

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

Е. Т. Божанов, А. Н. Дадаева, К. Д. Мурзасаимова

**ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІҢ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ**

Серпімділік теорияны физикалық процестерді
модельдеуге енгізу үлгілерінің қолданысы.

I бөлім

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2017

ӘОЖ 519.8(075)

ББК 22.311 я 73

Б 70

Пікір жазғандар:

Ғ. Ү. Уалиев, техн. ғыл. докторы, академик НАН РК;

С. Е. Кумеков, физ.-мат. ғыл. докторы, проф., ҚазҰЗТУ;

С. Т. Мухамеджанов, физ.-мат. ғыл. докторы, проф., ҚазҰУ;

О. С. Сатыбалдиев, физ.-мат. ғыл. канд., пед. ғыл. докторы, проф., ҚазҰЗТУ.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2017 жылғы басылым жоспары бойынша басылды.

Божанов Е.Т.

Б 70 Физикалық процестердің математикалық модельдері: Серпімділік теорияны физикалық процестерді модельдеуге енгізу үлгілерінің қолданысы. I бөлім. Оқу құралы / *Е. Т. Божанов, А. Н. Дадаева, К. Д. Мурзасаймова*. – Алматы: ҚазҰТЗУ, 2017. –106 б. Сурет –56. Кесте – 4. Библиогр. – 18 атау.
ISBN 978-601-323-085-6

Оқу құралы 3 бөлімнен тұрады. Табиғи-физикалық, физика-техникалық процестердің үлгілері зерттеліп түтікіше келген кристалды заттармен толтырылған конструкцияның иілуінің және беріктігінің математикалық модельдері қарастырылған. Біртекті тығыз орта механикасында жиі кездесетін төртінші ретті коэффициенттері: кесекөлденең қиманың қаттылығының өзгеру, бөлу күшінің және реактивті критикалық күшінің, ығыстыру және нормаль күштерінің коэффициенттеріне байланысты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің әртүрлі бағыттары есептелген. Олардың мәселелері, кесекөлденең қиманың Грин функциясындағы шеттік жағдайлары көрсетіліп, техникалық есептердің әдістемелері дербес шешімдерін табу кезінде қорытындалған. Графиктері тұрғызылып, негіздері физика-техникалық процестерге енгізілген.

Сонымен осы оқу-құралы жоғарғы оқу орындарының студенттері және магистранттарымен қатар жалпы ғылыми-техника өндіріс бөлімдерінің қызметкерлеріне де өте пайдалы.

ISBN 978-601-323-090-0 (жалпы)

ISBN 978-601-323-085-6 (I бөлім) © Божанов Е.Т., Дадаева А.Н.,

Мурзасаймова К.Д. 2017

© Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ, 2017

КІРІСПЕ

Серпімді біртұтас орта механикасының математикалық теориясын табиғи-физикалық, физика-техникалық және инновация технологиясына енгізу үшін ғылым, технология және техника сұраныстарын қарастыру керек. Ол үшін кейбір физиктер, механиктер және математиктер арасындағы туындап отырған мәселелерге көңіл бөлу керек сияқты [1]-[11].

Физиктер мен механиктер жазған кітаптарда, статьяларда және ғылыми жұмыстарда физиктер мен механиктерді, сонымен қатар, математиктерді бірінші кезекте толғандыратын әдетте біртұтас тығыз орта механикасындағы серпімділіктің математикалық теориялары курстарында баяндала бермейтін мәселелер болып табылады. Мысал ретінде динамикалық есептердегі ішкі қарсылық сұрақтары, поршень моделі сияқты қатты денелердің тұтқырлығы, деформациялық процестердегі геометриялық сызықты емес теорияға қатысты сұрақтар, тербелістер мен толқындарды айтуға болады. Сонымен бірге механикада төмендегідей айнымалы параметрлі түтікше конструкцияның математикалық моделінде қолданылатын айнымалы коэффициентті төртінші ретті дифференциалдық теңдеуді шешудің күрделі математикалық әдістері қаралады.

$$a_0(x) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + a_1(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + a_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_3(x) \frac{\partial W}{\partial x} + a_4(x) W = \\ = q_k f(x) \sin \omega_n x P(t),$$

мұндағы $P(t)$ — ішкі қарсылық, $\frac{d\varepsilon_n}{dt} \neq 0$ немесе

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + 2B \frac{d^3 W}{dx^3} - N_1 \frac{d^2 W}{dx^2} + \eta \frac{dW}{dx} + kW = q_k f(x) \sin \omega_n x,$$

мұндағы $D, 2B, N_1$ – тұрақты коэффициенттер, η, k – түтікшелі конструкция жүктемесі классификациясына тәуелді күштік факторлар коэффициенті.

Каралып отырған жұмыстағы негізгі мақсат стержендер жүйесінің тепе-теңдік теңдеулері, иілу моменттері, айналу моменттері, бөлу күштері, критикалық бойлау күштері, деформацияланған стержендер арқылы [12]-[14]:

– Материал құрамының өзгеру кезіндегі қалдық деформациясының – ε_n , төменгі формулаларын:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt} = F(\sigma, T, \varepsilon_n, \varepsilon_{nn}, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n),$$

$$\varphi(\varepsilon_n) = \sigma(\tau) + \int_0^\tau k(\tau - \tau^*) \sigma(\tau)$$

серпімді деформация процестері, кернеу өрісінің, термкернеулердің шоғырланып жылжуына әсері ретінде өрнектеу;

– Айнымалы параметрлі түтікше келген конструкциялардың беріктігін, иілуін және тербелісін бірінші ықшамдау арқылы математикалық модельдерін құрып, техникалық процестерге енгізу.

Көрсетілген мақсатқа байланысты алдымен серпімділік теориясының негізгі формулаларын сызықты және сызықты емес деформация кезінде көрсету.

Статикалық теңдеулер:

Дифференциалды тепе-теңдік шарты, тепе-теңдік Навье теңдеуі

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho x = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), x \rightarrow y \rightarrow z, z \rightarrow x,$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ik}^0 \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} + \sigma_{ik}^0 \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} - \ell_{jk} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} = \rho_j \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Беттегі шарт

$$\sigma_{vx} = \sigma_{xx} \cos(vx) + \sigma_{xy} \cos(vy) + \sigma_{xz} \cos(vz).$$

Геометриялық теңдеулер:

Жылжу мен деформация арасындағы байланыс (Коши теңдеуі)

$$\ell_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ell_{xy} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, 2\omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\varepsilon_{ij} = \ell_{ij} + \ell_{ki} + \ell_{ii}\ell_{ki} + \ell_{ij}\ell_{ki} + \ell_{ij}\ell_{kj} + \omega_i 2\omega_k.$$

Тығыздық-үзіліссіздік деформация теңдеуі (Сен-Венан теңдеуі)

$$1\text{-топ: } \frac{\partial^2 \ell_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ell_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \ell_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$2\text{-топ: } \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \ell_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \ell_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \ell_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \ell_{zz}}{\partial x \partial y}.$$

Физикалық теңдеулер: Жалпылама Гук заңы

$$\sigma_{xx} = f_1(\ell_{xx}, \ell_{yy}, \ell_{zz}, \ell_{yz}, \ell_{xz}, \ell_{xy}),$$

$$\ell_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})],$$

$$\ell_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}, G = \frac{E}{2(i+\nu)}, \theta = \frac{1-2\nu}{E}, \sigma_\nu = \frac{E}{2G} - 1,$$

$$\sigma_{xx} = a_{11}\ell_{xx} + a_{12}\ell_{yy} + a_{13}\ell_{zz} + a_{14}\ell_{yz} + a_{15}\ell_{zx} + a_{16}\ell_{xy},$$

$$\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\ell_{xx}, \sigma_{xy} = \mu\ell_{xy}, \sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz},$$

$$\sigma_{xy} = a_{11}\ell_{xy} + a_{12}\ell_{yz} + a_{13}\ell_{zx} + a_{14}\ell_{yx} + a_{15}\ell_{zy} + a_{16}\ell_{xz},$$

$$\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta, \theta = \ell_{xx} + \ell_{yy} + \ell_{zz},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(i+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(i+\nu)}, E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Жылжудағы беттегі шарттар

$$\sigma_{xv} = \lambda \theta \cos(vx) + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \cos(vz) \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \cos(vz).$$

Ламе теңдеулері

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 U + \rho x = 0 \quad (= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}), \quad \nabla^2 U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2},$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Егер $x = y = z = 0$, онда

$$\Delta^2 U + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad k = \lambda + \frac{2}{3} \mu.$$

Қисық сызықты координаттар жүйесіндегі Ламе теңдеулері және оның салдары

Тақырыптың мақсаты: М. А. Био және В. В. Новожиловтың геометриялық түзу сызықты емес теңдеуін Ламе коэффициенттері арқылы жазайық.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\lambda + \mu - \frac{r-q}{2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \\ + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\lambda + \mu - \frac{r-q}{2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Көлем күштерін есептемегендегі және сыртқы күштерді алмағандағы дербес жағдайы

$$(1 + \mu) \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \nabla^2 U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, (1 + \mu) \frac{\partial Q}{\partial y} + \mu \nabla^2 V = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ (1 + \mu) \frac{\partial Q}{\partial z} + \mu \nabla^2 W = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

$$\text{Мұндағы } \sigma_{xx}^0 = -p, \sigma_{yy}^0 = -q, \sigma_{zz}^0 = -r;$$

$$\nabla^2 = \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ -- “Набла” операторы;}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \text{ -- Лаплас теңдеуі;}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \text{ -- “Набла” векторы.}$$

Дербес жағдайлары

Егер $U(x, y, z, t) = V(x, y, z, t) = 0$ және $W = W(x, y, z, t) \neq 0$, онда (1) теңдеулер жүйесінен

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(\mu - \frac{p-2}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \left(\mu - \frac{p-2}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Кернеу мен ішкі күштер арасындағы мәселелерді көрсете кетейік.

Түтікше келген конструкциядағы нормаль күштері

$$\vec{N}_1 = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, \vec{N}_2 = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{yy} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz.$$

Ығыстыру күштері

$$\overrightarrow{T_{xy}} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{xy} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \overrightarrow{T_{yx}} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{yx} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz.$$

Бөлу күштері

$$\overrightarrow{Q_1} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{zx} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \overrightarrow{Q_2} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{zy} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz \text{ немесе}$$

$$\overrightarrow{Q_1} = N_1 + \ell_{xx}N_1 + \ell_{xy}N_2 + \psi_1 N_1 N_z + k_1 \ell_{xz} M_{xx} + k_2 \ell_{yz} M_{yx},$$

$$\overrightarrow{Q_2} = N_1 + \ell_{xx}N_1 + \ell_{xy}N_2 + \psi_1 N_1 N_z + k_1 \ell_{xz} M_{xx} + k_2 \ell_{yz} M_{yx}.$$

Іілу моменті

$$M_{xx} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz, M_{yy} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{yy} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) z dz.$$

Айналу моменті

$$M_{xy} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{xy} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) z dz, M_{yx} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{yx} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz,$$

$$N_z = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{zz} (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) dz,$$

$\delta A = \frac{\delta(dT)}{d\delta} = \sigma_{xx} \delta \ell_{xx} + \sigma_{yy} \delta \ell_{yy} + \sigma_{zz} \delta \ell_{zz} + \sigma_{yz} \delta \ell_{yz} + \sigma_{zx} \delta \ell_{zx} + \sigma_{xy} \delta \ell_{xy}$ – көлемі 1-ге тең денелердегі серпімділік күшінің жұмысы,

$$W = F(\ell_{xx}, \ell_{yy}, \ell_{zz}, \ell_{yz}, \ell_{zx}, \ell_{xy}) \text{ және } \delta W = \frac{\partial \omega}{\partial \ell_{xx}} \delta \ell_{xx} + \frac{\partial \omega}{\partial \ell_{yy}} \delta \ell_{yy} + \frac{\partial \omega}{\partial \ell_{zz}} \delta \ell_{zz} + \frac{\partial \omega}{\partial \ell_{yz}} \delta \ell_{yz} + \frac{\partial \omega}{\partial \ell_{zx}} \delta \ell_{zx} + \frac{\partial \omega}{\partial \ell_{xy}} \delta \ell_{xy}.$$

Серпімділік энергиясы және оның өсімшесі

$$2W = (\lambda + 2\mu)(\ell_{xx}^2 + \ell_{yy}^2 + \ell_{zz}^2) + 2\lambda(\ell_{xx}\ell_{yy} + \ell_{yy}\ell_{zz} + \ell_{zz}\ell_{xx}) + \mu(\ell_{yz}^2 + \ell_{zx}^2 + \ell_{xy}^2).$$

Серпімділік потенциал энергиясының деформациясы

$$2W = \frac{1}{E} [\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\sigma(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 2(1 + \sigma)(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2)].$$

Серпімділік потенциал энергиясының кернеуі

1-ескертпе. Алғашқы кернеу сыртқы күштердің әсерінсіз-ақ пайда болады.

А. И. Цейтлин, Н. Н. Давиденков, И. Л. Корчинский, Г. В. Муравский, Б. С. Расторгуев, А. Р. Рыжаницын, Б. Г. Корнев, И. М. Рабинович ізденістеріне сәйкес конструкциядағы динамикалық ішкі кедергіні есептеу әдістері

$$\varepsilon(t) = k\sigma(t), \varepsilon(t) = \bar{j} \left[B(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} k * (y - \tau) d(\tau) d\tau \right].$$

Мұндағы $\bar{j} = \frac{1}{E}$ – икемділік; $\bar{E}$ – серпімділік модулі; $k^*(t)$ – төсіле кесілу ядросы; $B(t) = \bar{j} [1 + \int_0^t \kappa^\vee(\tau) d\tau]$ – төсіле кесілу функциясы; $\Gamma^*(\tau)$ – релаксация ядросы; $G(t) = E \left[- \int_0^t \Gamma^\vee(\tau) d\tau + 1 \right]$ – релаксация функциясы; $j^*(\omega) = \int_0^\infty k(z) e^{-i\omega z} dz$, $j^*(\omega) = \bar{j} [1 + \int_0^\infty k(z) e^{-i\omega z} dz]$ – комплексті икемділік;

E – релаксация серпімділік модулі (ұзақ уақыттағы);

E_∞ – релаксациялық емес (аз уақыттағы) серпімділік модулі;

$$\nu_\varepsilon = \frac{\Delta E}{E_\infty} = \frac{E_\infty - E}{E_\infty} - \text{серпімділік модулінің ақауы};$$

$$R_0(\omega) = E'' \varepsilon_0 - \text{ішкі кедергі күші};$$

$$S_0(\omega) = E' \varepsilon_0 - \text{серпімді кернеу амплитудасы};$$

$$\gamma(\omega) = \frac{R_0(\omega)}{S_0(\omega)} - \text{шоғырлана жоғалту коэффициенті}.$$

Динамикалық процестердегі меншікті тербеліс

$$M \frac{d^2 W}{dt^2} + G \frac{dW}{dt} + kW(t) = 0.$$

Мұндағы M – энергия күшінің матрицасы;

k – қатаңдық матрицасы;

G – симметриялы матрицасы.

Мысалы, $M \frac{d^2 w}{dt^2} + (k' + ik \text{Sign} \omega) W = e^{i\omega z}$ көп массалы жүйенің теңдеуі.

Серпімді қабыршақтың геометриялық теңдеулері:
Декарт координаттар жүйесінде

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2,$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Цилиндрлік координаттар жүйесінде

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2,$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}.$$

Дербес жағдайдағы салдар ретінде

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{2 \partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial \omega}{2 \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

Беттегі шарттар

$$x_v = \sigma_r \cos \alpha + \sigma_{r\theta} \cos \beta + \sigma_{rz} \cos \gamma,$$

$$y_v = \sigma_{\theta r} \cos \alpha + \sigma_\theta \cos \beta + \sigma_{\theta z} \cos \gamma,$$

$$z_v = \sigma_{zr} \cos \alpha + \sigma_{r\theta} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma,$$

$$\alpha = (r, v), \quad \beta = (y, v), \quad \gamma = (z, v), \quad p_v = \{x_v, y_v, z_v\}.$$

P_v – сыртқы нормаль v аймақтағы толық кернеу.

Физикалық теңдеулер:

Ортотроптік денелердегі

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_{z\theta} \sigma_\theta + \nu_{rz} \sigma_z), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E_\theta} (-\nu_{\theta z} \sigma_r + \sigma_\theta - \nu_{\theta z} \sigma_z),$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_z} (-\nu_{zr} \sigma_r - \nu_{r\theta} \sigma_\theta + \sigma_z), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{G_{r\theta}}, \quad \varepsilon_{\theta r} = \frac{\sigma_{\theta z}}{G_{\theta z}}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{G_{rz}}.$$

Мұнда E_r, E_θ, E_z – серпімділік модулдері;
 $G_{r\theta}, G_{\theta z}, G_{rz}$ – ығысу модулдері;
 $\nu_{r\theta}, \nu_{rz}, \nu_{\theta r}, \nu_{\theta z}, \nu_{zr}, \nu_{z\theta}$ – Пуассон коэффициенттері.
 Изотроптік денелердегі дербес жағдайы

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2), N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_1),$$

$$T = T_{12} = T_{21} = G\gamma h, M_1 = D(\gamma\ell_1 + \nu\gamma\ell_2), M_2 = D(\gamma\ell_2 + \nu\gamma\ell_1),$$

$$M_1 = M_{12} = M_{21} = D(1-\nu)\lambda, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\gamma\ell_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{U}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \beta},$$

$$\gamma\ell_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \alpha},$$

$$X = \frac{1}{2} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A_2} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A_1} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right].$$

Ұсыныс модельдері

Егер активтік критикалық күшті $q_k = 10,7\lambda_k \sqrt{1-\nu^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{L} \right)$

деп алсақ, онда:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad (\text{Б-1 моделі})$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad (\text{Б-2 моделі})$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \eta \frac{dw}{dx} = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad (\text{Б-3 моделі})$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \eta \frac{dw}{dx} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad (\text{Б-4 моделі})$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad (\text{Б-5 моделі})$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - 2B \frac{d^3 w}{dx^3} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad (\text{Б-6 моделі})$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \eta_1 \frac{dw}{dx} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x. \\ (\text{Б-7 моделі})$$

Шеттік шарттар:

$$A) W(x)|_{x=0} = 0, \quad \frac{dw}{dx}|_{x=0} = 0; \quad (\text{екі жағы да жылжымалы}$$

орнықты)

$$B) W(x)|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2}|_{x=0} = 0; \quad (\text{екі жағы да шарнирмен}$$

бекітілген)

$$C) \frac{d^2 w}{dx^2}|_{x=0} = 0; \quad \frac{d^3 w}{dx^3}|_{x=0} = 0; \quad (\text{екі жағы да еркін (бос)}$$

бекітілген)

D) A), B), C) аралас шеттік шарттар.

Үру импульсі бойынша математикалық моделі:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad q_k = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k' \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{L} \right),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} = q_k \sin \omega_n x \quad \text{немесе}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) + 2B \frac{dw}{dx} \right] = q_k \sin \omega_n x.$$

Кесе-көлденең күш табанындағы жанау шарты:

$$E) \frac{dw}{dx}|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{q_k}{D}.$$

Мұндағы $\varepsilon(x)$ – кесе-көлденең қиманың қаттылығының өзгеру функциясы;

$\lambda_k = \left\{ \frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3} \right\}$ – кесе-көлденең қиманың пішінінің өзгеру коэффициенті;

$$Q = 2B \frac{d^3 w}{dx^3} - \text{бөлу күші};$$

$$\gamma = \frac{m\pi h}{L} - \text{бойлау толқын саны};$$

$N = N(\gamma, a, b)$, $Q = Q(\gamma, a, b)$ – келтірілген модельдері бойынша анизотроптік қасиет;

a – дисперсиялық қатынас; b – фаза жылдамдығы;

$\lambda_k' = \{1; 2/3; 1/3\}$ – сызқты емес деформациялық процесс.

1. ФИЗИКА-ТЕХНИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ХИМИЯ-ТЕХНОЛОГИЯЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІ ҮЛГІЛЕУДЕГІ НЕГІЗГІ МӘЛІМЕТТЕР

1.1. Біртұтас тығыз орта механикасындағы негізгі ұғымдар

Деформация мен жылжу туралы ұғымның негізгі сыртқы және ішкі күштері: механикалық күш, центрден тепкіш күш, инерция күші, екпін күші, ток күші, дыбыс күші, қопару күші, кесе-көлденең бірқалыпты емес күш, ұзындық бойынша критикалық күш, жанама, бұрыштама, тангенциялды күш, бөлу күші, көлем күші, активтік күш, реактивтік күш.

Сыртқы импульстер туралы ұғым: импульс, күш импульсі, толқын импульсі, күн, оптика жарығының импульсі, нерв импульсі, импульстік технология екпін моменті.

Қысым туралы ұғым: физикалық қысым, жарық қысымы, механикалық қысым, дыбыс қысымы.

Механика – материалдық денелердің механикалық қозғалысын және өзара әсерлесуін зерттейтін ғылым.

Механикалық қозғалыс – денелердің немесе олардың бөлшектерінің уақыттың өтуіне байланысты кеңістіктегі орындарының өзгеруі.

1-ескерту. Механика үш бөліктен тұрады: Статика, кинематика және динамика.

2-ескерту. Теориялық механика, қолданбалы механика, біртұтас тығыз орта механикасы, өндірістік механикалар, т.с.с.

Статика – шексіз аз қимадағы нүктенің тепе-теңдік теңдеуінің заңдылығын қарастырады. Қатты дене статикасы және материалдық жүйе статикасы (сұйық, газ, т.б денелер).

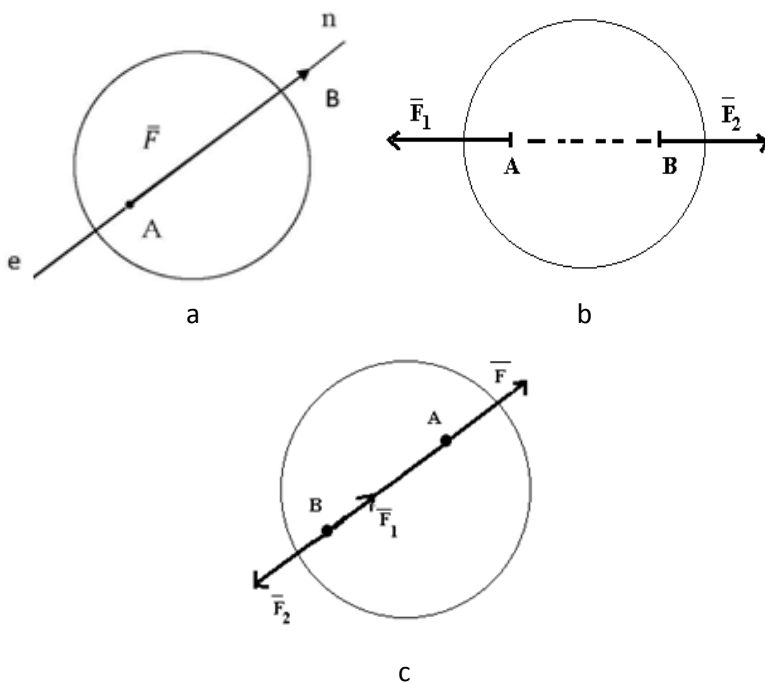
Кинематика – механикалық қозғалыс кезіндегі дененің таза геометриялық пішінін қарастырады.

Динамика – физикалық факторларға байланысты, оларды туғызатын шарттар мен салдардың жағдайына қарасты қозғалысты қарайды.

Біртұтас тығыз механикасы мен теориялық механиканың негізгі аксиомалары

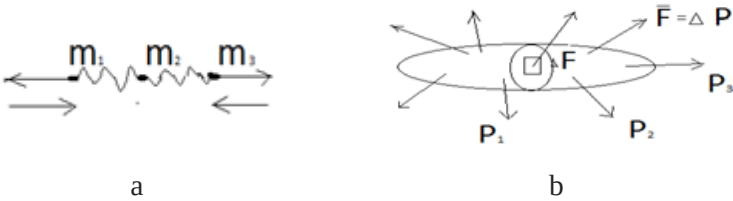
1-аксиома. (Екпін күшінің инерциясы немесе бірінші Ньютон заңы) Егер сыртқы қандай да бір күш денені тепе-теңдігінен шығарып жібермесе, дене өзінің тепе-теңдігін немесе бірқалыпты қасиетін сақтауға тырысады.

3-ескерту. Егер сыртқы бір күш денені тепе-теңдігінен шығарып жіберсе, онда бірнеше тепе-теңдік жағдайы болуы мүмкін.



1-сурет

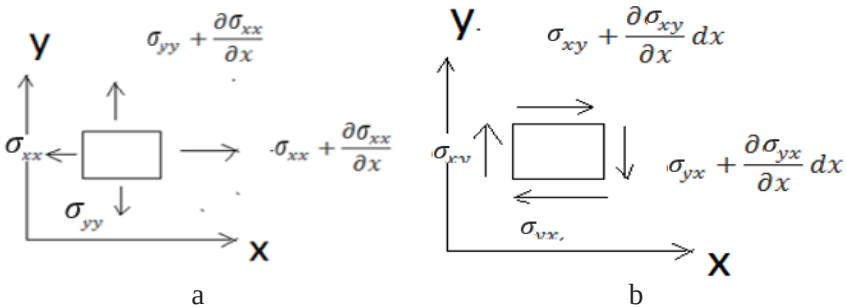
2-аксиома. Егер дененің бөлігі (шексіз аз қимадағы) екінші бөлігіне белгілі бір күшпен әсер етсе, онда екінші бөлігі сондай күшпен кері әсер етеді.



2-сурет

3-аксиома. Дененің шексіз аз элементі екі кернеудің әсерінен тепе-теңдік жағдайда болу үшін параллель жазықтықта қарама-қарсы бағытта нүктеде тұрғызылуы керек.

$$\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx.$$



3-сурет

4-ескерту. Кернеу $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{S}$.

Кернеу – $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{S}$ Паскальмен өлшенеді, $1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

$1 \text{ Н} = 102 \text{ см}^3$ – таза су салмағына тең.

$10^{12} \text{ Н} - \text{т(тера)}$ $10^9 \text{ Н} - \text{Г(гига)}$ $10^6 \text{ Н} - \text{м(мега)}$;

$10^3 \text{ Н} - \text{к(кило)}$ $10^2 \text{ Н} - \text{г(гекто)}$ $10 \text{ Н} - \text{д(деки)}$;

$10^{-1} \text{ Н} - \text{д(деци)}$ $10^{-2} \text{ Н} - \text{С(сант)}$ $10^{-3} \text{ Н} - \text{м(мили)}$;

$10^{-6} \text{ Н} - \text{м(микро)}$ $10^{-9} \text{ Н} - \text{н(нано)}$ $10^{-12} \text{ Н} - \text{П(пико)}$.

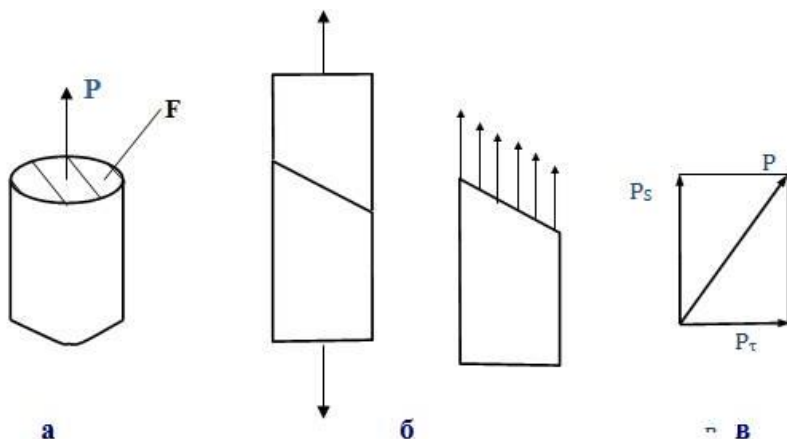
Көптеген механикалық қасиеттер кернеу шамасы арқылы сипатталады. «Кернеу» түсінігі жүк түсіру шамасын бағалау үшін енгізілген, ол деформацияланатын дене өлшемдеріне тәуелсіз. Сөйтіп, кернеу салыстырмалы шама болып табылады және мына қатынаспен анықталады:

$$\sigma = \frac{P}{S}.$$

мұндағы σ – S ауданындағы кернеу, ол үлгі осіне перпендикуляр және оның бойымен P күшіне әсер етеді (4,а-сурет).

Дененің кез-келген қимасындағы кернеу шамасын анықтау үшін соңғысын екіге бөледі, содан соң дененің бір бөлігін ойша алып тастайды да оның қалған бөлікке әсерін ішкі күштермен алмастырады (4,б-сурет).

СИ жүйесінде кернеу әрбір квадрат метрдегі ньютонмен беріледі (Н/м^2 , МН/м^2). Практика жүзінде көбінесе кернеудің өлшемділігін қолданады ($1\text{кгс/мм}^2=9,8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$). Жалпы жағдайда күш әсер ететін жазықтық ауданына перпендикуляр емес. Сонда оны екі құрауға жіктеуге болады: қалыпты кернеу тудырушы нормаль (ауданға перпендикуляр) және жанама аудан жазықтығында әсер ететін және жанама кернеу тудырушы жанама (4,в-сурет).



4-сурет. Кернеуді анықтау сызбасы

Механикалық сынақтарда осы кернеулерді анықтайды. Кернеулерді беріктікке есептеу кезінде де пайдаланады. Деформация және қирау кезіндегі біраз процестер жанама кернеумен (пластикалық деформация, кесу), басқалары – нормаль кернеумен (үзілу) анықталады.

Нормаль кернеулер созушы (қалыпты) және сығушы (теріс) деп бөлінеді.

Нақты тапсырмаларды шешу кезінде дененің кез-келген кимасында әсер ететін кернеуді бағалауға мүмкіндік болу керек. Ол үшін кернеу тензоры деген түсінік пайдаланылады.

Дененің үш агрегатты жағдайы

Заттың агрегаттық күйі деп бір заттың әртүрлі күйін айтады. Заттың бір күйден басқа бір күйге ауысуы оның еркін энергиясының, энтропиясының, тығыздығының, т.б. физикалық қасиеттерінің секірмелі өзгеруімен қатар жүреді. Барлық зат (кейбір заттан басқасы) үш түрлі – қатты, сұйық және газ тәрізді агрегаттық күйде болады. Мысалы, су $p=101\ 325\ \text{Па}=760\ \text{мм}$ сын. бағ. қалыпты қысымда және $T=0^\circ\text{C}$ температурада мұзға, $T=100^\circ\text{C}$ температурада қайнап, бұға айналады. Плазма заттың төртінші агрегаттық күйі болып есептелінеді. Заттың агрегаттық күйі T температура мен P қысымға тәуелді. Заттың агрегаттық күйін анықтайтын негізгі шама молекулалардың өзара әсерінің орташа потенциалдық энергиясының олардың орташа кинетикалық энергиясына қатынасы болады. Заттың бір агрегаттық күйден екінші агрегаттық күйге көшуі оның потенциалдық энергиясының секірмелі өзгеруімен қатар жүреді және молекула аралық қашықтық пен молекула аралық өзара әсерге тәуелді болады. Газдарда молекула аралық қашықтық молекулалардың сызықтық өлшемінен әлде қайда үлкен болады. Сондықтан газда молекулалар бір-бірімен өзара әсерлеспейді деуге болады, олар еркін қозғала отырып, бүкіл көлемді толтырады. Кез келген газды белгілі бір қысым мен температурада сұйықтыққа, одан кейін қатты күйге келтіруге болады. Сұйықтықтар мен қатты денелерде молекулалар едәуір дәрежеде бір-біріне жақын орналасады да, олардың бір-бірімен әсерлесуі күштірек болып келеді. Сол себептен сұйықтықтар

мен қатты денелер өз көлемдерін сақтайды. Дегенмен, қатты денелер мен сұйықтықтардағы молекулалар қозғалысының сипаттамасы олардың әрқайсысында әртүрлі болады. Олардың құрылымы мен қасиеттерінің бір-бірінен өзгешелігі осы жағдаймен түсіндіріледі. Кристалл күйдегі қатты дене атомдары кристалдық тор түйіндерінің маңында әлсіз тербеліс жасайды.

Мұндай денелердің құрылымы атомдардың реттелгендік дәрежесінің жоғарылығымен сипатталады. Сұйықтық молекулаларының жылулық қозғалысы молекулалардың тепе-теңдік қалып маңындағы әлсіз тербелістері мен олардың бір тепе-теңдік қалыптан басқа бір тепе-теңдік қалыпқа секіrmелі түрде жиі ауысып тұруынан құралады. Сұйықтық бөлшектерінің тепе-теңдік қалыпқа ауысуы олардың орналасуында тек жақын реттіліктің болатындығын және оларға қозғалғыштық пен аққыштық қасиеттер тән екендігін көрсетеді. Ал, плазманың басқа агрегаттық күйлерден айырмашылығы оның зарядталған бөлшектер газынан тұратындығы болады. Плазмада бөлшектер бір-бірімен үлкен қашықтықта әсерлесе береді. Бұл жағдай плазманың өзінің кейбір қасиеттерін көрсетеді.

Құрылымы жағынан көбірек реттелген заттың агрегаттық күйінің оған қарағанда азырақ реттелген күйге ауысуы белгілі бір температура мен қысымда секіrmелі түрде, сондай-ақ, үздіксіз де жүруі мүмкін. Сондықтан, үздіксіз ауысу мүмкіндігі заттың агрегаттық күйінің әр түрге бөлінуінің шарты екендігін көрсетеді. Бұл жағдай сұйықтық құрылымын сақтайтын аморфты денелердің, кейбір заттарда бірнеше кристалдық күйлердің, сұйық кристалдардың, т.б. болуы мүмкіндігін көрсетеді. Осыған байланысты қазіргі физикада заттың агрегаттық күйі ұғымының орнына одан кеңірек болатын – фаза ұғымы қолданылады.

Қатты дене құрылысы жағынан екіге бөлінеді: *кристалды* және *аморфты*. Кристалды денелерді атом, йон, молекулалар құрайды, ал аморфтік денелер жақын ретпен тартылған болуы мүмкін. Химиялық байланыстар арқылы: коваленттік, йондық, металдық, сутектік қосынды болады.

5-ескерту. Екі атом арақашықтығы A акестреммен (A) өлшенеді. Ішкі күштердің әсеріне байланысты атомдар бір-бірінен $(1/2)A$ қашықтықта болады.

Кернеуді табу үшін, денені ойша кез келген жазықтықтар арқылы шексіз аз бөлшекке бөлу және шексіз аз көлемді қарастыру математикалық қима әдісі деп аталады.

Дененің өзінің тыныштық немесе бірқалыпты қозғалыс жағдайын сақтау қасиетін *инерция (екпін)* деп атайды.

Берілген заттың құрамын қиратпайтын кернеу деңгейін – *беріктігі* дейді. (Мысалы: дiңгек, қабыршақ, табақша, ракета, тунел, мата, аяқ киім, адамдардың арақатынасы, сана-сезім, және т.б)

Дененің қозғалыстағы беріктілігін, яғни бір тепе-теңдік жағдайына өткендегі құрамын қиратпайтын кернеу деңгейін – *тұрақтылығы* дейміз.

Берілген мүмкіндік ережесінен шықпайтын кернеу деңгейін, оның өлшемін, көлемін және пішінін өзгерткендегі, *заттың қаттылығы* дейміз.

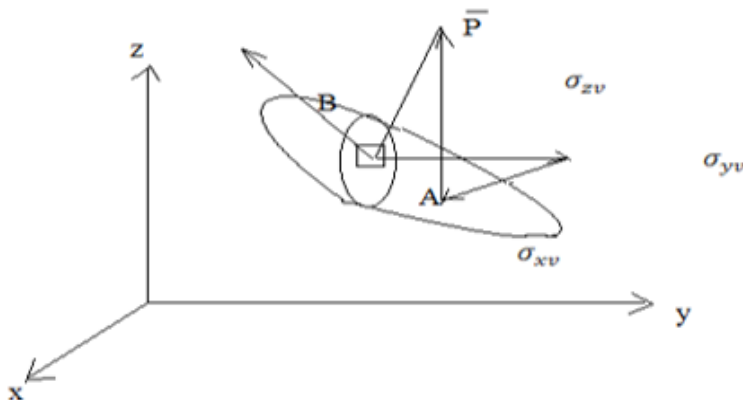


Заттың тұрт агрегаттық күйі. Сағат тілінің бағытымен сол жақ үстінен бастап: қатты, сұйық, плазма және газ суретте сәйкесінше мұздан жасалған мүсін, тамшы, Тесла катушкасындағы электр иіні және ауадағы бұлттармен көрсетілген.

5-сурет

Дененің кернеулік (заттық) жағдайы

Мақсаты: Сыртқы нормалы v болатын дене берілген. Оны кез келген m -беттер арқылы n -бөлікке бөлеміз де шексіз аз элементарлық аймақ қарастырамыз. Сыртқы нормалы v -нормалымен пара пар болатын V -бөлігін алып тастаймыз.



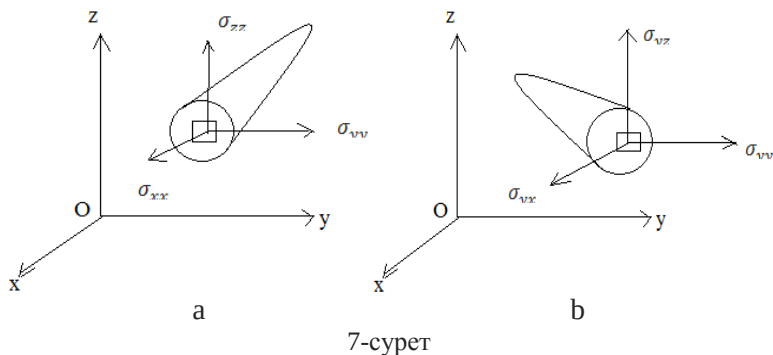
6-сурет

$$\sigma_v = \sigma_{vx}\vec{i} + \sigma_{vy}\vec{j} + \sigma_{vz}\vec{k}. \quad (1.1)$$

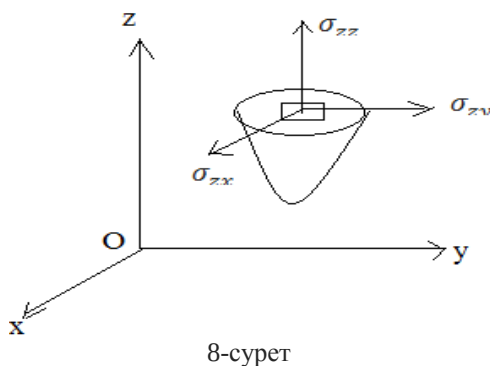
Сонда dF – элементарлық аймаққа түсетін кернеу, σ_v – нүктедегі толық кернеу болады, ал σ_{vx} – OX осіндегі, σ_{vy} – OY осіндегі, σ_{vz} – OZ осіндегі оның проекциялары болады.

Егер берілген денені OX , OY , OZ осьтеріне перпендикуляр жазықтықтармен қисақ, сонда толық кернеу проекциялары қандай болады.

Шешуі: OX осіне перпендикуляр болатын қиманы қарастырайық. Бұл жағдайда σ_{vx} , σ_{vy} , σ_{vz} – кернеудің координат осьтеріндегі проекциялары:



OY осіне перпендикуляр болатын қиманы алайық, бұл жағдайда 7b-сурет σ_{yy} , σ_{yx} , σ_{yz} – координат жүйесіндегі кернеудің проекциялары.



OZ осіне перпендикуляр қиманы қарастырайық, бұл жағдайда 8-сурет. σ_{zz} , σ_{zx} , σ_{zy} – кернеудің координат жүйесіндегі проекциялары.

Толық кернеудің σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} – проекциялары *нормальдық кернеулер* деп аталады.

Толық кернеудің σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zx} , σ_{zy} – проекциялары кернеудің *жанама кернеулері* деп аталады.

Толық кернеудің x, y, z координаттар жүйесіндегі проекциялары

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

(1.2) – кернеу тензоры немесе дененің нүктедегі кернеулік жағдайы деп аталады.

6-ескерту. Дененің нүктедегі кернеулік жағдайы 9 кернеу проекцияларымен айқындалады. Кейбір жағдайда толық кернеудің мына жанама проекциялары өзара тең болады:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{vx} = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}, \\ \sigma_{vy} &= \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k}, \sigma_{vz} = \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Кернеу ықпалында болатын кез келген дене ішінде, қашанда қабырғалары координата осьтеріне қатысты таңдалып алынған шексіз аз өлшемді параллелепипед бөліп алуға болады. Жалпы жағдайда оның параллель емес үш қырына нормаль және жанама деп бөлуге болатын өзара теңестірілген кернеулер векторы әсер етеді. Нәтижесінде параллелепипед тоғыз кернеудің – $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ үш нормаль және $(\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx})$ алты жанама кернеудің ықпалында болады. Осы кернеулер жиынтығы кернеу тензоры деп аталады, олар мынандай түрде жазылады:

$$(S) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Таңдалып алынған параллелепипед тепе-теңдікте болуы және айналмауы үшін координаттық осьтерге қатысты моменттер тепе-теңдігі қажет. Сондықтан

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ (жанама кернеулердің жұпталу заңы). Осыдан, кернеу тензорында негізінде тоғыз емес, алты тәуелсіз кернеу болатынын көруге болады. Олардың көмегімен кез-келген күрделі кернеулі күйді сипаттауға болады. Тензор дененің берілген нүктесі арқылы өтетін таңдалып алынған оське қатысты бағыттаушы косинустар (аудан арасындағы бұрыш

косинусы және оған сәйкес координата осі) белгілі болса, кез-келген аудандағы нормаль және жанама кернеулер шамасын анықтауға мүмкіндік береді.

Басты аудандарға тек нормаль кернеулер ықпал ететін аудандар жатқызылады, жанама кернеулер нөлге тең.

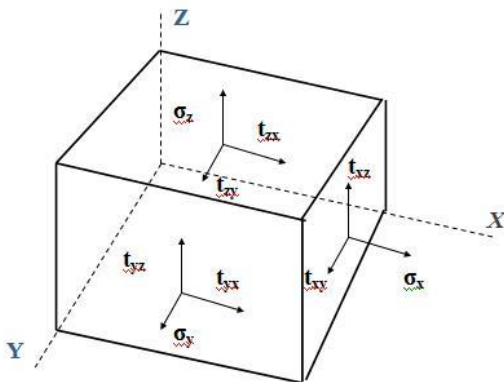
Әдетте механикалық сынақтар кезінде кернеудің басты бағыттарын алдын-ала белгілі және оларды координаталық осьтер ретінде қабылдауға болады. Сонда кернеу тензоры қарапайым күйге келеді және мынадай болады:

$$(S) = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Мұндағы σ_1 , σ_2 , σ_3 – сәйкесінше ең жоғарғы, орташа және ең төменгі басты нормаль кернеулері.

Кез-келген кернеулі күйге ең жоғарғы жанама кернеу $t_{\max}$ басты оське 45° -та орналасқан ауданда әсер етеді, ал олардың шамасы басты нормаль кернеулердің сәйкес жарты айырымына тең:

$$\tau_{\max} = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2}. \quad (1.6)$$



9-сурет. Параллелепипед қырларына әсер ететін өзара теңестірілген кернеулер

В-1 моделіне сүйене отырып екінші жүктемеге байланысты серпімді конструкцияның иілуінің және майысуының моделін жасаса, онда қойылған математикалық модель есептерінің шарттарына байланысты төмендегі шешімдер алынады:

$$1-ecen. W(x) = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{1}{\omega^4} \sin \omega x + \frac{\sin \omega L}{6L\omega^2} x^3 - \frac{(6+\omega^2 L) \sin \omega L}{6L\omega^4} x \right]; \quad (1.7)$$

$$2-ecen. W(x) = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{\sin \omega x}{\omega^4} + 2 \left(\frac{\sin \omega L}{h^3 \omega} - \frac{\cos \omega L}{2L^2} - \frac{1}{L^2} \right) x^3 + 6 \left(\frac{1}{L\omega^3} - \frac{\sin \omega L}{\omega^4 L^2} + \frac{\cos \omega L}{3\omega^3 L^3} \right) x^2 - \frac{1}{\omega^3} x \right]; \quad (1.8)$$

$$3-ecen. W(x) = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{\sin \omega x}{\omega^4} + \frac{1}{6\omega} x^3 - \left(\frac{\cos \omega L}{\omega^3} + \frac{L^2}{2\omega} \right) x + \frac{L \cos \omega L}{\omega^3} + \frac{\sin \omega L}{\omega^4} x^2 + \frac{L^3}{3\omega} \right]; \quad (1.9)$$

$$4-ecen. W(x) = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{\sin \omega x}{\omega^4} + \left(\frac{1}{L^2 \omega^3} - \frac{\sin \omega L}{L^3 \omega^4} \right) x^3 - \frac{L}{\omega^3} \right]; \quad (1.10)$$

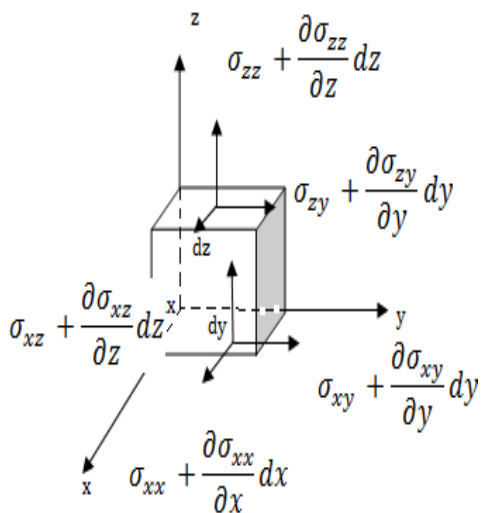
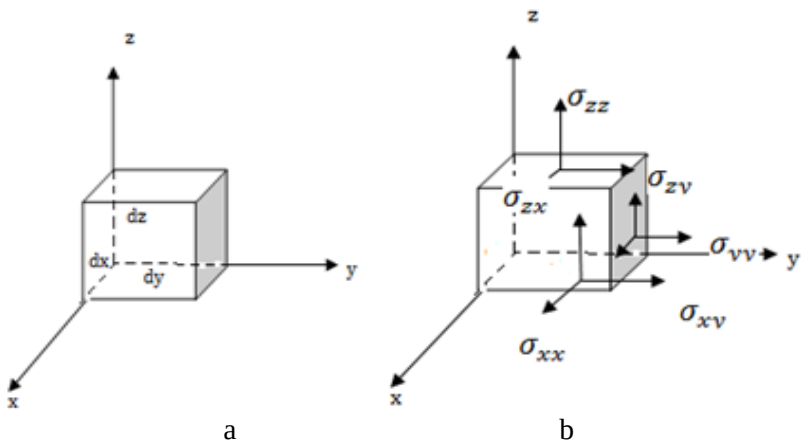
$$5-ecen. W(x) = \lambda_k \frac{q_k}{D} \left[\frac{\sin \omega x}{\omega^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2 \omega^3} - \frac{(2+L^2 \omega^2) \sin \omega L}{2L^3 \omega^4} \right) x^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{L^2 \omega^3} \left(6 + \frac{L^2 \omega^2 \sin \omega L}{6\omega^4 L^2} \right) x^2 - \frac{x}{\omega^3} \right) \right]. \quad (1.11)$$

1.2. Тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеулері, техникалық процестерді үлгілеудегі негізгі мәліметтер

Тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеуі

Максаты: Қатты денеден параллелепипед түріндегі шексіз аз элемент қиып аламыз. Қабырғалары координат осьтеріне параллель, алты қабырғадан тұрады.

Қабырға ұзындығы dx, dy, dz , ал көлемі $\Delta V = dx dy dz$. Әр қабырғасындағы кернеу проекцияларын орнатайық (10 б, с-суреттер).



с
10-сурет

1-ескерту. 10-суреттегі нормаль және жанама кернеулер қарама-қарсы параллель қабырғада шексіз аз өсімше ретінде былай жазуға болады.

Егер $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z)$, $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y, z)$, $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, y, z)$

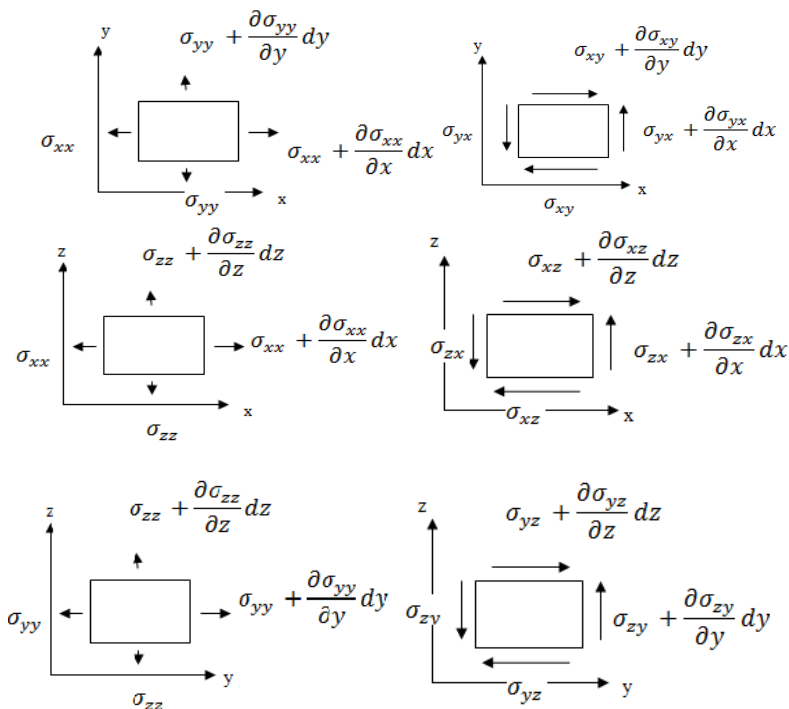
$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y, z), \sigma_{xz} = \sigma_{xz}(x, y, z), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}(x, y, z)$, онда (1.12)

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz, d\sigma_{yy} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dz,$$

$$d\sigma_{zz} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz. \quad (1.13)$$

Қалған формулалар (1.12)-(1.13) формуладан циклдік алмасу арқылы $\overline{xuz}$ алынады.

10-суреттерді ашып жазсақ,



11-сурет

2-ескерту. Егер параллелипипедтің массасына келетін көлем күші $F = \rho dv$ (2) (ρ – тығыздық коэффициенті) болса, онда көлем күшінің проекциялары $X\rho dv = X\rho dx dy dz$, $Y\rho dv = Y\rho dx dy dz$, $Z\rho dv = Z\rho dx dy dz$,

$$\vec{F} = \vec{F}(X, Y, Z). \quad (1.14)$$

Дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуін құру керек.

Шешуі: Берілген дене тепе-теңдігі мына жағдайдан тұрады:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0,$$

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0. \quad (1.15)$$

Ішкі және сыртқы күштерді OX осіне қойсақ:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \\ & - \sigma_{xy} dx dz + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{xz} dx dy + \\ & + X\rho dx dy dz = 0 \left(-\rho dx dy dz \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Циклдік алмастыру арқылы қалған екі теңдеуді аламыз $\overrightarrow{xyz}$, $\overrightarrow{UVW}$, яғни

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right), \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho Y = \\ & = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right), \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho Z = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

(1.17) – дифференциалдық теңдеулер жүйесі классикалық тұрғыдағы дененің тепе-теңдігінің нүктедегі дифференциалдық теңдеуі деп аталады.

3-ескерту. Егер жазықтықта қарасақ, онда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho x = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right), \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho y = \\ & = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

4-ескерту. Егер біз дененің тепе-теңдігінің дифференциалдық теңдеуін $x''y''z''$ немесе $x'y'z'$ координаттар жүйесінде жазсақ, онда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + l_{xx})\sigma_{xx} + \left(\frac{1}{2}l_{xy} - \omega_z\right)\sigma_{xy} + \left(\frac{1}{2}l_{xz} + \omega_y\right)\sigma_{xz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + l_{yy})\sigma_{yy} + \left(\frac{1}{2}l_{xy} - \omega_z\right)\sigma_{yx} + \left(\frac{1}{2}l_{xz} + \omega_y\right)\sigma_{yz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + l_{zz})\sigma_{zz} + \left(\frac{1}{2}l_{xy} - \omega_z\right)\sigma_{zy} + \left(\frac{1}{2}l_{xz} + \omega_y\right)\sigma_{zx} \right] + F_\xi = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

мұндағы l_{xx} – деформация тангенсі

5-ескерту. Егер жазықтықта (1.19) теңдеуін қарастырсақ,

$$\begin{aligned} 6\text{-есеп. } \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \omega'_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \omega'_z}{\partial y} = 0, \\ \sigma'_{xy} + Pl_{xy} = 0, \sigma'_{yy} = 0; y = \pm h/2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

М.А. Био теориясы бойынша.

$$\begin{aligned} 7\text{-есеп. } \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \omega'_z}{\partial y} = 0, \\ \sigma'_{xy} = 0, \sigma'_{yy} = 0, y = \pm h/2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

В. В. Новожилов теориясы бойынша.

$$\begin{aligned} 8\text{-есеп. } \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \\ \sigma'_{xy} = 0, \sigma'_{yy} = 0, y = \pm h/2 \end{aligned} \quad (1.22)$$

А. Н. Гузь теориясы бойынша.

$$\begin{aligned} 9\text{-есеп. } \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \\ \sigma'_{xy} = 0, \sigma'_{yy} = 0, y = \pm h/2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

В. В. Новожилов теориясы бойынша екінші ықшамдау.

$$10\text{-есеп. } \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} = 0,$$

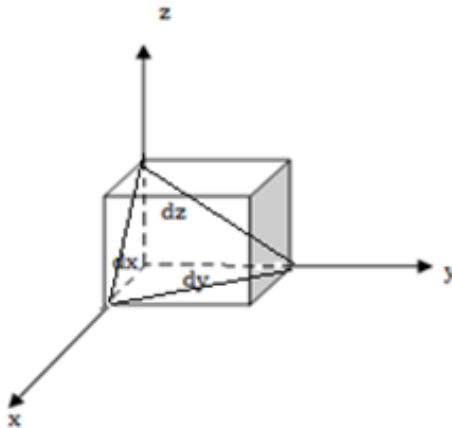
$$\sigma'_{xy} = -\rho \frac{\partial v'}{\partial x}, \sigma'_{yy} = 0, y = \pm h/2 \quad (1.24)$$

А. Ю. Ишлинский теориясы бойынша.

V бағытына перпендикуляр беттегі кернеу жағдайлары. Бас кернеу беті және бас кернеулер

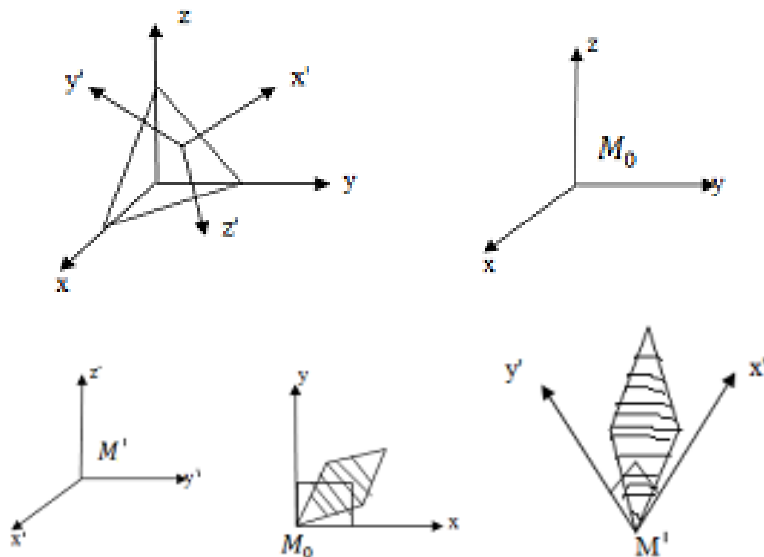
Мақсаты: Қатты денеден параллелепипед түрдегі шексіз аз элемент қиып аламыз. Оның қабырғалары координат осьтеріне параллель алты қабырғадан тұрады (12-сурет).

6-ескерту. xuz координаттар жүйесінен $x'y'z'$ координаттар жүйесіне көшкенде А-матрицасы арқылы векторды өрнектеу әдісін қолданамыз. Меншікті сан және меншікті векторлар арқылы $\vec{M}'x, \vec{M}'y, \vec{M}'z$ векторларының перпендикулярлығын қамтамасыз етеміз.



12-сурет

Енді сыртқы V бағытына перпендикуляр төртінші жазықтықпен қиямыз.



13-сурет

1.1-кесте

	X	Y	Z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Мұндағы $l = \cos(v \wedge x)$, $m = \cos(v \wedge y)$, $n = \cos(v \wedge z)$,
 $v = v(l, m, n)$.

$$\sigma_v = \sigma_{vx}\vec{i} + \sigma_{vy}\vec{j} + \sigma_{vz}\vec{k}, \sigma_{vx} = \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n, \\ \sigma_{vy} = \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n, \sigma_{vz} = \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n. \quad (1.25)$$

$$\sigma_v(\sigma_{vx}, \sigma_{vy}, \sigma_{vz}) = A \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = A\vec{v}, \quad (1.26)$$

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y'x} &= \sigma_{xx}l_2 + \sigma_{xy}m_2 + \sigma_{xz}n_2, \sigma_{yy'} = \sigma_{yx}l_2 + \sigma_{yy}m_2 + \sigma_{yz}n_2, \\ \sigma_{y'z} &= \sigma_{zx}l_2 + \sigma_{zy}m_2 + \sigma_{zz}n_2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ары қарай (1.28) теңдеулер жүйесін l_2, m_2, n_2 – бағыттауыш косинустарына көбейтіп, өзара қоссақ:

$$\sigma_{x'} = A \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = AX'(3a), \sigma_{z'} = A \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = AZ'. \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y'y'} &= \sigma_{y'x}l_2 + \sigma_{y'y}m_2 + \sigma_{y'z}n_2 = \sigma_{xx}l_2^2 + \sigma_{yy}m_2^2 + \sigma_{zz}n_2^2 + \\ &+ 2\sigma_{yz}m_2n_2 + 2\sigma_{zx}n_2l_2 + 2\sigma_{xy}l_2m_2, \sigma_{y'y'} = (Ay'), \sigma_{x'x'} = \\ &= (Ax'), \sigma_{z'z'} = (Az'). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Сол сияқты жанама кернеулерді (x', y', z') координаттар жүйесінде жазамыз:

$$\begin{aligned} \sigma_{y'x'} &= \sigma_{y'x}l_1 + \sigma_{y'y}m_1 + \sigma_{y'z}n_1 = \sigma_{xx}l_1l_2 + \sigma_{yy}m_1m_2 + \\ &+ \sigma_{zz}n_1n_2 + \sigma_{yz}(m_1n_2 + m_2n_1) + \sigma_{zx}(n_2l_1 + n_1l_2) + \\ &+ \sigma_{xy}(l_1m_2 + l_2m_1), \sigma_{y'x'} = (Ay')X'(5a), \sigma_{y'z'} = (Ay')Z'. \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y'z'} &= \sigma_{y'x}l_3 + \sigma_{y'y}m_3 + \sigma_{y'z}n_3 = \sigma_{xx}l_2l_3 + \sigma_{yy}m_2m_3 + \\ &+ \sigma_{zz}n_2n_3 + \sigma_{yz}(m_3n_2 + m_2n_3) + \sigma_{zx}(n_3l_2 + n_2l_3) + \\ &+ \sigma_{xy}(l_3m_2 + l_2m_3). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Егер $\overrightarrow{xyz}, \overrightarrow{x'y'z'}, \overrightarrow{123}$ циклді алмастырсақ, мысалы:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx}l_1^2 + \sigma_{yy}m_1^2 + \sigma_{zz}n_1^2 + 2\sigma_{yz}m_1n_1 + 2\sigma_{zx}n_1l_1 + \\ &+ 2\sigma_{xy}l_1m_1, \end{aligned}$$

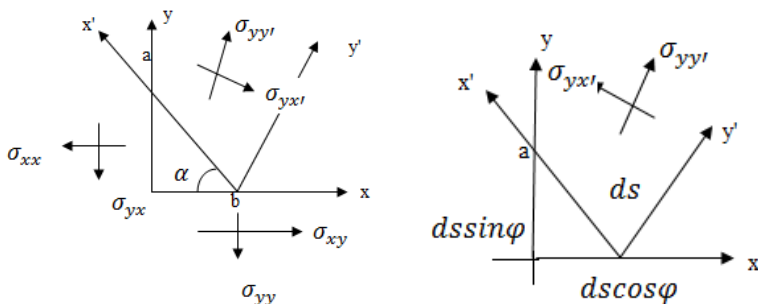
$$\sigma_{x'ix'} = (Ax')x', \quad (1.33)$$

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_{x'ix'} & \sigma_{x'iy'} & \sigma_{x'iz'} \\ \sigma_{y'ix'} & \sigma_{y'iy'} & \sigma_{y'iz'} \\ \sigma_{z'ix'} & \sigma_{z'iy'} & \sigma_{z'iz'} \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

$x'y'z'$ – координат жүйесіндегі кернеу тензоры деп аталады.

$\sigma_{x'ix'}, \sigma_{x'iy'}, \sigma_{x'iz'}, \sigma_{y'ix'}, \sigma_{y'iy'}, \sigma_{y'iz'}, \sigma_{z'ix'}, \sigma_{z'iy'}, \sigma_{z'iz'}$ – $x'y'z'$ координаттар жүйесіндегі кернеу компоненттері деп аталады.

Дербес жағдайы: (1.30) – (1.32) формулаларын жазықтықта жазсақ:



14-сурет

S – көлденең қимаға дейінгі аудан. $S_\alpha = \frac{S}{\cos \varphi}$ – көлденең қима ауданы.

$$\begin{aligned} \sigma_{yy'} &= \sigma_{xx}l_2^2 + \sigma_{yy}m_2^2 + 2\sigma_{xy}l_2m_2, \\ \sigma_{yx'} &= \sigma_{xx}l_1l_2 + \sigma_{yy}m_1m_2 + \sigma_{xy}(l_1m_2 + l_2m_1). \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{xx}\sin^2 + \sigma_{yy}\cos^2\alpha + 2\sigma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sigma_{y'x'} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad (1.36)$$

болады.

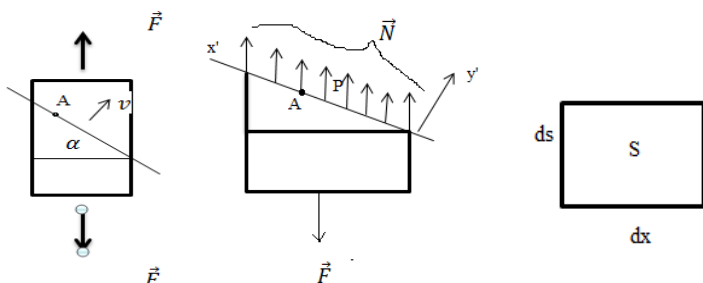
1.2-кесте

	X	y
x'	$l_1 = \cos\alpha$	$m_1 = -\sin\alpha$
y'	$l_2 = \sin\alpha$	$m_2 = \cos\alpha$
x'	α	$\pi/2 + \alpha$
y'	$\pi/2 - \alpha$	α

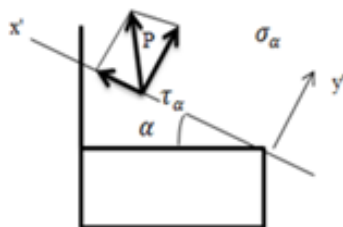
Егер қию бетіндегі v –бағыты бойынша жанама кернеулер нөлге тең болса, онда қию беті – *бас беттер* деп аталады (бас аймақ, $\sigma_{x'iy'} \mp \sigma_{x'iz'} \pm \sigma_{y'iz'} = 0$).

Егер бас беттегі кернеулерді анықтасақ, олар *бас бағыттағы* бас кернеулер деп аталады: $\sigma_{x'ix'}, \sigma_{y'iy'}, \sigma_{z'iz'}$.

1-есеп. Бөрененің көлденең қимасын қарастырайық, оған $\vec{F}$ созу күші әсер етеді, 15-сурет.



P –ішкі кернеу күші,
 S –көлденең қимаға дейінгі аудан
 $\vec{N}$ –ішкі күштердің тең әсерлі күші
 $\vec{F}$ –ұзарту күші
 S_α –көлденең қима ауданы



15-сурет

$$\vec{N} = \vec{F}(\text{аксиома2}). \sigma = \frac{N}{S} \text{ (кернеу анықтамасы),}$$

$$P = \frac{N}{S_{\alpha}}(3), S_{\alpha} = \frac{S}{\cos\alpha}. \quad (1.37)$$

(1.34)-(1.37) формулаларынан

$$P = \frac{N}{S} \cos\alpha = \sigma \cos\alpha, \sigma_{\alpha} = P \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha, \quad (1.38)$$

$$\tau_{\alpha} = P \sin\alpha = \sigma \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (1.39)$$

Дербес жағдайлары:

$$\begin{aligned} 1) \varphi = 0, \sigma_{\alpha} &= \sigma \cos^2\alpha = \sigma = \sigma_{\max}, \\ \sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = 0; \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} 2) \alpha = 45^0; \sigma_{\alpha} &= \sigma \cos^2\alpha = \frac{\sigma}{2}; \\ \sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha} &= \frac{\pi}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} = \tau_{\max}; \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$3) \alpha = 90^0; \sigma_{\alpha} = 0; \tau_{\alpha} = 0. \quad (1.42)$$

Б-2 моделінің жалпы шешімін табу

$$11\text{-есеп. } \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{D} W = \frac{q_k}{D}, q_k = \left\{ 1, x, 1-x, 1-x + \frac{x^2}{2} \right\}, \quad (1.43)$$

$$W = W_0(x) + W_1(x)(2), W_1 = \left\{ \begin{aligned} &\frac{q_k}{k}; \frac{q_k}{k} x; \frac{q_k}{k} (1-x); \\ &\left(1-x + \frac{x^2}{2} \right) \frac{q_k}{k} \end{aligned} \right\}. \quad (1.44)$$

Бірінші жағдай:

$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} + \frac{k}{D} W_0 = 0 \quad (4) \rightarrow W_0 = e^{\lambda x}, \quad (1.45)$$

$$\lambda^4 + \frac{k}{D} = 0 \quad (5), \lambda_m = \pm \sqrt[4]{\frac{k}{D}} \left(\cos \frac{\pi+2m\pi}{4} + i \sin \frac{\pi+2m\pi}{4} \right), \quad (1.46)$$

$$\lambda_{1,2} = \left(\sqrt[4]{\frac{k}{D}} \pm \sqrt[4]{\frac{k}{D}} i \right), \lambda_{3,4} = \left(-\sqrt[4]{\frac{k}{D}} \pm \sqrt[4]{\frac{k}{D}} i \right), \quad (1.47)$$

$$\lambda^4 + \frac{1}{4} \left(\sqrt[4]{\frac{k}{D}} \pm \sqrt[4]{\frac{k}{D}} i \right) \left(-\sqrt[4]{\frac{k}{D}} \pm \sqrt[4]{\frac{k}{D}} i \right) = 0, \quad (1.48)$$

$$W_0(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x), \quad (1.49)$$

$$W(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{q_k}{k} \left\{ 1, x, 1 - x, 1 - x + \frac{x^2}{2} \right\}. \quad (1.50)$$

Екінші жағдай:

$$12\text{-}ecen. \frac{d^4 W}{dz^4} + 4W = \frac{q_k}{4k}, z = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}} x, \quad (1.51)$$

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z), \quad q_k = \left\{ 1; z; z - 1; 1 - z + \frac{z^2}{2} \right\}, \quad (1.52)$$

$$W_1 = \frac{q_k}{16k} \left\{ 1; z; z - 1; 1 - z + \frac{z^2}{2} \right\}, \quad (1.53)$$

$$\frac{dW_0}{dz^4} + 4 = 0 \rightarrow \frac{dW_0}{dz^4} + (1 \pm i)(-1 \pm i), \quad (1.54)$$

$$W_0(z) = e^z (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-z} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x). \quad (1.55)$$

Академик А.Н. Крылов әдістемесі

Бірінші жағдайды қарастырайық:

$$W(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{q_k}{k} \left\{ 1, x, 1 - x, 1 - x + \frac{x^2}{2} \right\}. \quad (1.56)$$

Бұрыштама жылжу:

$$\frac{dW}{dx} = (D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x) \beta e^{\beta x} + (D_3 \cos \beta x - D_4 \sin \beta x) \beta e^{-\beta x} + \frac{q_k}{k} \left\{ 1, x, 1 - x, 1 - x + \frac{x^2}{2} \right\}, \quad (1.57)$$

$$D_1 = C_1 + C_2, D_2 = C_2 - C_1, D_3 = C_4 - C_3, D_4 = C_3 + C_4. \quad (1.58)$$

Иілу моменті:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = (E_1 \cos \beta x + E_2 \sin \beta x) \beta^2 e^{\beta x} + (E_3 \cos \beta x - E_4 \sin \beta x) \beta^2 e^{-\beta x} + \frac{q_k}{k} \{0; 0; 0; 1\}, \quad (1.59)$$

$$E_1 = D_1 + D_2, E_2 = D_2 - D_1, E_3 = D_4 - D_3, E_4 = D_3 + D_4. \quad (1.60)$$

Бөлу күші:

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) \beta^3 e^{\beta x} + (A_3 \cos \beta x - A_4 \sin \beta x) \beta^3 e^{-\beta x}, \quad (1.61)$$

$$A_1 = E_1 + E_2; A_2 = E_2 - E_1; A_3 = E_4 - E_3; A_4 = E_3 + E_4. \quad (1.62)$$

1.3. Кернеу тензорының инварианттары. Жанама, октаэдрлік кернеулер, шар тензоры және кернеу девиаторы

Кернеу тензорының инварианттары

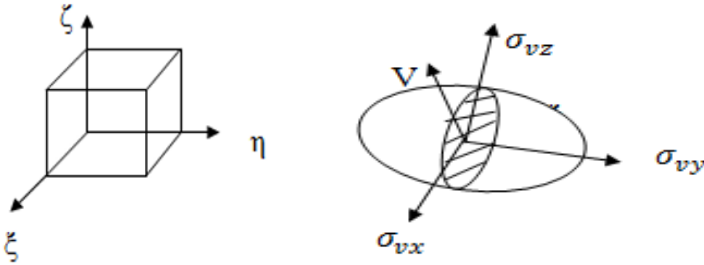
Қисық сызықтың формуласы былай болады:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad x'y'z' \text{ жүйесінде:}$$

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0.$$

1-ескерту. Мына шамалар өзара тең:

$$J_1 = A + C = A' + C', J_2 = AC - B^2 = A'C' - B'^2.$$



16-сурет

$$J_3 = \begin{vmatrix} A & B & 1/2D \\ B & C & 1/2E \\ 1/2D & 1/2E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' & 1/2D' \\ B' & C' & 1/2E' \\ 1/2D' & 1/2E' & F' \end{vmatrix}. \quad (1.63)$$

Оларды *инварианттар* деп атайды. Осы ұғымдарды келесі тақырыпта пайдаланамыз.

Максаты: (ζ, ξ, η) координаттар жүйесінде кернеудің квадраттық формасын жазайық.

$$\Phi(\zeta, \xi, \eta) = \sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\zeta^2 + 2\sigma_{yz}\eta\zeta + 2\sigma_{yz}\zeta\xi + 2\sigma_{yx} \quad (1.64)$$

және xuz жүйесіндегі толық кернеуді көрсетейік:

$$\sigma_v = \sigma_{xx}e^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\sigma_{yz}mn + 2\sigma_{xz}en + 2\sigma_{yx}em. \quad (1.65)$$

xuz және $x'y'z'$ координаттар жүйесіндегі кернеудің инварианттарын көрсетейік.

Шешуі: xuz координаттар жүйесінен $(\xi=dx, \eta=dy, \zeta=dz)$ $x'y'z'$ координаттар жүйесіне көшкенде, α -бұрышына бұру арқылы мына шамаларды аламыз:

$$J_1 = J_2 = (\sigma_{xx} - \sigma_v) + (\sigma_{yy} - \sigma_v) + (\sigma_{zz} - \sigma_v) = 0. \quad (1.66)$$

(1.66)-формуласы *бірінші сызықты инвариант* деп аталады.

$$J_2 = J'_2 = -1/6[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy} + \sigma_{yz} + \sigma_{zx}^2)]. \quad (1.67)$$

(1.67)-формуласы екінші квадраттық инвариант деп аталады.

$$J_2 = J'_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_v & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_v & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_v \end{vmatrix}. \quad (1.68)$$

1-ескерту. Егер ζ, ξ, η координаттар жүйесінің, квадраттық формасы белгілі болса,

$$\Phi(\zeta, \xi, \eta) = \sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\zeta^2 + 2\sigma_{yz}\xi\eta + 2\sigma_{yz}\zeta\xi + 2\sigma_{zy}\eta\zeta, \quad (1.69)$$

онда v бағыты бойынша толық кернеуді былай табамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= 2(\sigma_{xx}\xi + \sigma_{yy}\eta + \sigma_{yz}\zeta) = 2P(\sigma_{xx} e + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n) = 2P\sigma_{xv}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 2(\sigma_{yx}\xi + \sigma_{yy}\eta + \sigma_{yz}\zeta) = 2P(\sigma_{yx} e + \sigma_{yy} m + \sigma_{yz} n) = 2P\sigma_{yv}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= 2(\sigma_{zx}\xi + \sigma_{zy}\eta + \sigma_{zz}\zeta) = 2P(\sigma_{zz} e + \sigma_{zy} m + \sigma_{zz} n) = 2P\sigma_{zv}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

2-ескерту. (1.70)-формуладағы көрсетілген дербес туындылар косинус бұрыштарға пропорционал болғандықтан, нормалдың кернеу косинустары σ_{zv} , σ_{yv} , σ_{xv} кернеу проекцияларына пропорционал болады, яғни Коши беті толығымен кернеудің М-нүктесіндегі жағдайын көрсетеді.

1-мысал. ζ, ξ, η координаталар жүйесінде кернеудің квадраттық формасы көрсетілген:

$$\Phi(\zeta, \xi, \eta) = \sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\zeta^2 + 2\sigma_{yz}\xi\eta + 2\sigma_{yz}\zeta\xi + 2\sigma_{zy}\eta\zeta. \quad (1.71)$$

Бас бағыттарды тауып, бас кернеулер мен бас бетті табу керек.

Шешуі:

$$3\text{-ескерту. Егер } Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.72)$$

x, y, z – осьтерінде берілсе, онда x', y', z' осьтерінде бас бағытты табу үшін

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} \quad (1.73)$$

Ол үшін характеристикалық теңдеу құрамыз.

$$\begin{pmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (1.74)$$

анықтауышын шешіп, λ_1 , λ_2 – рационал сандарын табамыз (меншікті сандар)

Содан кейін

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = F. \quad (1.75)$$

$AC - B^2 > 0$ – эллипстік тип; $AC - B^2 < 0$ – гиперболалық тип; $AC - B^2 = 0$ – параболалық тип.

Бас бетті табамыз.

Төртінші ескертпеден кейін 1 және 2 – ескертпелерді пайдаланып берілген есепті шешейік. Егер берілген бет x, y, z жүйесінде бас бет болса, онда

$$\sigma_{xv} = Ne, \sigma_{yv} = Nm, \sigma_{zv} = Nn, \quad (1.76)$$

яғни характеристикалық теңдеу

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.77)$$

(1.66)-формуладан:

$$N^2 - AN^2 + BN - C = 0, \quad (1.78)$$

$$A = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \quad (1.79)$$

$$B = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.80)$$

$$C = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (1.81)$$

(1.67) - теңдеуді шешіп, N_1 , N_2 , N_3 – меншікті сандарды табайық.

хуз координаттар жүйесінен және $x'y'z'$ координаттар жүйесіне көшкенде *бас бағыттағы векторларды* анықтаймыз, ал бас бағытты келесі формуламен табамыз:

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 = \pm C^2. \quad (1.82)$$

Дербес жағдайлары:

I – жағдай, егер $N_1 > 0, N_2 > 0, N_3 > 0$ болса,

$$\frac{\xi^2}{\frac{C^2}{N_1}} + \frac{\eta^2}{\frac{C^2}{N_2}} + \frac{\zeta^2}{\frac{C^2}{N_3}} = 1, \vec{a} = \frac{C}{\sqrt{N_1}}, \vec{b} = \frac{C}{\sqrt{N_2}}, \vec{c} = \frac{C}{\sqrt{N_3}}, \quad (1.83)$$

эллипсоид жартылай осьтерімен.

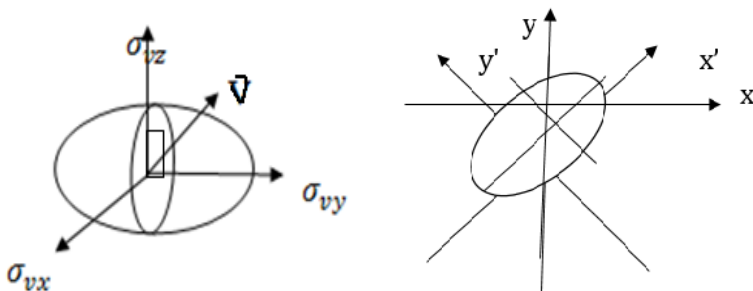
II – жағдай, егер $N_1 > 0, N_2 > 0, N_3 < 0$ болса,

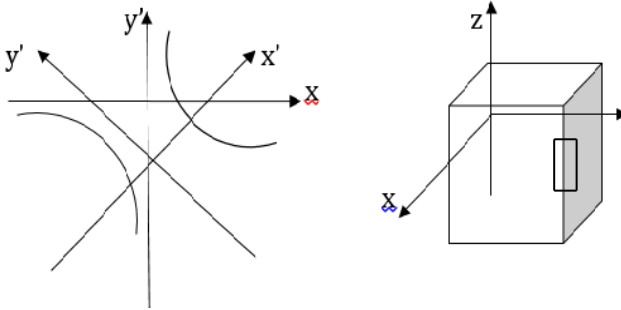
$$\frac{\xi^2}{\frac{C^2}{N_1}} + \frac{\eta^2}{\frac{C^2}{N_2}} \pm \frac{\zeta^2}{\frac{C^2}{N_3}} = \pm 1 \text{ және } N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 = \pm C^2. \quad (1.84)$$

I және II жағдай асимптоталық, екі гиперboloидты бөліп тұрған бір қуысты және екі қуысты гиперboloидтар болады.

Жанама кернеудің ең бас бағыттағы және алаңдағы мәні

Максаты: *охуз* координаттар жүйесі бас бағыттың нормальдары бойынша бағытталған.





17-сурет

Кез келген бір аймақ алып сыртқы нормалі ν – болатын бағыттауышы косинустарын анықтаймыз, кернеуді көрсетеміз: $\cos(\nu, x)=l$, $\cos(\nu, y)=m$, $\cos(\nu, z)=n$.

1.3-кесте

	x	Y	Z
ν	e	M	N
σ_{vx}	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{xz}
σ_{vy}	σ_{yx}	σ_{yy}	σ_{yz}
σ_{vz}	σ_{zx}	σ_{zy}	σ_{zz}

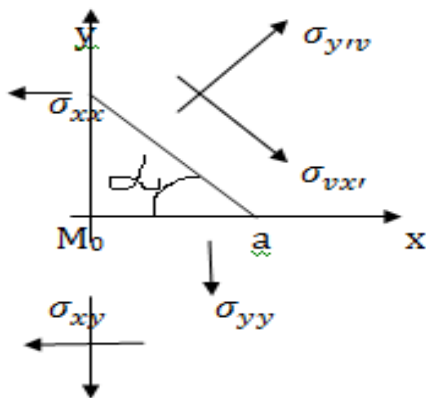
Бұл жағдайда бас бағыттағы кернеу былай болады:

$$\sigma_{vx} = N_1 e, \sigma_{vy} = N_2 m, \sigma_{vz} = N_3 n, P_v^2 = \sigma_{xv}^2 + \sigma_{yv}^2 + \sigma_{zv}^2. \quad (1.85)$$

Бас бағыттағы толық нормаль кернеуі ($\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$)

$$\sigma_v = N_1 e^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2. \quad (1.86)$$

Кернеу беті мен бас кернеу (17-сурет).



18-сурет

$$\sigma_{y'v} = \sigma_{xx} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1.87)$$

$$\sigma_v = \sigma_{xx} e^2 + \sigma_{yy} m^2 + \sigma_{zz} n^2 + 2\sigma_{yz} mn + 2\sigma_{xz} en + 2\sigma_{yx} em. \quad (1.88)$$

Шешуі: Егер

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}, \quad (1.89)$$

болса, онда (1.86)-формула болады.

Егер бас беттегі толық жанама кернеуде көрсетілгендей σ_{tv} – деп белгілесек, онда сыртқы толық кернеу:

$$P_v^2 = \sigma_{vx}^2 + \sigma_{vy}^2 + \sigma_{vz}^2. \quad (1.90)$$

Толық жанама кернеудің квадраты:

$$\sigma_{tv}^2 = P_v^2 - \sigma_v^2 = (\sigma_{vx}^2 + \sigma_{vy}^2 + \sigma_{vz}^2) - \sigma_v^2. \quad (1.91)$$

Енді (1.86)-формуланы (1.85) арқылы өрнектесек, толық жанама кернеудің квадраты шығады:

$$\sigma_{tv}^2 = (N_1^2 e^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2) - (N_1 e^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2)^2. \quad (1.92)$$

5-ескерту. Бағыттауыш косинустар:

Егер $e^2 + m^2 + n^2 = 1$ болса, онда

Тетраэрдің үш жағдайын қарастырамыз:

I-жағдай : $l = 0, m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$;

II-жағдай : $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, m = 0, n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$;

III-жағдай : $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n = 0$.

Әр жағдайды жеке-жеке қарастырып, жанама кернеулердің мәнін табамыз:

I-жағдай: $\sigma_{T1} = \pm \frac{N_2 - N_3}{2}$;

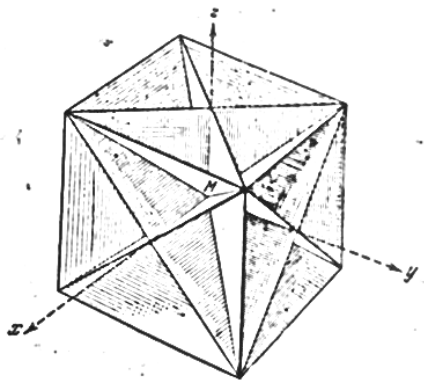
II-жағдай: $\sigma_{T2} = \pm \frac{N_1 - N_3}{2}$;

III-жағдай: $\sigma_{T3} = \pm \frac{N_1 - N_2}{2}$.

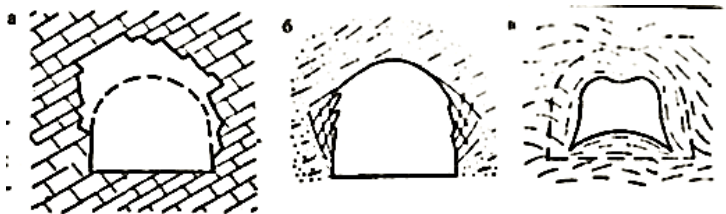
$\sigma_{T1}, \sigma_{T2}, \sigma_{T3}$ – кернеулері жанама кернеудің бас беттердегі ең үлкен мәндері деп аталады.

Егер M_{0xyz} координаттар жүйесі болса, онда жанама кернеудің ең үлкен (мах) мәні жататын үш жұп аймақ M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} – осьтері арқылы өтеді де, бас аймақтың екі қырлы бұрыштарын екіге бөледі.

6-ескерту. (1.88) және (1.70) – формулалар арқылы кез келген кернеу бетіндегі кернеулерді табуға болады.

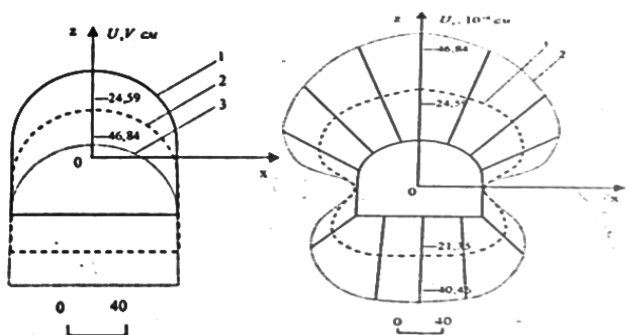


19-сурет

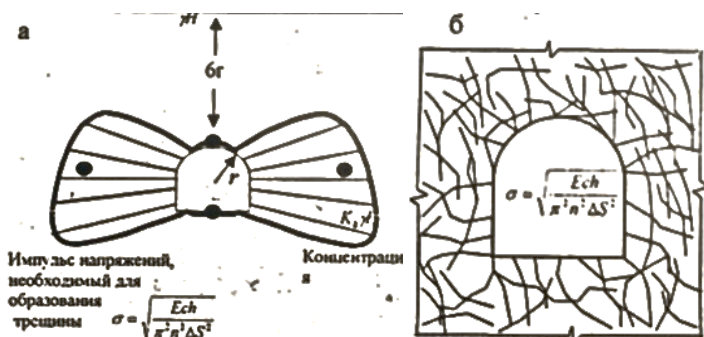


20-сурет

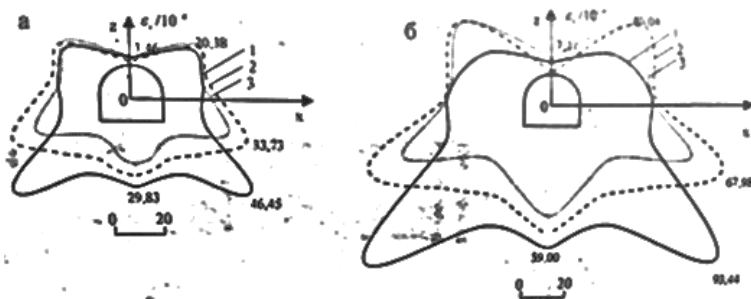
7-ескерту. 20-23-суреттерде кез келген техникада кездесетін тұрақтылыққа, беріктілікке, жылжу функциясына, кернеуге және деформацияға байланысты тау-кен үңгіріндегі жағдайлары көрсетілген.



21-сурет: h=100м; 2 -h=500м; 3 -h=1000м



22-сурет



23-сурет

Октаэдрлік алаң және октаэдрлік кернеулер

Максаты: Егер (1.92)-формула және

$$\Phi(\zeta, \xi, \eta) = \sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\zeta^2 + 2\sigma_{yz}\eta\zeta + 2\sigma_{xz}\zeta\xi + 2\sigma_{xy}\xi\eta. \quad (1.93)$$

формулалары арқылы бас аймаққа тең бұрылатын бағыттауыш косинустарын алсақ:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (1.94)$$

онда бас бағыт бойынша сегіз аймақ аламыз. Сол аймақтағы кернеулерді табайық.

Бас бағыттарға тең бұрышқа бұрылатын, бағыттауыш косинустары (1.94) формуласымен анықталатын алаңдарды *октаэдрлік алаңдар* деп атайды, ал олардағы кернеулерді *октаэдрлік кернеулер* деп атайды.

Октаэдрлік алаңдағы (сыртқы нормалі V болған) *толық кернеу* шамасы былай анықталады:

$$N_0 = \sigma_v = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (1.95)$$

Октаэдрлік жанама кернеудің квадраты мына формуламен өрнектеледі:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{9}(2N_1^2 + 2N_2^2 + 2N_3^2 - 2N_1N_2 - 2N_2N_3 - 2N_3N_1) = \frac{1}{9}((N_1 - N_2)^2 + (N_2 - N_3)^2 + (N_3 - N_1)^2). \quad (1.96)$$

Шар тензоры мен кернеу девиторы

Октаэдрлік нормальдік кернеуді дененің берілген нүктесіндегі *орташа кернеу* деп атайды және ол (1.95)-формуласымен белгіленеді.

Егер $\sigma_{xx} = N_1, \sigma_{yy} = N_2, \sigma_{zz} = N_3$ болса, онда $N_0 = \frac{1}{3}(N_1 + N_2 + N_3)$ гидростатикалық кернеудің орта кубтың ауытқуын көрсетеді.

Егер дененің нүктедегі кернеу жағдайын тензор арқылы белгілесек:

$$(D_{ш}) = \begin{pmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{pmatrix}, \quad (1.97)$$

онда (1.97) – тензор *шар кернеу тензоры* деп аталады, ал кернеу беті шар болады, яғни дененің тек қана көлемі өзгереді, ал пішіні өзгермеген кезі.

Егер дененің нүктедегі кернеу жағдайын жалпылама түрде қарасақ, онда төмендегі кернеу тензоры аламыз:

$$(S) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.98)$$

Геометриялық қасиеті: жалпылама тензор кернеуі дененің көлемін пішіні өзгермеген жағдайдағы және дененің пішінінің өзгеруін көлемі өзгермеген жағдайындағысын төмендегі тензормен өрнектесек:

$$D_s = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N_0 \end{pmatrix}, \quad (1.99)$$

онда D_s – тензорын *кернеу тензорының девиаторы* деп атайды.

Геометриялық қасиеті: кернеу тензорының девиаторы дененің пішінінің өзгеруін көлемі өзгермеген жағдайда анықтайды.

8-ескерту. Шар тензоры мен кернеу тензорының девиаторлары арқылы жалпылама кернеу тензорын былай жазуға болады:

$$(S) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N_0 \end{pmatrix} + \left| \begin{pmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{pmatrix} \right|, S = D_s + (D_{ш}). \quad (1.100)$$

Мысал. Кернеу тензорының девиаторының бір координаттар жүйесінен екіншісіне өткендегі инварианттарын есептеу керек.

Шешуі: M_0 хуz координаттар жүйесінен M_0 x'y'z' координаттар жүйесіне көшкендегі характеристикалық теңдеуді жазамыз:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.101)$$

Үшінші дәрежедегі анықтауышты шешеміз:

$$N_0^3 - AN_0^2 + BN_0 - C = 0. \quad (1.102)$$

Мұндағы

$$A = (\sigma_{xx} - N_0) + (\sigma_{yy} - N_0) + (\sigma_{zz} - N_0) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - 3N_0 = 0. \quad (1.103)$$

(1.103)-формуланы кернеу тензорының девиаторының I-сызықты инварианты деп атайды.

Мұндағы

$$\begin{aligned}
 B &= (\sigma_{yy} - N_0)(\sigma_{zz} - N_0) + (\sigma_{xx} - N_0)(\sigma_{zz} - N_0) + \\
 &+ (\sigma_{xx} - N_0)(\sigma_{yy} - N_0) - \sigma_{yz}\sigma_{zy} - \sigma_{zx}\sigma_{xz} - \sigma_{yx}\sigma_{xy} = \\
 &= \frac{1}{3}(\sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2 - \sigma_{zz}^2 - \\
 &- 3\sigma_{yz}^2 - 3\sigma_{zx}^2 - 3\sigma_{xy}^2) = \frac{1}{6}((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \\
 &+ (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2) + 6(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2. \quad (1.104)
 \end{aligned}$$

9-ескерту. Егер $\sigma_{xx} = N_1, \sigma_{yy} = N_2, \sigma_{zz} = N_3, \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ (бас бағыттарда болса), онда

$$B = -\frac{1}{6}[(N_1 - N_2)^2 + (N_2 - N_3)^2 + (N_3 - N_1)^2] \quad (1.105)$$

немесе

$$B = -\frac{1}{3}((N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) - N_1N_2 - N_2N_3 - N_3N_1). \quad (1.106)$$

(1.104), (1.105) немесе (1.106) формулалары кернеу тензор девиаторының *екінші квадраттық инварианты* сандық көбейтіндісі дәлдігімен октаэдрлік жанама кернеудің квадратына тең болады.

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{9}[(N_1 - N_2)^2 + (N_2 - N_3)^2 + (N_3 - N_1)^2]. \quad (1.107)$$

Мұндағы

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N_0 \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

кернеу девиаторының үшінші кубтік инварианты.

10-ескерту. Егер $\sigma_{xx} = N_1, \sigma_{yy} = N_2, \sigma_{zz} = N_3, \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ болса, онда

$$C = (N_1 - N_0)(N_2 - N_0)(N_3 - N_0) \quad (1.109)$$

немесе

$$C = \frac{1}{9}[(N_1 - N_0)^2 + (N_2 - N_0)^2 + (N_3 - N_0)^2]. \quad (1.110)$$

(1.110)- формула орта гидростатикалық кернеудің
 $N_0 = \frac{1}{3}(N_1 + N_2 + N_3)$ орта квадраттық ауытқуын
 қарастырайық.

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{3}[(N_1 - N_0)^2 + (N_2 - N_0)^2 + (N_3 - N_0)^2] = \\ &= \frac{1}{3}(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2), \end{aligned}$$

онда

$$\nabla^2 = -\frac{2}{3}C.$$

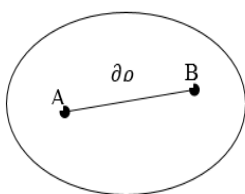
Девиатор тензорының I-инварианты дененің пішінін өзгерткендегі кернеу жағдайында №1, №2, №3 орташа қысу немесе сызудың жоқтығын көрсетеді. II және III инварианттар дененің пішінін өзгерткендегі орта гидростатикалық кернеуден квадраттық және кубтық ауытқуды сипаттайды.

2. СЫЗЫҚТЫ ЖӘНЕ СЫЗЫҚСЫЗ ДЕФОРМАЦИЯ ПРОЦЕСТЕРІ

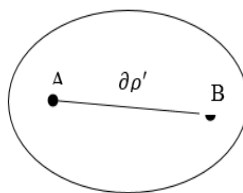
2.1. Геометрия деформациясы. Үзіліссіздік теңдеулер шарттары

Геометрия деформациясы туралы жалпылама ұғым

Мақсаты: Бір серпімді дене алайықта оны абсолюттік қатты дене сияқты қозғалмайтын етіп бекітейік. Бұл жағдайда сыртқы күштің әсерінен кез келген нүкте қозғалысы деформация болады.



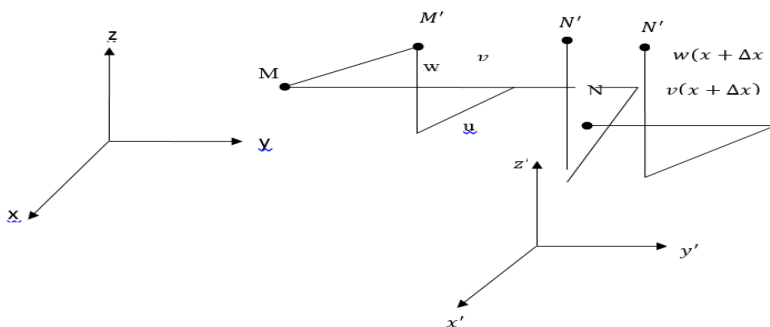
24-сурет



25-сурет

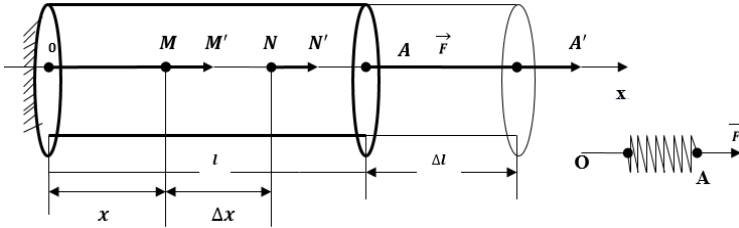
24-суретте деформацияға дейінгі жағдай, 25-суретте деформациядан кейінгі жағдай көрсетілген. Бірінші жағдайдан екінші жағдайға өткендегі екі шексіз аз нүктенің арақашықтығын табайық.

Шешуі: OXYZ координат жүйесінде $M(x, y, z)$ нүктесін деформацияға дейін қарасақ, деформация кезінде ол нүкте $M'(x + u, y + V, z + V)$ нүктесіне жылжиды.



26-сурет

Мұндағы $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ (2.1) бір нүктеден екінші нүктеге ауысу “жылжу функциялары” деп аталады. Көлденең қимасы ұзындығынан кіші болатын бір цилиндрлік үлгі алайық (27-сурет).



27-сурет

Егер материалдық нүктенің ОХ бағыты бойынша жылжуын $u = u(x)$ деп алсақ, онда М нүктесінің жылжуы $u = u(x)$ болады да, ал N нүктесінің жылжуы $u = u(x + \Delta x)$ болады.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon_y. \quad (2.2)$$

$u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u$ — созу не қысу кезіндегі салыстырмалы жылжу деп аталады.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varepsilon_x$ шек табылатын болса, онда ε_x — салыстырмалы созылу деформациясы деп аталады. Егер $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} * 100\%$ болса, онда деформация өлшемі өте аз шама.

1-ескерту. $\varepsilon_x > 0$ созу кезінде, $\varepsilon_x < 0$ қысу кезінде деформация - аз шама. Металдарда-1%, қоспаларда-3%, эластомерлерде-10% дейін.

2-ескерту. Дөңгелек цилиндрлік үлгіні созған кезде оның көлденең қимасы диаметрі d_0 немесе көлденең бағытта, яғни ОУ бағытында қысыла бастайды.

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y}. \quad (2.3)$$

$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \nu$ — Пуассон коэффициенті деп аталады.

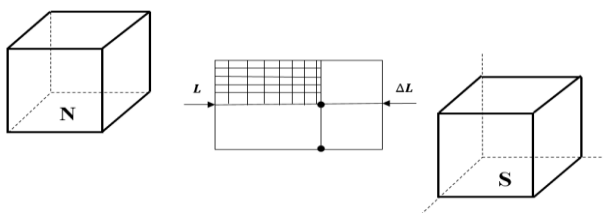
Мысалы, алюминий $\nu = 0,33$; пластмасса $\nu = 0,015$; винипласт $\nu = 0,354$; каучук $\nu = 0,47$; бетон $\nu = 0,16$; ағаш $\nu = 0,43$.

3-ескерту. Материалдағы деформация жылу, электромагниттік, механикалық (температуралы сәуленің т.б.) әсер ету кездерінде де болады. Мысалы: $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha_t \Delta T$.

Мұндағы α_t – материалдық сызықтың кеңею коэффициенті, $\Delta T = T - T_0$ жылу кезіндегі температура өзгерісі.

Мысалы, кейбір материалдағы сызықтың кеңею коэффициенті былай болады. Титан – $8 \cdot 10^{-6} l/C^0$; мыс – $18 \cdot 10^{-6} l/C^0$; пластмасс – $3 \cdot 10^{-6} l/C^0$; каучук – $50 \cdot 10^{-6} l/C^0$; бетон – $10 \cdot 10^{-6} l/C^0$ (микро жылжуларда лазер сәулелерінде өте кішкене микроэлементтерде қолданылады).

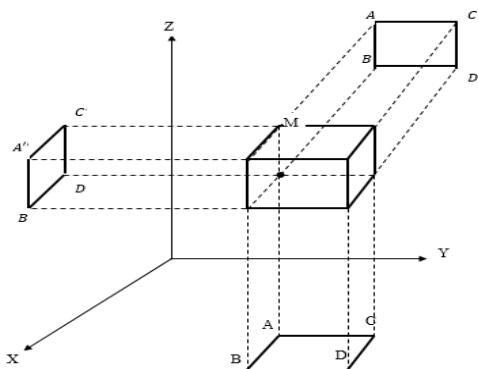
4-ескерту. Магниттік әсер ету кезінде, 28-сурет. Никель $\varepsilon_x = 4 \cdot 10^{-5}$, феррит гранат тербте – 10^{-3} .



28-сурет

Деформацияның ұзаруы және ығысуы

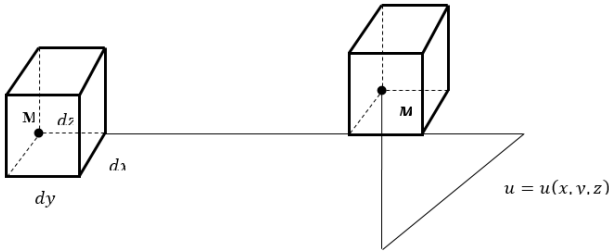
Кез келген денеден параллель қабырғалары dx, dy, dz болатын шексіз аз аймақ бөліп алайық (29-сурет).



29-сурет

Сыртқы күштің әсерінен дене шексіз аз көлемде деформацияланады. Егер біз дененің деформацияға дейінгі көлемі 1дм^3 куб десек, онда деформациядан кейін ол параллелепипед болуы мүмкін (30-сурет).

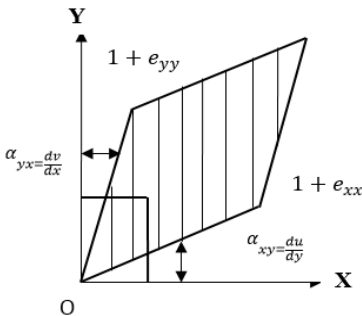
А нүктесінің x бағытына A нүктесінің B нүктесіне z
жылуы $\frac{du}{dx}$; B бағытына B нүктесінің C нүктесіне y
бағытымен жылжиды $\frac{du}{dz}$
 A нүктесінің Y бағытына
 B нүктесіне жылжиды $\frac{du}{dy}$



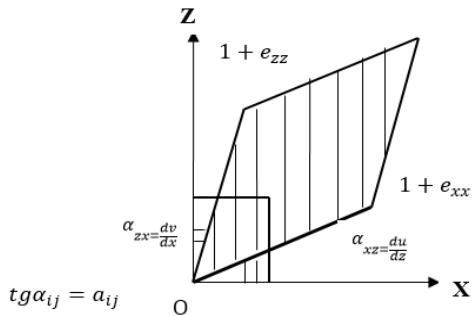
30-сурет

$$OX \Rightarrow u + \frac{du}{dx}; OY \Rightarrow u + \frac{du}{dy}; OZ \Rightarrow u + \frac{du}{dz}.$$

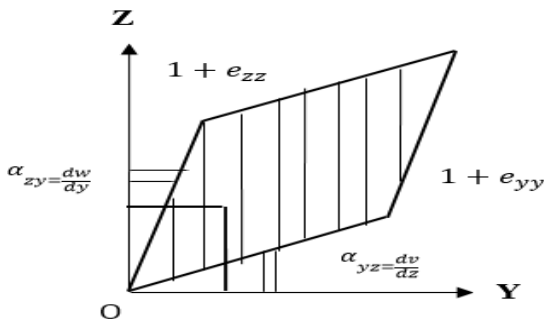
Енді деформация кезінде дененің көлемінің және иілуінің өзгеруін қарастырайық.



31-сурет



32-сурет



33-сурет

5-ескерту. Егер $\Delta u \approx du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

А нүктесінің С нүктесіне жылжуы болса, $\Delta V \approx dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$ А'' нүктесінің В'' нүктесіне жылжуы болса, сол сияқты

$$\Delta w \approx dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \quad (2.4)$$

Соныменен:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \alpha_{xy} = tg \alpha_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}, \alpha_{yx} = tg \alpha_{yx} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}, \alpha_{xz} = tg \alpha_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z}, \alpha_{zx} = tg \alpha_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x}, \alpha_{yz} = tg \alpha_{yz} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial z}, \alpha_{zy} = tg \alpha_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

4-анықтама. Төмендегі деформациялар

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.6)$$

салыстырмалы созылу (ұзару, қысылу) деформациясы деп аталады, салыстырмалы созылу деформациясы көлемінің өзгеруіне әкеп соғады.

5-анықтама. Төмендегі бұрыштар: $\alpha_{xy}, \alpha_{yx}, \alpha_{xz}, \alpha_{zx}, \alpha_{yz}, \alpha_{zy}$ — ығысу бұрыштары деп аталады және (2.5)-формуласымен өрнектеледі.

6-ескерту. Ұзару (созылу) деформациясы негізінен нормаль кернеулеріне байланысты болады, себебі нормаль кернеулері көлемді өзгертеді, пішінін өзгертпейді.

Ығысу деформациясы

Егер берілген дене біртұтас үзіліссіз толық болса, онда Коши (2.5)-формуласынан $e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$, $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ шамалар алынып, және

$$e_{xy} = e_{yx}, e_{yz} = e_{zy}, e_{zx} = e_{xz} \quad (2.7)$$

екені көрсетілді.

(2.7)-формуласын салыстырмалы ығысу деформациялары деп атайды. Салыстырмалы ығысу деформациялары жанама кернеуге байланысты болады және ол дененің пішінінің өзгеруіне әкеледі.

$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yx}, e_{zx}, e_{xy}$ – 6 (алты) функциясы деформация компоненттері деп аталады, ал олар жылжу функциясының $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$ 9 (тоғыз) компонент-тері арқылы өрнектеледі.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\} - \text{жылжу компоненттері деп атайды.} \quad (2.8)$$

Егер (2.7)-формуладағы ығысудың жұмысын алатын болсақ, онда

$$\overline{e_{xy}} = \frac{1}{2} e_{xy}, \overline{e_{yz}} = \frac{1}{2} e_{yz}, \overline{e_{zx}} = \frac{1}{2} e_{zx} \quad (2.9)$$

салыстырмалы ығысу деформациясы болады.

$$2\overline{e_{xy}} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, 2\overline{e_{yz}} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, 2\overline{e_{zx}} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Егер (2.8) матрицасын ығысу бұрыштары арқылы жазатын болсақ, онда $\alpha_{xy} - dx$ элементінің ОҮ осінен ОХ осіне қарай бұрылғандағы бұрылу бұрышын көрсетеді.

$$\begin{pmatrix} l_{xx}\alpha_{yx}\alpha_{zx} \\ \alpha_{xy}l_{yy}\alpha_{zy} \\ \alpha_{xz}\alpha_{yz}l_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

$\alpha_{zy} - dy$ элементінің ОҮ осінен ОZ осіне қарай бұрылғандағы бұрылу бұрышын, ал $\alpha_{xz} - dz$ элементінің ОZ осінен ОХ осіне қарай бұрылғандағы бұрылу бұрышын көрсетеді.

1-ескерту. α_{ij} әрпінде екінші индекс j – қай элементарлық кесіндінің (dx, dy, dz) бұрылатының көрсетсе, ал бірінші индекс i – қай оське қарай элементарлық кесіндінің бұрылатының көрсетеді.

Егер денеден $dx = dy = dz$ кубикті бөліп алсақ, онда осы кубиктің диагональдарының ОХ, ОҮ, ОZ осьтеріне қарай бұрылуын yz, zx және xy жазықтығындағы бұрылу компоненттері деп атайды және былай белгілейді:

$$2\omega_x = \frac{dw}{dy} - \frac{\partial v}{\partial z}, 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{dw}{dx}, 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.12)$$

Егер $\omega_x = \omega_y = \omega_z$ болса, онда

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dw}{dx}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.13)$$

$$u dx + v dy + w dz = d\phi \quad (2.14)$$

болса, онда ол функцияның толық дифференциалы болады және

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (2.15)$$

2-ескерту. Егер $\phi(x, y, z)$ толық дифференциалданатын функция болса, онда жылжу функциясы потенциалды болады да, тек қана таза деформация пайда болады.

Үзіліссіздіктің деформация теңдеулері (Сен-Венан шарты)

1-ескерту. Егер біз жылжу функциясын табатын болсақ, онда салыстырмалы деформация компоненттерін $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}$ — жылжу компоненттері арқылы таба аламыз, ал керісінше жеткілікті емес. Сондықтан 6 (алты) деформация компоненттерін еркімізше ала алмаймыз. Себебі деформациямен жылжу функциясының арасында белгілі бір байланыс болуы керек.

Сен-Венан деформациясының үзіліссіздігі (2.14) төмендегі I-топтың көмегімен дәлелденеді.

$$\frac{\partial^2 l_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 l_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 l_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 l_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 l_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 l_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 l_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 l_{zx}}{\partial z \partial x}. \quad (2.16)$$

II-топ. Деформация үзіліссіздігі

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial l_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial l_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial l_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 l_{zz}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial l_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial l_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial l_{yz}}{\partial x} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial^2 l_{xx}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial l_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial l_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial l_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 l_{yy}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

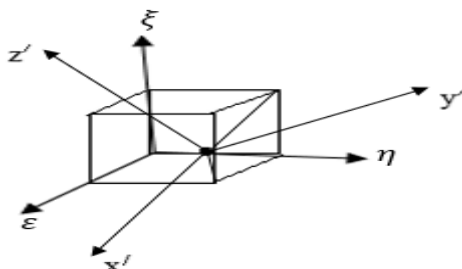
(2.16) және (2.17) теңдеулерін *үзіліссіздік теңдеулері* немесе *деформацияның бірлестік теңдеулері* немесе *Сен-Венан теңдеулері* деп атайды.

$$\iiint \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint [x \cos(u^{\wedge} x) + y \cos(u^{\wedge} y) + z \cos(u^{\wedge} z)]. \quad (2.18)$$

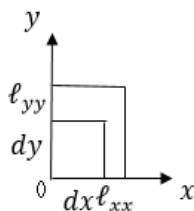
2.2. Деформация беттері, деформация девиаторы, инварианттары, соңғы деформация, бұрау және иілу деформациялары

Айналу компоненттерін деформация компоненттері арқылы өрнектеу

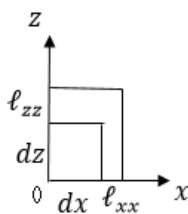
Мақсаты:



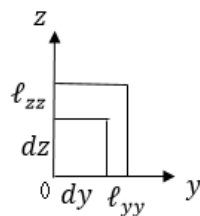
34-сурет



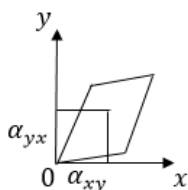
35-сурет



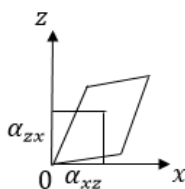
36-сурет



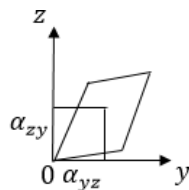
37-сурет



38-сурет



39-сурет



40-сурет

$$\ell_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ell_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ell_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \alpha_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}, \alpha_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.19)$$

$$\alpha_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z}, \alpha_{zx} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \alpha_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z}, \alpha_{zy} = \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (2.20)$$

Ұзарту деформацияларының проекциялары

$$\begin{aligned} \ell_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \ell_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \ell_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ 2\ell_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, 2\ell_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, 2\ell_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Деформация беттері

$$2\omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.22)$$

Деформация девиаторы және оның инварианттары

$$u=u(x,y,z), v=v(x,y,z), \omega=\omega(x,y,z), \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \Delta v = dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \\ &\frac{\partial v}{\partial z} dz, \Delta \omega = d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Табу керек:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix} - \text{тензор салыстырмалы жылжуын}$$

деформация арқылы өрнектеу. (2.24)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \overline{\ell_{xx}} & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{yx}} & \overline{\ell_{yy}} & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{zx}} & \overline{\ell_{zy}} & \overline{\ell_{zz}} \end{pmatrix} - \text{деформация арқылы өрнектеу} \quad (2.25)$$

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ -ті деформация компоненттері арқылы өрнектеу.

Шешуі:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \ell_{xx}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (\overline{\ell_{xy}} - \omega_z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (\overline{\ell_{xz}} + \omega_y), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= (\overline{\ell_{xy}} + \omega_z), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \ell_{yy}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = (\overline{\ell_{yz}} - \omega_x), \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} &= (\overline{\ell_{xz}} - \omega_y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = (\overline{\ell_{zy}} + \omega_x), \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \ell_{zz}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Жылжу тензорын деформация арқылы өрнектеу.

Осыдан кейін тензор салыстырмалы жылжу, таза деформация және қаттылау айналу тензорын жазу.

(2.26)-ден (2.21) арқылы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial \ell_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \ell_{xx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = -\frac{\partial \ell_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \ell_{xx}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{\partial \ell_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \ell_{xy}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{\partial \ell}{\partial y} - \frac{\partial \ell_{yy}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= -\frac{\partial \ell_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \ell_{yy}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{\partial \ell_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \ell_{yz}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial z} &= -\frac{\partial \ell_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \ell_{zz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial z} = -\frac{\partial \ell}{\partial z} + \frac{\partial \ell_{zz}}{\partial y}.\end{aligned}$$

(2.27)-формула бойынша айналу компоненттерін деформация арқылы өрнектеу.

Ескерту. Егер (2.26)-ден (2.27)-формула арқылы ω_x , ω_y , ω_z -ты шығарып тастасақ, Сен-Венан теңдеуін аламыз.

Деформацияланған кесіндінің ұзарту деформациясының проекциялары

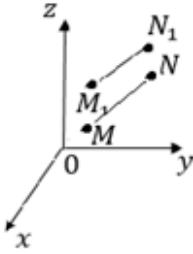
Мақсаты:

$d\varepsilon, d\eta, d\xi$ – деформацияланған кесіндінің проекцияларының ε , η , ξ – осьтеріне түсірілген проекциялары. ℓ_ρ -ның проекциялары мен деформация беттерін табу керек.

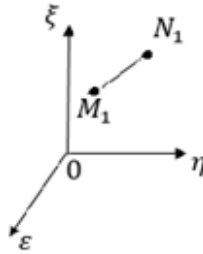
Шешуі:

$$\begin{aligned}du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{\partial u}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \xi, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \xi, \quad d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial \omega}{\partial y} \eta + \frac{\partial \omega}{\partial z} \xi.\end{aligned}\quad (2.28)$$

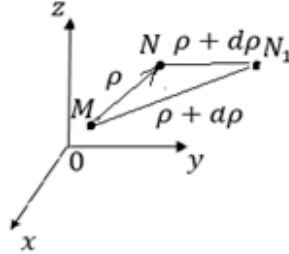
$$\begin{aligned}d\xi &= \frac{\partial u}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \xi, \quad d\eta = \frac{\partial v}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \xi, \\ d\varepsilon &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial \omega}{\partial y} \eta + \frac{\partial \omega}{\partial z} \xi.\end{aligned}\quad (2.29)$$



41-сурет



42-сурет



43-сурет

$$\begin{aligned} M(x, y, z), N(x+dx, y+dy, z+dz) &= N(x + \varepsilon, y + \eta, z + \xi), \\ M_1 &= (x + u, y + v, z + \omega), \\ N_1 &= (x + dx + u + du, y + dy + v + dv, z + dz + \omega + d\omega), \\ dx &= \varepsilon, dy = \eta, dz = \xi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = l, \frac{\eta}{\rho} = m, \frac{\xi}{\rho} = n. \quad (2.31)$$

$$M_1 N_1 = (\varepsilon_1, \eta_1, \xi_1), \varepsilon_1 = \varepsilon + d\varepsilon, \eta_1 = \eta + d\eta, \xi_1 = \xi + d\xi. \quad (2.32)$$

Егер l, m, n – деформацияға дейінгі MN алғашқы кесіндінің бағыттауышы косинустары болса, ((2.20) – формула), $\frac{d\varepsilon}{\rho} = l_{x\rho}$, $\frac{d\eta}{\rho} = l_{y\rho}$, $\frac{d\xi}{\rho} = l_{z\rho}$ (2.35) – деформацияның арасындағы MN кесіндісінің ұзаруының проекциялары.

(2.20) және (2.35)-інші белгілеу арқылы (5)-тен табамыз.

$$\begin{aligned} l_{x\rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\eta}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\xi}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n, \\ l_{y\rho} &= l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n, \\ l_{z\rho} &= \frac{\partial \omega}{\partial x} l + \frac{\partial \omega}{\partial y} m + \frac{\partial \omega}{\partial z} n. \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} 1\text{-ескерту. } \sigma_{ux} &= \sigma_{xx} l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n, \sigma_{vy} = \sigma_{yx} l + \sigma_{yy} m + \\ &\sigma_{yz} n, \sigma_{vz} = \sigma_{zx} l + \sigma_{zy} m + \sigma_{zz} n. \end{aligned} \quad (2.34)$$

2-ескерту. Төмендегі матрицалар:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{pmatrix} - \text{симметриялы емес} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \text{симметриялы.}$$

Деформация беттері

Максаты: $MN = \rho$ – деформацияланған кесіндінің ұзару деформациясын пайдаланып, яғни

$$\rho^2 = \varepsilon^2 + \eta^2 + \xi^2 \quad \rho d\rho = \varepsilon d\varepsilon + \eta d\eta + \xi d\xi \quad (2.35)$$

деформация бетін табу керек.

Шешуі:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{d\varepsilon}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d\eta}{\rho} + \frac{\xi}{\rho} \frac{d\xi}{\rho}. \quad (2.36)$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{\rho} = \ell_\rho - MN \text{ кесіндісінің ұзаруы.} \quad (2.37)$$

Олай болса (2.36)-дан табамыз

$$\begin{aligned} \ell_\rho &= \ell \ell_{x\rho} + m \ell_{y\rho} + n \ell_{z\rho} = \ell \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + \\ &+ m \left(\frac{\partial v}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \ell + \frac{\partial \omega}{\partial y} m + \frac{\partial \omega}{\partial z} n \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \ell^2 + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \frac{\partial \omega}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \ell m + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) m n + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) n \ell \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\text{немесе } \ell_\rho = \ell_{xx} \ell^2 + \ell_{yy} m^2 + \ell_{zz} n^2 + 2\overline{\ell_{xy}} \ell m + 2\overline{\ell_{yz}} m n + 2\overline{\ell_{zx}} n \ell, \quad (2.39)$$

$$(5)\text{-ген } \rho^2 \ell_\rho = \ell_{xx} \varepsilon^2 + \ell_{yy} \eta^2 + \ell_{zz} \xi^2 + 2\overline{\ell_{xy}} \varepsilon \eta + 2\overline{\ell_{yz}} \eta \xi + 2\overline{\ell_{zx}} \varepsilon \xi. \quad (2.40)$$

3-ескерту. Егер $\rho = \sqrt{\frac{\pm b^2}{\ell_\rho}}$ болса, онда

$$F(\xi, \eta, \varepsilon) = \ell_{xx}\varepsilon^2 + \ell_{yy}\eta^2 + \ell_{zz}\xi + 2\overline{\ell_{xy}}\varepsilon\eta + 2\overline{\ell_{yz}}\eta\xi + 2\overline{\ell_{zx}}\varepsilon\xi. \quad (2.41)$$

(2.41)-формуласы хуз жүйесінде деформация беті деп аталады.

Енді осы (2.41) – деформация бетін $x'y'z'$ осінде жазамыз. Ол үшін бас бағыттарын, яғни хуз координат жүйесінде алынған өзара перпендикуляр векторларды табамыз.

Табу схемасы:

$$\begin{vmatrix} \ell_{xx} - \ell & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{yx}} & \ell_{yy} - \ell & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{zx}} & \overline{\ell_{zy}} & \ell_{zz} - \ell \end{vmatrix} = 0, \quad (2.42)$$

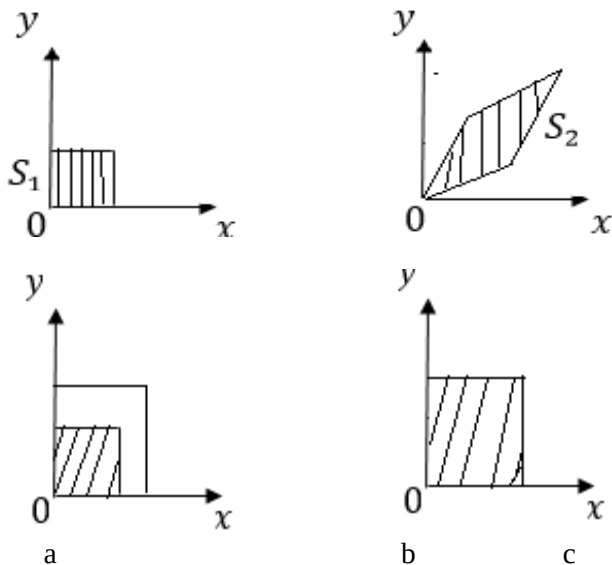
$$\ell^3 - \theta\ell^2 + \eta\ell - \lambda' = 0, \text{ мұнда } \theta = \ell_{xx} + \ell + \ell_{zz}, \quad (2.43)$$

$$\eta = \begin{vmatrix} \ell_{xx} & \overline{\ell_{xy}} \\ \overline{\ell_{xz}} & \ell_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_{yy} & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{yz}} & \ell_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_{xx} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{xz}} & \ell_{zz} \end{vmatrix}, \quad \lambda' = \begin{vmatrix} \ell_{xx} & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{yx}} & \ell_{yy} & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{zx}} & \overline{\ell_{zy}} & \ell_{zz} \end{vmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} (\ell_{xx} - \ell)x + \overline{\ell_{xy}}y + \overline{\ell_{xz}}z &= 0, \overline{\ell_{xy}}x + (\ell_{yy} - \ell)y + \overline{\ell_{yz}}z = 0, \\ \overline{\ell_{xz}}x + \overline{\ell_{yz}}y + (\ell_{zz} - \ell)z &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Көлем деформациясы

Максаты: Екінші дәрежелі өсімшеге дейінгі өсімшені пайдаланып көлем деформациясын табу керек.



44-сурет. а, б – қабырғалары өспеген жағдай.
с, d – ығысуы болмаған жағдай.

$$dv = \delta(dv) = dx(1 + \ell_{xx})dy(1 + \ell_{yy})dz(1 + \ell_{zz}) =$$

$$= dxdydz(1 + \ell_{xx} + \ell_{yy} + \ell_{zz} + \ell_{xx}\ell_{yy} + \ell_{xx}\ell_{zz} + \ell_{yy}\ell_{zz} + \ell_{xx}\ell_{yy}\ell_{zz}) = dv(\ell_{xx} + \ell_{yy} + \ell_{zz}), \quad (2.46)$$

$$\frac{\delta(dv)}{dv} = \ell_{xx} + \ell_{yy} + \ell_{zz}. \quad (2.47)$$

Көлем деформациясы

$$\theta = \ell_{xx} + \ell_{yy} + \ell_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.48)$$

Деформация девиаторы жөніндегі негізгі мәлімет

Мынадай матрица

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \ell_{xx} & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{yx}} & \ell_{yy} & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{zx}} & \overline{\ell_{zy}} & \ell_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

деформация тензоры деп аталады.

1-ескерту. Деформация тензоры кернеу тензорына ұқсас болады.

Егер $\ell = \frac{1}{3}(\ell_{xx} + \ell_{yy} + \ell_{zz})$ нүктедегі орташа ұзару болса, онда мынадай матрица

$$(\mathbb{Ш}_e) = \begin{pmatrix} \ell & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

деформацияның шар тензоры деп аталады.

2-ескерту. Деформацияның шар тензоры кернеудің шар тензорына ұқсас.

Мынадай матрица

$$(\mathcal{D}_e) = \begin{pmatrix} \ell_{xx} - \ell & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{yx}} & \ell_{yy} - \ell & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{zx}} & \overline{\ell_{zy}} & \ell_{zz} - \ell \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

деформация девиаторы деп аталады.

3-ескерту. Деформация девиаторы кернеу девиаторына ұқсас.

Деформация тензорлары және геометриялық мәні

Егер денеден шексіз аз элемент (мысалы параллелепипед $dv = dx dy dz$) бөліп алсақ, онда деформацияның шар тензоры барлық бағытта да бірдей ұзарады, яғни элемент өзіне ұқсас болады да, тек көлемі өзгереді.

Егер көлемі өзгермеген жағдайда, деформация девиаторы денеден бөліп алынған элементтің пішінінің өзгеруін (ығысуын) көрсетеді.

Деформация тензоры – деформация девиаторы мен шар тензорының қосындысына тең болады да:

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \ell_{xx} - \ell & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{yx}} & \ell_{yy} - \ell & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{zx}} & \overline{\ell_{zy}} & \ell_{zz} - \ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

$$(\varepsilon) = (\mathcal{D}_e + \mathbb{Ш}_e). \quad (2.53)$$

Деформацияның физикалық қасиеттерін анықтайды, оның (заттың) беріктілігіне байланысты дененің көлемі мен пішіні өзгереді.

4-ескерту. Өртүрлі дене өзінің көлемі мен пішінінің өзгеруіне байланысты өздерін әртүрлі сезінеді және әртүрлі жауап қайтарады.

Деформация девиаторының инварианттары

Мақсаты:

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \ell_{xx} & \ell_{xy} & \ell_{xz} \\ \ell_{yx} & \ell_{yy} & \ell_{yz} \\ \ell_{zx} & \ell_{zy} & \ell_{zz} \end{pmatrix} - \text{деформация тензоры.} \quad (2.54)$$

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \ell_{xx} - \ell & \overline{\ell_{xy}} & \overline{\ell_{xz}} \\ \overline{\ell_{yx}} & \ell_{yy} - \ell & \overline{\ell_{yz}} \\ \overline{\ell_{zx}} & \overline{\ell_{zy}} & \ell_{zz} - \ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & \ell \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Табу керек: x, y, z координаттар жүйесінен ξ, η, ε координаттар жүйесіндегі инварианттарды шешу.

Төмендегі шама:

$$J_1 = \theta = (\ell_{xx} - \ell) + (\ell_{yy} - \ell) + (\ell_{zz} - \ell) = \ell_{xx} + \ell_{yy} + \ell_{zz} - 3\ell = 0. \quad (2.56)$$

– 1-дәрежедегі девиатор инварианты деп аталады.

Төмендегі шама:

$$\eta = J_2 = -\frac{1}{6}[(\ell_{xx} - \ell_{yy})^2 + (\ell_{yy} - \ell_{zz})^2 + (\ell_{zz} - \ell_{xx})^2 + 6(\ell_{xy} + \ell_{yz} + \ell_{zx})^2] \quad (2.57)$$

– 2-дәрежедегі девиатор инварианты деп аталады.

Төмендегі шама:

$$\lambda = J_3 = \begin{vmatrix} \ell_{xx} - \ell & \ell_{xy} & \ell_{xz} \\ \ell_{yx} & \ell_{yy} - \ell & \ell_{yz} \\ \ell_{zx} & \ell_{zy} & \ell_{zz} - \ell \end{vmatrix}. \quad (2.58)$$

– 3-дәрежедегі девиатор инварианты деп аталады.

1-ескерту. Жазылу формуласы жағынан J_1, J_2, J_3 – девиатор инварианттары кернеу инварианттарына ұқсас, айырмашылығы σ_{ij} – кернеуі ℓ_{ij} – деформациясымен, ал σ – кернеуі ℓ – орта деформациясымен алмастырылған.

2-ескерту. Бір координаттар жүйесінен екінші координаттар жүйесіне көшкенде:

J_1 – инвариантты шар бетінен квадраттың ауытқуын көрсетеді.

J_2 – инвариантты шар бетінен куб есе ауытқуын көрсетеді.

Соңғы деформация

Максаты: Деформация кезіндегі $N(\varepsilon + d\varepsilon, \eta + d\eta, \xi + d\xi)$ нүктесіндегі өсімше берілген.

$$d\xi = \frac{\partial u}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \xi, d\eta = \frac{\partial v}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \xi, d\varepsilon = \frac{\partial \omega}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial \omega}{\partial y} \eta + \frac{\partial \omega}{\partial z} \xi, \quad (2.59)$$

$$N_1(\varepsilon_1 = \varepsilon + d\varepsilon, \eta_1 = \eta + d\eta, \xi_1 = \xi + d\xi) \quad (2.60)$$

және

$$\varepsilon_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \xi, \eta_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \varepsilon + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \xi, \quad (2.61)$$

$$\xi_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial \omega}{\partial y} \eta + \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \xi.$$

1-ескерту. $\varepsilon_1, \eta_1, \xi_1$ – x векторының координаттары характеристикалық теңдеуде $\ell = \ell_1$, шамасының мәні бойынша анықталады.

Табу керек: $x'y'z'$ координаттар жүйесінен $x y z$ координаттар жүйесіне өткендегі деформация компоненттерін.

Шешуі: $x y z$ және $x'y'z'$ координаттар жүйесіндегі бағыттауыш косинустарды жазайық.

$$\ell = \frac{\varepsilon}{\rho}, \frac{\eta}{\rho} = m, \frac{\xi}{\rho} = n, dx = \varepsilon, dy = \eta, dz = \xi \quad (2.62)$$

$$\ell_1 = \frac{\varepsilon}{\rho_1}, \frac{\eta_1}{\rho_1} = m_1, \frac{\xi_1}{\rho_1} = n_1, \ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 = A^2 + B^2 + C^2. \quad (2.63)$$

(2.61)-формулань ρ_1 -ге бөліп (2.62) мен (2.63)-формулаарь арқылы

$$\ell_1 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right] \frac{\rho}{\rho_1}, m_1 = \left[\frac{\partial v}{\partial x} \ell + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right] \frac{\rho}{\rho_1}, n_1 = \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \ell + \frac{\partial \omega}{\partial y} m + \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) n \right] \frac{\rho}{\rho_1}. \quad (2.64)$$

Енді (2.64)-формулань квадраттап, $\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ формуласын пайдаланып, содан кейін $\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 = A^2 + B^2 + C^2$ формулась арқылы (2.64)-формуладан (ℓ_1, m_1, n_1) – бағыттауышы косинустарды шығарып тастаймыз. Нәтижесінде

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 \right], \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \right], \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 \right]. \quad (2.65)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}, 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial z}, 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (2.66)$$

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}$ – деформацияларь соңгы квадраттық негіздегі деформация деп аталады.

Төмендегі матрица

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \overline{\varepsilon_{xy}} & \overline{\varepsilon_{xz}} \\ \overline{\varepsilon_{yx}} & \varepsilon_{yy} & \overline{\varepsilon_{yz}} \\ \overline{\varepsilon_{zx}} & \overline{\varepsilon_{zy}} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} - \text{соңгы деформация тензорь деп} \quad (2.67)$$

аталады.

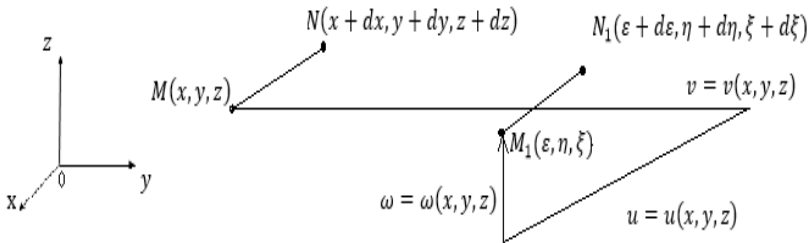
2-ескерту. Егер $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ – деформацияларь шексіз аз элементтің көлемін өзгертуге алып келсе, ал $\overline{\varepsilon_{xy}}, \overline{\varepsilon_{yz}}, \overline{\varepsilon_{zx}}$ – геометриялық мағынасы күрделі (анықталмаған) болады.

3-ескерту. Егер $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$,
 $\omega = \omega(x, y, z)$ жылжу функциясы болса, онда

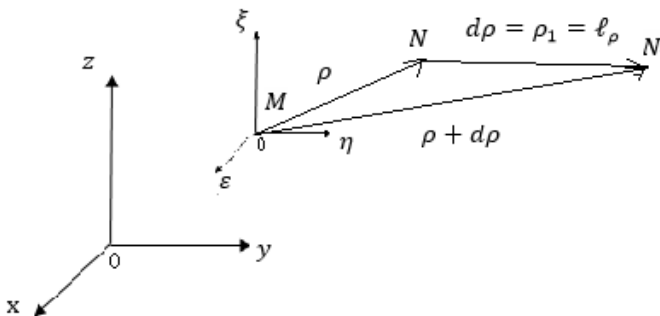
$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} dy dz + \\ & + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} dz dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz + \\ & + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dz^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 + \\ & \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} dz^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.68)$$

4-ескерту. Соңғы деформация компоненттері үлкен деформация компоненттерінің ықшамдалған түрі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2. \quad (2.69)$$



45-сурет

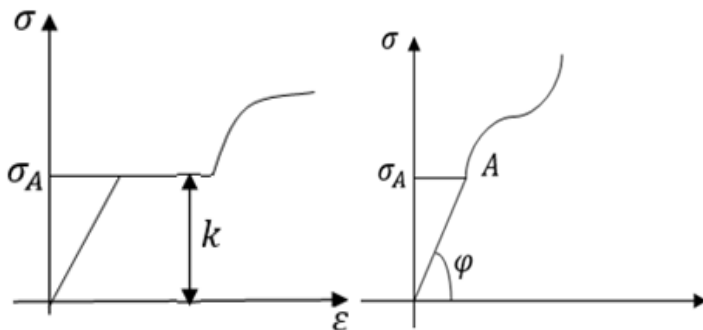


46-сурет

2.3. Жалпылама Гук заңы. Серпін күшінің қуаты және жұмысы

Заттың табиғи жаратылыс жағдайы туралы физикалық заң ретіндегі болжам

Болжам:



a

47-сурет

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= f_2(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{fx}, e_{xy}), \sigma_{yy} = \\ &f_2(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{fx}, e_{xy}), \sigma_{zz} = \\ &f_3(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}), \sigma_{yz} = \\ &f_4(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}), \\ \sigma_{xy} &= f_5(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}).\end{aligned}\quad (2.70)$$

1-ескерту. Егер түзу сызықты ОА байланысын кіші аз деформацияға қолдансақ, онда Гук заңына келеміз (47 а-сурет).

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz} + a_{14}e_{yz} + a_{15}e_{zx} + \\ &+ a_{16}e_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz} + a_{24}e_{yz} + a_{25}e_{zx} + \\ &+ a_{26}e_{xy}, \\ \sigma_{zz} &= a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz} + a_{34}e_{yz} + a_{35}e_{zx} + \\ &+ a_{36}e_{xy}, \quad - \quad - \quad - \quad -\end{aligned}$$

$$\sigma_{xy} = a_{61}e_{xx} + a_{62}e_{yy} + a_{63}e_{zz} + a_{64}e_{yz} + a_{65}e_{zx} + a_{66}e_{xy}. \quad (2.71)$$

2-ескерту. (2.70)-формуласының әр тендеуі тәуелсіз әрекет заңында көрсетілгендей, деформация компоненттерінің әрқайсысы кернеуге байланысты екен.

(2.71)-формула Гук заңдылығы деп аталады, ол біртекті денелерде ғана орын алады.

3-ескерту. Біртекті денелер изотроптық және анизотроптық деп екіге бөлінеді. Изотроптық денелердің физика-механикалық қасиеттері бірдей бағыттарда да, әртүрлі бағыттарда да бірдей болады.

Изотроптық денелерде Гук заңдылығы былай болады:

$$\sigma_{xx} = E e_{xx}, e_{yy} = e_{zz} = -e_{xx} = \nu e_{xx}. \quad (2.72)$$

E – Юнг модулі деп аталады, ν – Пуассон коэффициенті деп аталады.

$$m = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\nu} \text{ Пуассон саны.}$$

$$E \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right); \sigma = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ Ығысу модулі деп аталады.}$$

Ығысу модулі арқылы Гук мынандай байланыста болады.

$$\sigma_{xy} = \sigma e_{xy}, \sigma_{yz} = \sigma e_{yz}, \sigma_{zx} = \sigma e_{zx}. \quad (2.73)$$

4-ескерту. Заттың физика-механикалық қасиетінен екі коэффициентті ε мен σ -ді тапса болғаны үшінші коэффициентті солар арқылы өрнектейміз.

Деформацияны кернеу арқылы өрнектеу

Мақсаты:

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \text{ пен } (\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Деформация тензоры мен кернеу тензорларының арасындағы қатынасты өрнектеу.

$$e_{xx}^1 = \frac{1}{E} \sigma_{xx}, e_{xx}^{11} = \frac{1}{E} e_{yy} = -\frac{\sigma_{yy}}{E} * \nu,$$

$$e_{xx}^{111} = \frac{1}{E} e_{zz} = -\frac{\nu * \sigma_{zz}}{E}. \quad (2.75)$$

(2.73)-(2.75) теңдеулеріне

$$e_{xx} = e_{xx}^1 + e_{xx}^{11} + e_{zz}^{111} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (2.76)$$

біріктіріміз.

Сол сияқты

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], e_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]. \quad (2.77)$$

Төмендегі өрнектер:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})], e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})],$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})], e_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz}, \quad (2.78)$$

$$e_{zx} = \frac{1}{G} * \sigma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx}, e_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy}.$$

– деформацияны кернеу арқылы өрнектеу, Гуктың жалпылама заңы деп аталады.

Төмендегі өрнектер, егер

$$\theta = (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}),$$

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} \sigma \sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (2.79)$$

көлемдік деформация мен нормаль кернеулерінің созындысы арасындағы байланыс, *инварианттар* да болады, онда

$$\sigma_{xx} = \lambda \theta + 2\mu e_{xx}, \sigma_{yy} = \lambda \theta + 2\mu e_{yy}, \sigma_{zz} = \lambda \theta + 2\mu e_{zz}, \sigma_{xy} = \mu e_{xy}, \sigma = (3\lambda + 2\mu) \theta. \quad (2.80)$$

Мұндағы λ, μ – Ламе коэффициенттері.

Кернеуді деформация арқылы өрнектеу

Тақырып мақсаты:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})], e_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], e_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz}, \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} \sigma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx}, \theta = \frac{1-2\nu}{E} \sigma. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Мұнда деформация кернеу арқылы өрнектелген, $\sigma_{ij} = f(e_{ij})$ табу керек.

$$\begin{aligned} \text{Шешуі: } \sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu e_{yy}, \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu e_{zz}, \\ \sigma_{yz} &= \mu e_{yz}, \sigma_{zx} = \mu e_{zx}, \sigma_{xy} = \mu e_{xy}. \end{aligned}$$

$$\text{Мұндағы} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.82)$$

(2.80)-формуласы *кернеуді деформация арқылы өрнектеу* деп аталады, ал λ, μ – Ламе коэффициенттері деп аталады, оларда E, G, ν қатты дененің серпімділік қасиеттерін көрсетеді және $\mu = G$.

Юнг модулі – E , Пуассон коэффициенті – ν Ламе коэффициенттері арқылы былай өрнектеледі:

$$\begin{aligned} E &= \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \sigma = (3\lambda+2\mu)\theta, \sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\ \theta &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Орта немесе октаэдрлік кернеу, кернеу деформациясы арқылы былай өрнектелуі:

$$\frac{1}{3}\sigma = N_0, N_0 = (3\lambda + 2\mu)e, \frac{1}{3}\theta = e. \quad (2.84)$$

Кернеу девиатор мен деформация девиатор тензорының арасындағы қатынас

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 \\ \sigma_{yx} - N_0 \\ \sigma_{zx} - N_0 \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} e_{xx} - e \\ e_{xy} - e \\ e_{xz} - e \end{pmatrix}$$

$$(Ds) = 2_{\mu}(D_{\varepsilon}). \quad (2.85)$$

Егер $K=\lambda \frac{2}{3} \mu$ деген көлем модулін енгізсек, онда

$$N_0 = K\theta. \quad (2.86)$$

Серпімділік күшінің қатты денедегі жұмысы

Тақырып мақсаты:

Денеден ұзындығы, көлденеңі және биіктігі dx, dy, dz болатын элементін алу арқылы нүктедегі компоненттерін көрсетейік.

$$\delta(A_{xx}) = \sigma_{xx} \delta e_{xx} dx dy dz, \delta(A_{yy}) = \sigma_{yy} \delta e_{yy} dx dy dz, \\ \delta(A_{zz}) = \sigma_{zz} \delta e_{zz} dx dy dz. \quad (2.87)$$

Егер σ_{xx} кернеуі ox бағытынағы e_{xx} – салыстырмалы ұзындық бойынша деформация.

$$\delta(A_{xz}) = \sigma_{xz} \delta e_{xz} dx dy dz, \delta(A_{yz}) = \sigma_{yz} \delta e_{yz} dx dy dz, \\ \delta(A_{xy}) = \sigma_{xy} \delta e_{xy} dx dy dz. \quad (2.88)$$

Егер (2.88)-формула арқылы серпімділік күшінің жұмысын жазсақ, онда

$$\delta A = \frac{\delta(dT)}{dr} = \sigma_{xx} \delta e_{xx} + \sigma_{yy} \delta e_{yy} + \sigma_{zz} \delta e_{zz} + \\ + \sigma_{yz} \delta e_{yz} + \sigma_{zx} \delta e_{zx} + \sigma_{xy} \delta e_{xy}, \quad (2.89)$$

$$\text{бірге тең көлемдегі жұмысы серпімділік күші арқылы} \\ \text{өрнектелген немесе } \delta(dT) = (\sigma_{xx} \delta e_{xx} + \sigma_{yy} \delta e_{yy} + \sigma_{zz} \delta e_{zz} + \\ + \sigma_{yz} \delta e_{yz} + \sigma_{zx} \delta e_{zx} + \sigma_{xy} \delta e_{xy}) dv \quad (2.90)$$

Мұндағы dv -көлем өсімшесі болады.

Серпімділік күшінің потенциалы

Ішкі серпімділік күштері потенциал болсын, яғни серпімділік күшінің жұмысы толығымен потенциалдық энергияға ауысады да, серпімділік деформациясына жұмыс істейді. Содан кейін деформация қайтқанда толығымен қайтадан серпімділік күшінің жұмысына қайтады.

Егер біз серпімділік энергиясын

$$w = F(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}) \quad (2.91)$$

1-ге тең көлемдегі дененің энергиясын осылай белгілесек, онда жоғарыдағы болжам бойынша жылжу (орнын ауыстыру) функциясының салдарынан жұмыс орын алады:

$$\delta A = \sigma_{xx} \delta e_{xx} + \sigma_{yy} \delta e_{yy} + \sigma_{zz} \delta e_{zz} + \sigma_{yz} \delta e_{yz} + \sigma_{zx} \delta e_{zx} + \sigma_{xy} \delta e_{xy}. \quad (2.92)$$

Бұл жұмыс толығынан серпімділік энергиясынан тәуелді болғандықтан өсімшесі былай болады, яғни

$$\delta A = \delta w. \quad (2.93)$$

Толық өсімше δw (екінші дәрежедегі өсімшеге дейін):

$$\begin{aligned} \delta w = & \frac{\partial w}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial w}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \frac{\partial w}{\partial e_{zz}} \delta e_{zz} + \frac{\partial w}{\partial e_{yz}} \delta e_{yz} + \\ & + \frac{\partial w}{\partial e_{zx}} \delta e_{zx} + \frac{\partial w}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy} \end{aligned} \quad (2.94)$$

(2.93)-тен (2.92) мен (2.94)-тендеулері деформацияның кез келген мәндерінде орындалуы керек, өсімшесін қосқанда да, яғни

$$\delta e_{xx}, \delta e_{yy}, \delta e_{zz}, \delta e_{yz}, \delta e_{zx}, \delta e_{xy}. \quad (2.95)$$

көрсетілген шарттар орындалғанда, яғни $\delta A = \delta w$ болғанда (2.92) және (2.94)-формулалардан табамыз:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \frac{\partial w}{\partial e_{xx}}, \sigma_{yy} = \frac{\partial w}{\partial e_{yy}}, \sigma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial e_{zz}}, \\ \sigma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial e_{yz}}, \sigma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial e_{zx}}, \sigma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial e_{xy}}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Егер ішкі күштер потенциал болғанда, кернеудің нүктедегі компоненттері (2.96)-формуласы арқылы өрнектеледі, яғни (2.96) формула *потенциал шарттары* болып есептелінеді.

5-ескерту. Егер функция $\Phi(x, y, z)$ дифференциалдық теңдеудің

$$d\Phi = \mathcal{U}(x, y, z)dx + V(x, y, z)dy + w(x, y, z)dw \quad (2.97)$$

толық өсімшесі болса, онда

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, W = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.98)$$

болады, жылжу функциялары $\Phi(x, y, z)$ – потенциалын игереді және қатандық айналдыру деформациясы мен қатандық кернеуінің болмауына әкеледі.

Егер берілген дене изотроптік болса, онда серпімділік энергиясы деформация компонентері арқылы төменгідей өрнектеледі:

$$2w = (\lambda + 2\mu)(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2\lambda(e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx}) + \mu(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2). \quad (2.99)$$

Егер берілген дене изотроптік болса, онда серпімділік потенциал энергиясы кернеу компонентері арқылы төменгідей өрнектеледі:

$$2w = \frac{1}{E}[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\sigma(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 2(1 + \sigma)(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2)]. \quad (2.100)$$

6-ескерту. Көптеген эксперимент арқылы деформацияны зерттеу сыртқы күштердің әсерінен, кейде сырттан күш әсер етпей-ақ дененің ішінде алғашқы кернеу қалып қоюы мүмкін, соның салдарынан қалдық деформациясы болуы мүмкін.

3. ТҮТІКШЕ КЕЛГЕН КОНСТРУКЦИЯНЫҢ ИЛУИҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕР АРҚЫЛЫ ЕСЕПТЕУ

3.1. Ұсыныс модельдері

Түтікше келген конструкциялардың майысуын, беріктігін есептеу үшін төртінші ретті коэффициенттері тұрақты дифференциальдық теңдеуді пайдаланамыз [15],[16]-[17].

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \eta_1 \frac{dw}{dx} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x. \quad (3.1)$$

Мұндағы D – деформацияға дейінгі түтікше келген конструкцияның кесе-көлденең қимасының қатаңдығы; B – бөлу күшінің коэффициенті Коссера негізінде континуумінің тік бағытталған моментіне байланысты ху жазықтығындағы $\mu_{yx} = -2B \frac{d^2 w}{dx^2} = 4B \chi_{yx}, \chi_{yx}$ – zy жазықтығындағы пішін қисығының майысуы (кривизна кривой); N_1 – бойлай бағытталған критикалық күш, $N_{кр}$ -дің коэффициенті; η_1 – демпфердің тұтқырлығы бұрыштама жылжуға байланысты ығыстырып созу (қысу) күштерінің коэффициенті; K – серіппе қаттылығы нормаль күштерінің коэффициенті; $W = w(x)$ – иілу, $q_k = 10,7\lambda k \sqrt{1 - v^2} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} (R/L)$ немесе $q_k = \frac{0,85E}{(1-v^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} (R/L)$ – сыртқы критикалық активті күш, h – түтікше конструкция қалыңдығы, L – ұзындығы, R – кесе-көлденең қиманың ең аз радиусы.

Дербес жағдайлары:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q_k f(x) \sin \omega_n x, \quad (\text{Б-1 моделі})$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x. \quad (\text{Б-2 моделі})$$

Егер конструкция Винклер негізінде жатса:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \eta \frac{dw}{dx} = q_k f(x) \sin \omega_n x. \quad (\text{Б-3 моделі})$$

Егер конструкция Соколов негізінде жатса:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \eta \frac{dw}{dx} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x. \quad (\text{Б-4 моделі})$$

Егер конструкция Пастернак негізінде жатса:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x. \quad (\text{Б-5 моделі})$$

Егер конструкция Винклер негізінде жатса және кесе-көлденең q_k күштерімен қатар бойлай N_k күш түсіп тұрса, онда:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x. \quad (\text{Б-6 моделі})$$

Егер конструкция Винклер негізінде жатса және кесе-көлденең күштермен бірге бөлу күші түсіп тұрса, онда:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} = q_k f(x) \sin \omega_n x \quad (\text{Б-7 моделі})$$

Айнымалы шама $\varepsilon(x)$ – түтікше келген конструкцияның кесе көлденең қимасының қаттылығы.

13-есеп. Түтікше келген конструкцияның майысуын математикалық моделі бойынша есептеу Б-7

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} = q_k, \quad (3.2)$$

$$q_k = 10,7 \lambda_k^4 \sqrt{1 - v^2} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (3.3)$$

Жалпы шешімі

$$W(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{L}{B} x + \frac{1}{4} \left(x^2 - 2 \frac{B}{HB} \operatorname{sh} \beta x \right) C_1 + \frac{1}{2} C_2 x + 2 \frac{B}{HB} C_3 \sqrt[4]{\frac{HB}{K}} \operatorname{sh} \beta x + C_4, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{HB}{K}}. \quad (3.4)$$

Мұндағы (HB) – тік түсірілген күштің жанасу нүктесіндегі коэффициенті.

Шектік шарттары

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{q_k}{2D} \quad (3.5)$$

$$w(x)|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.6)$$

Тік бағытталған кесе-көлденең күштің конструкциямен жанасу нүктесіндегі шарт (3.5) формуласынан

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx}/x=0=0 \Rightarrow \left\| \begin{array}{c} \text{3.3 формуласы} \\ \text{арқылы} \end{array} \right\| \Rightarrow -\frac{D}{B} - \frac{1}{2}C_1 B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} + \\ \frac{1}{2}C_2 + C_3 B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} C_1 + C_2 + 4B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} C_3 = \\ = \frac{2D}{B} \Rightarrow a_{11}c_1 + c_2 + a_{13}c_3 = \frac{2D}{B}, \end{aligned}$$

$$\text{мұндағы} \quad a_{11} = -B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}}; \quad a_{13} = 4B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}}. \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3w}{dx^3}/x=0=\frac{q_k}{2D} \Rightarrow \left\| \begin{array}{c} \text{3.3 формуласы} \\ \text{арқылы} \end{array} \right\| \Rightarrow 2 - \frac{1}{2}C_1 B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} - \\ \frac{2B}{K} C_3 = \frac{q_k}{2D} \Rightarrow -\frac{1}{2}B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} C_1 - \frac{2B}{K} C_3 = \frac{q_k}{D} - 2 \Rightarrow -\frac{1}{8}a_{13}c_1 - \\ -\frac{2B}{K} C_3 = \frac{q_k}{D} - 2 \Rightarrow a_{13}c_1 + \frac{16B}{K} C_3 = -8 \left(\frac{q_k}{D} - 2 \right) \Rightarrow a_{13}c_1 + \\ + b_{13}c_3 = -8 \left(\frac{q_k}{D} - 2 \right), \text{мұндағы } b_{13} = \frac{16B}{K}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Шектік шарт (3.6) формуласынан } w/x=L=0 \Rightarrow \\ \left\| \begin{array}{c} \text{3.3 формуласы} \\ \text{арқылы} \end{array} \right\| \Rightarrow \frac{1}{12} \left(4L^3 - 12 \frac{D}{B} L \right) + \frac{1}{4} \left(L^2 - \right. \\ \left. 2 \frac{B}{(HB)} \text{sh}\beta L \right) C_1 + \frac{1}{2} C_2 L + 2B C_3 \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \text{sh}\beta L + C_4 = \\ 0. \left(L^2 - 2 \frac{B}{HB} \text{sh}\beta L \right) C_1 + 2L C_2 + 8B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \text{sh}\beta L C_3 + 4C_4 = \\ -\frac{1}{3} \left(4L^3 - 12 \frac{D}{B} L \right) \Rightarrow C_{11}C_1 + C_{12}C_2 - 8Ba_{11}\text{sh}\beta L C_3 + 4C_4 = \\ -\frac{1}{3} \left(4L^3 - 12 \frac{D}{B} L \right) \Rightarrow C_{11}C_1 + C_{12}C_2 - C_{13}C_3 + 4C_4 = \\ -\frac{4}{3} \left(L^3 - 3 \frac{D}{B} L \right), \\ C_{11} = L^2 - 2 \frac{B}{HB} \text{sh}\beta L; \quad C_{12} = 2L; \quad C_{13} = -8Ba_{11}\text{sh}\beta L. \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}/x=L=0 \Rightarrow \left\| \begin{array}{c} \text{3.3 формуласы} \\ \text{арқылы} \end{array} \right\| \Rightarrow 2L + \frac{1}{2}C_1$$

$$\left(1 - B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \operatorname{sh} \beta L\right) + 2BC_3 \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \operatorname{sh} \beta L = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a_{13}}{4} \operatorname{sh} \beta L\right) C_1 + 2a_{11} \operatorname{sh} \beta L C_3 = -2L &\Rightarrow (4 - \\ a_{13} \operatorname{sh} \beta L) C_1 + 16a_{11} \operatorname{sh} \beta L = -16L &\Rightarrow \left(4 - a_{13} \frac{C_{13}}{8Ba_{11}}\right) C_1 + \\ + 16 \frac{C_{13}}{8B} C_3 = -16L &\Rightarrow \left(4 - \frac{a_{13} C_{13}}{a_{11} 8B}\right) C_1 + 2 \frac{C_{13}}{B} C_3 = -16L. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Сонымен C_1, C_2, C_3, C_4 -ті табу үшін алгебралық теңдеулер жүйесін құрамыз.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}c_1 + b_{13}c_3 &= 8\left(\frac{q_k}{D} - 2\right) \\ \left(\frac{4a_{13}c_{13}}{a_{11}8B}\right)C_1 + 2\frac{C_{13}}{B}C_3 &= -16L \\ a_{11}c_1 + c_2 + a_{13}c_3 &= \frac{2D}{B} \\ c_{11}c_1 + c_{12}c_2 - c_{13}c_3 + 4c_4 &= -\frac{4}{3}\left(L^3 - 3\frac{D}{B}L\right) \end{aligned} \right\}. \quad (3.11)$$

(3.11) теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шешіп төмендегі мәндерді аламыз:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4B^2L}{\Delta} + \frac{2B^2}{\Delta} \left(2 - \frac{q_k}{D}\right) \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \operatorname{sh} \beta L, \\ C_2 &= \frac{2D}{B} + \frac{4B^3L}{(HB)\Delta} \sqrt[4]{\frac{HB}{K}} \left(1 + \sqrt[4]{k^3(HB)}\right) \\ &\quad + \frac{2B^2}{\Delta} \left(\frac{q_k}{D} - 2\right) \sqrt[4]{\frac{k^3}{(HB)}} \left(k - \frac{1 + HB}{HB}\right) \sqrt[4]{\frac{HB}{K}} B \operatorname{sh} \beta L, \\ C_3 &= \frac{2B^2L}{\Delta} \sqrt[4]{\frac{k^3}{(HB)}} - \frac{B}{2\Delta} \left(\frac{q_k}{D} - 2\right) \left(k - \sqrt[4]{\frac{k^3}{(HB)}} B \operatorname{sh} \beta L\right), \end{aligned}$$

$$C_4 = \left(\frac{5D}{B} - \frac{1}{3}L^2\right)L + 4\frac{2B^2}{\Delta} \left[L^2(2\sqrt{k}B + 2B - 1) + \frac{2B}{HB} \left(1 - BL\sqrt{k}\right) \text{sh}\beta L \right] - \frac{2B^2}{\Delta} \left(\frac{q_k}{D} - 2\right)^4 \sqrt{\frac{k^3}{(HB)}} \left[\frac{2B}{(HB)L} \text{sh}\beta L - \frac{L}{k} \left(1 + 2B \frac{1+HB}{HB} \sqrt{\frac{HB}{k}}\right) \right]. \quad (3.12)$$

$$\text{Мұндағы } \Delta = B^2 + \frac{k - \sqrt[4]{k(HB)^3}}{\sqrt{kHB}} \text{sh}\beta L. \quad (3.13)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 -тің мәндерін жалпы шешімге қойып:

$$\begin{aligned} W(x) = & \frac{1}{3}x^3 + \frac{B^2}{2\Delta} \left[2L - \left(\frac{q_k}{D} - 2\right)^4 \sqrt{\left(\frac{k}{HB}\right)^3} \text{sh}\beta L \right] x^2 + \\ & + \frac{2B^2}{\Delta} \left[2B^4 \sqrt{\frac{1}{k(HB)^3}} \left(1 + \sqrt[4]{k(HB)^3}\right) + \sqrt{\frac{1}{k(HB)}} \left(\frac{q_k}{D} - 2\right) \right] x + \\ & \left(k - \frac{1+HB}{HB} \sqrt{\frac{HB}{k}} \text{sh}\beta L \right) \\ & + \frac{B}{2\Delta} \left\{ \left(\frac{q_k}{D} - 2\right) \left[k \mp \sqrt[4]{\frac{k^3}{(HB)}} \left(1 + \frac{2B}{\sqrt{HB}}\right) B \text{sh}\beta L \right] + \frac{4B^2}{HB} \right\} \text{sh}\beta x + \\ & + \left(\frac{2D}{B} - \frac{1}{3}L^2\right)L + \frac{B^2}{\Delta} \left[L^2(2\sqrt{k}B + 2B - 1) + \frac{2B}{HB} (1 - BL\sqrt{k}) \text{sh}\beta L \right] - \\ & - \frac{2B^2}{\Delta} \left(\frac{q_k}{D} - 2\right)^4 \sqrt{\left(\frac{k}{HB}\right)^3} \left[\frac{2B}{(HB)L} \text{sh}\beta L - \frac{L}{\sqrt{k}} \left(1 + 2B \frac{1+HB}{HB} \sqrt{\frac{HB}{k}}\right) \right], \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\text{мұндағы } \Delta = B^2 + \frac{k - \sqrt[4]{k(HB)^3}}{\sqrt{kHB}} \text{sh}\beta L. \quad (3.15)$$

14-есеп. Математикалық моделі

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} = q_k, \quad (3.16)$$

$$q_k = 10,7\lambda_k \sqrt[4]{1 - v^2} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (3.17)$$

Түтікше келген конструкция ұзын болған жағдайдағы шектік шарты

$$0.005 < \frac{h}{R} < 0.01, 0.1 < \frac{h}{R} < 0.3 \quad \text{болса, онда } c_1 = c_2 = 0 \quad (3.18)$$

$$w/x = L = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} / x = L = 0 \quad (3.19)$$

(шарнирлі екі шетінен бекілген)

(3.16) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$W(x) = \frac{1}{12} \left(4x^3 - 12 \frac{D}{B} x \right) + \frac{1}{4} \left(x^2 - 2 \frac{B}{HB} \operatorname{sh} \beta x \right) C_1 + \frac{1}{2} C_2 x + 2BC_3 \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)}} \operatorname{sh} \beta x + C_4 \quad (3.20)$$

Жалпы шешімді, яғни (3.20)-ны (3.19) формуласына қойып (3.18) шартын пайдаланып табамыз:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 &\Rightarrow -16B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \operatorname{sh} \beta L C_3 = -16L \Rightarrow C_3 = \\ &= \frac{\sqrt[4]{K(HB)^3}}{B} \frac{L}{\operatorname{sh} \beta L} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} W(x)|_{x=L} = 0 &\Rightarrow 2BC_3 + \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)}} \operatorname{sh} \beta L + C_4 = -\frac{1}{12} (4L^3 - \\ 12 \frac{D}{B} L) &\Rightarrow \left(2B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)}} \operatorname{sh} \beta L \right) C_3 + C_4 = -\frac{1}{3} \left(L^3 - 3 \frac{D}{B} \right) L \Rightarrow C_4 = \\ -\frac{1}{3} \left(L^3 - 3 \frac{D}{B} \right) L &- \left(2B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)}} \operatorname{sh} \beta L \right) C_3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

C_3 -тің мәнін (3.21) формуласына қойып, C_4 -ті шығарамыз.

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{1}{3} \left(L^3 - 3 \frac{D}{B} \right) L - 2 \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)}} \sqrt[4]{K(HB)^3} \Rightarrow \\ &C_4 - \frac{1}{3} \left(L^3 - 3 \frac{D}{B} L \right) - 2\sqrt{HB}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Енді C_3 пен C_4 -тің мәндерін төмендегі жалпы шешімге қойып $W(x) = \frac{1}{12} \left(4x^3 - 12 \frac{D}{B} x \right) + 2B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)}} C_3 \operatorname{sh} \beta x + C_4 =$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{D}{B}x + 2\sqrt{HB} \frac{L}{\text{sh}\beta L} \text{sh}\beta x - \frac{1}{3}(L^2 - 3\frac{D}{B})L - 2\sqrt{HB}.$$

Сонымен:

$$W(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{D}{B}x + 2\sqrt{HB} \frac{L}{\text{sh}\beta L} \text{sh}\beta x - \frac{1}{3}(L^2 - 3\frac{D}{B})L - 2\sqrt{HB}. \quad (3.24)$$

$$\left\{\frac{D}{B}; HB; \beta\right\}. D/B = \{0, 1, 0, 2, \dots, 0, 5\} \quad HB = \{1430-1630\}.$$

15-есеп. Математикалық модель:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left[\varepsilon(x) \frac{d^2w}{dx^2}\right] + 2B \frac{d^3w}{dx^3} = q_k. \quad (3.25)$$

$$q_k = \lambda x \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_x \gamma^2} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}. \quad (3.26)$$

Жалпы шешімі:

$$W(x) = \int \left\{ e^{-2B \int \frac{dx}{\varepsilon(x)}} \left[\int \frac{a_x(x^3 + c_1 + c_2)}{\varepsilon(x)} e^{2B \int \frac{dx}{\varepsilon(x)}} dx + C_3 \right] \right\} dx + C_4. \quad (3.27)$$

$$\text{Егер } \varepsilon(x) = \frac{L}{x}, \text{ онда } W(x) = \frac{1}{12} \left(4x^3 - 12 \frac{L}{B} x \right) + \frac{1}{4} (C_1 x^2 + 2C_2 x) + 4C_3 \int e^{-\frac{B}{L} x^2} dx - \frac{1}{2} C_1 \int e^{-\frac{B}{L} x^2} \left[\int e^{\frac{B}{L} x^2} dx \right] dx + C_4. \quad (3.28)$$

Бірінші ықшамдау арқылы:

$$W(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{L}{B}x + \frac{1}{4} \left(x^2 - 2 \frac{B}{HB} \text{sh}\beta x \right) C_1 + \frac{1}{2} C_2 x + 2BC_3 \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \text{sh}\beta x + C_4, \beta = \sqrt[4]{\frac{HB}{K}}. \quad (3.29)$$

Шеттік жағдайы:

$$\left. \begin{aligned} W(x)|_{x=0} &= 0; \quad \frac{dw}{dx}|_{x=0} = 0 \\ \frac{d^2w}{dx^2}|_{x=L} &= 0; \quad \frac{d^3w}{dx^3}|_{x=L} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.30)$$

$$\frac{dw}{dx} = x^2 - \frac{L}{B} + \frac{1}{4} \left(x - 2B \sqrt[4]{\frac{1}{K(HB)^3}} \text{Ch}\beta x \right) C_1 + \frac{1}{2} C_2 +$$

$$+2B\sqrt{\frac{1}{K(HB)}} \operatorname{Ch} px C_3, \quad (3.31)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2x + \frac{1}{4} \left(2 - 2B\sqrt{\frac{1}{K(HB)}} \operatorname{Sh} px \right) C_1 + 2B^4 \sqrt{\frac{1}{K(HB)}} C_3 \operatorname{sh} px, \quad (3.32)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = 2 - \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{1}{K^3(HB)}} \operatorname{Ch} \beta x C_1 + 2B \frac{1}{K} \operatorname{Ch} \beta x C_3. \quad (3.33)$$

(3.29) және (3.30) шеттік шарттардан

$$\begin{aligned} W(x)|_{x=0} = 0 &\Rightarrow C_4 = 0 \\ \frac{dw}{dx}|_{x=0} = 0 &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} (1.8) \\ \text{арқылы} \end{array} \right| \Rightarrow -B^4 \sqrt{\frac{1}{K(HB)^3}} C_1 + C_2 + \\ + 4B^4 \sqrt{\frac{1}{K(HB)}} C_3 &= \frac{2D}{B} = a_{11} C_1 + C_2 + a_{13} C_3 = \frac{2D}{B}, \\ \text{мұндағы } a_{11} &= -B^4 \sqrt{\frac{1}{K(HB)^3}}, a_{13} = 4B^4 \sqrt{\frac{1}{K(HB)}}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2}|_{x=L} = 0 &\Rightarrow 2L + \left(\frac{1}{2} B \sqrt{\frac{1}{K(HB)}} \operatorname{Sh} \beta L \right) C_1 + \\ \left(2B^4 \sqrt{\frac{1}{K^3(HB)}} \operatorname{Sh} pL \right) C_3 &= 0, \\ (4 - a_{13} \operatorname{Sh} pL) C_1 - 16a_{11} \operatorname{Sh} \beta L C_3 &= -16L \Rightarrow \\ (4 - b_{11}) C_1 - 16b_{13} C_3 &= 16L, \\ b_{11} &= +a_{13} \operatorname{Sh} \beta L, b_{11} = a_{11} \operatorname{Sh} \beta L. \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3}|_{x=L} = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} B - \sqrt{\frac{1}{K^3(HB)}} \operatorname{Ch} pL C_1 + 2B \frac{1}{K} \operatorname{Ch} \beta L C_3 = 0.$$

$$\begin{aligned} B^4 \sqrt{\frac{1}{K^3(HB)}} \operatorname{Ch} \beta L C_1 - 4B \frac{1}{K} \operatorname{Ch} pL C_3 &= 4 \quad C_{11} C_1 - C_{13} C_3 = 4, \\ \text{мұндағы } C_{11} &= B^4 \sqrt{\frac{1}{K^3(HB)}} \operatorname{Ch} \beta L, C_{13} = 4B \frac{1}{K} \operatorname{Ch} \beta L. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Сонымен алгебралық теңдеулер жүйесінен C_1, C_2, C_3 -ті табамыз

$$\left. \begin{aligned} A_{11}C_1 + C_2 + a_{13}C_3 &= \frac{2D}{B} \\ (4 - b_{11})C_1 - 16b_{13}C_3 &= -16L \\ C_{11}C_1 - C_{13}C_3 &= 4 \end{aligned} \right\}. \quad (3.37)$$

(3.36)-формуласын пайдаланып, (3.37) жүйесінің үшінші және екінші теңдеулерінен:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 4 - b_{11} & -16b_{13} \\ C_{11} & -C_{13} \end{vmatrix} = -(4 - b_{11})C_{13} + 16b_{13}C_{11} = \\ &= \frac{4BCh\beta L}{K} \left[4 - a_{13} \operatorname{Sh}\beta L + 4a_{11} \operatorname{Sh}\beta LK + \sqrt[4]{K^3(\text{НБ})} \right] = \\ &= \frac{4BCh\beta L}{K} \left[4 + (4a_{11}K\sqrt[4]{K^3(\text{НБ})} - a_{13}) \operatorname{Sh}\beta L \right] = \frac{4BCh\beta L}{K} \left[4 - \right. \\ &\left. - 4B(1 + K^2) \frac{1}{\sqrt{K(\text{НБ})}} \operatorname{Sh}\beta L \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Сонымен } \Delta h - 16Ch\beta L \frac{B}{K} \left[1 + \frac{B}{\text{НБ}} \left(1 - \sqrt[4]{\left(\frac{\text{НБ}}{K}\right)^3} \right) \operatorname{Sh}\beta L \right]. \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 4 - b_{11} & -16L \\ C_{11} & 4 \end{vmatrix} = 4(4 - b_{11}) + 16LC_{11} \\ &= 16 - 4b_{11} + 16LC_1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} (3.33) \\ \text{формуладан} \end{matrix} \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta_3 &= 16 \left| 1 + \frac{B}{(\text{НБ})} \left(\sqrt[4]{\frac{\text{НБ}^3}{K}} LCh\beta L - \sqrt{\frac{\text{НБ}}{K}} \operatorname{Sh}\beta L \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$C_3 = \frac{16}{\Delta} \left[1 + \frac{B}{(\text{НБ})} \left(\sqrt[4]{\frac{\text{НБ}^3}{K}} LCh\beta L - \sqrt{\frac{\text{НБ}}{K}} \operatorname{Sh}\beta L \right) \right]. \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -16L & -16b_{13} \\ 4 & -C_{13} \end{vmatrix} = 16LC_3 + 64b_{13} = \left| \begin{matrix} (3.33) \\ \text{формуладан} \end{matrix} \right| \Rightarrow \\ \Delta_1 &= 64 \frac{B}{K} \left[LCh\beta L - \sqrt[4]{\frac{\text{НБ}^3}{K}} \operatorname{Sh}\beta L \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$C_1 = \frac{64}{\Delta} \frac{B}{K} \left[LCh\beta L - \sqrt[4]{\frac{HB^3}{K}} Sh\beta L \right]. \quad (3.42)$$

Енді (3.37) теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуінен $C_2 =$

$$\frac{2D}{B} - a_{13}C_1 - a_{33}C_3 = \frac{2D}{B} - \frac{16}{\Delta} \left\{ 4a_{11} \frac{B}{K} \left[LCh\beta L - \sqrt[4]{\frac{HB^3}{K}} Sh\beta L \right] - \right.$$

$$a_{13} \left[1 + \frac{B}{HB} \left(\sqrt[4]{\frac{HB^3}{K}} LCh\beta L - \sqrt{\frac{HB}{K}} Sh\beta L \right) \right] =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{мыналардың негізінде (1.21), (1.23)} \\ \text{және (1.13)} \end{array} \right| = \frac{2D}{B} + \frac{64}{\Delta} \frac{B}{K} \left\{ \frac{B}{K} - \right.$$

$$\sqrt[4]{\frac{HB^3}{K}} \left[LCh\beta L - \sqrt[4]{\frac{HB^3}{K}} Sh\beta L \right] + \sqrt[4]{\frac{K}{HB}} \left[1 + \frac{B}{HB} \left(\sqrt[4]{\frac{HB^3}{K}} LCh\beta L - \right. \right.$$

$$\left. \left. \sqrt{\frac{HB}{K}} Sh\beta L \right) \right] \left. \right\} \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{2D}{B} + \frac{64}{\Delta} \frac{B}{K} \left[\sqrt[4]{\frac{K}{HB}} + \frac{B}{K} \left(\sqrt[4]{\left(\frac{K}{HB}\right)^3} + \sqrt{\frac{K}{HB}} Ch\beta L + \frac{B}{K HB} \left(\sqrt{\frac{K}{HB}} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \sqrt[4]{\frac{K}{HB}} \right) Sh\beta L \right) \right] \quad (3.43)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 - тің мәндерін дифференциалдық теңдеудің жалпы шешіміне қойып, түзу сызықты жылжу функциясын аламыз.

Теңдеудің жалпы шешіміне қойып түзу сызықты жылжу (дербес шешім) формуласын аламыз.

$$W(x) = \frac{1}{3}x^3 + \Delta_1 \left\{ x^2 + 2 \left[\beta^2 + \frac{B}{K} (1 + \beta) LCh\beta L + \frac{B}{HB} \beta (1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \beta^3 \right) Sh\beta L \right] x - 2 \left[1 + 2 \frac{B}{HB} \beta^3 LCh\beta L - \frac{B}{HB} (1 + \beta) Sh\beta L \right] Sh\beta x \right\}, \quad (3.44)$$

мұндағы $\Delta_1 = \frac{16}{\Delta} \frac{B}{K} \frac{1}{\beta^3}$, $\Delta = -\frac{B}{K} \left[1 + (1 - \beta) \frac{B}{HB} Sh\beta L \right] Ch\beta L$. (3.45)

16-есеп. Егер бұған кесе-көлденең тік бағытталған күш - q_K түскенде, яғни $B=0$ жағдайында және $\varepsilon(x) = \frac{D}{x}$, түтікше келген конструкцияның иілуін (қабысуын) есептеу керек.

Шешуі: Математикалық моделі

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{dw}{dx^2} \right] = q_k, \quad q_k = 10,7 \lambda_k^4 \sqrt{i - v^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{h} \right),$$

$$\varepsilon(x) = \frac{D}{x} \quad (3.46)$$

Кесе-көлденең күштің жанасу шарты

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} = \frac{q_k}{2D}. \quad (3.47)$$

Ұзындығы – L кезіндегі шеттік шарты

$$W(x)|_{x=0} = 0; \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.48)$$

Бұл қойылған есеп $B=0$ жағдайындағы 3*1- есебінің дербес жағдайы болады. Олай болса жалпы шешімі

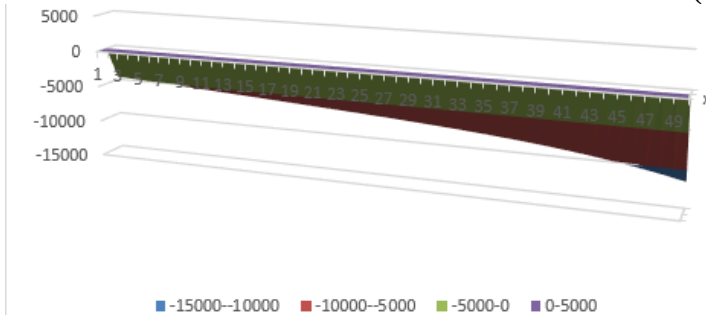
$$W(x) = \frac{q_k}{D} \frac{1}{480} \left[12x^5 - 15 \left(L + \frac{2}{L} \right) x^4 + 40x^3 + (27L^2 - 10)L^3 \right]. \quad (3.49)$$

17-есеп. Егер $\frac{q_k^0}{D} = \frac{1}{18}$, $L = 10$ болса, онда түтікше келген конструкцияның иілуінің графигін тұрғызу керек.

$\left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} = \{0,03, 0,04, 0,05, 0,06\}$ болса, төмендегі формуладан

$$W(x) = \frac{q_k}{D} (12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 17), \quad \left(\frac{q_k}{D} \right) - \text{бөлшегі} \quad (3.50)$$

бойынша

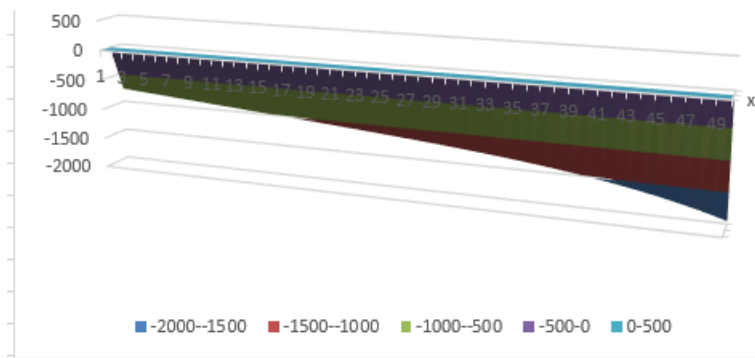


48-сурет

18-есеп. Түтікше келген конструкцияның иілуінің графигі 3 тұрғызу керек.

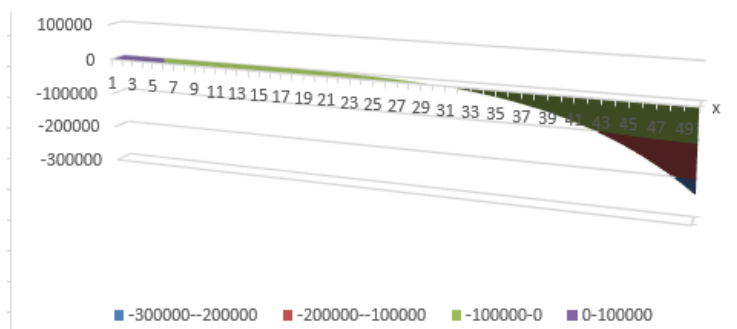
Егер $\frac{q_k^0}{D} = \frac{113}{10800}$, $L=1$; $\left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}} = \{0,03, 0,04, \{0,05, 0,06\}$ болса, төменгі формуладан

$$W(x) = \frac{113}{10800} (12x^5 - 4x^4 + 40x^3 + 17) \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (3.51)$$



49-сурет

$$19-есеп. W(x) = \frac{1}{216} (12x^5 - 4x^4 + 40x^3 + 17) \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (3.52)$$



50-сурет

20-есеп. Егер ығыса бағытталған кесе көлденең соққы импульсі әсер етсе және соққы импульсінен L – қашықтықта

конструкция әртүрлі бекітілген болса, онда “Жұқа қабырғалы көпқатпарлы түтікше келген конструкцияның толықсуын есептеудің математикалық әдістемесі”.

Есеп шарты: Түтікше келген көпқатпарлы ұзындығы – L , қалыңдығы – h , кесе көлденең қимасының пішінінің ең аз радиусы – R конструкциясын қарастырамыз. Конструкцияға ығыса бағытталған кесе көлденең критикалық күш түсіп тұр деп есептейміз.

Ұра мен конструкцияның жанасу аймағындағы шарттар

$$\left(\frac{dW}{dx}\right)\Big|_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{d^3W}{dx^3}\right)\Big|_{x=0} = \frac{q_k}{D}$$

Сокқы импульсынан L – қашықтықта конструкция шарнир арқылы, немесе жылжымалы орнықты бекітілген.

Шешуі: Математикалық моделі [21]

$$D \frac{d^4w}{dx^4} + 2B \frac{d^3w}{dx^3} + kw = q_k, \\ q_k = \lambda_j \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k' \gamma^2} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (3.53)$$

Айнымалы шамаға өрнектеу енгізейік

$$\xi = \frac{x}{\beta}, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{D}}. \quad (3.54)$$

(3.54) формуласын (3.53) формуласына қойып:

$$\frac{d^4w}{d\xi^4} + C \frac{d^3w}{d\xi^3} + w = \frac{q_k}{k\beta} \left\{ 1, 1 - \xi, 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right\} \text{ аламыз.}$$

$$\text{Мұндағы} \quad C = 2B \sqrt[4]{\left(\frac{1}{kD}\right)^3}. \quad (3.55)$$

(3.55) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін

$$W(\xi) = W_0(\xi) + W_1(\xi) \quad (3.56)$$

түрінде іздейміз.

Мұндағы $W_1(\xi)$ – іздестіріп отырған дифференциалдық теңдеу (3.55)-тің қандай да бір дербес шешімі, ал $W_0(\xi)$ – сол жағының біртекті теңдеудің жалпы шешімі, яғни

$$\frac{d^4 W_0(\xi)}{d\xi^4} + C \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} + W_0 = 0$$

Бөлу күшінің коэффициенті 2В модуль Юнгінен әлдеқайда аз болғандықтан $0 \leq c \leq 1$ дейін өзгереді.

Дербес жағдайында $C=0$ болса бізге белгілі Винклер негізінде жатқан конструкцияның иілуінің теңдеуін аламыз, ал оның біртекті теңдеуі

$$\frac{d^4 W_0}{d\xi^4} + W_0(\xi) = 0. \quad (3.57)$$

Бұл теңдеудің комплексті шешімдері белгілі (3.56), ал дифференциалдық теңдеудің характеристикалық теңдеуі төмендегідей болады:

$$\lambda^4 + c\lambda^3 + 1 = 0. \quad (3.58)$$

Егер $0 \leq c \leq 1$ дейін өзгерсе, онда характеристикалық теңдеудің түбірлері комплексті болады, яғни төмендегі көрсетілгендей

$$\begin{aligned} e^{(\alpha_1 \pm i\beta_1)\xi} &= e^{\alpha_1 \xi} (\cos \beta_1 \xi \pm i \sin \beta_1 \xi), \\ e^{(\alpha_2 \pm i\beta_2)\xi} &= e^{-\alpha_1 \xi} (\cos \beta_2 \xi \pm i \sin \beta_2 \xi), \\ \lambda_{1,2} &= \alpha_1 \pm i\beta_1, \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Біртекті (3.56) формуласының жалпы шешімі

$$W_0(\xi) = e^{\alpha_1 \xi} (c_1 \cos \beta_1 \xi \pm c_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_1 \xi} (c_3 \cos \beta_2 \xi \pm c_4 \sin \beta_2 \xi) \quad (3.60)$$

болады. Қаралып отырған конструкцияның материалдарының физика-механикалық қасиеттеріне байланысты төмендегі 3.1-кестеде C -коэффициентінің өзгеруіне байланысты характеристикалық теңдеудің түбірлерінің коэффициенті көрсетілген.

3.1-кесте

C	α_1	β_1	α_2	β_2	q_k^*
0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{q_k^*}{k_\beta} \{1; \xi; L - \xi; -\xi + \frac{\xi^2}{2}; 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}\}$
0,05	0,695	0,70694	-0,708	-0,707	q_k^*/k_β
0,09	0,685	0,706	-0,73	-0,7065	q_k^*/k_β
0,11	0,6804	-0,7063	-0,735	-0,7062	q_k^*/k_β
0,13	0,676	-0,7064	-0,741	-0,7059	q_k^*/k_β
0,14	0,673	-0,705	-0,743	-0,706	q_k^*/k_β
0,16	-0,67	0,7056	-0,747	0,7054	q_k^*/k_β
0,17	0,667	0,705	-0,752	-0,7055	q_k^*/k_β
0,18	0,664	0,7051	-0,754	0,7048	q_k^*/k_β
0,19	0,662	0,7049	-0,757	0,7045	q_k^*/k_β
0,2	0,66	0,7047	-0,7597	0,7042	q_k^*/k_β
0,3	-0,788	0,703	0,638	-0,7019	q_k^*/k_β
0,4	-0,8177	0,695	0,6176	-0,698	q_k^*/k_β
0,5	-0,848	0,686	0,598	-0,694	q_k^*/k_β
1	0,494	-0,654	-1,094	-0,54	q_k^*/k_β

C_1, C_2, C_3, C_4 – тұрақты шамалары теңдеудің жалпы шешімін тапқан соң анықталады.

Егер $B=0$ болған жағдайындағы (3.57) формуласының характеристикалық теңдеуі

$$\lambda^4 + 1 = 0 \quad (3.61)$$

болса, онда оның (3.57) дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі төмендегідей болады:

$$W_0(\xi) = e^{\alpha_1 \xi} (c_1 \cos \beta_1 \xi \pm c_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_1 \xi} (c_3 \cos \beta_2 \xi \pm c_4 \sin \beta_2 \xi), \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.62)$$

Мысал ретінде қойылған техникалық есептің иілуін табу үшін 2 (екі) есеп қарастырайық.

21-есеп. Конструкцияға кесе көлденең ығыса – бағытталған критикалық күш түсіп тұрсын және соққы импульсінен L – қашықтықтағы конструкция шарнирлі бекітілген болсын. Түтікше келген көпқатпарлы ұзындығы – L , қалыңдығы – h , кесе көлденең қимасының пішінінің ең аз радиусы – R конструкциясының иілуін табу керек.

Шешуі, яғни шеттік жағдайлары

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=0} &= 0, \quad \frac{d^3W}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0} = -\frac{q_k}{2K}, \\ W(\xi) \Big|_{\xi=L} &= 0, \quad \frac{d^2W}{d\xi^2} \Big|_{\xi=L} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.63)$$

21-есепте (3.53) математикалық моделінің жалпы шешімі

$$W(\xi) = e^{\alpha_1 \xi} (c_1 \cos \beta_1 \xi \pm c_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_1 \xi} (c_3 \cos \beta_2 \xi \pm c_4 \sin \beta_2 \xi) + \frac{q_k}{2k\beta} \quad (3.64)$$

Жалпы шешім (3.64)-ке (3.63) шарттарын қойып C_1, C_2, C_3, C_4 –ті табамыз. Содан кейін олардың мәнін (3.64) жалпы шешімге қайта қойып түтікше конструкцияның иілуінің төмендегідей формуласын аламыз.

$$w(\xi) = \frac{q_k}{2k\beta} \left\{ \frac{1}{e^{\alpha_1 L} \cos \beta_1 L} \left[1 - \frac{A_1}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} e^{-\alpha_2 L} \cos \beta_1 L \right] e^{\alpha_1 \xi} \cos \beta_1 \xi - \frac{1}{2\alpha_1 \beta_1 e^{\alpha_1 L} \cos \beta_1 L} \left[(\alpha_1^2 + \beta_1^2) - A_1 e^{-\alpha_1 \xi} \sin \beta_2 \xi - 1 \right] \right\} \quad (3.65)$$

$$\text{Мұндағы} \quad A_1 = \frac{1}{2\alpha_2 + C}, \quad C = 0.14 \quad (3.66)$$

$$w(\xi) = \frac{q_k}{2k\beta} \left[(1 - A_1 e^{-\alpha_2} \cos \beta_2 L) \frac{e^{\alpha_1 \xi}}{\sin \beta_1 L} e^{\alpha_1 \xi} \sin \beta_1 \xi + A_1 e^{-\alpha_1 \xi} \sin \beta_2 \xi - 1 \right] \quad (3.67)$$

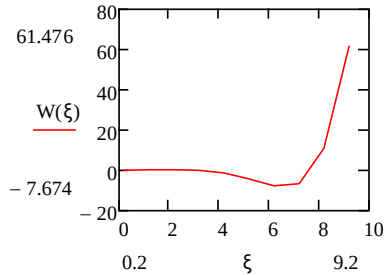
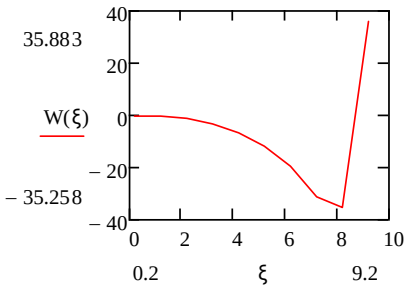
$$\text{Мұндағы } A_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)(2\alpha_2 + C)}, C = 0.11. \quad (3.68)$$

(3.65) формуларымен (3.67) формулалары (MatLab)-та есептеліп, төмендегі мәндері бойынша графиктері тұрғызылды.

$$C = 0.14: \quad \alpha_1 = 0.673, \quad \beta_1 = -0.705, \quad \alpha_2 = -0.743, \quad \beta_2 = -0.706;$$

$$C = 0.11: \quad \alpha_1 = 0.6804, \quad \beta_1 = -0.7063, \quad \alpha_2 = -0.735, \quad \beta_2 = -0.7062;$$

$$\xi = \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2 \dots 10.0\}; L = 0.3 \quad (3.69)$$

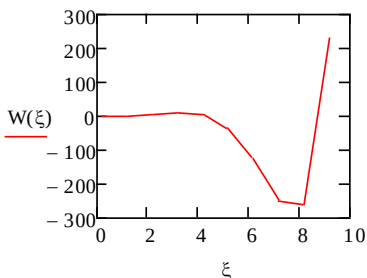


Дербес жағдай. Егер Б-2 Винклер негізінде жатқан конструкцияға ығыса бағытталған кесе-көлденең критикалық күш түссе, $C=0$ болғанда түтікше келген конструкцияның иілуі төмендегі формуламен анықталады.

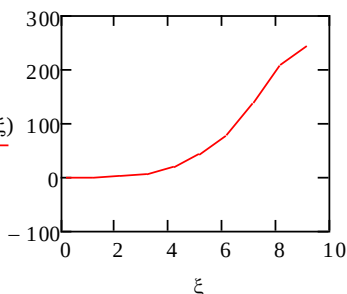
$$w(\xi) = \frac{q_k}{2k\beta} \left\{ \frac{1}{\Delta} \left[(e^{2\beta L} + 1) \cos 2\beta L - \sin 2\beta L \right] (\cos \beta \xi \operatorname{sh} \beta \xi - e^{-\beta \xi} \sin \beta \xi) + [(e^{2\beta L} + 3) - \cos \beta L - 1] \operatorname{sh} \beta \xi \sin \beta \xi \right\} + [1 - \xi - e^{-\beta \xi} \cos^2 \beta \xi], \quad (3.70)$$

$$\text{мұндағы } \Delta = [(e^{2\beta L} + 1)^2 + 4e^{2\beta L} \cos^2 \beta L], L = 0, \beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\beta L = \frac{3}{10\sqrt{2}}. \quad (3.71)$$



53-сурет



54-сурет

22-есеп. Конструкцияға кесе көлденең ығыса – бағытталған критикалық күш түсіп тұрсын және соққы импульсінен L – қашықтықтағы конструкция жылжымалы орнықты бекітілген болсын. Түтікше келген көпқатпарлы ұзындығы – L , қалыңдығы – h , кесе көлденең қимасының пішінінің ең аз радиусы – R конструкциясының иілуін табу керек,

Шешуі, яғни шеттік жағдайлары

$$\left. \frac{dW}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3W}{d\xi^3} \right|_{\xi=0} = -\frac{q_k}{2K},$$

$$W(\xi)|_{\xi=L} = 0, \quad \left. \frac{dW}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (3.72)$$

(3.73) математикалық моделінің жалпы шешімі 21-есебінде көрсетілгендей төмендегідей болады.

$$W(\xi) = e^{\alpha_1 \xi} (c_1 \cos \beta_1 \xi \pm c_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_1 \xi} (c_3 \cos \beta_2 \xi \pm c_4 \sin \beta_2 \xi) + \frac{q_k}{2k\beta} \quad (3.73)$$

Жалпы шешімге (3.73)-ке (3.72) шарттарын қойып C_1, C_2, C_3, C_4 –ті табамыз. Содан кейін олардың мәнін қайтадан (3.73)-ке жалпы шешімге қойып түтікше конструкцияның иілуінің төмендегідей формуласын аламыз.

$$w(\xi) = \frac{q_k}{2k\beta} \left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} A_1 e^{-\alpha_2 L} \sin \beta_2 L\right) e^{\alpha_1 \xi} \sin \beta_1 \xi + \frac{\alpha_2}{\beta_2} A_1 e^{-\alpha_2 \xi} \sin \beta_2 \xi - 1 \right], \quad (3.74)$$

мұндағы
$$A_1 = \frac{1}{(\alpha_2^2 + \beta_2^2)(2\alpha_2 + C)}, \quad C = 0.13. \quad (3.75)$$

(3.74)-формуласын төмендегі мәндері бойынша есептеу арқылы графигі тұрғызылған.

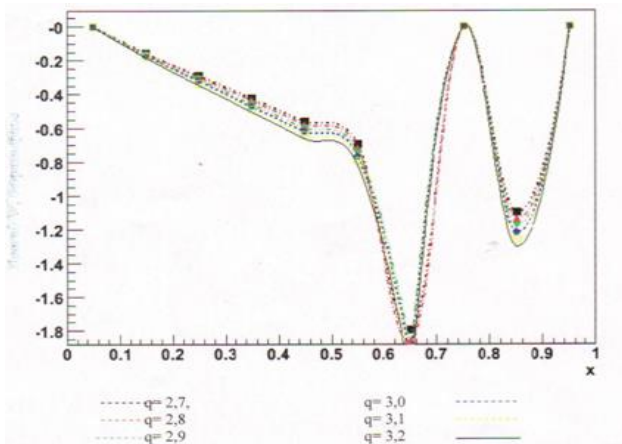
$$C = 0.13: \quad \alpha_1 = 0.676, \quad \beta_1 = 0.7064, \quad \alpha_2 = -0.741, \\ \beta_2 = -0.7059;$$

$$\xi = \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2 \dots 10.0\}; \quad L = 0.3. \quad (3.76)$$

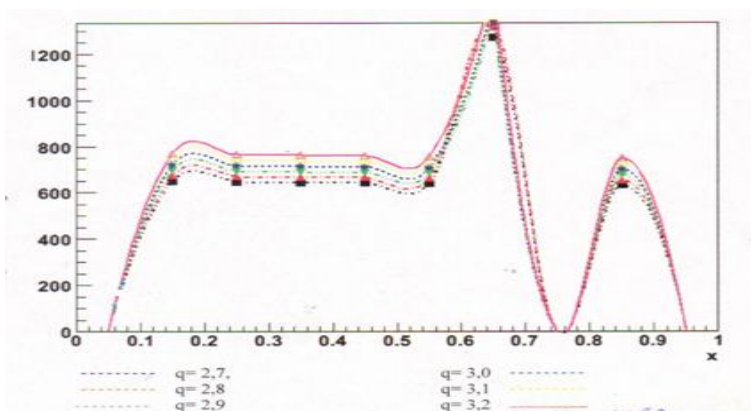
Дербес жағдайы. Егер Б-2 Винклер негізінде жатқан конструкцияға ығыса бағытталған кесе-көлденең критикалық күш түссе, $C=0$ болғанда түтікше келген конструкцияның иілуін төмендегі формуламен анықтайды.

$$w(\xi) = \frac{q_k}{2k\beta} \left\{ \frac{1}{\Delta} \left[e^{2\beta L} \cos^2 \beta L (sh \beta \xi \cos \beta \xi - e^{-\beta \xi} \sin \beta \xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + (e^{2\beta \xi} + 1 + e^{2\beta L} \sin 2\beta L) sh \beta \xi \sin \beta \xi \right] - \frac{1}{2} (2e^{-\beta \xi} \sin \beta \xi - \right. \\ \left. - \xi) \right\}, \quad L = 0.3 \quad (3.77)$$

Мұндағы
$$\Delta = - \left[(e^{2\beta L} + 1)^2 + 4e^{2\beta L} \cos^2 \beta L \right], \\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \beta L = \frac{3}{10\sqrt{2}}. \quad (3.78)$$



55-сурет. Егер $E = 3 \cdot 10^{-5}, \beta = 0.04, h = 750, R = 0.1, 1 = 1$



56-сурет. Егер $E = 3 \cdot 10^{-5}, \beta = 0.04, h = 750, R = 0.1, 1 = 1$

ҚОРЫТЫНДЫ

Технологиялық процестер кезінде айнымалы параметрлі түтікше келген конструкциялардың беріктігін, иілуін және тербелісін серпімді деформациялар теориясы арқылы зерттеу негізінен, төртінші ретті дифференциалдық теңдеудің мүшелерін күш факторлары арқылы өрнектеуге әкеледі және олардың математикалық модельдерін құруды талап етеді. Осы мақсатта (қарастырып отырған жұмыста)

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + 2B \frac{d^3 w}{dx^3} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \eta_1 \frac{dw}{dx} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x.$$

теңдеудің шешімдері техникалық есептерге енгізілген.

1) Түтікше келген конструкцияға тек қана сырттай активті критикалық күш серпімді теория негізінде

$$q^k = \lambda_k \frac{0,85E}{(1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}, \lambda_k = \left\{\frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3}\right\}$$

түсіп тұрса, математикалық моделі

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q_k f(x) \sin \omega_n x \quad (\text{Б-1 моделі})$$

болады, ал шеттік шарттары Гриннің: $\Gamma^{I,I}, \Gamma^{I,II}, \Gamma^{I,III}, \Gamma^{II,II}, \Gamma^{II,III}, \Gamma^{III,III}$ формулаларымен өрнектеліп, фундаментальді шешімдері көрсетіледі: мысалы,

$$W_k = \frac{q_k}{24D} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Шеттік жағдайларына байланысты теңдеуден дербес шешімдер алынады.

2) Түтікше келген конструкцияға сыртқы активті критикалық күш әсер етсе,

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x \quad (\text{Б-2 моделі})$$

Кесе-көлденең тік бағытталған реактивті ішкі нормаль күштері түсіп тұрса, онда математикалық моделі

$$W_0(x) = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x), \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{D}}$$

немесе $W_0(z) = e^{\beta z}(C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{-\beta z}(C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z)$ академик А.Н. Крылов әдістемесі.

D – цилиндрлік қаттылық пен k – серіппе қаттылығының қатынасы материалдың физика-механикалық қасиетінен алынады.

3) Түтікше келген конструкцияға сыртқы активті критикалық күш

$$q_k = 10,2\lambda_k \sqrt[4]{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{L}\right)$$

кесе-көлденең ығыса бағытталған реактивті ішкі ығысу күштері түсіп тұрса, онда математикалық моделі

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \eta \frac{dw}{dx} = q_k f(x) \sin \omega_n x$$

(Б-3 моделі Соколов негізінде жатқан)

болып келеді. Характеристік теңдеулерінің екеуі комплексті, ал қалған екеуінің біреуі нөлге тең, екіншісі нөлден кіші нақты сан болады. Өзіндік тербеліс теңдеулерінің жалпы шешімі

$$W_0(x) = C_1 + C_2 e^{-bx} + e^{\frac{b}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right),$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{\eta}{D}}$$

болады, мұндағы η – демпфер қаттылығы.

4) Түтікше келген конструкцияға сыртқы активті критикалық күшпен

$$q_k = \lambda_k \sqrt[4]{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{L}\right)$$

қатар кесе-көлденең ығыса бағытталған реактивті ішкі ығысу күштері және ішкі нормаль күштері түсіп тұрса, онда математикалық моделі

$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \eta \frac{dw}{dx} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x$ (Б-4 моделі Пастернак негізінде жатқан) болады. Характеристикалық теңдеулерінің түбірлері η – демпфер қаттылығы мен k – серіппе қаттылығының арасындағы қатынасына байланысты болады:

I-жағдай. Егер $\eta \gg k$ болса, онда характеристикалық теңдеу түрлері

$$\lambda_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right)}, \lambda_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{a}{2A}};$$

$$\text{мұндағы } A^2 = \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{64b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{64b^3}{27}}}, \quad a =$$

$\eta, b = k$.

Яғни екі түбірі нақты, ал қалған екі түбірі комплексті, оң жағының жалпы шешімі

$$W_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + e^{\alpha_1 x} (C_3 \cos \beta_1 x + C_4 \sin \beta_1 x),$$

$$\alpha_1 = \frac{A}{2}, \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right) - \frac{A^2}{4}} \text{ болады.}$$

II-жағдай. Егер $\eta \gg k$ болса, онда характеристикалық теңдеудің түбірлері

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \alpha_1 = \frac{A}{2}, \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right) - \frac{A^2}{4}}.$$

$$\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i, \alpha_2 = -\frac{A}{2}, \beta_2 = \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}}.$$

Яғни төрт түбірі де комплексті. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$W_0(x) = e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) \text{ болады.}$$

III-жағдай. Егер $\eta = k$ болса, онда характеристикалық теңдеудің түбірлері

$$\lambda_{1,2} = -\frac{A}{2}, \lambda_{3,4} = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \alpha_1 = \frac{A}{2},$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A^2 - \frac{a}{A}\right) - \frac{A^2}{4}} > 0 \text{ болады.}$$

Яғни түбірінің екеуі нақты бір-біріне тең, ал қалған екеуі комплексті. I-III - жағдайдағы зерттеулер математика кафедрасының ғалымдарының ізденіс жұмыстары. Олар түтікше келген конструкцияның беріктігін және тербелісін табуға қосқан үлкен үлесі. Материалдың физика-механикалық қасиеттеріне байланысты: k – серіппе және η – демпфер қатынастары.

5) Түтікше келген конструкцияға сыртқы активті критикалық күш пен

$$q_k = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{L}\right)$$

катар ішкі нормаль күштері және бойлау критикалық күші – $N_{кр}$ түсіп тұрса, онда математикалық моделі

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x$$

болады, мұндағы $N_{кр} = N_1 \frac{d^2 w}{dx^2}$. Характеристикалық теңдеулердің түбірлері D – цилиндрлік қатынастың, N_1 – иілу моментінің коэффициенті, k – серіппе қаттылығы арасындағы қатынастарға байланысты болады.

I-жағдай. Егер $N_1^2 - 4kD = 0$ болса, онда $\lambda_{1,2} = e^\alpha, \lambda_{3,4} = e^{-\alpha}, \alpha = \sqrt{\frac{N_1}{2D}}$.

Характеристикалық теңдеулердің түбірлері екінші дәрежелі нақты сандар. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$W_0(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}.$$

II-жағдай. Егер $N_1^2 - 4kD > 0$ болса, онда $\lambda_{1,2} = \sqrt{(\alpha \pm \beta)}$, $\lambda_{3,4} = -\sqrt{(\alpha \pm \beta)}$, $\alpha = \frac{N_1}{2D}$, $\beta = \frac{\sqrt{N_1^2 - 4kD}}{2D}$.

Характеристикалық теңдеулердің түбірлері нақты сандар. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$W_0(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha+\beta}x} + C_3 e^{\sqrt{\alpha-\beta}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha-\beta}x}.$$

III-жағдай. Егер $N_1^2 - 4kD < 0$ болса, онда $\lambda^2 = \frac{N_1}{2D} + \frac{\sqrt{N_1^2 - 4kD}}{2D}i$, яғни түбірлері комплексті.

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$W_0(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\alpha x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x), \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{D}}, \beta = \arctg \sqrt{\frac{4kD}{N_1^2} - 1}.$$

Егер жалпы жағдайда $\lambda^4 - C\lambda^2 + 1 = 0$, характеристикалық теңдеуін қарастырсақ, онда $0,25 \leq C \leq 2,25$ аралығында өзгереді, $C = \frac{N_1}{D} \sqrt{\frac{D}{k}}$.

I-III – жағдайдағы зерттеулер математика кафедрасы ғалымдарының ізденіс жұмыстарында көрсетілген.

6) Түтікше келген конструкцияға сыртқы активті критикалық күшпен

$$q_k = \lambda \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{R}{L}\right)$$

қатар ішкі нормаль күштері және Коссер континуумына негізделген бөлу күштері түсіп тұрса, онда математикалық моделі

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - 2B \frac{d^3 w}{dx^3} + kw = q_k f(x) \sin \omega_n x$$

болып келеді. Егер $\xi = \frac{x}{\beta}, \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{D}}$ айнымалы шамасын енгізсек, онда математикалық моделі

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - C \frac{d^3 w}{d\xi^3} + w = \frac{q_k}{\kappa\beta} \quad \text{болады.}$$

Характеристикалық теңдеулердің түбірлері комплексті:

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i; C = 2B^4 \sqrt{\left(\frac{1}{kD}\right)^3}.$$

C – 0-ден 1-ге дейін өзгергенде $\lambda^4 + C\lambda^3 + 1 = 0$ характеристикалық теңдеуінен $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ сандарын табамыз. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$W_0(\xi) = e^{\alpha_1 \xi} (C_1 \cos \beta_1 \xi + C_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_1 \xi} (C_3 \cos \beta_1 \xi + C_4 \sin \beta_1 \xi).$$

7) Ұсынылып отырған жұмыста түтікше келген конструкцияның материалы изотропты денелер деп есептелінеді. Мысал, Пуассон коэффициенті

$\nu = 0,33$ – алюминий, $\nu = 0,3$ – металдар, $\nu = 0,035$ – пластмасс, $\nu = 0,354$ – винипласт, $\nu = 0,47$ – табиғи каучук, $\nu = 0,16$ – бетон, жануар сүйектері, $\nu = 0,43$ – ағаш т.б.

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. *Фрейденталь А.* «Математические теории не упругой сплошной среды» / *А. Фрейденталь, Х Гейрингер.* – М.: Физматгиз, 1962, – 432 с.
2. *Новожилов В.В.* «Основы нелинейной теории упругости» – Москва: Наука, 1948, – 189 с.
3. *Божанов Е.Т.* «Разработка теоретических основ стабилизирующих технологий», – Алматы: Ғылым, 1996, – 206 с.
4. *Григолюк Э.И.* «Устойчивость оболочек» / *Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов.* – Москва: Наука, 1978, – 225 с.
5. *Ержанов Ж.С.* «Устойчивость упругих тел, нелинейных пластин и оболочек» / *Ж.С. Ержанов, Е.Т. Божанов.* – Алматы: Ғылым, 1997, – 117 с.
6. *Божанов Е.Т.* «Методика экспериментальных исследований на прочность магистральных трубопроводов на стенде, полигоне и промышленных испытаниях участка нефтяных труб» //Сборник научных трудов АТТУ (Ақтау). *Е.Т. Божанов, И.Н. Дюсенбаев.* – Алматы, 1996, стр. 564-569.
7. *Божанов Е.Т.* «Механикоматематическая модель расчета долговечности магистральных труб». – Алматы, Ғылым, 2004, – 165 с.
8. *Нехотяев В.В.* «Большие прогибы тонких упругих пластин», «Исследования по теории пластин и оболочек» / *В.В. Нехотяев, А.В. Саченков.* – Казань, 1972, стр. 42-76.
9. *Зевин А.А., Чернов Н.Л.* «Экспериментальное исследование предварительно нагруженных стальных балок за пределом упругости при подвижных нагрузках» / *А.А. Зевин, Н.Л. Чернов.* Известия высших учеб. заведений, Строительство и архитектура, 1976.
10. *Преображенский И.Н.* «Экспериментальные исследования круговых цилиндрических оболочек при действии оссимметричного давления», Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1972, стр. 299-311.
11. *Коноплев Ю.Г.* «Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек эллиптического сечения», Исследования по теории пластин и оболочек. / *Ю.Г. Коноплев, А.В. Копп.* – Казань, 1980, стр. 31-37.

12. *Соколов С.Н.* «Круглая пластинка на обобщенном упругом основании», инженерный сборник, 1952.

13. *Керр А.Р.* «Упругие и вязкоупругие модели оснований», прикладная механика, 1964.

14. *Божанов Е.Т.* «Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения» / *Божанов Е.Т., Ержанов Ж.С.* – Алматы, 2001, – 300 с.

15. *Божанов Е.Т.* «Математическое моделирование геомеханических процессов» / *Е.Т. Божанов, Ж.О. Отарбаев, С.Н. Буганова.* – Алматы, 2015, – 145 с.

16. *Божанов Е.Т.* «Математическая модель расчета выпучивания тонкостенной многослойной конструкции под действием ударного импульса, при сдвиговом деформировании площади контакта, когда сила контактного воздействия сосредоточенная под нагрузкой, а конструкция закреплена» // *Е.Т. Божанов, А.М. Ибраимкулов, М.Т. Касымбекова.* MATERIALS of XII INTERNATIONAL RESEARCH AND PRACTISE CONFERENCE, Volume8, 2015. Sheffield science and education LTD.

17. *Божанов Е.Т.* «Выпучивание тонкостенной многослойной конструкции под действием ударного импульса, лежащей на основании типа Коссера» // *Е.Т. Божанов, Е.А. Ергазина, А.А. Молдахан.* – Бишкек, Молодежь в инновационных исследованиях, труды, 2015 г.

18. *Божанов Е.Т.* «Статика деформируемых систем под действием статических нагрузок», Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий» // *Е.Т. Божанов, А.М. Ибраимкулов.* – Алматы, 2006 г.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ	3
1. ФИЗИКА-ТЕХНИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІ ҮЛГІЛЕУДЕГІ КЕРНЕУ ТЕОРИЯСЫ	13
1.1. Біртұтас тығыз орта механикасындағы негізгі ұғымдар	13
1.2. Тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеулері, техникалық процестерді үлгілеудегі негізгі мәліметтер	24
1.3. Кернеу тензорының инварианттары. Жанама, октаэдрлік кернеулер, шар тензоры және кернеу девиаторы	36
2. СЫЗЫҚТЫ ЖӘНЕ СЫЗЫҚСЫЗ ДЕФОРМАЦИЯ ПРОЦЕСТЕРІ	50
2.1. Геометрия деформациясы. Үзіліссіздік теңдеулер шарттары	50
2.2. Деформация беттері, деформация девиаторы, инварианттары, соңғы деформация, бұрау және иілу деформациялары	58
2.3. Жалпылама Гук заңы. Серпін күшінің қуаты және жұмысы	70
3. ТҮТІКШЕ КЕЛГЕН КОНСТРУКЦИЯНЫҢ ИІЛУІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛДЕР АРҚЫЛЫ ЕСЕПТЕУ	77
3.1. Ұсыныс модельдері	77
Қорытынды	97
Библиографиялық тізім	103

Оқулық басылым

Ескерген Тоқшылықұлы Божанов
Асият Несипбайқызы Дадаева
Күльдана Джолдасқызы Мурзасаймова

ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ

Серпімділік теорияны физикалық процестерді модельдеуге
енгізу үлгілерінің қолданысы. I бөлім

Оқу құралы

ҒЖБДБ бастығы

Редакторы

Компьютерде беттеген

З. Ғұбайдулина

Г. Оңкебаева

С. Орысбекова

Басуға қол қойылды 26.01.2017 ж.

Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84 1/16.

№1 баспаханалық қағаз.

Көлемі 6.6 есепті-баспа табақ. 6.2 Тапсырыс № 805

Бағасы келісімді.

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық
зерттеу университеті басылымы
ҚазҰТЗУ Қоғаммен байланыс жөніндегі департаменті
Баспа басқармасы
Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-323-085-6



9 786013 230856