

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті

З.И. Сулейменов

**ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ**

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2014

ОӘЖ 519.2 (075.8)

ББК 22.17я73

С 90

С 90 Сулейменов З.И. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2014. – 275 б. Сурет–34. Кесте – 62. Библиографиялық тізімі – 20 атау.

ISBN 978-601-228-602-1

Ұсынылып отырған оқу құралы – техникалық, технологиялық, педагогикалық және экономикалық жоғары оқу орындарында оқылатын ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика курсының типтік оқу бағдарламаларына сәйкес жазылған. Әрбір дәрісте теориялық мағлұматтар дәлелдеуімен, формулалары келтіріліп шығарылып берілген, есептерді шығару үлгісі және өзіндік жұмыс тапсырмалары ұсынылған.

Оқу құралы оқытудың кредиттік технологиясы талаптарына сай жазылған. Оны жоғарыда аталған мамандықтардың студенттері мен оқытушылары пайдалануына болады.

Пікір жазғандар:

С.Т. Мұхамбетжанов – әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің кафедра меңгерушісі; физ.-мат., ғыл., докторы, профессор;

Р.А. Сергибаев – математика кафедрасының доценті, ҚазҰТУ;

А.С. Бердышев – Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің "Ақпараттық және қолданбалы математика" кафедрасының меңгерушісі, физ.-мат., ғыл., докторы, профессор.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2014 жылғы жоспары бойынша басылды.

ISBN 978-601-228-602-1

© Сулейменов З.И., 2014

© ҚазҰТУ, 2014

КІРІСПЕ

Еліміз жақын жылдарда дүниедегі ең дамыған мемлекеттер қатарына қосылуға бағыт алып отыр. Бұл үшін міндетті түрде халықаралық бәсекеге бейім мамандар өсіп жетілуі тиіс. Білім саласында да осыған орай айтарлықтай жұмыс істеліп жатыр. Солардың бірі – жоғары оқу орындарында оқытудың жаңа, кредиттік технологиясына өту, бұл қысқаша айтқанда мынадай: әдеттегі технологияда оқытушылар дайын күйінде білім беруші, ал студенттердің көпшілігі оны енжар қабылдаушы болса, ал кредиттік технологияда студенттердің өздері оқиды, оқытушылар оларды оқуға үйретеді. Бұл үшін студенттер өздері оқып игеруіне ыңғайлы, ана тілінде жазылған оқулықтармен қамтамасыз етілуі қажет.

Жоғары математика пәні бойынша қазақ тілінде жарық көрген оқулықтар саны өсіп келе жатыр, бірақ оның ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика бөлімі бойынша қазақ тілінде жазылғаны тым аз, оларды, бүгінгі оқырманның табуы қиын. Осы орайда пайдалы үлесімді қосу мақсатында, жаңа бағдарламаға сәйкестендіріліп, ұзақ жылдар бойы техникалық жоғары оқу орындарында оқыған дәрістеріме сүйене жазылған осы оқу құралын ұсынып отырмын.

Оқу құралы, тізімі соңында келтірілген әдебиеттер негізінде дайындалды. Бұл оқу құралын техникалық, технологиялық, педагогикалық және экономикалық жоғары оқу орындарының студенттері пайдалануына болады. Әсіресе қашықтықтан оқытылатын студенттерге үлкен көмек береді деп ойлаймын.

Тақырыптардың тиянақты игерілуін көздеп, дерлік барлық теоремалар дәлелімен, кездейсоқ шамалардың мәндерін үлестіру формулалары келтіріліп шығарылып берілген. Ықтималдықтар теориясында ерекше маңызы бар қалыпты үлестіру заңымен байланысты, практикада жиі кездесетін үлестіру заңдары, олардың қолданылатын салалары туралы баяндалған. Әрбір дәрістің соңында өзін-өзі тексеру сұрақтары, дәрістегі теориялық материалдарға қатысты есептерді шешу үлгісі берілген және өзіндік жұмыс тапсырмалары ұсынылған.

І-ТАРАУ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

1-дәріс. Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары

Қандай да бір заттардан тұратын бір немесе бірнеше жиын берілсін. Осы заттардан, берілген шарттарды қанағаттандыратын комбинациялар (қиюластырулар, қысындастырулар) құру талап етілсін. Мүмкін болатын барлық комбинациялар санын табу есептері, комбинаториканың есептері деп аталады. Ықтималдықтарды анықтауға тиісті көптеген есептерді шешкенде, комбинаториканың формулаларын қолдану қажет болады. Сондықтан олардың төмендегі негізгі үш түріне тоқталамыз.

1.1. Алмастырулар

1-анықтама. Бір-бірінен айырмашылығы тек элементтерінің орналасуы ретінде ғана болатын комбинацияларды (тізбектерді) алмастырулар деп атайды.

Берілген n элементті (n түрлі затты), қанша әдіспен осы n элементтердің қандай да бір тізбегі түрінде орналастыруға болады? Бұл сұраққа жауап беру үшін, дербес жағдайлардан басталық. Әрбір элементті қазақ алфавитінің әріптерімен белгілейік. a, y ($n=2$) элементтері берілсе, оларды әртүрлі ретпен орналастырып, ay және ya тізбектерін аламыз. Бұларды a және y элементтерінен жасалған алмастырулар деп атайды. Демек, екі элементтен жасалған алмастырулар саны екіге тең. c, m, y элементтері берілсін ($n=3$). Орналасу реттерін өзгертіп, $cym, cmy, ycm, ymc, mcy, mcy$ алмастыруларын аламыз, олардың саны алтыға тең. $e, k, ш, i$ элементтері берілсін ($n=4$). Төрт элементтен құралған алмастырулар санын табу үшін төмендегіше пайымдау жүргіземіз. Осы төрт элементтің кез келген біреуі алмастырудың бірінші орнында келуі мүмкін, ал қалған үшеуінен алты түрлі алмастыру құрылатынын көрдік. Сонымен, алмастырудың жалпы саны $4 \cdot 4 = 24$ -ке тең болады, ($eшкі, шекі, кеші, ішек, \dots$). Бұл мысалдардан мынадай заңдылықты

байқауға болады: екі элементтен $2!=2$ алмастыру, үш элементтен $3!=6$ алмастыру, ал төрт элементтен $4!=24$ алмастыруды құрастыруға болады екен.

Енді $n-1$ элементтен құралатын алмастырудың санын P_{n-1} -мен белгілейік те оны жоғарыдағы заңдылық бойынша $P_{n-1}=(n-1)!$ түрінде жазалық. Онда берілген n элементтің кез келген біреуі, алмастырудың бірінші орнында келуі мүмкін, ал қалған $n-1$ -інен құралған алмастырудың саны $P_{n-1}=(n-1)!$. Ендеше, берілген n элементтен құралған алмастырулар саны $P_n=nP_{n-1}$. Бұл пайымдаулар n элементтен құралған алмастырулар санын беретін

$$P_n=n! \quad (1.1)$$

формуланың дәлелдеуі болады. Дәлелдеудің бұл әдісі математикалық индукция әдісі деп аталатыны орта мектепке арналған математикадан белгілі.

2-анықтама. Егер алмастырудың бір немесе бірнеше элементтері, алмастыруда бірнеше рет қайталанатын болса, онда оны қайталамалы алмастыру деп атайды.

1-мысал. "ана" сөзін беретін үш әріптен алты алмастыру құрауға болады: **ана, наа, аан, ааа, аан, аан**. Бірақ, бұлардың соңғы үшеуі алдыңғы үшеуіне тең. Үш элементтен бір элементі екі рет қайталанатын алмастырулар санын $C_3(2)$ -мен белгілейік:

$$C_3(2)=\frac{3!}{2!}=\frac{6}{2}=3.$$

2-мысал. "анна" сөзін беретін төрт әріптен 24 алмастыру құрауға болады. Бірақ, мұндағы "н" және "а" әріптері екі реттен қайталаынады. Сондықтан, 24 алмастырудың: **нана, ннаа, наан, анна, анан, аанн** алты алмастыруынан басқаларында осылар қайталаынады. Төрт элементтен екеуі, екі реттен қайталанатын алмастырулар санын $C_4(2,2)$ -мен белгілесе, онда:

$$C_4(2,2)=\frac{4!}{2! \cdot 2!}=6.$$

3-мысал. Қобдишада 5 қара, 4 ақ және 3 қызыл шар бар. Осы шарларды қанша әдіспен орналастыруға болады?

Шешуі: қара шарларды 1,2,3,4,5 сандарымен, ақ шарларды 6,7,8,9 сандарымен, ал қызыл шарларды 10,11,12 сандарымен нөмірлейік. 12 элементтен 12! алмастыру құрауға болатындығы белгілі. Бірақ 1-5-пен нөмірленген шарлардың орындарын ауыстырғанмен алмастыру өзгермейді, сол сияқты 6-9-бен, 10-12-мен нөмірленгендердің де орындарын ауыстырғанмен алмастыру өзгермейді. Ендеше, үш түрлі 12 шардың қарасы 5 рет, ағы 4 рет және қызылы 3 рет кездесетін қайталамалы алмастырулар саны $C_{12}(5,4,3)$ келесі теңдікпен анықталады:

$$C_{12}(5,4,3) = \frac{12!}{5!4!3!} = 27720.$$

Жалпы жағдайда, n элементтен құралған алмастыруда, a_1 элементі k_1 рет, a_2 элементі k_2 рет, тағы сол сияқты a_m элементі k_m рет, $m < n$, кездесетін $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ көлемді қайталамалы алмастырулардың саны $C_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ төмендегі формуламен анықталады:

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (1.2)$$

1.2. Орналастырулар

3-анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша орналасу деп бір-бірінен айырмашылығы не құрамында, не орналасу ретінде не екеуінде де болатын комбинацияларды айтады. n элементтен m -нен жасалған орналастырулар саны A_n^m арқылы белгіленеді.

1-мысал. $e, k, ш, i$ төрт әріптен екі-екіден жасалған орналастырулардың санын табыңыз.

Шешуі. Берілген төрт элементтен жасалған барлық алмастыруларды жазып аламыз:

*екші, екш, ешкі, ешік, еікш, еішк,
кеші, кеіш, кіше, кіеш, кшеі, киіе,
шекі, шеік, шкіе, шкеі, шіке, шіек,
ішке, ішек, ікеш, ікше, іешк, іекш.*

Осы алмастырулардың барлығында, алдыңғы екі элементін қалдырып соңғы екі элементін сызып тасталық, сонда 4 элементтен екі-екіден жасалған барлық орналастыру қалады, бірақ әрбір орналастыру екі реттен қайталанады, сондықтан:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Енді n элементтен m -нен жасалған орналастырулардың саны A_n^m -ді табалық. Ол үшін 1-мысалдағыдай пайымдауды жалпы жағдайға көшіреміз, яғни n элементтен жасалған барлық алмастыруларда, алдындағы m элементін қалдырып, соңғы $n-m$ элементін сызып тастаймыз, сонда n элементтен m -нен жасалған барлық орналастырулар қалады. Бірақ әрбір орналастыру, сызып тасталған $n-m$ элементтен қанша алмастыру жасау мүмкін болса, яғни P_{n-m} , сонша рет қайталанады. Ендеше, n элементтен m -нен жасалған орналастырулардың саны, n элементтен жасалған алмастырудың санынан P_{n-m} есе аз екен, яғни

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot [n-(m-1)]. \quad (1.3)$$

(1.3) формуласынан:

$$P_n = A_n^m \cdot P_{n-m}.$$

Соңғы теңдікте $m=n$ десек, онда $P_0=0!=1$ болғандықтан, $P_n = A_n^n$ шығады. Яғни, n элементтен n -нен алынған орналастырулардың саны n элементтен жасалған алмастырулардың санына тең екен.

Енді, тиынды лақтырғанда пайда болатын нәтижелер жиынын қарастырайық: тиынды бір рет лақтырғанда "елтаңба" (е) жағы немесе "сан" (с) жағы шығуы мүмкін. Онда е,с элементтерінен ес, се орналастыруларын құруымызға болады, яғни, бір рет жүргізілген 2 элементті тәжірибенің мүмкін болатын нәтижелерінен жасалған орналастырулар саны $2^1=2$ -ге тең. Тиынды екі рет лақтырғанда, оның нәтижелерінен, екі элементтен тұратын, ес, ее, се, сс орналастыруларын құруға болады, яғни 2 элементті тәжірибе екі рет жүргізілсе, онда оның нәтижелерінен $2^2=4$ орналастыру құруға болады екен. Сонымен бірге, алынған орналастырулар ішінде элементтердің қайталанып келетіні барын байқаймыз. Тиынды үш рет лақтырғанда, оның нәтижелерінен, үш элементтен тұратын есе, сее, еее, ссе, есс, сес, еес, ссс орналастыруларын құруға болады, яғни 2 элементті тәжірибе үш рет жүргізілсе, онда оның нәтижелерінен $2^3=8$ орналастыру құруға болады. Бұл орналастыруларда да элементтердің қайталанатыны көрініп тұр. Осылайша пайымдай отырып, тиынды n рет лақтырғанда шығатын нәтижелерден, саны 2^n -ге тең орналастыру құрастыра аламыз. Мұндай орналастыруларды қайталамалы орналастырулар деп атайды.

Бұл арада бір тиынды n рет лақтырғанда шығатын нәтижелермен n тиынды бір рет лақтырғанда шығатын нәтижелері пар-пар болатынын ескерте кетелік.

4-анықтама. k элементі бар жиынның элементтерінен құралған, r элементтен кез келген реттестірілген жиын k элементтен r -ден жасалған қайталамалы орналастыру деп аталады және ол a_k^r арқылы белгіленеді. Басқаша айтқанда, k элементті тәжірибе r рет жүргізілгенде пайда болатын нәтижелерден тұратын орналастырулар қайталамалы орналастырулар деп аталады. Мұндағы r саны k санынан үлкен де, кіші де, тең де болуы мүмкін.

Қайталамалы орналастырулардың саны $A(a_k^r)$ төмендегі формуладан табылады:

$$A(a_k^r)=k^r \quad (1.4)$$

Жалпы жағдайлар үшін жазылған (1.2), (1.3), (1.4) формулаларының дұрыстығын математикалық индукция әдісімен дәлелдеу қиын емес.

1.3. Терулер

5-анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен m элемент бойынша терулер деп бір-бірінен айырмашылығы тек қана құрамында болатын комбинацияларды айтады.

n элементтен m -нен жасалған терулер саны C_n^m арқылы белгіленеді. Терулер ұғымы орналастырулар және алмастырулармен тығыз байланысқан. Шынында да, n элементтен m -нен жасалған орналастырулардан, айырмашылығы орналасу ретінде ғана болғандарын шығарып тастасақ, онда n элементтен m -нен жасалған терулер қалады, яғни $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$. Керісінше, егер әрбір теруде барлық мүмкін болған алмастыруларды орындап қоссақ, онда n элементтен m -нен жасалған барлық орналастырулар саны шығады, яғни

$$A_n^m = C_n^m P_m.$$

Сонымен,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \quad (1.5)$$

(1.5) теңдіктен, $m=n$ болғанда $C_n^n=1$ шығады.

Терудің (1.5) формуласы арқылы дәлелденетін екі қасиетін келтірелік:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (симметриялық қасиеті);
2. $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ (рекурренттік байланыс).

1-мысал. 7 адамнан 3 адам таңдап алудың жалпы санын табыңыз.

Шешуі. (1.5) формуласын қолданамыз.

$$C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = 35.$$

Егер n элементтен m -нен жасалған қайталамалы теруді c_n^m -мен белгілесек, онда қайталамалы терулер саны $c(c_n^m)$ төмендегі формуламен анықталады:

$$C(c_n^m) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}, \quad (1.6)$$

яғни, $C(c_n^m) = C_{n+m-1}^m$ екен.

2-мысал. Дүкенде іші бірдей, ал тысы сары, жасыл, көк түсті дәптерлер бар. 10 дәптер сатып алынды. Алынған дәптерлерге үш түстің әрбір түрінен дәптерлер енуі мүмкін. 10 дәптерді неше түрлі құраммен алуға болады?

Шешуі (1.6) формуласын қолданамыз.

$$C(c_3^{10}) = \frac{(3+10-1)!}{10!(3-1)!} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = 66.$$

1.4. Тәжірибелер және оқиғалар

Ықтималдықтар теориясы деп біртекті кездейсоқ құбылыстардың жалпы заңдылықтарын зерттейтін және әртүрлі құбылыстарға кездейсоқ фактілердің тигізетін әсерін сан жағынан бағалайтын әдістерді беретін ғылымның саласын айтады. Ықтималдықтар теориясы математиканың негізгі салаларының бірі болып есептеледі. Оқиғалар және олардың пайда болу ықтималдықтары аталған теорияның негізгі ұғымдарына кіреді.

Физикалық, химиялық, биологиялық құбылыстарды зерттеу үшін және өндірістің, экономиканың тағы басқа салалардың тапсырмаларын орындау үшін түрлі-түрлі тәжірибелер жүргізіледі.

Тәжірибелердің нәтижелерін оқиғалар деп атайды. Оқиға ұғымының басқаша бір түсініктемесін де берелік.

Оқиға дегенде, белгілі бір шарттар жиынтығы орындалғанда пайда болатын немесе пайда болмайтын әрқандай құбылысты түсінеміз.

1-мысал. Қандай да бір өндірістің дайындаған бұйымдарының сапасын бағалау үшін оның 1000 бұйымын алып, олардың стандартқа сәйкестігі тексерілгенде 18 бұйымы жарамсыз болып шықты делік. Мұнда 1000 бұйымын алу және олардың стандартқа сәйкестігінің тексерілуі – белгілі бір шарттар жиынтығының орындалуы немесе тәжірибе жүргізілуі болады, ал 18 бұйымның жарамсыз болып шығуы – оқиға болады. Тәжірибе жүргізілгенге дейін, 18 бұйымның жарамсыз болатынын білмейтін едік, сондықтан ол кездейсоқ оқиға деп аталады.

2-мысал. Автомобиль жолының санатын (категориясын) анықтау үшін белгілі бір орында тұрып бір тәулікте жолдан өтетін автомобильдердің санын тіркеп отырады. Сонда тәжірибе жүргізу – дегеніміз тәулік бойы бір орында тұрып жолдан өткен автомобильдердің санын тіркеу болса, онда бір тәулікте өткен автомобильдердің саны кездейсоқ оқиға болады.

Сонымен, оқиға дегеніміз – белгілі бір тәжірибенің қорытындысы екен. Егер ол әрі қарай жіктелмейтін болса, онда оны элементар оқиға деп атайды.

Белгілі бір тәжірибенің мүмкін болатын барлық нәтижелеріне қандайда бір E жиынын сәйкестендіреміз. E жиынының элементтерін e_i -мен белгілеп, оны элементар оқиғалар жиыны деп атаймыз.

Егер, тәжірибе нәтижесінде, элементар оқиғалардың тек қана біреуі пайда болса, яғни кез келген екі e_i және e_j ($i \neq j$) оқиғалары бірге пайда болмаса, онда мұндай элементар оқиғалар жиыны, элементар оқиғалар кеңістігі деп аталады.

Сонымен, кез келген оқиға қандай да бір тәжірибенің нәтижесі, ал тәжірибенің мүмкін болатын барлық нәтижелерінен тұратын E жиыны, элементар оқиғалар кеңістігі болады екен.

Функцияларды зерттеу, олардың анықталу облыстарын табудан басталатыны сияқты, оқиғалардың ықтималдықтарын табу есебі, оларға сәйкес элементар оқиғалар кеңістіктерін анықтаудан басталады.

3-мысал. Тәжірибе, тиынды бір рет лақтыру болсын. Тәжірибенің мүмкін болатын барлық нәтижелерінен тұратын элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{e,c\}$ түрінде жазылады. Жақшаның ішіндегі *e* әрпі "елтаңба" жағының түсуін, ал *c* әрпі "сан" жағының түсуін көрсетеді.

4-мысал. Тәжірибе тиынды екі рет лақтыру болсын. Тәжірибенің мүмкін болатын барлық нәтижелерінен тұратын элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{ee,ec,ce,cc\}$ түрінде жазылады. Жақшаның ішіндегі *ee* бірінші рет лақтырғанда да, екінші рет лақтырғанда да "елтаңба" жағының түскендігін көрсетеді. Ал *ec* бірінші лақтырғанда "елтаңба" екінші лақтырғанда "сан" жағының түскендігін көрсетеді, т.с.с.

5-мысал. Тәжірибе тиынды үш рет лақтыру болсын. Тәжірибенің мүмкін болатын барлық нәтижелерінен тұратын элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{eee,eec,ece,cee,cce,cce,ccc\}$ түрінде жазылады.

6-мысал. Тәжірибе ойын сүйегін бір рет лақтыру болсын. Тәжірибенің мүмкін болатын барлық нәтижелерінен тұратын элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ түрінде жазылады. Мұндағы 1 цифры ойын сүйегіндегі 1-мен белгіленген ұпайдың пайда болуын білдіреді, т.с.с.

7-мысал. Тәжірибе ойын сүйегін екі рет лақтыру болсын. Элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{11,12,...16,21,22,...26,...,61,62,...,66\}$ түрінде жазылады. Мұндағы 11 бірінші рет лақтырғанда да екінші рет лақтырғанда да 1-мен белгіленген ұпайдың пайда болуын, ал 12 бірінші рет 1-мен, екінші рет лақтырғанда 2-мен белгіленген ұпайдың пайда болуын білдіреді, т.с.с.

8-мысал. Тәжірибе, А және В екі адамның, $[0,t]$ уақыт интервалында, уәделескен жерде кездесуге келген уақыттарын тіркеу болсын. Егер *x* арқылы А-ның, *y* арқылы В-ның келген уақыттарын белгілесек, онда элементар оқиғалар кеңістігі төмендегідей болады:

$$E=\{(x,y): 0<x<T, 0<y<T\}$$

Сонымен, кез келген тәжірибеге, оның мүмкін болатын нәтижелерінен тұратын элементар оқиғалар кеңістігін сәйкестендіруге болады екен.

1.5. Күрделі оқиғалар

Элементар оқиғалар кеңістігінің элементтерінен құралған әрбір ішкі жиын күрделі оқиға деп аталады. Тәжірибе нәтижесінде, күрделі оқиға пайда болуы да, пайда болмауы да мүмкін, сондықтан оны кездейсоқ оқиға деп атайды. Дербес жағдайда, элементар оқиғалар кеңістігінің өзі де кездейсоқ оқиғаның мысалы болады. Кездейсоқ оқиғаларды $A, B, C, \dots$ сияқты бас әріптермен белгілейді.

Енді күрделі оқиғаларға мысалдар келтірейік.

1-мысал. А оқиғасы тиынды бір рет лақтырғанда "елтаңба" жағының шығуы болсын. Онда элементар оқиғалар кеңістігі:

$$E=\{e,c\}, \text{ ал } A=\{e\} \text{ болады.}$$

2-мысал. А оқиғасы тиынды екі рет лақтырғанда кемінде бір рет "елтаңба" жағының шығуы болсын. Онда элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{ee,ec,ce,cc\}$, ал $A=\{ee,ec,ce\}$.

3-мысал. Тәжірибеміз тиынды үш рет лақтыру болсын. Онда элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{eee,eec,ece,cee,cec,ecc,ccc\}$ болады. А оқиғасы "елтаңба" жағының бір рет шығуы, В оқиғасы "елтаңба" жағының екі рет шығуы, ал С оқиғасы "елтаңба" жағының кемінде бір рет шығуы болсын. Онда $A=\{cee,cec,ecc\}$, $B=\{eec,ece,cee\}$, $C=\{eee,eec,cee,cec,ecc,ccc\}$.

4-мысал. Тәжірибеміз ойын сүйегін бір рет лақтыру болсын. Онда элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ болады. А оқиғасы $*6*$ ұпайдың шығуы, В оқиғасы тақ ұпайлардың шығуы, ал С оқиғасы 3-тен кем болмаған ұпайлардың шығуы болсын. Онда $A=\{6\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{3,4,5,6\}$ болады.

5-мысал. Тәжірибеміз ойын сүйегін екі рет лақтыру болсын. Онда элементар оқиғалар кеңістігі $E=\{11,12,13,\dots,16,21,22,\dots,66\}$ болады. А оқиғасы – екінші цифры жұп болатын ұпайлардың шығуы, В оқиғасы – цифрларының қосындысы 4-ке тең болатын ұпайлардың шығуы, ал С оқиғасы – цифрларының қосындысы 10-нан кем болмайтын ұпайлардың шығуы болсын. Онда $A=\{12,14,16,20,22,24,26,30,32,34,\dots,60,62,64,66\}$, $B=\{13,22,31\}$,

$C=\{46,55,56,64,65,66\}$ болады.

6-мысал. Тәжірибе A және B екі адамның, уәделескен жерде, $[0, T]$ уақыт аралығында кездесуге келген уақытын тіркеу болсын. Егер, бұрын келгені екіншісін τ уақыт күтетін болса, онда кездесудің болатынын білдіретін оқиғаны C -мен белгілеп, келесі теңдіктерді жазамыз:

$$E=\{(x,y): 0\leq x\leq T, 0\leq y\leq T\}, C=\{(x,y): |x-y|\leq \tau\}.$$

Оқиғалар – ақиқат, мүмкін емес, кездейсоқ – деп үшке бөлінеді.

Тәжірибе нәтижесінде міндетті түрде пайда болатын оқиға, ақиқат оқиға деп аталады. Нақты бір тәжірибенің нәтижесінде пайда болу мүмкіндігі жоқ оқиғалар – мүмкін емес оқиғалар деп аталады.

Нақты бір тәжірибенің нәтижесінде пайда болуы немесе пайда болмауы мүмкін оқиғалар кездейсоқ оқиғалар деп аталады.

Мысалы, тәжірибеміз нысанаға бір рет оқ ату болсын делік. A оқиғасы атылған оқтың нысанаға тиюі немесе тимеуі болсын. Онда A оқиғасы ақиқат оқиға болады. Егер осы тәжірибеде B оқиғасы оқтың нысанаға тиюі болса, онда B кездейсоқ оқиға болады. Ал, егер осы тәжірибеде C оқиғасы бір рет атылған оқтың тиюі және тимеуі болса, онда C оқиғасы мүмкін емес оқиға болады.

Ақиқат оқиғаны U , ал мүмкін емес оқиғаны V әріптерімен белгілейді. Сонымен, мүмкін емес оқиға тәжірибенің нәтижесінде мүлдем пайда болмайды, ал ақиқат оқиға міндетті түрде пайда болады, яғни $U=E$.

A оқиғасы пайда болған сайын, B оқиғасы да пайда болса, онда олар $A\subset B$ деп жазылады. Бұл жағдайда A оқиғасы B оқиғасын ілестіреді дейді.

Егер $A\subset B$ және $B\subset A$ орындалса, онда $A=B$, яғни A мен B өзара тең оқиғалар деп аталады.

Егер A мен B оқиғаларының біреуінің пайда болуы, екіншісінің пайда болуын жоққа шығарса, яғни екеуі бірге пайда

болмаса, онда **A** мен **B** оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар деп аталады. Мысалы, тиынды бір рет лақтырғанда "е" жағының пайда болуы "с" жағының пайда болуын жоққа шығарады, яғни екеуі бірге пайда болмайды. Сондықтан бұл оқиғалар өзара үйлесімсіз оқиғалар болады.

Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалар жиынының кез келген екеуі өзара үйлесімсіз болса, онда ол жиын қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар жиыны деп аталады.

Егер оқиғалардың біреуінің пайда болуы, екіншісінің пайда болуын жоққа шығармаса, онда олар үйлесімді оқиғалар деп аталады. Осы тақырыптың 4-мысалындағы **A** мен **C** және **B** мен **C** оқиғалары үйлесімді.

Тәжірибе нәтижесінде, $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының ең болмағанда біреуі міндетті түрде пайда болса, онда олар жалғыз мүмкіндікті оқиғалар деп аталады. Көбінесе, оқиғалардың мұндай жиынын оқиғалардың толық жиыны немесе толық жүйесі деп атайды. Мысалы, тиынды бір рет лақтырғанда, оның екі жағының біреуі міндетті түрде пайда болады. Сондықтан, A_b, A_c оқиғалары жалғыз мүмкіндікті, немесе толық жиын құратын оқиғалар. Сол сияқты ойын сүйегін бір рет лақтырғанда $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ оқиғалары да жалғыз мүмкіндікті болады, ал A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 оқиғалары жалғыз мүмкіндікті немесе толық жиын бола алмайды, өйткені ойын сүйегін бір рет лақтырғанда A_6 оқиғасы да пайда болуы мүмкін, бұл жағдайда A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 оқиғаларының ешбіреуі де пайда болмайды.

Дербес жағдайда, егер толық жиын құрайтын оқиғалар қос-қостан үйлесіміз болса, онда тәжірибе нәтижесінде бұл оқиғалардың тек қана біреуі пайда болады.

Тәжірибе нәтижесінде $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының ешбіреуінің пайда болу мүмкіндігі басқаларынан артық не кем болмаса, онда мұндай оқиғалар тең мүмкіндікті деп айтылады. Мысалы, тиынды бір рет лақтырғандағы A_b, A_c оқиғалары тең мүмкіндікті, сол сияқты ойын сүйегін бір рет лақтырғандағы $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ оқиғалары да тең мүмкіндікті болады.

1.6. Оқиғаларға қолданылатын амалдар

Ықтималдықтар теориясының негізгі есептерінің бірі – жеке оқиғалардың ықтималдықтары бойынша күрделі оқиғалардың ықтималдықтарын анықтау. Күрделі оқиғалар жеке оқиғаларға бір немесе бірнеше амал қолдану арқылы құрылады. Оқиғаларды теріске шығару (қарама-қарсы оқиғаны табу), қосу, азайту және көбейту амалдары көрнекірек болу үшін Эйлер-Венн диаграммалары деп аталатын 1.1-1.4-суреттерін келтіреміз. Мұнда тік төртбұрыштар элементар оқиғалар кеңестігін, ал олардың ішіндегі дөңгелектер оқиғаларды көрсетеді.

1. Толық жиын құратын екі жалғыз мүмкіндікті оқиға қарама-қарсы оқиғалар деп аталады. Егер қарама-қарсы оқиғалардың біреуі **A** әрпімен белгіленсе, онда екіншісі **$\bar{A}$** -мен белгіленеді. Мысалы, тиынды бір рет лақтырғанда "елтаңба" жағының шығуын **A** оқиғасы десек, онда "сан" жағының шығуы **$\bar{A}$** болады. Өйткені **A** және **$\bar{A}$** оқиғалары жалғыз мүмкіндікті және толық жиын құрады (1.1 а, ә-сурет).

2. **A** және **B** оқиғаларының қосындысы деп **A** оқиғасының пайда болуынан, немесе **B** оқиғасының пайда болуынан, немесе екеуінің де пайда болуынан тұратын **A+B** оқиғасын айтады. Мысалы, нысанаға екі рет оқ атылсын. **A** – бірінші атылған оқтың тиюі, ал **B** – екінші атылған оқтың тиюі оқиғалары болсын, онда **A+B** – бірінші атылған оқтың тиюі, немесе екінші атылған оқтың тиюі, немесе екеуінің де тиюі оқиғасы болады. **A+B** қосынды екі дөңгелектің нүктелерінің жиынын көрсетеді, мұндағы **A** және **B** оқиғаларының екеуіне де тиісті нүктелер тек бір рет ғана есепке алынады. **A** және **B** оқиғалары үйлесімсіз болған жағдайдағы **A+B** қосындыны 1.2 а- сурет, ал **A** және **B** оқиғалары үйлесімді болған жағдайдағы **A+B** қосындыны 1.2 ә-сурет көрсетеді.

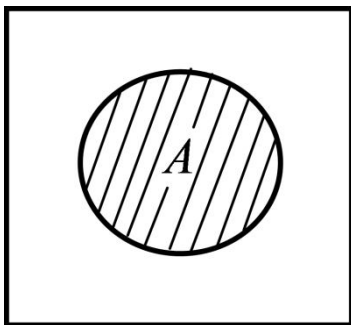
Жалпы жағдайда, **A₁, A₂, ..., A_n** оқиғаларының қосындысы деп, бұл оқиғалардың ең болмағанда біреуінің пайда болуынан тұратын оқиғаны айтады.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$$

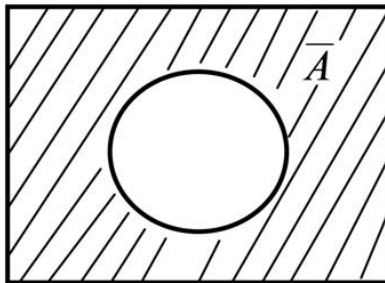
3. **A** оқиғасының пайда болуынан, **B** оқиғасының пайда болмауынан тұратын оқиғаны **A** мен **B** оқиғаларының айырмасы дейді де **A-B** деп белгілейді (1.3 а, ә-сурет).

4. **A** мен **B** оқиғаларының көбейтіндісі деп, олардың бірге пайда болуынан тұратын оқиғаны айтады және ол **A·B**-мен белгіленеді (1.4 а, ә- сурет).

Жалпы жағдайда, $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының көбейтіндісі деп, олардың бәрінің бірге пайда болуынан тұратын оқиғаны айтады және ол $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ –мен белгіленеді.

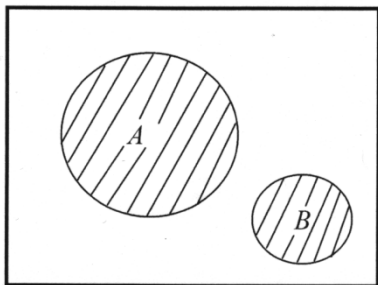


а)

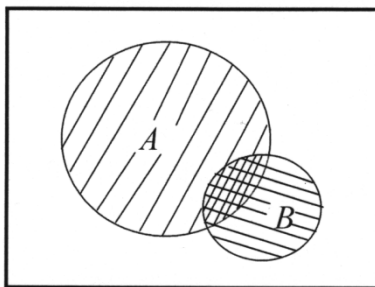


ә)

1.1-сурет

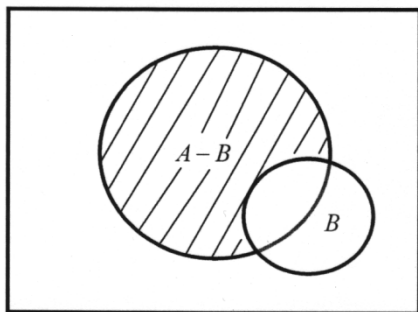


а)

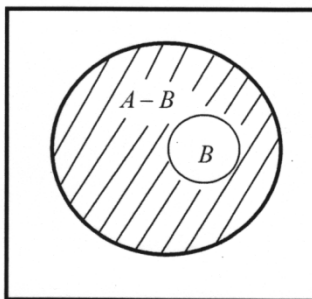


ә)

1.2-сурет

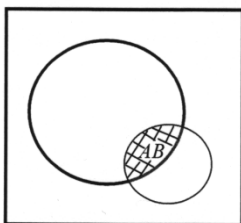


а)

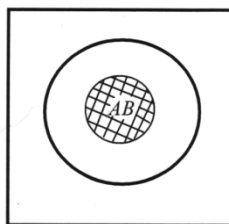


ә)

1.3-сурет



а)



ә)

1.4-сурет

Оқиғаларды қосу, көбейту амалдары төмендегі қасиеттерді қанағаттандырады;

1. $A + A = A$;
2. $A + B = B + A$;
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
4. $A \cdot A = A$;
5. $A \cdot B = B \cdot A$;
6. $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$;
7. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
8. $A + E = E$;

9. $A \cdot E = A$;
10. $A + \emptyset = A$;
11. $A + \bar{A} = E$;
12. $\bar{\emptyset} = E$;
13. $\bar{E} = \emptyset$;
14. $\bar{\bar{A}} = A$;
15. $AB + C = (A + C)(B + C)$.
16. $\overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$. –
де Морган ережесі.

15-тендіктің дұрыстығын дәлелделік. Ол үшін тендіктің екі жағындағы жиындар бірдей элементтерден тұратындығын көрсетсек жеткілікті. Айталық, кез келген $a \in AB + C$. Онда қосындының анықтамасы бойынша, a элементі AB және C -ның кемінде біреуіне тиісті, мысалы, $a \in AB$. Бұдан көбейтіндінің анықтамасы бойынша $a \in A$ және $a \in B$ шығады. Олай болса, $a \in A + C$, $a \in B + C$. Бұлардан $a \in (A + C) \cdot (B + C)$ шығады. Егер $a \in C$ болса, онда $a \in A + C$, $a \in B + C$, демек $a \in (A + C) \cdot (B + C)$.

Енді $a \in (A + C) \cdot (B + C)$ болсын. Онда $a \in A + C$ және $a \in B + C$ болады. Егер $a \in A$ және $a \in B$ болса, онда $a \in AB$, бұдан $a \in AB + C$, ал егер $a \in C$ болса, онда $a \in AB + C$ шығады. Сонымен, тендіктің екі жағы да бірдей элементтерден тұратындығы көрсетілді.

Оқиғаларды көбейту амалын қолданып үйлесімсіздік және қос-қостан үйлесімсіздік ұғымдарын басқаша анықтауға да болады.

Егер $A \cdot B = \emptyset$ болса, онда A және B оқиғалары үйлесімсіз деп аталады.

Егер $A_i \cdot A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i=1,2, \dots, n$, $j=1,2, \dots, n$ болса, онда бұл оқиғалар қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар деп аталады.

Енді оқиғаларды қосу және көбейту амалдарын қолданып күрделі оқиғаларды құруға мысалдар қарастырайық:

1-мысал. Мерген нысанаға екі рет оқ атты. Ең болмағанда бір рет нысанаға тигізу оқиғасын жазыңыз.

Шешуі. A_1 – бірінші атқанда тигізуі, A_2 – екінші атқанда тигізуі оқиғалары болсын. Онда, $A_1 + A_2$ – екі рет атылған оқтың кемінде біреуінің нысанаға тиюі оқиғасы болады.

2-мысал. Мергеннің нысанаға атқан екі оғының біреуі ғана нысанаға тиді деген оқиғаны жазыңыз.

Шешуі: 1-мысалдағы белгілеулерді қолданамыз. Онда, $\bar{A}_1$ – бірінші атылған оқтың тимеуі, ал $\bar{A}_2$ – екінші атылған оқтың тимеуі оқиғалары болады. $A_1 \bar{A}_2 + A_2 \bar{A}_1$ оқиғасы атылған екі оқтың біреуінің ғана тиюі оқиғасы болады.

3-мысал. Мерген нысанаға үш рет оқ атты. а) Тек қана біреуі тиеді; ә) тек қана екеуі тиеді; б) үшеуі де тиеді деген оқиғаларды жазыңыз.

Шешуі. A_1 – бірінші атқанының тиюі, A_2 – екінші атқанының тиюі, A_3 – үшінші атқанының тиюі оқиғалары болсын. Онда $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – сәйкес қарама-қарсы оқиғалар болады.

а) Тек қана біреуі тиеді деген оқиғаны A -мен белгілесек, онда ол төмендегі теңдікпен анықталады:

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

ә) Атылған үш оқтың екеуі ғана тиеді деген оқиғаны B -мен белгілесек, онда ол төмендегі теңдікпен анықталады:

$$B = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3.$$

б) Атылған үш оқтың үшеуі де тиеді деген оқиғаны C -мен белгілесек:

$$C = A_1 A_2 A_3.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары.

1. Оқиға, элементар оқиғалар кеңістігі деген не? Мысалдар келтіріңіздер.

2. Ақиқат, мүмкін емес және кездейсоқ оқиғалар деп қандай оқиғаларды айтады? Мысалдар келтіріңіздер.

3. Оқиғалардың толық жиыны деген не? Мысалдар келтіріңіз.

4. Қандай оқиғаларды үйлесімсіз дейді? Үйлесімді, үйлесімсіз оқиғаларға мысалдар келтіріңіз.

5. Тең және жалғыз мүмкіндікті деп қандай оқиғаларды айтады? Мысалдар келтіріңіздер.

6. Оқиғаларға қолданылатын амалдар, олардың қасиеттерін баяндаңыз.

7. М элементтен неше алмастыру жасауға болады?

8. N элементтен M-нен жасалған орналастырулар қандай формуламен анықталады?

9. N элементтен M-нен неше теру жасауға болады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ).

1-мысал. $1, 2, 3, \dots, n$ элементтерден құралған алмастырулардың бірінші орында 1 элементі орналаспағандарының саны қанша?

Шешуі. $2, 3, \dots, n$ элементтерден жасалған алмастырулардың саны P_{n-1} , ал $1, 2, 3, \dots, n$ элементтерден жасалған алмастырулардың саны $P_n = nP_{n-1}$ болатынын 1.1-тақырыпта дәлелдедік. $2, 3, \dots, n$ -дан, яғни $(n-1)$ элементтен жасалған алмастыруларды қолданып $1, 2, 3, \dots, n$ -дан, яғни n элементтен мүмкін болатын барлық алмастыруларды құру үшін 1 цифрын $(n-1)$ элементтен құралған P_{n-1} алмастыруының әрбіреуінің алдына, яғни 1-орнына, одан кейін қалған $2, 3, \dots, n$ – орындарына орналастыруымыз тиіс. Сонда n элементтен жасалған барлық алмастыруларының тек қана P_{n-1} алмастыруының бірінші элементі 1 болады. Онда берілген есептің сұрағына жауап беру үшін n элементтен жасалған барлық алмастыру санынан $n-1$ элементтен жасалған барлық алмастырулар санын айырамыз, яғни

$$P_n - P_{n-1} = n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1).$$

2-мысал. "Математика" сөзіндегі әріптердің орындарын алмастыра отырып қанша "сөз" жасап шығаруға болады (жасалған сөздің мағынасына мән берілмейді)?

Шешуі. Әріптердің орындарын алмастыра отырып "математика" сөзіндегі 10 әріптен $10!$ "сөз" шығарып алуға болады. Бірақ, бұл сөздерде 3 орында орналасқан "а" әріпінің орындарын ауыстырсақ, сол сияқты 2 "м", 2 "т" әріптерінің орындарын өздеріне сәйкес ауыстырсақ, онда бұл сөздер ешбір өзгермес еді, яғни берілген "сөз" әріптерінен құралған алмастырулар қайталамалы алмастырулар тобына жатады. Онда, іздеген санды табу үшін (1.2) формуласын қолданамыз:

$$C_{10}(3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200$$

3-мысал. а, ә, б, в, г, ғ алты әріптің кез келген төрт әріпінен жасалған сөздердің саны нешеу?

Шешуі. Сұраққа жауап беру үшін алты элементтен төрт-төрттен жасалған орналастырулардың санын табу қажет, яғни (1.3) формуласын қолданамыз: $n = 6$, $m = 4$.

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 360.$$

4-мысал. Ойын сүйегін екі рет лақтырғанда шығуы мүмкін болатын ұпайлардан (алты элементтен) құралған орналастырулар санын табыңыз.

Шешуі. Мүмкін болатын нәтижелері 6 элементтен тұратын бір тәжірибе екі рет қайталанып тұр. (1.4) формуласын қолданамыз.

$$A(a_6^2) = 6^2 = 36.$$

Бұл орналастырулар:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, ..., 61, 62, 63, 64, 65, 66 түрлерінде болады.

5-мысал. 90 элементтен 5 элементті неше әдіспен таңдауға болады?

Шешуі. Сұраққа жауап беру үшін, 90 элементтен 5-тен жасалған терулер санын табамыз. Ол үшін (1.5) формуласын қолданамыз.

$$C_{90}^5 = \frac{90!}{5!85!} = 43949268.$$

6-мысал. $C_n^5 = 2C_{n-1}^5$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі. (1.5) формуласын қолданамыз.

$$\frac{n!}{5!(n-5)!} = 2 \cdot \frac{(n-1)!}{5!(n-6)!}$$

теңдіктің екі жағын $\frac{(n-1)!}{5!}$ -ға қысқартамыз.

$$\frac{n}{(n-5)!} = \frac{2}{(n-6)!} \text{ немесе } n(n-6)! = 2(n-5)!.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын $(n-6)!$ -ға қысқартамыз.

$n = 2(n-5)$, бұдан $n = 10$ шығады.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары.

1. Кітап сөресіне әртүрлі 10 кітапты неше әдіспен орналастыруға болады?

Жауабы: $10! = 3628800$.

2. $1, 2, 3, \dots, n$ элементтерден құралған алмастырулардың ішінде 1 және 2 элементтерінің өз орындарында орналаспағандарының саны қанша?

Жауабы: $P_n - P_{n-1} - P_{n-1} + P_{n-2} = (n^2 - 3n + 3)(n-2)!$.

3. 1, 1, 1, 5, 5, 9 цифрларынан неше түрлі алты каналы сан құруға болады?

Жауабы: $C_6(3, 2, 1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$.

4. Турнирде 8 команда қатысады. 1, 2, 3-орындардың бөлістірілуі бойынша қанша болжам болуы мүмкін?

Жауабы: $A_8^3 = 336$.

5. Егер $P_n = 36A_{n-1}^2$ болса, онда n нешеге тең?

Жауабы: $n = 6$.

6. $A_n^5 = C_n^4 \cdot P_5$ теңдеуін шешіңіз.

Жауабы: $n = 9$.

7. $1, 2, 3, \dots, n$ элементтерінен m -нен жасалған терулер ішінде $(2 < m < n)$, 1 және 2 элементтері бірге қатыспағандарының саны қанша?

$$\text{Жауабы: } C_n^m - C_{n-2}^{m-2} = \frac{(n-2)!(n-1+m)}{m!(n-m-1)!}.$$

8. 36 карталы жиыннан, ішінде екі тұзы бар 6 картаны неше түрлі әдіспен алуға болады?

$$\text{Жауабы: } C_{32}^4 \cdot C_4^2.$$

9. Тиын үш рет тасталады. а) Бірде-бір рет сан жағы шықпады, ә) Елтаңба жағы, сан жағынан көп рет шықты деген оқиғаларды жазыңыз.

10. Егер $A \subset B$ болса, онда $AB = A$, $A + B = B$ теңдіктерінің орындалатынын дәлелдеңіз.

11. Қазақ тілінде оқитын оқу тобындағы 25 студенттің 20-сы орыс тілін (A оқиғасы), 9-ы ағылшын тілін (B оқиғасы), 6-ы орыс және ағылшын тілдерін біледі (AB оқиғасы). Эйлер–Венн диаграммасын құрып, $\overline{AB}$, $\overline{A}B$ және $\overline{A+B}$ оқиғаларының мағынасын түсіндіріңіз.

2-дәріс. Ықтималдықтың анықтамалары

2.1. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

Нәтижелерінің саны шекті, $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ оқиғалары болатын тәжірибені қарастырайық. Бұл оқиғалар жиыны төмендегі шарттарды қанағаттандырсын деп ұйғаралық;

1. $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз болсын.
2. $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ оқиғалары жалғыз мүмкіндікті болсын.
3. $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ оқиғалары тең мүмкіндікті болсын.

Онда қарастырылып отырған тәжірибеге сәйкес элементар

оқиғалар кеңістігі $E=\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ болады. A оқиғасы E -нің бір немесе бірнеше оқиғаларынан тұратын күрделі оқиға болсын. A оқиғасына енетін элементар оқиғаларды (E -нің оқиғаларын) A оқиғасына *қолайлы* оқиғалар деп атайды.

1.5. тақырыбының 1-мысалында, элементар оқиғалардың жалпы саны екеу, ал A оқиғасына қолайлы оқиғалардың саны біреу. 2-мысалында элементар оқиғалардың жалпы саны төртеу, ал A оқиғасына қолайлы оқиғалардың саны үшеу. 3- мысалында элементар оқиғалардың жалпы саны – 8. A және B оқиғасына қолайлы оқиғалардың саны – 3, ал C оқиғасына қолайлы оқиғалардың саны – 6, т.с.с.

Сонымен, төмендегі анықтамаға келдік.

Анықтама. A оқиғасының ықтималдығы деп оған қолайлы оқиғалар санының элементар оқиғалардың жалпы санына қатынасын айтады.

Егер, тәжірибенің мүмкін болатын нәтижелерінің жалпы саны, яғни элементар оқиғалардың жалпы саны – n -ге, ал A оқиғасына қолайлы оқиғалардың саны – m -ге тең болса, онда A оқиғасының ықтималдығы $P(A)$ төмендегіше анықталады.

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (2.1)$$

Ықтималдықтың бұл анықтамасын классикалық анықтама деп атайды. Бұл анықтаманы 1749-1827 жылдарда өмір сүрген француз ғалымы Лаплас берген. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы тең мүмкіндікті оқиғалар үшін ғана анықталғандығын және бір рет ескерте кетуді жөн көрдік.

Мысал келтірер алдында, ықтималдықтарды (2.1) формуласы бойынша есептеудің төмендегі алгоритмін ұсынамыз;

1. Ықтималдығы анықталуы тиіс оқиға қандай тәжірибенің нәтижесі екендігін анықтау қажет.

2. Тәжірибенің мүмкін болатын нәтижелері, элементар оқиғалар кеңістігі түрінде жазылуы тиіс.

3. Элементар оқиғалардың саны n есептеледі.

4. Пайда болу ықтималдығы табылғалы отырған, мысалы, A оқиғасы тұжырымдалады.

5. A оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны m есептеледі.

6. (2.1) формуласын қолданып, оқиғаның пайда болу ықтималдығы есептеледі.

1-мысал. Екі ойын сүйегін лақтырғанда шығуы мүмкін болатын ұпайлардың қосындысы 7-ге тең болу оқиғасының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Пайда болу ықтималдығы табылғалы отырған А оқиғасы, ойын сүйегін екі рет лақтыру тәжірибесінің мүмкін болатын нәтижелерінен құралады. Ал, бұл тәжірибеге сәйкес элементар оқиғалар кеңістігі: $E=\{11, 12, ..., 16, 21, 22, ..., 26, ..., 61, 62, ..., 66\}$. Мұндағы элементар оқиғалардың саны – $n=36$. $A=\{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$. А оқиғасына қолайлы оқиғалардың саны – $m=6$.

Ізделініп отырған ықтималдықты (2.1) формуласын қолданып табамыз:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

2-мысал. Жәшіктегі барлық шардың саны N-ге тең. Оның ішінде М қызыл, N-M көк шар бар. Жәшіктен таңдамай К шар алынды. Сол алынған К шардың ішінде L қызыл шар болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Алынған К шардың ішінде L қызыл шар болу оқиғасын А-мен белгілейік. А оқиғасы, N шары бар жәшіктен таңдамай К шарды алудан тұратын тәжірибенің мүмкін болатын нәтижелерінен құралады. Ал тәжірибеге сәйкес элементар оқиғалар кеңістігі, N элементтен К-дан жасалған терулерден тұрады, ондай терулердің саны – C_N^K , демек $n = C_N^K$. А оқиғасына қолайлы оқиғалардағы шарлар жиынының құрамы екі түрлі:

1) К шардан L данасы қызыл шар және 2) К-L данасы көк шарлар. Мұндай комбинацияны төмендегіше жасаймыз; алдымен М қызыл шардан L -ден теру жасаймыз, олардың саны – C_M^L : одан кейін N-M көк шардан К-L-ден теру жасаймыз, олардың саны – C_{N-M}^{K-L} -ге тең. Қызыл шарлардан жасалған терулердің әрбіріне көк шарлардан жасалған терулердің

алдымен біреуін, кейіннен екіншісін, одан кейін қалғандарын бір-бірден біріктіріп шықсақ, онда A оқиғасына қолайлы барлық жағдайлар шығады. Мұндай жағдайлар саны $m = C_M^L \cdot C_{N-M}^{K-L}$ болады. (2.1) формуласын қолданып ізделінген ықтималдықты табамыз.

$$P(A) = \frac{C_M^L \cdot C_{N-M}^{K-L}}{C_N^K}.$$

Ықтималдықтың негізгі қасиеттері

Ықтималдықтың анықтамасынан оның төмендегіше қасиеттері шығады.

1. Ақиқат оқиғаның ықтималдылығы бірге тең, яғни $P(U) = P(E) = 1$, шынында да, элементар оқиғалар кеңістігінің барлық оқиғалары ақиқат оқиғаға қолайлы оқиғалар болады, яғни $m = n$. Сондықтан

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Мүмкін емес оқиғаның ықтималдылығы нөлге тең, яғни $P(V) = P(\emptyset) = 0$ шынында да, элементар оқиғалар кеңістігінің ешбір оқиғасы мүмкін емес оқиғаға қолайлы емес, яғни $m = 0$. Сондықтан

$$P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Кездейсоқ A оқиғасының ықтималдығы $0 < P(A) < 1$ теңсіздіктерін қанағаттандырады. Шынында да, кездейсоқ A оқиғасына қолайлы жағдайлар саны m

$$0 < m < n$$

теңсіздіктерді қанағаттандырады. Мұнан $\frac{0}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n}$ немесе $0 < \frac{m}{n} < 1$, яғни $0 < P(A) < 1$.

Сонымен, кез келген A оқиғасының ықтималдығы $0 \leq P(A) \leq 1$ теңсіздіктерді қанағаттандырады екен.

2.2. Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы

Мысалдан бастайық. Тиынды лақтырудан тұратын тәжірибе бірнеше рет жүргізіліп, онда "елтаңба" жағының шығу жиілігін анықтау үшін Ж.Бьюффон және К.Пирсон атты ғалымдар алған келесі кестені келтіреміз.

Тәжірибе жүргізгендер	Лақтыру саны	Елтаңбалар шығу саны	Салыстырмалы жиілік
Ж.Бьюффон	4040	2048	0,5069
К.Пирсон	12000	6019	0,5016
К.Пирсон	24000	12012	0,5005

1-анықтама. A оқиғасының пайда болу саны m -нің, тәжірибелердің жалпы саны n -ге қатынасын, A оқиғасының салыстырмалы жиілігі деп айтады.

Егер $W_n(A)$ арқылы A оқиғасының n -рет жүргізілген тәжірибедегі салыстырмалы жиілігін белгілесек, онда

$$W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

Жоғарыдағы кестеден салыстырмалы жиіліктердің 0,5 санынан ауытқуы аз екендігі, ал тәжірибелер саны қаншалықты көп болса, ауытқуы да соншалықты аз болатыны көрініп тұр.

2-анықтама. Тәжірибенің қайталану саны мейлінше көп болғанда, A оқиғасының салыстырмалы жиіліктері қандай да бір тұрақты санның маңайына топтала барса, онда бұл сан A оқиғасының ықтималдығы деп айтылады.

Бұл анықтама ықтималдықтың статистикалық анықтамасы деп аталады, ол тәжірибенің нақты нәтижесіне негізделіп берілгені себепті артықшылыққа ие, бірақ ықтималдықты нақты анықтау үшін көп санды тәжірибе өткізу қажет.

Сонымен, егер тәжірибелер саны өте көп болса, онда оқиғаның ықтималдығы оның салыстырмалы жиілігіне жуық тең болады. Ендеше, $\mu = nP$ шамасы A оқиғасының n тәжірибеде пайда болу санының орташа мәнін береді.

Классикалық анықтаманың ыңғайлы жағы, оның көмегімен, ықтималдықты тәжірибеге дейін анықтауға болады, дегенмен тең мүмкіндікті оқиға үшін ғана ол анықтама мағынаға ие.

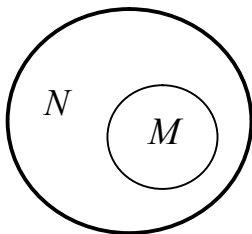
2.3. Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы

Ықтималдықтың классикалық анықтамасында тең және жалғыз мүмкіндікті үйлесімсіз оқиғалар қарастырылды. Әрі бұл оқиғалардың саны шекті еді. Ал практикада кездесетін есептердің көпшілігінде тәжірибенің нәтижелері саналмайтын жиын болып келеді. Мұндай жағдайларда ықтималдықтың классикалық анықтамасы тікелей қолданылмайды. Классикалық анықтаманың бұл кемшілігін ықтималдықтың геометриялық анықтамасы толықтырады. Геометриялық анықтама, тәуекелге лақтырылған нүктенің қандай да бір облысқа түсу ықтималдығын табуға негізделген. Ал бұл облыс түзудің, жазықтықтың, кеңістіктің қандай да бір бөлігі болуы мүмкін.

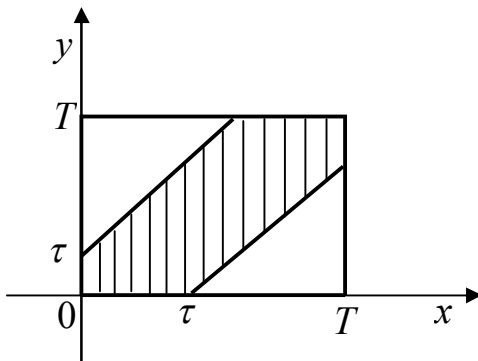
Анықтаманы жазықтық мысалында берелік: жазықтықтағы M облысы N облысының ішінде орналасқан болсын. N облысына лақтырылған нүктенің M облысына түсуін A оқиғасы деп белгілейік.

Анықтама. A оқиғасының ықтималдығы M облысының ауданы S_M -нің N облысының ауданы S_N -ге қатынасына тең (2.1-сурет), яғни

$$P(A) = \frac{S_M}{S_N}.$$



2.1-сурет



2.2-сурет

1-мысал (кездесу туралы есеп). **А** және **В** екі адам, уәделі жерде, $[0, T]$ уақыт аралығында бір-бірімен кездесуге келіскен. Уәделі жерге бұрын келгені екіншісін τ уақыт күтіп, содан кейін кететін болған. Кездесу ықтималдығын табу керек.

Шешуі: x – **А**-ның, y – **В**-ның уәделі жерге келу уақыттары болсын, онда элементар оқиғалар кеңістігі $E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$ болады. Элементар оқиғалар кеңістігі E -қабырғасы T -ға тең квадрат (2.2-сурет). **А** мен **В**-ның кездесуі оқиғасын C мен белгілейік, онда C оқиғасы жүзеге асуы үшін $|x - y| \leq \tau$ теңсіздігі орындалуы қажет. Яғни,

$$C = \{(x, y) : |x - y| \leq \tau\}.$$

Енді кездесу өңірі болатын облысты, яғни C оқиғасын жазықтықта кескінделік. Ол үшін $|x - y| \leq \tau$ теңсіздікті қанағаттандыратын x және y -тің мәндерін табу керек:

$$|x - y| \leq \tau \Rightarrow \begin{cases} x - y \geq -\tau \\ x - y \leq \tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x + \tau, \\ y \geq x - \tau. \end{cases}$$

Соңғы теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын (x, y) нүктелер жиыны 2.2-суретте штрихталып көрсетілген.

Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы бойынша C оқиғасының ықтималдығы штрихталған фигураның ауданын квадраттың ауданына бөлгенге тең, яғни

$$P(C) = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(\frac{T - \tau}{T} \right)^2.$$

Дербес жағдайда, кездесуге уәделескен уақыты $T=1$ сағат, ал бұрын келгенінің күту уақыты $\tau=15$ минут десек, онда кездесу ықтималдығы төмендегідей болады:

$$P(C) = 1 - \frac{(1 - \frac{1}{4})^2}{1} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары.

1. Оқиғаның ықтималдығы деген не?
2. Ықтималдықтың классикалық анықтамасын беріңіз.
3. Классикалық анықтаманы қолданып ықтималдықты есептеу алгоритмін баяндаңыз.
4. Ықтималдықтың негізгі қасиеттерін жазыңыз.
5. Оқиғалардың салыстырмалы жиілігі деген не?
6. Ықтималдықтың статистикалық анықтамасын беріңіз.
7. Ықтималдықтың геометриялық анықтамасын беріңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Шыққан ұпайлардың қосындысы 11 болатын оқиғамен қосындысы 4 болатын оқиғалардың қайсысының ықтималдығы көп болады?

Шешуі. Элементар оқиғалардың жалпы саны 36-ға тең. Шыққан ұпайлардың қосындысы 11 болатын оқиғаны A -мен, ал 4 болатын оқиғаны B -мен белгілесек, онда A -ға қолайлы оқиғалар саны екеу, яғни 65, 56, ал B -ға қолайлы оқиғалардың саны үшеу, олар: 13, 31, 22.

Сонымен,

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Демек, B оқиғасының ықтималдығы көп екен.

2-мысал. Бір жылда туылған 25 студенттен тұратын оқу тобының студенттері, жылдың әртүрлі күндерінде туылған болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. 25 студенттің әрбіреуі, жылдың 365 күнінің кез келген күнінде туылуы мүмкін. Бұл жағдайда элементар оқиғалар кеңістігіндегі оқиғалардың жалпы саны 25^{365} -ке тең. 25 студенттің әрбірінің әртүрлі күнде туылуы оқиғасын A -мен белгілесек, онда A -ға қолайлы жағдайлардың саны A_{365}^{25} . Сонымен, A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = \frac{A_{365}^{25}}{25^{365}}.$$

3-мысал. Бірнеше рет жүргізілген тәжірибенің нәтижесінде мергеннің нысанаға атқан 200 оғының 190-ы тиетіндігі анықталды. Мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығын табыңыз. Мерген нысанаға 1000 рет атқанда қаншасы тиюі мүмкін?

Шешуі. Ықтималдықтың статистикалық анықтамасын қолданамыз.

$$P = \frac{190}{200} = 0,95.$$

1000 рет атқанда нысанаға тиюі санының орташа мәні:

$$\mu = 1000 \cdot 0,95 = 950.$$

4-мысал. Абонент телефон қоңырауын бір сағат бойы күтеді. Осы сағаттың соңғы 20 минөтінде қоңырау шалынуы ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Соңғы 20 минөтте қоңырау шалынуы оқиғасын A -мен белгілейік. Элементар оқиғалар кеңістігі ретінде ұзындығы

60 бірлікке тең кесіндіні аламыз. Онда A оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар, кесіндінің соңғы үштен бір бөлігінде орналасқан болады. Олай болса, ықтималдықтың геометриялық анықтамасы бойынша:

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

5-мысал. x және y екі нақты санның кез келген мәндері таңдалды, мұндағы $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. $y^2 \leq x$ болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Элементар оқиғалар кеңістігі қабырғаларының ұзындығы бірге тең квадрат болады. $y^2 \leq x$ болатын оқиғаны A -мен белгілейік. A оқиғасына қолайлы жағдайлар $y = 0$, $y = 1$, $y^2 = x$ функциялардың графиктерімен қоршалған фигурада орналасқан. Ол фигураның ауданы

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Квадраттың ауданы бірге тең болғандықтан:

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары.

1. Ойын сүйегін лақтырғанда 2-ге бөлінетін ұпайдың шығу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы : 1/2.

2. Нысанаға екі рет оқ атылды; C_0 – екеуі де тимеу оқиғасы; C_1 – біреуінің тиюі оқиғасы; C_2 – екеуінің де тиюі оқиғасы. Осы оқиғалар толық жиын құрай ма ?

Жауабы: құрайды.

3. Жәшікте 3 ақ, 7 қара шар бар. Таңдамай 2 шар алынды. Екеуінің де ақ шар болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 1/15.

4. Жәшікте 5 ақ 6 қара шар бар. Таңдамай 5 шар алынды. Алынған шарлардың 2-і ақ, 3-і қара болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 100/231.

5. Екі ойын сүйегі тасталды. Шыққан ұпайлар қосындысы 8, айырмасы 4 болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 1/18.

6. Бірдей 5 карточкада 1,2,3,4,5 цифрлары жазылған. Оларды жақсылап араластырып, содан кейін бір-бірден алып бір қатарға қойғанда соңғы екі цифрының қосындысы жұп сан болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 1/15.

7. Натурал сандар қатарының алғашқы 4000 санының 551-і жай сан. Жай сандардың болу жиілігін табыңыз.

Жауабы: 0,13775.

8. 1000 жаңа туған баланың 517-сі ұл болды. Ұл баланың туу жиілігі қандай?

Жауабы: 0,517.

9. Екі ойын сүйегі тасталады. Шыққан ұпайлар қосындысы 3-ке бөлінетін сан болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 1/3.

10. Бірдей бес карточкада Ә, Д, Е, М, І әріптері жазылған. Оларды жақсылап араластырып, содан кейін бір-бірден алып, бір қатарға қойғанда ӘДЕМІ сөзінің шығу ықтималдығы қандай?

Жауабы : 1/120.

11. x және y екі нақты санның кез келген мәндері таңдалады, мұндағы $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. $x^2 < y$ болуының ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $\frac{1}{3}$.

3 дәріс. Ықтималдықтарды қосу теоремалары

3.1. Үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасы

A және B оқиғаларының ең болмағанда біреуі жүзеге асқанда ғана пайда болатын оқиға A және B оқиғаларының қосындысы деп аталатыны белгілі.

A , B оқиғалары үйлесімсіз және олардың пайда болу ықтималдықтары белгілі болсын делік.

Теорема. A және B екі үйлесімсіз оқиға қосындысының ықтималдығы бұл оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысына тең, яғни

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \quad (3.1)$$

Дәлелдеуі. Мынадай белгілеулер енгізейік.

n - тәжірибедегі элементар оқиғалардың жалпы саны.

m - A оқиғасына қолайлы оқиғалар саны.

k – B оқиғасына қолайлы оқиғалар саны. A және B оқиғалары үйлесімсіз болғандықтан, A жүзеге асса B пайда болмайды және керісінше, сондықтан $A+B$ оқиғасына қолайлы оқиғалардың саны $m+k$. Онда,

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

Сонымен, (3.1) формуласы дәлелденді.

Салдар. Саны шекті, қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар қосындысының ықтималдығы бұл оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысына тең, яғни

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n).$$

Дәлелдеуі. Қос-қостан үйлесімсіз үш оқиға, A_1, A_2, A_3 -ті алайық. $A_1 \cdot A_2, A_1 \cdot A_3, A_2 \cdot A_3$ – мүмкін емес оқиғалар. Ендеше, (A_1+A_2) оқиғасымен A_3 оқиғасы үйлесімсіз. (3.1) формуласын қолданамыз.

$$P(A_1+A_2+A_3)=P[(A_1+A_2)+A_3]=P(A_1+A_2)+P(A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

Жалпы жағдай математикалық индукция әдісімен дәлелденеді.

1-мысал. Нысана үш зонаға бөлінген. Атқыштың 1, 2, 3 – зоналарға тигізу ықтималдықтары, сәйкесінше 0,15; 0,25; 0,5. Атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. A_1 – 1-зонаға тигізу оқиғасы; A_2 – 2-зонаға тигізу оқиғасы; A_3 – 3-зонаға тигізу оқиғасы. $A=A_1+A_2+A_3$ – нысанаға тигізу оқиғасы.

$$P(A_1)=0,15; P(A_2)=0,25; P(A_3)=0,5;$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0,15+0,25+0,5=0,9.$$

2-мысал. Аудандық кеңеске 20 депутат сайланған. Бұлардың 15-нің жасы 30-дан үлкен, ал 9-ның жасы 40-тан үлкен. Жеребемен сайланған төрағаның жасы 30-дан немесе 40-тан үлкен болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. B_1 – төрағаның жасы 30-дан үлкен болу оқиғасы.

B_2 – төрағаның жасы 40-тан үлкен болу оқиғасы.

A – төрағаның жасы 30-дан немесе 40-тан үлкен болу оқиғасы.

$$P(B_1)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}; P(B_2)=\frac{9}{20}.$$

Егер, $A=B_1+B_2$ деп, ықтималдықтарды қосу теоремасын қолдансақ, онда мынадай

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{15}{20}+\frac{9}{20}=\frac{24}{20}=1,2 > 1$$

қате, мағынасы жоқ нәтижеге ие боламыз. Мұның себебі, есептің мағынасын дұрыс түсініп алмай тұрып, ықтималдықтарды қосу теоремасын қолдануымызда. Жасы 40-тан үлкен адамдардың жасы 30-дан да үлкен болады ғой, яғни, $B_2 \subset B_1$, сондықтан $A = B_1 + B_2 = B_1$

Сонымен, ізделінді ықтималдық $P(A)=P(B_1)=15/20=3/4$.

3.2. Оқиғалардың толық жиынының ықтималдығы

Теорема. Егер қос-қостан үйлесімсіз $A_1, A_2, \dots, A_n$ кездейсоқ оқиғалары толық жиын құратын болса, онда олардың ықтималдықтарының қосындысы бірге тең.

$$P(A_1)+P(A_2)+ \dots +P(A_n)=1. \quad (3.2)$$

Дәлелдеуі. $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары толық жиын құрғандықтан, олардың ең болмағанда біреуінің жүзеге асуы ақиқат оқиға, онда

$$P(A_1+ A_2+ \dots + A_n)=1.$$

Үйлесімсіз оқиғаларды қосу теоремасына сүйенсек, (3.2) келіп шығады.

3-мысал. Университеттің кеңес пункті А, В және С қалаларынан бақылау жұмыстары жазылған пакеттер қабылдайды. А қаласынан алу ықтималдығы 0,7, В қаласынан қабылдау ықтималдығы 0,2-ге тең. Келесі пакеттің С қаласынан қабылдау ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Пакет А қаласынан алынады, пакет В қаласынан алынады, пакет С қаласынан алынады деген оқиғалар толық жиын құрады, сондықтан (3.2) формуласынан пайдалансақ $0,7+0,2+P=1$, $P=1-0,9=0,1$. Сонымен кезекті пакетті С қаласынан қабылдау ықтималдығы 0,1 екен.

3.3. Қарама-қарсы оқиғалардың ықтималдығы

Толық жиын құрайтын екі жалғыз мүмкіндікті оқиғаларды қарама-қарсы оқиғалар деп атап, оларды A және $\bar{A}$ әріптерімен белгілеу келісілген еді.

Теорема. Қарама-қарсы оқиғалар қосындысының ықтималдығы бірге тең:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (3.3)$$

Дәлелдеуі. Қарама-қарсы оқиғалар үйлесімсіз және толық жиын құрайды. Ал толық жиын құрайтын оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысы, (3.2) формуласы бойынша, бірге тең.

4-мысал. Ойын сүйегін бір рет лақтырғанда $A_{жс}$ – жұп ұпайдың шығуы ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Тақ ұпай шығу оқиғасын $\bar{A}_{жс}$ -мен белгілейік. $A_{жс}$ мен $\bar{A}_{жс}$ оқиғалары қарама-қарсы болғандықтан, (3.3) формуласы бойынша

$$P(A_{жс}) = 1 - P(\bar{A}_{жс}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Бұл мысалда $A_{жс}$ мен $\bar{A}_{жс}$ оқиғалары тең мүмкіндікті және толық жиын құрайды, сондықтан олардың ықтималдықтары $\frac{1}{2}$ -ге тең. Көп жағдайларда, тең мүмкіндікті болмаған қарама-қарсы оқиғалар ұшырасады.

5-мысал. Күз айларында Алматыда күннің жауын-шашынды болу ықтималдығы 0,75-ке тең. Күннің ашық болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Күннің шауын-шашынды немесе ашық болу оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар, егер олардың ықтималдықтарын сәйкесінше p және q -мен белгілесек, онда

$$p + q = 1.$$
$$q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Ескерту. Қандай да бір A оқиғасының ықтималдығын табуға байланысты көптеген есептерді шешкенде, алдымен $\bar{A}$ оқиғасының ықтималдығын тауып алып, одан кейін (3.3) формуласы бойынша A -ның ықтималдығын табу ыңғайлырақ.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары.

1. Қандай оқиғаны оқиғалардың қосындысы деп атайды?
2. Қандай оқиғаны оқиғалардың көбейтіндісі деп атайды?
3. Үйлесімді оқиғалардың анықтамасын беріңіз.
4. Үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасын жазыңыз.
5. Толық жиын құратын үйлесімсіз оқиғалардың қосындысының ықтималдығы неге тең?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Екі ойын сүйегі тасталды. Шыққан ұпайлар қосындысы 11-ден кем болмауы оқиғасының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Тәжірибенің мүмкін болатын нәтижелерінің саны, яғни $n = 36$. Ал шыққан ұпайлар қосындысының S -тің 11-ден кем болмау жағдайлары мынадай: $(5,6), (6,5), (6,6)$. Ендеше,

$$P(S \geq 11) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}.$$

2-мысал. Жәшікте 4 жасыл, 5 көк, 6 қызыл және 10 ақ шар бар. Таңдамай алынған бір шардың түсті болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. A - алынған шар жасыл, B - көк, C - қызыл шар болу оқиғалары болсын. Алынған шардың түсті болу оқиғасын D -мен белгілелік. A, C, B -лар үйлесімсіз болғандықтан, $D = A + B + C$ теңдікке (3.1) формуласын қолданамыз:

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{4}{25} + \frac{5}{25} + \frac{6}{25} = \frac{3}{5}.$$

3-мысал. 36 картадан таңдамай 3 карта алынды. Алынған карталардың ең болмағанда біреуінің тұз болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Алынған карталардың ең болмағанда біреуінің тұз болу оқиғасын $\bar{A}$ -мен белгілейік. Онда $\bar{A}$ оқиғасы, A -ға қарама-қарсы, яғни алынған үш картаның бірде-біреуі тұз емес деген оқиға болады. (3.3) формуласын қолданамыз.

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = \frac{248}{357},$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{248}{357} = \frac{109}{357}.$$

4-мысал. Студент, бағдарламадағы 25 сұрақтың 20-ын біледі. Емтихан билетіндегі 4 сұрақтың 3-тен кем емес сұрағына жауап берген студент емтиханнан өтті деп есептеледі. Студенттердің емтиханнан өту ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. A -мен студенттің емтиханнан өту оқиғасын белгілейік. B -студент үш сұраққа жауап береді, C - төрт сұраққа жауап береді, – деген оқиғалар болсын. Онда

$$A = B + C.$$

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{C_{20}^3 \cdot C_5^1}{C_{25}^4} + \frac{C_{20}^4}{C_{25}^4} = \frac{2109}{2530} \approx 0,8336.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары.

1. Екі ойын сүйегі тасталды. A – шыққан ұпайлар қосындысы 2-ге тең, ал B – 3-ке тең оқиғалары болсын. $P(A+B)$ -ны табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{1}{12}.$$

2. Жәшікте 8 ақ 12 қызыл шар бар. Таңдамай үш шар алынған. Кемінде біреуінің ақ шар болу ықтималдығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } 1 - \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = 0,8.$$

3. Жәшікте 8 ақ 12 қызыл шар бар. Таңдамай алты шар алынған. Бірден көп емес ақ шар болу ықтималдығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{C_{12}^6 + C_{12}^5 \cdot 8}{C_{20}^6} = 0,187.$$

4. Жәшікте 8 ақ 12 қызыл шар бар. Таңдамай екі шар алынған. Алынған шарлардың бір түсті болу ықтималдығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \frac{C_8^2 + C_{12}^2}{C_{20}^2} = 0,494.$$

5. Жәшікте 8 қызыл, 10 жасыл, 12 көк шар бар. Таңдамай үш шар алынған. Кемінде екеуі бір түсті болу ықтималдығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } 1 - \frac{C_8^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{12}^1}{C_{30}^3} = 0,763.$$

6. 52 карталық жиыннан таңдамай 4 карта алынды. Алынған карталардың төртеуі де қарғадан, немесе атаңадан, немесе түйеден, немесе кірпіштен болу ықтималдығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } 0,0106.$$

7. Оқу тобында 25 студент бар, оның жетеуі үздік оқиды. Тізім бойынша, таңдамастан 4 студент алынды. Осы алынған 4 студенттің ең болмағанда біреуі үздік оқитын болу ықтималдығы қандай?

$$\text{Жауабы: } 0,758.$$

8. 36 карталық жиыннан қалай болса солай 3 карта алынған. Алынған карталардың екеуі тұз болу ықтималдығы қандай?

$$\text{Жауабы: } 0,0269.$$

9. Бір партия тауарда 10 бөлшек бар, оның сегізі стандартты. Таңдамай алынған 2 бөлшектің кемінде біреуі стандартты болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $\frac{44}{45}$.

4-дәріс. Ықтималдықтарды көбейту теоремалары

4.1. Тәуелсіз және тәуелді оқиғалар

Ықтималдықтарды көбейту теоремаларын қарастырудан алдын тәуелсіз және тәуелді оқиғалар ұғымын енгізіп алайық.

1-анықтама. Егер A оқиғасының ықтималдығы B оқиғасының пайда болғанына, немесе пайда болмағанына қарай өзгермейтін болса, онда A оқиғасы B оқиғасынан тәуелсіз деп аталады.

1-мысал. Екі тиын тасталады. Біріншісінде "елтаңба" немесе "сан" жағының шығуы екіншісінде "елтаңба" немесе "сан" жағының шығуына ешқандай әсер етпейді. Демек, бірінші тиынның "елтаңба" жағының шығуы- A оқиғасы, екінші тиынның "елтаңба" жағының шығуы B оқиғасынан тәуелсіз және керісінше, B оқиғасы A оқиғасынан тәуелсіз, яғни, A, B өзара тәуелсіз оқиғалар.

2-мысал. 36 карталық жиыннан бір карта таңдамай алынған. A - алынған картаның тұз болуы оқиғасы, ал B - алынған картаның қызыл түсті болуы оқиғасы. A және B оқиғалары өзара тәуелсіз.

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}; \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

2-анықтама. Егер A оқиғасының ықтималдығы B оқиғасының пайда болғанына немесе болмағанына байланысты өзгертін болса, онда A оқиғасы B оқиғасына тәуелді деп аталады.

3-мысал. Кәсіпорынның жасайтын бұйымдарынан кез келген бір бұйым таңдамай алынған. A – алынған бұйым ақаусыз, B – алынған бұйым 1– сортты. Онда B оқиғасы жүзеге

асса, А оқиғасы міндетті түрде пайда болады. Сондай ақ $\bar{A}$ оқиғасы жүзеге асса, В оқиғасы пайда болмайды. Демек А,В және $\bar{A}$, В оқиғалары арасында тәуелділік байқалады.

4-мысал. Ойын сүйегі тасталады. А – жұп ұпайлардың шығуы оқиғасы. В – үштен үлкен ұпайлардың шығуы оқиғасы. Мұнда А мен В оқиғалары арасында тәуелділік бар. В оқиғасы пайда болды деп, А-ның ықтималдығын есептесек: $P(A) = \frac{2}{3}$, егер ешбір қосымша мәліметсіз А оқиғасының ықтималдығын есептесек: $P(A)=3/6=1/2$.

1 - сұрақ. Үйлесімсіз оқиғалар тәуелді ме немесе тәуелсіз бе?

Жауабы: тәуелді, себебі үйлесімсіз оқиғалардың кез келген біреуі пайда болса, онда қалғандарының пайда болу ықтималдығы нөлге айналады.

2 - сұрақ. Толық жиын құратын оқиғалар тәуелді ме, тәуелсіз бе?

Жауабы: Тәуелді, себебі толық жиын құратын оқиғалардың біреуінен басқасы пайда болмаса, онда сол біреуінің пайда болуы ықтималдығы бірге тең болады.

3-сұрақ. Тең мүмкіндікті оқиғалар тәуелді ме немесе тәуелсіз бе?

Жауабы: тәуелді болуы да, тәуелсіз болуы да мүмкін.

4.2. Тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасы

Теорема. Бір уақытта жүзеге асатын екі тәуелсіз оқиғаның ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең.

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B) \quad (4.1)$$

Басқаша айтқанда, тәуелсіз екі оқиғаның көбейтіндісінің ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең.

Дәлелдеуі. Бұл теореманың дәлелдеуін келесі мысалда жүргізелік. Екі жәшік берілген болып, олардың 1-де n_1 , ал 2-де n_2 шар бар. 1-жәшіктегі шарлардың m_1 -і қызыл, қалғандары

көк, ал 2-жәшіктегі шардың m_2 -і қызыл, қалғандары көк. Әрбір жәшіктен таңдамастан бір-бірден шар алынды. Алынған шарлардың қызыл болуы ықтималдығын табалық.

A – 1-жәшіктен алынған шардың қызыл болуы оқиғасы, ал B – 2-жәшіктен алынған шардың қызыл болуы оқиғасы болсын. Онда:

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n_2}.$$

Әрбір жәшіктен бір-бірден шар алу тәжірибесінің мүмкін болатын нәтижелерінің саны – $n_1 n_2$. Екі жәшіктен де алынған шардың қызыл болуы оқиғасына, яғни AB -ға қолайлы жағдайлардың саны – $m_1 m_2$. Онда:

$$P(AB) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B).$$

Сонымен, теорема дәлелденді. Бұл теореманы жалпы жағдайда жазу үшін келесі ұғымды енгіземіз.

3-анықтама. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының кез келген біреуі қалғандарының бәрінен немесе олардың қандай да бір бөліктерінің кез келген комбинациясынан тәуелсіз болса, онда $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары, жиынтығы тәуелсіз оқиғалар деп аталады.

Мысалы, A_1, A_2 және A_3 оқиғаларының жиынтығы тәуелсіз болуы үшін A_1 және A_2 , A_1 және A_3 , A_2 және A_3 , $A_1 A_2$ және A_3 , $A_1 A_3$ және A_2 , $A_2 A_3$ және A_1 оқиғалары тәуелсіз болуы тиіс. Басқаша айтқанда, $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының жиынтығы тәуелсіз болуы үшін олардың тек қана қос-қостан тәуелсіз болуы жеткіліксіз.

Салдар. Жиынтығы тәуелсіз болатын бірнеше оқиғалардың көбейтіндісінің пайда болу ықтималдығы, олардың ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (4.2)$$

1-мысал. Апатты хабарлау үшін, бір-біріне тәуелсіз жұмыс істейтін екі сигналдаушы орнатылған. Апат кезінде, бірінші сигналдаушының жұмыс істеу ықтималдығы 0,95-ке, ал екіншінікі 0,9-ға тең. Апат кезінде екі сигналдаушының да жұмыс істеуінің ықтималдығын табу керек.

Шешуі. А оқиғасы – апат кезінде бірінші сигналдаушы жұмыс істейді. В оқиғасы – екінші сигналдаушы жұмыс істейді. Бұл оқиғалардың ықтималдықтары $P(A)=0,95$; $P(B) = 0.9$.

А мен В оқиғалары өзара тәуелсіз, сондықтан олардың бірге пайда болу ықтималдығын (4.1) бойынша табамыз:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B) = 0,95 \cdot 0,9=0,855.$$

Кейбір, бірнеше тәуелсіз, біртекті оқиғалардың ықтималдықтарын табу есептерін шешкенде, қосу және көбейту теоремаларының комбинацияларын қарастыру қажет болады. Мұндай есептерде сұрақтар былайша қойылады:

а) бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы (мысалы, лотерея билеттері бар екі адам үшін бір ұтыс болса; үш атқыш нысанаға бір-бір реттен оқ атқаннан кейін нысанада тек қана бір оқтың тигені белгілі болса, тағы басқалар), екі оқиғаның пайда болу ықтималдығы (қайсы екеу екені атап көрсетілмейді);

ә) кемінде бір немесе екі оқиғаның пайда болу ықтималдығы.

Бірінші топтың есептерін шешкенде, бірнеше тәуелсіз оқиғадан біреуінің пайда болуы қалғандарының пайда болмауымен үйлестіріледі және мұндай үйлестіру қарастырылып жатқан оқиғалардың әрбірімен орындалады. Мысалы, А және В оқиғасы қарастырылса, онда $A\bar{B}$ немесе $B\bar{A}$ үйлестірулер, ал А,В,С үш оқиға болса, онда $A\bar{B}\bar{C}$, немесе $B\bar{A}\bar{C}$, немесе $C\bar{A}\bar{B}$ үйлестірулер сәйкес келеді. Егер үш А,В,С оқиғадан екеуінің пайда болуы қарастырылса, онда күрделі оқиғалар $AB\bar{C}$, немесе $A\bar{B}C$, немесе $\bar{A}BC$ түрінде өрнектеледі.

2-мысал. Студент керек формуланы 3 кітаптан іздейді. Формуланың бірінші, екінші және үшінші кітаптарда болу ықтималдықтары, сәйкесінше 0,6; 0,7; 0,8-ге тең. Келесі

оқиғалардың ықтималдықтарын есептеңіздер. Формула: а) үш кітапта да бар; ә) тек бір кітапта ғана бар; б) тек екі кітапта бар.

Шешуі. А оқиғасы-формула 1-кітапта бар, В оқиғасы – 2 - кітапта бар, С оқиғасы – 3 - кітапта бар. Олардың ықтималдықтары $P(A)=0,6$; $P(B)=0,7$; $P(C)=0,8$. А,В,С оқиғаларына қарама-қарсы оқиғалардың ықтималдықтары: $P(\bar{A}) = 0,4$; $P(\bar{B})=0,3$; $P(\bar{C})=0,2$.

а) Керек формула кітаптардың үшеуінде де бар болу ықтималдығын, тәуелсіз оқиғалар ықтималдықтарын көбейту формуласы (4.2) бойынша табамыз:

$$P(ABC)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

ә) Керек формула тек бір кітапта ғана бар. Келесі күрделі оқиғалардың пайда болуы мүмкін.

$$A \bar{B} \bar{C}, \bar{A} B \bar{C}, \bar{A} \bar{B} C.$$

Бұл оқиғалар үйлесімсіз, сондықтан оларға үйлесіміз оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасы қолданылады. Ізделінді ықтималдық:

$$P = P(A \bar{B} \bar{C}) + P(\bar{A} B \bar{C}) + P(\bar{A} \bar{B} C).$$

Осы ықтималдықтарды есептейміз. А, В, С, өзара тәуелсіз оқиғалар, сондықтан оларға қарама-қарсы $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ оқиғаларда тәуелсіз, ендеше бұл оқиғалардың әртүрлі комбинациялары да тәуелсіз болады, онда бұларға көбейту теоремасы қолданылады.

$$P(A\bar{B}\bar{C})=P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2=0,036;$$

$$P(\bar{A}B\bar{C})=P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2=0,056;$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8=0,096.$$

Ізделінді ықтималдық:

$$P=0,036 + 0,056 + 0,096 = 0,188.$$

б) Керек формула тек екі кітапта бар, бұл жағдайда мынадай күрделі оқиғалар болуы мүмкін:

$$ABC, \overline{ABC}, \overline{ABC}$$

Олардың ықтималдықтары:

$$\begin{aligned} P &= P(ABC) + P(\overline{ABC}) + P(\overline{ABC}) = \\ &= 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,372. \end{aligned}$$

Екінші топтың есептері келесі тақырыпта қарастырылады.

4.3. Кем дегенде бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы

Тәжірибе нәтижесінде жиынтығы тәуелсіз болатын n оқиға пайда болуы, немесе олардың кейбіреуі ғана пайда болуы мүмкін. Дербес жағдайда тек бір оқиға пайда болуы, немесе бірде біреуі пайда болмауы мүмкін. Осы оқиғалардың кем дегенде біреуінің пайда болу ықтималдығын қалай табуға болады? Мысалы, тәжірибе нәтижесінде 3 оқиға пайда болуы мүмкін болса, онда олардың кем дегенде біреуінің пайда болуы, не бір оқиғаның, не екі оқиғаның, немесе үш оқиғаның пайда болуын көрсетеді. Мұндай жағдайда оқиғалардың толық жиынына қарама-қарсы оқиғалар ұғымын пайдаланған қолайлырақ. Ол мына теоремамен анықталады.

Теорема. Жиынтығы тәуелсіз болатын $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының кем дегенде біреуінің пайда болу ықтималдығы $P(A)$ 1 санымен $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$ оқиғалардың ықтималдықтарының көбейтіндісінің айырымына тең:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \dots q_n. \quad (4.3)$$

Дәлелдеуі. $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларынан кем дегенде біреуінің пайда болуы оқиғасын A мен белгілейік. Сонда A мен $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n$ (бірде-біреуі пайда болмады) оқиғалары қарама-қарсы, онда олардың ықтималдықтарының қосындысы бірге тең:

$$P(A) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = 1.$$

Көбейту теоремасынан пайдалансақ:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdots q_n \text{ шығады.}$$

Дербес жағдай. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының пайда болу ықтималдықтары бірдей, P -ға тең болса, онда осы оқиғалардың кем дегенде біреуінің пайда болу ықтималдығы $P(A)$ мына формуламен есептеледі:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (4.4)$$

1-мысал. Электр желісі бір – бірімен тәуелсіз істейтін үш элементтің тізбегінен тұрады. Элементтердің істемей қалу ықтималдықтары сәйкес: $P_1=0,1$; $P_2=0,15$; $P_3=0,2$. Желіде ток болмай қалу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. A -электр желісінде ток болмау оқиғасы. Желі тізбектеп қосылған элементтерден тұратындықтан, элементтердің біреуі істемей қалса, онда желіде ток болмайды. (4.3) формуласын қолданамыз.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,15) \cdot (1 - 0,2) = 0,388.$$

2-мысал. Астықтың бір дәнінен 50-ден кем емес дәні бар масақ өсіріп шығару ықтималдығы 0,6-ға тең. Тәуекелден алынған 10 дәннен, ішінде 50-ден кем болмайтын дәні бар ең болмағанда бір масақ өсіп шығу ықтималдығы қандай?

$$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0,4^{10} \approx 0,9999.$$

4.4. Шартты ықтималдық

Кез келген оқиға белгілі бір шарттар жиынтығы орындалғанда ғана пайда болуы немесе пайда болмауы мүмкін екендігін байқадық. Бірақ, кейбір жағдайларда, аталған шарттар жиынтығына қосымша, А оқиғасының пайда болу ықтималдығы басқа бір В оқиғасының пайда болғанына немесе болмағанына байланысты болатыны белгілі. Мұндай жағдайда А оқиғасы В оқиғасына тәуелді дедік.

Анықтама. А оқиғасының В оқиғасы пайда болды деген шарттағы ықтималдығы шартты ықтималдық деп аталады және былай белгіленеді.

$$P(A/B) \text{ немесе } P_B(A).$$

Айталық, тәжірибе n рет жүргізілген болып, олардан n_1 -інде В оқиғасы пайда болсын. Ал сол n_1 -дің m_1 -інде А оқиғасы да пайда болсын. $P(A/B)$ ықтималдықты есептеу үшін n_1 тәжірибе жүргізілген деп қабылдаймыз, себебі алғашқы шарттар жиынтығына В оқиғасы пайда болды деген шартта қосылды, сондықтан n -нің ішіндегі В пайда болмаған жағдайларды алып тастаймыз. Онда:

$$P(A/B) = m_1/n_1.$$

Мысал. Бірінен кейін бірі екі тиын тасталады. А кемінде бір елтаңбаның шығуы оқиғасы, В кемінде бір сан жағының шығуы оқиғасы. Элементар оқиғалардың жалпы саны 4: ЕС, ЕЕ, СЕ, СС. А оқиғасының шартсыз ықтималдығы $P(A) = 3/4$; ал А оқиғасының В оқиғасы пайда болды деген шарттағы ықтималдығы

$$P(A/B) = 2/3.$$

Ескерту. Шартты ықтималдық ұғымы тек тәуелді оқиғаларға ғана тән, егер екі оқиға тәуелсіз болса, онда олардың ықтималдықтары да бірін-бірі өзгертпейді, яғни $P_B(A) = P(A)$, $P_A(B) = P(B)$.

4.5. Тәуелді оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасы

A және B оқиғалары тәуелді, ал олардың ықтималдықтары $P(B)$, $P_A(A)$ белгілі болсын. Осы оқиғалардың бірге пайда болу ықтималдығын, яғни екі оқиғаның көбейтіндісінің ықтималдығын табу керек.

Теорема. Екі оқиғаның бірге пайда болуының (көбейтіндісінің) ықтималдығы біреуінің ықтималдығымен екіншісінің біріншісі пайда болды деген шарттағы ықтималдығының көбейтіндісіне тең болады.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ немесе } P(AB) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (4.5)$$

Дәлелдеуі. n -мүмкін болатын элементар жағдайлардың жалпы саны, m – A оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны, ал k – AB оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны болсын. Онда

$$P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(AB) = \frac{k}{n}.$$

Бірақ, егерде A оқиғасы пайда болған болса, онда оған қолайлы жағдайлардың саны m , B/A оқиғасы үшін мүмкін болатын элементар оқиғалардың жалпы саны болып, оның ішіндегі k -сы B оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны болады. Ендеше:

$$P_A(B) = \frac{k}{m};$$

$$\text{Сонымен, } P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A) \cdot P_A(B).$$

Теорема дәлелденді.

Салдар. Бірнеше тәуелді оқиғалардың бірге пайда болуының ықтималдығы біріншісінің ықтималдығын қалғандарының шартты ықтималдықтарына көбейткенге тең болады. Әрбір келесі оқиғаның шартты ықтималдығы алдыңғы оқиғалар пайда болған деп есептелініп табылады. Оқиғалардың реті мұнда ешқандай рөл атқармайды. Кез келген оқиғаны бірінші деп алуға болады.

Мысал. Дүкендегі 35 мұздатқыштың 5-і жарамсыз. Таңдамай алынған екі мұздатқыштың екеуі де жарамсыз болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Бірінші алынған мұздатқыштың жарамсыз болу оқиғасын А-мен белгілейік. Онда

$$P(A) = 5/35 = 1/7.$$

Екінші алынған мұздатқыштың жарамсыз болуы оқиғасын В-мен белгілейік. Егер бірінші алынған мұздатқыш жарамсыз болған болса, онда В оқиғасының шартты ықтималдығы былай анықталады.

$$P_A(B) = 4/34 = 2/17.$$

Ізделінген ықтималдықты табу үшін (4.5) формуласын қолданамыз.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 1/7 \cdot 2/7 = 0,02.$$

Мынадай теореманы дәлелдейік:

Теорема. Егер А және В оқиғалар тәуелсіз болса, онда А және $\bar{B}$, $\bar{A}$ және В, $\bar{A}$ және $\bar{B}$ оқиғалары да тәуелсіз болады.

Дәлелдеуі. В/А және $\bar{B}$ /А оқиғалар үйлесімсіз және толық жиын құрады. Онда, $P(B/A) + P(\bar{B}/A) = 1$, мұннан $P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - P(B) = P(\bar{B})$. Себебі теореманың шарты бойынша А және В тәуелсіз, сондықтан $P(B/A) = P(B)$. Демек, $P(\bar{B}/A) = P(\bar{B})$, бұл $\bar{B}$ мен А тәуелсіз дегенді білдіреді. Қалғандары да осылай дәлелденеді.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары.

1. Қандай оқиғалар тәуелсіз деп аталады?
2. Тәуелді оқиғалар деп қандай оқиғаларды айтады?
3. Тәуелсіз және тәуелді оқиғаларға мысалдар келтіріңіз.
4. Тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасын жазыңыз.

5. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремаларының комбинациялары қалай қолданылады?

6. Кем дегенде бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы қалай есептеледі?

7. Шартты ықтималдық деп қандай ықтималдықты айтады?

8. Тәуелді оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасы қандай?

9. Үш, төрт тәуелді оқиғалардың көбейтіндісінің ықтималдығы қалай есептеледі?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

І-мысал. Нысанаға үш рет оқ атылды. Мына оқиғалардың ықтималдықтарын есептеңіз: а) тек қана біреуі тиеді; ә) тек екеуі тиеді; б) үшеуі де тиеді.

Шешуі: A_1 – бірінші атқаны тиюі, A_2 – екінші атқаны тиюі, A_3 – үшінші атқаны тиюі; $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – сәйкес қарама-қарсы оқиғалар. Бұлардың ықтималдықтары:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}; P(A_2) = \frac{1}{2}; P(A_3) = \frac{1}{2}; P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = \frac{1}{2}; P(\bar{A}_2) = \frac{1}{2}; P(\bar{A}_3) = \frac{1}{2}.$$

а) – тек қана біреуі тиеді. Ол мынадай күрделі оқиғалардың қосындысына тең: $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3; \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3; \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$.

Бұл оқиғалар үйлесімсіз, сондықтан үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасын қолданамыз.

$$P(A) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3);$$

A_1, A_2, A_3 , оқиғалары өзара тәуелсіз оқиғалар, сондықтан $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ -терде өзара тәуелсіз, ендеше бұл оқиғалардың әртүрлі комбинациялары да тәуелсіз болады, онда бұларға тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасын қолдануға болады.

$$\begin{aligned} \text{Сонымен, } P(A) &= P(A_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + \\ &+ P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

ә) В – атылған оқтың екеуі ғана тиеді. Бұл жағдайда мынадай күрделі оқиғалар болуы мүмкін:

$$A_1 A_2 \bar{A}_3; A_1 \bar{A}_2 A_3; \bar{A}_1 A_2 A_3.$$

$$P(B) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = \frac{3}{8};$$

б) С – үшеуі де тиеді. $C = A_1 A_2 A_3$.

$$P(C) = P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{8}.$$

2-мысал. Атқыштың бір рет атқанда нысанаға оқ тигізу ықтималдығы 0,3-ке тең. 0,7599-дан кем болмайтын ықтималдықпен ең болмағанда бір рет нысанаға тигізу үшін атқыш неше рет оқ ату керек?

Шешуі. А – атқыш n рет оқ атқанда кем дегенде бір рет нысанаға тигізеді. Бірінші, екінші және одан кейінгі атқандарында "нысанаға оқ тигізу" оқиғалары – жиынтығы өзара тәуелсіз оқиғалар, сондықтан олардың ықтималдықтарын есептеу үшін (4.4) формуласын қолданамыз. Есептің шарты бойынша $P(A) \geq 0,7599$; $p = 0,3$, ендеше $q = 0,7$;

$$1 - (0,7)^n \geq 0,7599; (0,7)^n \leq 0,2401; (0,7)^n \leq (0,7)^4; n = 4.$$

Сонымен, кемінде бір рет нысанаға тигізу үшін атқыш 4 реттен кем оқ атпау керек.

3-мысал. Нысанаға 4 рет атқанда кем дегенде бір рет оқ тигізу ықтималдығы 0,9984-ке тең. Бір рет атқанда нысанаға оқ тигізу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Әрбір атылған оқтың нысанаға тиюі мүмкіндігі тәуелсіз болғандықтан, (4.4) формуласы қолданылады. Мұндағы $P(A) = 0,9984$; $n = 4$.

$$\text{Ендеше } 0,9984 = 1 - q^4; q^4 = 0,0016; q = \sqrt[4]{0,0016} = \sqrt[4]{(0,2)^4} = 0,2.$$

Ізделінді ықтималдық $P = 1 - q = 1 - 0,2 = 0,8$.

4-мысал. Жәшіктегі бірдей 10 бұйымның 6-ы боялған. Таңдамай алынған 4 бұйымның да боялған болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. А – бірінші алынған бұйым боялған; В – екінші алынған бұйым боялған; С – үшінші алынған бұйым боялған; Д – төртінші алынған бұйым боялған.

$$P(A) = 6/10 = 3/5.$$

А оқиғасы пайда болды деген шарттағы В оқиғасының ықтималдығы:

$$P_A(B) = 5/9.$$

А,В оқиғалары пайда болды деген шарттағы С оқиғасының ықтималдығы:

$$P_{AB}(C) = 4/8 = 1/2.$$

Алынған үшеуі боялған болса төртіншісінің де боялған болу ықтималдығы:

$$P_{ABC}(D) = 3/7.$$

Ізделінді ықтималдық.

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) \cdot P_{ABC}(D) = 3/5 \cdot 5/9 \cdot 1/2 \cdot 3/7 = 1/14.$$

5-мысал. Жәшікте 110, 101, 011, 000 сандарымен нөмірленген төрт билет бар. Таңдамастан бір билет алынды. Егер, A_1 – алынған билет нөмірінің бірінші цифры 1 болуы оқиғасы, A_2 – екінші цифры 1 болуы, A_3 – үшінші цифры 1 болуы оқиғалары болса, онда A_1, A_2, A_3 оқиғаларын жиынтығы тәуелсіздікке зерттеңіз.

Шешуі. $P(A_1) = \frac{1}{2}$. A_1 оқиғасының A_2 оқиғасы пайда болды деген шарттағы ықтималдығы да

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{1}{2},$$

себебі, A_2 оқиғасы пайда болған болса, онда 110 нөмірлі билет немесе 011 нөмірлі билет алынған болады. Бұл жағдайда A_1 -дің

орындалуы ықтималдығы $\frac{1}{2}$ -ге тең болады. Осы сияқты

$P_{A_3}(A_1) = \frac{1}{2}$ және $P_{A_3}(A_2) = \frac{1}{2}$ теңдіктерін аламыз. Ендеше:

$$P(A_1) = P_{A_2}(A_1), P(A_1) = P_{A_3}(A_1), P(A_2) = P_{A_3}(A_2).$$

Демек, A_1, A_2, A_3 оқиғалары қос-қостан тәуелсіз екен. Бірақ, $P_{A_2 A_3}(A_1) = 0 \neq P(A_1)$, себебі, $A_2 A_3$ көбейтінді оқиғасы пайда болған болса, онда 011 нөмірлі билет алынған болады да, A_1 оқиғасы пайда болмайды. Сонымен, A_1, A_2, A_3 оқиғаларының жиынтығы тәуелсіз болмайды екен.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары.

1. А және В оқиғалары тәуелсіз. $\bar{A}$ мен $\bar{B}$ оқиғаларының тәуелсіздігін дәлелдеңіз.

2. Үш атқыш, бір-біріне тәуелсіз, нысанаға оқ атады. Бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8, екіншісінікі – 0,75, үшіншісінікі – 0,7. Кемінде біреуінің тигізу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 0,985.

3. 2-есептің шарты берілген. Тек қана біреуінің тигізу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 0,14.

4. 2-есептің шарты берілген. Үшеуінің де тиюі оқиғасының ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 0,42.

5. 2-есептің шарты берілген. Үшеуінің де тимеуі оқиғасының ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 0,015.

6. Жәшікте 12 қызыл, 8 жасыл және 10 көк шар бар. Мұқият араластырылғаннан кейін бір шар алынған. Алынған

шардың көк еместігі белгілі болса, онда оның жасыл болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $3/5$.

7. Жәшікте 12 қызыл, 8 жасыл және 10 көк шар бар. Жақсылап араластырылғаннан кейін екі шар алынған. Алынған шарлардың көк еместігі белгілі болса, онда олардың екеуінің де жасыл болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $14/95$.

8. 7-есептің шарты берілген. Алынған екі шардың екеуі екі түсті болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $48/95$.

9. Дүкендегі қол сағаттардың 40% -ы 1-заводта, 45% -ы 2-заводта, 15%-ы 3-заводта дайындалған. 1-заводта дайындалғандардың 80% -ы ақаусыз, 2-заводтағының 70% -ы ақаусыз, ал 3-заводтағының 90% -ы ақаусыз. Сатып алынған бір сағаттың ақаусыз болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $0,77$.

10. Ақшалай-заттай лотереяда 1000 билетке 24 ақшалай және 10 заттай ұтыс шығады. Бір кісі екі билет сатып алған. Мына оқиғалардың ықтималдықтарын есептеңіздер: а) ұтыс кемінде бір билетке шығады; б) бірінші билетке ақшалай, ал екінші билетке заттай ұтыс шығады.

Жауабы: а) $0,064$, ә) $0,00024$.

11. Ойын сүйегін n рет лақтырғанда кем дегенде бір рет 6-лық ұпай түсу ықтималдығы неге тең?

Жауабы: $1 - (5/6)^n$.

5-дәріс. Қосу және көбейту теоремаларының салдары

5.1. Үйлесімді оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасы

Теорема. Үйлесімді A және B оқиғаларының қосындысының ықтималдығы келесі формуламен анықталады:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (5.1)$$

Дәлелдеуі. A оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны – m , B оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны – k , ал AB оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны l болсын. Онда $A + B$ оқиғасына қолайлы жағдайлардың саны – $m + k - l$ болады. A және B оқиғаларына қолайлы жағдайлар санын қосқанда, AB оқиғасына қолайлы жағдайлар саны екі рет есептеледі, сондықтан $m + k$ -дан l алынады.

$$P(A + B) = \frac{m + k - l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

(5.1) формуласын басқа әдіспен де дәлелдеуге болады. Ол үшін оқиғаларды қосу және көбейту амалдарының 1,7,9,11 қасиеттерін қолданып, кез келген A және B оқиғалары үшін келесі үш тепе-теңдікті жазамыз:

$$A = AB + A\bar{B},$$

$$B = AB + \bar{A}B,$$

$$A + B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B.$$

$AB, A\bar{B}, \bar{A}B$ оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз (5.1 а, ә сурет), ендеше:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}), \quad (5.2)$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B), \quad (5.3)$$

$$P(A+B)=P(AB)+P(A\bar{B})+P(\bar{A}B). \quad (5.4)$$

(5.4)-нің оң жағындағы бірінші екі мүше орнына (5.2)-ні, ал $P(\bar{A}B)$ орнына оның (5.3)-дегі мәнін қоямыз.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

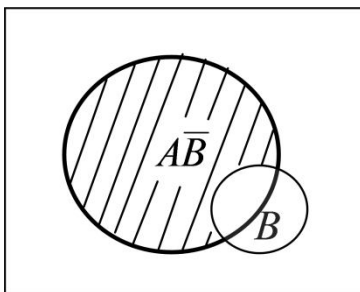
Сонымен, (5.1) формуласы дәлелденді.

Дербес жағдайда, A және B оқиғалары үйлесімсіз болғанда, (5.1)-ден (3.1) формуласы шығады.

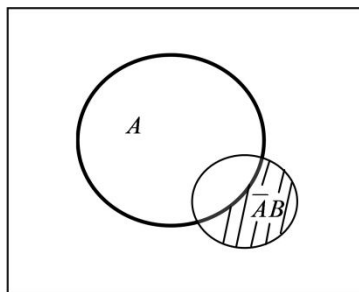
Салдар. $P(AB) \geq 0$ болғандықтан, (5.1) формуласынан, кез келген A және B оқиғалары үшін

$$P(A+B) \leq P(A)+P(B) \quad (5.5)$$

теңсіздігінің орындалатыны шығады.



а)



б)

5.1-сурет

1-мысал. Екі ойын сүйегі тасталған, олардың кемінде біреуінде 5 ұпай пайда болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. A -мен 1-сүйекте 5 ұпай түсті, B -мен 2-сүйекте 5 ұпай түсті деген оқиғаларды белгілейік. Ендеше, $P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$

A мен B оқиғалары үйлесімді. (5.1) формуласын қолданамыз.

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36} \approx 0,3056.$$

2-теорема. Кез келген A, B және C оқиғаларының кемінде біреуінің пайда болу ықтималдығы келесі формуламен анықталады:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \quad (5.6)$$

Дәлелдеуі. $B + C = D$ деп белгілеп, (5.1) формуласын қолданамыз:

$$P(A + D) = P(A) + P(D) - P(AD) \quad (5.7)$$

$P(D)$ және $P(AD) = P(AB + AC)$ ықтималдықтарына тағы бір рет (5.1) формуласын қолданамыз.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(B) + P(C) - P(BC), \\ P(AB + AC) &= P(AB) + P(AC) - P(ABC). \end{aligned}$$

Соңғы екі теңдіктегі мәндерді (5.7)-ге қойсақ, (5.6) формуласы шығады. Сонымен, 2-теорема дәлелденді.

Дербес жағдайда, егер A, B, C оқиғаларының жиынтығы тәуелсіз болса, онда A, B, C оқиғаларының кемінде біреуінің пайда болу ықтималдығын келесі формуламен есептеген ыңғайлы:

$$P(A + B + C) = 1 - P(\overline{A + B + C}) = 1 - P(\overline{A} \overline{B} \overline{C}) \quad (5.8)$$

5.2. Толық ықтималдықтың формуласы

Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремаларының салдары ретінде толық ықтималдықтың формуласы деп аталатын формуланы келтіріп шығарайық.

$H_1, H_2, \dots, H_n$ оқиғалары ықтималдықтары белгілі, толық жиын құратын, қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар (гипотезалар)

болсын. A оқиғасы осы оқиғалардың біреуі пайда болғанда ғана, шартты түрде, $P_{H_i}(A)$ ықтималдықпен пайда болсын. Басқаша айтқанда, A оқиғасы H_i оқиғаларының тек біреуімен ғана бірігіп орындалсын. Осы A оқиғасының ықтималдығын табу қажет.

Теорема. Толық жиын құратын, өзара үйлесімсіз $H_1, H_2, \dots, H_n$ оқиғаларының (гипотезаларының) біреуі пайда болғанда ғана шартты түрде пайда болатын A оқиғасының ықтималдығы осы оқиғалардың әрбіреуінің ықтималдығын A -ның оларға сәйкес шартты ықтималдығына көбейтіп қосқанға тең:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Бұл формула толық ықтималдық формуласы деп аталады. Мұндағы

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Дәлелдеуі. Шарт бойынша $A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA$ және $H_1, H_2, \dots, H_n$ оқиғалары үйлесімсіз болғандықтан, $H_1A + H_2A + \dots + H_nA$ оқиғалары да үйлесімсіз болады. Онда ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары бойынша

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1A + H_2A + \dots + H_nA) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(H_iA) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \end{aligned}$$

Осыны дәлелдеу талап етілген еді.

Мысал. Екі жәшіктің біріншісінде a – ақ, b – қара, екіншісінде c – ақ, d – қара шар болсын. Бірінші жәшіктен тандамай үш шар алып екіншіге салынған ($a \geq 3, b \geq 3$), шарлар мұқият араластырылғаннан кейін екінші жәшіктен бір шар алынады. Соңғы шардың ақ түсті болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. А – екінші жәшіктен алынған шардың түсі ақ. Мынадай екі болжам (гипотеза) жасаймыз; B_1 – екіншіден соңғы алынған шар 1 – жәшікке тиісті; B_2 – екіншіден соңғы алынған шар 2 – жәшікке тиісті. Олардың ықтималдықтары:

$$P(B_1) = \frac{3}{c+d+3} ; \quad P(B_2) = \frac{c+d}{c+d+3} .$$

Екіншіден алынған шар 1 – жәшікке тиісті болса, онда оның ақ түсті болу шартты ықтималдығы:

$$P_{B_1}(A) = \frac{a}{a+b} .$$

Екіншіден алынған шар 2 – жәшікке тиісті болса, онда оның ақ түсті болу шартты ықтималдығы мынаған тең:

$$P_{B_2}(A) = \frac{c}{c+d} .$$

Толық ықтималдық формуласын қолданамыз.

$$P(A) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{3}{c+d+3} + \frac{c}{c+d} \cdot \frac{c+d}{c+d+3} .$$

5.3. Байес формуласы

Ықтималдықтарды көбейту теоремасы және толық ықтималдықтың формуласының салдары ретінде Байес формуласы деп аталатын формуланы келтіріп шығарайық.

Толық жиын құратын өзара үйлесімсіз $H_1, H_2, \dots, H_n$ оқиғалары берілген. $H_1, H_2, \dots, H_n$ оқиғалары болжам, гипотеза деп те аталады. Бұл гипотезалардың тәжірибеге дейінгі

ықтималдықтары $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ белгілі болсын. Тәжірибе нәтижесінде қандай да бір A оқиғасы пайда болады делік. A оқиғасының пайда болуына байланысты болжам ықтималдықтары қалай өзгереді, соны қарастырайық. Басқаша айтқанда:

$$P_A(H_1), P_A(H_2), \dots, P_A(H_n),$$

шартты ықтималдықтарды табайық.

Ықтималдықтарды көбейту теоремасы бойынша:

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P_{H_i}(A) \cdot P(H_i), \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

$$\text{Бұдан} \quad P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

Соңғы теңдіктен:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Мұндағы $P(A)$ -ның орнына толық ықтималдықтың формуласы бойынша мәнін қоямыз.

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}. \quad (5.10)$$

Бұл формула Байес формуласы деп аталады.

Мысал. Екі атқыш, бір-бірінен тәуелсіз, бір нысанаға әрқайсысы бір реттен оқ атады. Бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8, екіншісінікі 0,4. Соңынан тексерілгенде, бір оқтың тигені белгілі болды (A оқиғасы). Осы оқтың бірінші атқышқа тиісті болу ықтималдығын табайық.

Шешуі. Тәжірибеге дейін мынадай гипотезалар болуы мүмкін: H_1 —бірінші атқыштыкі де, екінші атқыштыкі де тимейді; H_2 —екі атқыштыкі де тиеді; H_3 —біріншінікі тиеді,

екіншінікі тимейді; H_4 – біріншінікі тимейді, екіншінікі тиеді. Бұл гипотезалардың ықтималдықтары:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 0,2 \cdot 0,6 = 0,12; & P(H_2) &= 0,8 \cdot 0,4 = 0,32; \\ P(H_3) &= 0,8 \cdot 0,6 = 0,48; & P(H_4) &= 0,2 \cdot 0,4 = 0,08. \end{aligned}$$

Бір ғана оқ тиді деген A оқиғасының осы гипотезалардағы шартты ықтималдықтары:

$$P_{H_1}(A) = 0; \quad P_{H_2}(A) = 0; \quad P_{H_3}(A) = 1; \quad P_{H_4}(A) = 1.$$

Сонымен, H_1 және H_2 гипотезалары жокқа шығады, ал H_3 және H_4 гипотезаларының ықтималдықтарын Байес формуласы (5.10) бойынша есептейміз.

$$P_A(H_3) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7}; \quad P_A(H_4) = \frac{0,81 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{1}{7}.$$

Тиген оқтың бірінші атқышқа тиісті болу ықтималдығы $6/7$ -ге тең екен.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары.

1. Үйлесімді оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасын жазыңыз, оны дәлелдеңіз.
2. Толық ықтималдықтың формуласын дәлелдеңіз.
3. Қандай есептерді шығарғанда толық ықтималдықтың формуласы қолданылады?
4. Байес формуласын келтіріп шығарыңыз.
5. Қандай есептерді шығарғанда Байес формуласы қолданылады?

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Аудиторияда 100 студент бар. Олардың 50-і қазақ тілін, 40-ы орыс тілін, ал 35-і ағылшын тілін біледі. 20 студент қазақ және орыс тілдерін, 8-і қазақ және ағылшын тілдерін, ал 10 студент орыс және ағылшын тілдерін біледі. 5 студент үш тілді де біледі. Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын есептеңіз: A – таңдамай шақырылған студент не қазақ тілін не орыс тілін біледі, B – ол тек қана қазақ тілін біледі, C – ол аталған тілдердің бірде-біреуін білмейді.

Шешуі. Қосымша белгілеулер енгіземіз. E – таңдамай шақырылған студент қазақ тілін біледі, F – ол орыс тілін біледі, D – ол ағылшын тілін біледі.

$A = E + F$ болғандықтан, оған (5.1) формуласын қолданамыз.

$$P(A) = P(E) + P(F) - P(EF) = 0,5 + 0,4 - 0,5 \cdot 0,4 = 0,7.$$

B оқиғасын $B = E \bar{F} \bar{D}$ түрінде өрнектеп, оған тәуелді оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасын, яғни (4.5) формуласын, де Морган ережесін және (5.1) формуласын қолданамыз.

$$\begin{aligned} P(E \bar{F} \bar{D}) &= P(E) \cdot P_{\bar{E}}(\bar{F} \bar{D}) = P(E)(1 - P_{\bar{E}}(F + D)) = \\ &= P(E) - P(E) \cdot P_{\bar{E}}(F + D) = P(E) - P(FE + DE) = \\ &= P(E) - P(FE) - P(DE) + P(DEF) = 0,5 - 0,2 - 0,08 + 0,05 = 0,27. \end{aligned}$$

$C = \bar{E} \bar{D} \bar{F}$ оқиғасының ықтималдығын есептеу үшін де Морган ережесін және (5.6) формуласын қолданамыз.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{E} \bar{D} \bar{F}) = P(\overline{E + D + F}) = 1 - P(E + D + F) = \\ &= 1 - P(E) - P(D) - P(F) + P(ED) + P(EF) + P(DF) - P(EDF) = \\ &= 1 - 0,5 - 0,35 - 0,4 + 0,08 + 0,2 + 0,1 - 0,05 = 0,08. \end{aligned}$$

2-мысал. Бидайдың тұқымдық дәндерін сапасына байланысты 3 топқа бөлуге болады. Бірінші топқа барлық дәннің 95 пайызы, екіншіге 3 пайызы, ал үшіншіге 2 пайызы жатады. Бірінші топқа жататын тұқымдық дәннен, дәні 50-ден кем болмайтын масақ өсіп шығу ықтималдығы 0,6-ға тең, ал осы ықтималдық екінші топ үшін 0,2; үшінші топ үшін 0,05 болсын. Таңдамай алынған бір түйір дәннен 50-ден кем емес дәні бар масақ өсіп шығу ықтималдығы неге тең?

Шешуі. A – алынған дәннен басында 50-ден кем емес дәні бар масақ өсіп шығу оқиғасы. Мынадай болжам жасаймыз:

B_1 – алынған дән 1-топқа жатады; B_2 – алынған дән 2-топтан; B_3 – алынған дән 3-топтан. Олардың ықтималдықтары $P(B_1)=0,95$; $P(B_2)=0,03$; $P(B_3)=0,02$. Алынған дән бірінші топтан болғанда, одан дәні 50-ден кем емес масақ өсіп шығуының шартты ықтималдығы $P_{B_1}(A)=0,6$. Дән екінші топтан болғандағы A оқиғасының шартты ықтималдығы $P_{B_2}(A)=0,2$, ал үшінші топ дәні үшін осындай шартты ықтималдық $P_{B_3}(A)=0,05$ болады. Ізделінді ықтималдық:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 0,577.$$

3-мысал. 12 жәшік бар. Оның алтауының (B_1 құрамы) әрқайсысында 3 ақ және 4 қара шар; үшеуінің (B_2 құрамы) әрқайсысында 2 ақ және 8 қара шар; ал екеуінің (B_3 құрамы) әрқайсысында 6 ақ және 1 қара шар; біреуінде (B_4 құрамы) 4 ақ және 3 қара шар бар. Кез келген жәшіктен бір шар алынған, оның түсі ақ. Алынған шардың B_3 құрамынан болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. A – алынған шардың түсі ақ. 4 болжам жасаймыз. Шар B_1 құрамынан алынған, $P(B_1)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$; шар B_2 құрамынан

алынған, $P(B_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; шар B_3 құрамынан алынған, $P(B_3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$;

шар B_4 құрамынан алынған, $P(B_4) = \frac{1}{12}$.

Таңдап алынған шар B_1 құрамынан болса, онда ол 6 жәшіктің біреуінен ақ шар алудың шартты ықтималдығы

$$P_{B_1}(A) = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}.$$

Ал, B_2, B_3, B_4 құрамдарынан болса, онда олардан ақ шар алудың шартты ықтималдықтары:

$$P_{B_2}(A) = \frac{2}{2+8} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5};$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{6}{6+1} = \frac{6}{7};$$

$$P_{B_4}(A) = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7};$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{7} = \frac{191}{420}.$$

Ізделінді ықтималдық

$$P_A(B_3) = \frac{P_A(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{1/6}{191/420} = \frac{60}{191} = 0,314.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары.

1. Екі тиын тасталады. А – бірінші тиында "елтаңба" жағының шығуы оқиғасы, В – екінші тиынның "елтаңба" жағының шығуы оқиғасы. $C = A+B$ оқиғасының ықтималдығын табыңыз.

2. Осы тақырып ОСӨЖ-нің 1-мысалының шарты берілген. Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын есептеңіз. A – таңдамай шақырылған студент не ағылшын тілін не орыс тілін біледі. B – ол тек қана орыс тілін біледі.

Жауабы: $P(A) = 0,61$; $P(B) = 0,15$.

3. Құрастырушыға үш заводта дайындалған бөлшек келіп түседі. 1-заводта дайындалғандардың 0,3%-і жарамсыз, 2-заводта дайындалғандардың 0,2%-і жарамсыз, ал 3-заводтағылардың 0,4%-і жарамсыз. Егер 1-заводтан 1000 бөлшек, екіншіден 2000 бөлшек, ал үшіншіден 2500 бөлшек құрастырушыға келіп түскен болса, онда құрастырушыға жарамсыз бөлшек түсу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 0,003091.

4. Самолетке үш рет оқ атылған. Бірінші оқтың тию ықтималдығы 0,5, екінші және үшінші атылған оқтар үшін бұл ықтималдықтар сәйкес 0,6 және 0,8. Самолетті істен шығару үшін 3 оқтың дәл тиюі қажет. Бір оқ тигеннен кейін самолеттің істен шығу ықтималдығы 0,3-ке тең, 2 оқ тигенде бұл ықтималдық 0,6 болады. Үш рет оқ ату нәтижесінде самолеттің құлап түсу ықтималдығы қандай?

Жауабы: 0,594.

5. Жұмысшы біртекті бөлшектерді үш станокта дайындайды. Бірінші станоктан жарамсыз бөлшектердің шығу ықтималдығы 0,02-ге, ал екінші және үшінші станоктар үшін бұл ықтималдықтар сәйкес 0,03 пен 0,04-ке тең. Дайындалған бөлшектер бір жәшікке салынады. Бірінші станоктың өнімділігі екіншіден 3 есе көп, ал үшіншінікі екіншіден 2 есе аз. Таңдамай алынған бөлшектің жарамсыз болу ықтималдығын анықтаңыз.

Жауабы: 0,024.

6. Екі жәшіктің әрқайсысында 3 қара және 7 ақ шар бар. Екінші жәшіктен таңдамай бір шар алынып бірінші жәшікке салынған. Бірінші жәшіктегі шарлар мұқият араластырылып одан бір шар алынған. Осы алынған шардың ақ түсті болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 0,7.

7. 10 бөлшектің 4-і боялған. Боялған бөлшектің үлгіден ауыр болу ықтималдығы 0,3, ал боялмаған бөлшектің үлгіден ауыр болу ықтималдығы 0,1-ге тең. Таңдамай алынған бөлшек үлгіден ауыр болды. Сол бөлшектің боялған болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 2/3.

8. Университеттің технология факультетінен 4 студент, экономика факультетінен 6 студент, заң факультетінен 5 студент спартакиадаға қатысады. Университеттің құрама тобына технология факультетінен түсу ықтималдығы – 0,9, қалған екеуінен ілігу ықтималдығы сәйкес 0,7 және 0,8-ге тең. Таңдамай алынған студент университеттің құрама тобына енді. Бұл студенттің қай факультеттен болу ықтималдығы үлкен?

Жауабы: экономика факультетінің студенті болу ықтималдығы үлкен.

9. Университеттің алдынан өтетін машиналардың 60%-і жеңіл, қалғандары үлкен машиналар. Университетке жеңіл машинаның келу ықтималдығы – 0,1, ал үлкен машиналардың келу ықтималдығы – 0,2. Университетке бір машина келді, оның жеңіл машина болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 3/7.

10. Үш мерген нысанаға бір-бір реттен оқ атты. Нысанаға екі оқтың тигені белгілі болды. Егер 1-атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы – 0,6, екіншісі – 0,5, үшіншісі – 0,4 болса, онда үшінші атқыштың нысанаға тигізген болуы ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 10/19.

11. Формасы бірдей 10 жәшік бар. Олардың 9-ның әрқайсысында 2 ақ, 2 қара шардан, ал бір жәшікте 5 ақ, 1 қара шар бар. Кез келген жәшіктен таңдамай бір шар алынған. Алынған шардың түсі ақ. Шардың 5 ақ шары бар жәшіктен алынғандығының ықтималдығы қандай?

Жауабы: 0,156.

6-дәріс. Тәжірибелердің қайталануы

6.1. Бернулли формуласы

Анықтама. Бірнеше рет жүргізілген тәжірибенің әрбірінде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы, сол біреуінен басқа тәжірибелердің нәтижесінен тәуелсіз болса, онда мұндай тәжірибелерді A оқиғасына қарағанда тәуелсіз тәжірибелер деп атайды.

Әрбір тәуелсіз тәжірибелерде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы әртүрлі, немесе бірдей, яғни тұрақты болуы мүмкін. Бұл тақырыпта, барлық тәжірибелерде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы бірдей, яғни тұрақты болатын жағдайды қарастырамыз. Егер, A оқиғасының әр тәжірибеде пайда болу ықтималдығы p болса, онда оның пайда болмау ықтималдығы $q = 1 - p$ болады.

n тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының k рет пайда болуымен бірге $n - k$ рет пайда болмау ықтималдығын $P_n(k)$ -мен белгілелік те, оны табу есебін қарастыралық. Бұл арада A оқиғасының нақты бір тізбекпен пайда болуы сұралмайды, ол кез келген тізбекпен пайда болуы мүмкін.

Қарапайым жағдайдан басталық. 3 рет жүргізілген тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының 2 рет пайда болуы дегенде AAA , $AA\bar{A}$, $\bar{A}AA$ күрделі оқиғаларын түсінеміз. Тәжірибе тәуелсіз болғандықтан, бұл күрделі оқиғаларға енетін оқиғалар да тәуелсіз болады, сондықтан бұлардың әрбірінің ықтималдығы p^2q -ған тең. Күрделі оқиғалардың саны $3 = C_3^2$ -ке тең және олар өзара үйлесімсіз болғандықтан, үйлесімсіз оқиғаларды қосу теоремасын қолданып,

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3p^2 q$$

теңдікті аламыз.

4 рет жүргізілген тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының 3 рет пайда болуы дегенде $AAAA$, $AAA\bar{A}$, $AA\bar{A}\bar{A}$, $\bar{A}AAA$ күрделі оқиғаларын түсінеміз. Бұл күрделі оқиғалардың әрбірінің пайда

болу ықтималдығы $p^3 q$ -ған тең және олардың саны $4 = C_4^3$ -ке тең, ендеше

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 \cdot q^{4-3} = 4 p^3 q.$$

Жалпы жағдайда, n рет жүргізілген тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының k рет пайда болуы мен бірге $n-k$ рет пайда болмауы дегенде $\underbrace{A \cdot A \cdots A}_k \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k}$ сияқты күрделі оқиғаларын түсінеміз. Тәуелсіз оқиғалардың әрбіреуінің пайда болу ықтималдығы $p^k \cdot q^{n-k}$ -ған тең болып, олардың саны C_n^k -ған тең. Сонымен,

$$P_n(k) = C_n^k p^k \cdot q^{n-k} \quad (6.1)$$

Соңғы теңдік **Бернулли формуласы** деп аталады.

A оқиғасының n тәуелсіз тәжірибеде:

а) k реттен аз пайда болуы ықтималдығы

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(k-1);$$

ә) k реттен көп пайда болуы ықтималдығы

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$$

б) k реттен кем емес пайда болуы ықтималдығы

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n);$$

в) k реттен көп емес пайда болуы ықтималдығы

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$$

формулалармен есептеледі.

Мысал. Бидай тұқымының шығымдылығы 80% болсын. 5 түйір дән егілді. Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын есептеңіздер:

- а) егілген дәннің үшеуі көктейді,
- ә) көктеген дән саны үштен кем емес, төрттен көп емес,
- б) көктеген дән саны үштен аз,
- в) көктеген дән үштен көп,

Шешуі. Әрбір тұқым дәннің шығымдылық ықтималдығы $p=0,8$. Онда шығымсыздығы $1-p=0,2$.

а) $n=5$, $k=3$. Бернулли формуласы (6.1) бойынша:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 \approx 0,205.$$

$$\text{ә) } 3 \leq k \leq 4, P_5(3 \leq k \leq 4) = P_5(3) + P_5(4) = 0,205 + C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,615.$$

$$\text{б) } P_5(k < 3) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = 0,2^5 + 4 \cdot 0,2^4 + 6 \cdot 4 \cdot 0,2^3 = 0,0579.$$

$$\text{в) } P_5(k > 3) = P_5(4) + P_5(5) = 0,8^4 + 0,8^5 = 0,738.$$

6.2. Муавр-Лапластың локальдық теоремасы

Тәуелсіз тәжірибелердің саны n өте көп болған жағдайда Бернулли формуласын қолдану ыңғайсыз болғандықтан, жуық мәні болса да, есептеуге ыңғайлы болатын әдістерін қарастырамыз.

Теорема. Егер, әрбір тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы p , ($0 < p < 1$), тұрақты болса және x шамасы k , n -дер бойынша бірқалыпты шектелген болса, онда n тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының k рет пайда болу ықтималдығы келесі жуық теңдікпен анықталады:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad (6.2)$$

$$\text{мұндағы } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad x \text{ -тің өрнегіндегі } np$$

көбейтінді, статистикалық мағынада, n тәуелсіз тәжірибеде A

оқиғасы пайда болу санының орташа мәні болғандықтан, $k - np$ өрнегі, оның орташа мәннен ауытқуын білдіреді. $\sigma = \sqrt{npq}$ – орташа квадраттық ауытқу деп аталады. σ шамасы ауытқудың масштабы ретінде қарастырылады. Демек, x саны нормалданған ауытқу болады. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ болғандықтан, x -тің теріс мәндерінде, кітаптың соңында $\varphi(x)$ үшін келтірілген кестені қолдануға болады.

Дәлелдеуі. Бернулли формуласын

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}$$

түрінде жазып, факториалдардың қатынасын есептеуде жиі қолданылатын келесі Стирлинг формуласынан пайдаланамыз.

$$n! = n^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \exp\left(-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^2} + \dots\right).$$

Соңғы теңдікті

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi n} + n \ln n - n + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (6.3)$$

түрінде жазамыз. $k = np + x \cdot \sqrt{npq}$ болғандықтан, $n - k = nq - x \cdot \sqrt{npq}$ болады. Сонымен бірге, $n \rightarrow \infty$ -да $k \rightarrow \infty$ және $n - k \rightarrow \infty$ -ды. Ендеше,

$$\ln k! = \ln \sqrt{2\pi k} + \left(np + x\sqrt{npq}\right) \ln\left(np + x\sqrt{npq}\right) - np - x \cdot \sqrt{npq} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \ln(n-k)! &= \ln \sqrt{2\pi(n-k)} + \\ &+ \left(nq - x\sqrt{npq}\right) \cdot \ln\left(nq - x\sqrt{npq}\right) - nq + x \cdot \sqrt{npq} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

(6.4), (6.5) формулаларындағы логарифмдерді

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

формуласы бойынша түрлендіреміз.

$$\begin{aligned}\ln(np + x\sqrt{npq}) &= \ln np + \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = \\ &= \ln np + x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{q}{np} + 0\left(\frac{q^3}{n\sqrt{np}^3}\right).\end{aligned}\quad (6.6)$$

$$\ln(nq - x\sqrt{npq}) = \ln nq - x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{p}{nq} + 0\left(\frac{p^3}{n\sqrt{nq}^3}\right). \quad (6.7)$$

$\ln P_n(k)$ -ның өрнегіндегі факториалдардың логарифмдерінің орнына (6.3)-(6.7) формулаларындағы мәндерін қойып ықшамдағаннан кейін

$$\ln P_n(k) = -\ln\sqrt{2\pi npq} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

теңдігі алынады. Теореманың шарты бойынша, x шамасы k және n бойынша бірқалыпты шектелген болғандықтан, $n \rightarrow \infty$ да $x\sqrt{\frac{q}{np}} \rightarrow 0$, $x\sqrt{\frac{p}{nq}} \rightarrow 0$ -ды. Сондықтан, соңғы теңдіктен (6.2)

жуық теңдігі шығады. Сонымен теорема дәлелденді.

Бұл теореманы 1730 жылы, $p = \frac{1}{2}$ жағдайы үшін Муавр, ал

жалпы ($0 < p < 1$) жағдайы үшін 1783-жылы Лаплас дәлелдеген. Сондықтан (6.2) теңдігі Муавр-Лаплас формуласы деп аталады.

Мысал. Егер А оқиғасының әрбір тәжірибеде пайда болу ықтималдығы 0,2-ге тең болса, онда А оқиғасының 400 тәжірибеде 80 рет пайда болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. $n=400$, $k=80$, $p=0,2$, $q=0,8$.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x);$$

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,87}} = 0; \quad \varphi(0) = 0,3989.$$

Ізделінді ықтималдық $P_{400}(80) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986$. Енді осы мысалды Бернуллі формуласымен есептесек: $P_{400}(80) = 0,0498$. n -нің сан мәні үлкен болғандықтан екі түрлі формуламен алынған нәтижелер бір-біріне жақын.

6.3. Муавр-Лапласың интегралдық теоремасы

Егер әрбір тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты p -ға тең ($0 < p < 1$) болса, онда тәжірибелердің қайталану саны n мейлінше көп болғанда, A оқиғасының пайда болу саны m -нің $m_1 \leq m \leq m_2$ аралықта болу ықтималдығы

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (6.8)$$

жуық теңдік арқылы табылады. Мұндағы

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Дәлелдеуі. Үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасына негізделе отырып төмендегіні жаза аламыз.

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + P_n(m_1 + 2) + \dots + P_n(m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \quad (6.9)$$

(6.9) теңдікке Муавр-Лапласың локальдық теоремасын қолданамыз, яғни

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m). \quad (6.10)$$

x -тің өрнегіндегі $m, [m_1, m_2]$ аралықтан мәндер қабылдайды.

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \quad \text{болғандықтан,}$$

(6.10)-ды төмендегіше жаза аламыз.

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \varphi(x_m) \Delta x_m. \quad (6.11)$$

(6.11) формуласы $\varphi(x)$ функциясы үшін (x_1, x_2) аралықтағы интегралдық қосынды болады. Сондықтан (6.11)-нің $n \rightarrow \infty$ -дағы немесе $\Delta x_m \rightarrow 0$ -ге ұмтылғандағы шегі (6.8) анықталған интегралды береді.

Теорема дәлелденді.

$P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ ықтималдық, геометриялық мағынасы жағынан, жоғарыдан $y = \varphi(x)$ ықтималдық қисығымен, бүйір жақтарынан $x = x_1$, $x = x_2$ түзулерімен, төменнен Ox өсінің $[x_1, x_2]$ кесіндісімен қоршалған қисық трапецияның ауданын береді.

(6.8) формуласының оң жағын түрлендіреміз.

$$\begin{aligned} P_n(m_1 \leq m \leq m_2) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{x_1}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Мұндағы $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ Лаплас функциясы деп аталады. (6.12) формуласының көмегімен (6.8) формуласын Лаплас функциясы арқылы төмендегіше жазуға болады:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \quad (6.13)$$

Лаплас функциясының төмендегі екі қасиетін береміз.

1) x -тің мәні асқан сайын $\Phi(x)$ функциясы монотон өспелі болып, оның мәні $\frac{1}{2}$ -ге жуық тең болады, яғни

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}, \text{ ал } \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -\frac{1}{2}. \quad \Phi(0) = 0.$$

2) $\Phi(x)$ -так функция, яғни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Лаплас функциясы практикада жиі ұшырасатын маңызды функция болғандықтан, ол кесте түрінде оқулықтардың соңындағы қосымшада келтірілген.

Мысал. Тиын 400 рет тасталынады. "Елтаңба" жағының шығу саны m 194-пен 208-дің аралығында болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. $p = q = \frac{1}{2}; \quad n = 400, \quad m_1 = 194, \quad m_2 = 208.$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{194 - 200}{\sqrt{100}} = -0,6; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{208 - 200}{10} = 0,8.$$

(6.13) формуласын қолданамыз.

$$P_{400}(194 \leq m \leq 208) \approx \Phi(0,8) - \Phi(-0,6) = 0,2881 + 0,2257 = 0,5138.$$

6.4. Оқиғаның пайда болуының ең ықтимал саны

Анықтама. Егер n тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының пайда болу саны k болып, k -ның k_0 -ден басқа мүмкін болатын барлық мәндері үшін

$$P_n(k_0) \geq P_n(k) \quad (6.14)$$

теңсіздігі орындалса, онда k_0 саны A оқиғасы пайда болуының ең ықтимал саны деп аталады

Теорема. A оқиғасы пайда болуының ең ықтимал саны k_0 , тек қана тәжірибелер саны n -мен A -ның бір тәжірибеде пайда болу ықтималдығы p арқылы анықталады.

Дәлелдеу. Анықтама бойынша, n тәжірибеде A оқиғасының κ_0+1 және κ_0-1 рет пайда болу ықтималдықтары κ_0 рет пайда болу ықтималдығынан аспауы тиіс, онда Бернулли формуласын қолданып мынаны жаза аламыз:

$$\frac{n!}{\kappa_0!(n-\kappa_0)!} p^{\kappa_0} \cdot q^{n-\kappa_0} \geq \frac{n!}{(\kappa_0+1)!(n-\kappa_0-1)!} p^{\kappa_0+1} \cdot q^{n-\kappa_0-1}.$$

Ықшамдаймыз:

$$\frac{q}{n-\kappa_0} \geq \frac{p}{\kappa_0+1}.$$

Бұл теңсіздікті шешіп, κ_0 -ді анықтаймыз.

$$\kappa_0 \geq np - q. \quad (6.15)$$

$\kappa_0 - 1$ рет пайда болуы ықтималдығы үшін де осылайша шешеміз.

$$\frac{n!}{\kappa_0!(n-\kappa_0)!} p^{\kappa_0} \cdot q^{n-\kappa_0} \geq \frac{n!}{(\kappa_0-1)!(n-\kappa_0+1)!} p^{\kappa_0-1} \cdot q^{n-\kappa_0+1},$$

$$\frac{p}{\kappa_0} \geq \frac{q}{n-\kappa_0+1},$$

$$\kappa_0 \leq np + p. \quad (6.16)$$

(6.15), (6.16) теңсіздіктерін біріктіріп былайша жазамыз:

$$np - q \leq \kappa_0 \leq np + p. \quad (6.17)$$

Сонымен, A оқиғасы пайда болуының ең ықтимал саны κ_0 (6.17) – теңсіздіктері арқылы анықталады.

Ескерту. (6.17) мен анықталатын интервалдың ұзындығы бірге тең, шынында да:

$$np + p - (np - q) = p + q = 1.$$

Сондықтан (6.17) интервалдың шекаралары бөлшек сан болса, онда бір ғана k_0 ең ықтимал сан болады, ал шекаралары бүтін сан болса, онда екі ең ықтимал сан k_0 және k_0+1 болады.

Мысал. Белгілі бір өндіріс өнімінің 85%-ы жоғары сортты. 150 бұйымды партияның жоғары сорттыларының ең ықтимал санын табыңыз.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $n=150$; $p=0,85$; $q=1-0,85=0,15$. (6.17)-ші теңсіздік бойынша:

$$150 \cdot 0,85 - 0,15 \leq k_0 \leq 150 \cdot 0,85 + 0,85, \quad 127,35 \leq k_0 \leq 128,35.$$

Сонымен, 150 бұйымды партияның жоғары сорттыларының ең ықтимал саны 128-ге тең екен.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Тәуелсіз тәжірибелер ұғымының анықтамасын беріңіз және мысалдар келтіріңіз.
2. Бернуллі формуласын келтіріп шығарыңыз.
3. Қандай есептерді шығарғанда Бернуллі формуласы қолданылады?
4. Муавр-Лапласың локальдық теоремасын жазыңыз.
5. Лапласың интегралдық теоремасын жазыңыз.
6. Оқиғаның пайда болуының ең ықтимал саны деген не және ол қалай табылады?

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Тиын 6 рет тасталады. "Елтаңбаның" пайда болуы 3-тен көп болмау ықтималдығы қандай?

Шешуі. Тиынды бір рет тастағанда "елтаңбаның" пайда болу ықтималдығы $p=0,5$, ендеше пайда болмау ықтималдығы $1-p=0,5$; $n=6$; $k \leq 3$.

$$P_6(k \leq 3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) = 0,6563.$$

2-мысал. Атқыштың нысанаға бір атқанда тигізу ықтималдығы $p=0,75$. 10 рет атқанда 8 рет тигізу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. $n=10$, $k=8$, $p=0,75$, $q=0,25$. (6.2) формуласын қолданамыз:

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \cdot \varphi(x) = 0,7301 \cdot \varphi(x)$$

$$X = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = 0,36; \quad \varphi(0,36) = 0,3739.$$

$$p_{10}(8) = 0,273.$$

Енді осы мысалды Бернулли формуласы бойынша есептейміз:

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 \cdot 0,75^8 \cdot 0,25^2 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8!} \cdot 0,75^8 \cdot 0,25^2 = 0,282$$

n -нің сан мәні аз болғандықтан екі түрлі формуламен есептелген нәтижелер айырмасы үлкен.

3-мысал. Атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,63-ке тең. 0,9 ықтималдықпен нысанаға 10-нан кем емес рет тигізуі үшін атқыш неше рет оқ үзуі қажет?

Шешуі. 10-нан кем емес рет тигізуі деген талапты

$$10 \leq m < +\infty$$

теңсіздіктер түрінде жаза аламыз. Онда бұл теңсіздіктерді төмендегіше түрде жазуға болады:

$$\frac{10 - 0,63n}{\sqrt{n \cdot 0,63 \cdot 0,37}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < +\infty.$$

$$\text{бұдан, } x_1 = \frac{10 - 0,63n}{\sqrt{n \cdot 0,63 \cdot 0,37}}, \quad x_2 = \infty.$$

Есептің шарты бойынша

$$P\left(x_1 \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < x_2\right) = 0,9.$$

Екінші жағынан Муавр-Лапласстың интегралдық теоремасы бойынша

$$P(x_1 \leq x < x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(\infty) = 0,5; \quad \Phi(x_1) = -0,4.$$

Соңғы теңдіктен, кестені пайдаланып $x_1 = -1,28$ -ді табамыз.

Онда

$$x_1 = \frac{10 - 0,63n}{\sqrt{0,23n}} = -1,28.$$

Соңғы теңдікті шешіп $n = 20$ -ны табамыз.

Сонымен, 10-нан кем емес рет тигізу үшін $n \geq 20$ рет ок үзілуі тиіс екен.

4-мысал. Дәннің шығымдылық ықтималдығы $p < 0,8$ болса, 100 дәннің ішінде шығымды дәндер саны 80-нен кем болмау ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. $80 \leq k \leq 100$, ендеше $k_1 = 80$, $k_2 = 100$.

$$x_1 = \frac{80 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0, \quad \Phi(x_1) = \Phi(0) = 0.$$

$$x_2 = \frac{100 - 80}{4} = 5; \quad \Phi(x_2) = \Phi(5) = 0,4999.$$

Ендеше, $P_{100}(80; 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,4999$.

5-мысал. Тауардың 24 үлгісі қарастырылады. Әр үлгінің сатуға жарамды болу ықтималдығы 0,6-ға тең. Сатуға жарамды деп табылған үлгілердің ең ықтимал санын табу керек.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $n = 24$, $p = 0,6$, $q = 0,4$. (6.17)-ші теңсіздік бойынша:

$$24 \cdot 0,6 - 0,4 \leq k_0 \leq 24 \cdot 0,6 + 0,6,$$

бұдан

$$14 \leq \kappa_0 \leq 15.$$

Интервалдың шекаралары бүтін болғандықтан ең ықтимал сан екеу болады,

$$\kappa_0=14, \quad \kappa_0+1=15.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Ойын сүйегін 10 рет тастағанда 5 ұпайдың үш рет шығу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $\approx 0,152$.

2. Ойын сүйегін 10 рет тастағанда 5 ұпайдың үштен көп емес шығу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: 0,93.

3. Әрбір тәжірибеде А оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,3-ке тең. 5 рет тәуелсіз тәжірибе жүргізілген. А оқиғасының екіден кем емес пайда болуы ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $1 - 5 \cdot (0,7)^4 \cdot 0,3 = 0,47178$.

4. Әрбір тәжірибеде А оқиғасының пайда болу ықтималдығы $1/4$ -ке тең. Тәжірибе 8 рет тәуелсіз қайталанады. а) А оқиғасы екіден кем емес пайда болуы ықтималдығы қандай? ә) кемінде екі рет А оқиғасы пайда болу ықтималдығын табыңыз; б) А оқиғасы кемінде бір, бірақ үштен көп емес пайда болу; в) А оқиғасы 4-тен көп рет пайда болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: а) $\approx 0,68$; ә) $\approx 0,63$; б) 0,78; в) $\approx 0,0273$.

5. Тиын 400 рет тасталады. а) "Елтаңба" жағының 200 рет шығу ықтималдығын табыңыз. ә) "Елтаңба" жағының 160 рет шығу ықтималдығы қандай?

Жауабы: а) $1/10 \cdot \varphi(0) \approx 0,04$; ә) $1/10 \cdot \varphi(4) = 1,34 \cdot 10^{-5}$.

6. Ойын сүйегі 500 рет тасталады. а) 6 ұпайдың 83 рет шығуы ықтималдығын табыңыз. ә) 6 ұпайдың 78 рет шығу ықтималдығы қандай?

Жауабы: а) $3/25 \varphi(16) \approx 0,047$; ә) $3/25 \varphi(0,64) \approx 0,039$.

7. Ұл баланың туу ықтималдығы 0,51-ге тең. Жаңа туған 100 баланың 50-і ұл болу ықтималдығы қандай?

Жауабы: 0,0782.

8. Ойын сүйегін 4200 рет лақтырғанда үштік ұпайдың түсу саны 650-ден 700-ге дейін болу ықтималдығы қандай?

Жауабы: 0,483

9. Заводтан шығатын бұйымның 75%-і бірінші сортты. Таңдамай алынған 300 бұйымның 1-сорттыларының саны 219 бен 234 арасында болуы ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $\Phi(1,2) + \Phi(0,2) \approx 0,673$.

10. Техникалық бақылау бөлімі 10 бұйымнан тұратын партияны тексеруде. Әр бұйымның стандартты болу ықтималдығы 0,75-ке тең. 10 бұйымнан тұратын партияның ішінде стандартты бұйымдардың ең ықтимал санын табу керек.

Жауабы: $K_0=8$.

11. Нысанаға оқ атқанда мүлт кету ықтималдығы 0,1-ге тең. 19 рет оқ атқанда атқыштың нысанаға тигізуінің ең ықтимал саны қанша болады?

Жауабы: $K_0=17$; $K_0+1=18$.

7-дәріс. Дискретті кездейсоқ шамалар

7.1. Негізгі ұғымдар

Оқиғалар тәжірибе нәтижесінің сапалық сипаттамасын береді. Бірақ, әртүрлі сапалық сипаттамаларға ие тәжірибелердің нәтижелері олардың бәріне тән жалпы сандық сипаттамаларға да ие. Мысалдар келтірейік.

1. Снарядтың түскен нүктесіне дейінгі қашықтық.
2. Газ молекуласының жылдамдығы.
3. Бір жылда жерге келіп түсетін метеориттер саны.
4. Бидай дәнінің салмағы.
5. Мақта талшығының ұзындығы.
6. Электр шырағының қызмет ету мерзімі.
7. Станоктың тоқтаусыз жұмыс істеу мерзімі.

Келтірілген мысалдар әр текті болуына қарамастан олардың бәрінде қандай да бір шаманың сан мәнін білу талап етіледі. Ал бұл шаманың сан мәнін алдын ала дәл айту мүмкін емес. Бірақ, сол дәл мәнді өз ішіне алатын бірнеше мәндерді сәйкес ықтималдықтармен беруге болады. Міне осындай шаманы кездейсоқ шама деп атайды.

1-анықтама. Кездейсоқ шама деп, тәжірибе нәтижесінде, кездейсоқ себептерге байланысты, алдын ала белгісіз тек қана бір сан мәнді қабылдайтын шаманы айтады.

Айнымалы шамалар, мысалы функцияның аргументі анықталу облысының барлық мәндерін қабылдайтын болса, кездейсоқ шамалар мүмкін болатын мәндерінің тек қана біреуін қабылдайды.

Кездейсоқ шамалар дискретті және үзіліссіз болып екі топқа бөлінеді.

2-анықтама. Егер, кездейсоқ шаманың қабылдауы мүмкін болатын барлық мәндерін нөмірлеп шығу және оларды шекті немесе шексіз $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ тізбек түрінде орналастыру мүмкін болса, онда оны дискретті кездейсоқ шама деп айтады.

2,3,4,5—мысалдарда дискретті кездейсоқ шамалар берілген.

3-анықтама. Егер кездейсоқ шама қандайда бір шекті немесе шексіз аралықтың барлық мәндерін қабылдайтын болса, онда оны үзіліссіз кездейсоқ шама деп атайды.

1,6,7—мысалдарда үзіліссіз кездейсоқ шамалар берілген.

Дискретті кездейсоқ шаманы сипаттау үшін оның қабылдауы мүмкін болатын барлық мәндерінің берілуі жеткілікті деп ойлауға болады. Бірақ бұл олай емес. Кездейсоқ шамалардың қабылдауы мүмкін болатын мәндерінің ішінде сан мәні бірдейлері болғанымен, оларды қабылдау ықтималдықтары әртүрлі болуы мүмкін. Сондықтан дискретті

кездейсоқ шаманы толық сипаттау үшін оның мүмкін болатын барлық мәндерімен қоса оларды қабылдау ықтималдықтарын да көрсету керек.

4-анықтама. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңы деп, оның мүмкін болатын мәндерімен оларды қабылдау ықтималдықтарын байланыстыратын әр қандай сәйкестілікті айтады.

Үлестіру заңын кесте, формула және графикалық әдістермен беруге болады.

Кездейсоқ шамаларды ξ , η әріптерімен, ал олардың мүмкін болатын мәндерін $x_1, x_2, \dots$; $y_1, y_2, \dots$, әріптермен белгілейміз.

Дискретті кездейсоқ шама кесте әдісінде берілсе, онда кестенің бірінші қатарына ξ -дің мүмкін болатын мәндері, ал екіншісіне – олардың сәйкес ықтималдықтары жазылады.

ξ	x_1	x_2	x_3	.	.	.	x_n	...
p	p_1	p_2	p_3	.	.	.	p_n	...

Дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңын графикалық түрде де бейнелеуге болады. Ол үшін координата жүйесінде (x_i, p_i) нүктелерін орналастырып, кейін оларды кесінділермен ретіне қарай біріктіреміз. Шыққан фигураны үлестіру көпбұрышы деп атайды.

Бір тәжірибеде кездейсоқ шама, мүмкін болатын мәндердің тек қана біреуін қабылдайтын болғандықтан, олар толық жиын құрайды. Сондықтан олардың ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең.

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (7.1)$$

Егер кездейсоқ шама ξ -дің мүмкін болатын мәндері шектелмеген болса, онда $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots$ сан қатары жинақты болып, оның қосындысы бірге тең.

Практикалық есептерді шешкенде жиі ұшырасатын кейбір үлестірулерді қарастырамыз.

7.2. Биномды үлестіру

Айталық, n тәуелсіз тәжірибе жүргізілген болып, олардың әрбірінде A оқиғасы пайда болсын немесе пайда болмасын. Оқиғаның пайда болу ықтималдығы барлық тәжірибеде тұрақты болып, p -ға тең болсын (пайда болмауы $q=1-p$). Осы тәжірибелерде A оқиғасының пайда болу санын дискретті кездейсоқ шама ξ деп, оның үлестіру заңын табуды қарастырайық.

A оқиғасы n тәуелсіз тәжірибеде пайда болмауы, 1 рет пайда болуы, 2 рет пайда болуы, ..., немесе n рет пайда болуы мүмкін. Онда ξ -дің мүмкін болатын мәндері: $x_1=0, x_2=1, x_3=2, \dots, x_{n+1}=n$. Олардың ықтималдықтарын табу үшін Бернулли формуласын қолданамыз:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7.2)$$

(7.2) формуласының оң жағын келесі Ньютон биномының жалпы мүшесі деп қарауға болады.

$$(p + q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n. \quad (7.3)$$

Сонымен, (7.3)-нің бірінші мүшесі n тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының n рет пайда болуы ықтималдығын, екінші мүшесі $n-1$ рет пайда болуы ықтималдығын, ..., соңғы мүшесі пайда болмауы ықтималдығын анықтайды. Бұл тұжырымды келесі кесте түрінде жазамыз.

ξ	n	$n-1$	...	k	...	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

Соңғы кесте дискретті кездейсоқ шама ξ -дің мәндерімен оларды қабылдау ықтималдықтарын биномды үлестіру заңы деп аталады. Ықтималдықтары бином мүшелері болғандықтан, биномды атауы берілген.

7.3. Пуассон үлестіруі

Егер тәуелсіз тәжірибелер саны n үлкен болып, оларда A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тым аз болса ($p < 0,1$), онда Бернулли, Лаплас формулаларынан пайдалану ыңғайсыз болады, сондықтан асимптотик формулаларды келтіріп шығаруды қарастырамыз.

n -мен p -нің көбейтіндісі тұрақты сан болсын, яғни $np = \lambda$, делік. Бұл әрбір тәжірибе серияларында оқиғаның орта есеппен пайда болу саны өзгермейді деген сөз.

Бернулли формуласында $np = \lambda$, $p = \frac{\lambda}{n}$ десек, онда

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \quad (7.4)$$

$n \rightarrow \infty$ да, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$ шекті есептейміз. np тұрақты болғандықтан, $n \rightarrow \infty$ да $p \rightarrow 0$ ды.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Сонымен,

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (7.5)$$

Анықтама. Егер ξ кездейсоқ шамасы 0, 1, 2, ..., k, ..., мәндерін (7.5) формуласындағы ықтималдық бойынша қабылдаса, онда ξ кездейсоқ шамасы λ параметрлі Пуассон заңымен үлестірілген деп аталады.

Пуассон заңын биномды заңмен үлестірілген ықтималдықтарды аппроксимациялау үшін де қолданады.

Төмендегі кестеде n-мен p-ның әртүрлі мәндерінде, бірақ $\lambda=np=3$ тұрақты болғанда, биномды және Пуассон заңдарымен табылған ықтималдықтарының салыстырылуы келтірілген.

	Биномды заңмен табылған ықтималдықтар			Пуассон заңымен табылған ықтималдықтар
k	p=0,1; n=30	p=0,05; n=60	p=0,01; n=300	$\lambda=3$
0	0,0424	0,0461	0,0490	0,0498
1	0,1413	0,1455	0,1486	0,1494
2	0,2276	0,2259	0,2244	0,2240
3	0,2361	0,2298	0,2252	0,2240
4	0,1771	0,1724	0,1689	0,1680
5	0,1023	0,1016	0,1010	0,1008
6	0,0474	0,0490	0,0501	0,0504
7	0,0180	0,0199	0,0213	0,0216
8	0,0058	0,0069	0,0079	0,0081
9	0,0016	0,0021	0,0026	0,0027
10	0,0004	0,0006	0,0008	0,0008

Егер тәуелсіз ξ_1 және ξ_2 кездейсоқ шамалары λ_1 және λ_2 параметрлі Пуассон заңы бойынша үлестірілген болса, онда $\xi_1 + \xi_2$ шамасы $\lambda_1 + \lambda_2$ параметрлі Пуассон заңы бойынша үлестірілген болады.

7.4. Геометриялық үлестіру

Әрбірінде А оқиғасының пайда болу ықтималдығы p болатын тәуелсіз тәжірибелер жүргізілсін. А оқиғасының пайда болысымен тәжірибе тоқтатылсын. Бұл, егер А оқиғасы k-шы

тәжірибеде пайда болса, онда алдыңғы $k-1$ тәжірибеде пайда болмады деген сөз. Дискретті кездейсоқ шама ξ -мен A оқиғасы пайда болғанға дейінгі тәжірибелер санын белгілейік. ξ -дің қабылдайтын мәндері: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots$,

A оқиғасының k -шы тәжірибеде пайда болып, одан алдыңғы $k-1$ тәжірибеде пайда болмауы немесе $\xi = k$ болу ықтималдығын, ықтималдықтарды көбейту теоремасы бойынша табамыз:

$$P\{\xi = k\} = q^{k-1}p. \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (7.6)$$

Кездейсоқ шаманың мұндай үлестірілуі геометриялық үлестіру деп аталады.

Үлестіру кестесі мынадай болады.

ξ	1	2	3	...	k	...
$p\{\xi = k\}$	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	...	$(1-p)^{k-1}p$	...

Ықтималдықтары, бірінші мүшесі p болатын, $0 < p < 1$, кемімелі геометриялық прогрессия болғандықтан,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

7.5. Гипергеометриялық үлестіру

Мынадай есепті қарастырайық.

N дана бұйымнан M данасы жарамды ($M < N$) болған партиядан кездейсоқ n бұйым алынады делік. Алынған бұйымдардың ішінде жарамдыларының санын ξ кездейсоқ шамасымен белгілейік. ξ -дің қабылдауы мүмкін болатын мәндері: $0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$. Алынған n бұйымнан m данасының жарамды болуы, немесе $\xi = m$ болу ықтималдығын табайық. Ол

үшін ықтималдықтың классикалық анықтамасынан пайдаланамыз.

Элементар оқиғалардың жалпы саны C_N^n . m жарамды бұйымды M -нің ішінен саны C_M^m болатын әдіспен, сонымен бірге $n-m$ жарамсыз бұйымды $N-M$ жарамсыз бұйымнан C_{N-M}^{n-m} әдіспен таңдауға болады. Олай болса, қолайлы жағдайлардың саны – $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$.

$$P(\xi = m) = C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m} / C_N^n, \quad (m=0,1,2,\dots,n) \quad (7.7)$$

Кездейсоқ шама ықтималдықтарының мұндай үлестірілуін гипергеометриялық үлестіру деп атайды.

Жарамды бұйымдардың үлесін $\frac{M}{N}$ - мен белгілесек, онда жарамсыз бұйымдарының үлесі $q = \frac{N-M}{N}$ болады. (7.7) формуласын келесі түрде жазуға болады.

$$P(\xi = m) = C_n^m \cdot \frac{\left(p - \frac{m-1}{N}\right) \left(p - \frac{m-2}{N}\right) \cdots \left(p - \frac{1}{N}\right) \cdot p \cdot \left(q - \frac{n-m-1}{N}\right) \cdots \left(q - \frac{1}{N}\right) \cdot q}{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)}.$$

Егер N мейлінше үлкен болса, онда

$$P(\xi = m) \approx P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

яғни гипергеометриялық үлестірудің ықтималдықтары биномды үлестірудің ықтималдықтарына жуық тең екен.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары.

1. Кездейсоқ шама деп қандай шама айтылады?
2. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың анықтамаларын беріңіз.

3. Кездейсоқ шаманың үлестіру заңы деген не?
4. Үлестіру көп бұрышы деген не?
5. Биномды үлестіру деп қандай үлестіруді айтады?
6. Пуассон үлестіру заңы деп қандай заңды айтады?
7. Геометриялық үлестіру деп қандай үлестіруді айтады?
8. Гипергеометриялық үлестіру деп қандай үлестіруді айтады?

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Құрылма тәуелсіз істейтін үш элементтен тұрады. Әрбір элементтің әрбір тәжірибеде істемей қалу ықтималдығы 0,1. Бір тәжірибеде істемей қалатын элементтер саны ξ -дің үлестіру заңы жасалсын.

Шешуі. Дискретті кездейсоқ шама ξ (бір тәжірибеде істемей қалған элементтер саны)-дің мүмкін болатын мәндері:

$$x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3.$$

Оларға сәйкес ықтималдықтарды Бернулли формуласын қолданып табамыз: $n=3, p=0,1, q=1-p=0,9$.

$$P_3(0)=q^3 = 0,9^3=0,729; \quad P_3(1)=C_3^1 p q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2=0,243;$$

$$P_3(2)=C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9=0,027; \quad P_3(3)=p^3 = 0,1^3=0,001.$$

Алынған нәтижелерден кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру заңын беретін келесі кесте құрылады.

ξ	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

$$\sum_{i=0}^3 P_i = 0,729+0,243+0,027+0,001=1.$$

2-мысал. ҚазҰТУ-дың металлургия институтында 600 студент оқиды. 1-қыркүйек осы институттың k студентінің 90

туылған күні болу ықтималдығын $k=0,1,2,3$ мәндерінде есептеңіз.

Шешуі. $n = 600$, яғни үлкен сан; кез келген студенттің туылған күні 1-қыркүйек болу ықтималдығы $p = \frac{1}{365} < 0,1$.

Ендеше, 1-қыркүйекте туылған студенттер саны ξ -кездейсоқ шама болып, ол Пуассон заңы бойынша үлестірілген болады. (7.5) формуласын қолданамыз.

$$\lambda = np = 1,644. \quad p_0 = \{\xi = 0\} = e^{-\lambda} \approx 0,194.$$

Қалғандарын рекуренттік жолмен анықтаймыз.

$$P_1 = P\{\xi = 1\} = \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot P_0 \approx 0,298,$$

$$P_2 = P\{\xi = 2\} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{2} \cdot P_1 \approx 0,298,$$

$$P_3 = P\{\xi = 3\} = \frac{\lambda}{3} \cdot P_2 \approx 0,134.$$

3-мысал. Тексерілуі тиіс болатын бөлшектер жиынының 10%-ы ақаулы екені белгілі. Тексеру үшін бір-бірлеп алынған алдыңғы төрт бөлшек ақаусыз болып, бесіншісі ақаулы болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. (7.6) формуласын қолданамыз.

$$p = 0,1; \quad k = 5.$$

$$P\{\xi = 5\} = 0,9^4 \cdot 0,1 \approx 0,066.$$

4-мысал. Дүкендегі 100 электр шамының 5 данасы жарамсыз. Кездейсоқ 2 шам сатып алынды, екеуінің де жарамды болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. (7.7) формуласын қолданамыз. $N = 100$, $M = 95$, $N - M = 5$, $n = m = 2$.

$$P\{\xi = 2\} = \frac{C_{95}^2 \cdot C_5^0}{C_{100}^2} = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \approx 0,9.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Дискретті кездейсоқ шама ξ мынадай үлестіру заңдарымен берілген:

а)

ξ	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

ә)

ξ	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

үлестіру көпбұрышын құрыңыз.

2. Дискретті кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру заңы мынадай:

ξ	2	5	8
P	0,4	0,15	P_3

P_3 -ді табыңыз.

Жауабы: $P_3 = 0,45$.

3. Ойын сүйегі 3 рет тасталған. 6 ұпайдың шығу санының үлестіру заңын жазыңыз.

Жауабы:

ξ	3	2	1	0
P	1/216	15/216	75/216	125/216

4. Егер үш тәуелсіз тәжірибенің әрбіреуінде А оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,6 болса, онда оның пайда болу саны ξ -дің үлестіру заңын жазыңыз.

Жауабы:

ξ	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

5. Егер қолжазбаның әрбір бетінде кемінде бір қате болу ықтималдығы 0,95 болса, онда қолжазбаның әрбір бетіндегі қателердің орташа санын табыңыз. Қателердің орташа саны Пуассон заңы бойынша үлестірілген деп ұйғарылады.

Жауабы: 3.

6. Көлемі 1000 беттік қолжазбаның 1000 қатесі бар. Таңдамай алынған бетте: а) кемінде бір қате; ә) 2 қате; б) екіден кем емес қате болу ықтималдықтарын табыңыз. Қателер саны Пуассон заңы бойынша үлестірілген деп ұйғарылады.

Жауабы: а) $P=1 - e^{-1}=0,6321$, ә) $P(2)=0,18395$, б) $P=0,2642$.

7. Ойын сүйегі 6 ұпайы шыққанша тасталады. 6 ұпайының екінші рет тастағанда шығу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $P(\xi=2)=5/36$.

8. Жәшіктегі 12 бөлшектің 8-і үлгілі. Таңдамай алынған 5 бөлшектің 3-і үлгілі болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $P(\xi=3)=\frac{14}{33}$.

9. Тәжірибе нәтижесінде А оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0.001-ге тең. 2000 тәуелсіз тәжірибеде А оқиғасының k рет пайда болу ықтималдығын табыңыз. Оны k -ның 0,1,2,3 мәндерінде есептеңіз.

Жауабы: $P\{k=0\} \approx 0,135$, $P\{k=1\} \approx 0,271$,

$P\{k=2\} \approx 0,271$, $P\{k=3\} \approx 0,180$.

10. Атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы $P=0,6$. Үшінші рет атылған оқтың нысанаға тиюі ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $P=0,096$.

8-дәріс. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар

8.1. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың үлестіру функциялары және үлестіру тығыздықтары

Енді мәндері қандайда бір аралықты үзіліссіз толтыратын кездейсоқ шамаларды зерттеуге өтейік. Бұндай шамалардың барлық мәндерін және бұл мәндерді қабылдау ықтималдықтарын тауып кесте құру мүмкін емес. Сондықтан үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестіру заңы, оның мәндерінің қандайда бір аралыққа түсу ықтималдығын анықтауға мүмкіндік беретін аса маңызды сипаттамасы болуы тиіс.

1-анықтама. Кездейсоқ ξ шамасының x -тан кіші мәндерді қабылдауы оқиғасының ықтималдығын, яғни $P\{\xi < x\}$ -ті оның ықтималдығын үлестіру функциясы деп атайды және $F(x)$ пен белгіленеді, яғни

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

Бұл теңдік мынадай геометриялық мағынаға ие. Егер кездейсоқ шама ξ -дің қабылдайтын мәндерін Ox өсінің нүктелері деп қарастырсақ, онда $F(x)$ үлестіру функциясы, кездейсоқ нүкте ξ -дің қабылдайтын мәндері x нүктесінің сол жағына түсуі ықтималдығын анықтайды.

Енді 1-анықтамаға негізделіп үзіліссіз кездейсоқ шаманың келесі анықтамасын берелік.

2-анықтама. Егер кездейсоқ ξ шамасының үлестіру функциясы $F(x)$ сан өсінде үзіліссіз функция болса, онда ξ -ді үзіліссіз кездейсоқ шама деп атайды.

Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың үлестіру функциясы жалпы ұғым болып, ол арқылы дискретті кездейсоқ шамалардың үлестіру заңын да анықтауға болады.

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{-\infty < \xi < x\} = \sum_{x_i < x} P\{\xi = x_i\}. \quad (8.1)$$

Бұл формуладағы $x_i < x$, теңсіздігі – қосынды дискретті ξ кездейсоқ шамасының X -тан кіші барлық мүмкін болатын мәндері бойынша орындалады дегенді білдіреді.

$F(x)$ функциясы x_{i-1} -мен x_i мәндері аралығында тұрақты, ал x_i -ден оңға өткенде $P_i = P\{\xi = x_i\}$ шамасына секіреді, яғни x_i , $F(x)$ функциясының 1-текті үзіліс нүктесі болады.

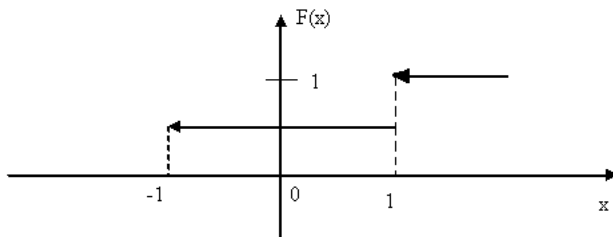
1-мысал. ξ дискретті кездейсоқ шама болып, ол тек ғана -1 және 1 мәндерін әрбірі $0,5$ -ге тең ықтималдықтарымен қабылдасын. Осы ξ шамасының үлестіру функциясы табылсын.

Шешуі. Егер $x \leq -1$ болса, онда $P\{\xi < x\} = 0$, себебі $\{\xi < -1\}$ мүмкін емес оқиға. Есептің шарты бойынша $\{\xi < x\}$ оқиғасы, $-1 < x \leq 1$ болғанда ғана пайда болады. Егер ξ шамасы -1 -ді қабылдаса, онда $P\{\xi < x\} = \frac{1}{2}$. Егер $x > 1$ болса, онда $P(\xi < x) = 1$.

Жалпы түрде жазамыз.

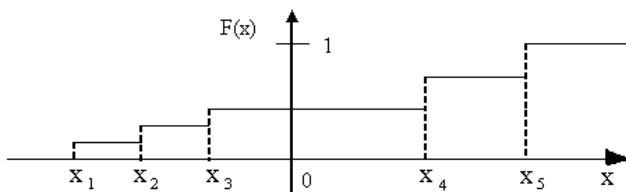
$$F(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{егер } -1 < x \leq 1 \\ 1, & \text{егер } x > 1. \end{cases}$$

$F(x)$ функциясының графигі 8.1-суретте келтірілген.



8.1-сурет

2-мысал. $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндерді $p_1, p_2, \dots, p_n$ ықтималдықтарымен қабылдайтын кез келген дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру функциясының графигі, 1-текті үзілістерге ие, басқышты функция болады (8.2-сурет).



8.2-сурет

Теорема. Үлестіру функциясы $F(x)$ болатын кездейсоқ ξ шамасы мәндерінің (a, b) аралыққа түсу ықтималдығы келесі формуламен анықталады:

$$P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a). \quad (8.2)$$

Дәлелдеу. Егер $a < b$ болса, онда $\{\xi < b\}$ оқиғасы екі $\{\xi < a\}$ және $\{a \leq \xi < b\}$ үйлесімсіз оқиғаларының кемінде біреуі пайда болғанда ғана жүзеге асады. Яғни:

$$\{\xi < b\} = \{\xi < a\} + \{a \leq \xi < b\},$$

Ықтималдықтарды қосу теоремасы бойынша

$$P\{\xi < b\} = P\{\xi < a\} + P\{a \leq \xi < b\},$$

бұдан

$$P\{a \leq \xi < b\} = P\{\xi < b\} - P\{\xi < a\} = F(b) - F(a).$$

Теорема дәлелденді.

(8.2) теңдіктен $a < b$ болғанда $F(b) - F(a) \geq 0$ шығады. Онда үлестіру функциясы, кемімейтін функция болғаны.

Салдар. Егер $F(x)$ -тің мәндері түгелдей сан өсінде орналасқан болса онда

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= P\{\xi < +\infty\} = 1, \\ F(-\infty) &= P\{\xi < -\infty\} = 0. \end{aligned}$$

Себебі, $\{\xi < -\infty\}$ - мүмкін емес оқиға, ал $\{\xi < +\infty\}$ - ақиқат оқиға.

Сонымен, кездейсоқ ξ шамасының үлестіру функциясы $F(x)$ келесі қасиеттерге ие екен.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$ кемімейтін функция, яғни $a < b$ болғанда, $F(a) \leq F(b)$.
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
4. $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a)$.

Үлестіру функциясын кейде интегралдық үлестіру функциясы немесе үлестірудің интегралдық заңы деп те атайды.

Үзіліссіз кездейсоқ шамаларды зерттеу үшін үлестірудің интегралдық заңымен қатар оның дифференциалдық заңы да қарастырылады.

Айталық, $F(x)$ функциясының $F'(x)$ туындысы бар болсын, яғни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \quad (8.3)$$

3-анықтама. Кездейсоқ ξ шаманы үлестіру функциясының туындысын, оның үлестіру тығыздығы деп атайды және ол $f(x)$ -пен белгіленеді.

Яғни $F'(x) = f(x)$.

Енді үлестіру тығыздығының ықтималдық мағынасын ашалаық. (8.2) формуласы бойынша

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P\{x \leq \xi < x + \Delta x\} \text{ болғандықтан}$$

$$F'(x) = f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}. \quad (8.4)$$

(8.4) теңдікті келесі түрде жазуға болады.

$$P\{x \leq \xi < x + \Delta x\} = f(x)\Delta x + o(\Delta x). \quad (8.5)$$

Мұндағы $o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$ да шексіз аз шама. Δx -тің өте аз мәндерінде (8.5)-тен келесі жуық теңдік шығады:

$$P\{x \leq \xi < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x. \quad (8.6)$$

Яғни, кездейсоқ шама ξ -дің $(x, x + \Delta x)$ интервалдан мән қабылдау ықтималдығы, үлестіру тығыздығы мен интервал ұзындығы Δx -тің көбейтіндісіне жуық тең екен.

Үлестіру тығыздығы мынадай қасиеттерге ие:

1. $F(x)$ кемімейтін функция болғандықтан, $F'(x) \geq 0$, онда $f(x) = F'(x) \geq 0$.

2. Үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын кездейсоқ ξ шамасы мәндерінің (a, b) аралыққа түсу ықтималдығы келесі формуламен анықталады:

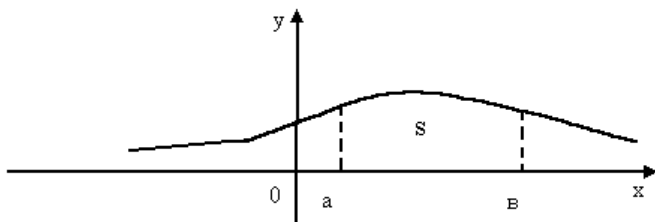
$$P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b f(x)dx. \quad (8.7)$$

Дәлелдеуі. (a, b) аралығын ұсақ интервалдарға бөлеміз; егер i -ші интервалдың ұзындығы Δx_i болса, онда ξ -дің мәнінің осы интервалға түсу ықтималдығы (8.6) формуласы бойынша $f(x_i)\Delta x_i$ -ге тең, бұндай ықтималдықтарды қосып, кейін $\Delta x_i \rightarrow 0$ шекке көшсек (8.7) шығады.

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P\{-\infty < \xi < +\infty\} = 1. \quad (8.8)$$

Дәлелдеуі. (8.8) меншіксіз интегралы кездейсоқ шама ξ -дің $(-\infty, \infty)$ интервалдан мән қабылдау оқиғасының ықтималдығы болғандықтан, ол бірге тең.

$f(x)$ функциясының графигін үлестіру қисығы деп атайды. (8.7) формуласы геометриялық мағынасы бойынша, жоғарыдан үлестіру тығыздығының графигімен, бүйір жақтарынан $x=a$, $x=b$ түзулерімен, төменнен Ox осінің $[a, b]$ кесіндісімен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданын береді (8.3-сурет).



8.3-сурет

(8.7) формуласына мынадай механикалық мағына беруге болады. Егер мейлінше кіші $(x; x+\Delta x)$ интервалда жиылған массаның жуық мәні $f(x)\Delta x$ болса, онда (a, b) аралықта жиылған масса $\int_a^b f(x)dx$ -мен анықталады.

Ескерту. Үзіліссіз кездейсоқ ξ шамасының алдын ала көрсетілген анық бір a мәнді қабылдау ықтималдығы нөлге тең.

Шынында да, (8.2) формуласы бойынша

$$P\{a \leq \xi < x\} = F(x) - F(a).$$

Соңғы теңдікте $x \rightarrow a$ шекке көшсек,

$$P\{\xi = a\} = \lim_{x \rightarrow a} P\{a \leq \xi < x\} = \lim_{x \rightarrow a} [F(x) - F(a)] = F(a) - F(a) = 0.$$

Сонымен, ξ -дің нақты бір a мәнді қабылдау ықтималдығы нөлге тең болуы үшін $F(x)$ функциясы a нүктесінде үзіліссіз болуы қажет екен.

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{-\infty < \xi < x\} \quad \text{болғандықтан,} \quad (8.7)$$

формуласы бойынша үлестіру функциясы үлестіру тығыздығы арқылы келесі формуламен анықталады:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du, \quad (8.9)$$

Сондай-ақ мына теңдік те орынды:

$$P\{\xi \geq x\} = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(u) du.$$

Енді практикада жиі ұшырасатын кейбір маңызды үлестірулерді қарастыралық.

8.2. Бірқалыпты үлестіру

Анықтама. Егер үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы $[a, b]$ кесіндісінде тұрақты болып, одан тыста нөлге тең болса, онда кездейсоқ шаманың мұндай үлестіруін бірқалыпты үлестіру дейді. Сонымен,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < a, x > b, \\ c = \text{const}, & \text{егер } a \leq x \leq b. \end{cases}$$

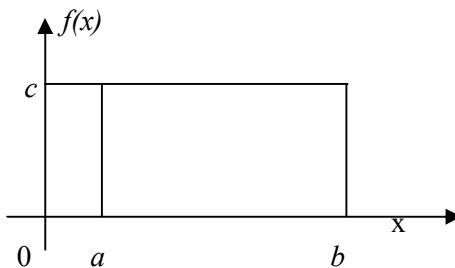
Үлестіру қисығы мен қоршалған аудан бірге тең болғандықтан

$$\int_a^b f(x) dx = c \int_a^b dx = c(b - a) = 1; \quad c = \frac{1}{b - a}.$$

Онда үлестіру тығыздығы келесі түрде жазылады:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < a, x > b, \\ \frac{1}{b - a}, & \text{егер } a \leq x \leq b. \end{cases} \quad (8.10)$$

Бірқалыпты үлестіру тығыздығының графигі 8.4-суретте бейнеленген.



8.4-сурет

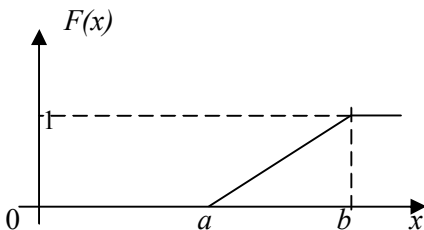
Енді (a, b) интервалда бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың үлестіру функциясын жазайық. (8.9) формуласы бойынша:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Сонымен,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{егер } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{егер } x > b. \end{cases} \quad (8.11)$$

$F(x)$ -тің графигі 8.5-суретте бейнеленген.



8.5-сурет

Бірқалыпты үлестіру жиі қолданылады. Мысалы, өлшеу нәтижесінде жіберілетін қателіктер белгілі бір интервалда бірқалыпты үлестірілуге ие. Атқыш құралдарының көрсеткіштерін талдағанда, заттың салмағын, ұзындығын дәл өлшегенде және т.б. есептерді шешкенде бірқалыпты үлестірілуді қолданған ыңғайлы болады.

8.3. Көрсеткішті үлестіру

1-анықтама. Кездейсоқ уақыт аралығында, бірінен кейін бірі пайда болатын оқиғалардың тізбегін оқиғалар ағымы деп атайды.

2-анықтама. Егер:

а) Кез келген уақыт аралығында оқиғаның бір немесе бірнеше рет пайда болу ықтималдығы, уақыттың басталған сәтінен тәуелсіз болып, тек қана уақыт аралығының ұзындығына тәуелді болса;

ә) Аталған ықтималдық, сол уақытқа дейін оқиғаның қанша рет пайда болғанынан, немесе пайда болмағанынан тәуелсіз болса;

б) Қысқа Δt уақыт аралығында оқиғаның бір рет пайда болу ықтималдығы $P_1(\Delta t)$, шамамен алғанда, уақыт аралығына пропорционал болып, ал оқиғаның екі немесе одан көп рет пайда болу ықтималдығы $\Delta t \rightarrow 0$ да шексіз аз шама, яғни

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad \sum_{i=2}^{\infty} P_i(\Delta t) = o(\Delta t) \quad (8.12)$$

болса, онда мұндай ағым оқиғалардың қарапайым ағымы деп аталады. Мұндағы $\lambda = \text{const} > 0$, ал $o(\Delta t)$, $\Delta t \rightarrow 0$ да шексіз аз шама.

Оқиғалардың қарапайым ағымының бірінен кейін бірі пайда болатын кез келген екі оқиғасы арасындағы уақытты кездейсоқ ξ шамасы деп қарастырсақ, онда оның үлестірілуі көрсеткішті заңға келтіріледі.

Кездейсоқ ξ шамасының t -дан кіші мәндерді қабылдау ықтималдығын, яғни $P\{\xi < t\}$ -ны есептелік. Ол үшін алдымен

керісін, яғни $(0, t)$ уақыт аралығында оқиғаның пайда болмау ықтималдығын, яғни $P\{\xi \geq t\} = \varphi(t)$ -ны анықталық. Дифференциалдық теңдеу құрамыз.

Оқиғаның Δt уақыт аралығында бір, екі, ... рет пайда болуы немесе пайда болмауы ықтималдықтарының қосындысы бірге тең болғандықтан, (8.12) теңдіктерінен пайдаланып, оқиғаның Δt уақыт аралығында пайда болмауы ықтималдығы үшін

$$\varphi(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

теңдігін жазамыз.

Оқиға $(0, t + \Delta t)$ уақыт аралығында пайда болмауы үшін, ол $(0, t)$ уақыт аралығында және $(t, t + \Delta t)$ уақыт аралығында пайда болмауы қажет. Онда тәуелсіз оқиғаларды көбейту теоремасы бойынша:

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) \cdot \varphi(\Delta t).$$

$\varphi(\Delta t)$ -ның мәнін соңғы теңдікке қойып ықшамдағаннан кейін

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = -\lambda \varphi(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \cdot \varphi(t)$$

шығады. $\Delta t \rightarrow 0$ шекке көшіп

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\lambda \varphi$$

дифференциалдық теңдеуін аламыз. Оның $\varphi(0) = 1, \varphi(t) \leq 1$ шарттарды қанағаттандыратын шешімі

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t}$$

болады. Сонымен,

$$F(t) = P\{\xi < t\} = 1 - P\{\xi \geq t\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

3-анықтама. Үлестіру функциясы

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0, \\ 0, & \text{егер } x < 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

болатын ξ кездейсоқ шамасы λ параметрлі көрсеткішті заң бойынша үлестірілген деп аталады.

Үлестіру тығыздығы келесі теңдіктен анықталады.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0, \\ 0, & \text{егер } x < 0. \end{cases} \quad (8.14)$$

Көрсеткішті үлестіру заңы физикада, биологияда, сенімділік теориясының есептерінде, жалпылай қызмет көрсету теориясында тағы басқа салаларда жиі қолданылады.

8.4. Гамма үлестіру

Математикалық анализ курсынан

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad (a > 0)$$

функцияның Гамма – функция деп аталатыны белгілі. $\Gamma(x)$ функциясына қатысты келесі теңдіктерді келтірелік.

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. Кез келген бүтін $a > 0$ үшін

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a-1) \cdot a = a!;$$

$$3. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi};$$

4. Кез келген бүтін $n > 0$ үшін,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\text{Мысалы, } \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

Мынадай теңдік орынды болады:

$$5. \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (8.15)$$

Анықтама. Үлестіру тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \ell^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{егер } x > 0, \\ 0, & \text{егер } x < 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

болатын ξ кездейсоқ шамасы, (α, β) параметрлі Гамма заңы бойынша үлестірілген деп аталады.

Дербес жағдайда, $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{\lambda}$ болса, онда Гамма-үлестіруден көрсеткішті үлестіру шығады.

8.5. Қалыпты үлестіру

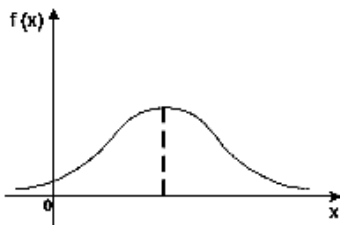
Ықтималдықтар теориясында қалыпты үлестірім (Гаусс үлестіруі) ерекше маңызға ие.

Анықтама. Егер кездейсоқ ξ шамасының үлестіру тығыздығы:

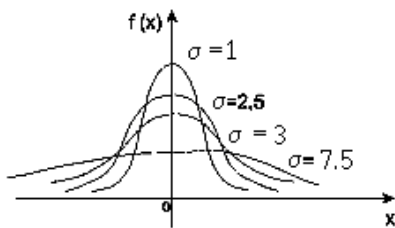
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.17)$$

болса, онда ξ шамасы a және σ параметрлі қалыпты заң бойынша үлестірілген деп аталады.

(8.17) үлестіру тығыздығын жалпы ереже бойынша зерттеп оның графигін салуға болады, ол **қалыпты қисық немесе Гаусс қисығы** деп аталады. Қалыпты үлестіру қисығының графигі 8.6-суретте көрсетілген.



8.6-сурет



8.7-сурет

Гаусс қисығының түріне a, σ параметрлерінің әсерін қарастырайық: $f(x)$ пен $f(x-a)$ функциялары графиктерінің түрлері бірдей болғандықтан, a -ның өзгеруі Гаусс қисығының түрін өзгертпейді, тек қана ox өсі бойымен оңға ($a>0$) немесе солға ($a<0$) жылжиды. (8.17) функциясының максимумы $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

болғандықтан, σ өссе қисық ординатасы кемиді, ал σ кемісе ординатасы өсіп "шың" түріне ие болады. 8.7-суретте $a=0$ және σ -ның әртүрлі мәндеріндегі Гаусс қисығы бейнеленген.

(0;1) параметрлі қалыпты заң бойынша үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының үлестіру функциясы келесі теңдікпен анықталады:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

(a, σ) параметрлі қалыпты заң бойынша үлестірілген кездейсоқ шаманың үлестіру функциясы $F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ болады. Шынында да, егер ξ шамасы a және σ параметрлі қалыпты үлестірілген болса, онда $\frac{\xi - a}{\sigma}$ кездейсоқ шамасы (0, 1) параметрлі қалыпты үлестірілген болады. Сондықтан,

$$P\{\xi < x\} = P\left\{\frac{\xi - a}{\sigma} < \frac{x - a}{\sigma}\right\} = F\left(\frac{x - a}{\sigma}\right). \quad (8.18)$$

Егер ξ қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама болса, онда оның (α, β) интервалда болу ықтималдығын (8.7) формуласын қолданып табамыз:

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (8.19)$$

Соңғы интегралда $\frac{x-a}{\sigma} = z$ алмастыруын жасап жоғарыдағыдай түрлендірулерден кейін мынадай формулаға ие боламыз:

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (8.20)$$

(8.20) формуласын қолданып, қалыпты үлестірілген ξ кездейсоқ шамасы мәндерінің a параметрінен ауытқуының абсолют мәні ε -нан кіші болу ықтималдығын табамыз.

$$\begin{aligned} P\{|\xi - a| < \varepsilon\} &= P\{a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Мұндағы $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ — Лаплас функциясы, ол

кестелеген, кестесі қосымшада келтірілген.

Өмірдің және ғылымның түрлі салаларындағы құбылыстарда, көптеген кездейсоқ шамалардың үлестірілуі қалыпты заң бойынша орындалатыны байқалады. Мысалы, әртүрлі қалаларда орналасқан металл өңдеу станоктарында дайындалатын бұйымдардың өлшемдері қалыпты заң бойынша үлестірілген. Қандайда бір облыстың әртүрлі аудандарында егілген бидайдың өнімділігі қалыпты заң бойынша үлестірілген. Саны өте көп ерлер немесе әйелдер тобының денелерінің өлшемдері (бойы, қолдарының ұзындығы, көкірегінің шеңбері, тағы басқа) қалыпты заң бойынша үлестірілген. Бұларға ұқсас мысалдарды қанша қажет болса соншасын келтіруге болады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары.

1. Үлестіру функциясының анықтамасын беріңіз.
2. Кездейсоқ шама мәндерінің қандай да бір аралыққа түсу ықтималдығы қандай формуламен анықталады?

3. Үлестіру функциясының қасиеттерін жазыңыз.
4. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың үлестіру функцияларының графиктерінің айырмашылығы қандай?
5. Үлестіру тығыздығының анықтамасын беріңіз.
6. Үлестіру тығыздығының қасиеттерін жазыңыз.
7. Үлестіру қисығы деген не?
8. Үлестіру тығыздығын біле тұра, кездейсоқ шаманың мәндерінің берілген интервалға түсу ықтималдығын қалай табуға болады?
9. Үлестіру функциясы мен үлестіру тығыздығы арасында қандай байланыс бар?
10. Бірқалыпты үлестіру деп қандай үлестіруді айтады?
11. Көрсеткішті үлестіру деп қандай үлестіруді айтады?
12. Гамма – үлестіру деп қандай үлестіруді айтады?
13. Қалыпты үлестірудің анықтамасын беріңіз.
14. Гаусс қисығын зерттеп графикін салыңыз.
15. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама мәндерінің (α, β) интервалында болу ықтималдығының Лаплас функциясы арқылы өрнегін жазыңыз.

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. ξ кездейсоқ шамасы $(1,3)$ интервалында бірқалыпты үлестірілген. Үлестіру тығыздығымен үлестіру функциясын жазыңыз.

Шешуі. (8.10) формуласын қолданып, үлестіру тығыздығын табамыз.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 1, x > 3, \\ \frac{1}{2}, & \text{егер } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

(8.11) формуласын қолданып, үлестіру функциясын табамыз.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 1, \\ \frac{x-1}{2}, & \text{егер } 1 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{егер } x > 3. \end{cases}$$

2-мысал. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру функциясы берілген:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2}, & \text{егер } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{егер } x > 2. \end{cases}$$

ξ -дің $(-1, 1)$ интервалдан мәндер қабылдау ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. (8.2) формуласын қолданамыз.

$$P\{-1 < \xi < 1\} = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

3-мысал. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру тығыздығы берілген:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0, \\ Ae^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0. \end{cases}$$

$\lambda > 0$ берілген тұрақты деп, A тұрақтыны табыңыз және ξ -дің үлестіру функциясын жазыңыз.

Шешуі. (8.8) формуласын қолданып, A -ны табамыз.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} Ae^{-\lambda x} dx = -\frac{A}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\lambda} = 1.$$

$A = \lambda$. (8.9) формуласын қолданып үлестіру функциясын табамыз.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \lambda \int_0^x e^{-\lambda u} du = -e^{-\lambda u} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

4-мысал. ξ кездейсоқ шамасы, параметрлері $a = 0, \sigma = 2$ болатын қалыпты заң бойынша үлестірілген.

а) $P\{-2 < \xi < 3\}$; ә) $P\{|\xi| < 0,1\}$ ықтималдықтарды табыңыз.

Шешуі. а) (8.20) формуласын қолданамыз.

$$P\{-2 < \xi < 3\} = \Phi\left(\frac{3-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right) = \Phi(1,5) + \Phi(1).$$

Лаплас функциясының кестесінен $\Phi(1,5) = 0,43319$; $\Phi(1) = 0,34134$ - терді табамыз. Сонымен,

$$P\{-2 < \xi < 3\} = 0,77453.$$

ә) (8.21) формуласын қолданамыз.

$$P\{|\xi| < 0,1\} = 2\Phi\left(\frac{0,1}{2}\right) = 2\Phi(0,05) = 0,03988$$

5-мысал. Қалыпты заң бойынша үлестірілген ξ кездейсоқ шамасы үшін $P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 0,9973$ теңдігі орындалатын ε -ның мәнін табыңыз.

Шешуі. (8.21) формуласын қолданамыз.

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,9973. \quad \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,49865.$$

Лаплас функциясының кестесінен $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 3$ -ті табамыз.

Демек, $\varepsilon = 3\sigma$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары.

1. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру функциясы берілген.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq -1, \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & \text{егер } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{егер } x > 2. \end{cases}$$

ξ -дің $(0,1)$ интервалдан мәндер қабылдауы ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $\frac{1}{3}$.

2. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру функциясы берілген.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq -2, \\ \frac{x}{2} - 1, & \text{егер } -2 < x \leq 4, \\ 1, & \text{егер } x > 4. \end{cases}$$

ξ -дің қабылдайтын мәндері $(2,3)$ интервалда болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $\frac{1}{2}$.

3. Дискретті кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру заңы келесі кестемен берілген.

ξ	2	6	10
P	0,5	0,4	0,1

Үлестіру функциясының графигін құрыңыз.

4. Кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы берілген:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}, \\ a \cos x, & \text{егер } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a коэффициентін табыңыз.

Жауабы: $a = \frac{1}{2}$.

5. Кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы мынадай:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} \sin x, & \text{егер } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{егер } x > \pi \end{cases}$$

а) үлестіру функциясын табыңыз; ә) кездейсоқ шама мәндерінің $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ аралықта болу ықтималдығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{егер } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{егер } x > \pi. \end{cases}$$

6. Кездейсоқ шаманың үлестіру функциясы берілген:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0, \\ x, & \text{егер } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{егер } x > 1. \end{cases}$$

Үлестіру тығыздығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{егер } x \leq 0, x \geq 1. \end{cases}$$

7. Кездейсоқ шама ξ көрсеткішті заңмен үлестірілген:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$$

ξ -дің мәндері $(0, 4; 1)$ интервалда болу ықтималдығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } P(0,4 < \xi < 1) = 0,13.$$

8. Параметрі $\lambda = 5$ болатын, көрсеткішті заңмен үлестірілген кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру функциясын және үлестіру тығыздығын табыңыз.

Жауабы: $F(x) = 1 - e^{-5x}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases}$$

9-дәріс. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

9.1. Кездейсоқ шаманың математикалық үміті және оның қасиеттері

Кездейсоқ шамалардың үлестіру функциясы немесе үлестіру тығыздығы оларды толық сипаттайтыны белгілі болды. Кейбір жағдайларда кездейсоқ шаманың үлестіру заңы белгісіз болуы мүмкін, немесе кездейсоқ шаманы толық сипаттау шарт болмай, оның тек ғана айрым параметрлерін анықтау жеткілікті болады: мысалы, кездейсоқ шаманың орташа мәні, орташа мәннен ауытқуының шашыраңқылық дәрежесін сипаттайтын қандайда сан т.б.. Мынадай мысалды қарастырайық.

Ұтысты лотереяда билеттердің барлық саны N болып, олардан m_1 билеттің әрбіреуіне k_1 теңгеден, m_2 билет k_2 , ..., m_n билетке k_n теңгеден ұтыс белгіленген болсын. $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Онда бір билеттің орташа бағасы (билеттің барлық санының орташа бағасына көбейтіндісі ұтысқа шағарылған ақшаға тең болуы тиіс):

$$a = \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_n m_n}{N} = k_1 \frac{m_1}{N} + k_2 \frac{m_2}{N} + \dots + k_n \frac{m_n}{N} \quad (9.1)$$

формуласымен анықталады.

Айталық, ξ әрбір билеттің ұтысы болатын кездейсоқ шама болсын. Онда кездейсоқ ξ шамасы $k_1, k_2, \dots, k_n$ мәндерді сәйкес $\frac{m_1}{N}, \frac{m_2}{N}, \dots, \frac{m_n}{N}$ ықтималдықтармен қабылдайды. Ал, a саны кездейсоқ ξ шамасының орташа мәні деп аталады. (9.1) теңдікті былай жазуға да болады:

$$a = \sum_{i=1}^n k_i P\{\xi = k_i\}.$$

1-анықтама. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ мәндерді $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ықтималдықтармен қабылдайтын дискретті кездейсоқ ξ шамасының математикалық үміті деп

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (9.2)$$

санды айтады.

2-анықтама. Үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын үзіліссіз кездейсоқ ξ шамасының математикалық үміті деп

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (9.3)$$

санды айтады.

Сонымен, кездейсоқ ξ шамасының математикалық үміті кездейсоқ емес тұрақты сан екен.

(9.3) меншіксіз интегралы жинақсыз болатын жағдайда математикалық үміт болмайды. (9.2), (9.3) формулаларының құрылымдары бірдей: (9.2)-дегі p_n -нің қызметін (9.3)-те ықтималдық элементі $f(x)dx$ орындайды.

Кейде "математикалық үміт" термині орнына кездейсоқ шаманың "орта мәні" термині де қолданылады.

Математикалық үміт ұғымы мынадай механикалық мағынаға ие.

Абсцисса өсі бойлап сызықты үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын бірлік масса орналастырылған болсын. Онда (9.3) формуласы ауырлық центрінің абсциссасын береді.

9.2. Математикалық үміттің қасиеттері

1. Егер кездейсоқ ξ шамасының барлық мәндері $[a, b]$ аралықта жатса, онда $a \leq M\xi \leq b$.

2. $MC = C$, C – тұрақты шама.

3. $MC\xi = CM\xi$.

Дәлелдеу. Кездейсоқ ξ шамасының үлестіру заңы келесі кестемен берілсін:

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

Онда $C\xi$ шамасының үлестіру заңы келесі түрде болады:

$C\xi$	Cx_1	Cx_2	...	Cx_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

(9.2) формуласын қолданып, $C\xi$ шамасының математикалық үмітін табамыз.

$$MC\xi = Cx_1 p_1 + Cx_2 p_2 + \dots + Cx_n p_n + \dots = C(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_n p_n + \dots) = CM\xi.$$

Сонымен, $MC\xi = CM\xi$

4. Екі тәуелсіз кездейсоқ шама көбейтіндісінің математикалық үміті олардың математикалық үміттерінің көбейтіндісіне тең:

$$M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$$

Дәлелдеу. Тәуелсіз ξ және η кездейсоқ шамалары мынадай үлестіру заңдарымен берілсін:

ξ	x_1	x_2	η	y_1	y_2
p	p_1	p_2	g	g_1	g_2

Онда $\xi\eta$ көбейтіндінің қабылдауы мүмкін болатын барлық мәндері: $x_1 y_1, x_2 y_1, x_1 y_2, x_2 y_2$. Көбейтіндінің үлестіру заңын жазайық:

$\xi\eta$	$x_1 y_1,$	$x_2 y_1,$	$x_1 y_2$	$x_2 y_2$
pg	$p_1 g_1$	$p_2 g_1$	$p_1 g_2$	$p_2 g_2$

Ендеше, $M\xi\eta = x_1 y_1 p_1 g_1 + x_2 y_1 p_2 g_1 + x_1 y_2 p_1 g_2 + x_2 y_2 p_2 g_2$, немесе

$$\begin{aligned} M\xi\eta &= y_1 g_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + y_2 g_2 (x_1 p_1 + x_2 p_2) = \\ &= (x_1 p_1 + x_2 p_2)(y_1 g_1 + y_2 g_2) = M\xi M\eta. \end{aligned}$$

Сонымен, $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$.

Бұл қасиет өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалардың саны екіден артық болған жағдай үшін де орындалады.

5. Екі кездейсоқ шама қосындысының математикалық үміті, қосылғыштардың математикалық үміттерінің қосындысына тең.

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$$

Дәлелдеу. ξ және η кездейсоқ шамалары мынадай үлестіру заңдарымен берілсін:

ξ	x_1	x_2	η	y_1	y_2
p	p_1	p_2	g	g_1	g_2

Кездейсоқ $\xi + \eta$ шамасының мүмкін болатын барлық мәндері:

$$x_1 + y_1; x_1 + y_2; x_2 + y_1; x_2 + y_2$$

Бұл мәндерді қабылдау ықтималдықтарын сәйкес $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ -лермен белгілейміз, онда:

Сонда

$$M(\xi + \eta) = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22},$$

немесе

$$M(\xi + \eta) = x_1(P_{11} + P_{12}) + x_2(P_{21} + P_{22}) + y_1(P_{11} + P_{21}) + y_2(P_{12} + P_{22}).$$

Соңғы теңдікте η

$$\text{Ендеше, } M(\xi + \eta) = (x_1 p_1 + x_2 p_2) + (y_1 g_1 + y_2 g_2).$$

$$\text{немесе } M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

Бұл қасиет қосылғыштар саны екіден артық болған жағдай үшін де орындалады.

Жоғарыда келтірілген қасиеттер үзіліссіз кездейсоқ шамалар үшін де орындалатынын дәлелдеуге болады.

9.3. Кездейсоқ шаманың дисперсиясы және оның қасиеттері

Айталық, ξ – кездейсоқ шамасының математикалық үміті $M\xi$ болсын. $\xi - M\xi$ айырым кездейсоқ шаманың математикалық үміттен ауытқуы деп аталады.

ξ кездейсоқ шамасының үлестіру заңы берілсін:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Ауытқудың үлестіру заңы төмендегіше болады:

$\xi - M\xi$	$x_1 - M\xi$	$x_2 - M\xi$	...	$x_n - M\xi$
p	p_1	p_2	...	p_n

Ауытқудың математикалық үміті нөлге тең:

$$M(\xi - M\xi) = 0.$$

Шынында да, $M\xi$ – тұрақты шама болғандықтан,

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0.$$

Көптеген жағдайларда кездейсоқ шама мәндерінің орташа мәнінен шашырауын бағалау талап етіледі. Шашырауды бағалау үшін кездейсоқ шаманың ауытқуының мүмкін болатын барлық мәндерін есептеп, кейін олардың орташа мәнін тапқан ыңғайлыдай болып көрінеді. Бірақ, кез келген кездейсоқ шама үшін ауытқудың орташа мәні, яғни $M(\xi - M\xi)$ нөлге тең болғандықтан бұл әдіс жарамайды.

Сондықтан, ауытқудың квадратының орта мәнін есептеген ыңғайлы.

1-анықтама. Кездейсоқ ξ шамасының дисперсиясы деп математикалық үміттен ауытқуының квадратының математикалық үмітін айтады, яғни

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (9.4)$$

Егер $M\xi = a$ десек, онда

$$D\xi = M(\xi - a)^2.$$

2-анықтама. Егер ξ дискретті кездейсоқ шама болып, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ мәндерді $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ықтималдықтармен қабылдаса, онда оның дисперсиясы

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - a)^2 P_k,$$

$$\text{мұндағы } a = M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} X_k P_k.$$

3-анықтама. Егер ξ , үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын үзіліссіз кездейсоқ шама болса, онда оның дисперсиясы

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f(x) dx. \quad (9.5)$$

Дисперсия ұғымы механикалық мағынасы бойынша, массаның ауырлық орталығына қарағандағы инерция моментін береді.

Кездейсоқ ξ шамасының дисперсиясын

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \quad (9.6)$$

формуласын қолданып есептеген ыңғайлырақ. (9.6) формуласын математикалық үміттің қасиеттерін пайдаланып дәлелдеуге болады.

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M[\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2] = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = \\ &= M\xi^2 - (M\xi)^2. \end{aligned}$$

Дисперсия мынадай қасиеттерге ие:

1. Тұрақты шаманың дисперсиясы нөлге тең, яғни $DC = 0$

Шынында да, $DC = M(C - MC)^2 = M(C - C) = M0 = 0$

2. $D(C\xi) = C^2 D\xi$.

Дәлелдеуі.

$$D(c\xi) = M[c\xi - M(c\xi)]^2 = C^2 M(\xi - M\xi)^2 = C^2 D\xi.$$

3. Екі тәуелсіз кездейсоқ шама қосындысының дисперсиясы бұл шамалардың дисперсияларының қосындысына тең.

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= M(\xi + \eta)^2 - [M(\xi + \eta)]^2 = M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (M\xi + M\eta)^2 = M\xi^2 + \\ &+ 2M\xi M\eta + M\eta^2 - (M\xi)^2 - 2M\xi M\eta - (M\eta)^2 = \\ &= [M\xi^2 - (M\xi)^2] + [M\eta^2 - (M\eta)^2] = D\xi + D\eta. \end{aligned}$$

Бұл қасиет тәуелсіз кездейсоқ шамалар саны екіден артық болған жағдайлар үшін де орынды.

4. Тәуелсіз кездейсоқ шама ξ және η -лар үшін

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta.$$

Дисперсия – кездейсоқ шаманың квадратының өлшеміне ие.

Кездейсоқ шаманың барлық мәндерінің оның орта мәнінен шашырауын бағалау үшін дисперсиямен қатар, орташа квадраттық ауытқу деп аталатын сандық сипаттама да қолданылады.

4-анықтама. Орташа квадраттық ауытқу деп дисперсиядан алынған квадрат түбірді айтады, яғни

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}.$$

Орташа квадраттық ауытқудың өлшемі кездейсоқ шаманың өлшемімен бірдей.

9.4. Жоғары ретті моменттер. Асимметрия, медиана, мода

Момент ұғымы массаның үлестірілуін сипаттау үшін механикада қолданылады (статикалық моменттер, инерция моменттері және т.б.). Ал, кездейсоқ шама мәндерінің үлестірілуін сипаттау үшін ықтималдықтар теориясында да моменттер жиі қолданылады. Практикада көбірек екі түрдегі моменттер – бастауыш және орталық моменттер жиі қолданылады.

1-анықтама. Кездейсоқ ξ шамасының k -ші ретті бастауыш моменті деп, ξ^k шамасының математикалық үмітін айтады:

$$m_k = M\xi^k.$$

2-анықтама. Кездейсоқ ξ шамасының k -ші ретті орталық моменті деп, $(\xi - M\xi)^k$ шамасының математикалық үмітін айтады:

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k.$$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, мәндерді $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, ықтималдықтармен қабылдайтын дискретті кездейсоқ ξ шамасы үшін k -ші ретті орталық момент келесі формула арқылы табылды.

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^k P_i, \text{ мұнда } a = M\xi.$$

Үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын үзіліссіз кездейсоқ ξ шамасы үшін k -ші ретті орталық момент келесі формула арқылы анықталады:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k f(x) dx.$$

Кез келген кездейсоқ ξ шамасы үшін бірінші ретті орталық момент нөлге тең болатыны айқын, себебі

$$M(\xi - a) = M\xi - Ma = 0.$$

Орталық моменттің анықтамасынан екінші ретті орталық момент кездейсоқ шаманың дисперсиясына тең болатыны шығады.

3-анықтама. Егер, кездейсоқ ξ шамасының $y = f(x)$ үлестіру қисығы $x = a$ түзуіне қарағанда симметриялы болса, онда ξ , математикалық үміт $M\xi = a$ -ға қарағанда симметриялы үлестірілген деп аталады.

Симметриялы үлестірілген кездейсоқ шаманың барлық тақ ретті орталық моменттері нөлге тең. Шынында да,

$$\mu_{2k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^{2k+1} f(x) dx = 0.$$

Себебі, тақ функциядан симметриялы аралық бойынша алынған интеграл нөлге тең. Ал, симметриясыз үлестірулердің тақ ретті орталық моменттері нөлге тең емес. Сондықтан

солардың бірін, мысалы 3–реттісін симметриясыздықты сипаттау мақсатында таңдауға болады.

4-анықтама. Кездейсоқ шама ξ -дің үшінші ретті моментінің орташа квадраттық ауытқу кубына қатынасын асимметрия деп атайды.

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}; \quad \sigma = \sqrt{D\xi}.$$

5-анықтама. Кездейсоқ ξ шамасы үшін анық бір m мәнді көрсету мүмкін болып, бұл мән үшін $P\{\xi < m\} = P\{\xi > m\}$ теңдігі орындалса, онда m саны ξ -дің медианасы деп аталады, және Me ξ -мен белгіленеді.

Үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын кездейсоқ ξ шамасының медианасы m келесі теңдіктен анықталады:

$$\int_{-\infty}^m f(x)dx = \int_m^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

6-анықтама. Үлестіру тығыздығы ең үлкен мәнді қабылдайтын x нүктесі кездейсоқ шама ξ -дің модасы деп аталады және Mo ξ -мен белгіленеді.

7-анықтама. Егер кездейсоқ шама ξ -дің модасы жалғыз болса, онда ξ -дің үлестіру қисығын унимодальды деп атайды.

Сонымен, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ мәндерді $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ықтималдықтармен қабылдайтын дискретті кездейсоқ шаманың модасы деп, оның ең үлкен ықтималдықпен қабылдайтын x_i мәнін айтады.

1-мысал. Үлестіру тығыздығы $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ болатын

кездейсоқ ξ шамасы берілген. Осы шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, асимметриясын, медианасын, модасын есептеңіз.

Шешуі.

$$M\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \ell^{-|x|} dx = 0, \text{ себебі } x \ell^{-|x|} \text{ - тақ функция.}$$

$$D\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ell^{-|x|} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 \ell^{-x} dx = \Gamma(3) = 2;$$

мұндағы $\Gamma(x)$ -гамма функция. $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi} = \sqrt{2}$.

Үлестіру симметриялы болғандықтан, барлық тақ ретті моменттері нөлге тең. Үлестіру медианасы нөлге тең. Үлестіру модасы да нөлге тең (үлестіру қисығы $x=0$ болғанда ең үлкен мәнге ие).

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Дискретті кездейсоқ шаманың математикалық үміті деген не?
2. Математикалық үміттің қасиеттерін жазыңыз.
3. Кездейсоқ шаманың дисперсиясы деген не?
4. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясы қандай формуламен анықталады?
5. Дисперсияның қасиеттерін жазыңыз.
6. Орташа квадраттық ауытқу деген не?
7. k -ші ретті бастауыш және орталық моменттердің анықтамаларын беріңіз.
8. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың k – ретті орталық моменті қандай формуламен анықталады?
9. Симметриялы үлестірілген кездейсоқ шама деп қандай шамаға айтылады?
10. Кездейсоқ шаманың асимметриясы деген не?
11. Кездейсоқ шаманың медианасы деген не?
12. Кездейсоқ шама модасының анықтамасын беріңіз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. ξ кездейсоқ шамасы $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндерді $1/n$ ықтималдықтармен қабылдасын. Математикалық үмітін табыңыз.

Шешуі.

$$M\xi = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

2-мысал. ξ кездейсоқ шамасы $[a, b]$ аралықта бірқалыпты үлестірілген болсын. Математикалық үмітін және дисперсиясын табыңыз.

Шешуі.

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{егер } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{егер } x < a, x > b. \end{cases}$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

$$\begin{aligned} D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

3-мысал. ξ Пуассон заңы бойынша үлестірілген кездейсоқ шама болсын. Математикалық үмітін және дисперсиясын табыңыз.

Шешуі:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k \ell^{-\lambda}}{k!} = \ell^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \ell^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = \lambda.$$

Себебі,
$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = e^{\lambda}.$$

$M\xi(\xi - 1) = M\xi^2 - M\xi$ -ді есептейік.

$$M\xi(\xi - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = \lambda^2,$$

бұдан $M\xi^2 = \lambda^2 + \lambda.$

Сонымен, $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda.$

4-мысал. Кездейсоқ ξ шамасы λ параметрлі көрсеткішті заң бойынша үлестірілген болсын. Математикалық үміті табылсын.

Шешуі.

$$M\xi = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x d(e^{-\lambda x}) = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

5-мысал. Кездейсоқ ξ шамасы геометриялық үлестіріммен берілген болсын. Математикалық үмітін табыңыз.

Шешуі. Егер бір рет атылған оқтың тию ықтималдығы p -ға тең болса, ал ξ – бірінші рет тигенше атылған оқтың санын білдірсе, онда

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{\infty} k q^{k-1} = p(1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots).$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

қосындыны есептеу үшін $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$

теңдікті дифференциалдаймыз. Сонда,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Сонымен, $M\xi = P \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = P \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$

6-мысал. Биномды үлестірудің дисперсиясын есептеңіз.
Шешуі.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & p \text{ ықтималдықпен,} \\ 0, & 1-p \text{ ықтималдықпен} \end{cases}$$

қабылдайтын өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалар болып,
 $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ болсын.

Онда $D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i$, $M\xi_i^2 = 1^2 \cdot p + 0^2(1-p) = p$ және

$$D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = p - p^2 = pq.$$

Сонымен, $D\xi = npq$.

7-мысал. Кездейсоқ ξ шамасы мынадай үлестіру заңымен берілген.

ξ	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Орташа квадраттық ауытқуды табыңыз.

Шешуі. ξ және ξ^2 кездейсоқ шамалардың математикалық үмітін табайық.

$$M\xi = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4,$$

$$M\xi^2 = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,5 = 54.$$

Дисперсияны анықтаймыз:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 54 - 6,4^2 = 13,04.$$

Сонымен,

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{13,04} \approx 3,61.$$

8-мысал. Кездейсоқ ξ шамасы қалыпты заң бойынша үлестірілген. Математикалық үмітін, дисперсиясын, асимметриясын, медианасын және модасын табыңыз.

Шешуі.

1) Үзіліссіз кездейсоқ шаманың математикалық үмітінің анықтамасы бойынша:

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \frac{x-a}{\sigma} = z \right|_{dx=\sigma dz} = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + a) \ell^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma z \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Бірінші қосылғыштағы интеграл астындағы функция тақ болғандықтан, ол нөлге тең, ал екінші қосылғышта

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \text{ болғандықтан } M\xi = a.$$

2) Үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясының анықтамасы бойынша

$$D\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \frac{x-a}{\sigma} = z \right|_{dx=\sigma dz} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Соңғы интегралды бөліктеп интегралдасақ, $D\xi = \sigma^2$ шығады.

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma.$$

Қалыпты үлестірудің асимметриясы нөлге тең, себебі бұл үлестіру а нүктесіне қарата симметриялы. Барлық тақ ретті орталық моменттері нөлге тең. Қалыпты үлестірудің медианасы да, модасы да a -ға тең.

9-мысал. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама ξ -дің математикалық үміті 10-ға, орташа квадраттық ауытқуы 2-ге тең. Тәжірибе нәтижесінде кездейсоқ шама ξ (12,14) интервалдан мән қабылдау ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. (8.20) формуласынан пайдаланамыз. $\alpha=12$, $\beta=14$, $a=10$ және $\sigma=2$ берілгендерді (8.20)-ға қойсақ, $P\{12 < \xi < 14\} = \Phi(2) - \Phi(1)$. Қосымшадағы кестеден: $\Phi(2)=0,4772$, $\Phi(1)=0,3413$. Изделінді ықтималдық $P\{12 < \xi < 14\} = 0,1359$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңы мынадай:

ξ	6	3	1
P	0,2	0,3	0,5

Математикалық үмітін табыңыз.

Жауабы: 2,6.

2. Дискретті кездейсоқ шамалардың мынадай үлестіру заңдары берілген.

ξ	1	2
P	0,2	0,8

η	0,5	1
P	0,3	0,7

- а) $\xi + \eta$ -ның математикалық үмітін табыңыз; ә) $\xi\eta$ -ның математикалық үмітін табыңыз.

Жауабы: а) 2,65; ә) 1,53.

3. Тәуелсіз кездейсоқ екі шаманың дисперсиялары: $D\xi = 4$, $D\eta = 3$. $D(\xi + \eta)$ -ны табыңыз.

Жауабы: 7.

4. $D\xi = 5$. а) $D(\xi - 1)$; ә) $D(-2\xi)$; б) $D(3\xi+6)$ -ларды табыңыз.

Жауабы: а) 5; ә) 20; б) 45.

5. Кездейсоқ шаманың үлестіру заңы мынадай:

ξ	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

Дисперсиясын табыңыз.

Жауабы: 67,6404.

6. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру заңы берілген.

ξ	x_1	x_2
P	0,3	0,7

$x_2 > x_1$.

Егер $M\xi = 2,7$, $D\xi = 0,21$ болса, x_1 мен x_2 -ні табыңыз.

Жауабы: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

7. $D\xi = 6,25$ берілген. Орташа квадраттық ауытқу σ_ξ -ді табыңыз.

Жауабы: 2,5.

8. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру заңы берілген.

ξ	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Орташа квадраттық ауытқуын табыңыз.

Жауабы: 2,2.

9. Егер кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq -1, x \geq 1, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{егер } -1 < x < 1, \end{cases}$$

болса, онда оның математикалық үміті мен дисперсиясын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } M\xi = 0, D\xi = \frac{1}{2}.$$

10. Үзіліссіз кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру тығыздығы $f(x) = 4e^{-4x}$, ($x > 0$) берілген. $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ -лерді табыңыз.

$$\text{Жауабы: } M\xi = \sigma_\xi = 0,25; D\xi = 0,0625.$$

11. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру тығыздығы мынадай:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4} & \text{егер } 3 < x < 5, \\ 0, & \text{егер } x \leq 3, x \geq 5. \end{cases}$$

ξ -дің модасын, математикалық үмітін, медианасын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } \text{moda } \xi = \text{med } \xi = M\xi = 4.$$

12. Кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру тығыздығы мынадай:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x, & \text{егер } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{егер } x < 0, x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

ξ -дің модасын, медианасын табыңыз.

Жауабы: Модасы жоқ, себебі $f(x)$ ашық интервалда.

Медианасы $\frac{\pi}{12}$.

13. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама ξ -дің математикалық үміті $a=3$ -ке, ал орташа квадраттық ауытқуы $\sigma=2$ -ге тең. ξ -дің үлестіру тығыздығын жазыңыз.

$$\text{Жауабы: } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-3)^2}{8}\right].$$

14. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру тығыздығы $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$, ξ -дің математикалық үміті мен дисперсиясын табыңыз.

Жауабы: $M\xi = 1$; $D\xi = 25$.

15. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шама ξ -дің математикалық үміті 20-ға, орташа квадраттық ауытқуы 5-ке тең. Тәжірибе нәтижесінде ξ -дің (15;25) интервалдан мәндер қабылдау ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $P\{15 < \xi < 25\} = 0,6826$.

10-дәріс. Кездейсоқ шамалар жүйесі

10.1. Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру функциясы

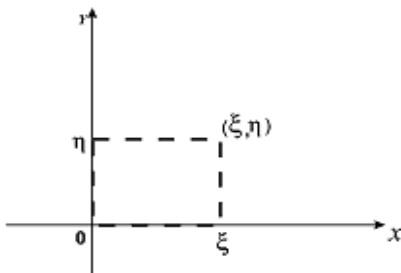
Кездейсоқ құбылыстарды зерттегенде, олардың күрделілігіне сәйкес екі, үш немесе одан да көп кездейсоқ шамаларды қарастыру қажет болады. Мысалы, снарядтың түсу нүктесі кездейсоқ шама болып, ол абсциссасы және ординатасымен анықталады.

Бірге қарастырылатын екі кездейсоқ шама (ξ, η) -лар жиынын екі кездейсоқ шамалар жүйесі деп атайды.

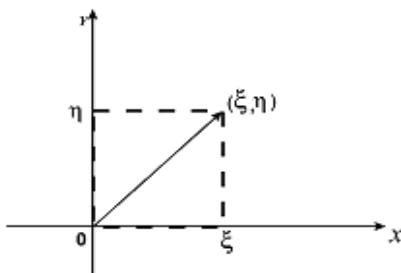
Кездейсоқ шамалар жүйесіне тиісті есептерді қарастырғанда жүйенің геометриялық интерпретациясынан пайдаланған ыңғайлы. Мысалы, екі кездейсоқ (ξ, η) шамалар жүйесін координаталары ξ және η болатын ХОУ жазықтығындағы кездейсоқ нүкте (10.1-сурет), немесе құраушылары кездейсоқ ξ және η шамалары болатын, координаталар бас нүктесінен (ξ, η) нүктесіне қарай бағытталған кездейсоқ вектор (10.2-сурет) деп те қарастыруға болады.

Үш кездейсоқ (ξ, η, ζ) шамалар жүйесі үш өлшеулі кеңістіктегі кездейсоқ нүкте немесе кездейсоқ вектор. n кездейсоқ $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ шамалар жүйесін n өлшеулі

кеңістіктегі кездейсоқ нүкте немесе кездейсоқ вектор деп қарастыруға болады.



10.1-сурет

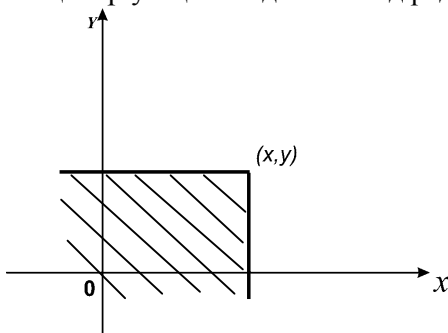


10.2-сурет

Анықтама. Кездейсоқ екі (ξ, η) шамалар жүйесінің үлестіру функциясы деп, $\{\xi < x\}$ және $\{\eta < y\}$ оқиғаларының бір уақытта пайда болу ықтималдығын айтады, яғни

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}. \quad (10.1)$$

$F(x, y)$ функциясы геометриялық мағынасы бойынша, кездейсоқ (ξ, η) нүктесі төбесі, (x, y) нүктесінде болатын ақырсыз квадрантқа түсу ықтималдығын білдіреді (10.3-сурет).



10.3-сурет

Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру функциясы мынадай қасиеттерге ие:

1. Үлестіру функциясы $F(x, y)$ екі аргументі бойынша да кемімейтін функция, яғни

$$x_2 > x_1 \text{ болғанда, } F(x_2, y) \geq F(x_1, y);$$

$$y_2 > y_1 \text{ болғанда, } F(x, y_2) \geq F(x, y_1).$$

$$2. F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0.$$

3. Кездейсоқ ξ және η шамалар жүйесінің үлестіру функциясы бойынша, әрбір ξ және η шамалардың үлестіру функциясын табуға болады.

$$\text{Шынында да, } F_{\xi}(x) = P\{\xi < x, \eta < +\infty\} = F(x, +\infty),$$

$$F_{\eta}(y) = P\{\xi < +\infty, \eta < y\} = F(+\infty, y).$$

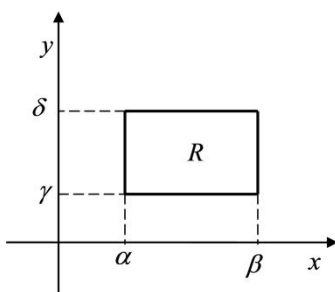
$$4. F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Айталық, D – жазықтықтағы кез келген облыс болсын. (ξ, η) нүктесі D облысына тиісті деген фактіні $(\xi, \eta) \in D$ символымен белгілейік.

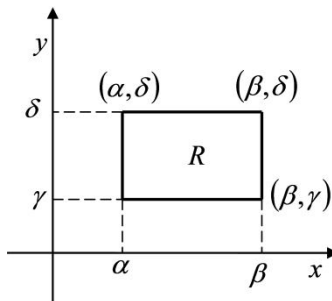
Кездейсоқ нүктенің берілген облысқа түсу ықтималдығы, бұл облыстың қабырғалары координата осьтеріне параллель болған тікбұрыштық болатын жағдайда жеңіл есептеледі. Кездейсоқ (ξ, η) нүктесінің R тік төртбұрыштыққа түсу ықтималдығын, жүйенің үлестіру функциясы арқылы өрнектейік. Ол үшін тік төртбұрыштықтың қабырғаларын қайда еңгізуді келісіп алу керек.

Бір кездейсоқ шамадағы сияқты, R облысқа оның төменгі және сол жағындағы қабырғаларын еңгізуді, ал жоғарғы және оң жағындағы қабырғаларын еңгізбеуді келісіп аламыз.

10.4-суретте тік бұрыштыққа еңгізілген қабырғалар қалың сызықпен сызылған. $\{(\xi, \eta) \in R\}$ оқиғасы мынадай екі оқиғаның: $\{\alpha \leq \xi < \beta\}$ және $\{\gamma \leq \eta < \delta\}$ көбейтіндісіне тең. Бұл оқиғаның ықтималдығын, жүйенің үлестіру функциясы арқылы өрнектейік. Ол үшін ХОУ жазықтығында төбелері $(\beta, \delta), (\alpha, \delta), (\beta, \gamma)$ және (α, γ) болатын төрт шексіз квадрантты қарастырайық.



10.4-сурет



10.5-сурет

R облысқа түсу ықтималдығы (β, δ) квадрантқа түсу ықтималдығы, минус (α, δ) квадрантқа түсу ықтималдығы, минус (β, γ) квадрантқа түсу ықтималдығы, плюс (α, γ) квадрантқа түсу ықтималдығына тең болады (10.5-суретке қараңыз).

Сонымен, кездейсоқ (ξ, η) нүктесінің R тікбұрыштыққа түсу ықтималдығын, жүйенің үлестіру функциясы арқылы өрнектейтін мынадай формуласына ие боламыз:

$$P\{(\xi, \eta) \in R\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma). \quad (10.2)$$

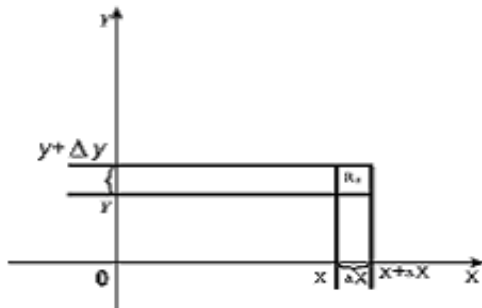
Енді жүйенің үлестіру тығыздығы ұғымын еңгізіп, кездейсоқ нүктенің кез келген түрдегі облысқа түсу ықтималдығының формуласын келтіріп шығарайық.

10.2. Екі кездейсоқ шама жүйесінің үлестіру тығыздығы

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестірілуі, әдетте үлестіру тығыздығымен сипатталады. Үзіліссіз кездейсоқ (ξ, η) шамалар жүйесін $ХОУ$ жазықтығының нүктесі ретінде қарастыралық.

Жазықтықтан қабырғалары Δx және Δy болатын кіші R тіктөртбұрыштық алайық. Кездейсоқ (ξ, η) нүктесінің осы тікбұрыштыққа түсу ықтималдығы (10.2) формуласы бойынша:

$$P\{(\xi, \eta) \in R\} = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y).$$



10.6-сурет

Соңғы теңдіктің екі жағын R тіктөртбұрыштықтың ауданы $\Delta x \cdot \Delta y$ -ке бөліп, $\Delta x \rightarrow 0$ және $\Delta y \rightarrow 0$ шекке көшелік:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\{(\xi, \eta) \in R\}}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)}{\Delta x \times \Delta y}. \quad (10.3)$$

$F(x, y)$ функциясы үзіліссіз және дифференциалданатын функция болсын. Онда (10.3) теңдіктің оң жағы $F(x, y)$ функциясының x және y бойынша алынған екінші ретті аралас дербес туындысын береді. Бұл туындыны $f(x, y)$ деп белгілейік:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y). \quad (10.4)$$

$f(x, y)$ функциясы жүйенің үлестіру тығыздығы деп аталады.

Сонымен, $\Delta x \Delta y$ -ке қарағанда жоғары ретті шексіз аз шамаға дейінгі дәлдікпен мынадай теңдікті жазуға болады:

$$P\{x < \xi < x + \Delta x, y < \eta < y + \Delta y\} = f(x, y) \Delta x \Delta y. \quad (10.5)$$

Кездейсоқ (ξ, η) нүктесінің D облысқа түсу ықтималдығын есептеу үшін D облысын ұсақ тіктөртбұрыштықтарға бөліп әрбір ұсақ тіктөртбұрыштыққа түсу ықтималдығын (10.5) формуласымен анықтаймыз. Мұндай ықтималдықтарды қосып, шекке көшсек келесі формула шығады:

$$P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (10.6)$$

Дербес жағдайда,

$$P\{a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad (10.7)$$

және

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \quad (10.8)$$

Үлестіру тығыздығы келесі қасиеттерге ие:

1. Үлестіру тығыздығы ықтималдық пен аудан қатынасының шегі ретінде анықталғандықтан, $f(x, y) \geq 0$.

2. (10.8) формуласында $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ деп, үлестіру функциясының 4-қасиетін қолдансақ, онда $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

шығады.

Кездейсоқ ξ, η шамалар жүйесінің үлестіру тығыздығы бойынша олардың әрбірінің үлестіру тығыздығын есептеуге болады. Ол келесі формулалар арқылы орындалады:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv,$$

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) du.$$

Кез келген x және y -тер үшін $\{\xi < x\}$ және $\{\eta < y\}$ оқиғалары тәуелсіз болса, онда ξ және η кездейсоқ шамалары тәуелсіз деп аталады. Бұл жағдайда:

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\} = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y).$$

Сонымен, егер ξ және η шамалары тәуелсіз болса, онда жүйенің үлестіру функциясы ξ және η -ның үлестіру функцияларының көбейтіндісіне тең. (10.4) теңдіктен тәуелсіз кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру тығыздығы бұл шамалардың үлестіру тығыздықтарының көбейтіндісіне тең болатыны шығады.

$$f(x, y) = [F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)]'_{xy} = F'_{\xi}(x) \cdot F'_{\eta}(y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y).$$

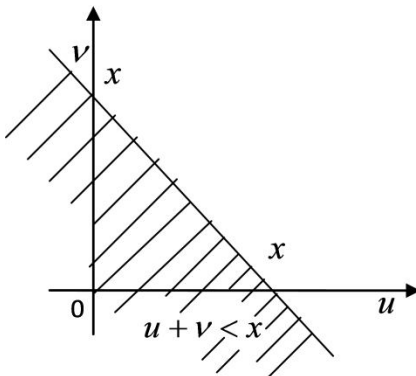
10.3. Екі кездейсоқ шама қосындысы және айырымының үлестірілуі

Кездейсоқ ξ, η шамалар жүйесінің үлестіру тығыздығы $f(x, y)$ берілсін. $\xi + \eta$ қосындысының үлестіру функциясын табайық. Анықтама бойынша

$$F_{\xi+\eta}(x) = P\{\xi + \eta < x\}.$$

Жазықтықта осьтері u және v болатын координата жүйесін алып, $u + v < x$ теңсіздігі орындалатын (u, v) нүктелер жиынынан тұратын D облысын қарастырайық (10.7-сурет). $\{\xi + \eta < x\}$ оқиғасы, (ξ, η) нүктесі D облысына түседі деген оқиға болады. Сондықтан (10.6) формуласын қолданып, келесі формуланы аламыз:

$$F_{\xi+\eta}(x) = P\{\xi + \eta < x\} = P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint_D f(u, v) du dv.$$



10.7-сурет

Д облысы бойынша алынған екі еселі интегралды интегралдау шекараларын қойып жазамыз:

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{x-u} f(u, v) dv \right] du. \quad (10.9)$$

(10.9) теңдігін дифференциалдау арқылы $\xi + \eta$ шамасының үлестіру тығыздығын аламыз:

$$f_{\xi+\eta}(x) = F'_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, x-u) du. \quad (10.10)$$

Дербес жағдайда, егер ξ және η -лар тәуелсіз кездейсоқ шамалар болып, ξ шамасының үлестіру тығыздығы $f_{\xi}(x)$, η шамасының үлестіру тығыздығы $f_{\eta}(x)$ болса, онда:

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(u) f_{\eta}(x-u) du. \quad (10.11)$$

(10.11) өрнек, тәуелсіз кездейсоқ шамалардың композициясы деп аталады. Көбінесе композицияны белгілеу үшін мынадай символика қолданылады:

$$f_{\xi+\eta} = f_{\xi} * f_{\eta},$$

Мұндағы $*$ - композиция символы.

Осындай әдіспен ξ - η айырымның да үлестіру тығыздығын анықтау қиын емес, ол мынадай болады:

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, u-x) du. \quad (10.12)$$

Егер ξ және η -лар тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(u) f_{\eta}(u-x) du. \quad (10.13)$$

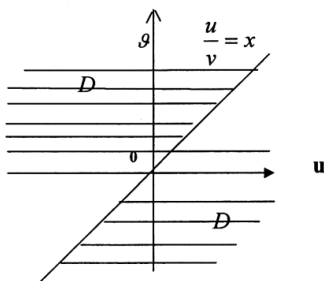
(10.12) формуласын келтіріп шығаруды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

10.4. Екі тәуелсіз кездейсоқ шамалар қатынасымен көбейтіндісінің үлестірілуі

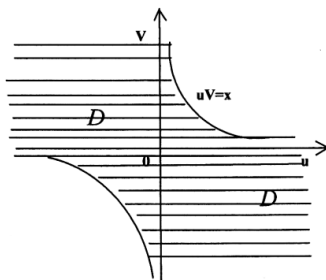
Үлестіру тығыздықтары $f_{\xi}(x)$, $f_{\eta}(x)$ болатын тәуелсіз ξ және η кездейсоқ шамалары берілсін. Кездейсоқ $\frac{\xi}{\eta}$ шамасының үлестіру функциясымен үлестіру тығыздығын табалық.

$$\left\{ \frac{\xi}{\eta} < x \right\} \text{ оқиғасы, кездейсоқ } (\xi, \eta) \text{ нүктесінің } \frac{u}{v} < x$$

теңсіздік орындалатын D облысына түсуі оқиғасы болады (10.8-сурет).



10.8-сурет



10.9-сурет

$\frac{\xi}{\eta}$ шамасының үлестіру функциясын табу үшін (10.8)

формуласын қолданамыз.

$$F_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = P\left\{\frac{\xi}{\eta} < x\right\} = \iint_D f(u, v) du dv = \int_0^{\infty} f_{\eta}(g) \left[\int_{-\infty}^{gx} f_{\xi}(u) du \right] dg + \int_{-\infty}^0 f_{\eta}(g) \left[\int_{gx}^{\infty} f_{\xi}(u) du \right] dg = \int_{-\infty}^0 F_{\xi}(gx) f_{\eta}(g) dg + \int_0^{\infty} f_{\eta}(g) [1 - F_{\xi}(gx)] dg.$$

Бұл теңдікті x бойынша дифференциалдап, $\frac{\xi}{\eta}$ -ның үлестіру

тығыздығын табамыз.

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int_0^{\infty} g f_{\xi}(gx) f_{\eta}(g) dg - \int_{-\infty}^0 g f_{\xi}(gx) f_{\eta}(g) dg = \int_{-\infty}^{\infty} g / f_{\xi}(gx) f_{\eta}(g) dg. \quad (10.14)$$

$\{\xi\eta < x\}$ оқиғасы кездейсоқ (ξ, η) нүктесінің $u\eta < x$

теңсіздік орындалатын D облысына түсуін білдіреді (10.9-сурет). Кездейсоқ шамалардың қатынасының үлестіру тығыздығын табу әдісін қолданып, олардың көбейтіндісінің де үлестіру тығыздығын табу қиын емес, ол мынадай болады:

$$f_{\xi\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|g|} f_{\xi}\left(\frac{x}{g}\right) \cdot f_{\eta}(g) dg = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_{\eta}\left(\frac{x}{u}\right) f_{\xi}(u) du. \quad (10.15)$$

10.5. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың максимумының және минимумының үлестірілуі

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ тәуелсіз кездейсоқ шамалардың үлестіру функциялары бірдей $F(x)$ болсын. Мынадай кездейсоқ шамалардың үлестіру функциясын табайық:

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$\gamma_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Мұндай шамалардың үлестіру заңдарын табу қажеттілігі халық шаруашылығының мынадай есептерін қарастырғанда байқалады: өзендегі судың экстремаль сарыпталуын есептеу, атмосфера қысымының максимумдарын және минимумдарын үйрену, максимальды және минимальды әсер ететін күштерді есептеу және т.б.

Егер $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ шамалардың ең үлкені x -тең кіші болса, онда $\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \dots, \xi_n < x\}$ оқиғасы пайда болатындығы белгілі, және керісінше, егер $\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \dots, \xi_n < x\}$ оқиғасы пайда болса, онда $\{\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x\}$ оқиғасы да пайда болады. Сондықтан

$$F_{\eta_n}(x) = P\{\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x\} = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \dots, \xi_n < x\}.$$

Кездейсоқ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ шамалары тәуелсіз болғандықтан

$$F_{\eta_n}(x) = P\{\xi_1 < x\} \cdot P\{\xi_2 < x\} \dots P\{\xi_n < x\} = F^n(x). \quad (10.16)$$

Кездейсоқ γ_n шамасының үлестіру функциясын табалық. Ол үшін алдымен $P\{\gamma_n \geq x\}$ ықтималдықты табамыз.

$$\begin{aligned} P\{\gamma_n \geq x\} &= P\{\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \geq x\} = P\{\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\} = \\ &= P\{\xi_1 \geq x\} \cdot P\{\xi_2 \geq x\} \dots P\{\xi_n \geq x\} = [1 - F(x)]^n. \end{aligned}$$

Сондықтан

$$F_{\gamma_n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n. \quad (10.17)$$

1-мысал. Автоматикалық желі n жұмысшы мүшеден тұрады. Әрбір мүшенің тоқтаусыз жұмыс істеу мерзімі λ параметрлі көрсеткішті заң бойынша үлестірілген. Мүшелерден біреуі бұзылғанда желі тоқтайды. Желінің тоқтаусыз жұмыс істеу мерзімінің үлестірілуін табыңыз.

Шешуі. ξ_i i -ші мүшенің тоқтаусыз жұмыс істеу мерзімі болсын. Онда

$$\xi = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

$P\{\xi \geq x\}$ ықтималдықты есептейік. $\xi \geq x$ теңсіздігі

$$\xi_1 \geq x, \quad \xi_2 \geq x, \quad \dots, \quad \xi_n \geq x$$

n теңсіздіктерге пара-пар болғандықтан

$$P\{\xi \geq x\} = P\{\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\}.$$

Кездейсоқ ξ_i шамалары тәуелсіз болғандықтан

$$P\{\xi \geq x\} = P\{\xi_1 \geq x\} \cdot P\{\xi_2 \geq x\} \dots P\{\xi_n \geq x\} = \ell^{-n\lambda x},$$

себебі, $P\{\xi_i \geq x\} = 1 - P\{\xi_i \leq x\} = 1 - (1 - \ell^{-\lambda x}) = \ell^{-\lambda x}$.

Демек, $x > 0$ болғанда

$$P\{\xi < x\} = 1 - P\{\xi \geq x\} = 1 - \ell^{-n\lambda x},$$

ал $x < 0$ болғанда $P\{\xi < x\} = 0$.

Сонымен, желінің тоқтаусыз жұмыс істеу мерзімі, параметрі λn болатын көрсеткішті заң бойынша үлестірілген екен.

10.6. Екі кездейсоқ шама жүйесінің сандық сипаттамалары

Кездейсоқ шамалар жүйесімен байланысты зерттеулерде олардың сандық сипаттамалары жиі қолданылады. Сандық сипаттамалар, бір кездейсоқ шамаға ұқсас, моменттер ұғымы арқылы анықталады.

1-анықтама. Кездейсоқ (ξ, η) шамалар жүйесінің $k + l$ -ретті бастауыш моменті деп $\xi^k \eta^l$ шамасының математикалық үмітін айтады және ол m_{kl} арқылы белгіленеді, яғни

$$m_{kl} = M(\xi^k \eta^l) \quad (10.18)$$

Дискретті кездейсоқ шамалар жүйесінің бастауыш моменті келесі формула арқылы есептелінеді:

$$m_{kl} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^l p_{ij}, \quad (10.19)$$

мұндағы $P_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$.

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар жүйесі үшін

$$m_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l f(x, y) dx dy, \quad (10.20)$$

мұндағы $f(x, y)$ -жүйенің үлестіру тығыздығы.

Практикалық есептерде көбінесе 1-ретті бастауыш моменттер қолданылады.

$$m_{10} = M(\xi^1 \eta^0) = M(\xi) = m_x,$$

$$m_{01} = M(\xi^0 \eta^1) = M(\eta) = m_y.$$

2-анықтама. Кездейсоқ (ξ, η) шамалар жүйесінің $k + l$ -ретті орталық моменті деп $(\xi - m_x)^k (\eta - m_y)^l$ шамасының математикалық үмітін айтады және ол μ_{kl} арқылы белгіленеді, яғни

$$\mu_{kl} = M[(\xi - m_x)^k (\eta - m_y)^l]. \quad (10.21)$$

Дискретті кездейсоқ шамалар жүйесінің орталық моменті келесі формула арқылы есептеледі:

$$\mu_{kl} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^l P_{ij}. \quad (10.22)$$

Үзіліссіз кездейсоқ шамалар жүйесі үшін

$$\mu_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^l f(x, y) dx dy. \quad (10.23)$$

Көптеген жағдайларда 2-ретті орталық моменттер қолданылады.

$$D_x = \mu_{20} = M[(\xi - m_x)^2 (\eta - m_y)^0] = M[(\xi - m_x)^2]$$

$$D_y = \mu_{02} = M[(\xi - m_x)^0 (\eta - m_y)^2] = M[(\eta - m_y)^2]$$

D_x, D_y дисперсиялары кездейсоқ нүктенің Ox және Oy осьтерінің бағыттары бойынша шашыраңқылығын сипаттайды.

3-анықтама. Кездейсоқ (ξ, η) шамалар жүйесінің корреляциялық моменті деп екінші ретті аралас орталық момент μ_{11} -ді айтады және ол r_{xy} арқылы белгіленеді, яғни

$$r_{xy} = \mu_{11} = M[(\xi - m_x)(\eta - m_y)] \quad (10.24)$$

r_{xy} -корреляциялық момент ξ және η кездейсоқ шамаларының өзара байланысын (бір-біріне әсерін) сипаттайды. ξ және η кездейсоқ шамаларының бір-біріне әсерін бағалау үшін, әдетте өлшемі жоқ шама қолданылады.

4-анықтама. ξ және η кездейсоқ шамаларының корреляциялық коэффициенті деп

$$k_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (10.25)$$

шамасын айтады.

Теорема. ξ және η шамалары өзара тәуелсіз болуы үшін олардың корреляциялық коэффициенті нөлге тең болуы қажет.

Дәлелдеуі. ξ және η -лар тәуелсіз үзіліссіз кездейсоқ шамалар болсын, онда

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Ендеше,

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy. \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы әрбір интеграл нөлге тең, себебі олар ауытқудың математикалық үміттері.

Сонымен, (10.25) формуласы бойынша

$$k_{xy} = 0.$$

ξ және η кездейсоқ шамаларының корреляциялық коэффициентінің нөлге тең болуы, олардың өзара тәуелсіз болуы үшін тек қана қажеттілік шарт, ал жеткілікті шарт бола алмайды.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Қандай ұғымды кездейсоқ шамалар жүйесі деп атайды?
2. Кездейсоқ шамалар жүйесінің геометриялық мағынасын беріңіз.
3. Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру функциясының анықтамасын беріңіз.
4. Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру функциясының қандай қасиеттері бар?
5. Кездейсоқ нүктенің R тіктөртбұрыштыққа түсу ықтималдығы қандай формуламен өрнектеледі?
6. Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру тығыздығы қалай анықталады?
7. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру функциясын жазыңыз.
8. Қосындының үлестіру функциясын жазыңыз.
9. Қосындының үлестіру тығыздығы қалай анықталады?
10. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар қосындысының үлестіру тығыздығы қандай?
11. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар айырымының үлестіру тығыздығы қандай?

12. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар қатынасының үлестіру тығыздығының формуласын жазыңыз.

13. Тәуелсіз кездейсоқ шамалар көбейтіндісінің үлестіру тығыздығы қандай?

14. Кездейсоқ шама жүйесінің сандық сипаттамаларының анықтамаларын беріңіз.

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Гамма-үлестірулерінің композициясы. Параметрлері (α_1, β) және (α_2, β) болатын гамма-үлестіруге ие ξ және η екі тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындысы, параметрлері $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$ болатын гамма үлестіруге ие болады. Шынында да, (10.11) формуласы бұл жағдайда келесі түрде жазылады:

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(u) f_{\eta}(x-u) du = \int_0^x f_{\xi}(u) f_{\eta}(x-u) du,$$

себебі, $u < 0$ болғанда $f_{\xi}(u) = 0$, ал $u > x$ болғанда, $f_{\eta}(x-u) = 0$ болады. Үлестіру тығыздықтарының мәндерін орындарына қоямыз:

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta}(x) &= \frac{1}{\beta^{\alpha_1} \beta^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^x u^{\alpha_1-1} \cdot \ell^{-\frac{u}{\beta}} (x-u)^{\alpha_2-1} \cdot \ell^{-\frac{x-u}{\beta}} du = \\ &= \frac{\ell^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha_1} \beta^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^x u^{\alpha_1-1} (x-u)^{\alpha_2-1} du. \end{aligned}$$

Соңғы өрнекте $\frac{u}{x} = t$ алмастыруын жасап, одан кейін (8.15)

формуласын қолданамыз:

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta}(x) &= \frac{x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \ell^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \cdot \Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} = \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \ell^{-\frac{x}{\beta}}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

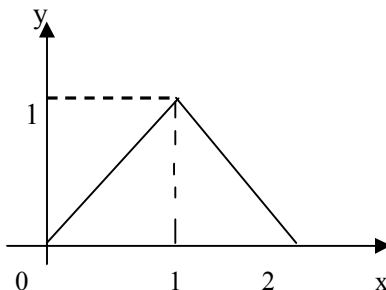
Сонымен, параметрлері (α_1, β) және (α_2, β) болатын гамма заңымен үлестірілген екі ξ, η шамаларының композициясы, параметрлері $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$ болатын Гамма заңымен үлестірілген болады екен.

2-мысал. Бірқалыпты үлестірулердің композициясы.

ξ және η -лар $[0,1]$ аралықта бірқалыпты үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалар болсын. (10.11) формуласын қолданып, $\xi + \eta$ шамасының үлестіру тығыздығын табамыз.

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & \text{егер } 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{x-тің қалған мәндерінде.} \end{cases}$$

Үлестіру тығыздығының графигі 10.10-суретте көрсетілген. $\xi + \eta$ шамасының мұндай үлестірілуін үшбұрышты үлестіру деп айтады (10.10-сурет).



10.10-сурет

3-мысал. Қалыпты үлестірулердің композициясы.

Параметрлері (a_1, σ_1) және (a_2, σ_2) болатын, қалыпты үлестірілген екі тәуелсіз ξ және η шамалардың қосындысының үлестіру заңын табайық. (10.11) – формуласы бойынша

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(u) f_{\eta}(x-u) du = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} du.$$

Интеграл астындағы функцияның дәреже көрсеткішіндегі жақшаларды ашып, ықшамдағаннан кейін мынадай болады:

$$f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Au^2+2Bu-C} du,$$

$$\text{мұндағы } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}, \quad B = \frac{a_1}{2\sigma_1^2} + \frac{x-a_2}{2\sigma_2^2}; \quad C = \frac{a_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}.$$

A, B, C-лардың табылған мәндерін интегралдық есептеулерден белгілі келесі формулаға қоямыз.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Au^2+2Bu-C} du = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC-B^2}{A}}.$$

Тиісті түрлендірулерден кейін үлестіру тығыздығының келесі формуласын аламыз.

$$f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{[x-(a_1+a_2)]^2}{2(\sigma_1+\sigma_2)}}, \quad (10.28)$$

бұл параметрлері $(a_1+a_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ болатын қалыпты үлестіру тығыздығының формуласы.

4-мысал. ξ және η -лар параметрлері сәйкес (α_1, β) және (α_2, β) болатын гамма-үлестіруге ие тәуелсіз кездейсоқ

шамалар болсын. $\frac{\xi}{\eta}$ қатынастың үлестіру тығыздығын

есептейік.

$x > 0$ болғанда,

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\beta^{\alpha_1}} \cdot x^{\alpha_1-1} \ell^{-\frac{x}{\beta}},$$

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_2}} x^{\alpha_2-1} \cdot \ell^{-\frac{x}{\beta}}.$$

$x < 0$ болғанда үлестіру тығыздықтары нөлге тең.

Қатынастың үлестіру тығыздығының формуласын қолданамыз.

$$\begin{aligned} f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) &= \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} g x^{\alpha_1-1} \cdot g^{x_1-1} \cdot \ell^{-\frac{gx}{\beta}} \cdot g^{\alpha_2-1} \cdot \ell^{-\frac{g}{\beta}} dg = \\ &= \frac{x^{\alpha_1-1}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} g^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \ell^{-\frac{g}{\beta}(x+1)} dg. \end{aligned}$$

Соңғы теңдікте $t = \frac{g(x+1)}{\beta}$ алмастыруын орындаймыз.

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \frac{x^{\alpha_1-1} \beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)(x+1)^{\alpha_1+\alpha_2}} \int_0^{\infty} t^{\alpha_1+\alpha_2-1} \ell^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{x^{\alpha_1-1}}{(x+1)^{\alpha_1+\alpha_2}}. \quad (10.29)$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. ξ және η -лар, параметрлері сәйкес $1/2$ және $1/3$ болатын көрсеткішті заң бойынша үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалар болсын. $P\{\xi + \eta \geq 1\}$ ықтималдықты есептеңіз.

2. ξ және η тәуелсіз кездейсоқ шамалардың үлестіру тығыздықтары

$$f_{\xi}(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)},$$

$$f_{\eta}(x) = \frac{b}{\pi(x^2 + b^2)}$$

берілген. $\xi + \eta$ шамасының үлестіру тығыздығын табыңыз.

3. ξ_1 және ξ_2 -лер λ параметрлі көрсеткішті заң бойынша үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалар болсын.

$\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$ шамасының $(0;1)$ интервалда бірқалыпты

үлестірілгендігін дәлелдеңіз.

4. ξ және η -лар тәуелсіз және $(0;1)$ интервалда бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шамалар болсын. Қабырғалары ξ және η болатын тіктөртбұрыштықтың ауданының үлестіру функциясын табыңыз.

5. ξ және η -лар математикалық үміті нөл және бірдей дисперсиялы, тәуелсіз, қалыпты үлестірілген шамалар болса, онда $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ кездейсоқ шамасы (дөңгелектің радиусы) Релей заңы бойынша үлестірілген болады, яғни $r > 0$ болғанда

$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$. Дөңгелектің ауданы S -тің үлестіру заңын

табыңыз.

6. Кездейсоқ (ξ, η) шамалар жүйесінің үлестіру тығыздығы

$$f(x, y) = ae^{-\frac{(x-2)^2}{8}} g(y)$$

берілген. Мұндағы

$$g(y) = \begin{cases} \cos y, & \text{егер } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{егер } |y| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Үлестіру тығыздығының қасиеттерін пайдаланып a -ның мәнін табыңыз. ξ -дің және η -ның үлестіру тығыздығын жазыңыз. ξ және η -лардың математикалық үмітін, дисперсиясын анықтаңыз.

Жауабы: $a = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$; $f_{\xi}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$;

$$f_{\eta}(y) = \frac{g(y)}{2}; \quad M\xi = 2; \quad M\eta = 0; \quad D\xi = 4; \quad D\eta = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

7. Кездейсоқ (ξ, η) шамалар жүйесінің үлестіру тығыздығы

$$f(x, y) = a \cos(x - y); \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

берілген. a -ның мәнін табыңыз. Үлестіру функциясы $F(x, y)$ -ті табыңыз. Жүйенің сандық сипаттамаларын анықтаңыз.

Жауабы: $a = \frac{1}{2}$;

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \text{ және } y < 0; \\ \frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos x - \cos y + 1], & \text{егер } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{егер } x > \frac{\pi}{2}, \quad y > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$M\xi = M\eta = \frac{\pi}{4}; \quad D\xi = D\eta = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2;$$

$$r_{xy} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} + 1; \quad k_{xy} = \frac{\pi^2 - 8\pi + 16}{\pi^2 + 8\pi - 32}.$$

11-дәріс. Кездейсоқ аргументтің функциялары

11.1. Бір кездейсоқ аргументтің функциясы және оның үлестіру заңы

Анықтама. Егер кездейсоқ ξ шамасының мүмкін болатын әрбір мәніне кездейсоқ η шамасының мүмкін болатын бір мәні сәйкес келсе, онда η - кездейсоқ шамасы ξ аргументтің функциясы деп аталады және мына түрінде жазылады:

$$\eta = \varphi(\xi).$$

Кездейсоқ ξ және η екі аргументтің функциясы ζ -да кездейсоқ шама болады және ол да жоғарыдағы сияқты аныкталып, $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ түрінде жазылады.

Бір кездейсоқ аргументтің үлестіру заңы бойынша функцияның үлестіру заңын табуды қарастырайық.

1. ξ - дискретті кездейсоқ шама болып, оның үлестіру заңы

ξ	x_1	x_2	...	x_n
η	P_1	P_2	...	P_n

түрінде болсын.

а) Егер ξ -дің мүмкін болатын әртүрлі мәніне η функциясының да мүмкін болатын әртүрлі мәні сәйкес келсе, онда ξ және η -лардың сәйкес мәндерінің ықтималдықтары өзара тең болады, яғни $P\{\eta = y_i\} = P\{\xi = x_i\} = P_i$ болып, η -ның үлестіру заңы келесі түрде жазылады:

η	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$
P	P_1	P_2	...	P_n

1-мысал. Дискретті кездейсоқ ξ шамасының үлестірілуі мынадай берілген:

ξ	1	3
P	0,6	0,4

$\eta = \xi^2$ функциясының үлестірілуін табайық:

ξ	1	9
P	0,6	0,4

ә) Егер ξ -дің мүмкін болатын әртүрлі мәніне η функциясының бір-біріне тең мәндері сәйкес келіп қалса, онда η -ның тең мәндерінің біреуін жазып, ықтималдықтарын қосу керек.

2-мысал. Дискретті кездейсоқ ξ шамасының үлестіру заңы берілген:

ξ	-2	2	3
P	0,4	0,5	0,1

$\eta = \xi^2$ функциясының үлестіру заңын табыңыз.

Шешуі. η -ның мүмкін болатын $y_1 = 4$ мәнінің ықтималдығы үйлесімсіз $\xi = -2$, $\xi = 2$ оқиғалардың ықтималдықтарының қосындысына тең, яғни $0,4 + 0,5 = 0,9$. Мүмкін болатын $y_2 = 9$ мәнінің ықтималдығы $0,1$ -ге тең. Сонымен, η -ның үлестіру заңы мынадай:

η	4	9
P	0,9	0,1

2. ξ -үзіліссіз кездейсоқ шама болып, оның үлестіру тығыздығы $f(x)$ белгілі болсын. $\eta = \varphi(\xi)$ функциясының үлестіру заңын табуды қарастырайық.

1-теорема. Егер, кері функциясы $x=\psi(y)$ болатын $y=\varphi(x)$ функциясы тек өспелі немесе кемімелі (монотонды) дифференциалданатын функция болса, онда кездейсоқ $\eta=\varphi(\xi)$ шамасының үлестіру тығыздығы $g(y)$ келесі теңдікпен анықталады:

$$g(y)=f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)| \quad (11.1)$$

Дәлелдеуі. $y=\varphi(x)$, $x=\psi(y)$ функциялары ХОУ жазықтығында бір қисықты анықтайды. Оу өсіндегі $(y, y+\Delta y)$ интервал $x=\psi(y)$ функциясы арқылы Ox өсіндегі $(x, x+\Delta x)$ интервалға бейнеленеді. $\{y < \eta < y + \Delta y\}$ және $\{x < \xi < x + \Delta x\}$ оқиғалары тепе-тең. Сондықтан,

$$\begin{aligned} g(y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P\{y < \eta < y + \Delta y\}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x\}}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \left[\frac{P\{x < \eta < x + \Delta x\}}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] = f[\psi(y)] |\psi'(y)|. \end{aligned}$$

2-теорема. Кездейсоқ шаманы сызықты алмастырғанда оның үлестіру заңының түрі өзгермейді.

Дәлелдеуі. η және ξ кездейсоқ шамалары сызықты заңдылықпен берілсін, яғни:

$$\eta = a\xi + b,$$

мұндағы a, b – кездейсоқ емес коэффициенттер.

$y = ax + b$ монотонды функция болғандықтан

$x = \psi(y) = \frac{y-b}{a}$ функциясы да монотонды болады. Онда:

$$\psi'(y) = \frac{1}{a}.$$

(11.1) формуласын қолданамыз:

$$g(y) = f\left(\frac{y - \theta}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} \quad (11.2)$$

(11.2) формуласы кездейсоқ ξ шамасын сызықты алмастыру, оның үлестіру қисығының масштабын ғана өзгертіп, одан кейін басқа орынға жылжытуға пара-пар дегенді білдіреді. Демек, кездейсоқ шаманы сызықты алмастыру оның үлестіру заңының түрін өзгертпейді екен.

3-теорема. Егер $y = \varphi(x)$ -ке кері $x = \psi(y)$ функциясы бір мәнді болмаса, басқаша айтқанда, y -тің бір мәніне x -тің $x_1 = \psi_1(y)$, $x_2 = \psi_2(y)$, ..., $x_n = \psi_n(y)$ мәндері сәйкес келсе, онда кездейсоқ η шамасының ($\eta = \varphi(\xi)$) үлестіру тығыздығы мынадай формуламен анықталады:

$$g(y) = \sum_{i=1}^n f[\psi_i(y)] \cdot |\psi_i'(y)|. \quad (11.3)$$

Дәлелдеуі. $y = \varphi(x)$ функциясының анықталу облысын, әрбірінде $y = \varphi(x)$ монотонды болатындай етіп n бөлікке бөлеміз. Онда $\{x_1 < \xi < x_1 + \Delta x_1\}, \{x_2 < \xi < x_2 + \Delta x_2\}, \dots, \{x_n < \xi < x_n + \Delta x_n\}$ оқиғаларының кемінде біреуі пайда болғанда $y < \eta < y + \Delta y$ оқиғасы пайда болады. Үйлесімсіз оқиғаларды қосу теоремасын қолданамыз.

$$\begin{aligned} P\{y < \eta < y + \Delta y\} &= \sum_{i=1}^n P\{x_i < \xi < x_i + \Delta x_i\}, \\ g(y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P\{y < \eta < y + \Delta y\}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n P\{x_i < \xi < x_i + \Delta x_i\}}{\Delta y} = \\ &= \sum_{i=1}^n \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \left[\frac{P\{x_i < \xi < x_i + \Delta x_i\}}{|\Delta x_i|} \cdot \left| \frac{\Delta x_i}{\Delta y} \right| \right] = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot |x_i'| = \sum_{i=1}^n f[\psi_i(y)] \cdot |\psi_i'(y)|. \end{aligned}$$

11.2. Бір кездейсоқ аргумент функциясының математикалық үміті және дисперсиясы

Кездейсоқ ξ шамасының функциясы $\eta = \varphi(\xi)$ берілсін. η функциясы да кездейсоқ шама болғандықтан, оның математикалық үміті, дисперсиясы ξ -дің математикалық үміті, дисперсиясы сияқты анықталады.

1-анықтама. $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ мәндерді $P_1, P_2, \dots, P_n$ ықтималдықтарымен қабылдайтын дискретті кездейсоқ η шамасының математикалық үміті деп

$$M\eta = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) P_i \quad (11.4)$$

санды айтады.

2-анықтама. Үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын үзіліссіз кездейсоқ шама ξ -дің функциясы $\eta = \varphi(\xi)$ -дің математикалық үміті деп

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \quad (11.5)$$

санды айтады.

3-анықтама. Дискретті кездейсоқ шама $\eta = \varphi(\xi)$ -дің дисперсиясы деп

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = \sum_{i=1}^n \varphi^2(x_i) P_i - \left[\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) P_i \right]^2 \quad (11.6)$$

санды айтады.

4-анықтама. Үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын үзіліссіз кездейсоқ шама ξ -дің функциясы $\eta = \varphi(\xi)$ -дің дисперсиясы деп

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - M\eta]^2 f(x) dx \quad (11.7)$$

санды айтады.

(11.4)-(11.7) формулалары, кездейсоқ ξ шамасының үлестіру заңдары белгілі болғанда, $\eta = \varphi(\xi)$ кездейсоқ

шамасының математикалық үмітін және дисперсиясын дәл табу мүмкіндігін береді. Бірақ, $\varphi(x)$, $f(x)$ функцияларының өрнектері күрделі болған жағдайда, интегралдарды есептеу көп қиыншылықтарға алып келеді. Сондықтан, келесі жуық формулаларды береміз.

Теорема. $\eta = \varphi(\xi)$ кездейсоқ шамасының математикалық үміті және дисперсиясы келесі жуық теңдіктер арқылы анықталады:

$$M\eta \approx \varphi(M\xi) \quad (11.8)$$

$$D\eta \approx \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=M\xi} \cdot D\xi \quad (11.9)$$

Дәлелдеуі. $\varphi(x)$ функциясын $x = M\xi$ нүктесінің аймағында Тейлор қатарына жіктейміз.

$$\eta = \varphi(M\xi) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=M\xi} (\xi - M\xi) + 0(\xi - M\xi), \quad (11.10)$$

мұндағы $0(\xi - M\xi)$ шамасы - $(\xi - M\xi)$ -ған қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама. (11.10) теңдігінің екі жағының математикалық үмітін табамыз. $M(\xi - M\xi) = 0$ болғандықтан,

$$M\eta \approx \varphi(M\xi)$$

жуық теңдігі шығады. Сонымен, (11.8) формуласы дәлелденді. (11.9) формуласын дәлелдеу үшін, (11.10) теңдігіндегі $\varphi(M\xi)$ -ді теңдіктің сол жағына өткізіп, квадратқа көтереміз:

$$[\eta - \varphi(M\xi)]^2 \approx \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \cdot (\xi - M\xi)^2.$$

Соңғы жуық теңдіктің математикалық үмітін табамыз.

$$D\eta = M[\eta - \varphi(M\xi)]^2 \approx \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2_{x=M\xi} D\xi.$$

Сонымен, (11.9) формуласы дәлелденді.

Мысал. Кездейсоқ шама ξ -дің математикалық үміті a -ға, ал дисперсиясы σ^2 -қа тең болсын. $\eta = A \ln|\xi| + \frac{B}{\xi} + C$ функциясының математикалық үмітін және дисперсиясын табалық. (11.8), (11.9) формулаларын қолданамыз.

$$M\eta \approx A \ln|a| + \frac{B}{a} + C,$$

$$D\eta \approx \frac{[(Aa - B)\sigma]^2}{a^4}.$$

Ал, егер (11.5), (11.7) формулаларын қолданып, математикалық үмітін және дисперсиясын табатын болсақ, онда кездейсоқ ξ шамасы үзіліссіз және оның үлестіру тығыздығы $f(x)$ белгілі болуы тиіс, сонымен бірге, мысалы $M\eta$ -ны табу үшін

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \ln|x| + \frac{B}{x} + C \right) f(x) dx$$

интегралын есептеу қажет, ол (11.8) формуласын қолданып есептегенге қарағанда әлдеқайда күрделі.

11.3. Екі кездейсоқ аргумент функциясының үлестіру заңы мен сандық сипаттамалары

Алдымен, кездейсоқ шамалар жүйесін функциялы алмастырудың үлестіру тығыздығын табу есебін қарастыралық.

(ξ, η) кездейсоқ шамалар жүйесіне

$$\begin{cases} U = U(\xi, \eta), \\ V = V(\xi, \eta) \end{cases} \quad (11.11)$$

функциялы алмастыруын орындау арқылы (U, V) кездейсоқ шамалар жүйесі алынсын делік. Сонымен бірге

$$\begin{cases} \xi = \xi(U, V), \\ \eta = \eta(U, V) \end{cases} \quad (11.12)$$

кері функциялы алмастыруы да белгілі болсын.

Кездейсоқ шамалар жүйесі (ξ, η) -ның белгілі үлестіру тығыздығы $f(x, y)$ бойынша, (U, V) кездейсоқ шамалар жүйесінің $g(U, V)$ -үлестіру тығыздығын табалық.

Теорема. Егер (11.11), (11.12) алмастырулары өзара бірмәнді және олардағы функциялар үзіліссіз, дифференциалданатын болса, онда (11.11) жүйесінің үлестіру тығыздығы келесі формуладан анықталады:

$$g(u, \vartheta) = f[x(u, \vartheta); y(u, \vartheta)] \cdot |J|, \quad (11.13)$$

мұндағы J -(11.12) алмастыруының Якобианы, яғни

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}.$$

Дәлелдеуі. Теореманың шарттарын қанағаттандыратын (11.11), (11.12) функциялары арқылы xOy жазықтығындағы ΔS облысы $uO\vartheta$ жазықтығындағы $\Delta S'$ облысына өзара бірмәнді бейнеленеді. Демек, $\{(\xi, \eta) \in \Delta S\}$ және $\{(U, V) \in \Delta S'\}$ оқиғалары тепе-тең және олардың ықтималдықтары өзара тең, яғни

$$P\{(\xi, \eta) \in \Delta S\} = P\{(U, V) \in \Delta S'\}.$$

Үлестіру тығыздығының 10.2-тақырыпта енгізілген анықтамасы бойынша:

$$g(U, V) = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{P\{(U, V) \in S'\}}{\Delta S'} = \lim_{\substack{\Delta S' \rightarrow 0 \\ \Delta S' = 0}} \frac{P\{(\xi, \eta) \in \Delta S\}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta S'} = f(x, y) \cdot \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'},$$

мұндағы

$$\begin{aligned} x &= x(u, \vartheta), \\ y &= y(u, \vartheta). \end{aligned}$$

Ал, $\lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'} = |J|$ болатыны [19]-дан белгілі. Сонымен,

теорема дәлелденді.

(11.13) формуласының (11.1) формуласына ұқсастығы байқалады. Одан пайдаланып n кездейсоқ шама жүйесінің үлестіру тығыздығын табу мүмкін. Егер (11.11) алмастыруы бірімәнді болмаса, онда бүкіл облысты бір мәнді болатын облыстардың қосындысы ретінде қарастырып, әрбіреуі үшін (11.12) формуласы жазылады да нәтижесінде (11.3) сияқты қосынды алынады.

Енді ξ, η екі кездейсоқ аргументтің функциясы ζ -ның, яғни

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta)$$

функциясының үлестіру заңын табу есебін қарастыралық. (ξ, η) жүйесінің үлестіру тығыздығы $f(x, y)$ белгілі болсын.

ξ кездейсоқ шамасына тең ζ_1 жаңа кездейсоқ шама енгіземіз де, келесі жүйені қарастырамыз.

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y), \\ z_1 = x. \end{cases} \quad (11.14)$$

(11.14) жүйесінің бір мәнді шешімі болсын және дифференциалданатын болсын деп ұйғарамыз. Шешімі келесі түрде болсын:

$$\begin{cases} x = z_1, \\ y = \psi(z, z_1). \end{cases} \quad (11.15)$$

(ζ, ζ_1) жүйесінің үлестіру тығыздығын табу үшін (11.13) формуласын қолданамыз. Бұл жағдайда (11.15) алмастыруының Якобианы

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z_1} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi(z, z_1)}{\partial z}.$$

$z_1 = x$ болғандықтан, (11.13) формуласы келесі түрде жазылады:

$$g(z, x) = f(x; \psi(z, x)) \cdot \left| \frac{\partial \psi(z, x)}{\partial z} \right|.$$

Соңғы теңдікті x бойынша $-\infty$ -ден $+\infty$ -ге дейін интегралдау арқылы ζ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығын аламыз.

$$g_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f[x; \psi(z, x)] \cdot \left| \frac{\partial \psi(z, x)}{\partial z} \right| dx \quad (11.16)$$

Ескерту. Енгізілген жаңа ζ_1 шамасы η -ға тең деп алсақ та, тұжырым өзгеріссіз қалады.

Мысал. $\zeta = \xi + \eta$ болсын.

Бұл жағдайда (11.14), (11.15) жүйелері

$$\begin{cases} z = x + y, \\ z_1 = x \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} x = z_1, \\ y = z - z_1 \end{cases}$$

түрде болады да, соңғы алмастырудың Якобианы

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z_1} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z_1} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ендеше, (11.16) формуласы бойынша:

$$g_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx.$$

Соңғы формула алдыңғы тақырыпта басқаша әдіспен алынған (10.10) формуласының өзі.

Екі кездейсоқ аргумент функциясының сандық сипаттамалары да бір кездейсоқ аргумент функциясына ұқсас анықталады. ξ, η кездейсоқ шамалары дискретті болған жағдайда

$$M(\varphi(\xi, \eta)) = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_i) P_{ij}, \quad (11.17)$$

мұндағы $P_{ij} = P\{\xi = x_i; \eta = y_i\}$.

Үзіліссіз кездейсоқ ξ, η шамалары үшін

$$M(\varphi(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (11.18)$$

мұндағы $f(x, y) - (\xi, \eta)$ жүйесінің үлестіру тығыздығы. $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ функциясының дисперсиясы да (11.7) формуласы сияқты анықталады.

$$D[\varphi(\xi, \eta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y) - M\zeta]^2 f(x, y) dx dy. \quad (11.19)$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Бір және екі кездейсоқ аргумент функцияларының анықтамаларын беріңіз.
2. Дискретті ξ кездейсоқ шама функциясының үлестіру заңын жазыңыз.
3. Үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын ξ кездейсоқ шама функциясының үлестіру тығыздығын беретін теореманы жазыңыз және оны дәлелдеңіз.
4. Сызықты алмастырылған кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы қандай болады?
5. Кездейсоқ аргументтің монотонсыз функциясының үлестіру тығыздығы қандай формуладан табылады?
6. Бір кездейсоқ аргумент функциясының математикалық үміті мен дисперсиясының формулаларын жазыңыз.
7. Екі кездейсоқ аргумент функциясының үлестіру тығыздығын табу формуласын жазыңыз.
8. Екі кездейсоқ аргумент функциясының математикалық үміті мен дисперсиясының формулаларын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Үлестіру функциясы $\Gamma(x)$ және үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Кездейсоқ $\eta = \xi^2$ шамасының үлестіру функциясын және үлестіру тығыздығын табыңыз.

Шешуі.

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = P\{\xi^2 < x\}.$$

$\xi^2 < x$ теңсіздігі $x > 0$ болғанда, $-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}$ теңсіздіктеріне пара-пар болғандықтан,

$$P\{\xi^2 < x\} = P\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}).$$

$x < 0$ болғанда, $\{\xi^2 < x\}$ оқиғасы мүмкін емес оқиға болғандықтан $P\{\xi^2 < x\} = 0$ болады.

Сонымен

$$F_{\eta}(x) = P\{\xi^2 < x\} = \begin{cases} F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}), & \text{егер } x > 0, \\ 0, & \text{егер } x \leq 0. \end{cases}$$

Кездейсоқ η шамасының үлестіру тығыздығы

$$f_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, & \text{егер } x > 0, \\ 0, & \text{егер } x \leq 0. \end{cases} \quad (11.20)$$

2-мысал. Кездейсоқ ξ шамасы $[0,1]$ аралықта бірқалыпты үлестірілген. Кездейсоқ $\eta = \ln \frac{1}{\xi}$ шамасының үлестіру функциясын табыңыз.

Шешуі. Есептің шарты бойынша

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0, \\ x, & \text{егер } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{егер } x > 1. \end{cases}$$

Сондықтан,

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P\{\eta < x\} = P\left\{\ln \frac{1}{\xi} < x\right\} = P\left\{\frac{1}{\xi} < e^x\right\} = \\ &= P\{\xi > e^{-x}\} = 1 - P\{\xi \leq e^{-x}\} = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{егер } x > 0, \\ 0, & \text{егер } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Сонымен, η кездейсоқ шамасы $\lambda=1$ параметрлі көрсеткішті үлестіруге ие екен.

3-мысал. Кездейсоқ шама ξ -дің мәндері $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ интервалда бірқалыпты үлестірілген болсын. $\eta = \sin \xi$ шамасының үлестіру заңын табыңыз.

Шешуі. $y = \sin x$ функциясы $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ интервалда монотонды, сондықтан (11.1) формуласын қолданамыз. ξ берілген интервалда бірқалыпты үлестірілген болғандықтан оның үлестіру тығыздығы

$$f_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{егер } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{егер } x < -\frac{\pi}{2}, \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x = \arcsin y, \quad x'_y = (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \text{мұнда } -1 < y < 1.$$

Кездейсоқ шама η -ның мәндері орналасқан $(-1, 1)$ интервал, $y = \sin x$ функциясының берілген анықталу облысы $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ арқылы анықталады.

4-мысал. Мәндері (a, b) -да болатын ξ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығы $f(x)$ болсын. $\eta = 3\xi + 5$ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығын табыңыз.

Шешуі. $y = 3x + 5$ монотонды, дифференциалданатын функция болғандықтан (11.1) формуласын қолданамыз.

$$x = \psi(y) = \frac{y-5}{3},$$

$$f[\psi(y)] = f\left(\frac{y-5}{3}\right), \quad \psi'(y) = \left(\frac{y-5}{3}\right)' = \frac{1}{3}; \quad |\psi'(y)| = \frac{1}{3};$$

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)| = \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{y-5}{3}\right).$$

x шамасы (a, b) -дан мәндер қабылдайтындықтан, $3a+5 < y < 3b+5$.

5-мысал. Кездейсоқ ξ шамасы $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ интервалда бірқалыпты үлестірілген болсын. $\eta = \cos \xi$ шамасының үлестіру заңын табыңыз.

Шешуі. $y = \cos x$ функциясы $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ интервалда монотонды емес. Сондықтан (11.3) формуласын қолданамыз.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{егер } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{егер } x < -\frac{\pi}{2}, \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$y = \cos x, \quad x_1 = -\arccos y, \quad x_2 = \arccos y;$$

$$|\psi'_1(y)| = |\psi'_2(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}; \quad g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}; \quad 0 < y < 1.$$

б-мысал. Радиусы a -ға тең дөңгелекке кездейсоқ нүкте тасталады. Дөңгелектің ортасымен оған түскен нүкте ара қашықтығының орташа мәнін табыңыз.

Шешуі. Дөңгелекке кездейсоқ түскен нүктенің координаталары ξ және η кездейсоқ шамалары болып, олар дөңгелекте бірқалыпты үлестірілген болады, яғни ξ, η шамаларының үлестіру тығыздығы

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & \text{дөңгелектің ішінде,} \\ 0, & \text{дөңгелектің сыртында.} \end{cases}$$

Дөңгелекке түскен кездейсоқ (ξ, η) нүктесімен оның ортасының ара қашықтығы $\zeta = R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ кездейсоқ шамасы болады. Осы ζ кездейсоқ шамасының математикалық үмітін табу қажет. Ол үшін (11.17) формуласын қолданамыз.

$$\begin{aligned} M\zeta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y) dx dy = \int_0^a \int_0^a \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{dx dy}{\pi a^2} = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr \end{array} \right| = \frac{1}{\pi a^2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \cdot r dr = \frac{1}{\pi a^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a. \end{aligned}$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Дискретті кездейсоқ ξ шамасының үлестіру заңы берілген:

ξ	3	6	10
P	0,2	0,1	0,7

$\eta=3\xi+1$ кездейсоқ шамасының үлестіру заңын табыңыз.

2. Дискретті кездейсоқ ξ шамасының үлестіру заңы берілген:

ξ	-1	-2	1	2
P	0,3	0,1	0,2	0,4

$\eta=\xi^2$ кездейсоқ шамасының үлестіру заңын табыңыз.

Жауабы:

η	1	4
P	0,5	0,5

3. Кездейсоқ ξ шамасы $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында бірқалыпты үлестірілген. $\eta=\sin\xi$ -дің үлестіру тығыздығы $g(y)$ -ті табыңыз.

$$\text{Жауабы: } g(y) = \begin{cases} 2/(\pi\sqrt{1-y^2}), & y \in (0,1), \\ 0, & y \notin (0,1). \end{cases}$$

4. Кездейсоқ ξ шамасы $(0,2\pi)$ интервалда бірқалыпты үлестірілген бол-сын. $\eta=\cos\xi$ шамасының үлестіру тығыздығы $g(y)$ -ты табыңыз.

$$\text{Жауабы: } g(y) = \begin{cases} 1(\pi\sqrt{1-y^2}), & y \in (-1,1), \\ 0, & y \notin (-1,1) \end{cases}$$

5. ξ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығы $f(x)$ берілген $(0 < x < \infty)$. Кездейсоқ $\eta = \ln \xi$ функциясының үлестіру тығыздығын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } g(y) = f(e^y) \cdot e^y.$$

6. ξ кездейсоқ шамасының математикалық үміті және дисперсиясы: $M\xi = 2$, $D\xi = 3$ берілген. $\eta = 3\xi - 5$ функциясының математикалық үмітін және дисперсиясын табыңыз.

Жауабы: $M\eta = 1$; $D\eta = 27$.

7. ξ кездейсоқ шамасы $(0,2)$ интервалында бірқалыпты үлестірілген. $\eta = -\xi^2 + 3\xi - 2$ функциясының математикалық үмітін табыңыз.

Жауабы: $M\eta = -\frac{1}{3}$.

8. ξ кездейсоқ шамасы $(0,1)$ интервалында бірқалыпты үлестірілген. $\eta = 2\xi^2$ кездейсоқ функциясының дисперсиясын табыңыз.

Жауабы: $D\eta = \frac{16}{45}$.

12-дәріс. Қалыпты заңмен байланысты үлестірулер және олардың сандық сипаттамалары

Бұл тақырыпта, математикалық статистикада жиі қолданылатын, қалыпты заңмен байланысты кейбір үлестірулерді және олардың сандық сипаттамаларын қарастырамыз.

12.1. Еркіндік дәрежесі n болатын χ^2 үлестіру

$(0, 1)$ параметрлі қалыпты үлестірілген тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары берілсін.

Анықтама. Еркіндік дәрежесі n болатын χ^2 (хи квадрат) үлестіру деп, $\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$ кездейсоқ шамасының үлестірілуін айтады.

ξ_i шамасы (0,1) параметрлі қалыпты үлестірілген жағдайда ξ_i^2 шамасы $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ параметрлі гамма-үлестіруге ие болатындықтан ((11.20) формуласы арқылы табылады), (10.26) формуласын n рет қолдану нәтижесінде кездейсоқ χ^2 шамасы $\left(\frac{n}{2}; 2\right)$ параметрлі гамма заңы бойынша үлестірілгендігін анықтаймыз.

Сонымен, χ^2 шамасының үлестіру тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & , \text{ егер } x > 0 , \\ 0, & \text{ егер } x \leq 0 . \end{cases}$$

Мұндағы $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ - гамма функция.

«Хи квадрат» үлестіруі бір ғана параметр-еркіндік дәрежесі n -мен анықталатындығы көрініп тұр. Еркіндік дәрежесі санының артуымен «Хи квадрат» үлестіруі қалыпты үлестіруге жуық тең болады.

Енді кездейсоқ χ^2 шамасының сандық сипаттамаларын анықталық. (9.3) формуласын қолданып математикалық үмітін табамыз:

$$M \chi^2 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-u} du = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = n .$$

Дисперсиясын да осылайша табамыз:

$$D \chi^2 = (n + 2)n - n^2 = 2n .$$

12.2. Релей және Максвелл үлестірулері

ξ_1, ξ_2 -лер, математикалық үміті нөлге тең, бірдей σ дисперсиялы, тәуелсіз және қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамалар болсын. η_1 арқылы (ξ_1, ξ_2) нүктесінен координаталар бас нүктесіне дейінгі арақашықтықты белгілейік, яғни

$$\eta_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

1-анықтама. Кездейсоқ η_1 шамасының үлестірілуі Релей үлестірілуі деп аталады.

Мысалы, нысана координаталар бас нүктесінде орналасқан болып, оған оқ үзілсін делік. Оқтың тиген нүктесін кездейсоқ нүкте деп, ал оның координаталарын, математикалық үміті нөлге тең, бірдей σ дисперсиялы, тәуелсіз және қалыпты үлестірілген кездейсоқ ξ_1, ξ_2 шамалары деп қарастыруға болады. Онда оқтың тиген нүктесінің нысанадан ауытқуы η_1 Релей заңы бойынша үлестірілген болады.

Енді Релей үлестірілуінің тығыздығын анықталық. Егер ξ_i кездейсоқ шамасы $(0, \sigma)$ параметрлі қалыпты заңмен үлестірілген болса, онда ξ_i^2 шамасы $\left(\frac{1}{2}; 2\sigma^2\right)$ параметрлі Гамма заңымен үлестірілген болатыны (11.20) формуласынан анықталады, яғни

$$f_{\xi_i^2}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}.$$

Параметрлері $\left(\frac{1}{2}; 2\sigma^2\right)$ болатын тәуелсіз екі ξ_1^2 және ξ_2^2

Гамма заңымен үлестірілген кездейсоқ шамалардың композициясы (10.26) формуласы бойынша келесі түрде болады:

$$f_{\xi_1^2 + \xi_2^2}(y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}.$$

Кері функциясы $\xi = \eta^2$ болатын $\eta = \sqrt{\xi}$ функциясы $(0, \infty)$ аралығында өспелі және дифференциалданатын болғандықтан η функциясының үлестіру тығыздығы (11.1) формуласы бойынша:

$$f_{\eta}(y) = f(y^2) \cdot 2y$$

болады. Ендеше

$$f_{\eta}(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Сонымен, Релей үлестіруінің тығыздығы

$$f_{\eta_1}(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{егер } r > 0, \\ 0, & \text{егер } r \leq 0, \end{cases} \quad (12.2)$$

ал үлестіру функциясы

$$F_{\eta_1}(r) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{егер } r > 0, \\ 0, & \text{егер } r \leq 0, \end{cases} \quad (12.3)$$

теңдіктерімен анықталады.

(9.3) формуласындағы $f(x)$ -тің орнына (12.2)-ні қойып, бөліктеп интегралдау арқылы η_1 кездейсоқ шамасының математикалық үмітін табамыз.

$$M\eta_1 = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Осы сияқты дисперсиясы да табылады.

$$D\eta_1 = 2\sigma^2.$$

Айталық, тәуелсіз ξ_1, ξ_2, ξ_3 кездейсоқ шамалары $(0, \sigma)$ параметрлі қалыпты заң бойынша үлестірілген болсын.

2-анықтама. Кездейсоқ $\eta_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ шамасының үлестірілуі Максвелл үлестірілуі деп аталады.

Максвелл үлестіруінің тығыздығы Релей үлестірілуінің тығыздығы сияқты анықталады, ол келесі түрде болады:

$$f_{\eta_2}(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{r^2}{\sigma^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{егер } r > 0, \\ 0, & \text{егер } r \leq 0. \end{cases} \quad (12.4)$$

$$M\eta_2 = 2\sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

$$D\eta_2 = 3\sigma^2.$$

12.3. Логарифмдік қалыпты үлестіру

Анықтама. Егер $\eta = \ln(\xi - c)$ шамасы (a, σ^2) параметрлі қалыпты заң бойынша үлестірілген болса, онда ξ шамасы c, a, σ^2 параметрлі логарифмдік қалыпты үлестірілген деп аталады.

Осы ξ шамасының үлестіру функциясын және үлестіру тығыздығын табайық.

$\xi = e^\eta + c$, мұндағы η , параметрлері (a, σ^2) болатын қалыпты үлестірілген шама.

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{e^\eta < x - c\}.$$

Егер $x < c$ болса, онда соңғы ықтималдық нөлге тең, себебі $\{e^\eta < x - c\}$ – мүмкін емес оқиға болады. Сонымен, $x > c$ болғанда:

$$F_\xi(x) = P\{e^\eta < x - c\} = P\{\eta < \ln(x - c)\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln(x-c)} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-a)^2}{\sigma^2}} dz. \quad (12.5)$$

Кездейсоқ ξ шамасының $x > c$ болғандағы үлестіру тығыздығы:

$$f_{\xi}(x) = F'_{\xi} = \frac{1}{\sigma(x-c)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln(x-c)-a]^2}{2\sigma^2}}. \quad (12.6)$$

$c=0$ болатын жағдай үшін логарифмдік қалыпты үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының математикалық үмітін және дисперсиясын есептейік:

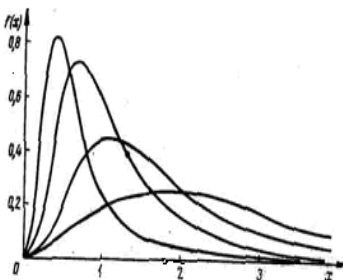
$$\begin{aligned} M\xi &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \ell^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = y; x = \ell^y; dx = \ell^y dy \\ x \rightarrow \infty; \partial a Y \rightarrow \infty dy \\ x = 0 \partial a Y \rightarrow -\infty dy \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ell^y dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2} + y} dy = \left| -\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2} + y = -\frac{[y - (a + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2} + a + \frac{\sigma^2}{2} \right| = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{a + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{-\frac{[y - (a + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dy = \left| \begin{array}{l} z = \frac{y - (a + \sigma^2)}{\sigma} \\ dz = \frac{dy}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell^{a + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \ell^{a + \frac{\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

Сонымен, $M\xi = \ell^{a + \frac{\sigma^2}{2}}.$

Осындай алмастыруларды орындап, $D\xi$ -дің келесі мәніне ие боламыз:

$$D\xi = \ell^{2a + \sigma^2} (\ell^{\sigma^2} - 1).$$

Логарифмдік қалыпты үлестіруде $c=0$ болғанда, ал a мен σ әртүрлі мәндерді қабылдағандағы тығыздық қисығы 12.1- суретте бейнеленген:



12.1-сурет. Логарифмдік қалыпты үлестіру тығыздығының графигі

$\ln \xi$ кездейсоқ шамасы қалыпты заң бойынша үлестірілгендіктен, $P\{a \leq \xi \leq b\}$ ықтималдық орнына $P = \{ \ln a \leq \eta = \ln \xi \leq \ln b \}$ ықтималдықты есептеу ыңғайлы, ал кейінгі ықтималдықты қалыпты үлестіру кестесінен табу қиын емес.

Логарифмдік қалыпты үлестіруге келтірілетін теориялық схеманы қарастырайық.

ξ шамасы, тәуелсіз $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ импульстердің әсерінен өзінің мәндерін ξ_0 -ден (алғашқы моменттен) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ -ге өзгертсін. ξ шамасының i -ші фазадағы $\xi_i - \xi_{i-1}$ өзгеруін η_i импульске және қандайда бір $g(\xi_{i-1})$ функциясына пропорционал деп ұйғарсақ, онда:

$$\xi_i - \xi_{i-1} = \eta_i g(\xi_{i-1}).$$

бұдан:

$$\eta_i = \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{g(\xi_{i-1})}.$$

$$\sum_{i=1}^n \eta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{g(\xi_{i-1})}.$$

Импульстер санын мейлінше үлкен, ал әрбір фазадағы ξ шамасының өзгеруін тым аз десек, онда:

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \approx \int_{\xi_0}^{\xi_n} \frac{dx}{g(x)}.$$

Кездейсоқ η_i шамалары тәуелсіз болғандықтан, n -нің мейлінше үлкен мәндерінде $\sum_{i=1}^n \eta_i$ қосындыны қалыпты заң бойынша үлестірілген деп есептеуге болады. Онда ξ_n ,

$$\int_{\xi_0}^{\xi_n} \frac{dx}{g(x)}$$

қалыпты заң бойынша үлестірілген кездейсоқ шама болады. Дербес жағдайда, егер $g(x)=x$ және $\xi_0=c$ болса, онда логарифмдік қалыпты үлестіруге ие боламыз.

Логарифмдік қалыпты үлестіру практикада жиі қолданылады. *Мысалы*, экономикада кірістердің үлестірілуі, кейбір аппараттардың қызмет мерзімінің үлестірілуі және тағы басқалар.

12.4. Коши үлестіруі

Айталық, тәуелсіз ξ және η кездейсоқ шамалары $(0, \sigma_1)$ және $(0, \sigma_2)$ параметрлі қалыпты заң бойынша үлестірілген болсын. (10.14) формуласын қолданып $\frac{\xi}{\eta}$ шамасының үлестіру

тығыздығын табалық.

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |g| f_{\xi}(gx) \cdot f_{\eta}(g) dg = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \sigma_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g| \cdot e^{-\frac{\theta^2}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)} dg = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + (\sigma_2 x)^2}.$$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \lambda$ деп белгілесек, онда

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}. \quad (12.7)$$

Анықтама. Егер, мүмкін болатын мәндері $(-\infty, \infty)$ аралықта жататын ξ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығы (12.7) формуласымен анықталатын болса, онда ξ кездейсоқ шамасы $(0, \lambda)$ параметрлі Коши заңы бойынша үлестірілген деп аталады.

$$M\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda|x|}{\lambda^2 + x^2} dx \quad \text{меншіксіз интегралы жинақсыз}$$

болғандықтан, Коши үлестіруімен анықталатын ξ кездейсоқ шамасының математикалық үміті жоқ. Жоғары ретті моменттері де жоқ. (12.7) формуласымен анықталатын Коши үлестіруінің модасы да, медианасы да нөлге тең. Үлестіру тығыздығының ең үлкен мәні $\frac{1}{\pi\lambda}$ -ған тең.

Үлестіру функциясы келесі түрде болады:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{\lambda}.$$

Мысал. Кездейсоқ ξ шамасының мәндері Коши заңымен үлестірілген болсын. Яғни

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \quad \lambda=1, \quad -\infty < x < \infty.$$

$\eta = \frac{1}{\xi}$ кері кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығын

табыңыз.

Шешуі. $y = \frac{1}{x}$ функциясы үзілісті болса да, оған кері $x = \frac{1}{y}$

функциясы бірімді болғандықтан, монотонды функциялар үшін дәлелдеген. (11.1) формуласын қолданып келесі формуланы аламыз.

$$g_{\xi}(y) = \frac{1}{\pi \left[1 + \left(\frac{1}{y} \right)^2 \right]} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi (1 + y^2)}; \quad -\infty < y < \infty.$$

Сонымен, Коши заңы бойынша үлестірілген кездейсоқ шаманың кері шамасы да Коши заңы бойынша үлестірілген болады екен.

Егер, технологиялық параметрлер қандай да бір шамалардың қатынасымен өрнектелетін болса, онда олардың өлшенген мәндерін талдағанда және математикалық статистикада таңдаманың параметрін үлестіру теориясында Коши үлестіруі жиі қолданылады.

12.5. Стьюдент үлестіруі

ξ және $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ тәуелсіз кездейсоқ шамалары $(0, 1)$ параметрлі қалыпты заң бойынша үлестірілген болсын. Онда ξ -

дің үлестіру тығыздығы $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ болады.

Анықтама. Кездейсоқ $t = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k^2}}$ шамасының

үлестіруін еркіндік дәрежесі n болатын **Стьюдент үлестіруі** деп атайды.

$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2$ кездейсоқ шамасы $\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ параметрлі Гамма

заңы бойынша үлестірілген болып, оның үлестіру тығыздығы (12.1) формуласымен анықталатыны белгілі. Егер ξ шамасының үлестіру тығыздығы $\varphi(x)$ болса, онда $\sqrt{\xi}$ шамасының үлестіру тығыздығы $\varphi(x^2) \cdot 2x$ болатыны (11.1) формуласынан шығады.

Ендеше, $\sqrt{\chi^2}$ шамасының үлестіру тығыздығы $\frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} \cdot \ell^{-\frac{x^2}{2}}$

болады. Ал, $\eta = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\chi^2}$ шамасының үлестіру тығыздығы келесі теңдікпен анықталады:

$$f_{\eta}(y) = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n-1} \cdot \ell^{-\frac{y^2}{2}}; \quad y = \frac{x}{\sqrt{n}}; \quad x > 0.$$

$x < 0$ де $f_{\eta}(y) = 0$. ξ және η тәуелсіз кездейсоқ шамалар қатынасының үлестіру тығыздығын табу үшін (10.14) формуласын қолданамыз.

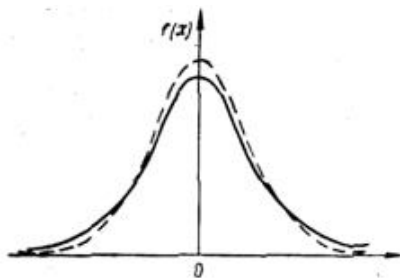
$$\begin{aligned} f_{\xi}(x) &= \frac{2}{\sqrt{2n\pi} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} g^{n-1} \cdot \ell^{-\frac{g^2}{2}} \cdot \ell^{-\left(\frac{gY}{2}\right)^2} g dg = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\eta\pi} \cdot 2^{\frac{\eta}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \int_0^{\infty} \ell^{-\frac{g^2(1+Y^2)}{2}} g^{\eta-1} \cdot g dg = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2n\pi} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \ell^{-\frac{g^2(1+Y^2)}{2}} g^{n-1} \cdot g dg = \left| \frac{g^2(1+Y^2)}{2} = t \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot (1+Y^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} \ell^{-t} \cdot t^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot (1+Y^2)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

Сонымен,

$$f_i(x) = f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (12.8)$$

Егер (12.8) де $n \rightarrow \infty$ шекке көшсек, онда одан қалыпты үлестіру тығыздығы шығады. 12.2-суретте олардың салыстырмалы графиктері келтірілген.

Стъюдент үлестіруі математикалық статистикада жиі қолданылады.



12.2-сурет. Қалыпты және стъюдент үлестірулерін салыстыру

————— - Стъюдент үлестіруінің тығыздығы.

----- - Қалыпты үлестіруінің тығыздығы.

12.6. V^2 – үлестіру

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ тәуелсіз, $(0; \sigma)$ параметрлі қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамалар болсын.

Анықтама. $\sum_{k=1}^m \xi_k^2$ кездейсоқ шамасының үлестіруі V^2 –

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^2$$

үлестіру немесе **Фишер-Снедокор үлестіруі** деп аталады.

Кездейсоқ $\sum_{\kappa=1}^m \xi_{\kappa}^2$ және $\sum_{i=1}^n \eta_i^2$ шамалары, параметрлері сәйкес $\left(\frac{m}{2}; 2\sigma\right), \left(\frac{n}{2}; 2\sigma\right)$ болатын гамма-үлестіруге ие болғандықтан, (10.29) формуласында $\alpha_1 = \frac{m}{2}, \alpha_2 = \frac{n}{2}$ деп, V^2 -үлестіру тығыздығының келесі формуласын аламыз.

$$f_{v^2}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}. \quad (12.9)$$

12.7. Вейбулл-Гнеденко және қос көрсеткішті үлестірулер

Электрондық өлшегіштердің кейбір түрлерінің қызмет көрсету мерзімін, болаттың иілу шегін, тірі жанның өмір сүру мерзімін, жалпы алғанда қандай да бір күрделі жүйенің қызмет атқару мерзімін сипаттайтын кездейсоқ шаманы ξ -мен белгілелік. Қызмет атқарып тұрған жүйенің істен шығу қарқыны деп аталатын

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \quad (12.10)$$

өрнектің маңызы зор. Мұндағы $F(x), f(x) - \xi$ кездейсоқ шамасының үлестіру функциясы және үлестіру тығыздығы.

Істен шығу қарқынын зерттелік. Ол үшін кез келген жүйенің бүкіл қызмет көрсету мерзімін үшке бөлеміз. Біріншісінде $\lambda(x)$ үлкен мәндерді қабылдайды. Себебі, табиғи немесе құрастырылған жүйенің қандай да бір элементтерінде кемшіліктері болуы мүмкін, ал ол жүйенің тезде істен шығуына алып келеді. Кепілдік беру мерзімі осы бөлімге негізделеді. Екіншісі, жүйенің қалыпты жағдайда қызмет атқару мерзімі. Бұл мерзімде жүйе тұрақты дерлік қызмет жасайды, сондықтан $\lambda(x)$ кіші мәндерді қабылдайды. Қызмет көрсетудің соңғы үшінші бөлімінде жүйе көнереді (қартайды), нәтижесінде жүйе мүлдем

істен шығады. Бұл табиғатта болатын физика-механикалық, химиялық және биологиялық өзгерістердің себебінен болады. Қарастырылған бөлімдердің әрқайсысына өзінің $\lambda(x)$ функциясы сәйкес келеді.

1. $\lambda(x)$ -келесі дәрежелі тәуелдікпен берілсін.

$$\lambda(x) = \lambda_0 m x^{m-1} \quad (12.11)$$

Мұндағы $\lambda_0 > 0, m > 0$ кейбір параметрлер. m -нің $m < 1, m = 1, m > 1$ мәндері жүйенің істен шығу қарқынының жоғарыда қарастырылған мерзімдеріне сәйкес келеді.

$F'(x) = f(x)$ болғандықтан, (12.10) теңдігі, $\lambda(x)$ -тің берілген өрнегінде, $F(x)$ -ке қарағанда бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу болады. Оның $F(0) = 0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\int_0^x \lambda(t) dt\right\}$$

болады. $\lambda(x)$ -тің (12.11) мәнін соңғы теңдікке қойсақ

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_0 x^m}, & \text{егер } x \geq 0, \\ 0, & \text{егер } x < 0 \end{cases} \quad (12.12)$$

шығады.

1-анықтама. (12.12) теңдігімен анықталатын үлестіру Вейбулл-Гнеденко үлестіруі деп аталады.

Егер (12.12) формуласындағы $\lambda_0 x^m$ өрнегін

$$\lambda_0 x^m = \left(\frac{x}{x_0}\right)^m$$

түрінде жазсақ, онда

$$x_0 = \lambda_0^{-\frac{1}{m}}$$

шамасы масштабтық параметр болады. Кейбір жағдайларда жылжыту параметрі де енгізіледі. Ол үшін (12.12)

формуласымен анықталатын $F(x)$ -тің орнына $F(x - c)$ үлестіруі қабылданады.

Вейбулл-Гнеденко үлестіруінің тығыздығы келесі формуламен анықталады:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x_0} \left(\frac{x - c}{x_0} \right)^{m-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{x - c}{x_0} \right)^m \right], & \text{егер } x \geq c, \\ 0, & \text{егер } x < c. \end{cases} \quad (12.13)$$

Вейбулл-Гнеденко үлестіруінің сандық сипаттамаларының мәндерін келтірелік.

$$M_\xi = \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \lambda_0^{-\frac{1}{m}};$$

$$D_\xi = \lambda_0^{-\frac{2}{m}} \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right].$$

Мұндағы $\Gamma(x)$ -Гамма функциясы.

ξ шамасының модасы $M_0 \xi$ және медианасы $M_e \xi$ -ің мәндері:

$$M_0 \xi = \left(\frac{m-1}{\lambda_0 m} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad m > 1;$$

$$M_0 \xi = 0, \quad \text{егер } m < 1;$$

$$M_e \xi = \left(\frac{\ln 2}{\lambda_0} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Дербес жағдайда, $c = 0$ болып, $m = 1$ болса, онда Вейбулл-Гнеденко үлестіруінен көрсеткішті үлестіру шығады, ал $c = 0$ болып, $m = 2$ болса, онда Релей үлестіруі шығады.

Вейбулл-Гнеденко үлестіруіне басқа бір теориялық схема арқылы да келуге болады.

Айталық, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз, барлығының үлестіру функциялары бірдей $F(x)$ болсын.

$$\gamma_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

кездейсоқ шамасының үлестіру функциясы (10.17) формуласы бойынша

$$F_{\gamma_n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

теңдікпен анықталатыны белгілі. $F(x)$ функциясы қандай да бір шарттарды қанағаттандырғанда және $n \rightarrow \infty$ да $F_{\gamma_n}(x)$ үлестіруі Вейбулл-Гнеденко үлестіруіне жуық тең болатынын көрсету мүмкін.

(12.12) үлестіруін инженер, ғалым В.Вейбулл (1887-1979) практикаға ендірген және академик Б.В. Гнеденко (1912-1995) теориялық жақтан зерттеп ұсынған. Сондықтан ол Вейбулл-Гнеденко үлестіруі деп аталады.

2. $\lambda(x)$ -келесі көрсеткішті тәуелділікпен берілсін.

$$\lambda(x) = \frac{ae^{-ax}}{e^{e^{-ax}} - 1}. \quad (12.14)$$

$$(12.10) \quad \text{теңдеуінің} \quad F(0) = \frac{1}{e} \quad \text{бастапқы} \quad \text{шартты}$$

канағаттандыратын шешімі

$$F(x) = 1 - \frac{e-1}{e} \cdot \exp\left\{-\int_0^x \lambda(t) dt\right\}$$

болады. $\lambda(x)$ -тің (12.14) мәнін соңғы теңдікке қойсақ:

$$F(x) = e^{-e^{-ax}}$$

шығады. Жылжыту параметрін енгіземіз.

$$F(x - c) = e^{-e^{-a(x-c)}} \quad (12.15)$$

2-анықтама. Үлестіру функциясы (12.15) болатын үлестіру қос көрсеткішті үлестіру деп аталады.

Егер $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - дер үлестіру функциялары бірдей $F(x)$ болатын тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда $F(x)$ үшін кандай да бір шарттар орындалып, $n \rightarrow \infty$ да

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

кездейсоқ шамасының (10.16) бойынша анықталған

$$F_{\eta_n}(x) = F^n(x)$$

үлестіру функциясы қос көрсеткішті үлестіруге ұмтылатынын көрсетуге болады.

Мысал. Автоматты телефон желісі n жұмысшы бөлшектен тұратын болсын. Бөлшектерінің тоқтаусыз жұмыс істеуін тәуелсіз және бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар деп қарастырамыз. Барлық бөлшектері істен шыққанда ғана желі істен шығады деп ұйғаралық. Онда, $n \rightarrow \infty$ да, желінің тоқтаусыз жұмыс істеуі қос көрсеткішті заңмен үлестірілген болады.

Қос көрсеткішті үлестіруі гидротехникалық құбылыстарды жобалауда, өзендегі судан экстремалды пайдалану жолдарын есептегенде, атмосфера қысымының максимумдарын, ең көп қар жауу құбылыстарын зерттегенде тағы басқа салаларда қолданылады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Еркіндік дәрежесі n болатын χ^2 үлестірудің анықтамасын беріңіз.
2. χ^2 шамасының үлестіру тығыздығын жазыңыз.
3. Релей үлестіруінің анықтамасын беріңіз.
4. Релей үлестіру тығыздығы қандай?
5. Релей үлестіру функциясы қандай?
6. Логарифмдік калыпты үлестірудің анықтамасын беріңіз.

7. Логарифмдік қалыпты үлестірілген шаманың үлестіру тығыздығы, үлестіру функциясы қандай?

8. Логарифмдік қалыпты үлестірілген шаманың математикалық үміті неге тең?

9. Логарифмдік қалыпты үлестірілген шаманың дисперсиясы неге тең?

10. Стюдент үлестіруінің анықтамасын беріңіз.

11. Стюдент үлестіру тығыздығын жазыңыз.

12. Фишер-Снедекор үлестіруінің анықтамасын беріңіз.

13. Фишер-Снедекор үлестіру тығыздығын жазыңыз.

14. Вейбулл-Гнеденко үлестіруінің анықтамасын беріңіз.

15. Қос көрсеткішті үлестіру анықтамасын беріңіз.

16. Максвелл үлестіруінің анықтамасын беріңіз.

17. Максвелл үлестіру тығыздығын жазыңыз.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Кездейсоқ ξ шамасы $(a; \sigma)$ параметрлі қалыпты үлестірілген шама болсын. $\eta = |\xi|$ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығын табыңыз.

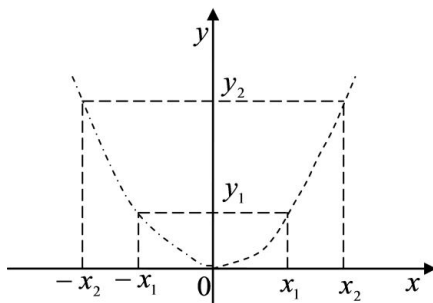
Шешуі. $x > 0$ болғанда

$P\{x < |\xi| < x + \Delta x\} = P\{x < \xi < x + \Delta x\} + P\{-x - \Delta x < \xi < -x\} \approx [f(x) + f(-x)]\Delta x$ болғандықтан, $\eta = |\xi|$ шамасының үлестіру тығыздығы $x > 0$ болғанда мынадай анықталады:

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right].$$

$x < 0$ болғанда $\eta = |\xi|$ шамасының үлестіру тығыздығы нөлге тең.

2-мысал. $(0;1)$ параметрлі қалыпты үлестірілген ξ кездейсоқ шамасы берілген. $\eta = \xi^2$ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығын табыңыз.



12.3-сурет

Шешуі. ξ -дің үлестіру тығыздығы $f(x)$ болатын жағдайда $\eta = \xi^2$ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығын беретін (11.20) формуласын басқаша жолмен де алуға болады. Ол үшін 12.3-суретті пайдаланып келесі теңдіктерді жазамыз.

$$\begin{aligned} P\{Y_1 \leq \eta \leq Y_2\} &= P\{-x_2 \leq \xi \leq -x_1\} + P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \\ &= \int_{-x_2}^{-x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} [f(-x) + f(x)] dx = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} [f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})] \frac{dy}{2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Сонымен, кездейсоқ $\eta = \xi^2$ шамасының үлестіру тығыздығы:

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} [f_{\xi}(-\sqrt{y}) + f_{\xi}(\sqrt{y})] \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{егер } y \geq 0, \\ 0, & \text{егер } y < 0. \end{cases}$$

Кездейсоқ ξ шамасы $(0;1)$ параметрлі қалыпты үлестірілген шама болғандықтан, $\eta = \xi^2$ шамасының үлестіру тығыздығы:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \ell^{-\frac{x}{2}}$$

Бұл $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ параметрлі Гамма – үлестіруі.

3-мысал. $(0, 2)$ параметрлі қалыпты үлестірілген тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{10}$ кездейсоқ шамалар берілсін. Бақылау нәтижелері квадраттарының қосындысы 15-тен артық болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. $P\left\{\sum_{i=1}^{10} \xi_i^2 > 15\right\}$ ықтималдықты есептеу қажет.

Есептің шарты бойынша кездейсоқ шамалардың әрбірі $(0, 2)$ параметрлі қалыпты үлестіруге ие, онда $\frac{1}{2}\xi_i$ $(0, 1)$ параметрлі қалыпты үлестіруге ие болады, сондықтан $\frac{1}{2}\xi_i$ -дің квадраттарының қосындысы χ^2 үлестіруге ие болады. Сонымен,

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} \xi_i^2 > 15\right\} = P\left\{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{10} \xi_i^2 > \frac{15}{4}\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{\xi_i}{2}\right)^2 > 3,75\right\}.$$

χ^2 үлестіру кестесінен, еркіндік дәрежесі $n=10$ болғанда мыналарды табамыз:

$P\{\chi^2 > 3\} = 0,9814$ және $P\{\chi^2 > 4\} = 0,9473$. Интерполяция жүргізсек, ізделінді ықтималдық $P\left\{\sum_{i=1}^{10} \xi_i^2 > 15\right\} = 0,9644$ келіп шығады.

4-мысал. Кездейсоқ шама η -ның үлестіру тығыздығы Релей заңымен берілген болсын. $\eta_1 = \ell^{-\eta^2}$ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығы $g(y)$ -ті табыңыз.

Шешуі: $y = \varphi(x) = \ell^{-x^2}$; $x = \psi(y) = \sqrt{-\ln y}$; $|\psi'(y)| = \frac{1}{2y\sqrt{-\ln y}}$

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)| = \frac{1}{2\sigma^2 y} \cdot \ell^{\frac{\ln y}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 < y < 1.$$

5-мысал. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ параметрлі логарифмдік қалыпты үлестірілген ξ шамасының (2;5) аралыққа түсу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі.

$$\begin{aligned} P\{2 \leq \xi \leq 5\} &= P\{\ln 2 \leq \ln \xi \leq \ln 5\} = P\{0,6932 \leq \eta \leq 1,6094\} = \\ &= \Phi\left(\frac{1,6094 - 1}{0,5}\right) - \Phi\left(\frac{0,6932 - 1}{0,5}\right) = \Phi(1,2188) - \Phi(-0,6126) = 0,618. \end{aligned}$$

6-мысал. Стьюдент заңымен үлестірілген кездейсоқ t шамасының математикалық үмітін және дисперсиясын табыңыз.

Шешуі. (9.3) формуласы бойынша

$$Mt = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f_t(x) dx + \int_0^{\infty} x f_t(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f_t(x) dx + \int_0^{\infty} x f_t(x) dx = 0$$

Сонымен, $Mt = 0$, бұл кездейсоқ t шамасының графигінен де көрініп тұр. Дисперсиясын табу үшін, алдымен, математикалық анализ курсына қарастырылған Бета-функция туралы кейбір мәліметтерді келтірейік:

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Мұндағы $B(p, q)$ -Бета-функция, ал $\Gamma(x)$ -Гамма-функция.

$$\begin{aligned} Dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_t(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{n} = t; \quad x^2 = nt \\ x = \sqrt{nt}; \quad dx = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{t}} dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{n+1}{2}}} dt = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot B\left(\frac{3}{2}, \frac{n-2}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\frac{n}{2} - 1} = \frac{n}{n-2}.$$

Сонымен, $Dt = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $(0,1)$ параметрлі, қалыпты үлестірілген тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{50}$ кездейсоқ шамалары берілген. Еркіндік дәрежесі 50 болатын χ^2 (χ^2 квадрат)-тың 40-тан үлкен болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $P\{\chi^2 > 40\} \approx 0,8413$.

2. Еркіндік дәрежесі n болатын ($n > 2$) χ^2 үлестірудің модасын табыңыз.

Жауабы: $n - 2$.

3. Кездейсоқ ξ шамасының үлестіру тығыздығы Релей заңымен берілген болсын. $\eta = e^{\xi}$ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығы $g(y)$ -ті табыңыз.

Жауабы: $g(y) = \frac{\ln y}{y\sigma^2} e^{-\frac{\ln^2 y}{2\sigma^2}}$.

4. ξ, η -лер тәуелсіз, бірдей қалыпты заңмен үлестірілген кездейсоқ шамалар болсын. $\zeta = |\xi - \eta|$ шамасының үлестіру функциясын табыңыз.

5. $(0, \sigma_1)$ және $(0, \sigma_2)$ параметрлі Коши заңымен үлестірілген екі тәуелсіз ξ және η кездейсоқ шамаларының композициясы, параметрлері $(0, \sigma_1 + \sigma_2)$ болатын Коши заңымен үлестірілген болатынын дәлелдеңіз.

6. Стюдент үлестіруінің тығыздығы $y = f_t(x)$ төмендегі

$$y' = \frac{x + a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \cdot y$$

дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратынын тексеріңіз. Теңдеудегі a, b_0, b_1, b_2 тұрақтыларды үлестірулердің алғашқы төрт моменттері арқылы өрнектеңіз.

7. Фишер-Снедекор үлестіруінің математикалық үмітін және дисперсиясын табыңыз.

$$\text{Жауабы: } MV^2 = \frac{m}{n-2}, n > 2;$$

$$DV^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4.$$

13-дәріс. Үлкен сандар заңы

13.1. Чебышев теңсіздігі

Тәжірибе нәтижесінде кездейсоқ ξ шамасының қабылдауы мүмкін болатын мәндерінен қайсыбірін қабылдайтынын алдын ала дәл айту мүмкін емес, себебі ол өте көп кездейсоқ себептерге байланысты.

Айталық, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары берілсін. Әрбірінің қабылдайтын мәндерін алдын ала айту мүмкін болмағандықтан $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ -нің де қабылдайтын мәндерін алдын ала айту мүмкін емес деп ойлап қалу мүмкін. Ал, ол олай емес. Қандайда бір шарттар орындалғанда, саны өте көп кездейсоқ шамалардың қосындысы өзінің кездейсоқтық сипатын дерлік жоғалтып, белгілі бір заңдылық пайда болады.

«Үлкен сандар заңы» деп аталатын теоремаларда осы шарттар көрсетіледі. Бұл теоремаларды дәлелдеу үшін Чебышев теңсіздігін қолданамыз.

Чебышев теңсіздігі. Кездейсоқ шама ξ -дің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы ε -нен кіші болатындығының ықтималдығы $1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ өрнегінен кем емес:

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad (13.1)$$

(13.1) теңсіздігін келесі түрде де жазуға болады :

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad (13.2)$$

(13.2) теңсіздігі, дисперсия қаншалықты аз болса, онда кездейсоқ шаманың математикалық үмітінен ауытқуы да соншалықты аз болатынын көрсетеді.

Дәлелдеуі. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестіру тығыздығы $f(x)$ болса, онда:

$$P\left\{\begin{array}{l} |\xi - M\xi| \geq \varepsilon \\ |x - M\xi| \geq \varepsilon \end{array}\right\} = \int f(x)dx.$$

Дисперсияның анықтамасы бойынша

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M\xi|^2 f(x)dx \geq \int_{\substack{|x - M\xi| \geq \varepsilon}} |x - M\xi|^2 f(x)dx.$$

Интеграл астындағы $|x - M\xi|$ -ді ε -мен алмастырсақ:

$$D\xi \geq \varepsilon^2 \int_{\substack{|x - M\xi| \geq \varepsilon}} f(x)dx = \varepsilon^2 P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\}.$$

Сонымен,

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Чебышев теңсіздігі теориялық тұрғыдан өте маңызды. Келесі тақырыпта берілетін Чебышев теоремасын дәлелдегенде сол теңсіздік қолданылады.

13.2. Чебышев теоремасы

Теорема. Егер тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамаларының дисперсиялары тұрақты бір c санымен шектелген болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^n \xi_{\kappa} - \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^n M\xi_{\kappa}\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}. \quad (13.3)$$

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^n \xi_{\kappa}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{\kappa=1}^n D\xi_{\kappa},$$

Онда
$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^n \xi_{\kappa}\right) \leq \frac{c}{n}.$$

Чебышев теңсіздігін қолданамыз:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^n \xi_{\kappa} - \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^n M\xi_{\kappa}\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^n \xi_{\kappa}\right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема дәлелденді.

Сонымен, теореманың шарты орындалғанда, кездейсоқ шамалардың арифметикалық ортасы мен олардың математикалық үміттерінің арифметикалық ортасы, арасындағы айырмашылық, кездейсоқ шамалар саны мейлінше көп болғанда, тым аз болады екен.

Егер, қос-қостан тәуелсіз шексіз көп кездейсоқ шамалар тізбегі $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ берілген болса онда (13.3) формуласында

$n \rightarrow \infty$ шекке көшіп, Чебышев теоремасының келесі өрнегіне ие боламыз:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (13.4)$$

(13.4) теңдігін келтіріп шығарғанда, ықтималдығы бірден үлкен еместігі есепке алынды.

Чебышев теоремасында, кездейсоқ шамалардың математикалық үміттері бір-біріне тең болуы шарт емес еді. Ал енді практикада кездейсоқ шамалардың математикалық үміттері бірдей болатын жағдайлар жиі ұшырасады. Егер бұл кездейсоқ шамалардың дисперсиялары да тұрақты бір санменен шектелген деп ұйғарсақ, онда бұл жағдайда да Чебышев теоремасы орындалады.

Бұл дербес жағдай үшін Чебышев теоремасы мынадай баяндалады:

Егер қос-қостан тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін $M \xi_1 = M \xi_2 = \dots = M \xi_n = a$ және $D \xi_1 \leq C, D \xi_2 \leq C, \dots, D \xi_n \leq C \dots$ болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Статистикада жиі қолданылатын таңдама әдісі осы Чебышев теоремасына негізделген. Бұл әдіс статистикалық бақылау әдісі болып, мұнда кейбір жиынның жалпы сипаттамаларын анықтау үшін жиынның барлық мүшелерін алмай, олардың кездейсоқ таңдамада алынған бір үлесі ғана зерттеледі. Мысалы, өте көп электр шырақтарынан тұратын жиынның орташа қызмет мерзімін анықтау үшін олардың аз ғана бір бөлігі таңдап алынып, осылар сынап көріледі; сынап көрілген шырақтардың орташа қызмет мерзімі, жиынның барлық шырақтарының орташа қызмет мерзіміне жуық тең деп қабылданады. Дәннің сапалық белгісінде осы әдіспен сынап білуге болады.

13.3. Бернулли теоремасы

Тәуелсіз n тәжірибе жүргізілген болып, олардан әр біреуінде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты p -ға тең болсын. μ - A оқиғасының n тәуелсіз тәжірибеде пайда болу саны болсын. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (13.5)$$

Дәлелдеуі. $\mu_k - A$ оқиғасының k -шы тәжірибеде пайда болу саны болсын. Мынадай теңдік орынды болады:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

Әрбір кездейсоқ шама μ_k екі мәнді қабылдауы мүмкін: p ықтималдық пен $1-p$ (пайда болса) және $q = 1 - p$ ықтималдықпен 0 -ді (оқиға пайда болмаса). Бұл кездейсоқ шамалар үшін Чебышев теоремасының шарттары орындалады. Шынында да, тәжірибелер тәуелсіз болғандықтан, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ шамаларының да қос-қостан тәуелсіздігі шығады. Кез келген μ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) шамасының дисперсиясы pq көбейтінді $\frac{1}{4}$ -ден аспайды, яғни барлық кездейсоқ шамалардың дисперсиялары, $c = \frac{1}{4}$ санымен шектелген.

Сонымен, $M\mu_k = p, D\mu_k = pq \leq \frac{1}{4}$. Онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \text{ Немесе,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Теорема дәлелденді.

13.4. Ықтималдықтар теориясының орталық шек теоремасы

Алдыңғы тақырыптарда қарастырылған, үлкен сандар заңына қатысты теоремаларда, кездейсоқ шамалардың қосындысы олардың қандай да бір тұрақты сипаттамасына жинақталу фактілері тұжырымдалған еді. Ал, бұл тақырыпта кездейсоқ шамалар қосындысының шектік үлестіру заңдарын тұжырымдауға қатысты есептер қарастырылады.

Көптеген тәжірибелерде зерттелген құбылыстардағы статистикалық фактілер, саны өте көп түрлі тәуелсіз кездейсоқ фактілердің өзара әсерінің нәтижесі ретінде қалыптасатындығы және олар қалыпты немесе оған өте жақын заңмен үлестірілген болатыны байқалады. Сондықтан, ықтималдықтар теориясында және математикалық статистикада қалыпты үлестіру заңы жиі қолданылады. Кез келген заңдылықпен үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі қосындысының үлестірілуі қалыпты заңға тең болуы үшін қажетті және жеткілікті жалпы шарт Ляпунов теоремасында берілген. Сондықтан, Ляпунов теоремасының маңызы ерекше және ол ықтималдықтар теориясының орталық шек теоремасы деп аталады.

Айталық, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ өзара тәуелсіз, кез келген заңдылықпен үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі берілсін. S_n арқылы оның алдыңғы n мүшесінің қосындысын белгілейік, яғни

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Ляпунов теоремасы. Егер, өзара тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ кездейсоқ шамалардың әрбіреуінің шекті математикалық үміті, дисперсиясы және үшінші ретті орталық моменті бар болса және олар үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n M|\xi_i - M_{\xi_i}|^3}{(DS_n)^{3/2}} = 0 \quad (13.6)$$

теңдігі орындалса, онда S_n шамасы ортасы MS_n , ал орташа квадраттық ауытқуы $\sqrt{DS_n}$ болатын асимптотикалық қалыпты заңмен үлестірілген болады.

Егер кездейсоқ S_n шамасының математикалық үміті MS_n -ге, ал дисперсиясы DS_n -ге тең болса, онда $\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$ шамасы математикалық үміті нөл, ал дисперсиясы бір, нормаланған шама болатынын ескерсек, онда теореманың тұжырымы келесі теңдіктермен жазылады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ x_1 < \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (13.7)$$

дербес жағдайда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (13.8)$$

Теореманың дәлелдеуін тізімде келтірілген әдебиеттерден оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Ляпунов теоремасындағы ξ_i кездейсоқ шамалар кез келген заңдылықпен үлестірілген болуы мүмкін еді. Егер ξ_i кездейсоқ шамалары дискретті болып, бірдей үлестірілген болса және тек қана 0 немесе 1 мәндерін қабылдайтын болса, онда Ляпунов теоремасынан оның дербес жағдайы ретінде Муавр-Лапласың интегралдық теоремасы шығады. Шынында да, ξ_i шамаларының математикалық үміті

$$M\xi_i = 1 \cdot P + 0(1 - P) = P,$$

ал дисперсиясы $D\xi_i = M(\xi_i^2) - (M\xi_i)^2 = 1 \cdot P + 0(1 - P) - P^2 = P - P^2 = Pq$.

ξ_i -лер өзара тәуелсіз болғандықтан, $MS_n = np$ және $DS_n = npq$.

Ендеше,

$$\frac{\sum_{i=1}^n M|\xi_i - M\xi_i|^3}{(DS_n)^{3/2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (|1-p|^3 p + |0-p|^3 q)}{(npq)^{3/2}} = \frac{(q^3 p + p^3 q) \sum_{i=1}^n 1}{n\sqrt{n} p\sqrt{p} \cdot q\sqrt{q}} \leq$$

$$\leq \frac{npq}{npq \cdot \sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ да.}$$

Яғни (13.6) шарты орындалады. Бұл жағдайда (13.7) теңдігі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{x_1 < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < x_2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (13.9)$$

түрде болады. Мұндағы m -нөл және бір мәндерін қабылдайтын ξ_i кездейсоқ шамаларының қосындысы, яғни

$$m = S_n.$$

Сонымен, Муавр-Лапласың интегралдық теоремасы Ляпунов теоремасының дербес жағдайы екен. (13.6) теңдігі Ляпунов шарты деп аталады.

Салдар. Егер ξ_i кездейсоқ шамаларының барлық мәндері математикалық үмітке қарағанда бірқалыпты шектелген болса, яғни

$$|\xi_i - M\xi_i| < L$$

және $n \rightarrow \infty$ да $DS_n \rightarrow \infty$, онда бұл шамалар үшін орталық шек теоремасы, яғни Ляпунов теоремасы орындалады.

Мысал. Қандай да бір шама бір-біріне тәуелсіз n рет өлшенген болсын. Әрбір өлшеуде, міндетті түрде, сезілмейтін, өте кіші қателіктер жіберіледі. Олар метеорологиялық жағдайға байланысты өлшеуіш құралдарының параметрлерінің өзгеруінен, сезілмейтін әртүрлі механикалық себептерден, тағы да басқа себептермен байланысты болуы мүмкін. Осындай себептермен әрбір өлшеуде туындайтын кездейсоқ өте кіші қатені ξ_i -мен белгілейік. Онда $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ -орташа қателік,

салдар бойынша, $n \rightarrow \infty$ да қалыпты заңмен үлестірілген болады. Сонымен, нақты шаманы өлшеудің нәтижесін, математикалық үміті оның дәл мәні a -ға тең болатын ξ кездейсоқ шамасы деп қарастырсақ, онда $\xi = a + \bar{\xi}$ болады. $\bar{\xi}$ қалыпты заңмен үлестірілгендіктен, өлшеудің мүмкін болатын нәтижесі ξ кездейсоқ шамасы да қалыпты заңмен үлестірілген болады. Бұл қателіктер теориясының негізгі заңы деп аталады. Мұндай заңдылықты алғаш рет неміс ғалымы Гаусс байқаған.

Көптеген жағдайларда, оқиғаның пайда болу санының абсолютті мәнінің үлестірілуі сұралмастан, оның пайда болу жиілігінің үлестірілуі талап етіледі. (13.9) формуласынан $\frac{m}{n}$

жиіліктің ортасы p , ал орташа квадраттық ауытқуы $\sqrt{\frac{pq}{n}}$

болатын асимптотикалық қалыпты заңмен үлестірілген болатыны шығады, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ x_1 < \frac{\frac{m}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_2}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (13.10)$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. «Үлкен сандар заңы» қандай жағдайларда байқалады?
2. Чебышев теңсіздігі қалай жазылады?
3. Чебышев теңсіздігі қандай теориялық және практикалық маңызға ие?
4. Чебышев теоремасын жазыңыз және дәлелдеңіз.
5. Ақырсыз көп сандағы кездейсоқ шамалар тізбегі үшін Чебышев теоремасы қалай жазылады?
6. Чебышев теоремасының дербес жағдайын жазыңыз.
7. Чебышев теоремасы қай салада қолданылады?
8. Бернулли теоремасын жазыңыз және дәлелдеңіз.
9. Орталық шек теоремасын баяндаңыз.

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. $D \xi = 0,001$ болғанда, $|\xi - M\xi| < 0,1$ болу ықтималдығын, Чебышев теңсіздігін қолданып бағалау керек.

Шешуі.
$$P\{|\xi - M\xi| < 0,1\} \geq 1 - \frac{0,001}{0,01} = 0,9.$$

Сонымен, $P \geq 0,9$.

2-мысал. 2134 тәуелсіз кездейсоқ шаманың әрқайсысының орташа квадраттық ауытқуы 4-тен аспайды. Осы кездейсоқ шамалардың арифметикалық ортасының, олардың математикалық үміттерінің арифметикалық ортасынан ауытқуы, абсолют шамасы бойынша 0,5-тен аспауының ықтималдығын бағалау керек.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $\sigma_{\xi} \leq 4$, онда $D\xi = \sigma_{\xi}^2 \leq 16$, яғни $c = 16$, $\varepsilon = 0,5$, $n = 2134$. Бұларды (13.3) теңсіздігіне қойсақ:

$$P\left\{\left|\frac{1}{2134} \sum_{k=1}^{2134} \xi_k - \frac{1}{2134} \sum_{k=1}^{2134} M\xi_k\right| \leq 0,5\right\} \geq 1 - \frac{16}{2134 \times 0,5^2} = 0,97.$$

3-мысал. Жәшікте 100 ақ және 2000 қара шар бар. Жәшіктен 300 шар алынды (кейін қайтадан салынды). Алынған 300 шардың ішіндегі ақ шарлар саны m мына $80 < m < 120$ теңсіздіктерді қанағаттандыратындығының ықтималдығын төменнен бағалау керек.

Шешуі. Берілген теңсіздікті келесі түрде жазамыз:

$$-20 < m - 100 < 20,$$

немесе $-\frac{1}{15} < \frac{m}{300} - \frac{1}{3} < \frac{1}{15}.$

Ендеше, $\left| \frac{m}{300} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{15}$ теңсіздігінің ықтималдығын бағалау

керек, онда $\varepsilon = \frac{1}{15}$ және

$$P\left\{\left|\frac{m}{300} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}\right\} > 1 - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{300 \left(\frac{1}{15}\right)^2} = \frac{5}{6}.$$

Сонымен, m -нің мәні (80,120) интервалында болуы үшін ықтималдық $\frac{5}{6}$ -тен үлкен болуы тиіс екен.

4-мысал. Қандай да бір өндіріс саласы қызметкерлерінің 10%-ы жоғары мағлұматты екені белгілі. Осы сала қызметкерлерінің тұрмыс жағдайын зерттеу үшін n қызметкер кездейсоқ тандалсын делік. Тандалған қызметкерлердің 8-12%-ы жоғары мағлұматты болу ықтималдығы 0,95-ке тең болуы үшін неше қызметкер тандалуы қажет, яғни n -?

$$\text{Шешуі. } p = 0,1, x_2 = \frac{0,12 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{n}}}; x_1 = \frac{0,08 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{n}}}.$$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{m}{n} \text{ кездейсоқ шамасының мәні } (0,08; 0,12) \text{ аралығында}$$

болуы ықтималдығын табу үшін (13.10) формуласын қолданамыз.

$$P\left\{0,08 < \frac{m}{n} < 0,12\right\} = \Phi\left(\frac{0,02}{\sqrt{\frac{0,09}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-0,02}{\sqrt{\frac{0,09}{n}}}\right) = 0,95;$$

$$2\Phi\left(\frac{0,02 \cdot \sqrt{n}}{0,3}\right) = 0,95; \quad \Phi\left(\frac{0,02 \cdot \sqrt{n}}{0,3}\right) = 0,475;$$

$\Phi(x)$ функциясының кестесінен $\frac{0,02 \cdot \sqrt{n}}{0,3} = 1,96$ -ны табамыз.

Соңғы теңдіктен $n = 864$ шығады. Сонымен, 864 қызметкер таңдалуы қажет екен.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Егер $D\xi=0,004$ болса, онда Чебышев теңсіздігінен пайдаланып $|\xi - M\xi| < 0,1$ болу ықтималдығын бағалаңыз.

Жауабы: $P \geq 0,6$

2. $P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 0,9$, $D\xi=0,004$ берілген. Чебышев теңсіздігін қолданып ε -ды табыңыз.

Жауабы: $\varepsilon=0,2$

3. Чебышев теңсіздігінің көмегімен, қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың математикалық үмітінен ауытқуы орташа квадраттық ауытқудың үш еселенгенінен үлкен болу ықтималдығын бағалаңыз.

Жауабы. $P\{|\xi - M\xi| \geq 3\sigma\} \leq \frac{1}{9}$.

4. 2500 тәуелсіз кездейсоқ шаманың әрқайсысының дисперсиясы 5-тен аспайды. Осы кездейсоқ шамалардың арифметикалық ортасының олардың математикалық үмітінің арифметикалық ортасынан ауытқуының абсолют шамасы 0,4-тен аспауының ықтималдығын бағалау керек.

Жауабы. $P > 9875$.

5. Қоймадағы бөлшектердің ақаусыз болу ықтималдығы 0,98-ге тең. Қоймадан n бөлшек алынады. Алынған бөлшектердің ақаусыз болу жиілігінің оның ықтималдығынан ауытқуы абсолют мәні бойынша 0,02-ден аспауы ықтималдығы 0,96-дан кем болмауы үшін қанша бөлшек тексерілуі қажет.

Жауабы: $n \geq 1225$.

6. Қоймадан таңдамай алынған бөлшектің ақаулы болу ықтималдығы 0,2-ге тең. Таңдамай алынған 50 бөлшектің ішінде ақаулы бөлшектің саны 6-дан кем болмауының ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $p = 0,921$.

7. Әрбіреуі $(0,1)$ интервалында бірқалыпты үлестірілген 24 тәуелсіз кездейсоқ шамалар қосындысы 6-мен 8 сандары арасында болу ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $p\{6 < S_n < 8\} = 0,0023$.

8. A оқиғасының пайда болу ықтималдығы $p = 0,2$. $n = 10000$ тәуелсіз тәжірибеде A оқиғасының пайда болу жиілігінің оның ықтималдығынан ауытқуы $\varepsilon = 0,01$ -ден аспауының ықтималдығын табыңыз.

Жауабы: $p\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0,2\right| \leq 0,01\right\} = 0,988$.

II ТАРАУ

14-дәріс. Математикалық статистика элементтері

14.1. Математикалық статистиканың негізгі ұғымдары

Математикалық статистиканың негізгі міндеттері мыналар:

а) статистикалық мәліметтерді жинақтау және оларды реттестіру әдістерін қалыптастыру;

ә) зерттеу мақсатына сәйкес, статистикалық мәліметтерді талдау әдістерінің нұсқауларын жасау; ол үшін үлестіру функциясының параметрлерін бағалау, белгісіз үлестірулердің статистикалық болжамдарын зерттеу, ғылыми және практикалық қорытындылар жасаудан тұрады.

Сан немесе сапалық белгілері бойынша біртекті, саны өте көп заттар жиынын зерттеу қажет болсын.

Зерттелуге тиісті заттардың (элементтердің) жалпы жиынын бас жиын деп атайды. Іс жүзінде, әдетте, бас жиынның барлық элементтері бір шеттен тексерілместен (әсіресе заттар саны өте көп болса), одан кездейсоқ алынған бір бөлігі ғана зерттеледі.

Бас жиыннан кездейсоқ түрде алынған оның бір бөлігі таңдама жиын немесе таңдама деп аталады.

Жиындағы заттар саны жиынның көлемі деп аталды. Мысалы, 1000 бөлшектен зерттеу үшін 100 бөлшек алынған болса, онда бас жиынның көлемі $N=1000$, ал таңдаманың көлемі $n=100$.

Бас жиынды сан немесе сапалық белгілері бойынша зерттеушінің ой-тұжырымдары дұрыс болуы үшін, таңдама жиында бас жиынға тән негізгі қасиеттер, пропорциялар сақталған болуы тиіс. Қысқаша айтқанда, таңдама жиын қосалқы көрсеткішті болуы қажет. Егер таңдаманың әрбір элементі бас жиыннан кездейсоқ алынған болса, онда үлкен сандар заңына сәйкес, таңдама қосалқы көрсеткішті болады.

Үлестіру заңы белгісіз, ξ кездейсоқ шамасын қарастырайық. n тәуелсіз тәжірибенің нәтижелері 14.1-кестесінде берілген. Бірінші жолда тәжірибенің реттік нөмірлері, ал екінші жолда тәжірибе нәтижелері келтірілген:

14.1-кесте

i	1	2	3	4	...	n
ξ	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n

14.1-кесте статистикалық қатар деп аталады. Статистикалық қатар алғашқы статистикалық мәлімет болып есептеледі.

Егер n өте көп болса, онда кестені талдау, одан бір заңдылықты байқау қиын, сондықтан оны топтарға бөледі. Ол мынадай: кездейсоқ шаманың мәндері орналасқан толық интервал (a_0, a_1) , (a_1, a_2) , ..., $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ тең интервалдарға бөлінеді және ξ -дің әрбір интервалға түскен мәндерінің саны m_k есептеледі.

$W_k = \frac{m_k}{n}$ саны (a_{k-1}, a_k) интервалға сәйкес салыстырмалы

жиілік болады. Онда, $\sum_{k=1}^{\lambda} W_k = 1$.

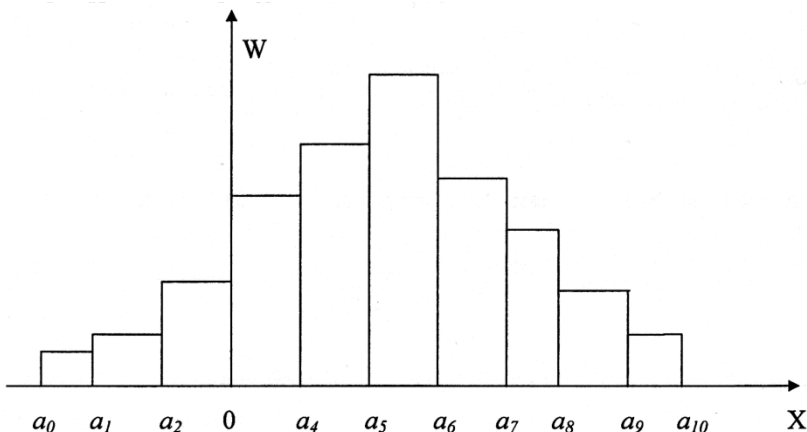
Орындалған істі 3 жолдан тұратын 14.2-кестеде келтіреміз.

1-жолда өсу реті бойынша орналасқан интервалдар, 2-жолда кездейсоқ шаманың сәйкес интервалдарға түскен мәндерінің саны, ал 3-жолда салыстырмалы жиіліктері жазылады.

14.2- кесте

Интервалдар	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	(a_2, a_3)	...	(a_{k-1}, a_k)	...	$(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$
m_k	m_1	m_2	m_3	...	m_k	...	m_λ
w_k	w_1	w_2	w_3	...	w_k	...	w_λ

Осылай кесте жасау топтастыру деп аталады. Кестені геометриялық түрде бейнелеуге болады. Ол үшін Ox өсінен $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_\lambda$ нүктелерін белгілейміз. Табаны $[a_{k-1}, a_k]$ кесіндісі, ауданы W_k болатын тіктөртбұрыштықтар құрамыз (14.1- сурет).



14.1-сурет

14.1-суреттегі фигура гистограмма деп аталады. Топтастыру және гистограмма негізінде, кездейсоқ шама ξ -ді статистикалық үлестірудің жуық заңын жасауға болады. Ол үшін (a_{k-1}, a_k) интервалдың ортасын x_k мен белгілейміз және оны кездейсоқ шаманың m_k рет қайталанатын мәні деп қабылдаймыз. $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ жиыны кездейсоқ ξ шамасының вариантасы деп аталады. Одан кейін 14.2- кестесі орнына 14.3-кестесін құрамыз.

14.3-кесте

ξ	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$	x_λ
m_k	m_1	m_2	m_3	$\dots$	m_k	$\dots$	m_λ
w_k	w_1	w_2	w_3	$\dots$	w_k	$\dots$	w_λ

1- анықтама. Кездейсоқ ξ шамасының статистикалық (эмпирикалық) үлестіру функциясы деп алынған статистикалық мәліметте (таңдамада) $\{\xi < x\}$ оқиғасы жиілігінің өзгеру заңын айтады және ол $\bar{F}(x)$ -пен белгіленеді, яғни

$$\bar{F}(x) = w \{ \xi < x \}.$$

2-анықтама. Теориялық үлестіру функциясы деп бас жиында $\{\xi < x\}$ оқиғасы ықтималдығының өзгеру заңын айтады және ол $F(x)$ -пен белгіленеді, яғни $F(x) = P\{\xi < x\}$.

$(x_1, m_1), (x_2, m_2), \dots, (x_\lambda, m_\lambda)$ нүктелерін қосатын сынық сызық жиіліктер полигоны, ал $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \dots, (x_\lambda, w_\lambda)$ нүктелерін біріктіретін сынық сызық салыстырмалы жиіліктер полигоны деп аталады.

14.2. Статистикалық үлестірулердің сандық сипаттамалары

Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларына ұқсас статистикалық үлестірулердің де сандық сипаттамалары анықталады.

Кездейсоқ шама ξ -дің бақыланған мәндерінің арифметикалық орташасы мынадай:

$$\overline{M\xi} = \sum_{i=1}^n x_i / n \quad (14.1)$$

Мұндағы x_i – кездейсоқ шама ξ -дің i -ші тәжірибедегі мәні, n -тәжірибелер саны. Бұл сипаттаманы кездейсоқ шаманың статистикалық орташа мәні деп атайды. Егер $x_1, x_2, \dots, x_k$ белгілер сәйкесінше $m_1, m_2, \dots, m_k$ жиіліктерге ие болса, онда (14.1) формуласы келесі түрде жазылады.

$$\overline{M\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i m_i.$$

Мұндағы $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Тәжірибелер саны көп болғанда кездейсоқ шаманың статистикалық орташа мәні оның математикалық үмітіне жуық тең болады.

Статистикалық дисперсия келесі түрде анықталады:

$$\overline{D}\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{M}\xi)^2. \quad (14.2)$$

Статистикалық бастапқы және орталық моменттер былай анықталады:

$$\overline{\mu}\xi^k = \sum_{i=1}^n x_i^k / n, \quad (14.3)$$

$$\mu(\xi - \overline{M}\xi)^k = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{M}\xi)^k / n. \quad (14.4)$$

Тәжірибелер саны көп болғанда, келтірілген барлық статистикалық сипаттамалар сәйкес теориялық сипаттамаларға жуық тең болады.

Кейбір жағдайларда (14.1), (14.2) формулалардан пайдалану күрделі есептеулерге алып келеді, сондықтан келесі әдісті қолданған ыңғайлы.

Айталық, кездейсоқ шама ξ -дің $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері қандайда бір a санының маңайында орналасқандығы байқалсын. Онда (14.1)-дің орнына мәні a -ға тең, бірақ түрі өзгеше мынадай теңдікті аламыз:

$$\overline{M}\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a) + a. \quad (14.5)$$

Мысалы, x_i -дің мәндері:

999, 1001, 1003, 998, 1005, 1000, 1002, 996, 998, 1004.

Бұл мәндердің $a=1000$ саны маңайында орналасқанын байқауға болады. $\overline{M}\xi$ -ді есептеу үшін x_i -а айырымының мәндерін табамыз, олар мыналар:

-1, 1, 3, -2, 5, 0, 2, -4, -2, 4.

Бұлардың қосындысы 6-ға тең. Сондықтан (14.5) бойынша:

$$\bar{M} \xi = \frac{1}{10} \cdot 6 + 1000 = 1000,6.$$

(14.2)-нің орнына да мәні соған тең, бірақ түрі өзгеше мынадай теңдікті алуға болады.

$$\begin{aligned} \bar{D} \xi &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{M} \xi)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a + a - \bar{M} \xi)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - \\ &- 2(\bar{M} \xi - a)^2 + (\bar{M} \xi - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - (\bar{M} \xi - a)^2. \quad (14.6) \end{aligned}$$

a санын $\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ қосындыны есептеу ыңғайлы болатындай етіп таңдау қажет.

Өзін - өзі тексеру сұрақтары

1. Математикалық статистиканың негізгі міндеттерін атаңыз.
2. Математикалық статистиканың негізгі ұғымдарын атаңыз.
3. Гистограмма деген не?
4. Статистикалық үлестіру функциясының анықтамасын беріңіз.
5. Статистикалық үлестіру функциясының графигін сызыңыз.
6. Статистикалық үлестірулердің сандық сипаттамалары қалай анықталады?

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

І-мысал. Қашықтық 100 рет өлшенген. Алынған нәтижелер бойынша жасалған топтастыру 14.4-кестеде келтірілген. Статистикалық үлестіру функциясын құрыңыз.

14.4- кесте

интервал	80- 110	110- 140	140- 170	170- 200	200- 230	230- 260	260- 290	290- 320
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
w_k	0.02	0.05	0.16	0.24	0.28	0.18	0.06	0.01

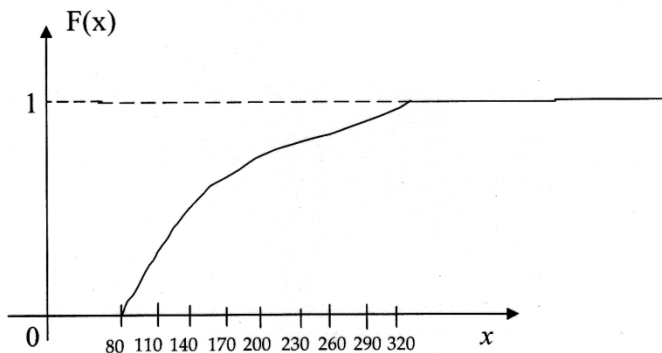
Шешуі. 14.4-кестесін пайдаланып жуық үлестіру заңын байқататын 14.5 - кестесін құрамыз:

x_k	95	125	155	185	215	245	275	305
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
w_k	0.02	0.05	0.16	0.24	0.28	0.18	0.06	0.01

Статистикалық үлестіру функциясын құру үшін келесі мәндерді есептейміз.

$$\begin{aligned} \bar{F}(80) &= 0; \quad \bar{F}(110) = 0.02; \quad \bar{F}(140) = 0.02 + 0.05 = 0.07; \quad \bar{F}(170) \\ &= 0.07 + 0.16 = 0.23; \quad \bar{F}(200) = 0.23 + 0.24 = 0.47; \quad \bar{F}(230) \\ &= 0.47 + 0.28 = 0.75; \quad \bar{F}(260) = 0.75 + 0.18 = 0.93; \\ \bar{F}(290) &= 0.93 + 0.06 = 0.99; \quad \bar{F}(320) = 0.99 + 0.01 = 1. \end{aligned}$$

Есептелген мәндерді координата жүйесіне орналастырып қисық сызықпен біріктірсек, онда статистикалық үлестіру функциясының жуық графигі мынадай болып шығады.



14.2-сурет

2-мысал. Қалыпты заң бойынша үлестірілген бас жиыннан көлемі 10-ға тең таңдама алынған. Нәтижелері 14.6-кестеде берілген.

x_i -дің мәндері	-1	0	1	2
Мұндай мәндердің саны	2	3	4	1

а) статистикалық орта мәнін табыңыз.

ә) Статистикалық дисперсиясын табыңыз.

Шешуі: а) x_i мәндердің 0,5 саны маңайында орналасқанын байқауға болады. Сондықтан $a=0,5$ деп қабылдап (14.5) формуласын қолданамыз.

$$\bar{M} \xi = \frac{1}{10} (-3/2 \cdot 2 - 1/2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 4 + 3/2 \cdot 1) + 0,5 = 0,4.$$

ә) (14.6) формуласын қолданамыз.

$$\bar{D} \xi = 1/10 [(-3/2)^2 \cdot 2 + (-1/2)^2 \cdot 3 + (1/2)^2 \cdot 4 + (3/2)^2 \cdot 1] - (0,4 - 0,5)^2 = 0,84.$$

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Тиынды 100 рет лақтырыңыз және онда Елтаңбаның қанша рет шыққанын анықтаңыз. Салыстырмалы жиілігін тауып, ықтималдығымен салыстырыңыз.

2. Ойын сүйегін 100 рет лақтырыңыз және онда келесі оқиғалардың салыстырмалы жиіліктерін табыңыз:

а) екі ұпайдың түсуі;

ә) алты ұпайдың түсуі;

б) жұп санды ұпайдың шығуы;

в) үшке еселі ұпайдың шығуы.

Алынған салыстырмалы жиіліктерді осы оқиғалардың ықтималдықтарымен салыстырыңыз.

3. 100 бөлшек микрометрмен өлшенген. Нәтижелері 14.7-кестеде берілген.

14.7-кесте

Өлшемдерінің интервалы, мм	154- 158	158- 162	162- 166	166- 170	170- 174	174- 178	178- 182
Бөлшектер саны	10	14	26	28	12	8	2

- а) Салыстырмалы жиіліктері анықталсын.
 ә) Гистограммасы құрылсын.
 б) Статистикалық үлестіру функциясы құрылсын.
 в) Үлестіру функциясының графигін сызыңыз.
 г) Статистикалық орта мәні табылсын.
 ғ) Статистикалық дисперсиясын табыңыз.
 4. Көлемі $n = 20$ болатын таңдаманың үлестірілуі мынадай:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Таңдаманың орта мәні табылсын.

Жауабы: $\overline{M\xi} = 2621$.

5. Көлемі $n = 100$ болатын таңдаманың үлестірілуі мынадай:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Таңдаманың дисперсиясын табыңыз. Жауабы: $\overline{D\xi} = 167,29$.

6. Көлемі $n = 100$ таңдаманың үлестірілуі мынадай:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

Таңдаманың дисперсиясын табыңыз. Жауабы: $\overline{D\xi} = 12603$.

15-дәріс. Кездейсоқ шама мәндерін үлестірудің параметрлерін статистикалық бағалау

15.1. Жалпы ұғымдар

Кездейсоқ ξ шамасының үлестіру заңы оның ықтималдық заңдылықтарын толық тұжырымдауға мүмкіндік беретіндігі белгілі. Бірақ, үлестіру заңдарының барлығы қандайда бір параметрлерге тәуелді, мысалы: биномды үлестіру p -ның мәніне, қалыпты үлестіру заңы $M\xi$, $D\xi$ -лердің мәндеріне, Пуассон үлестіруі λ -ның мәніне, тағы басқалар. Сондықтан, сол параметрлер мәндерінің қателіктері қаншалықты кем болса, онда олар арқылы анықталатын үлестірулері де сәйкес сан немесе сапалық белгілер туралы соншалықты дәл тұжырым жасау мүмкіндігін береді.

Параметрлерді бағалау, әсіресе статистикада үлкен маңызға ие, себебі зерттеуші тек қана таңдама жиынды зерттеу мүмкіндігіне ие болып, бағаланатын параметрді таңдаманың мәліметтері бойынша өрнектей алады. Әдетте, таңдама бас жиынның кішігірім бөлігі және оны зерттеудің нәтижесіне негізделіп, бас жиын туралы шешім қабылдайтын болғандықтан, бұл арада қателесу қаупі мол.

Айталық, ξ кездейсоқ шамасының үлестіру функциясы қандай да бір θ параметрге тәуелді болсын, яғни $F(x, \theta)$. Біртекті жағдайда жүргізілген n тәуелсіз тәжірибенің нәтижелері $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ кездейсоқ таңдамасы берілсін. $F(x, \theta)$ үлестіру функциясының θ шамасынан тәуелділігі, кездейсоқ ξ_k шамалардың да қандай да бір түрде θ -дан тәуелділігі фактісін байқатады. θ шамасының мүмкін болатын мәндері шекті $[a, b]$ немесе шексіз аралықта жатады деп есептейміз. ξ_k шамалары кездейсоқ болғандықтан, θ -ның мәнін дәл анықтау жалпы жағдайда мүмкін емес. Сондықтан келесі жуық теңдікті қарастырамыз:

$$\theta \approx \bar{\theta}_n = f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (15.1)$$

(15.1) теңдіктің оң жағындағы функция, бақылаулар саны n -ге, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ таңдамаға тәуелді болғандықтан, ол ξ_k шамалардың үлестірулерін сипаттайтын параметрлерге де тәуелді болады.

Анықтама. (15.1) түріндегі функциялар статистика немесе θ параметрдің бағасы деп аталады.

Мысалы, (14.1) ξ -дің математикалық үмітінің, ал (14.2) дисперсиясының бағасы ретінде қабылдануы мүмкін.

Кез келген жуық теңдік, оның қателігі белгілі бір түрде бағаланған жағдайда ғана мағынаға ие болады. Сондықтан, (15.1) жуық теңдігі келесі жалпы талаптарды қанағаттандыруы тиіс:

а) θ шамасының мәні ретінде қабылданатын оның жуық мәнін табуға, басқаша айтқанда, θ шамасын бағалауға мүмкіндік беретін $f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ статистикаларды анықтауға жеткілікті табиғи әдістерді тұжырымдау қажет.

ә) θ шамасының әрбір $\theta_n = f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ бағасы үшін оның дәлдік дәрежесін анықтау қажет.

Бұл талаптардың орындалуы үшін қажетті негізгі шарттарды қарастырамыз.

15.2. Орнықты, ығыспаған және тиімді бағалар

1-анықтама. Егер, $n \rightarrow \infty$ -да мейлінше кіші оң ε саны үшін $P\{|\theta - \bar{\theta}_n| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ болса, онда θ параметрдің $\bar{\theta}_n = f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ бағалары орнықты деп аталады.

Басқаша айтқанда, егер, $n \rightarrow \infty$ -да $\bar{\theta}_n$ статистикалар ықтималдық бойынша θ шамасының маңайына жинақталатын болса, онда θ параметрдің $\bar{\theta}_n$ бағалары орнықты деп аталады.

Орнықты бағаның практикалық екі кемшілігі бар. Біріншісі – таңдама көлемі аз болғанда ол қасиетті байқау қиын, екіншісі – бір үлестіру функциясының θ параметріне ықтималдығы бойынша жинақталатын шексіз көп орнықты бағаларды көрсетуге болады. Сондықтан бағаның келесі қасиетін қарастырамыз.

2-анықтама. Егер $M \bar{\theta}_n = \theta$ болса, онда θ параметрдің $\bar{\theta}_n$ бағасы ығыспаған баға деп аталады.

Бағаның ығыспағандығы жүйелік қателердің жоқтығын және $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_n$ бағалардың қателіктерінің орташа мәні нөлге тең болатынын білдіреді.

Енді (15.1) жуық теңдіктің дәлдігін сипаттауды қарастырайық. $\bar{\theta}_n - \theta$ айырымның толық сипаттамасын оның үлестіру функциясы береді, бірақ оны анықтау өте күрделі болғандықтан, келесі функция қолданылды:

$$P\{n, \theta, A\} = P\{|\bar{\theta}_n - \theta| > A\}$$

Бұл функция, жуық теңдік қателігінің абсолют шамасы A санынан асып кету ықтималдығын білдіреді. Жалпы айтқанда, бұл функцияның мәні A мейлінше үлкен болғанда да нөлден өзгеше болуы мүмкін, сондықтан теориялық жақтан қарағанда мейлінше үлкен $|\bar{\theta}_n - \theta|$ ауытқуларда болуы мүмкін, бірақ ол тым аз ықтималдықтармен орындалады. Соңғы функцияны қандай да бір санның көмегімен бағалауға болады. Ол сан орташа квадратты қателік δ^2 болып, ол мынадай тәуелділікпен анықталады:

$$\delta^2 = M(\bar{\theta}_n - \theta)^2 = \delta^2(n, \theta). \quad (15.2)$$

Әрине, δ^2 шамасы қателіктің бірден-бір өлшеуі емес. Орташа арифмети-калық қателікті, яғни $\alpha = M|\bar{\theta}_n - \theta|$, немесе

$$\rho = Mf(|\bar{\theta}_n - \theta|),$$

түрдегі кез келген шаманы қарастыруға да болады, мұндағы $f(x)$, кез келген теріс емес, кемімейтін монотонды функция. Бірақ, теориялық тұрғыдан қарағанда δ^2 шамасы ыңғайлырақ болғандықтан біз көбірек содан пайдаланамыз.

$P(n, \theta, A)$ функциясын δ^2 арқылы бағалау үшін Чебышев теңсіздігін қолданамыз.

$$P(n, \theta, A) = P\{|\bar{\theta}_n - \theta| > A\} \leq \delta^2 / A^2. \quad (15.3)$$

Егер $\bar{\theta}_n$ ығыспаған баға болса, онда δ^2 орташа квадратты қателік, бағаның дисперсиясымен бірдей болатындығы (15.2) теңдіктен және 2-анықтамадан келіп шығады, шынында да,

$$\delta^2 = M(\bar{\theta}_n - \theta)^2 = M\bar{\theta}_n^2 - 2\theta M\bar{\theta}_n + \theta^2 = M\bar{\theta}_n^2 - (M\bar{\theta}_n)^2 = D\bar{\theta}_n.$$

Саны n -ге тең бақылаулар бойынша θ параметрдің бір ғана мәнін, ығыспаған $\bar{\theta}_n$ статистикалардың көмегімен, N бір-бірінен тәуелсіз $\bar{\theta}_n^{(1)}, \bar{\theta}_n^{(2)}, \dots, \bar{\theta}_n^{(N)}$ бағалар арқылы анықтайық.

Бақылау нәтижелерінің барлық жиынының статистикасын былайша енгізуге болады:

$$\bar{\theta}_{nN} = (\bar{\theta}_n^{(1)} + \bar{\theta}_n^{(2)} + \dots + \bar{\theta}_n^{(N)})/N.$$

Соңғы теңдік θ параметрдің ығыспаған бағасы болады және дисперсияның қасиеттері бойынша оның орташа квадратты қателігі

$$\delta_{nN}^2 = M(\bar{\theta}_{nN} - \theta)^2 = \delta^2 / N \quad (15.4)$$

$N \rightarrow \infty$ -да 0-ге ұмтылады. Дербес жағдайда, (15.3) теңсіздігінен $N \rightarrow \infty$ да $\bar{\theta}_{nN}$ бағасы орнықты болатыны шығады.

Енді, $\bar{\theta}_n$ ығысқан баға болсын делік, яғни

$$M\bar{\theta}_n = \theta + h, \quad h = h(n, \theta).$$

h шамасы $\bar{\theta}_n$ бағасының ығысуы деп аталады.

Бұл жағдайда

$$\delta_{nN}^2 = M(\bar{\theta}_{nN} - \theta)^2 = M(\bar{\theta}_{nN} - M\bar{\theta}_n + h)^2 \geq h^2 = h^2(n, \theta).$$

Яғни, $\bar{\theta}_{nN}$ бағасының орташа квадраттық қателігі δ_{nN}^2 – бақылаулар саны мейлінше көп болғанда, фиксирленген h^2 шамасынан үлкен болады екен. Бұдан бағаның ығыспаған болуының маңыздылығын байқаймыз. Барлық уақытта да параметрдің ығыспаған бағасы оның ең дәл бағасы деп есептеу қате болар еді. Себебі, $M\bar{\theta}_n = \theta$ болғанымен, $\bar{\theta}_n$ -нің мүмкін

болатын мәндерінің орташа мәннен шашыраңқылығы, яғни дисперсиясы үлкен болуы мүмкін. Сондықтан θ параметрдің ығыспаған бағасын, оның орташа квадраттық қатесі қаншалықты аз болса соншалықты дәл деп есептеуге болады. Мұндай баға тиімді деп аталады, немесе:

3-анықтама. Егер $D \bar{\theta}_n = D_{min}$ болса, онда θ параметрдің $\bar{\theta}_n$ бағасы тиімді деп аталады.

Егер $\bar{\theta}'_n$ және $\bar{\theta}''_n$ -дер θ параметрдің бағалары болса, онда оларды салыстыру үшін салыстырмалы e тиімдікті енгізу мүмкін:

$$e = M(\bar{\theta}'_n - \theta)^2 / M(\bar{\theta}''_n - \theta)^2.$$

Егер $e > 1$ болса, онда $\bar{\theta}''_n$ бағасы $\bar{\theta}'_n$ бағаға қарағанда тиімдірек болады. Бағаның орташа квадраттық қателігін зерттей отырып, $\bar{\theta}_n$ ығыспаған баға үшін келесі теңсіздіктің орындалатынын көрсетуге болады:

$$M(\bar{\theta}_n - \theta)^2 \geq \frac{1}{nB(\theta)}, \quad (15.5)$$

$$\text{мұндағы } B(\theta) = -M[\partial^2 \ln f(\xi, \theta) / \partial \theta^2].$$

$f(x, \theta)$ – таңдама мәліметтерінің үлестіру тығыздығы; егер ξ_k - дискретті кездейсоқ шамалар болса, онда $f(x, \theta)$ функциясы $\xi_k = x$ болу ықтималдығына, яғни үлестіру функциясына тең.

(15.5) теңсіздігі, параметрлер үшін жасалатын болжамдардың барлығының орташа квадраттық қателігі, n -нің фиксирленген мәнінде, барлық жағдайда да қалағанымызша кіші бола бермейді дегенді білдіреді.

Енді параметрлерді статистикалық бағалаудың нүктелік әдісін қарастыралық.

15.3. Оқиғаның ықтималдығын, кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын бағалау

Қандай да бір A оқиғасының пайда болу ықтималдығы P болсын. P -ны тәжірибе жолымен анықтау үшін n тәуелсіз тәжірибе жүргіземіз және бұлардан әрбірінде A оқиғасының пайда болуын немесе пайда болмауын санап барамыз. v арқылы A оқиғасының пайда болу санын белгілейік. Онда

$$f(m, p) = P \{v = m\} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}.$$

P шамасы кездейсоқ v шамасының үлестіру параметрі болады, оны v шамасының бақыланған мәні бойынша бағалауымыз керек.

Ықтималдықтың бағасы үшін келесі жуық теңдікті қабылдаймыз:

$$p \approx \bar{p}_n = v/n.$$

Бернулли теоремасы бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$P \{|v/n - p| > \varepsilon\} \rightarrow 0,$$

яғни қабылданған баға орнықты екен. Сонымен бірге,

$$M \bar{p}_n = \frac{1}{n} M v = p$$

болғандықтан, ол ығыспаған да екен. Ал, орташа квадраттық кателігі δ^2 келесі теңдіктен анықталады:

$$\delta^2 = M (v/n - p)^2 = D \bar{p}_n = D(v/n) = Dv/n^2 = npq/n^2 = p(1-p)/n.$$

$\bar{p}_n$ – тиімді баға екенін тексеріп көру де қиын емес. Шынында да,

$$\partial^2 \ln f(m, p) / \partial p^2 = -m/p^2 - (n-m)/(1-p)^2.$$

(15.5) бойынша

$$B(p) = -M \left[\partial^2 \ln f(mv) / \partial p^2 \right] = np/p^2 + (n-np)/(1-p)^2 = \\ = n(1/p + 1/(1-p)) = \frac{n}{p(1-p)}.$$

Сонымен, $\delta^2(15.5)$ теңсіздігін қанағаттандыратын мәндердің ең кішісін қабылдайды, ол, бағаның тиімділігін байқатады.

Енді математикалық үміті $M\xi$, дисперсиясы $D\xi$ белгісіз, ξ кездейсоқ шамасын қарастырайық. Тәжірибелердің нәтижелеріне негізделіп, осы параметрлерді бағалайлық. $x_1, x_2, \dots, x_n$ -дер арқылы ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз n тәжірибеде қабылдайтын мәндерін белгілейік.

Математикалық үміттің бағасы үшін ξ -дің бақыланған мәндерінің мынадай статистикалық орташа мәнін қабылдаймыз.

$$\bar{M}\xi = \sum_{i=1}^n x_i / n.$$

Енді осы бағаның ығыспаған және орнықты екенін көрсетейік.

Үлкен сандар заңы бойынша,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i / n - M\xi \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Бұл $\bar{M}\xi$ орнықты баға екенін байқатады. Сонымен бірге,

$$M(\bar{M}\xi) = M\left(\sum_{i=1}^n x_i / n\right) = \sum_{i=1}^n Mx_i / n = \sum_{i=1}^n M\xi / n = M\xi$$

болғандықтан $\bar{M}\xi$ бағасы ығыспаған да екен.

Енді дисперсия $D\xi$ -ді бағалайық, ол үшін статистикалық дисперсияны баға сипатында қабылдап оны орнықтылыққа және ығыспағандыққа зерттейік.

Статистикалық дисперсияның (14.6) өрнегі кез келген a саны үшін орынды, сондықтан $a=0$ болғанда, (14.6)-дан келесі теңдік шығады.

$$\overline{D\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\overline{M\xi})^2. \quad (15.6)$$

(15.6)-ның оң жағындағы бірінші мүше, кездейсоқ ξ^2 -тың статисти-калық орта мәнін береді, сондықтан (15.6) былай жазылады.

$$\overline{D\xi} = \overline{M\xi^2} - (\overline{M\xi})^2. \quad (15.7)$$

Егер $n \rightarrow \infty$, онда $\overline{M\xi} \rightarrow M\xi$, ал $\overline{M\xi^2} \rightarrow M\xi^2$ -ды.

Сонымен, $n \rightarrow \infty$ да, (15.7) теңдіктен $\overline{D\xi} \rightarrow D\xi$ болатыны байқалып тұр, басқаша айтқанда, статистикалық дисперсия $\overline{D\xi}$, теориялық дисперсия $D\xi$ -дің орнықты бағасы екен.

Ығыспағандыққа зерттеу үшін (14.6)-дағы а-ның орнына бас жиынның орта мәні m -ді қоямыз.

$$\overline{D\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - (\overline{M\xi - m})^2 \quad (15.8)$$

(15.8)-дің математикалық үмітін есептейміз.

$$\begin{aligned} M(\overline{D\xi}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i - m)^2 - M(\overline{M\xi - m})^2 = \\ &= \frac{1}{n} n \sigma^2 - \sigma^2/n = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Шынында да, (15.9)-дағы σ^2 – бас жиынның дисперсиясы болып, ол әрбір $M(x_i - m)^2$ қосылғышқа тең, ал екінші қосылғыш келесі теңдіктер арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} M(\overline{M\xi - m})^2 &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)\right]^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n M(x_i - m)^2 + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i \neq j} M((x_i - m)(x_j - m))\right] = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \sigma^2/n. \end{aligned} \quad (15.10)$$

(15.10)-дағы 2-ші қосылғыш нөлге тең, себебі $(x_i - m)$ және $(x_j - m)$ $i \neq j$ -де тәуелсіз және $MX_i = MX_j = m$.

$$\text{Сонымен, } M(\bar{D}\xi) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} D\xi.$$

Басқаша айтқанда, статистикалық дисперсия $\bar{D}\xi$, теориялық дисперсия $D\xi$ -дің ығысқан бағасы екен, себебі $M(\bar{D}\xi) \neq D\xi$. Бірақ оны $n/(n-1)$ -ге көбейтіп ығыспаған бағаға айналдыруға болады.

$$M\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)\bar{D}\xi\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)M(D\xi) = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)D\xi = D\xi.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n/(n-1) = 1$ болғандықтан,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)\bar{D}\xi = \left(\frac{1}{n-1}\right) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{M}\xi)^2$$

дұрысталған баға орнықты болады.

Сонымен, математикалық үміті $M\xi$, дисперсиясы $D\xi$ белгісіз, ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз n тәжірибедегі мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ болса, онда $M\xi$, $D\xi$ -лерді анықтау үшін мынадай жуық формулалардан пайдалану мүмкін екен:

$$\bar{M}\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a),$$

$$\bar{D}\xi = \left(\frac{n}{n-1}\right) \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - (\bar{M}\xi - a)^2 \right].$$

Мұндағы a кез келген сан болып, оны орынды таңдау статистикалық мәліметтерді өңдеуді жеңілдетеді.

15.4. Моменттер әдісі

1, 2-ші ретті бастапқы және орталық статистикалық моменттердің сәйкес теориялық моменттер үшін орнықты және ығыспаған баға болатыны 15.3-тақырыпта белгілі болды. Жоғары ретті статистикалық моменттердің де сәйкес теориялық моменттер үшін кемінде орнықты баға болатынын дәлелдеуге болады. Моменттер әдісі осындай нәтижелерге негізделеді.

Айталық, кездейсоқ шама ξ -дің белгісіз бір θ параметрге тәуелді $f(x, \theta)$ үлестіру тығыздығы берілсін. θ параметрдің нүктелік бағасын табу керек. Бір параметрді бағалау үшін сонымен байланысқан бір теңдеу жеткілікті. Мысалы, 1-ретті бастапқы статистикалық моментті 1-ретті бастапқы теориялық моментке теңестіреміз, яғни

$$M\xi = \bar{M}\xi, \quad (15.11)$$

немесе

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \theta)dx = \varphi(\theta),$$

(15.11) бір θ белгісізді теңдеу, оны шешіп θ -ның нүктелік бағасын табамыз.

Мысалы, кездейсоқ шама ξ -дің мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$, үлестіру тығыздығы $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, ($x \geq 0$) болатын көрсеткішті заңмен үлестірілген болсын. Моменттер әдісін қолданып, белгісіз λ параметрдің нүктелік бағасын табу керек.

$$\text{Шешуі:} \quad M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \lambda)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = 1/\lambda.$$

$$1/\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Сонымен,

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Егер үлестіру тығыздығы белгісіз екі параметр θ_1, θ_2 -лерге тәуелді болса, онда осы параметрлермен байланысқан екі теңдеу керек болады. Олар мыналар:

$$\begin{cases} M\xi = \bar{M}\xi, \\ D\xi = \bar{D}\xi. \end{cases} \quad (15.12)$$

(15.12) – жүйені шешіп, θ_1, θ_2 -лерді анықтаймыз.

Моменттер әдісінің қолайлылығы оның қарапайымдығында. Бірақ таңдаманың көлемі кіші болғанда бағалардың ығысуы үлкен болып, олардың тиімділігі төмен болады. Бұл жағдай әсіресе жоғары ретті моменттердің бағаларында байқалады. Мұндай кемшілікті ағылшын ғалымы Р.А.Фишер көрсетіп, оның орнына максималь шындыққа ұқсас әдісі деп аталатын әдісті ұсынды.

15.5. Максималь шындыққа ұқсас әдісі

Бұл әдіспен байланысты негізгі ұғым – шындыққа ұқсас функциясы ұғымы.

Айталық, ξ кездейсоқ шамасы $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндерді қабылдасын. ξ шамасының белгісіз θ параметрге тәуелді үлестіру заңы берілген делік.

Анықтама. Кездейсоқ шама ξ -дің шындыққа ұқсас функциясы деп $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)$ функциясын айтады.

Мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ – фиксирленген сандар. θ – бағалануы тиіс параметр. Егер ξ дискретті болса, онда $f(x_j, \theta) = P\{\xi_k = x_j\}$, ал ξ үзіліссіз болса, онда $f(x, \theta)$ – кездейсоқ шама ξ -дің үлестіру тығыздығын береді.

Максималь шындыққа ұқсас әдісі мынадай:

θ -ның $\bar{\theta}$ -дан өзге барлық мәндері үшін

$$f(x_1, \bar{\theta}) f(x_2, \bar{\theta}) \dots f(x_n, \bar{\theta}) > f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)$$

теңсіздікті қанағаттандыратын $\theta = \bar{\theta} = \bar{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мәнді таңдау керек. Басқаша айтқанда, шындыққа ұқсас функциясына максимум мән беретін θ мәнді табу керек.

L және $\ln L$ функциялардың максимумдері θ -нің бір мәнінде болатын болғандықтан L -дің максимумын іздеудің орнына $\ln L$ -дің максимумын іздеген қолайлы.

Егер функцияның максимумы оның туындысы бар нүктесінде болса, онда бұл нүктеде

$$d \ln L / d\theta = \sum_{i=1}^n f'(x_i, \theta) / f(x_i, \theta) = 0 \quad (15.13)$$

болуы қажет екендігі белгілі.

(15.13) теңдеуі шындыққа ұқсас теңдеуі деп аталады. (15.13) теңдеуінің шешімі болатын $\theta = \bar{\theta}$ мәнді θ параметрдің максималы шындыққа ұқсас бағасы деп атайды.

Егер кездейсоқ шама ξ -дің үлестірілуі θ_1, θ_2 екі параметрге тәуелді болса, онда шындыққа ұқсас функциясы екі θ_1, θ_2 параметрдің функциясы болады:

$$L = f(x_1, \theta_1, \theta_2) f(x_2, \theta_1, \theta_2) \dots f(x_n, \theta_1, \theta_2).$$

θ_1, θ_2 параметрлердің бағасын анықтау үшін мынадай шындыққа ұқсас теңдеулер жүйесін шешуіміз қажет.

$$\begin{cases} \partial \ln L / \partial \theta_1 = 0, \\ \partial \ln L / \partial \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Бұл жүйенің $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ шешімдері θ_1, θ_2 параметрлердің максималы шындыққа ұқсас бағалары болады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Параметрдің бағасы немесе статистикасының анықтамасын беріңіз.
2. Белгісіз параметрлердің бағалары қандай талаптарды қанағаттандыруы тиіс?
3. Орнықты баға деген не?
4. Ығыспаған баға деп қандай бағаны айтады?

5. Орташа квадратты қателіктің анықтамасын беріңіз?
6. Тиімді бағаның анықтамасын беріңіз.
7. Оқиға ықтималдығының бағасы қандай?
8. Оқиға ықтималдығының орташа квадраттық қателігі қандай?
9. Оқиға ықтималдығының бағасы қандай қасиетке ие?
10. Математикалық үміт үшін қандай баға қабылданған?
11. Математикалық үміт үшін құрылған баға қандай қасиеттерге ие?
12. Дисперсия үшін қандай баға қабылданған?
13. Дисперсияның бағасы қандай қасиеттерге ие?
14. Параметрлердің нүктелік бағасын табудың моменттер әдісі қандай?
15. Шындыққа ұқсас функциясының анықтамасын беріңіз.
16. Шындыққа ұқсас теңдеуі қандай?
17. Максималь шындыққа ұқсас бағасының анықтамасын беріңіз.

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Алматының 900 тұрғынына таратылған анкетаның «жазғы демалысты қай жерде өткіздіңіз?» – деген сұрағына, 200 тұрғыны «демалысты тауда өткіздім» – деп жауап берген. «Алматылықтар демалысты тауда өткізеді» – деген оқиғаны A -мен белгілеп, A -ның ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі. Таңдаманың жиілігін бас жиынның ықтималдығының бағасы ретінде қабылдаймыз:

$$P \approx \frac{m}{n}.$$

Есептің шарты бойынша: $m = 200$; $n = 900$; Демек, $P \approx 0,222$. Сонымен, A оқиғасының ықтималдығы жуықтап алғанда 0,222-ге тең дейміз. Енді осы тұжырымның қателігін анықталық. Ол үшін оқиға ықтималдығының орташа квадраттық қателігінің

$$\delta^2 = \frac{P(1-P)}{n}$$

формуласын қолданамыз. P -мен n -нің мәндерін орнына қойып, $\delta^2 = 0,00017$ -ні табамыз. Бұдан $\delta = 0,013$.

Сонымен, $p = 0,222 \pm 0,013$ деп жазуға болады. Яғни A оқиғасының ықтималдығын $0,222$ деп қабылдасақ, онда жіберілетін орташа қателік $0,013$ болады екен.

2-мысал. Егер, қалыпты үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз n тәжірибе нәтижесінде қабылдаған мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ болса, онда a және σ параметрлердің бағасын максималь шындыққа ұқсас әдіспен табыңыз.

Шешуі. $\theta_1 = a$, $\theta_2 = \sigma$ болғандықтан, шындыққа ұқсас функциясы келесі түрде жазылады:

$$L = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_1-a)^2/2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_2-a)^2/2\sigma^2} \dots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_n-a)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2\right\}.$$

Шындыққа ұқсас функциясының логарифмін табамыз:

$$\ln L = -n \ln \sigma + \ln \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2.$$

$\ln L$ -дің a және σ бойынша дербес туындыларын нөлге теңестіреміз.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 = 0.$$

Соңғы жүйенің шешімдері:

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \overline{M\xi}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \overline{M\xi})^2 = \overline{D\xi}.$$

Сонымен ізделінді бағалар; $a = \overline{M\xi}$, $\sigma = \sqrt{\overline{D\xi}}$.

3-мысал. Егер, Пуассон заңымен үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз n тәжірибе нәтижесінде қабылдаған мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ болса, онда λ параметрдің бағасын анықтаңыз.

Шешуі. $\theta = \lambda$. Шындыққа ұқсас функциясы мынадай:

$$L = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_2}}{x_2!} \dots \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{x_1 + x_2 + \dots + x_n}}{x_1! x_2! \dots x_n!};$$

$$\ln L = -n\lambda + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \ln \lambda - \ln \prod_{k=1}^n x_k!;$$

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = -n + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\lambda} = 0; \quad \lambda = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

4-мысал. Егер, көрсеткішті заңмен үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының тәуелсіз n тәжірибеде қабылдаған мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ болса, онда λ параметрдің бағасын анықтаңыз.

Шешуі. $\theta = \lambda$. Шындыққа ұқсас функциясы мынадай:

$$L = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k}; \quad \ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^n x_k.$$

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n x_k = 0; \quad \lambda = \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k}.$$

Сонымен, λ параметрдің бағасы статистикалық орташа мәнге кері сан екен.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. Бас жиыннан, көлемі $n=60$ болатын таңдама алынған:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Бас жиын орта мәнінің ығыспаған бағасын табыңыз.

Жауабы: $\overline{M\xi} = 4$.

2. Егер A оқиғасы тәуелсіз n_1 тәжірибеде m_1 рет және тәуелсіз n_2 тәжірибеде m_2 рет пайда болған болса, онда максималь шындыққа ұқсас әдісін қолданып, биномды үлестірудің P параметрінің бағасын табыңыз.

Жауабы: $\overline{P} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$.

3. Моменттер әдісін қолданып, көлемі n -ге тең таңдаманың $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері бойынша $\chi^2(k)$ үлестірудің параметрін бағалаңыз.

Жауабы: $\overline{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \overline{M\xi}$.

4. Егер логарифмдік қалыпты үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының қабылдаған мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ болса, онда a және σ параметрлерінің бағасын максималь шындыққа ұқсас әдісімен табыңыз.

Жауабы: $\overline{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \overline{M\xi}$;

$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \overline{a})^2$.

5. Кездейсоқ ξ шамасы Пуассон заңы бойынша үлестірілген. Көлемі $n = 200$ болатын таңдаманың үлестірілуі мынадай:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Моменттер әдісінен пайдаланып Пуассон үлестірілуінің λ параметрінің нүктелік бағасын табыңыз.

Жауабы: $\lambda = \overline{M\xi} = 0,5$.

6. Моменттер әдісін қолданып, $P(\xi = x_i) = (1 - P)^{x_i-1} \cdot P$ формуласы бойынша геометриялық заңмен үлестірілген кездейсоқ ξ шамасының p параметрінің бағасын табыңыз. Мұндағы x_i – тәжірибелер саны, p – әрбір тәжірибеде оқиғаның пайда болу ықтималдығы.

Жауабы: $P = \frac{1}{\overline{M\xi}}$.

7. Үлестіру тығыздығы $f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}$,

($\alpha > -1$, $\beta > 0$, $x \geq 0$) болатын Гамма-үлестірудің β параметрінің нүктелік бағасын максималь шындыққа ұқсас әдісі бойынша табыңыз. α -ны белгілі деп алып, $x_1, x_2, \dots, x_n$ таңдама бойынша анықталады.

Жауабы: $\beta = \frac{\overline{M\xi}}{\alpha + 1}$.

8. $x_1, x_2, \dots, x_n$ таңдама бойынша $P(\xi = x_i) = (1 - P)^{x_i-1} \cdot P$ геометриялық үлестірудің p параметрінің бағасын максималь шындыққа ұқсас әдісі бойынша табыңыз.

Жауабы: $P = \frac{1}{\overline{M\xi}}$.

16-дәріс. Сенімділік интервалдары

16.1. Математикалық үміт үшін сенім интервалын құру

Алдыңғы тақырыптарда қарастырылған бағалар нүктелік болып, олар сандар өсінде орналасқан белгісіз параметрдің бір ғана сан мәнін көрсетеді. Таңдаманың көлемі кіші болатын жағдайларда параметрлердің нүктелік бағалары қате есептеулерге алып келуі мүмкін. Сондықтан θ параметр бағасының дәлдігін және сенімділігін сипаттау үшін математикалық статистикада сенімділік интервалы ұғымынан пайдаланады.

Айталық, тәжірибе нәтижесінде θ параметрдің ығыспаған $\bar{\theta}_n$ бағасы алынған болсын. Мұндағы мүмкін болатын қателікті бағалау талап етілсін.

Анықтама. θ параметрдің белгісіз мәнін, бір санына жақын β ықтималдықпен өз ішіне алатын $(\bar{\theta}_n - \varepsilon, \bar{\theta}_n + \varepsilon)$ аралық, сенімділік интервалы деп аталады.

Басқаша айтқанда, егер β (мысалы $\beta=0,9$) берілген болса, онда $P\{|\bar{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = \beta$ немесе $P\{\bar{\theta}_n - \varepsilon < \theta < \bar{\theta}_n + \varepsilon\} = \beta$ теңдікті қанағаттандыратын $\varepsilon > 0$ -ді табу қажет. β саны сенімділік ықтималдығы деп аталады.

Егер ε -нің сан мәні үлкен болса, онда $P\{|\bar{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\}$ ықтималдық артады. Сондықтан берілген β -ның сан мәнімен сыйысатын ε -нің ең кіші мәнін іздейміз.

Математикалық үміт үшін сенімділік интервалын құруды қарастырайық.

Айталық, n тәуелсіз тәжірибе жүргізілу нәтижесінде кездейсоқ ξ шамасының қабылдаған мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ болсын. Математикалық үміт үшін

$$\bar{M}\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

баға құрылған болсын. Кездейсоқ шама ξ -дің математикалық үміті үшін сенімділік ықтималдығы β -ға сай сенімділік интервалы $(\bar{M}\xi - \varepsilon, \bar{M}\xi + \varepsilon)$ -ны құру қажет.

$\bar{M}\xi$ шамасы біркелкі үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ шама ξ_i -лердің қосындысы болғандықтан, орталық шек теоремасы бойынша ол қалыпты үлестіруге жуық тең болады.

Математикалық үміттің және дисперсияның қасиеттерінен пайдаланып мыналарды табамыз:

$$M(\bar{M}\xi) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i) = M\xi,$$

$$\bar{D}\xi = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{M}\xi)^2,$$

$$D[\bar{M}\xi] = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \frac{D\xi}{n}.$$

Енді ε -ның $P\{|\bar{M}\xi - M\xi| < \varepsilon\} = \beta$ теңдікті қанағаттандыратын ε_β мәнін табайық. Ол үшін кездейсоқ шама $\bar{M}\xi$ -дің қалыпты үлестіруге жуық теңдігін пайдаланып β -ны Лаплас функциясы арқылы өрнектейміз:

$$P\{|\bar{M}\xi - M\xi| < \varepsilon\} = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\bar{M}\xi} \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon_\beta}{\sigma_{\bar{M}\xi} \sqrt{2}}\right) \right] \quad (16.1)$$

Мұндағы $\sigma_{\bar{M}\xi} = \sqrt{D\xi/n}$ – бағаның орташа квадраттық ауытқуы, ал ол теориялық дисперсия $D\xi$ арқылы өрнектеліп тұр, сондықтан $D\xi$ орнына оның жуық мәні $\bar{D}\xi$ -ді алуға болады.

$$\text{Сонымен,} \quad \sigma_{\bar{M}\xi} \approx \sqrt{\frac{\bar{D}\xi}{n}}.$$

Лаплас функциясы тақ болғандықтан (16.1) теңдікті мынадай түрде жазуға болады:

$$P\left\{\left|\bar{M}\xi - M\xi\right| < \varepsilon_{\beta}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_{\beta}}{\sigma_{\bar{M}\xi}}\right), \quad (16.2)$$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon_{\beta}}{\sigma_{\bar{M}\xi}}\right). \quad (16.3)$$

(16.3) теңдіктен ε_{β} -ны табу қиын емес.

Сонымен математикалық үміттің сенімділік интервалы $(\bar{M}\xi - \varepsilon_{\beta}; \bar{M}\xi + \varepsilon_{\beta})$ болып, мұндағы ε_{β} (16.3) формуласынан анықталады.

16.2. Қалыпты үлестірілген шамалар математикалық үмітінің бағасы үшін сенімділік интервалдарын құру

16.1-тақырыпта үлестіру заңы белгісіз кездейсоқ шама ξ -дің математикалық үміті үшін сенімділік интервалын құрудың жуық әдісін қарастырдық. Сенімділік интервалды дәл құру үшін кездейсоқ шама $\bar{M}\xi$ -дің үлестіру заңын білу қажет, ал ол жалпы жағдайда кездейсоқ шама ξ -дің белгісіз параметрлеріне тәуелді болады. Бірақ, кейбір жағдайларда ξ кездейсоқ шамасынан оның $\bar{M}\xi$ -нен тәуелсіз, тек қана тәжірибелер саны n -ге және ξ -дің үлестіру заңына тәуелді басқа кездейсоқ шамаға өтуге болады.

Ол келесі теоремалар арқылы орындалады.

1-теорема. Егер таңдаманың $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері тәуелсіз және олардың әрбірі (a, σ^2) параметрлі қалыпты заңмен үлестірілген болса, онда таңдаманың орташа мәні $\bar{M}\xi$ мен дисперсиясы $\bar{D}\xi$ -де тәуелсіз және орташа мәні $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

параметрлі қалыпты үлестірілген, ал $n \cdot \frac{\overline{D}^\xi}{\sigma^2}$ кездейсоқ шамасы еркіндік дәрежесі $n - 1$ болатын χ^2 үлестіруге ие болады.

Бұл теореманың дәлелдеуін [20]- кітаптың 175-176-беттерінен оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

2-теорема. Егер таңдаманың $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері тәуелсіз және олардың әрбірі (a, σ^2) параметрлі қалыпты заңмен үлестірілген болса, онда $t = \frac{\overline{M}^\xi - a}{\sqrt{\overline{D}^\xi}} \cdot \sqrt{n-1}$ шамасы еркіндік

дәрежесі $n - 1$ болатын Стюдент заңымен үлестірілген болады. Дәлелдеуі.

$$t = \frac{\overline{M}^\xi - a}{\sqrt{\overline{D}^\xi}} \cdot \sqrt{n-1} = \frac{\overline{M}^\xi - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\overline{D}^\xi}} \cdot \sqrt{n-1}$$

тепе-теңдікті жазамыз. Мұндағы $\frac{\overline{M}^\xi - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ кездейсоқ шамасы $(0,1)$ параметрлі қалыпты заңмен үлестірілген болады.

Ал $n \cdot \frac{\overline{D}^\xi}{\sigma^2}$ кездейсоқ шамасы, 1-теорема бойынша, еркіндік дәрежесі $n - 1$ болатын χ^2 үлестіруге ие. Онда Стюдент үлестіруінің анықтамасы бойынша, кездейсоқ t шамасы еркіндік дәрежесі $n - 1$ болатын Стюдент заңымен үлестірілген болады.

Теорема дәлелденді.

Кездейсоқ t шамасының үлестіру тығыздығы мынадай:

$$f_t(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}. \quad (16.4)$$

Мұндағы $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Стъюдент үлестіруінің $M\xi$ және $\bar{D}\xi$ -ден тәуелсіз, ал тек ғана тәжірибелер саны n -нен тәуелділігі (16.4)-ден көрініп тұр. Сонымен бірге $f_i(x)$ x -тің жұп функциясы.

Енді осы Стъюдент үлестіруінен пайдаланып математикалық үміт үшін сенімділік интервалын құрайық.

Айталық, n тәуелсіз тәжірибе жүргізілген болып, $x_1, x_2, \dots, x_n$ -дер қалыпты үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының мәндері болсын. $M\xi$, $D\xi$ -лері белгісіз. Мынадай бағалар құрылған болсын.

$$\bar{M}\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{D}\xi = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{M}\xi)^2.$$

ξ -дің математикалық үміті $\bar{M}\xi$ үшін сенімділік ықтималдығы β -ға сәйкес сенімділік интервалын құру талап етілсін.

Интервал ұзындығының жартысын ε_β -мен белгілесек, мынаған ие боламыз:

$$P\{|\bar{M}\xi - M\xi| < \varepsilon_\beta\} = \beta. \quad (16.5)$$

(16.5) теңдігінің сол жағындағы $\bar{M}\xi$ кездейсоқ шамасынан Стъюдент заңымен үлестірілген t кездейсоқ шамасына көшеміз. Ол үшін $|\bar{M}\xi - M\xi| < \varepsilon_\beta$ теңсіздіктің екі жағын $\sqrt{n}/\sqrt{\bar{D}\xi}$ оң санына көбейтіп, (16.5) теңдігін келесі түрде жазамыз.

$$P\{\sqrt{n} |\bar{M}\xi - M\xi| / \sqrt{\bar{D}\xi} < \varepsilon_\beta / \sqrt{\bar{D}\xi / n}\} = \beta.$$

немесе

$$P\{|t| < \varepsilon_\beta / \sqrt{\bar{D}\xi / n}\} = \beta.$$

$f_t(x)$ -тің жұп функциялығын есепке алсақ және $t_\beta = \varepsilon_\beta / \sqrt{\bar{D}\xi / n}$ деп белгілесек, онда

$$P\{t/t_0 < t_\beta\} = 2 \int_0^{t_\beta} f_t(x) dx = \beta. \quad (16.6)$$

(16.6) теңдік t_β шамасын β арқылы анықтау мүмкіндігін береді. Кітаптың соңындағы қосымшаның 3-кестесінен берілген сенімділік ықтималдығы β және еркіндік дәрежесі $n-1$ бойынша t_β анықталады.

$$\text{Одан соң} \quad \varepsilon_\beta = t_\beta \sqrt{\frac{\bar{D}\xi}{n}}. \quad (16.7)$$

(16.7) формуласы бойынша ε_β -ны анықтаймыз. Сонымен, ізделінді сенімділік интервалы мынадай:

$$(\bar{M}\xi - \varepsilon_\beta; \bar{M}\xi + \varepsilon_\beta).$$

16.3. Қалыпты үлестірілген шамалар дисперсиясының бағасы үшін сенімділік интервалын құру

Егер таңдама, қалыпты заңмен үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалардан тұратын бас жиыннан алынған болса, онда $n \bar{D}\xi / \sigma^2$, еркіндік дәрежесі $n-1$ болатын χ^2 үлестіруге ие кездейсоқ шама болатындығы белгілі. χ^2 үлестіру кестесінен

$$P\{u_1 < n \bar{D}\xi / \sigma^2 < u_2\} = \beta \quad (16.8)$$

теңдікті қанағаттандыратын u_1 және u_2 санын табу мүмкін. Бірақ, мұндай сандар өте көп. Сондықтан, олардың ішінен

$$P\{\chi^2 < u_1\} = P\{\chi^2 > u_2\} = \frac{1}{2}\beta \quad (16.9)$$

теңдіктерді қанағаттандыратыны алынады (орталық сенімділік интервал).

(16.8)-ді түрлендіріп, дисперсияның сенімділік интервалы үшін келесі формуланы аламыз.

$$P\{n \cdot \bar{D}\xi / u_2 < \sigma^2 < n \cdot \bar{D}\xi / u_1\} = \beta. \quad (16.10)$$

16.4. Оқиға ықтималдығының бағасы үшін сенімділік интервалын құру

Оқиға ықтималдығы бағасының сенімділік интервалын құру үшін таңдаманың көлемі n үлкен болған жағдай қарастырылады. Мұндай жағдайда Муавр–Лаплас теоремасынан пайдалану мүмкін. Бұл теорема бойынша

$$P\left\{\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} l^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(\varepsilon).$$

Гаусс үлестіру заңы үшін құрылған кестеден пайдаланып, берілген сенімділік ықтималдық β бойынша

$$2 \Phi(\varepsilon_\beta) = \beta$$

болатын ε_β санын табамыз.

$$\sqrt{\frac{n}{\bar{P}(1-\bar{P})}} |\bar{P} - P| < \varepsilon_\beta$$

теңсіздікті p бойынша шешіп сенімділік интервалына ие боламыз. Мұндағы $\bar{P} = m/n$

$$\bar{P} - \varepsilon_\beta \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} < P < \bar{P} + \varepsilon_\beta \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}.$$

16.5. Екі орта мәнді салыстыру

Математикалық үміттері m_1 және m_2 , дисперсиялары тең $D\xi = D\eta = \sigma^2$ ξ және η екі кездейсоқ шамасы берілсін. Бақылаулар бойынша, бұл шамалардың орта мәндері арасындағы $m_1 - m_2$ айырымды қалай бағалауға болады?

ξ шамасының қабылдайтын мәндерін $x_1, x_2, \dots, x_n$, η шамасының мәндерін $y_1, y_2, \dots, y_m$ -дермен белгілейік.

m_1 және m_2 шамалардың бағасы үшін мынадай статистикалық орта мәндерді қабылдаймыз.

$$\overline{M}\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \overline{M}\eta = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j.$$

$m_1 - m_2$ айырымды бағалау үшін $\overline{M}\xi - \overline{M}\eta$ шамасынан пайдалану мүмкін.

$$S_{\xi} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m (x_j - \overline{M}\xi)^2}; \quad S_{\eta} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_j - \overline{M}\eta)^2}$$

делік. Онда

$$\frac{\overline{M}\xi - \overline{M}\eta - (m_1 - m_2)}{\sqrt{(n-1)S_{\xi}^2 + (m-1)S_{\eta}^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{(n+m)(n+m-1)}}$$

шамасы еркіндік дәрежесі $n+m-2$ болатын Стюдент үлестіруіне ие болады.

n -мен m -нің берілген мәндерінде

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+m-1}{2})}{\Gamma(\frac{n+m-2}{2})} \int_{t_p}^{\infty} \left(1 + \frac{(n+m-1)x^2}{n+m-2}\right)^{-\frac{n+m-1}{2}} dx = p$$

теңдік орындалатын санды t_p -мен белгілейік. Онда 1-р ықтималдықпен

$$\overline{M}\xi - \overline{M}\eta - t_p S < m_1 - m_2 < \overline{M}\xi - \overline{M}\eta + t_p S$$

теңсіздіктердің орындалатынын тұжырымдауға болады, мұндағы

$$S = \sqrt{(n-1)S_{\xi}^2 + (m-1)S_{\eta}^2} \cdot \sqrt{\frac{(n+m)(n+m-1)}{nm(n+m-2)}}.$$

Сонымен, ізделінді айырымының бағасы үшін, 1-р ықтималдықпен

$$|m_1 - m_2| < |\overline{M}_{\xi} - \overline{M}_{\eta}| + t_p S$$

өрнекті қабылдаса болады.

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Сенімділік интервалының анықтамасын беріңіз?
2. Сенімділік ықтималдығы деген не?
3. Математикалық үміт үшін сенімділік интервалын құрудың жуық әдісі қандай?
4. Студент үлестіруінен пайдаланып математикалық үміт үшін сенімділік интервалын құру әдісі қандай?
5. Дисперсия үшін сенімділік интервал қалай құрылады?
6. Оқиға ықтималдығы үшін сенімділік интервалы қалай құрылады?
7. Екі орта мәннің айырымы қалай бағаланады?

Жаттығулар мен оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Бидайдың жаңа сорты 10 тәжірибе алаңына егілді. Өнімділігі жөнінде мынадай мәлімет алынды (гектарынан «ц» есебінде): 25.4, 28.0, 20.1, 27.4, 25.6, 23.9, 24.8, 26.4, 27.0, 25.4. Өнімділіктің орта мәні M_{ξ} үшін сенімділік интервалы құрылсын, сенімділік ықтималдығы $\beta=0.95$ деп алынсын.

Шешуі. Дәннің өнімділігі әдетте қалыпты заң бойынша үлестірілген болады, ал дисперсиясы белгісіз. (16.7) – формуласын қолданамыз.

$\overline{M\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ бойынша есептеп, $\overline{M\xi}=25,4$ - ны табамыз.

Ал $\overline{D\xi} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{M\xi})^2$ бойынша есептесек, $\overline{D\xi}=5,05$

шығады.

Стьюдент үлестіруінің кестесінен $t_{\beta}=2,26$ -ны табамыз. (16.7) формуласы бойынша $\varepsilon_{\beta}=1,60$ шығады. Сонымен,

$$25,40 - 1,60 \leq M\xi \leq 25,40 + 1,60, \\ 23,8 \leq M\xi \leq 27,0.$$

2-мысал. $\beta = 0,9$ деп қабылдап, 1-мысалдың берілгендері үшін өнімділік дисперсиясының сенімділік интервалын құрайық.

Шешуі. χ^2 кездейсоқ шамасының еркіндік дәрежесі 9-ға тең. χ^2 -тың үлестіру кестесінен (16.9)-ды қанағаттандыратын u_1 және u_2 -лерді табамыз. $u_1=3,325$; $u_2=16,919$.

Бұл есепте $\overline{D\xi}=5,05$ еді, онда σ^2 үшін құрылған сенімділік интервалы

$$\frac{9 \cdot 5,05}{16,919} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 5,05}{3,325} \\ 2,65 < \sigma^2 < 13,5, \\ 1,6 < \sigma < 3,7.$$

3-мысал. Егер 1000 бөлшектен тұратын таңдамадан 10 бөлшек жарамсыз болса, онда жарамсыз бөлшектің ықтималдығы үшін мынадай бағаға ие боламыз.

$$P \approx \bar{P} = 10/1000 = 0,01$$

P үшін 95 % сенімділік интервалын табыңыз.

Шешуі. 0,95 сенімді ықтималдықпен p үшін сенімділік интервалы мына теңсіздіктен табылады:

$$|\bar{P} - P| < 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}} < 0,0162.$$

Демек, P -ның 0,95 сенімді ықтималдықпен табылған сенімділік интервалы мынадай болады екен:

$$0,0038 < p < 0,0262.$$

4-мысал. Бидайдың екі сорты, табиғи жағдайлары бірдей екі топ далаға егілген. Бірінші топта 16 дала болып, оған А сорты; екінші топта 11 дала болып, оған В сорты егілген. Бірінші және екінші топ даланың өнімділігін сәйкес ξ және η мен белгілейік. Өнімділікті бірдей дисперсиялы қалыпты үлестірілген шама деп есептесек, қайсы сорттың өнімділігі артық болады?

Алынған өнімділіктің мәндері мынадай:

$$\begin{aligned} x_1 &= 21.3; \quad x_2 = 21.4; \quad x_3 = 22.1; \quad x_4 = 22.2; \quad x_5 = 22.5; \quad x_6 = 23.0; \\ x_7 &= 23.5; \quad x_8 = 23.6; \quad x_9 = 23.8; \quad x_{10} = 23.9; \quad x_{11} = 25.6; \\ x_{12} &= 25.8; \quad x_{13} = 27.1; \quad x_{14} = 28.1; \quad x_{15} = 28.5; \quad x_{16} = 29.0. \\ y_1 &= 20.2; \quad y_2 = 20.47; \quad y_3 = 22.0; \quad y_4 = 23.0; \quad y_5 = 24.2; \\ y_6 &= 25.1; \quad y_7 = 25.2; \quad y_8 = 25.6; \quad y_9 = 25.7; \quad y_{10} = 28.0; \quad y_{11} = 29.1. \end{aligned}$$

$$m_1, m_2 \text{ -лердің бағаларын есептейік: } \bar{M}\xi = 24,6; \quad \bar{M}\eta = 24,4$$

Онда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{M}\xi)^2 &= 98,6; \quad \sum_{j=1}^{11} (y_j - \bar{M}\eta)^2 = 78,1; \\ S &= \sqrt{7,1} \cdot \sqrt{\frac{11 \cdot 16}{27 \cdot 26}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{7,1 \cdot 11}{3 \cdot 26}} \approx 1,3. \end{aligned}$$

$P = 0,05$ деп алайық. Стьюдент кестесінен $n + m - 2 = 25$ үшін $t_p = \frac{2,064}{\sqrt{24}} \approx 0,4$ -ны табамыз. Онда $t_p S \approx 0,5$.

Сонымен, егер А сорттың орташа өнімділігі m_1 , ал В сорттың орташа өнімділігі m_2 болса, онда 0,95 ықтималдықпен

$$0,2 - 0,5 < m_2 - m_1 < 0,2 + 0,5$$

бағаға ие боламыз. Бұларға негізделсек өнімділіктерінің айырмашылығы аз екен деген тұжырымға келеміз.

5-мысал. Жарамсыз бөлшектер қалыпты үлестірілген бас жиында, оның пайда болуы оқиғасы – A -ның ықтималдығы $0,2$ -ге тең. A оқиғасының пайда болу ықтималдығынан таңдаманың салыстырмалы жиілігінің ауытқуы $0,05$ -тен аспауына $\beta = 0,8664$ сенімділік ықтималдықпен кепілді болу үшін қажетті бөлшектер таңдамасының көлемін анықтаңыз.

$$\text{Шешуі. } P\left\{\left|\frac{m}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} = \beta = 2\Phi(x), \quad x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

формулаларын қолданамыз. Мұндағы: $P = 0,2$; $\varepsilon = 0,05$; $\beta = 0,8664$.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,2\right| < 0,05\right\} = 2\Phi\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,2 \cdot 0,8}}\right) = 0,8664;$$

$$\Phi\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,16}}\right) = 0,4332; \quad \Phi(x) \quad \text{функциясының кестесінен}$$

$0,125 \cdot \sqrt{n} = 1,5$ -ті табамыз. Бұдан, $\sqrt{n} = 12$; Сонымен, $n = 144$ бөлшекті іріктеу керек екен.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. $\beta = 0,95$ деп қабылдап, қалыпты үлестірілген бас жиынның математикалық үмітінің бағасы үшін сенімділік интервалын табыңыз. Бас жиынның орташа квадраттық ауытқуы $\sigma = 5$, таңдаманың орташа мәні $\overline{M\xi} = 14$ және таңдаманың көлемі $n = 25$ берілген.

Жауабы: $12,04 < M\xi < 15,96$.

2. $\beta = 0,99$ деп қабылдап, қалыпты үлестірілген бас жиынның математикалық үмітінің бағасы үшін сенімділік интервалын табыңыз. Бас жиынның орташа квадраттық ауытқуы

$\sigma = 4$, таңдаманың орта мәні $\overline{M}\xi = 10,2$ және таңдаманың көлемі $n=16$ берілген.

Жауабы: $7,63 < M \xi < 12,77$.

3. Электр шырақтарының үлкен партиясынан 100 шырақ таңдама алынған. Таңдамадағы шырақтардың қызмет ету орташа мерзімі 1000 сағат болған. Сенімділік ықтималдығын 0,95 деп қабылдап, партияның бүкіл электр шырақтарының орташа қызмет ету мерзімі үшін сенімділік интервалын табыңыз. Шырақтардың қызмет ету мерзімі қалыпты үлестірілген және орташа квадраттық ауытқу $\sigma = 40$ сағат берілген.

Жауабы: $992,16 < M \xi < 1007,84$.

4. Бас жиын қалыпты үлестірілген және оның орташа квадраттық ауытқуы $\sigma = 1,2$ берілген. Бас жиынның математикалық үмітінің, таңдаманың орта мәні бойынша дәлдігі $\varepsilon_{\beta} = 0,3$ болуын 0,975 сенімділік ықтималдықпен бағалау үшін таңдаманың минималь көлемі қандай болуы керек.

Жауабы: $n = 81$.

5. Әрбірінде пайда болуы белгісіз A оқиғасының ықтималдығы P тұрақты болатын 300 тәжірибе жүргізілген. A оқиғасы 250 тәжірибеде пайда болды. 0,95 сенімділік ықтималдықпен белгісіз ықтималдық P -ның сенімділік интервалын табыңыз.

Жауабы: $0,78 < P < 0,87$.

6. Тиынды лақтырғанда «Елтаңбаның» пайда болу жиілігінің осы оқиға ықтималдығынан ауытқуының абсолют шамасы 0,05-тен аспауын 0,99 ықтималдықпен күту үшін тиынды қанша рет лақтыру қажет?

Жауабы: $n = 889$.

7. Қалыпты заң бойынша үлестірілген ξ кездейсоқ шамасының 20 мәні келесі кестемен берілген:

ξ_i	7	10	12	18	22	25
m_i	2	3	5	6	3	1

$\beta = 0,9$ сенімді ықтималдықпен ξ кездейсоқ шамасының дисперсиясының сенімділік интервалын құрыңыз.

Жауабы: (18, 22; 54, 31).

17-дәріс. Статистикалық болжамдарды тексеру Корреляциялық, регрессиялық және дисперсиялық анализ элементтері

17.1. Статистикалық болжамдар және критерийлер

Кейбір жағдайларда бас жиынның үлестіру заңы белгісіз болғанмен оның нақты түрін жуық байқауға болады (мысалы, экспоненциалды немесе бірқалыпты). Мұндайда болжам тұжырымдалады: бас жиын экспоненциалды заңмен үлестірілген. Басқа жағдайларда үлестіру заңы белгілі болғанмен оның параметрлері белгісіз болуы мүмкін. Егер белгісіз параметр Θ -ның мәні Θ_0 -ге тең деп ұйғару мүмкін болса, онда $\Theta = \Theta_0$ деген болжам жасалады.

Белгісіз үлестірулердің түрі немесе белгілі үлестірулердің белгісіз параметрлері туралы болжамдарды статистикалық болжамдар деп атайды.

Жасалған болжаммен бірге оған қайшы болжам да қарастырылады. Жасалған болжам жоққа шығарылған жағдайда қайшы болжам қабылданады.

Жасалған H_0 болжамды нөлдік немесе негізгі болжам деп, ал оған қайшы H_1 болжамды бәсекелес немесе альтернатив болжам деп атайды.

Мысалы, егер нөлдік болжам H_0 : қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың математикалық үміті 10-ға тең, яғни $M\xi = 10$ болса, онда H_1 болжам мынадай: $M\xi \neq 10$.

Жасалған болжамдардың дұрыс – қателігі статистикалық әдістермен тексеріледі. Мұндай тексеру нәтижесінде дұрыс немесе қате шешімдер қабылдануы мүмкін. Екі түрлі қателік бар. Дұрыс болжамның жоққа шығарылуы бірінші текті қате, ал қате болжамның қабылдануы екінші текті қате болады.

Мысалы, «мекеме пайда алады» – негізгі болжам дұрыс болса, онда оның қабылданбауы бірінші текті қате болады. Ал, «мекеме пайда алмайды» деген альтернатив болжам қабылданса, онда ол екінші текті қате болады.

Әдетте, бірінші текті қатеге жол қоюдан, екінші текті қате келіп шығады. Келтірілген мысалда, «мекеме пайда алады» болжамы қабылданбаса, онда «мекеме пайда алмайды» болжамы қабылданады ғой.

Нөлдік болжамдарды тексеру үшін, үлестірімі белгілі арнайы таңдалған кездейсоқ шамалар қарастырылады. Олар, қалыпты үлестірілген шамалар болса – N , Фишер-Снедекор заңымен үлестірілген болса – F -пен, Стюдент заңымен болса – T -мен, Хи-квадрат заңымен – χ -мен белгіленуі мүмкін. Бұларды жалпы түрде K -мен белгілеуге болады.

1-анықтама. Нөлдік болжамдарды тексеру үшін қарастырылатын үлестірімі белгілі кездейсоқ шама K , статистикалық критерий (өлшем) деп аталады.

Болжамдар таңдамада байқалған нәтижелер негізінде тексерілетін болғандықтан, статистикалық критерий, таңдама туралы қабылданатын болжамдардың қателіктері қандай текті болатынын анықтайтын ережелерді береді.

Болжамдарды тексеру үшін таңдаманың мәліметтері бойынша алдымен критерийдің параметрлері есептеліп, кейін критерийдің өзі есептеледі. Бұны критерийдің байқалған мәні деп атайды және $K_{бай}$ -мен белгілейді.

Критерийдің қабылдауы мүмкін болатын мәндерін екі облысқа бөледі: біріншісінде – болжам қабылданады, ал екіншісінде қабылданбайды.

2-анықтама. Критерийдің нөлдік болжам қабылданбайтын мәндерінен тұратын облысты күдікті облыс деп атайды.

3-анықтама. Күдікті облыс пен болжам қабылданатын мәндерден тұратын облысты бөліп тұратын нүктелерді күдікті нүктелер (шекара) деп атайды және $K_{күд}$ -мен белгіленеді.

$K > K_{күд}$ теңсіздікпен анықталатын облыс оң жақтағы облыс, ал $K < K_{күд}$ – сол жақтағы облыс деп айтылады.

Әрбір критерий бойынша $K_{күд}$ -ні табу үшін кесте құрылған және ол қосымшада келтірілген.

Күдікті нүктелер $K_{күд}$ табылғаннан кейін, таңдаманың мәліметтері бойынша $K_{бай}$ есептеледі. Егер $K_{бай} > K_{күд}$ болса, онда нөлдік болжам қабылданбайды, егер кері болса болжам қабылданады.

17.2. Қалыпты үлестірілген екі бас жиын дисперсияларын салыстыру

Қалыпты үлестірілген ξ және η екі жиын берілсін. Егер қалыпты үлестірілген бір кездейсоқ шаманың мәндері екі әдіспен анықталатын болса, онда алынған мәндердің бас жиыны әртүрлі, яғни ξ және η . Осы бас жиындардан сәйкес n_1 және n_2 таңдамалар алынып, олардың дұрысталған дисперсиялары табылған болсын.

Анықтама. Дұрысталған дисперсия деп таңдама дисперсиясымен $\frac{n}{n-1}$ -дің көбейтіндісін айтады және ол S^2 арқылы белгіленеді. Яғни,

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \overline{D\xi} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{M\xi})^2.$$

Мұндағы $\overline{M\xi}$, $\overline{D\xi}$ -лер таңдаманың сәйкес математикалық үміті және дисперсиясы.

Дұрысталған дисперсия бас жиынның ығыспаған бағасы болатыны 15.3-тақырыптан белгілі. Басқаша айтқанда:

$$M(S^2_{\xi}) = D\xi, \quad M(S^2_{\eta}) = D\eta.$$

$P\{K > K_{\text{куд}}\} = \alpha$ болсын. α , S_{ξ}^2 , S_{η}^2 -тардың мәндері бойынша мынадай нөлдік болжамды тексерейік:

$$H_0 : D\xi = D\eta.$$

Нөлдік болжам бойынша $M(S_{\xi}^2) = M(S_{\eta}^2)$ шығады.

Сонымен, таңдамалардың дұрысталған дисперсияларының математикалық үміттерінің теңдігін тексеру қажеттігіне келдік.

Нөлдік болжамды тексеру критерийі сипатында үлкен дұрысталған дисперсияның кіші дұрысталған дисперсияға қатынасын қабылдаймыз. Басқаша айтқанда:

$$F = \frac{S_y^2}{S_k^2}.$$

F шамасы, еркіндік дәрежелері $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ болатын Фишер-Снедекор заңы бойынша үлестірілген болады. Мұндағы n_1 - үлкен дұрысталған дисперсияның көлемі, ал n_2 - кіші дұрысталған дисперсияның көлемі.

Егер, үлкен дисперсия ξ -ге тиісті, ал кішісі η -ға тиісті деп ұйғарсақ, онда бәсекелес болжам сипатында $D\xi > D\eta$ -ны қабылдау мүмкін. Бұл жағдайда күдікті облыс

$$P\{F > f_{\text{куд}}(\alpha, k_1, k_2)\} = \alpha.$$

шарттан табылады.

Күдікті нүктелер қосымшада келтірілген Фишер-Снедекор кестесінен табылады.

17.3. Пирсон критерийі

Белгісіз Θ параметрлі $f(x, \theta)$ үлестіру заңын тексеру үшін көлемі n -ге тең таңдама берілсін.

Егер үзіліссіз үлестіру қарастырылса, онда кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндерінен тұратын интервал қиылыспайтын m интервалдарға бөлініп, олардың әрбіріне түсетін таңдама мәндерінің санын $n_1, n_2, \dots, n_m$ -дермен белгілейміз. Әрбір интервалдың шекарасы және қабылданған

үлестіру заңы бойынша кездейсоқ шама мәнінің сол интервалға түсу ықтималдығы P_i -ді табу мүмкін.

$$P_i = n_i^* / n$$

формуласынан $n_i^* = nP_i$ -ді табамыз.

Критерий сипатында мынадай кездейсоқ шама таңдалады:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}. \quad (17.1)$$

Бұл кездейсоқ шама $n \rightarrow \infty$ да еркіндік дәрежесі k болатын χ^2 -хи – квадрат үлестіру заңына ұмтылады. Еркіндік дәрежесі, $k=m-l-r$ формуласымен анықталады. Мұндағы m - интервалдар саны, r -ұйғарылған үлестіру заңының параметрлерінің саны. Мысалы, көрсеткішті үлестіру үшін $k = m-2$, қалыпты үлестіру үшін $k = m-3$.

Берілген α -ның және k -ның мәндері бойынша χ^2 үлестіру кестесінен

$$P\{\chi^2 > \chi^2_{\text{күд}}(\alpha, k)\} = \alpha$$

тендікті қанағаттандыратын $\chi^2_{\text{күд}}$ -ды анықтаймыз. Одан соң (17.1) бойынша есептелген $\chi^2_{\text{бай}}$ -пен $\chi^2_{\text{күд}}$ -ді салыстырып кездейсоқ шама үлестірілуі бойынша болжам тұралы шешім қабылданады.

17.4. Корреляциялық тәуелділіктер. Регрессия теңдеулері

Екі кездейсоқ шама өзара тәуелсіз немесе қандайда бір функциялық тәуелділікте болуы мүмкін. Іс жүзінде, кездейсоқ шамалар арасында қатаң функциялы тәуелділік сирек ұшырасады, себебі оларға басқа да кездейсоқ факторлар әсер етуі мүмкін. Әсер ететін кездейсоқ факторлар ішінде екі кездейсоқ шамаға да әсер ететіні болуы мүмкін. Мұндай жағдайда статистикалық тәуелділік келіп шығады.

1-анықтама. Бір кездейсоқ шаманың өзгеруі екінші кездейсоқ шаманың үлестірілуінің өзгеруіне алып келсе, онда олар арасында статистикалық тәуелділік бар деп айтылады.

2-анықтама. Егер бір кездейсоқ шаманың өзгеруі екіншісінің орта мәнінің өзгеруіне алып келсе, онда мұндай статистикалық тәуелділікті корреляциялық тәуелділік деп айтады.

Математикалық статистикада үлестіру заңдарының сандық сипаттамалары зерттелмей, олардың бағалары зерттелетін болғандықтан, шартты математикалық үміттің бағасы үшін таңдаманың мәліметтерінен табылатын шартты орта мәнді қабылдайды.

3-анықтама. Кездейсоқ шама ξ -дің $\xi = x$ мәніне сәйкес кездейсоқ шама η -ның байқалған мәндерінің арифметикалық орташа мәнін η -ның шартты орташа мәні деп айтады және ол $\bar{y}_x$ -пен белгіленеді.

Мысалы, $x=2$ болғанда η шамасы $y_1=6, y_2=12, y_3=3$ мәндерді қабылдаса, онда η -ның шартты орташа мәні

$$\bar{y}_x = \frac{6+12+3}{3} = 7.$$

$\bar{y}_x$ немесе $\bar{x}_y$ шартты орташа мәндер x -пен y -тің сәйкес функциялары болады:

$$\bar{y}_x = f^*(x), \quad (17.2)$$

$$\bar{x}_y = \varphi^*(y) \quad (17.3)$$

(17.2) теңдеуі η -ның ξ бойынша регрессия теңдеуі немесе η -мен ξ арасындағы корреляциялық тәуелділік деп аталады, ал (17.3) теңдеуі ξ -дің η бойынша регрессия теңдеуі деп аталады.

$f^*(x)$ және $\varphi^*(y)$ -тарға сәйкес сызықтар регрессия сызықтары деп аталады.

$\xi=x$ болғанда η -ның мәндері өзінің шартты орташа мәні $\bar{y}_x$ -тің маңайында шашырауы байқалуы мүмкін. Шашырауды өлшеу үшін, $\xi=x$ болғанда η -ның шартты дисперсиясы деп аталатын ұғым енгізіледі және ол $\sigma^2_{y/x}$ арқылы белгіленеді.

17.5. Сызықтық регрессия теңдеулерінің коэффициенттерін табу

n тәуелсіз тәжірибе нәтижесінде ξ және η екі кездейсоқ шамасының қос n мәні $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ алынған болсын. η -ның ξ бойынша сызықтық регрессия теңдеуін

$$\bar{y}_x = kx + \varphi$$

түрде іздейміз. Таңдаманың мәліметтері бойынша тек қана коэффициенттердің бағаларын табу мүмкін болатындықтан, коэффициенттердің бағаларын сәйкес ρ және β -мен белгілейміз. Сонда,

$$\bar{y}_x = \rho x + \beta. \quad (17.4)$$

x_i -ге сәйкес η -ның мәндерін y_i -мен, ал $\bar{y}_x$ -ге сәйкес мәндерін $\bar{y}_i$ мен белгілейік. Бұларды (17.4)-тен $\xi = x_i$ -де табуға болады. Одан кейін $\bar{y}_i - y_i$ -ді квадратқа көтеріп, қосындысын тапсақ мынадай болады:

$$f(\rho, \beta) = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\rho x_i + \beta - y_i)^2.$$

Бұдан ρ, β -лар бойынша дербес туындыларды тауып нөлге теңесек (экстремумның қажеттілік шарты), онда ρ, β -ларды табу үшін мынадай екі теңдеу шығады.

$$2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + \beta - y_i) x_i = 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + \beta - y_i) = 0.$$

Элементар түрлендірулерден кейін келесі теңдіктерді аламыз.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \rho + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \beta = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \rho + n\beta = \sum_{i=1}^n y_i .$$

Соңғы жүйені шешіп, ρ -мен β -ның мына мәндеріне ие боламыз:

$$\rho = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

ξ -дің η бойынша регрессия теңдеуі $\bar{x}_y = \rho_1 y + \beta_1$ -ның коэффициенттері ρ_1 -мен β_1 -де осылайша анықталады.

Кездейсоқ шамалар арасындағы тәуелділікті анықтау үшін 10.6-тақырыпта енгізілген корреляциялық коэффициент ұғымынан пайдаланамыз. Ол үшін алдымен корреляциялық момент ұғымын былайша жазып аламыз:

$$r_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Жақшаларды ашып, $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$, $\sum_{i=1}^n y_i = n\bar{y}$ болатындарын

есепке алсақ, онда

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}\bar{y} \right] = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} n\bar{y} - \bar{y} n\bar{x} + n\bar{x}\bar{y} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \right]. \end{aligned}$$

(10.25) формуласы бойынша, корреляциялық коэффициент:

$$k_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

формуласы арқылы анықталады.

17.6. Факторлы және қалдықты дисперсия ұғымдары

Көптеген экономикалық есептерді шешкенде, қарастырылып отырған шамаға әртүрлі факторлардың әсерін бағалау қажет болады. Мысалы, өндірісті ұйымдастырудың түрлері мекеменің пайда алуы үшін елеулі немесе елеусіз әсер етуі мүмкін. Басқа мысал, белгілі бір аймақ ауыл шаруашылығы үшін төгін түрлерінің қайсысының тиімділігін бағалау, тағы с.с.

Қарастырылып отырған шамаға әсер ететін факторлар екі бөлікке бөлінеді. Біріншісі: факторлы дисперсия – Φ фактордың әсерінен болатын дисперсия, ал екіншісі: қалдықты дисперсия – кездейсоқ себептердің әсерінен болатын дисперсия.

Егер бір фактордың әсері қарастырылса, онда дисперсиялық талдау бір факторлы, ал бірден көп болса, онда көп факторлы дисперсиялық талдау деп аталады. Мұнда біз бір факторлы дисперсиялық талдауды қарастырамыз.

ξ шамасына p деңгейлі бір Φ фактор әсер етсін. Φ фактордың әрбір деңгейі үшін ξ шамасының q мәні берілсін. 17-кестесін құрайық.

17-кесте

Мәндердің нөмірі	Фактор деңгейі			
	Φ_1	Φ_2		Φ_p
1	x_{11}	x_{12}		x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}		x_{2p}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
q	x_{q1}	x_{q2}		x_{qp}
Орта мәндері	$\bar{X}_{r1}$	$\bar{X}_{r2}$		$\bar{X}_{rp}$

Жалпы орта мәні мынадай:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^p \bar{x}_{r_j} / p .$$

Жалпы орта мәннен ауытқу квадраттарының жалпы қосындысы:

$$\Gamma_{\text{жалпы}} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (x_{ij} - \bar{x})^2$$

Ауытқулар квадраттарының факторлық қосындысы:

$$\Gamma_{\text{факт}} = q \sum_{j=1}^p (\bar{x}_{r_j} - \bar{x})^2 .$$

Ауытқулар квадраттарының қалдықты қосындысы:

$$\Gamma_{\text{қал}} = \sum_{i=1}^q (x_{i1} - \bar{x}_{r_1})^2 + \dots + \sum_{i=1}^q (x_{ip} - \bar{x}_{r_p})^2 .$$

$\Gamma_{\text{қал}}$ -ды былайша да анықтауға болады: $\Gamma_{\text{қал}} = \Gamma_{\text{жалпы}} - \Gamma_{\text{факт}}$.

$\Gamma_{\text{қал}}$, $\Gamma_{\text{жалпы}}$, $\Gamma_{\text{факт}}$ -ларды есептеп, факторлық және қалдықты дисперсияларды алуға болады.

Факторлық дисперсияның ығыспаған бағасы мынадай болады:

$$S_{\text{факт}}^2 = \Gamma_{\text{факт}} / (p-1) .$$

Қалдықты дисперсияның ығыспаған бағасы мынадай болады:

$$S_{\text{қал}}^2 = \Gamma_{\text{қал}} / (p(q-1)) .$$

Өзін-өзі тексеру сұрақтары

1. Статистикалық болжамның анықтамасын беріңіз.
2. Қандай болжамдар нөлдік (H_0) және бәсекелес (H_1) деп аталады?
3. Қатенің түрлерін айтыңыз.
4. Статистикалық критерийдің анықтамасын беріңіз.
5. Күдікті облыс деп қандай облысты айтады?
6. Қандай нүктелер күдікті нүктелер деп аталады?
7. Қандай шарт орындалғанда нөлдік болжам қабылданады?
8. Дұрысталған дисперсия деп қандай дисперсияны айтады?

9. Нөлдік болжамды тексеру критерийі сипатында қандай өрнек қабылданған?

10. Пирсон критерийі сипатында қандай кездейсоқ шама қабылданған?

11. Статистикалық тәуелділіктің анықтамасын беріңіз.

12. Корреляциялық тәуелділіктің анықтамасын беріңіз.

13. Регрессия теңдеулерін жазыңыз.

14. Регрессия сызықтары деген не?

15. Сызықтық регрессия теңдеулерінің коэффициенттері қалай табылады.

16. Факторлы және қалдықты дисперсия ұғымдарын беріңіз.

17. Факторлы және қалдықты дисперсиялар қандай формулалармен анықталады.

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)

1-мысал. Көлемдері $n_1=10$ және $n_2=15$ екі таңдаманың дұрысталған дисперсиялары $S^2_{\xi} = 12,5$, $S^2_{\eta} = 7,3$ берілген. Егер $\alpha=0,05$ болса, онда $D\xi=D\eta$ нөлдік болжам тексерілсін.

Шешуі:

$$f_{\text{бай}} = 12,5/7,3 = 1,71.$$

Фишер-Снедекор кестесінен $\alpha=0,05$, $k_1=10-1=9$, $k_2=15-1=14$ мәндерге сай $f_{\text{күд}}=2,65$ -ті табамыз. $f_{\text{бай}} < f_{\text{күд}}$ болғандықтан, нөлдік болжамды жоққа шығаруға (қабылдамауға) негіз жоқ.

2-мысал. Көлемдері $n_1=10$ және $n_2=18$ екі таңдаманың дұрысталған дисперсиялары $S^2_{\xi}=1,23$, $S^2_{\eta}=0,41$. Егер $\alpha=0,1$ болса, онда дисперсияларының теңдігі туралы нөлдік болжамды тексеріңіз. Бәсекелес болжам H_1 :

$$D\xi \neq D\eta.$$

Шешуі:

$$f_{\text{бай}} = 1,23/0,41 = 3.$$

Мұнда күдікті облыс екі жақты, сондықтан $\frac{\alpha}{2} = 0,05$; $k_1=9$, $k_2=17$.

Фишер-Снедекор кестесі бойынша $f_{\text{күд}}(0,05; 9; 17)=2,5$.

$f_{\text{бай}} > f_{\text{күд}}$ болғандықтан, нөлдік болжамды жоққа шығарамыз.

3-мысал. 17.1-кестесінде келтірілген өлшеу нәтижелері бойынша бас жиынның қалыпты үлестірілгендігі туралы болжам тексерілсін.

$$\text{Шешуі: } x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}; \quad \bar{x}_T^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^*; \quad (\bar{x}_T^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i^*)^2$$

формулаларына 17.1-кестесіндегі мәндерін қойып есептейміз:

$$\bar{x}_T^* = 12,63; \quad (\bar{x}_T^*)^2 = 181,56.$$

Таңдама дисперсиясының $D_T = (\bar{x}_T^*)^2 - (\bar{x}_T)^2$ формуласын қолданып, $D_T = 181,56 - 159,52 = 22,04$ -ны аламыз. Бұдан $\sigma_T = 4,695$.

17.1- кесте

Интервалдың нөмірі i	Интервалдың шекаралары		Жиілігі n_i
	x_i	x_{i+1}	
1	4	6	15
2	6	8	26
3	8	10	25
4	10	12	30
5	12	14	26
6	14	16	21
7	16	18	24
8	18	20	20
9	20	22	13

$$\Sigma n_i = 200$$

$i, x_{i+1})$ интервалдарға кездейсоқ шама мәндерінің түсу ықтималдықтарын есептеу үшін

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}_T^*}{\sigma_T}, \quad Z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_T^*}{\sigma_T},$$

мәндерін тауып, алдымен $x_i - \bar{x}_T^*, x_{i+1} - \bar{x}_T^*$, одан кейін Z_i, Z_{i+1} -лерді жазып 17.1-кестесін толықтырамыз және оны 17.2-кестесі түрінде береміз.

17.2-кесте

Интерв нөмірі	Интервалдың шекаралары		Жиілігі	Интерв ортасы	Квадраты	Айырымдары		Шекаралары	
i	x_i	x_{i+1}	n_i	x_i^*	$(x_i^*)^2$	$x_i - \bar{x}_T^*; x_{i+1} - \bar{x}_T^*$		Z_i	Z_{i+1}
1	4	6	15	5	25	-8,63	-6,63	-1,84	-1,41
2	6	8	26	7	49	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	25	9	81	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56
4	10	12	30	11	121	-2,63	-0,63	-0,56	-0,13
5	12	14	26	13	169	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	21	15	225	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	24	17	289	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	20	19	361	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	13	21	441	7,37	9,37	1,57	1,99

Енді Z_i -лердің мәндеріне сәйкес Лаплас функцияларының мәндерімен 17.2-кестесін толықтырып, 17.3-кестесінде береміз.

17.3-кесте

Интервалдың нөмірі i	Шекаралары Z_i Z_{i+1}		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i^* = np_i$
1	-1,84	-1,41	-0,4671	-0,4207	0,0464	9,28
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	16,36
3	-0,99	-0,56	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	-0,56	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,41	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	1,99	0,4118	0,4767	0,0349	6,98

$\chi^2_{\text{бай}}$ -ды анықтау үшін 17.4-кестесін құрамыз.

17.4-кесте

i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$(n - n_i^*)^2 / n_i^*$
1	15	9,28	5,72	32,7	3,52
2	26	16,36	9,64	92,9	5,68
3	25	25,32	-0,32	0,1	0
4	30	32,12	-2,12	4,5	0,14
5	26	33,16	-7,16	52,3	1,58
6	21	30,02	-9,02	81,4	2,75
7	24	21,74	2,26	5,1	0,23
8	20	13,78	6,22	38,7	2,8
9	13	6,98	6,02	36,2	5,2

(17.1) формуласы бойынша $\chi_{\text{бай}}^2 = 21,9$ -ды табамыз.

Еркіндік дәрежесінің саны $k=9-3=6$. $\alpha = 0,05$ және $k=6$. χ^2 үлестіру кестесінен $\chi_{\text{күд}}^2 = 12,6$ -ны анықтаймыз. $\chi_{\text{бай}}^2 > \chi_{\text{күд}}^2$ болғандықтан нөлдік болжам қабылданбайды. Демек, заңның түрін өзгерту немесе тәжірибені қайталау қажет.

4-мысал. 5 күннің әрбір күнінде дүкенде сатылған шұлықтардың саны ξ және көйлектердің саны η 17.5-кестеде берілген.

17.5-кесте

x_i	10	20	25	28	30
y_i	4	8	7	12	14

Сызықтық регрессия теңдеуін және корреляциялық коэффициентін табыңыз.

Шешуі: 17.6-кестесін құрамыз.

17.6-кесте

Тәжірибе нөмірі	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	10	4	100	40	16
2	20	8	400	160	64
3	25	7	625	175	49
4	28	12	784	336	144
5	30	14	900	420	196
Σ	113	45	2809	1131	469

17.6-кестесінен пайдаланып, ρ және β -ларды табамыз:

$$\rho = (5 \cdot 1131 - 113 \cdot 45) / (5 \cdot 2809 - 113^2) = 0,447,$$

$$\beta = (2809 \cdot 45 - 113 \cdot 1131) / (5 \cdot 2809 - 113^2) = -1,1.$$

ρ мен β -ның табылған мәндерін (17.4) формуласына қойып, $y_x = 0,447x - 1,1$ регрессия теңдеуін аламыз.

Корреляциялық моментті есептейік:

$$r_{xy} = \frac{1}{5}(1131 - 113 \cdot 9) = 22,8.$$

$\bar{y}^2$ -ты табамыз:

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{n} \Sigma y_i^2 = 469/5 = 93,87.$$

ξ және η -лардың дисперсияларын анықтаймыз.

$$D_{\xi} = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = 2809/5 - (113/5)^2 = 51,$$

$$D_{\eta} = \bar{y}^2 - (\bar{y})^2 = 469/5 - (45/5)^2 = 12,8.$$

Бұдан $\sigma_x = 7,14$; $\sigma_y = 3,58$; $k_{xy} = 22,8 / (7,14 \cdot 3,58) = 0,89$.

5-мысал. Үш деңгейлі Φ факторының әрбірі бірнеше рет өлшеніп нәтижелері 17.7-кестесінде келтірілген. $\alpha=0,05$ деп қабылдап, « Φ факторының әсері елеусіз» деген нөлдік болжам тексерілсін.

17.7-кесте

Өлшеу нөмірі	Фактор деңгейі		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
$\bar{X}_{ij}$	35	25	27

Шешуі. Жалпы орта мәнді табайық: $\bar{X} = \frac{35 + 25 + 27}{3} = 29$.

$y_{ij} = \bar{x}_{ij} - x$ айырымын және оның квадраттарын есептеп, 17.8-кестеде келтіреміз.

17.8-кесте

Өлшеу нөмірі	Фактор деңгейі					
	Φ_1		Φ_2		Φ_3	
	y_{11}	y_{21}^2	y_{12}	y_{22}^2	y_{13}	y_{23}^2
1	9	81	-9	81	-8	64
2	7	49	-5	25	-7	49
3	6	36	-3	9	2	4
4	2	4	1	1	5	25
Σ	-	170	-	116	-	142

$$r_{жалпы} = 170 + 116 + 142 = 428,$$

$$r_{\text{факт}} = q \sum_{j=1}^p (\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2 = 4 [(35-29)^2 + (25-29)^2 + (27-29)^2] = 224 ,$$

$$r_{\text{кал}} = 428 - 224 = 204 ,$$

$$S_{\text{факт}}^2 = 224/2 = 112, \quad S_{\text{кал}}^2 = 204/(3-3) = 22,67 .$$

Нөлдік болжамды тексеру үшін Фишер-Снедекор критерийінен пайдаланамыз.

$$F = S_Y^2 / S_K^2 .$$

Ендеше:

$$f_{\text{бай}} = S_{\text{факт}}^2 / S_{\text{кал}}^2 = 112 / 22,67 = 4,96 .$$

Фишер-Снедекор кестесінен $\alpha = 0,05$ және $k_1 = p-1=2$, $k_2 = (q-1)p = 3 \cdot 3 = 9$ -лар үшін $f_{\text{күд}}(0,05; 2; 9) = 4,26$ -ны табамыз.

$f_{\text{күд}} < f_{\text{бай}}$ болғандықтан, Φ фактордың әсері елеулі деген шешімге келіп, нөлдік болжамды жоққа шығарамыз.

Өзіндік жұмыс тапсырмалары

1. ξ, η қалыпты үлестірілген бас жиындардан алынған n_1 және n_2 көлемді таңдамалардың дұрысталған дисперсиялары S_{ξ}^2 және S_{η}^2 : α -ның белгілі мәнінде нөлдік болжам H_0 : $D_{\xi} = D_{\eta}$ тексерілсін. Мұнда, бәсекелес болжам H_1 : $D_{\xi} > D_{\eta}$ деп алынсын.

а) $n_1 = 10$, $n_2 = 16$, $S_{\xi}^2 = 3,6$, $S_{\eta}^2 = 2,4$, $\alpha = 0,05$.

ә) $n_1 = 13$, $n_2 = 18$, $S_{\xi}^2 = 0,72$, $S_{\eta}^2 = 0,20$, $\alpha = 0,01$.

Жауабы: а) $f_{\text{бай}} = 1,5$; $f_{\text{күм}}(0,05; 9; 15) = 2,59$. Нөлдік болжам қабылданбайды.

2. ξ, η қалыпты үлестірілген бас жиындардан алынған n және m көлемді таңдамалардың орташа мәндері, D_{ξ} және D_{η} -лар берілген. α -ның белгілі мәнінде нөлдік болжам H_0 : $M_{\xi} = M_{\eta}$ тексерілсін. Мұнда, бәсекелес болжам H_1 : $M_{\xi} \neq M_{\eta}$ деп алынсын.

а) $n = 30$, $m = 20$, $D_{\xi} = 120$, $D_{\eta} = 2,4$, $\alpha = 0,05$.

ә) $n = 50$, $m = 40$, $D_{\xi} = 50$, $D_{\eta} = 120$, $\alpha = 0,01$.

Жауабы: а) $Z_{\text{бай}} = 1$, $Z_{\text{күд}} = 1,96$. Нөлдік болжам қабылданады

ә) $Z_{\text{бай}} = 10$, $Z_{\text{күд}} = 2,58$ Нөлдік болжам қабылданбайды.

3. 17.9 - кестесінде ξ -мен η -ның корреляциялық тәуелділігі берілген: а) r_1 -ны табыңыз; б) сызықтық регрессия теңдеулерін жазыңыз.

Жауабы: а) 0,636; ә) $\bar{Y}_x = 1,17x + 16$; $\bar{X}_y = 0,345y + 1,67$.

17.9-кесте

η	ξ					n_y	x_y
	5	10	15	20			
10	2	-	-	-		2	5
20	5	4	1	-		10	8
30	3	8	6	3		20	12,25
40	-	3	6	6		15	16
50	-	-	2	1		3	16,67
n_x	10	15	15	10		$n=50$	
y_x	21	29,33	36	38			

4. Бес деңгейлі Φ факторының әрбірі бірнеше рет өлшеніп, нәтижелері 17.10 - кестесінде келтірілген. $\alpha=0,05$ деп қабылдап, $S_{\text{факт}}^2 = S_{\text{кал}}^2$ деген нөлдік болжам тексерілсін. Таңдама қалыпты үлестірілген бірдей дисперсиялық бас жиыннан алынған.

17.10-кесте

Өлшеу нөмірі	Фактор деңгейі				
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5
1	42	66	35	64	70
2	55	91	50	70	79
3	67	96	60	79	88
4	67	98	69	81	90
x_{ij}	57,75	87,75	53,50	73,50	81,75

Жауабы:

$f_{\text{бай}}=6.13$; $f_{\text{крит}}(-0,05; 4; 15)=3,06$. Нөлдік болжам қабылданбайды.

1-қосымша

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ функциясы мәндерінің кестесі}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

1-қосымшаның жалғасы

3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

2-қосымша

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz \text{ функциясы мәндерінің кестесі}$$

х	Φ(х)	х	Φ(х)	х	Φ(х)	х	Φ(х)
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1,19	0,3830
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078	1,26	0,3962
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082

2-қосымшаның жалғасы

х	Φ(х)	х	Φ(х)	х	Φ(х)	х	Φ(х)
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389	1,38	0,4162
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1,41	0,4207
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4319
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394
1,56	0,4406	1,82	0,4656	2,16	0,4846	2,68	0,4963
1,57	0,4418	1,83	0,4664	2,18	0,4854	2,70	0,4965
1,58	0,4429	1,84	0,4671	2,20	0,4861	2,72	0,4967
1,59	0,4441	1,85	0,4678	2,22	0,4868	2,74	0,4969
1,60	0,4452	1,86	0,4686	2,24	0,4875	2,76	0,4971
1,61	0,4463	1,87	0,4693	2,26	0,4881	2,78	0,4973
1,62	0,4474	1,88	0,4699	2,28	0,4887	2,80	0,4974

х	$\Phi(x)$	х	$\Phi(x)$	х	$\Phi(x)$	х	$\Phi(x)$
1,63	0,4484	1,89	0,4706	2,30	0,4893	2,82	0,4976
1,64	0,4495	1,90	0,4713	2,32	0,4898	2,84	0,4977
1,65	0,4505	1,91	0,4719	2,34	0,4904	2,86	0,4979
1,66	0,4515	1,92	0,4726	2,36	0,4909	2,88	0,4980
1,67	0,4525	1,93	0,4732	2,38	0,4913	2,90	0,4981
1,68	0,4535	1,94	0,4738	2,40	0,4918	2,92	0,4982
1,69	0,4545	1,95	0,4744	2,42	0,4922	2,94	0,4984
1,70	0,4554	1,96	0,4750	2,44	0,4927	2,96	0,4985
1,71	0,4564	1,97	0,4756	2,46	0,4931	2,98	0,4986
1,72	0,4573	1,98	0,4761	2,48	0,4934	3,00	0,49865
1,73	0,4582	1,99	0,4767	2,50	0,4938	3,20	0,49931
1,74	0,4591	2,00	0,4772	2,52	0,4941	3,40	0,49966
1,75	0,4599	2,02	0,4783	2,54	0,4945	3,60	0,499841
1,76	0,4608	2,04	0,4793	2,56	0,4948	3,80	0,499928
1,77	0,4616	2,06	0,4803	2,58	0,4951	4,00	0,499968
1,78	0,4625	2,08	0,4812	2,60	0,4953	4,50	0,499997
1,79	0,4633	2,10	0,4821	2,62	0,4956	5,00	0,499997
1,80	0,4641	2,12	0,4830	2,64	0,4959		
1,81	0,4649	2,14	0,4838	2,66	0,4961		

3-қосымша

$t_{\beta} = t(\beta, n)$ мәндерінің кестесі

n	β			n	β		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,604	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	00	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

4-қосымша

$q = q(\gamma, n)$ мәндерінің кестесі

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

χ^2 үлестіруінің күдікті нүктелері

Еркіндік дәрежелер саны	α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Стъюдент үлестіруінің күдікті нүктелері

Еркіндік дәрежелер саны k	α екі жақты күдікті облыс					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	1,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,05	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	α екі жақты күдікті облыс					

F Фишер-Снедекор үлестіруінің күдікті нүктелері (k_1 -үлкен дисперсия еркіндік дәрежелері саны, k_2 -кіші дисперсия еркіндік дәрежелер саны)

k_2	$\alpha = 0,01$											
	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
k_2	$\alpha = 0,05$											
	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Библиографиялық тізім

1. *Бектаев Қ.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: Рауан, 1991. – 432 б.
2. *Бектаев Қ.Б.* Орысша-қазақша математикалық сөздік. –Алматы: Мектеп, 1986. – 295 б.
3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1962.
4. *Вентцель Е.С. Овчаров Л.А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2002.
5. *Виленкин Н.Я., Потапов В.Г.* Комбинаторика мен математикалық статистиканың элементтері бойынша ықтималдықтар теориясынан есептік-практикум. –Алматы; 1982.
6. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.
7. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
8. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969.
9. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1976.
10. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971.
11. *Жаңбырбаев Б.С.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. – Алматы: Мектеп, 1988. –182 б.
12. *Жаңбырбаева Ү.Б.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептік-практикум. – Алматы – 2003. –76 б.
13. *Матақаева Ғ.* Ықтималдықтар теориясына арналған есептерді шешу. – Алматы: Қазақ университеті, 1991.
14. *Нұрпейісов С.А., Сатыбалдиев О.С., Өтепбергенұлы М.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: «Экономика», 2005. –206 б.
15. *Орымбетов Б., Раметов У.* Итималлықтар теориясына кирису. –Нөкис,1989. – 64 б.
16. *Розанов Ю.А.* Лекции по теории вероятностей. –М.: Наука, 1968. – 120 с.

17. Румицкий Л.З. Элементы теории вероятностей. – М.: «Наука», 1976. – 238 с.
18. Сулейменов З.И. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. – Астана: 2006. – 190 б.
19. Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И. Математика II. – Алматы: ҚазҰТУ. 2011, – 443 б.
20. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

МАЗМҰНЫ

Кіріспе	3
І-тарау. Ықтималдықтар теориясы. 1-дәріс.	
Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары ..	4
1.1. Алмастырулар	4
1.2. Орналастырулар	6
1.3. Терулер	9
1.4. Тәжірибелер және оқиғалар.....	10
1.5. Күрделі оқиғалар	13
1.6. Оқиғаларға қолданылатын амалдар	16
Өзін-өзі тексеру сұрақтары	20
Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	21
Өзіндік жұмыс тапсырмалары	23
2- дәріс. Ықтималдықтың анықтамалары	24
2.1. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы	24
2.2. Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы	28
2.3. Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы	29
Өзін-өзі тексеру сұрақтары	31
Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	31
Өзіндік жұмыс тапсырмалары.....	33
3-дәріс. Ықтималдықтарды қосу теоремалары	35
3.1. Үйлесімсіз оқиғалардың ықтималдықтарын қосу теоремасы	35
3.2. Оқиғалардың толық жиынының ықтималдығы.....	37
3.3. Қарама-қарсы оқиғалардың ықтималдығы	38
Өзін-өзі тексеру сұрақтары	39
Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	39
Өзіндік жұмыс тапсырмалары	40

	4 - дәріс. Ықтималдықтарды көбейту теоремалары	42
4.1.	Тәуелсіз және тәуелді оқиғалар.....	42
4.2.	Тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасы	43
4.3.	Кем дегенде бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы....	47
4.4.	Шартты ықтималдық	49
4.5.	Тәуелді оқиғалардың ықтималдықтарын көбейту теоремасы	50
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	51
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	52
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары	55
	5-дәріс. Қосу және көбейту теоремаларының салдары	57
5.1.	Үйлесімді оқиғаларының ықтималдықтарын қосу теоремасы	57
5.2.	Толық ықтималдықтың формуласы	59
5.3.	Байес формуласы	61
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	63
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	64
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары	66
	6-дәріс. Тәжірибелердің қайталануы	69
6.1.	Бернулли формуласы.....	69
6.2.	Муавр-Лапласстың локальдық теоремасы	71
6.3.	Муавр-Лапласстың интегралдық теоремасы	74
6.4.	Оқиғаның пайда болуының ең ықтимал саны	76
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	78
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	78
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары.....	81

7-дәріс. Дискретті кездейсоқ шамалар	82
7.1. Негізгі ұғымдар	82
7.2. Биномды үлестіру	85
7.3. Пуассон үлестіруі	86
7.4. Геометриялық үлестіру	87
7.5. Гипергеометриялық үлестіру.....	88
Өзін-өзі тексеру сұрақтары	89
Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	90
Өзіндік жұмыс тапсырмалары	92
8-дәріс. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар	94
8.1. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың үлестіру функциялары және үлестіру тығыздықтары	94
8.2. Бірқалыпты үлестіру	100
8.3. Көрсеткішті үлестіру	102
8.4. Гамма үлестіру	104
8.5. Қалыпты үлестіру	105
Өзін-өзі тексеру сұрақтары	107
Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	108
Өзіндік жұмыс тапсырмалары	111
9-дәріс. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары	113
9.1. Кездейсоқ шаманың математикалық үміті және оның қасиеттері	113
9.2. Математикалық үміттің қасиеттері	115
9.3. Кездейсоқ шаманың дисперсиясы және оның қасиеттері	117
9.4. Жоғары ретті моменттер. Асимметрия, медиана, мода Өзін-өзі тексеру сұрақтары	120
Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	124
Өзіндік жұмыс тапсырмалары.....	128

	10-дәріс. Кездейсоқ шамалар жүйесі	131
10.1.	Кездейсоқ шамалар жүйесінің үлестіру функциясы.....	131
10.2.	Екі кездейсоқ шама жүйесінің үлестіру тығыздығы	134
10.3.	Екі кездейсоқ шама қосындысы және айырымының үлестірілуі	137
10.4.	Екі тәуелсіз кездейсоқ шамалар қатынасымен көбейтіндісінің үлестірілуі	139
10.5.	Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың максимумының және минимумының үлестірілуі	141
10.6.	Екі кездейсоқ шама жүйесінің сандық сипаттамалары .	143
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	145
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	146
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары.....	149
	11-дәріс. Кездейсоқ аргументтің функциялары	152
11.1.	Бір кездейсоқ аргументтің функциясы және оның үлестіру заңы	152
11.2.	Бір кездейсоқ аргумент функциясының математикалық үміті және дисперсиясы	156
11.3.	Екі кездейсоқ аргумент функциясының үлестіру заңы мен сандық сипаттамалары.....	158
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	162
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	162
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары	166
	12-дәріс. Қалыпты заңмен байланысты үлестірулер және олардың сандық сипаттамалары	168
12.1.	Еркіндік дәрежесі n болатын χ^2 үлестіру.....	168
12.2.	Релей және Максвелл үлестірулері	169
12.3.	Логарифмдік қалыпты үлестіру	172

12.4.	Коши үлестіруі	175
12.5.	Стюдент үлестіруі	177
12.6.	χ^2 – үлестіру	179
12.7.	Вейбулл-Гнеденко және қос көрсеткішті үлестірулер... Өзін-өзі тексеру сұрақтары	180 184
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	185
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары	189
	13-дәріс. Үлкен сандар заңы	190
13.1.	Чебышев теңсіздігі.....	190
13.2.	Чебышев теоремасы.....	192
13.3.	Бернулли теоремасы	194
13.4.	Ықтималдықтар теориясының орталық шек теоремасы Өзін-өзі тексеру сұрақтары	195 198
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	199
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары	201
	II ТАРАУ. 14-дәріс. Математикалық статистика элементтері	203
14.1.	Математикалық статистиканың негізгі ұғымдары	203
14.2.	Статистикалық үлестірулердің сандық сипаттамалары Өзін-өзі тексеру сұрақтары	206 208
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	208
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары	210
	15- дәріс. Кездейсоқ шама мәндерін үлестірудің параметрлерін статистикалық бағалау	212
15.1.	Жалпы ұғымдар	212
15.2.	Орнықты, ығыспаған және тиімді бағалар.....	213
15.3.	Оқиғаның ықтималдығын, кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын бағалау	217

15.4.	Моменттер әдісі	221
15.5.	Максималь шындыққа ұқсас әдісі	222
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	223
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	224
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары	227
	16-дәріс. Сенімділік интервалдары	229
16.1.	Математикалық үміт үшін сенім интервалын құру.....	229
16.2.	Қалыпты үлестірілген шамалар математикалық үмітінің бағасы үшін сенімділік интервалдарын құру...	231
16.3.	Қалыпты үлестірілген шамалар дисперсиясының бағасы үшін сенімділік интервалын құру	234
16.4.	Оқиға ықтималдығының бағасы үшін сенімділік интервалын құру	235
16.5.	Екі орта мәнді салыстыру.....	235
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	237
	Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	237
	Өзіндік жұмыс тапсырмалары.....	240
	17-дәріс. Статистикалық болжамдарды тексеру. Корреляциялық, регрессиялық және дисперсиялық анализ элементтері	242
17.1.	Статистикалық болжамдар және критерийлер	242
17.2.	Қалыпты үлестірілген екі бас жиын дисперсияларын салыстыру	244
17.3.	Пирсон критерийі	245
17.4.	Корреляциялық тәуелділіктер. Регрессия теңдеулері....	246
17.5.	Сызықтық регрессия теңдеулерінің коэффициенттерін табу	248
17.6.	Факторлы және қалдықты дисперсия ұғымдары.....	250
	Өзін-өзі тексеру сұрақтары	251

Жаттығулар және оқытушылардың қатысуымен жүргізілетін студенттердің өзіндік жұмыстары (ОСӨЖ)	252
Өзіндік жұмыс тапсырмалары	257
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ функциясы мәндерінің кестесі	259
$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ функциясы мәндерінің кестесі	260
$t_\beta = t(\beta, n)$ мәндерінің кестесі	263
$q = q(\gamma, n)$ мәндерінің кестесі	263
χ^2 үлестіруінің күдікті нүктелері	264
Стюдент үлестіруінің күдікті нүктелері	265
F Фишер-Снедекор үлестіруінің күдікті нүктелері (k_1 -үлкен дисперсия еркіндік дәрежелері саны, k_2 - кіші дисперсия еркіндік дәрежелер саны)	266
Библиографиялық тізім	267

Оқулық басылым

З.И. Сулейменов

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ
СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Оқу құралы

РББ бастығы

З.А. Ғубайдулина

Редакторы

А.И. Бейсебаева

Компьютерде беттеген

Л.Т. Касжанова

Басуға қол қойылды 29.01.2014 ж.

Таралымы 300 дана. Пішімі 60 x 84, 1/16.

№ 1 баспаханалық қағаз.

Шартты б.т. 16,1. Көлемі 17,1 есепті баспа
табақ. Тапсырыс № 1. Бағасы келісімді.

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық
университетінің басылымы,

Оқу-баспа орталығы. Алматы, Қ.Сәтбаев көш., 22

ISBN 978-601-228-602-1



9