

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы  
Қазақ ұлттық техникалық университеті

У. Т. Қарымсақов

## **СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ**

Университеттің ғылыми-әдістемелік кеңесі  
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2015

ӘОЖ 514.18 (075.8)

КБЖ 22.151.3я73

Қ 42

Пікір жазғандар:

*Ж. М. Есмұхан*, техн. ғыл. докт., профессор, Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті;

*Б. Н. Нұрмаханов*, техн. ғыл. докт., профессор, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті;

*Ә. Ж. Өмірзақова*, техн. ғыл. канд., Каспий қоғамдық университеті.

**Қарымсақов У.Т.**

**Қ 42** Сызба геометрия: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2015 – 214 б.  
ISBN 978-601-228-737-0

*Оқу құралы құрылыс және сәулет мамандықтарының студенттеріне арналған «Инженерлік графика 1» курсының типтік бағдарламасына сай жасалған. Оқу құралында сызба геометрияның проекциялау әдістері, аксонометриялық проекциялар, негізгі позициялық есептер, метрикалық есептер, беттер, беттердің жаймалары, сандық белгілері бар проекциялар атты тақырыптары баяндалған. Оқу құралының соңында студенттердің өзіндік жұмыстарын орындауға арналған тапсырмалар мен әдістемелік нұсқаулар берілген. Оқу құралы жоғары оқу орындарының 5В072900 – Құрылыс, 5В042000 – Сәулет, 5В042100 - Дизайн мамандықтарында оқитын студенттерге арналған.*

ӘОЖ 514.18 (075.8)

КБЖ 22.151.3я73

ISBN 978-601-228-737-0

© Қарымсақов У. Т., 2015

© ҚазҰТУ, 2015

## КІРІСПЕ

Ұсынылып отырған «Сызба геометрия» оқу құралы құрылыс және сәулет мамандықтарында оқитын студенттерге арналған.

Оқу құралы құрылыс және сәулет мамандықтарының студенттеріне арналған «Инженерлік графика 1» курсының типтік бағдарламасына сай жасалған.

Оқу құралы сәулет-құрылыс мамандықтарына қажетті мынадай бөлімдерді қамтиды: проекциялау әдістері, аксонометриялық проекциялар, нүктенің, түзудің, жазықтықтың проекциялары, негізгі позициялық есептер, метрикалық есептер, беттер, беттердің жаймалары, сандық белгілері бар проекциялар. Ал сәулет-құрылыс тәжірибесінде кеңінен қолданылатын сызықтық перспектива мен көлеңкелерді салу теориясы келесі жеке оқу құралында баяндалады.

Оқу құралының әр тарауының соңында студенттердің өз білімдерін тексеруі үшін бақылау сұрақтары берілген.

Сонымен қатар Қазақ ұлттық техникалық университетінде студенттерді графикалық дайындаудағы көп жылдық тәжірибелерді ескере отырып жасалған өзіндік жұмыстардың тапсырмалары мен оларды орындауға қысқаша әдістемелік нұсқаулар берілген.

Оқу құралы автордың Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінде оқып жүрген дәрістерінің негізінде жазылған. Сонымен қатар автор оны т.ғ.д., проф. Ж. М. Есмұханның, т.ғ.д., проф. Б. Н. Нұрмахановтың, т.ғ.д., проф. Ә. К. Бәйдібековтің оқулықтарындағы сызба геометрияның негізгі бөлімдерін баяндау тәжірибелеріне сүйене отырып жазған.

## ҚАБЫЛДАНҒАН БЕЛГІЛЕУЛЕР

1. Нүктелер латын алфавитінің бас әріптерімен немесе араб цифрларымен белгіленеді:

$A, B, C, D, \dots$

$1, 2, 3, 4, \dots$

2. Түзулер мен қисық сызықтар латын алфавитінің кіші әріптерімен белгіленеді:

$a, b, c, d, \dots$

Деңгейлік түзулер:

$h$  - горизонталь түзу;

$f$  - фронталь түзу;

$p$  - профиль түзу.

3. Жазықтықтар мен беттер грек алфавитінің кіші әріптерімен белгіленеді:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$

Проекциялар жазықтықтары:

$\pi_1$  – фронталь проекциялар жазықтығы;

$\pi_2$  – горизонталь проекциялар жазықтығы;

$\pi_3$  – профиль проекциялар жазықтығы;

$\pi$  – аксонометриялық проекциялар жазықтығы.

4. Бұрыштар грек алфавитінің кіші әріптерімен белгіленеді:

$\varphi, \psi, \omega, \dots$

Сонымен қатар мынадай белгілеулер қолданылады:

$\angle ABC$  - төбесі  $B$  нүктесі болатын бұрыш;

$\overset{\wedge}{l}, \alpha$  -  $l$  түзуі мен  $\alpha$  жазықтығының арасындағы бұрыш.

5.  $x_{12}, x_{23}, x_{13}$  - кешендік сызбадағы проекция осьтері:

6.  $x', y', z'$  - аксонометриялық осьтер;

7. Геометриялық элементтердің тізбегі:

$\overline{A}, \overline{A} \text{ ; } \overline{a}, \overline{a} \text{ , } \overline{a}$  немесе  $A, A^1, A^2, A^3; a, a^1, a^2, a^3$

8. Символдар:

$\in$  - нүктенің геометриялық фигураға тиістілігі:  $A \in l$ ;

$\subset$  - геометриялық фигуралардың тиістілігі:  $l \subset \alpha$ ;  $\beta \supset m$ ;

$\cap$  - геометриялық фигуралардың қиылысуы:  $l \cap \alpha$ ;  $\alpha \cap \beta$ ;

$\cup$  - геометриялық фигуралардың бірігуі:  $[AB] \cup [BC] - ABC$  сынығы;

$=$  - геометриялық салудың, амалдың нәтижесі;

$\sim$  - ұқсастық:  $\triangle ABC \sim \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

$\parallel$  - параллельдік:  $a \parallel b$ ;

$\perp$  - перпендикулярлық:  $l \perp \alpha$ ;

$\rightarrow$  - түрлендіру:  $a \rightarrow \overline{a}$ ;

$\Rightarrow$  - логикалық жалғасуы:  $a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2$ .

## 1. ПРОЕКЦИЯЛАУ ӘДІСІ

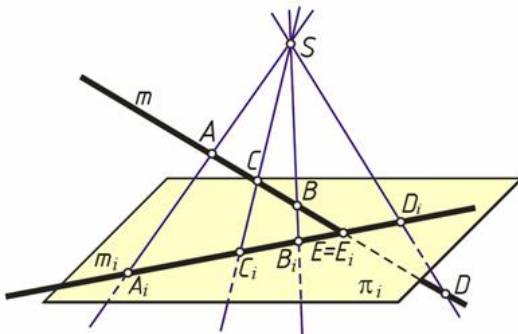
Сызба геометрия заттарды жазықтықта кескіндеудің әдістерін және сызда кеңістіктік есептерді графикалық түрде шешудің әдістерін зерттейтін геометрияның маңызды бөлімі болып табылады.

Геометриялық фигуралар сызықтық (нүкте, түзу, жазықтық), сызықтық емес (қисық сызық, бет), құрама (көпжақтар және т.б.) деп бөлінеді. Кеңістіктің негізгі элементі нүкте деп саналады, сондықтан барлық геометриялық фигуралар нүктелер жиыны ретінде қарастырылады.

Сызба геометрияның негізгі әдісі проекциялау әдісі болып табылады.

### 1.1. Центрілік проекциялау

Центрілік проекциялауда проекциялау центрі  $S$  және  $\pi_i$  проекциялар жазықтығы беріледі.



1.1-сурет

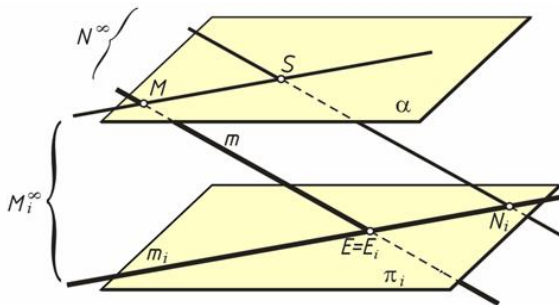
Кеңістіктің қандай да бір  $A$  нүктесінің  $A_i$  проекциясын тұрғызу үшін келесі қадамдарды орындау қажет:

- $SA$  проекциялаушы түзуді тұрғызу;
- $SA$  —ның  $\pi_i$  жазықтығымен қиылысу нүктесі  $A_i$  нүктесін анықтау.

*Центрлік проекцияның қасиеттері:*

- 1) нүктенің проекциясы нүкте болып табылады:  $A \rightarrow A_i$ ;
- 2) түзу түзуге проекцияланады:  $m \rightarrow m_i$  (проекциялаушы түзу нүктеге проекцияланады);
- 3) өзара меншіктілік сақталады:  $C \in m \rightarrow C_i \in m_i$ .

$S$  проекция центрі арқылы  $\pi_i$  проекция жазықтығына параллель  $\alpha$  жазықтығын жүргізейік (1.2-сурет). Берілген  $m$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу  $M$  нүктесінің  $\pi_i$  проекция жазықтығында проекциясы болмайды, өйткені  $SM$  проекциялаушы түзуі  $\pi_i$  проекция жазықтығына параллель және оны қиымайды. Сол сияқты  $SN_i$  проекциялаушы түзуі  $m$  түзуіне параллель орналасқандықтан,  $m_i$  түзуіндегі  $N_i$  нүктесінің  $m$  түзуінде сәйкес нүктесі болмайды. Осы қолайсыздықты жою үшін параллель түзулерді шексіз алыста орналасқан нүктеде қиылысады деп қабылдаймыз. Сонда  $SM$  проекциялаушы түзуі  $\pi_i$  проекция жазықтығымен шексіз алыста орналасқан  $M_i^\infty$  нүктесінде қиылысады, ал  $SN_i$  түзуі  $m$  түзуімен шексіз алыстағы  $N^\infty$  нүктесінде қиылысады. Бұл нүктені өзіндіксіз (меншіксіз) нүкте деп атаймыз. Әрбір түзудің бір ғана өзіндіксіз нүктесі болады.



1.2-сурет

Өзара параллель жазықтықтар шексіз алыстағы, яғни өзіндіксіз түзу бойымен қиылысады. Әрбір жазықтықтың бір ғана өзіндіксіз түзуі болады.

Кеңістіктегі шексіз алыстағы нүктелер мен түзулер жиыны шексіз алыстағы, яғни өзіндіксіз жазықтықты анықтайды.

## 1.2. Параллель проекциялау

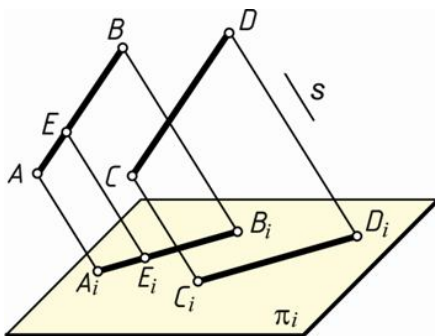
Параллель проекциялау центрлік проекциялаудың жеке түрі болып табылады, ол кезде  $S$  проекциялау центрі өзіндік емес болады (1.3-сурет). Сондықтан, әдетте өзіндік емес проекциялау центрі –  $S^\infty$  орнына,  $s$  проекциялау бағыты туралы айтады. Центрлік проекцияда айтылған алғашқы үш қасиеті параллель проекциялауға да әділ болады.

*Параллель проекцияның қасиеттері:*

1) параллельдік сақталады:  $a \parallel b \rightarrow a_i \parallel b_i$ .

2) параллель түзулердегі кесінділер проекцияларының сол кесінділердің ұзындықтарына қатынасы тұрақты (1.3-сурет):

$$\frac{|A_i B_i|}{|AB|} = \frac{|C_i D_i|}{|CD|}.$$



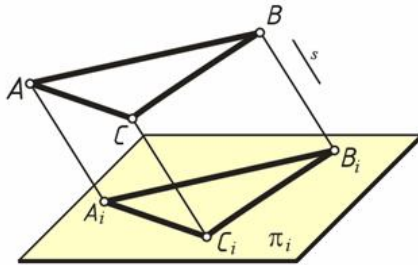
1.3-сурет

Параллель түзулер кесінділерінің проекцияларының қатынасы кесінділердің нақты ұзындықтарының қатынасына тең болады:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_i B_i|}{|C_i D_i|}.$$

Егер нүкте кесіндіні берілген қатынаста бөлетін болса, онда ол нүктенің проекциясы да кесінді проекциясын сол қатынаста бөледі.

$$\frac{|A_i B_i|}{|AB|} = \frac{|A_i E_i|}{|AE|}.$$



1.4-сурет

3) проекциялар жазықтықтарына параллель түзулердің кесінділері, жазық фигуралар еш бұрмаланусыз проекцияланады (натурал өлшемде).

1.4-суретте  $\pi_i$  проекциялар жазықтығына параллель  $ABC$  үшбұрышының параллель проекциясы көрсетілген.

$$|AA_i| \parallel |BB_i| \parallel |CC_i|,$$

$$|AA_i| = |BB_i| = |CC_i| \text{ болғандықтан,}$$

$$|AC| = |A_i C_i|, |AB| = |A_i B_i|, |BC| = |B_i C_i|.$$

$$\text{Сондықтан } \Delta A_i B_i C_i = \Delta ABC.$$

### 1.3. Тік бұрыштап проекциялау

Егер параллель проекцияның  $s$  бағыты  $\pi_i$  проекциялар жазықтықтығына перпендикуляр болса, онда проекциялау тікбұрышты (ортогональ) деп аталады. Параллель проекциялаудың

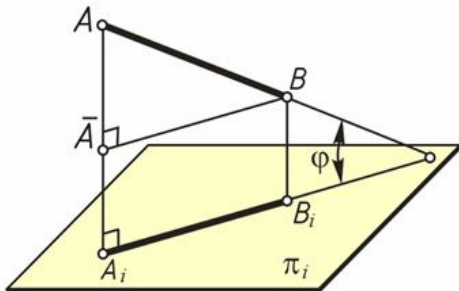
барлық қасиеттері тік бұрыштап проекциялау әдісіне әділ болады. Тікбұрышты проекцияның қосымша қасиеті:

1. Тікбұрыштап проекциялауда кесінді проекциясының ұзындығы сол кесінді ұзындығын оның проекциялар жазықтығына келбеулік бұрышының косинусына көбейткенге тең:

$$|A_i B_i| = |AB| \cos \varphi,$$

мұндағы  $\varphi$  -  $AB$  түзуі мен  $\pi_i$  проекциялар жазықтығы арасындағы бұрыш (1.5-сурет).

*Тікбұрышты үшбұрыш ережесі.*  $AB$  кесіндісінің ұзындығы тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тең, оның бір катеті кесіндінің тікбұрышты проекциясына тең, ал екінші катеті – кесінді ұштарының проекциялар жазықтығына дейінгі арақашықтықтарының айырымына тең.

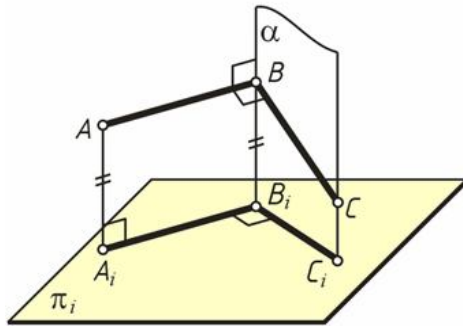


1.5-сурет

Егер тікбұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель болса, ал екінші қабырғасы перпендикуляр болмаса, онда тікбұрыш осы проекциялар жазықтығына натурал шамасымен проекцияланады. (1.6-сурет).

$ABC$  тікбұрышының  $AB$  қабырғасы  $\pi_i$  проекциялар жазықтығына параллель болсын, ал  $BC$  қабырғасы  $\pi_i$  проекциялар жазықтығына перпендикуляр болмасын.  $AB \parallel \pi_i$ ,  $BB_i \perp \pi_i$  болғандықтан  $AB \perp BB_i$  болады. Шарт бойынша  $AB \perp BC$  болғандықтан  $AB \perp \alpha (BC \cap BB_i)$  болады.  $AB \parallel A_i B_i$ , сондықтан  $A_i B_i \perp \alpha$ . Бұдан  $A_i B_i$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығындағы кез келген түзуге

перпендикуляр екені, соның ішінде  $B_iC_i$  түзуіне де перпендикуляр болатыны шығады, яғни  $AB_i \perp B_iC_i$ . Яғни, тікбұрышты проекциялауда тікбұрыш тікбұрышқа проекциялануы үшін оның бір қабырғасының проекциялар жазықтығына параллель болуы, ал екінші қабырғасының перпендикуляр болмауы қажетті және жеткілікті.



1.6-сурет

Егер фигураның кескіні арқылы оның пішінін, өлшемін және кеңістіктегі орнын анықтай алсақ, ондай сызбаны қайтымды деп атайды. Инженерлік тәжірибеде мынадай қайтымды сызбалар кеңінен қолданылады: Монж эпюрі, аксонометрия, сызықтық перспектива, сандық белгілері бар проекциялар.

**Бақылау сұрақтары:**

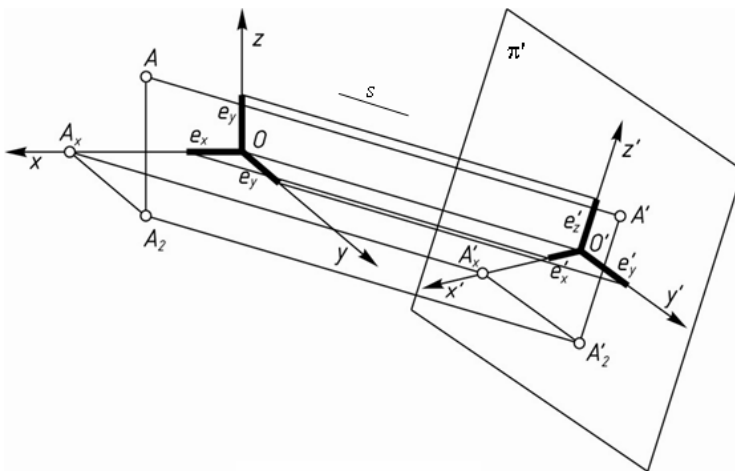
1. Сызба геометрия пәні нені оқытады?
2. Центрілік проекцияның қасиеттерін атаңыз.
3. Параллель проекцияның қасиеттерін атаңыз.
4. Проекциялау әдісінің қасиеттерін атаңыз.
5. Қандай кескіндерді қайтымды деп атайды?
6. Тікбұрыштың тікбұрышты проекциясы туралы теореманы тұжырымдаңыз.
7. Кесіндінің нақты шамасын анықтаудың тікбұрышты үшбұрыш ережесін тұжырымдаңыз.

## 2. АКСОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОЕКЦИЯЛАР

### 2.1. Негізгі ұғымдар

АксонOMETриялық проекциялар объектіні бір проекциялар жазықтығына параллель проекциялау арқылы алынады.

Кеңістікте тік бұрышты натурал координаталар жүйесін және сол жүйеге қатысты орны анықталған  $A$  нүктесін таңдап алайық (2.1-сурет).



2.1-сурет

Барлық координаталар осьтері үшін өлшем бірлігі ретінде  $e$  кесіндісін - натурал масштабы қабылдаймыз. Бұл кесіндіні әрбір оське  $O$  нүктесінен – координаталар басынан өлшеп саламыз:

$$e_x = e_y = e_z = e.$$

АксонOMETриялық проекцияны алу үшін  $s$  проекциялау бағыты мен  $\pi'$  проекция жазықтығын қабылдаймыз.  $\pi'$  - аксонOMETриялық проекциялар жазықтығы.  $A$  нүктесі мен натурал координаталар жүйесін  $s$  проекциялау бағытымен  $\pi'$  жазықтығына параллель проекциялаймыз.  $\pi'$  жазықтығындағы проекцияларды аксонOMETриялық деп атаймыз.

$O'x'y'z'$  - аксонометриялық координаталар жүйесі.

$A' - A$  нүктесінің аксонометриялық проекциясы.

Натурал масштабтардың  $e'_x, e'_y, e'_z$  проекциялары аксонометриялық масштабтар деп аталады. Жалпы жағдайда олар  $e$  бірлік кесіндісіне және өзара тең болмайды.  $e'_x, e'_y, e'_z$  кесінділерін аксонометриялық осьтер бойынша өлшем бірліктері ретінде қабылдаймыз.

$A$  нүктесінің  $A'$  аксонометриялық проекциясын салу үшін оның  $xOy$  жазықтығындағы (немесе  $xOz, yOz$ )  $A_2$  тік бұрышты проекциясының  $A'_2$  проекциясын салу керек.  $A'_2$  нүктесі  $A$  нүктесінің екінші проекциясы деп аталады.  $A$  нүктесінің  $Oxyz$  координаталар жүйесіне қатысты орны оның  $OA_xA_2A$  натурал координаттық сызығымен анықталады.  $A$  нүктесінің  $A'$  аксонометриялық проекциясы оның  $O'A'_xA'_2A'$  аксонометриялық координаттық сынығымен анықталады.  $A$  нүктесінің натурал координаталары натурал бірлік кесінділердің көмегімен анықталады:

$$x_A = \frac{|OA_x|}{e_x}, y_A = \frac{|A_xA_2|}{e_y}, z_A = \frac{|A_2A|}{e_z}.$$

Параллель проекциялауда параллель түзу кесінділерінің қатынасы сақталатындықтан  $A$  нүктесінің аксонометриялық координаталарының сандық мәні оның натурал координаталарына тең болады:

$$x'_A = \frac{|O'A'_x|}{e'_x} = x_A, y'_A = \frac{|A'_xA'_2|}{e'_y} = y_A,$$

$$z'_A = \frac{|A'_2A'|}{e'_z} = z_A.$$

Жалпы жағдайда  $Ox, Oy, Oz$  натурал координаталар осьтері  $\pi'$  аксонометриялық проекциялар жазықтығына көлбеу орналасады. Сондықтан  $OA_xA_2A$  натурал координаттық сынығының кесінділері  $\pi'$  жазықтығына әр түрлі бұрмаланып проекцияланады.

Аксонетриялық масштабтардың натурал масштабтарға қатынастары аксонетриялық осьтер бойынша *бұрмалану коэффициенттері* немесе *көрсеткіштері* деп аталады:

$$p = \frac{e'_x}{e_x} - x' \text{ осі бойынша бұрмалану коэффициенті,}$$

$$q = \frac{e'_y}{e_y} - y' \text{ осі бойынша бұрмалану коэффициенті,}$$

$$r = \frac{e'_z}{e_z} - z' \text{ осі бойынша бұрмалану коэффициенті.}$$

Проекциялау бағытына байланысты аксонетриялық проекциялар қиғаш бұрышты немесе тікбұрышты болады. Егер проекциялау бағыты аксонетриялық проекциялар жазықтығына перпендикуляр болса, онда аксонетриялық проекция *тікбұрышты* деп аталады. Проекциялау бағыты проекциялар жазықтығымен тік бұрыш жасамаса, онда аксонетриялық проекциялар *қиғашбұрышты* деп аталады.

Бұрмалану көрсеткіштеріне байланысты аксонетриялық проекциялар үш топқа бөлінеді:

1) триметриялық – бұрмалану көрсеткіштері әр түрлі болады:  $p \neq q \neq r$ ,

2) **диметриялық** – бұрмалану көрсеткіштерінің екеуі тең болады:  $p = r \neq q$ ,

3) изометриялық – барлық көрсеткіштері тең болады:  $p = q = r$ .

**Аксонетрияның негізгі теоремасы.** Координаталық осьтердің аксонетриялық проекциялар жазықтығына қатысты орны мен проекциялау бағытын өзгертсе, аксонетриялық осьтердің өзара орналасулары мен бұрмалану көрсеткіштері де өзгереді. Бұл байланыс аксонетрияның негізгі теоремасында (Польке теоремасы) тұжырымдалады:

*Жазықтықтағы бір нүктеден шығатын қалауымызша алынған үш кесінді, кеңістіктегі бір нүктеден шығатын өзара перпендикуляр тең кесінділердің параллель проекциялары болады.*

Бұл теореманы алғаш рет неміс геометрі К. Польке 1853 жылы ұсынған.

Аксонетрияның негізгі теоремасына сүйене отырып, аксонетриялық осьтер мен бұрмалану көрсеткіштерін қалауымызша алуға болады деуге болады.

Бұрмалану көрсеткіштері мен проекциялау бағытының арасында мынадай байланыс орындалады:

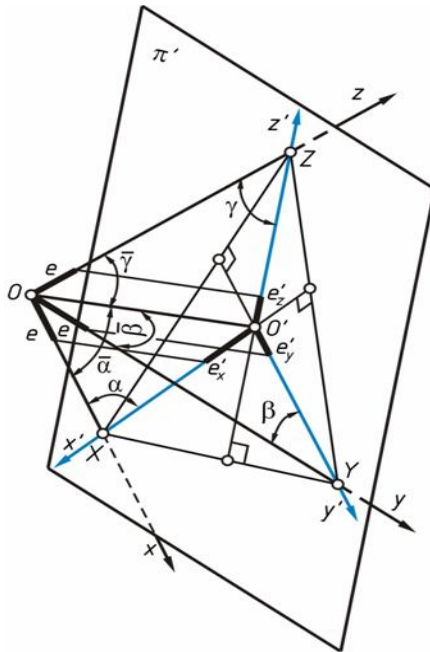
$$p^2 + q^2 + r^2 = 2 + ctg^2 \varphi,$$

мұндағы  $\varphi$  - проекциялау бағытының аксонетриялық проекциялар жазықтығымен жасайтын бұрышы.

Тік бұрышты аксонетрия үшін  $\varphi = 90^\circ$ , сондықтан  $p^2 + q^2 + r^2 = 2$ .

Бұл формула *тікбұрышты аксонетрияның негізгі формуласы* деп аталады.

Тік бұрышты координаталар жүйесі  $\pi'$  аксонетриялық проекциялар жазықтығымен сүйір бұрышты үшбұрыш бойымен қиылысады.  $XYZ$  үшбұрышы *іздер үшбұрышы* деп аталады (2.2-сурет).



2.2-сурет

$O'x', O'y', O'z'$  аксонометриялық осьтері  $XYZ$  үшбұрышының биіктіктері болып табылады.

Проекциялау бағыты аксонометриялық проекциялар жазықтығына перпендикуляр ( $s \perp \pi$ )' болғандықтан  $OO'x$ ,  $OO'y$ ,  $OO'z$  үшбұрыштары тікбұрышты болады. Сондықтан

$$\bar{\alpha} = 90^\circ - \alpha, \bar{\beta} = 90^\circ - \beta, \bar{\gamma} = 90^\circ - \gamma,$$

мұндағы  $\alpha, \beta, \gamma$  -  $x, y, z$  осьтерінің  $\pi'$  аксонометриялық проекциялар жазықтығымен жасайтын бұрыштар.

$OO'$  түзуінің бағыттаушы бұрыштары косинустарының квадраттарының қосындысы 1-ге тең болады:

$$\cos^2 \bar{\alpha} + \cos^2 \bar{\beta} + \cos^2 \bar{\gamma} = 1,$$

мұндағы  $\cos \bar{\alpha} = \sin \alpha$ ,  $\cos \bar{\beta} = \sin \beta$ ,  $\cos \bar{\gamma} = \sin \lambda$ , сондықтан  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$  болады

$$\text{немесе } (1 - \cos^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \beta) + (1 - \cos^2 \gamma) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

$$\cos \alpha = \frac{|e'_x|}{|e|} = p, \cos \beta = \frac{|e'_y|}{|e|} = q, \cos \lambda = \frac{|e'_z|}{|e|} = r.$$

Тікбұрышты аксонометрияда бұрмалану коэффициенттері  $0 \leq p, q, r \leq 1$  болады.

## 2.2. Стандарттық аксонометриялық проекциялар

МСТ 2.317-69 – «Аксонометриялық проекциялар» стандарты аксонометриялық проекциялардың бес түрін тағайындайды:

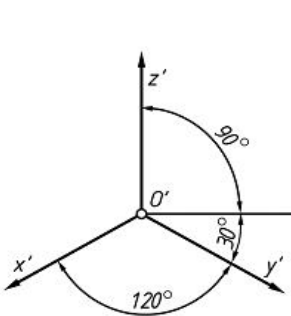
1. Тікбұрышты изометрия;

2. Тікбұрышты диметрия;
3. Қиғашбұрышты фронталь диметрия;
4. Қиғашбұрышты фронталь изометрия;
5. Қиғашбұрышты горизонталь изометрия.

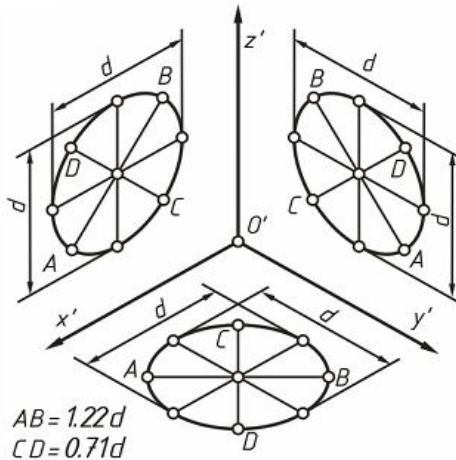
### 2.2.1. Тікбұрышты изометрия

Тікбұрышты изометриялық проекцияда барлық бұрмалану көрсеткіштері тең, яғни  $p = q = r$ .

Аксонометриялық проекциялар жазықтығы барлық координаталар осьтеріне бірдей көлбеу орналасады. Бұл жағдайда іздер үшбұрышы теңқабырғалы болады.



2.3-сурет



2.4-сурет

$p^2 + q^2 + r^2 = 2$  теңдігіне  $q$  мен  $r$ -дің орнына  $p$  -ді қойсақ,  $3p^2 = 2$  болады.

$$\text{Бұдан } p = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,82.$$

Тікбұрышты изометрияда  $O'z'$  осін тік орналастырады, ал  $O'x'$  және  $O'y'$  осьтері  $O'z'$  осімен  $120^\circ$  бұрыш жасайды (2.3-сурет). Аксонометриялық проекцияларды бұрмалану

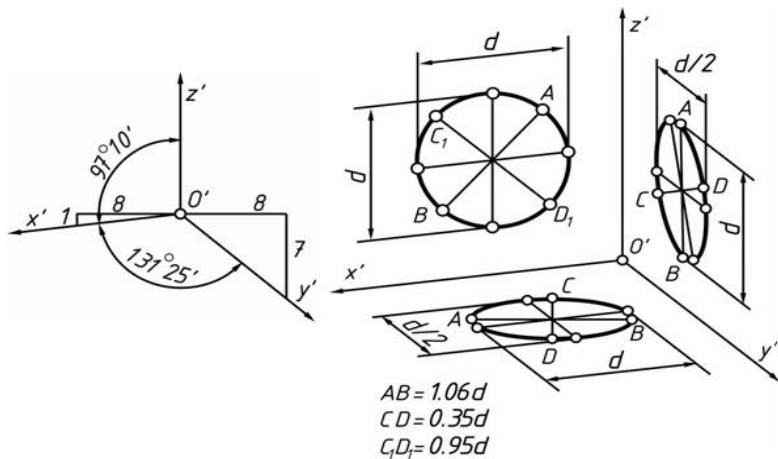
коэффициенттерін ескере отырып салу кезінде объектінің қысқартылған параметрлерін есептеуге тура келеді. Кеңістіктегі кез келген нүктенің тікбұрышты изометриялық проекциясын салу үшін оның координаталарын 0,82-ге көбейту керек. Егер бұрмалану көрсеткіштерінің үлкенін 1-ге теңестіріп, ал қалғандарын сәйкесінше үлкейтсе, салу жұмыстары едәуір жеңілдейді. Бұл коэффициенттерді *келтірілген бұрмалану коэффициенттері* деп атайды.

Іс жүзінде  $0,82 \approx 1$  деп алады. Бұл жағдайда кескін 1,22-ге үлкейеді.

Координаталар жазықтықтарындағы және оларға параллель жазықтықтардағы шеңберлер эллипс түрінде проекцияланады (2.4-сурет).  $AB$  – эллипстің үлкен осі,  $CD$  – эллипстің кіші осі.

### 2.2.2. Тікбұрышты диметрия

Тікбұрышты диметрияда екі ось бойынша бұрмалану көрсеткіштері бірдей, ал үшінші ось бойынша өзгеше болады:  $p = r \neq q$ .



2.6-сурет

Аксометриялық проекция жазықтығы екі координаталық осьтерге бірдей көлбейді. Бұл жағдайда іздер үшбұрышы тең

бүйірлі болады. Үшінші ось бойынша бұрмалану көрсеткіші екі есе кіші болсын, яғни:

$$q = \frac{p}{2}.$$

$$\text{Сонда } p^2 + p^2 + \frac{p^2}{4} = 2 \text{ немесе } 9p^2 = 8.$$

$$\text{Бұдан } p = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94. \quad q = \frac{p}{2} \approx 0,47.$$

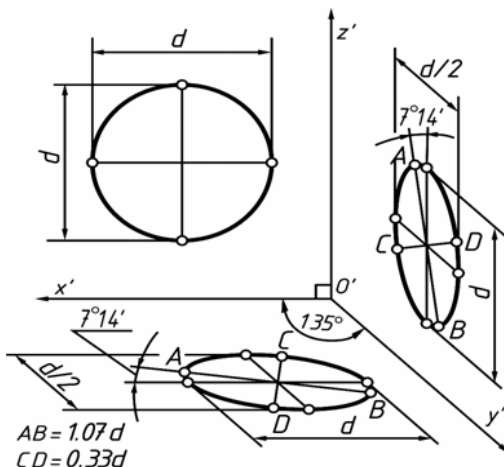
Тікбұрышты диметрияда  $O'z'$  осін тік орналастырады, ал  $O'x'$  осі  $O'z'$  осімен  $97^\circ 10'$  бұрыш жасайды.  $O'y'$  осі  $O'z'$  осімен  $131^\circ 25'$  бұрыш жасайды (2.3-сурет).  $O'x'$  және  $O'z'$  осьтері бойынша бұрмалау коэффициентін 1-ге,  $O'y'$  осі бойынша 0.5-ке тең етіп алады. Координаталар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекцияларының орналасуы 2.6-суретте көрсетілген. Бұл шеңберлердің проекциялары эллипстер болады, ал эллипстердің кіші осьтері  $CD$  сәйкес аксонометриялық осьтерінің бағытына параллель, ал үлкен осьтері  $AB$  перпендикуляр болады.

### 2.2.3. Қиғашбұрышты фронталь диметриялық проекция

Сызбаларды орындау кезінде координата жазықтықтарының біреуін  $\pi'$  жазықтығына параллель етіп алған қолайлы болады. Бұл жағдайда осы координата жазықтығындағы және оған параллель жазықтықтардағы түзулер, бұрыштар, шеңберлер еш бұрмаланусыз проекцияланады. Тікбұрышты проекциялауды бұл мақсатта қолдана алмаймыз, өйткені бір координаталар жазықтығын аксонометрия жазықтығына параллель етіп алсақ,  $\pi'$  жазықтығына перпендикуляр координата осі нүктеге проекцияланады. Сондықтан қиғашбұрышты проекциялауды қолданамыз.

Қиғашбұрышты фронталь диметриялық проекцияда  $xOz$  жазықтығы  $\pi'$  жазықтығына параллель болады. Сонда  $O'x'$  және  $O'z'$  осьтері өзара перпендикуляр болады, ал  $p$  және  $r$  бұрмалану коэффициенттері 1-ге тең болады.  $O'y'$  аксонометриялық осі кез

келген бағытта орналасуы мүмкін. МСТ 2.317-69\* стандарты бойынша  $O'y'$  аксонометриялық осі  $x'O'z'$  бұрышының биссектрисасы бойымен жүргізіледі.  $O'y'$  осі бойынша бұрмалану коэффициенті 0,5-ке тең болады. Қиғашбұрышты фронталь диметрияның аксонометриялық осьтері мен координаталар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекцияларының орналасуы 2.7-суретте көрсетілген.

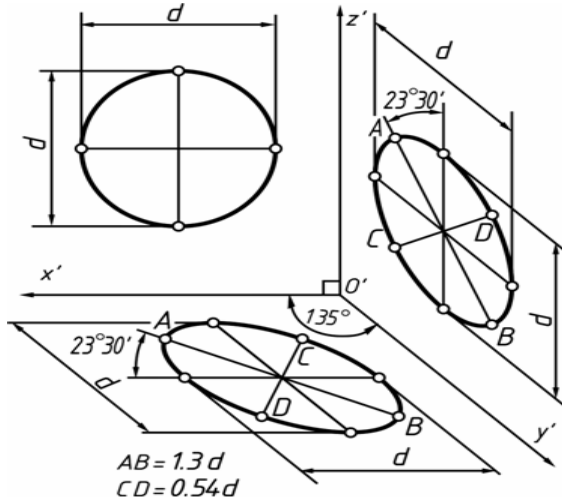


2.7-сурет

$xOz$  жазықтығына параллель шеңбердің проекциясы шеңбер болады.  $xOy$ ,  $yOz$  жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекциялары эллипстер болады. Эллипстердің үлкен диаметрі  $1,07d$ , ал кіші диаметрі  $0,33d$  болады.

#### 2.2.4. Қиғашбұрышты фронталь изометриялық проекция

Қиғашбұрышты фронталь изометрияда  $xOz$  жазықтығы  $\pi'$  жазықтығына параллель болады, проекциялау бағыты  $\pi'$  жазықтығымен  $45^\circ$  бұрыш жасайды. Аксонометриялық  $O'z'$  осін тік орналастырады,  $O'y'$  аксонометриялық осі  $x'O'z'$  бұрышының биссектрисасы бойымен жүргізіледі (2.8-сурет).

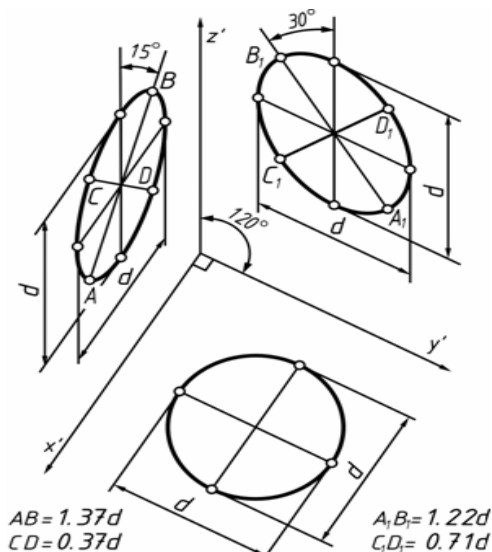


2.8-сурет

Аксонетриялық осьтер бойынша бұрмалау коэффициентін 1-ге тең етіп алады. Координаталар жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекцияларының орналасуы 2.8-суретте көрсетілген.  $xOz$  жазықтығына параллель шеңбердің проекциясы шеңбер болады.  $xOy$ ,  $yOz$  жазықтықтарына параллель шеңберлердің проекциялары эллипстер болады. Эллипстердің үлкен диаметрі  $1,3d$ , ал кіші диаметрі  $0,54d$  болады.

### 2.2.5. Қиғашбұрышты горизонталь изометриялық проекция

Қиғашбұрышты горизонталь изометрияда  $xOy$  жазықтығы  $\pi'$  жазықтығына параллель болады. Сондықтан ол жазықтықтағы және оған параллель жазықтықтардағы түзулер, бұрыштар, шеңберлер бұрмаланусыз проекцияланады. Аксонетриялық  $O'z'$  осін тік орналастырады,  $O'y'$  аксонетриялық осі  $O'z'$  осімен  $120^\circ$  бұрыш жасайды.  $O'x'$  және  $O'y'$  осьтерінің арасындағы бұрыш тік болады (2.9-сурет).



2.9-сурет

Аксонетриялық осьтер бойынша бұрмалау коэффициентін 1-ге тең етіп алады.  $xOy$  жазықтығына параллель шеңбердің проекциясы шеңбер болады.  $xOz$  жазықтығына параллель шеңбердің проекциясы эллипс болады. Оның үлкен диаметрі  $1,37d$ , ал кіші диаметрі  $0,37d$  болады.  $yOz$  жазықтығына параллель шеңбердің проекциясы болатын эллипстің үлкен диаметрі  $1,22d$ , ал кіші диаметрі  $0,71d$  болады.

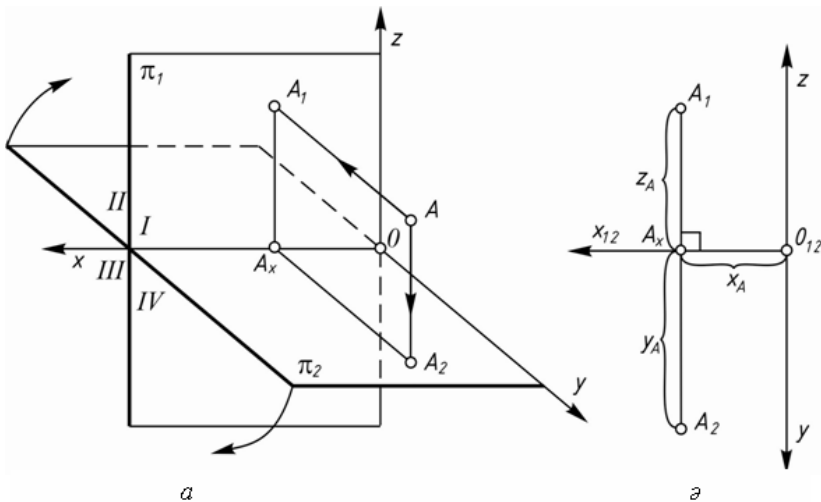
**Бақылау сұрақтары:**

1. Қандай проекцияларды аксонетриялық деп атаймыз?
2. Аксонетриялық проекциялардың түрлерін атаңыз.
3. Бұрмалану коэффициенті деп нені атаймыз?
4. Аксонетрияның негізгі теоремасы – Польке теоремасын айтыңыз.
5. Тік бұрышты изометрия мен диметрияда ось бағыттары бойынша бұрмалану коэффициенттерін атаңыз.

### 3. МОНЖ ЭПЮРИ. НҮКТЕНІҢ, ТҮЗУДІҢ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ СЫЗБАЛАРЫ

#### 3.1. Монж эпюрі. Нүктенің сызбасы

**Монж эпюрі** – қайтымды сызбаның негізгі түрі. Француз математигі және инженері *Гаспар Монж (1746-1818 жж.)* заттардың кескіндерін салуға байланысты сол уақытқа дейін жиналған тәжірибелер мен білімдерді жүйеге келтіріп, жалпылап, олардың сызбаларын екі немесе үш өзара перпендикуляр проекциялар жазықтығына тік бұрыштап проекциялау арқылы алуды ұсынды.



3.1-сурет

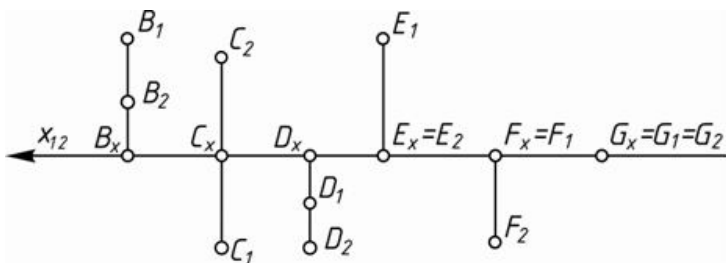
Алдымен екі өзара перпендикуляр болатын проекциялар жазықтықтарына проекциялауды қарастырайық (3.1 а-сурет). Бақылаушыға қарсы орналастырылған  $\pi_1$  вертикаль жазықтығын *фронталь* проекциялар жазықтығы деп аталады.  $\pi_2$  проекциялар жазықтығын горизонталь етіп орналастырады. Оны *горизонталь* проекциялар жазықтығы деп атайды.  $\pi_1$  және  $\pi_2$  проекциялар жазықтықтарының қиылысу түзуі проекциялар осі деп аталады.  $\pi_1$  және  $\pi_2$  жазықтықтары кеңістікті *ширек* деп аталатын

4 бөлікке бөледі.  $A$  нүктесінің  $\pi_1$  және  $\pi_2$  проекциялар жазықтықтарындағы  $A_1$  және  $A_2$  тікбұрышты проекциялары оның фронталь және горизонталь проекциялары деп аталады.

$\pi_2$  жазықтығын  $x$  осінен айналдырып,  $\pi_1$  жазықтығымен беттестірейік. Сонда пайда болған кескін *Монж эпюрі* деп аталады (3.1 ә-сурет). Эпюрде  $A$  нүктесінің  $A_1$  және  $A_2$  проекциялары  $x$  осіне перпендикуляр түзудің бойында орналасады.  $A_1A_2$  түзуі *байланыс сызығы* деп аталады. Бұндай сызба қайтымды болып табылады, себебі онда  $A$  нүктесінің координаталарын анықтауға болады.

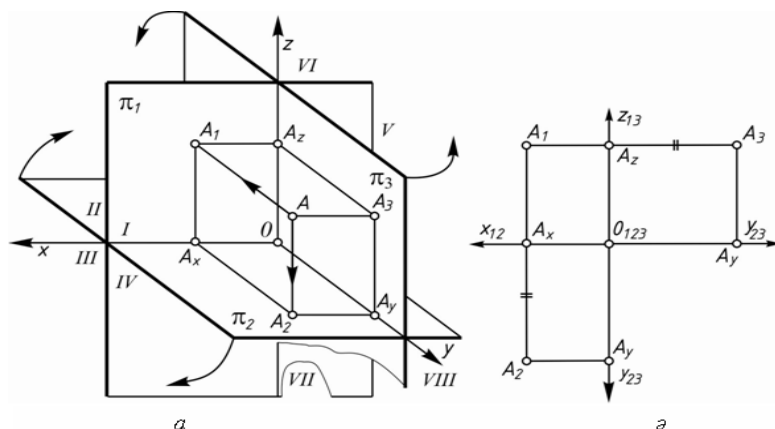
3.1-суреттегі  $A$  нүктесі бірінші ширекте орналасқан.

3.2-суреттегі эпюрде 2-ширекте орналасқан  $B$  нүктесінің, 3-ширекте орналасқан  $C$  нүктесінің, 4-ширекте орналасқан  $D$  нүктесінің проекциялары кескінделген.  $E$  нүктесі  $\pi_1$  жазықтығына тиісті, ал  $F$  нүктесі  $\pi_2$  жазықтығына тиісті, ал  $G$  нүктесі  $x$  осінде жатыр.



3.2-сурет

Монж эпюрінде  $x$  осіне перпендикуляр үшінші  $\pi_3$  проекциялар жазықтығын қосайық (3.3 а-сурет). Бұл жазықтық *профиль* проекциялар жазықтығы деп аталады.  $\pi_1 \cap \pi_2 = x$  – абсциссалар осі,  $\pi_2 \cap \pi_3 = y$  – ординаталар осі,  $\pi_1 \cap \pi_3 = z$  – аппликатаалар осі деп аталады. Осьтердің оң мәнді бағыттары нұсқамалармен көрсетілген.  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  жазықтықтары кеңістікті *октант* деп аталатын 8 бөлікке бөледі. 1-4 октанттар  $\pi_3$  проекциялар жазықтығының сол жағында орналасады. 5-8 октанттар  $\pi_3$  проекциялар жазықтығының оң жағында орналасады.



3.3-сурет

Бірінші октантта орналасқан  $A$  нүктесін  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  проекциялар жазықтықтарына тікбұрыштап проекциялайық.  $A$  нүктесінің  $\pi_3$  проекциялар жазықтығындағы  $A_3$  тікбұрышты проекциясы оның профиль проекциясы деп аталады.  $\pi_2$  жазықтығын  $x$  осінен айналдырып, ал  $\pi_3$  жазықтығын  $z$  осінен айналдырып  $\pi_1$  жазықтығымен беттестіреміз.  $A$  нүктесінің  $A_1$  және  $A_2$  проекциялары  $x_{12}$  осіне перпендикуляр байланыс сызығының бойында, ал  $A_1$  және  $A_3$  проекциялары  $z_{13}$  осіне перпендикуляр байланыс сызығының бойында орналасады.  $A$  нүктесінің  $A_2$  горизонталь проекциясынан  $x_{12}$  осіне дейінгі қашықтық  $A_3$  профиль проекциясынан  $z_{12}$  осіне дейінгі қашықтыққа тең болады. Нүктенің екі проекциясы берілсе, оның үшінші проекциясын табуға болады.

Бірінші октантта орналасқан нүктенің барлық координаталары оң мәнді болады. Әр түрлі октанттардағы нүктелердің координаталарының мәндері қандай болатыны 3.1 – кестеде көрсетілген.

3.1-кесте

| Октанттар | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|-----------|---|----|-----|----|---|----|-----|------|
| $x$       | + | +  | +   | +  | - | -  | -   | -    |
| $y$       | + | -  | -   | +  | + | -  | -   | +    |
| $z$       | + | +  | -   | -  | + | +  | -   | -    |

### 3.2. Түзудің сызбасы

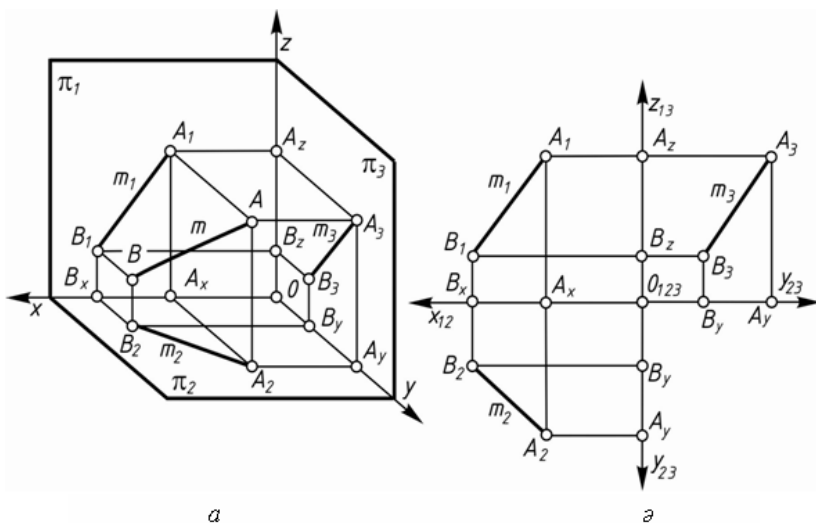
$m$  түзуі  $A$  және  $B$  екі нүкте арқылы анықталатындықтан оның проекциялары осы нүктелердің проекцияларымен анықталады (3.4-сурет). Түзуді проекциялаудағы өзара меншіктілік қасиеті сақталу үшін, түзу проекциялары нүктелердің проекциялары арқылы өтеді:  $m_1(A_1, B_1)$ ;  $m_2(A_2, B_2)$ ;  $m_3(A_3, B_3)$ .

**Проекциялар жазықтықтарына қатысты олардың біреуіне де параллель болмайтын түзу жалпы жағдайдағы түзу деп аталады.** 3.4-суретінде жалпы жағдайдағы түзу көрсетілген.

**Проекциялар жазықтығының біреуіне параллель түзу деңгейлік түзу деп аталады.** Горизонталь проекциялар жазықтығына параллель  $h$  түзуі горизонталь түзу (горизонталь) деп аталады (3.5 а-сурет).

Фронталь проекциялар жазықтығына параллель  $f$  түзуі фронталь түзу (фронталь) деп аталады (3.5 ә-сурет).

Профиль проекциялар жазықтығына параллель  $p$  түзуі профиль түзу деп аталады (3.5 б-сурет).

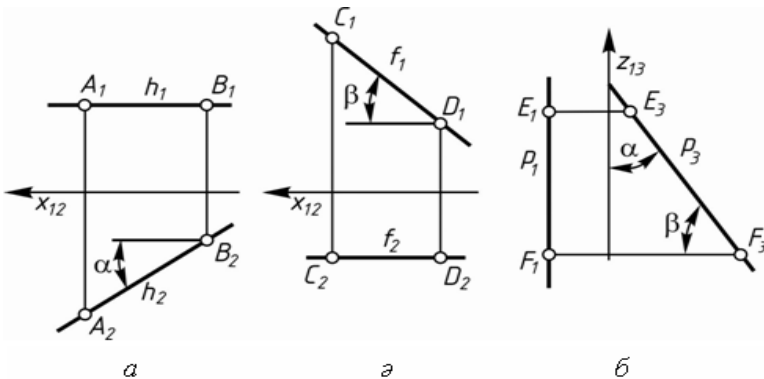


3.4-сурет

Деңгейлік түзудің кесінділері сәйкес проекциялар жазықтығына бұрмаланусыз проекцияланады, яғни  $|AB| = |A_2B_2|$ ;  $|CD| = |C_1D_1|$ ;  $|EF| = |E_3F_3|$ .

Горизонталь түзудің  $h_2$  проекциясының  $x_{12}$  осімен жасайтын  $\alpha$  бұрышы оның проекция жазықтығына көлбейтін бұрышы болып табылады:  $\alpha = h_2, \pi_1$ .

Фронталь түзудің  $f_1$  проекциясының  $x_{12}$  осімен жасайтын  $\beta$  бұрышы оның проекция жазықтығына көлбейтін бұрышы болып табылады:  $\beta = f_1, \pi_2$ .



3.5-сурет

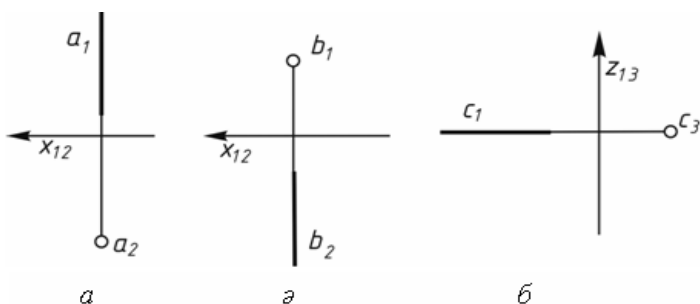
Профиль түзудің  $p_3$  проекциясының  $x_{12}$  осімен жасайтын  $\beta$  бұрышы оның горизонталь проекция жазықтығына көлбейтін бұрышы, ал  $z_{13}$  осімен жасайтын  $\alpha$  бұрышы түзудің фронталь проекция жазықтығымен жасайтын бұрышы болып табылады:

$$\alpha = p_3, \pi_1, \beta = p_3, \pi_2$$

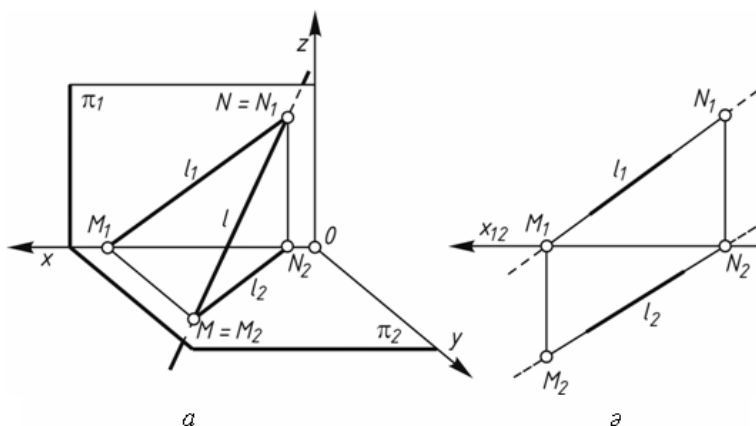
Қандай да бір проекциялар жазықтығына перпендикуляр түзуді проекциялаушы деп атайды. Проекциялаушы түзудің қандай да бір проекциясының нүкте

болуы - оның негізгі белгісі. Проекциялаушы түзу былай деп аталады:

- горизонталь-проекциялаушы, егер ол  $\pi_2$  проекция жазықтығына перпендикуляр болса (3.6 а-сурет);
- фронталь-проекциялаушы, егер ол  $\pi_1$  проекция жазықтығына перпендикуляр болса (3.6 ә-сурет);
- профиль-проекциялаушы, егер ол  $\pi_3$  проекция жазықтығына перпендикуляр болса (3.6 б-сурет).



3.6-сурет



3.7-сурет

**Түзудің іздері.** Түзудің қандай да бір проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктесі оның осы проекция жазықтығындағы ізі деп аталады.

$l$  түзуінің горизонталь  $M = l \cap \pi_2$  ізінің аппликаты нөлге тең, сондықтан оның  $M_1$  фронталь проекциясы  $x_{12}$  осінде жатады (3.7 а-сурет). Сәйкесінше, фронталь іздің  $N = l \cap \pi_1$  ординаты нөлге тең, бұдан шығатыны - оның  $N_2$  горизонталь проекциясы  $x_{12}$  осінде жатады.

$l$  түзуінің  $M$  горизонталь ізін тұрғызу үшін оның фронталь проекциясын  $x_{12}$  осімен қиылысқанша жүргізу қажет және осы нүктеде түзудің горизонталь проекциясымен қиылысқанша оське перпендикуляр тұрғызу қажет (3.7 ә-сурет).  $l$  түзуінің  $N$  фронталь ізін тұрғызу үшін горизонталь проекция мен  $x_{12}$  осінің қиылысу нүктесінен түзудің фронталь проекциясымен қиылысқанша перпендикуляр тұрғызу қажет.

### 3.3. Жазықтықтың сызбасы

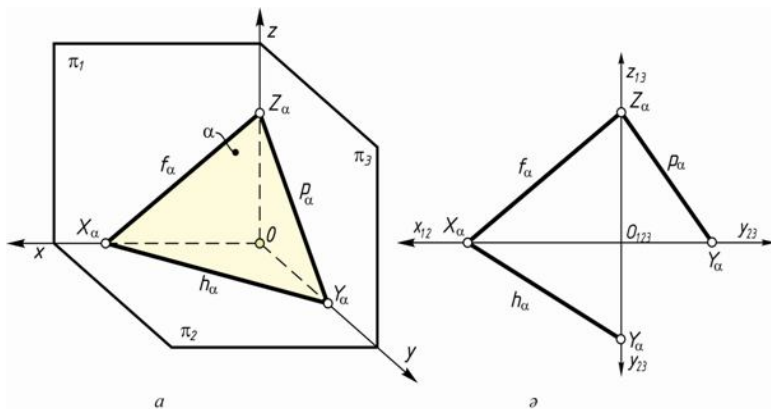
Кеңістікте жазықтықты мынадай тәсілдермен анықтауға болады: бір түзудің бойында жатпаған үш нүкте арқылы (3.8 а-сурет), түзу және одан тыс орналасқан нүкте арқылы (3.8 ә-сурет), екі қиылысушы (3.8 б-сурет) немесе параллель түзулермен (3.8 в-сурет), кез келген жазық фигурамен (3.8 г-сурет). Жазықтықтың берілу тәсілін алдыңғы тәсілдің біреуінен шығарып алуға болады.

Жазықтық іздермен де берілуі мүмкін. **Жазықтықтың іздері** деп жазықтықтың проекциялар жазықтықтарымен қиылысу сызықтарын атаймыз (3.9-сурет).

Жалпы жағдайда жазықтықтың үш ізі болады: горизонталь  $h_\alpha$ , фронталь  $f_\alpha$ , профиль  $p_\alpha$ . Жазықтықтың іздері қосарланып осьтермен жазықтық іздерінің тоғысу нүктелері деп аталатын  $X_\alpha$ ,  $Y_\alpha$ ,  $Z_\alpha$  нүктелерінде қиылысады. Жазықтық іздерінен пайда болған үшбұрыш іздер үшбұрышы деп аталады.

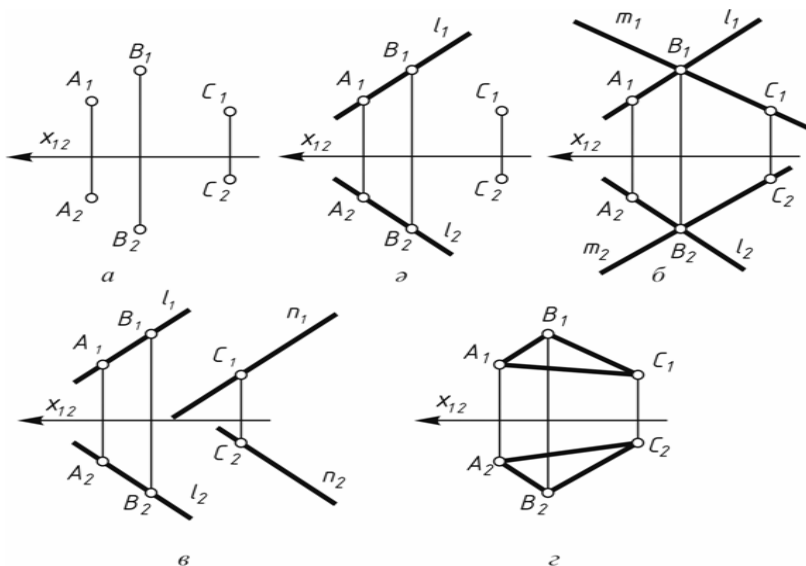
Проекциялар жазықтықтарына қатысты олардың біреуіне де перпендикуляр болмайтын жазықтық *жалпы жағдайдағы жазықтық* деп аталады.

Қандай да бір проекциялар жазықтығына перпендикуляр жазықтық – *проекциялаушы* деп аталады.

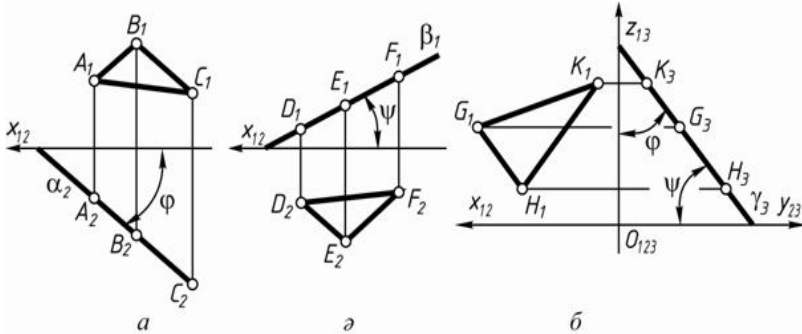


3.9-сурет

Егер  $\alpha(ABC) \perp \pi_2$  болса, онда  $\alpha$  жазықтығы **горизонталь-проекциялаушы** деп аталады (3.10 а-сурет). Горизонталь-проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығы өзінің  $\alpha_2$  горизонталь ізімен толық анықталады. Яғни, бұл жазықтықтың берілуін  $\alpha(\alpha_2)$  түрінде жазуға болады.



3.8-сурет



3.10-сурет

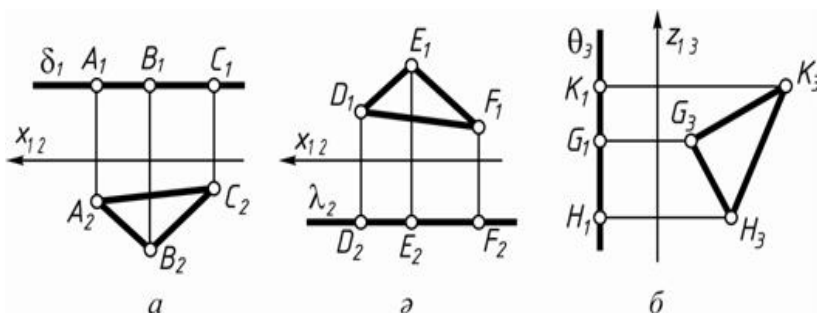
Проекциялаушы жазықтықтардың сызбалары бойынша олардың проекция жазықтықтарымен жасайтын бұрыштарын анықтауға болады. Горизонталь-проекциялаушы  $\alpha(\alpha_2)$  жазықтығының  $\alpha_2$  горизонталь ізінің  $x_{12}$  осімен жасайтын  $\varphi$  бұрышы осы жазықтықтың  $\pi_1$  проекциялар жазықтығына көлбейтін бұрышы болады:  $\varphi = \alpha, \pi_1$ .

Егер  $\beta(DEF) \perp \pi_1$  болса, онда  $\beta$  жазықтығы **фронталь-проекциялаушы** деп аталады (3.10 а-сурет). Фронталь-проекциялаушы  $\beta$  жазықтығы өзінің  $\beta_1$  фронталь ізімен толық анықталады. Яғни, бұл жазықтықтың берілуін  $\beta(\beta_1)$  түрінде жазуға болады. Фронталь-проекциялаушы  $\beta(\beta_1)$  жазықтығының  $\beta_1$  фронталь ізінің  $x_{12}$  осімен жасайтын  $\psi$  бұрышы осы жазықтықтың  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына көлбейтін бұрышы болады:  $\psi = \beta, \pi_2$ .

Егер  $\gamma(GKH) \perp \pi_3$  болса, онда  $\gamma$  жазықтығы **профиль-проекциялаушы** деп аталады (3.10 б-сурет). Профиль-проекциялаушы  $\gamma$  жазықтығы өзінің  $\gamma_3$  профиль ізімен толық анықталады. Яғни, бұл жазықтықтың берілуін  $\gamma(\gamma_3)$  түрінде жазуға болады. Профиль-проекциялаушы  $\gamma(\gamma_3)$  жазықтығының  $\gamma_3$  профиль ізінің  $y_{23}$  осімен жасайтын  $\psi$  бұрышы осы жазықтықтың  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына көлбейтін бұрышы

болады:  $\psi = \gamma, \pi_2$ , ал  $z_{13}$  осімен жасайтын  $\varphi$  бұрышы осы жазықтықтың  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына көлбейтін бұрышы болады:  $\varphi = \gamma, \pi_1$ .

Қандай да бір проекциялар жазықтығына параллель жазықтық *деңгейлік* деп аталады. Деңгейлік жазықтықтарға горизонталь, фронталь және профиль жазықтықтар жатады.



3.11-сурет

Егер жазықтық  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына параллель болса, онда оны **горизонталь жазықтық** дейміз (3.11 а-сурет). Горизонталь жазықтықтың фронталь проекциясы  $x$  осіне параллель түзу болады. Горизонталь жазықтықтағы фигура  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына өзінің нақты шамасын сақтап проекцияланады. Мысалы,  $\delta(\delta_1)$  жазықтығындағы  $ABC$  үшбұрышының  $A_2B_2C_2$  проекциясы оның нақты шамасы болады.

Егер жазықтық  $\pi_1$  проекциялар жазықтығына параллель болса, онда оны **фронталь жазықтық** дейміз (3.11 б-сурет). Фронталь жазықтықтың горизонталь проекциясы  $x$  осіне параллель түзу болады. Фронталь жазықтықтағы фигура  $\pi_1$  проекциялар жазықтығына өзінің нақты шамасын сақтап проекцияланады. Мысалы,  $\lambda(\lambda_2)$  жазықтығындағы  $DEF$  үшбұрышының  $D_1E_1F_1$  проекциясы оның нақты шамасы болады.

Егер жазықтық  $\pi_3$  проекциялар жазықтығына параллель болса, онда оны **профиль жазықтық** дейміз (3.11 в-сурет).

Профиль жазықтықтың фронталь проекциясы  $z$  осіне параллель түзу болады. Профиль жазықтықтағы фигура  $\pi_3$  проекциялар жазықтығына өзінің нақты шамасын сақтап проекцияланады. Мысалы,  $\theta(\theta_1)$  жазықтығындағы  $GHK$  үшбұрышының  $G_3H_3K_3$  проекциясы оның нақты шамасы болады.

**Бақылау сұрақтары:**

1. Қандай түзуді жалпы жағдайдағы түзу деп атаймыз?
2. Дербес жағдайдағы түзулерін атап шығыңыз.
3. Қандай түзулер деңгейлік түзулер деп аталады?
4. Түзудің ізі деп нені атаймыз?
5. Түзудің фронталь және горизонталь іздерін қалай тұрғызамыз?
6. Сызбада жазықтықтардың берілу тәсілдерін көрсетіңіз.
7. Жазықтықтың ізі дегеніміз не?
8. Қандай жазықтықты проекциялаушы деп атаймыз және оның сызбадағы белгілері қандай?
9. Келесі жазықтықтарға сипаттама беріңіз: горизонталь проекциялаушы, фронталь проекциялаушы, профиль проекциялаушы.
10. Қандай жазықтықты деңгейлік жазықтық деп атаймыз?

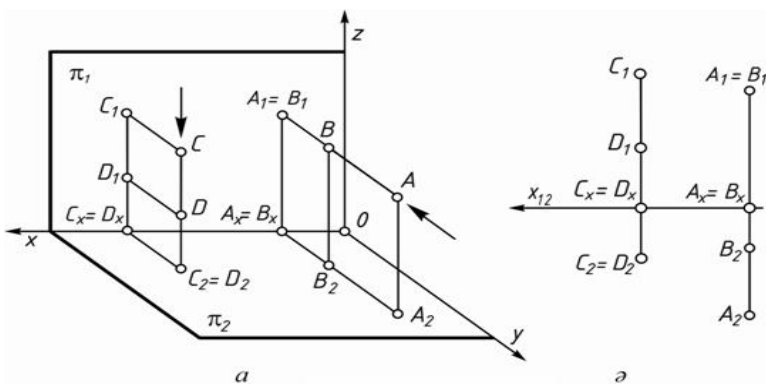
## 4. НЕГІЗГІ ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР

*Негізгі позициялық есептер* деп нүктелердің, түзулердің және жазықтықтардың өзара орналасуын анықтауға арналған есептерді айтамыз. Негізгі позициялық есептер алтау:

- екі нүктенің өзара орналасуы;
- нүкте мен түзудің өзара орналасуы;
- екі түзудің өзара орналасуы;
- түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы;
- нүкте мен жазықтықтың өзара орналасуы;
- екі жазықтықтың өзара орналасуы.

### 4.1. Екі нүктенің өзара орналасуы. Бәсекелес нүктелер

Бір проекциялаушы түзуде орналасқан нүктелерді бәсекелес нүктелер деп айтамыз. Горизонталь проекциялаушы түзудің бойындағы нүктелер горизонталь бәсекелес, фронталь проекциялаушы түзудің бойындағы нүктелер фронталь бәсекелес болады. 4.1 *a*-суретінде  $(AB) \perp \pi_1$ , бұдан шығатыны *A* және *B* нүктелері – фронталь бәсекелес.



4.1-сурет

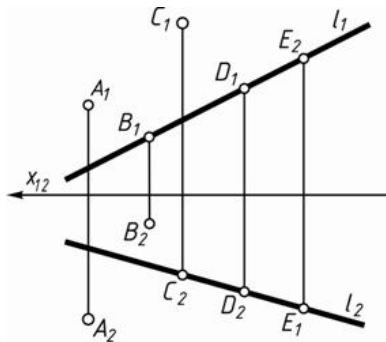
$(CD) \perp \pi_2$ , бұдан шығатыны *C* және *D* – горизонталь бәсекелес. *A* және *B* нүктелерінің проекциялары бойынша фронталь проекцияда *A* нүктесінің көрінетіндігін, ал *C* және *D*

нүктелерінің проекциялары бойынша горизонталь проекцияда  $C$  нүктесінің көрінетіндігін анықтаймыз.

Сызбада көрінетіндікті бәсекелес нүктелер әдісі арқылы анықтайды. 4.1 ә-суретінде  $C$  нүктесі  $D$  нүктесіне қарағанда жоғары орналасқан, сондықтан  $C$  нүктесі горизонталь проекцияда көрінеді.  $A$  нүктесінің ординатасы  $B$  нүктесінің ординатасынан үлкен, яғни  $A$  нүктесі көрерменге жақынырақ орналасқан, сондықтан ол фронталь проекцияда көрінетін болады.

#### 4.2. Нүкте мен түзудің өзара орналасуы

Егер нүктенің проекциялары түзудің аттас проекцияларында жатса, онда ол нүкте осы түзде жатады. 4.2-суретте  $A, B, C, D, E$  нүктелерінің және  $l$  түзуінің проекциялары берілген. Берілген нүктелердің ішінде тек  $D$  нүктесі ғана  $l$  түзуінде жатады, өйткені оның  $D_1$  фронталь проекциясы түзудің  $l_1$  фронталь проекциясында, ал  $D_2$  горизонталь проекциясы түзудің  $l_2$  горизонталь проекциясында жатыр:  $D_1 \in l_1, D_2 \in l_2 \Rightarrow D \in l$ .



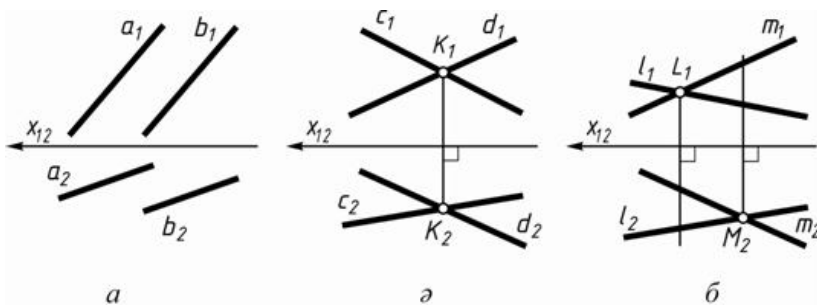
4.2-сурет

### 4.3. Екі түзудің өзара орналасуы

Екі түзу өзара параллель, қиылысатын немесе айқас болуы мүмкін.

Параллель түзулердің аттас проекциялары параллель болады:

$$a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2 \Rightarrow a \parallel b \text{ (4.3 а-сурет).}$$



4.3-сурет

Қиылысатын түзулердің аттас проекциялары қиылысады және қиылысу нүктелері проекциялар осіне перпендикуляр байланыс сызығының бойында орналасады:  $c_1 \cap d_1 = K_1$ ,  $c_2 \cap d_2 = K_2$ ,  $(K_1 K_2) \perp x_{12}$  (4.3, в-сурет).

Түзулердің параллельдігі мен қиылысуының шарттары орындалмаса, онда түзулер өзара айқас болады (4.3 б-сурет). Екі түзудің аттас проекциялары қиылысуы мүмкін, бірақ қиылысу нүктелері проекциялар осіне перпендикуляр байланыс сызығында орналаспауы мүмкін, бұл жағдайда түзулер айқас болады:

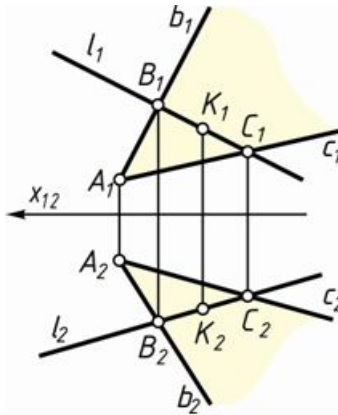
$$l_1 \cap m_1 = L_1, l_2 \cap m_2 = M_2, (L_1 M_2) \not\perp x_{12} \Rightarrow l \div m.$$

#### 4.4. Түзу мен жазықтықтың, нүкте мен жазықтықтың өзара орналасуы

##### 4.4.1. Жазықтықта жататын нүктелер мен түзулер

*Егер түзудің екі нүктесі жазықтыққа тиісті болса, онда түзу осы жазықтықта жатады.*

4.4-суретте  $\alpha(b \cap c)$  жазықтығына тиісті  $l$  түзуі көрсетілген, оның осы жазықтыққа тиісті  $B$  және  $C$  нүктелері бар.



4.4-сурет

*Нүкте берілген жазықтықта жатқан түзуде орналасқан болса, онда нүкте осы жазықтықта жатады.*

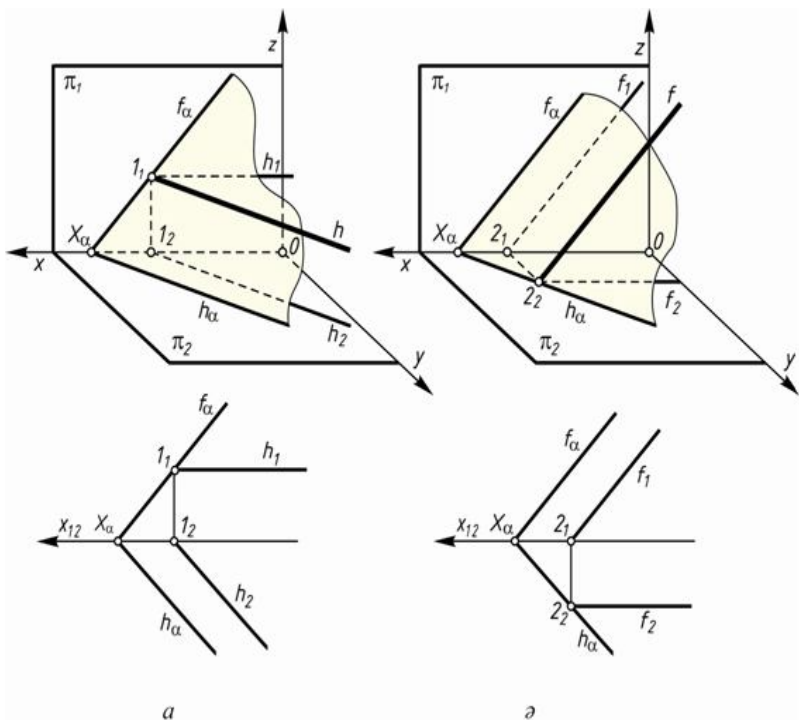
$\alpha(b \cap c)$  жазықтығында  $K$  нүктесін тұрғызу үшін (4.4-сурет), осы  $\alpha(b \cap c)$  жазықтығына тиісті  $l$  түзуін салып, содан кейін сол түзуде  $K$  нүктесін  $l$  түзуіне тиісті етіп белгілеу керек. Бұдан  $K$  нүктесінің  $\alpha(b \cap c)$  жазықтығына тиісті екендігі шығады.

*Жазықтықтың басты түзулері.* Жазықтықта жүргізуге болатын көптеген түзулердің ішінен жазықтықтың басты түзулерін атап өту қажет:

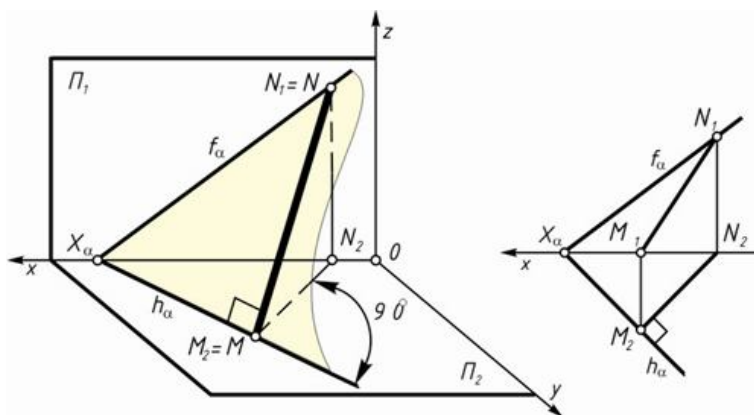
**Жазықтықтың горизонталі** — жазықтыққа тиісті және горизонталь проекциялар жазықтығына параллель түзу (4.5 а-сурет). Горизонтальдің фронталь проекциясы проекциялар осіне параллель болады.

**Жазықтықтың фронталі** — жазықтыққа тиісті және фронталь проекциялар жазықтығына параллель түзу (4.5, ә-сурет). Фронтальдің горизонталь проекциясы проекциялар осіне параллель болады.

**Көлбеулігі ең үлкен түзулер** - берілген жазықтыққа тиісті және жазықтықтың горизонтальдарына (немесе фронтальдарына) перпендикуляр түзулер. 4.6-суретте  $\alpha$  жазықтығының  $MN$  ең үлкен көлбеулік түзуі көрсетілген.



4.5-сурет



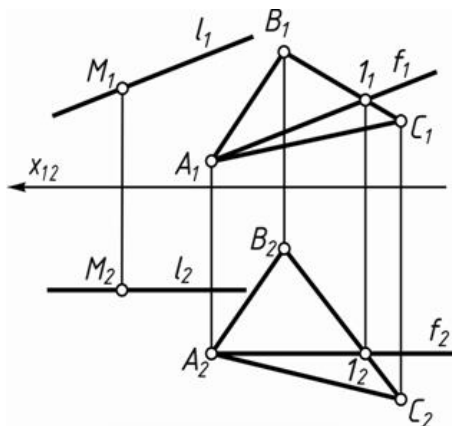
4.6-сурет

Жазықтықтың іздері жазықтықтың басты түзулері болып табылатынын атап кеткен жөн, олар – проекциялар жазықтығымен қосылған горизонталь мен фронталь. Жазықтықтың басты сызықтары көмекші сызықтар ретінде бірқатар есептерді шешуге көмектеседі.

#### 4.4.2. Жазықтыққа параллель түзу

Егер түзу жазықтықта жатқан бір түзуге параллель болса, онда бұл түзу жазықтыққа да параллель болады. Сондықтан  $\alpha$  жазықтығына параллель  $l$  түзуін салу үшін алдымен  $\alpha$  жазықтығында қалауымызша  $m$  түзуін жүргізіп, содан соң  $m$  түзуіне параллель  $l$  түзуін жүргізу керек.

Мысалы,  $M$  нүктесі арқылы  $\alpha(ABC)$  жазықтығына және  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына параллель  $l$  түзуін жүргізу керек (4.7-сурет).



4.7-сурет

Ізделінді  $l$  түзуі фронталь болғандықтан, алдымен  $\alpha(ABC)$  жазықтығының  $f$  фронталін жүргіземіз.  $M_1$  нүктесі арқылы  $f_1$  түзуіне параллель  $l_1$  түзуін, ал  $M_2$  нүктесі арқылы  $f_2$  түзуіне параллель  $l_2$  түзуін жүргіземіз. Сонда  $M$  нүктесі арқылы өтетін  $l$  түзуі  $\alpha(ABC)$  жазықтығының  $f$  фронталіне параллель болады, ендеше  $l$  түзуі  $\alpha$  жазықтығына да,  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына да параллель болады.

#### 4.4.3. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салу

Түзудің жазықтықпен қиылысу есебі – сызба геометрияның маңызды есептерінің бірі болып табылады.

Түзу мен жазықтықтың қиылысуының үш түрлі жағдайын қарастырайық:

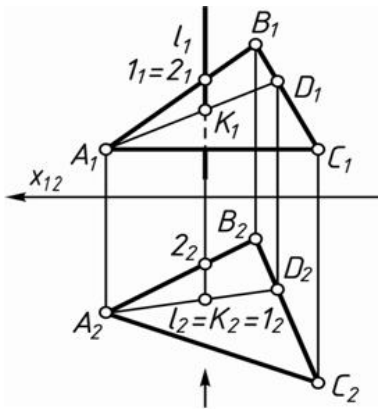
- 1) проекциялаушы түзудің жалпы жағдай жазықтығымен қиылысуы;
- 2) жалпы жағдайдағы түзудің проекциялаушы жазықтықпен қиылысуы;
- 3) жалпы жағдайдағы түзудің жалпы жағдайдағы жазықтықпен қиылысуы.

1. Жалпы жағдайда орналасқан  $\alpha(ABC)$  жазықтығы мен горизонталь-проекциялаушы  $l$  түзуі берілсін (4.8-сурет).  $l$  түзуінің бойындағы барлық нүктелер горизонталь проекция

жазықтығына нүкте болып проекцияланады. Соның ішінде  $l$  түзуінің  $\alpha(ABC)$  жазықтығымен қиылысу  $K$  нүктесінің горизонталь  $K_2$  проекциясы да  $l$  түзуінің  $l_2$  горизонталь проекциясымен беттеседі.  $K$  нүктесінің  $K_1$  проекциясын табу үшін  $K_2$  арқылы  $\alpha(ABC)$  жазықтығында орналасқан кез келген түзудің горизонталь проекциясын жүргіземіз.

Мысалы,  $AD$  түзуінің  $A_2D_2$  проекциясын  $K_2$  арқылы жүргізейік.

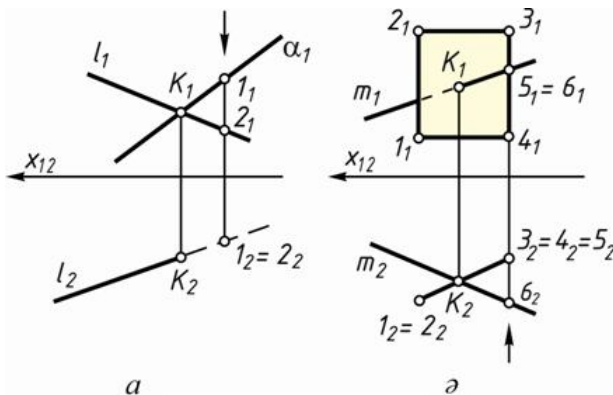
$AD$  түзуінің  $A_1D_1$  проекциясының бойынан табылған  $K_1$  ізделінді нүктенің фронталь проекциясы болады. Сызбадағы көрінетіндікті анықтау үшін бәсекелес нүктелер тәсілін қолданамыз. Фронталь проекциядағы көрінетіндікті 1,2 ( $1_1=2_1$ ) бәсекелес нүктелердің көмегімен анықтаймыз. Мұндағы  $1 \in l$ ,  $2 \in \alpha$ . Горизонталь проекциядан  $l$  нүктесінің көрушіге 2 нүктесінен гөрі жақын орналасқанын көреміз, сондықтан фронталь проекцияда  $l$  түзуінің  $K_1$  нүктесінен жоғары бөлігі көрінетін болады.



4.8-сурет

2. Егер жазықтық проекциялаушы жағдайда болса, онда қиылысу нүктесінің бір проекциясы – проекциялаушы жазықтық ізінің түзудің проекциясымен қиылысу арқылы анықталады да, ал екіншісі – байланыс түзуі арқылы тұрғызылады.

4.9 а-суретте  $l$  түзуінің  $\alpha$  ( $\alpha_1$ ) фронталь-проекциялаушы жазықтығымен қиылысу нүктесі  $K$  табылған. Фронталь проекцияда  $\alpha$  жазықтығы бір түзуге проекцияланғандықтан  $l$  түзуінің фронталь  $l_1$  проекциясының  $\alpha_1$  фронталь ізімен қиылысу нүктесі ізделінді  $K$  нүктесінің  $K_1$  фронталь проекциясы болады:  $K_1 = l_1 \cap \alpha_1$ . Фронталь проекцияда  $l$  түзуінің фронталь  $l_1$  проекциясының  $K_1$  нүктесінен орналасқан сол жақ бөлігі де, оң жақ бөлігі де көрінетін болады. Горизонталь проекцияда көрінетіндікті анықтау үшін  $l$  және  $2$  горизонталь бәсекелес нүктелер қолданылған.  $\alpha$  жазықтығындағы  $l$  нүктесі  $l$  түзуінің  $2$  нүктесінен биік орналасқан. Сондықтан  $l$  түзуінің горизонталь проекциясының  $K_2$  нүктесінен оң жақта орналасқан бөлігі көрінбейтін болады.



4.9-сурет

4.9 б-суретте  $m$  түзуінің  $(1,2,3,4)$  төртбұрышымен берілген горизонталь-проекциялаушы жазықтығымен қиылысу нүктесі табылған. Горизонталь проекцияда төртбұрыштың барлық нүктелерінің проекциялары бір түзудің бойында орналасады. Сол түзудің бойында  $m$  түзуімен қиылысу нүктесінің де  $K_2$  горизонталь проекциясы да орналасады:  $K_2 = m_2 \cap (l_2 3_2)$ . Байланыс сызығының бойымен қиылысу нүктесінің  $K_1$  фронталь проекциясын анықталады. Фронталь проекциядағы көрінетіндік 5 және 6 фронталь бәсекелес нүктелердің көмегімен анықталған.  $m$  түзуінің бойындағы 6 нүктесінің горизонталь проекциясы 5

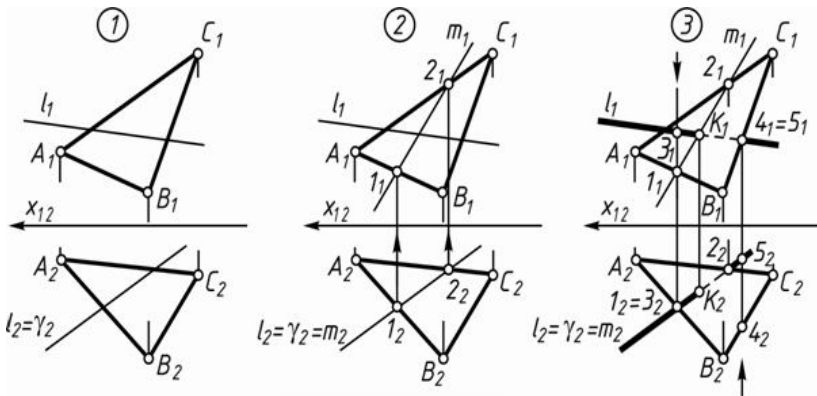
нүктесінің горизонталь проекциясынан төменірек орналасқан, сондықтан фронталь проекцияда 5 нүктесі 6 нүктесінің тасасында болып көрінбейді. Ендеше  $m$  түзуінің фронталь проекциясының  $K_1b_1$  бөлігі көрінетін болады.

Егер жазықтық жалпы жағдайда болса, түзудің жазықтықпен қиылысу нүктесі көмекші қиюшы жазықтық арқылы анықталады.

4.10-суретте  $l$  түзуінің  $\alpha (ABC)$  жазықтығымен қиылысу нүктесін анықтау көрсетілген.

1. Берілген  $l$  түзуі арқылы  $\gamma$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығын жүргіземіз.

2. Көмекші  $\gamma$  жазықтығының  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу сызығы  $m$  түзуін жүргіземіз:  $m=(\alpha \cap \gamma)$ .  $m$  және  $l$  түзулері  $\gamma$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығында жатады, яғни горизонталь бәсекелес болып табылады, сондықтан:  $l_2=\gamma_2=m_2$ .  $m$  түзуі  $AB$  түзуін 1 нүктесінде,  $AC$  түзуін 2 нүктесінде қияды. 1 және 2 нүктелерінің фронталь проекцияларын тауып,  $m$  түзуінің фронталь проекциясын анықтаймыз.



4.10-сурет

3.  $l$  және  $m$  түзулерінің орналасуына байланысты үш түрлі жағдай болуы мүмкін:

а)  $l_1 \parallel m_1$  болса,  $l$  түзуі  $\alpha$  жазықтығына параллель болады;

ә)  $l_1 = m_1$  болса, онда  $l$  түзуі  $\alpha$  жазықтығына тиісті болады;

б)  $l_1 \cap m_1 = K_1$  болса,  $l$  түзуі  $\alpha$  жазықтығымен  $K$  нүктесінде қиылысады.

4.10-суретте  $l_1 \cap m_1 = K_1$ , сондықтан  $K$  нүктесінде ізделінді нүкте болып табылады. Сызбада көрінетіндік бәсекелес нүктелер тәсілімен анықталады. Фронталь проекцияда көрінетіндікті  $4 \in \alpha$  және  $5 \in l$  фронталь-бәсекелес нүктелердің көмегімен анықталған.  $ABC$  үшбұрышының  $BC$  қабырғасында орналасқан 4 нүктесінің горизонталь проекциясы 5 нүктесінің горизонталь проекциясынан төменірек орналасқан, сондықтан фронталь проекцияда 5 нүктесі 4 нүктесінің тасасында болып көрінбейді. Ендеше  $l$  түзуінің фронталь проекциясының  $K_1 5_1$  бөлігі көрінбейтін болады.

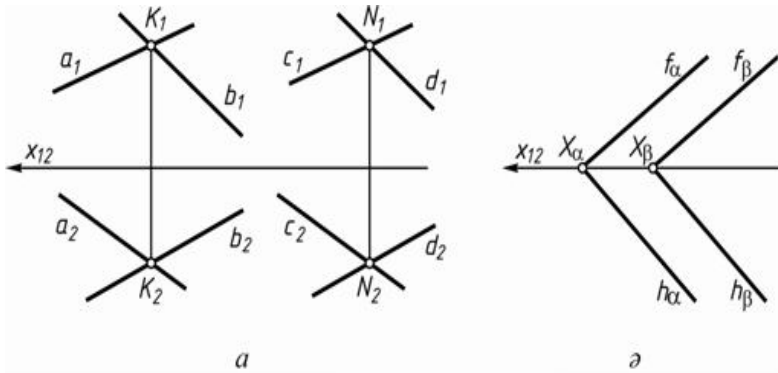
Горизонталь проекцияда көрінетіндікті  $1 \in \alpha$  және  $3 \in l$  фронталь-бәсекелес нүктелердің көмегімен анықталған.  $ABC$  үшбұрышының  $AB$  қабырғасында орналасқан 1 нүктесінің фронталь проекциясы 3 нүктесінің фронталь проекциясынан төменірек орналасқан, сондықтан горизонталь проекцияда 1 нүктесі 3 нүктесінің тасасында болып көрінбейді. Ендеше  $l$  түзуінің горизонталь проекциясының  $K_2 3_2$  бөлігі көрінетін, ал  $K_2 2_2$  бөлігі көрінбейтін болады.

## 4.5. Екі жазықтықтың өзара орналасуы

### 4.5.1. Параллель жазықтықтар

Кеңістікте екі жазықтық қиылысады немесе параллель болады. Екі жазықтық өзара параллель болу үшін олардың біреуінің қиылысатын екі түзуі екіншісінің сәйкес екі түзуіне параллель болулары қажет. 4.11 а-суретінде  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) жазықтығы  $\beta$  ( $c \cap d$ ) жазықтығына параллель, өйткені:

$$c \parallel a \ (c_1 \parallel a_1, \ c_2 \parallel a_2), \ d \parallel b \ (d_1 \parallel b_1, \ d_2 \parallel b_2).$$



4.11-сурет

Егер параллель жазықтықтар эпюрге іздер арқылы берілсе, онда осы жазықтықтардың аттас іздері де параллель болуы қажет. 4.11 б-суретте іздерімен берілген  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының аттас іздері параллель, сондықтан олар өзара параллель болады:  $f_{\alpha} \parallel f_{\beta}, h_{\alpha} \parallel h_{\beta} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ .  $\square$

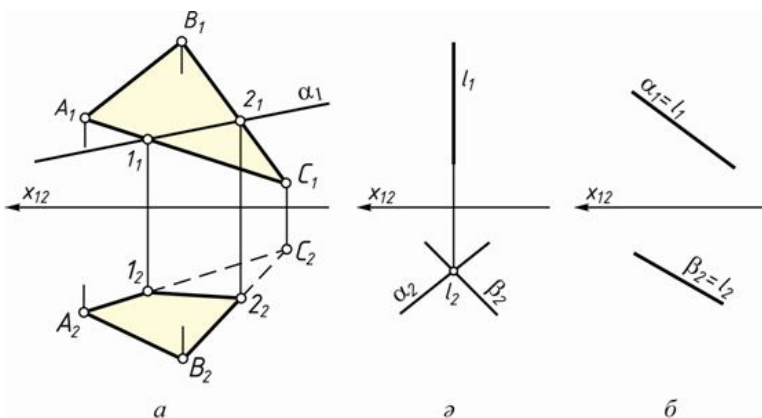
#### 4.5.2. Екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу

Екі жазықтық түзу бойымен қиылысады. Түзу екі нүкте арқылы анықталатындықтан екі жазықтықтың ортақ екі нүктесін тапса жеткілікті.

Егер қиылысушы жазықтықтардың біреуі проекциялаушы болса, онда қиылысу сызығының бір проекциясы оның түзуге кескінделген проекциясымен бірігеді.

4.12 а-суретте фронталь-проекциялаушы  $\alpha$  жазықтығы мен жалпы жағдайдағы  $\gamma(ABC)$  жазықтықтарының қиылысуы кескінделген. Екі жазықтықтың қиылысу сызығының фронталь проекциясы  $\alpha_1$  ізімен беттеседі. Фронталь проекцияда  $ABC$  үшбұрышыны түгел көрінеді. Ал горизонталь проекцияда  $\gamma(ABC)$  жазықтығының  $\alpha$  жазықтығынан жоғары орналасқан нүктелерін олардың фронталь проекцияларынан байқаймыз.  $A$  және  $B$  нүктелерінің фронталь проекциялары  $\alpha_1$  ізінен жоғары орналасқан, сондықтан горизонталь проекцияда  $A$  және  $B$  төбелері көрінетін болады.

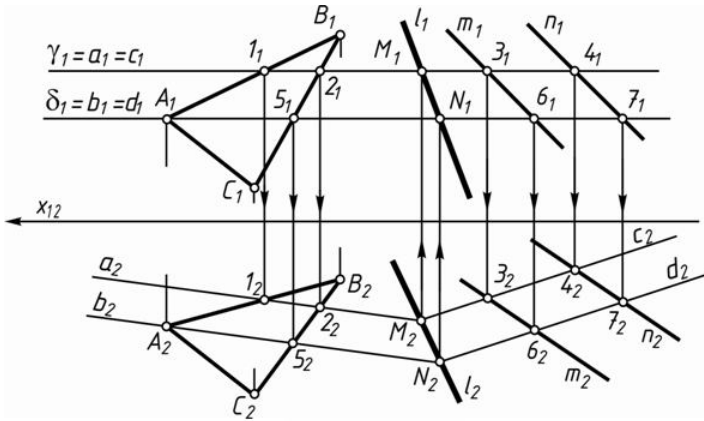
Қиылысатын екі жазықтық та бір проекциялар жазықтығына перпендикуляр болса, олардың қиылысу сызығы да проекциялаушы болады. 4.12 а-суретте горизонталь-проекциялаушы  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары кескінделген. Олардың қиылысу сызығы болатын  $l$  түзуі де горизонталь-проекциялаушы болады:  $\alpha \perp \pi_2$ ,  $\beta \perp \pi_2 \Rightarrow \alpha \cap \beta = l \perp \pi_2$ .



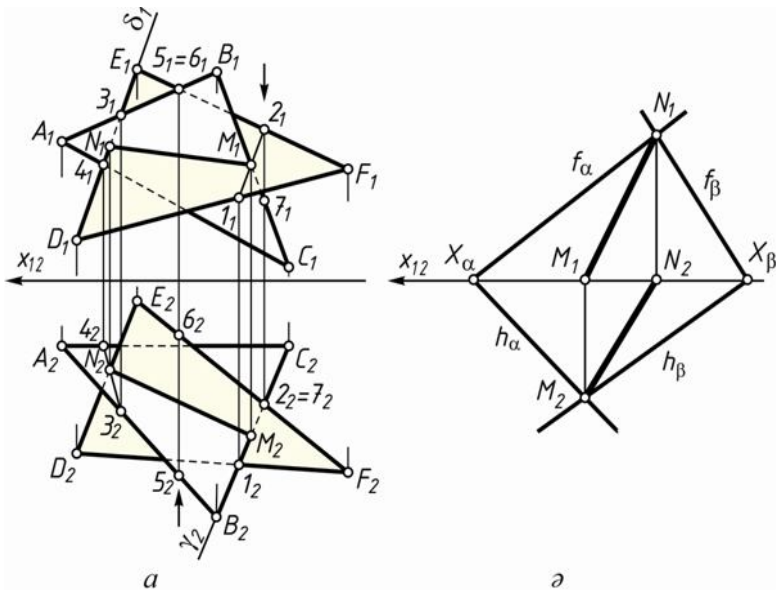
4.12-сурет

Қиылысатын екі жазықтықтың біреуі фронталь проекциялар жазықтығына, ал екіншісі горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болса, онда қиылысу сызығының проекциялары жазықтықтардың түзуге кескінделетін проекцияларымен бірігеді. 4.12 б-суретте фронталь-проекциялаушы  $\alpha$  және горизонталь-проекциялаушы  $\beta$  жазықтықтары кескінделген. Олардың қиылысу сызығы болатын  $l$  түзуінің  $l_{\square\square}$  фронталь проекциясы  $\alpha_{\square\square}$  ізімен, ал  $l_{\square\square}$  фронталь проекциясы  $\beta_2$  ізімен беттеседі

Қиылысатын екі жазықтық та жалпы жағдайда орналасқанда олардың қиылысу сызығын салу үшін көмекші жазықтықтар әдісін қолданамыз. 4.13-суретте жалпы жағдайдағы  $\alpha(ABC)$  және  $\beta(m||n)$  жазықтықтары берілген. Жазықтықтардың қиылысу сызығының екі ортақ нүктелерін анықтау үшін көмекші  $\gamma$  және  $\delta$  проекциялаушы жазықтықтарын енгіземіз.



4.13-сурет



4.14-сурет

Көмекші  $\gamma$  жазықтығы  $\alpha$  жазықтығын  $a$  түзуі бойымен және  $\beta$  жазықтығын  $c$  түзуі бойымен қияды. Көмекші  $\beta$  жазықтығы  $\alpha$  жазықтығын  $b$  түзуі бойымен және  $\beta$  жазықтығын  $d$  түзуі

бойымен қияды. Табылған  $a$  және  $c$  түзулері  $M$  нүктесінде, ал  $b$  және  $d$  түзулері  $N$  нүктесінде қиылысады.  $M$  және  $N$  нүктелері  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарына ортақ, сондықтан осы жазықтықтардың қиылысу сызығы болып табылатын  $l$  түзуін анықтайды.

4.14  $a$ -суретте өзара қиылысатын  $\alpha(ABC)$  және  $\beta(DEF)$  жазықтықтары кескінделген. Екі жазықтықтың қиылысу сызығын анықтайтын  $M, N$  нүктелерінің әрқайсысы  $ABC$  және  $DEF$  үшбұрыштарының біреуінің кез келген қабырғасының екінші үшбұрышпен қиылысу нүктесі ретінде табылады. Сонда екі рет түзумен жазықтықтың қиылысу нүктесін анықтау есебі шешіледі.  $M(M_1, M_2)$  нүктесін анықтау үшін  $BC$  түзуі арқылы  $\gamma$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығы, ал  $N(N_1, N_2)$  нүктесін анықтау үшін  $DE$  түзуі арқылы  $\delta$  фронталь-проекциялаушы жазықтығы  $\square\square$  қолданылған. Фронталь проекцияда көрінетіндік 5 және 6 фронталь бәсекелес нүктелердің, ал горизонталь проекцияда 2 және 7 горизонталь бәсекелес нүктелердің көмегімен анықталған.

4.14  $a$ -суретте іздермен берілген  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтары келтірілген. Бұл жерде көмекші жазықтықтар ретінде  $\pi_1, \pi_2$  проекциялар жазықтықтары қолданылады. Проекциялар жазықтықтары берілген жазықтықтарды олардың горизонталь және фронталь іздері бойымен қияды. Сондықтан жазықтықтардың қиылысу сызығы аттас іздердің қиылысу нүктелері арқылы өтеді:  $h_\alpha \cap h_\beta = M$ ,  $f_\alpha \cap f_\beta = N$ . Осы нүктелердің аттас проекцияларын түзу сызықпен қосатын болса, жазықтықтардың қиылысу сызығының проекцияларын аламыз.

**Бақылау сұрақтары:**

1. Түзу жазықтыққа қай жағдайда тиісті болады?
2. Нүкте жазықтыққа қай жағдайда тиісті болады?
3. Жазықтықтың басты түзулерін атап, сызбасын салып көрсетіңіз.
4. Қай уақытта түзу жазықтыққа параллель болады?
5. Сызбада екі жазықтықтың параллельдігін қалай анықтауға болады?
6. Түзудің жалпы жағдайдағы жазықтықпен қиылысу нүктесін тұрғызудың қадамдарын атаңыз.

## 5. КӨПЖАҚТАР

*Көпжақ* деп жазық көпбұрыштармен шектелген денені айтамыз. Көпжақтарды шектейтін көпбұрыштарды *жақтар* деп, ал олардың ортақ қабырғаларын *қырлар* деп атайды. Қырлардың ортақ нүктелерін *төбелер* деп атаймыз.

Көп тараған көпжақтар – призмалар және пирамидалар. Екі жағы табандары деп аталатын параллель көпбұрыштар болатын, қырлары табанына перпендикуляр призманы тік призма деп атайды. Егер тік призманың табаны – тік төртбұрыш болса, оны параллелепипед деп атайды.

Бір жағы – кез келген көпбұрыш болатын, ал қалған жақтары – ортақ төбесі бар үшбұрыш болатын көпжақты пирамида деп атайды.

Көпжақтардың көптеген түрлерінің ішінен ерекше топты дұрыс дөңес көпжақтар құрайды. Дұрыс көпжақтар (Платон денелері) деп жақтары – дұрыс және тең көпбұрыштар, ал төбе бұрыштары тең болатын көпжақтарды атаймыз. Әр дұрыс көпжаққа сырттай немесе іштей сфераны салуға болады.

Бес дұрыс көпжақтар бар:

1. *Тетраэдр* (төртжақ) бірдей төрт теңқабырғалы үшбұрыштармен шектелген.

2. *Гексаэдр* (алтыжақ) немесе куб. Оның беті алты тең квадраттардан тұрады.

3. *Октаэдр* (сегізжақ). Оның беті сегіз бірдей теңқабырғалы үшбұрыштардан тұрады. Куб және октаэдрдің қырларының саны бірдей. Октаэдрға кубты салуға болады, ал кубқа октаэдрді бір көпжақтың төбелері екіншісінің бүйірінің центрімен сәйкес болатындай салуға болады. Бұндай көпжақтарды *өзара сәйкес* деп атайды.

4. *Додекаэдр* (он екі жақ) бірдей және дұрыс бесбұрыштармен шектелген. Әр төбеге үш бесбұрыш қосылған. Додекаэдрге дұрыс жиырмажақ сәйкес келеді.

5. *Икосаэдр* (жиырмажақ). Оның беті жиырма бірдей теңқабырғалы үшбұрыштардан құралған, және әрбір төбесі бес үшбұрышты біріктіреді. Икосаэдрге додекаэдрді салса болады. Икосаэдр және додекаэдр өзара сәйкес көпжақтар болып табылады. Тетраэдр өзіне өзі сәйкес келеді.

## 5.1-кесте

| Атауы          | Жақтың пішіні                                                                     | Ж  | Т  | Қ  |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|
| Тетраэдр       |  | 4  | 4  | 6  |
| Гексаэдр (куб) |  | 6  | 8  | 12 |
| Октаэдр        |  | 8  | 6  | 12 |
| Додекаэдр      |  | 12 | 20 | 30 |
| Икосаэдр       |  | 20 | 12 | 30 |

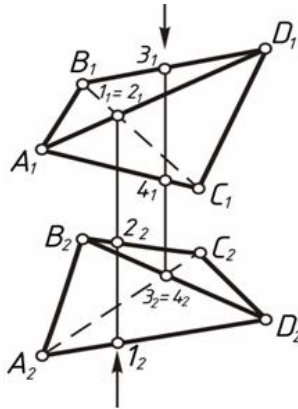
Әрбір өзара сәйкес көпжақтар жұбының біреуінің жақтар саны, екіншісінің төбелер санына сәйкес келеді, ал қырларының саны тең болады. Дөнес көпжақтардың барлық түрлерінің жақтарының саны (Ж), төбелерінің (Т) және қырларының (Қ) сандарының қатынасын *Эйлер* жазды:

*Кез келген дөңес көпжақтың жақтары мен төбелерінің санының қосындысынан қырлар санының айырмасы екіге тең, яғни*

$$Ж + Т - Қ = 2.$$

*Көпжақтың қырларының көрінетіндігі.* Көрінетіндікті анықтау үшін бәсекелес нүктелер әдісі қолданылады (5.1-сурет). Көпжақтың проекциясының сыртқы қырлары әрдайым көрінеді. Контурдың ішіндегі қырлардың көрінетіндігін әрбір проекцияда қырлардың өзара орналасуын пайдалана отырып, бөлек анықтау керек.

5.1-суретте төртжақтың проекциялары берілген. 1 және 2 нүктелері – фронталь-бәсекелес, ал 3 және 4 нүктелері – горизонталь-бәсекелес. Бәсекелес нүктелердің өзара орналасуына қарап фронталь проекцияда  $AD$  қыры көрінетінін, ал  $BC$  қырының көрінбейтінін анықтаймыз.



5.1-сурет

Горизонталь проекцияда  $BD$  қыры көрінетін, ал  $AC$  – көрінбейтін қыр болады.

### 5.1. Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы

Көпжақ бетінің жазықтықпен қимасы – жазық көпбұрыш болып табылады. Оның төбелері мен қабырғалары – берілген жазықтықтың берілген көпжақтың жақтарымен және қырларымен қиылысуымен анықталады. Сондықтан қиманы тұрғызу үшін екі түрлі тәсіл қолданылады:

1) *қырлар тәсілі* – берілген жазықтықтың көпжақ қырларымен қиылысу нүктелерін, яғни қиманың төбелерін табады;

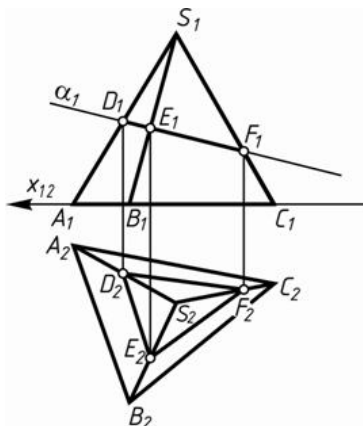
2) *жақтар тәсілі* – жазықтықтың көпжақ жақтарымен қиылысу түзулерін, яғни қиманың қабырғаларын тұрғызады.

Жақтар тәсілін көпжақ жақтарының проекциялаушы жазықтықтар болған кезінде қолданған тиімді.

Көпжақтың жазықтықпен қимасын табуға бірнеше мысалдар қарастырып көрелік.

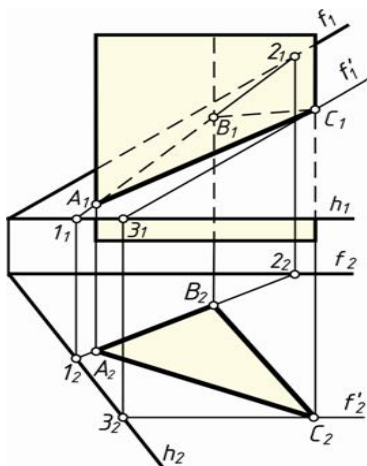
**1-мысал. Көпжақтың проекциялаушы жазықтықпен қиылысуы.** Қиюшы жазықтық проекциялаушы болса, қиманы табу жеңіл. Бұл жағдайда қиманың бір проекциясы проекцияланатын ізбен сәйкес болады. 5.2-суретте  $SABC$  пирамидасының  $\alpha(\alpha_1)$  фронталь-проекциялаушы жазықтығымен қиылысуы көрсетілген. Қиюшы жазықтық пирамиданың бүйір

қырларын  $D, E, F$  нүктелерінде қияды:  $\alpha \cap (SA) = D$ ,  $\alpha \cap (SB) = E$ ,  $\alpha \cap (SC) = F$ .  $DEF$  қимасының  $D_1E_1F_1$  фронталь проекциясы қиышы жазықтықтың  $\alpha_1$  фронталь ізімен сәйкес болады. Байланыс сызықтарын жүргізіп, қиманың  $D_2E_2F_2$  горизонталь проекциясын табамыз.



5.2-сурет

**2-мысал. Тік призма мен жалпы жағдайдағы жазықтықтың қиылысуы.** 5.3-суретте тік призма мен қиылысатын екі түзумен берілген  $\alpha \cap (f \cap h)$  жазықтығымен қиылысуы көрсетілген.

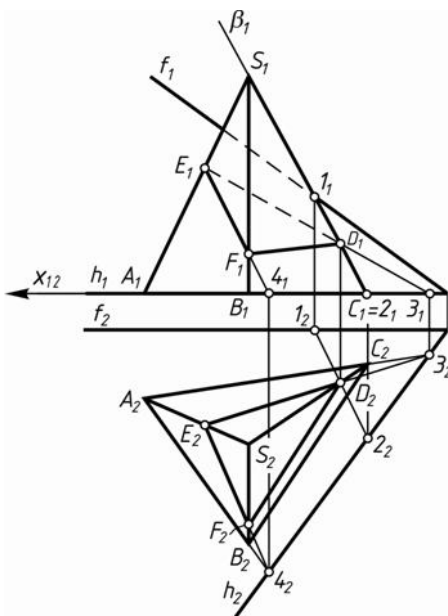


5.3-сурет

Призманың бүйір жақтары – горизонталь проекциялаушы жазықтықтар болғандықтан қиманың горизонталь проекциясы  $A_2B_2C_2$  белгілі - ол бүйір жақтарының және қырларының проекцияларымен сәйкес болады. Қиманың фронталь проекциясын тұрғызу үшін қиюшы жазықтыққа тиісті  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нүктелерінің фронталь проекцияларын анықтау қажет.  $A_2$  және  $B_2$  нүктелері арқылы  $(I,2)$  түзуінің – горизонталь  $(I_22_2)$  проекциясын жүргізеді.  $(I,2)$  түзуінің фронталь  $(I_12_1)$  проекциясында  $A_1$ ,  $B_1$  фронталь проекцияларын табамыз.  $C$  нүктесінің фронталь проекциясын табу үшін алдымен  $C_2$  арқылы  $f''$  фронталінің  $f'_2$  горизонталь проекциясын жүргізеді. Ол  $\alpha \square$  жазықтығының  $h$  горизонталінің  $h_2$  горизонталь проекциясымен қиылысады:  $f'_2 \cap h = 3_2$ .  $f''$  фронталінің  $f'_1$  фронталь проекциясы  $3_1$  нүктесі арқылы  $f$  фронталінің  $f_1$  фронталь проекциясына жүргізеді.  $f'_1$  түзуі призманың сәйкес қырымен қиылысқанда  $C$  нүктесінің ізделініп отырған  $C_1$  проекциясын табылады.

**3-мысал. Пирамиданың жалпы жағдайдағы жазықтықпен қиылысуы.** Көпжақтың жалпы жағдайдағы жазықтықпен қимасын анықтағанда оның екі проекциясын да тұрғызу қажет (5.4-сурет). Қиюшы жазықтықтың горизонталь ізі пирамиданың табанын қимайды, сондықтан оның тек бүйір жақтары қиылады. Қиманың пішіні үшбұрыш болуы керек, пирамида қырларының жазықтықпен қиылысу нүктелері – үшбұрыштың төбелері болады.

$SC$  қырының  $\alpha(f \cap h)$  жазықтықпен  $D$  қиылысу нүктесі – фронталь проекциялаушы  $\beta(\beta_1)$  жазықтығының көмегімен табылады. Осындай тәсілмен, қиманың  $E$  нүктесін де табуға болады. Алайда, басқа тәсілді де қолданса болады. Қиюшы  $\alpha$  жазықтығының  $h$  горизонталі пирамида табанының жазықтығында орналасқан. Сондықтан пирамиданың  $SAC$  жағының ізі болып табылатын  $AC$  қыры қиюшы жазықтықтың горизонталь ізімен қиылысады.  $A_2C_2$  түзуінің  $h_2$  түзуімен қиылысу нүктесін табады:  $(A_2C_2) \cap h_2 = 3_2$ .  $D$  және  $3$  нүктелері  $SAC$  жазықтығы мен  $\alpha$  қиюшы жазықтығының қиылысу сызығына тиісті.  $D_23_2$  түзуінің  $S_2A_2$  түзуімен қиылысу нүктесін табады:  $(D_23_2) \cap (S_2A_2) = E_2$ . Байланыс сызығы бойымен  $E$  нүктесінің фронталь проекциясын табады.



## 5.4-сурет

$F$  нүктесін осындай әдіспен тұрғызады, себебі  $SB$  қыры арқылы жүргізілген қосымша қиюшы проекциялаушы жазықтық проекцияның профиль жазықтығына параллель болады да, ешқандай шешімге алып келмейді. 4 нүктесі  $SAB$  жазықтығының горизонталь ізі мен  $\alpha$  қиюшы жазықтығының қиылысу нүктесі болып табылады:  $(A_2B_2) \cap h_2 = A_4$ .  $E$  және 4 нүктелері  $SAB$  жазықтығы мен  $\alpha$  қиюшы жазықтығының қиылысу сызығына тиісті.  $E_2A_2$  түзуінің  $S_2B_2$  түзуімен қиылысу нүктесін табады:  $(E_2A_2) \cap (S_2B_2) = F_2$ . Байланыс сызығы бойымен  $F$  нүктесінің фронталь проекциясын табады.  $DEF$  үшбұрышы ізделінді қима болып табылады.

## 5.2. Көпжақтың түзумен қиылысуы

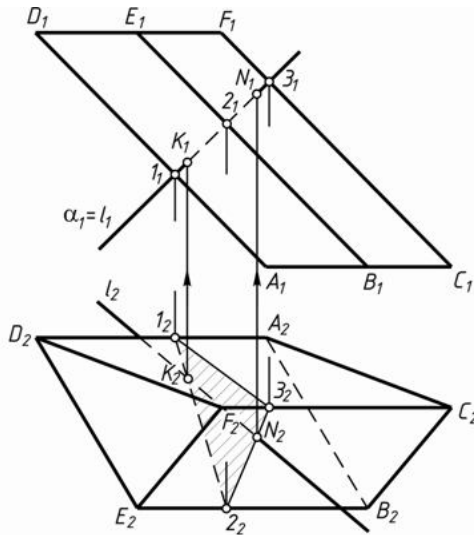
Көпжақтың түзумен қиылысу нүктелерін табу есебі үш қадамда шешіледі:

- 1) берілген түзу арқылы қиюшы жазықтықты жүргізеді;

2) қиюшы жазықтық пен көпжақтың қиылысу сызығын тұрғызады;

3) берілген түзудің кима контурымен қиылысу нүктелері ізделінді нүктелер болып табылады.

5.5-суретте үшбұрышты көлбеу призманың  $l$  түзуімен қиылысу нүктелері табылған. Алдымен  $l$  түзуі арқылы фронталь-проекциялаушы  $\alpha(\alpha_1)$  жүргізілген. Призма мен  $\alpha$  жазықтығының қиылысу сызығы тұрғызылған. Ол үшін призма қырларының  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүктелері табылған:  $1=1\cap(AD)$ ,  $2=2\cap(BE)$ ,  $3=3\cap(CF)$ . Қиылысу сызығының фронталь проекциясы  $l$  түзуінің  $l_1$  фронталь проекциясымен беттеседі. Қиылысу сызығының горизонталь проекциясы  $l$  түзуінің  $l_2$  горизонталь проекциясымен  $K_2$  және  $N_2$  нүктелерінде қиылысады. Байланыс сызықтары арқылы ізделінді нүктелердің  $K_1$  және  $N_1$  фронталь проекциялары табылған.



5.5-сурет

### 5.3. Екі көпжақтың қиылысу сызығы

Екі көпжақтың қиылысу сызығы кеңістік тұйық сынық болып табылады. Кейбір ерекше жағдайларда бұл сынық екі тұйық сыныққа бөлінуі мүкін. Бір көпжақтың қырларының екінші көпжақтың беттерімен қиылысу нүктелері сынықтың төбелері болып табылады. Сынықтың қабырғалары – түзу кесінділері болып табылады, олар арқылы көпжақтардың беттері қиылысады.

Егер қиылысатын екі көпжақтың біреуінің жақтары мен қырлары проекциялаушы болса, есепті шешу жеңіл болады. 5.6-суретте көрсетілген мысалда пирамидамен қиылысатын призманың бүйір жақтары мен қырлары горизонталь-проекциялаушы. Призманың бүйір қырлары нүктелерге проекцияланады, ал бүйір беттері горизонталь проекциялаушы жазықтықтарды анықтайды. Пирамида қырларының призмамен қиылысу нүктелері горизонталь проекцияда анықталып, байланыс сызықтары арқылы нүктелердің фронталь проекциялары тұрғызылады:

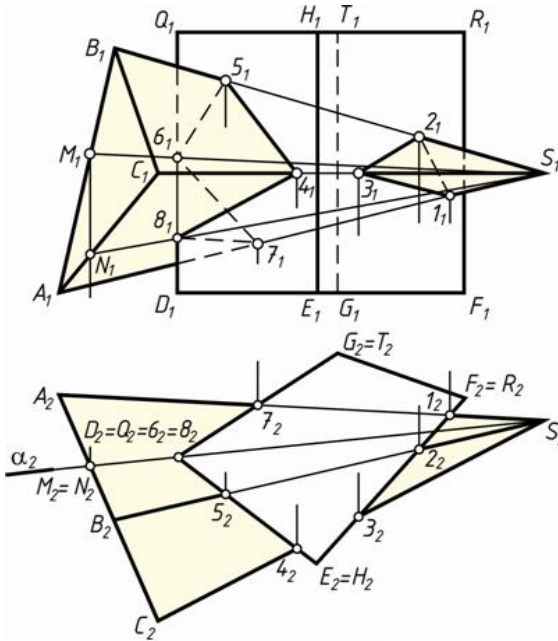
$$1 = (SA) \cap (EHRF), 2 = (SB) \cap (EHRF), 3 = (SC) \cap (EHRF), \\ 4 = (SC) \cap (DQHE), 5 = (SB) \cap (DQHE), 7 = (SA) \cap (DQGT).$$

Табандары бір жазықтықта орналасқан екі көпжақтың қиылысу сызығын тұрғызу кезінде, көмекші жазықтық ретінде көбінесе жалпы жағдайдағы жазықтықтарды пайдаланған тиімді:

1) екі пирамида – көмекші жазықтықтар пирамидалар төбелерімен өтуі тиіс;

2) пирамида және призма – көмекші жазықтықтар призманың бүйір қырларына параллель болуы керек және пирамида төбесінен өтуі қажет;

3) екі призма – көмекші жазықтықтар екі призманың бүйір қырларына параллель болуы керек.

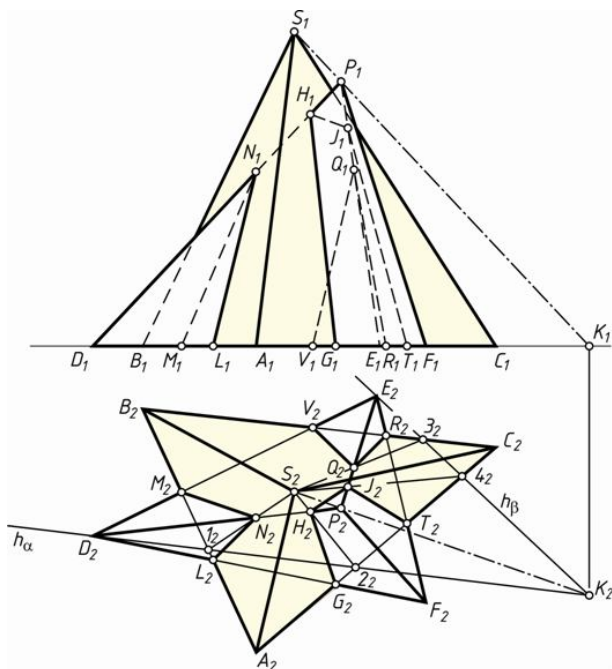


5.6-сурет

5.7 - суретте табандары бір жазықтықта жататын  $SABC$  және  $PDEF$  пирамидаларының қиылысу сызығын табу көрсетілген. Пирамидалардың бүйір қырлары мен жақтарының қиылысу нүктелерін анықтау үшін олардың төбелері арқылы  $SP$  түзуі жүргізіліп, оның горизонталь ізі  $K$  нүктесі табылған.  $SP$  түзуі арқылы өтетін көмекші жазықтықтар көпжақтардың жақтарын түзулер бойымен қияды және ол жазықтықтардың горизонталь іздері  $K$  нүктесі арқылы өтеді.  $K_2$  нүктесі  $ABC$  және  $DEF$  үшбұрыштарының орналасуына байланысты пирамидалардың қиылысатынын немесе қиылыспайтынын, қиылысса қай қырларының екінші көпжақпен қиылысатынын анықтауға болады. Пирамидалардың табандары  $L, M, V, R, T, G$  нүктелерінде қиылысады. Ал қырлардың ішінде  $PD$  және  $PE$  қырлары ғана  $SABC$  пирамидасын қияды.

$PD$  қырының  $SABC$  пирамидасымен қиылысу нүктесін табу үшін  $SP$  және  $PD$  түзулері арқылы көмекші жазықтық

тұрғызылады. Көмекші  $\alpha(SP \cap PD)$  жазықтығы  $SABC$  пирамидасының  $SAB$  жағын  $S1$  түзуі бойымен, ал  $SAC$  жағын  $S2$  түзуі бойымен қияды:  $\alpha \cap (SAB) = (S1)$ ,  $\alpha \cap (SAC) = (S2)$ .  $PD$  қыры  $S1$  және  $S2$  түзулерімен  $N$  және  $H$  нүктелерінде қиылысады:  $(PD) \cap (S1) = N$ ,  $(PD) \cap (S2) = H$ . Бұл нүктелер  $PD$  қырының  $SAB$  және  $SAC$  жақтарымен қиылысу нүктелері болып табылады:  $N = (PD) \cap (SAB)$ ,  $H = (PD) \cap (SAC)$ .



5.7-сурет

$PE$  қырының  $SABC$  пирамидасымен қиылысу нүктесін табу үшін  $SP$  және  $PE$  түзулері арқылы көмекші жазықтық тұрғызылады. Көмекші  $\beta(SP \cap PE)$  жазықтығы  $SABC$  пирамидасының  $SBC$  жағын  $S3$  түзуі бойымен, ал  $SAC$  жағын  $S4$  түзуі бойымен қияды:  $\beta \cap (SBC) = (S3)$ ,  $\beta \cap (SAC) = (S4)$ .  $PE$  қыры  $S3$  және  $S4$  түзулерімен  $Q$  және  $J$  нүктелерінде қиылысады:  $(PE) \cap (S3) = Q$ ,  $(PE) \cap (S4) = J$ . Бұл нүктелер  $PE$

қырының  $SBC$  және  $SAC$  жақтарымен қиылысу нүктелері болып табылады:  $Q=(PE)\cap(SBC)$ ,  $J=(PE)\cap(SAC)$ .

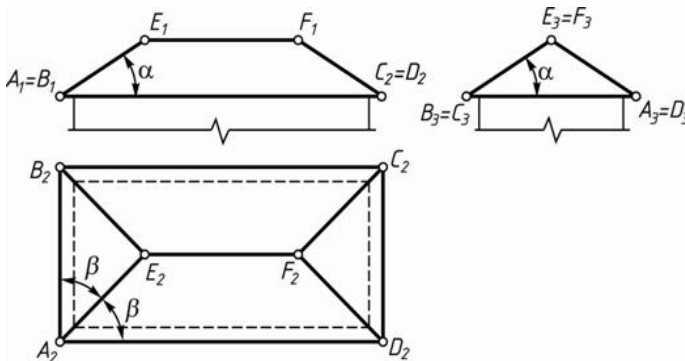
Пирамидалардың жақтарының қиылысу сызықтарын салу үшін  $N$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $J$  нүктелерінен табандардың қиылысу нүктелеріне кесінділер жүргізеді.  $LNМ$ ,  $GHJT$ ,  $VQR$  көпбұрыштары  $SABC$  және  $PDEF$  пирамидаларының қиылысу сызығы болады.

#### 5.4. Тәжірибеде көпжақтардың қиылысу сызығын анықтау

Сәулет пен құрылыста көпжақтар кеңінен қолданылады. Ғимараттардың сыртқы пішімі, олардың құрылымдық элементтері көбінесе көпжақтар (призмалар, параллелепипедтер, пирамидалар және т.б.) болып келеді. Ғимараттардың шатырлары, кеңістік жабындары да әртүрлі көпжақты беттер болып келеді.

Шатыр құламаларының қиылысу сызықтарын салу. Сәулет-құрылыс жобаларында міндетті түрде шатыр жабынының жоспары орындалады. Осы кезде шатыр құламаларының қиылысу сызықтарын салу керек болады. Көбінесе шатыр құламаларының көлбеулік бұрыштары бірдей, ал олардың төменгі ернеулері бір деңгейде болады.

5.8-суретте планда тіктөртбұрыш болып келетін үйдің шатыр жабынының проекциялары көрсетілген.



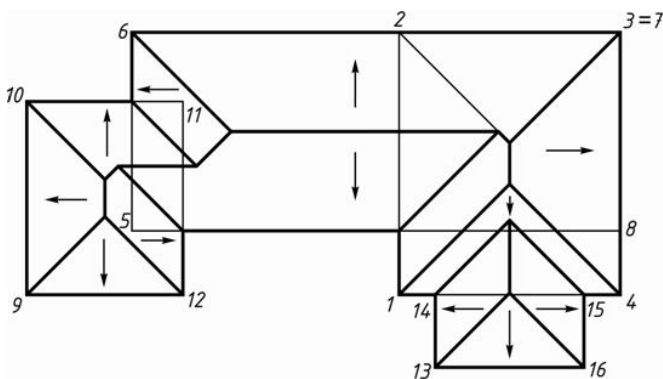
5.8-сурет

Шатыр құламаларының көлбеулік бұрыштары бірдей, ал олардың төменгі ернеулері бір горизонталь деңгейде болған кезде құламалардың қиылысу сызығын салу үшін мына ережелерді ұстану керек:

1) іргелес құламалардың қиылысу сызығының горизонталь проекциясы олардың горизонталь іздерінің арасындағы бұрыштың биссектрисасы бойымен салынады;

2) іргелес құламалардың қиылысу сызығының горизонталь проекциясы олардың горизонталь іздерінің қиылысу нүктесі арқылы өтеді;

3) егер шатыр жабынының горизонталь проекциясындағы бір нүктеде екі құламаның қырларының проекциялары қиылысатын болса, осы нүкте арқылы үшінші қырдың проекциясы өтеді. Шынымен де кеңістікте нүкте үш жазықтықтың қиылысуы арқылы анықталатыны белгілі, бұл жазықтықтар осы нүктеде қиылысатын үш түзу бойымен қиылысады.



5.9-сурет

5.9-суретте ғимараттың шатыр жабынының планы көрсетілген. Ғимарат планда тіктөртбұрыш болып келетін төрт бөліктен тұрады. Шатыр құламаларының суағар бағыттары нұсқамалармен көрсетілген. Алдымен (1-2-3-4), (5-6-7-8), (9-10-11-12), (13-14-15-16) тіктөртбұрыштарының төбелерінен жүргізілген биссектрисалар арқылы олардың іргелес

кұламаларының қиылысу сызықтарын анықтайды. Тіктөртбұрыштардың қиылысу нүктелерінен биссектриса бойымен құламалардың қиылысу қырларын анықтайды.

***Бақылау сұрақтары:***

1. Көпжақ дегеніміз не? Қандай көпжақтарды дұрыс көпжақтар деп атаймыз?
2. Көпжақты проекциялаушы жазықтықпен қиылысу сызығын анықтау әдісін түсіндіріңіз.
3. Көпжақты жалпы жағдайдағы жазықтықпен қиылысуының қимасын тұрғызудың мәнін түсіндіріңіз.
4. Түзудің көпжақпен қиылысуы нүктесін тұрғызудың алгоритмін баяндап беріңіз.
5. Көпжақтардың өзара қиылысуының қиылысу сызығын тұрғызудың екі әдісінің мәнін түсіндіріңіз.

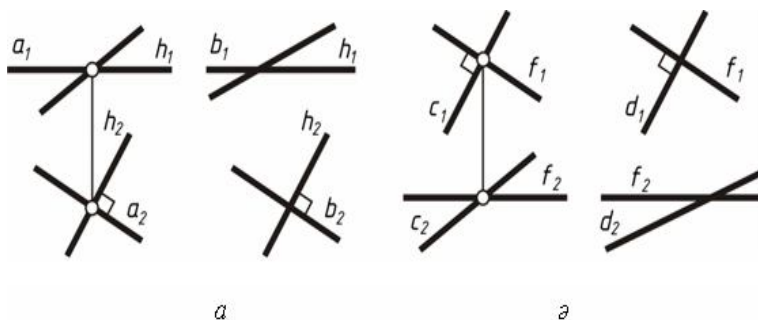
## 6. МЕТРИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Метрикалық есеп деп өлшемдерді анықтаумен байланысты есептерді айтамыз. Метрикалық есептерде арақашықтық, бұрыштың шамасы, геометриялық фигуралардың аудандарының натурал шамалары анықталады. Метрикалық есептерді шешу үшін өзара перпендикуляр түзулер мен жазықтықтарды салуға тура келеді.

### 6.1. Тік бұрыштың тік бұрышты проекциясы туралы теореманың салдары

**1-салдар.** Өзара перпендикуляр екі түзудің біреуі горизонталь болса, олардың горизонталь проекциялары өзара перпендикуляр болады. (6.1 а -сурет).

**2-салдар.** Өзара перпендикуляр екі түзудің біреуі фронталь болса, олардың фронталь проекциялары өзара перпендикуляр болады. (6.1 ә -сурет).



6.1-сурет

**3-салдар.** Өзара перпендикуляр екі түзудің біреуі профиль түзуі болса, олардың профиль проекциялары өзара перпендикуляр болады.

## 6.2. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

**Теорема.** Түзу жазықтыққа перпендикуляр болуы үшін сызбада оның горизонталь проекциясы жазықтықтың горизонталінің горизонталь проекциясына, ал фронталь проекциясы жазықтықтың фронталінің фронталь проекциясына перпендикуляр болуы қажет және жеткілікті.

Шынында да, егер  $l$  түзуінің  $l_2$  горизонталь проекциясы  $\alpha$  жазықтығының  $h$  горизонталінің  $h_2$  горизонталь проекциясына перпендикуляр болса, онда  $l$  түзуі  $h$  горизонталіне перпендикуляр болады:

$$l_2 \perp h_2 \Rightarrow l \perp h.$$

Сол сияқты,  $l$  түзуінің  $l_1$  фронталь проекциясы  $\alpha$  жазықтығының  $f$  фронталінің  $f_1$  фронталь проекциясына перпендикуляр болса, онда  $l$  түзуі  $f$  фронталіне перпендикуляр болады:

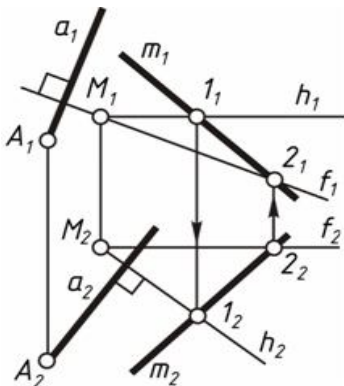
$$l_1 \perp f_1 \Rightarrow l \perp f.$$

Түзу жазықтықтың қиылысатын екі түзуіне перпендикуляр болса, оның жазықтыққа перпендикуляр болатыны белгілі. Сондықтан:

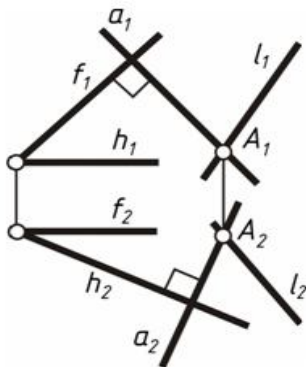
$$l \perp h, l \perp f \Rightarrow l \perp \alpha(h \cap f).$$

*6.1-мысал.*  $A$  нүктесі арқылы өтетін және  $\alpha$  ( $M, m$ ) жазықтығына перпендикуляр түзу салу керек (6.2-сурет).

Алдымен  $\alpha$  жазықтығының горизонталі мен фронталін жүргізу керек. Жеңілдік үшін  $\alpha$  жазықтығының  $h$  горизонталін және  $f$  фронталін оның  $M$  нүктесі арқылы жүргіземіз. Ізделінді  $a$  түзуінің  $a_1$  фронталь проекциясын  $A_1$  нүктесі арқылы  $f_1$  түзуіне перпендикуляр етіп, ал  $a_2$  проекциясын  $A_2$  нүктесі арқылы  $h_2$  түзуіне перпендикуляр етіп жүргіземіз.



6.2-сурет



6.3-сурет

### 6.3. Екі жазықтықтың перпендикулярлығы

$\alpha$  жазықтығы  $\beta$  жазықтығына перпендикуляр түзу арқылы өтетін болса немесе  $\beta$  жазықтығында жатқан бір түзуге перпендикуляр болса, онда  $\alpha$  мен  $\beta$  жазықтықтары өзара перпендикуляр болады.

Кеңістіктегі белгілі бір  $M$  нүктесі арқылы берілген  $\beta$  жазықтығына перпендикуляр болатын қанша болса да  $\alpha^1, \alpha^2, \dots$  жазықтықтарын жүргізуге болады. Бұл жазықтықтардың барлығы  $M$  нүктесінен  $\beta$  жазықтығына түсірілген  $a$  перпендикуляр арқылы өтетін болады.  $\alpha^1, \alpha^2, \dots$  жазықтықтарының жиыны жазықтықтар шоғын құрайды. Бұл жазықтықтардың біреуі ғана анықталу үшін тағы бір қосымша шарт болуы керек.

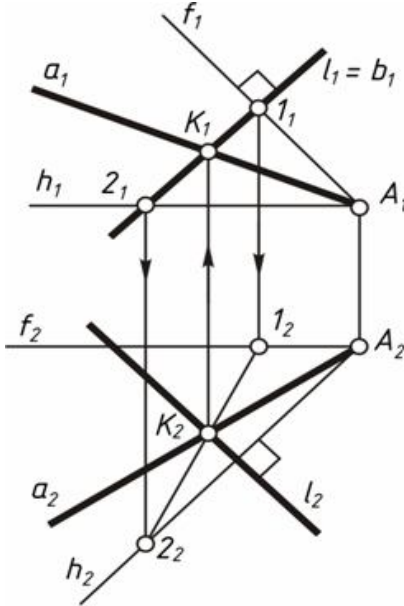
**6.2-мысал.** Берілген  $l(l_1, l_2)$  түзуі арқылы өтетін және  $\alpha(h \cap f)$  жазықтығына перпендикуляр  $\beta$  жазықтығын салу керек. (6.3-сурет).

Берілген  $l(l_1, l_2)$  түзуінің бойынан қалауымызша  $A$  нүктесін таңдап аламыз.  $A$  нүктесінен  $\alpha$  жазықтығына  $a$  перпендикулярын түсіреміз, яғни  $A_1 \in (a_1) \perp f_1, A_2 \in (a_2) \perp h_2$ .

$A$  нүктесінде қиылысатын  $a$  және  $l$  түзулері  $\beta$  жазықтығын анықтайды,  $\beta$  жазықтығы  $a$  түзуі арқылы өтеді және  $\alpha$  жазықтығына перпендикуляр болады,  
 $a \perp \alpha \Rightarrow \beta(l \cap a) \perp \alpha(h \cap f)$ .

#### 6.4. Өзара перпендикуляр жалпы жағдайдағы түзулерді салу

Екі түзудің біреуі арқылы екіншісіне перпендикуляр жазықтық жүргізуге мүмкіндік болса, олар өзара перпендикуляр болады.



6.4-сурет

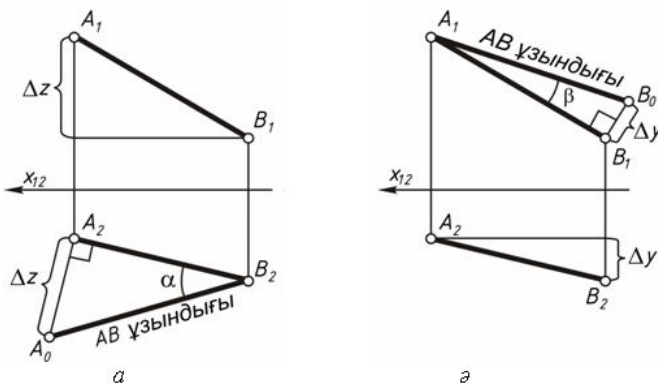
**6.3-мысал.** Берілген  $l$  түзуімен тікбұрыш жасап қиылысатын және  $A$  нүктесі арқылы өтетін  $a$  түзуін жүргізу керек (6.4-сурет). Алдымен  $A$  нүктесі арқылы  $l$  түзуіне перпендикуляр  $\alpha$  жазықтығын жүргіземіз:  $A_1 \in f_1 \perp l_1$ ;  $A_2 \in h_2 \perp l_2$ ;  $A_1 \in h_1 \perp (A_1 A_2)$ ;  $A_2 \in f_2 \perp (A_1 A_2)$ ;  $\alpha(h \cap f)$ .  $\alpha$  жазықтығы  $h$  горизонталімен және  $f$  фронталімен анықталады. Бұл  $\alpha$  жазықтығының кез келген түзуі  $l$  түзуіне перпендикуляр болады, бірақ соның ішінде тек бір ғана түзу  $l$  түзуін қиятын болады. Берілген  $l$  түзуінің  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу нүктесін табамыз:  $(K) = l \cap \alpha$ . Табылған  $K$  және  $A$  нүктелерімен анықталатын  $a$  түзуі  $A$  нүктесі арқылы өтеді және  $l$  түзуіне перпендикуляр болады, өйткені  $a \subset \alpha \perp l$ .

### 6.5. Кесіндінің ұзындығын табу (тікбұрышты үшбұрыш тәсілі)

Жалпы жағдайдағы түзуі кесіндісінің ортогональ проекциялары әрқашан кесіндінің өзінің ұзындығынан кем болады (6.5-сурет).  $AB$  кесіндісінің ұзындығын бір катеті кесіндінің  $A_2B_2$  горизонталь проекциясы болатын, ал екінші катеті - кесінді ұштарының  $z$  координаттарының айырмасы  $\Delta z$  болатын (кесіндінің фронталь проекциясынан алынады)  $A_2B_2A_0$  тік бұрышты үшбұрышынан анықтауға болады (6.5 а-сурет).

Тікбұрышты үшбұрыштың  $A_0B_2$  гипотенузасы кесінді ұзындығының нақты шамасы болады. Ал осы үшбұрыштағы  $\alpha$  бұрышы кесіндінің  $\pi_2$  жазықтығына көлбеулік бұрышы болып табылады.

Кесіндінің ұзындығын дәл осындай жолмен оның фронталь проекциясында тік бұрышты үшбұрыш салу арқылы табуға болады (6.5 ә-сурет). Мұндағы  $\beta$  бұрышы кесіндінің  $\pi_1$  жазықтығымен жасайтын бұрышын анықтайды.



6.5-сурет

#### Бақылау сұрақтары:

1. Қандай есептер метрикалық деп аталады?

2. Тік бұрыштың тік бұрышты проекциясы туралы теореманы тұжырымдаңыз.

3. Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық шартын тұжырымдаңыз.

4. Қай кезде тік бұрыш горизонталь проекциялар жазықтығына бұрмаланбай проекцияланады?

5. Екі жазықтықтың перпендикулярлық шартын тұжырымдаңыз.

## 7. СЫЗБАНЫ ТҮРЛЕНДІРУ ТӘСІЛДЕРІ

Берілген проекциялары бойынша фигураның жаңа проекцияларын салуды *сызбаны түрлендіру* деп атайды. Сызбаны түрлендіру екі әдіспен жасалады:

1. Фигураның негізгі  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  проекциялар жазықтықтарына қатысты орнын өзгерту арқылы сызбаны түрлендіру.

2. Қосымша проекциялар жазықтығын енгізу арқылы сызбаны түрлендіру. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілі осы әдіске негізделген.

Фигураның негізгі  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  проекциялар жазықтықтарына қатысты орнын өзгерту арқылы сызбаны түрлендіру әдісінде фигураны есепті шығаруға қолайлы болатындай етіп орналастырады. Фигураның қозғалысына байланысты мынадай тәсілдер болады:

- а) жазық-параллель ығыстыру тәсілі;
- б) проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілі;
- в) деңгейлік түзуден айналдыру тәсілі.

### 7.1. Жазық-параллель ығыстыру тәсілі

Жазық-параллель ығыстыру деп фигураның нүктелері өзара параллель жазықтықтарда орындарын өзгертетіндей етіп қозғауды айтады. Көбіне проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель бағытта жазық-параллель ығыстыру тәсілін қолданады.

Сызбада фигураның соңғы орнын анықтау үшін түрлендірудің инварианттарын білу керек. Фигураның берілген проекциялары бойынша оның жаңа проекциясын салуға мүмкіндік беретін қасиеттерді *түрлендірудің инварианттары* деп атайды.



Сонымен жазық-параллель ығыстыру тәсілінің инварианттары мынадай болады:

1) қозғалу бағытына параллель жазықтықтағы проекция өзінің пішінін және өлшемдерін сақтап орнын ауыстырады;

2) нүктелердің қозғалу бағытына перпендикуляр жазықтықтағы проекциялары проекциялық байланыс сызықтарына перпендикуляр түзулердің бойымен қозғалады.

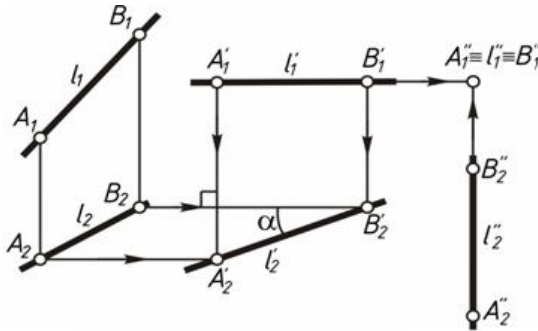
### ***7.1.1. Сызбаны түрлендірумен шығарылатын негізгі есептер***

Сызбаны түрлендірумен шығарылатын барлық есептер негізгі төрт есепті шығаруға келіп тіреледі. Осы есептерді жазық-параллель ығыстыру тәсілімен шығарып көрсетейік.

*1-есеп. Жалпы жағдайдағы түзуді деңгейлік жағдайға келтіру.* Егер біз  $l$  түзуін горизонталь жағдайға келтіргіміз келсе, онда оны  $\pi_1$  жазықтығына қатысты жазық-параллель ығыстыру керек. (7.2-сурет). Түзудің бойынан қалауымызша  $A$  және  $B$  нүктелерін таңдап аламыз. Көлденең түзу салып, оның бойына  $A'_1B'_1$  кесіндісін саламыз:  $A'_1B'_1 = A_1B_1$ . Оны  $l'$  горизонталь түзуінің жаңа  $l'_1$  фронталь проекциясы ретінде қабылдаймыз.  $A$  және  $B$  нүктелерінің жаңа горизонталь проекциялары  $A_2$  және  $B_2$  нүктелері арқылы өтетін көлденең түзулердің бойында табылады. Жаңа  $A'_1$  және  $B'_1$  фронталь проекциялары арқылы  $A'_2$  және  $B'_2$  горизонталь проекцияларын анықтаймыз.

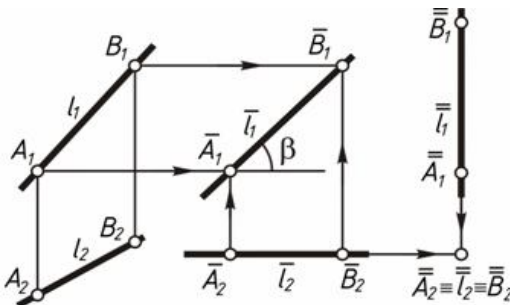
Егер  $l$  түзуін фронталь еткіміз келсе, оны  $\pi_2$  жазықтығына қатысты жазық-параллель ығыстыру керек (7.2-сурет).

Бұл есепті шығару нәтижесінде біз  $l$  түзуінің  $AB$  кесіндісінің нақты шамасын  $(A'_2B'_2 = \overline{A_1B_1} = AB)$  және оның  $\pi_1$  мен  $\pi_2$  жазықтықтарына көлбеулік  $\alpha$  мен  $\beta$  бұрыштарын таптық.



7.2-сурет

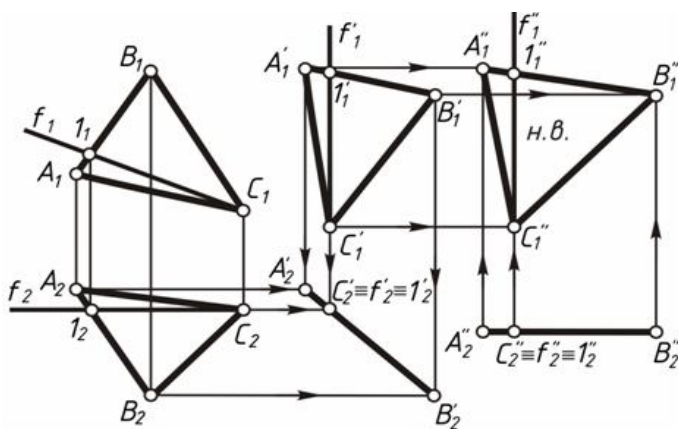
2-есеп. Деңгейлік түзуді проекциялаушы жағдайға келтіру. Егер  $l'(l_1', l_2')$  горизонталь түзуі берілсе, оны фронталь проекциялаушы  $l''$  түзуіне түрлендіру жеңіл (7.2-сурет). Ол үшін тік түзу жүргізіп, оның бойына  $A_2''B_2''$  кесіндісін саламыз:  $A_2''B_2'' = A_2'B_2'$ . Оны  $l_2''$  фронталь проекциялаушы түзуінің горизонталь проекциясы ретінде қабылдаймыз. Түзудің  $l_1''$  фронталь проекциясы нүктеге проекцияланады:  $A_1'' \equiv B_1'' \equiv l_1''$ .



7.3-сурет

Фронталь  $\bar{l}(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$  түзуін горизонталь проекциялаушы  $\bar{l}$  түзуіне түрлендіру ыңғайлы (7.3-сурет). Алдымен түзудің жаңа  $\bar{l}_1$  фронталь проекциясын тік салып, содан соң нүктеге проекцияланатын горизонталь проекциясын саламыз.

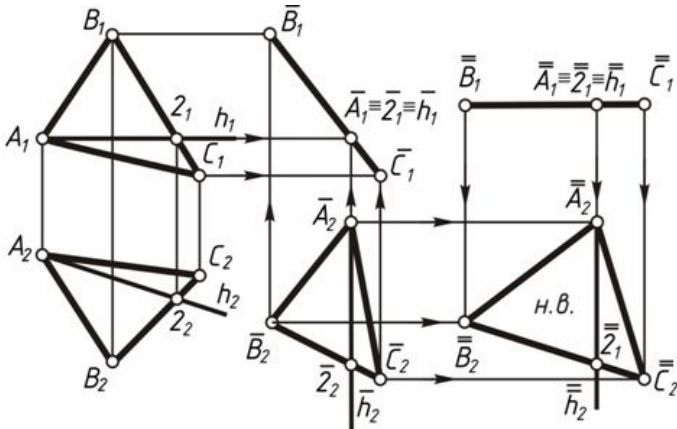
3-есеп. Жалпы жағдайдағы жазықтықты проекциялаушы жағдайға келтіру. Егер  $\alpha(ABC)$  жазықтығын горизонталь проекциялаушы жағдайға келтіру керек болса, онда оны  $\pi_1$  жазықтығына қатысты жазық-параллель ығыстыру қажет (7.4-сурет).



7.4-сурет

Алдымен  $\alpha$  жазықтығының  $f$  фронталін жүргізіп, оны горизонталь проекциялаушы  $f'$  түзуіне түрлендіру керек.  $ABC$  үшбұрышының жаңа  $A'B'C'$  фронталь проекциясын  $f_1'$  тік орналасатындай етіп саламыз, мұндағы  $\Delta A'B'C' = \Delta A_1B_1C_1$  болады. Бір түзудің бойында табылатын жаңа  $A_2', B_2', C_2'$  горизонталь проекцияларын саламыз. Жаңа  $\alpha'$  жағдайында  $\alpha$  жазықтығы горизонталь проекциялаушы болды.

Егер біз  $\alpha$  жазықтығын фронталь проекциялаушы жағдайға келтіретін болсақ, оны  $\pi_2$  жазықтығына қатысты жазық-параллель ығыстыру керек (7.5-сурет).



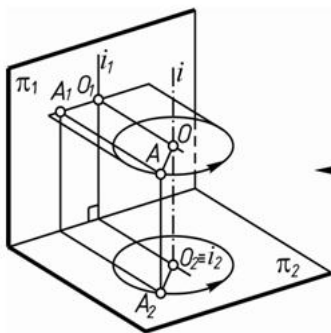
7.5-сурет

*4-есеп. Проекциялаушы жазықтықты деңгейлік жағдайға келтіру.* Егер горизонталь проекциялаушы  $\alpha'$  жазықтығы берілсе, оны фронталь жағдайға келтіру үшін  $\pi_2$  жазықтығына қатысты жазық-параллель ығыстыру керек (7.4-сурет). Ол үшін алдымен көлденең түзу салып, оның бойына  $A_2''$ ,  $B_2''$ ,  $C_2''$  нүктелерін  $A_2''B_2'' = A_2'B_2'$  және  $B_2''C_2'' = B_2'C_2'$  болатындай белгілейміз.  $A_1', B_1', C_1'$  нүктелері арқылы көлденең түзулер жүргізіп, ал  $A_2''$ ,  $B_2''$ ,  $C_2''$  нүктелері арқылы тік түзулер жүргіземіз. Аттас проекциялары арқылы жүргізілген түзулердің қиылысуында жаңа  $A_1'', B_1'', C_1''$  фронталь проекцияларын табамыз. Егер фронталь проекциялаушы  $\bar{\alpha}$  жазықтығы берілсе, оны горизонталь жағдайға келтіру үшін  $\pi_1$  жазықтығына қатысты жазық-параллель ығыстыру керек (7.5-сурет). Бұл есепті шығару нәтижесінде  $ABC$  үшбұрышының нақты шамасын анықтаймыз:  $\Delta A_1''B_1''C_1'' = \Delta A_2''B_2''C_2'' = \Delta ABC$ .

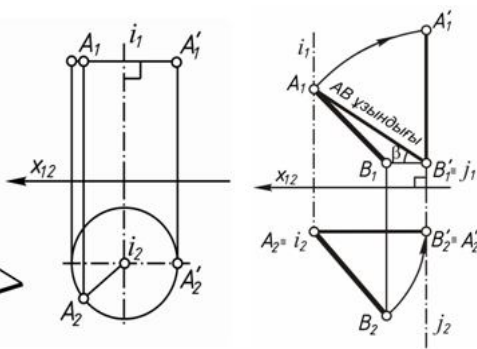
## 7.2. Проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілі

*Түрлендірудің инварианттары:* нүктені проекциялар жазықтығына перпендикуляр осьтен айналдырғанда оның бір проекциясы шеңбер бойымен, ал екіншісі – айналдыру осіне

перпендикуляр түзудің бойымен қозғалады. 7.6-суретте  $A$  нүктесі сызатын шеңбер  $\pi_2$  жазықтығына бұрмалаусыз нақты шамасына, ал  $\pi_1$  жазықтығына түзу кесіндісі түрінде проекцияланады. Ал егер нүктені фронталь проекциялаушы осьтен айналдырсақ, нүкте траекториясы фронталь проекция жазықтығына шеңбер түрінде, ал горизонталь проекциялар жазықтығына оське перпендикуляр түзудің кесіндісі түрінде проекцияланады.



7.6-сурет



7.7-сурет

7.7-суретте жалпы жағдайдағы түзуді алдымен горизонталь проекциялаушы  $i$  осінен айналдырып, деңгейлік (фронталь) жағдайға келтірген. Содан соң фронталь проекциялаушы  $j$  осінен айналдырып, проекциялаушы жағдайға келтірген, яғни түзу  $\pi_2$  жазықтығында нүктеге проекцияланады.

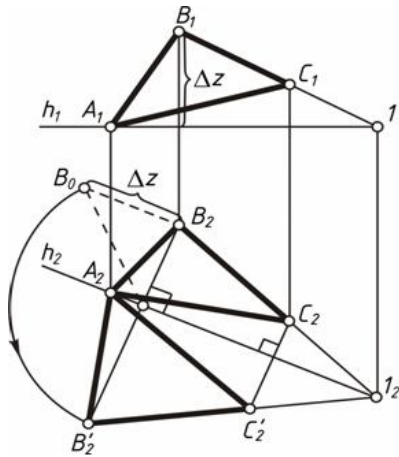
### 7.3. Деңгейлік түзуден айналдыру тәсілі

Бұл тәсіл көбінесе жазық фигураның сызбасын түрлендіру үшін қолданылады. Жазық фигура дейгейлік жағдайға дейін айналдырылады және сәйкес жазықтыққа бұрмалаусыз проекцияланады.

*Түрлендірудің инварианттары:*

1. фигураның кез келген нүктесінің ескі және жаңа проекциялары айналдыру осіне перпендикуляр бір түзудің бойында орналасады;

2. фигураның кез келген кесіндісінің жаңа проекциясының ұзындығы оның нақты шамасына тең болады.



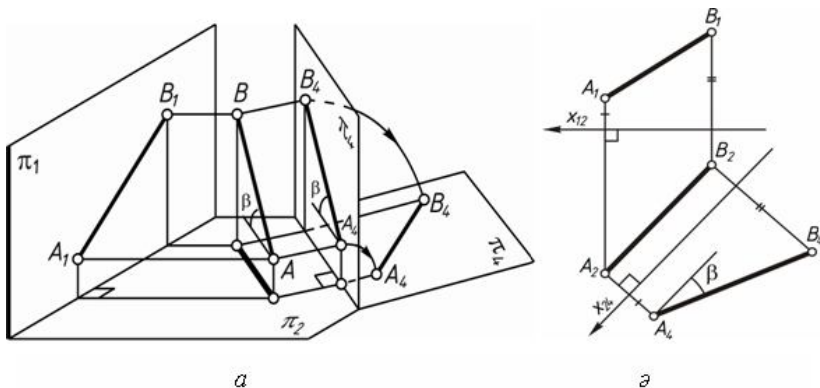
7.8-сурет

7.8-суретте  $ABC$  үшбұрышымен берілген жазықтықта  $A$  төбесі және  $I$  нүктесі арқылы горизонталь жүргізілген. Горизонтальді айналдыру осі ретінде қабылдаймыз.  $A$  және  $I$  нүктелері айналдыру кезінде қозғалыссыз болады.  $B$  және  $C$  нүктелері ось төңірегінде шеңбер бойымен қозғалады. Бұл шеңберлердің горизонталь проекциялары ось проекциясына перпендикуляр түзулер болады. Үшбұрыш горизонталь орналасу үшін,  $B$  төбесінің айналу радиусы өзінің нақты шамасына проекциялану керек.  $R_B$  радиусының ұзындығын тік бұрышты үшбұрыш тәсілімен анықтауға болады.  $B$  төбесінің айналу радиусының горизонталь жағдайдағы орнын анықтаған соң,  $C$  төбесінің айналу траекториясының проекциясы мен  $B'I$  түзуінің қиылысында  $C'$  төбесін анықтаймыз. Табылған  $AB'C'$  проекциясы  $ABC$  үшбұрышының нақты шамасы болады.

#### 7.4. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілі

Бұл тәсілде қарастырылып отырған фигура қозғалмайды да, проекциялар жазықтықтарының жүйесі жаңа өзара перпендикуляр проекциялар жазықтықтары жүйесімен

алмастырылады (7.9-сурет). Жаңа проекциялар жазықтықтарының жүйесін берілген фигура дербес жағдайда болатындай етіп қабылдайды.



7.9-сурет

**Түрлендіру инварианттары:** нүктенің жаңа проекциясынан жаңа оське дейінгі қашықтық оның ескі проекциясынан ескі оське дейінгі қашықтыққа тең.

Мысалы,  $AB$  кесіндісінің нақты шамасын анықтау керек. Ол үшін  $AB$  түзуін деңгей түзуіне түрлендіру керек. 7.9, а, ә - суреттерінде жаңа ось  $AB$  түзуінің горизонталь  $A_2B_2$  проекциясына параллель, ал жаңа  $\square_4$  проекция жазықтығы  $AB$  түзуіне параллель орналасқан.  $AB$  түзуі  $\square_4$  проекция жазықтығына нақты шамасымен проекцияланады. Жаңа  $\square_4$  проекция жазықтығы мен  $x_{24}$  осі түзуден кез келген қашықтықта орналасуына болады, оларды түзудің өзімен және оның проекциясымен беттестіріп қабылдаса да болады.

### **Бақылау сұрақтары:**

1. Жазық-параллель ығыстыру тәсілінің инварианттарын айтыңыз.
2. Сызбаны түрлендіру тәсілдерімен шығарылатын негізгі төрт есепті атаңыз.
3. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен түрлендірудің мәні неде?

4. Бір ғана проекциялар жазықтығын алмастырумен шығарылатын есептерді атаңыз.

5. Екі проекциялар жазықтықтарын алмастырумен шығарылатын есептерді атаңыз.

6. Проекциялар жазықтығына перпендикуляр осьтен айналдыру тәсілінің мәні неде?

7. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен жазық фигураның нақты шамасын анықтаудың ретін айтып беріңіз.

## 8. ҚИСЫҚТАР

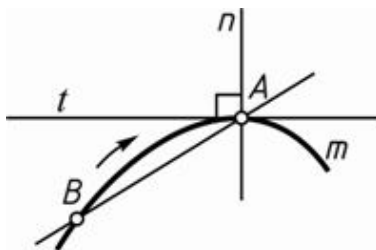
Қисық – нүктелердің бірпараметрлік жиыны. Сызба геометрияда қисық сызық кеңістікте үздіксіз қозғалатын нүктенің траекториясы ретінде қарастырылады.

Қисықтарды **жазықтық** және **кеңістік** қисықтары деп екі топқа бөледі.

Барлық нүктелері бір жазықтықта жататын қисықтарды **жазықтық** қисықтары (эллипс, парабола, гипербола және т.б.) деп атайды. Барлық нүктелері бір жазықтықта жатпайтын қисықтарды **кеңістік** (цилиндрлік, конустық бұрама сызықтар және т.б.) қисықтары деп атайды. Қисық *аналитикалық* жолмен, яғни алгебралық (эллипс, парабола, гипербола және т.б.) немесе трансценденттік (синусоида және т.б.) теңдеумен берілуі мүмкін. Кейбір сызықтар тек қана *графикалық* жолмен беріледі, мысалы, топографиялық картадағы горизонтальдар.

Алгебралық қисықтың теңдеуінің дәрежесі қисықтың *ретін* анықтайды. Алгебралық қисықтың реті оның түзумен (кеңістік қисығы үшін жазықтықпен) қиылысу нүктелерінің санымен анықталады.

Берілген  $m$  қисығының  $A$  нүктесіндегі  $t$  жанамасы деп  $B$  нүктесінің  $A$  нүктесіне ұмтылғандағы  $AB$  қиюшысының шектік жағдайын айтады.  $A$  нүктесі жанасу нүктесі деп аталады. Қисық жазықтығында жанасу нүктесінде жанамаға перпендикуляр жүргізілген түзу қисықтың нормалы деп аталады ( $A \in n \perp t$ ).



8.1-сурет

Қисық проекцияларының қасиеттері:

1) егер нүкте қисық сызықта жатса, онда оның проекциялары да қисық сызықтың аттас проекцияларына тиісті болады;

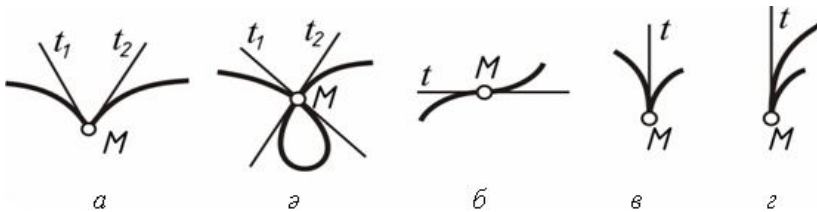
2) қисық сызықтың жанамасы осы қисық сызықтың проекциясының жанамасына проекцияланады (егер проекциялау бағыты мен жанама параллель болмаса).

### 8.1. Жазықтық қисықтары

Егер нүктенің қозғалу бағыты және оның үстіне жанаманың айналу бағыты да өзгермесе, онда оны **қарапайым** нүкте деп атайды.

Егер нүктенің қозғалу бағыты немесе жанаманың айналу бағыты өзгеретін болса, онда оны **ерекше** нүкте деп атайды. Оларға мынадай нүктелер жатады (8.2-сурет):

а) сыну нүктесі – бұл нүктеде қисықтың екі жанамасы болады және бағыты «секірмелі» өзгереді;



8.2-сурет

ә) тораптық нүкте – бұл нүктеде қисық өзімен-өзі қиылысады;

б) бұрылу нүктесі – бұл нүктеде жанаманың бағыты өзгереді;

в) бірінші реттік қайту нүктесі;

г) екінші реттік қайту нүктесі.

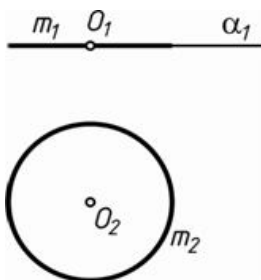
### 8.2. Шеңбердің проекциялары

Сызбаларды орындау кезінде шеңбердің тікбұрышты проекцияларын сызуға тура келеді. Шеңбердің тікбұрышты проекциясы эллипс болады. Шеңбердің деңгейлік түзуде жататын диаметрі эллипстің үлкен осіне проекцияланады. Ал

проекция жазықтығымен ең үлкен бұрыш жасайтын диаметрі эллипстің кіші осіне проекцияланады.

Үш түрлі жағдайды қарастырып көрейік.

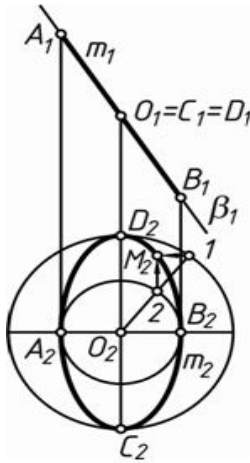
1. Берілген шеңбер деңгейлік жазықтықта орналасқан. 8.3-суретте  $m$  шеңбері  $\alpha$  горизонталь жазықтығында орналасқан. Бұл жағдайда  $m$  шеңбері горизонталь проекциялар жазықтығына нақты шамасымен проекцияланады, ал фронталь проекциялар жазықтығына  $\alpha$  жазықтығының фронталь ізімен беттесетін кесінді түрінде проекцияланады.



8.3-сурет

2. Берілген шеңбер проекциялаушы жазықтықта орналасқан. 8.4-суретте  $m$  шеңбері  $\beta$  фронталь проекциялаушы жазықтығында орналасқан. Бұл жағдайда  $m$  шеңбері фронталь проекциялар жазықтығына  $\beta$  жазықтығының фронталь ізімен беттесетін кесінді түрінде, ал горизонталь проекциялар жазықтығына эллипс болып проекцияланады.

Эллипстің  $C_2D_2$  үлкен осі шеңбердің диаметріне тең болады. Эллипстің кіші осі фронталь орналасқан  $AB$  кесіндісінің  $A_2B_2$  горизонталь проекциясы болады. Эллипсті салу үшін диаметрлері оның үлкен және кіші осьтеріне тең, центрі  $O_2$  болатын екі шеңбер сызу керек.  $O_2$  нүктесінен екі шеңберді де қиятын түзу жүргіземіз. Үлкен шеңбермен қиылысу  $1$  нүктесінен үлкен оське перпендикуляр, ал кіші шеңбермен қиылысу  $2$  нүктесінен кіші оське перпендикуляр түзулер жүргіземіз. Екі түзудің қиылысу нүктесі  $M_2$  – ізделінді эллипстің бір нүктесі болады. Эллипстің бірнеше нүктелерін тауып алып, оларды лекалық сызғыштың көмегімен қосу керек.



8.4-сурет

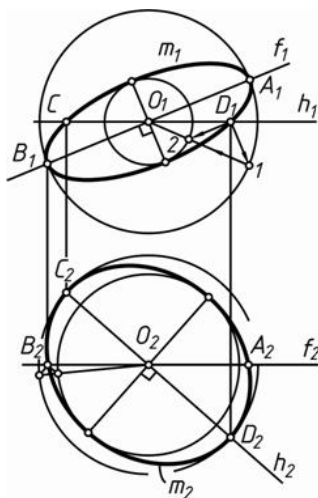
3. Берілген шеңбер жалпы жағдайдағы жазықтықта орналасқан. Бұл жағдайда шеңбер екі проекциялар жазықтығына да эллипс түрінде проекцияланады. 8.5-суретте  $\gamma(f \cap h)$  жазықтығында орналасқан және центрі  $O = f \cap h$  нүктесі болып табылатын  $m \square (O, R)$  шеңберін салу көрсетілген. Фронталь проекциялар жазықтығында  $m_1$  эллипсінің үлкен осі  $A_1B_1=2R$  кесіндісін фронтальдің фронталь проекциясы бойына саламыз. Ал горизонталь проекциялар жазықтығында  $m_2$  эллипсінің үлкен осі  $C_2D_2=2R$  кесіндісін горизонтальдің горизонталь проекциясы бойына саламыз.  $A, B$  нүктелерінің горизонталь проекциялары  $f$  фронталінің  $f_2$  горизонталь проекциясында, ал  $C, D$  нүктелерінің фронталь проекциялары  $h$  горизонталінің  $h_1$  фронталь проекциясында табылады. Эллипстердің кіші осьтерін салу үшін олардың үлкен осьтеріне перпендикуляр түзулер жүргізіледі. Фронталь проекциялар жазықтығындағы  $m_1$  эллипсінің кіші диаметрін анықтаймыз:

- ізделінді эллипстің  $D_1$  нүктесі арқылы үлкен және кіші осьтерге перпендикуляр түзулер жүргіземіз;

- үлкен оське перпендикуляр түзудің диаметрі  $A_1B_1$  кесіндісі болатын шеңбермен қиылысу  $I$  нүктесін белгілейміз;

- кіші оське перпендикуляр түзудің  $O_1I$  түзуімен қиылысу  $2$  нүктесін анықтаймыз;

-  $O_1 2$  кесіндісі ізделінді  $m_1$  эллипсінің кіші осінің жартысына тең болады.



8.5-сурет

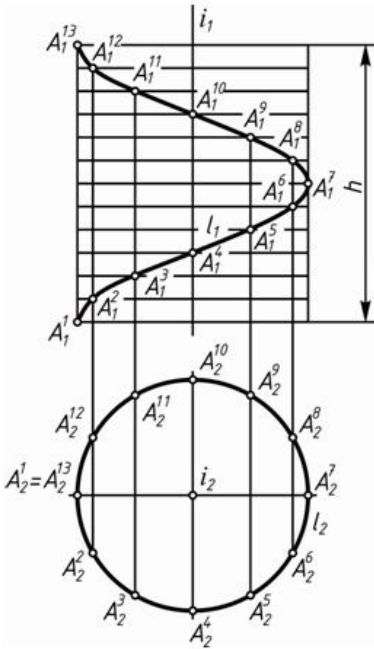
Дәл осылай  $m$  шеңберінің горизонталь проекциясы  $m_2$  эллипсінің де кіші осі анықталады. Эллипстердің үлкен және кіші осьтері белгілі болғаннан кейін, оларды бір центрден жүргізілетін екі шеңбер әдісімен салуға болады.

### 8.3. Кеңістік қисықтары

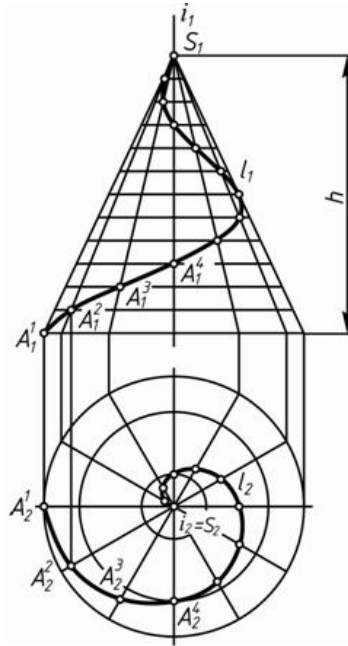
Кеңістік қисықтарының ішінде ең көп тарағандары – цилиндрлік және конустық бұрама сызықтар.

Цилиндрлік бұрама сызық деп  $A$  нүктесінің айналу  $i$  осіне параллель орналасқан және одан бірқалыпты айналатын  $a$  түзуі бойымен бірқалыпты қозғалғандағы траекториясын айтамыз. 8.5-суреттегі  $i$  осі - горизонталь проекциялаушы түзу. Бұл жағдайда цилиндрлік бұрама сызықтың фронталь проекциясы - синусоида, ал горизонталь проекциясы - шеңбер болады. Бұрама сызықтың  $i$  осінен толық бір айналғандағы бөлігін орам деп атайды. Ал осьтің бір орамға сәйкес кесіндісінің  $h$  ұзындығын *адым* деп атайды. Егер  $A$  нүктесі  $i$  осінен сағат тілінің бағытымен айналғанда бізден қашықтайтын болса, онда ол

оңқай деп аталады. Егер  $A$  нүктесі  $i$  осінен сағат тілінің бағытымен айналғанда бізге жақындайтын болса, онда ол солақай деп аталады.



8.5-сурет



8.6-сурет

Адымы  $h$  болатын  $l$  бұрама сызығының  $l_1$ ,  $l_2$  проекцияларын салу үшін осі  $i$  түзуі болатын, радиусы  $r$ , биіктігі  $h$  айналу цилиндрін салу керек. Бұрама сызықтың  $l_2$  горизонталь проекциясы цилиндрдің горизонталь проекциясымен беттеседі. Бұрама сызықтың  $l_1$  фронталь проекциясын салу үшін цилиндрдің  $l_2$  горизонталь проекциясы мен  $h$  адымын бірдей бөліктерге бөлу керек (8.6-суретте 12 бөлікке бөлінген). Бөлу нүктелері арқылы жүргізілген аттас вертикаль және горизонталь түзулердің қиылысу нүктелері бұрама сызық нүктелерінің фронталь проекциялары болады.

Конустық бұрама сызықтың фронталь проекциясы амплитудасы азая беретін синусоида, ал горизонталь проекциясы Архимед спиралі болады (8.7-сурет).

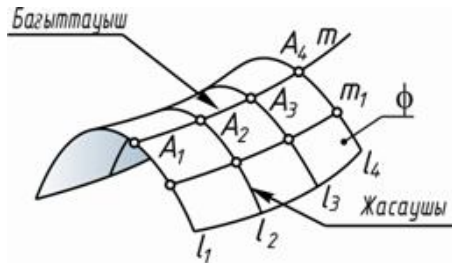
***Бақылау сұрақтары:***

1. Қандай қисық сызықтар алгебралық деп аталады?
2. Қандай қисық сызықтар трансценденттік деп аталады?
3. Алгебралық қисықтың реті сызбада қалай анықталады?
4. Қисық сызықтың қандай нүктелері ерекше деп аталады?
5. Цилиндрлік бұрама сызық қалай пайда болады?
6. Конустық бұрама сызық қалай пайда болады?
7. Гиперболаның параллель проекциясы парабола бола алады ма?

## 9. БЕТТЕР

### 9.1. Беттердің жасалуы мен берілуі

Сызба геометрияда беттер кеңістікте белгілі бір заңдылықпен үздіксіз қозғалатын сызықтың орындарының жиыны ретінде қарастырады. Беттің жасалуының бұл тәсілін *кинематикалық* деп атайды. Өзінің қозғалысымен бетті жасайтын  $l$  сызығын беттің *жасаушысы* деп атайды (9.1-сурет). Жасаушының кеңістіктегі қозғалысы мен пішімінің өзгеру заңдылығы әдетте бағыттаушы сызықтармен беріледі.



9.1-сурет

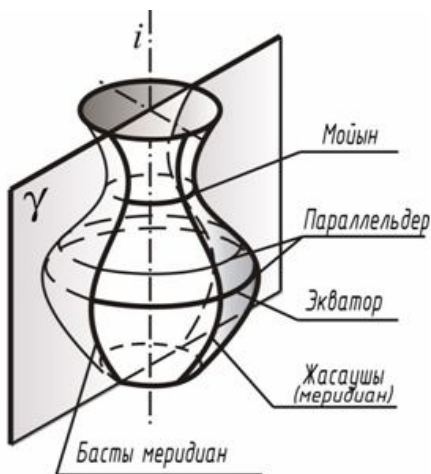
Бетті анықтайтын шарттарды беттің *анықтауышы* деп атауға келісілген. *Анықтауыш* — геометриялық және алгоритмдік деп аталатын екі бөліктен тұрады.

Егер кеңістіктің кез келген нүктесінің бетке тиістілігіне қатысты сұраққа жауап беруге мүмкіндік болса, онда бет берілді деп есептеледі.

### 9.2. Айналу беттері

Жасаушының айналу осі болып табылатын қозғалмайтын түзуден айналуының нәтижесінде жасалатын бетті *айналу беті* деп атайды.

Сызбада айналу осін көбіне проекция жазықтығына перпендикуляр орналастырады.

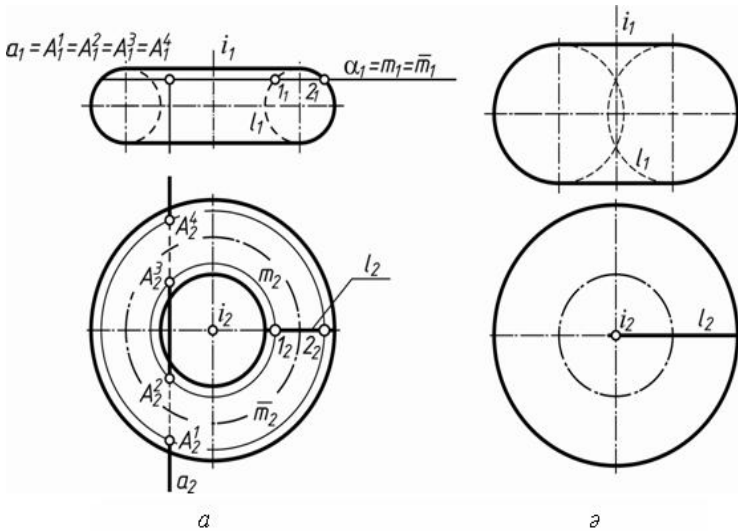


9.2-сурет

Жасаушының барлық нүктелері шеңберлер бойымен қозғалады. Бұл шеңберлер *параллельдер* деп аталады. Ең үлкен параллельді *экватор* деп, ал ең кішісін – *мойын* деп атайды. Егер айналу осі вертикаль орналасса, онда барлық параллельдер горизонталь проекция жазықтығына бұрмалаусыз нақты шамаларына проекцияланады. Айналу осі арқылы өтетін жазықтықтар бетті *меридиан* деп аталатын сызықтар бойымен қияды.

Проекциялар жазықтығына параллель жазықтықта орналасқан меридиандар *басты меридиандар* деп аталады және олардың проекциялар жазықтығындағы проекциясы *беттің нұсқасы (очеркі)* болып табылады.

Алгебралық  $n$ -реттік қисық сызықты кез келген бір түзуден айналдырғанда  $2n$ -реттік айналу беті пайда болады. Шынымен де,  $n$ -реттік жасаушы  $i$  осіне перпендикуляр  $\alpha$  жазықтығымен  $n$  нүктелерде қиылысады. Бұл нүктелердің әрқайсысы жасаушыны  $i$  осінен айналдырғанда  $\alpha$  жазықтығында шеңбер сызады. Сондықтан  $\alpha$  жазықтығындағы кез келген  $a$  түзуі әр шеңберді екі нүктеде қияды, ал барлық  $n$  шеңберлерді  $2n$  нүктелерде қияды, ендеше  $a$  түзуі айналу бетін  $2n$  нүктелерде қияды. Яғни айналу бетінің реті  $2n$  болады.



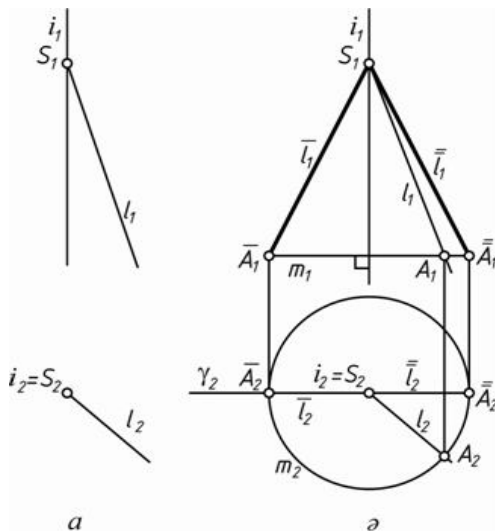
9.3-сурет

Мысалы, техникада кең қолданыс тапқан **тор** бетін қарастырайық. Тор беті  $l$  шеңберін центрі арқылы өтпейтін, бірақ шеңбер жазықтығында орналасқан айналу осі болатын  $i$  түзуінен айналдыру арқылы жасалады (9.3-сурет). Айналу осіне перпендикуляр  $\alpha$  жазықтығы  $l$  жасаушысын 1 және 2 нүктелерінде қияды. 1 және 2 нүктелері  $i$  осінен айналғанда  $m$  және  $\bar{m}$  шеңберлерін сызады.  $\alpha$  жазықтығындағы  $a$  түзуі  $m$  шеңберін екі нүктеде және  $\bar{m}$  шеңберін екі нүктеде қиып өтеді. Яғни тор 4-ші реттік бет болып табылады.

Егер айналу осі  $i$  түзуі жасаушы  $l$  шеңберінен тыс орналасса тор **ашық** деп (9.3 а-сурет), ал  $i$  түзуі жасаушы  $l$  шеңберін қиятын болса тор **жабық** деп аталады (9.3 б-сурет).

Жасаушысы түзу болатын айналу беттерін қарастырайық. Жасаушы  $l$  түзуін  $i$  осінен айналдырғанда екінші реттік айналу беті пайда болады:

- егер  $l \cap i$  – конустық айналу беті;
- егер  $l \parallel i$  – цилиндрлік айналу беті;
- егер  $l \perp i$  – бірқуысты айналу гиперболоиды.



9.4-сурет

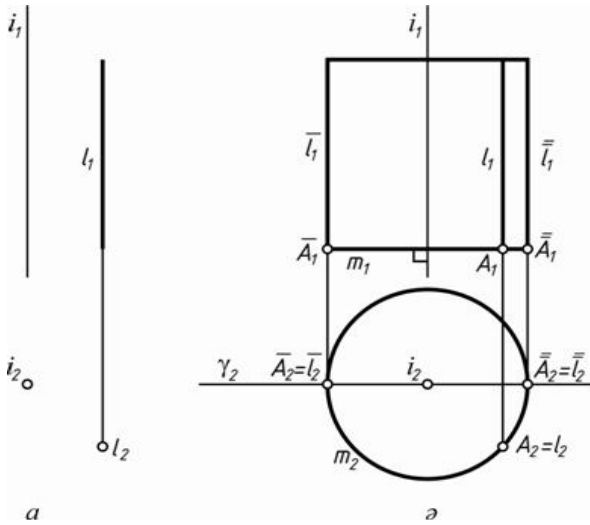
9.4-суретте анықтаушымен берілген  $\alpha(l \cap i)$  айналу конусының нұсқасын салу көрсетілген. Берілген  $l$  түзуінің бойында  $A$  нүктесін таңдап алады.  $A$  нүктесі  $i$  осінен айналғанда оның горизонталь проекциясы  $m_2$  шеңбері бойымен, ал фронталь проекциясы айналу осінің  $i_1$  проекциясына перпендикуляр  $m_1$  түзуінің бойымен қозғалады.  $m_2$  шеңбері мен  $\gamma$  бас меридиан жазықтығының  $\gamma_2$  ізімен қиылысу нүктелерін

анықтайды:  $m_2 \cap \gamma_2 = \overline{A_2}$ ,  $m_2 \cap \gamma_2 = \overline{\overline{A_2}}$ .  $\overline{l_2} = (S_2 \overline{A_2})$

және  $\overline{\overline{l_2}} = (S_2 \overline{\overline{A_2}})$  түзулері конустың бас меридиандарының горизонталь проекциялары болады. Байланыс сызықтары

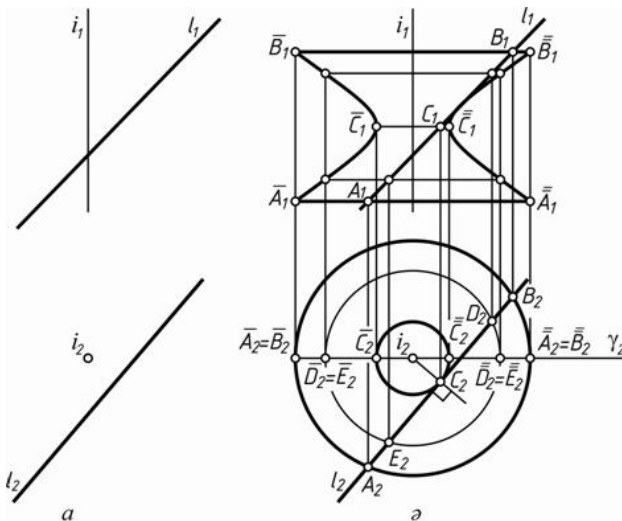
арқылы  $m_1$  түзуінің бойынан  $\overline{A}$  және  $\overline{\overline{A}}$  нүктелерінің фронталь проекцияларын анықтайды.  $\overline{l_1} = (S_1 \overline{A_1})$  және  $\overline{\overline{l_1}} = (S_1 \overline{\overline{A_1}})$  түзулері конустың бас меридиандарының фронталь проекциялары болады.

9.5-суретте анықтаушымен берілген  $\alpha(l || i)$  айналу цилиндрінің нұсқасын салу көрсетілген.



9.5-сурет

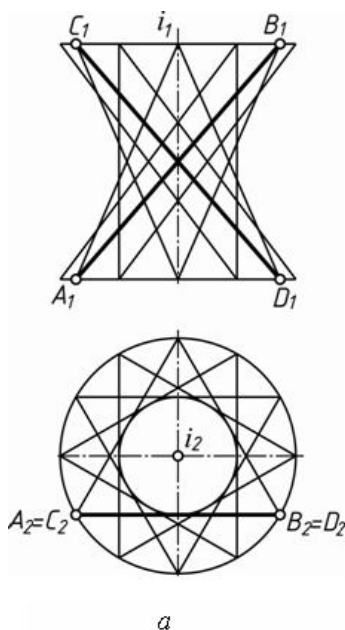
9.6-суретте анықтаушымен берілген  $\alpha(l \bullet i)$  бірқуысты гиперболоидтың нұсқасын салу көрсетілген.



9.6-сурет

Дәл осы бірқуысты гиперболоидты  $l$  жасаушысы қарама-қарсы көлбеген кезде де жасауға болады. Сонда бірқуысты гиперболоидтың екі жасаушысы болады, оның беті түзусызықты жасаушылардың екі тобынан тұрады. 9.7 а-суретте бірқуысты гиперболоид түзусызықты жасаушылардың екі тобынан құрастырылғаны көрсетілген. Екі топ жасаушыларының фронталь проекциялары да, горизонталь проекциялары да беттеседі. Бір топтың жасаушылары бір-бірімен қиылысады. Ал бір топ жасаушысымен екінші топтың жасаушысы қиылыспайды.

Бірқуысты гиперболоидтың осы қасиеттерін орыстың атақты инженері В. Г. Шухов (1853-1939 жж.) көптеген құрылыс ғимараттарында қолданды. Оның ішінде ең әйгілісі Мәскеудегі Шаболовкада 1921 жылы салынған радиомұнара. Шухов мұнарасы әрқайсысы биіктігі 25 м бірқуысты гиперболоид пішіміндегі 6 бөліктен тұрады (9.7 ә-сурет).



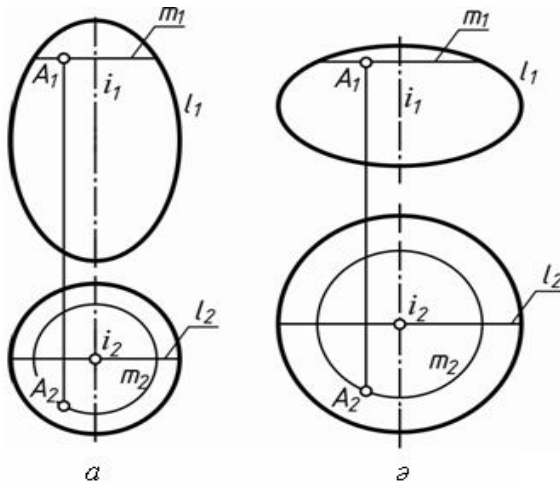
9.7-сурет

Мұнараның әрбір бөлігі металл өзектерден құрылған қаңқа болып келеді. Мұнараның жалпы биіктігі 160 м. Бұл конструкцияның жеңілдігі, технологиялық артықшылығы мен тиімділігі, пішімінің өзіндік әдемілігі оның сәулет пен құрылыста кең қолданыс табуына себеп болды. Сонымен қатар бұл конструкция биік ғимараттар үшін қауіпті болып табылатын желдің күшіне қарсы беріктігімен де ерекшеленді.

Айналу бетінің түрі жасаушының пішіміне және оның айналу осіне қатысты орналасуына байланысты. Симметрия жазықтығы бар  $n$  – реттік қисық сызығын осы симметрия жазықтығында орналасқан айналу осінен айналдырғанда  $n$  – реттік айналу беті пайда болады.

1. **Сфера.** Шенберді диаметрінен айналдыру арқылы жасалады.

2. **Айналу эллипсоиды.** Бұның меридианы эллипс болып табылады. Егер эллипс өзінің үлкен осінен айналса эллипсоид *созылған* деп (9.8 а-сурет), ал кіші осінен айналса *қысылған* деп аталады (9.8 ә-сурет) .

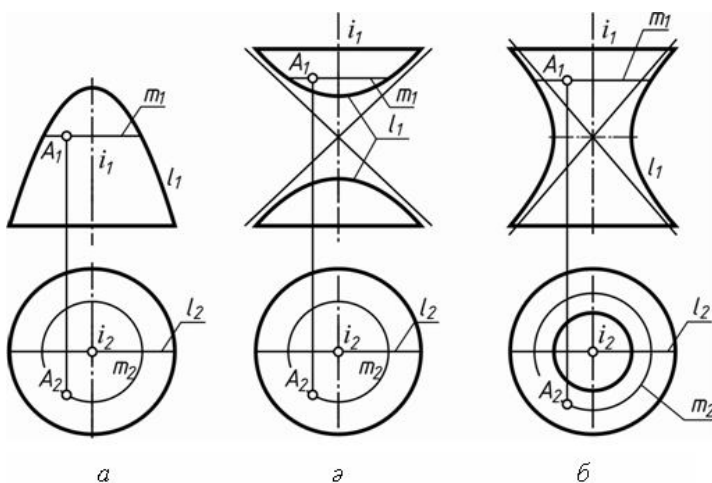


9.8-сурет

3. **Айналу параболоиды.** Меридианы парабола болып табылады (9.9 а-сурет).

4. **Айналу гиперboloиды.** Беттің меридианы – гипербола. Егер айналу осі гиперболаның нақты осімен сәйкес болса, екі қуысты гиперboloид (9.9 ә-сурет), ал егер айналу осі гиперболаның жорамал осімен сәйкес болса, бір қуысты гиперboloид жасалады (9.9 б-сурет).

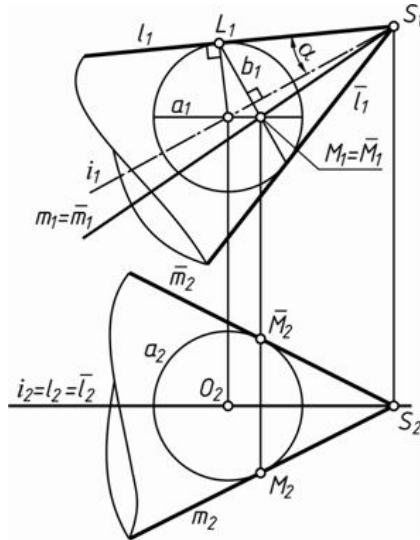
Айналу осі проекциялаушы түзу болмаған жағдайдағы айналу бетінің нұсқаларын салуды қарастыралық. Сызбада  $i$  фронталь түзуі мен оның бойында жатқан  $S$  нүктесі берілсін (9.10-сурет). Төбесі  $S$  нүктесі, айналу осі  $i$  түзуі болатын  $\phi(i, l)$  айналу конусының нұсқалық жасаушыларының проекцияларын салу керек. Жасаушы  $l$  түзуі  $i$  осімен жасайтын  $\alpha$  бұрышы белгілі болсын.



9.9-сурет

Айналу осі  $i$  фронталь түзу болғандықтан  $\alpha$  бұрышы  $\pi_1$  проекциялар жазықтығына натурал шамасымен проекцияланады. Сондықтан  $\pi_1$  проекциялар жазықтығында нұсқалық жасаушылардың  $l_1$ ,  $\bar{l}_1$  проекциялары  $i_1$  проекциясымен  $\alpha$  бұрышын жасайды, ал  $\pi_2$  проекциялар жазықтығында олардың проекциялары беттеседі.  $l_2 = \bar{l}_2 = i_2$ .

Айналу конусының  $\pi_2$  проекциялар жазықтығында нұсқалық жасаушыларының проекцияларын салу үшін  $i$  осінің бойында қалауымызша  $O$  нүктесін таңдап алып, конусқа іштей  $\delta$  сферасын сызамыз. Сфераның радиусын анықтау үшін  $O_1$  нүктесінен  $l_1$  түзуіне перпендикуляр тұрғызамыз. Енді радиусы  $O_1l_1$  кесіндісіне тең шеңбер сызамыз. Көмекші сфера  $\phi$  конусымен  $b$  параллелі бойымен жанасады.



9.10-сурет

Сфераның экваторы  $a$  шеңбері мен  $b$  шеңбері  $M$  және  $\overline{M}$  нүктелерінде қиылысады.  $\pi_1$  проекциялар жазықтығында олардың проекциялары  $a_1$  және  $b_1$  түзулерінің қиылысында табылады:  $M_1 = \overline{M}_1 = a_1 \cap b_1$ .  $\pi_2$  жазықтығында олардың проекциялары байланыс сызығының көмегімен  $a_2$  шеңберінің бойында табылады.  $M_2$  және  $\overline{M}_2$  нүктелері  $m_2$  және  $\overline{m}_2$  нұсқалық жасаушылардың көмекші сферамен жанасу нүктелері болып табылады:  $m_2 = (S_2 M_2)$ ,  $\overline{m}_2 = (S_2 \overline{M}_2)$ .

Ал бұл нұсқалық жасаушылардың фронталь проекциялары  $m_1=(S_1M_1)$  және  $m_1=(S_1\overline{M}_1)$  айналу конусының  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына қатысты көріну сызықтығын анықтайды.

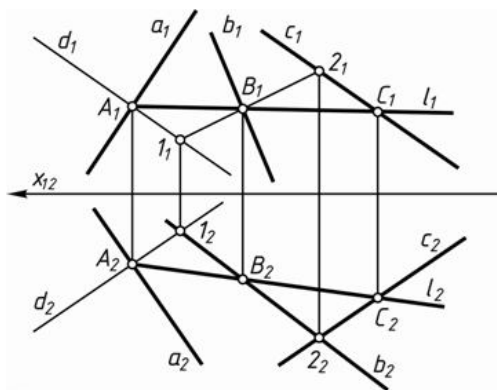
### 9.3. Түзусызықтық беттер

Түзудің белгілі бір заңды қозғалысынан пайда болған бетті **түзусызықтық** деп атайды.

Түзусызықтық беттер техникада, құрылыста кең қолданыс тапқан.

Түзусызықтық бет жасаушысының қозғалысы бағыттаушы сызықтармен анықталады. Бағыттаушы сызықтардың саны үштен аспайды.

Егер түзусызықты беттің  $a$  бағыттаушысы  $n_1$  реттік,  $b$  бағыттаушысы  $n_2$  реттік,  $c$  бағыттаушысы  $n_3$  реттік алгебралық қисықтар болса, онда  $\phi(a, b, c)$  беті де алгебралық болады және оның реті  $n=2n_1n_2n_3$  болады.



9.11-сурет

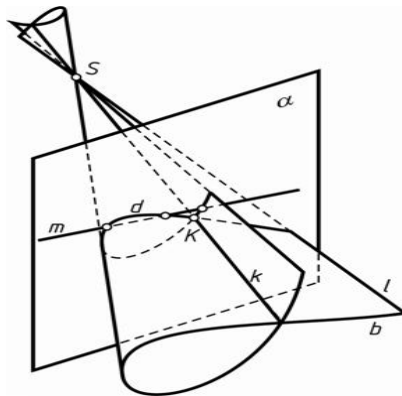
Беттің бағыттаушылары айқас  $a, b, c$  түзулері болсын (9.11-сурет). Кез келген бағыттаушының бір нүктесі арқылы тек бір ғана жасаушы түзуі өтеді. Беттің кездейсоқ бір жасаушысын салу үшін  $a$  түзуінің бойынан  $A$  нүктесін таңдап,  $\alpha(A, c)$  жазықтығын қарастырамыз.  $\alpha(A, c)$  жазықтығының  $b$  түзуімен

қиылысу нүктесін анықтаймыз. Ол үшін алдымен  $A$  нүктесі арқылы  $c$  түзуіне параллель  $d$  түзуін жүргіземіз. Енді  $\alpha(A, c)$  жазықтығы өзара параллель  $d$  және  $c$  түзулерімен анықталады.  $\alpha(A, c)$  жазықтығы мен  $b$  түзуінің қиылысу нүктесін табамыз:  $B = \alpha(d \parallel c) \cap b$ .  $A$  және  $B$  нүктелері арқылы өтетін  $l$  түзуі  $c$  түзуін де қиып өтеді. Егер  $l$  жасаушысының  $A$  нүктесі  $a$  түзуімен қозғалатын болса, бірқуысты гиперболоид деп аталатын бет жасалады. Бұл беттің айналу бірқуысты гиперболоидынан айырмашылығы айналу осіне перпендикуляр жазықтықпен қимасы эллипс болады.

Бір қуысты гиперболоидтың барлық бағыттаушылары түзулер, яғни 1-ші реттік қисықтар. Сондықтан бұл бет 2-ші реттік болады:  $n = 2n_1n_2n_3 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ . Шынында да,  $\alpha$  жазықтығы  $\phi(a, b, c)$  бетін қиылысатын  $b$  және  $l$  түзулері бойымен қияды. Яғни,  $\phi(a, b, c)$  беті екінші реттік болып табылады.

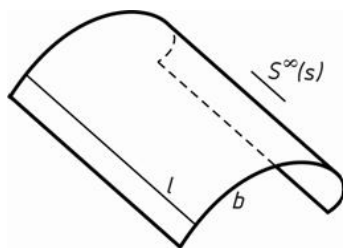
### 9.3.1. Конустық және цилиндрлік беттер

Конустық бет қозғалмайтын  $S$  нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы  $b$  қисығымен қиылысатын  $l$  түзуінің қозғалысынан пайда болады (9.12-сурет). Егер бағыттаушы  $n$ -реттік  $b$  қисығы болса (жазықтық немесе кеңістік), онда конустық бет те  $n$ -реттік болады, яғни бетті қиятын кез келген  $\alpha$  жазықтығы оны  $n$ -реттік  $d$  қисығы бойымен қияды, ал кез келген  $m$  түзуі  $n$  нүктелерде қияды.

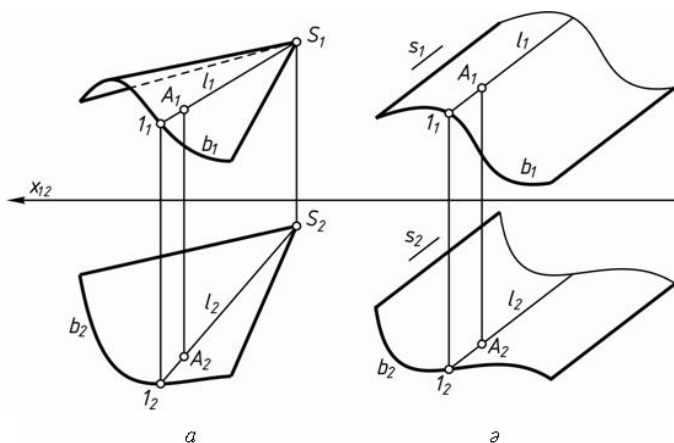


9.12-сурет

Цилиндрлік бет конустық беттің дербес жағдайы болып табылады (9.13-сурет). Мұнда беттің төбесі  $S^\infty$  өзіндіксіз болады. Сонда  $s$  түзуі цилиндрлік беттің жасаушыларының бағытын көрсетеді. Цилиндрлік беттің жасаушылары  $b$  бағыттаушыны қияды және өзара параллель болады.



9.13-сурет

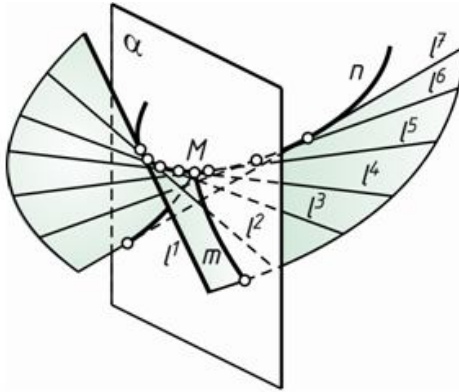


9.14-сурет

Конустық немесе цилиндрлік бетке тиісті нүктенің проекцияларын салу үшін олардың жасаушыларын қолданған ыңғайлы. 9.14 а-суретте конустық бетке тиісті  $A$  нүктесінің проекцияларын салу, ал 9.14 б-суретте цилиндрлік бетке тиісті  $B$  нүктесінің проекцияларын салу көрсетілген.

### 9.3.2. Кері қайту қыры бар беттер (торс беттері)

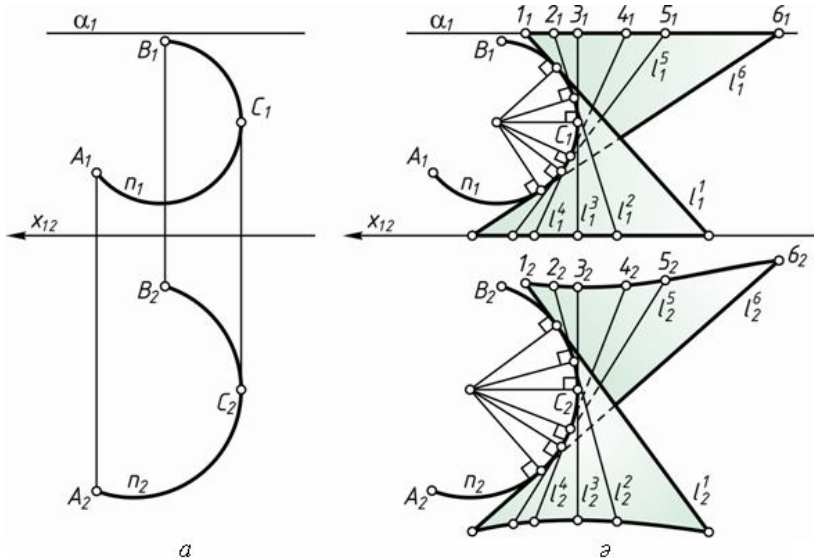
Кеңістік  $n$  қисығына жанамалар жиынынан жасалған бетті кері қайту қыры бар бет немесе торс деп атайды (9.15-сурет). Торс  $\lambda$  бетінің бағыттаушысы  $n$  қисығы кері қайту қыры деп аталады, өйткені  $\alpha$  жазықтығы бетті кері қайту нүктесі  $M=n\cap\alpha$  бар  $m$  қисығы бойымен қияды. Торс бетінің анықтаушысының геометриялық бөлігі кері қайту қырынан ғана тұрады:  $\lambda(n)$ .



9.15-сурет

Кері қайту қырымен берілген  $\lambda(n)$  торс бетінің проекцияларын салу керек (9.16,а-сурет). Кері қайту қырының  $A, B, C$  нүктелері берілген және оның фронталь  $n_1$  проекциясы -  $A_1, B_1, C_1$  арқылы өтетін шеңбер доғасы, ал горизонталь  $n_2$  проекциясы -  $A_2, B_2, C_2$  арқылы өтетін шеңбер доғасы. Торс беті  $\alpha(\alpha_1)$  горизонталь жазықтығымен және  $\pi_2$  проекциялар жазықтығымен шектелген.

Торс бетінің проекцияларын салу үшін оның бірнеше жасаушыларының проекцияларын салу керек. Әрбір жасаушының фронталь проекциясы бағыттаушының  $n_1$  проекциясына, ал горизонталь проекциясы бағыттаушының  $n_2$  проекциясына жанама болу керек.



9.16-сурет

Бағыттаушы  $n$  қисығының бойынан бірнеше нүкте таңдап алып, сол нүктелерде жанамалар саламыз. Ол үшін алдымен  $n_1$  және  $n_2$  доғаларының центрлерін тауып алып, таңдалған нүктелерде  $n_1$  және  $n_2$  доғаларына нормальдар салу керек. Ізделінді жанамалар осы нормальдарға перпендикуляр болады. Жасаушылардың фронталь проекцияларының  $\alpha$  жазықтығының  $\alpha_1$  ізімен және  $x_{12}$  осімен қиылысу нүктелерін табамыз, ал олардың горизонталь проекцияларын байланыс сызықтары бойымен анықтаймыз.

### 9.3.3. Параллелизм жазықтығы бар беттер (Каталан беттері)

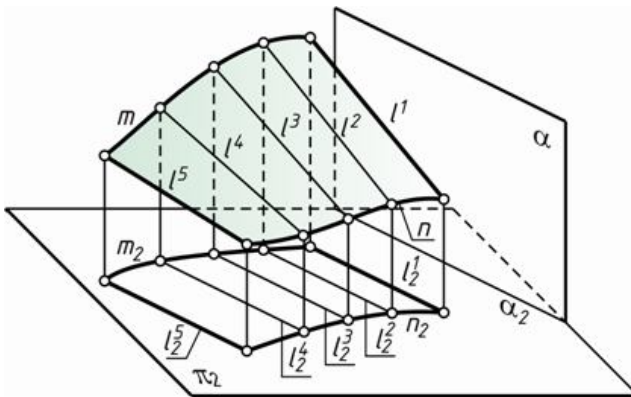
Түзусызықтық беттің бір бағыттаушысы шексіз қашықтықтағы  $C^\infty$  түзуі болса, ол түзуді сол түзу арқылы өтетін  $\alpha$  жазықтығы толық анықтайды. Беттің  $l$  жасаушысы  $a$  және  $b$  бағыттаушыларын қияды, әрі  $\alpha$  жазықтығына параллель болады. Сонда беттің анықтаушының құрамына  $a$ ,  $b$

қисықтары мен  $\alpha$  жазықтығы кіреді:  $\lambda(a, b, \alpha)$ . Бұндағы  $\alpha$  жазықтығы – параллелизм жазықтығы деп, ал  $\lambda$  беті **параллелизм жазықтығы бар бет** деп аталады. Параллелизм жазықтығы бар беттерді алғаш зерттеген оқымысты Е. Каталан. Сондықтан мұндай беттерді **Каталан беттері** деп те атайды. Каталан беттерінің  $a$  және  $b$  бағыттаушыларының түріне байланысты **цилиндронд**, **коноид** және **гиперболалық параболоид** деп аталатын түрлері болады.

Параллелизм жазықтығы бар беттің екі бағыттаушысы да қисық сызықтар болса, онда ол **цилиндронд** деп аталады.

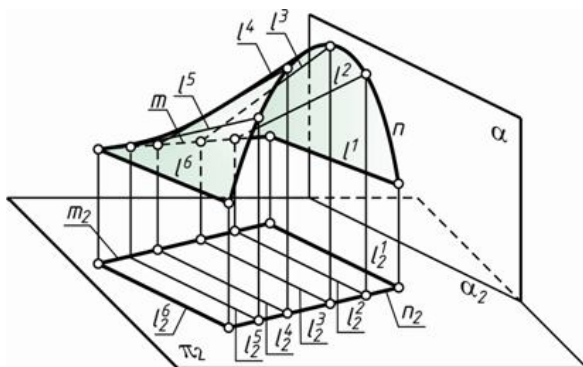
Параллелизм жазықтығын проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр етіп алған ыңғайлы. 9.17-суретте  $\lambda(m, n, \alpha)$  цилиндронды кескінделген. Параллелизм жазықтығы  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына перпендикуляр:  $\alpha \perp \pi_2$ . Беттің жасаушысы  $l$  түзуі  $\alpha$  жазықтығына параллель қозғалады:  $l_1 \parallel \alpha$ ,  $l_2 \parallel \alpha$ ,  $l_3 \parallel \alpha$ ,  $l_4 \parallel \alpha$ ,  $l_5 \parallel \alpha$ , ал оның  $\pi_2$  жазықтығындағы проекциялары  $\alpha$  жазықтығының ізіне параллель болады:  $l_2^1 \parallel \alpha_2$ ,  $l_2^2 \parallel \alpha_2$ ,  $l_2^3 \parallel \alpha_2$ ,  $l_2^4 \parallel \alpha_2$ ,  $l_2^5 \parallel \alpha_2$ .

Параллелизм жазықтығы бар беттің бір бағыттаушысы қисық, ал екіншісі түзу болса, онда ол **коноид** деп аталады.



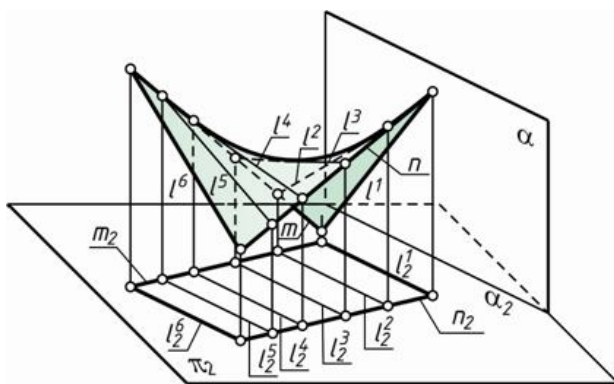
9.17-сурет

9.18-суретте  $\theta(m, n, \alpha)$  коноиды кескінделген. Бұл коноидтың  $m$  бағыттаушысы түзу, ал  $n$  бағыттаушысы қисық сызық. Суреттегі коноидтың жасаушылары горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болып берілген  $\alpha$  параллелизм жазықтығына параллель болады. Параллелизм жазықтығы горизонталь-проекциялаушы болғандықтан жасаушылардың горизонталь проекциялары  $\alpha_2$  ізіне параллель болады.



9.18-сурет

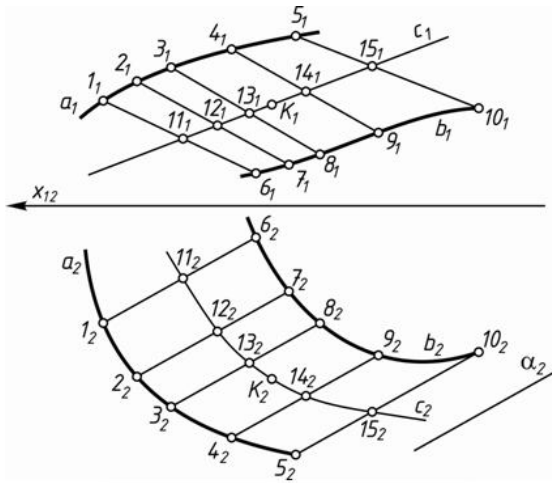
9.19-суретте  $\theta(m, n, \alpha)$  гиперболалық параболоиды кескінделген. Бұл беттің екі бағыттаушысы да түзу болады.



9.19-сурет

Гиперболалық параболоидтың жасаушылары горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болып берілген  $\alpha$  параллелизм жазықтығына параллель болады. Параллелизм жазықтығы горизонталь-проекциялаушы болғандықтан жасаушылардың горизонталь проекциялары  $\alpha_2$  ізіне параллель болады.

*Мысал.*  $\lambda(a,b,\alpha)$  цилиндроидына тиісті  $K(K_1)$  нүктесінің горизонталь проекциясын табу керек (9.20-сурет).



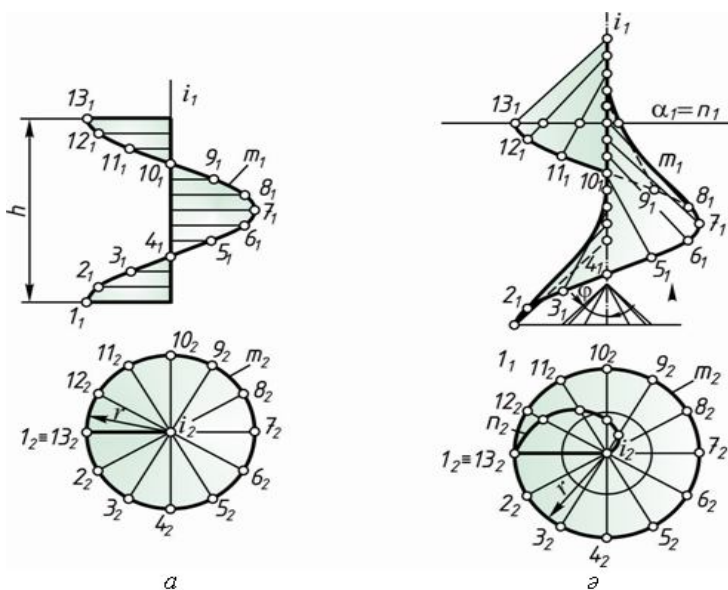
9.20-сурет

Алдымен  $\lambda(a,b,\alpha)$  цилиндроидының жасаушыларының жиынының проекцияларын салу керек. Цилиндроидтың  $\alpha$  параллелизм жазықтығы горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр болғандықтан жасаушылардың горизонталь проекциялары  $\alpha_2$  ізіне параллель болады. Жасаушылардың горизонталь проекцияларының  $a$  және  $b$  қисықтарының горизонталь проекцияларымен қиылысу нүктелерін белгілейміз. Байланыс сызықтары бойынша олардың фронталь проекцияларын анықтаймыз. Содан соң  $K_1$  арқылы кездейсоқ  $c$  сызығының фронталь проекциясын саламыз. Осы  $c$  сызығының  $c_2$  горизонталь проекциясының бойынан байланыс сызығы бойымен  $K$  нүктесінің  $K_2$  горизонталь проекциясын табамыз.

#### 9.4. Бұрама беттер

Сызықтың бұрама қозғалысынан жасалатын бетті **бұрама** бет деп атайды. Егер жасаушы бұрама қозғалыстың осімен қиылысатын болса, бұрама бет *жабық* деп аталады, ал егер қиылыспайтын болса – *ашық* деп аталады. Егер жасаушы түзу болса бет **геликоид** деп аталады. Егер жасаушы бұрама қозғалыстың осіне перпендикуляр болса – *тік* (9.21 *а*-сурет), ал қиғаш орналасса – *қиғаш* деп аталады (9.21 *ә*-сурет).

Тік геликоид  $i$  осімен тік бұрыш жасайтын  $l$  жасаушысының бұрама қозғалысынан пайда болады. 9.21 *а*-суретте  $\omega(i, m, \pi_2)$  жабық тік геликоиды көрсетілген. Тік геликоидтың жасаушылары  $i$  осі мен  $m$  бұрама сызығын қияды және  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына параллель.

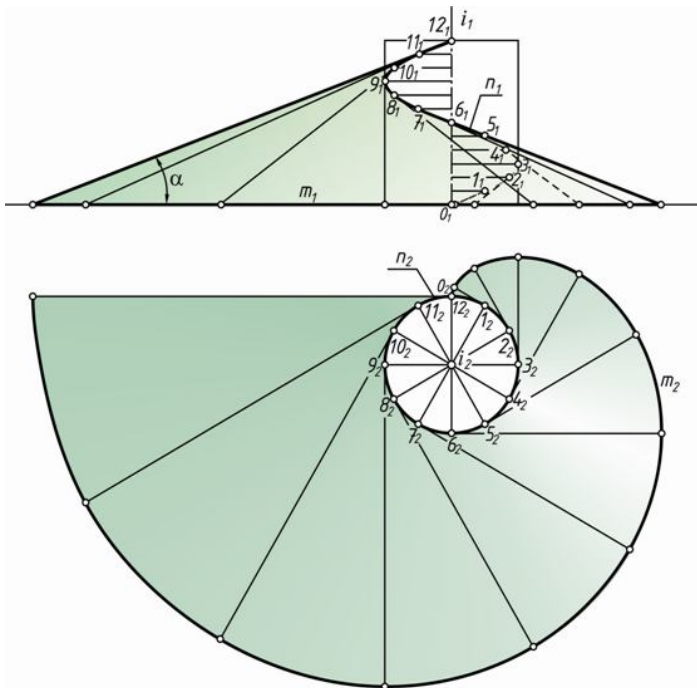


9.21-сурет

9.21 *ә*-суретте  $\theta(i, m, \varphi)$  жабық қиғаш геликоиды көрсетілген. Бұл геликоидтың жасаушылары  $i$  осімен  $\varphi$  бұрышын жасайды.

Егер ашық геликоидтың жасаушысы белгілі бір цилиндрлік бұрама сызыққа жанама қозғалса, геликоид *бұрама торс* деп немесе *эвольвенттік* деп аталады, өйткені оның нормаль қимасы (оське перпендикуляр) шеңбердің эвольвентасы болып табылады.

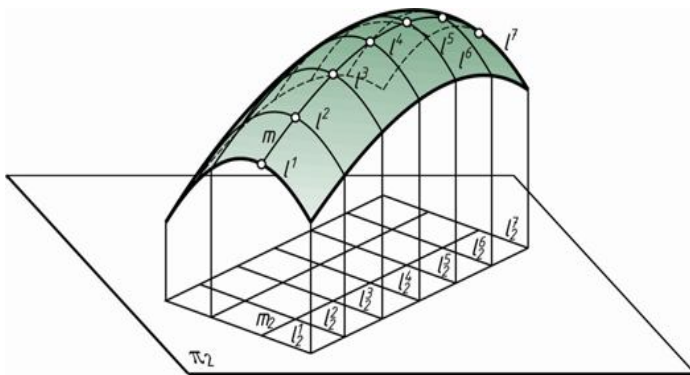
9.22-суретте эвольвенттік геликоидтың жасаушылары  $n$  цилиндрлік бұрама сызығына жанама қозғалады, сондықтан  $n$  кері қайту қыры болып табылады. Беттің горизонталь жазықтықпен  $m$  қиылысу сызығының горизонталь проекциясы эвольвента болып табылады. Эвольвенттік геликоидтың жасаушыларының барлығы горизонталь жазықтықпен көлбеулік бұрыштары ( $\alpha$ ) бірдей болғандықтан оны.



9.22-сурет

### 9.5. Параллель көшіру беттері

Жасаушының бағыттауыш бойымен параллель қозғалысынан *параллель көшіру беттері* пайда болады. 9.23-суретте  $l$  жасаушысының  $n$  бағыттауышы бойымен ілгерімелі параллель қозғалысы арқылы жасалған параллель көшіру беті көрсетілген. Параллель көшіру беттерінің маңызды технологиялық артықшылығы бар – олардың негізінде жобаланған тұтасқұймалы және құрама қабықшаларды жылжымалы қалыптың көмегімен жасауға болады.



9.23-сурет

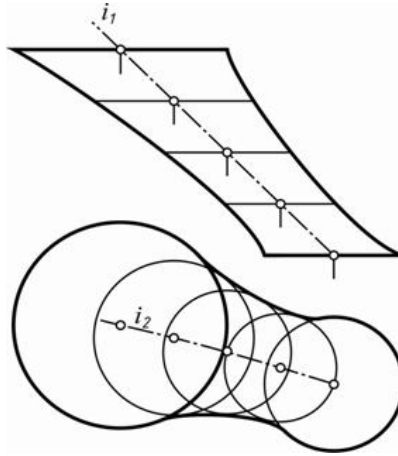
#### **Бақылау сұрақтары:**

1. Беттің анықтауышы деген не?
2. Айналу беттерінің негізгі қасиеттерін айтыңыз?
3. Қандай бұрама беттер геликоид деп аталады?
4. Бетке тиісті нүктені немесе сызықты қалай салады?
5. Жасаушысы түзу болатын айналу беттерін атаңыз.

### 9.6. Циклдік беттер

Центрі қисық бойымен қозғалатын, радиусы тұрақты немесе айнымалы шеңбердің қозғалысы нәтижесінде жасалатын

бетті *циклдік* деп атайды. 9.24-сурет центрлері  $i$  қисығының бойымен қозғалатын, радиустары өзгермелі, горизонталь проекциялар жазықтығына параллель шеңберлердің жиынынан жасалған циклдік бет көрсетілген.



9.24-сурет

Егер жасаушы шеңбердің жазықтығы бағыттауыш қисыққа перпендикуляр болса, онда бет *каналдық* деп аталады.

**Бақылау сұрақтары:**

1. Беттің анықтауышы деген не?
2. Айналу беттерінің негізгі қасиеттерін айтыңыз?
3. Қандай бұрама беттер геликоид деп аталады?
4. Бетке тиісті нүктені немесе сызықты қалай салады?
5. Жасаушысы түзу болатын айналу беттерін атаңыз.

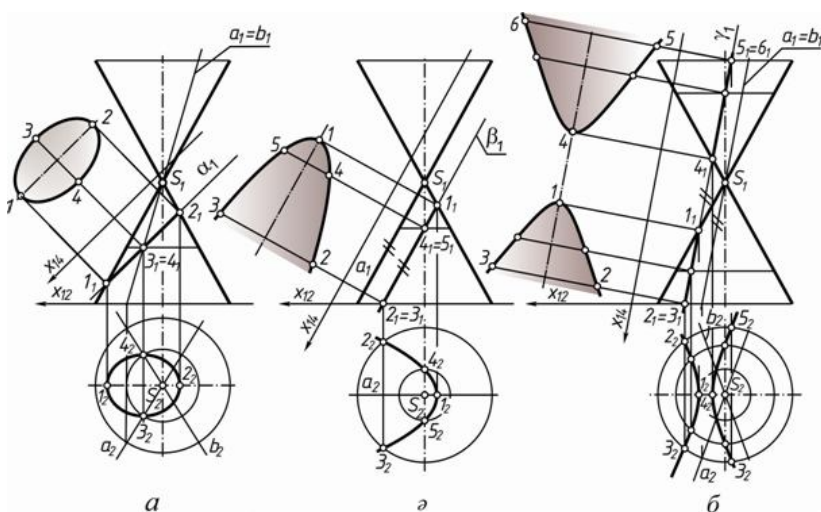
## 10. БЕТТІҢ ЖАЗЫҚТЫҚПЕН ЖӘНЕ ТҮЗУМЕН ҚИЫЛЫСУЫ

### 10.1. Айналу беттерінің жазықтықпен қиылысуы

Айналу беттерінің жазықтықпен қиылысу сызығын салудан бұрын, конусты қиюшы жазықтықпен қиғанда пайда болатын конустық кималарды салу шарттарын қарастырайық.

Конустың төбесі арқылы өтетін жазықтық конусты өзінің жасаушылары болып табылатын *екі түзу* бойымен қияды.

Осіне перпендикуляр жазықтық конусты *шеңбер* бойымен қияды.



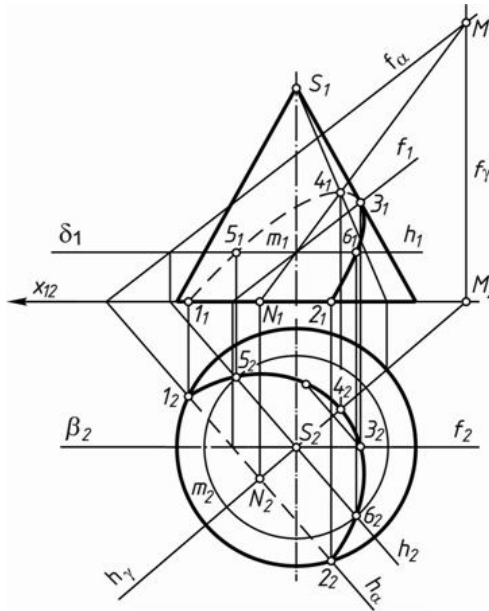
10.1-сурет

Егер қиюшы жазықтық конустың барлық жасаушыларын қиса және оның осіне перпендикуляр болмаса, онда қима *эллипс* болады (10.1 а-сурет). Қиюшы жазықтық проекциялаушы болып табылады, сондықтан қиылысу сызығының фронталь проекциясы жазықтықтың  $\pi_1$  фронталь ізімен беттеседі. Эллипс түріндегі қима  $\pi_1$  жазықтығына  $1_1-2_1$  кесіндісі болып

проекцияланады. Қиманың горизонталь проекциясы байланыс сызықтарының көмегімен салынады. Эллипстің кіші осі - 3-4 кесіндісі үлкен оське перпендикуляр және оны қақ бөледі. 3-4 нүктелерін параллельдердің немесе конустың екі жасаушысы –  $a$  және  $b$  түзулерінің көмегімен табамыз. Сонымен қатар, 10.1 а-суретте конус қимасының нақты шамасы проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілімен анықтау көрсетілген. Қосымша аралық нүктелерді 3 пен 4 нүктелерін тапқандай әдіспен табуға болады.

Егер қиюшы жазықтық конустың бір жасаушысына параллель болса, онда қима *парабола* болады (10.1 ә-сурет).

Егер қиюшы жазықтық конустың екі жасаушысына параллель болса, онда қима *гипербола* болады (10.1 б-сурет).



10.2-сурет

*Конустың жалпы жағдай жазықтығымен қиылысу сызығын салу керек. Бұл жерде қиылысу сызығының екі проекциясын да салу керек. Конустың жекелеген*

жасаушыларының берілген  $\alpha(h_\omega, f_\alpha)$  жазықтығымен қиылысу нүктелері түзудің жазықтықпен қиылысу нүктелерін табу әдісімен анықталады. 1 және 2 нүктелері жазықтықтың  $h_\alpha$  горизонталь ізі мен конус табаны болатын шеңбердің қиылысуында табылады. Көріну 3 нүктесі конустың осі арқылы өтетін және қиюшы жазықтықты  $f$  фронталі бойымен қиятын көмекші фронталь  $\beta$  жазықтығының көмегімен анықталады. Қиюшы  $\alpha$  жазықтығының  $\beta$  жазықтығымен қиылысу сызығы болып табылатын  $f$  фронталінің  $f_1$  фронталь проекциясының конустың очерктік жасаушысымен қиылысында 3 нүктесінің  $3_1$  фронталь проекциясын анықтаймыз. Байланыс сызығымен  $f$  фронталінің  $f_2$  горизонталь проекциясында 3 нүктесінің  $3_2$  горизонталь проекциясын анықтаймыз.

Қиылысу сызығының ең биік 4 нүктесі конустың осі арқылы өтетін қиюшы жазықтықтың конус осі арқылы өтетін көлбеулігі ең үлкен сызығының бойынан табылады. Бұл нүкте көмекші горизонталь проекциялаушы  $\gamma$  жазықтығының көмегімен анықталады. Қиылысу сызығының аралық 5 және 6 нүктелері горизонталь  $\delta$  жазықтығының көмегімен анықталады. Бұл жазықтық конусты  $m$  шеңбері бойымен, ал қиюшы  $\alpha$  жазықтығын  $h$  горизонталі бойымен қияды.  $m$  шеңбері мен  $h$  горизонталінің қиылысында 5 және 6 нүктелері анықталады. Табылған барлық нүктелерді қосып ізделінді қиылысу сызығы анықтайды. Қиылысу сызығы эллипстің бөлігі болып келеді.

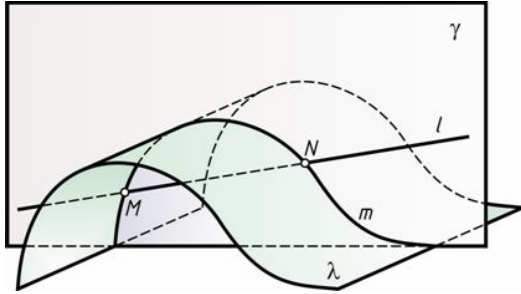
## 10.2. Түзудің бетпен қиылысуы

Түзудің бетпен қиылысу нүктелерін анықтау мынадай ретпен орындалады (10.4-сурет):

1) берілген  $l$  түзуі арқылы көмекші қиюшы  $\gamma$  жазықтығы жүргізіледі;

2) көмекші  $\gamma$  жазықтығының бетпен қиылысу  $m$  сызығы анықталады;

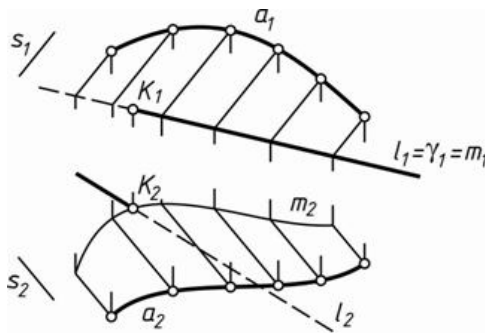
3) табылған қиылысу  $m$  сызығының берілген  $l$  түзуімен қиылысу  $M$  және  $N$  нүктелері ізделінді нүктелер болып табылады.



10.4-сурет

Көмекші қиышы жазықтық ретінде көбінесе проекциялаушы жазықтықтар алынады. Бірақ кейбір жағдайда қиманың проекциялары түзу немесе шеңбер болатындай етіп жалпы жағдайдағы жазықтықты қолданады.

*1-мысал.* Цилиндрлік бет бағыттаушы  $a$  кеңістік сызығымен және жасаушылардың  $s$  бағытымен берілген. Жалпы жағдайда берілген  $l$  түзуінің цилиндрлік бетпен қиылысу  $K$  нүктесін анықтау керек (10.5-сурет).

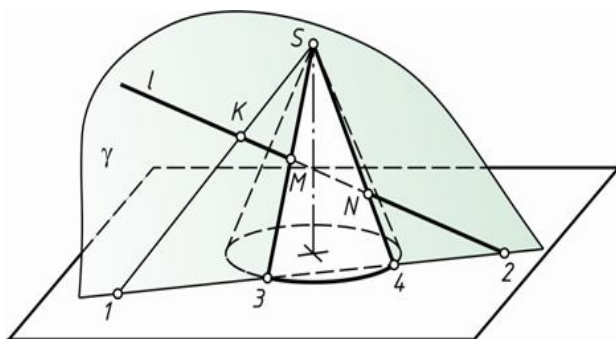


10.5-сурет

Алдымен цилиндрлік беттің бірнеше жасаушыларын тұрғызады. Содан соң  $l$  түзуі арқылы көмекші жазықтық ретінде фронталь-проекциялаушы  $\gamma$  жазықтығын жүргізеді. Бұл жазықтық цилиндрлік бетті  $m$  сызығы бойымен қияды.

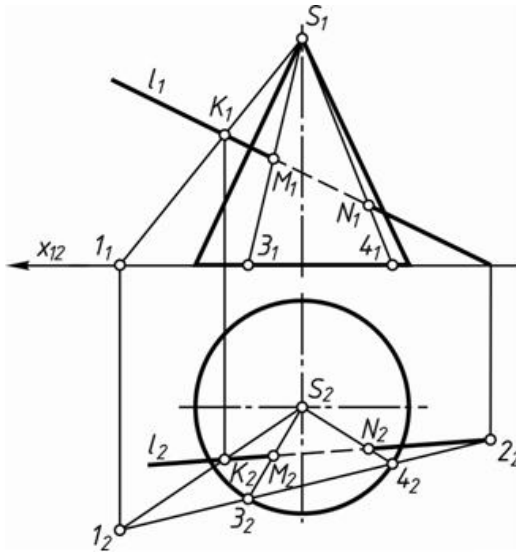
Фронталь проекцияда  $m$  сызығы берілген  $l$  түзуімен бәсекелес болғандықтан, олардың проекциялары беттеседі. Горизонталь проекцияда  $m$  сызығы мен берілген  $l$  түзуінің проекциялары  $K_2$  нүктесінде қиылысады. Байланыс сызығы арқылы  $K_1$  фронталь проекциясын анықтайды. Сызбадағы көрінетіндікті бәсекелес нүктелер тәсілімен анықтайды.

2-мысал. Жалпы жағдайдағы  $l$  түзуінің айналу конусымен қиылысу нүктелерін анықтау керек (10.6, 10.7-сурет).



10.6-сурет

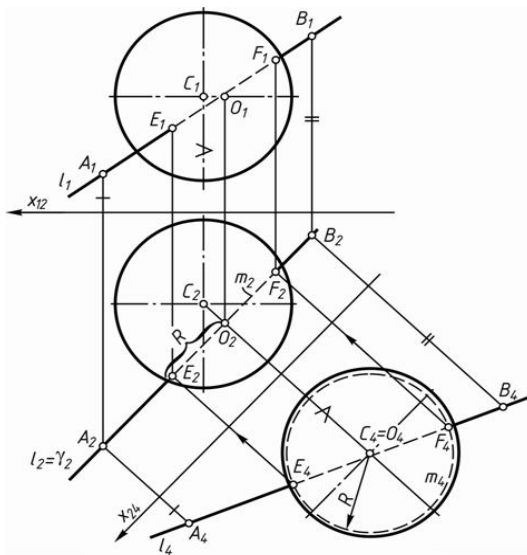
Егер  $l$  түзуі арқылы көмекші қиюшы жазықтық ретінде фронталь-проекциялаушы жазықтықты қабылдаса, онда қиылысу сызығы эллипс болады. Ал горизонталь-проекциялаушы жазықтық жүргізсе, қиылысу сызығы гипербола болады. Сондықтан көмекші қиюшы  $\gamma$  жазықтығын конустың  $S$  төбесі және  $l$  түзуі арқылы жүргізу керек. Ондай жазықтықты қиылысатын екі түзумен беруге болады. Берілген  $l$  түзуінің бойынан  $K$  нүктесін таңдап аламыз. Көмекші  $\gamma$  жазықтығы өзара қиылысатын  $l$  және  $SK$  түзулерімен беріледі. Сонда  $\gamma$  жазықтығы конусты қиылысатын екі түзу бойымен қияды. Бұл түзулердің берілген  $l$  түзуімен қиылысу нүктелері  $M$  және  $N$  ізделінді нүктелер болады. Горизонталь проекцияда  $M$  және  $N$  нүктелері көрінеді. Бұл нүктелер фронталь проекцияда да көрінетін болады, өйткені олар конустың алдыңғы жарты бөлігінде орналасқан.



10.7-сурет

3-мысал. Жалпы жағдайдағы  $l$  түзуінің сферамен қиылысу нүктелерін анықтау керек (10.8-сурет).

Берілген  $l$  түзуі арқылы  $\gamma$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығын жүргіземіз. Бұл жазықтық сфераны  $m$  шеңбері бойымен қияды.  $l$  түзуінің  $m$  шеңберімен қиылысу нүктелері ізделінді нүктелер болады. Ол шеңбердің фронталь проекциясы эллипс болады. Эллипсті салып жатпас үшін проекциялар жазықтығын алмастыру тәсілін қолданамыз. Жаңа проекциялар жазықтығын қиюшы  $\gamma$  жазықтығына параллель етіп аламыз. Жаңа проекциялар жазықтығына  $m$  шеңбері бұрмаланусыз проекцияланады. Оның  $m_2$  проекциясы мен берілген түзудің  $l_2$  проекциясы ізделінді  $E$  және  $F$  нүктелерінің  $E_4$  және  $F_4$  проекцияларында қиылысады. Байланыс сызықтары арқылы  $E$  және  $F$  нүктелерінің горизонталь және фронталь проекцияларын аламыз.



10.8-сурет

$F$  нүктесі сфера экваторынан жоғары, ал  $E$  нүктесі төмен орналасқандықтан горизонталь проекцияда  $F$  нүктесі көрінетін, ал  $E$  нүктесі көрінбейтін болады.  $E$  нүктесі сфераның алдыңғы жарты бөлігінде, ал  $F$  нүктесі артқы жарты бөлігінде орналасқандықтан фронталь проекцияда  $E$  нүктесі көрінетін, ал  $F$  нүктесі көрінбейтін болады.

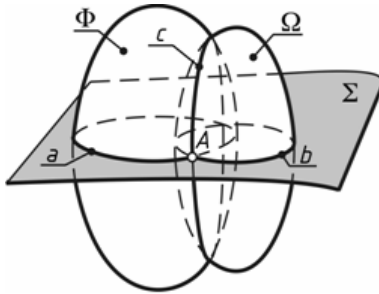
### **Бақылау сұрақтары:**

1. Беттің проекциялаушы жазықтықпен қиылысу сызығының нүктелерін анықтаудың жалпы әдісін тұжырымдаңыз.
2. Беттің жалпы жағдайдағы жазықтықпен қиылысу сызығының нүктелерін анықтаудың жалпы әдісін тұжырымдаңыз.
3. Беттің жазықтықпен қиылысу сызығының қандай нүктелері *тіректік* деп аталады?
4. Айналу конусын жазықтықпен қиғанда қиманың шеңбер, эллипс, гипербола, парабола, қиылысатын түзулер, нүкте болу шарттарын айтыңыз.
5. Конустық қиманың ең жоғарғы және ең төменгі нүктелерін қалай анықтайды?

## 11. БЕТТЕРДІҢ ӨЗАРА ҚИЫЛЫСУЫ

Беттердің қиылысу сызығын анықтау үшін әдетте көмекші беттер тәсілін қолданады. Жалпы жағдайда есепті шығару алгоритмі төмендегідей болады. Қиылысу сызығы түзу, жазық және кеністік қисық сызығы немесе осы сызықтардың кез келген комбинациясы болуы мүмкін.

Берілген  $\Phi$  және  $\Omega$  беттерінің қиылысу сызығын анықтайық. Ол үшін көмекші  $\Sigma$  бетін жүргіземіз.  $\Sigma$  беті  $\Phi$  бетімен  $a$  қисығының бойымен, ал  $\Omega$  бетімен  $b$  қисығымен қиылысады.  $a$  және  $b$  қисықтарының қиылысу  $A$  нүктесі берілген екі бетке де тиісті, ендеше олардың қиылысу  $c$  сызығына да тиісті. Дәл осылай, қиылысу сызығының кез келген нүктесі табылады.



11.1-сурет

Екі беттің қиылысу сызығын анықтау үшін оларды бірнеше көмекші беттермен қию керек. Берілген беттер мен көмекші беттердің қиылысу сызықтарын салып, оларға ортақ нүктелерді белгілеп, оларды бір-бірімен ретімен қосу керек.

Екі беттің қиылысу сызығының нүктелері *тіректік* және *аралық* болып екіге бөлінеді. Тіректік нүктелерге келесі нүктелер жатады:

1) проекция жазықтығына қатысты ең жақын және ең алыс орналасқан нүктелер;

2) проекциялары беттің нұсқа сызығында орналасатын көріну нүктелері;

3) қиылысу сызығының ең үлкен ендік сызығын анықтайтын нүктелер және т.б.

Беттердің қиылысу сызығын салуды оның тіректік нүктелерін анықтаудан бастау керек.

Көмекші беттер ретінде жазықтықтарды немесе сфераларды қабылдаған тиімді. Сондықтан беттердің қиылысу сызығын анықтаудың мынадай тәсілдерін қарастырамыз:

*көмекші жазықтықтар тәсілі;*

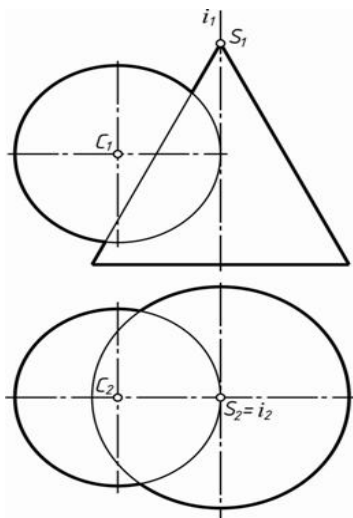
*көмекші сфералар тәсілі.*

### 11.1. Көмекші жазықтықтар тәсілі

Көмекші жазықтықтар ретінде:

1. деңгей жазықтықтарын;
2. проекциялаушы жазықтықтарды;
3. жалпы жағдайдағы жазықтықтарды қабылдауға болады.

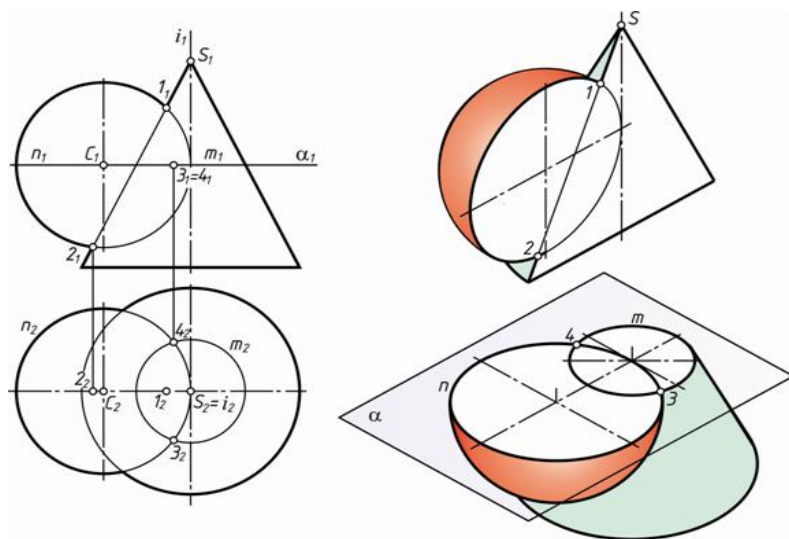
*Мысал.* Жарты сфераның айналу конусымен қиылысу сызығын салу керек (11.2-сурет).



11.2-сурет

Сфера мен конустың қиылысу сызығының тіректік нүктелерін табамыз (11.3-сурет). Сфераның центрі мен конустың айналу осі фронталь жазықтықта орналасқан және ол жазықтық екі беттің де бас меридиан жазықтығы болып

табылады. Сондықтан фронталь проекцияда сфера мен конустың бас меридиандарының қиылысында 1 және 2 нүктелері анықталады. Бұл нүктелер қиылысу сызығының ең жоғарғы және ең төменгі нүктелері болады.

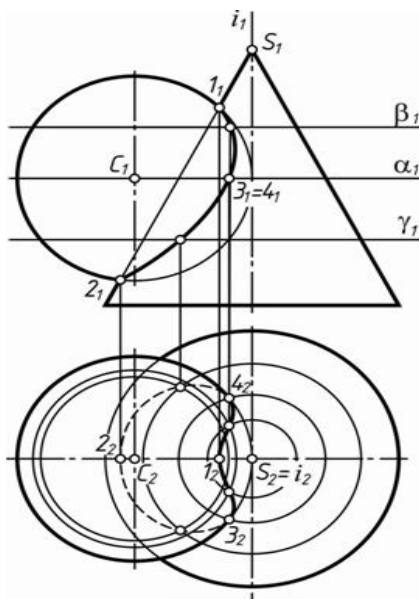


11.3-сурет

Сфераның экваторы арқылы көмекші горизонталь  $\alpha$  жазықтығын жүргіземіз. Бұл жазықтық сфераны  $n$  экваторы бойымен, ал конусты  $m$  параллелі бойымен қияды, бұл параллельдердің 3 және 4 қиылысу нүктелері екі бетке де ортақ нүктелер болады, сондықтан олар қиылысу сызығының нүктелері болып табылады. 3 және 4 нүктелері фронталь бәсекелес болады, олардың горизонталь проекциялары  $3_2$  және  $4_2$  нүктелері  $n_2$  және  $m_2$  шеңберлерінің қиылысында, ал фронталь  $3_1$  және  $4_1$  проекциялары байланыс сызығы бойымен  $n_1$  ізінен табылады. 3 және 4 нүктелері горизонталь проекцияда қиылысу сызығының көріну шекаралары болады.

Осындай бірнеше көмекші қиюшы жазықтықтарды жүргізу арқылы қиылысу сызығының аралық нүктелерін анықтаймыз

(11.4-сурет). Табылған нүктелерді қосып, қиылысу сызығын анықтаймыз.

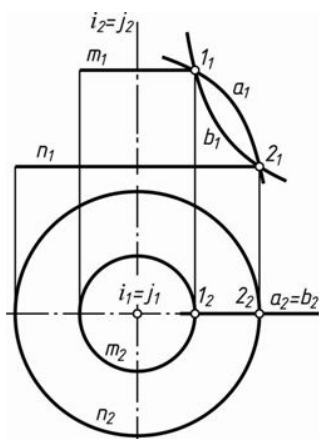


11.4-сурет

## 11.2. Көмекші сфералар тәсілі

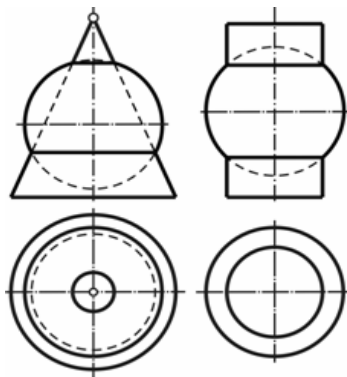
Осьтері ортақ екі айналу беттері олардың меридиандарының қиылысу нүктелері арқылы өтетін параллельдер бойымен қиылысады.

Шынымен де 11.5-суреттегі  $\alpha(i,a)$  және  $\beta(j,b)$  айналу беттері меридиандарының ортақ нүктелері  $1,2, \dots = a \cap b$  екі бетке ортақ  $m$  және  $n$  параллельдерін анықтайды.



11.5-сурет

Егер сфераның центрі айналу бетінің осіне тиісті болса, онда сфера мен айналу бетінің қиылысу сызықтары шеңберлер болады (11.6-сурет).



11.6-сурет

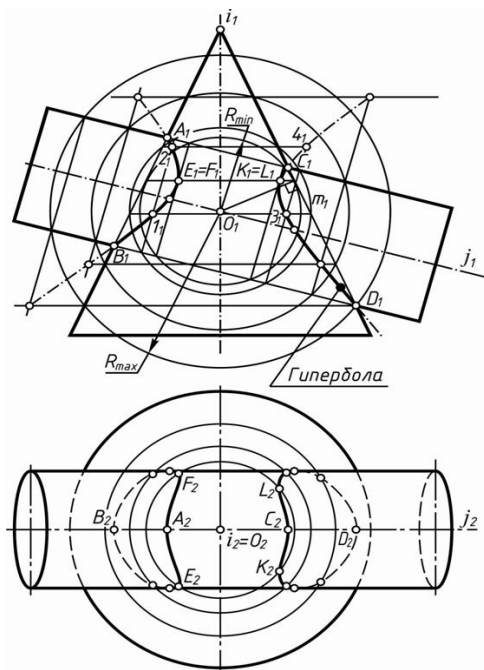
Бұл шеңберлердің жазықтықтары айналу бетінің осіне перпендикуляр. Сондықтан егер айналу беттерінің осьтері проекциялар жазықтығына параллель болса, бұл проекциялар жазықтығына параллельдер ось проекциясына перпендикуляр түзулердің кесінділері болып проекцияланады.

### 11.2.1. Центрлес сфералар тәсілі

Осьтері қиылысатын және олардың ортақ симметрия жазықтығы деңгейлік болған жағдайда айналу беттерінің қиылысу сызығын салу үшін **көмекші центрлес (шоғырлас) сфералар тәсілін** қолданған ыңғайлы. Бұл жағдайда беттердің өзара қиылысатын  $i$  және  $j$  осьтері ортақ симметрия  $\gamma$  жазықтығын анықтайды. Ал олардың  $O$  қиылысу нүктесі көмекші сфералардың центрі болады. Көмекші сфералар берілген беттермен шеңберлер бойымен қиылысады. Беттердің ортақ симметрия  $\gamma$  жазықтығы фронталь проекциялар жазықтығына параллель болғандықтан, бұл шеңберлердің фронталь проекциялары түзулердің кесінділері болады. Сондықтан егер ортақ симметрия жазықтығы деңгейлік болмаса, алдымен оны деңгейлік жағдайға келтіру үшін сызбаны түрлендіру керек.

11.7-суретте  $\lambda(i, a)$  айналу конусы мен  $\mu(j, b)$  айналу цилиндрінің  $l$  қиылысу сызығын табу көрсетілген. Алдымен көмекші сфералардың центрі  $O=i \cap j$  нүктесін белгілейміз. Екі беттің ортақ симметрия жазықтығы  $\gamma(i \cap j)$  екі бетті фронталь проекциясындағы очерктік меридиандары бойынша қияды. Екі беттің очерктерінің қиылысу  $A, B, C, D$  нүктелері ізделінді  $l$  қиылысу сызығына тиісті тіректік нүктелер болып табылады.  $D$  нүктесі  $O$  центрінен ең қашық орналасқан, сондықтан  $OD$  кесіндісі көмекші сфералардың ең үлкенінің радиусын анықтайды,  $R_{\max} = [OD]$ . көмекші сфералардың ең кішісінің  $R_{\min}$  радиусын анықтау үшін  $O_1$  нүктесінен беттердің очерктік сызықтарына перпендикулярлар тұрғызамыз. Перпендикуляр кесінділердің ішіндегі ұзыны  $R_{\min}$  радиусын анықтайды. Радиусы  $R_{\min}$  сферасы бір бетке жанама болады, ал екіншісін қияды. Қиылысу сызығының аралық нүктелерін табу үшін көмекші сфералардың радиустарын ең үлкен және ең кіші сфералардың радиустарының аралығында қабылдайды,  $R_{\max} \leq R \leq R_{\min}$ .

Екінші реттік беттер қиылысқанда жалпы жағдайда қиылысу сызығы төртінші реттік қисық сызық болады. Бұл қисық сызық жазықтықпен төрт нүктеде (нақты және жорамал) қиылысады. Қиылысу сызығының реті қиылысушы беттердің реттерінің көбейтіндісіне тең. Төртінші реттік қисық екі жазық екінші реттік қисыққа ажырауы мүмкін.



11.7-сурет

Бұл тұжырымның ақиқаттығы қиылысу сызығы бөлінген екі қисық сызықтың ретінің қосындысы төртке тең болу керек екенінен көрінеді.

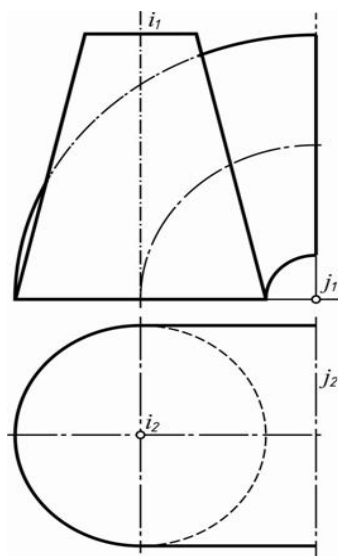
Егер екі екінші реттік айналу беттерінің осьтері қиылысатын болса және проекциялар жазықтығына параллель болса, онда олардың қиылысу сызығы осы проекция жазықтығына екінші реттік қисық түрінде проекцияланады. 11.7-суреттегі мысалда конус пен цилиндрдің қиылысу сызығының фронталь проекциясы - гипербола.

### 11.2.2. Центрлес емес сфералар тәсілі

Егер қиылысатын екі беттің біреуі цикликалық, ал екіншісі айналу беті болса және олардың деңгейлік болып табылатын ортақ симметрия жазықтығы болса, онда центрлес емес сфералар тәсілі қолданылады.

11.8-суретте өзара қиылысатын қиық конус пен тордың сызбасы берілген. Бұл беттердің қиылысу сызығын анықтау үшін жүргізілетін қандай да бір көмекші жазықтық оларды күрделі қисық сызықтар бойымен қияды, сондықтан көмекші жазықтықтар тәсілін қолдана алмаймыз. Ал екі беттің осьтері қиылыспайтын болғандықтан, көмекші центрлес сфералар тәсілін қолдана алмаймыз. Сондықтан көмекші центрлес емес сфералар тәсілін қолданамыз.

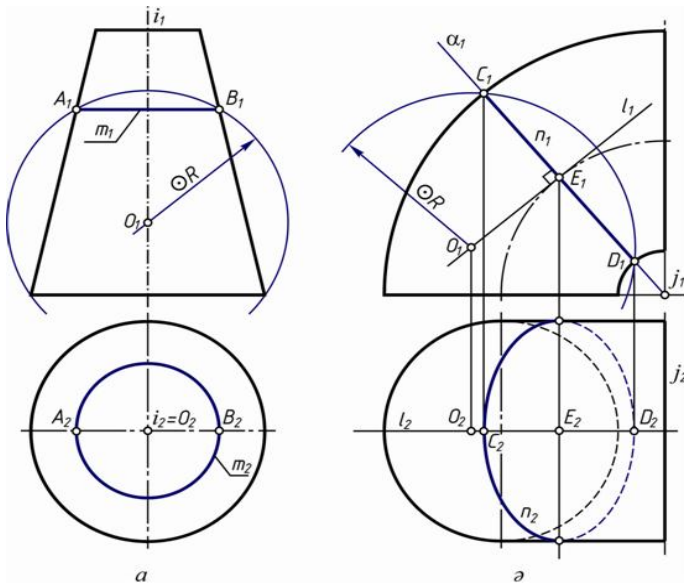
Қиық конус үшін көмекші ретінде онымен осі ортақ болатын сфера таңдалады. Ондай сфераның центрі конустың  $i$  айналу осінде жатады (11.9,  $a$ -сурет). Сонда конус пен көмекші сфераның қиылысу сызығы  $m$  шеңбері болады.



11.8-сурет

Айналу бетінің осі арқылы өтетін жазықтық оны меридианы бойынша қияды. Тордың меридианы шеңбер болады (11.9  $a$ -сурет). Сондықтан торды оның  $j$  осі арқылы өтетін  $\alpha$  фронталь-проекциялаушы жазықтығымен қиғанда, оның қимасы  $n$  шеңбері болады. Қиманың фронталь проекциясы  $C_1D_1$  кесіндісі болады. Ал  $n$  шеңбері центрінің фронталь проекциясы қиюшы жазықтықтың  $\alpha_1$  ізінің тор меридианы центрінің

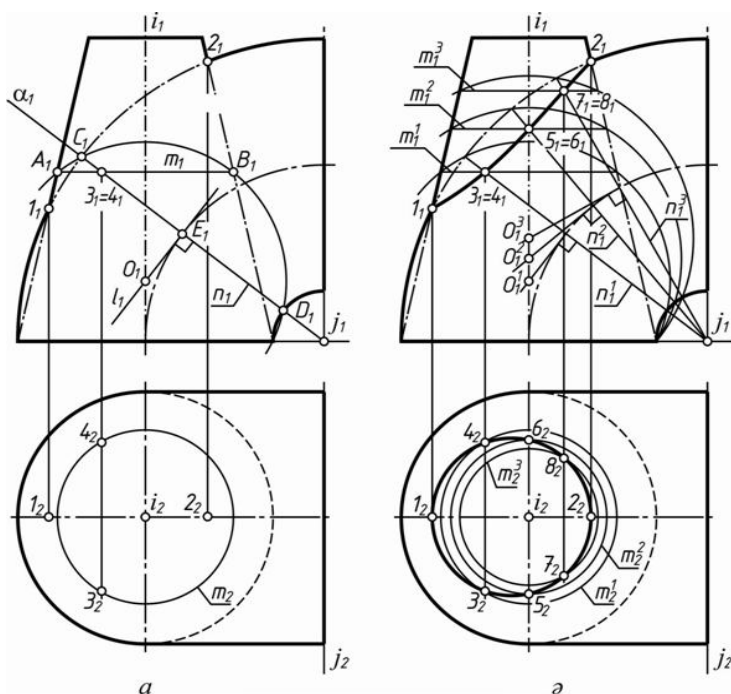
қозғалыс траекториясының проекциясымен қиылысында ( $E_1$ ) жатады. Онда торды  $n$  шеңбері бойымен қиятын сфера центрінің  $O_1$  фронталь проекциясы  $E_1$  нүктесі арқылы өтетін және  $C_1D_1$  кесіндісіне перпендикуляр  $l_1$  түзуінің бойында орналасады. Ал екі бетті де шеңберлер бойымен қиятын сфераның центрі  $i_1$  түзуі мен  $l_1$  түзуінің қиылысында болады.



11.9-сурет

Енді қиық конус пен тордың қиылысу сызығын анықтау ретін қарастырайық (11.10 *a*-сурет). Алдымен беттердің бас меридиандарының қиылысында тіректік  $1_1$  және  $2_1$  нүктелерін белгілейміз. Аралық нүктелерді анықтау үшін көмекші сфераларды қолданамыз. Ол үшін  $1_1$  және  $2_1$  нүктелерінің арасында  $j$  осі арқылы өтетін  $\alpha$  фронталь-проекциялаушы жазықтығын жүргіземіз. Оның фронталь  $\alpha_1$  ізінің тор меридианы центрінің қозғалыс траекториясының проекциясымен қиылысу нүктесін анықтаймыз. Ол нүктеден  $\alpha_1$  ізіне перпендикуляр  $l$  түзуін жүргізіп, оның  $i_1$  осімен қиылысу нүктесін табамыз. Ол нүкте көмекші сфера центрінің  $O_1$

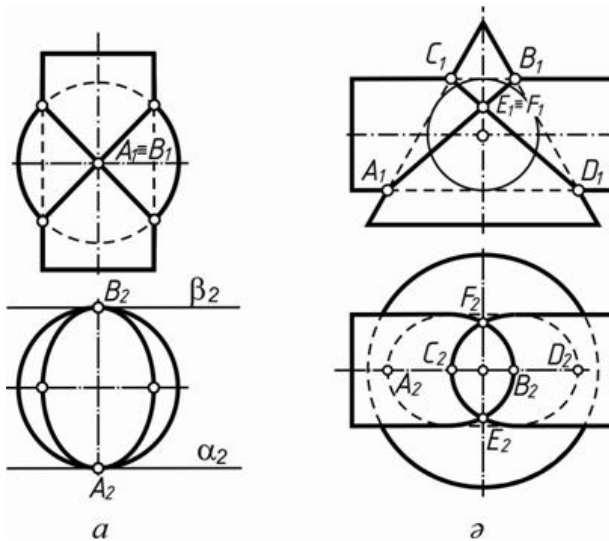
фронталь проекциясы болады. Центрі  $O_1$  нүктесі болатын  $C_1$  және  $D_1$  нүктелері арқылы өтетін шеңбер сызамыз. Бұл шеңбер конустың нұсқа сызықтарын  $A_1$  және  $B_1$  нүктелерінде қияды.  $A_1B_1$  және  $C_1D_1$  кесінділерінің қиылысында екі бәсекелес нүктенің фронталь проекциялары  $3_1$  және  $4_1$  анықталады. 3 және 4 нүктелері конусқа да, торға да тиісті болғандықтан ізделінді қиылысу сызығының нүктелері болады. 3 және 4 нүктелері конустың  $m$  параллелінде жатады, олардың горизонталь проекцияларын  $m$  параллелінің горизонталь проекциясы  $m_2$  шеңберінің бойынан байланыс сызығы арқылы табамыз. Дәл осылай бірнеше аралық нүктелерді тауып, оларды қосып, ізделінді қиылысу сызығын табамыз (11.10 ә-сурет).



11.10-сурет

### 11.3. Айналу беттерінің қиылысуының дербес жағдайлары

**Қосарланып жанасу туралы теорема.** Егер 2-реттік қосарланып жанасатын беттердің екі жанасу нүктесі болса және сол нүктелерде оларға жанама жазықтықтар ортақ болса, онда олардың қиылысу сызығы екі 2-реттік қисыққа ажырайды және олардың жазықтықтары жанасу нүктелерін қосатын түзу арқылы өтеді (11.11 а-сурет).



11.11-сурет

**Г. Монж теоремасы.** Егер екі 2-реттік беттер үшінші бір 2-ретті бетке сырттай немесе іштей сызылса, онда олардың қиылысу сызығы екі жазық 2-реттік қисық сызықтарға ажырайды (11.11 б-сурет).

#### Бақылау сұрақтары:

1. Беттердің қиылысу сызығын анықтаудың негізгі тәсілдерін айтыңыз.

2. Беттердің қиылысу сызығын анықтау үшін көмекші қиюшы жазықтықтар мен сфералар тәсілдерін таңдаудың жалпы принциптерін айтыңыз.

3. Қай кезде айналу беттері шеңберлер бойымен қиылысады?

4. Беттердің қандай қиылысуын толық немесе толық емес деп атайды?

5. Беттердің қиылысу сызығының қандай нүктелері тіректік деп аталады?

## 12. КӨПЖАҚТАР МЕН БЕТТЕРДІҢ ЖАЙМАЛАРЫ

Беттің жаймасы деп бетті жайып жазықтықпен беттестіргенде пайда болатын жазық фигураны айтады. Егер бетті ешбір бүктесінсіз, жыртпай жазықтықпен беттестіруге мүмкін болса, ондай бетті *жайылатын* бет деп атайды. Ондай беттерге конустық, цилиндрлік беттер және торс жатады. Беттердің басқа түрлері *жайылмайтын* болып табылады.

Бет пен оның жаймасының арасында өзара бірмәндік сәйкестік орнатылады. Оның мынадай қасиеттері болады:

1) беттегі кесінді мен оған жаймадағы сәйкес кесіндінің ұзындықтары бірдей болады;

2) беттегі қиылысатын екі сызықтың арасындағы бұрыштың және оларға жаймадағы сәйкес сызықтардың арасындағы бұрыштың шамалары бірдей болады;

3) беттегі тұйық сызықпен шектелген аудан мен жаймадағы оған сәйкес сызықпен шектелген ауданның шамалары бірдей болады.

### 12.1. Көпжақтардың жаймалары

Көпжақтың жаймасы деп оның барлық жақтарының натурал шамаларын бір жазықтықпен беттестіргенде пайда болатын жазық фигураны айтады.

**Мысал.**  $SABCD$  пирамидасының жаймасын салу керек (12.1-сурет).

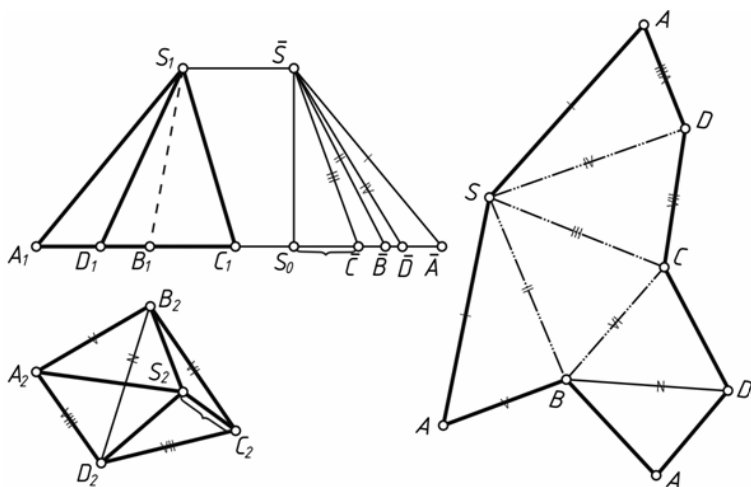
Пирамиданың  $ABCD$  табаны горизонталь жазықтықта орналасқан. Сондықтан оның қабырғалары  $\Pi_2$  проекция жазықтығына нақты шамасымен проекцияланады. Пирамиданың бүйір қырларының нақты шамаларын анықтау үшін тікбұрышты үшбұрыш тәсілін қолдануға болады. Пирамиданың барлық бүйір қырларының төбелерінің биіктіктерінің айырмасы тең болғандықтан ортақ  $\overline{SS}_0$  катеті бар тікбұрышты үшбұрыштар саламыз. Бұл үшбұрыштардың екінші катеттері осы қырлардың горизонталь проекцияларының ұзындықтарына тең болады. Ыңғайлық үшін бүйір қырлардың ұзындығын анықтауды сызбаның бос алаңында

орналастырамыз. Ортақ катеті  $\overline{SS_0}$  болатын  $\overline{SS_0A}$ ,  $\overline{SS_0B}$ ,  $\overline{SS_0C}$ ,  $\overline{SS_0D}$  үшбұрыштарының жиыны *нақты шамалар диаграммасы* деп аталады.

Беттің жаймасын салу сызбадан түсінікті: конгруэнтті кесінділер бірдей белгілермен белгіленген. Пирамиданың бүйір бетінің жаймасына оның табанын қосамыз.

Призма бетінің жаймасы келесі тәсілдермен тұрғызылады:

- 1) үшбұрыштар тәсілі (триангуляция тәсілі),
- 2) нормаль қималар тәсілі.



12.1-сурет

Үшбұрыштар тәсілі әмбебап тәсіл болып табылады. Бұл тәсіл кез келген көпжақты беттердің дәл жаймасын салу үшін және сызықтық беттердің жуықталған немесе шартты жаймасын салу үшін де қолайлы.

**Нормаль қима тәсілі** призманың бүйір қырлары деңгей түзулері болған кезде қолданылады.

Призманың жаймасын нормаль қима тәсілімен салу келесі ретпен орындалады (12.2-сурет):

- 1) призманы оның бүйір қырларына перпендикуляр болатын  $\alpha$  жазықтығымен қиямыз;

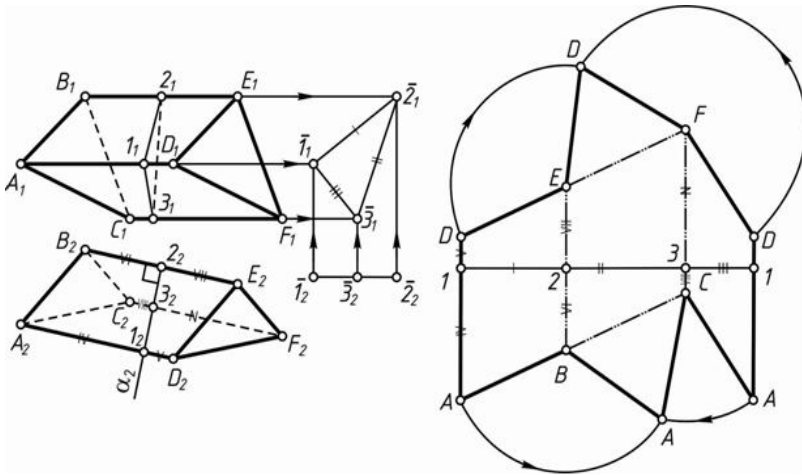
2) призманың  $\alpha$  жазықтығымен қиылысу сызығы болатын сынық сызықтың қабырғаларының нақты шамалары анықталады;

3) бұл сынық сызық бір түзуге жайылады;

4) сынықтың төбелері арқылы перпендикулярлар тұрғызылып, олардың бойына призманың бүйір қырларының нақты шамалары салынады;

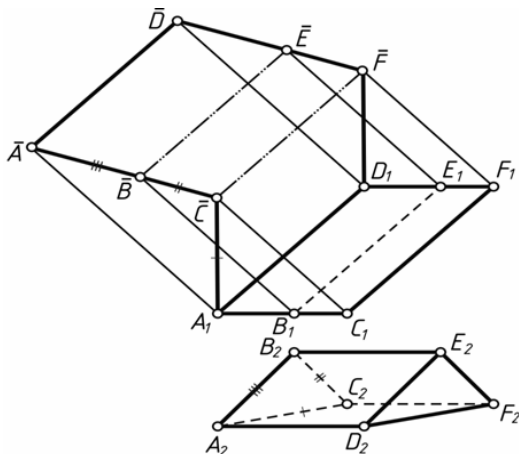
5) қырлардың ұштарын біртіндеп кесінділермен жалғаймыз;

6) призманың бүйір бетінің жаймасына оның табандарының нақты шамаларына тең көпбұрыштарды тіркейміз.



12.2-сурет

**Жаймалап жазу тәсілі** – нормал қима тәсілінің дербес жағдайы. Бұл тәсіл призманың бүйір қырлары мен табандары деңгейлік жағдайда орналасқан кезде қолданылады (12.3-сурет).



12.3-сурет

Бұл тәсіл бойынша призманың жақтары оның бүйір қырларынан айналдырылып бір жазықтықпен беттестіріледі. Тұрғызылған фигура призманың бүйір бетінің жаймасы болып табылады.

## 12.2. Беттердің жаймалары

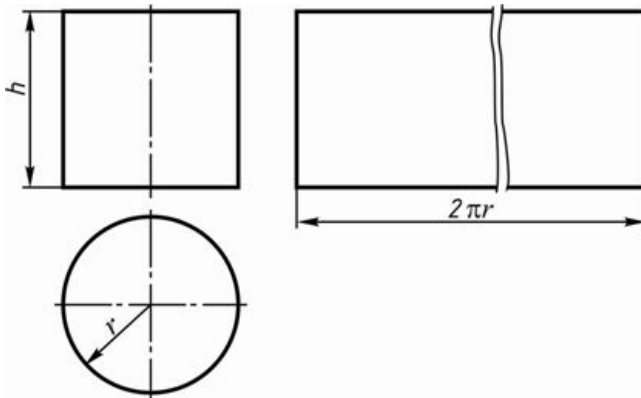
Жайылатын беттер үшін жуық жаймалары салынады. Жайылатын беттің (конустық, цилиндрлік немесе торстық) жуық жаймасын салу осы бетке іштей немесе сырттай сызылған көпжақты беттің жаймасын тұрғызуға келіп тіреледі (аппроксимация). Аппроксимациялаушы көпжақты беттің жаймасы жайылатын беттің жуық жаймасы ретінде қабылданады.

Жуық жаймаларды салу мынадай ретпен орындалады:

- 1) берілген жайылатын бетті көпжақты бетпен алмастырады (аппроксимация);
- 2) көпжақты беттің дәл жаймасы салынады;
- 3) аппроксимациялаушы көпжақты беттің жаймасын берілген беттің жаймасы ретінде қабылдаймыз.

Жуық жаймалардың дәлдігі бағыттауыш сызықтарды аппроксимациялау дәлдігіне байланысты. Беттің бағыттауыш сызықтарын олардың хордаларынан құралған сынық сызықтармен аппроксимациялайды.

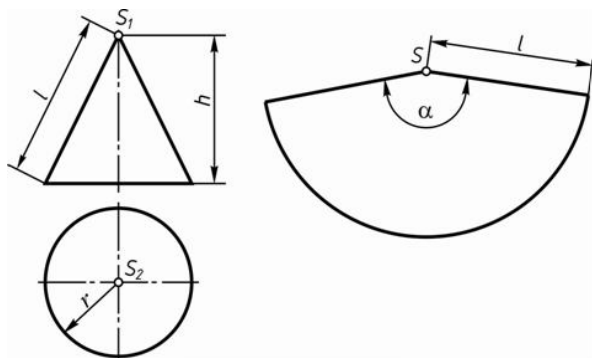
Айналу конусының немесе цилиндрінің жаймаларын салуда аппроксимациялаудың қажеті жоқ. Айналу цилиндрінің жаймасы қабырғаларының өлшемдері  $h$  және  $2\pi r$  болатын тіктөртбұрыш болады (12.4-сурет).



12.4-сурет

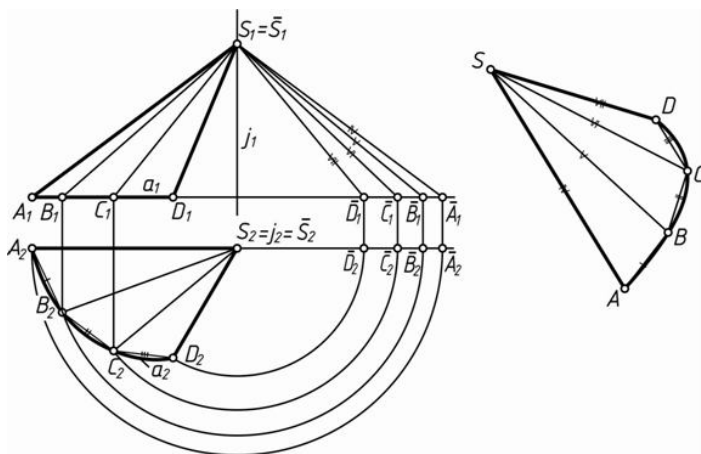
Айналу конусының жаймасы радиусы  $R=l$ , ал бұрышы  $\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$  болатын сектор болады, мұндағы  $r$  – конус табаны шеңберінің радиусы,  $l$  – конус жасаушысының ұзындығы (12.5-сурет).

12.6-суретте  $\alpha(S,a)$  конустық бетінің жаймасын салу көрсетілген. Конустық беттің  $a$  бағыттауышын  $ABCD$  сынығымен аппроксимациялаймыз, ол горизонталь жазықтықта орналасқандықтан  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына нақты шамамен проекцияланады.



12.5-сурет

$ABCD$  сынығының төбелерін конустық беттің  $S$  төбесімен қосып,  $\alpha$  конустық бетін аппроксимациялаушы  $SABCD$  пирамидасын аламыз.  $SABCD$  пирамидасының бүйір бетінің жаймасын саламыз. Жаймадағы  $A, B, C, D$  төбелері арқылы қисық жүргізіп, берілген конустық беттің жуық жаймасын аламыз.

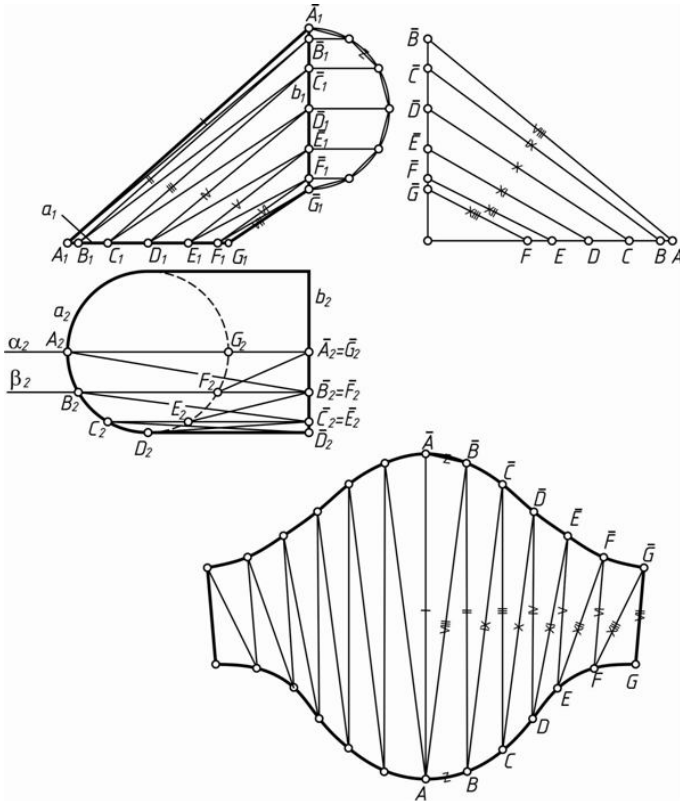


12.6-сурет

Жайылмайтын беттер үшін олардың шартты жаймасын салады. Берілген жайылмайтын беттің шартты жаймасын салу

үшін оны бірнеше бөліктерге бөлу керек. Беттің әрбір бөлігінің жуық жаймаларын салады. Осы жаймалардың жиыны беттің жаймасы ретінде қабылданады.

12.7-суретте  $\gamma(a, b, \pi_1)$  цилиндроидының жаймасын салу көрсетілген. Цилиндроидтың симметрия жазықтығы бар болғандықтан оның жартысының жаймасын саламыз, ал екінші жартысы симметриялы болады.



12.7-сурет

Бетті фронталь жазықтықтармен бөлеміз. Мысалы,  $\alpha$  және  $\beta$  жазықтықтарының арасында цилиндроидтың екі бөлігі орналасқан, олардың біреуі  $\overline{AA}$ ,  $\overline{BB}$  жасаушыларымен және

$AB$ ,  $\overline{AB}$  доғаларымен шектелген, ал екіншісі  $\overline{GG}$ ,  $\overline{FF}$  жасаушыларымен және  $GF$ ,  $\overline{GF}$  доғаларымен шектелген. Әрбір бөлікті екі конустық бетпен аппроксимациялаймыз, сонда оның жаймасы екі конустық беттің жуық жаймасынан құралады. Цилиндроидтың  $a$  және  $b$  бағыттауыштарын  $ABCDEFGF$  және  $\overline{ABCDEF\overline{FG}}$  сынықтарымен аппроксимациялаймыз. Қиюшы жазықтықтар  $ABCDEFGF$  сынығының төбелері арқылы жүргізіледі.  $ABCDEFGF$  сынығының қабырғалары  $\pi_2$  проекциялар жазықтығына, ал  $\overline{ABCDEF\overline{FG}}$  сынығының қабырғалары  $\pi_1$  проекциялар жазықтығына натурал ұзындықтарымен проекцияланады.  $\overline{AA}$ ,  $\overline{BB}$ ,  $\overline{CC}$ ,  $\overline{DD}$ ,  $\overline{EE}$ ,  $\overline{FF}$ ,  $\overline{GG}$  жасаушылары  $\pi_1$  проекциялар жазықтығына натурал ұзындықтарымен проекцияланады.  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FG}$  диагональдарының ұзындықтарын сызбаны түрлендіру тәсілдерінің біреуінің көмегімен анықтауға болады. Беттің жаймасы  $\overline{AAB}$ ,  $\overline{BBC}$ ,  $\overline{CBC}$ ,  $\overline{CCD}$ ,  $\overline{DCD}$ ,  $\overline{DDE}$ ,  $\overline{EDE}$ ,  $\overline{EEF}$ ,  $\overline{FEF}$ ,  $\overline{FFG}$ ,  $\overline{GFG}$  үшбұрыштарының жаймаларынан құралады.

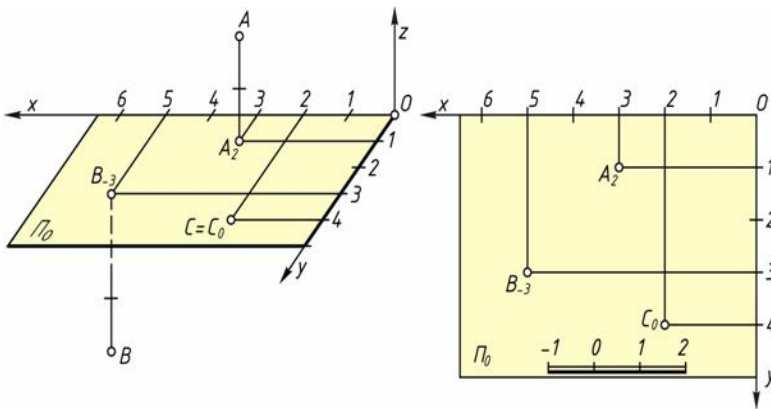
**Бақылау сұрақтары:**

1. Беттің жаймасы деп нені айтады?
2. Қандай беттер жайылатын деп, қандай беттер жайылмайтын деп аталады?
3. Жаймалардың негізгі қасиеттерін атаңыз.
4. Конус пен цилиндрдің жаймаларын графикалық тұрғызу ретін айтып беріңіз.
5. Көпжақтың жаймасын салудың қандай тәсілдерін білесіз?

### 13. САНДЫҚ БЕЛГІЛЕРІ БАР ПРОЕКЦИЯЛАР. НҮКТЕ, ТҮЗУ, ЖАЗЫҚТЫҚ

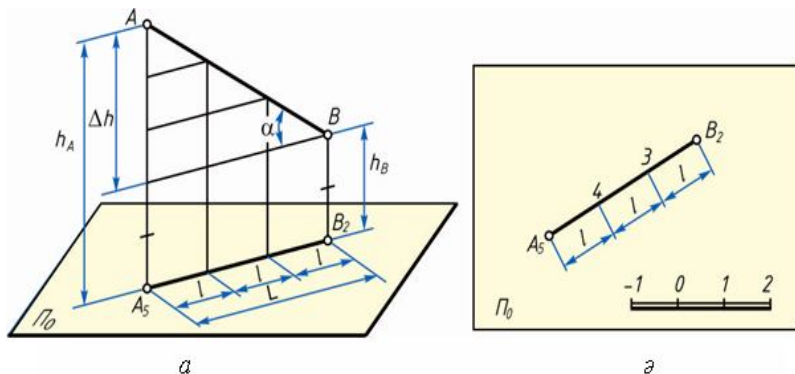
Биіктік өлшемдері горизонталь өлшемдерімен салыстырғанда кішкентай болатын объектілерді кескіндеу үшін сандық белгілері бар проекцияларды қолданған тиімді. Сандық белгілері бар проекцияларда нүктені бір ғана проекциялар жазықтығына, әдетте горизонталь проекциялар жазықтығына, проекциялайды. Нүктенің бір проекциядан тұратын кескіні қайтымсыз, өйткені ол тек екі координатасын ғана анықтайды. Сондықтан қайтымды кескін алу үшін нүктені проекциялар жазықтығына тік бұрыштап проекциялайды да, оның жанына проекциялар жазықтығынан қашықтығы көрсетіледі (13.1-сурет).

Бейнеленетін объектінің горизонталь проекциясын оның *планы* деп атайды (13.1 ә-сурет). Нөлдік деңгейден жоғары орналасқан нүктелердің сандық белгілері оң мәнді, ал төмен орналасқан нүктелер сандық белгілерінің мәндері теріс болады. Нөлдік деңгей жазықтығындағы нүктелердің сандық белгілері нөлге тең болады.



13.1-сурет

**Түзудің сызбасы.** 13.2-суретте  $AB$  түзуі кескінделген.  $AB$  кесіндісінің проекциясын  $L$  әрпімен белгілеп, оны  $AB$  кесіндісінің жатысы деп атаймыз.



13.2-сурет

$h_A - h_B = \Delta h$  –  $A$  нүктесінің  $B$  нүктесінен биіктік айырмасы.

$\Delta h/L = \operatorname{tg} \alpha = i$  қатынасы **түзудің көлбеулігі** деп аталады.

Көлбеулікке кері шама:

$1/i = L/\Delta h = l$  – түзудің интервалы деп аталады.

Үштарының сандық белгілерінің айырымы бірге тең кесіндінің табанын **интервал** дейді. Түзудің интервалы оның бір бірлікке көтерілуіне сәйкес жатыстың шамасын анықтайды.

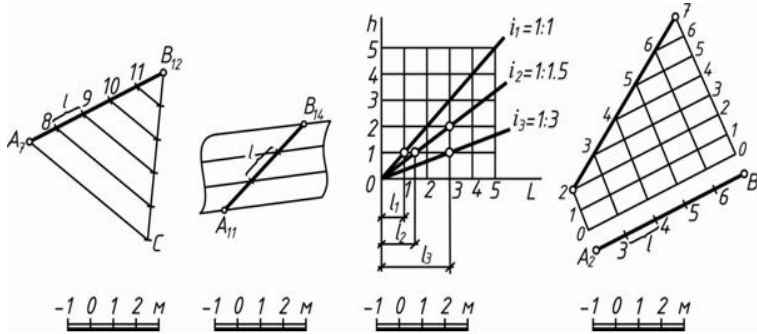
Түзудің интервалын анықтау үшін орындалатын графикалық әрекеттерді *түзуді бөліктеу (градуирование)* деп атайды.

Түзуді бөліктеу - түзу жатысындағы бүтін сандық белгісі бар нүктелерді анықтау болады.

Түзуді бөліктеу кесіндіні пропорционал бөлу тәсілімен, палетканың (*палетка – калькада жасалған трафарет*) көмегімен, қосымша графиктердің көмегімен және т.б. тәсілдермен орындалады (13.3-сурет).

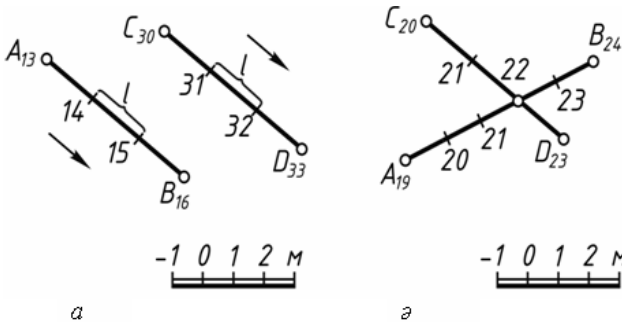
1. Сызбада жатыстары параллель, құлау бағыттары бірдей және интервалдары тең түзулер кеңістікте өзара *параллель* болады (13.4 а-сурет).

2. Панда проекциялары қиылысатын және қиылысу нүктесінде сандық белгілері бірдей болатын түзулер кеңістікте *қиылысатын* түзулер болады (13.4 б-сурет).



13.3-сурет

3. Егер параллельдік немесе қиылысу шарттары орындалмайтын болса, түзулер кеңістікте *айқасатын* болады.



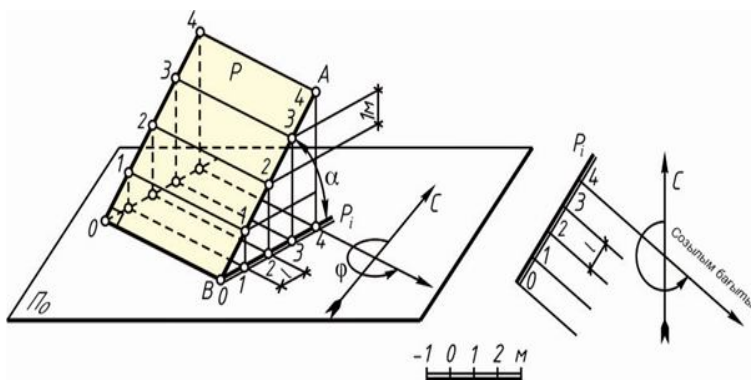
13.4-сурет

Сандық белгілері бар проекцияларда жазықтық бір түзудің бойында жатпайтын үш нүктемен, түзумен және одан тыс жатқан нүктемен, параллель түзулермен, қиылысатын түзулермен және т.б берілуі мүмкін. Бірақ жазықтықтың көлбеулік масштабымен берілгені ыңғайлы.

Жазықтықтың көлбеулігі ең үлкен сызығының проекциясының бөліктелген проекциясы оның **көлбеулік масштабы** деп аталады. Көлбеулік масштабы қосарланған (жуан және жіңішке) сызықпен бейнеленеді және  $i$  индексімен белгіленеді. Жазықтықтың горизонтальдарының пландағы

проекциялары көлбеулік масштабына перпендикуляр болады, горизонтальдардың (бүтін сандық белгілерімен) көршілес проекцияларының арасындағы қашықтық **жазықтықтың интервалы** болады. Жазықтықтың құлау  $\alpha$  бұрышы деп  $P$  жазықтығының  $\Pi_0$  проекция жазықтығына көлбеулігін айтады. Ол жазықтықтың көлбеулігі ең үлкен  $AB$  сызығымен  $P_i$  горизонталь проекциясының арасындағы бұрышпен анықталады.

Жазықтықтың **созылым бағыты** деп сандық белгілердің өсу жағына қарағандағы горизонтальдардың оң бағытын айтады.



13.5-сурет

Жер меридианы мен созылым бағыты арасындағы бұрыш  $\phi$  **созылым бұрышы** деп аталады. Бұл бұрыш меридианның солтүстік ұшынан сағат тіліне қарсы бағытта созылым бағытына дейінгі бұрышпен анықталады.

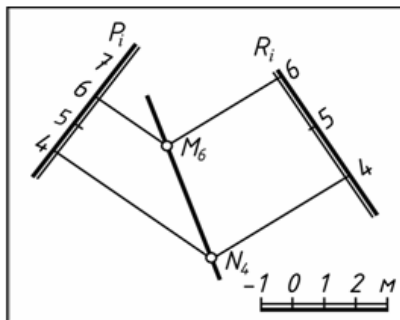
*Параллель жазықтықтар.* Параллель жазықтықтардың көлбеулік масштабы сызықтары өзара параллель, интервалдары тең болады және сандық белгілері бір бағытта өседі. Бұл шарттардың біреуі орындалмайтын болса, жазықтықтар кеңістікте қиылысады.

**Бақылау сұрақтары:**

1. Түзудің көлбеулігі мен интервалы дегеніміз не?
2. Түзуді бөліктеу деген не?
3. Жазықтықтың көлбеулік масштабы деген не?
4. Жазықтықтың горизонтальдары оның көлбеулік масштабына қатысты қалай орналасады?
5. Қандай бұрышты жазықтықтың құлау бұрышы деп атайды?
6. Қандай бұрышты жазықтықтың созылым бұрышы деп атайды?

## 14. САНДЫҚ БЕЛГІЛЕРІ БАР ПРОЕКЦИЯЛАРДАҒЫ ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЖӘНЕ МЕТРИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Екі жазықтықтың қиылысу сызығын тұрғызу үшін олардың сандық белгілері бірдей горизонтальдарының екі жұбының қиылысу нүктелерін анықтау керек (14.1-сурет).



14.1-сурет

Егер екі жазықтықтың құлау бұрыштары бірдей болса, қиылысу сызығының проекциясы берілген жазықтықтардың горизонтальдарының арасындағы бұрыштың биссектрисасы болады.

Егер түзудің екі нүктесі жазықтықтың горизонтальдарында жатса, яғни сандық белгілері горизонтальдардың сандық белгілерімен бірдей болса, ондай түзу осы жазықтықта жатады.

Жазықтықта жатқан кез келген түзуге параллель түзу осы жазықтыққа параллель болады.

Кез келген басқа жағдайда түзу мен жазықтық қиылысады.

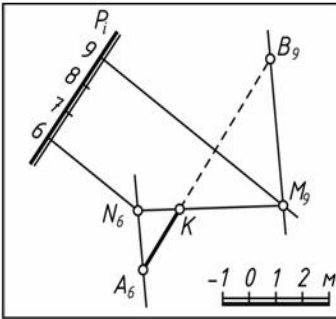
АВ түзуінің жазықтықпен қиылысу нүктесін анықтау үшін келесі тұрғызуларды орындау керек:

1) берілген түзу арқылы жалпы жағдайдағы көмекші жазықтық жүргіземіз. Ол үшін түзудің екі нүктесі арқылы сызбаны орындауға қолайлы бағытта екі горизонталь жүргіземіз, бұл горизонтальдар көмекші жазықтықты анықтайды;

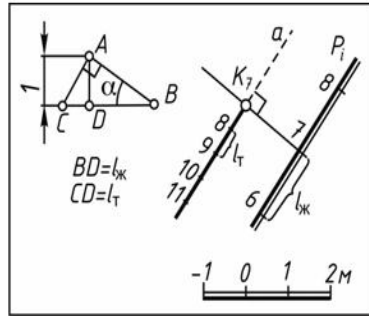
2) берілген жазықтық пен көмекші жазықтықтың қиылысу сызығын саламыз ( $MN$  түзуі);

3) берілген  $AB$  түзуі мен тұрғызылған  $MN$  түзуінің қиылысу нүктесін - ізделінді  $K$  нүктесін анықтаймыз.

Егер түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болса, онда планда түзудің проекциясы жазықтықтың көлбеулік масштабына параллель (жазықтықтың горизонтальдарының проекцияларына перпендикуляр) болады, ал түзу мен жазықтықтың сандық белгілері қарама-қарсы бағытта өседі және түзудің  $l_t$  интервалы жазықтықтың  $l_{ж}$  интервалына кері пропорционал болады, яғни  $l_t = \Delta h / l_{ж}$ .  $K_7$  нүктесінде көлбеулік масштабымен берілген  $P_1$  жазықтығына перпендикуляр тұрғызамыз (14.3-сурет).



14.2-сурет

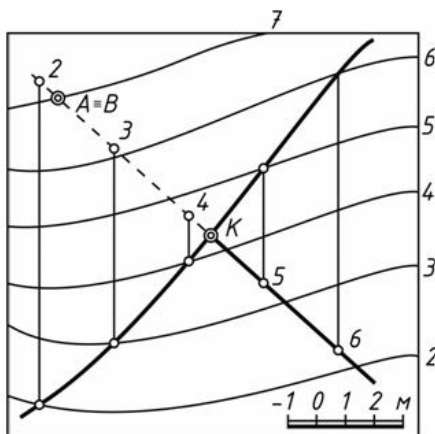


14.3-сурет

$K$  нүктесі арқылы жазықтықтың горизонтальдарына перпендикуляр  $a$  түзуін - перпендикулярдың проекциясын жүргіземіз. Түзуді бөліктейміз: ол үшін перпендикулярдың интервалдарын жоғарыда келтірілген формула бойынша есептейміз немесе келесі тұрғызуларды орындаймыз: қалауымызша алынған  $A$  нүктесі арқылы ұзындық бірлігіне тең  $AD$  кесіндісін жүргіземіз.  $AD$  түзуіне перпендикулярдың бойына ұзындығы жазықтық интервалына тең  $BD$  кесіндісін өлшеп саламыз;  $A$  және  $B$  нүктелерін қосамыз.  $AB$  түзуіне перпендикуляр және  $DB$  түзуімен  $C$  нүктесінде қиылысатын  $AC$  түзуін жүргіземіз.  $CD$  кесіндісі перпендикулярдың интервалына тең болады.

Жер беті оның дискреттік қаңқасымен - горизонтальдармен немесе профильдермен немесе бұлардың екеуімен де беріледі.

*Түзудің бетпен қиылысуы.* Түзудің бетпен қиылысу сызығын анықтау үшін берілген түзу арқылы жалпы жағдайдағы жазықтық жүргіземіз (15.4-сурет). Ол үшін түзуді бөліктейміз және 5,6 нүктелері арқылы сызбаны орындауға қолайлы бағытта өзара параллель горизонтальдар жүргіземіз. Бұл горизонтальдар көмекші жазықтықты анықтайды. Жазықтық пен беттің сандық белгілері бірдей горизонтальдарының қиылысу нүктелерін тауып, оларды қисық сызықпен қосамыз. Бұл сызық көмекші жазықтық пен беттің қиылысу сызығының проекциясы болады. Табылған қисық берілген түзумен ізделінді  $K$  нүктесінде қиылысады.

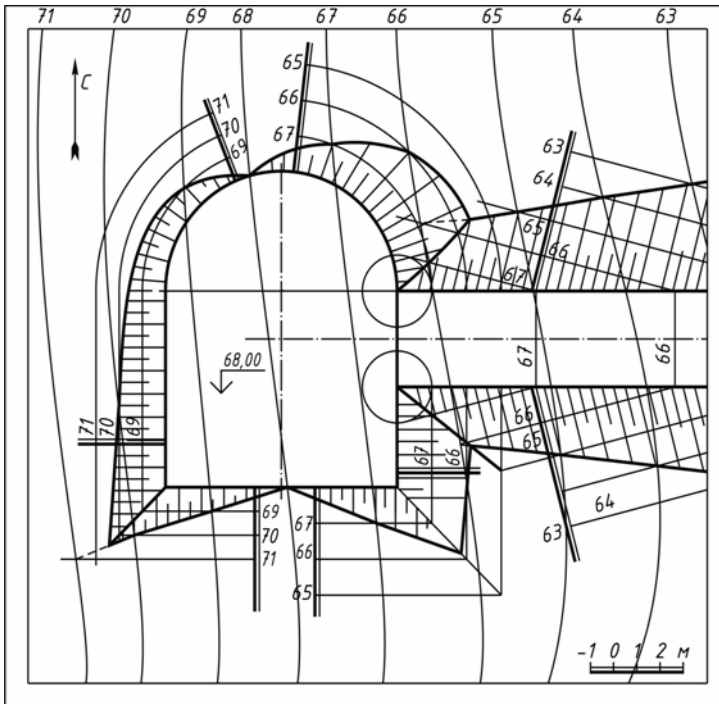


14.4-сурет

Түзудің көрінетіндігі бәсекелес нүктелер тәсілімен анықталады. Олар  $A$  және  $B$  нүктелері. Бұл нүктелердің түзуге тиістісінің сандық белгісінің мәні топографиялық бетке тиісті екінші нүктенің сандық белгісінің мәнінен кіші. Сондықтан бұл жерде түзу көрінбейтін болады. Көріну шекарасы түзу мен беттің қиылысу нүктесі -  $K$  нүктесі болады.

Құрылыс алаңындағы үйінді мен қазынды шекараларын анықтау.

Биіктік белгісі 68 м болатын горизонталь құрылыс алаңын салу үшін жер жұмыстарының шекарасын анықтау керек болсын (14.5-сурет). Қазынды құламаларының көлбеулігі  $i_k=1:1$ , үйінді құламаларының көлбеулігі  $i_v=1:1,5$ .



14.5-сурет

Алаңға шығатын жолдың көлбеулігі  $i_{ж}=1:6$ .

Нөлдік жұмыстардың сызығы жер телімінің 68-ші горизонталі бойымен өтеді. Алаңның сол жақ бөлігі қазынды да, ал оң жақ бөлігі үйінді де болады. Жер жұмыстарының ізделінді шекарасы топографиялық беттің үйінді мен қазынды құламаларымен қиылысу сызықтары болады. Бұл сызықтарды салу үшін барлық құламалардың горизонтальдарын салу керек.

Жазық құламалардың горизонтальдары алаңның сәйкес жиектеріне параллель сызықтар болады. Алаңның жартышеңбер болып келген бөлігіндегі үйінді мен қазынды беттері конустық беттер болып келеді. Олардың горизонтальдары центрлес шеңберлер болады. Жолдың жазық құламаларының горизонтальдарын салу кезінде олар жолдың көлбеу жиектері арқылы өтетіні ескеріледі.

Нәтижесінде үйінді мен қазынды құламаларының барлығы горизонтальдары арқылы кескінделді. Енді бұл құламалардың бір-бірімен және топографиялық бетпен қиылысу сызықтарын табу қалды. Ізделінді сызықтар қарастырылып отырған беттердің сандық белгілері бірдей горизонтальдарының қиылысу нүктелері арқылы анықталады.

***Бақылау сұрақтары:***

1. Беттің горизонтальдары дегеніміз не?
2. Түзудің бетпен қиылысу нүктесін анықтаудың жолын баяндаңыз.
3. Жазықтықтың топографиялық бетпен қиылысу сызығы қалай анықталады?
4. Сызбада конустық, цилиндрлік және топографиялық беттерді бейнелеңіз.
5. Қандай кескінді топографиялық беттің профилі деп атайды?

## ӨЗІНДІК ЖҰМЫСТАРҒА АРНАЛҒАН ТАПСЫРМАЛАР

Студенттердің өз бетінше орындайтын графикалық жұмыстар оқу құралының маңызды бөлімі болып табылады. Графикалық жұмыстар пәнді терең түсініп, толықтай меңгеруге көмектеседі. Әрбір тапсырманың алдында оны орындау үшін қажетті әдістемелік нұсқаулар берілген.

Тапсырмалар Конструкторлық құжаттардың бірыңғай жүйесінің (КҚБЖ) стандарттарына сай орындалады. Сызықтардың түрлері мен жуандығы МСТ 2.303-68 стандарты бойынша сызылу керек. Есептердің шарттары мен барлық салулар сызу құралдарының көмегімен қаламмен жіңішке сызықтармен орындалады, содан соң сызықтар стандарт бойынша бастырылады. Көрінетін контур сызықтарын жуандығы 0,8-1 мм болатын тұтас жуан сызықпен орындалады. Қалған сызықтар 0,3-0,4 мм жуандықпен орындалады.

Сызбаларды безендіргенде түстері әртүрлі қаламдар қолданылады: есептің шарттары мен барлық салулар қара түспен, ал ізделінді сызықтар қызыл түспен орындалады.

Тапсырмалар А3 немесе А4 пішіміндегі сызу қағаздарында орындалады. Әрбір парақта рамка МСТ 2.301-68 стандартына сай орындалады.

Барлық жазулар, белгілеулер МСТ 2.304-81 стандартына сәйкес өлшемі 3,5 және 5 мм сызба қаріптерімен орындалады. Кейбір тапсырмаларда жазықтықтардың, беттердің проекцияларын акварель бояуларымен бояу керек.

### **1-тапсырма. Нүкте, түзу, жазықтық. Негізгі позициялық есептер**

Графикалық жұмыс нүктенің, түзудің, жазықтықтың эпюрге және аксонометрияда проекцияларын салуға, негізгі позициялық есептерді шешуге арналған. Тапсырманы орындау үлгісі 1 – суретте көрсетілген. Тапсырма А3 пішіміндегі сызу қағазында орындалады.

**1- есеп.**  $\alpha(ABC)$  және  $\beta(DEF)$  жазықтықтарының қиылысу сызығын салу керек. Көрінетіндікті анықтау керек. Есеп А3

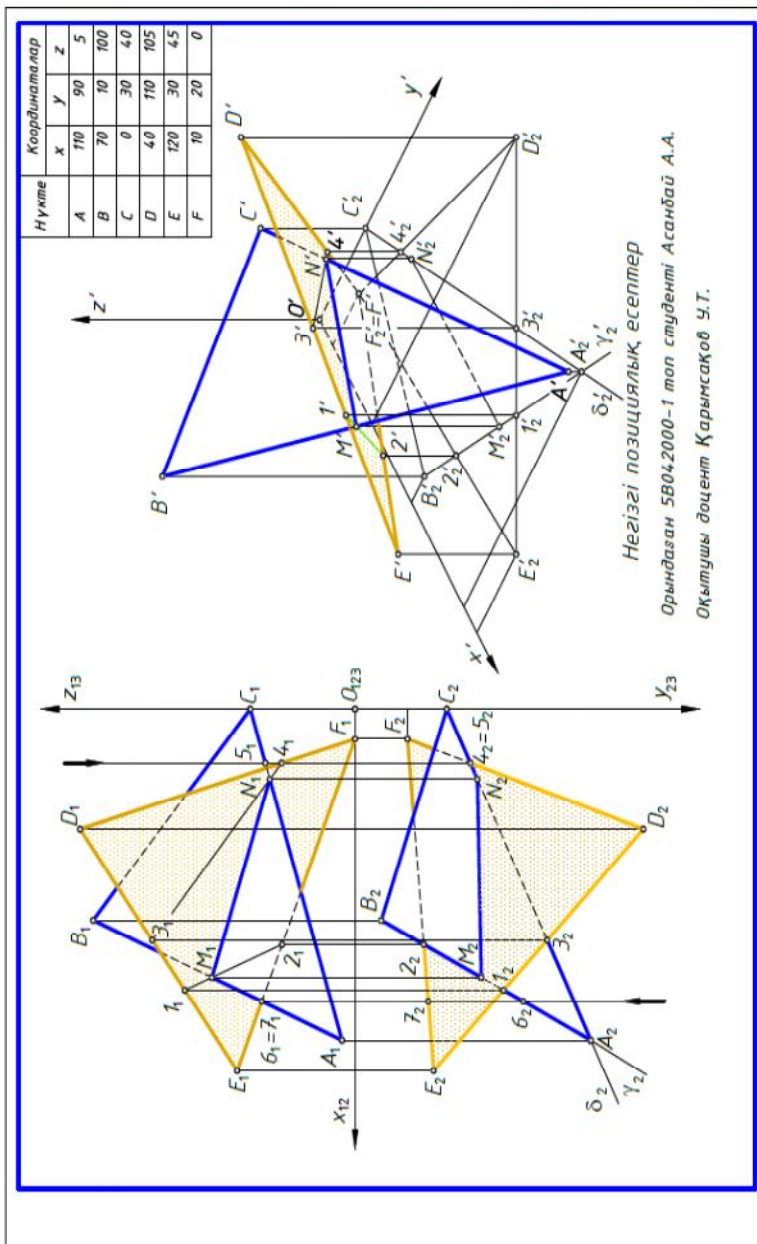
пішімінің сол жақ жартысында орындалады. Нүктелердің координаталары 1-кестеде берілген. Екі жазықтықтың қиылысу сызығын анықтайтын  $M, N$  нүктелерінің әрқайсысы  $ABC$  және  $DEF$  үшбұрыштарының біреуінің кез келген қабырғасының екінші үшбұрышпен қиылысу нүктесі ретінде табылады. Сонда екі рет түзудің жазықтықпен қиылысу нүктесін анықтау есебі шешіледі.

1-суреттегі үлгіде  $M(M_1, M_2)$  нүктесін анықтау үшін  $AB$  түзуі арқылы  $\gamma$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығы, ал  $N(N_1, N_2)$  нүктесін анықтау үшін  $AC$  түзуі арқылы  $\delta$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығы  $\square\square$  қолданылған. Фронталь проекцияда көрінетіндік 5 және 6 фронталь бәсекелес нүктелердің, ал горизонталь проекцияда 2 және 7 горизонталь бәсекелес нүктелердің көмегімен анықталған.

**2 – есеп.** Қиылысатын  $\alpha(ABC)$  және  $\beta(DEF)$  жазықтықтарының аксонометриялық проекцияларын салу керек. Екі жазықтықтың қиылысу сызығын анықтау керек. Көрінетіндікті анықтау керек. Есеп А3 пішімінің оң жақ жартысында орындалады.

Тікбұрышты изометрияда  $ABC$  және  $DEF$  үшбұрыштарының аксонометриялық проекцияларын берілген координаталары бойынша проекцияларын саламыз. Мұнда да екі жазықтықтың қиылысу сызығын анықтайтын  $M, N$  нүктелерінің әрқайсысы  $ABC$  және  $DEF$  үшбұрыштарының біреуінің кез келген қабырғасының екінші үшбұрышпен қиылысу нүктесі ретінде табылады.

1-суреттегі үлгіде  $AB$  түзуі арқылы жүргізілген  $\gamma$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығы  $DEF$  үшбұрышын  $1 \in DE$  және  $2 \in EF$  нүктелері арқылы өтетін түзу бойымен қияды, ал бұл түзудің  $AB$  түзуімен қиылысу нүктесі ізделінді  $M$  нүктесі болады.  $AC$  түзуі арқылы  $\delta$  горизонталь-проекциялаушы жазықтығы  $DEF$  үшбұрышын  $3 \in DE$  және  $4 \in DF$  нүктелері арқылы өтетін түзу бойымен қияды, ал бұл түзудің  $AC$  түзуімен қиылысу нүктесі ізделінді  $N$  нүктесі болады.



1-сурет

$M$  және  $N$  нүктелерінің аксонометриялық проекцияларын 1-есептің нәтижесі бойынша табылған координаталары арқылы салуға да болады.

1-кесте

| № | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |     |     | №  | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |     |     |
|---|----------|----------------------|-----|-----|----|----------|----------------------|-----|-----|
|   |          | x                    | y   | z   |    |          | x                    | y   | z   |
| 1 | A        | 15                   | 10  | 90  | 4  | A        | 40                   | 10  | 90  |
|   | B        | 85                   | 80  | 25  |    | B        | 90                   | 100 | 0   |
|   | C        | 110                  | 50  | 85  |    | C        | 0                    | 45  | 30  |
|   | D        | 65                   | 85  | 105 |    | D        | 20                   | 90  | 90  |
|   | E        | 0                    | 35  | 20  |    | E        | 100                  | 70  | 60  |
|   | F        | 110                  | 0   | 50  |    | F        | 60                   | 20  | 0   |
| 2 | A        | 110                  | 10  | 90  | 5  | A        | 100                  | 45  | 60  |
|   | B        | 50                   | 80  | 25  |    | B        | 40                   | 90  | 0   |
|   | C        | 0                    | 50  | 85  |    | C        | 0                    | 10  | 40  |
|   | D        | 70                   | 85  | 110 |    | D        | 15                   | 75  | 90  |
|   | E        | 110                  | 35  | 20  |    | E        | 100                  | 65  | 40  |
|   | F        | 15                   | 0   | 50  |    | F        | 70                   | 0   | 5   |
| 3 | A        | 110                  | 10  | 85  | 6  | A        | 40                   | 100 | 5   |
|   | B        | 0                    | 45  | 80  |    | B        | 100                  | 0   | 20  |
|   | C        | 50                   | 80  | 20  |    | C        | 0                    | 50  | 90  |
|   | D        | 85                   | 70  | 100 |    | D        | 90                   | 90  | 100 |
|   | E        | 65                   | 0   | 15  |    | E        | 60                   | 5   | 0   |
|   | F        | 15                   | 30  | 100 |    | F        | 0                    | 30  | 40  |
| 7 | A        | 110                  | 10  | 90  | 13 | A        | 100                  | 10  | 60  |
|   | B        | 40                   | 90  | 10  |    | B        | 50                   | 90  | 10  |
|   | C        | 0                    | 50  | 70  |    | C        | 10                   | 30  | 100 |
|   | D        | 65                   | 80  | 110 |    | D        | 90                   | 80  | 100 |
|   | E        | 110                  | 40  | 60  |    | E        | 70                   | 10  | 10  |
|   | F        | 0                    | 10  | 30  |    | F        | 0                    | 0   | 50  |
| 8 | A        | 110                  | 5   | 85  | 14 | A        | 45                   | 90  | 90  |
|   | B        | 50                   | 80  | 20  |    | B        | 100                  | 40  | 20  |
|   | C        | 0                    | 30  | 50  |    | C        | 0                    | 15  | 5   |
|   | D        | 60                   | 0   | 20  |    | D        | 70                   | 10  | 75  |
|   | E        | 100                  | 60  | 50  |    | E        | 85                   | 90  | 0   |
|   | F        | 0                    | 70  | 100 |    | F        | 0                    | 50  | 50  |
| 9 | A        | 110                  | 90  | 5   | 15 | A        | 100                  | 0   | 5   |
|   | B        | 70                   | 0   | 100 |    | B        | 65                   | 90  | 90  |
|   | C        | 0                    | 40  | 40  |    | C        | 0                    | 20  | 40  |
|   | D        | 40                   | 100 | 100 |    | D        | 30                   | 100 | 0   |
|   | E        | 110                  | 20  | 40  |    | E        | 100                  | 35  | 65  |
|   | F        | 10                   | 10  | 0   |    | F        | 0                    | 50  | 80  |

## 1-кестенің жалғасы

| №  | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |     |     | №  | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |     |     |
|----|----------|----------------------|-----|-----|----|----------|----------------------|-----|-----|
|    |          | x                    | y   | z   |    |          | x                    | y   | z   |
| 10 | A        | 110                  | 90  | 10  | 16 | A        | 45                   | 80  | 10  |
|    | B        | 50                   | 20  | 75  |    | B        | 90                   | 30  | 80  |
|    | C        | 0                    | 80  | 45  |    | C        | 5                    | 10  | 30  |
|    | D        | 70                   | 100 | 100 |    | D        | 0                    | 70  | 90  |
|    | E        | 100                  | 25  | 0   |    | E        | 100                  | 70  | 60  |
|    | F        | 0                    | 50  | 0   |    | F        | 20                   | 0   | 0   |
| 11 | A        | 100                  | 90  | 10  | 17 | A        | 30                   | 90  | 5   |
|    | B        | 50                   | 20  | 100 |    | B        | 100                  | 20  | 20  |
|    | C        | 0                    | 40  | 40  |    | C        | 0                    | 10  | 90  |
|    | D        | 90                   | 20  | 5   |    | D        | 85                   | 100 | 100 |
|    | E        | 70                   | 100 | 100 |    | E        | 95                   | 50  | 0   |
|    | F        | 10                   | 60  | 0   |    | F        | 0                    | 0   | 50  |
| 12 | A        | 100                  | 30  | 25  | 18 | A        | 45                   | 100 | 0   |
|    | B        | 30                   | 5   | 100 |    | B        | 100                  | 10  | 20  |
|    | C        | 0                    | 90  | 10  |    | C        | 0                    | 40  | 90  |
|    | D        | 85                   | 80  | 95  |    | D        | 10                   | 10  | 10  |
|    | E        | 70                   | 0   | 10  |    | E        | 100                  | 35  | 55  |
|    | F        | 0                    | 50  | 10  |    | F        | 60                   | 100 | 100 |
| 19 | A        | 10                   | 15  | 0   | 25 | A        | 80                   | 10  | 20  |
|    | B        | 100                  | 10  | 20  |    | B        | 10                   | 30  | 0   |
|    | C        | 40                   | 90  | 90  |    | C        | 35                   | 100 | 90  |
|    | D        | 70                   | 85  | 0   |    | D        | 15                   | 10  | 65  |
|    | E        | 90                   | 40  | 100 |    | E        | 50                   | 95  | 0   |
|    | F        | 0                    | 60  | 60  |    | F        | 100                  | 30  | 80  |
| 20 | A        | 90                   | 20  | 55  | 26 | A        | 50                   | 100 | 0   |
|    | B        | 20                   | 5   | 5   |    | B        | 100                  | 0   | 90  |
|    | C        | 0                    | 70  | 50  |    | C        | 0                    | 20  | 40  |
|    | D        | 60                   | 80  | 0   |    | D        | 20                   | 90  | 100 |
|    | E        | 100                  | 25  | 35  |    | E        | 0                    | 50  | 15  |
|    | F        | 0                    | 30  | 90  |    | F        | 100                  | 25  | 30  |
| 21 | A        | 20                   | 80  | 80  | 27 | A        | 90                   | 60  | 45  |
|    | B        | 0                    | 10  | 20  |    | B        | 40                   | 0   | 90  |
|    | C        | 100                  | 10  | 50  |    | C        | 0                    | 40  | 5   |
|    | D        | 60                   | 90  | 0   |    | D        | 10                   | 90  | 75  |
|    | E        | 100                  | 30  | 35  |    | E        | 100                  | 0   | 30  |
|    | F        | 0                    | 40  | 75  |    | F        | 70                   | 100 | 0   |
| 22 | A        | 100                  | 0   | 40  | 28 | A        | 40                   | 5   | 90  |
|    | B        | 0                    | 20  | 90  |    | B        | 100                  | 20  | 5   |
|    | C        | 30                   | 80  | 0   |    | C        | 0                    | 90  | 50  |
|    | D        | 80                   | 100 | 100 |    | D        | 90                   | 60  | 100 |
|    | E        | 100                  | 40  | 10  |    | E        | 0                    | 30  | 70  |
|    | F        | 0                    | 0   | 30  |    | F        | 60                   | 100 | 0   |
| 23 | A        | 90                   | 10  | 20  | 29 | A        | 80                   | 10  | 20  |
|    | B        | 50                   | 95  | 85  |    | B        | 30                   | 80  | 80  |
|    | C        | 0                    | 30  | 5   |    | C        | 0                    | 25  | 0   |
|    | D        | 20                   | 0   | 80  |    | D        | 60                   | 85  | 0   |
|    | E        | 100                  | 40  | 45  |    | E        | 0                    | 10  | 60  |
|    | F        | 0                    | 80  | 30  |    | F        | 100                  | 40  | 90  |
| 24 | A        | 100                  | 20  | 0   | 30 | A        | 25                   | 20  | 10  |
|    | B        | 10                   | 0   | 20  |    | B        | 90                   | 60  | 30  |
|    | C        | 50                   | 90  | 100 |    | C        | 0                    | 100 | 90  |
|    | D        | 30                   | 75  | 0   |    | D        | 60                   | 0   | 100 |
|    | E        | 100                  | 60  | 40  |    | E        | 80                   | 100 | 0   |
|    | F        | 0                    | 20  | 90  |    | F        | 0                    | 50  | 40  |

## 2-тапсырма. Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы

Көпжақтың жазықтықпен қиылысуына екі есеп орындау керек. Тапсырманы орындау үлгісі 2 – суретте көрсетілген. Тапсырма АЗ пішіміндегі сызу қағазында орындалады.

**1-есеп.** Берілген көпжақтың жазықтық пен қимасын анықтау керек. АЗ пішімінің сол жақ жартысында 2 – кестеде нұсқа бойынша берілген көпжақ пен жазықтықтың фронталь және горизонталь проекцияларын салу керек. Сызбада өлшемдерді қоюдың қажеті жоқ. Бұл жерде қиюшы жазықтықты мөлдір емес деп қабылдау керек.

Геометриялық денені жазықтықпен қиғанда пайда болатын жазық фигура қима деп аталады. Көпжақтың қимасы жазық көпбұрыш болады. Оның төбелері мен қабырғалары – берілген жазықтықтың берілген көпжақтың жақтарымен және қырларымен қиылысуымен анықталады. Бұл көпбұрыштың төбелерінің саны көпжақтың жазықтықпен қиылысатын қырларының санына тең болады. Ал қиманың қабырғаларының саны көпжақтың жазықтықпен қиылысатын жақтарының санына тең болады. Қиманы тұрғызу үшін екі түрлі тәсіл қолданылады:

1) *қырлар тәсілі* - берілген жазықтықпен көпжақтың қырларының қиылысу нүктелерін, яғни қиманың төбелерін табады;

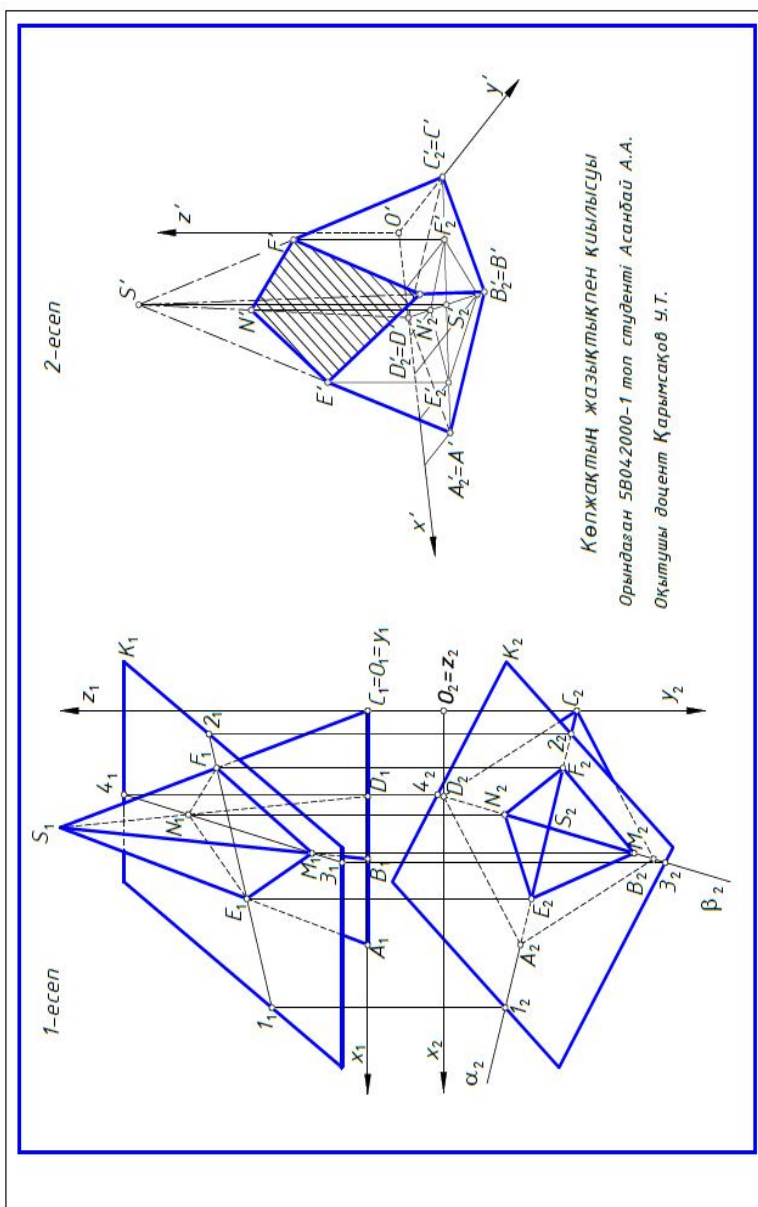
2) *жақтар тәсілі* - жазықтықпен көпжақтың жақтарының қиылысу түзулерін, яғни қиманың қабырғаларын тұрғызады.

Көбінесе бірінші тәсіл қолданылады. Екінші тәсіл көпжақтың жақтары проекциялаушы жазықтықты анықтаған кезде қолданылады. Кейде екі тәсілдің комбинациясын да қолдануға болады.

**2-есеп.** Көпжақтың аксонометриялық проекциясын салу. АЗ пішімінің оң жақ жартысында 1-есептегі қиылған көпжақтың аксонометриялық проекциясын салу керек. Стандарттық аксонометриялық проекцияның түрін нұсқа бойынша қабылдайды. Нұсқалары тақ санды тапсырмаларда тікбұрышты изометрияны, ал

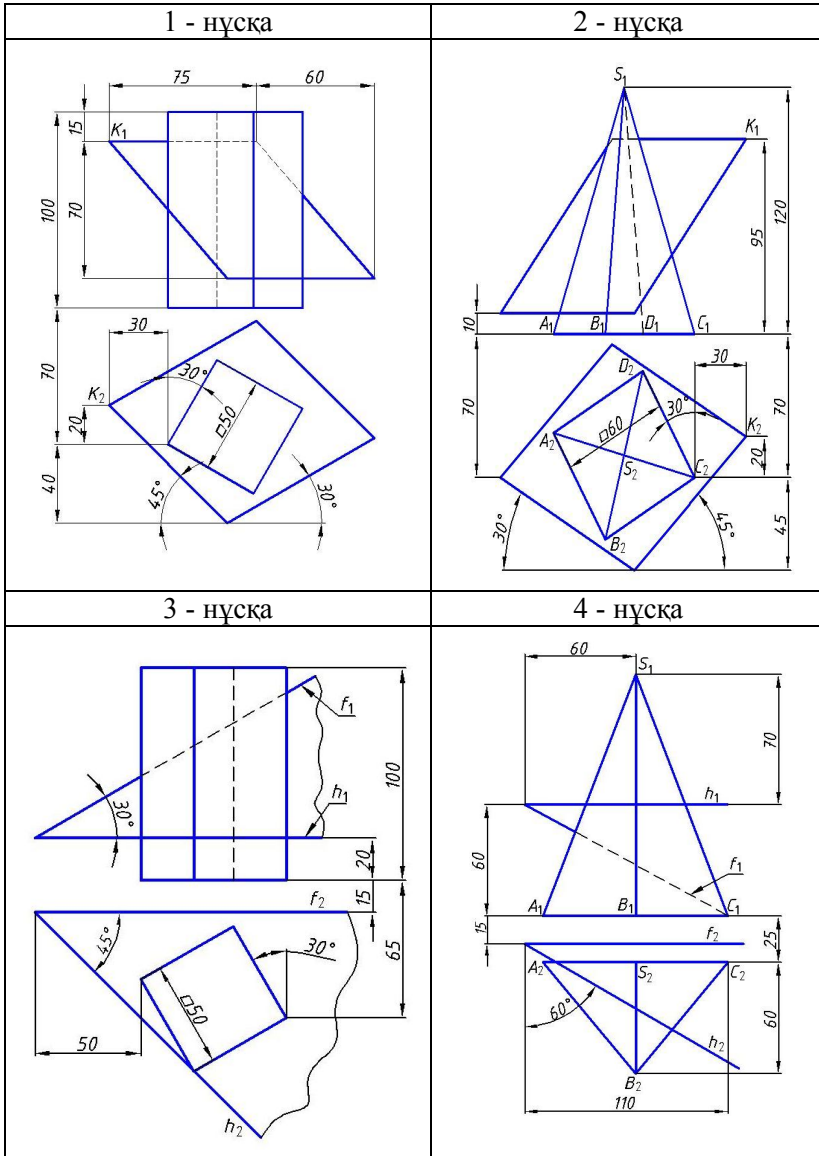
нұсқалары жұп санды тапсырмаларда тікбұрышты диметрияны орындайды.

Алдымен сызбада  $x, y, z$  қосымша координаталар осьтерін жүргізеді. Бұл осьтерді көпжақтың симметрия осьтері арқылы жүргізуге болады. Сонымен қатар қосымша координаталар осьтерін көпжақтың шеткі қырлары немесе төбелері арқылы жүргізуге болады. 2 – суреттегі үлгіде  $x, y$  осьтері көпжақтың  $ABCD$  табанының жазықтығында жүргізілген. Мұндағы  $x$  осін  $D$  нүктесі арқылы,  $y$  осін  $C$  нүктесі арқылы жүргізген. Ал  $z$  осі  $x$  және  $y$  осьтерінің  $O$  қиылысу нүктесінен тұрғызылған. Содан кейін таңдалған аксонометриялық проекцияның осьтерін жүргізеді. Көпжақтың эпюрдегі өлшемдері бойынша оның екінші проекциясын салады. Көпжақтың төбелерінің екінші проекцияларынан олардың аппликаталарын тұрғызады.

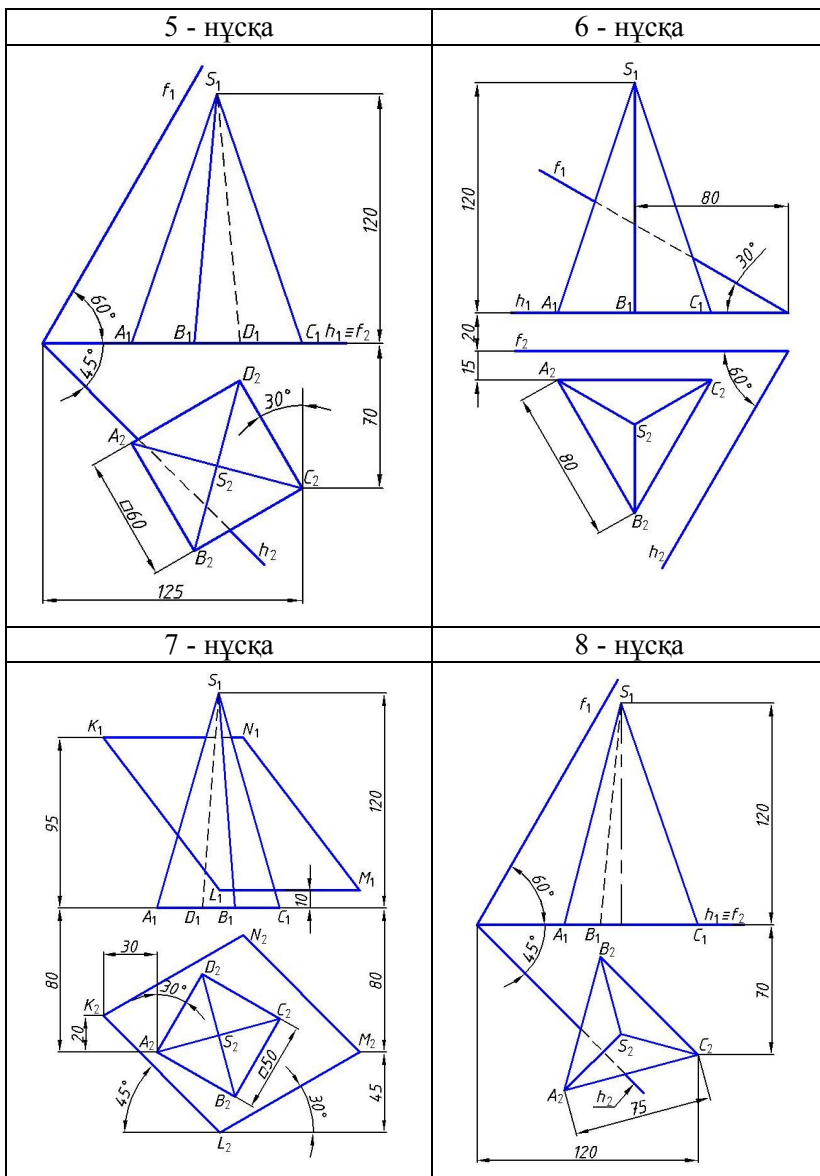


2-сурет

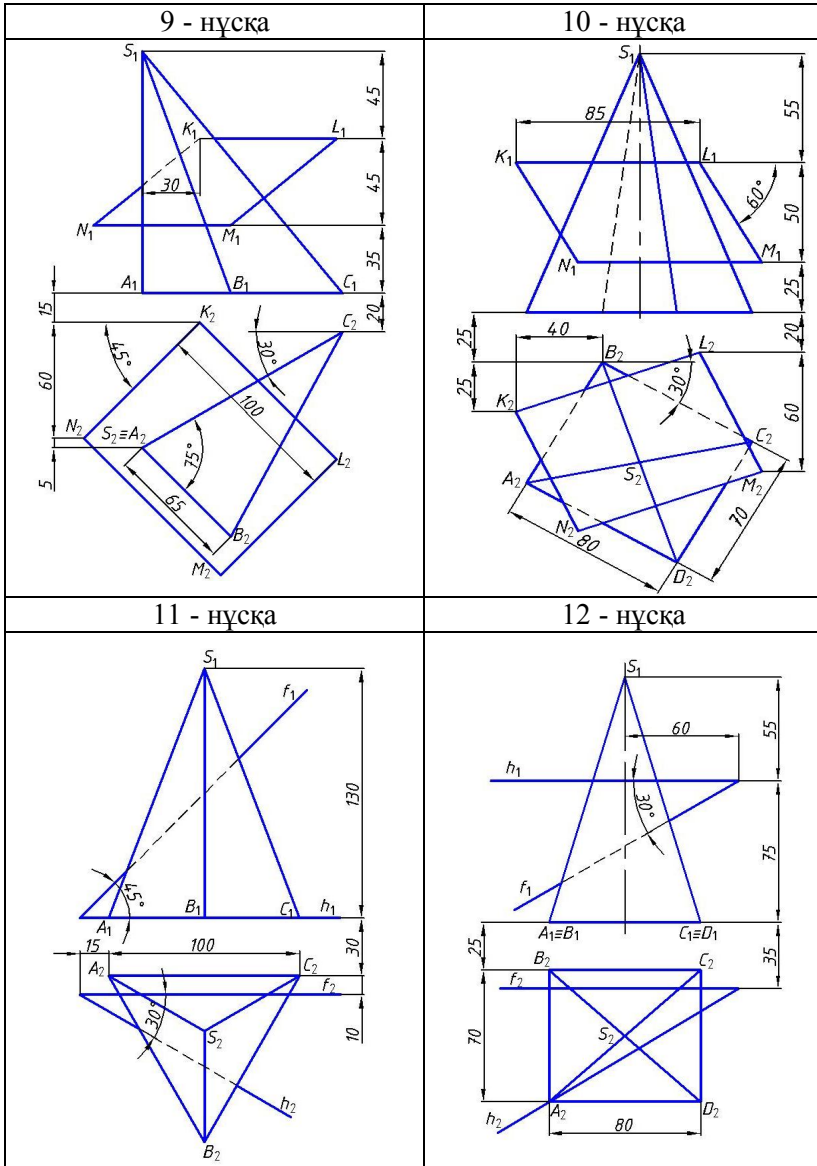
2-кесте



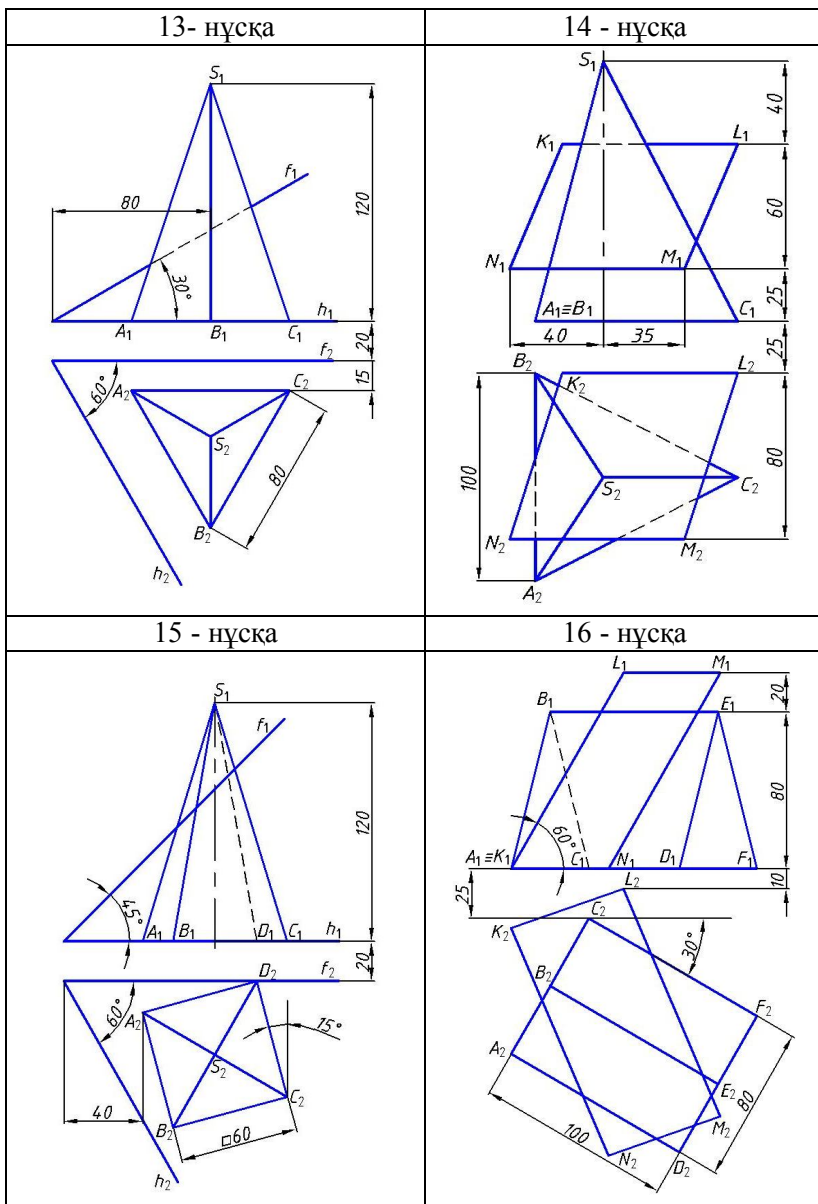
2-кестенің жалғасы



2-кестенің жалғасы

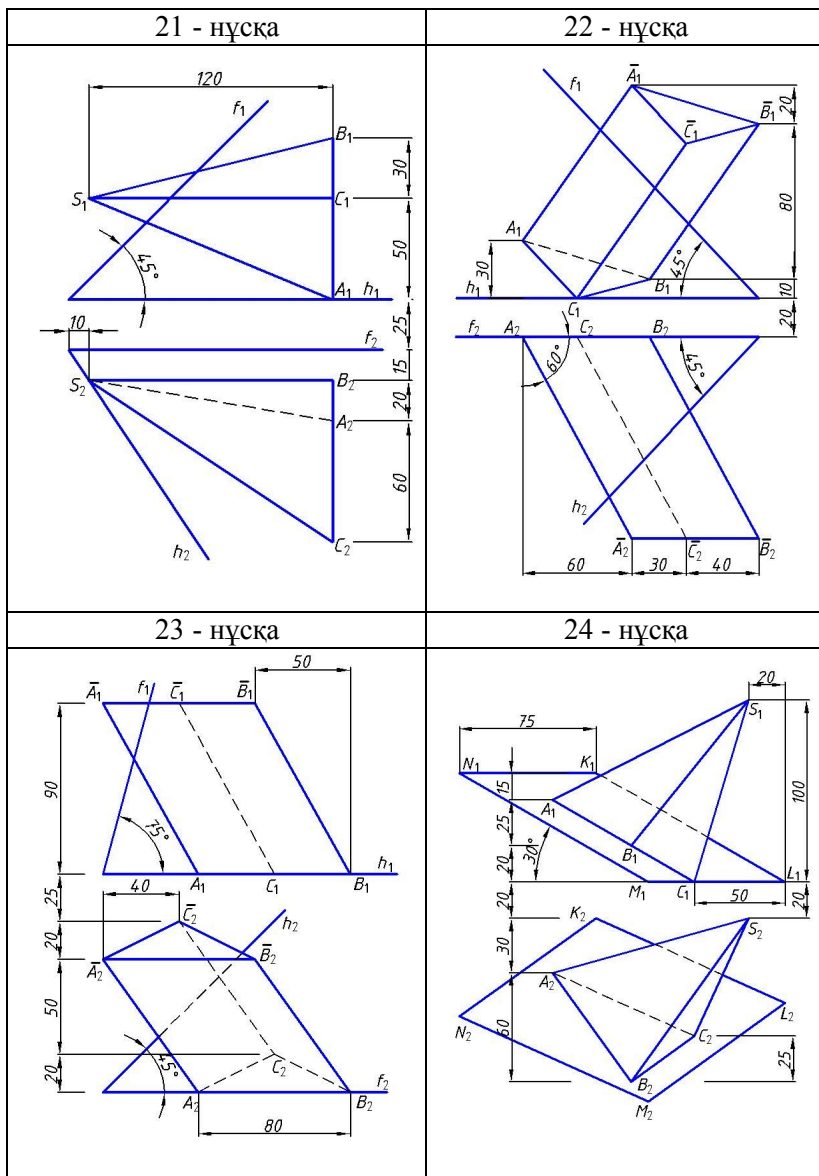


2-кестенің жалғасы

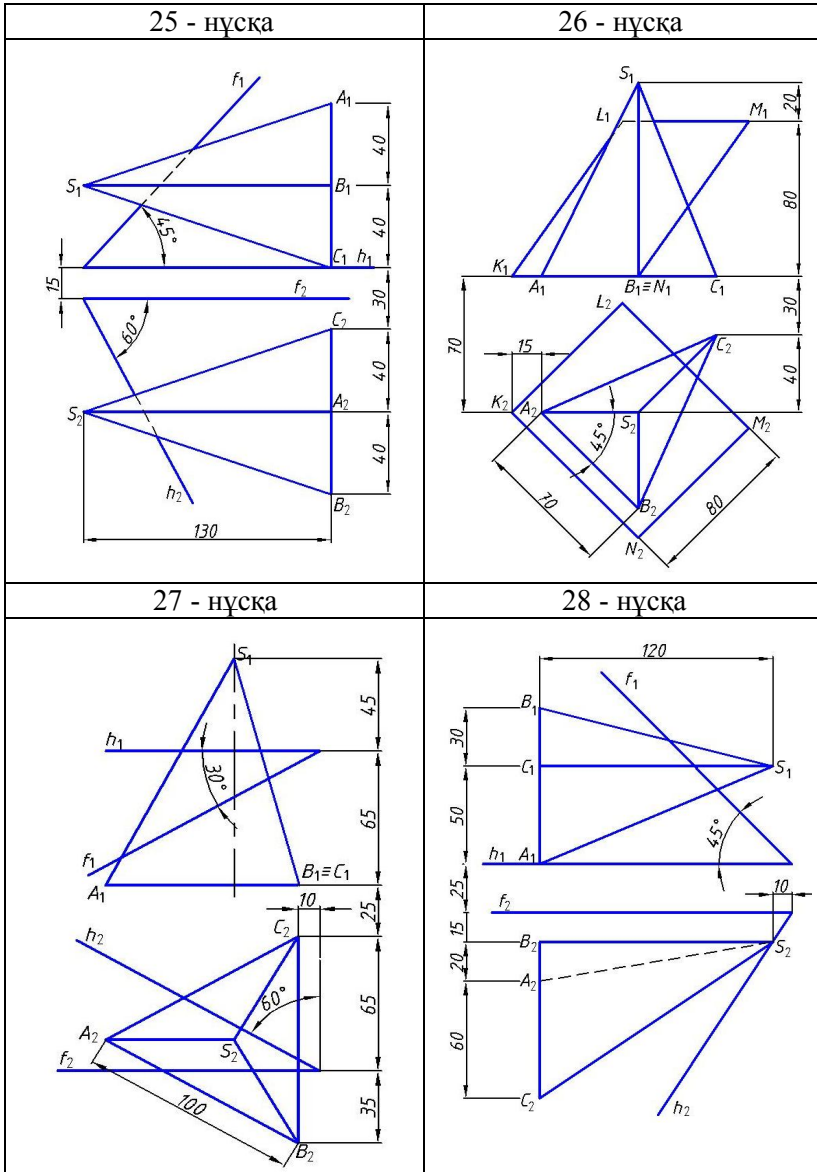




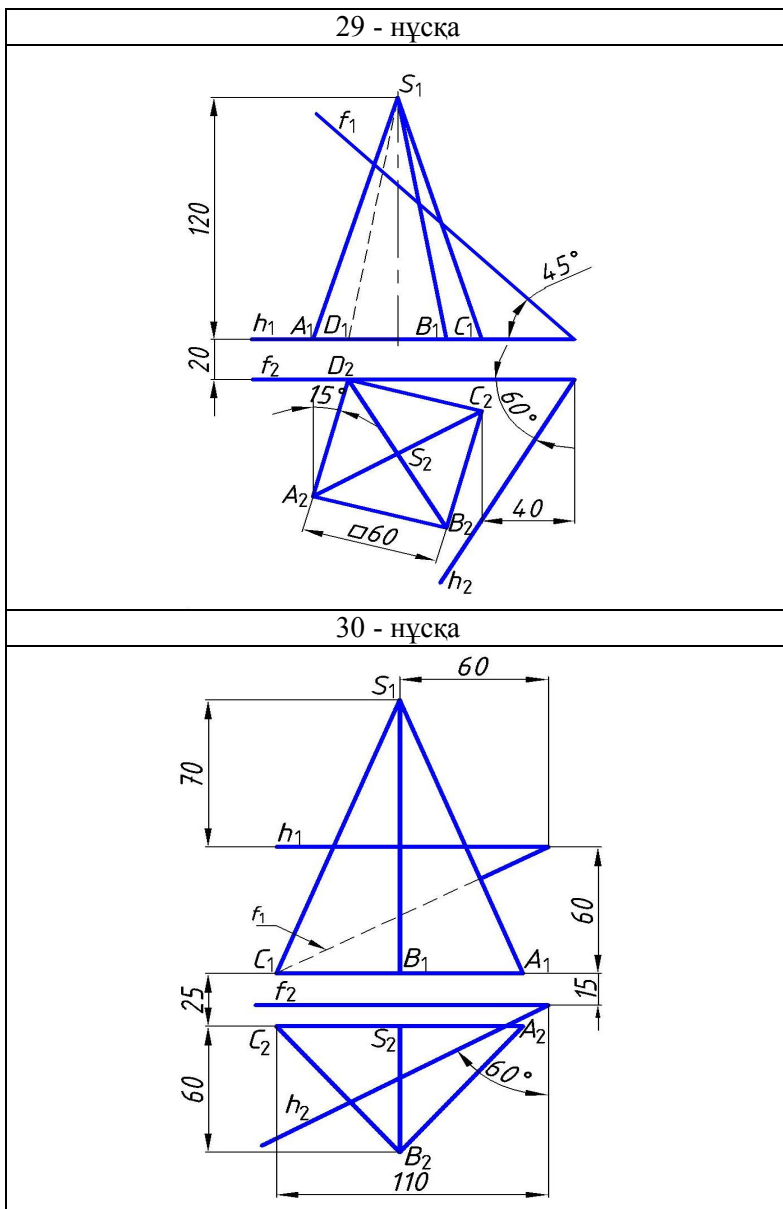
2-кестенің жалғасы



2-кестенің жалғасы



2-кестенің жалғасы



### 3-тапсырма. Сызбаны түрлендіру тәсілдері

Графикалық жұмыс метрикалық есептерді сызбаны түрлендіру тәсілдерімен шешуге арналған. Тапсырманың әр есебі АЗ пішіміндегі сызу қағазында орындалады.  $SABC$  пирамидасының төбелерінің координаталары 3-кестеде берілген.

**1-есеп.**  $SABC$  пирамидасының  $ABC$  табанының натурал шамасын проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен анықтау керек. Тапсырманы орындау үлгісі 3.1-суретте көрсетілген.

Алдымен берілген координаталары бойынша пирамиданың фронталь және горизонталь проекцияларын салады. Пирамида қырларының көрінетіндігін бәсекелес нүктелер тәсілімен анықтайды.

$ABC$  үшбұрышының натурал шамасын анықтау үшін оны проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель етіп орналастыру керек. Ол үшін проекциялар жазықтықтарын екі рет алмастырады: алдымен  $ABC$  жазықтығын проекциялаушы жағдайға, кейін деңгейлік жағдайға келтіреді.

$ABC$  жазықтығының  $h$  горизонталін жүргіземіз. Жаңа  $\pi_4$  проекциялар жазықтығын  $h$  горизонталіне перпендикуляр етіп орналастыру керек ( $x_{24} \perp h_2$ ). Үшбұрыштың төбелерінің жаңа проекцияларын салу үшін оның горизонталь проекцияларынан жаңа  $x_{24}$  осіне перпендикуляр етіп байланыс сызықтарын жүргіземіз. Ал  $A_4, B_4, C_4$  проекцияларынан  $x_{24}$  осіне дейінгі қашықтықтар  $A_4, B_4, C_4$  проекцияларынан  $x_{12}$  осіне дейінгі қашықтықтарға тең болады. Сонда  $ABC$  үшбұрышы  $\pi_4$  проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады. Үшбұрыштың проекциясы  $A_4C_4$  кесіндісі болады. Содан соң проекциялар жазықтығын екінші рет алмастырамыз.  $\pi_5$  проекциялар жазықтығын үшбұрыш жазықтығына параллель етіп орналастырамыз ( $x_{45} \parallel A_4C_4$ ).  $\pi_5$  проекциялар жазықтығындағы  $A_5B_5C_5$  үшбұрышы  $ABC$  үшбұрышының натурал шамасы болады.

**2-есеп.**  $S$  төбесінен  $ABC$  табанының жазықтығына дейінгі қашықтықты проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілімен анықтау керек. Тапсырманы орындау үлгісі 3.2-суретте көрсетілген.

Пирамиданың  $S$  төбесі мен  $ABC$  табанының фронталь және горизонталь проекцияларын саламыз.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярмен анықталады. Егер жазықтық проекциялаушы болса, онда тік бұрыш проекциялар жазықтығына натурал шамасына проекцияланады, ал перпендикулярдың табаны жазықтықтың ізіне тиісті болады. Сондықтан сызбаны  $ABC$  жазықтығы фронталь-проекциялаушы немесе горизонталь-проекциялаушы болатындай етіп түрлендіру керек. Сол үшін жазықтықты проекциялаушы түзуден айналдырғанда оның горизонталі немесе фронталі проекциялар жазықтығына перпендикуляр болады, сонда  $ABC$  жазықтығы түзуге проекцияланады.

Мысалы,  $B$  нүктесі арқылы  $h$  фронталін жүргіземіз:  $h(B_1 \in h_1 \parallel x_{12}, h_2 - \text{байланыс сызығы бойымен})$ . Горизонталь-проекциялаушы  $i$  түзуін  $B$  нүктесі арқылы жүргіземіз.  $ABC$  үшбұрышын  $i$  осінен айналдырып,  $\pi_1$  проекциялар жазықтығына перпендикуляр жағдайға келтіреді. Ол үшін горизонтальдің горизонталь проекциясын  $x_{12}$  осіне перпендикуляр болғанша айналдырамыз:  $h_2 \perp x_{12}$ .  $ABC$  үшбұрышының жаңа горизонталь проекциясын анықтаймыз, бұл жерде горизонталь проекцияның

өлшемдері өзгермейді, яғни:  $\Delta \overline{A_2 B_2 C_2} = \Delta A_2 B_2 C_2$ . Ал фронталь проекциясы  $\overline{A_1 B_1}$  кесіндісіне проекцияланады.  $S$  нүктесі де  $ABC$  үшбұрышымен бірге сондай бұрышқа бұрылады.

$\overline{ABC}$  жазықтығына  $\overline{SK}$  перпендикулярын тұрғызамыз.

$|\overline{S_1 K_1}|$  - ізделінді қашықтық.  $\overline{SK}$  перпендикулярларының фронталь проекциясы  $[\overline{S_2 K_2}]$  кесіндісі  $x_{12}$  осіне параллель

болады. Содан кейін  $K$  нүктесінің  $\overline{K_2}$  проекциясын  $i \perp \pi_1$  осінен кері қарай сол бұрышқа айналдырып  $K_2$  горизонталь проекциясын анықтаймыз.  $K$  нүктесінің  $K_1$  фронталь проекциясын байланыс сызықтары бойымен анықтаймыз.

**3-есеп.**  $SAB$  және  $CAB$  жақтарының арасындағы бұрыштың натурал шамасын жазық-параллель ығыстыру тәсілімен анықтау керек. Тапсырманы орындау үлгісі 3.3-суретте көрсетілген.

Екі жақты бұрыш проекциялар жазықтығына натурал шамасымен проекциялану үшін оның ортақ қыры сол проекциялар жазықтығына перпендикуляр болуы керек.

Екі жақты бұрышты горизонталь проекциясының өлшемдерін өзгертпей, ортақ  $AB$  қырының горизонталь проекциясы  $x_{12}$  осіне параллель болатындай бос орынға жылжытамыз:  $\overline{A_2} \overline{B_2} \parallel x_{12}$ ,  $\Delta \overline{S_2} \overline{A_2} \overline{B_2} = \Delta S_2 A_2 B_2$ ,  $\Delta \overline{C_2} \overline{A_2} \overline{B_2} = \Delta C_2 A_2 B_2$ .  $\overline{A_2}$  проекциясынан жүргізілген байланыс сызығының  $A_1$  проекциясынан  $x_{12}$  осіне параллель жүргізілген түзумен қиылысу нүктесі  $\overline{A_1}$  проекциясы табылады. Дәл осылай  $\overline{S_1}, \overline{B_1}, \overline{C_1}$  проекциялары да анықталады.

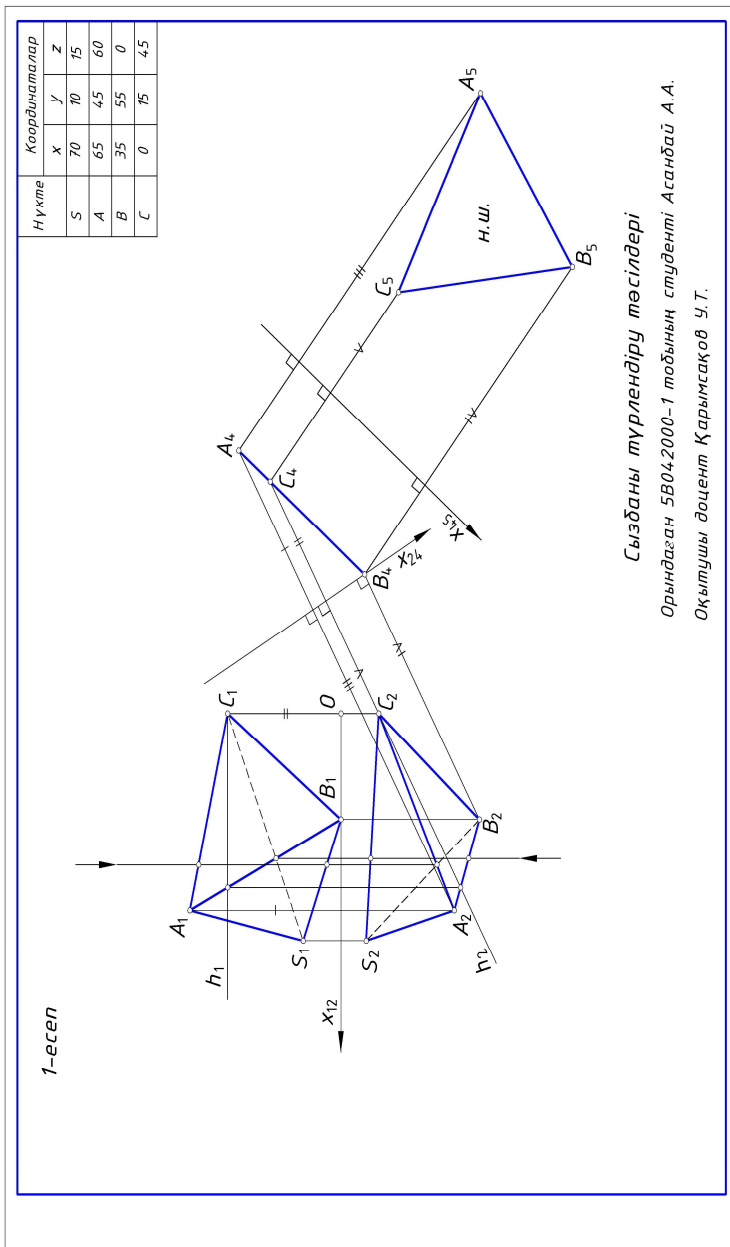
Енді екі жақты бұрышты ортақ қыры  $\pi_2$  жазықтығына перпендикуляр болатындай етіп бос орынға жылжытамыз:  $\overline{\overline{A_1}} \overline{\overline{B_1}} \perp x_{12}$ ,  $\Delta \overline{\overline{S_1}} \overline{\overline{A_1}} \overline{\overline{B_1}} = \Delta \overline{S_1} \overline{A_1} \overline{B_1}$ ,  $\Delta \overline{\overline{C_1}} \overline{\overline{A_1}} \overline{\overline{B_1}} = \Delta \overline{C_1} \overline{A_1} \overline{B_1}$ .  $\overline{\overline{A_1}}, \overline{\overline{B_1}}$  проекцияларынан байланыс сызығын, ал  $\overline{A_2}, \overline{B_2}$  проекцияларынан  $x_{12}$  осіне параллель түзу жүргіземіз. Олардың қиылысуында  $\overline{\overline{A_2}} = \overline{\overline{B_2}}$  нүктесі болады. Дәл осылай  $\overline{\overline{S_2}}, \overline{\overline{C_2}}$  проекциялары да салынады. Сонда ізделінді  $\phi$  бұрышы анықталады.

## 3-кесте

| №  | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |    |    | №  | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |    |    |
|----|----------|----------------------|----|----|----|----------|----------------------|----|----|
|    |          | x                    | y  | z  |    |          | x                    | y  | z  |
| 1  | S        | 35                   | 70 | 5  | 6  | S        | 20                   | 55 | 50 |
|    | A        | 65                   | 10 | 20 |    | A        | 45                   | 10 | 50 |
|    | B        | 10                   | 20 | 0  |    | B        | 70                   | 60 | 0  |
|    | C        | 0                    | 60 | 60 |    | C        | 0                    | 10 | 20 |
| 2  | S        | 10                   | 10 | 0  | 7  | S        | 65                   | 0  | 15 |
|    | A        | 35                   | 60 | 5  |    | A        | 70                   | 45 | 60 |
|    | B        | 65                   | 0  | 20 |    | B        | 40                   | 55 | 0  |
|    | C        | 0                    | 50 | 60 |    | C        | 0                    | 10 | 45 |
| 3  | S        | 65                   | 15 | 0  | 8  | S        | 70                   | 55 | 65 |
|    | A        | 70                   | 60 | 45 |    | A        | 40                   | 55 | 5  |
|    | B        | 40                   | 0  | 55 |    | B        | 65                   | 0  | 20 |
|    | C        | 0                    | 45 | 10 |    | C        | 0                    | 5  | 50 |
| 4  | S        | 0                    | 45 | 40 | 9  | S        | 10                   | 55 | 45 |
|    | A        | 10                   | 0  | 15 |    | A        | 60                   | 10 | 60 |
|    | B        | 80                   | 20 | 10 |    | B        | 45                   | 55 | 15 |
|    | C        | 45                   | 0  | 70 |    | C        | 0                    | 25 | 5  |
| 5  | S        | 10                   | 45 | 55 | 10 | S        | 70                   | 10 | 20 |
|    | A        | 60                   | 60 | 10 |    | A        | 45                   | 50 | 20 |
|    | B        | 45                   | 15 | 55 |    | B        | 60                   | 20 | 65 |
|    | C        | 0                    | 5  | 25 |    | C        | 5                    | 10 | 10 |
| 11 | S        | 20                   | 50 | 45 | 21 | S        | 55                   | 50 | 60 |
|    | A        | 10                   | 20 | 10 |    | A        | 65                   | 0  | 5  |
|    | B        | 55                   | 50 | 10 |    | B        | 40                   | 55 | 0  |
|    | C        | 80                   | 0  | 60 |    | C        | 0                    | 20 | 40 |
| 12 | S        | 55                   | 60 | 50 | 22 | S        | 75                   | 10 | 15 |
|    | A        | 65                   | 15 | 0  |    | A        | 45                   | 60 | 10 |
|    | B        | 40                   | 0  | 55 |    | B        | 60                   | 30 | 65 |
|    | C        | 0                    | 40 | 20 |    | C        | 5                    | 20 | 10 |
| 13 | S        | 10                   | 0  | 10 | 23 | S        | 60                   | 55 | 55 |
|    | A        | 35                   | 5  | 60 |    | A        | 30                   | 50 | 5  |
|    | B        | 65                   | 20 | 0  |    | B        | 75                   | 25 | 0  |
|    | C        | 0                    | 60 | 50 |    | C        | 10                   | 20 | 60 |
| 14 | S        | 60                   | 55 | 55 | 24 | S        | 10                   | 15 | 0  |
|    | A        | 75                   | 25 | 0  |    | A        | 45                   | 70 | 0  |
|    | B        | 30                   | 5  | 50 |    | B        | 80                   | 10 | 20 |
|    | C        | 10                   | 60 | 20 |    | C        | 0                    | 40 | 45 |
| 15 | S        | 0                    | 40 | 45 | 25 | S        | 40                   | 70 | 0  |
|    | A        | 10                   | 15 | 0  |    | A        | 65                   | 5  | 20 |
|    | B        | 80                   | 10 | 20 |    | B        | 10                   | 30 | 0  |
|    | C        | 45                   | 70 | 0  |    | C        | 0                    | 60 | 60 |

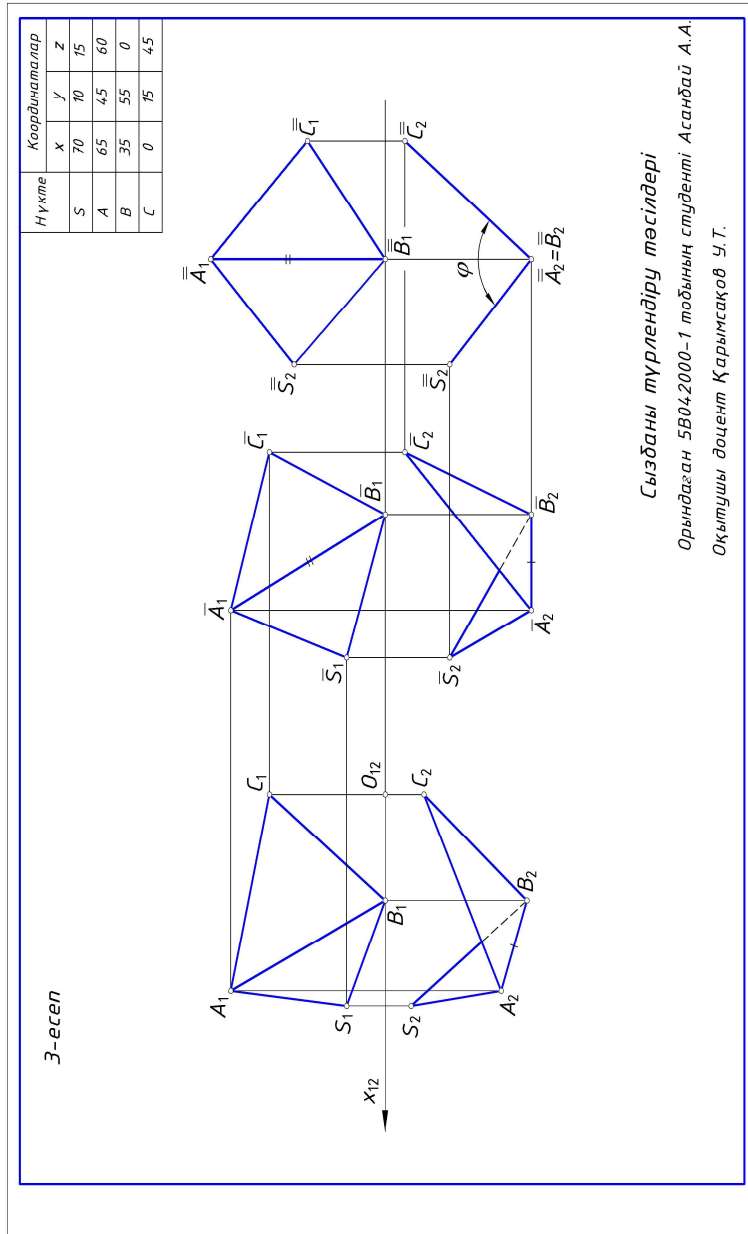
## 3-кестенің жалғасы

| №  | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |    |    | №  | Нүктелер | Координаталар,<br>мм |    |    |
|----|----------|----------------------|----|----|----|----------|----------------------|----|----|
|    |          | x                    | y  | z  |    |          | x                    | y  | z  |
| 16 | S        | 60                   | 55 | 10 | 26 | S        | 20                   | 50 | 55 |
|    | A        | 65                   | 20 | 55 |    | A        | 50                   | 50 | 0  |
|    | B        | 20                   | 5  | 5  |    | B        | 70                   | 0  | 70 |
|    | C        | 0                    | 50 | 25 |    | C        | 0                    | 20 | 0  |
| 17 | S        | 80                   | 60 | 0  | 27 | S        | 65                   | 15 | 5  |
|    | A        | 20                   | 45 | 50 |    | A        | 70                   | 60 | 45 |
|    | B        | 10                   | 10 | 20 |    | B        | 40                   | 0  | 55 |
|    | C        | 55                   | 10 | 50 |    | C        | 0                    | 45 | 5  |
| 18 | S        | 70                   | 55 | 65 | 28 | S        | 70                   | 65 | 55 |
|    | A        | 80                   | 0  | 40 |    | A        | 40                   | 5  | 55 |
|    | B        | 0                    | 20 | 70 |    | B        | 65                   | 20 | 5  |
|    | C        | 30                   | 45 | 0  |    | C        | 10                   | 50 | 10 |
| 19 | S        | 60                   | 55 | 0  | 29 | S        | 65                   | 55 | 5  |
|    | A        | 70                   | 10 | 20 |    | A        | 75                   | 5  | 25 |
|    | B        | 50                   | 45 | 50 |    | B        | 30                   | 55 | 70 |
|    | C        | 0                    | 25 | 10 |    | C        | 0                    | 25 | 0  |
| 20 | S        | 35                   | 5  | 75 | 30 | S        | 70                   | 20 | 0  |
|    | A        | 65                   | 20 | 10 |    | A        | 25                   | 20 | 50 |
|    | B        | 10                   | 0  | 20 |    | B        | 60                   | 65 | 20 |
|    | C        | 0                    | 60 | 60 |    | C        | 0                    | 10 | 10 |



3.1-сурет





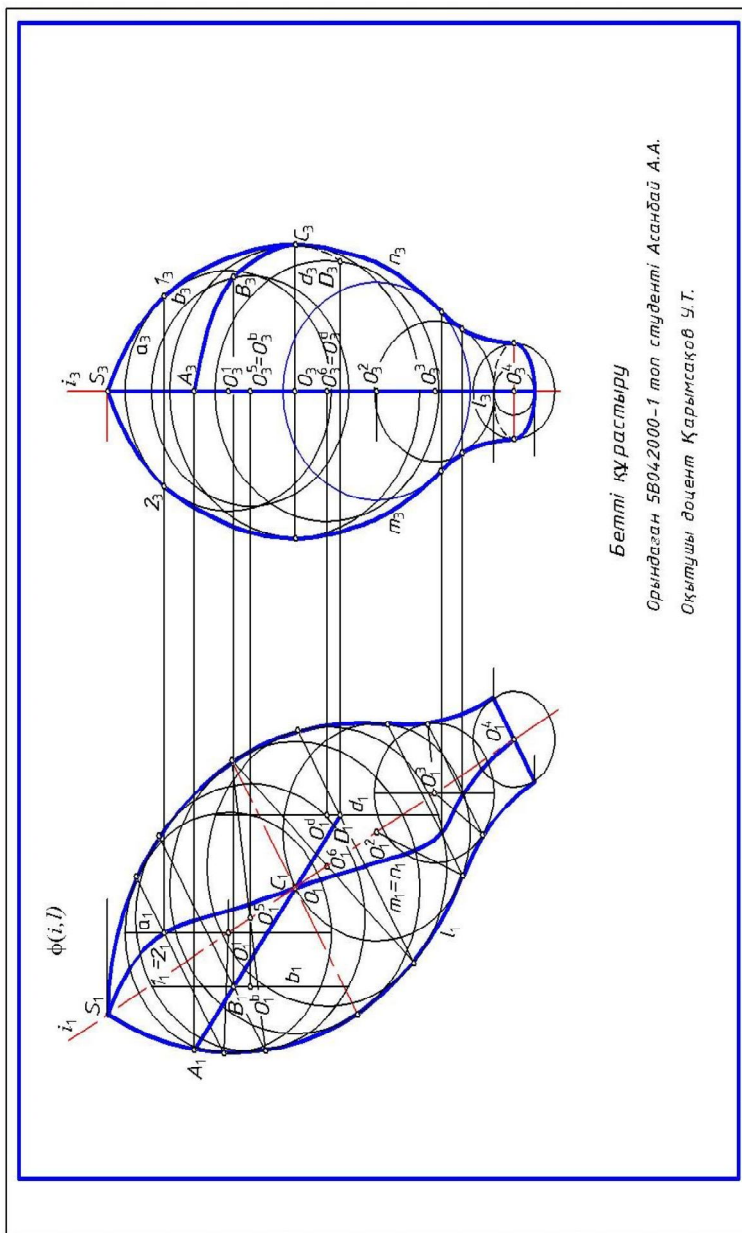
3.3-сурет

#### 4-тапсырма. Беттерді құрастыру

Бұл графикалық жұмыста анықтаушымен берілген беттің (айналу беті, түзусызықты немесе бұрама бет) проекцияларын салу керек. Беттегі берілген сызықтың бір проекциясы арқылы екіншісін анықтау керек. Тапсырма А3 пішіміндегі сызу қағазында орындалады.

Тапсырмалардың нұсқалары 4-кестеде берілген. Олардың ішінде 7-10-нұсқаларда берілген айналу беттерінің осьтері проекциялар жазықтығына көлбеу орналасқан деңгейлік түзулер болып келеді. Осындай тапсырманы орындау үлгісі 4-суретте көрсетілген. Үлгіде  $\phi(i, l)$  айналу бетінің проекциялары салынған. Мұндағы  $i$  осі - профиль проекция жазықтығына көлбеу орналасқан фронталь түзу, сондықтан  $\phi$  айналу бетінің профиль проекциясын салу үшін іштей сызылған сфераларды қолдану керек. Мысалы, беттің профиль  $m_3, n_3$  нұсқаларына тиісті  $l_3, 2_3$  нүктелерін анықтау керек. Ол үшін  $O^1$  нүктесінде  $\phi$  бетіне іштей сфера сызамыз. Бұл сфераның фронталь проекциясы центрі  $O_1^1$  нүктесі болатын  $k_1, l_1$  нұсқа сызықтарына жанама шеңбер болады. Шеңбер радиусы  $k_1, l_1$  нұсқа сызықтарына нормаль  $R^1$  кесіндісі болады. Ал профиль проекциясы – центрі  $O_3^1$  нүктесі, радиусы  $R^1$  болатын шеңбер болады. Нұсқалық  $m_3, n_3$  сызықтарына тиісті  $l_3, 2_3$  нүктелері іштей сызылған сфераның  $a$  нұсқа сызығына тиісті болады.

Енді  $\phi(i, l)$  айналу бетінде жататын және фронталь проекциясы берілген  $AD$  сызығының профиль проекциясын салуды қарастырайық.  $AD$  сызығының бойындағы  $B$  нүктесінің профиль проекциясын анықтайық.  $B$  нүктесінің  $B_1$  фронталь проекциясы арқылы  $i_1$  осіне перпендикуляр түзу жүргіземіз. Бұл түзудің  $k_1, l_1$  нұсқа сызықтарымен қиылысу  $3_1, 4_1$  нүктелерін табамыз. Табылған  $3_1$  (немесе  $4_1$ ) нүктесінен  $k_1$  (немесе  $l_1$ ) нұсқа сызығына нормаль түзу жүргізіп,  $i_1$  түзуімен қиылысу нүктесін  $O_1^5$  табамыз.  $[O_1^5 3_1]$  кесіндісі  $\phi(i, l)$  айналу бетіне іштей сызылған және бетке тиісті  $B$  нүктесі арқылы өтетін сфераның радиусы болады.



Бетті құрастыру

Срындаған 58042000-1 топ студенті Асанбай А.А.

Оқытушы доцент Қарымсақов У.Т.

4 - сурет

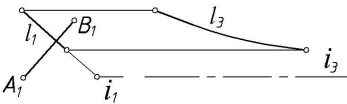
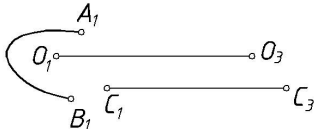
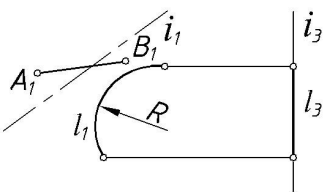
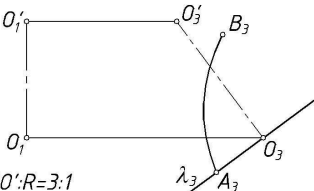
$B$  нүктесі сфераның профиль проекциялар жазықтығына параллель болатын  $b$  шеңберіне тиісті болады. Осы шеңбердің  $b_3$  проекциясында байланыс сызығы бойымен  $B_3$  проекциясын табамыз. Бұл жерде байланыс сызығы  $b_3$  шеңберімен екі рет қиылысады, яғни екі шешім болуы мүмкін. Есепте  $AD$  сызығы беттің көрінетін жағында орналасқан деп берілгендіктен,  $B_3$  проекциясын  $i_3$  түзуінің оң жағында қабылдаймыз. Дәл осы жолмен  $D$  нүктесінің профиль проекцияларын табамыз

$C$  нүктесінің фронталь проекциясы  $A_1D_1$  сызығының  $n_1$  сызығымен қиылысында болғандықтан, оның профиль проекциясын  $n_3$  нұсқа сызығында табамыз.

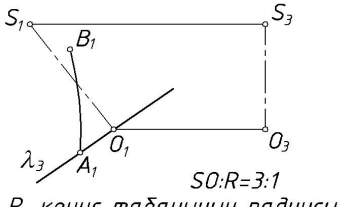
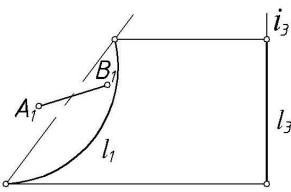
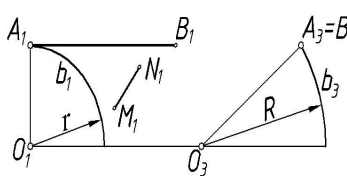
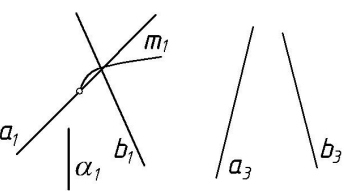
4-кесте

|         |                                                                                                                                                                              |  |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 1-нұсқа | $\phi(i, l)$ айналудың бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_1B_1$ фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын анықтау керек. |  |
| 2-нұсқа | $\phi(i, l)$ айналудың бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_3B_3$ профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын анықтау керек. |  |
| 3-нұсқа | $\phi(i, l)$ айналудың бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_1B_1$ фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын анықтау керек. |  |
| 4-нұсқа | $\phi(i, l)$ айналудың бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_3B_3$ профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын анықтау керек. |  |

## 4-кестенің жалғасы

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5-нұсқа | <p><math>\Phi(i, l)</math> айналу бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>AB</math> сызығының <math>A_1B_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын анықтау керек.</p>                                                                                         |                                                                                  |
| 6-нұсқа | <p><math>\Theta(O, C)</math> сферасының фронталь және профиль проекциясын салу керек. Мұндағы <math>O</math> – сфера центрі, <math>C</math> – сфера бетіндегі нүкте. Беттегі <math>AB</math> сызығының <math>A_1B_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын анықтау керек.</p>              |                                                                                  |
| 7-нұсқа | <p><math>\Phi(i, l)</math> айналу бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>AB</math> сызығының <math>A_1B_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын анықтау керек. Беттің проекцияларын салу үшін іштей сызылған сфераларды қолдану керек.</p>                 |                                                                                 |
| 8-нұсқа | <p><math>\nu(OO', R)</math> айналу цилиндрінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Цилиндр табаны <math>\lambda</math> профиль проекциялаушы жазықтығында орналасқан. Беттегі <math>AB</math> сызығының <math>A_3B_3</math> профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын анықтау керек.</p> |  <p><math>OO':R=3:1</math><br/> <math>R</math> – цилиндр табанының радиусы</p> |

4-кестенің жалғасы

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                             |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9-нұсқа  | <p><math>\eta(SO, R)</math> айналу конусының фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>AB</math> сызығының <math>A_1B_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын анықтау керек.</p>                                                                      |  <p><math>SO:R=3:1</math><br/><math>R</math> - конус табанының радиусы</p> |
| 10-нұсқа | <p><math>\Phi(i, l)</math> айналу бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>AB</math> сызығының <math>A_1B_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын анықтау керек. Беттің проекцияларын салу үшін іштей сызылған сфераларды қолдану керек.</p> |                                                                            |
| 11-нұсқа | <p>Кері қайту қыры түрінде анықтауышпен берілген <math>\gamma(b)</math> торс бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>MN</math> сызығының фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.<br/><math>r = 80\text{мм}, R = 100\text{мм}</math></p>  |                                                                           |
| 12-нұсқа | <p><math>\gamma(a, b, \alpha)</math> тұзусызықтық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек, мұндағы <math>\alpha</math> - параллелизм жазықтығы. Беттегі <math>m</math> сызығының <math>m_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.</p>           |                                                                          |

## 4-кестенің жалғасы

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 13-нұсқа | <p><math>\gamma(a,b,\alpha)</math> түзусызықтық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек, мұндағы <math>\alpha</math> - параллелизм жазықтығы. Беттегі <math>m</math> сызығының <math>m_3</math> профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын салу керек.</p> |  |
| 14-нұсқа | <p><math>\gamma(a,b,\alpha)</math> түзусызықтық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек, мұндағы <math>\alpha</math> - параллелизм жазықтығы. Беттегі <math>m</math> сызығының <math>m_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.</p> |  |
| 15-нұсқа | <p><math>\gamma(a,b,\alpha)</math> түзусызықтық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек, мұндағы <math>\alpha</math> - параллелизм жазықтығы. Беттегі <math>m</math> сызығының <math>m_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.</p> |  |
| 16-нұсқа | <p><math>\gamma(a,b,\alpha)</math> түзусызықтық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек, мұндағы <math>\alpha</math> - параллелизм жазықтығы. Беттегі <math>m</math> сызығының <math>m_3</math> профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын салу керек.</p> |  |

4-кестенің жалғасы

|          |                                                                                                                                                                                                                            |  |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 17-нұсқа | $\gamma(S,k)$ конустық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_3B_3$ профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын салу керек.                                                  |  |
| 18-нұсқа | $\gamma(a,b,\alpha)$ түзусызықтық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек, мұндағы $\alpha$ - параллелизм жазықтығы. Беттегі $m$ сызығының $m_1$ фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек. |  |
| 19-нұсқа | $\gamma(S,k)$ конустық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_3B_3$ профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын салу керек.                                                  |  |
| 20-нұсқа | $\omega(j,m)$ тор бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_1B_1$ фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.                                                       |  |
| 21-нұсқа | $\omega(j,m)$ тор бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_3B_3$ профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын салу керек.                                                       |  |

4-кестенің жалғасы

|          |                                                                                                                                                                                                                 |  |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 22-нұсқа | $\omega(j, m)$ тор бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_1B_1$ фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.                                           |  |
| 23-нұсқа | $\omega(j, m)$ тор бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_1B_1$ фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.                                           |  |
| 24-нұсқа | $\phi(i, m)$ тік геликоидының фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $AB$ сызығының $A_3B_3$ профиль проекциясы арқылы фронталь проекциясын салу керек.                                        |  |
| 25-нұсқа | $\phi(i, m)$ тік геликоидының фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі $b$ сызығының $b_1$ фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.                                            |  |
| 26-нұсқа | $\theta(i, m, \varphi)$ көлбеу геликоидының фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Жасаушының $i$ осімен көлбеу бұрышы $\varphi=45^\circ$ . Беттегі $AB$ сызығының жетіспейтін проекциясын салу керек. |  |

4-кестенің жалғасы

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 27-нұсқа | <p><math>\theta(i, m, \varphi)</math> көлбеу геликоидының фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Жасаушының <math>i</math> осімен көлбеу бұрышы <math>\varphi=30^\circ</math>. Беттегі <math>b</math> сызығының жетіспейтін проекциясын салу керек.</p> |  |
| 28-нұсқа | <p><math>\gamma(l, k)</math> конустық бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>AB</math> сызығының <math>A_1B_1</math> фронталь проекциясы арқылы профиль проекциясын салу керек.</p>                                               |  |
| 29-нұсқа | <p><math>\gamma(b)</math> торс бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>MN</math> сызығының жетіспейтін проекциясын салу керек.<br/><math>r = 90\text{мм}</math>, <math>R = 120\text{мм}</math>.</p>                                |  |
| 30-нұсқа | <p><math>\Phi(i, l)</math> айналу бетінің фронталь және профиль проекцияларын салу керек. Беттегі <math>AB</math> сызығының жетіспейтін проекциясын анықтау керек. Беттің проекцияларын салу үшін іштей сызылған сфераларды қолдану керек.</p>                   |  |

## 5-тапсырма. Беттердің қиылысуы

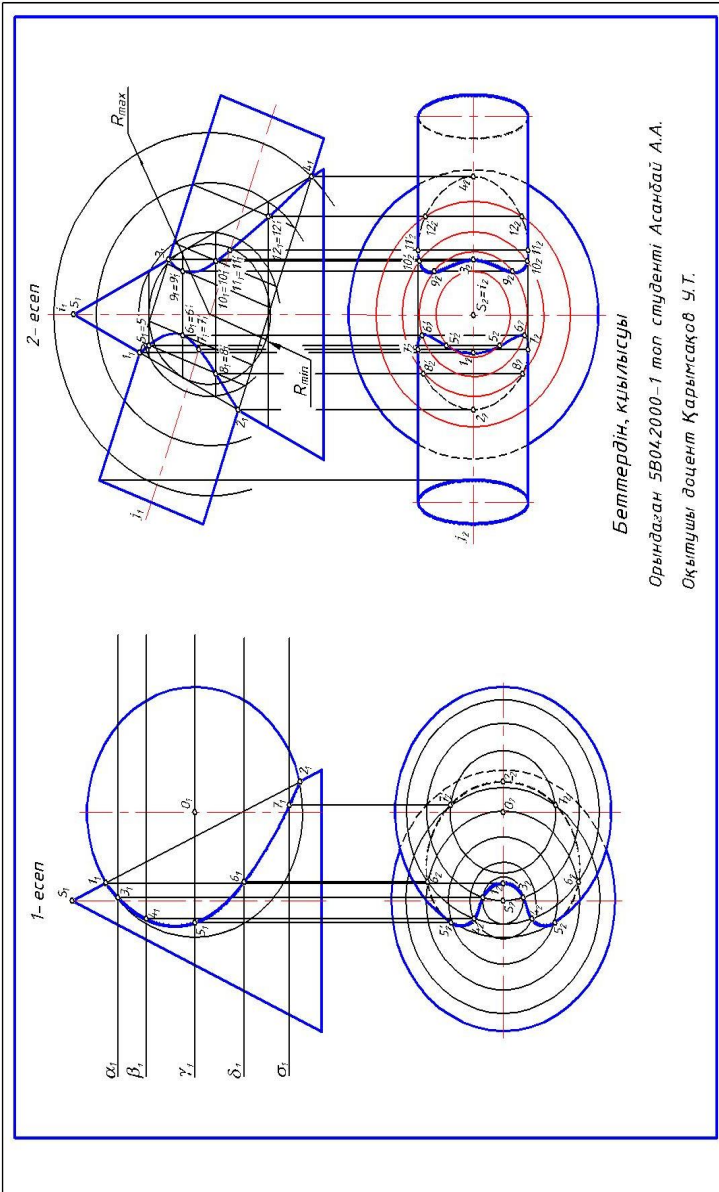
Екі беттің қиылысу сызығын анықтауға арналған үш есепті орындау керек. 1,2-есептерді орындау үлгісі 5.1-суретте, ал 3-есепті орындау үлгісі 5.2-суретте көрсетілген.

**1-есеп.** Көмекші қиюшы жазықтықтар тәсілімен екі беттің қиылысу сызығының проекцияларын салу керек. А3 пішімінің сол жақ жартысында 5.1- кестеде берілген нұсқа бойынша екі айналу беттерінің проекцияларын салу керек. Айналу беттерінің осьтері горизонталь немесе фронталь жазықтықта орналаспаған. Қиылысу сызығын салу үшін оның бірнеше нүктелерін табу керек. Ол үшін көмекші жазықтық жүргізу керек. Көмекші жазықтықтың берілген беттермен қиылысу сызықтарын тұрғызамыз, осы қиылысу сызықтарының қиылысу нүктелері ізделінді нүктелер болады. Екі беттің қиылысу сызығының ең жоғарғы нүктесін табу үшін көмекші жазықтықты екі беттің осьтері арқылы жүргізу керек.

**2-есеп.** Көмекші центрлес сфералар тәсілімен екі беттің қиылысу сызығының проекцияларын салу керек. А3 пішімінің оң жақ жартысында 5.2- кестеде берілген нұсқа бойынша екі айналу беттерінің проекцияларын салу керек. Көмекші центрлес сфералар тәсілін қолдану үшін мынадай шарттар болу керек:

- Екі бет те айналу беті болу керек;
- Екі беттің айналу осьтері қиылысатын болу керек;
- Айналу осьтері проекциялар жазықтықтарының біріне параллель жазықтықта орналасуы керек.

Көмекші сфералардың центрі айналу осьтерінің қиылысу нүктелері болады. Көмекші сфера екі бетті де шеңберлер бойымен қияды. Бұл шеңберлердің фронталь проекциялары түзу кесінділері болады. Осы кесінділердің қиылысу нүктелері ізделінді қиылысу сызығының нүктелері болады. Алдымен ең кіші радиусты сфераны жүргізеді. Бұл сфера берілген беттің біреуіне жанама болады, ал екіншісін қияды. Сонда қиылысу сызығының сфера центріне ең жақын нүктелері табылады. Табылған нүктелердің горизонталь проекциясын шеңбердің горизонталь проекциясында байланыс сызығының көмегімен табады.



5.1-сурет

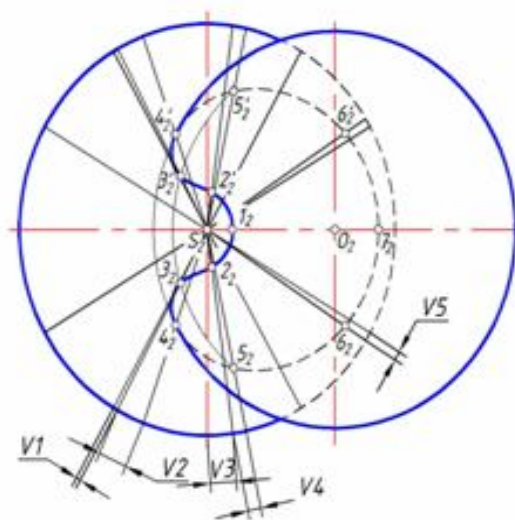
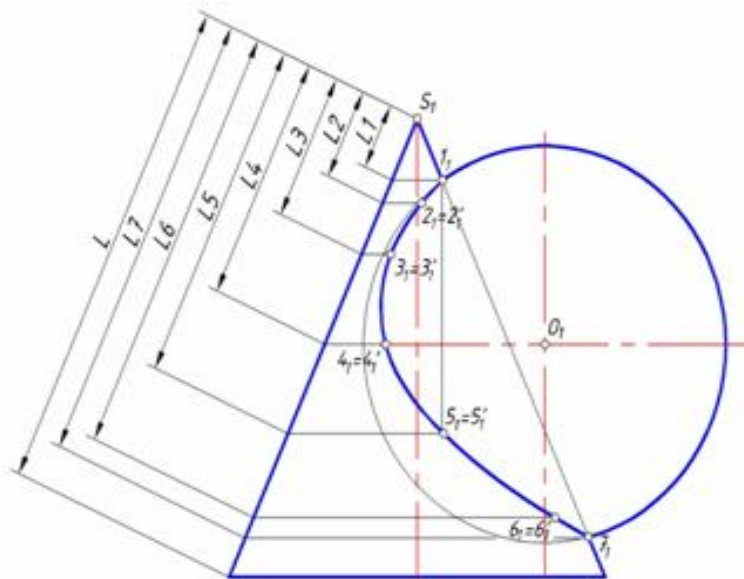
Радиустары әртүрлі көмекші сфераларды жүргізіп, қиылысу сызығының бірнеше нүктелерін табады. Берілген беттердің фронталь меридиандарының қиылысу нүктелері де қиылысу сызығына тиісті болады. Осылай бірнеше нүктелер табылғаннан кейін олардың фронталь проекциясын тұрғызады. Содан соң горизонталь нүктелерінің проекциясындағы көріну нүктелерін анықтап, горизонталь проекцияларын қосып, қиылысу сызығының горизонталь проекциясын тұрғызады.

**3-есеп.** Алдыңғы 1-ші және 2-ші есептердегі төрт беттің екеуінің жаймасын орындау керек. Есеп А3 пішімінде орындалады.

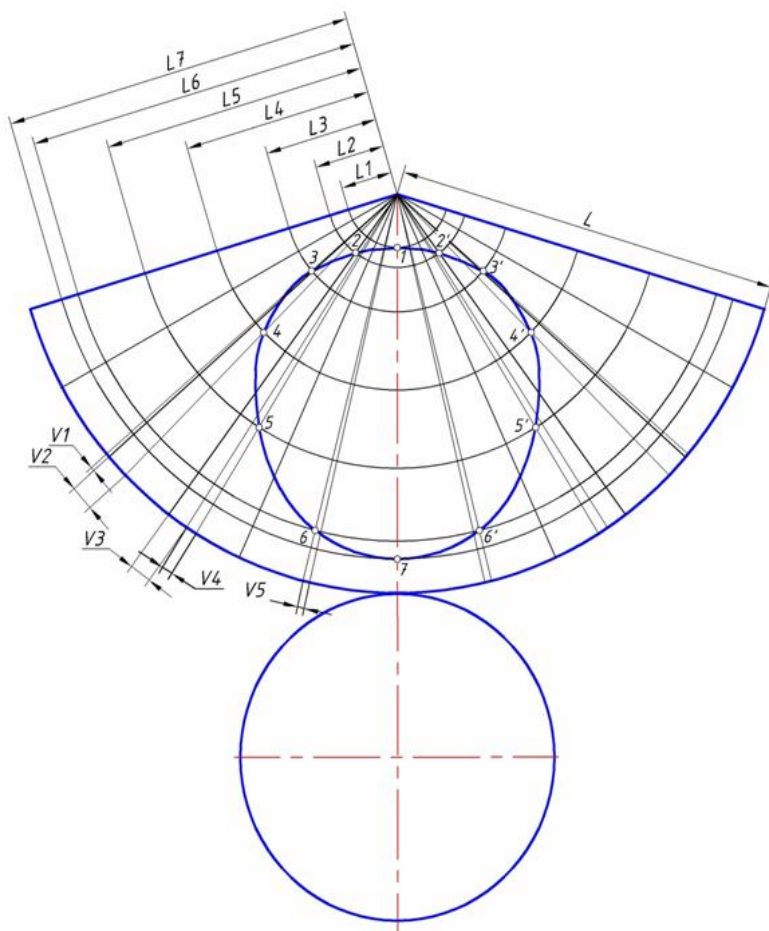
5.1-суреттегі 1-есепте қарастырылған конустың жаймасын салуды қарастыралық. Конустық беттің жаймасы пирамиданың жаймасы сияқты салынады, сондықтан алдымен берілген конусқа іштей пирамида сызамыз (5.2-сурет). Ол үшін конустың табанын  $n$  бірдей бөлікке бөлеміз. Біздің мысалымызда 12 бөлікке бөлеміз.

Конус табаны шеңберінің бойында призма қырлары мен қиылысу сызығын анықтайтын жасаушылар аралындағы қашықтықтарды белгілейміз:  $VI-V5$ . Конустың  $S$  төбесінен қиылысу сызығын анықтайтын нүктелерге дейінгі қашықтықтардың нақты ұзындықтарын анықтаймыз:  $L1-L7$ .

Содан соң он екі бұрышты дұрыс пирамиданың бүйір бетінің жаймасын тұрғызамыз (5.3-сурет). Жаймадағы пирамида қырларының ұштарын  $m$  қисық сызығымен қосып, конустың бүйір бетінің жуықталған жаймасын аламыз.

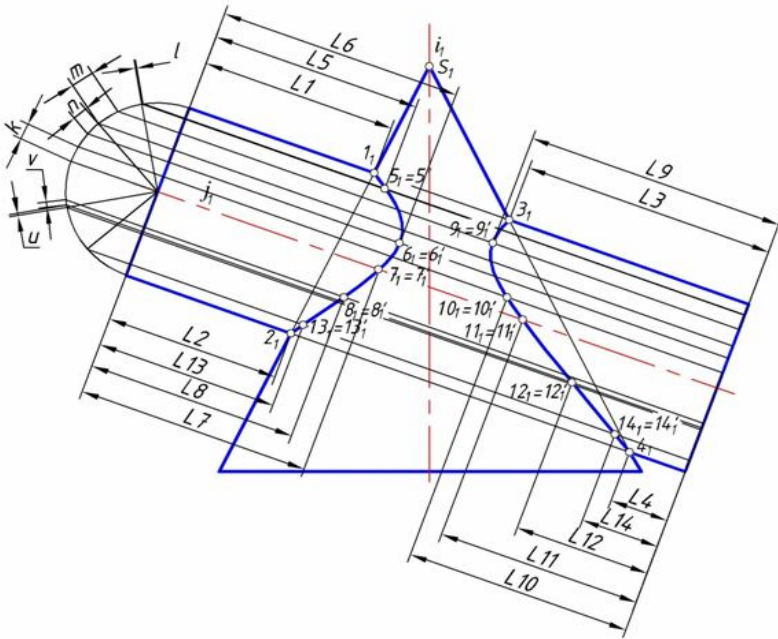


5.2-сурет



5.3-сурет

Конустың жаймасына қиылысу сызығын салу үшін алдымен  $V1-V5$  қашықтықтарын пайдаланып қиылысу сызығын анықтайтын нүктелер арқылы өтетін жасаушыларды жүргіземіз.  $L1-L7$  қашықтықтарын жаймадағы сәйкес жасаушылардың бойына өлшеп салып, табылған нүктелерді қосамыз.

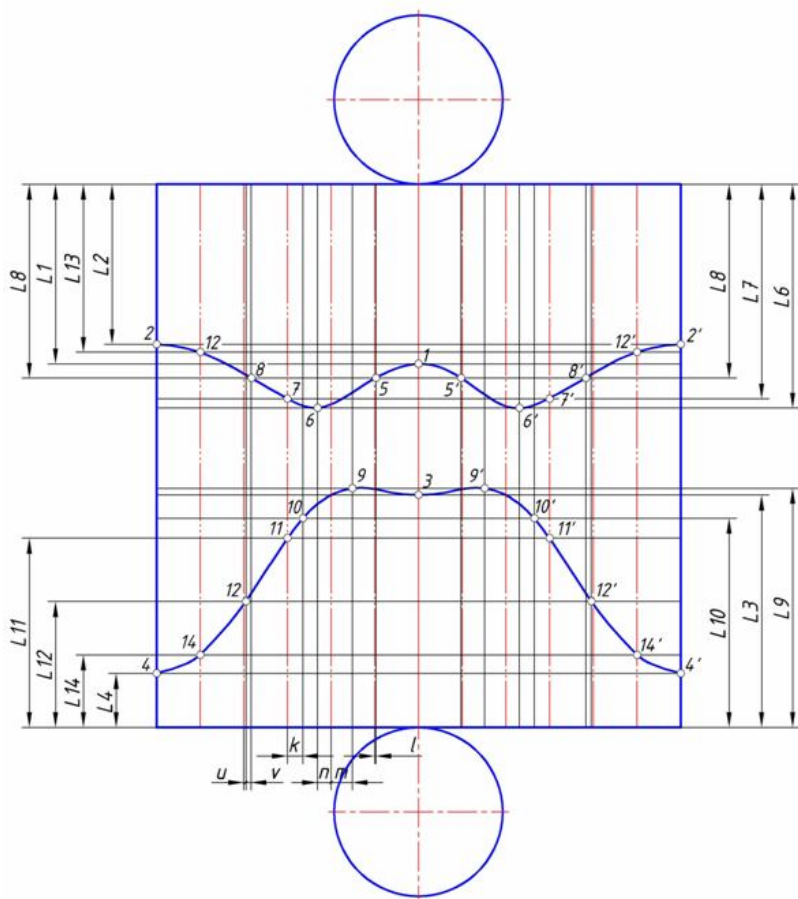


5.4-сурет

Цилиндрлік беттің жаймасын орындау үшін берілген цилиндрлік бетке іштей  $n$ -бұрышты призма саламыз (5.4-сурет). Цилиндрдің табанын бірдей  $n$  бөлікке бөлеміз, оларға сәйкес жасаушыларды жүргіземіз. Біздің мысалымызда  $n=12$ . Қиылысу сызығы анықталған нүктелер арқылы жасаушыларды тұрғызамыз. Цилиндрдің табанын он екіге бөлу арқылы тұрғызылған жасаушылар мен қиылысу сызығы анықталған нүктелер арқылы тұрғызылған жасаушылардың арасындағы қашықтықтарды ( $l, m, n, k, v, u$ ) белгілейміз. Қиылысу сызығын анықтайтын нүктелерден цилиндрдің табанына дейінгі қашықтықтарды анықтаймыз:  $L_1-L_{14}$ .

Цилиндрдің бүйір бетінің толық жаймасын саламыз (5.6-сурет).

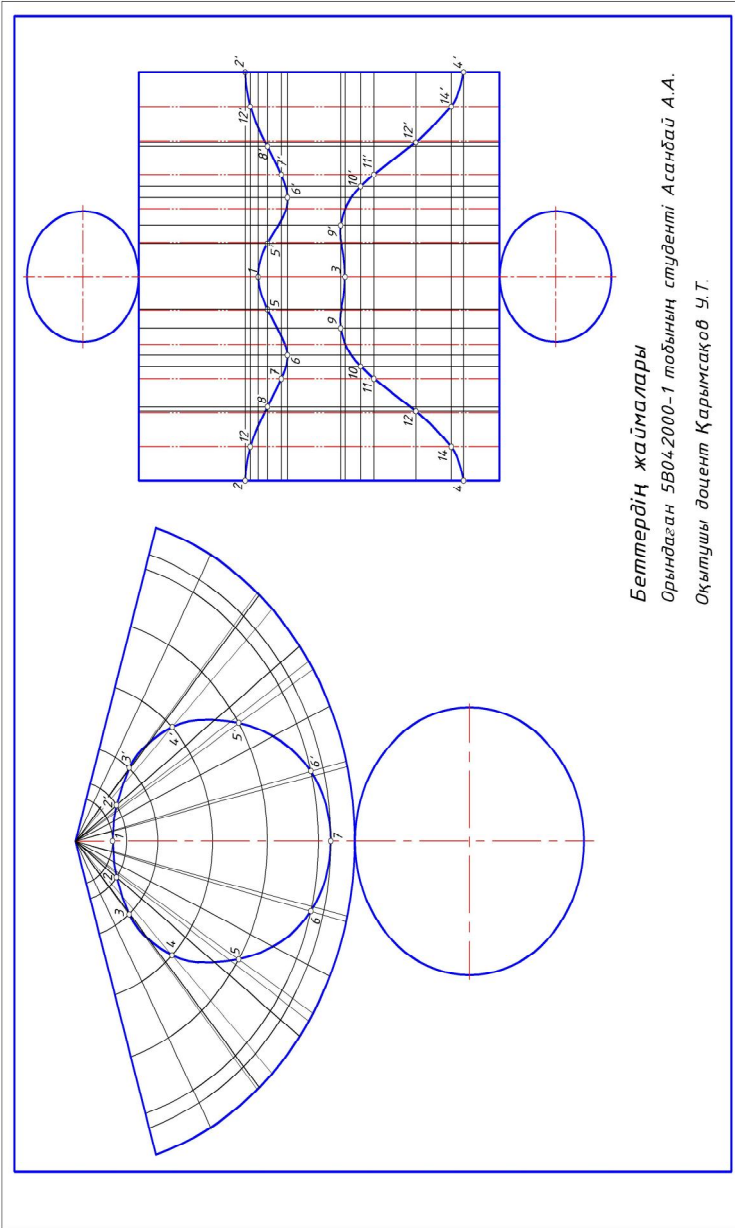
Жаймада қиылысу сызығын салу үшін  $l, m, n, k, v, u$  қашықтықтарын пайдаланып, қиылысу сызығы анықталған нүктелер арқылы тұрғызылған жасаушыларды саламыз.  $L1-L14$  кесінділерін жасаушылардың бойына саламыз. Табылған нүктелерді қосамыз.



5.6 -сурет

Тапсырма нұсқаларында берілген беттердің ішінде конус пен цилиндрдің жаймасын тұрғызса болады. Тапсырманы орындау үлгісі 5.7-суретте көрсетілген.

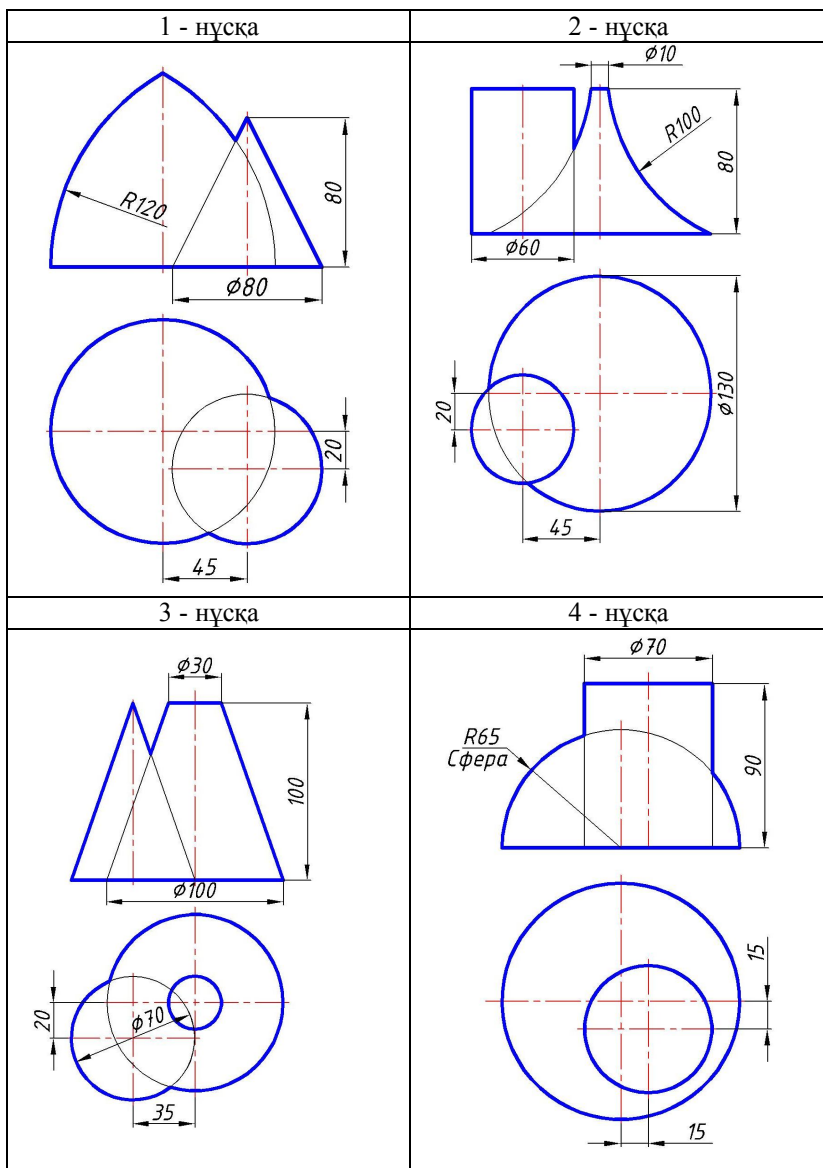
Сфера немесе тор сияқты жайылмайтын беттерді де таңдаса болады, онда олардың жуықталған жаймалары тұрғызылады.



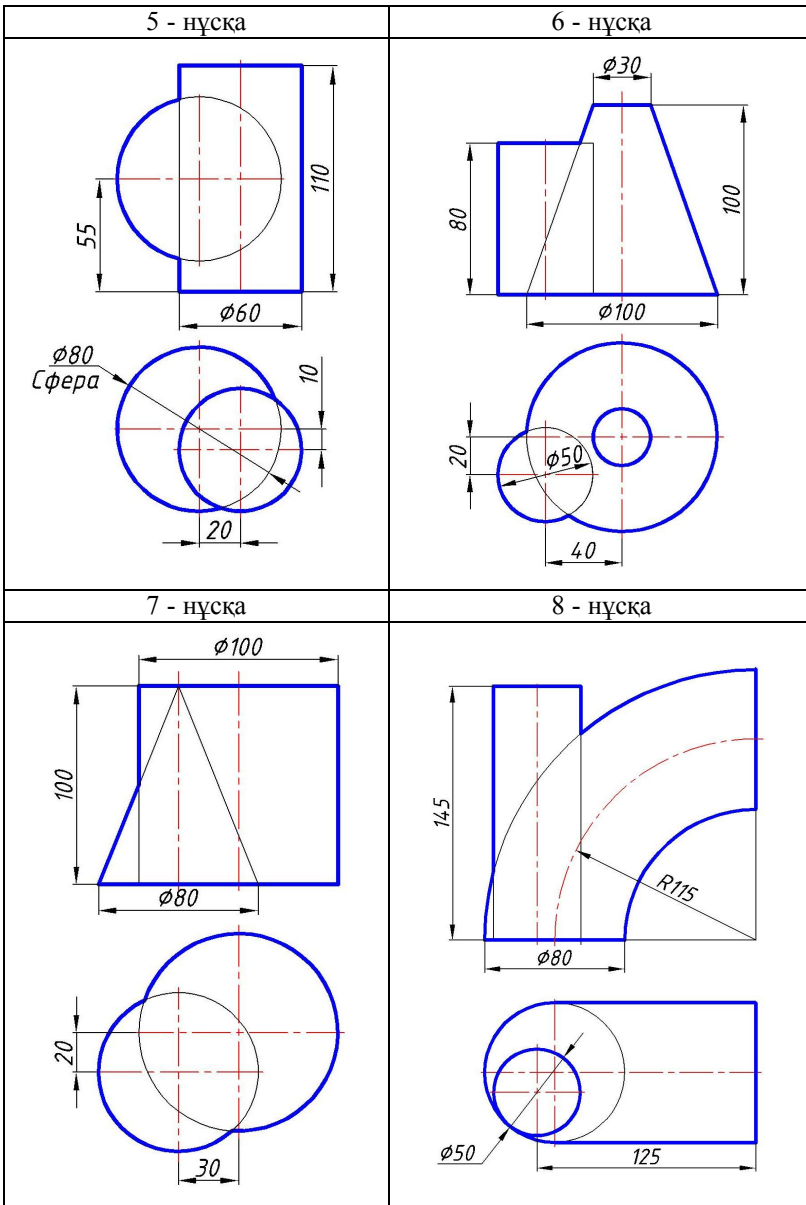
Беттердің жаймалары  
Орындаған 5В04.2000-1 тобының студенті Асанбай А.А.  
Оқытушы доцент Қарымсақов У.Т.

5.7 -сурет

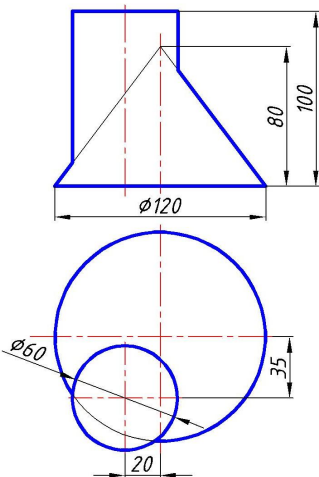
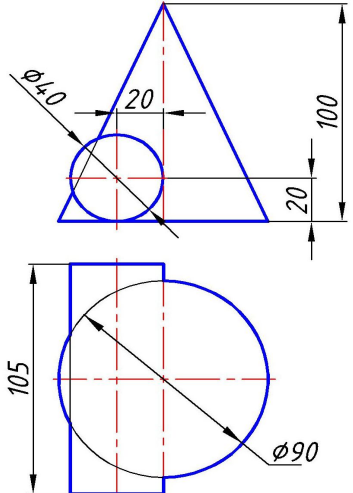
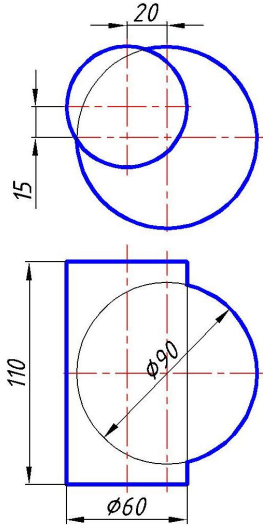
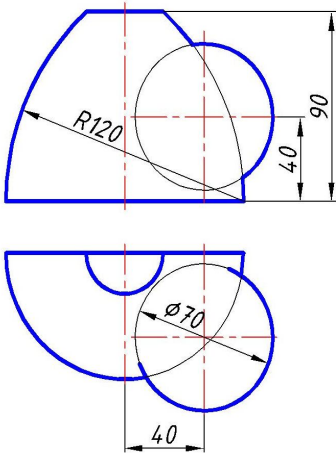
5.1-кесте



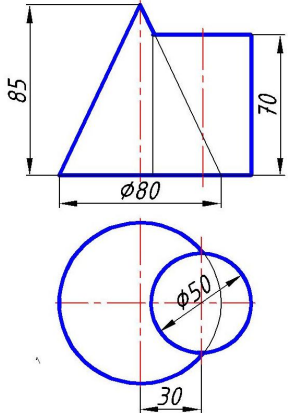
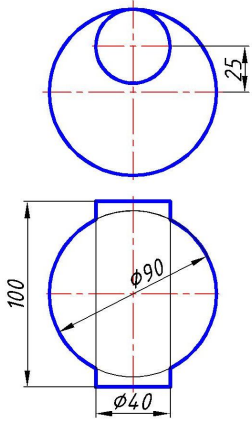
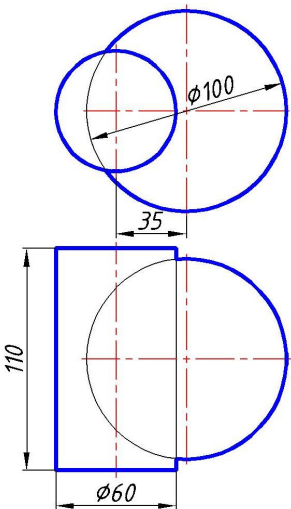
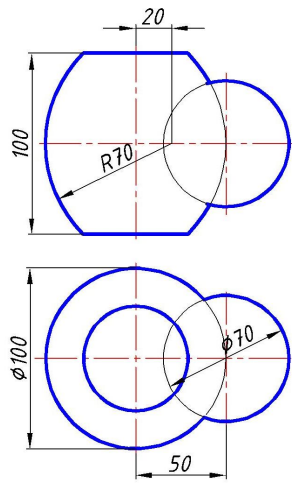
5.1-кестенің жалғасы



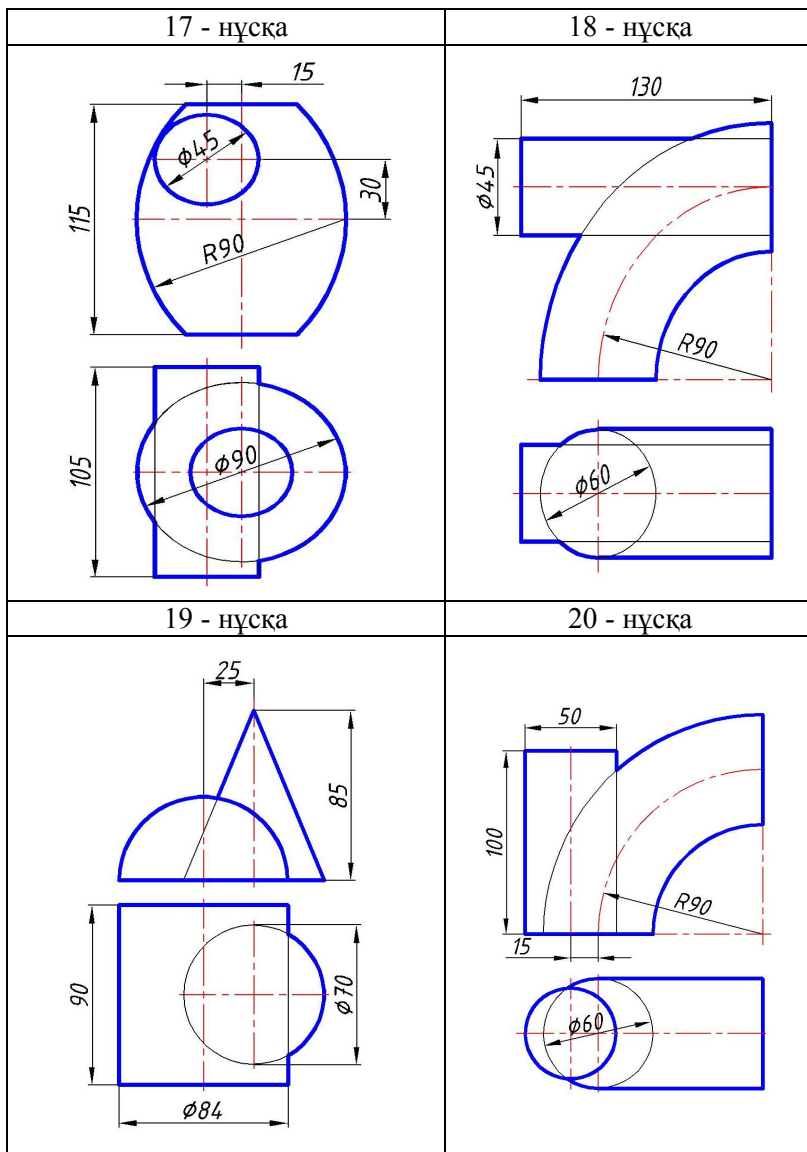
5.1-кестенің жалғасы

| 9 - нұсқа                                                                          | 10 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 11 - нұсқа                                                                         | 12 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

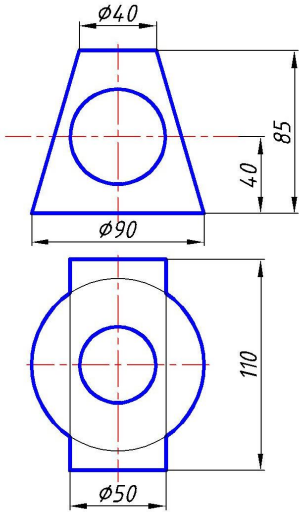
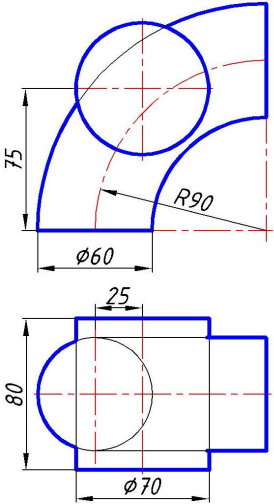
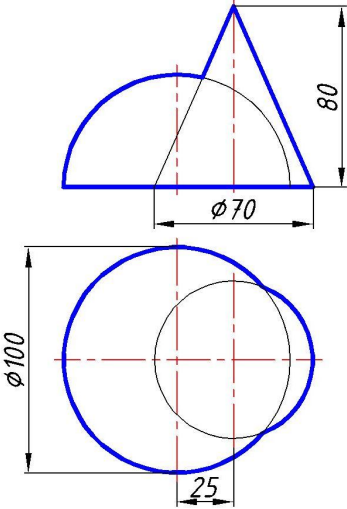
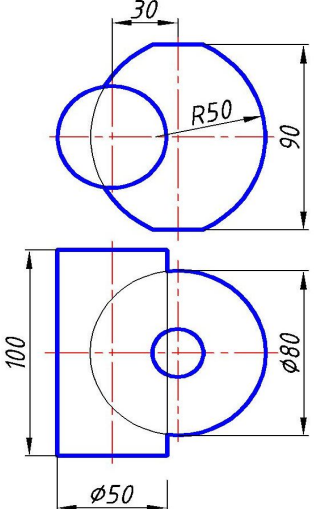
5.1-кестенің жалғасы

| 13- нұсқа                                                                          | 14 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 15 - нұсқа                                                                         | 16 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

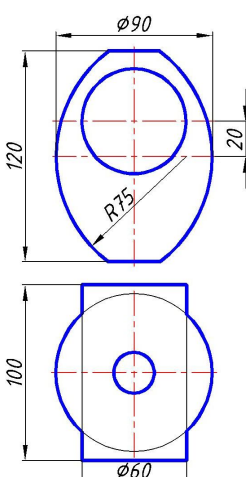
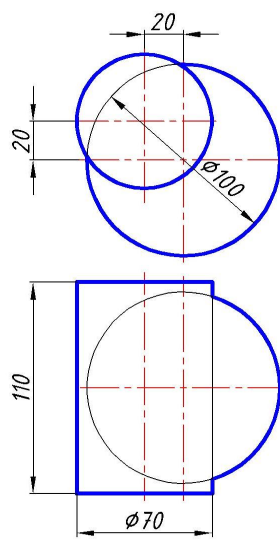
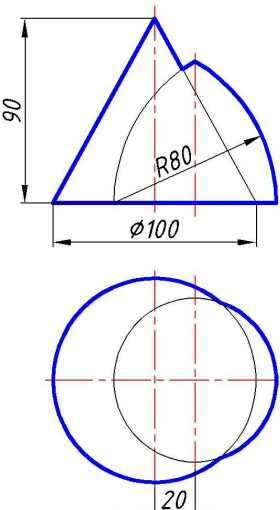
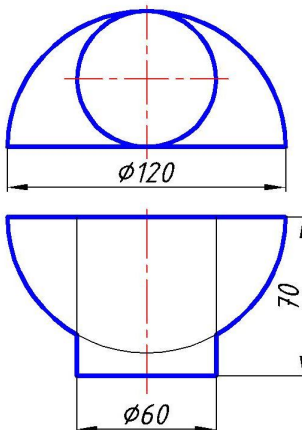
5.1-кестенің жалғасы



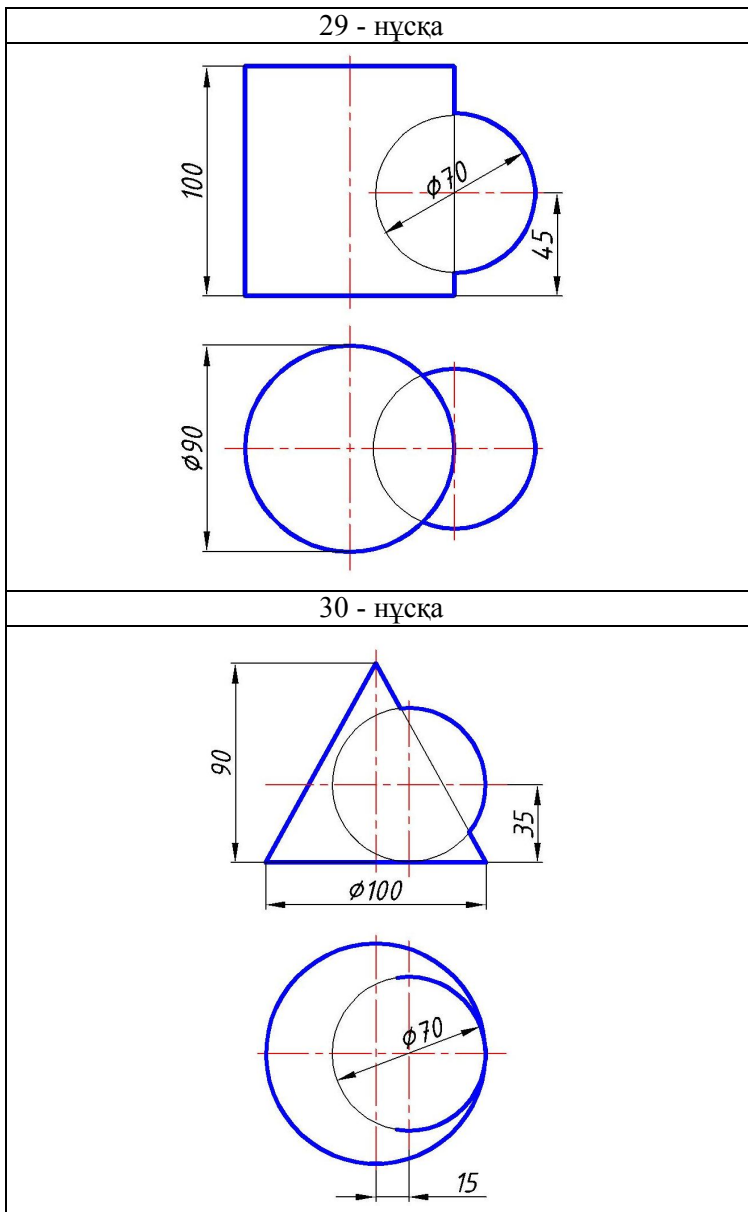
5.1-кестенің жалғасы

| 21 - нұсқа                                                                         | 22 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 23 - нұсқа                                                                         | 24 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

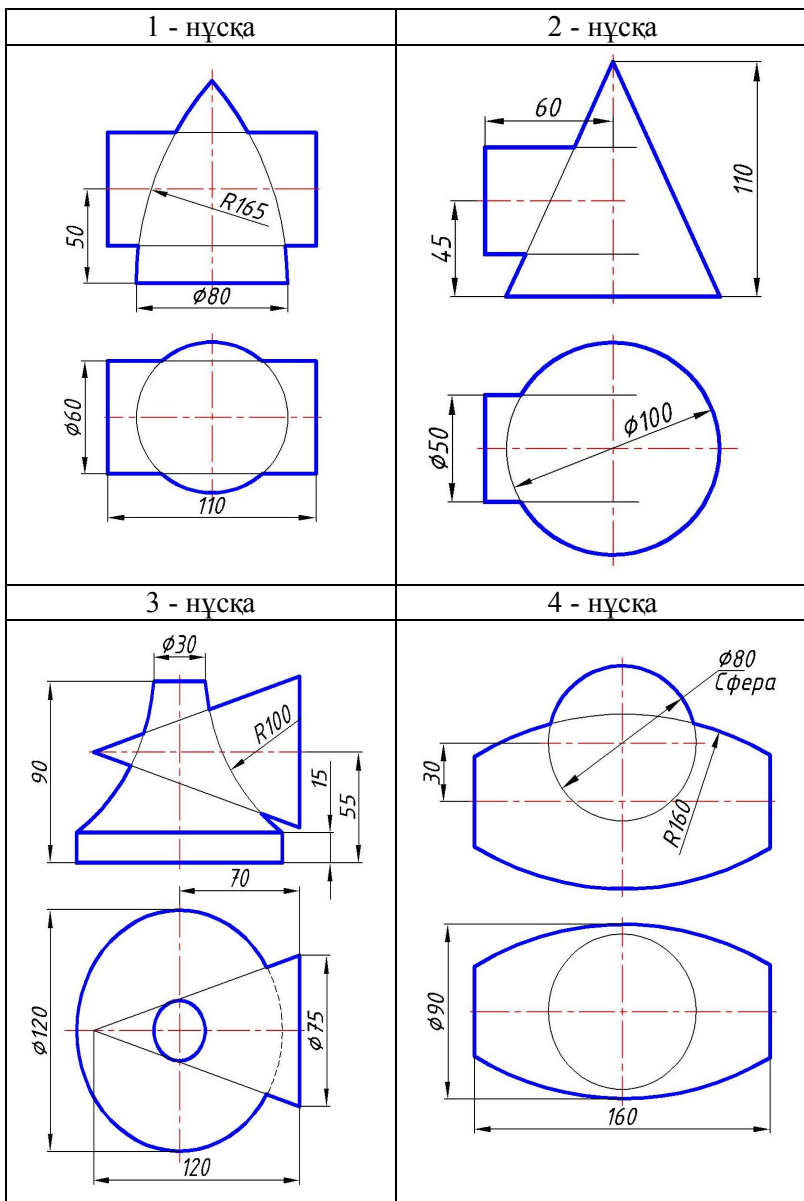
5.1-кестенің жалғасы

| 25 - нұсқа                                                                         | 26 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 27 - нұсқа                                                                         | 28 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

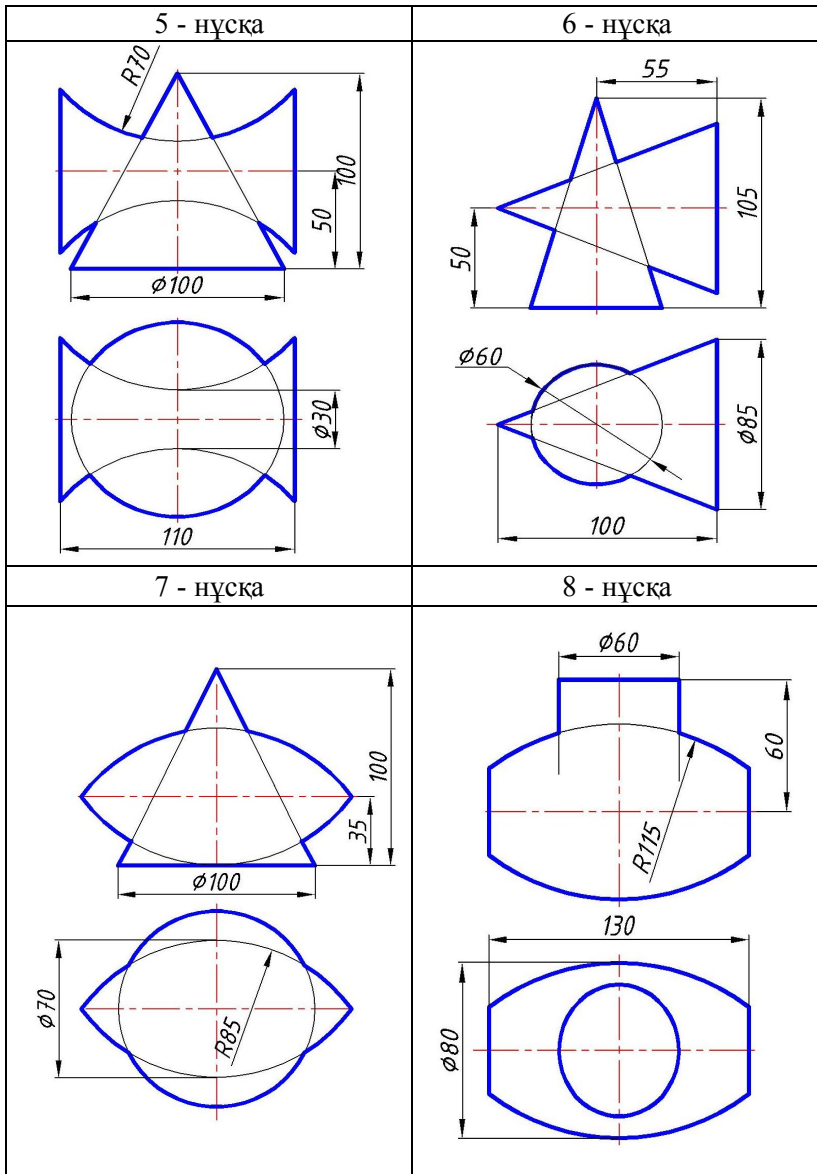
5.1-кестенің жалғасы



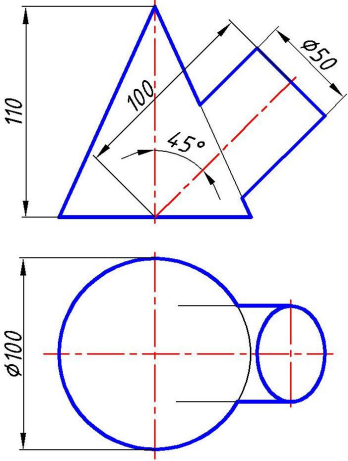
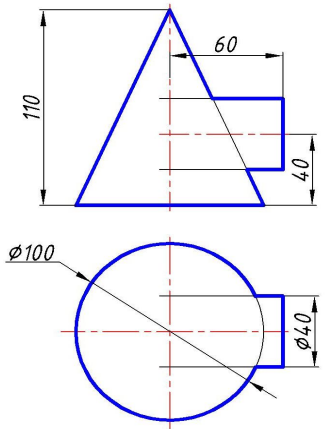
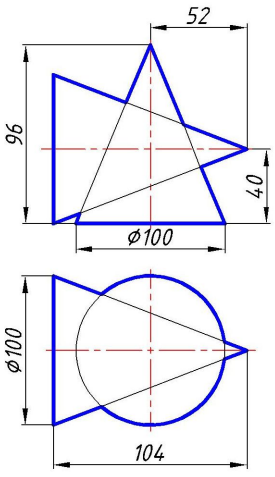
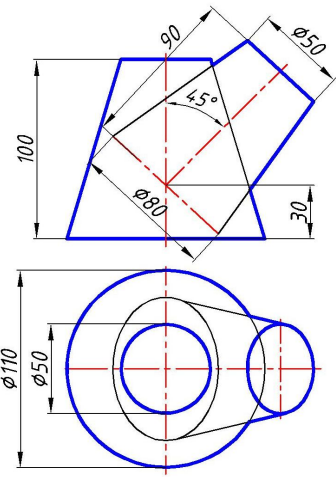
5.2-кесте



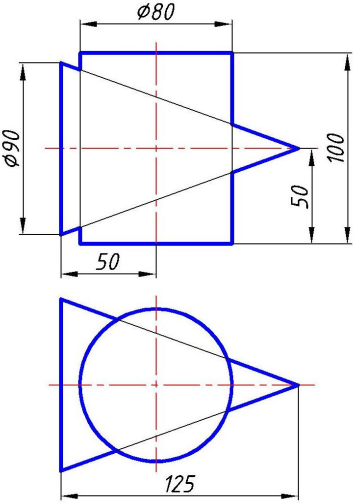
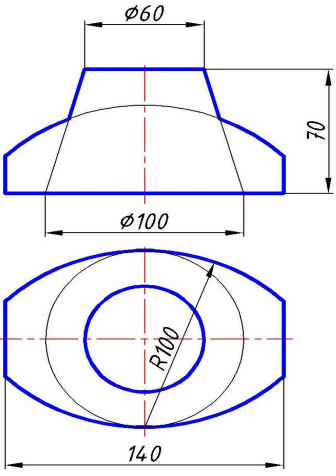
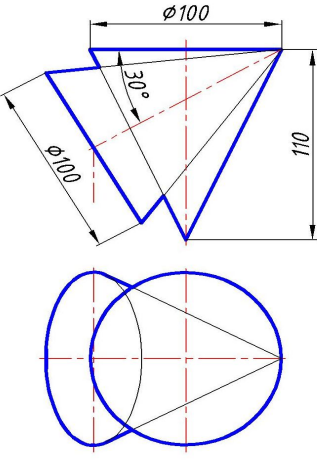
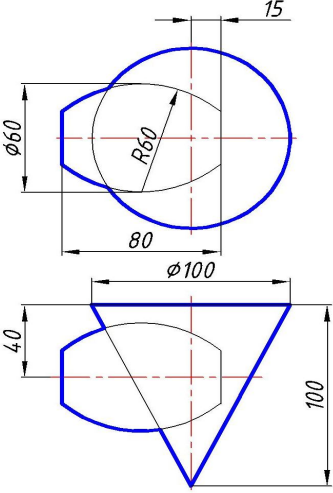
5.2-кестенің жалғасы



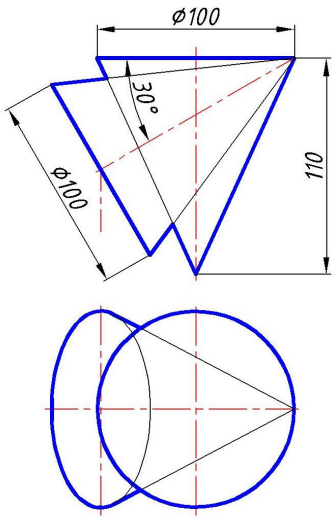
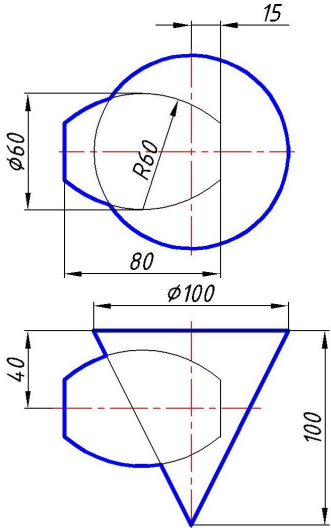
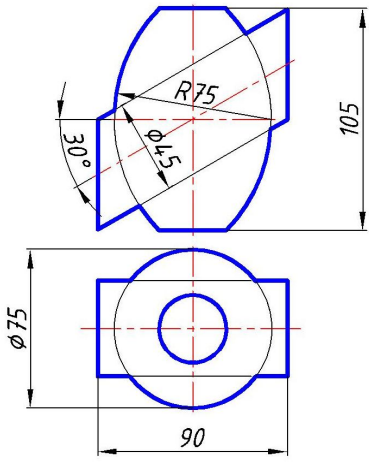
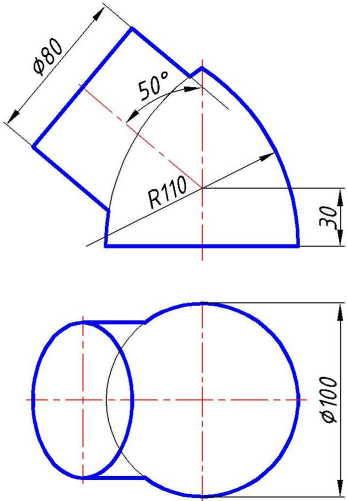
5.2-кестенің жалғасы

| 9 - нұсқа                                                                          | 10 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 11 - нұсқа                                                                         | 12 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

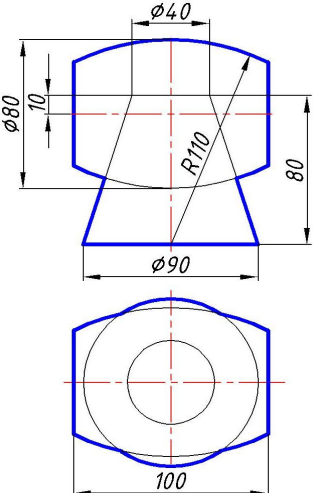
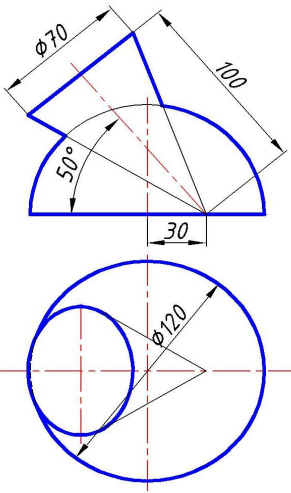
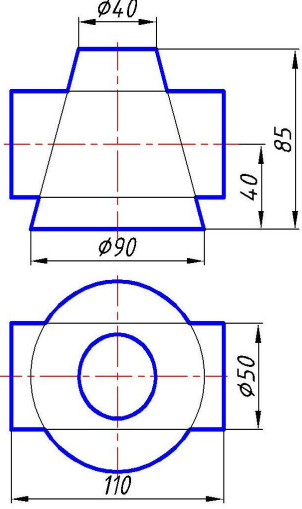
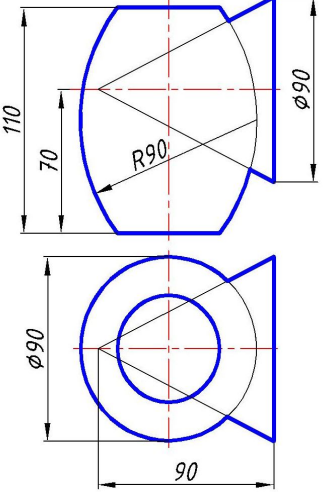
5.2-кестенің жалғасы

| 13 - нұсқа                                                                         | 14 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 15 - нұсқа                                                                         | 16 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

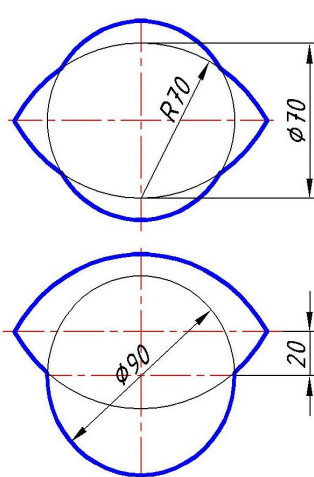
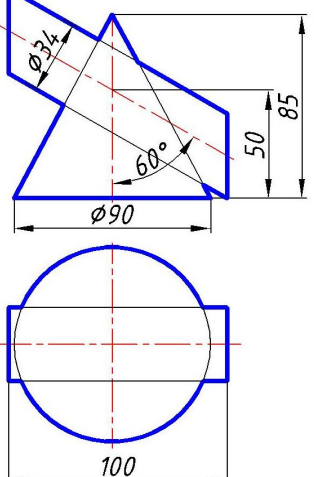
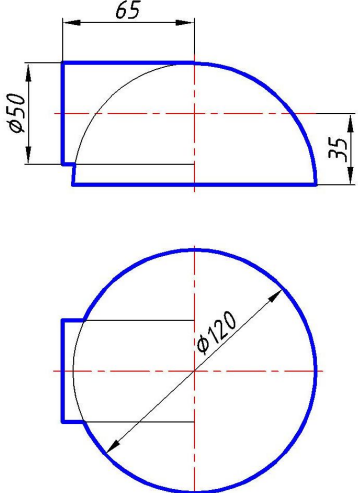
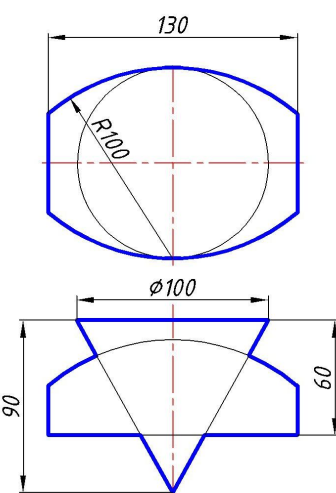
5.2-кестенің жалғасы

| 15 - нұсқа                                                                         | 16 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 17 - нұсқа                                                                         | 18 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

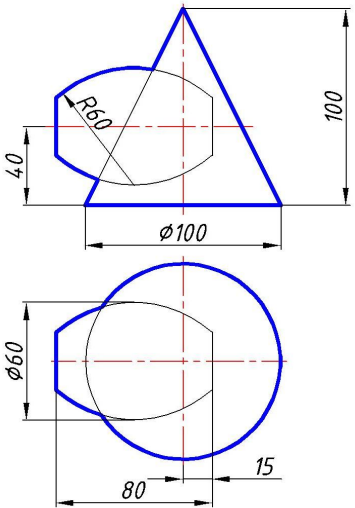
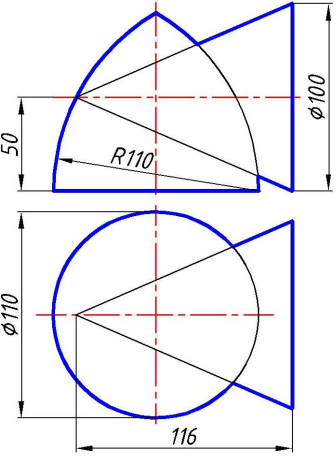
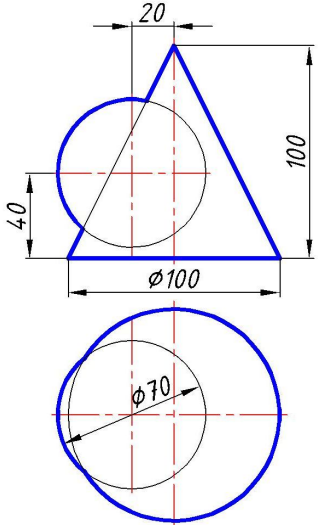
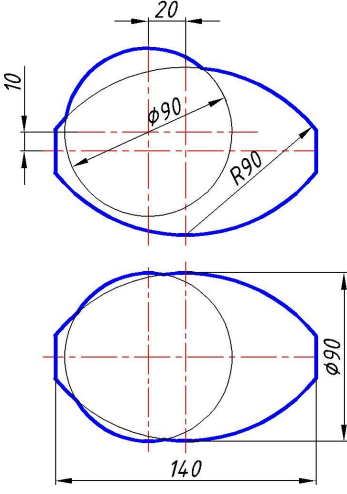
5.2-кестенің жалғасы

| 19 - нұсқа                                                                         | 20 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 21 - нұсқа                                                                         | 22 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

5.2-кестенің жалғасы

| 23 - нұсқа                                                                         | 24 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 25 - нұсқа                                                                         | 26 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

5.2-кестенің жалғасы

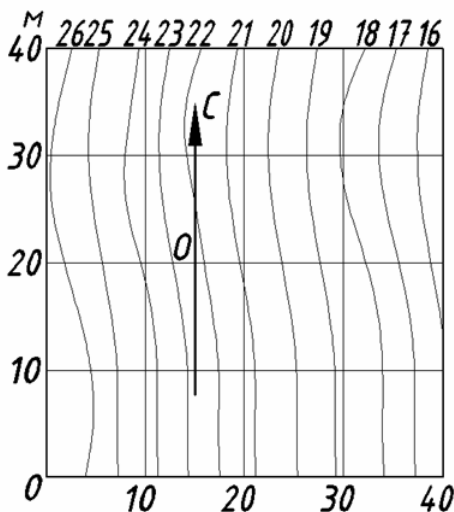
| 27 - нұсқа                                                                         | 28 - нұсқа                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |
| 29 - нұсқа                                                                         | 30 - нұсқа                                                                         |
|  |  |

## 6-тапсырма. Жер жұмыстарының шекарасын анықтау

Бұл графикалық жұмыста жер жұмыстарының шекарасын анықтауға байланысты екі есеп орындау керек. Тапсырма АЗ пішіміндегі сызу қағазында орындалады. Тапсырманы орындау үлгісі 6.2-суретте көрсетілген.

**1-есеп.** Жер ғимаратының (алаң мен жолдың) қазынды және үйінді құламаларының топографиялық бетпен қиылысу сызықтарын анықтау керек. Қазынды құламасының еңістілігі 1:1, үйінді құламасының еңістілігі 1:1,5 және жолдың еңістілігі 1:6. Топографиялық бет 6-суретте берілген. Жер ғимаратының пішімі мен өлшемдерін 6-кестеден нұсқа бойынша қабылдайды.

АЗ пішімінде 6.1-суреттегі жер бедері горизонтальдармен берілген жер телімінің жоспарын және 6-кестедегі берілген жер ғимаратының жоспарын топографиялық бетте 1:200 масштабымен сызады. Жер ғимаратының центрі  $O$  нүктесі жер телімінің  $O$  нүктесімен беттесу керек.



6.1-сурет

Көлбеулік масштабтарының графигін салады. Топографиялық бет пен жер ғимаратының горизонталь дарын салыстыра отырып, нольдік жұмыстардың сызығын анықтаймыз. биіктік белгісі жер ғимараты алаңының биіктік белгісімен бірдей болатын горизонталь болады, біздің мысалда ол - 22-ші горизонталь болады. Биіктік белгілерін салыстырып, алаңның оң жағы жер бетінен жоғары, ал сол жағы – жер бетінен төмен орналасқанын байқаймыз. Сонымен, нөлдік сызықтың оң жағында үйінді, ал сол жағында қазынды болатынын анықтаймыз.

Жер ғимаратының барлық құламаларының горизонтальдарын берілген көлбеуліктер бойынша салу керек. Ол үшін көлбеулік масштабтарының графигі бойынша қазынды мен үйінді құламаларының интервалдарын 1:200 масштабында анықтау керек. Содан соң анықталған интервалдар бойынша барлық құламалардың көлбеулік масштабтарын тұрғызу керек. Құламалардың горизонтальдары көлбеулік масштабтарына перпендикуляр жүргізіледі. Құламалардың аттас горизонтальдарының қиылысу нүктелері арқылы құламалардың өзара қиылысу сызықтары жүргізіледі. Содан соң құламалар мен топографиялық беттің аттас горизонтальдарының қиылысу нүктелері арқылы құламалар мен топографиялық беттің қиылысу сызықтары анықталады.

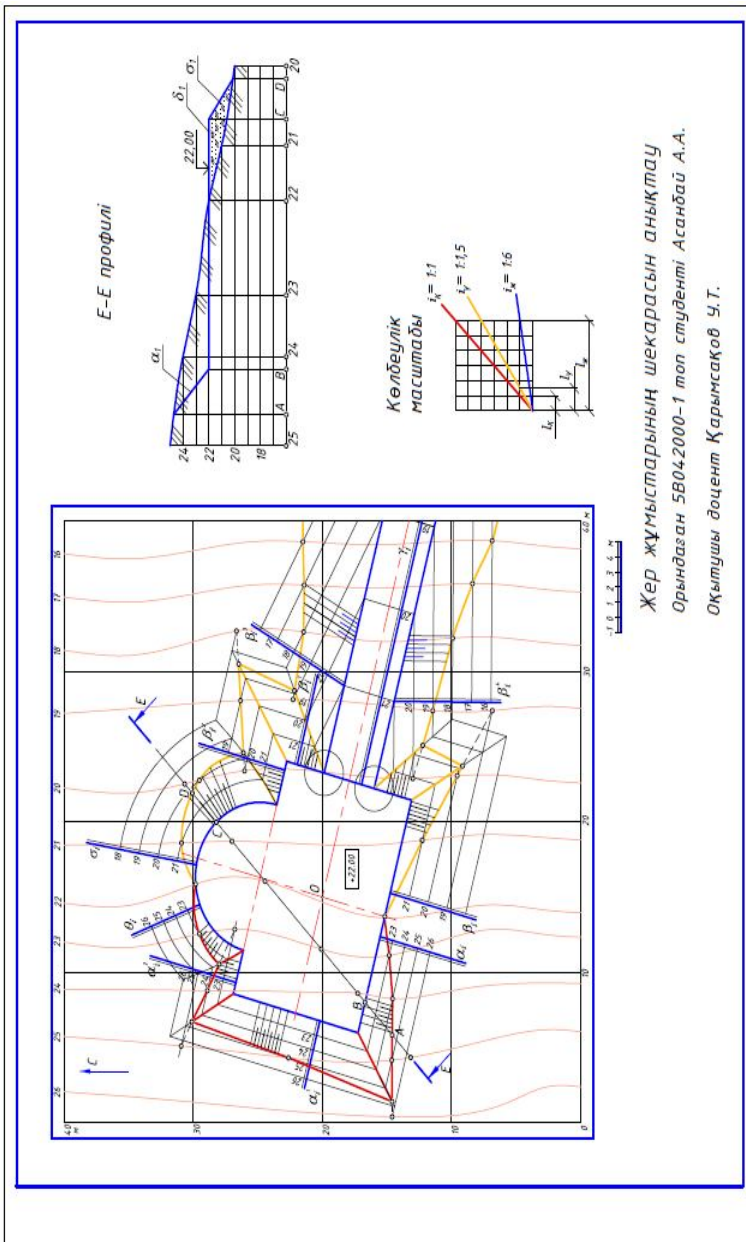
Жол бөлігіндегі жер жұмыстарының шекарасын анықтау үшін алдымен жолды бөліктейміз. Жолдың горизонтальдарының интервалы 30мм болады және оларды жол осіне перпендикуляр жүргіземіз. Жол бойындағы құламалардың горизонтальдарының бағыттарын анықтау үшін қосымша конустарды қолданамыз. Қосымша конустың төбесін алаң мен жолдың қиылысында орналастырамыз. Конустың радиусы үйінді құламасының интервалына тең болады. Жолдың жиегіндегі биіктік белгісі 21.000 болатын келесі нүктеден конустың табанына жанама түзу жүргіземіз. Бұл түзу құламаның биіктік белгісі 21.000 болатын горизонталі болып табылады.

Табылған горизонтальға перпендикуляр етіп құламаның көлбеулік масштабын орнатамыз. Келесі горизонтальдарды 21-ші горизонтальға параллель жүргіземіз. Жол құламасының жер ғимараты құламасымен қиылысу сызығын анықтаймыз. Ол сызық құламалардың аттас горизонтальдарының қиылысу нүктелері арқылы өтеді. Содан соң құламалар мен топографиялық беттің аттас горизонтальдарының қиылысу нүктелері арқылы жер жұмыстарының ізделінді шекарасын анықтаймыз.

**2-есеп.** Жер ғимаратының профилін –  $E-E$  вертикаль кимасын салу керек. Есеп 1-есептің нәтижесі бойынша орындалады.

Алдымен 1:200 масштабта бір-бірінен 1м қашықтықта ғимараттың  $E-E$  жазықтығымен қиылысу бөлігі арасындағы жер бедерінің горизонтальдарын жүргізеді.

Жер профилін жүргізеді. Ол үшін сызбада топографиялық бет горизонтальдарының қиюшы жазықтықтың ізімен қиылысу нүктелерін өлшеп салу керек. Табылған нүктелерден вертикаль түзулерді сәйкес горизонтальдарға дейін жүргізу керек. Табылған нүктелерді сызықпен қосып жер профилін тұрғызады. Осы тәсілмен жер ғимаратының да профилін тұрғызады. Қиюшы жазықтықтың құламалар шекараларымен және ғимараттың жиегімен қиылысу нүктелерін ( $A, B, C, D$ ) белгілейді.  $A$  және  $D$  нүктелерінен вертикаль түзулерді жер профилімен қиылысқанша, ал  $B$  және  $C$  нүктелерінен алаң деңгейінің горизонталіне дейін жүргізеді. Табылған нүктелерді түзулермен қосып ғимараттың профилін табады.



6.2-сурет

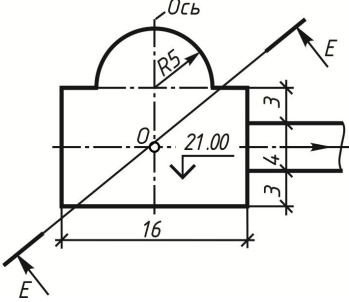
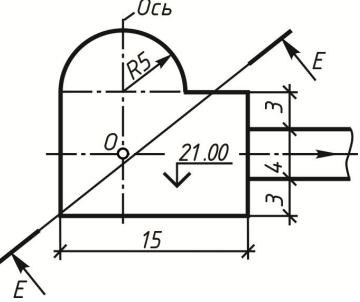
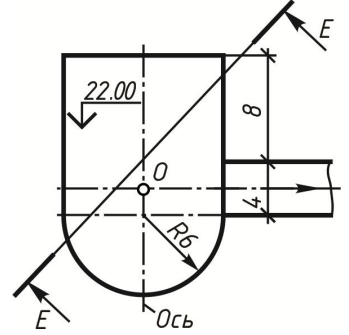
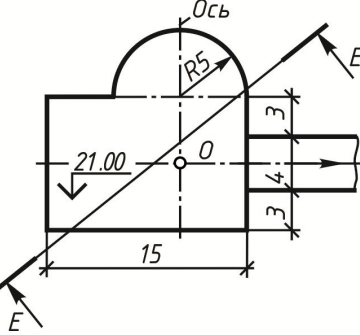
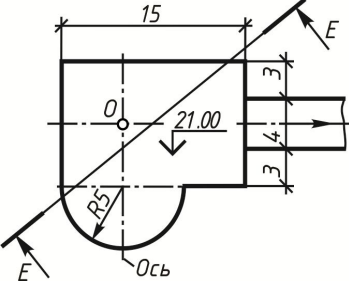
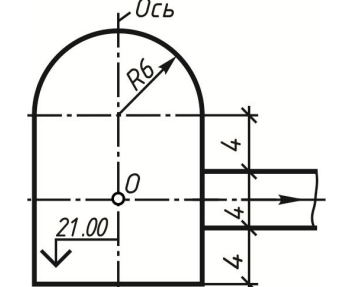
6-кесте

| 1-нұсқа | 2-нұсқа |
|---------|---------|
|         |         |
| 3-нұсқа | 4-нұсқа |
|         |         |
| 5-нұсқа | 6-нұсқа |
|         |         |

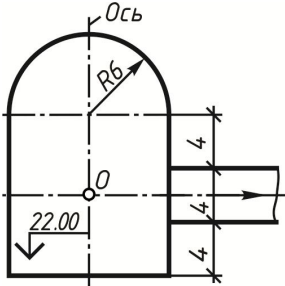
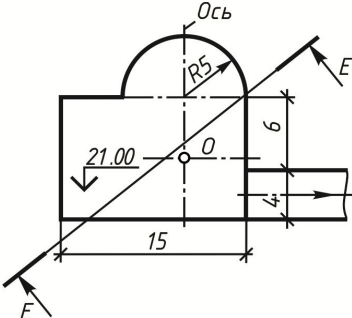
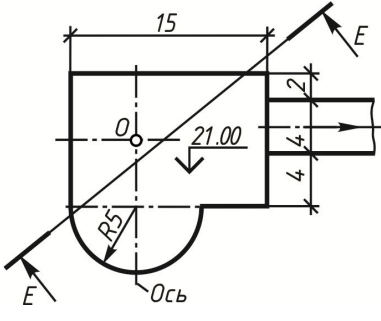
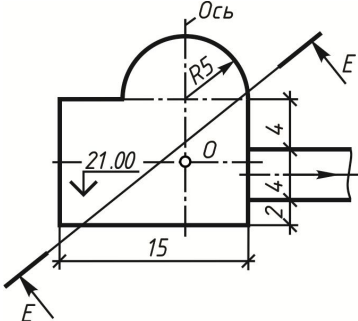
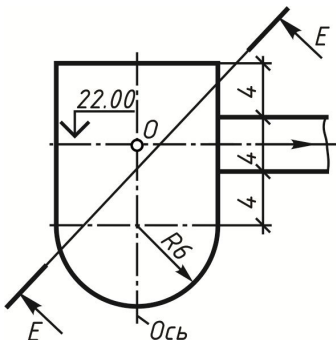
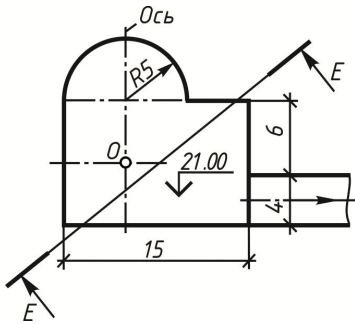
6-кестенің жалғасы

| 7-нұсқа  | 8-нұсқа  |
|----------|----------|
|          |          |
| 9-нұсқа  | 10-нұсқа |
|          |          |
| 11-нұсқа | 12-нұсқа |
|          |          |

6-кестенің жалғасы

| 13-нұсқа                                                                            | 14-нұсқа                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    |
| 15-нұсқа                                                                            | 16-нұсқа                                                                            |
|   |   |
| 17-нұсқа                                                                            | 18-нұсқа                                                                            |
|  |  |

6-кестенің жалғасы

| 19-нұсқа                                                                            | 20-нұсқа                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    |
| 21-нұсқа                                                                            | 22-нұсқа                                                                            |
|    |    |
| 23-нұсқа                                                                            | 24-нұсқа                                                                            |
|  |  |

6-кестенің жалғасы

| 25-нұсқа | 26-нұсқа |
|----------|----------|
|          |          |
| 27-нұсқа | 28-нұсқа |
|          |          |
| 29-нұсқа | 30-нұсқа |
|          |          |

## БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. Қонақбаев К.Қ. Сызба геометрия. – Алматы: 1971.
2. Қонақбаев К.Қ., Есмұханов Ж.М. Сызба геометрия. – Алматы: 1969.
3. Есмұхан Ж. М. Кешенді сызбаны түрлендіру және метрикалық есептер. А.: ҚазҰТУ, 2008. – 34 б.
4. Есмұхан Ж. М., Есмұханова Ж. Ж. Сызба геометрия. Оқулық. А.: ҚазҰТУ, 1998. – 265 б.
5. Есмұханов Ж. М. Краткий русско - казахский словарь терминов начертательной геометрии и черчения. А.: КазПТИ, 1990. – 38 б.
6. Есмұханов Ж. М. Сызба геометрия есептерінің минимумы. А.: КазПТИ, 1990. – 34 б.
7. Есмұханов Ж. М. Сызба геометрия тестілері А.: ҚазҰТУ, 1997. – 35 б.
8. Есмұханов Ж. М. Сызба геометрия. А.: «Мектеп», 1987. – 168 б.
9. Есмұханов Ж. М. Сызықтық сызба геометрия негіздері А.: КазПТИ, 1991. – 52 б.
10. Есмұханов Ж. М., Есмұханова Ж. Ж. Қисықтар мен беттердің сызба геометриясы. А.: ҚазҰТУ, 1995. – 66 б.
11. Есмұханов Ж. М., Есмұханова Ж. Ж. Сызба геометрия есептері 2-бөлім. А.: ҚазҰТУ, 2005. – 157 б.
12. Есмұханов Ж. М., Құспеков Қ. Ә., Есмұханова Ж. Ж. Аксонометриялық проекциялар. А.: ҚазҰТУ, 1998. – 32 б.
13. Есмұханов Ж. М., Құспеков Қ. Ә., Позциялық және метрикалық есептер. Түрлендірулер. А.: ҚазҰТУ, 2008. – 30 б.
14. Есмұханов Ж. М., Макышев Е. М., Есмұханов Е. Ж. Сызба геометрия есептері А.: «Білім», 1995. – 272 б.
15. Бәйдібеков Ә.К. Инженерлік графика (Сандық белгілері бар проекцияларда). – Астана, 2009.
16. Бәйдібеков Ә.К. Сызба геометрия (Сандық белгілері бар проекцияларда). – Тараз, 1999.
17. Бәйдібеков Ә.К., Мусалимов Т.К., Ж.М. Садықова, С.Ә. Қолбатыр. Инженерлік графика. – Алматы, «Білім», 2012 – 264 б.

18. Жаңабаев Ж. Инженерлік және компьютерлік графика. – Алматы, «Мектеп», 2005. – 304 б.
19. Мөлдеков И.О. Сызба геометрия. – М.: 2005.
20. Нәби Ы. А. Сызба геометрия және инженерлік графика: - 2-ші бас., толықт.- Алматы: Бастау, 2010. 276 б.
21. Нұрмаханов Б. Н. Сызба геометрия. – Тараз: 1999.
22. Ыбраев А. Инженерлік графика. Техникалық жоғары оқу орындары мамандықтарының студенттеріне арналған оқулық. – Алматы, «Білім», 2005. – 248 б.
23. Ысқақова С. Д., Рахметова Ш. Т. Инженерлік графикадан есептер минимумы, сандық белгілері бар проекциялар. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 125 б.
24. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985. – 288 б.
25. Гордон В. О. и Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Физматгиз, 1971.
26. Гордон В.О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии: учебное пособие для ВТУЗов / В. О. Гордон, Ю. В. Иванов, Т.Е. Солнцева. – М.: Высшая школа, 2002. – 420 с.
27. Иванов Г. С. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов. М.: МГУЛ, 2012. 224 с.
28. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. – М. Машиностроение, 1998. - 157с.
29. Климухин А.Г. Начертательная геометрия. – М.: Стройиздат, 1982. – 213б.
30. Короев Ю.И. Начертательная геометрия. – М.: Архитектура -С, 2004. – 424б.
31. Котов И.И. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1969.
32. Крылов Н.Н., Иконникова Г.С., Николаев В.Л., Васильев В.Е.: под ред. Крылова Н.Н. Начертательная геометрия. - М.: Высшая школа, 1984.
33. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1981. – 262б.
34. Фролов С.А. Начертательная геометрия – М.: Машиностроение, 1983. - 240 с.
35. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение – М. 2003. – 471 с.

## МАЗМҰНЫ

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Кіріспе.....                                                          | 3  |
| Қабылданған белгілеулер.....                                          | 4  |
| 1. Проекциялау әдісі.....                                             | 6  |
| 1.1. Центрлік проекциялау.....                                        | 6  |
| 1.2. Параллель проекциялау .....                                      | 8  |
| 1.3. Тік бұрыштап проекциялау.....                                    | 9  |
| 2. Аксонометриялық проекциялар.....                                   | 12 |
| 2.1. Негізгі ұғымдар.....                                             | 12 |
| 2.2. Стандарттық аксонометриялық проекциялар.....                     | 16 |
| 2.2.1. Тікбұрышты изометрия.....                                      | 17 |
| 2.2.2. Тікбұрышты диметрия.....                                       | 18 |
| 2.2.3. Қиғашбұрышты фронталь диметриялық проекция.....                | 19 |
| 2.2.4. Қиғашбұрышты фронталь изометриялық проекция .....              | 20 |
| 2.2.5. Қиғашбұрышты горизонталь изометриялық проекция.....            | 21 |
| 3. Монж эпюрі. Нүктенің, түзудің және жазықтықтың сызбалары.....      | 23 |
| 3.1. Монж эпюрі. Нүктенің сызбасы.....                                | 23 |
| 3.2. Түзудің сызбасы.....                                             | 26 |
| 3.3. Жазықтықтың сызбасы.....                                         | 29 |
| 4. Негізгі позициялық есептер.....                                    | 34 |
| 4.1. Екі нүктенің өзара орналасуы. Бәсекелес нүктелер.....            | 34 |
| 4.2. Нүкте мен түзудің өзара орналасуы.....                           | 35 |
| 4.3. Екі түзудің өзара орналасуы.....                                 | 36 |
| 4.4. Түзу мен жазықтықтың, нүкте мен жазықтықтың өзара орналасуы..... | 37 |
| 4.4.1. Жазықтықта жататын нүктелер мен түзулер.....                   | 37 |
| 4.4.2. Жазықтыққа параллель түзу.....                                 | 39 |
| 4.4.3. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін салу.....                | 40 |
| 4.5. Екі жазықтықтың өзара орналасуы.....                             | 44 |
| 4.5.1. Параллель жазықтықтар.....                                     | 44 |
| 4.5.2. Екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу.....                      | 45 |
| 5. Көпжақтар.....                                                     | 49 |

|        |                                                                    |     |
|--------|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1.   | Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы.....                                | 51  |
| 5.2.   | Көпжақтың түзумен қиылысуы.....                                    | 54  |
| 5.3.   | Екі көпжақтың қиылысу сызығы.....                                  | 56  |
| 5.4.   | Тәжірибеде көпжақтардың қиылысу сызығын анықтау.....               | 59  |
| 6.     | Метрикалық есептер.....                                            | 62  |
| 6.1.   | Тік бұрыштың тік бұрышты проекциясы туралы теореманың салдары..... | 62  |
| 6.2.   | Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы.....                        | 63  |
| 6.3.   | Екі жазықтықтың перпендикулярлығы.....                             | 64  |
| 6.4.   | Өзара перпендикуляр жалпы жағдайдағы түзулерді салу.....           | 65  |
| 6.5.   | Кесіндінің ұзындығын табу (тікбұрышты үшбұрыш тәсілі).....         | 66  |
| 7.     | Сызбаны түрлендіру тәсілдері.....                                  | 68  |
| 7.1.   | Жазық-параллель ығыстыру тәсілі.....                               | 68  |
| 7.1.1. | Сызбаны түрлендірумен шығарылатын негізгі есептер.....             | 70  |
| 7.2.   | Проекциялаушы түзуден айналдыру тәсілі.....                        | 73  |
| 7.3.   | Деңгейлік түзуден айналдыру тәсілі.....                            | 74  |
| 7.4.   | Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілі.....                    | 75  |
| 8.     | Қисықтар .....                                                     | 78  |
| 8.1.   | Жазықтық қисықтары.....                                            | 79  |
| 8.2.   | Шеңбердің проекциялары.....                                        | 79  |
| 8.3.   | Кеңістік қисықтары.....                                            | 82  |
| 9.     | Беттер.....                                                        | 85  |
| 9.1.   | Беттердің жасалуы мен берілуі.....                                 | 85  |
| 9.2.   | Айналу беттері.....                                                | 85  |
| 9.3.   | Түзу сызықтық беттер.....                                          | 94  |
| 9.3.1. | Конустық және цилиндрлік беттер.....                               | 95  |
| 9.3.2. | Кері қайту қыры бар беттер (Торс беттері).....                     | 97  |
| 9.3.3. | Параллелизм жазықтығы бар беттер (Каталан беттері).....            | 98  |
| 9.4.   | Бұрама беттер.....                                                 | 102 |
| 9.5.   | Параллель көшіру беттері.....                                      | 104 |
| 9.6.   | Циклдік беттер.....                                                | 104 |
| 10.    | Беттің жазықтықпен және түзумен қиылысуы.....                      | 106 |

|         |                                                                                 |     |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.1.   | Айналу беттерінің жазықтықпен қиылысуы.....                                     | 106 |
| 10.2.   | Түзудің бетпен қиылысуы.....                                                    | 108 |
| 11.     | Беттердің өзара қиылысуы.....                                                   | 113 |
| 11.1.   | Көмекші жазықтықтар тәсілі.....                                                 | 114 |
| 11.2.   | Көмекші сфералар тәсілі.....                                                    | 116 |
| 11.2.1. | Центрлес сфералар тәсілі .....                                                  | 118 |
| 11.2.2. | Центрлес емес сфералар тәсілі.....                                              | 119 |
| 11.3.   | Айналу беттерінің қиылысуының дербес<br>жағдайлары.....                         | 123 |
| 12.     | Көпжақтар мен беттердің жаймалары.....                                          | 124 |
| 12.1.   | Көпжақтардың жаймалары.....                                                     | 125 |
| 12.2.   | Беттердің жаймалары.....                                                        | 128 |
| 13.     | Сандық белгілері бар проекциялар. Нүкте,<br>түзу, жазықтық.....                 | 133 |
| 14.     | Сандық белгілері бар проекциялардағы<br>позициялық және метрикалық есептер..... | 138 |
|         | Өзіндік жұмыстарға арналған тапсырмалар.....                                    | 143 |
|         | Библиографиялық тізімі.....                                                     | 209 |

Оқулық басылым

Уалихан Төленұлы Қарымсақов

## СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ

Оқу құралы

РБ бастығы

Редакторы

Компьютерде беттеген

З. А. Ғұбайдулина

А. И. Бейсебаева

Д. Ш. Тажиева

Басуға қол 28.08.2015 ж. қойылды

Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84 1/16 № 1 баспаханалық қағаз.

Көлемі 13,4 есепті-баспа табак. 12,5 шартты баспа табак.

Тапсырыс № 529. Бағасы келісімді

Қ. И. Сәтбаев атындағы

Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы

Оқу-баспа орталығы, Алматы, Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-228-737-0



9

7 8 6 0 1 2 2 8 7 3 7 0