

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева

А.Н. Дадаева

**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Алматы 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева

А.Н. Дадаева

**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Учебное пособие для технических специальностей

Рекомендовано Научно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2014

УДК 510 (075.8)
ББК 22.12 Я 73
Д 14

Рекомендовано в качестве учебного пособия по «Операционному исчислению» для студентов технических и экономических вузов

Рецензенты: Отелбаев М.О. академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук;
Мухаметжанов С.Т. профессор, доктор физико-математических наук;
Ибраимкулов А.М. доцент, кандидат физико-математических наук.

Д 14 Дадаева А.Н.

Операционное исчисление и применение в теории электрических цепей: Учебное пособие. – Алматы: КазНТУ, 2014. - 102 с.

Ил.45. Таблиц 11. Библиогр. – 12 назв.

ISBN 978-601-228-707-3

Учебное пособие предназначено для бакалавров 1-3 курсов технических и экономических вузов, а также магистрантам и преподавателям вузов.

В данном пособии изложен специальный курс по «Операционному исчислению» на основе интегрального преобразования Лапласа и его приложений к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, линейных интегральных уравнений типа свертки и краевых задач математической физики. Учебное пособие в полной мере обеспечивает студентов раздаточным материалом и дает возможность приобрести навыки самостоятельной работы, что является одним из основных моментов в условиях кредитной системы обучения.

УДК 510 (075.8)
ББК 22.12. Я 73

Печатается по решению Научно-методического совета университета (протокол № 2 от 26.12.2014г.).

ISBN 978-601-228-707-3

© Дадаева А.Н., 2014
© КазНТУ, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Глава I. Операционное исчисление	5
1.1 Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение	8
1.2 Область существования изображения	9
1.3 Преобразование Карсона-Хевисайда.....	11
1.4 Единичная функция Хевисайда.....	12
1.5 Изображение некоторых функций.....	13
Глава II. Основные свойства преобразования Лапласа	18
2.1 Линейность	18
2.2 Подобие	18
2.3 Запаздывание	20
2.4 Опережение	25
2.5 Изображение периодического оригинала.....	25
2.6 Смещение.....	29
2.7 Дифференцирование оригинала	30
2.8 Дифференцирование изображения	33
2.9 Интегрирование оригинала	34
2.10 Интегрирование изображения	36
2.11 Предельный переход по параметру.....	37
2.12 Дифференцирование по параметру	38
2.13 Интегрирование по параметру	40
2.14 Предельные теоремы	42
2.15 Свертка функций и ее свойства	43
2.16 Свертка оригиналов	46
2.17 Умножение изображений	46
2.18 Обобщенное умножение изображений	52
2.19 Интеграл Дюамеля	53
2.20 Изображение цилиндрических функций.....	54
Глава III. Приложения операционного исчисления к задачам электротехники	61
3.1 Алгоритм операторного метода.....	61
3.2 Правила Кирхгофа в операторной форме.....	61
3.3 Применение операционного исчисления к исследованию нестационарных процессов в электрических цепях.....	61
3.3 Индивидуальные задания.....	75
3.4 Решение типового варианта.....	91
Приложение.....	101
Библиографический список.....	102

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано автором на основе многолетнего опыта чтения лекции и проведения практических занятий для бакалавров КазНТУ им.К.И.Сатпаева следующих специальностей: «Электроэнергетика», «Радиотехника», «Приборостроение» и др.

Известно, что «Операционное исчисление» позволяет рассчитывать переходные режимы в электрических цепях при любых внешних источниках напряжения, тока и широко используется в спецкурсах вышеназванных специальностей.

Пособие разбито на три части, первая часть состоит из двух глав, каждая из которых состоит из нескольких параграфов. Параграф начинается с теоретического материала (приводятся основные теоремы и определения) и решенных примеров с использованием математических приемов данного теоретического материала. Вторая часть учебного пособия посвящена приложению «Операционного исчисления» к задачам электротехники. Описан алгоритм операторного метода. В третьей части данного пособия приведены индивидуальные задания (ИЗ) для самостоятельного решения и представлен подробный разбор примеров из типового варианта. Всего представлены 12 заданий, в каждом задании содержится по 30 различных вариантов. Решение таких задач бакалаврами позволяет оценить степень усвоения теоретического материала и научить студентов самостоятельно решать, думать и мыслить категориями математики.

Учебное пособие содержит ряд прикладных примеров и задач для вышеперечисленных специальностей, а также будет полезно для преподавателей математических дисциплин вузов.

Автор благодарен всем кто способствовал выходу этого учебного пособия. И будет признателен всем коллегам и читателям за замечания и пожелания по содержанию и стилю изложения учебного пособия. Просьба их присылать по адресу: г.Алматы 050013, ул Сатпаева, 22 КазНТУ, ИИТТ, кафедра «Математика» или на электронный адрес: dady1262@mail.ru

ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Введение

Операционное (символическое) исчисление широко используется для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и линейных интегральных уравнений типа свертки. К таким уравнениям приводятся задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники.

Известный советский ученый в области теории колебаний и автоматического управления А.А. Андронов (1901-1952) считал, что операционное исчисление является азбукой современной автоматики и телемеханики.

Английский математик Э.Т. Уиттекер (1873-1956) писал, что операционное исчисление мы должны рассматривать наряду с такими наиболее важными достижениями математики за последнюю четверть XIX в., как введение Пуанкаре автоморфных функций и открытие Риччи тензорного исчисления.

Метод операционного исчисления основан на том, что над оператором дифференцирования $\frac{d}{dt} = p$ и некоторой функцией (изображением) $X(p)$ от этого оператора, которой ставится в соответствие функция (оригинал) $x(t)$ (обозначают соответствие функций так: $x(t) \rightarrow X(p)$), производятся такие действия, как дифференцированию функции $x(t)$ соответствует умножение оператора p на функцию $X(p)$:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow p X(p), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow p^2 X(p), \quad \dots, \quad \frac{d^n x}{dt^n} \rightarrow p^n X(p), \quad (1)$$

а интегрированию – деление функции $X(p)$ на оператор p :

$$\int_0^t x(t) dt \rightarrow \frac{X(p)}{p}, \quad \int_0^t dt \int_0^t x(t) dt \rightarrow \frac{X(p)}{p^2}, \quad \dots,$$

$$\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t x(t) dt \rightarrow \frac{X(p)}{p^n},$$

в частности,

$$\frac{1}{p} \rightarrow \int_0^t dt = t, \quad \frac{1}{p^2} \rightarrow \int_0^t dt \int_0^t dt = \frac{t^2}{2!}, \quad \dots, \quad \frac{1}{p^n} \rightarrow \frac{t^n}{n!}. \quad (2)$$

С помощью метода операционного исчисления линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами искомой функции $x(t)$ сводятся к алгебраическим уравнениям относительно функции $X(p)$.

Операционное исчисление начали развивать в своих работах Г.В.Лейбниц (1646-1716), Л.Эйлер (1707-1783), Ж.Л.Лагранж (1736-1833), П.С. Лаплас (1749-1827), Ж.Б.Ж. Фурье (1768-1830), О.Л.Коши (1789-1857).

Английский инженер-электрик О.Хевисайд (1850-1925) вводит в операционное исчисление правила действия с оператором $\frac{d}{dt} = p$ и функциями этого оператора. Применяя операционное исчисление к решению дифференциальных уравнений, О.Хевисайд получил (1887-1912гг.) ряд важных результатов по актуальным проблемам теории электромагнитных колебаний в проводах. Создание операционного исчисления обычно связывают с именем О. Хевисайда, который положил начало его систематическому приложению к решению физико-технических задач. Однако первоначальная разработка метода операционного исчисления была выполнена задолго до появления работ О.Хевисайда в трудах математиков Л.Арбогаста (1759-1803), Ж.Франсэ (1775-1833), Р.Лобатто (1797-1866), Д.Грегори (1813-1844), Р.Кармайкла (1879-1967).

Впервые в России операционное исчисление широко использовал профессор Киевского университета М.Е. Ващенко-Захарченко (1825-1912). В своей книге «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» он рассматривает символы и их свойства, приложение символического исчисления к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными с постоянными и переменными коэффициентами, им получена формула разложения для случая простых и кратных корней, которая вошла в литературу как формула разложения О.Хевисайда.

В книге русского математика А.В. Летиикова (1837-1888) «Теория дифференцирования с произвольным указателем» рассматриваются вопросы, близкие к операционному исчислению.

Используемое в работах О.Хевисайда операционное исчисление не было математически обосновано. Строгое математическое обоснование и развитие операционное исчисление получило на основе интегральных преобразований в работах Дж. Карсона (1926г.), Т.Бромвича (1916г.), П.Леви (1926г.), Б.Ван-дер-Поля (1929-1932гг.) и других.

Преобразование вида

$$F(p) = \int_a^b f(t)k(t, p)dt,$$

где $k(t, p)$ - ядро преобразования, называется *интегральным*. Вид и характер задач, к которым оно применимо, зависят от выбора ядра и пределов интегрирования.

Если $k(t, p) = e^{-pt}$, $a = -\infty$ и $b = \infty$, то получим преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

которое преобразовывает определенный класс функций оригиналов $f(t)$ действительного переменного t в функции - изображения $F(p)$ комплексного переменного p . Наряду с преобразованием Лапласа широко используются интегральные преобразования Бесселя, Меллина, синус-, косинус-преобразования, ядра $k(t, p)$ которых представляют собой соответственно функции $J_\nu(pt)$, t^{p-1} , $\sin pt$, $\cos pt$.

Преобразование вида

$$F(p) = \int_a^b e^{-pt} f(t) dt$$

впервые (1737г.) ввел Эйлер.

Лапласом были доказаны (1782г.) свойства этого преобразования, а также введены бесконечные пределы интегрирования, что позволило применить преобразование Эйлера-Лапласа в приложениях.

Американский инженер Дж. Карсон (1887-1940) показал связь между операционным исчислением и интегральным преобразованием Лапласа, установил соотношение между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$

в виде интегрального уравнения $F(p) = p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ относительно функции $f(t)$.

Обратную зависимость между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ получил английский математик Т.Бромвич (1875-1929) в виде контурного интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp$$

в комплексной плоскости $p = s + i\sigma$, где интегрирование ведется по любой прямой, параллельной мнимой оси и расположенной вправо от всех особых точек функции - $\frac{1}{p} F(p)$.

Контурный интеграл Бромвича был получен еще в 1859г. немецким математиком Г.Ф. Риманом (1826-1866) в работе «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» как следствие одного преобразования. Финский математик Р. Меллин (1854-1933) доказал его в 1902 г., поэтому его обычно называется *интегралом Римана - Меллина*.

Французский математик П.Леви (1886-1971) показал, что решение интегрального уравнения Карсона представляется контурным интегралом Бромвича и наоборот.

Методы Карсона и Бромвича, основанные соответственно на интегральных преобразованиях Лапласа и Римана - Меллина, получили теоретическую основу для объединения в один общий метод - метод контурных интегралов операционного исчисления без использования оператора дифференцирования.

В книге А. М. Эфроса и А. М. Данилевского «Операционное исчисление и контурные интегралы» (Харьков, 1937) дано обоснование операционного исчисления с помощью контурных интегралов и его приложения к анализу.

В книге польского математика Яна Микусиньского «Операторное исчисление» (М., 1956) операционное исчисление обосновывается на операторной основе без связи с теорией преобразования Лапласа, причем действию умножения соответствует свертка.

На основе преобразования Лапласа операционное исчисление применяется к ограниченному классу функций, а на операторной основе Микусиньского оно применимо и к функциям, непреобразуемым по Лапласу. Однако применение интеграла Лапласа упрощает получение операционных формул и облегчает изучение структуры поля операторов, представляя его функциями комплексного переменного. Теория и приложения операционного исчисления получили математическое обоснование и дальнейшее развитие в трудах советских ученых: Н.М. Крылова (1899-1955) и Н.Н. Боголюбова (род. в 1909г.), М.А Лаврентьева (1900-1980) и Б.В. Шабата (1917-1987), И.З. Штокало (1897-1987), А.В. Лыкова (1910-1974), Б.В. Булгакова (1900-1952) и А.И. Лурье (1901-1980).

§1.1 Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Определение 1. **Оригиналом** называется комплексная функция $f(t) = u(t) + iv(t)$ действительного переменного t , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $f(t)$ - однозначная непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными n -о порядка на интервале $(-\infty; \infty)$;
- 2) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- 3) существуют такие числа $M > 0$ и $s > 0$, что для всех $t > 0$ справедливо неравенство:

$$|f(x)| < Me^{st}.$$

Число $s_0 \geq 0$, для которого неравенство в условии 3) выполняется при любом $s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и не выполняется при $s = s_0 - \varepsilon$ (s_0 - точная нижняя граница чисел s), называется показателем роста функции $f(t)$.

Функции оригиналы при $t \rightarrow \infty$ являются или ограниченными, или стремящимися к бесконечности, но не быстрее, чем показательная функция $e^{s_0 t}$; они называются функциями экспоненциального типа.

На функцию оригинал можно накладывать более общие условия, рассматривая и функции бесконечных разрывов в n точках на любом интервале конечной длины и предполагая, что в этих точках функции абсолютно интегрируемы.

Определение 2. Изображением функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.1)$$

§1.2 Область существования изображения

Теорема 1. Если функция $f(t)$ - оригинал с показателем роста s_0 , то интеграл Лапласа сходится равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и функция $F(p)$ является в ней аналитической.

Доказательство.

1. По условию $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, $\operatorname{Re} p > s_0$.

Тогда

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}, \quad \operatorname{Re} p = s > s_0.$$

Следовательно, интеграл Лапласа абсолютно сходится в области $\operatorname{Re} p > s_0$.

Известно, что несобственный интеграл, зависящий от параметра, можно представить в виде сходящегося функционального ряда, члены которого есть определенные интегралы как функции этого параметра. В теории функциональных рядов главным является понятие равномерной сходимости ряда. Свойства равномерно сходящихся интегралов аналогичны свойствам равномерно сходящихся рядов.

2. Далее, в точке $p = s_0 + \delta$ области $\operatorname{Re} p > s_0$,

$|\arg(p - s_0 - \delta)| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha > 0$, $\delta > 0$ малые числа (рис.1), интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-(s_0+\delta)t} f(t) dt = \int_0^{\tau} e^{-(s_0+\delta)t} f(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-(s_0+\delta)t} f(t) dt$$

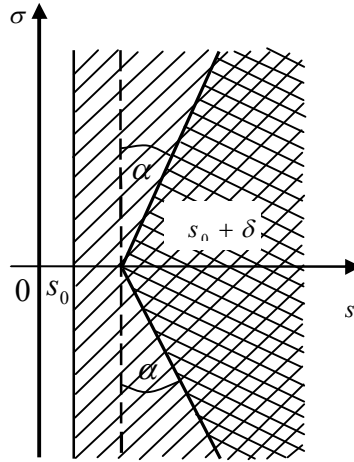


Рис. 1

сходится. Аналогично как в рядах, рассмотрим его остаток

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-(s_0+\delta)t} f(t) dt = \varphi(\tau). \quad (1.2)$$

Это значит, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon_1)$, что для всех $\tau > \tau_1$ выполняется неравенство $|\varphi(\tau)| < \varepsilon_1$.

Дифференцируя (1.2) по τ , получаем

$$-e^{-(s_0+\delta)t} f(t) dt = d\varphi(t). \quad (1.3)$$

Тогда в области $\operatorname{Re} p > s_0 + \delta$, учитывая (1.3), имеем

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -\int_{\tau}^{\infty} e^{-(p-s_0-\delta)t} d\varphi(t) \quad (1.4)$$

Интегрируя по частям правую часть (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt &= e^{-(p-s_0-\delta)t} \varphi(t) - \\ &- (p-s_0-\delta) \int_{\tau}^{\infty} e^{-(p-s_0-\delta)t} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Находим оценку

$$\left| \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \varepsilon_1 \left(1 + \frac{|p-s_0-\delta|}{s-s_0-\delta} \right).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{s-s_0-\delta}{|p-s_0-\delta|} &= \cos \arg(p-s_0-\delta) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \\ \left| \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| &< \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right). \end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon_1 = \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \varepsilon$ и $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$, получаем неравенство

$$\left| \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \varepsilon, \quad \tau > \tau_0,$$

которое выполняется для всех p в области D . Значит, интеграл Лапласа сходится равномерно относительно p . Поэтому функция $F(p)$ в этой области непрерывна.

3. В полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ находим

$$\frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) \frac{e^{-\Delta p t} - 1}{(-t) \Delta p} dt. \quad (1.5)$$

В (1.5) перейдя к пределу при $\Delta p \rightarrow 0$, получаем

$$F'(p) = - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt. \quad (1.6)$$

Здесь $\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{e^{-t\Delta p}}{(-t)\Delta p} = 1$ и действия предела и интеграла перестановочны

между собой, поскольку интеграл сходится равномерно относительно p . Следовательно, функция $F(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$.

Теорема 2 (необходимый признак). Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ с показателем роста s_0 , то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Доказательство. В полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \frac{M}{s - s_0}.$$

Отсюда следует, что $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Поскольку в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ функция $F(p)$ - аналитическая, то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

В формуле (1.1) функции $f(t)$ ставится в соответствие определенная функция $F(p)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Это соответствие называется **преобразованием Лапласа**.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ будем записывать следующим образом: $f(t) \rightarrow F(p)$ или $F(p) \rightarrow f(t)$.

В преобразовании Лапласа оригинал будем обозначать малой буквой, а его изображение (трансформанта) - соответствующей большой буквой, например: $x(t) \rightarrow X(p)$, $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$.

§ 1.3 Преобразование КАРСОНА-ХЕВИСАЙДА

В операционном исчислении пользуются еще изображением по Карсону-Хевисайду, определяемым равенством $\Phi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt$, которое отличается от изображения по Лапласу только множителем p .

В современной технической литературе в основном пользуются изображением по Лапласу, так как общность преобразований Фурье и Лапласа - связывает операционное исчисление с гармоническим анализом и таким образом вносит определенный физический смысл в это понятие, изображения (изображение по Лапласу $F(s+i\sigma)$ - это спектральная функция затухающей функции $e^{-st}f(t)$, для которой переменная σ является частотой).

§ 1.4 Единичная функция Хевисайда

Функция-оригинал

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\left(H(0) = \frac{1}{2}, \lim_{t \rightarrow 0+0} H(t) = 1 \right)$ называется **единичной функцией Хевисайда**

(рис. 2).

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям оригинала 1) и 3), то функция

$$f(t)H(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

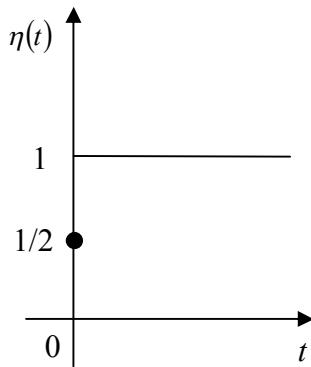


Рис. 2

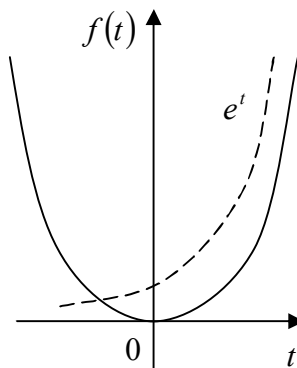


Рис. 3а

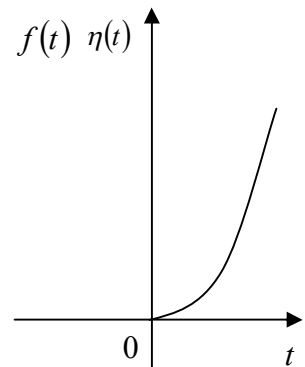


Рис. 3б

удовлетворяет всем условиям оригинала.

Например, функция $f(t) = t^2$ (рис. 3 а) непрерывна в интервале $(-\infty; \infty)$ и при $t > 0$ является функцией экспоненциального типа ($M = 1, s_0 = 1$) $t^2 < e^t$,

так как $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{a^t} = 0$, но при $f(t) = t^2 \neq 0$. Тогда

$$f(t)H(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом (рис. 3 б).

Для сокращения записи будем вместо $f(t)H(t)$ писать $f(t)$, условившись, что все функции, удовлетворяющие условиям оригинала 1) и 3), равны нулю при $t < 0$. Это соответствует физическому смыслу задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с начальными условиями. Поскольку не имеет значения, какой физический процесс описывает искомая функция до начального момента при $t < 0$, то процесс рассматривается только в интервале $0 \leq t < \infty$.

§1.5 Изображение некоторых функций

Изображение единичной функции $H(t)$. По формуле (1.1) получаем

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} H(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^a = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pa} \right). \end{aligned}$$

Если $\operatorname{Re} p > 0$, то $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-pa} = 0$. Следовательно, $1 \rightarrow \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Изображение функции $e^{\alpha t}$. По формуле (1.1) имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(p-\alpha)t} dt = \\ &= -\lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{e^{-(p-\alpha)a}}{p-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Если $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$, то $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-(p-\alpha)a} = 0$.

Таким образом,

$$e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha. \quad (1.7)$$

Гамма-функция. Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad s > 0. \quad (1.8)$$

Представим интеграл в формуле (1.8) в виде

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Первый интеграл

$$\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt < \int_0^1 t^{s-1} dt = \left. \frac{t^s}{s} \right|_0^1 = \frac{1}{s}$$

сходится равномерно при $t \rightarrow 0$, если $s > 0$. Из неравенства $t^{s+1} < e^t$ $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{s+1}}{e^t} = 0 \right)$ или $e^{-t} t^{s-1} < \frac{1}{t^2}$ следует, что интеграл

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt < \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$$

равномерно сходится для всех s . Интегрируя правую часть (1.8) гамма-функции $\Gamma(s+1)$ по частям ($u=t^s$, $dv=e^{-t}dt$), получаем формулу приведения:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt = \left(-e^{-t} t^s \right) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

или

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s). \quad (1.9)$$

Используя соотношение (1.9), получаем

$$\Gamma(s+k) = s(s-1)(s-2) \dots (s-k) \Gamma(s-k), \\ k < s, \quad k \in N.$$

Для $s=n$, $n \in N$,

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!,$$

так как

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}.$$

Из формулы (1.9) получаем

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \sqrt{\pi}. \quad (1.10)$$

При $s > 0$ функция $\Gamma(s) > 0$ имеет непрерывную производную $\Gamma'(s)$ и $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$. Тогда по теореме Ролля на интервале $(1; 2)$ существует такая точка s , в которой $\Gamma'(s) = 0$. В этой точке ($s = 1,461632\dots$) функция $\Gamma(s)$ имеет минимум $\Gamma(1,461632\dots) = 0,885603\dots$.

По формуле (1.9) Гамма-функцию произвольного аргумента $s > 0$ можно выразить через Гамма-функцию аргумента $0 < s < 1$.

Функцию $\Gamma(s)$, пользуясь формулой (1.9), можно определить и для $s < 0$. Если $-1 < s < 0$, или $0 < s+1 < 1$, то правая часть уравнения $\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1)$ определена, следовательно, и выражение в левой части имеет смысл, т.е. функция $\Gamma(s)$ определяется на интервале $(-1; 0)$. Аналогично определяется $\Gamma(s)$ при $s < 0$ на интервалах $(-2; -1)$, $(-3; -2)$ и т.д. Для $n \in N$ имеем

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \sqrt{\pi} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}. \quad (1.11)$$

Из уравнения $\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1)$ следует, что если s стремится к $0, -1, -2, \dots$, то $\Gamma(s)$ стремится к $\pm \infty$. Функция $\Gamma(s)$ при s , равном $0, -1, -2, \dots$, имеет бесконечные разрывы. Между двумя последовательными точками разрыва функция $\Gamma(s)$ попеременно, то положительна, то отрицательна. В каждом из этих интервалов она имеет или максимум, или минимум, абсолютная величина которых убывает с удалением их от начала координат.

В комплексной области гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$$

или в виде формулы Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p e^{Cp} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right) e^{-\frac{p}{n}}, \quad (1.12)$$

где $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,577215\dots$ - постоянная Эйлера ($\gamma = e^C = 1,781072\dots$). Из формулы (1.12) имеем

$$\Gamma(p) = e^{-Cp} \frac{1}{p} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{p}{n}}}{1 + \frac{p}{n}}.$$

Логарифмируя это равенство, получаем

$$\ln \Gamma(p) = -Cp - \ln p + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{n} - \ln \left(1 + \frac{p}{n}\right) \right),$$

и дифференцируя по p , получаем

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = -C - \frac{1}{p} + p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}.$$

При $p=1$ находим

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C - 1 + p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Поскольку

$$\Gamma(1) = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

то

$$C = -\Gamma'(1). \quad (1.13)$$

Функция $\Gamma(p)$ аналитическая в каждой точке плоскости p , кроме точек $0, -1, -2, \dots$, в которых она имеет простые полюсы. В полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ функция $\Gamma(p)$ может быть изображением.

Функции

$$Q(x, p) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt = \Gamma(p, x)$$

и
$$P(x, p) = \int_0^x e^{-t} t^{p-1} dt = \Gamma(p) - \Gamma(p, x) = \gamma(p, x)$$

называются **неполными гамма-функциями** (функциями Прима).

Изображение степенной функции t^α , $\alpha > -1$.

По формуле (1.1)

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha dt.$$

Замена вида $pt = \tau$ преобразовывает ось $t > 0$ в луч с направлением $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$ (рис.5). Имеем

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_{l_1}^\infty e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau.$$

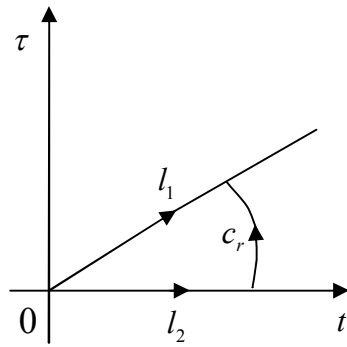


Рис. 5

Функция $e^{-\tau} \tau^\alpha$ - аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} \tau > 0$. Если $\tau^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} \tau}$ - многозначная функция, то для выделения ее однозначных ветвей делается разрез по отрицательной части действительной оси. В плоскости τ контур $l = l_2 + c_r + l_1$ (см. рис.5). Тогда по теореме Коши $\int_l e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau = 0$ или $\int_{l_1} = \int_{l_2} + \int_{c_r}$.

Перейдя к пределу при $r \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{l_1} e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau.$$

Поскольку $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |e^{-\tau} \tau^\alpha| = 0$, то $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau = 0$. Итак,

$$\int_{l_1} e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt = \Gamma(\alpha + 1), \quad \alpha + 1 > 0.$$

Следовательно,

$$t^\alpha \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.14)$$

На интервале $-1 < \alpha < 0$ функции t^α не является оригиналом, так как $t^\alpha \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, однако интеграл $\int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha dt$ сходится. В этом случае оригинал и изображение называют **обобщенными**.

Для $\alpha = n$, $n \in N$,

$$t^n \rightarrow \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}},$$

или

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (1.15)$$

Пример 1. Найти изображение функции $f(t) = t^{n+\frac{1}{2}}$.

На основании соотношения (1.14) имеем

$$t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}{p^{\frac{3}{2}+n}}.$$

Далее, пользуясь формулой (1.10), находим

$$t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} \cdot \frac{1}{p^{n+\frac{3}{2}}},$$

в частности,

$$\sqrt{t} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

Пример 2. Найти изображение функции $f(t) = t^5$.

По формуле (1.15) имеем

$$t^5 \rightarrow \frac{5!}{p^6},$$

или

$$t^5 \rightarrow \frac{120}{p^6}.$$

Пример 3. Найти изображение функции $f(t) = \frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}}$.

Имеем

$$\frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)}{p^{-n+\frac{1}{2}}}.$$

По формуле (1.11) получаем

$$\frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} n! \sqrt{\pi}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{p^{-n+\frac{1}{2}}},$$

в частности,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Пример 4. Найти изображение функции $f(t) = e^{-e^{-t}}$.

Имеем

$$e^{-e^{-t}} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-e^{-t}} dt.$$

Введя замену $e^{-t} = u$, находим

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-e^{-t}} dt = \int_0^1 e^u u^{p-1} du = \gamma(p, 1).$$

Следовательно,

$$e^{-e^{-t}} \rightarrow \gamma(p, 1), \operatorname{Re} p > 0.$$

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§2.1 Линейность

Теорема. Если

$$f_1(t) \rightarrow F_1(p), f_2(t) \rightarrow F_2(p), \dots, f_n(t) \rightarrow F_n(p)$$

и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - числа, то

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n \rightarrow \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n.$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из линейных свойств интеграла.

Пример 5. Пользуясь теоремой линейности и равенством (1.7), найдем изображения следующих функций:

1. $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right),$
 $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$
2. $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right), \operatorname{sh} t \rightarrow \frac{1}{p^2 - 1}.$
3. $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right), \cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1}.$
4. $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right), \operatorname{ch} t \rightarrow \frac{p}{p^2 - 1}.$

§2.2 Подобие

Теорема. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и α - число, то

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

Доказательство. Введя замену $\alpha t = \tau$, $\alpha > 0$, имеем

$$f(\alpha t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} f(\tau) d\tau,$$

или

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Полагая в этом равенстве $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$, получаем

$$F(\beta p) \rightarrow \frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right).$$

Пример 6. Пользуясь теоремой подобия, найдем изображения функций:

$$1. \sin \alpha p \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}, \quad \sin \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}.$$

$$2. i \operatorname{sh} \alpha t = \sin i \alpha t \rightarrow \frac{i \alpha}{p^2 + (i \alpha)^2}, \quad \operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}.$$

$$3. \cos \alpha t \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}, \quad \cos \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2}.$$

$$4. \operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \cos i \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 + (i \alpha)^2}, \quad \operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \alpha^2}.$$

$$5. \cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha t) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2} \right) = \frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}.$$

$$6. \operatorname{ch}^2 \alpha t = \cos^2 i \alpha t \rightarrow \frac{p^2 + 2i^2 \alpha^2}{p(p^2 + 4i^2 \alpha^2)}, \quad \operatorname{ch}^2 \alpha t \rightarrow \frac{p^2 - 2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}.$$

$$7. \sin^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha t) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2} \right), \quad \sin^2 \alpha t \rightarrow \frac{2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}.$$

$$8. i^2 \operatorname{sh}^2 \alpha t = \sin^2 i \alpha t \rightarrow \frac{2(i \alpha)^2}{p(p^2 + 4i^2 \alpha^2)}, \quad \operatorname{sh}^2 \alpha t \rightarrow \frac{2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}.$$

$$9. \sin \alpha t \cos \beta t = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta)t + \sin(\alpha + \beta)t) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + (\alpha - \beta)^2)(p^2 + (\alpha + \beta)^2)}.$$

$$10. f(t) = \sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t \text{ и } f(t) = \cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t.$$

Имеем

$$\sin(\alpha + i\beta)t \rightarrow \frac{\alpha + i\beta}{p^2 + (\alpha + i\beta)^2} = \frac{(\alpha + i\beta)(p^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\beta)}{(p^2 + \alpha - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2},$$

или

$$\sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t + i \cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t \rightarrow \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2) + i\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

Отсюда $\sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t \rightarrow \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$

и $\cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t \rightarrow \frac{\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$

§2.3 Запозывание

Теорема. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p).$$

Доказательство. Имеем

$$f(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ f(t - t_0), & t > t_0. \end{cases}$$

Сдвигая график функции $f(t)$ (рис. 6 а) вправо на отрезок $[0; t_0]$, получаем график функции $f(t - t_0)$ (рис. 6 б).

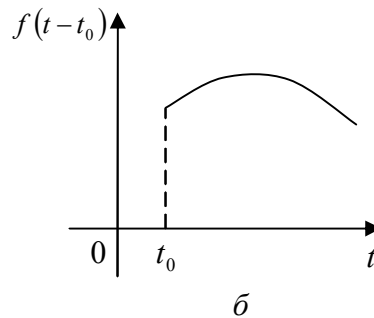
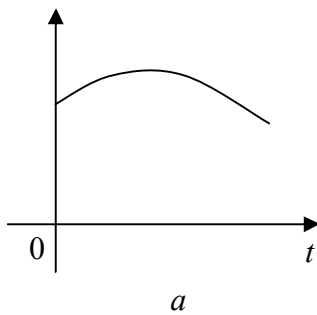


Рис. 6

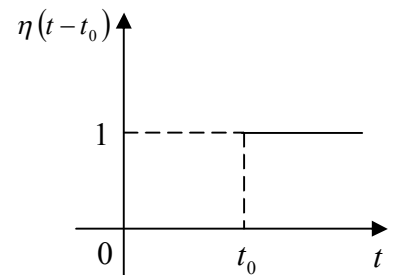


Рис.7

Тогда изображение оригинала

$$f(t - t_0) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt.$$

Производя замену $t - t_0 = \tau$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt &= \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+t_0)} f(\tau) d\tau = \\ &= e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(t-t_0) \rightarrow e^{-pt_0} F(p), \quad t > t_0.$$

Умножение изображения $F(p)$ на e^{-pt_0} сдвигает график его оригинала $f(t)$ вправо на отрезок $[0; t_0]$. Это геометрическое свойство сдвига известно в физике как запаздывание явления на время t_0 .

Применяя теоремы подобия и запаздывания, можно найти изображение для оригинала $f(\alpha t - t_0)$, где $t_0 > 0$, $\alpha > 0$. Имеем $f(t) \rightarrow F(p)$, тогда по теореме подобия $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$. По теореме запаздывания находим

$$f(\alpha t - t_0) = f\left(\alpha \left(t - \frac{t_0}{\alpha}\right)\right) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) e^{-\frac{t_0}{\alpha} p}. \quad (2.1)$$

Функция

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

называется **обобщенной единичной функцией** (рис. 7); ее изображение имеет вид

$$H(t-t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Пример 7. Пользуясь равенством (2.1), найдем изображения функций $(\omega, \varphi_0, a, b > 0, \alpha \in \mathbf{R})$:

1. $\sin(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$
2. $sh(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}.$
3. $\cos(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$
4. $ch(\omega t - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$
5. $(at - b)^\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{p}{a}\right)^{\alpha+1}} e^{-\frac{b}{a} p} = \frac{a^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} e^{-\frac{b}{a} p}.$

Пользуясь теоремой запаздывания, удобно находить изображения кусочно-непрерывных функций.

Пример 8. Найти изображение кусочно-непрерывных функции $(a, b > 0)$:

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases} \quad (\text{рис. 8}).$$

Решение. Функцию $f(t)$ с помощью обобщенной единичной функции можно записать формулой

$$f(t) = (H(t) - H(t - \tau))a.$$

Изображение оригинала $f(t)$ имеет вид

$$f(t) \rightarrow a \frac{1 - e^{-p\tau}}{p},$$

так как $H(t) \rightarrow \frac{1}{p}$ то $H(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} \frac{1}{p}$.

Пример 9. Найти изображение кусочно-непрерывных функции ($a, b > 0$):

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < a, \\ 2a - t, & a < t < 2a, \\ 0, & t > 2a \text{ и } t < 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 9}).$$

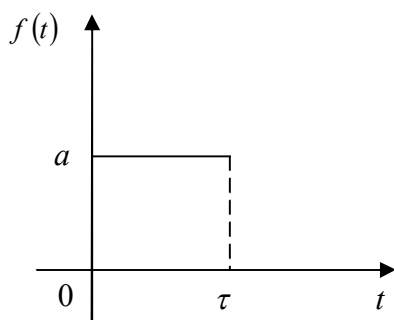


Рис. 8

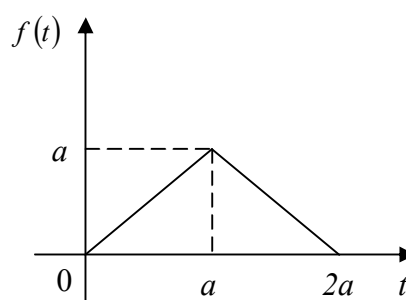


Рис. 9

Решение. Оригинал $f(t)$ можно записать формулой

$$f(t) = tH(t) - tH(t - a) + (2a - t)H(t - a) + (t - 2a)H(t - 2a),$$

или

$$f(t) = tH(t) - 2(t - a)H(t - a) + (t - 2a)H(t - 2a).$$

Изображение функции $f(t)$ имеет вид

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{p^2} e^{-ap} + \frac{1}{p^2} e^{-2ap},$$

или

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{p^2} (1 - e^{-ap})^2.$$

Пример 10. Найти изображение кусочно-непрерывных функций ($a, b > 0$):

$$f(t) = \begin{cases} t - 2a, & 2a < t < a + b, \\ 2b - t, & a + b < t < 2b, \\ 0, & t > 2b \text{ и } t < 2a \end{cases} \quad (\text{рис.10}).$$

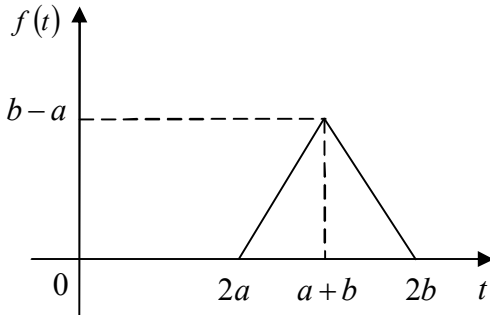


Рис. 10

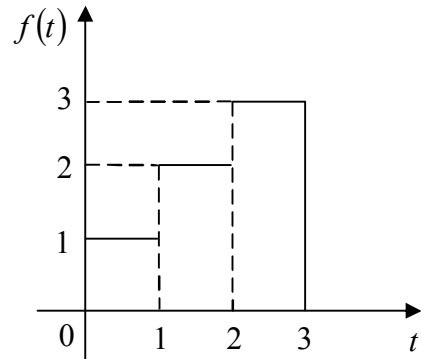


Рис.11

Решение. Функцию $f(t)$ запишем формулой

$$f(t) = (t - 2a)H(t - 2a) - (t - 2a)H(t - a - b) + \\ + (2b - t)H(t - a - b) + (t - 2b)H(t - 2b),$$

или

$$f(t) = (t - 2a)H(t - 2a) - 2(t - a - b)H(t - a - b) + \\ + (t - 2b)H(t - 2b).$$

Находим изображение $F(p)$ для функции $f(t)$.

Имеем

$$F(p) = \frac{e^{-2ap}}{p^2} - 2 \frac{e^{-(a+b)p}}{p^2} + \frac{e^{-2bp}}{p^2}$$

или

$$f(t) \rightarrow \frac{(e^{-ap} - e^{bp})^2}{p^2}.$$

Пример 11. Найти изображения кусочно-непрерывных функций ($a, b > 0$):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ n, & n < t < n + 1, \quad n \in N_0, \end{cases}$$

где $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ (рис.11).

Решение. Ступенчатую функцию $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = H(t - 1) - H(t - 2) - 2H(t - 2) - 2H(t - 3) + \\ + 3H(t - 3) - 3H(t - 4) + \dots + (n - 1)H(t - (n - 1)) - \\ - (n - 1)H(t - n) + nH(t - n) + \dots,$$

или

$$f(t) = H(t-1) + H(t-2) + H(t-3) - \dots + H(t-n) + \dots$$

Изображение $F(p)$ для функции $f(t)$ имеет вид

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-3p}}{p} + \dots + \frac{e^{-np}}{p} + \dots = \frac{1}{p(e^p - 1)}.$$

Пример 12. Найти изображения кусочно-непрерывных функций ($a, b > 0$):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ t - a, & a < t < b, \\ b - a, & t > b \end{cases} \quad (\text{рис. 12}).$$

Решение. Имеем

$$f(t) = (t - a)H(t - a) - (t - a)H(t - b) + (b - a)H(t - b),$$

или $f(t) = (t - a)H(t - a) - (t - b)H(t - b).$

Изображение функции $f(t)$ имеет вид

$$f(p) = \frac{1}{p^2} (e^{-ap} - e^{-bp}).$$

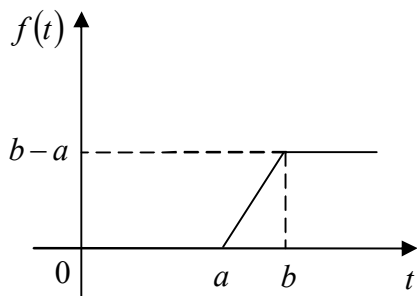


Рис. 12

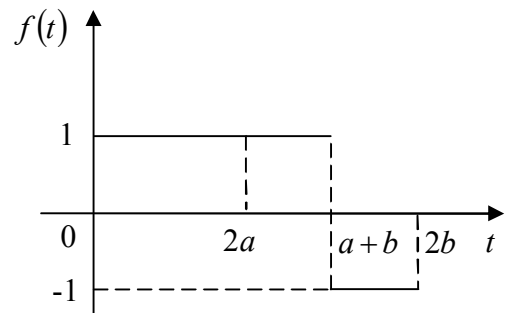


Рис. 13

Пример 13. Найти изображения кусочно-непрерывных функций ($a, b > 0$):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2a \text{ и } t > 2b, \\ 1, & 2a < t < a + b, \\ -1, & a + b < t < 2b \end{cases} \quad (\text{рис. 13}).$$

Решение. Функцию $f(t)$ представим формулой

$$f(t) = H(t - 2a) - 2H(t - a - b) + H(t - 2b).$$

Тогда ее изображение имеет вид

$$F(p) = \frac{e^{-2ap}}{p} - 2 \frac{e^{-2(a+b)p}}{p} + \frac{e^{-2bp}}{p}.$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{p} (e^{-ap} - e^{-bp})^2.$$

§ 2.4 Опережение

Теорема. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t + t_0) \rightarrow e^{t_0 p} \left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right).$$

Доказательство. График функции $f(t + t_0)$ получаем, смещая график $f(t)$ (рис. 23б) влево на отрезок $[0; t_0]$. Смещенная часть графика функции $f(t)$ в интервале $(-t_0; 0)$ вырождается в отрезок оси t , а усеченная часть при $t > 0$ является графиком функции $f(t + t_0)$ (рис. 23а). Имеем

$$f(t + t_0) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t + t_0) dt.$$

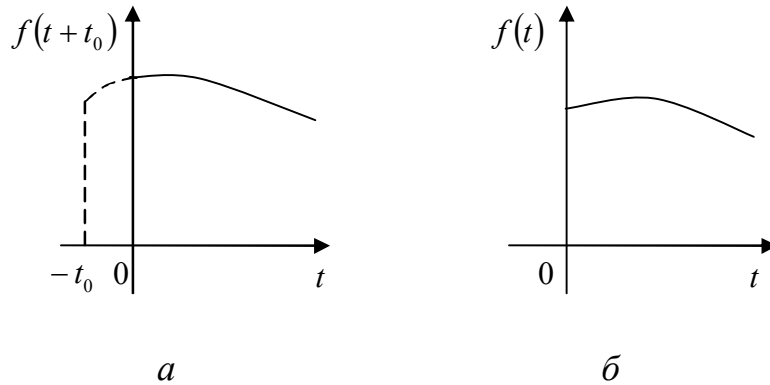


Рис. 23

Сделав замену под интегралом $t + t_0 = u$, $t_0 \leq u < \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t + t_0) dt &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-p(u-t_0)} f(u) du = e^{pt_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-pu} f(u) du = \\ &= e^{pt_0} \left(\int_{t_0}^0 e^{-pu} f(u) du + \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(t + t_0) \rightarrow e^{pt_0} \left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right).$$

Теорему опережения применяют при решении разностных уравнений, в которые входят $f(t)$, $f(t + t_0)$, ..., $f(t + nt_0)$.

§2.5 Изображение периодического оригинала

Теорема. Если $f(t)$ - периодическая функция с периодом T ,

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T \end{cases}$$

и $f_0(t) \rightarrow F_0(p)$, то изображение функции $f(t)$ имеет вид

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Доказательство. Из условия

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T \end{cases}$$

функцию $f(t)$ можно выразить через $f_0(t)$. Имеем

$$f(t) = f_0(t) + f(t - T),$$

так как $f(t - T) = 0$, $t < T$. Тогда $F(p) = F_0(p) + e^{-pT} F(p)$. Отсюда

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (2.2)$$

где

$$F_0(p) = \int_0^T e^{-pt} f_0(t) dt.$$

В частности, пусть функция $f(t) = f(t + T)$ изменяет знак на полупериоде. Имеем

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad \text{и} \quad f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & t > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Тогда

$$f(t) = f_0(t) - f\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

и

$$F(p) = F_0(p) - e^{-\frac{T}{2}p} F(p).$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 + e^{-\frac{T}{2}p}},$$

где

$$F_0(p) = \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-pt} f(t) dt.$$

Найти изображения кусочно-непрерывных функций ($a, b > 0$):

Пример 14. Пользуясь формулой (2.2), найти изображения периодической функции ($n \in N_0, a > 0$):

$$f(t) = f(t + 2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ 0, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \cdot \frac{e^{-pt}}{p^2 + 1} (-p \sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

или

$$\sin t \eta(\sin t) \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi p}}.$$

Пример 15. Пользуясь формулой (2.2), найти изображения периодической функции ($n \in N_0, a > 0$):

$$f(t) = f\left(t + \frac{\pi}{a}\right) = |\sin at| \quad (\text{рис.25}).$$

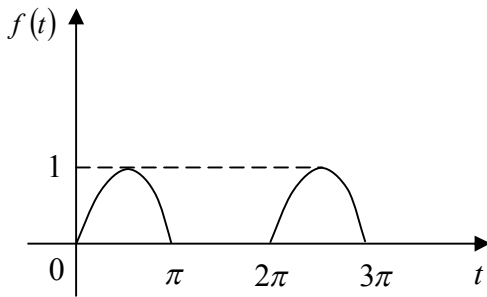


Рис. 24

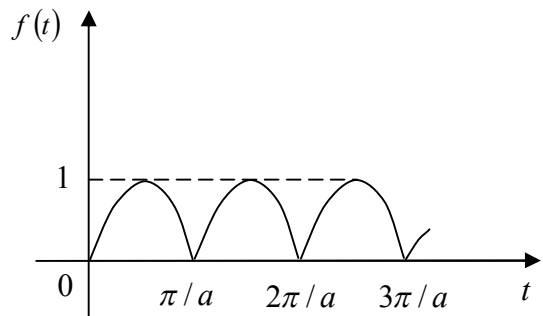


Рис. 25

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} |\sin at| &\rightarrow \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}p}} \int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-pt} \sin at dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}p}} \cdot \frac{e^{-pt}}{p^2 + a^2} (-p \sin at - a \cos at) \Big|_0^{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$|\sin at| \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2} \operatorname{cth} \frac{\pi p}{2a}.$$

Пример 16. Пользуясь формулой (2.2), найти изображения периодической функции ($n \in N_0$, $a > 0$):

$$f(t) = f(t + 2a) = \begin{cases} 1, & 2na < t < (2n+1)a, \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{cases} \quad t < 0 \quad (\text{рис.27}).$$

Решение. Так как

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2ap}} \int_0^{2a} e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2ap}} \int_0^a e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-ap}} \cdot \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^a = \frac{1}{1 - e^{-2ap}} \left(\frac{e^{-ap}}{-p} + \frac{1}{p} \right), \end{aligned}$$

или

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{p(1 + e^{ap})}.$$

Пример 17. Пользуясь формулой (2.2), найти изображения периодической функции ($n \in N_0$, $a > 0$) (рис. 28)

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{1 - 4e^{-4ap}} \int_0^{4a} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-4ap}} \left(\int_0^a e^{-pt} \frac{t}{a} dt + \int_a^{2a} e^{-pt} \left(2 - \frac{t}{a} \right) dt \right) = \\ &= \frac{1}{a(1 - e^{-4ap})} \left(\left(-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \right) \Big|_0^a + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{te^{-pt}}{p} + \frac{e^{-pt}}{p^2} + \frac{2ae^{-pt}}{p} \right) \Big|_a^{2a} \right) = \frac{(1 - e^{-ap})^2}{ap^2(1 - e^{-4ap})}, \end{aligned}$$

или

$$f(t) \rightarrow \frac{\operatorname{th} \frac{ap}{2}}{ap^2(1 + e^{-2ap})}.$$

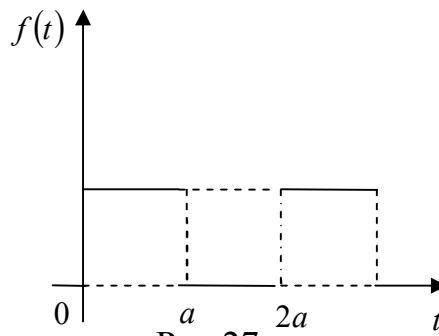


Рис.27

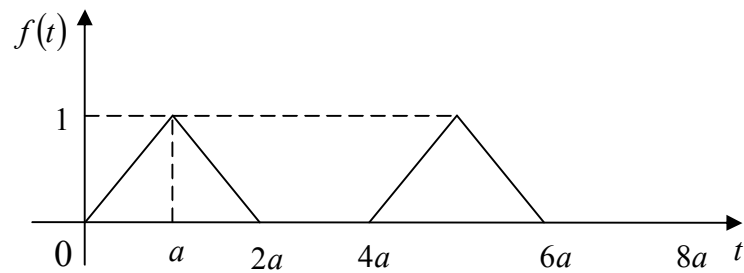


Рис. 28

§2.6 Смещение

Теорема. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, p_0 - число, то

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0).$$

Доказательство. По формуле (1.1)

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-p_0 t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+p_0)t} f(t) dt,$$

или

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0), \quad \operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re} p_0.$$

При умножении оригинала на $e^{\pm p_0 t}$ в плоскости p происходит смещение на вектор $\mp p_0$ (рис.29).

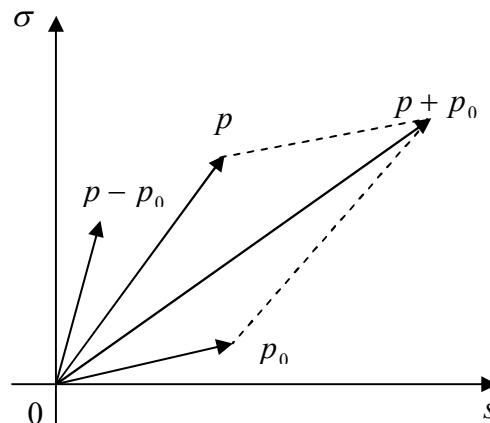


Рис. 29

Теорему смещения применяют при рассмотрении физических явлений, связанных с затухающими колебаниями.

Пример 18. Пользуясь теоремой смещения, найдем изображения следующих функций:

1. $e^{-\alpha t} \sin \omega t, \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$
2. $e^{-\alpha t} \sin \omega t, \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}.$
3. $e^{-\alpha t} \cos \omega t, \cos \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \cos \omega t \rightarrow \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$
4. $e^{-\alpha t} \cos \omega t, \cos \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \cos \omega t \rightarrow \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}.$
5. $t^\alpha e^{\beta t} \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(p - \beta)^{\alpha + 1}}$ при $\alpha = n, \quad t^n e^{\beta t} \rightarrow \frac{n!}{(p - \beta)^{n + 1}}.$
6. $t^\alpha \sin \beta t = \frac{1}{2i} (t^\alpha e^{i\beta t} - t^\alpha e^{-i\beta t}) \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2i} \cdot \frac{(p + \beta)^{\alpha + 1} - (p - \beta)^{\alpha + 1}}{(p^2 + \beta^2)^{\alpha + 1}}.$

При $\alpha = n, \quad n \in N, \quad \text{и} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{t^n}{n!} \sin \beta t \rightarrow \frac{(p + \beta i)^{n+1} - (p - \beta i)^{n+1}}{2i(p^2 + \beta^2)^{n+1}}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta t}{\sqrt{t}} &\rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \cdot \frac{\sqrt{p + \beta i} - \sqrt{p - \beta i}}{\sqrt{p^2 + \beta^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{p + \beta i} - \sqrt{p - \beta i})^2}}{\sqrt{p^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} \rightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} - p}}{2\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (2.3)$$

§2.7 Дифференцирование оригинала

Теорема. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightarrow pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. По определению изображения имеем

$$f'(t) \rightarrow \int_0^\infty e^{pt} f'(t) dt.$$

Интегрируя правую часть по частям, получаем

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Поскольку $\operatorname{Re} p = s > s_0$, то $|e^{-pt} f(t)| < M e^{-(s-s_0)t}$, поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$.

Если оригинал $f(t)$ в точке $t = 0$ является непрерывной функцией, то $f(0) = 0$, так как $f(t) = 0$ при $t < 0$; если при $t = 0$ функция $f(t)$ имеет разрыв 1-го рода, то при $t \rightarrow 0$ предел функции $f(t)$ справа $\lim_{t \rightarrow 0+0} e^{-pt} f(t) = f(0)$, следовательно, $e^{-pt} \times f(t) \Big|_0^\infty = -f(0)$.

Таким образом,

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0), \operatorname{Re} p > s_0.$$

Если при $t = 0$ функция $f(t)$ непрерывна, то $f'(t) \rightarrow pF(p)$. Это означает, что дифференцированию оригинала $f(t)$ соответствует в пространстве изображения умножение на p функции $F(p)$.

Интегрируя интеграл $\int_0^\infty e^{-pt} f''(t) dt$ дважды по частям, получаем:

$$f''(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

По методу математической индукции, предполагая, что формула

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) = \Phi(p)$$

верна для n , докажем, что она верна и для $n + 1$.

Из доказательства для $n = 1$ имеем

$$(f^{(n)}(t))' \rightarrow p\Phi(p) - f^{(n)}(0),$$

или

$$f^{(n+1)}(t) \rightarrow p^{n+1} F(p) - p^n f(0) - \dots - pf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0).$$

Таким образом, формула верна для любого натурального числа n . Если функция $f^{(n)}(t)$ имеет изображение, то и $f^{(n-1)}(t)$ имеет изображение; обратное вообще невозможно.

Если при $t = 0$ функция $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)$ ($k = \overline{1, n}$) - непрерывны, то $f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p)$, следовательно, n - кратному дифференцированию в пространстве оригиналов соответствует умножение на p^n функции $F(p)$ в пространстве изображений. В этом частном случае величину p рассматривают как оператор.

Пример 19. Найти изображение дифференциального выражения

$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8$
 при условиях $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$, $x'''(0) = 2$.

Решение. Введем следующее обозначение $x(t) \rightarrow X(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала

$$\begin{aligned} x'(t) &\rightarrow pX(p) - 5, \\ x''(t) &\rightarrow p^2X(p) - 5p, \\ x'''(t) &\rightarrow p^3X(p) - 5p^2 + 1, \\ x^{IV}(t) &\rightarrow p^4X(p) - 5p^3 + p - 2. \end{aligned}$$

Отсюда, по свойству линейности, получим

$$\begin{aligned} &x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8 \rightarrow \\ &\rightarrow p^4X(p) - 5p^3 + p - 2 - 5(p^3X(p) - 5p^2 + 1) - \\ &- 4(p^2X(p) - 5p) + 2(pX(p) - 5) - X(p) + \frac{8}{p} = \\ &= (p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1)X(p) - \\ &- 5p^3 + 25p^2 + 21p - 17 + \frac{8}{p}. \end{aligned}$$

Пример 20. Найти значение единичной функции $H(t)$ при $t \rightarrow 0 + 0$.

Решение. Так как $H(t) \rightarrow \frac{1}{p}$.

Поскольку $H'(t) = 0$ существует в каждой точке $t > 0$, то по теореме дифференцирования оригинала $H'(t) \rightarrow 1 - H(0)$, или $1 - H(0) = 0$. Отсюда $H(0) = 1$, где $H(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} H(t)$.

Пример 21. Найти изображение для производной функции $f(t) = \sqrt{t}$.

Решение. Поскольку

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{2p^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Функция $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ существует в каждой точке $t > 0$, при $t = 0$ имеет бесконечный разрыв. Изображение таких функций находим по теореме дифференцирования оригинала, в которой предполагается, что $f^{(n)}(t)$ существует при $t > 0$, а при $t = 0$ функции $f^{(n)}(t)$ вообще может и не существовать.

Итак,

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{p}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad f(0) = 0.$$

Изображение для этой функции $f'(t)$ можно найти непосредственно.

Имеем

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \rightarrow \frac{1}{2p^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Пример 22. Найти изображение производной для обобщенной единичной функции $H(t-t_0)$.

Решение. Теорема дифференцирования оригинала не применима к функции

$$H'(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \text{не существует,} & t = t_0, \end{cases}$$

так как она существует не в каждой точке $t > 0$.

Найдем изображение функции $H'(t-t_0)$, пользуясь формулой (1.1).
имеем

$$H'(t-t_0) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} H'(t-t_0) dt = 0.$$

Если бы ошибочно к функции $H'(t-t_0)$ мы применили теорему дифференцирования оригинала, то получили бы неправильный результат, а именно: $H'(t-t_0) \rightarrow e^{-pt_0}$, $\lim_{t \rightarrow 0+0} H(t-t_0) = 0$, поскольку теорема дифференцирования оригинала применима к функциям, производные которых существуют в каждой точке $t > 0$.

§2.8 Дифференцирование изображения

Теорема. Если $F(p) \rightarrow f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$F'(p) \rightarrow -t f(t), \quad F''(p) \rightarrow (-1)^2 t^2 f(t),$$

.....,

$$F^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n t^n f(t), \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

Доказательство. 1. Поскольку $|f(t)| < M e^{s_0 t}$, то при $t > 0$

$$|t^n f(t)| = t^n |f(t)| < M t^n e^{-\alpha t} e^{(s_0 + \alpha)t},$$

$\alpha > 0$ - малое число. Функция $M t^n e^{-\alpha t}$ имеет при $t = \frac{n}{\alpha}$ единственный максимум M_1 , который при $t > 0$ будет ее наибольшим значением, т.е. $M t^n e^{-\alpha t} < M_1$. Следовательно,

$$|t^n f(t)| < M_1 e^{s_1 t}, \quad s_1 \geq s_0 + \alpha.$$

Таким образом, если функция $f(t)$ - оригинал с показателем роста s_0 , то функция $t^n f(t)$ будет тоже оригиналом и ее изображение определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1$.

2. Изображение $F(p)$ для функции $f(t)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической функцией (см. §2) и, согласно (1.4), $F'(p) \rightarrow -t f(t)$. Тогда по теории функции комплексного переменного

функция $F(p)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1$ производную любого порядка:

$$(F'(p))' \rightarrow -t(-tf(t)),$$

или

$$F''(p) \rightarrow (-1)^2 t^2 f(t);$$

$$F'''(p) \rightarrow (-1)^3 t^3 f(t).$$

или

$$F'''(p) \rightarrow (-1)^3 t^3 f(t).$$

Вообще,

$$F^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n t^n f(t), \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

Итак, дифференцированию изображения $F(p)$ соответствует в пространстве оригиналов действию умножения на $-t$ функции $f(t)$.

Пример 23. Пользуясь равенствами

$$\sin \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}, \quad \cos \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2},$$

$$\operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}, \quad \operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$$

и теоремой дифференцирования изображения, найдем изображения функций:

$$1. -t \sin \beta t \rightarrow \left(\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right)', \quad t \sin \alpha t \rightarrow \frac{2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}.$$

$$2. -t \cos \alpha t \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right)', \quad t \cos \alpha t \rightarrow \frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}.$$

$$3. -t \operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \left(\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \right)', \quad t \operatorname{sh} \alpha t \rightarrow \frac{2p\alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2}.$$

$$4. -t \operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 - \alpha^2} \right)', \quad t \operatorname{ch} \alpha t \rightarrow \frac{p^2 + \alpha^2}{(p^2 - \alpha^2)^2}.$$

§2.9 Интегрирование оригинала

Теорема. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > s_0.$$

Доказательство. 1. Функция $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ удовлетворяет,

очевидно, условиям определения 1) и 2) функции-оригинала, а также и условию 3), так как

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| < \int_0^t M e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) < M_1 e^{s_0 t}$$

где $M_1 = \frac{M}{s_0}$. Следовательно, функция $\varphi(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 .

2. Пусть $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, тогда по теореме дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t) \rightarrow p\Phi(p), \quad \varphi(0) = 0,$$

так как $\varphi'(t) \rightarrow f(t)$, то $F(p) = p\Phi(p)$. Отсюда $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Таким образом,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 24. Найти изображения функций: $S(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{2\pi u}} du$ - синус-интеграл Френеля и $C(t) = \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{2\pi u}} du$ - косинус-интеграл Френеля (рис.30).

Решение. Полагая $u = \tau^2$, находим

$$S(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \sin \tau^2 d\tau \quad \text{и} \quad C(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \cos \tau^2 d\tau.$$

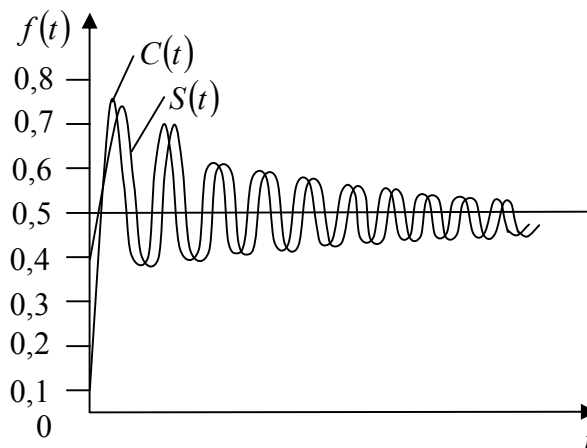


Рис. 30

Отсюда $S(0) = C(0) = 0$ и $S(\infty) = C(\infty) = \frac{1}{2}$, так как

$$\int_0^{\infty} \sin \tau^2 d\tau = \int_0^{\infty} \cos \tau^2 d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Из соответствий (2.3) и (2.4) по теореме интегрирования оригинала получаем изображения функций Френеля

$$S(t) \rightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}} \text{ и } C(t) \rightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}}.$$

§2.10 Интегрирование изображения

Теорема. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ и интеграл $\int_p^{\infty} F(p) dp$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, то

$$\int_p^{\infty} F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}, \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

Доказательство. В полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0 + \delta$ (см. рис.1) интеграл Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ сходится равномерно относительно p (см. §2).

Поэтому в этой полуплоскости его интегрируем по параметру p , причем за контур интегрирования можно выбрать любой луч, исходящий из точки p и образующий острый угол с действительной осью. Имеем

$$\int_p^{\infty} F(p) dp \rightarrow \int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} e^{pt} f(t) dt.$$

Поскольку по условию интеграл $\int_p^{\infty} F(p) dp$ сходится в полуплоскости

$\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, то

$$\int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt \int_p^{\infty} e^{-pt} dp, \text{ или } \int_p^{\infty} F(p) dp \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Следовательно, функция $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом с показателем роста $s_1 > s_0$.

Таким образом, интегрирование изображения $F(p)$ сводится в пространстве оригинала к делению на t функции $f(t)$, т.е.

$$\int_p^{\infty} F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}, \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

Пример 25. Найти изображения функции:

$$1. Si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \text{ (интегральный синус, рис.31).}$$

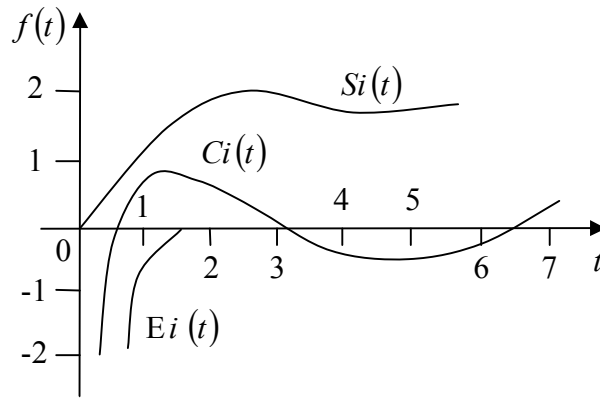


Рис. 31

Из равенства $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$ по теореме интегрирования изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \arctg p \Big|_p^\infty = \arctg \frac{1}{p}.$$

Отсюда, по теореме интегрирования оригинала, получим

$$Si(t) = \frac{1}{p} \arctg \frac{1}{p}.$$

2. $si(t) = -\int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du$ (интегральный синус).

Так как $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$, то $si(t) = Si(t) - \frac{\pi}{2}$.

Имеем

$$si(t) \rightarrow \frac{1}{p} \arctg \frac{1}{p} - \frac{\pi}{2p},$$

или

$$si(t) \rightarrow -\frac{1}{p} \arctg p.$$

3. $shi(t) = \int_0^t \frac{sh u}{u} du$ (интегральный гиперболический синус). Имеем

$$i shi(t) = Si(it) \rightarrow \frac{1}{p} \arctg \frac{i}{p} = \frac{i}{p} \operatorname{Arth} \frac{1}{p},$$

или

$$shi(t) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

§2.11 Пределный переход по параметру

Теорема. Если $f(t, \lambda) \rightarrow F(p, \lambda)$, λ - параметр, и существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda), \text{ то } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda) \rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(t, \lambda).$$

Доказательство. По условию $F(p, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t, \lambda) dt$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t, \lambda) dt.$$

В этом равенстве действия предела и интеграла перестановочны, так как несобственный интеграл Лапласа сходится равномерно относительно p и λ . Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda) dt,$$

или

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(t, \lambda) \rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F(p, \lambda).$$

§2.12 Дифференцирование по параметру

Теорема. Если $f(t, \lambda) \rightarrow F(p, \lambda)$, λ - параметр, и существует производная $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)$, то

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda).$$

Доказательство. Приращению $\Delta \lambda$ параметра λ соответствует приращение $\Delta F(p, \lambda)$ функции $F(p, \lambda)$. Найдем отношение приращений $\frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta \lambda}$. Имеем

$$\frac{F(p, \lambda + \Delta \lambda) - F(p, \lambda)}{\Delta \lambda} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t, \lambda + \Delta \lambda) - f(t, \lambda)}{\Delta \lambda} dt.$$

Поскольку

$$\frac{f(t, \lambda + \Delta \lambda) - f(t, \lambda)}{\Delta \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t, \lambda, \Delta \lambda) \rightarrow 0$ равномерно при $\Delta \lambda \rightarrow 0$, то

$$\frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta \lambda} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) + \varepsilon \right) dt.$$

Переходя к пределу при $\Delta \lambda \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda) = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta \lambda} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) + \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-pt} \varepsilon dt.$$

По теореме о предельном переходе по параметру имеем

$$\lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-pt} \varepsilon dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \varepsilon dt = 0, \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) dt,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(p, \lambda) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda).$$

Пример 26. Найти изображения для оригиналов:

$$1. f(t) = \sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t.$$

Из соотношения

$$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2} \rightarrow \sin \lambda t$$

дифференцируя по параметру получаем

$$\frac{p^2 - \lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2} \rightarrow t \cos \lambda t,$$

или

$$\frac{1}{p^2 + \lambda^2} - \frac{2\lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2} \rightarrow t \cos \lambda t.$$

Отсюда, пользуясь равенством $\frac{1}{p^2 + \lambda^2} \rightarrow \frac{\sin \lambda t}{\lambda}$, по теореме линейности имеем

$$\frac{2\lambda^3}{(p^2 + \lambda^2)^2} \rightarrow \sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t \quad (2.4)$$

$$2. f(t) = \frac{t \sin \lambda t}{2\lambda}.$$

Дифференцируя по параметру λ равенство $\cos \lambda t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \lambda^2}$, получаем,

$$\frac{t \sin \lambda t}{2\lambda} \rightarrow \frac{p}{(p^2 + \lambda^2)^2}. \quad (2.5)$$

$$3. f(t) = \ln t.$$

Дифференцируя по параметру α равенство (1.14), получаем

$$t^\alpha \ln t \rightarrow \frac{1}{p^{\alpha+1}} (\Gamma'(\alpha+1) - \ln p \Gamma(\alpha+1)).$$

Отсюда при $\alpha = 0$, $\Gamma'(1) = -C$, согласно соотношения (1.13), имеем

$$\ln t \rightarrow \frac{-C - \ln p}{p},$$

или

$$\ln t \rightarrow -\frac{1}{p} \ln(\gamma p), \quad (2.6)$$

где $\gamma = e^C$.

4. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{2p + 3}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

Так как

$$F(p) = \frac{2(p+2)}{((p+2)^2 + 4)^2} - \frac{1}{((p+2)^2 + 4)^2}.$$

Из равенства (2.5) при $\lambda = 2$ находим

$$\frac{2p}{(p^2 + 4)^2} \rightarrow \frac{t \sin 2t}{2}.$$

По теореме смещения имеем

$$\frac{2(p+2)}{((p+2)^2 + 4)^2} \rightarrow e^{-2t} \frac{t \sin 2t}{2}$$

Пользуясь равенством (2.4) при $\lambda = 2$, получаем

$$\frac{1}{(p^2 + 4)^2} \rightarrow \frac{\sin 2t - 2t \cos 2t}{2 \cdot 2^3}.$$

Тогда по теореме смещения

$$\frac{1}{((p+2)^2 + 4)^2} \rightarrow e^{-2t} \frac{\sin 2t - 2t \cos 2t}{16}.$$

Итак,

$$F(p) \rightarrow e^{-2t} \frac{t \sin 2t}{2} + e^{-2t} \frac{2t \cos 2t - \sin 2t}{16},$$

или

$$F(p) \rightarrow \frac{e^{-2t}}{16} ((8t - 1) \sin 2t + 2t \cos 2t).$$

Замечание. Теоремой дифференцирования по параметру пользуются для получения из данных операционных равенств новых формул, а также при решении линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

§2.13 Интегрирование по параметру

Теорема. $f(t, \lambda) \rightarrow F(p, \lambda)$, λ - параметр, и существуют интегралы

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \text{ и } \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda,$$

то

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda. \quad (2.7)$$

Доказательство. Для любого $A \geq 0$ справедливо равенство

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_0^A e^{-pt} f(t, \lambda) dt = \int_0^A dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t, \lambda) d\lambda. \quad (2.8)$$

По условию предел

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_0^A e^{-pt} f(t, \lambda) dt = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t, \lambda) dt$$

существует, поэтому существует и предел справа в равенстве (2.8) при $A \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t, \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t, \lambda) d\lambda.$$

Интегрируя равенство $F(p, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t, \lambda) dt$ по λ , найдем

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \right) dt,$$

или

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda) d\lambda.$$

Частный случай зависимости оригинала и изображения от параметра имеем по теореме подобия

$$\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \rightarrow F(\alpha p).$$

Интегрируя по α от 0 до 1, получаем

$$\int_0^1 \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) d\alpha \rightarrow \int_0^1 F(\alpha p) d\alpha.$$

Произведем замены $\frac{t}{\alpha} = u$ и $\alpha p = q$. Тогда

$$\int_t^{\infty} \frac{f(u)}{u} du \rightarrow \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq. \quad (2.9)$$

По теореме интегрирования изображения

$$\frac{f(t)}{t} \int_p^{\infty} \rightarrow F(q) dq.$$

Отсюда по теореме интегрирования оригинала

$$\int_0^t \frac{f(u)}{u} du \rightarrow \frac{1}{p} \int_p^\infty F(q) dq. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) по теореме линейности следует

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{u} du \rightarrow \frac{1}{p} \int_p^\infty F(q) dq.$$

Отсюда, используя, что $1 \rightarrow \frac{1}{p}$, получаем

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{u} du = \int_0^\infty F(q) dq. \quad (2.11)$$

Из теоремы дифференцирования изображения следует

$$t^{n+1} f(t) \rightarrow (-1)^{n+1} F^{(n+1)}(p).$$

Тогда по формуле (2.11)

$$\int_0^\infty u^n f(u) du = (-1)^{n+1} \int_0^\infty F^{(n+1)}(p) dp = (-1)^{n+1} \frac{d^n F(p)}{d p^n}. \quad (2.12)$$

Пример 27. Найти изображения функций:

$$1. ci(t) = \int_0^t \frac{\cos u}{u} du + C_1, \quad t > 0.$$

Постоянную интегрирования определим из условия $ci(\infty) = \int_0^\infty \frac{\cos u}{u} du + C_1$.

Отсюда $C_1 = -\int_0^\infty \frac{\cos u}{u} du$, тогда $ci(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du$ (интегральный косинус, см. рис.31).

По формуле (2.11) имеем

$$-\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du \rightarrow -\frac{1}{p} \int_0^p \frac{q}{q^2 + 1} dq = -\frac{1}{2p} \ln(p^2 + 1),$$

или

$$ci(t) \rightarrow \frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

$$2. f(t) = \frac{e^{\lambda t} - 1}{t}.$$

Из соотношения $\frac{1}{p - \lambda} \rightarrow e^{\lambda t}$, согласно (2.7), имеем

$$\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{p - \lambda} \rightarrow \int_0^\lambda e^{\lambda t} d\lambda.$$

Интегрируя по параметру λ , получаем

$$\ln \frac{p}{p - \lambda} \rightarrow \frac{e^{\lambda t} - 1}{t}.$$

§2.14 Предельные теоремы

Теорема 1. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $f'(t)$ - оригинал и существует $\lim_{t \rightarrow 0+0} f(t) = f(0)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t). \quad (2.13)$$

Доказательство. Поскольку $f'(t)$ - оригинал, то $f'(t) \rightarrow \rightarrow pF(p) - f(0)$. По необходимому признаку существования изображения имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0)) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t).$$

Таким образом, начальное значение оригинала $f(0)$ можно найти по его изображению $F(p)$ из равенства

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Теорема 2. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $f'(t)$ - оригинал и существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Доказательство. Поскольку $f'(t)$ - оригинал, то $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$,

или

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = pF(p) - f(0).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $p \rightarrow 0$. Имеем

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0).$$

Подынтегральная функция удовлетворяет условиям теоремы о предельном переходе, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt &= \int_0^{\infty} \lim_{p \rightarrow 0} e^{-pt} f'(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Итак, для непериодических процессов установившееся значение оригинала $f(\infty)$ можно найти по его изображению с помощью равенства

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

§2.15 Свертка функций и ее свойства

Определение. Сверткой непрерывных функций $\varphi(t)$ и $f(t)$, $0 \leq t < \infty$ (обозначается $\varphi(t) * f(t)$), называется интеграл

$$\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = \varphi * f. \quad (2.14)$$

Свертка есть действие, которое паре функций из некоторого множества ставит в соответствие определенную функцию из этого множества. Действие получения свертки называется свертыванием функций.

Пример 28. Найти свертку функцию $\varphi(t) = t$ и $f(t) = e^t$.

Имеем

$$\begin{aligned} t * e^t &= \int_0^t e^\tau (t-\tau) d\tau = t \int_0^t e^\tau d\tau - \\ &- \int_0^t \tau e^\tau d\tau = (te^\tau - e^\tau \tau + e^\tau) \Big|_0^t, \end{aligned}$$

или

$$t * e^t = e^t - t - 1.$$

Свойства свертки

1. **Коммутативность:** $\varphi * f = f * \varphi$. Полагая в равенстве (2.14) $t - \tau = u$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau &= - \int_t^0 \varphi(u) f(t-u) du = \\ &= \int_0^t f(t-u) \varphi(u) du \end{aligned}$$

или

$$\varphi * f = f * \varphi.$$

2. **Ассоциативность:** $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$. Обозначим

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = g(t)$$

и

$$f * \psi = \int_0^t f(t-\tau) \psi(\tau) d\tau = h(t).$$

Тогда

$$g * \psi = \varphi * h,$$

или

$$\int_0^t g(t-\tau) \psi(\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) h(\tau) d\tau.$$

Полагая $\sigma + \tau = \omega$, $\tau \leq \omega \leq t$, найдем

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-\tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \varphi(t-\tau-\sigma) f(\sigma) d\sigma \right) \mu(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\int_{\tau}^t \varphi(t-\omega) f(\omega-\tau) d\omega \right) \mu(\tau) d\tau = \\ &= \iint_D \varphi(t-\omega) f(\omega-\tau) \mu(\tau) d\tau d\omega. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле по области $D: 0 \leq \tau \leq \omega \leq t$ (рис. 32), получаем

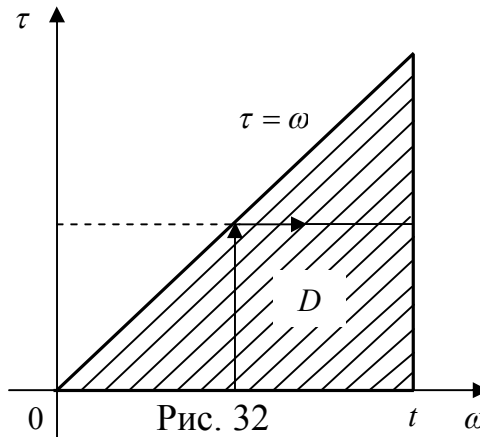
$$\begin{aligned} \iint_D \varphi(t-\omega) f(\omega-\tau) \mu(\tau) d\tau d\omega &= \\ &= \int_0^t \varphi(t-\omega) d\omega \int_0^{\omega} f(\omega-\tau) \mu(\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(t-\omega) h(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^t g(t-\tau) \mu(\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) h(\tau) d\tau,$$

или

$$(\varphi * f) * \mu = \varphi * (f * \mu).$$



Таким образом, вычисление свертки трех или больше функций не зависит от способа их сочетания.

3. Дистрибутивность относительно сложения:

$$\varphi * (f + \mu) = \varphi * f + \varphi * \mu.$$

По определению свертки имеем

$$\begin{aligned} \varphi * (f + \mu) &= \int_0^t \varphi(t-\tau) (f(\tau) + \mu(\tau)) d\tau = \\ &= \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_0^t \varphi(t-\tau) \mu(\tau) d\tau = \varphi * f + \varphi * \mu. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi * (f + \mu) = \varphi * f + \varphi * \mu.$$

4. **Абсолютная величина свертки.** Имеем

$$\left| \int_0^t \chi(t-\tau) f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |\varphi(t-\tau)| |f(\tau)| d\tau.$$

Итак,

$$|\varphi * f| \leq |\varphi| * |f|.$$

Следующие свойства 5 и 6 приведем без доказательства.

5. Если $\varphi(t)$ и $f(t)$ - непрерывные функции при $t \geq 0$, то и их свертка $\varphi * f$ является также непрерывной функцией при $t \geq 0$.

6. Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ - непрерывны при $t \geq 0$ и $f * \varphi = 0$, то, по крайней мере, одна из этих функций при $t \geq 0$ равна нулю (теорема Титчмарша).

§2.16 Свертка оригиналов

Теорема. Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ - оригиналы, то свертка $f * \varphi$ есть тоже оригинал.

Доказательство. Для функции $f * \varphi = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau$ условия 1) и 2) определения оригинала, очевидно, выполняются. Докажем, что функция $f * \varphi$ удовлетворяет и условию 3) функции-оригинала. Поскольку

$$|f(t)| < M_0 e^{s_0 t} \text{ и } |\varphi(t)| < M_1 e^{s_1 t},$$

то

$$|f * \varphi| \leq \int_0^t |f(\tau)| |\varphi(t-\tau)| d\tau < \int_0^t M_0 e^{s_0 \tau} M_1 e^{s_1 (t-\tau)} d\tau.$$

Обозначим $M_0 M_1 = M_2$, и пусть $s_0 > s_1$, тогда

$$|f * \varphi| < M_2 \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_0 (t-\tau)} d\tau = M_2 t e^{-\alpha t} e^{(s_0 + \alpha)t},$$

где $\alpha > 0$ - малое число.

Функция $M_2 t e^{-\alpha t}$ при $t > 0$ имеет единственный максимум $M > 0$, поэтому $M_2 t e^{-\alpha t} = M$. Тогда $|f * \varphi| < M e^{(s_0 + \alpha)t}$ или $|f * \varphi| < M e^{s_0 t}$, так как s_0 - точная нижняя граница чисел $s_0 + \alpha$.

Следовательно, свертка $f * \varphi$ является оригиналом с показателем роста s_0 при $s_0 > s_1$.

§2.17 Умножение изображений

Теорема (Бореля). Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ и $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, то $f * \varphi \rightarrow F(p)\Phi(p)$.

Доказательство. Имеем

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f * \varphi dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(t-\tau) p(\tau) d\tau.$$

В этом равенстве двукратный интеграл по области $D: 0 \leq t < \infty, 0 \leq \tau \leq t$ (рис. 33) сходится абсолютно, так как изображение оригинала $f * \varphi$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ при $s_0 > s_1$. Поэтому в двукратном интеграле можно изменить порядок интегрирования ($0 \leq \tau < \infty, \tau \leq t < \infty$):

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt.$$

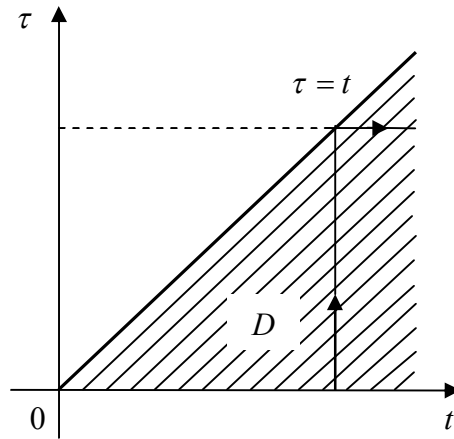


Рис.33

Полагая $t - \tau = u$, получим

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du,$$

или

$$f * \varphi \rightarrow F(p)\Phi(p).$$

Следовательно, свертыванию в пространстве оригинала соответствует умножение функций в пространстве изображения.

Пример 29. Найти изображение функций:

$$1. f(t) = C(t)\cos t + S(t)\sin t.$$

Так как

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t \int_0^t \frac{\cos \tau}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau + \sin t \int_0^t \frac{\sin \tau}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau = \\ &= \int_0^t \cos(t-\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau = \cos t * \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме умножения

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}.$$

$$2. f(t) = C(t)\sin t - S(t)\cos t.$$

Так как

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin t \int_0^t \frac{\cos \tau}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau - \cos t \int_0^t \frac{\sin \tau}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau = \\
&= \int_0^t \sin(t-\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau = \sin t * \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{1}{1+p^2}.$$

$$3. f(t) = t^\alpha * t^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Изображения для t^α и t^β соответственно имеют вид

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \rightarrow \frac{1}{p^{\alpha+1}} \quad \text{и} \quad \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \rightarrow \frac{1}{p^{\beta+1}}.$$

По теореме умножения имеем

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{p^{\beta+1}} \rightarrow \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} * \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)},$$

или

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^\alpha * t^\beta.$$

Поскольку

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \rightarrow \frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

то

$$\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^\alpha * t^\beta.$$

Отсюда

$$t^\alpha * t^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = t^{\alpha+\beta+1}$$

или

$$\int_0^t \tau^\alpha (t-\tau)^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}.$$

Подставляя $\tau = tx$ в левую часть этого равенства, получаем

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

или

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, обозначается $B(\alpha, \beta)$ и называется Бета-функцией, т.е.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Тогда

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \text{ и } B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

$$4. \text{ Доказать, что } \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Поскольку

$$t^{\alpha-1} \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha} \text{ и } t^{-\alpha} \rightarrow \frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}.$$

Тогда

$$t^{\alpha-1} * t^\alpha \rightarrow \frac{1}{p} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha),$$

или

$$\frac{1}{p} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \rightarrow \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau^\alpha} = \int_0^t \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Отсюда

$$\int_0^t \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} = \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha),$$

так как $1 \rightarrow \frac{1}{p}$. Полагая $\tau = \frac{t}{u+1}$, получаем

$$\int_0^t \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}$, которая при $0 < \alpha < 1$

многозначна, так как

$$(-z)^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)(\ln|z| + i \operatorname{Arg}(-z))} = |z|^{\alpha-1} e^{(\alpha-1)i \operatorname{Arg}(-z)}.$$

Если проведем разрез на положительной части действительной оси, то функция $(-z)^{\alpha-1}$ будет однозначной; рассмотрим ту ее ветвь, которая на верхнем крае разреза равна $|z|^{\alpha-1} e^{-i\pi(\alpha-1)}$, тогда $(-z)^{\alpha-1}$ на нижнем разрезе будет равна $|z|^{\alpha-1} e^{i\pi(\alpha-1)}$. Функция $f(z)$ на контуре Γ (рис. 34) однозначна, а внутри контура имеет полюс $z = -1$, причем $f(z) \rightarrow 0$, когда $|z| \rightarrow \infty$ и $|z| \rightarrow 0$. Тогда по теореме Коши имеем

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1} e^{-i\pi(\alpha-1)}}{u+1} du + \int_\infty^0 \frac{u^{\alpha-1} e^{i\pi(\alpha-1)}}{u+1} du = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f(z)$$

или

$$(e^{-i\pi(\alpha-1)} - e^{i\pi(\alpha-1)}) \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du = 2\pi i.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}. \quad (2.15)$$

Интеграл вероятности. Функция

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

называется **интегралом вероятности**.

Ряд $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$ сходится равномерно, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} t &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Функция $\operatorname{erf} t$ в интервале $(-\infty; \infty)$ - непрерывная возрастающая:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} > 0;$$

нечетная:

$$\operatorname{erf}(-t) = -\operatorname{erf} t \text{ и } \operatorname{erf} 0 = 0,$$

$$\operatorname{erf} \infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \quad (\text{рис.35}).$$

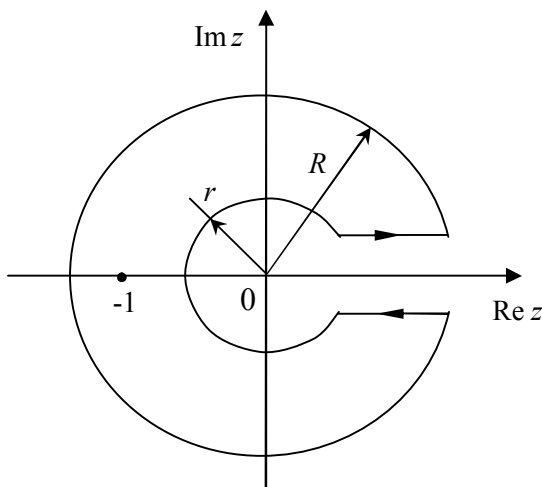


Рис. 34

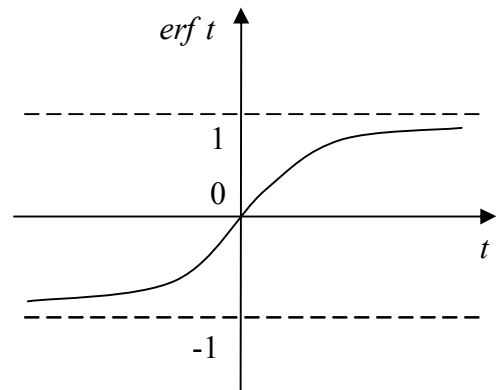


Рис. 35

При больших значениях аргумента t интеграла вероятности рассматривают функцию

$$Erf\ t = 1 - erf\ t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau,$$

или

$$Erf\ t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau,$$

$Erf\ t$ - непрерывная убывающая функция при $t \geq 0$.

Пример 30. Найти изображения функций:

$$1. f(t) = erf\ \sqrt{t}.$$

Поскольку $e^t \rightarrow \frac{1}{p-1}$ и $\frac{1}{\sqrt{\pi}t} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}$, то, пользуясь теоремой умножения, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} &\rightarrow \int_0^t e^{t-\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}\tau} = \\ &= \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau} d(\sqrt{\tau}) = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du, \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} \rightarrow e^t erf\ \sqrt{t}.$$

Отсюда по теореме смещения

$$erf\ \sqrt{t} \rightarrow \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

$$2. f(t) = Erf\ \sqrt{t}.$$

Имеем

$$Erf\ \sqrt{t} = 1 - erf\ \sqrt{t} \rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p\sqrt{p+1}},$$

или

$$Erf\ \sqrt{t} \rightarrow \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}.$$

$$3. f(t) = e^{-t^2}.$$

Имеем

$$e^{-t^2} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-t^2} dt = e^{\frac{p^2}{4}} \int_0^{\infty} e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2} dt.$$

Сделав замену $t + \frac{p}{2} = \tau$, получаем

$$e^{-t^2} \rightarrow e^{\frac{p^2}{4}} \int_{\frac{p}{2}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau,$$

или

$$e^{-t^2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf} \frac{p}{2}. \quad (2.16)$$

$$4. f(t) = \operatorname{erf} t.$$

Из (2.16) по теореме интегрирования оригинала имеем

$$\int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf} \frac{p}{2},$$

или

$$\operatorname{erf} t \rightarrow \frac{1}{p} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf} \frac{p}{2}.$$

§2.18 Обобщенное умножение изображений

Теорема (Эфроса). Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $\varphi(t, \tau) \rightarrow \Phi(p)e^{-\tau q(p)}$, где $\Phi(p)$ и $q(p)$ - аналитические функции, то

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau \rightarrow \Phi(p) F(q(p)).$$

Доказательство. По определению изображения

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau \right) dt.$$

В правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования, так как несобственный интеграл $\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau$ как функция-оригинал существует. Имеем

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau \rightarrow \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t, \tau) dt.$$

По условию

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t, \tau) dt = \Phi(p) e^{-\tau q(p)}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau \rightarrow \Phi(p) \int_0^{\infty} e^{-\tau q(p)} f(\tau) d\tau,$$

или

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau \rightarrow \Phi(p) F(q(p)),$$

так как

$$\int_0^{\infty} e^{-tq(p)} f(\tau) d\tau \rightarrow F(q(p)).$$

В частности, при $q(p) = p$

$$\varphi(t, \tau) \rightarrow \Phi(p) e^{-\tau p}$$

и по теореме запаздывания

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \varphi(t - \tau), & t > \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau,$$

так как

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \rightarrow \Phi(p) F(p).$$

§2.19 Интеграл Дюамеля

Теорема. Если $f * \varphi \rightarrow F(p)\Phi(p)$, то

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi_t(t - \tau) d\tau + f(t) \varphi(0) \rightarrow p F(p) \Phi(p).$$

Доказательство. По свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \rightarrow p F(p) \Phi(p).$$

Из математического анализа известно, что если для интеграла

$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(t, \tau) d\tau$, зависящего от параметра t , выполняются условия:

- 1) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$ - непрерывные функции на отрезке $[t_0, t_1]$;
- 2) $\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t}$ - непрерывная функция в области, ограниченной линиями

$t = t_0$, $t = t_1$ и $\tau = \alpha(t)$, $\tau = \beta(t)$, то производная по параметру $t \in [t_0; t_1]$ от интеграла равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(t, \tau) d\tau &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} dt + F(t, \beta(t)) \beta'(t) - \\ &\quad - F(t, \alpha(t)) \alpha'(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Пользуясь формулой (2.17), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \varphi'(t - \tau) d\tau + f(t) \varphi(0) \rightarrow$$

$$\rightarrow p F(p) \Phi(p).$$

Поскольку $f(t) \rightarrow F(p)$ и $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, то по свойству дифференцирования оригинала

$$f'(t) \rightarrow p F(p) - f(0), \quad \varphi'(t) \rightarrow p \Phi(p) - \varphi(0).$$

Применяя свойство линейности преобразования и теорему умножения изображений, получаем

$$\begin{aligned} p F(p) \Phi(p) &= f(0) \Phi(p) + (p F(p) - f(0)) \Phi(p) \rightarrow \\ &\rightarrow f(0) \varphi(t) + f'(t) * \varphi(t), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} p F(p) \Phi(p) &= \varphi(0) F(p) + (p \Phi(p) - \varphi(0)) F(p) \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi(0) f(t) + \varphi'(t) * f(t). \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь свойством коммутативности свертки функций, оригинал для изображения $p F(p) \Phi(p)$ можно представить в одном из четырех видов:

$$\begin{aligned} p F(p) \Phi(p) &\rightarrow f(0) \varphi(t) + \int_0^t f'(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau = \\ &= f(0) \varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) f'(t - \tau) d\tau = \\ &= \varphi(0) f(t) + \int_0^t \varphi'(\tau) f(t - \tau) d\tau = \\ &= \varphi(0) f(t) + \int_0^t f(\tau) \varphi'(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Итак, если из функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируема, а другая непрерывна, то свертка $f * \varphi$ этих функций дифференцируема.

Выражения (2.18) впервые (1853г.) применил Дюамель в динамике, их называют интегралами Дюамеля.

Пример 31. Пользуясь интегралом Дюамеля, найти оригинал для функции

$$\frac{1}{p^3(p^2 + 1)}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^3(p^2 + 1)} = p \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Положим

$$F(p) = \frac{1}{p^4} \rightarrow \frac{t^3}{6} = f(t) \text{ и } \Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t = \varphi(t).$$

По формуле (2.18)

$$\frac{1}{p^3(p^2 + 1)} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t - \tau)^3}{6} \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 \sin \tau d\tau.$$

Дважды интегрируя по частям последний интеграл, находим

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \rightarrow \frac{1}{2} \left((t-\tau)^2 (-\cos \tau) - 2(t-\tau) \sin \tau + 2 \cos \tau \right) \Big|_0^t,$$

или

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \rightarrow \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

§2. 20 Изображение цилиндрических функций

Цилиндрические функции. Функция $J_\nu(t)$ (ν - порядок функции), которая является решением цилиндрического (бесселевого) уравнения

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - \nu^2) x(t) = 0, \quad (2.19)$$

называется цилиндрической (бесселевой) 1-го рода ν -го порядка.

Функции $J_\nu(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.19), ищем в виде ряда $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\nu+k}$, $\nu \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}_0$. Имеем

$$t x'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\nu + k) a_k t^{\nu+k},$$

$$t^2 x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\nu + k)(\nu + k - 1) a_k t^{\nu+k},$$

$$(t^2 - \nu^2) x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} t^{\nu+k} - \nu^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{\nu+k}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.19), получаем тождество

$$(2\nu + 1) a_1 t^{\nu+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (k(2\nu + k) a_k + a_{k-2}) t^{\nu+k} \equiv 0.$$

Приравняв в этом тождестве коэффициенты при $t^{\nu+1}$, $t^{\nu+2}$, ... к нулю, получим для определения a_k , $k \in N_0$, систему уравнений

$$\begin{cases} (2\nu + 1) a_1 = 0, \\ k(2\nu + k) a_k + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

которая приводит к двум системам:

$$1) \begin{cases} (2\nu + 1) a_1 = 0, \\ (2k + 1)(2\nu + (2k + 1)) a_{2k+1} + a_{2k-1} = 0 \end{cases}$$

и

$$2) 2k(2\nu + 2k) a_{2k} + a_{2k-2} = 0, \quad k \in N.$$

Систему 1) удовлетворяют значения $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_{2k+1} = 0$, ...

В системе 2) $a_0 \neq 0$ - произвольное значение. Полагая $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$

и пользуясь формулой (1.9), находим

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu} \Gamma(\nu + 2)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(\nu+2)} = (-1)^2 \frac{1}{2^{4+\nu} \cdot 2! \Gamma(\nu+3)},$$

$$\dots\dots\dots a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu+k+1)},$$

если $\nu \neq -1, -2, \dots$. Тогда функция $J_\nu(t)$, являющаяся решением уравнения (2.19), имеет вид

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}. \quad (2.20)$$

Если $\nu = n$, $n \in N$, то

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}. \quad (2.21)$$

Если в (2.21) вместо t подставим it , получим цилиндрические функции мнимого аргумента;

$$I_n(t) = (-i)^n J_n(it) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}.$$

В частности,

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

и

$$J_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(1+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{1+2k},$$

$$J_0(0) = I_0(0) = 1 \text{ и } J_n(0) = I_n(0) = 0 \text{ при } n \geq 1$$

(рис. 36, 37).

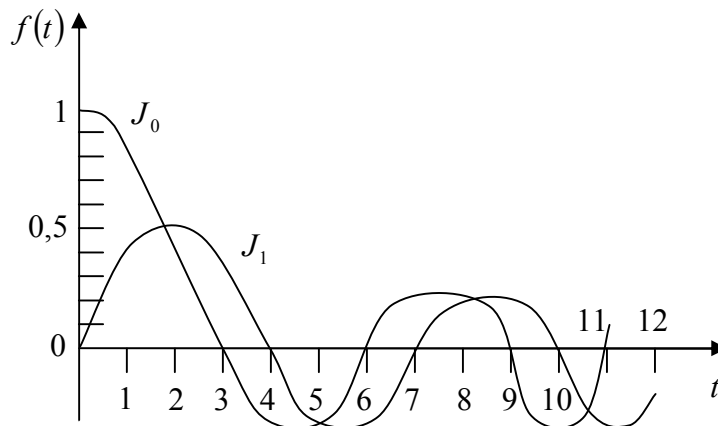


Рис. 36

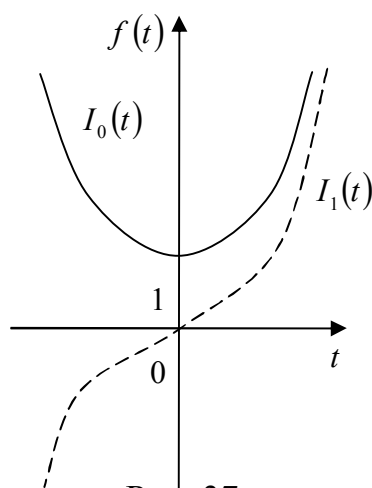


Рис. 37

В (2.21) вместо t подставим $i\sqrt{t}$ и отделим действительную и мнимую части, которые называются **функциями Томсона** n -го порядка и обозначаются

$$ber_n t = \operatorname{Re} J_n(i\sqrt{it}) \text{ и } bei_n t = \operatorname{Im} J_n(i\sqrt{it})$$

ber – Bessel realis – Бесселя действительные; bei – Bessel imaginaries – Бесселя мнимые).

Следовательно,

$$J_n(i\sqrt{it}) = ber_n t + i bei_n t. \quad (2.22)$$

Функции Томсона нулевого порядка (рис. 38) имеют вид

$$ber t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{4k} ((2k)!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{4k}$$

и

$$bei t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{4k+1} ((2k+1)!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{4k+2}. \quad (2.23)$$

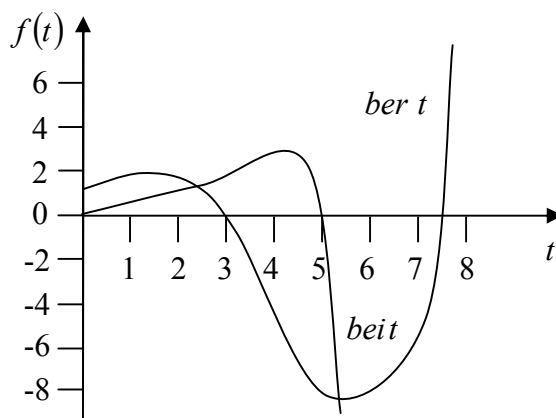


Рис. 38

Общее решение уравнения (2.19), когда ν нецелое число, имеет вид

$$x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t),$$

где $J_{-\nu}(t)$ определяется рядом, получающимся из ряда (2.20) заменой ν на $-\nu$.

Из (2.20) при $\nu = -n$, учитывая, что

$$\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

получим

$$J_{-n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2k}.$$

Полагая $k = l + n$, имеем

$$J_{-n}(t) = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+n)! l!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l} = (-1)^n J_n(t).$$

Таким образом,

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t). \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что решения $J_{-n}(t)$ и $J_n(t)$ уравнения (2.19) линейно зависимы и при $\nu = n$ - целом числе общее решение уравнения (2.19) имеет вид

$$x(t) = c_1 J_n(t) + c_2 N_n(t),$$

где $N_n(t)$ - **функция Неймана** или **Бесселева функция 2-го рода n -го порядка**. Для любых нецелых ν функция $N_\nu(t)$ определяется формулой

$$N_\nu(t) = \frac{J_\nu(t) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu \pi},$$

а при целых $\nu = n$ она определяется формулой

$$N_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\partial J_\nu(t)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} - (-1)^n \left. \frac{\partial J_{-\nu}(t)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} \right).$$

Можно доказать, что функция $N_\nu(t)$ также является решением (2.19) и что $J_n(t)$ и $N_n(t)$ линейно независимые решения.

Рекуррентная формула цилиндрических функций имеет вид

$$J_{\nu+1}(t) = J_{\nu-1}(t) - 2J'_\nu(t). \quad (2.25)$$

Из (2.24) при $\nu = 0$ имеем

$$J_1(t) = J_{-1}(t) - 2J'_0(t), \quad (2.26)$$

так как по формуле (2.25) $J_{-1} = -J_1$.

Изображение функции $J_n(t)$. Найдем оценку $J_\nu(t)$ для $t > 0$ и $\nu \geq 0$.

Имеем

$$|J_\nu(t)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \leq t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Обозначим $\frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = a_k$, $k \in N_0$. Тогда

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{t^2}{4(k+1)^2} < \frac{t^2}{(2k+2)(2k+1)}.$$

Отсюда

$$a_1 < a_0 \frac{t^2}{2 \cdot 1}, \quad a_2 < a_1 \frac{t^2}{4 \cdot 3} < a_0 \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad \dots, \quad a_k < \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad a_0 = 1,$$

поэтому

$$|J_v(t)| < t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = t^v e^t.$$

Из этого следует, что при $t > 0$ непрерывная цилиндрическая функция $J_v(t)$, $v \in N_0$, является оригиналом.

По определению функция $J_0(t)$ удовлетворяет уравнению (2.19) при $v = 0$. Имеем

$$t J_0''(t) + J_0'(t) + t J_0(t) = 0.$$

Обозначим $J_0(t) \rightarrow L_0(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала

$$J_0'(t) \rightarrow p L_0(p) - 1, \quad J_0(0) = 1$$

и

$$J_0''(t) \rightarrow p^2 L_0(p) - p, \quad J_0'(0) = 0.$$

По теореме дифференцирования изображения

$$t J_0(t) \rightarrow -L_0 p$$

и

$$\begin{aligned} t J_0(t) &\rightarrow -2p L_0(p) - p^2 L_0(p) + 1, \\ t J_0''(t) + J_0'(t) + t J_0(t) &\rightarrow -(p^2 + 1) L_0'(p) - p L_0(p), \end{aligned}$$

или

$$(p^2 + 1) L_0'(p) + p L_0(p) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{L_0'(p)}{L_0(p)} = -\frac{p}{p^2 + 1}.$$

Интегрируя, получаем $\ln L_0(p) = -\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) + c_1$ или

$$L_0(p) = \frac{c_1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Пользуясь формулой (2.13), определим c_1 . Имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{c_1}{\sqrt{p^2 + 1}} = \lim_{t \rightarrow 0} J_0(t).$$

Отсюда $c_1 = J_0(0) = 1$. Итак,

$$J_0(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Из формулы (2.26) по теореме дифференцирования оригинала

$$J_1(t) = J_0(t) \rightarrow -p \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} + J_0(0), \quad J_0(0) = 1,$$

или

$$J_1(t) \rightarrow \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

По формуле (2.25) при $\nu = 1$ имеем

$$J_2(t) = J_0(t) - 2J_1'(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} - 2p \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

или

$$J_2(t) \rightarrow \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^2}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Методом индукции докажем, что

$$J_n(t) \rightarrow \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad n \in N_0. \quad (2.27)$$

При $n \in N_0$ формула (2.27) верна. Пусть формула верна для всех неотрицательных целых чисел порядков, меньших n . Тогда из (2.25) по теореме линейности получаем

$$\begin{aligned} J_n(t) &= J_{n-2}(t) - 2J_{n-1}'(t) \rightarrow \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-2}}{\sqrt{p^2 + 1}} - \\ &\quad - 2p \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-1}}{\sqrt{p^2 + 1}} + J_{n-1}(0) = \\ &= \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-2} (1 - 2p\sqrt{p^2 + 1} + 2p^2)}{\sqrt{p^2 + 1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-2} (\sqrt{p^2 + 1} - p)^2}{\sqrt{p^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{(\sqrt{p^2 + 1})}. \end{aligned}$$

Из (2.27) по теореме подобия найдем изображения функций Томсона (2.22). Имеем

$$ber_n t + i bei_n t \rightarrow \frac{1}{i\sqrt{i}} \frac{\left(\sqrt{\frac{p_2}{-i} + 1} - \frac{p}{i\sqrt{i}} \right)^n}{\sqrt{\frac{p^2}{-i} + 1}} =$$

$$= \frac{i^{\frac{n}{2}} (p - \sqrt{p^2 - i})^n}{\sqrt{p^2 - i}}.$$

Отсюда при $n = 0$ отделяя в правой части этого равенства действительную и мнимую части, получим

$$bert \rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{p^4 + 1} + p^2}{2(p^4 + 1)}} \quad \text{и} \quad bert \rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{p^4 + 1} - p^2}{2(p^4 + 1)}}.$$

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Операционное исчисление позволяет рассчитывать переходные режимы в электрических цепях при любых внешних источниках напряжений и токов. Метод расчета переходных процессов в электрических цепях, основанный на операционном исчислении, называется **операторным методом**.

§3.1 Алгоритм операторного метода

1. Перейти от искомой функции (оригинала) $f(t)$ с помощью прямого преобразования Лапласа к функции комплексного переменного $F(p)$, называемой изображением.
2. Интегро-дифференциальное уравнение в пространстве оригиналов преобразовать в алгебраическое операторное уравнение в пространстве изображений.
3. Полученное алгебраическое операторное уравнение решить известными методами математики.
4. С помощью обратного преобразования Лапласа вернуться в пространство оригиналов.

При электротехнических расчетах часто изображение имеет вид правильной дробно-рациональной функции. Поэтому при расчете переходных процессов широко используются теоремы разложения.

§3.2 Правила Кирхгофа в операторной форме

Правила Кирхгофа – фундаментальные законы электрических цепей. Все процессы протекающие в электрических цепях, описываются уравнениями, составленными по законам Кирхгофа. При расчете переходных процессов используются законы Кирхгофа в операторной форме.

Первое правило Кирхгофа (правило узлов)

Операционное исчисление в электротехнике и механике. В настоящее время в курсе теории электрических цепей методы операционного исчисления широко используются при расчете электрических цепей. Эти методы удобны с математической точки зрения. Физической основой расчета электрической цепи являются правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа (правило узлов). Алгебраическая сумма токов i_k , сходящихся в точке разветвления проводников (узле), равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (3.1)$$

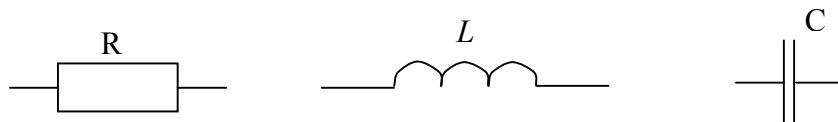
где $n \geq 3$ - число проводников, сходящихся в узле. Положительными считаются токи, подходящие к узлу, отрицательными – токи, отходящие от него.

Второе правило Кирхгофа (правило контуров). В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи проводников, алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна алгебраической сумме ЭДС в том же контуре:

$$\sum_{j=1}^{n_1} U_{R_j} + \sum_{j=1}^{n_2} U_{L_j} + \sum_{j=1}^{n_3} U_{C_j} = \sum_{j=1}^{n_4} E_j, \quad (3.2)$$

где $U_{R_j}, U_{L_j}, U_{C_j}$ - падение напряжений на участках цепи, содержащих резистивный, индуктивный и емкостный элементы соответственно; E_j - ЭДС включенных в контур источников электрического тока.

Падения напряжений на соответствующих участках цепи определяются следующим образом:



$$U_R = Ri, \quad U_L = L \frac{di}{dt}, \quad U_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

При использовании правила контуров выбирается определенное направление обхода контура : токи i_k , совпадающие по направлению с направлением обхода, считаются положительными; ЭДС E_j источников тока считаются положительными, если они создают токи, проходящие в направлении обхода контура.

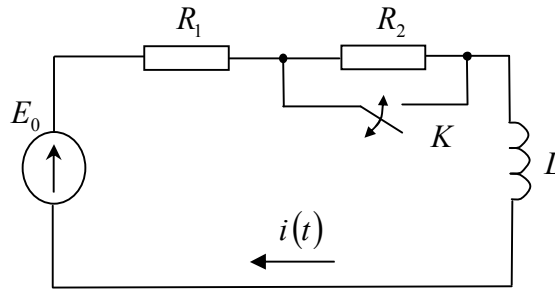


Рис.39

Пример 32. Контур (рис.39) подключен к постоянной ЭДС E_0 . Определить силу переходного тока $i(t)$ в контуре при отключенном рубильнике K .

В контуре узлов нет, и необходимость в применении первого правила Кирхгова отпадает. Использование второго правила Кирхгова и формул (3.2) приводит к равенству $U_L + U_R = E_0$, т.е. к дифференциальному уравнению с начальным условием (задача Коши):

$$L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = E_0, \quad i(0) = 0. \quad (3.4)$$

Обозначим изображение силы $i(t)$ через $I(p)$ и воспользуемся свойствами изображений по Лапласу. Тогда для уравнения (3.4) получим операторное уравнение

$$LpI(p) + (R_1 + R_2)I(p) = \frac{E_0}{p},$$

Решение которого относительно $I(p)$ можно представить в виде:

$$I(p) = \frac{E_0}{Lp(p + \frac{R_1 + R_2}{L})} = \frac{E_0}{R_1 + R_2} \frac{1}{p} - \frac{E_0}{R_1 + R_2} \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{L}}.$$

Отсюда находим решение задачи Коши :

$$i(t) = \frac{E_0}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t} \right). \quad (3.5)$$

Пример 33. В контуре, рассмотренном в примере 32, при установившемся режиме в некоторой момент времени, принимаемый за начальный ($t = 0$), включается рубильник. Определить силу переходного тока $i(t)$.

Режим в контуре, описываемый формулой (3.5) из примера 32, будет установившимся после достаточно большого промежутка времени t , т.е. при $t \rightarrow \infty$:

$$i_{ycm} = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E_0}{R_1 + R_2}.$$

Получаем другую задачу Коши :

$$L \frac{di}{dt} + R_1 i = E_0, \quad i(0) = i_{ycm} = \frac{E_0}{R_1 + R_2}, \quad (3.6)$$

Операторное уравнение для которой имеет вид:

$$L \left(pI(p) - \frac{E_0}{R_1 + R_2} \right) + R_1 I(p) = \frac{E_0}{p}.$$

Решая его относительно изображения $I(p)$, находим

$$I(p) = \frac{E_0(R_1 + R_2 + Lp)}{p(R_1 + R_2)(Lp + R_1)} = \frac{E_0}{R_1 p} - \frac{E_0 E_2}{R_1(R_1 + R_2)(p + \frac{R_1}{L})}.$$

Воспользовавшись свойствами преобразования Лапласа находим искомое решение задачи Коши :

$$i(t) = \frac{E_0}{R_1} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1}{L}t} \right).$$

Пример 34. Цепь (рис.40) рубильником K включается на постоянное напряжение U . Определить силу переходного тока $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ при условии, что $U = 60 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $L = 0,3 \text{ Гн}$.

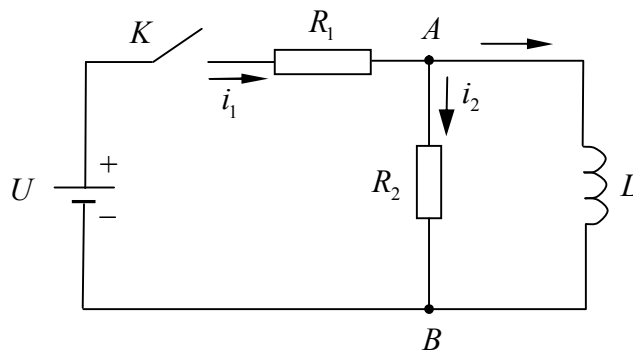


Рис.40

Направление обхода по контурам цепи выберем по ходу часовой стрелки. Согласно первому и второму правилам Кирхгова, получим систему уравнений:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad R_2 i_2 - L \frac{di_3}{dt} = 0,$$

$$R_1 i_1 + L \frac{di_3}{dt} = U, \quad \text{где} \quad i_1(0) = i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad i_3(0) = 0.$$

Первое уравнение системы определяем по правилу узлов (3.1) для узла A , второе и третье уравнения – по правилу контуров (3.2) для контуров $ALBA$ и $UALBU$ соответственно с учетом формул (3.2)

Если $I_1(p), I_2(p), I_3(p)$ - изображения токов $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ то соответствующая найденной системе операторная система запишется в виде:

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0, R_2 I_2(p) - Lp I_3(p) = 0, R_1 I_1(p) = \frac{U}{p}.$$

Решаем данную систему по известным формулам Крамера. Вычислим основной определитель:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & -Lp \\ R_1 & 0 & Lp \end{vmatrix} = R_2 Lp + R_1(Lp + R_2) = L(R_1 + R_2)p + R_1 R_2 = \\ &= L(R_1 + R_2) \left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right). \end{aligned}$$

Далее, находим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & -Lp \\ \frac{U}{p} & 0 & Lp \end{vmatrix} = \frac{U}{p} (Lp + R_2) = UL + \frac{UR_2}{p},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -Lp \\ R_1 & \frac{U}{p} & Lp \end{vmatrix} = UL, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & \frac{U}{p} \end{vmatrix} = \frac{R_2 U}{p}.$$

Последовательно находим:

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{ULp + UR_2}{L(R_1 + R_2)p \left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}}, \\ \frac{ULp + UR_2}{L(R_1 + R_2)} &\equiv A \left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right) + Bp. \end{aligned}$$

Из данного тождества при $p = 0$ получаем:

$$A \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} = \frac{UR_2}{L(R_1 + R_2)}, \quad A = \frac{U}{R_1}.$$

Приравниваем коэффициенты при p в левой и правой частях тождества:

$$\frac{UL}{L(R_1 + R_2)} = A + B, \quad B = -\frac{UR_2}{R_1(R_1 + R_2)}.$$

$$I_1(p) = \frac{U}{R_1} \frac{1}{p} - \frac{UR_2}{R_1(R_1 + R_2)} \frac{1}{p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}}.$$

По таблице приложения (на стр. 101) находим оригинал:

$$i_1(t) = \frac{U}{R_1} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} \right).$$

Аналогично получаем:

$$I_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{U}{(R_1 + R_2) \left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right)},$$

Соответствующий оригинал имеет вид: $i_2(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t},$

$$I_3(p) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{R_2 U}{L(R_1 + R_2) p \left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right)} = \frac{U}{R_1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}} \right),$$

тогда $i_3(t) = \frac{U}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} \right).$

Подставив числовые значения U, R_1, R_2, L в выражения для $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$, получим искомые значения:

$$i_1(t) = 6 - 4,5e^{-2,5t}, i_2(t) = 1,5e^{-2,5t}, i_3(t) = 6(1 - e^{-2,5t}).$$

Пример 35. Электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , катушки с индуктивностью L и электрического сопротивления R , подсоединена к ЭДС E (рис.41). Найти дифференциальные уравнения, описывающие законы изменения электрического заряда $q(t)$ на обкладках конденсатора и силы тока $i(t)$ в цепи.

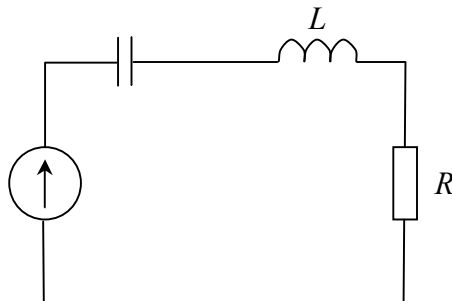


Рис.41

Так как цепь не содержит узлов, поэтому используем только второе правило Кирхгова (3.2). и формулы (3.3):

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) dt = E \quad (3.7)$$

Из электротехники известно, что $i = -\frac{dq}{dt}$. Следовательно $\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$ и с учетом уравнения (3.7) имеем

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -E. \quad (3.8)$$

Дифференцируя обе части уравнения (3.7), приходим к уравнению для силы тока:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt}. \quad (3.9)$$

Полученные дифференциальные уравнения для $q(t)$ и $i(t)$ (3.7)-(3.9) можно решить операторным методом, но получаются качественно разные решения в зависимости от значений L, R, C и E . Эти случаи достаточно подробно описаны во многих учебниках, например в [8,10]. Причем решения могут быть периодическими, затухающими периодическими, аperiodическими и резонансными.

Замечание. Колебаниями ряда механических упругих систем с одной степенью свободы описываются дифференциальными уравнениями вида 2,3. Например, колебания материальной точки массой m задается уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = f(t), \quad (3.10)$$

где $x(t)$ - отклонение точки от положения равновесия ; λ и k связаны с коэффициентом трения и частотой свободных колебаний системы; $f(t)$ - внешняя возмущающая систему сила. Уравнение (16.36) также может описывать крутильные колебания маховика ана упругом валу, если $x(t)$ - угол поворота маховика , коэффициент k связан с крутильной жесткостью вала, а $f(t)$ - момент внешних сил относительно оси вращения.

Итак, различные физические процессы описываются однотипными дифференциальными уравнениями (3.8), (3.9) и (3.10), которые могут быть приведены к алгебраическому виду и решаются с помощью операторного уравнения (3.10).

§3.3 Применение операционного исчисления к исследованию нестационарных процессов в электрических цепях

Пусть задана блок-схема электрической цепи. Составим дифференциальное уравнение этой цепи. Применим **операторный метод** интегрирования этого дифференциального уравнения. Как следует из предыдущего, дифференциальное уравнение с постоянными

коэффициентами перейдет в линейное алгебраическое уравнение, связывающее преобразование Лапласа (изображение) первоначально неизвестной функции. Оказывается, преобразования Лапласа (изображения) функции входа и выхода электрической цепи автоматически удовлетворяют полученному алгебраическому уравнению. Таким образом, соотношение входа – выхода электрической цепи может быть получено путем решения линейного алгебраического уравнения.

При исследовании электрической цепи основной величиной является импульсная реакция цепи $h(t)$. Обозначим преобразование Лапласа импульсной реакции через $S(p)$:

$$S(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt.$$

Именно эта функция $S(p)$ может быть получена в результате решения алгебраического уравнения. Тогда можно найти частотную реакцию цепи $\varphi(\omega)$. Для этого достаточно в выражение для $S(p)$ вместо p подставить $j\omega$:

$$\varphi(\omega) = S(j\omega).$$

Отсюда следует, что частотная реакция цепи может быть получена без применения операции интегрирования путем использования сведений об элементах цепи и их коммутации.

Интересующая нас импульсная реакция цепи $h(t)$ может быть определена при помощи обратного преобразования Фурье [1,10]:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Операцию интегрирования при этом можно обойти, используя теоремы разложения.

Как известно, определение реакции электрической цепи на воздействие одиночного импульса по существу сводится к нахождению нестационарного режима в этой цепи.

Рассмотрим нестационарные процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами r , L , C , которые примем за постоянные.

При исследовании нестационарных процессов встречаются задачи двух видов: с нулевыми и ненулевыми начальными условиями.

1. Задачи с нулевыми начальными условиями.

К задачам с нулевыми начальными условиями относят такие задачи, когда к электрической цепи, находящейся в состоянии покоя, в момент времени $t=0$ подключается напряжение. В этих случаях до момента включения напряжения токи во всех ветвях цепи и заряды на всех конденсаторах цепи равны нулю.

Пусть к цепи r , L , C (рис.42) в момент времени $t=0$ подключается напряжение $u(t)$. В начальный момент ток в контуре и напряжение на

конденсаторе равны нулю. Под действием напряжения $u(t)$ по цепи потечет ток $i(t)$. Определим закон изменения тока.

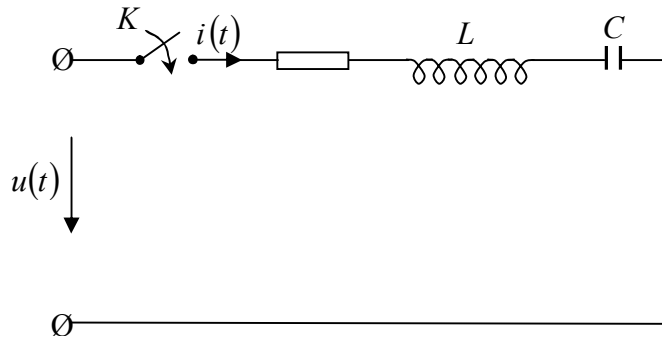


Рис.42

Составим интегро-дифференциальное уравнение равновесия цепи. На основе второго закона Кирхгофа для мгновенных значений тока будем иметь

$$r i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u(t), \quad (3.11)$$

где $r i(t) = u_r(t)$ - падение напряжения на активном сопротивлении; $L \frac{di(t)}{dt} = u_L(t)$ - падение напряжения на индуктивности; $\frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u_C(t)$ - падение напряжения на емкости; $i(t)$ - ток нестационарного режима.

Считая уравнение (3.11) заданным в пространстве оригиналов, найдем это же самое уравнение в пространстве изображений, т.е. найдем изображающее уравнение.

Используя свойства преобразования Лапласа, получим изображающее уравнение в виде

$$r i(p) + L p i(p) + \frac{1}{C p} i(p) = u(p), \quad (3.12)$$

где $i(p)$ - ток в операторной форме; $u(p)$ - приложенное напряжение в операторной форме.

Решим уравнение (3.12) относительно тока $i(p)$. Тогда получим закон Ома в операторной форме:

$$i(p) = \frac{u(p)}{r + pL + \frac{1}{Cp}}. \quad (3.13)$$

Для окончательного решения задачи остается по операторному току $i(p)$ - изображению функции – найти ток $i(t)$ нестационарного режима – оригинал.

Задачи с ненулевыми начальными условиями. К задачам с ненулевыми начальными условиями относят такие задачи, когда начальные значения токов в ветвях, содержащих индуктивность и

напряжение на конденсаторах, при $t = 0$ отличны от нуля. Такие условия появляются в задачах, когда происходит какое-либо переключение в цепи, находящейся под напряжением.

Пусть в цепи (рис.43) в момент $t = 0$ сопротивление r_1 шунтируется рубильником K . В результате шунтирования сопротивления r_1 ток в цепи изменится. Определим закон изменения тока.

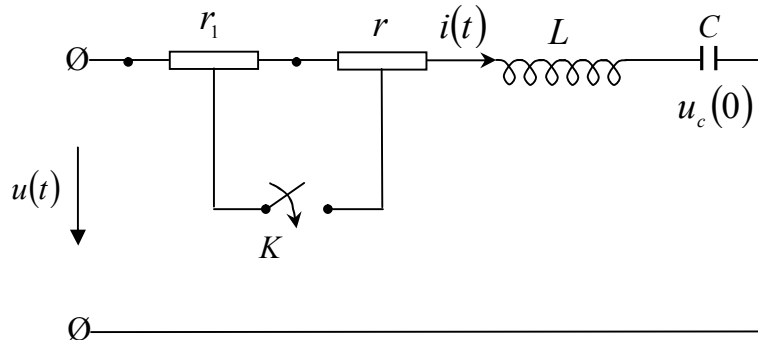


Рис. 43

На основании второго закона Кирхгофа запишем интегро-дифференциальное уравнение

$$ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0) = u(t), \quad (3.14)$$

где $u_c(0)$ - начальное напряжение на емкости, обусловленное электрическим зарядом емкости в момент $t = 0$.

Перейдем от оригиналов в уравнении (3.14) к их изображениям. Учитывая свойства преобразования Лапласа, получим уравнение в пространстве изображений в виде

$$ri(p) + Lpi(p) - Li(0) + \frac{1}{Cp} i(p) + \frac{u_c(0)}{p} = u(p), \quad (3.15)$$

где $i(0)$ - ток в момент $t = 0$.

Решение уравнения (3.15) относительно тока $i(p)$ дает закон Ома в операторной форме для задач с ненулевыми начальными условиями:

$$i(p) = \frac{u(p) - \frac{u_c(0)}{p} + Li(0)}{r + pL + \frac{1}{Cp}}. \quad (3.16)$$

Из сопоставления уравнений (3.11) и (3.14) с операторными уравнениями (3.12) и (3.15) видно, что последние с математической точки зрения, являясь алгебраическими, значительно проще исходных интегро-дифференциальных уравнений.

Искомая функция $i(t)$ (оригинал) находится по изображениям (3.13) и (3.16) обычными приемами, на которые мы указывали ранее.

Общий алгоритм решения задачи

- 1) составляется дифференциальное или интегро-дифференциальное уравнение (или их система), описывающее исследуемый нестационарный процесс;
- 2) вводятся изображения заданных и искомых функций времени;
- 3) записывается изображающее (операторное) уравнение (или система таких уравнений), соответствующее исходному уравнению;
- 4) разрешается операторное алгебраическое уравнение (или система таких уравнений) относительно искомой функции;
- 5) переходят от найденного значения изображения искомой функции к оригиналу;
- 6) производят физический анализ найденной функции-оригинала, строят графики и т.д.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 36. Для цепи определить ток нестационарного режима, если в момент $t = 0$ рубильник K присоединяет цепь к источнику постоянного напряжения.

Составим дифференциальное уравнение цепи

$$ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = u.$$

Полагая $i(t) = i(p)$, получим операторное уравнение

$$ri(p) + Lpi(p) = \frac{u}{p},$$

отсюда

$$i(p) = \frac{u}{p(r + pL)} = \frac{u}{L} \cdot \frac{1}{p\left(p + \frac{r}{L}\right)}.$$

Согласно приложения (на стр. 101) перейдем к оригиналу

$$i(t) = \frac{u}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

Пример 37. Для цепи (рис.44) определить ток нестационарного режима, если рубильник K в момент $t = 0$ переключается на сопротивление r_2 .

Дифференциальное уравнение цепи будет иметь вид:

$$r_1 i(t) + r_2 i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0.$$

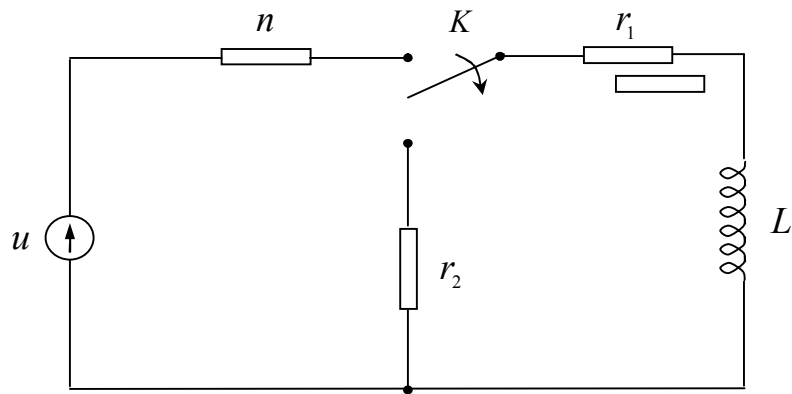


Рис.44

Полагая, как и ранее, $i(t)=i(p)$, получим:

$$r_1 i(p) + r_2 i(p) + L p i(p) - L i(0) = 0,$$

отсюда

$$i(p) = \frac{L i(0)}{r_1 + r_2 + L p} = \frac{L \frac{u}{r + r_1}}{L \left(p + \frac{r_1 + r_2}{L} \right)} = \frac{u}{r + r_1} \cdot \frac{1}{p + \alpha}.$$

Переходя к оригиналу, найдем решение:

$$i(t) = \frac{u}{r_1 + r} e^{-\alpha t}.$$

Пример 38. Определить напряжение на конденсаторе C_2 , если в момент $t=0$ рубильник K подключает цепь (рис.45), находящуюся при нулевых начальных условиях, к источнику постоянного напряжения u .

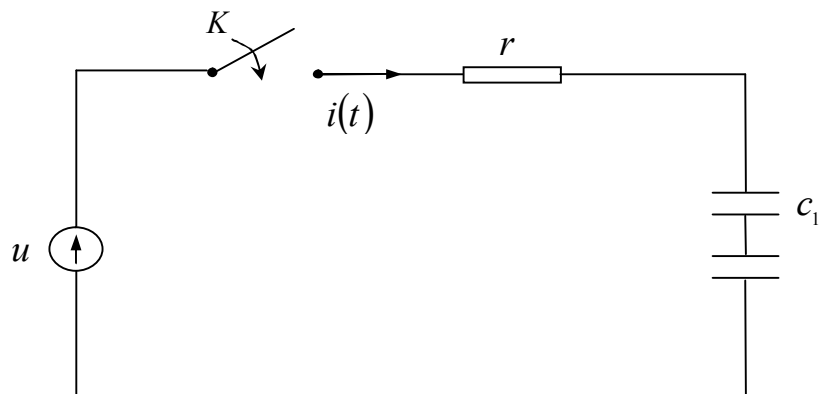


Рис.45

Составим интегро-дифференциальное уравнение цепи

$$r i(t) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(t) dt = u.$$

Полагая $i(t) \Rightarrow i(p)$, перейдем к операторному уравнению

$$ri(p) + \frac{1}{C_1 p} i(p) + \frac{1}{C_2 p} i(p) = \frac{u}{p},$$

отсюда

$$i(p) = \frac{\frac{u}{p}}{r + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p}}.$$

Напряжение на конденсаторе в операторной форме будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_{C_2}(p) &= \frac{1}{C_2 p} i(p) = \frac{1}{C_2 p} \times \\ &\times \frac{u}{p \left(r + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p} \right)} = \frac{u}{C_2 p^2 \left(\frac{r C_1 C_2 p + C_2 + C_1}{C_1 C_2 p} \right)} = \\ &= \frac{u C_1}{p (r C_1 C_2 p + C_1 + C_2)} = \frac{u C_1}{r C_1 C_2} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{C_1 + C_2}{r C_1 C_2} \right)}. \end{aligned}$$

Переходя к оригиналу, получим

$$u_{C_2}(t) = \frac{u}{r C_2} \cdot \frac{1}{\frac{C_1 + C_2}{r C_1 C_2}} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{u C_1}{C_1 + C_2} (1 - e^{-\alpha t}),$$

где

$$\alpha = \frac{C_1 + C_2}{r C_1 C_2}.$$

Пример 39. Определить ток в цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов r , L и C (рис.42), при условии, что цепь при нулевых начальных условиях включается под постоянное напряжение $u(t) = u$.

Составим дифференциальное уравнение равновесия

$$ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u(t).$$

Полагая $i(t) \Rightarrow i(p)$ и $u(t) \Rightarrow u(p) = \frac{u}{p}$, получим операторное уравнение

$$i(p)r + L p i(p) + \frac{1}{C p} i(p) = \frac{u}{p},$$

решение которого приводит к соотношению:

$$\begin{aligned}
i(p) &= \frac{\frac{u}{p}}{r + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{u}{p} \cdot \frac{1}{r + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{uCp}{p(rCp + LCp^2 + 1)} = \\
&= \frac{uC}{\left(p^2 + \frac{p}{L}p + \frac{1}{LC}\right)LC} = \frac{u}{L} \cdot \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)},
\end{aligned}$$

где p_1 и p_2 - корни уравнения $p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$.

Для определения оригинала воспользуемся разложением и запишем операторное уравнение в виде

$$i(p) = \frac{u}{L} \cdot \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2}.$$

Определим коэффициенты A_1 и A_2 :

$$A_1 = \left[\frac{u}{L} \cdot \frac{1}{p - p_2} \right]_{p=p_1} = \frac{u}{L(p_1 - p_2)};$$

$$A_2 = \left[\frac{u}{L} \cdot \frac{1}{p - p_1} \right]_{p=p_2} = -\frac{u}{L(p_1 - p_2)}.$$

Отсюда получим искомое решение:

$$i(t) = \frac{u}{L(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} - \frac{u}{L} \cdot \frac{1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} = \frac{u}{L} \cdot \frac{1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. На основании определения функции оригинал преобразования Лапласа, показать являются ли данные функции $f(t)$ и $g(t)$ оригиналами

Таблица 1

	$f(t)$	$g(t)$		$f(t)$	$g(t)$
1.1	e^{3t}	$t^2 H(t)$	1.2	$\frac{3}{t-5} H(t)$	$e^{7t} \sin t H(t)$
1.3	$t H(t)$	$\sin t H(t)$	1.4	$sh 2t H(t)$	$e^{t^3} H(t)$
1.5	$\frac{t}{t-1} H(t)$	$(t^3 - t) H(t)$	1.6	$\frac{t}{t^2 - 1} t H(t)$	$\cos 7t H(t)$
1.7	$\cos t H(t)$	$e^{2t} \sin t H(t)$	1.8	$(t^2 - 1) H(t)$	$t e^{9t} H(t)$
1.9	$3' H(t)$	$tg t H(t)$	1.10	$\frac{t}{3} H(t)$	$t e^{t^3} H(t)$
1.11	$\frac{1}{t-3} H(t)$	$e^{-t} H(t)$	1.12	$t^2 \sin t H(t)$	$ctg 3t H(t)$
1.13	$\cos 9t H(t)$	$ctg t H(t)$	1.14	$\frac{1}{t^2 - 1} H(t)$	$e^{t^2} H(t)$
1.15	$\frac{t+1}{t-1} H(t)$	$sh t H(t)$	1.16	$\cos 2t H(t)$	$\frac{1}{t^2 - 4} t H(t)$
1.17	$3t H(t)$	$\cos 2t H(t)$	1.18	$sh 5t H(t)$	$e^{3t^2} H(t)$
1.19	$sh t H(t)$	$3t^3 H(t)$	1.20	$t^3 \cos t H(t)$	$\sin 2t H(t)$
1.21	$e^{-2t} H(t)$	$\frac{7}{t-5} H(t)$	1.22	$cht H(t)$	$\frac{2}{t-2} H(t)$
1.23	$t \cos t H(t)$	$ctgt H(t)$	1.24	$\frac{1}{t-7} H(t)$	$sh 2t H(t)$
1.25	$\frac{3}{t-5} H(t)$	$e^{-3t} H(t)$	1.26	$e^t \sin 2t H(t)$	$\frac{1}{t-2} H(t)$
1.27	$(3t+1) H(t)$	$tg 2t H(t)$	1.28	$3t^2 H(t)$	$e^{t^3} H(t)$

1.29	$2^t H(t)$	$\frac{3t}{5} H(t)$	1.30	$(t+5)H(t)$	$te^{-t} H(t)$
------	------------	---------------------	------	-------------	----------------

Задание 2. Используя определение оригинала $f(t)$ преобразования Лапласа, найти изображение $F(p)$ данной функции

Таблица 2

	$f(t)$		$f(t)$
2.1	$5t$	2.2	te^t
2.3	$\cos 2t$	2.4	$\sin 2t$
2.5	t^2	2.6	$2e^{3t}$
2.7	$ch 3t$	2.8	$sh 2t$
2.9	$3t^3$	2.10	$t - 2$
2.11	$ch 7t$	2.12	$sh 4t$
2.13	$\cos 2t$	2.14	$\sin 6t$
2.15	t^2	2.16	t
2.17	te^t	2.18	$t^2 e^t$
2.19	$\cos 3t$	2.20	$\sin 5t$
2.21	$3 + \sin t$	2.22	$1 - \cos t$
2.23	$\cos(1-t)$	2.24	$sh(t+1)$
2.25	$3\sin 2t$	2.26	$4\cos 5t$
2.27	$4e$	2.28	e^{2t}
2.29	cht	2.30	$sh t$

Задание 3. Пользуясь теоремами линейности, смещения запаздывания и подобия, найти изображения данных функции $f(t)$

Таблица 3

	$f(t)$	$f(t)$	$f(t)$	$f(t)$
3.1	$3\cos 2t - 5t^3 - 1$	$e^{-t} sh t$	$(t-1)^3$	$ch^2 3t$

3.2	$t^5 - 3\sin 6t + 2$	$e^{2t}cht$	$(t+3)ch(t+3)$	$\sin 3t \cdot ch 2t$
3.3	$5t^3 + 3\sin t + 1$	$e^{-3t} \cos 2t$	$(t-3)sh(t-3)$	$\cos 7t$
3.4	$7 - 3sh t + t^5$	$e^{2t} \sin t$	$(t+5)^3$	$\cos 3t \cdot \sin 5t$
3.5	$5 + 2cht + t^6$	$e^{-3t} ch 4t$	$(t-2)\cos(t-2)$	$\sin e^{-t} \cdot ch 3t$
3.6	$2 + 4\cos t - t^3$	$2e^{5t} \cos t$	$(t+6)\sin(t+6)$	$sh 4t$
3.7	$1 - t^2 + 3\sin t - t^3$	$e^{-7t} \sin t$	$(t+1)^2 \cos(t+1)$	$\sin 6t$
3.8	$t^4 + 5e^{-2t} + 9$	$3e^{-t} sh 2t$	$\sin^2(t+1)$	$ch 3t \cdot sh 4t$
3.9	$4 - 7sh t + t^2$	$e^{5t} ch 3t$	$\cos^2(t-1)$	$\cos 2t \cdot sh 5t$
3.10	$t^2 - 5ch 2t + 1$	$2e^{3t} \sin t$	$(t-6)e^{t-6}$	$sh^3 6t$
3.11	$t + 3e^{2t}t - 4\cos t$	$e^{2t} \cos t$	$(t-1)ch(t-1)$	$\cos 5t$
3.12	$1 + 3t^4 - 5\sin t$	$e^{-t} \sin 4t$	$(t+7)^2 e^{t+7}$	$\sin 5t$
3.13	$t^3 + 9e^{-t} - 2$	$3e^{4t} sh 3t$	$\sin^2(t+1)$	$ch 2t$
3.14	$5 + 2sh t - t^2$	$4e^{-2t} ch 5t$	$\cos^2(t-11)$	$\sin^2 t$
3.15	$4t^3 - 5sh 2t - 1$	$5e^t \cos 2t$	$(t+2)e^{t+2}$	$sh^2 3t$
3.16	$t + 4e^{3t} - \cos 5t$	$e^{-t} \sin 8t$	$(t-1)ch(t-1)$	$\cos 3t \cdot \cos 5t$
3.17	$\sin 5t - 3t^2 + 9$	$e^{8t} cht$	$(t+2)^3$	$\sin 4t \cdot sh 2t$
3.18	$6e^{-t} - t + 1$	$e^{-2t} sh 3t$	$(t-7)\sin(t-7)$	$ch 2t \cdot ch 5t$
3.19	$3 - 4t^2 + 3sh t$	$5e^{-t} \sin 2t$	$(t+1)\cos(t+1)$	$sh 5t \cdot sh 3t$
3.20	$9 + ch 4t - 2t^2$	$2e^t \cos 7t$	$(t+9)e^{t+9}$	$e^{7t} \cos^2 t$
3.21	$4 + 3sh t + t^8$	$e^{2t} sh 3t$	$(t+1)sh(t+1)$	$cht \cdot ch 3t$
3.22	$\cos 2t - 3t^2 - 4$	$e^{-4t} ch 5t$	$(t+1)^5$	$\sin 5t \cdot sh t$
3.23	$2e^{-3t} + 5t - 7$	$5e^{-t} \sin t$	$(t-4)\cos(t-4)$	$\cos t \cdot sh 4t$
3.24	$t - 3e^{-t} - \sin 2t$	$e^t sh 2t$	$(t+7)ch(t+7)$	$\sin 6t \cdot \sin 3t$
3.25	$1 + 2t^4 + 3\sin 2t$	$e^{-6t} \cos 4t$	$(t-1)^2 e^{t-1}$	$\cos 4t \cdot \cos 2t$
3.26	$t^5 + 2e^{7t} - 6$	$e^{4t} ch 3t$	$\cos^2(t-6)$	$ch 3t \cdot ch 2t$

3.27	$3 + 5ch 2t + t^2$	$e^{-2t} \sin t$	$\sin^2(t + 4)$	$e^{-t} \cdot \cos 5t$
3.28	$6t^4 + 3sh t - 1$	$3e^{5t} \cos t$	$(t - 5)e^{t-6}$	$ch^3 t$
3.29	$5 + \cos 6t - t^3$	$e^{-2t} \sin 7t$	$(t + 1)ch(t + 1)$	$ch 2t \cdot sh 8t$
3.30	$\cos 2t - 5t^3 + 7$	$e^{2t} sh 5t$	$(t - 9)^6$	$\cos 4t \cdot \cos 2t$

Задание 4. Пользуясь теоремами дифференцирования изображения, интегрирование оригинала и интегрирование изображения, найти изображение $F(p)$ данных функции

Таблица 4

	$f(t)$	$\tilde{f}(t)$	$\tilde{f}(t)$
4.1	$t^2 \sin t$	$\int_0^t t^2 \sin t dt$	$\frac{1 + e^{2t}}{t}$
4.2	$t^2 \cos t$	$\int_0^t t^2 \cos t dt$	$\frac{e^{5t} + 3 + t}{t}$
4.3	$(t + 3)e^t$	$\int_0^t (t + 3)e^t dt$	$\frac{\sin t}{t}$
4.4	$t^3 e^{-t}$	$\int_0^t t^3 e^{-t} dt$	$\frac{\cos t}{t}$
4.5	$t sh t$	$\int_0^t t sh t dt$	$\frac{\sin 3t - \sin t}{t}$
4.6	$t ch t$	$\int_0^t t ch t dt$	$\frac{\cos t - \cos 2t}{t}$
4.7	$(t - 5) \sin 2t$	$\int_0^t (t - 5) \sin 2t dt$	$\frac{e^{-t} - t}{t}$
4.8	$(t + 2) \cos 3t$	$\int_0^t (t + 2) \cos 3t dt$	$\frac{e^{3t} - e^{2t}}{t}$
4.9	$t^2 ch 3t$	$\int_0^t t^2 ch 3t dt$	$\frac{\sin 2t - \cos t}{t}$
4.10	$t^3 sh 5t$	$\int_0^t t^3 sh 5t dt$	$\frac{\cos 3t + \sin t}{t}$
4.11	$t^2 e^{-t}$	$\int_0^t t^2 e^{-t} dt$	$\frac{t + e^{-5t}}{t}$
4.12	$t^3 e^{4t}$	$\int_0^t t^3 e^{4t} dt$	$\frac{t - e^{4t}}{t}$

4.13	$t(e^{2t} + ch3t)$	$\int_0^t t(e^{2t} + ch3t) dt$	$\frac{\sin^2 t}{t}$
4.14	$t(e^{-t} - sh4t)$	$\int_0^t t(e^{-t} - sh4t) dt$	$\frac{\cos^2 t}{t}$
4.15	$t^2 ch t$	$\int_0^t t^2 ch t dt$	$\frac{e^{3t} \cos t}{t}$
4.16	$t^2 sh t$	$\int_0^t t^2 sh t dt$	$\frac{e^t \sin 2t}{t}$
4.17	$t(ch t - e^{5t})$	$\int_0^t t(ch t - e^{5t}) dt$	$\frac{\cos 3t + \sin 4t}{t}$
4.18	$t(sh t + e^{3t})$	$\int_0^t t(sh t + e^{3t}) dt$	$\frac{\sin 2t - \cos 5t}{t}$
4.19	$t ch 5t$	$\int_0^t t ch 5t dt$	$\frac{\cos t - 1}{t}$
4.20	$t sh 4t$	$\int_0^t t sh 4t dt$	$\frac{\sin t + 2}{t}$
4.21	$t(3 - ch t)$	$\int_0^t t(3 - ch t) dt$	$\frac{\cos 4t \cdot \sin 2t}{t}$
4.22	$t(6 + sh t)$	$\int_0^t t(6 + sh t) dt$	$\frac{\sin 4t \cdot \cos 2t}{t}$
4.23	$t^3 ch 5t$	$\int_0^t t^3 ch 5t dt$	$\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t}$
4.24	$t^3 sh 4t$	$\int_0^t t^3 sh 4t dt$	$\frac{e^{5t} + e^{-5t}}{t}$
4.25	$t(e^t - \cos 2t)$	$\int_0^t t(e^t - \cos 2t) dt$	$\frac{1 - e^{3t}}{t}$
4.26	$t(e^{4t} + \sin 3t)$	$\int_0^t t(e^{4t} + \sin 3t) dt$	$\frac{1 + e^{6t}}{t}$
4.27	$t^3 \sin t$	$\int_0^t t^3 \sin t dt$	$\frac{t + \sin 4t}{t}$
4.28	$t^3 \cos t$	$\int_0^t t^3 \cos t dt$	$\frac{\cos 3t - t}{t}$
4.29	$t(1 + sh 4t)$	$\int_0^t t(1 + sh 4t) dt$	$\frac{\cos t + \sin t}{t}$
4.30	$t(2 - ch 3t)$	$\int_0^t t(2 - ch 3t) dt$	$\frac{\sin t + \cos 2t}{t}$

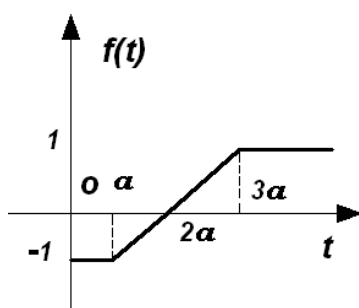
Задание 5. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции

Таблица 5

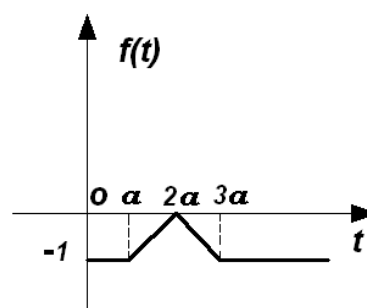
	$f(t)$		$f(t)$
5.1	$\sin^3 t$	5.2	$\cos^3 t$
5.3	$t \sin t$	5.4	$t \cos t$
5.5	$t e^t$	5.6	$5t e^t$
5.7	$\sin^2 t$	5.8	$\cos^2 t$
5.9	$t \operatorname{sh} t$	5.10	$t \operatorname{ch} t$
5.11	$\operatorname{sh}^2 t$	5.12	$\operatorname{ch}^2 t$
5.13	$\sin^3 2t$	5.14	$\cos^3 4t$
5.15	$t \operatorname{sh} 3t$	5.16	$t \operatorname{ch} 5t$
5.17	$t \sin 9t$	5.18	$t \cos 8t$
5.19	$\sin^2 6t$	5.20	$\sin^2 4t$
5.21	$2t e^t$	5.22	$t e^t$
5.23	$\sin^3 8t$	5.24	$\cos^3 7t$
5.25	$t \operatorname{sh} 4t$	5.26	$t \operatorname{ch} 4t$
5.27	$\operatorname{sh}^2 5t$	5.28	$\operatorname{ch}^2 6t$
5.29	$2t e^t$	5.30	$t e^t$

Задание 6. По данному графику оригинала $f(t)$, найти изображение функции

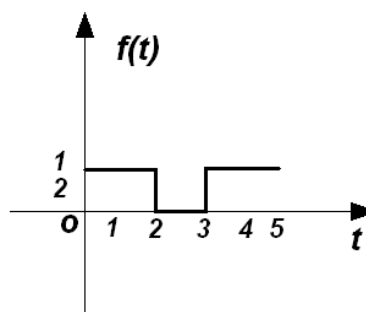
6.1



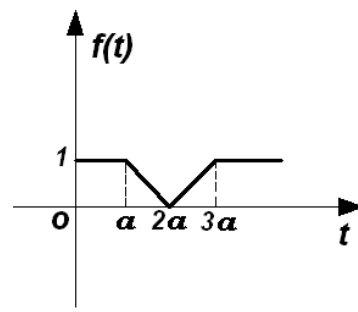
6.2



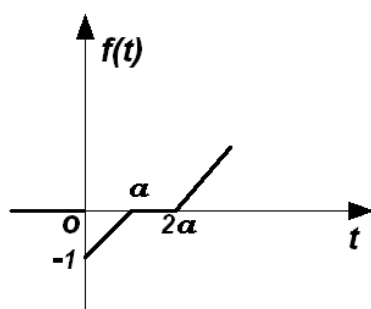
6.3



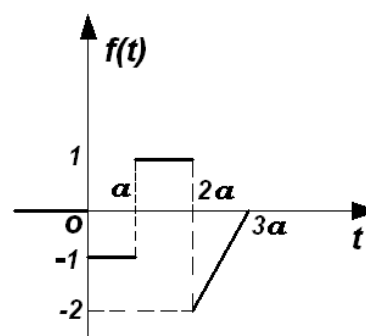
6.4



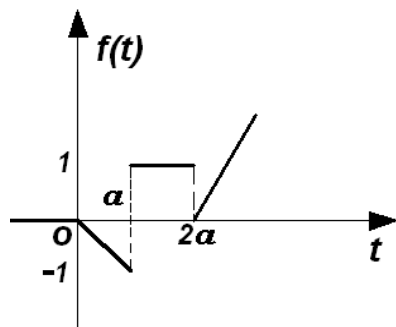
6.5



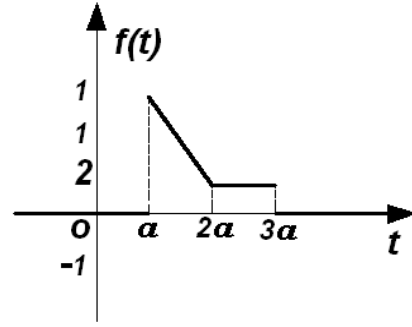
6.6



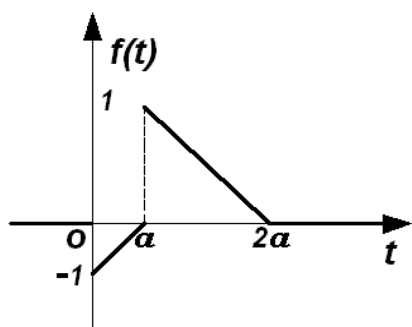
6.7



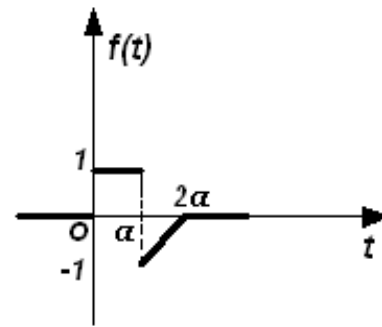
6.8



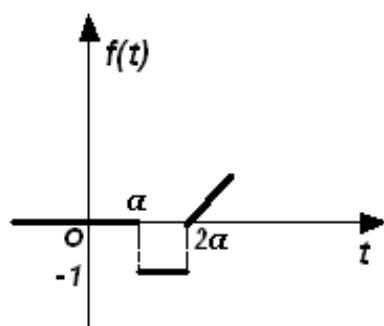
6.9



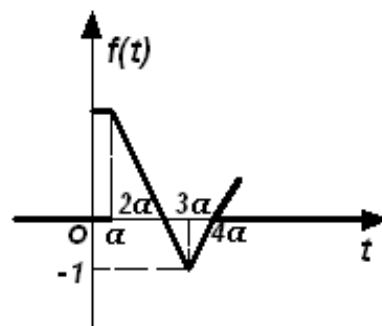
6.10



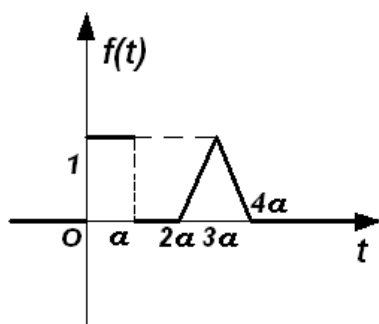
6.11



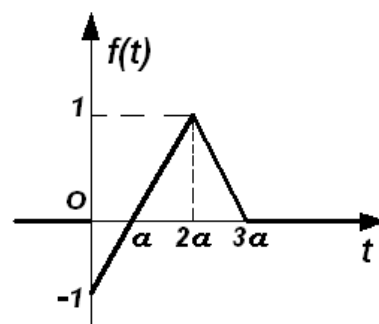
6.12



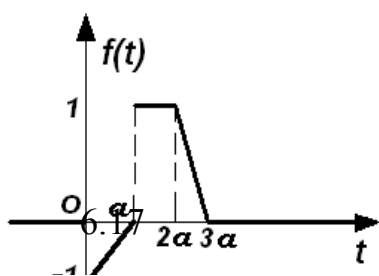
6.13



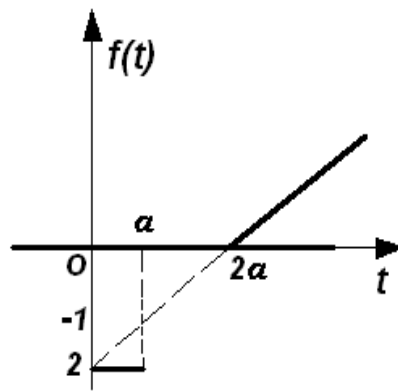
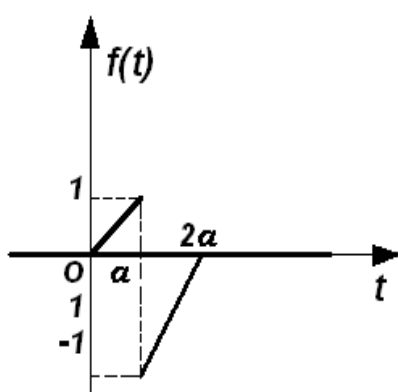
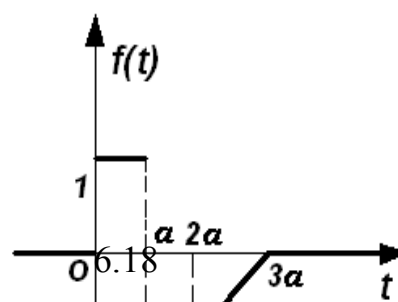
6.14



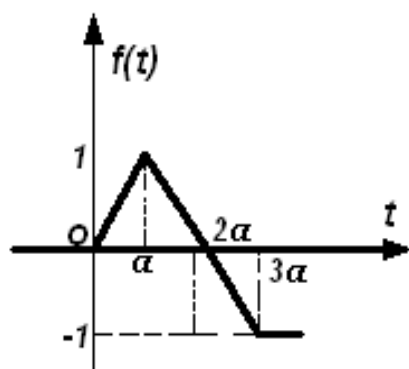
6.15



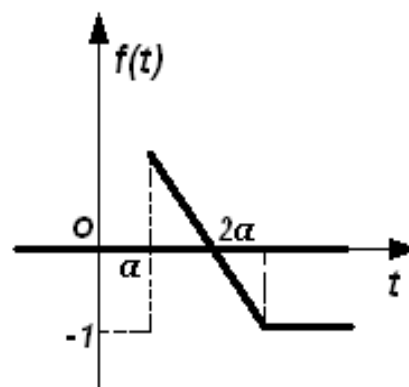
6.16



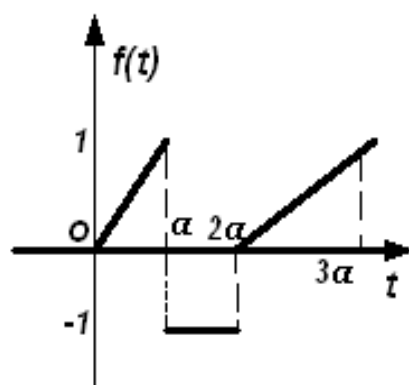
6.19



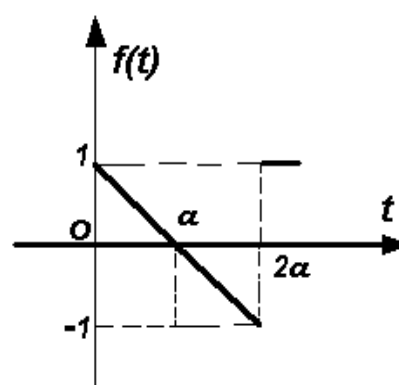
6.20



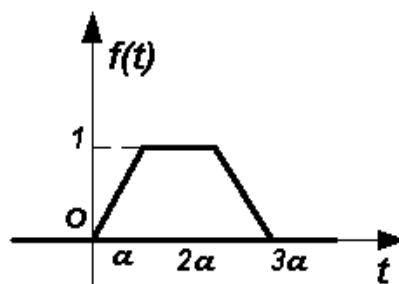
6.21



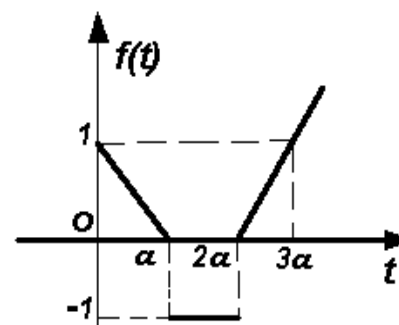
6.22



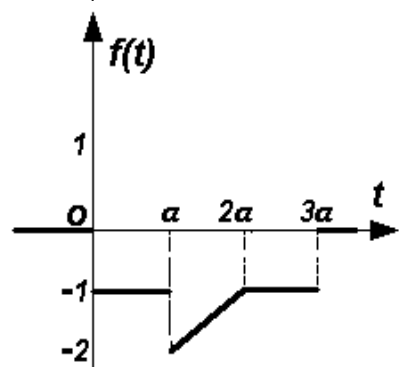
6.23



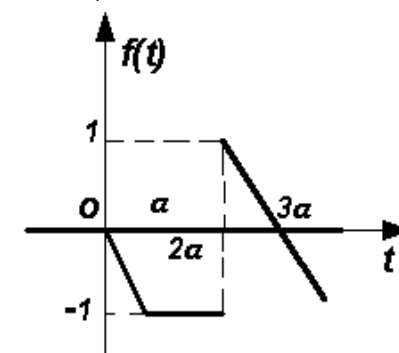
6.24



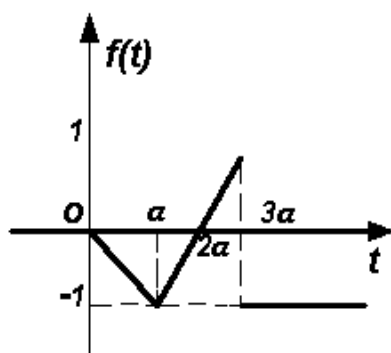
6.25



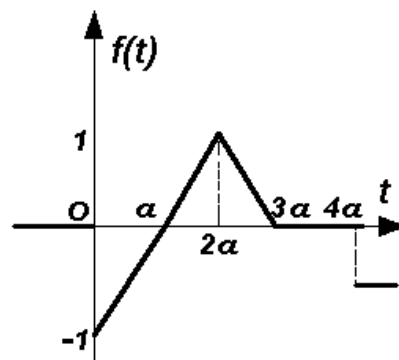
6.26



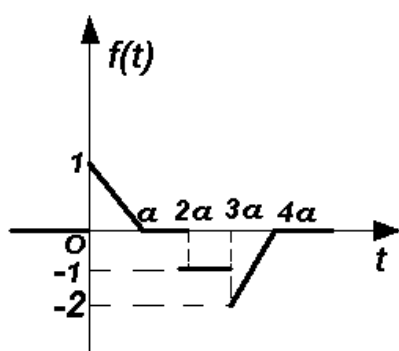
6.27



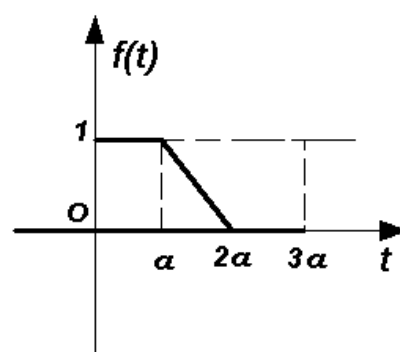
6.28



6.29



6.30



Задание 7. Найти свертку двух данных функций $f(t)$ и $g(t)$, а также изображения свертки этих функции

Таблица 6

	$f(t)$	$g(t)$		$f(t)$	$g(t)$
7.1	1	e^t	7.2	1	e^{-t}
7.3	1	$\cos t$	7.4	1	$\cos 3t$
7.5	1	$\sin t$	7.6	1	$\sin 2t$
7.7	t	$\cos t$	7.8	t	$\cos 2t$
7.9	t	e^t	7.10	t	e^{-t}
7.11	t	$sh 4t$	7.12	t	$ch 5t$
7.13	$1+t$	$\sin t$	7.14	$1+t$	$\cos t$
7.15	$t-3$	$ch 4t$	7.16	$t-1$	$sh 2t$

7.17	e^{3t}	$\cos t$	7.18	e^{2t}	$\sin t$
7.19	$\cos t$	$\cos 2t$	7.20	t	$\sin 4t$
7.21	$\cos 2t$	e^{-t}	7.22	$t + 2$	$\sin t$
7.23	$\sin 3t$	$\cos 4t$	7.24	$\cos 5t$	$\sin 2t$
7.25	$\sin t$	$\sin t$	7.26	$\cos t$	$\cos t$
7.27	e^{2t}	$\sin t$	7.28	e^t	$\cos 2t$
7.29	t	e^{-t}	7.30	e^{3t}	e^{-t}

Задание 8. Используя теорему умножения изображений, найти оригинал $f(t)$ для функции изображения $F(p)$

Таблица 7

	$F(p)$		$F(p)$		$F(p)$
8.1	$\frac{1}{p(p+1)}$	8.2	$\frac{2}{p(p-1)}$	8.3	$\frac{3}{p(p^2+3)}$
8.4	$\frac{5}{p^2(p-2)}$	8.5	$\frac{1}{p^2(p+6)}$	8.6	$\frac{4}{p^2(p-2)}$
8.7	$\frac{p}{p(p+3)}$	8.8	$\frac{1}{(p^2+1)^2}$	8.9	$\frac{1}{(p+4)(p-5)}$
8.10	$\frac{1}{p^2(p-5)}$	8.11	$\frac{1}{p^2(p-7)}$	8.12	$\frac{p}{(p^2+2)^2}$
8.13	$\frac{p^2}{(p+3)(p-2)}$	8.14	$\frac{p}{p^3(p-3)}$	8.15	$\frac{1}{(p+4)(p^2+7)}$
8.16	$\frac{p}{(p^2-3)^2}$	8.17	$\frac{1}{(p^2-1)^2}$	8.18	$\frac{3p}{p^2(p^2-9)}$
8.19	$\frac{p^2}{p^3(p+2)}$	8.20	$\frac{p^2}{(p-2)(p^2-1)}$	8.21	$\frac{1}{p(p^2+16)}$
8.22	$\frac{4}{p^2-9}$	8.23	$\frac{1}{(p^2+5)^2}$	8.24	$\frac{9}{(p+9)(p-1)}$

8.25	$\frac{p}{p(p^2 - 1)}$	8.26	$\frac{2p}{p(p^2 + 7)}$	8.27	$\frac{5p^2}{(p^2 + 6)^2}$
8.28	$\frac{p^2}{p^2(p^2 - 4)}$	8.29	$\frac{1}{p^3(p + 2)}$	8.30	$\frac{3}{(p + 2)(p^2 - 9)}$

Задание 9. Найти оригиналы по заданным изображениям

Таблица 8

	F(p)		F(p)
7.1	$\frac{1}{p(p^2 + 2p + 3)}$	7.2	$\frac{2}{p(p^2 + p + 4)}$
7.3	$\frac{p}{(p^2 + p + 4)^2}$	7.4	$\frac{p}{(p^2 + 5)^2}$
7.5	$\frac{3p}{p^3 + 2p^2 + p}$	7.6	$\frac{p + 1}{(p - 4)(p^2 + 6p + 9)}$
7.7	$\frac{p - 1}{p^2 + 3p + 6}$	7.8	$\frac{p - 4}{(p^2 + 2p + 7)^2}$
7.9	$\frac{1}{p^3 - 27}$	7.10	$\frac{1}{p^3 - 8}$
7.11	$\frac{1}{p^4 + p^3 + p^2}$	7.12	$\frac{2p}{p^4 + 3p^3 + 5p^2}$
7.13	$\frac{1}{p^3 + 8}$	7.14	$\frac{1}{p^3 - 1}$
7.15	$\frac{1}{p^2 + p^3}$	7.16	$\frac{1}{p^3 - p^4}$
7.17	$\frac{2p}{(p^2 + 3)(p^2 + 1)}$	7.18	$\frac{3p - 3}{(p - 4)(p^2 + 2p + 4)}$
7.19	$\frac{1 - p}{(p^2 - 1)(p^2 + 2)}$	7.20	$\frac{4 - p}{(p + 6)(p^2 + p + 2)}$

7.21	$\frac{2+p}{(p-9)(p^2-p+1)}$	7.22	$\frac{4+p}{(p+7)(p^2-2p+6)}$
7.23	$\frac{1}{p^3+p^2-6p}$	7.24	$\frac{1}{7p-p^2+p^3}$
7.25	$\frac{p}{(p-1)^2(p+5)}$	7.26	$\frac{4-p}{(p-2)(p^2+3)^2}$
7.27	$\frac{1+3p}{(p+2)(p^2-4p+5)}$	7.28	$\frac{2p-5}{(p-3)(p^2+2p+2)}$
7.29	$\frac{p-7}{p-2p^2+p^3}$	7.30	$\frac{9-p}{p^2-2p^3+p^4}$

Задание 10. Решить задачи Коши операционным (операторным) методом

Таблица 9

10.1	$x'' + x' = 1,$ $x(0) = 0, x'(0) = 1$	10.2	$x'' + 4x = t,$ $x(0) = 1, x'(0) = 0$
10.3	$x'' + x = 0,$ $x(0) = 1, x'(0) = 0$	10.4	$x'' - 2x' + 5x = 1 - t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$
10.5	$x'' + 3x' = e^t,$ $x(0) = 0, x'(0) = -1$	10.6	$x'' + x' = \cos t,$ $x(0) = 2, x'(0) = 0$
10.7	$x'' - 2x' = e^{2t},$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$	10.8	$x'' - x' = te^t,$ $x(0) = 1, x'(0) = 0$
10.9	$x'' + 2x' - 3x = e^{-t},$ $x(0) = 0, x'(0) = 1$	10.10	$x'' + 2x' + x = t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$
10.11	$x'' + 2x' = t \sin t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$	10.12	$x'' - x' + x = e^{-t},$ $x(0) = 0, x'(0) = 1$
10.13	$x'' + 2x' + x = \sin t,$ $x(0) = 0, x'(0) = -1$	10.14	$x'' - x = \sin t,$ $x(0) = -1, x'(0) = 0$

10.15	$x'' - 2x' + x = e^t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 1$	10.16	$x'' + x = 2\sin t,$ $x(0) = 1, x'(0) = -1$
10.17	$x'' - 2x' + 2x = 1,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$	10.18	$x'' - x' = t^2,$ $x(0) = 0, x'(0) = 1$
10.19	$x'' + x' = \cos t,$ $x(0) = 2, x'(0) = 0$	10.20	$x'' + 4x = \sin t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$
10.21	$x'' + 2x' + x = t^2,$ $x(0) = 1, x'(0) = 0$	10.22	$x'' + x' + x = t e^t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$
10.23	$x'' + x = \cos t,$ $x(0) = -1, x'(0) = 1$	10.24	$x'' + x = t \cos t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$
10.25	$x'' + 2x' + 5x = 3,$ $x(0) = 1, x'(0) = 0$	10.26	$x'' + x' = 4\sin^2 t,$ $x(0) = 0, x'(0) = -1$
10.27	$x'' + 2x' + 2x = 1,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$	10.28	$x'' - 2x' + x = t - \sin t,$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$
10.29	$x'' + x = 1,$ $x(0) = -1, x'(0) = 0$	10.30	$x'' + x = 2\cos t,$ $x(0) = 0, x'(0) = -1$

Задание 11. Решить дифференциальные уравнения (задачи Коши) с помощью формулы Дюамеля

Таблица 10

11.1	$x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.2	$x'' - x = \frac{3}{cht},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.3	$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1 + t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.4	$x'' - x' = \frac{1}{1 + cht},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.5	$x'' + x = \frac{1}{2 + \cos t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.6	$x'' - x = tht,$ $x(0) = x'(0) = 0$

11.7	$x'' + x = \frac{1}{1 + \cos^2 t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.8	$x'' + x = \frac{1}{2 + \sin t},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.9	$x'' + x = \frac{1}{1 + \sin^2 t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.10	$x'' + x = \frac{e^{2t}}{2 + e^t},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.11	$x'' - x = tht,$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.12	$x'' - 2x' + 2x = 2e^t \cos t,$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.13	$x'' + 2x' + 2x = \frac{2\sin t}{e^t},$ $x(0) = x'(0) = 1$	11.14	$x'' + x' = \frac{1}{1 + e^t},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.15	$x'' + x = \frac{1}{4 + tg^2 t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.16	$x'' - 2x = tht,$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.17	$x'' - x = th^2 t,$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.18	$x'' - x = \frac{1}{1 + \sin t},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.19	$x'' + 2x' + x = \frac{\cos t + t}{e^t},$ $x(0) = 1, x'(0) = -1$	11.20	$x'' - x = \frac{1}{ch^2 t},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.21	$x'' + 4x' + 4x = \frac{\cos t + 2\sin t}{e^{-2t}},$ $x(0) = -1, x'(0) = 1$	11.22	$x'' - 2x' = \frac{e^t}{cht},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.23	$x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3),$ $x(0) = 2, x'(0) = 2$	11.24	$x'' + x' = \frac{4}{1 + e^t},$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.25	$x'' + x = \frac{1}{1 + \cos 2t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.26	$x'' + 2x = tht,$ $x(0) = x'(0) = 0$
11.27	$x'' + x = \frac{5}{1 + \cos^2 t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.28	$x'' - x = \frac{1}{1 + \sin t},$ $x(0) = x'(0) = 0$

11.29	$x'' + x = \frac{3}{1 + \sin^2 t},$ $x(0) = x'(0) = 0$	11.30	$x'' - 4x = th^2 2t,$ $x(0) = x'(0) = 0$
-------	--	-------	--

Задание 12. Решить системы дифференциальных уравнений операционным методом

Таблица 11

12.1	$\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = -3x \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$	12.2	$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$
12.3	$\begin{cases} x' = 3y + 2 \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1$	12.4	$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2$
12.5	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2 \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 0$	12.6	$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$
12.7	$\begin{cases} x' = x + 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$	12.8	$\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2$
12.9	$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2$	12.10	$\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2$
12.11	$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$	12.12	$\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$
12.13	$\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 2 \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$	12.14	$\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1$

12.15	$\begin{cases} x' = -2x + y + 2 \\ y' = 3x \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$	12.16	$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x + 3y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 1$
12.17	$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -4x \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 1$	12.18	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 5$
12.19	$\begin{cases} x' = 4x + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0$	12.20	$\begin{cases} x' = -x - 2y + 1 \\ y' = -(3/2)x + y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$
12.21	$\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2 \\ y' = 3x + y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2$	12.22	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0$
12.23	$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$	12.24	$\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$
12.25	$\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 0$	12.26	$\begin{cases} x' = -x + 3y + 2 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$
12.27	$\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1 \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 1$	12.28	$\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2 \\ y' = 4y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$
12.29	$\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = 2x + 3 \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0$	12.30	$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = (5/2)x - y + 2 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$

Решение типового варианта

Задание 1. На основании определения функции оригинал преобразования Лапласа, показать являются ли данные функции $f(t)$ и $g(t)$ оригиналами

а) $f(t) = \cos t \cdot H(t)$

$$\text{б) } f(t) = \frac{1}{t-1}.$$

Решение. а) Оригиналом $f(t) = f_1(t) + f_2(t)i$ называется комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$
- 2) $f(t)$ - кусочно-непрерывна при $t > 0$ (непрерывна или имеет точки разрыва 1-го рода)
- 3) $|f(t)| \leq M e^{S_0 t}$, где $M > 0$, $S_0 \geq 0$ - показатель роста.

Рассмотрим случай а): функция $f(t) = \cos t \cdot H(t)$ является оригиналом, так как она удовлетворяет всем условиям:

- 1) $\cos t H(t) \equiv 0$, при $t < 0$ так как функция Хевисайда $f(t) = H(t)$ «гасит» ее при $t < 0$
- 2) функция $\cos t H(t)$ - непрерывна
- 3) функция $f(t)$ - ограничена, т.е. $|\cos t| \leq 1$, тогда $M = 1$, $S_0 = 0$.

Перейдем к случаю: б)

$$f(t) = \frac{1}{t-1}.$$

Данная функция имеет разрыв второго рода при $t = 1$. т.е. она не удовлетворяет условиям определения функции оригинала.

Задание 2. Используя определение оригинала $f(t)$ преобразования Лапласа, найти изображение $F(p)$ данной функции $f(t) = t$.

Решение. По определению имеем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B t e^{-pt} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = u; \quad dt = du \\ e^{-pt} dt = dv; \quad v = \int e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{p} t e^{-pt} \Big|_0^B + \frac{1}{p} \int_0^B e^{-pt} dt \right\} = \frac{1}{p^2}.$$

Задание 3. Пользуясь теоремами линейности, смещения запаздывания и подобия, найти изображения данных функции $f(t)$

- а) $t^3 - 4e^{5t} + 1$;
- б) $f(t) = e^{2t} \cdot \sin t$;
- в) $(t-3)^5 t$;
- г) $\sin 3t \sin t$.

Решение. Рассмотрим случай: а) Итак, $f(t) = t^3 - 4e^{5t} + 9$, найти $F(p)$. Используя таблицу 1 и теорему линейности, имеем:

$$t^3 - 4e^{5t} + 9 \cdot 1 \div \frac{3!}{p^4} - 4 \cdot \frac{1}{p-5} + \frac{9}{p}.$$

Перейдем к случаю б), при $f(t) = e^{2t} \cdot \sin t$, найти $F(p)$. Итак $p_0 = 2$ и по таблице 1 находим

$$\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1},$$

тогда по теореме смещения получим:

$$e^{2t} \cdot \sin t \div \frac{1}{(p-2)^2 + 1}.$$

Рассмотрим случай в), имеем $f(t) = (t-3)^2$. Далее, по теореме запаздывания оригинале на положительное число $\tau = 3 > 0$, приводит к умножению изображения без запаздывание на $e^{-p\tau}$:

$$(t-3)^2 \div \frac{2!}{p^3} \cdot e^{-3p}.$$

Рассмотрим случай г). Пусть $f(t) = \sin 3t \sin t$.

Преобразуем это соотношение по тригонометрической формуле:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Далее используя таблицу и теорему линейности и подобия, получим:

$$\begin{aligned} \sin 3t \sin t &= \frac{1}{2} [\cos 2t - \cos 4t] \div \\ &\div \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 16}. \end{aligned}$$

Задание 4. Пользуясь теоремами дифференцирование изображения, интегрирования оригинала и изображения, найти изображения $F(p)$ данных функции:

а) $f(t) = t^2 e^t$;

б) $\int_0^t t^2 e^t dt$;

в) $\frac{e^{3t} - 1}{t}$.

Решение. Рассмотрим случай а) $f(t) = t^2 e^t$. по таблице 1, найдем изображение $e^t \div \frac{1}{p-1}$, далее по теореме дифференцировании изображения $F''(p) \div (-1)^2 t^2 f(t)$, получим:

$$t^2 e^t \div \left(\frac{1}{p-1} \right)'' = \left[-\frac{1}{(p-1)^2} \right]' = \frac{+2}{(p-1)^3}.$$

Перейдем к случаю б).

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}, \text{ где } f(t) \div F(p).$$

Из предыдущего случая а) выпишем изображение: $t^2 e^t \div \frac{2}{(p-1)^3}$.

$$\int_0^t t^2 e^t dt \div \frac{\frac{2}{(p-1)^3}}{p} = \frac{2}{p(p-1)^3}.$$

Рассмотрим случай в).

Из таблицы 1, находим

$$e^{-3t} - 1 \div \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{e^{-3t} - 1}{t} &= \int_p^\infty \left[\frac{1}{p+3} - \frac{1}{p} \right] dp = \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \int_p^B \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p} \right\} dp = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \left. \operatorname{Ln} |p+3| - \operatorname{Ln} |p| \right|_p^B \right\} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \left. \operatorname{Ln} \left| \frac{p+3}{p} \right| \right|_p^B \right\} = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \left. \operatorname{Ln} \left| 1 + \frac{3}{p} \right| \right|_p^B \right\} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \left. \operatorname{Ln} 1 - \operatorname{Ln} \left| 1 + \frac{3}{p} \right| \right|_p^B \right\} = \\ &= -\operatorname{Ln} \left| 1 + \frac{3}{p} \right|, \quad p = s + i\sigma. \end{aligned}$$

Для многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ берем их главные значения, для которых $\ln 1 = 0$.

Задание 5. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. По теореме о дифференцировании оригинала имеем:

$$f''(t) \div p F(p) - f(0),$$

Учитывая $f(0) = \sin^2 0 = 0$, тогда $f'(t) = p F(p)$.

Итак, $f'(t) = (\sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$. Из таблицы 1 найдем:

$\sin 2t \div \frac{2}{p^2 + 4} = p F(p)$, тогда

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \quad \sin^2 t \div \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

Задание 6. По данному графику оригинала найти изображение $f(t)$.

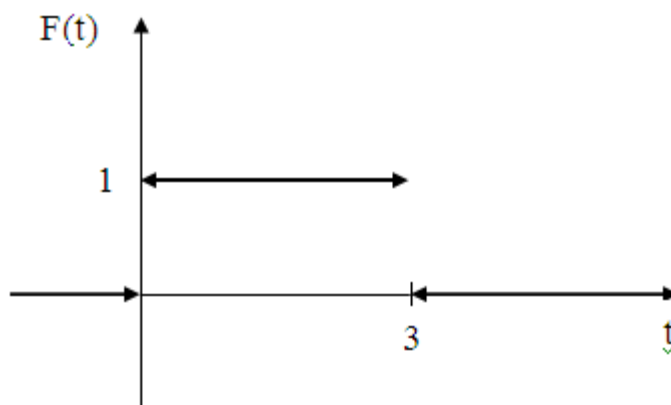


Рис. 46

Решение. Для нахождения $F(p)$ введем следующие обозначения:

τ_k - точки разрыва или изменение функции $f(t)$;

δ_k - скачок функции в точке разрыва;

α_k - угловой коэффициент k -го участка;

β_k - разность угловых коэффициентов $\beta_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$.

Тогда изображение данной функции можно определить по формуле:

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\delta_k}{p} + \frac{\alpha_k}{p^2} \right] e^{-\tau_k p}.$$

Итак, $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 3$, $\delta_1 = 1 - 0 = 1$ и $\delta_2 = 0 - 1 = -1$, $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ и β_2 , подставим все значения в формулу для нахождения изображения $F(p)$, получим:

$$\begin{aligned} F(p) &= \left[\frac{1}{p} + \frac{0}{p^2} \right] e^{-0 \cdot p} + \left[\frac{-1}{p} + \frac{0}{p^2} \right] e^{-3p} = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-3p} = \frac{1}{p} [1 - e^{-3p}]. \end{aligned}$$

Задание 7. Найти свертку двух данных функций $f(t)$ и $g(t)$, а также изображения свертки этих функции при $f(t) = e^t$ $g(t) = sh t$

Решение. По теореме о свертке функций, имеем:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

или

$$f(t) * g(t) = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Получим

$$e^t * sh t = \int_0^t sh \tau e^{t-\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
e^t \int_0^t sh\tau e^\tau d\tau &= \left| sh t = \frac{1}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) \right| = \\
&= \frac{e^t}{2} \int_0^t (e^\tau - e^{-\tau}) e^{-\tau} d\tau = -\frac{e^t}{2} \int_0^t (1 - e^{-2\tau}) d\tau = \frac{1}{2} e^t \left(\tau + \frac{1}{2} e^{-2\tau} \right) \Big|_0^t = \\
&= \frac{1}{2} e^t \left(t + \frac{e^{-2t} - 1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Далее, найдем изображение свертки используя таблицу 1, получим

$$\frac{1}{4}(e^{-t} - e^t) \div \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} \right).$$

Задание 8. Используя теорему умножения изображений, найти оригинал $f(t)$ функции $F(p)$, при $f(t) = \frac{1}{(p+1)(p-1)}$.

Решение. Если $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, то по теореме умножения $F(p) \cdot G(p) \div f(t) \div g(t)$.

$$\begin{aligned}
\text{Тогда } \frac{1}{(p+1)(p-1)} &= \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p-1} \div e^{-t} * e^t = \\
&= \int_0^t e^{-t} \cdot e^{t-\tau} d\tau = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - \frac{1}{e^t}.
\end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \frac{1}{(p+1)(p-1)} \div 1 - \frac{1}{e^t}.$$

Задание 9. Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)(p^2+2)}.$$

Решение. Разложим дробно-рациональную функцию на сумму простых дробей:

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)(p^2+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} + \frac{Dp+E}{p^2+2},$$

$$1 = Ap(p-1)(p^2+2) + B(p-1)(p^2+2) + Cp^2(p^2+2) + p^2(p-1)(Dp+E)$$

$$p^4 : A + C + D = 0$$

$$p^3 : B + E - D = 0$$

$$p^2 : A - B + 2C - E = 0$$

$$p^1 : -2A + 2B = 0 \qquad p^0 : -2A = 1.$$

Найдем коэффициенты А, В, С, D, Е:

$$A = -\frac{1}{2}; \quad B = -\frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{3}; \quad D = \frac{1}{6}; \quad D = \frac{1}{3},$$

получим:

$$F(p) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{p+4}{p^2+2}.$$

По таблице 1 и теореме линейности, находим:

$$f(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6}\cos\sqrt{2} \cdot t + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\sqrt{2} \cdot t.$$

Задание 10. Решить задачу Коши операционным (операторным) методом

$$\begin{cases} y'' + 2y' = e^t \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Итак, $y(t) \div Y(p)$ по теореме дифференцирования оригинала имеем:

$$\begin{aligned} y'(t) \div pY(p) - y(0) &= pY(p) \\ y''(t) \div p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) &= p^2 Y(p). \end{aligned}$$

По таблице 1, имеем: $e^t \div \frac{1}{p-1}$. Операторное уравнение имеет вид:

$$p^2 Y(p) + 2pY(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Откуда находим операторное решение алгебраического уравнение

$$Y(p)[p^2 + 2p] = \frac{1}{p-1}.$$

Тогда $Y(p) = \frac{1}{(p-1)p(p+2)}$, разложим дробь на простые дроби:

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+2},$$

получим:

$$1 = A(p^2 + p - 2) + Bp^2 + 2Bp + Cp^2 - Cp$$

$$p^2 : A + B + C = 0, \quad C = \frac{1}{6}$$

$$p^1 : A + 2B - C = 0, \quad B = \frac{1}{3}$$

$$p^0 : -2A = 1, \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, имеем:

$$Y(p) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p+2}.$$

Далее, по таблице 1, найдем соответствующие оригиналы:

$$\frac{1}{p} \div 1; \quad \frac{1}{p-1} \div e^t; \quad \frac{1}{p+2} \div e^{-2t}.$$

Итак, искомое решение задачи Коши имеет вид:

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t}.$$

Задание 11. Решить дифференциальное уравнение (задачу Коши) с помощью формулы Дюамеля

$$\begin{cases} x'' - x' = \frac{e^t}{1+e^t}, \\ x'(0) = x(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на использовании формулы Дюамеля, применяется в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$

правой части $f(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$.

Решим вспомогательное уравнение операционным методом:

$$x''_1 - x'_1 = 1,$$

получим операторное уравнение :

$$p^2 X_1(p) - pX_1(p) = \frac{1}{p},$$

тогда

$$X_1(p)(p^2 - p) = \frac{1}{p},$$

Операторное решение: $X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$, разложим на простые дроби:

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-1} = \frac{A(p-1) + Bp(p-1) + Cp^2}{p^2(p-1)}.$$

$$p^2 : B + C = 0, \quad B = -1, \quad C = 1;$$

$$p^1 : A - B = 0, \quad p^0 : -A = 1, \quad A = -1.$$

Тогда $X_1(p) = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$, а соответствующий оригинал:

$x_1(t) = -t - H(t) + e^t$, найдем ее производную $x'_1(t) = e^t - 1$.

Используем формулу Дюамеля при нулевых начальных условиях:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x'_1(t-\tau) d\tau,$$

получим:

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^\tau}{1+e^\tau} \cdot (e^{t-\tau} - 1) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= e^t \int_0^t \frac{d\tau}{1+e^\tau} - \int_0^t \frac{d(1+e^\tau)d\tau}{1+e^\tau} = \left| \begin{array}{l} e^\tau = x \\ \tau = \ln x \\ d\tau = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \\
&= e^t \int_1^{e^t} \frac{dx}{x(x+1)} - \ln|1+e^t| + \ln 2 = e^t \int_1^{e^t} \left[\frac{dx}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx - \ln|1+e^t| + \ln 2 = \\
&= e^t [\ln|x| - \ln|x+1|] \Big|_1^{e^t} - \ln|1+e^t| + \ln 2 = \\
&= e^t [t + \ln 2 - \ln|e^t + 1|] - \ln|1+e^t| + \ln 2 = (e^t + 1) \ln \frac{2}{|e^t + 1|}.
\end{aligned}$$

Итак, искомое решение задачи Коши:

$$x(t) = (e^t + 1) \ln \frac{2}{|e^t + 1|}.$$

Задание 12. Решить систему дифференциальных уравнений операционным (операторным) методом.

$$\begin{cases} x + x' = y + e^t \\ y + y' = x + e^t, \quad x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тогда по теореме дифференцирование оригинала имеем:

$$x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$y'(t) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$

$$e^t \div \frac{1}{p-1}.$$

Составим операторную систему, используя свойства преобразования Лапласа, таблицу 1 и начальные условия задания:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = Y(p) - X(p) + \frac{1}{p-1}, \\ pY(p) - 1 = X(p) - Y(p) + \frac{1}{p-1}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(p)(p+1) - Y(p) = 1 + \frac{1}{p-1}, \\ -X(p) + Y(p)(p+1) = 1 + \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Далее, решаем эту систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^2 - 1 = p^2 + 2p = p(p+2) \neq 0,$$

тогда

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{p-1} & -1 \\ 1 + \frac{1}{p-1} & p+1 \end{vmatrix} = \frac{p(p+2)}{p-1},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+1 & 1 + \frac{1}{p-1} \\ -1 & 1 + \frac{1}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{p(p+2)}{p-1},$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{p(p+2)}{p-1} : p(p+2) = \frac{1}{p-1},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p(p+2)}{p-1} : p(p+2) = \frac{1}{p-1}.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{1}{p-1} : e^t,$$

$$Y(p) = \frac{1}{p-1} : e^t.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^t. \end{cases}$

ОСНОВНЫЕ ОРИГИНАЛЫ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$t^n \quad (n=1,2,\dots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha \quad (\alpha > -1)$	$\frac{\tilde{A}(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t} \quad (\lambda = a+bi)$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$t^\alpha e^{\lambda t} \quad (\alpha > -1)$	$\frac{\tilde{A}(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t} sh \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2 - \omega^2}$	$e^{\lambda t} ch \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 - \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t sh \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$t ch \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$\sin(t-\tau) \quad (\tau > 0)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2 + 1}$	$\cos(t-\tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + 1}$
$t^n \sin \omega t$	$\frac{\text{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$	$t^n \cos \omega t$	$\frac{\text{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$
$J_n(t) \quad (n=1,2,\dots)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$	$\text{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\infty} e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$
$\text{Si } t = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$	$\frac{\text{arctg } p}{p}$	$\text{Ci } t = -\int_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$	$\frac{I_n(\alpha t)}{t} \quad (\alpha > 0)$	$\frac{1}{n\alpha^n} (\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p)^n$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968.
- 2 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
- 3 Шостак Р.Я. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1972.
- 4 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981.
- 5 Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965.
- 6 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т. 1,2. М. «Наука», 1985.
- 7 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. М: Наука, 1984.
- 8 Ионкин П.А. Теоретические основы электротехники. Т.1. Основы теории линейных цепей. М.: Высшая школа, 1976.
- 9 Чудесенко Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.: Высшая школа, 1983.
- 10 Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике, в 3-х частях. Минск: Вышэйшая школа, 1990.
- 11 Айдос Е.Ж., Боровский Ю.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление. Учебное пособие. Алматы: КазНТУ, 2003.
- 12 Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Высшая математика III, Алматы, 2009.