xi, \eta) &= \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \\ n_2(\xi, \eta) &= \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ n_3(\xi, \eta) &= \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \\ n_4(\xi, \eta) &= \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Используя зависимости Коши, деформации можно выразить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial y} \\ \frac{\partial n_1}{\partial y} & \frac{\partial n_1}{\partial x} & \frac{\partial n_2}{\partial y} & \frac{\partial n_2}{\partial x} & \frac{\partial n_3}{\partial y} & \frac{\partial n_3}{\partial x} & \frac{\partial n_4}{\partial y} & \frac{\partial n_4}{\partial x} \end{bmatrix} \bar{z} = B\bar{z} \quad (5.2.5)$$

Матрица B имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} & 0 & b_{13} & 0 & b_{14} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & 0 & b_{23} & 0 & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= -\frac{1}{2a}(1-\eta), & b_{12} &= \frac{1}{2a}(1-\eta), & b_{13} &= -\frac{1}{2a}(1+\eta), & b_{14} &= \frac{1}{2a}(1+\eta) \\ b_{21} &= -\frac{1}{2b}(1-\xi), & b_{12} &= \frac{1}{2b}(1+\xi), & b_{23} &= \frac{1}{2b}(1-\xi), & b_{24} &= \frac{1}{2b}(1+\xi) \\ b_{31} &= -\frac{1}{2b}(1-\eta), & b_{32} &= \frac{1}{2a}(1-\eta), & b_{33} &= -\frac{1}{2b}(1+\xi), & b_{34} &= \frac{1}{2a}(1-\eta) \\ b_{35} &= \frac{1}{2b}(1-\xi), & b_{36} &= -\frac{1}{2a}(1+\eta), & b_{37} &= \frac{1}{2b}(1+\xi), & b_{38} &= \frac{1}{2a}(1+\eta) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Используем следующие дифференциальные зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial x} &= \frac{\partial n_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial n_1}{\partial y} &= \frac{\partial n_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \xi &= \frac{2x}{a}, & \eta &= \frac{2y}{b}, & \frac{d\xi}{dx} &= \frac{2}{a}, & \frac{d\eta}{dy} &= \frac{2}{b} \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Элементы матрица жесткости прямоугольного элемента определяются по следующей формуле:

$$r = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B^T D B dx dy = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B d\xi d\eta \quad (5.2.8)$$

Полная матрица жесткости прямоугольного элемента имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & r_{38} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} & r_{47} & r_{48} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & r_{58} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} & r_{67} & r_{68} \\ r_{71} & r_{72} & r_{73} & r_{74} & r_{75} & r_{76} & r_{77} & r_{78} \\ r_{81} & r_{82} & r_{83} & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & r_{88} \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

Компоненты матрицы жесткости имеют вид:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1} \right], \quad \beta = \frac{b}{a} \\ r_{12} = r_{21} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (1+\mu), \quad r_{13} = r_{31} = \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}) \right], \\ r_{14} = r_{41} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu-1), \quad r_{15} = r_{51} = \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(2\beta - 2(1-\mu)\beta^{-1}) \right], \\ r_{16} = r_{61} &= -\frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu-1), \quad r_{17} = r_{71} = \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}) \right], \\ r_{18} = r_{81} &= -\frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (\mu+1) \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

$$\begin{aligned}
r_{22} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta \right] & r_{23} = r_{32} &= -\frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu - 1) \\
r_{24} = r_{42} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta) \right] & r_{25} = r_{52} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu - 1), \\
r_{26} = r_{62} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta) \right] & r_{28} = r_{82} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta) \right], \\
r_{33} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}) \right] & r_{34} = r_{43} &= -\frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (\mu + 1), \\
r_{35} = r_{53} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}) \right] & r_{36} = r_{63} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (\mu + 1), \\
r_{37} = r_{73} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-2\beta - 2(1-\mu)\beta^{-1}) \right] & r_{38} = r_{83} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu - 1), \\
r_{44} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta) \right] & r_{45} = r_{54} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (\mu + 1), \\
r_{46} = r_{64} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta) \right] & r_{47} = r_{74} &= -\frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu - 1), \\
r_{48} = r_{84} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta) \right] & & (5.2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{55} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1} \right] & r_{56} = r_{65} &= -\frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (\mu + 1) \\
r_{57} = r_{75} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}) \right] & r_{58} = r_{85} &= -\frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu - 1), \\
r_{66} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta) \right] & r_{67} = r_{76} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (3\mu - 1), \\
r_{26} = r_{62} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta) \right] & r_{68} = r_{86} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta) \right], \quad (5.2.12) \\
r_{77} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}) \right] & r_{78} = r_{87} &= \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} (\mu + 1), \\
r_{88} &= \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \left[(4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta) \right]
\end{aligned}$$

5.3 Составление матрицы жесткости системы в блочном виде

Составим полную матрицу жесткости для всей системы в блочном виде. Пусть система состоит из n конечных элементов, тогда полная матрица жесткости имеет квазидиагональный вид:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_n \end{bmatrix} \quad (5.3.1)$$

Каждая из матриц жесткости i -го элемента имеет следующий вид:

а) для треугольного элемента

$$R^i = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

б) для прямоугольного элемента

$$R^i = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & r_{38} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} & r_{47} & r_{48} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & r_{58} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} & r_{67} & r_{68} \\ r_{71} & r_{72} & r_{73} & r_{74} & r_{75} & r_{76} & r_{77} & r_{78} \\ r_{81} & r_{82} & r_{83} & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & r_{88} \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

Если в некотором узле сходятся несколько элементов, то полную матрицу жесткости можно сократить, сложив соответствующие составляющие подматриц жесткостей сходящихся элементов, т.е., если в к-ом узле сходятся i,j,n,s элементы, то матрица жесткости в к-ом узле состоит из следующих слагаемых:

$$r^k = r_i^k + r_j^k + r_n^k + r_s^k \quad (5.3.4)$$

5.4 Примеры расчета плоской задачи для тонкой пластины МКЭ

Пример 1

Рассмотрим квадратную пластину толщиной $=0,1\text{м}$, растягиваемую вдоль оси Ox равномерно распределенной нагрузкой $P=2000\text{кН/м}$ (рис. 5.4.1).

С учетом симметрии относительно осей Ox и Oy расчетная схема строится для четверти пластины. Эта область разбивается на два треугольных элемента. Распределенная нагрузка заменяется сосредоточенными силами P в узлах (рис. 5.4.1б).

В силу симметрии граничные условия для перемещений имеют вид:

$$u_1 = 0; v_1 = 0; u_2 = 0; v_3 = 0 \quad (5.4.1)$$

Кроме того

$$v_2 = 0; v_4 = 0 \quad (5.4.2)$$

Для составления матрицы жесткости для треугольного элемента используем выражения, представленные в параграфе 5.1. Введем обозначения, где μ - коэффициент Пуассона:

$$C = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)A}, \quad \beta = \frac{1-\mu}{2}, \quad \gamma = \frac{1+\mu}{2}$$

$$A = \Delta_r, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad x_{ij} = x_i - x_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.4.3)$$

Координаты точек в указанной системе координат имеют следующие значения: $y_{23}=-1\text{м}$; $y_{31}=1\text{м}$; $y_{12}=0$; $x_{32}=0$; $x_{13}=-1\text{м}$; $x_{21}=1\text{м}$ (здесь индексы – локальные номера узлов, указанные в скобках).

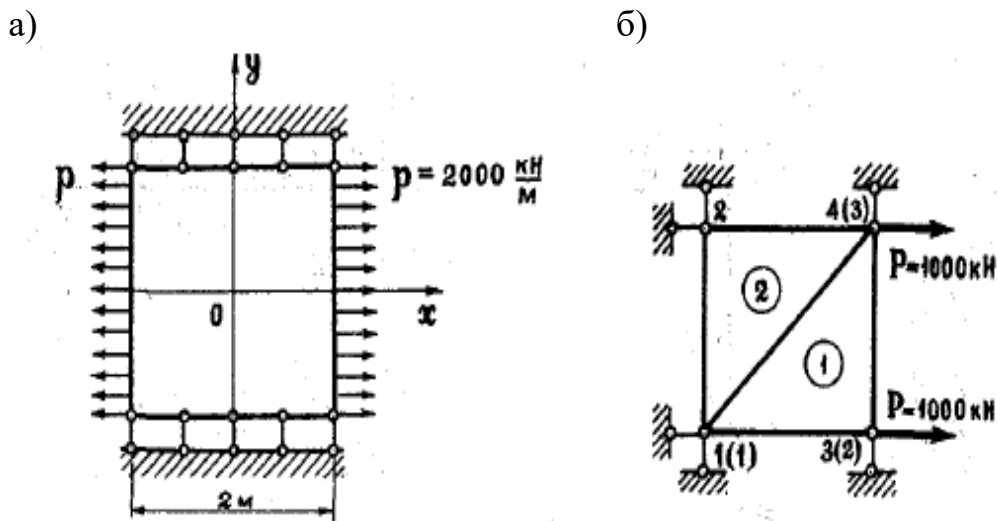


Рис. 5.4.1. Расчетная схема пластины:
а – схема внешней нагрузки; б – дискретные элементы

На рис. 5.4.2 показаны конечные элементы с глобальной и локальной (в скобках) нумерацией его узлов.

а) б)

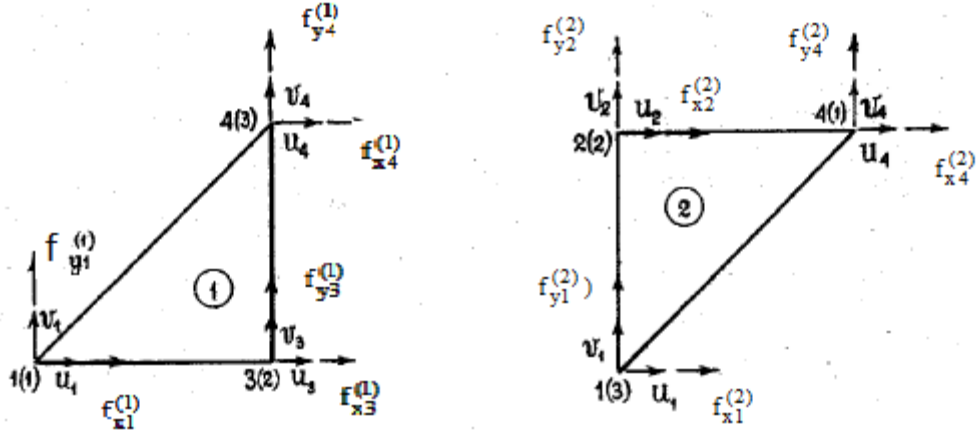


Рис. 5.4.2. Направления узловых перемещений и усилий:
а – для 1-го элемента; 2 – для 2-го элемента

Матрица жесткости для 1-го конечного элемента (рис. 5.4.2а) имеет следующий вид:

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} \quad (5.4.4)$$

Компоненты матрицы жесткости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} r_{11} &= C(y_{23}^2 + \frac{1-\mu}{2}x_{32}^2), & r_{12} &= r_{21} = C(\frac{1+\mu}{2}x_{32} \cdot y_{23}), & r_{13} &= r_{31} = C(y_{23} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2}x_{13} \cdot x_{32}), \\ r_{41} &= r_{14} = C(\mu y_{23} \cdot x_{31} + \frac{1-\mu}{2}y_{13} \cdot x_{32}), \\ r_{51} &= r_{15} = C(y_{23} \cdot y_{12} + \frac{1-\mu}{2}x_{21} \cdot x_{32}), & r_{16} &= r_{61} = C(\mu y_{23} \cdot x_{21} + \frac{1-\mu}{2}y_{12} \cdot x_{32}), \\ r_{22} &= C(x_{32}^2 + \frac{1-\mu}{2}y_{32}^2), & r_{23} &= r_{32} = C(\mu x_{23} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2}x_{13} \cdot y_{32}), \\ r_{24} &= r_{42} = C(x_{23} \cdot x_{31} + \frac{1-\mu}{2}y_{13} \cdot y_{32}), \\ r_{25} &= r_{52} = C(\mu x_{32} \cdot y_{12} + \frac{1-\mu}{2}x_{21} \cdot x_{23}), & r_{26} &= r_{62} = C(x_{32} \cdot x_{21} + \frac{1-\mu}{2}y_{12} \cdot y_{23}), \\ r_{33} &= C(y_{31}^2 + \frac{1-\mu}{2}x_{13}^2), & r_{34} &= r_{43} = C(\frac{1+\mu}{2}x_{13} \cdot y_{31}), & r_{35} &= r_{53} = C(y_{12} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2}x_{21} \cdot x_{13}), \\ r_{36} &= r_{63} = C(\mu x_{21} \cdot y_{31} + \frac{1-\mu}{2}x_{13} \cdot y_{12}), & r_{44} &= C(x_{13}^2 + \frac{1-\mu}{2}y_{31}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{45} &= C(\mu y_{12} \cdot x_{13} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} \cdot x_{21}), & r_{46} &= r_{64} = C(x_{13} \cdot x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} \cdot y_{12}), \\
r_{55} &= C(y_{12}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{21}^2), & r_{65} &= r_{56} = C(\frac{1+\mu}{2} x_{21} \cdot y_{12}), & r_{66} &= C(x_{21}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{12}^2)
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

После подстановки в (5.4.5) соответствующих координат матрица жесткости для 1-го элемента имеет вид:

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} C & 0 & -C & \mu C & 0 & -\mu C \\ 0 & C\beta & C\beta & -C\beta & -C\beta & 0 \\ -C & C\beta & C(\beta+1) & -C(\beta+\mu) & -C\beta & \mu C \\ \mu C & -C\beta & -C(\beta+\mu) & C(\beta+1) & C\beta & -C \\ 0 & -C\beta & -C\beta & C\beta & C\beta & 0 \\ -\mu C & 0 & \mu C & -C & 0 & C \end{bmatrix}, \tag{5.4.6}$$

Элементы матрицы жесткости имеют размерность кН/м.

Матрица $R^{(1)}$ связывает внутренние усилия в узлах с их перемещениями следующим уравнением:

$$\bar{F}^{(1)} = R^{(1)} \bar{Z}^{(1)} \tag{5.4.7}$$

Для 1-го элемента вектор внутренних усилий равен:

$$\bar{F}^{(1)} = (f_{x1}^{(1)}, f_{y1}^{(1)}, f_{x3}^{(1)}, f_{y3}^{(1)}, f_{x4}^{(1)}, f_{y4}^{(1)})^T \tag{5.4.8}$$

Вектор узловых перемещений для него имеет вид:

$$\bar{Z}^{(1)} = (u_1, v_1, u_3, v_3, u_4, v_4)^T \tag{5.4.9}$$

Положим в векторе перемещений первую компоненту $u_1=1$, а остальные компоненты равными нулю, тогда в равенстве (5.4.7) элементы $R_{i1}^{(1)}$ ($i=1,2,\dots,6$) первого столбца матрицы $R^{(1)}$ представляют собой усилия в узлах по направлению осей Ox , Oy , вызванные единичным перемещением узла 1 в направлении оси Ox .

Для 2-го конечного элемента нумерация представлена на рис. 5.4.26. При выбранной локальной нумерации матрица жесткости $R^{(2)}=R^{(1)}$.

По аналогии матрица $R^{(2)}$ связывает внутренние усилия в узлах с их перемещениями следующим уравнением:

$$\bar{F}^{(2)} = R^{(2)} \bar{Z}^{(2)}$$

Для 2-го элемента вектор внутренних усилий равен:

$$\bar{F}^{(2)} = (f_{x4}^{(2)}, f_{y4}^{(2)}, f_{x2}^{(2)}, f_{y2}^{(2)}, f_{x1}^{(2)}, f_{y1}^{(2)})^T \quad (5.4.10)$$

Вектор узловых перемещений имеет вид:

$$\bar{Z}^{(2)} = (u_4, v_4, u_2, v_2, u_1, v_1)^T \quad (5.4.11)$$

Составим уравнения равновесия для узлов при разбиении пластины на 2 конечных элемента. Рассмотрим равновесие 4-го а. Этот узел является общим для обоих конечных элементов. Внутренние усилия

$f_{x4}^{(1)}, f_{x4}^{(2)}$ равны следующим выражениям:

$$\begin{aligned} f_{x4}^{(1)} &= -C\beta v_1 - C\beta u_3 + C\beta v_3 + C\beta u_4, \\ f_{x4}^{(2)} &= Cu_4 - Cu_2 + C\mu v_2 - \mu C v_1 \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Складывая

$f_{x4}^{(1)}, f_{x4}^{(2)}$ и приравнявая внешней нагрузке P , получаем следующее уравнение:

$$f_{x4}^{(1)} + f_{x4}^{(2)} = P \quad (5.4.13)$$

Узел 3 принадлежит только 1-му конечному элементу, поэтому условие равновесия для него имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{x3}^{(1)} &= P, \\ f_{x3}^{(1)} &= -Cu_1 + C\beta v_1 + C(\beta + 1)u_3 - C(\beta + 1)v_3 - C\beta u_4 + \mu C v_4 \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Учитывая следующие граничные условия:

$$u_1 = 0; v_1 = 0; u_2 = 0; v_3 = 0 \text{ и } v_2 = 0; v_4 = 0,$$

получаем уравнения равновесия в узлах:

$$\begin{aligned} -C\beta u_3 + C(\beta + 1)u_4 &= P, \\ C(\beta + 1)u_3 - C\beta u_4 &= P \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Коэффициенты при неизвестных узловых перемещениях представляют глобальную матрицу жесткости. Решая уравнения (5.4.15), получаем вектор узловых перемещений:

$$\bar{Z} = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4)^T \quad (5.4.16)$$

Пример 2

Рассмотрим прямоугольную пластину, находящуюся под действием сосредоточенных сил (рис. 5.4.3). Разобьем ее на 4 конечных элементов. В круглых скобках указаны нумерации элементов, общее количество узловых точек равно 9. Общая степень свободы 4-х элементов, рассматривая их в отдельности равна 32.

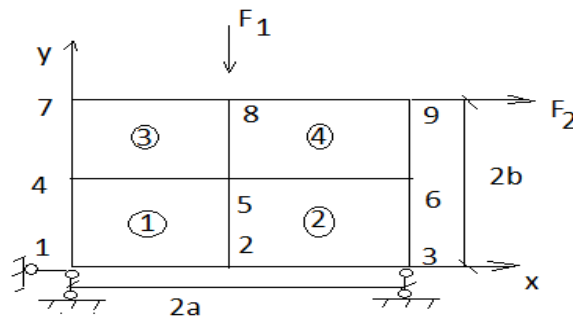


Рис. 5.4.3. Прямоугольная пластина

Учитывая общие узловые точки, степень свободы сокращается до 18. Для данной системы локальные системы координат совпадают с глобальной, поэтому матрица жесткости всей системы имеет следующий вид:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{14} & r_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & 0 & r_{35} & r_{36} & 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & r_{42} & 0 & r_{44} & r_{45} & 0 & r_{47} & r_{48} & 0 \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & r_{58} & r_{59} \\ 0 & r_{62} & r_{63} & 0 & r_{65} & r_{66} & 0 & r_{68} & r_{69} \\ 0 & 0 & 0 & r_{74} & r_{75} & 0 & r_{77} & r_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & r_{88} & r_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{95} & r_{96} & 0 & r_{98} & r_{99} \end{bmatrix}$$

Каждый элемент r_{ij} в полной матрице R имеет порядок, равный 2. Значения этих коэффициентов можно посчитать, используя выражения, представленные для прямоугольного элемента в параграфе 5.2.

$$r_{ij} = \begin{vmatrix} (r_{ij})_x & 0 \\ 0 & (r_{ij})_y \end{vmatrix}$$

Вектор внешней нагрузки имеет вид:

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} \quad F_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ -F_1 \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} F_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Уравнение равновесия имеет вид:

$$R\vec{Z} + \vec{F} = 0,$$

$$\vec{Z} = \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \end{vmatrix}, \quad Z_i = \begin{vmatrix} (Z_i)_x \\ (Z_i)_y \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

Рассматривая граничные условия закрепления, можно положить:

$$Z_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad Z_3 = \begin{vmatrix} (Z_3)_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{14} & r_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & 0 & r_{35} & r_{36} & 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & r_{42} & 0 & r_{44} & r_{45} & 0 & r_{47} & r_{48} & 0 \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & r_{58} & r_{59} \\ 0 & r_{62} & r_{63} & 0 & r_{65} & r_{66} & 0 & r_{68} & r_{69} \\ 0 & 0 & 0 & r_{74} & r_{75} & 0 & r_{77} & r_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & r_{88} & r_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{95} & r_{96} & 0 & r_{98} & r_{99} \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = 0$$

Неизвестные узловые перемещения определяются через обратную матрицу:

$$\begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \end{vmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{14} & r_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & 0 & r_{35} & r_{36} & 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & r_{42} & 0 & r_{44} & r_{45} & 0 & r_{47} & r_{48} & 0 \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & r_{58} & r_{59} \\ 0 & r_{62} & r_{63} & 0 & r_{65} & r_{66} & 0 & r_{68} & r_{69} \\ 0 & 0 & 0 & r_{74} & r_{75} & 0 & r_{77} & r_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & r_{88} & r_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{95} & r_{96} & 0 & r_{98} & r_{99} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

Используя формулы (5.2.7- 5.2.9), получаем следующие выражения для компонентов матрицы жесткости:

$$k_{ij} = C r_{ij}, \quad C = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)}, \quad (5.4.18)$$

Выражения для r_{ij} представлены в таблице 5.4.1, где x,y- координаты узлов конечного элемента. В таблице 5.4.1 представлена 1-ая строка матрицы

жесткости. Остальные элементы матрицы жесткости строятся, используя формулы (5.2.10-5.2.12).

Таблица 5.4.1 Выражения для компонентов матрицы жесткости для прямоугольного элемента

r_{11}	r_{12}
$\left[(b-y)^2 + \frac{(a-x)^2(1-\nu)}{2} \right]$	$\left[\nu(b-y)(a-x) + \frac{(b-y)(a-x)(1-\nu)}{2} \right]$
r_{13}	r_{14}
$\left[y(b-y) - \frac{(a-x)^2(1-\nu)}{2} \right]$	$\left[\nu(b-y)(a-x) + \frac{(a-x)y(1-\nu)}{2} \right]$
r_{15}	r_{14}
$\left[-y(b-y) - \frac{(a-x)x(1-\nu)}{2} \right]$	$\left[-\nu x(b-y) + \frac{(a-x)y(1-\nu)}{2} \right]$
r_{17}	r_{18}
$\left[(b-y)^2 + \frac{(a-x)x(1-\nu)}{2} \right]$	$\left[x\nu(b-y) - \frac{(b-y)(a-x)(1-\nu)}{2} \right]$

Компоненты матрицы жесткости для 1-го четырехугольного конечного элемента имеют вид:

$$\begin{aligned}
 r_{11}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{3} (b^3 a + \frac{(1-\nu)ab^3}{2}) \right], \\
 r_{12}^{(1)} &= \frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \quad r_{13}^{(1)} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{b^3 a - (1-\nu)a^3 b}{6} \right], \\
 r_{14}^{(1)} &= \frac{Ehab}{4(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1-3\nu}{2} \right) \right], \\
 r_{15}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\left(-\frac{b^3 a}{6} - \frac{(1-\nu)a^3 b}{12} \right) \right], \\
 r_{16}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
 r_{17}^{(1)} &= \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(-b^3 a + \frac{(1-\nu)a^3 b}{4} \right) \right], \\
 r_{18}^{(1)} &= \frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}
 \end{aligned} \tag{5.4.19}$$

$$\begin{aligned}
r_{23}^{(1)} &= -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{27}^{(1)} &= -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{25}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{21}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)} \quad r_{28}^{(1)} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{b a^3 - (1-\nu)ab^3}{6} \right], \\
r_{22}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{ba^3}{3} + \frac{(1-\nu)ab^3}{6} \right], \\
r_{26}^{(1)} &= -\frac{Eh}{6ab(1-\nu^2)} \left[(b a^3 + \frac{(1-\nu)ab^3}{2}) \right] \\
r_{24}^{(1)} &= \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[(-ba^3 + \frac{(1-\nu)a b^3}{4}) \right]
\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

$$\begin{aligned}
r_{44}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{3} (ba^3 + \frac{(1-\nu)ab^3}{2}) \right], \\
r_{47}^{(1)} &= \frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{46}^{(1)} &= \frac{Eh}{6ab(1-\nu^2)} [ba^3 - (1-\nu)ab^3], \\
r_{45}^{(1)} &= -\frac{Ehab}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{(1-3\nu)}{2} \right], \quad r_{48}^{(1)} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\left(-\frac{b a^3}{6} - \frac{(1-\nu)ab^3}{12} \right) \right], \\
r_{43}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \quad r_{42}^{(1)} = \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[(-b a^3 + \frac{(1-\nu)a b^3}{4}) \right], \\
r_{41}^{(1)} &= -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}
\end{aligned} \tag{5.4.21}$$

$$r_{31} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{6} (b^3a - (1-\nu)ab^3) \right],$$

$$r_{38} = \frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)},$$

$$r_{33} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{2b^3a - (1-\nu)a^3b}{6} \right],$$

$$r_{37} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\left(-\frac{b^3a}{6} - \frac{(1-\nu)a^3b}{12} \right) \right],$$

$$r_{35} = \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(-b^3a + \frac{(1-\nu)a^3b}{4} \right) \right]$$

$$r_{32} = \frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \quad r_{34} = -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)},$$

$$r_{36} = -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}$$

$$r_{54}^{(1)} = \frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)},$$

$$r_{56}^{(1)} = \frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)},$$

$$r_{58}^{(1)} = -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)},$$

$$r_{52}^{(1)} = -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)},$$

$$r_{57}^{(1)} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{b^3a - (1-\nu)a^3b}{6} \right],$$

$$r_{55}^{(1)} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{b^3a}{3} + \frac{(1-\nu)a^3b}{6} \right) \right],$$

$$r_{51}^{(1)} = \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(-b^3a + \frac{(1-\nu)a^3b}{4} \right) \right] \quad (5.4.22)$$

$$r_{53}^{(1)} = \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(-b^3a + \frac{(1-\nu)a^3b}{4} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
r_{63}^{(1)} &= -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{67}^{(1)} &= \frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{61}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{65}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)} \quad r_{64}^{(1)} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{b a^3 - (1-\nu)ab^3}{6} \right], \tag{5.4.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{66}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{ba^3}{3} + \frac{(1-\nu)ab^3}{6} \right) \right], \quad r_{62}^{(1)} = -\frac{Eh}{6ab(1-\nu^2)} \left[\left(b a^3 + \frac{(1-\nu)ab^3}{2} \right) \right] \\
r_{68}^{(1)} &= \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(-ba^3 + \frac{(1-\nu)a b^3}{4} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{76}^{(1)} &= \frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{74}^{(1)} &= \frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{72}^{(1)} &= -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{78}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{75}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{b^3 a - (1-\nu)a^3 b}{6} \right], \\
r_{73}^{(1)} &= -\frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{b^3 a}{6} + \frac{(1-\nu)a^3 b}{12} \right) \right], \\
r_{71}^{(1)} &= \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(-b^3 a + \frac{(1-\nu)a^3 b}{4} \right) \right] \\
r_{77} &= \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(b^3 a + \frac{(1-\nu)a^3 b}{2} \right) \right] \tag{5.4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{81}^{(1)} &= \frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, & r_{85}^{(1)} &= -\frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{83}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{82}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{b a^3 - (1-\nu)ab^3}{6} \right], \\
r_{87}^{(1)} &= -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \\
r_{88}^{(1)} &= \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{ba^3}{3} + \frac{(1-\nu)ab^3}{6} \right], \\
r_{84}^{(1)} &= -\frac{Eh}{6ab(1-\nu^2)} \left[(b a^3 + \frac{(1-\nu)ab^3}{2}) \right], \\
r_{86}^{(1)} &= \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[(-ba^3 + \frac{(1-\nu)a b^3}{4}) \right]
\end{aligned} \tag{5.4.25}$$

Перемещения точек внутри элемента с координатами ξ, η выражаются через перемещения узловых точек в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta) &= \eta_1(\xi, \eta)u_1 + \eta_2(\xi, \eta)u_2 + \eta_3(\xi, \eta)u_3 + \eta_4(\xi, \eta)u_4, \\
v(\xi, \eta) &= \eta_1(\xi, \eta)v_1 + \eta_2(\xi, \eta)v_2 + \eta_3(\xi, \eta)v_3 + \eta_4(\xi, \eta)v_4
\end{aligned}$$

Коэффициенты при узловых перемещениях представляют собой следующие функции:

$$\begin{aligned}
n_1(\xi, \eta) &= \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \\
n_2(\xi, \eta) &= \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\
n_3(\xi, \eta) &= \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \\
n_4(\xi, \eta) &= \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta);
\end{aligned}$$

Используя зависимости Коши, определяются деформации в каждой точке внутри конечного элемента. Напряжения определяются через деформации с помощью закона Гука.

Пример 3

Рассчитать прямоугольную пластину (рис. 5.4.4а) с размерами $a=4$ м, $b=4$ м, $h=1$ м, загруженную распределенной нагрузкой $q=100$ кН/м и силами: $P=100$ кН, $T=100$ кН. Касательная нагрузка T приложена в отмеченных точках между узлами. Материал - бетон: $E=4 \cdot 10^7$ кН/м², $\mu=0,2$. Рассматриваем плоскую задачу.

Используя дискретизацию системы, разделим пластину на 16 элементов (Рис.5.4.4б). В силу симметрии можно рассмотреть четверть пластины, т.е. 1,2,5,6 элементы. Узловые точки представлены на рисунке. Внешняя нагрузка сводится к узловой, в силу симметрии перемещения по оси симметрии в узловых точках равны нулю. Матрица жесткости для 1-го прямоугольного элемента имеет вид, представленный в выражениях 5.2.10-5.2.12. Матрица жесткости для 4-х элементов представлена в выражениях 5.4.17-5.4.25.

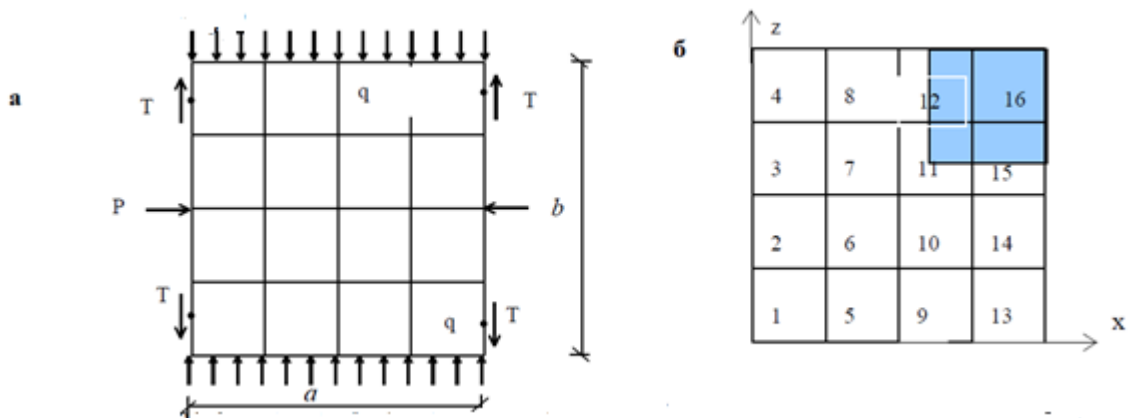


Рис. 5.4.4. Расчетная схема пластины

Нумерация узловых точек и внешняя нагрузка представлена на рис. 5.4.5.

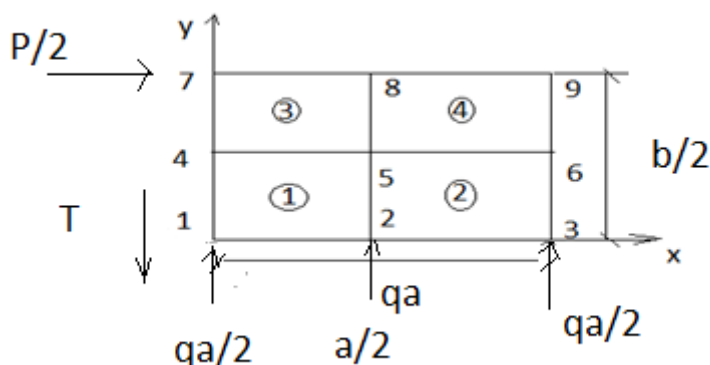


Рис. 5.4.5. Нумерация узловых точек

Неизвестные узловые перемещения определяются через обратную матрицу:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{14} & r_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & 0 & r_{35} & r_{36} & 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & r_{42} & 0 & r_{44} & r_{45} & 0 & r_{47} & r_{48} & 0 \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & r_{58} & r_{59} \\ 0 & r_{62} & r_{63} & 0 & r_{65} & r_{66} & 0 & r_{68} & r_{69} \\ 0 & 0 & 0 & r_{74} & r_{75} & 0 & r_{77} & r_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & r_{88} & r_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{95} & r_{96} & 0 & r_{98} & r_{99} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} qa \\ 2 \\ 0 \\ qa \\ 0 \\ qa \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости $K^{(1)}$ связывает внутренние усилия в узлах с их перемещениями следующим уравнением:

$$F^{(1)} = R^{(1)} Z^{(1)}$$

Компонентами внутренних усилий являются продольные силы в двух направлениях и касательные усилия. В результате расчета на ПК, получаются следующие усилия в центрах тяжести, указанных на рис. 5.4.4 конечных элементов (Таблица 5.4.1).

Таблица 5.4.1 Значения внутренних усилий в центре тяжести конечных элементов

Номер элемен- тата	Номер сечения.	Номер загружения	Напряжения (кН/м ²)		
			NX	NZ	TXZ
1	1	1	-15.371	-50.034	26.852
2	1	1	-34.628	-19.138	41.524
3	1	1	-34.628	-19.138	-41.524
4	1	1	-15.371	-50.034	-26.852
5	1	1	-41.053	-99.965	1.442
6	1	1	-8.946	-80.861	7.660
7	1	1	-8.946	-80.861	-7.660
8	1	1	-41.053	-99.965	-1.442
9	1	1	-41.053	-99.965	-1.442
10	1	1	-8.946	-80.861	-7.660
11	1	1	-8.946	-80.861	7.660
12	1	1	-41.053	-99.965	1.442
13	1	1	-15.371	-50.034	-26.852
14	1	1	-34.628	-19.138	-41.524
15	1	1	-34.628	-19.138	41.524
16	1	1	-15.371	-50.034	26.852

6 Расчет плит на изгиб методом конечных элементов

При выборе матрицы жесткости изгибаемого конечного элемента используются основные гипотезы теории тонких пластин (гипотеза прямых нормалей Кирхгофа-Лява и др.).

Из теории пластин известно, что все компоненты напряженно-деформированного состояния пластин однозначно определяются прогибом w в срединной поверхности. Таким образом, для конечного элемента любой формы, можно записать в общем виде связь между вектором узловых перемещений $\vec{Z}$ и прогибом $w(x,y)$ произвольной точки срединной поверхности. Функция прогибов линейно связана с внешней нагрузкой q^r :

$$w(x, y) = \bar{N}(x, y) \bar{q}^r, \quad (6.1)$$

где $\bar{N}(x, y)$ – функции формы элемента.

Как известно, обобщенные силы – напряжения и перемещения – деформации должны быть выбраны таким образом, чтобы их скалярное произведение давало работу деформации. В качестве вектора обобщенных напряжений принимаются согласно гипотезе Кирхгофа-Лява вектор моментов, компонентами которого являются изгибающие моменты в двух плоскостях и крутящий момент

$$\bar{M} = [M_x \quad M_y \quad M]^T, \quad (6.2)$$

Изгибающие моменты и поперечные силы выражаются через функцию прогиба w следующими дифференциальными зависимостями:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M &= D(1-\nu)\chi = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, \quad Q_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.3)$$

в (6.3) ν – коэффициент Пуассона, D – цилиндрическая жесткость.

Так как истинные деформации и напряжения определяются по формулам:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \sigma_x = \frac{12 M_x z}{h^3}, \dots \quad (6.4)$$

то, используя (6.4), можно определить напряженно-деформированное состояние для всех точек пластины.

6.1 Составление матрицы жесткости для треугольного элемента

Рассмотрим треугольный конечный элемент (рис. 6.1.1), расположенный в горизонтальной плоскости xOy . Начало координат помещено в центре тяжести треугольника (точка O). Каждая узловая точка имеет при изгибе три степени свободы, т.е. общее количество степеней свободы равно 9. Для треугольного элемента (рис. 6.1.1) вектор узлового перемещения в i -ом узле имеет три компоненты: w_i – прогиб и два угловых перемещения – углы поворота вокруг осей x и y : φ_i^x , φ_i^y ($i=1,2,3$). На рис. 6.1.1 показаны их положительные направления.

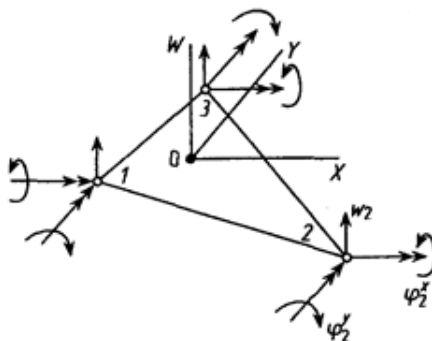


Рис. 6.1.1. Треугольный элемент при изгибе

В качестве полинома для функции прогиба принимается следующее выражение:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 \quad (6.1.1)$$

Полином (6.1.1) имеет 10 неизвестных коэффициентов (в силу симметрии полинома), их количество превышает степень свободы элемента на 1, поэтому необходимо ввести еще одну дополнительную степень свободы, в качестве которой можно принять перемещение центра тяжести элемента w_0 (точка O). В матричной форме (6.1.1) можно записать в виде:

$$w = \bar{L} \bar{\alpha},$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \quad (6.1.2)$$

где

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})^T$$

Дифференцируя (6.1.2) по x и y , получаем выражения для полей углов поворота:

$$\begin{aligned} \bar{Z} = \begin{bmatrix} w \\ \varphi^x \\ \varphi^y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = L\bar{\alpha} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 \end{bmatrix} \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Подставляя в (6.1.3) координаты точек 0,1,2,3, получаем следующее:

$$\begin{bmatrix} w \\ w_1 \\ \varphi_1^x \\ \varphi_1^y \\ w_2 \\ \varphi_2^x \\ \varphi_2^y \\ w_3 \\ \varphi_3^x \\ \varphi_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1y_1 & 3y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1y_1 & -y_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2y_2 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2y_2 & -y_2^2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3y_3 & 3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3y_3 & -y_3^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = L\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} = L^{-1}\bar{Z},$$

$$w = (1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3)L^{-1}\bar{Z} \quad (6.1.4)$$

Используя зависимости Коши, строится вектор относительных деформаций:

$$\vec{\varepsilon} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{bmatrix} L^{-1} \vec{Z} = -z B L^{-1} \vec{Z} \quad (6.1.5)$$

Вектор напряжений связан с вектором деформаций линейной зависимостью (закон Гука):

$$\vec{\sigma} = D \vec{\varepsilon} = D B L^{-1} \vec{Z},$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.1.6)$$

Потенциальная энергия деформации, накапливаемая в элементе, имеет вид:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\Delta} \sigma^T \varepsilon dA = \frac{1}{2} \vec{Z}^T (L^{-1})^T \frac{h^2}{12} \int_{\Delta} B^T D B dx dy L^{-1} \vec{Z} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{Z}^T (L^{-1})^T R^* L^{-1} \vec{Z}, \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

$$R^* = \frac{h^2}{12} \int_{\Delta} B^T D B dx dy \quad (6.1.8)$$

Матрица, стоящая под интегралом (6.1.8), имеет вид:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4E^1 & 0 & 4E^2 & 12E^1x & 4E^1y & 4E^2x & 12E^2y \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2Gx & 2Gy & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4E^2 & 0 & 4E^1 & 12E^2x & 4E^2y & 4E^1x & 12E^1y \\
0 & 0 & 0 & 12E^1x & 0 & 12E^2x & 36E^1x^2 & 12E^1xy & 12E^2x^2 & 36E^2xy \\
0 & 0 & 0 & 4E^2xy & 2Gx & 4E^2y & 12E^1xy & 4E^1y^2 + 4Gx^2 & 4E^2xy + 4Gxy & 12E^2y^2 \\
0 & 0 & 0 & 4E^2x & 2Gy & 4E^1x & 12E^2x^2 & 4E^2xy + 4Gxy & 4E^1x^2 + 4Gy^2 & 12E^1yx \\
0 & 0 & 0 & 12E^2y & 0 & 12E^1y & 36E^2xy & 12E^2y^2 & 12E^1yx & 36E^1y^2
\end{bmatrix}, \quad (6.1.9)$$

$$E^1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad E^2 = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{[2(1+\nu)]}$$

Интегрируя (6.1.9) по треугольной области, получается матрица R^* . Процесс интегрирования удобно проводить численно, используя весовые коэффициенты. Элементы матрицы R^* имеют следующий вид:

$$r_{ij}^* = \left\{ 4 \left[f_{ij}(x_1y_1) + f_{ij}(x_2y_2) + f_{ij}(x_3y_3) \right] + 9 \left(f_{ij} \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + f_{ij} \left(\frac{x_2+x_3}{2}; \frac{y_2+y_3}{2} \right) + f_{ij} \left(\frac{x_3+x_1}{2}; \frac{y_3+y_1}{2} \right) \right) + 54 f_{ij}(0,0) \right\} \cdot \frac{\Delta}{120} \quad (6.1.10)$$

где в (6.1.10) Δ - площадь треугольника; r_{ij}^* - элемент матрицы R^* , стоящий в i -ой строке и j -ом столбце; f_{ij} - функция, стоящая в матрице (6.1.10) в i -ой строке и j -ом столбце, соответствующая элементу r_{ij}^* .

6.2 Составление матрицы жесткости для прямоугольного элемента

По аналогии с треугольным элементом для прямоугольного элемента (рис. 6.2.1) вектор узлового перемещения в i -ом узле имеет три компоненты: w_i - прогиб и два угловых перемещений – углы поворота вокруг осей x и y : φ_i^x , φ_i^y . На рис. 6.2.1 показаны их положительные направления.

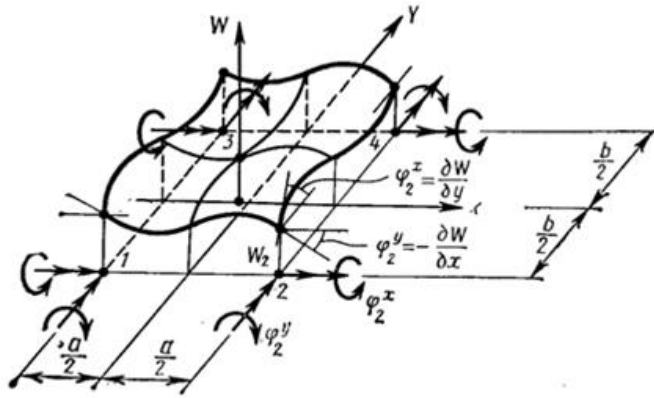


Рис. 6.2.1. Схема деформирования конечного элемента при изгибе

Для i -го узла вектор перемещения имеет вид:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix}, \quad Z_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i^x \\ \varphi_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ -\frac{\partial w_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (6.2.1)$$

Узловыми силами, соответствующими этим перемещениям являются сосредоточенная сила и 2 сосредоточенных изгибающих моментов:

$$\bar{P}_i = [Q_i \quad M_i^x \quad M_i^y] \quad (6.2.2)$$

В общем случае для конечного элемента (рис. 6. 2.2) вектор узловых перемещений имеет следующий вид

$$Z^r = [z_i^r \quad z_j^r \quad z_k^r \quad z_m^r]^T \quad (6.2.3)$$

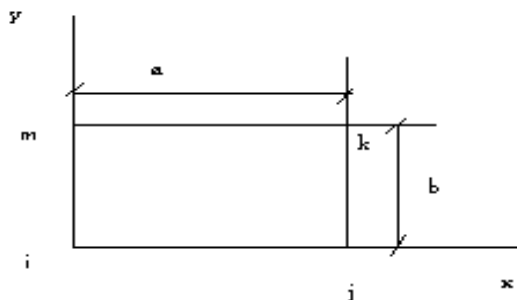


Рис. 6.2.2 Нумерация узлов четырехугольного элемента

Итак, в конечном элементе имеется 4 узла и в каждом из них три степени свободы, следовательно, единственную скалярную функцию прогибов срединной поверхности элемента w нужно аппроксимировать функциями с 12 неизвестными коэффициентами. Выберем полином 4 степени, в котором отброшены некоторые члены.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (6.2.4)$$

Или в матричной форме

$$w = \bar{L} \bar{\alpha},$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \end{bmatrix} \quad (6.2.5)$$

Выбранная аппроксимация обеспечивает непрерывность прогибов, но не обеспечивает непрерывность углов поворота и называется несогласованной.

При выводе матрицы жесткости используем обычную процедуру метода конечных элементов.

Вектор неизвестных коэффициентов $\bar{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_{12}]$ определим из системы 12 уравнений, связывающих узловые перемещения w_n , φ_n^x , φ_n^y ($n = i, j, k, m$) с их координатами и которые получаются при подстановке координат узлов в выражение для w и в выражения для его производных по x , y :

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^3 + \alpha_8 x_i^2 y_i + \alpha_9 x_i y_i^2 + \alpha_{10} y_i^3 + \alpha_{11} x_i^3 y_i + \alpha_{12} x_i y_i^3,$$

$$\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \varphi_i^x = -(\alpha_3 + \alpha_5 x_i + 2\alpha_6 y_i + \alpha_8 x_i^2 + 2\alpha_9 x_i y_i + 3\alpha_{10} y_i^2 + \alpha_{11} x_i^3 + 3\alpha_{12} x_i y_i^2),$$

$$\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \varphi_i^y = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x_i + \alpha_5 y_i + 3\alpha_7 x_i^2 + 2\alpha_8 x_i y_i + \alpha_9 y_i^2 + 3\alpha_{11} x_i^2 y_i + \alpha_{12} y_i^3)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6.2.6)$$

$$\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_m = \varphi_m^x = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x_m + \alpha_5 y_m + 3\alpha_7 x_m^2 + 2\alpha_8 x_m y_m + \alpha_9 y_m^2 + 3\alpha_{11} x_m^2 y_m + \alpha_{12} y_m^3)$$

$$\bar{z}^r = H \bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha} = H^{-1} \bar{z}^r$$

H – матрица, зависящая от координат узлов, α – 12 мерный вектор неизвестных коэффициентов. Для одной узловой точки матрица H имеет вид:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2 & -y^2 \end{bmatrix} \quad (6.2.7)$$

Рассматривая систему координат на рис. 6.2.1, матрица $H(x, y)$ для всех 4-х узловых точек четырехугольного элемента имеет вид:

$$\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} & -\frac{b}{2} & \frac{a^2}{4} & \frac{ab}{4} & \frac{b^2}{4} & -\frac{a^3}{8} & -\frac{a^2b}{8} & -\frac{ab^2}{8} & -\frac{b^3}{8} & \frac{a^3b}{16} & \frac{ab^3}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{2} & -b & 0 & \frac{a^2}{4} & \frac{ab}{2} & \frac{3b^2}{4} & -\frac{a^3}{8} & -\frac{3ab^2}{8} \\ 0 & -1 & 0 & a & \frac{b}{2} & 0 & -\frac{3a^2}{4} & -\frac{ab}{2} & -\frac{b^2}{4} & 0 & \frac{3a^2b}{8} & \frac{b^2}{8} \\ 1 & \frac{a}{2} & -\frac{b}{2} & \frac{a^2}{4} & -\frac{ab}{4} & \frac{b^2}{4} & \frac{a^3}{8} & -\frac{a^2b}{8} & \frac{ab^2}{8} & -\frac{b^3}{8} & -\frac{a^3b}{16} & -\frac{ab^3}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a}{2} & -b & 0 & \frac{a^2}{4} & -\frac{ab}{2} & \frac{3b^2}{4} & \frac{a^3}{8} & \frac{3ab^2}{8} \\ 0 & -1 & 0 & -a & \frac{b}{2} & 0 & -\frac{3a^2}{4} & \frac{ab}{2} & -\frac{b^2}{4} & 0 & \frac{3a^2b}{8} & \frac{b^2}{8} \\ 1 & -\frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{a^2}{4} & \frac{ab}{4} & \frac{b^2}{4} & -\frac{a^3}{8} & \frac{a^2b}{8} & -\frac{ab^2}{8} & \frac{b^3}{8} & -\frac{a^3b}{16} & -\frac{ab^3}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{2} & b & 0 & \frac{a^2}{4} & -\frac{ab}{2} & \frac{3b^2}{4} & -\frac{a^3}{8} & -\frac{3ab^2}{8} \\ 0 & -1 & 0 & a & -\frac{b}{2} & 0 & -\frac{3a^2}{4} & \frac{ab}{2} & -\frac{b^2}{4} & 0 & -\frac{3a^2b}{8} & -\frac{b^2}{8} \\ 1 & \frac{a}{2} & -\frac{b}{2} & \frac{a^2}{4} & -\frac{ab}{4} & \frac{b^2}{4} & \frac{a^3}{8} & -\frac{a^2b}{8} & \frac{ab^2}{8} & -\frac{b^3}{8} & \frac{a^3b}{16} & \frac{ab^3}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a}{2} & -b & 0 & \frac{a^2}{4} & \frac{ab}{2} & \frac{3b^2}{4} & \frac{a^3}{8} & \frac{3ab^2}{8} \\ 0 & -1 & 0 & -a & -\frac{b}{2} & 0 & -\frac{3a^2}{4} & -\frac{ab}{2} & -\frac{b^2}{4} & 0 & -\frac{3a^2b}{8} & -\frac{b^2}{8} \end{bmatrix} \quad (6.2.8)
\end{aligned}$$

Используя выражения для прогибов, функции формы элемента, вектора деформации можно записать в виде:

$$w = LH^{-1}q ,$$

$$\bar{N}(x, y) = LH^{-1},$$

$$\bar{\varepsilon} = Bz^r ,$$

$$B_i = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} N_i \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} N_i \quad 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N_i \right],$$

$$\bar{\varepsilon} = z \begin{bmatrix} -2\alpha_4 - 6\alpha_7 x - 2\alpha_8 y - 6\alpha_{11} xy \\ -2\alpha_6 - 2\alpha_4 x - 6\alpha_{10} y - 6\alpha_{12} xy \\ 2\alpha_5 + 4\alpha_8 x + 4\alpha_9 y + 6\alpha_{11} x^2 + 6\alpha_{12} y^2 \end{bmatrix} = z\bar{C}\bar{\alpha} = z\bar{C}H^{-1}Z \quad (6.2.9)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

В (6.2.9) z представляет расстояние от нейтральной плоскости пластины до рассматриваемого сечения.

Вектор напряжений связан с вектором деформаций линейной зависимостью (закон Гука):

$$\bar{\sigma} = D\bar{\varepsilon} = Dz\bar{C}H^{-1}\bar{Z},$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.2.10)$$

Потенциальная энергия деформации, накапливаемая в элементе, имеет вид:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\sigma}^T \bar{\varepsilon} dx dy dz = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \bar{Z}^T (H^{-1})^T \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \bar{C}^T D \bar{C} dx dy H^{-1}, \\
W &= \frac{1}{2} \bar{Z}^T \frac{h^2}{12} (H^{-1})^T \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \bar{C}^T D \bar{C} dx dy H^{-1} \bar{Z} = \frac{1}{2} \bar{Z}^T K \bar{Z}, \\
R &= \frac{h^2}{12} (H^{-1})^T \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \bar{C}^T D \bar{C} dx dy H^{-1},
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

где в (6.2.11) матрица R представляет собой матрицу жесткости. Вектор обобщенных узловых перемещений для прямоугольного элемента можно представить в виде:

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_3 \\ \bar{Z}_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{Z}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i^x \\ \varphi_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ -\frac{\partial w_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Для определения матрицы изгибных усилий необходимо составить матрицу вторых производных от вектора перемещений:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим ортотропную плиту, у которой упругие свойства в двух направлениях разные, связь между изгибными усилиями и деформациями имеет вид:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_\mu & 0 \\ D_\mu & D_y & 0 \\ 0 & 0 & 2D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12\nu}$$

Матрица реакции и ее компоненты имеют вид:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} & r_{19} & r_{110} & r_{111} & r_{112} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} & r_{29} & r_{210} & r_{211} & r_{212} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{121} & r_{122} & r_{123} & r_{124} & r_{125} & r_{126} & r_{127} & r_{128} & r_{129} & r_{1210} & r_{1211} & r_{1212} \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = r_{44} = r_{77} = r_{10\ 10} = \frac{4mD_x}{a^2} + \frac{4D_y}{mb^2} + \frac{2D_\mu}{ma^2} + \frac{14D_k}{5ma^2},$$

$$r_{12} = -r_{45} = -r_{78} = r_{10\ 11} = \frac{2mD_x}{a} + \frac{D_\mu}{b} + \frac{D_k}{5b},$$

$$r_{13} = r_{46} = -r_{79} = -r_{10\ 12} = \frac{2D_y}{mb} + \frac{D_\mu}{a} + \frac{D_k}{5a},$$

$$r_{14} = r_{7\ 10} = -\frac{4mD_x}{a^2} + \frac{2D_y}{mb^2} - \frac{2D_\mu}{ma^2} - \frac{14D_k}{5ma^2},$$

$$r_{15} = -r_{24} = -r_{7\ 10} = r_{8\ 10} = \frac{2mD_x}{a} + \frac{D_k}{5b},$$

$$r_{16} = r_{34} = -r_{7\ 12} = -r_{9\ 10} = \frac{D_y}{mb} - \frac{D_\mu}{a} - \frac{D_k}{5a},$$

$$r_{17} = r_{4\ 10} = -\frac{2mD_x}{a^2} - \frac{2D_y}{mb^2} - \frac{2D_\mu}{ma^2} - \frac{14D_k}{5ma^2},$$

$$r_{18} = -r_{27} = -r_{4\ 11} = r_{8\ 10} = \frac{mD_x}{a} - \frac{D_k}{5b},$$

$$r_{19} = -r_{37} = r_{4\ 12} = -r_{6\ 10} = \frac{D_y}{mb} - \frac{D_k}{5a},$$

$$\begin{aligned}
r_{110} &= r_{47} = \frac{2mD_x}{a^2} - \frac{4D_y}{mb^2} - \frac{2D_\mu}{ma^2} - \frac{14D_k}{5ma^2}, \\
r_{111} &= r_{210} = -r_{48} = -r_{57} = \frac{mD_x}{a} - \frac{D_\mu}{b} - \frac{D_k}{5b}, \\
r_{112} &= -r_{310} = r_{49} = -r_{67} = \frac{2D_y}{mb} - \frac{D_k}{5a}, \\
r_{22} &= r_{55} = r_{88} = r_{1111} = \frac{4mD_x}{3} + \frac{4D_k}{15m}, \\
r_{23} &= -r_{56} = r_{89} = -r_{1112} = D_\mu, \\
r_{25} &= r_{811} = \frac{2mD_x}{3} - \frac{D_k}{15b}, r_{28} = r_{511} = \frac{mD_x}{3} + \frac{D_k}{15m}, \\
r_{211} &= r_{58} = \frac{2mD_x}{3} - \frac{4D_k}{15m}, r_{36} = r_{912} = \frac{2D_y}{3m} - \frac{4mD_k}{15}, \\
r_{39} &= r_{612} = \frac{D_y}{3m} + \frac{mD_k}{15}, r_{312} = r_{69} = \frac{2D_y}{3m} - \frac{mD_k}{15}, \\
r_{33} &= r_{66} = r_{99} = r_{1212} = \frac{4D_y}{3m} + \frac{4mD_k}{15}, m = \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Матрица усилий для прямоугольной плиты имеет вид:

$$\begin{bmatrix}
M_x^j \\
M_x^k \\
M_y^j \\
M_y^k \\
M_z^j \\
M_z^k \\
M_{xy}^j \\
M_{xy}^k
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
D_{xx} & 2D_{xy} & 2D_{yx} & -3D_{xx}/a & D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & -3D_{yx}/b & 0 & D_{yx} \\
-3D_{xx}/a & -D_{xx} & 0 & D_{xx} & -2D_{xy} & 2D_{yx} & -3D_{yx}/b & 0 & D_{yx} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3D_{yx}/b & 0 & D_{yx} & D_{xx} & -2D_{xy} & -2D_{yx} & -3D_{xx}/a & -D_{xx} & 0 \\
-3D_{yx}/b & 0 & -D_{yx} & 0 & 0 & 0 & -3D_{xx}/a & D_{xy} & 0 & D_{xy} & -2D_{xy} & -2D_{yx} \\
D_{yx} & 2D_{xy} & 2D_{yx} & -3D_{yx}/a & D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & -3D_{yx}/b & 0 & D_{yx} \\
-3D_{yx}/a & -D_{xy} & 0 & D_{yx} & -2D_{xy} & 2D_{yx} & -3D_{yx}/b & 0 & D_{yx} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3D_{yx}/b & 0 & -D_{yx} & D_{yx} & -2D_{xy} & -2D_{yx} & -3D_{xx}/a & -D_{xx} & 0 \\
-3D_{yx}/b & 0 & -D_{yx} & 0 & 0 & 0 & -3D_{xx}/a & D_{xy} & 0 & D_{xy} & 2D_{xy} & -2D_{yx} \\
-8D_{xx}/b & -D_{kb} & -D_{ka} & 8D_{ka}/b & -D_{kb} & D_{ka} & -8D_{xx}/b & D_{kb} & D_{ka} & 8D_{ka}/b & D_{kb} & -D_{ka}
\end{bmatrix} \times$$

$$x \begin{bmatrix} Z_i \\ dZ_i/dx \\ dZ_i/dy \\ Z_j \\ dZ_j/dx \\ dZ_j/dy \\ Z_k \\ dZ_k/dx \\ dZ_k/dy \\ Z_l \\ dZ_l/dx \\ dZ_l/dy \end{bmatrix}$$

$$D_{x\mu} = \frac{6D_x}{a^2} + \frac{6D_\mu}{b^2}, \quad D_{xa} = \frac{2D_x}{a}, \quad D_{yb} = \frac{2D_y}{b}, \quad D_{\mu b} = \frac{2D_\mu}{a},$$

$$D_{y\mu} = \frac{6D_y}{b^2} + \frac{6D_\mu}{a^2}, \quad D_{ka} = \frac{2D_k}{4a}, \quad D_{kb} = \frac{D_k}{4b}, \quad D_{\mu b} = \frac{2D_\mu}{b},$$

По аналогии можно записать вектор обобщенных реакций:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \\ \vec{R}_3 \\ \vec{R}_4 \end{bmatrix}, \quad \vec{R}_i = \begin{bmatrix} r_i \\ r_i^x \\ r_i^y \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$\begin{bmatrix} r_i & r_i^x & r_i^y \end{bmatrix}$ - соответственно 1-ая реакция сила, 2-ая, 3-ая – реакции моменты.

Обобщенные реакции связаны с обобщенными перемещениями следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \\ \vec{R}_3 \\ \vec{R}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_2 \\ \vec{Z}_3 \\ \vec{Z}_4 \end{bmatrix} = R \vec{Z},$$

В силу теоремы о взаимности реакций $R_{ij} = (R_{ji})^T$, матрица реакции является симметричной и полностью определяется треугольной частью, т.е.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & & & \\ r_{21} & r_{22} & & \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

Первым столбцом матрицы R являются реакции, возникающие в точках 1,2,3,4 от единичных смещений первой точки. Введем обозначения для блоков 1-го столбца:

$$r_{11}=A_{11}, r_{21}=B_{21}, r_{31}=C_{31}, r_{41}=D_{41}$$

В силу теоремы о взаимности реакций и двоякой симметрии прямоугольника (относительно осей X,Y) матрица R будет симметричной по модулю матрицей как относительно главной диагонали (симметрия модулей элементов относительно побочной диагонали подтверждается, если поворачивать элемент относительно осей X,Y), поэтому блоки реакций, отличающиеся только знаками в матрице R обозначаются одинаковыми буквами, т.е. матрицу жесткости R можно представить в виде:

$$R = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & C_{13} & D_{14} \\ B_{21} & A_{22} & D_{23} & C_{24} \\ C_{31} & D_{32} & A_{33} & B_{34} \\ D_{41} & C_{42} & B_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (6.2.12)$$

По аналогии вторым столбцом матрицы R являются реакции, возникающие в точках 1,2,3,4 от единичных смещений второй точки; 3 столбец – реакции, возникающие в точках 1,2,3,4 от единичных смещений третьей точки; 4- – реакции, возникающие в точках 1,2,3,4 от единичных смещений четвертой точки.

Используя операторы знаков, матрицу реакции можно записать в виде:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & b_{11} & b_{21} & b_{31} & c_{11} & c_{21} & c_{31} & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{231} & b_{21} & b_{22} & b_{32} & -c_{21} & c_{22} & c_{32} & -d_{21} & d_{22} & d_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -b_{31} & -b_{32} & b_{33} & c_{31} & -c_{32} & c_{33} & -d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ b_{11} & b_{21} & -b_{31} & a_{11} & a_{21} & -a_{31} & d_{11} & d_{21} & -d_{31} & c_{11} & c_{21} & -c_{31} \\ b_{21} & b_{22} & -b_{32} & a_{21} & a_{22} & -a_{32} & -d_{21} & d_{22} & -d_{32} & -c_{21} & c_{22} & -c_{32} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & d_{31} & -d_{32} & d_{33} & -c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{11} & -c_{21} & c_{31} & d_{11} & -d_{21} & d_{31} & a_{11} & -a_{21} & a_{31} & b_{11} & -b_{21} & b_{31} \\ c_{21} & c_{22} & -c_{32} & d_{21} & d_{22} & -d_{32} & -a_{21} & a_{22} & -a_{32} & -b_{21} & b_{22} & -b_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & -d_{31} & -d_{32} & d_{33} & a_{31} & -a_{32} & a_{33} & -b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ d_{11} & -d_{21} & -d_{31} & c_{11} & -c_{21} & -c_{31} & b_{11} & -b_{21} & -b_{31} & a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ d_{21} & d_{22} & d_{32} & c_{21} & c_{22} & c_{32} & -b_{21} & b_{22} & b_{32} & -a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & -c_{31} & -c_{32} & c_{33} & b_{31} & -b_{32} & b_{33} & -a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (6.2.13)$$

Подставляя в выражение для матрицы R (6.2.11) из (6.2.9-6.2.11) матрицы H^{-1} , $\bar{C}$, D, интегрируя, получаем матрицу жесткости для прямоугольного элемента, изображенного на рис. 6.2.1.

Первые три столбца матрицы реакций R (соответствующей 1-ой точке) имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ B_{21} \\ C_{31} \\ D_{41} \end{bmatrix} = \frac{D}{ab} \begin{bmatrix} a_{11} = 4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & a_{21} = \left[-2\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right] b & a_{31} = \left[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right] a & b_{11} = -2(\beta^2 - \beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & b_{21} = \left[-\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right] b & b_{31} = \left[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu) \right] a & c_{11} = 2(\beta^2 - 2\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\nu) & c_{21} = \left[-2\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 - \nu) \right] b & c_{31} = \left[\beta^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right] a & d_{11} = \left[-2(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) \right] & d_{21} = \left[-\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1 - \nu) \right] b & d_{31} = \left[\beta^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu) \right] a \\ b_{22} = \left[\frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1 - \nu) \right] b^2 & a_{32} = -\nu ab & a_{33} = \left[\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu) \right] a^2 & b_{22} = \left[\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{4}{15}(1 - \nu) \right] b^2 & b_{32} = 0 & b_{33} = \left[\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu) \right] a^2 & c_{22} = \left[\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{1}{15}(1 - \nu) \right] b^2 & c_{32} = 0 & c_{33} = \left[\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu) \right] a^2 & d_{22} = \left[\frac{1}{3}\beta^{-2} + \frac{1}{15}(1 - \nu) \right] b^2 & d_{32} = 0 & d_{33} = \left[\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1 - \nu) \right] a^2 \end{bmatrix} \quad (6.2.14)$$

D- цилиндрическая жесткость пластины; $\beta = a/b$, a, b – размеры четырехугольного элемента в направлении осей X, Y.

В случае загрузки элемента не узловыми нагрузками, например, распределенной нагрузкой интенсивности $q(x, y)$ или вектором

сосредоточенных обобщенных сил $\bar{P}_c = [P \quad M_x \quad M_y]_c$, приложенных в точке С координатами $x=x_c$, $y=y_c$, приравниваем возможные работы внеузловых и узловых сил и получаем для $q(x,y)$:

$$\bar{P} = \int \int \bar{N}^T q(x,y) dx dy = (\bar{H}^{-1})^T \int \int L^T q(x,y) dx dy = R \bar{z}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{ii} & r_{ij} & r_{ik} & r_{im} \\ r_{ji} & r_{jj} & r_{jk} & r_{jm} \\ r_{ki} & r_{kj} & r_{kk} & r_{km} \\ k_{mi} & k_{jm} & k_{mk} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Где блоки матрицы жесткости определяются

$$r_{ij} = B_i^T D B_j h \Delta x \Delta y \quad (6.16)$$

D- цилиндрическая жесткость пластины; $\beta=a/b$, a, b – размеры четырехугольного элемента в направлении осей X, Y.

$$r_{11} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{3} (b^3 a + \frac{(1-\nu)ab^3}{2}) \right],$$

$$r_{12} = \frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \quad r_{13} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\frac{b^3 a - (1-\nu)a^3 b}{6} \right],$$

$$r_{14} = \frac{Ehab}{4(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1-3\nu}{2} \right) \right], \quad r_{15} = \frac{Eh}{ab(1-\nu^2)} \left[\left(-\frac{b^3 a}{6} - \frac{(1-\nu)a^3 b}{12} \right) \right],$$

$$r_{16} = -\frac{Ehab(1+\nu)}{8(1-\nu^2)}, \quad r_{17} = \frac{Eh}{3ab(1-\nu^2)} \left[\left(-b^3 a + \frac{(1-\nu)a^3 b}{4} \right) \right],$$

$$r_{18} = \frac{Ehab(3\nu-1)}{8(1-\nu^2)}$$

$$r_{23} = -\frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)}, \quad r_{27} = -\frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)},$$

$$r_{25} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)},$$

$$r_{21} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)} \quad r_{28} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\frac{b^3a - (1-v)ab^3}{6} \right],$$

$$r_{22} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\left(\frac{ba^3}{3} + \frac{(1-v)ab^3}{6} \right) \right],$$

$$r_{26} = -\frac{Eh}{6ab(1-v^2)} \left[\left(b^3a + \frac{(1-v)ab^3}{2} \right) \right]$$

$$r_{24} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(-ba^3 + \frac{(1-v)a^3b}{4} \right) \right]$$

$$r_{31} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\frac{1}{6} (b^3a - (1-v)ab^3) \right],$$

$$r_{38} = \frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad r_{33} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\frac{2b^3a - (1-v)a^3b}{6} \right],$$

$$r_{37} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\left(-\frac{b^3a}{6} - \frac{(1-v)a^3b}{12} \right) \right],$$

$$r_{35} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(-b^3a + \frac{(1-v)a^3b}{4} \right) \right]$$

$$r_{32} = \frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)}, \quad r_{34} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad r_{36} = -\frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)}$$

$$r_{44} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\frac{1}{3} (ba^3 + \frac{(1-v)ab^3}{2}) \right],$$

$$r_{47} = \frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad r_{46} = \frac{Eh}{6ab(1-v^2)} \left[ba^3 - (1-v)ab^3 \right],$$

$$r_{45} = -\frac{Ehab}{4(1-v^2)} \left[\frac{(1-3v)}{2} \right], \quad r = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\left(-\frac{b}{6} a^3 - \frac{(1-v)ab^3}{12} \right) \right],$$

$$r_{43} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad k_{42} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(-b a^3 + \frac{(1-v)a b^3}{4} \right) \right],$$

$$r_{41} = -\frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)}$$

$$r_{54} = \frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)}, \quad r_{56} = \frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad r_{58} = -\frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)},$$

$$r_{52} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad r_{57} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\frac{b^3 a - (1-v)a^3 b}{6} \right],$$

$$r_{55} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\left(\frac{b^3 a}{3} + \frac{(1-v)a^3 b}{6} \right) \right], \quad r_{51} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(-b^3 a + \frac{(1-v)a^3 b}{4} \right) \right]$$

$$r_{53} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(-b^3 a + \frac{(1-v)a^3 b}{4} \right) \right]$$

$$r_{63} = -\frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)}, \quad r_{67} = \frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)},$$

$$r_{61} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)},$$

$$r_{65} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)} \quad r_{64} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\frac{b^3a - (1-v)ab^3}{6} \right],$$

$$r_{66} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\left(\frac{ba^3}{3} + \frac{(1-v)ab^3}{6} \right) \right], \quad r_{62} = -\frac{Eh}{6ab(1-v^2)} \left[\left(b^3a + \frac{(1-v)ab^3}{2} \right) \right]$$

$$r_{68} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(-ba^3 + \frac{(1-v)a^3b}{4} \right) \right]$$

$$r_{76} = \frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)}, \quad r_{74} = \frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad r_{72} = -\frac{Ehab(3v-1)}{8(1-v^2)},$$

$$r_{78} = -\frac{Ehab(1+v)}{8(1-v^2)}, \quad r_{75} = \frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\frac{b^3a - (1-v)a^3b}{6} \right],$$

$$r_{73} = -\frac{Eh}{ab(1-v^2)} \left[\left(\frac{b^3a}{6} + \frac{(1-v)a^3b}{12} \right) \right], \quad r_{77} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(b^3a + \frac{(1-v)a^3b}{2} \right) \right]$$

$$r_{71} = \frac{Eh}{3ab(1-v^2)} \left[\left(-b^3a + \frac{(1-v)a^3b}{4} \right) \right]$$

$$r_{81} = \frac{Ehab(3\nu - 1)}{8(1 - \nu^2)}, \quad r_{85} = -\frac{Ehab(3\nu - 1)}{8(1 - \nu^2)}, \quad r_{83} = -\frac{Ehab(1 + \nu)}{8(1 - \nu^2)},$$

$$r_{82} = \frac{Eh}{ab(1 - \nu^2)} \left[\frac{b a^3 - (1 - \nu)ab^3}{6} \right],$$

$$r_{87} = -\frac{Ehab(1 + \nu)}{8(1 - \nu^2)}$$

$$r_{88} = \frac{Eh}{ab(1 - \nu^2)} \left[\left(\frac{ba^3}{3} + \frac{(1 - \nu)ab^3}{6} \right) \right], \quad r_{84} = -\frac{Eh}{6ab(1 - \nu^2)} \left[\left(b a^3 + \frac{(1 - \nu)ab^3}{2} \right) \right]$$

$$r_{86} = \frac{Eh}{3ab(1 - \nu^2)} \left[\left(-ba^3 + \frac{(1 - \nu)a b^3}{4} \right) \right]$$

7 Примеры расчета плиты методом конечных элементов

Постановка задачи

Рассматриваются монолитные железобетонные плиты прямоугольные в плане, гладкая (рис. 1.) и ребристая (рис. 2.) плиты с размерами 3*6м, находящаяся под действием внешней нормальной нагрузки интенсивности $q(x, y, t)$. Плита взаимодействует с опорными элементами в виде ригелей и балок. Расчеты выполнены при различных условиях защемления.

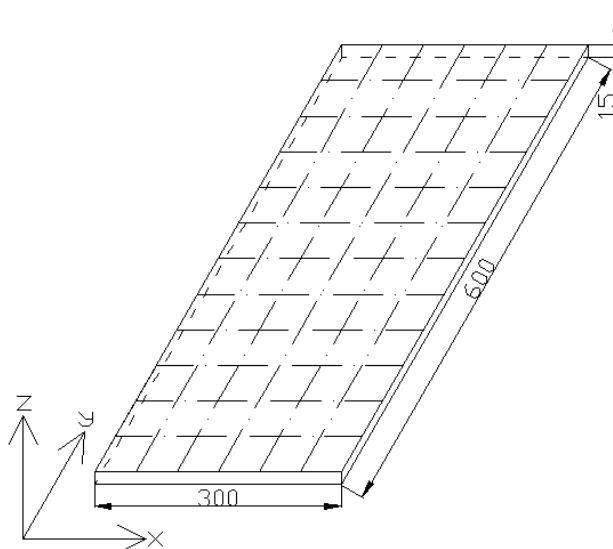


Рис. 7.1. Гладкая плита

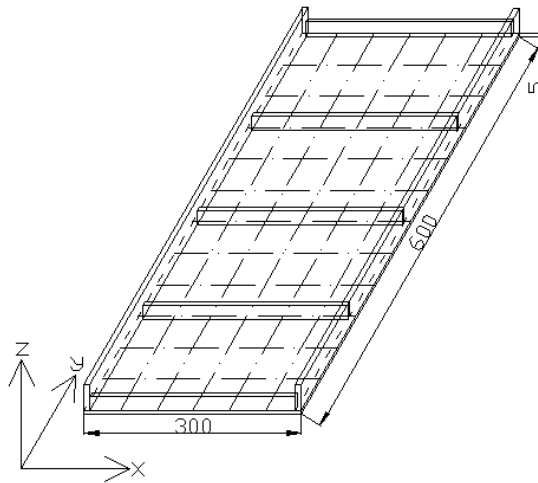


Рис. 7.2. Ребристая плита

Рассмотрим различные варианты расчета плиты. Расчет плиты выполнен на статические нагрузки с помощью ПК «ЛИРА». Данный комплекс реализует метод конечных элементов в перемещениях, на вертикальные, горизонтальные (постоянные, временные) нагрузки в соответствии со строительными нормами, действующими на территории РК

1) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – шарнирное

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

2) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

3) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по четырем сторонам – жесткое

$$x = 0; w = 0$$

$$x = b; \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

4) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $5*20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – шарнирное

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

5) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $5*20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

6) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=7$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $5*20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

7) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $8*25(h)$ см.

Класс бетона В25

Опирание плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – $2,75 \text{ т/м}^3$

Постоянная – 200 кг/м^2

Кратковременная (полезная) – 240 кг/м^2

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: гладкие плиты – 71

ребристые плиты – 126

Количество узлов: 91

1. Рассмотрены монолитные железобетонные ребристые и гладкие плиты. Материал конструкций: бетон тяжелый класса В25.

2. Для плиты определено необходимое армирование для обеспечения несущей способности, жесткости и трещиностойкости.

Расчет монолитной железобетонной плиты постоянной толщины (гладкая плита)

1) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опирание плиты: по двум сторонам – шарнирное

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – $2,75 \text{ т/м}^3$

Постоянная – 200 кг/м²

Кратковременная (полезная) – 240 200 кг/м²

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: гладкие плиты – 71

Количество узлов: 91

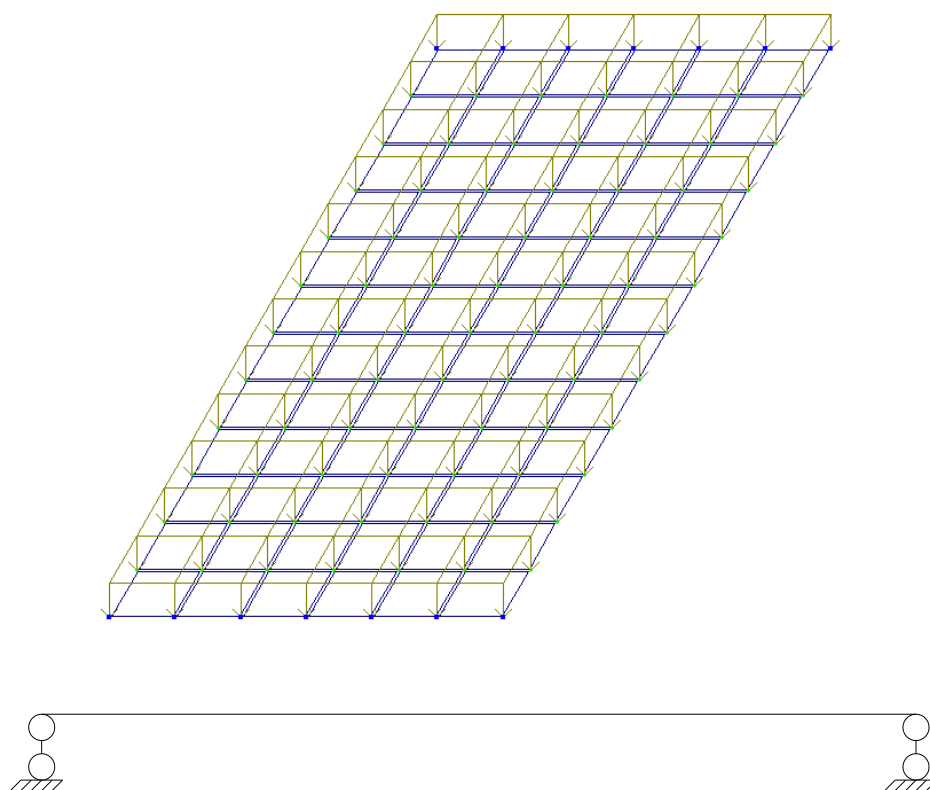


Рис. 7.3. Гладкая плита, шарнирно-опертая по двум сторонам

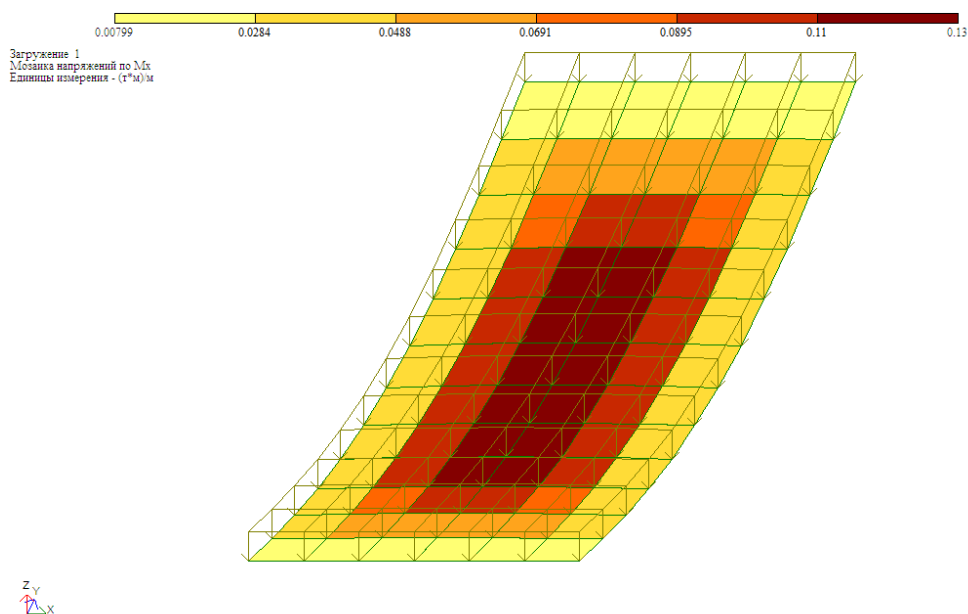


Рис. 7.4. Гладкая плита шарнирно-опертая по двум сторонам. Мозаика напряжений по M_x

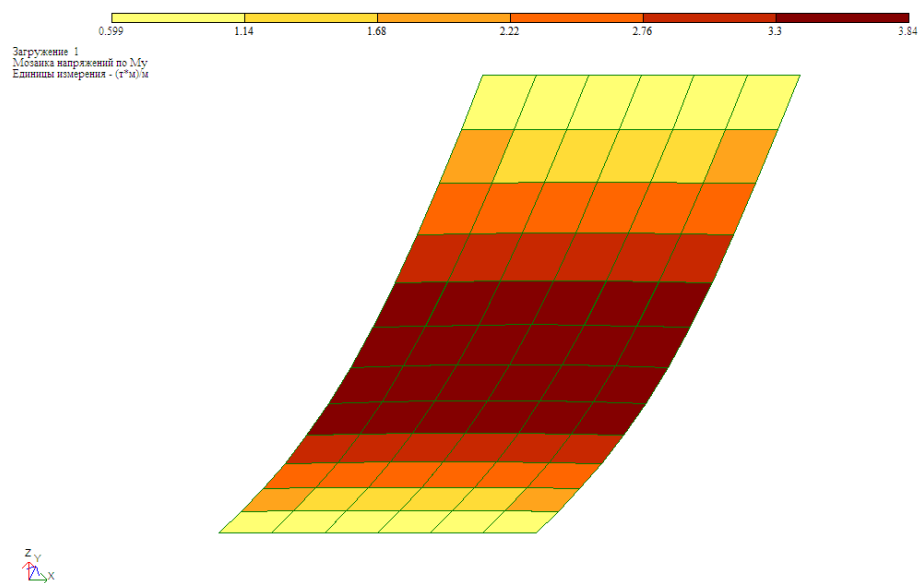


Рис. 7.5 Гладкая плита шарнирно-опертая по двум сторонам. Мозаика напряжений по M_y

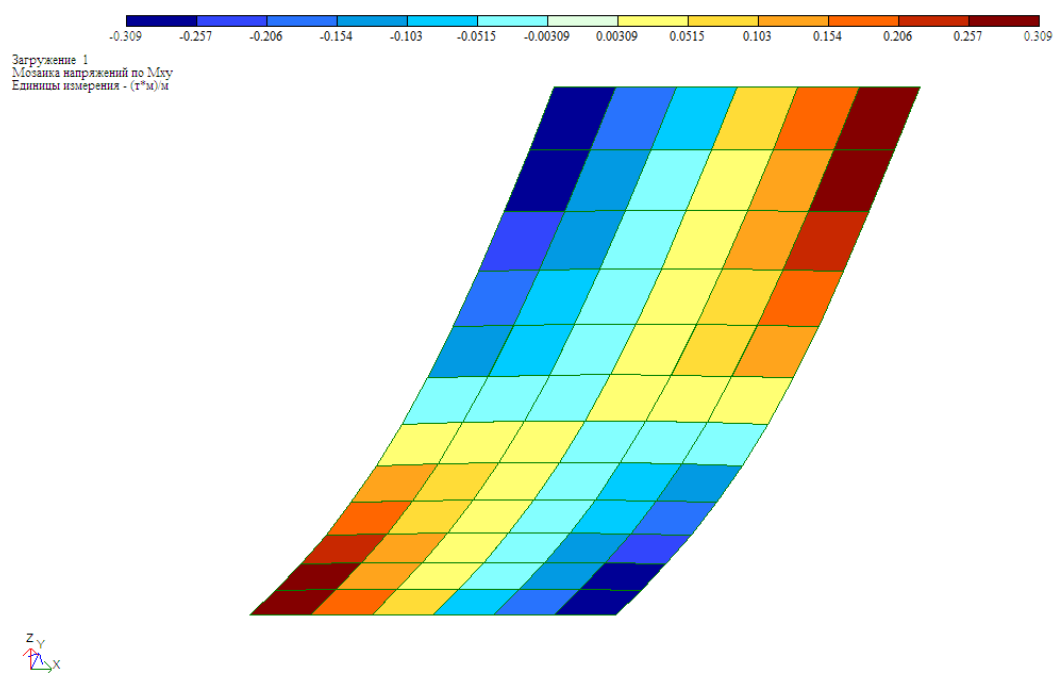


Рис. 7.6 Гладкая плита шарнирно-опертая по двум сторонам. Мозаика напряжений по M_{xy}

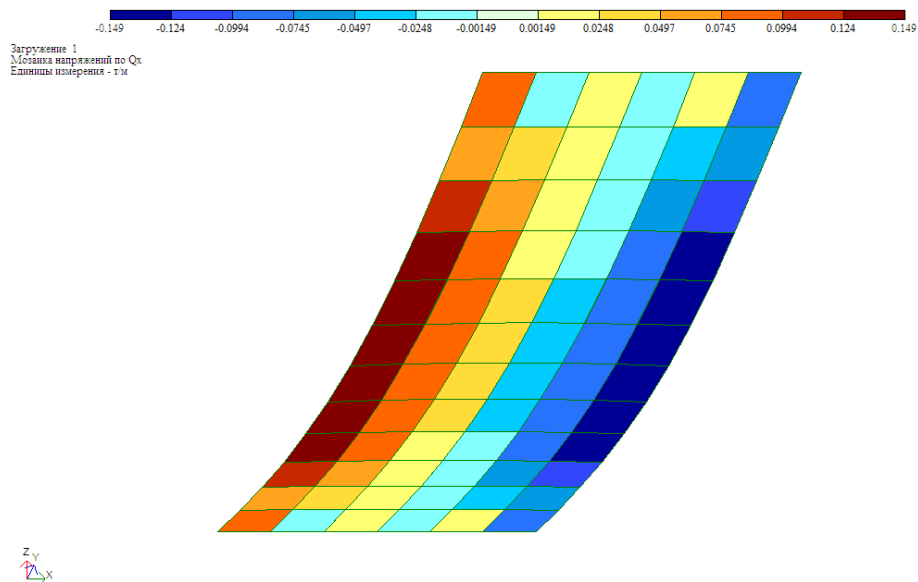


Рис. 7.7. Гладкая плита шарнирно-опертая по двум сторонам.
Мозаика напряжений по Q_x

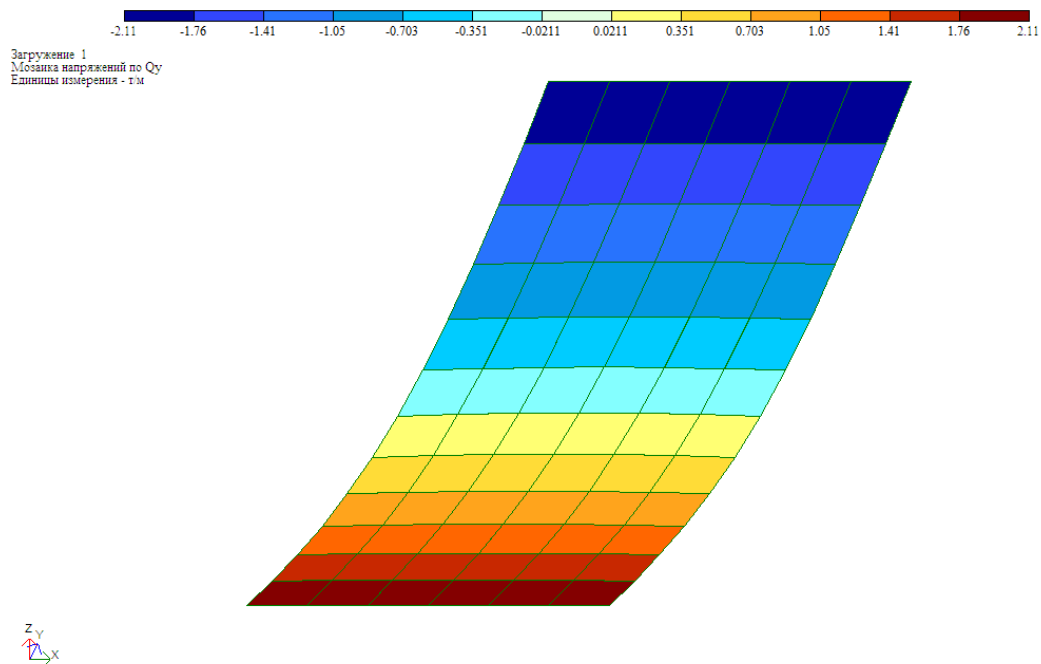


Рис. 7.8. Гладкая плита шарнирно-опертая по двум сторонам.
Мозаика напряжений по Q_y

2) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – 2,75 т/м³

Постоянная – 200 кг/м²

Кратковременная (полезная) – 240 200 кг/м²

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: гладкие плиты – 71

Количество узлов: 91

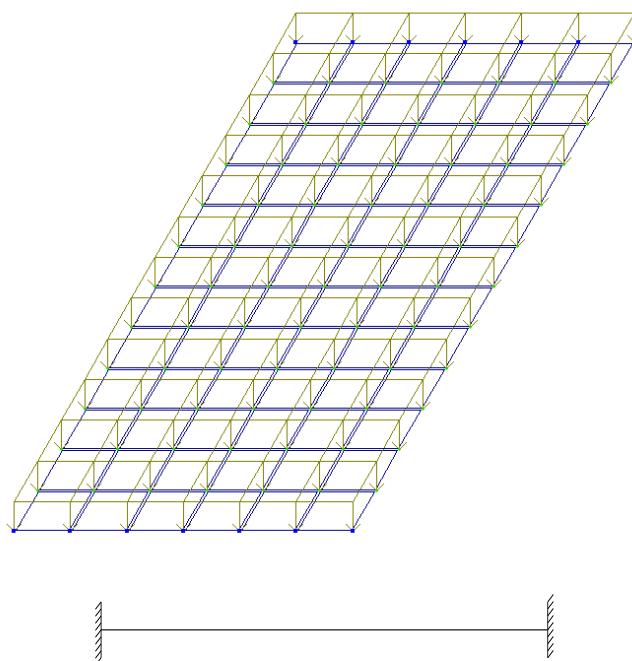


Рис. 7.9. Гладкая плита, жестко закрепленная по двум сторонам

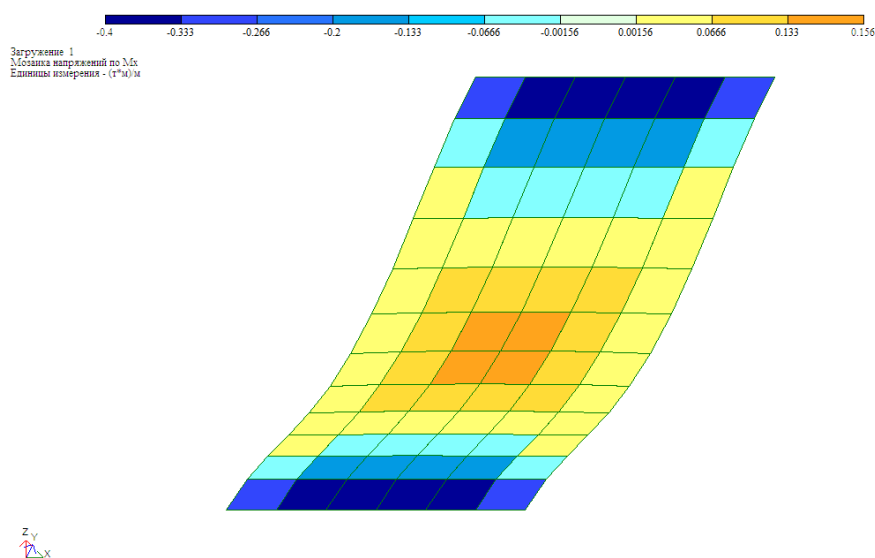


Рис. 7.10. Гладкая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_x

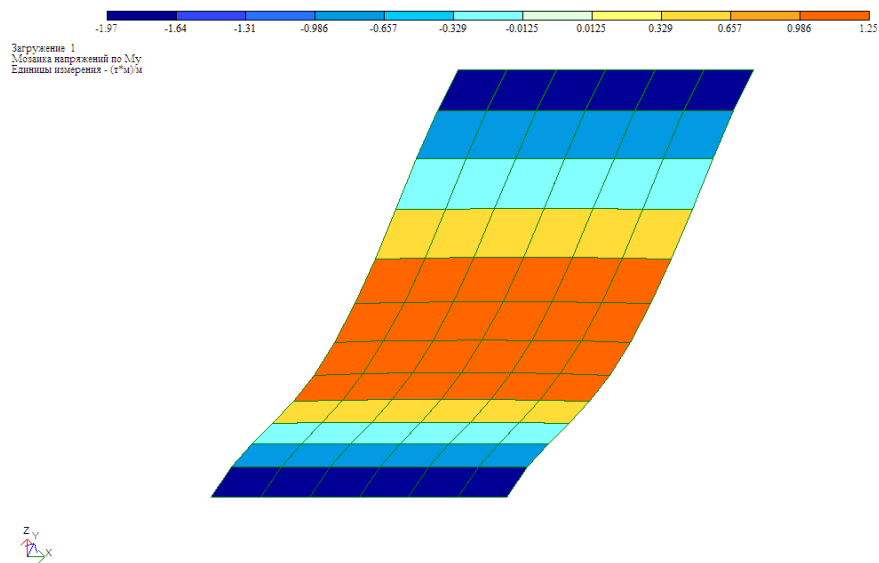


Рис.7. 11. Гладкая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_y

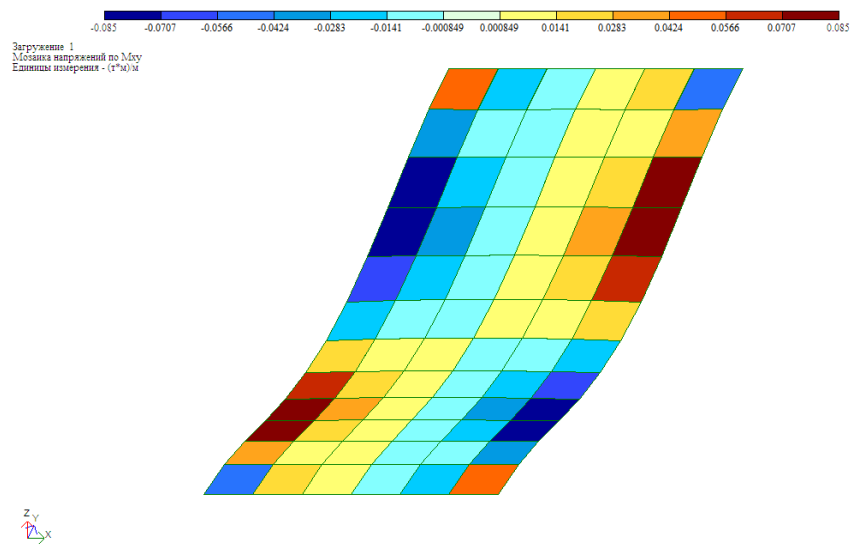


Рис. 7.12. Гладкая **плита**, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_{xy}

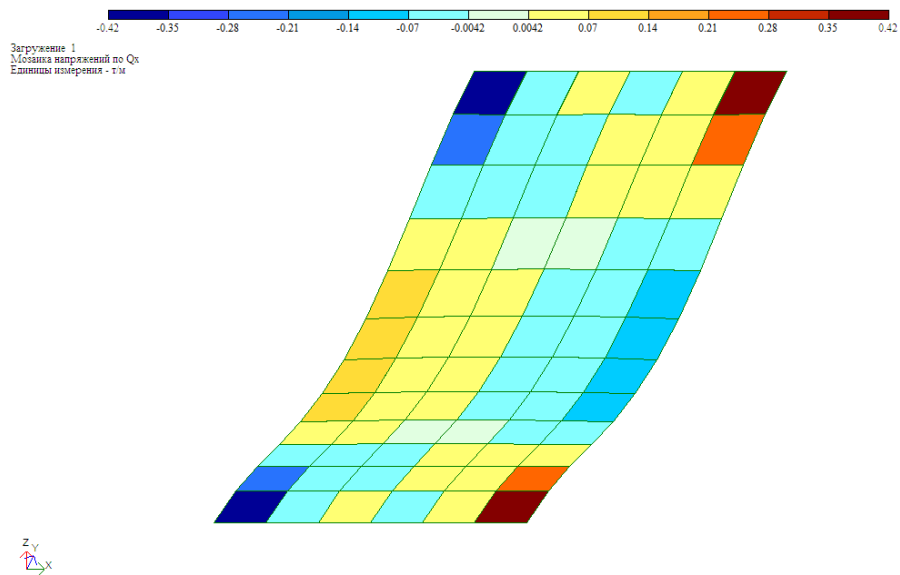


Рис. 7.13. Гладкая плита, жестко закрепленная по двум сторонам. Мозаика напряжений по Q_x

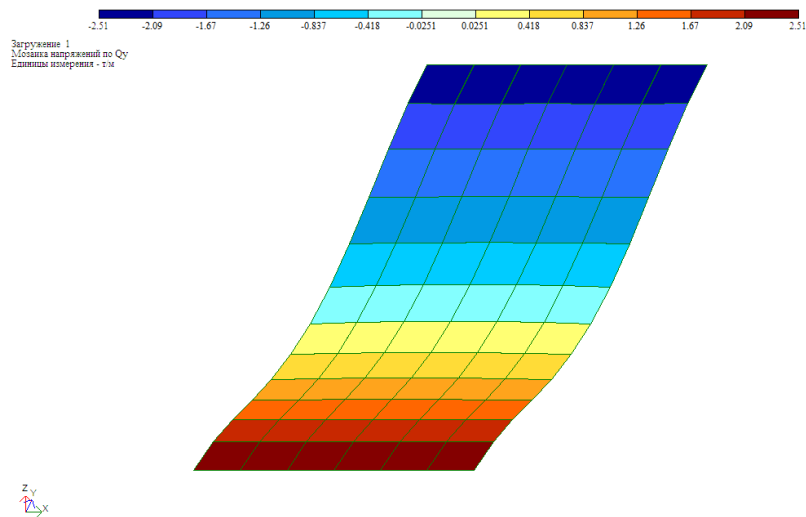


Рис. 7.14. Гладкая плита, жестко закрепленная по двум сторонам. Мозаика напряжений по Q_y

3) Плита гладкая

Размеры $a \cdot b = 300 \cdot 600$ см, $h = 15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по четырем сторонам – жесткое

$$x = 0; w = 0$$

$$x = b; \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – $2,75 \text{ т/м}^3$

Постоянная – 200 кг/м^2

Кратковременная (полезная) – 240 200 кг/м^2

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: гладкие плиты – 71

Количество узлов: 91

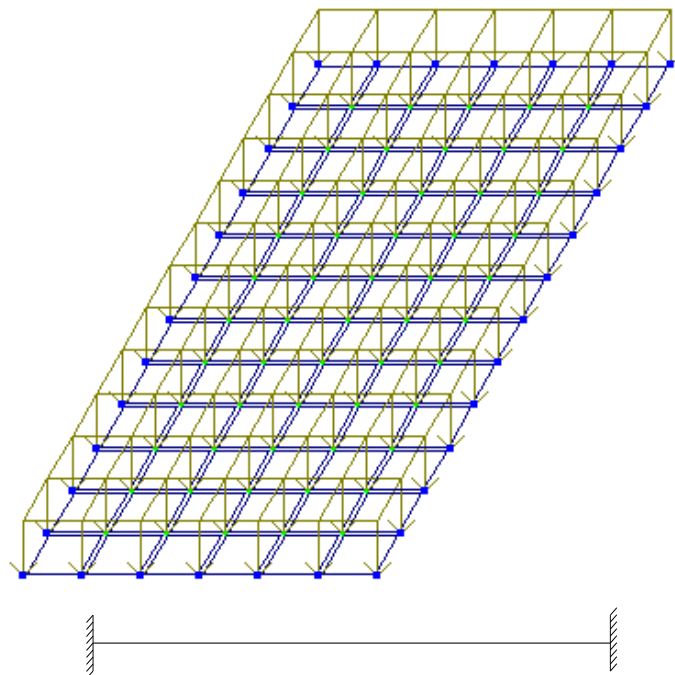


Рис. 7.15. Гладкая плита, жестко закрепленная по четырем сторонам.

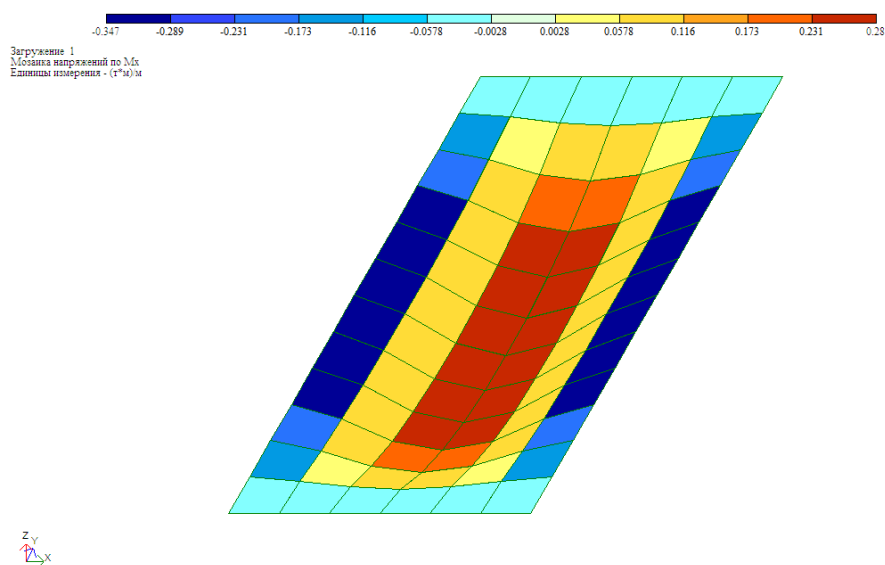


Рис. 7.16. Гладкая плита, жестко закрепленная по четырем сторонам.
Мозаика напряжений по M_x

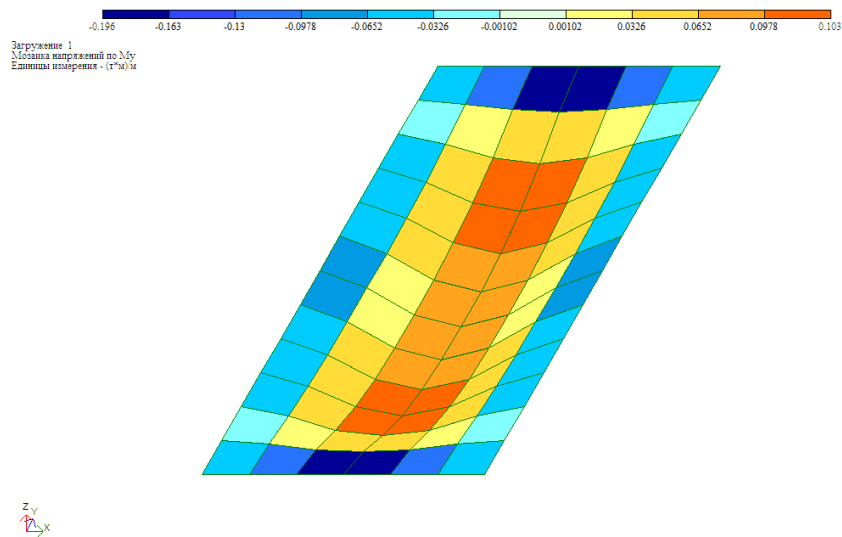


Рис. 7.17. Гладкая плита, жестко закрепленная по четырем сторонам.
Мозаика напряжений по M_y

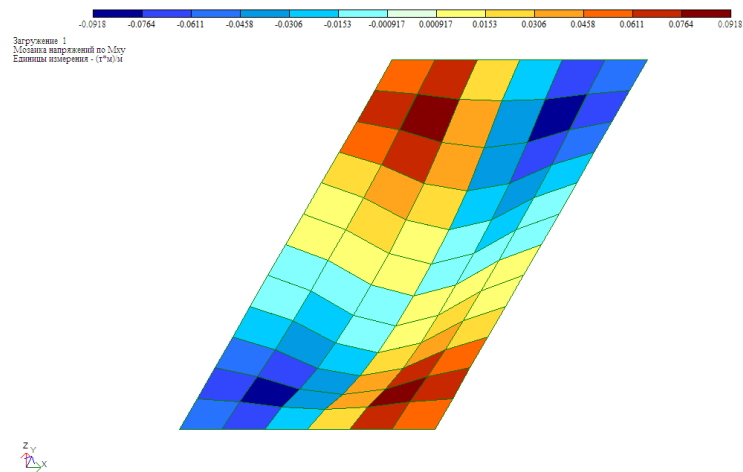


Рис. 7.18. Гладкая плита, жестко закрепленная по четырем сторонам.
Мозаика напряжений по M_{xy}

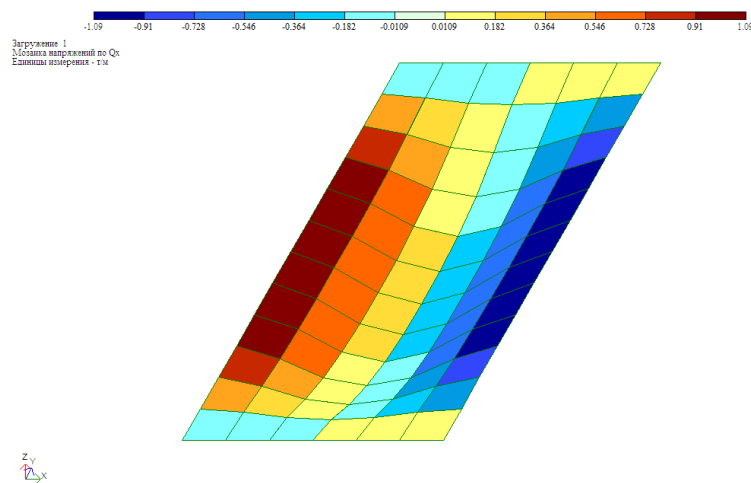


Рис. 7.19. Гладкая плита, жестко закрепленная по четырем сторонам.
Мозаика напряжений по Q_x

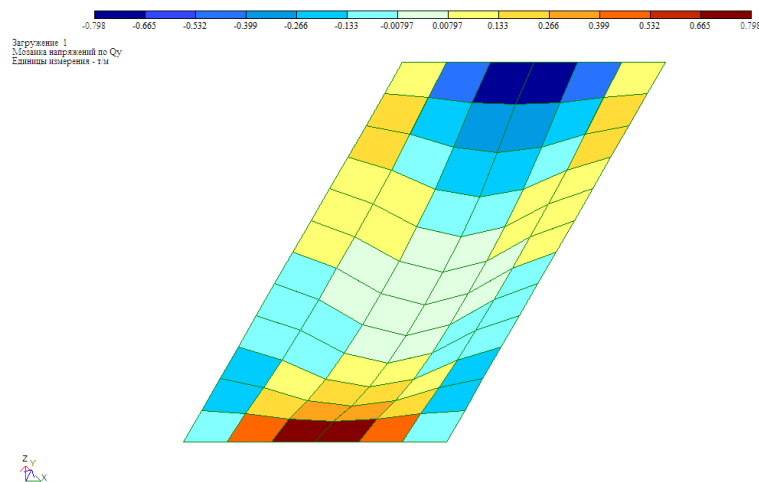


Рис. 7.20. Гладкая плита, жестко закрепленная по четырем сторонам.
Мозаика напряжений по Q_y

Расчет монолитной железобетонной плиты переменной толщины (ребристая плита)

1) Плита ребристая

Размеры $a \times b = 300 \times 600$ см, $h = 5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5 \times 40(h)$ см, поперечных в пролете $5 \times 20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – шарнирное

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – $2,75 \text{ т/м}^3$

Постоянная – 200 кг/м^2

Кратковременная (полезная) – 240 кг/м^2

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: Ребристые плиты – 126

Количество узлов: 91

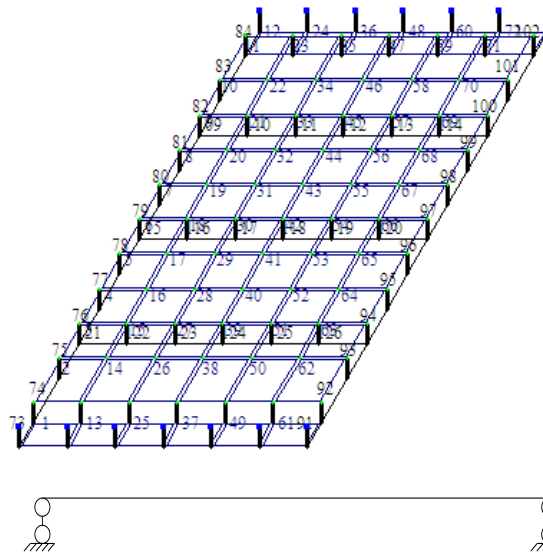


Рис. 7.21. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам

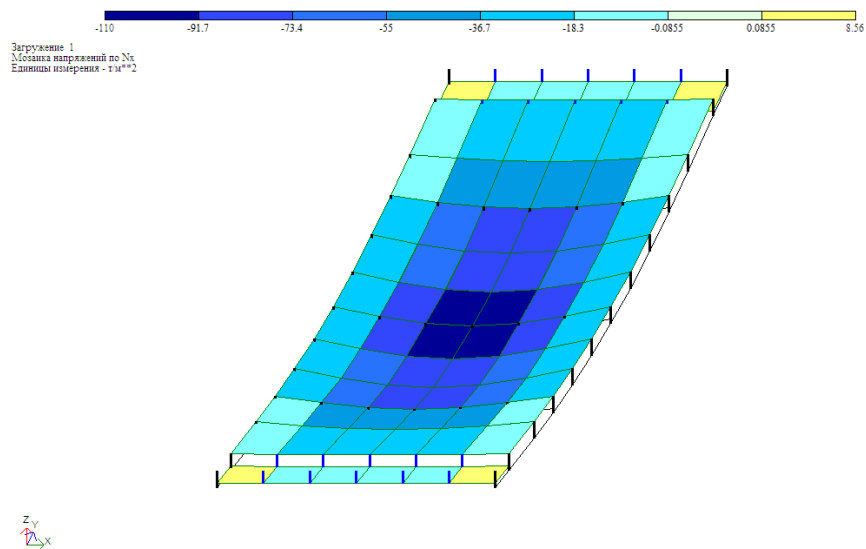


Рис. 7.22. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам.
Мозаика напряжений по N_x

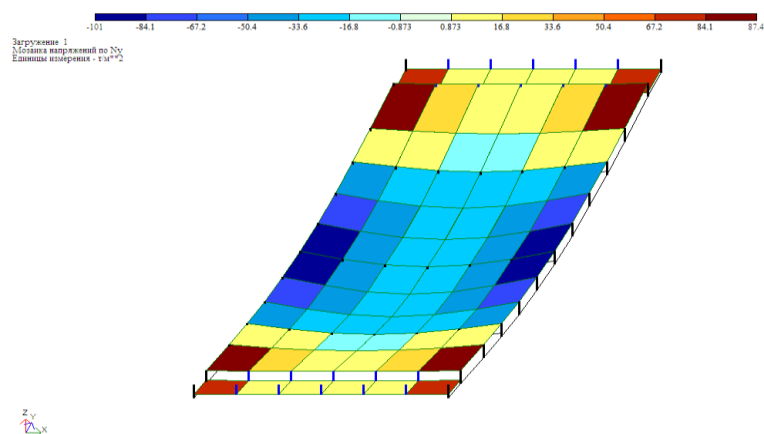


Рис. 7.23. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам. Мозаика напряжений по N_y

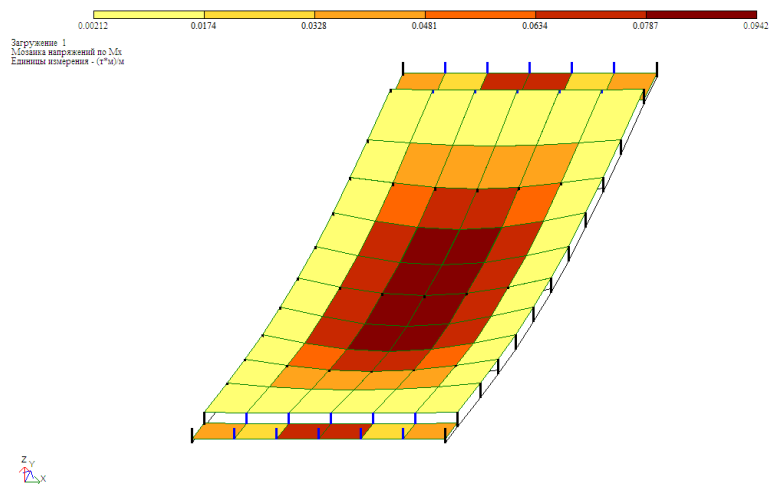


Рис. 7.24. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_x

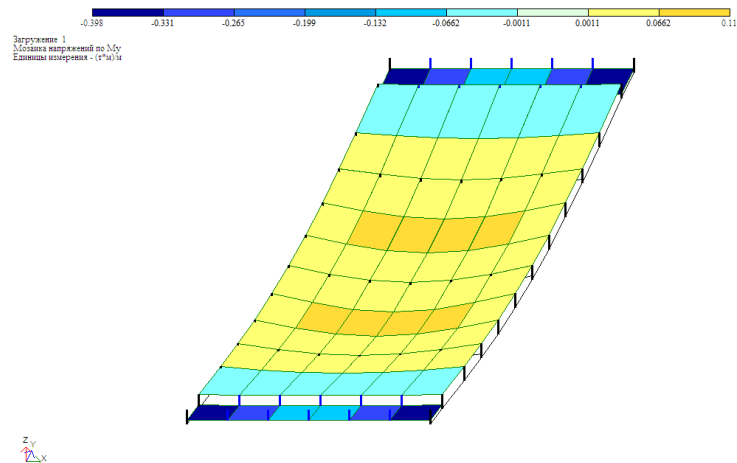


Рис. 7.25. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_y

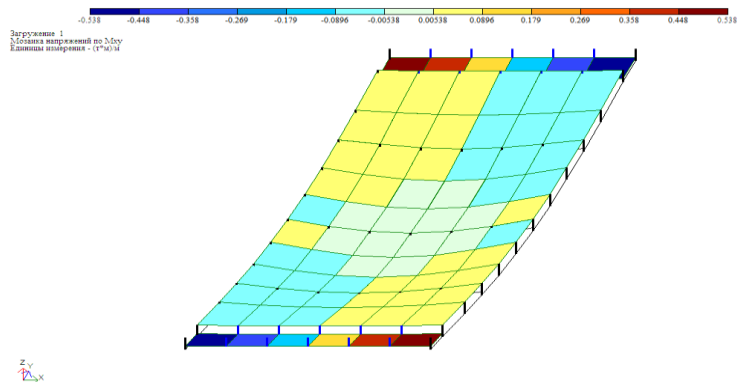


Рис. 7.26. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_{xy}

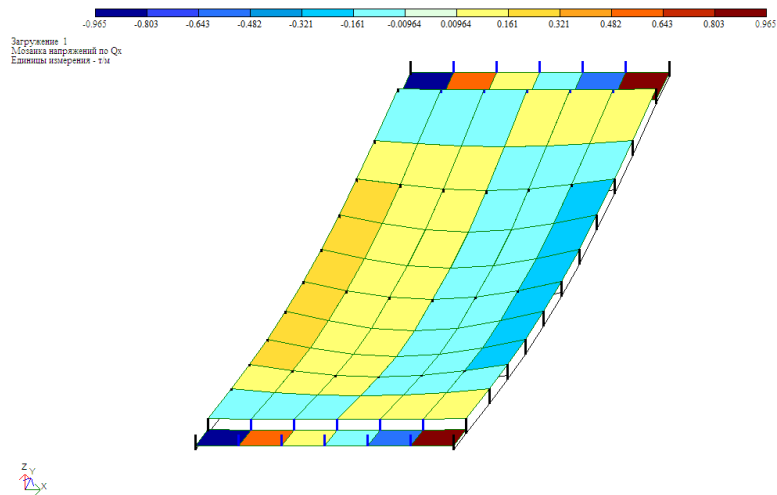


Рис. 7.28. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам.
Мозаика напряжений по Q_x

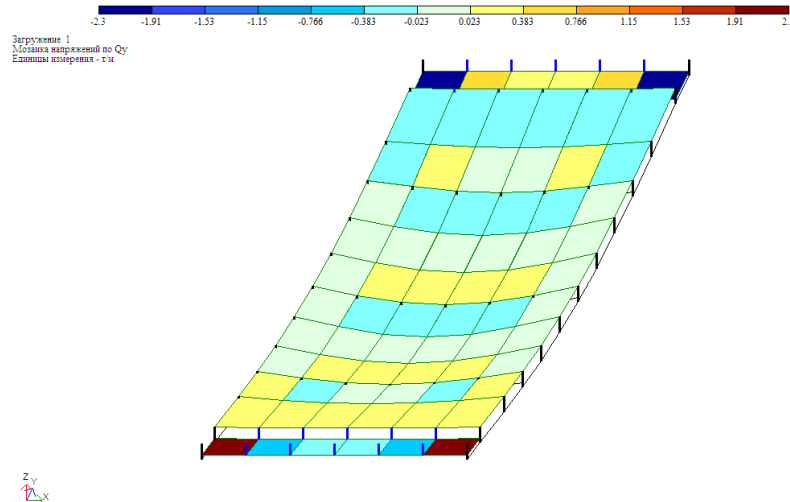


Рис. 7.29. Ребристая плита, шарнирно опертая по двум сторонам. Мозаика напряжений по Q_y

2) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $5*20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – 2,75 т/м³

Постоянная – 200 кг/м²

Кратковременная (полезная) – 240 200 кг/м²

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: Ребристые плиты – 126

Количество узлов: 91

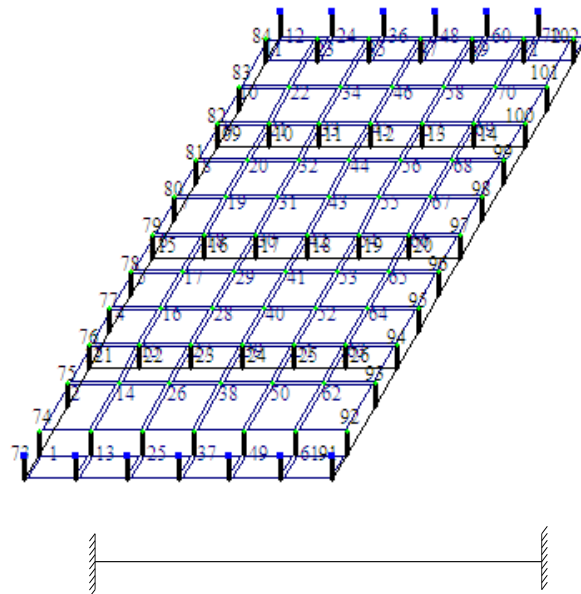


Рис. 7.30. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам

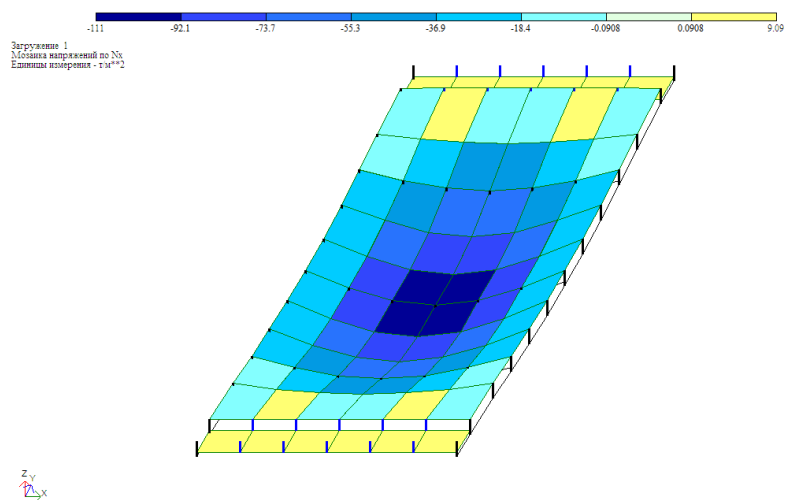


Рис. 7.31. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.

Мозаика напряжений по N_x

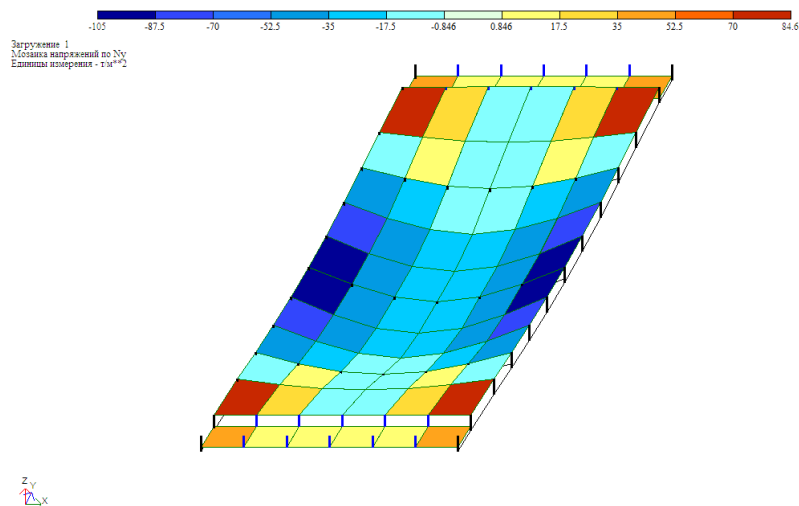


Рис. 7.32. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по N_y

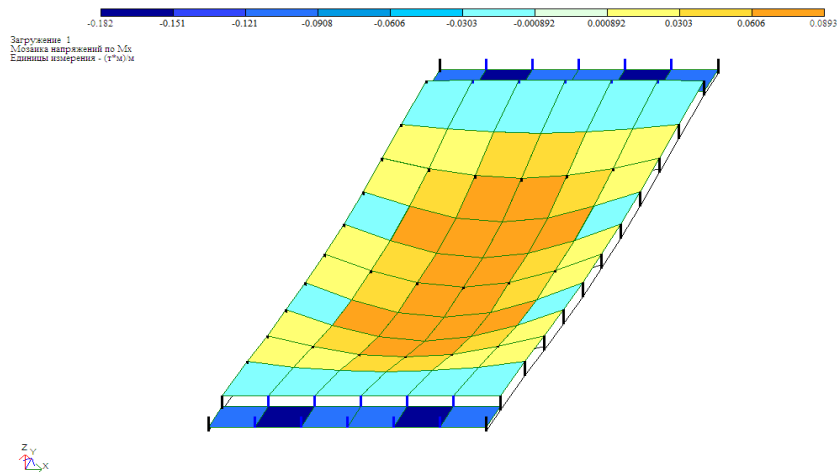


Рис. 7.33. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_x

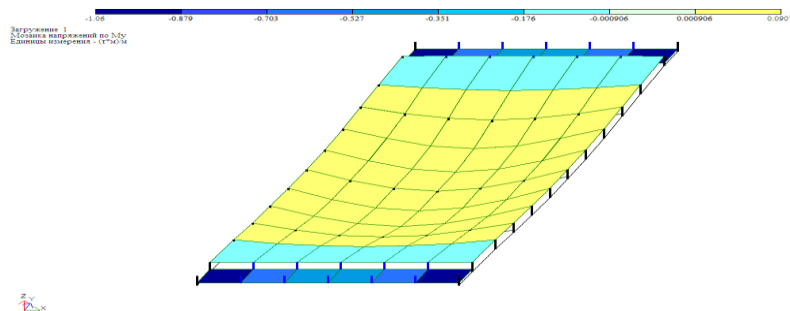


Рис. 7.34. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_y

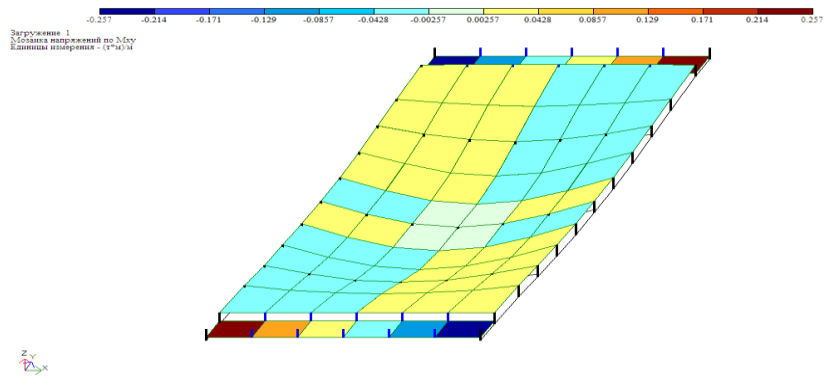


Рис. 7.35. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по M_{xy}

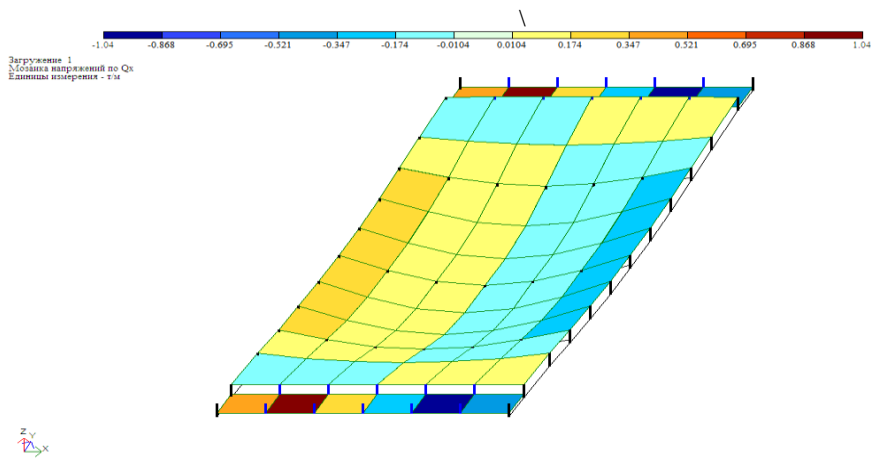


Рис. 7.36. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по Q_x

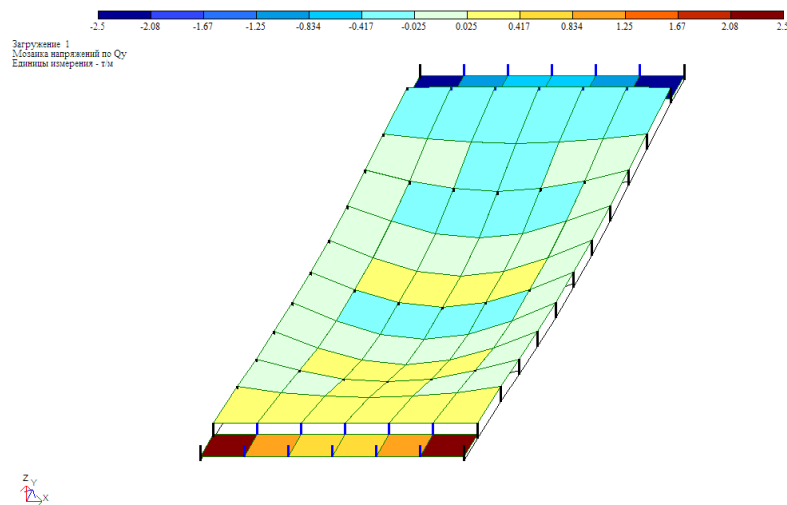


Рис. 7.37. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам.
Мозаика напряжений по Q_y

3) Плита ребристая

Размеры $a \times b = 300 \times 600$ см, $h = 7$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5 \times 40(h)$ см, поперечных в пролете $5 \times 20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опирание плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – $2,75 \text{ т/м}^3$

Постоянная – 200 кг/м^2

Кратковременная (полезная) – 240 кг/м^2

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: Ребристые плиты – 126

Количество узлов: 91

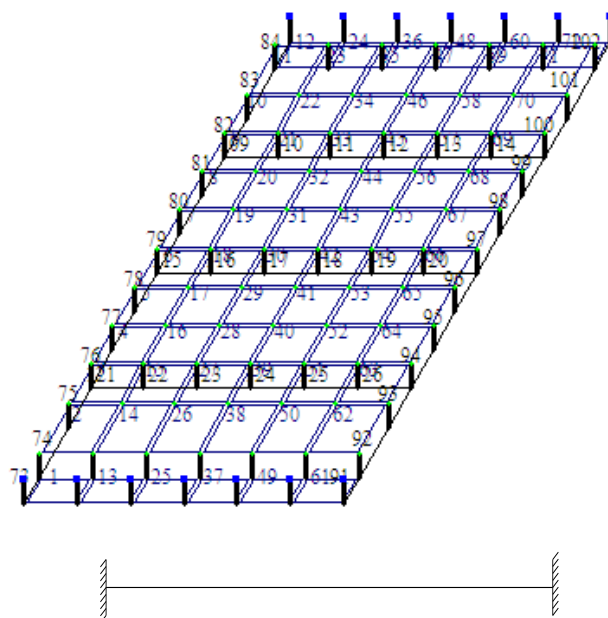


Рис. 7.38. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h = 7$.

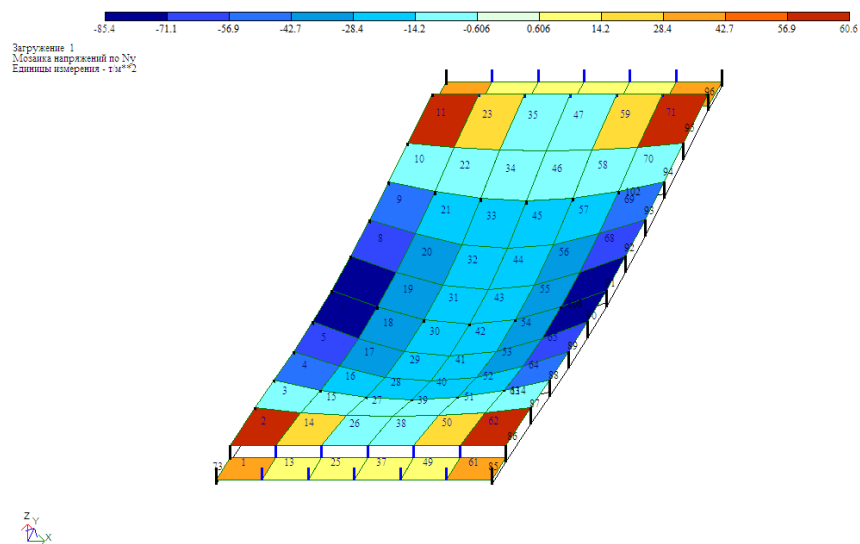


Рис. 7.39. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h=7$.
Мозаика напряжений по N_x

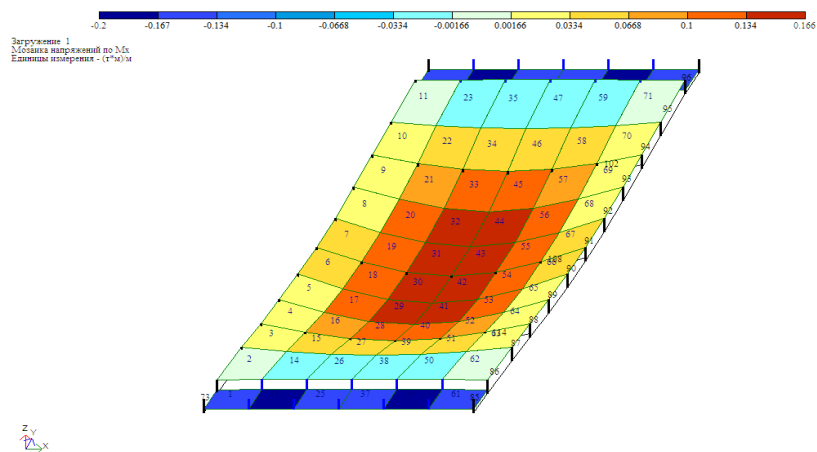


Рис. 7.40. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h=7$.
Мозаика напряжений по N_y

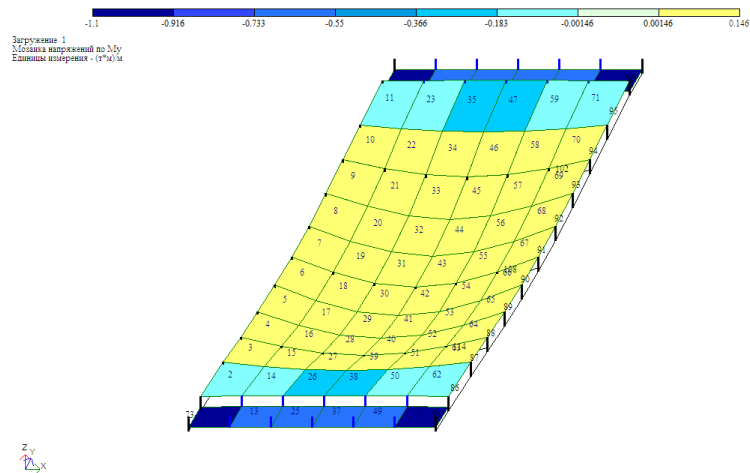


Рис. 7.41. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h=7$.
Мозаика напряжений по M_x

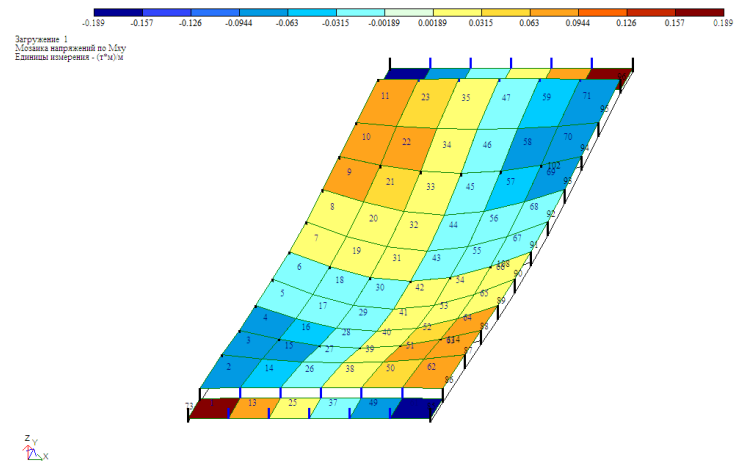


Рис. 7.42. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h=7$.
Мозаика напряжений по M_y

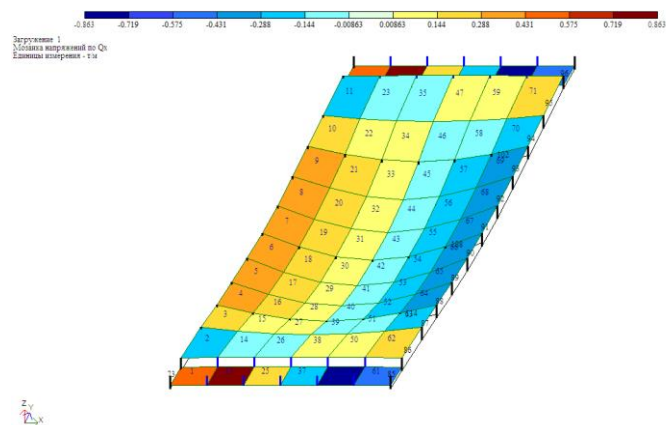


Рис. 7.43. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h=7$.
Мозаика напряжений по M_x

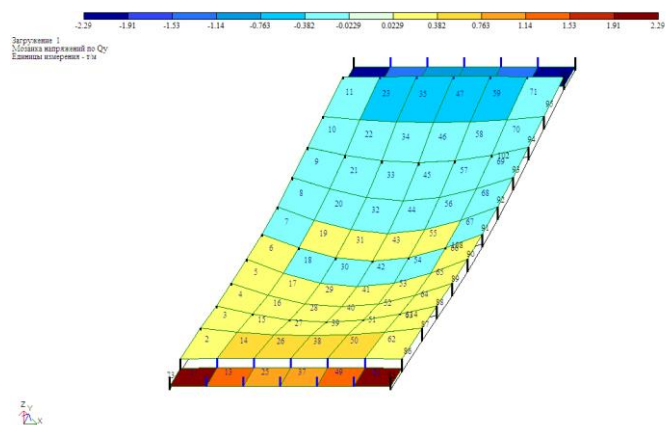


Рис. 7.44. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h=7$.
Мозаика напряжений по Q_x

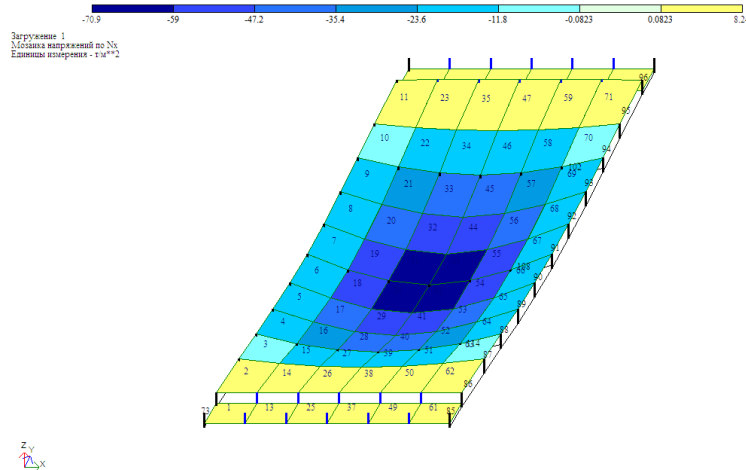


Рис. 7.45. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, $h=7$.
Мозаика напряжений по Q_y

4) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $8*25(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

$$y = 0; w = 0$$

$$y = b; \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Два других края свободны:

$$x = 0; x = a;$$

$$N_x = M_x = Q_x = 0$$

Нагрузки, действующие на плиты:

Собственный вес – $2,75 \text{ т/м}^3$

Постоянная – 200 кг/м^2

Кратковременная (полезная) – 240 кг/м^2

Нагрузки даны с учетом коэффициентов надежности по нагрузке

Количество элементов: Ребристые плиты – 126

Количество узлов: 91

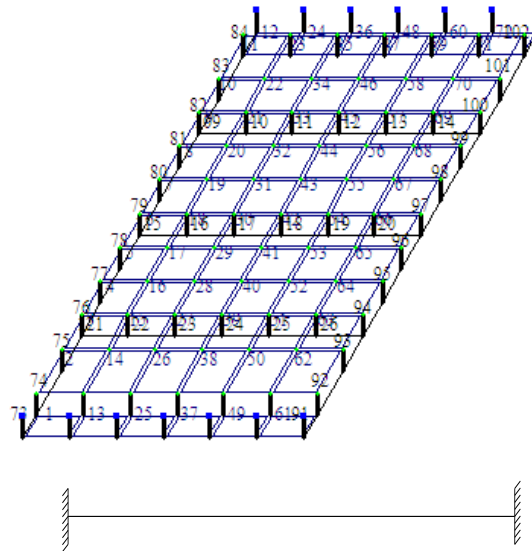


Рис. 7.46. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см.

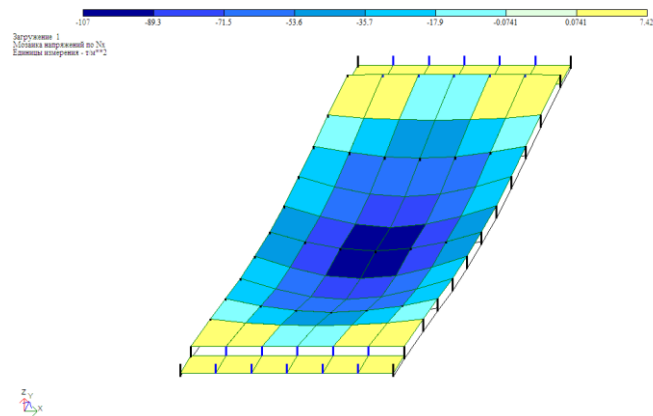


Рис. 7.47. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см. Мозаика напряжений по N_x

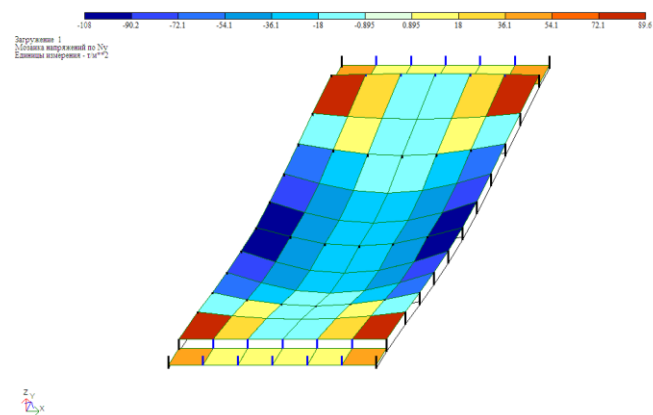


Рис. 7.48. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см. Мозаика напряжений по N_y

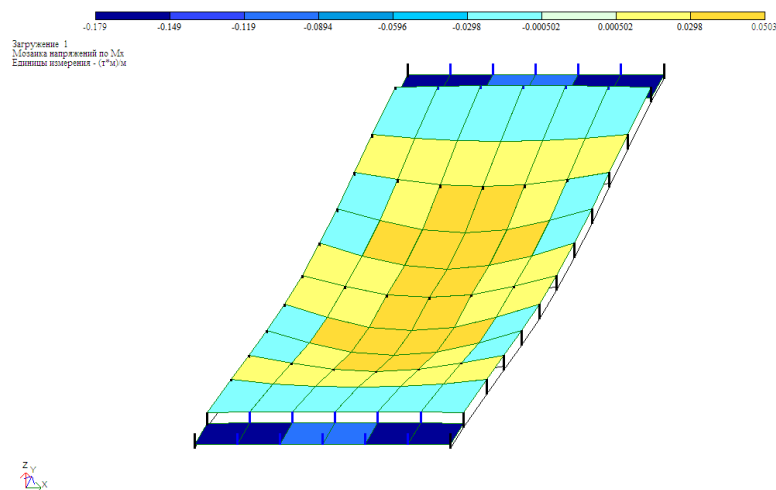


Рис. 7.49. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см. Мозаика напряжений по M_x

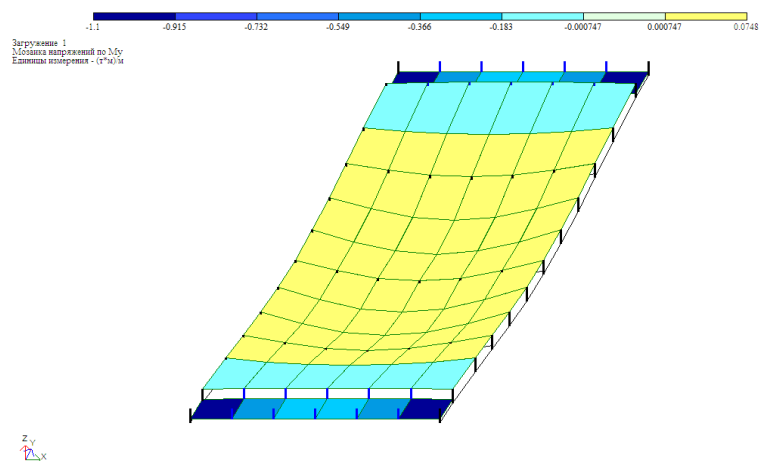


Рис. 7.50. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см. Мозаика напряжений по M_y

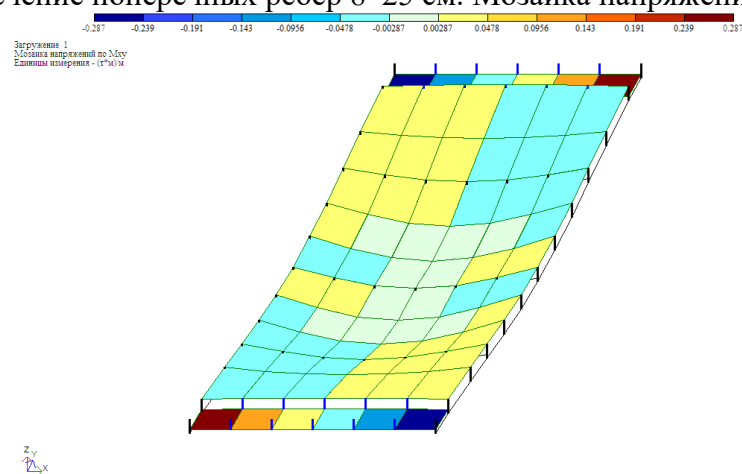


Рис. 7.51. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см. Мозаика напряжений по M_{xy}

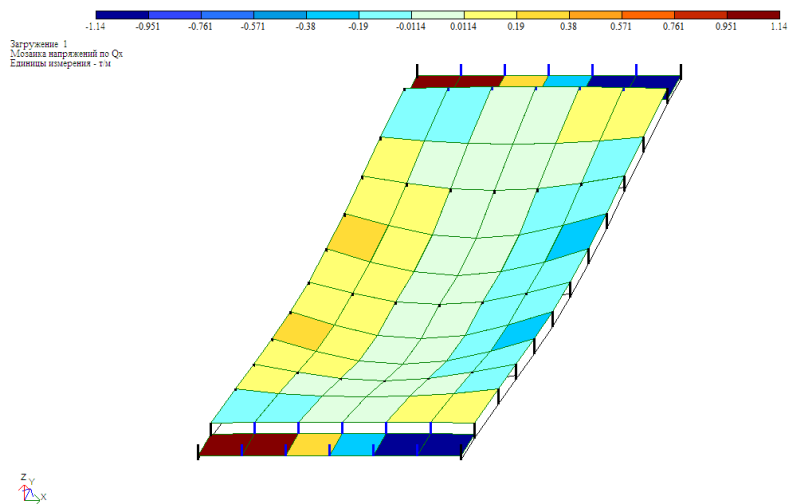


Рис. 7.52. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см. Мозаика напряжений по Q_x

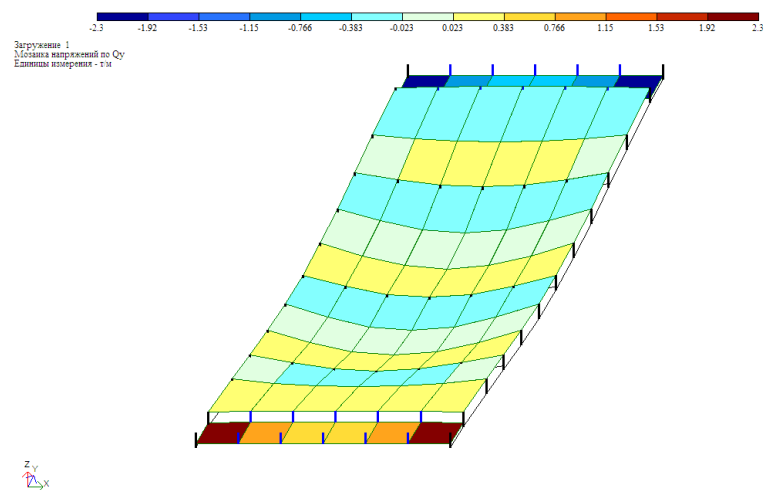


Рис. 7.53. Ребристая плита, жестко закрепленная по двум сторонам, сечение поперечных ребер 8*25 см. Мозаика напряжений по Q_y

Сравнение вариантов расчета плит

Сравним все варианты расчетов в точках А, В, С для следующих случаев опирания гладкой и ребристой плит.

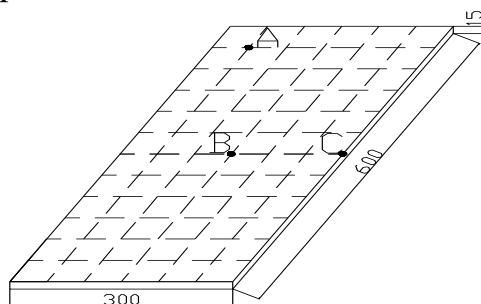


Рис. 7.54. Прямоугольная плита: точки А, В, С.

1) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – шарнирное

2) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

3) Плита гладкая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=15$

Класс бетона В25

Опираение плиты: по четырем сторонам – жесткое

4) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $5*20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – шарнирное

5) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $5*20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

6) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=7$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $5*20(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

7) Плита ребристая

Размеры $a*b=300*600$ см, $h=5$

В местах опирания толщина плиты составляет 20 см, размеры продольных ребер $8,5*40(h)$ см, поперечных в пролете $8*25(h)$ см.

Класс бетона В25

Опираение плиты: по двум сторонам – жесткое

Таблица 7.1. Сравнение вариантов расчета плит по M_x

Вариант плиты	Напряжение в точке А	Напряжение в точке В	Напряжение в точке С
1	0,061	0,269	0,0972
2	0,23345	0,156	0,0665
3	-0,03798	0,28	-0,347
4	0,01506	0,811	0,0132
5	0,00802	0,0767	0,00841

6	0,01441	0,166	0,0353
7	0,00323	0,0344	0,00237

Таблица 7.2. Сравнение вариантов расчета плит по M_y

Вариант плиты	Напряжение в точке А	Напряжение в точке В	Напряжение в точке С
1	1,143	3,77	3,84
2	-1,431	1,22	1,25
3	-0,04318	0,0816	-0,0655
4	0,02902	0,0471	0,0381
5	-0,02295	0,0274	0,0168
6	-0,05098	0,103	0,0522
7	-0,01628	0,00564	0,012

Таблица 7.3. Сравнение вариантов расчета плит по M_{xy}

Вариант плиты	Напряжение в точке А	Напряжение в точке В	Напряжение в точке С
1	0,275	0	0
2	-0,00533	0	0
3	0,06805	0	0
4	0,03045	0	0
5	0,03233	0,000383	0
6	0,06153	0	0
7	0,01625	0,00159	0

Таблица 7.4. Сравнение вариантов расчета плит по Q_x

Вариант плиты	Напряжение в точке А	Напряжение в точке В	Напряжение в точке С
1	0,04694	0	-0,149
2	-0,18949	0	-0,0915
3	0,1226	0	-1,09
4	0,03193	0,00488	-0,228
5	-0,00385	0	-0,23
6	-0,02708	0	-0,419
7	-0,00461	0,00587	-0,108

Таблица 7.5. Сравнение вариантов расчета плит по Q_y

Вариант плиты	Напряжение в точке А	Напряжение в точке В	Напряжение в точке С
1	-1,88	0	0
2	-2,15	0	0
3	-0,10073	0,00448	0
4	-0,10025	0	0
5	-0,13019	0	0
6	-0,12193	0	0
7	0,09269	0	0

Таблица 7.6. Сравнение вариантов расчета плит по N_x

Вариант	Напряжение в точке А	Напряжение в точке В	Напряжение в точке С
---------	----------------------	----------------------	----------------------

Т ПЛИТЫ			
1	-	-	-
2	-	-	-
3	-	-	-
4	-22,9	-110	-33,4
5	-10,5945	-111	-33,3
6	-4,225	-70,8	-22,3
7	-13,885	-107	-36,2

Таблица 7.7. Сравнение вариантов расчета плит по N_y

Вариант плиты	Напряжение в точке А	Напряжение в точке В	Напряжение в точке С
1	-	-	-
2	-	-	-
3	-	-	-
4	29,76	-29,8	-101
5	26,8925	-28,6	-105
6	17,55	-25,7	-85,3
7	29,1875	-30,3	-108

Результаты численного расчета показали, что:

1) в гладкой плите под действием нагрузки возникают незначительные продольные силы N_x и N_y , которыми можно пренебречь в сравнении с изгибными усилиями;

2) в ребристой плите наоборот – возникают значительные силы N_x и N_y , которые изменяются в зависимости от жесткости закрепления и конструктивных особенностей:

- наибольшее значение продольной силы в крайней узловой точке соответствует шарнирному закреплению, при жестком защемлении края и увеличения толщины в 1,4 раза это усилие уменьшилось в 1,7 раза;

- в середине оболочки **продольные** силы изменили **знак**, и наибольшее значение соответствует случаю при жестком закреплении и увеличении жесткости ребер;

- наиболее напряженной относительно продольных усилий являются точки, расположенные в середине контура вдоль оси У. Значения усилий увеличились почти в 3 раза в сравнении с точками, расположенными в средней части оболочки.

3) Результаты по деформациям плиты:

- наибольшие прогибы во всех рассмотренных вариантах соответствуют середины плиты; перемещения в направлении осей Х, У **незначительны** в сравнении с прогибами и составляет менее 5%;

- в зависимости от условий закрепления прогибы меняются, наименьшее значение нормальных перемещений соответствует жесткому защемлению (%);

- при наличии 2 продольных и 5 поперечных ребер жесткости уменьшаются значения прогибов в сравнении с гладкой плитой в (%).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М., 1966. – 636 с.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
3. Александров А.В., Лашенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М., 1983. – 488 с.
4. Математические модели контактных задач теории пластин и оболочек / Крысько А.В. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. – 180 с.
5. Основные соотношения динамики приближенной трехмерной теории балок, плит и оболочек / Амосов А.А., Антонов В.В. Моск. гос. строит. ун-т. – М., 1992. – 12 с. Деп-в ВНИИТИ 19.05.2000, №1436
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
7. Айзенберг Я.М., Мамаева Г.В. Определение динамических характеристик каркасных зданий для практических расчетов на сейсмические воздействия / Сборник №6 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2009. – С. 44-47.
8. Коробко А.В., Калашникова Н.Г., Сенин М.А. Определение основных частот колебаний параллелограммных пластинок с комбинированными граничными условиями / Сборник №3 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2009. – С. 24-25.
9. Турков А.В., Савин С.Ю. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и собственных колебаний балок линейно-переменной высоты / Сборник №3 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2009. – С. 33-35.
10. Булычев Г.Г. Матричная форма представления дифференциальных инвариантов в задачах динамики сплошных сред / Сборник №3 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2009. – С. 14-15.
11. Коренева Е.Б. Задача о собственных колебаниях с $m \geq 2$ узловыми диаметрами круглых пластин переменной толщины / Сборник №4 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2009. – С. 47-49.
12. Булычев Г.Г. Динамика разрушения волокнистой пластинки / Сборник №3 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2010. – С. 55-56.
13. Кадомцев М.И., Ляпин А.Л. Исследование динамики заглубленных фундаментов методами граничных и конечных элементов / Сборник №3 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2010. – С. 61.
14. Коробко В.И., Турков А.В., Калашникова О.В. Поперечные колебания, прогибы и усилия в однопролетных составных балках с различными граничными условиями слоев / Сборник №3 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2010. – С. 65-67.
15. Булычев Г.Г. Характеристическая форма представления уравнений динамики несимметрично упругих упруговязкопластических тел /

- Сборник №2 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2010. – С. 52-54.
16. Булычев Г.Г. Оптимизация динамической прочности перфорированной пластинки / Сборник №2 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2009. – С. 22-26.
 17. Гордон В.А., Ключева Н.В., Брусова В.И. Осесимметричные колебания кольцевой пластинки при внезапном изменении условий опирания / Сборник №1 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2009. – С. 41.
 18. Булычев Г.Г. Динамическое разрушение изотропной пластинки / Сборник №1 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2008. – С. 13-19
 19. Кипиани Г.О., Долидзе К.Г. Напряженно-деформированное состояние в трехслойной пластине с разрезами и отверстиями/ Сборник №1 «Строительная механика и расчет сооружений». – М., 2010. – С. 6-7.
 20. СНиП РК 2.03-04-2001 «Строительство в сейсмических районах». – Астана: Комитет по делам строительства, 2002.
 21. СНиП РК 3.02-02-2001 «Общественные здания и сооружения». – Астана, 2002.
 22. СНиП III-4-80. Техника безопасности в строительстве. Госстрой СССР. – М., 1989.
 24. СНиП 2.03.01-84* СНиП 2.03-01-84 «Бетонные и железобетонные конструкции». – М.: Стройиздат, 1985.
 25. СНиП 2.01.07-85* «Нагрузки и воздействия». – М.: Стройиздат, 2001.
 26. Мандриков А.Г. Примеры расчета железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1989.
 27. Выдержки из строительных Еврокодов. – М.: ФГБОУ ВПО МГСУ: Еврокоды, 2011. – 655 с.
 28. Байков, В.Н. Железобетонные конструкции: Общий курс: учеб. для вузов / В.Н. Байков, Э.Е. Сигалов. – 5-е изд. – М.: Стройиздат, 1971. – 767 с
 29. Байков В.Н. Проектирование железобетонных тонкостенных пространственных конструкций: Учеб. пособие для вузов / В.Н. Байков, Э. Хампе, Э.Рауэ. – М.: Стройиздат, 1990. – 232 с.
 30. Виноградов, Г.Г. Расчёт строительных пространственных конструкций / Г.Г. Виноградов. – Л.: Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. – 264 с.
 31. Поляков Л.П., Лысенко Е.Ф., Кузнецов Л.В. Железобетонные конструкции. – К.: Вища школа, 1984. – 352 с.
 32. Бондаренко В.М., Суворкин Д.Г. Железобетонные и каменные конструкции. – М.: Высш. шк., 1987. – 384 с.
 33. Железобетонные пространственные конструкции покрытий и перекрытий. СП 52-117–2008. Ч. 1. Методы расчёта и конструирования. ФГУП НИЦ «Строительство», 2008.

34. Руководство по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий. НИИЖБ. – М., 1979.
35. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжёлых и лёгких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01–84). – М.: Стройиздат, 1989. – 191 с.
36. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжёлого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101–2003) ЦНИИПромзданий, НИИЖБ. – М.: ОАО ЦНИИПромзданий, 2003. – 144 с.
37. Примеры расчёта железобетонных конструкций / Овечкин А.М., Хлебной Я.Ф. и др. – М.: Высшая школа, 1968. – 447 с.
38. Расчёт пространственных конструкций: Сборник статей / Под ред. С.А. Алексеева, В.В. Новожилова. – М.: Стройиздат, 1977. – Вып. 1111. – 191 с.
39. Современные пространственные конструкции (железобетон, металл, дерево, пластмассы): Справочник / Ю.А. Дыховичный, Э.З. Жуковский, В.В. Ермолов и др.: под ред. Ю.А. Дыховичного, Э.З. Жуковского. – М.: Высш. шк., 1991. – 543 с.
40. Примеры расчёта железобетонных конструкций: Учеб. пособие для вузов / Н.М. Сперанский, С.Г. Сташевская, С.В. Бондаренко. – М.: Высш. шк., 1989. – 176 с.
42. СП 52-102–2004. Предварительно напряжённые железобетонные конструкции. – М.: ФГУП ЦПП, 2005. – 38 с.
43. СП 52-101–2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 54 с.
44. СНБ 5.03.01–02. «Бетонные и железобетонные конструкции». – Мн.: Стройтехнорм, 2002. – 274 с.
45. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.
46. Железобетонные конструкции. Основы теории расчета и конструирования // Учебное пособие для студентов строительной специальности. Под ред. проф. Т.М. Петцольда и проф. В.В. Тура. – Брест: БГТУ, 2003. – 380 с.: ил.
47. Гвоздев А.А., Залесов А.С. К расчету прочности наклонных сечений // Бетон и железобетон. – 1978. – № 11.
48. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974.
49. Гроздов В.Т. Экспериментальное исследование распределения деформаций в арматуре и бетона на участке между трещинами в изгибаемых железобетонных элементах при кратковременном динамическом нагружении. – М.: Строительство, 1997. – № 5.
50. Дмитриев С. А. Предельные состояния элементов железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1976.

51. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976.
52. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.
53. Колчунов В.И. Заздравных Э.И. Расчетная модель нагельного эффекта в железобетонном элементе. – М.: Строительство, 1996, № 10.
54. Коренев Б.Г., Рабинович И.М. Справочник по динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1972.
55. Михайлов В.В. Исследования в области предварительно напряженных железобетонных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958.
56. Мурашев В.И., Сигалов Э.Е., Байков В.Н. Железобетонные конструкции. – М. Стройиздат, 1962.
57. Петросян А.В. Расчет прочности железобетонных элементов при совместном действии изгибающих моментов и поперечных сил: Автореф. дисс. к-та техн. наук. – М., 1989.
58. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С., Забегаев А.В. Расчет конструкций на динамические и специальные нагрузки. – М.: Высшая школа, 1992.
59. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С. Вопросы расчета и конструирования специальных сооружений. – М.: Стройиздат, 1974.
60. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968.
61. Тамразян А.Г. Реологическая модель деформирования бетона // Бетон и железобетон. – 1998. – № 1.
62. Gamytsky V. J., Golda Ju. L. & Avdeeva S.O. Structure seismic load capacity evaluation and determination of damage on a basis of dynamic design with regard to elastoplastic deformations of concrete and reinforcement. mat. ECEE 11 Conference. 1998.
63. I.E. Cartapati Dynamic response and maximum deflections of a beam subject to soft impact under various restraints conditions. Proceedings of the third European conference on structural dynamics: EURODYN' 96, Florance, Italy 1996.
64. W.B. Kratzig Seismic damage simulation: A low-cycle fatigue process. Structural Dynamics - EURODYN'96, Balkena, Rotterdam, 1996 vol. 1
65. J. Sercombe, F.-J. Ulm, F. Toutlemonde. Modeling of concrete in high rate dynamics. Structural Dynamics - EURODYN 96 Balkena, Rotterdam, Vol.1, 1996.
66. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчет несущих систем многоэтажных зданий и их **элементов**. – М.: Стройиздат, 1977. – 223 с.
67. Кодыш Э.Н., Мамин А.Н., Кобзарь К.В. Разработка дискретно-связевой модели для рсчетов плоских элементов зданий и сооружений // Транспортное строительство. – 2003. – № 11. – 6-8 с.
68. Верификационный отчет по программному комплексу MicroFe. – РААСР. – М., 2009. – 327 с.
69. Eurocode 2. Design of concrete structures-Part1-1 General rules and rules for building. EN 1992-1-1/ December 2004/-225p/

70. СНиП РК 5.03-34-2005 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения.
71. СНиП РК 5.03-37-2005 Несущие и ограждающие конструкции.
72. СНиП 2.01.07-85* Нагрузки и воздействия. Прогибы и перемещения. Дополнение. Раздел 10.
73. СНиП 2.09.03-85 Сооружения промышленных предприятий.
74. СТО 02494680-0045-2005 Прокат для строительных стальных конструкций. Марки стали
75. СТО 02494680, 01408401-0041-2004 Конструкции стальные строительные. Болтовые соединения. Проектирование и расчёт.
76. СТО 02494680-0046-2005 Конструкции стальные строительные. Соединения сварные. Общие требования при проектировании, изготовлении и монтаже.
77. СТО 02494680-0049-2005 Конструкции стальные строительные.
78. Железобетонные и каменные конструкции: Учебник для ВУЗов/ под ред. В.М. Бондаренко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2008. – 887с.
79. Железобетонные и каменные конструкции. В 2-х ч. Ч.1 Железобетонные конструкции: учебник для студентов учреждений высш. профес. образования /В.Г. Евстифеев. – М.: Изд. центр «Академия», 2011. – 432 с.
80. Райзер В.Д. Теория надежности в строительном проектировании: Моногр. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – 304 с.
81. Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. Вероятностные модели в строительном проектировании. – М.: Стройиздат, 1988. – 584 с.
82. Баклушев Е.В. Влияние гибкости и эксцентриситета приложения нагрузки на надежность внецентренно сжатых элементов // Бетон и железобетон, № 4. – М., 1992. – С. 16-20.
83. Дудина И.В., Жердева С.А., Зарубин Е.Ю. Программа по оценке напряженно-деформированного состояния однослойных стеновых панелей с учетом нелинейных свойств материалов (DIASTEN v.1.00). – М.: Роспатент, 2008.
84. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
85. Рудых О.Л. Введение в нелинейную строительную механику: Учеб. пособие / О.Л. Рудых, Г.П. Соколов, В.Л. Пахомов; под ред. О.Л. Рудых. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – 103 с.: ил.
86. Тамразян А.Г., Дудина И.В. Учет нелинейных свойств материалов при расчете конструкций со смешанным армированием // Бетон и железобетон. – 2003. – № 2. – С. 11-12.
87. G.V. Kovalenko, I.V. Dudina, E.V. Nester. Chance models and estimators of primary reability of constructions with mixed rein for cement/ // European Science and Technology: materials of the international research and practice conference, Vol. I. Wiesbaden, January 31st, 2012 / publishing office «Bild-

- ungszentrum Rodnike. V. ». – Wiesbaden, Germany, 2012. – 820 p. – С. 237-243.
88. Ермакова А.В. Основная разрешающая система линейных алгебраических уравнений метода дополнительных конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – Москва, 2010. – № 4. – 74-78 с.
89. Пятикрестовский К.П., Хунагов Х.С. Обоснование зависимостей между интенсивностями напряжений и деформаций для нелинейного расчета деревянных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2011. – № 1 (234). – С. 62-69.
90. Солдатов А.Ю. Анализ устойчивости железобетонных стержневых конструкций с учетом физической нелинейности // Строительная механика и расчет сооружений. – № 1 (240). – М., 2012. – С. 30-34.
91. Солдатов А.Ю., Лебедев В.Л., Семенов В.А. Анализ устойчивости строительных конструкций с учетом физической нелинейности методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2011. – № 6 (239). – С. 60-66.
92. Улитин В.В. Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций. – СПб.: ГИОРД, 2007. – 96 с.
93. Солдатов В.И., Хомяк В.П. Напряженно-деформированное состояние и прочность железобетонной колонны. // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2013. – №2 (247). – С. 11-17.
94. Ермакова А.В. Особенности нелинейного расчета железобетонных конструкций по предельным состояниям с помощью МДКЭ // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2013. – № 2 (250). – С. 65-70.
95. Шеин А.И. Расчет монолитных железобетонных каркасов с учетом последовательности возведения, физической нелинейности и ползучести бетона // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2012. – № 5 (244). – С. 64-69.
96. Ермакова А.В. Дополнительные нагрузки для нелинейного расчета железобетонных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2010. – № 6 (233). – С. 30-35.
97. Агапов В.П., Минаков С.А., Бардышева Ю.А. Учет физической и геометрической нелинейности в расчетах железобетонных плит и оболочек переменной толщины методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 2010. – № 5 (232). – С. 62-66.
98. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. – М.: Изд-во АСВ, 2004.
99. Симбиркин В.Н., Фросин А.В. Развитие и взаимодействие компонентов автоматизированной системы инженерного анализа Старкон для массового применения в строительстве // Строительная механика и расчет сооружений. – Москва, 2010. – № 5. – С. 67-72.

100. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. – М., 2000. – 152 с.
101. Смелов В.А. Метод перемещений в строительной механике: Учеб. пособие. – Л., 1976.
102. Метод конечных элементов в статике сооружений / Шмельтер Я., Дацко М., Добровичинский С. – М., 1986. – 220 с.
103. Вагер Б.Г. Численные методы и математическое моделирование в расчетах строительных конструкций. – Братск: Изд-во Братского ГУ, 2004. – 145с.
104. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. – СПб.: АСВ, 2005. – 425 с.
105. Лебедев А.В. Численные методы расчета строительных конструкций. – СПб.: Изд. СПбГАСУ, 2012. – 55 с.
106. Дьяков И.Ф. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 133 с.
107. Сливкер В.И. Строительная механика (Вариационные методы). – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 736 с.
108. Достанова С.Х., Бисмильдина З.А., Сайланбек Г. К выбору жестких и гибких моделей покрытий и перекрытий промышленных и транспортных сооружений: Сб. мат. Междунар. науч.-практ. конф. «Строительство, архитектура, дизайн: интеграционные процессы в современных условиях». – Т.1. – Алматы: КазГАСА, изд. дом «Строительство и архитектура», 2012. – 347-352 с.
109. Достанова С.Х., Тулегенова О., Сайланбек Г. Вариационный метод к расчету пологих оболочек с учетом физической нелинейности и ползучести бетона: Сб. мат. МНПК «Актуальные проблемы и перспективы развития строительных конструкций: инновации, модернизация и энергоэффективность в строительстве». – Т. 2. – Алматы: ТОО «Издательский дом Hit Print», 2013. – 78-84 с.
110. Достанова С.Х. Расчет тонкостенных элементов конструкций. – Алматы: КазГАСА, ТОО «Издательский дом Hit Print», 2013. – 167 с.
111. Достанова С.Х., Кулманов К.С. К статическому расчету жестких многослойных дорожных покрытий: Сб. мат. МНПК «Современные проблемы строительных конструкций и сооружений». – Алматы: КазГАСА, изд. дом «Строительство и архитектура», 2011. – Т. 1. – С. 74-77.
111. Достанова С.Х., Толганбаев А.Ж. О местной потере устойчивости пологих железобетонных оболочек покрытий: Сб. мат. Междунар. науч.-практ. конф. «Теоретические и экспериментальные исследования строительных конструкций», ноябрь 2010. – Т. 1. – Алматы: КазГАСА, 2010. – С. 136-138.
112. Достанова С.Х., Сыздыкова Д.К. Исследования напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня при различных статических воздействиях: Сб. мат. Междунар. науч.-практ. конф.

- «Теоретические и экспериментальные исследования строительных конструкций», ноябрь 2010. – Т. 2. – Алматы: КазГАСА, 2010. – С. 103-107.
113. Сапунов В.Т. Основы теории пластичности и ползучести. – М.: Изд-во МИФИ, 2010.
114. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 2008. – 400 с.
115. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2011. – 704 с.
116. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. – М.: Высшая школа, 2004. – 288с.
117. Горшков А.Г. и др. Теория упругости и пластичности. – М.: Физматлит, 2005. – 416 с.
118. Прикладная теория пластичности. – М.: Политехника, 2009. – 376 с.
119. Проблемы теории пластичности и геомеханики. – М.: Наука, 2006. – 391с.
120. Бондаренко В.М., Шагин А.Л. Расчет эффективных многокомпонентных конструкций. – М.: Стройиздат, 1987. – 175 с.

Учебно-методическое издание

Достанова Сауле Хажигумаровна

Касымова Гульсум Темирхановна

РАСЧЕТ ПЛИТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Численные методы в строительной механике»
к выполнению расчетно-графической работы для магистрантов,
бакалавров по специальности «Строительство»

Сводный план 2013-2014 уч. года, поз. № 3.

*Редактор **Есимханова А.Е.***

*Компьютерная верстка **Есимхановой А.Е.***

*Монтаж и печать **Төлеген Е.Т.***

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Riso.
Усл. печ. л. 8,7. Уч.-изд. л. 8,9. Тираж 30 экз.
Заказ №
Цена договорная.

Издание Казахской головной архитектурно-строительной академии
050043, г. Алматы, ул. Рыскулбекова, 28
Отпечатано в ТОО «Издательский дом «Hit Print»
050043, г. Алматы, ул. С. Торайгырова, 29
info@kazgasa.kz,
info@hitprint.kz, editor@hitprint.kz