

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К. И. Сатпаева

Ж. Е. Егинбаев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛИГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рекомендовано Научно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

АЛМАТЫ 2015

УДК 655.3 (075.8)

ББК 37.8я73

Е 29

Рецензенты:

Джумадилов Т. К. – д-р хим. наук, профессор, зав. лаборатории физической химии Института химии имени А. Б. Бектурова

Бегалиев И. Т. – президент ТОО «Полиграфкомбинат», проф.

Газизов О. Г. – старший преподаватель, магистр кафедры
«Машины и технология полиграфического
производства», института промышленной
инженерии имени А. Ж. Буркитбаева
КазНТУ имени К.И. Сатпаева

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2015 г.

Е 29 Егинбаев Ж. Е. Математическое моделирование полиграфических процессов. Учебное пособие. – Алматы: КазНТУ имени К. И. Сатпаева, 2015. – 283 с. Ил.–29. Табл. – 4. Библиогр. – 17

ISBN 978-601-228-783-7

Учебное пособие посвящено математическому моделированию полиграфических процессов, их оптимизации и их практическим применениям. Изложенный материал позволяет научить студента исследовать процессы методом математического моделирования, включая составление математического описания, выбор метода решения, программную реализацию модели и проверку адекватности модели реальному объекту. Приведены конкретные примеры решения задач математического моделирования.

Предлагаемое учебное пособие «Математическое моделирование полиграфических процессов» рассчитано на специалистов в области математического моделирования и смежных с ней научно-технических дисциплин, а также на преподавателей и студентов соответствующих специальностей.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 5В072200 – «Полиграфия», а также может быть полезно инженерно-техническим работникам, занимающимся проектированием и применением систем моделирования.

© Егинбаев Ж. Е., 2015

© КазНТУ имени К.И. Сатпаева, 2015

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛИГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Моделирование, исследование каких либо явлений, процессов или систем объектов путём построения и изучения их моделей; использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов. Моделирование – одна из основных категорий теории познания: на идее моделирования по существу базируется любой метод научного исследования – как теоретический (при котором используются различного рода знаковые, абстрактные модели), так и экспериментальный (использующий предметные модели); является одним из методов изучения окружающего мира; предполагает построение действующей материальной или математической модели, обладающей свойствами, подобными свойствам рассматриваемой системы.

Моделирование используется:

- для экспериментирования или численной оценки, т. е. для предсказания последствий изменения параметров системы или условий ее работы, когда осуществление такого изменения в реальной обстановке связано с большими затратами или определенным риском;
- для изучения систем с целью их переделки или усовершенствования;
- для ознакомления с системами или условиями их работы, которые пока еще не существуют в реальной действительности;
- для проверки или демонстрации новой идеи, системы или метода.

Под *математическим моделированием* понимают изучение свойств объекта на математической модели. Математическое моделирование как альтернатива пробному физическому эксперименту по мере усложнения техники и решаемых инженерных задач все прочнее входит в практику производства, как достаточно эффективный и экономически выгодный путь в подготовке любого нововведения. В широком смысле математическое моделирование есть процесс оперирования созданной по исходным физическим параметрам моделью, обеспечивающий получение данных о поведении интересующего объекта. Его целью является определение оптимальных условий протекания процесса, управление им на основе математической модели и перенос результатов на объект.

В практической инженерной деятельности, ограниченной проблемами моделирования технологических процессов в полиграфии, речь может идти о моделировании на так называемом микроуровне в отличие от макроуровня и метауровня, когда модели охватывают системы точечных технических объектов или более общих управленческих и экономико-социальных структур.

На *микроуровне* при моделировании фазовые переменные фигурируют как функции нескольких независимых переменных, к которым относятся пространственные координаты и время, причем и пространство, и время рассматриваются как непрерывные.

На *макроуровне* используют представление о средах как о дискретном пространстве. Эта дискретизация означает переход от распределенных моделей к сосредоточенным. Элементами этого уровня являются объекты, которые на микроуровне рассматривались как подсистемы или предельные единицы (например, резисторы, транзисторы в радиоэлектронных схемах, кронштейны, рычаги, балки, станины, валы в механических устройствах).

Высший уровень рассмотрения объектов часто называют мета- или информационным уровнем, а модели – информационными. На *метауровне* системы – это сложные устройства и комплексы. Например, функционирование информационных и вычислительных систем рассматривается как цепь событий, происходящих в дискретные моменты времени и заключающихся в изменении состояний элементов.

Принципиальное различие в уровнях моделирования определяется величиной неделимого объекта, которая при переходе к более высокому уровню естественно возрастает.

Поскольку некоторые параметры, входящие в уравнения, принимаются с большими допущениями, их можно рассматривать как неизвестные для конкретно поставленной задачи математического моделирования технологических процессов. Для их определения следует использовать косвенную информацию: данные о решении уравнения, которые экспериментально получить значительно проще. Такие задачи можно рассматривать как *обратные*. В отличие от задач прямого моделирования обратные задачи относятся к классу «некорректных» (в математическом смысле), в частности неустойчивых относительно погрешности входных данных. Однако современная математика обладает средствами для их решения, что существенно расширяет возможности математических экспериментов.

Выполнение работы по математическому моделированию предполагает достаточную оснащенность производственных коллективов вычислительной техники высокого уровня и обеспечение ее бесперебойной работы.

Основным понятием метода математического моделирования является понятие математической модели. *Математической моделью* называется приближенное описание какого-либо явления или процесса внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. В отличие от реально поставленного эксперимента математическая модель имеет ряд преимуществ, которые связаны с тремя основными аспектами. Во-первых, это экономия материальных ресурсов, требуемых для постановки и проведения физического эксперимента; во-вторых, возможность апробации системы в экстремальных условиях и даже за их пределами; в-третьих, оценка работоспособности систем с длительными технологическими (дни, недели, месяцы, годы) циклами в существенно более сжатые сроки (например, исследование ниже десятых долей градуса в час). Для рассматриваемой узкой проблемы математическая модель по форме представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих поведение объекта в окружающей среде с установленными краями и начальными условиями. Существенным являются свойство *полноты* математической модели и ее *продуктивность*.

Формулировка математической модели объекта должна быть продуктом совместной работы технолога (конструктора) и математика при ведущей на этом этапе роли технолога (конструктора); последнее связано прежде всего с тем, что подавляющее большинство прикладных задач по моделированию технологических процессов являются оптимизационными, и постановщик задачи (технолог или конструктор) должен указать требуемое множество переменных технологических параметров, определяющих заданное качество объекта, а также сформулировать обязательные ограничения, связанные с реализацией в производстве поставленной задачи (например, размеры конечного продукта, предельные усилия или скорости резания).

Искусственный интеллект, условное обозначение кибернетических систем, моделирующих некоторые стороны интеллектуальной деятельности человека – логическое, аналитическое мышление. Термин «Искусственный интеллект» был введен в 1954 году, а в 1964 году появилась первая версия системы DENDRAL (экспертная система, предназначенной для определения состава сложных органических соединений), которую принято считать одной из первых экспертных систем. Не мало важную роль играет процесс создания продукционной системы на языке Турбо Паскаль (другие популярные версии языка Паскаль: Apple 1.1 или UCSD Pascal и Стандартный Паскаль) с обратной последовательностью вывода.

Экспертные системы. Каждый программист желает создавать собственные экспертные системы. Экспертные системы составляют часть систем искусственного интеллекта, причем самую существенную их часть. Экспертные системы обычно определяют как программы ЭВМ, моделирующие действия эксперта-человека при решении задач в узкой предметной области, на основе накопленных знаний, составляющих базу знаний. Все экспертные системы включают в себя три основных элемента: базу знаний, машину вывода и интерфейс пользователя. *База знаний* содержит информацию о том что известно о данном предмете в настоящий момент. База знаний состоит из фактов и правил. Факты базы знаний описывают то, что и известно о предметной области в данный момент. Правила устанавливают ситуационные, концептуальные, причинные или прецедентные взаимосвязи между этими фактами. *Машина вывода* обеспечивает применение того, что известно к тому, что еще не известно. *Интерфейс пользователя* способствует взаимодействию между системой и пользователем. Взятая как целое, экспертная система моделирует знания эксперта и умение их применять. Экспертная система всецело зависит от человеческой экспертизы. Каждую экспертную систему следует рассматривать как эксперимент, требующий подтверждения на основе эмпирических результатов.

Проектирование, процесс создания проекта – прототипа, прообраза предполагаемого или возможного объекта, состояния; это комплекс работ по изысканиям, исследованиям, расчетам и конструированию, имеющих целью получение всей необходимой документации для создания новых изделий или реализации новых процессов, удовлетворяющих заданным требованиям. Наряду с традиционными видами (архитектурно-строительные, машино-

технические и другие) начали складываться самостоятельные направления проектирования человеко-машинных систем, трудовых процессов, организаций, экологическое, социальное, инженерно-психологическое, генетическое и другие. Проектирование – это творческий процесс, требующий от специалиста широких знаний современного состояния техники и технологии, направлений их развития, умения рассматривать производственный процесс в комплексе с инженерно-техническим обеспечением.

Полиграфия (греческий polygraphia, буквально – многописание), 1) отрасль техники, совокупность технических средств для производства печатной продукции – книг, газет и тому подобные. Основные производственные процессы в полиграфии: изготовление печатной формы, собственно печатание и отделка отпечатанных продукции. 2) То же, что полиграфическая промышленность (изготавливает печатную продукцию).

Продукцию полиграфического производства использует практически все население. Отсюда вытекает особая социально-политическая роль изделий полиграфического производства. Печатная продукция наряду с быстро прогрессирующими радиовещанием, телевидением и электронными информационными системами остается одним из основных средств формирования идеологии и мировоззрения людей, а также накопления и сохранения знаний.

Литература: 1–7

Контрольные вопросы:

1. Сущность понятия «моделирование».
2. Сущность понятия «математическое моделирование».
3. Сущность понятия «математическая модель».
4. Искусственный интеллект и экспертные системы.
5. Проектирование и полиграфия.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛИГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Этапы математического моделирования

Математическое моделирование включает три взаимосвязанных этапа: 1) составление математического описания изучаемого объекта; 2) выбор метода решения системы уравнений математического описания и реализация его в форме моделирующей программы; 3) установление соответствия (адекватности) модели объекту.

На этапе составления математического описания предварительно выделяют основные явления и элементы в объекте и затем устанавливают связи между ними. Далее, для каждого выделенного элемента и явления записывают уравнение (или систему уравнений), отражающее его функционирование. Кроме того, в математическое описание включают уравнения связи между различными выделенными явлениями. В зависимости от процесса математическое описание может быть представлено в виде системы алгебраических, дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений.

Этап выбора метода решения и разработки моделирующей программы подразумевает выбор наиболее эффективного метода решения из имеющихся (под эффективностью имеются в виду быстрота получения и точность решения) и реализацию его сначала в форме алгоритма решения, а затем – в форме программы, пригодной для расчета на ЭВМ.

Построенная на основе физических представлений модель должна верно качественно и количественно описывать свойства моделируемого процесса, т.е. она должна быть адекватна моделируемому процессу. Для проверки адекватности математической модели реальному процессу нужно сравнить результаты измерений на объекте в ходе процесса с результатами предсказания модели в идентичных условиях.

Этап установления адекватности модели является заключительным в последовательности этапов, выполняемых при ее разработке. На рисунке 2.1 изображена общая схема разработки математической модели.

При построении математической модели реальное явление упрощается, схематизируется и полученная схема описывается в зависимости от сложности явлений с помощью того или иного математического аппарата.

От правильности учета в модели характерных черт рассматриваемого процесса зависят успех исследования и ценность полученных результатов моделирования.

В модели должны быть учтены все наиболее существенные факторы, влияющие на процесс, и вместе с тем она не должна быть загромождена множеством мелких, второстепенных факторов, учет которых только усложнит математический анализ и сделает исследование либо чрезмерно громоздким, либо вообще нереализуемым.

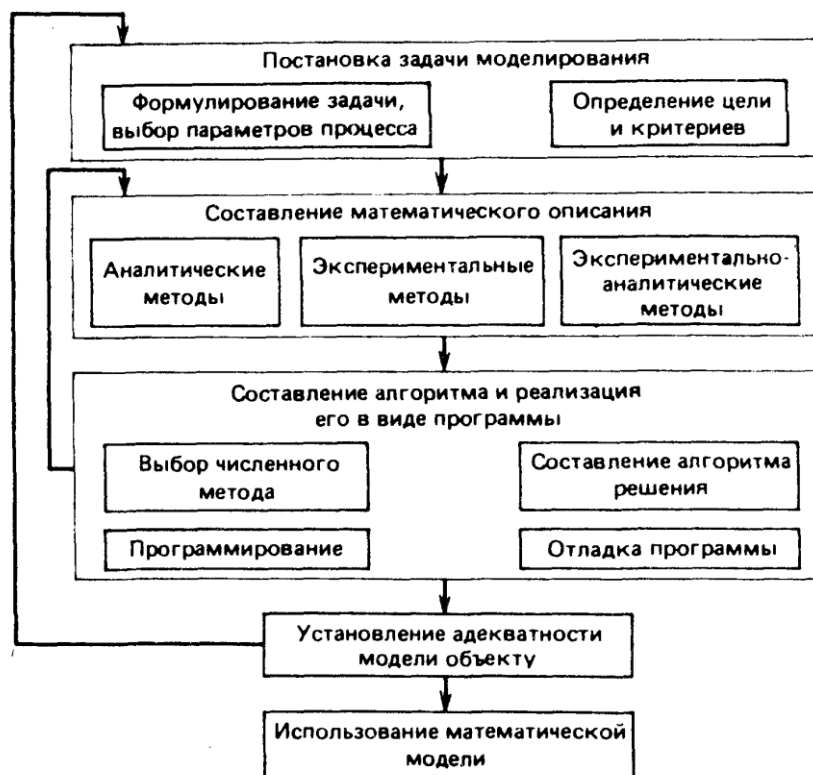


Рисунок 1.1. Этапы разработки математической модели.

Метод математического моделирования применяют при изучении свойств процессов, для которых имеется достаточно точное математическое описание. В зависимости от степени полноты математического описания можно выделить два предельных случая: а) известны полная система уравнений, описывающая все основные стороны моделируемого процесса, и все числовые значения параметров этих уравнений; б) полное математическое описание процесса отсутствует. Этот второй случай типичен для решения кибернетических задач, в которых приходится иметь дело с управлением процессами при наличии неполной информации об объекте и действующих на него возмущениях. При отсутствии достаточной информации об исследуемых явлениях их изучение начинается с построения простейших моделей, но без нарушения основной (качественной) специфики исследуемого процесса.

1.2. Основные виды математических моделей

В зависимости от конкретной реализации процесса и его аппаратного оформления все многообразие химико-технологических процессов можно разделить на четыре класса исходя из временного и пространственного признаков: процессы, переменные во времени (нестационарные), и процессы, не меняющиеся во времени (стационарные); процессы, в ходе которых их параметры изменяются в пространстве, и процессы без пространственного изменения параметров. Так как математические модели являются отражением соответствующих объектов, то для них характерны те же классы, а именно: 1) модели, неизменные во времени, – *статические модели*; 2) модели,

переменные во времени, – *динамические модели*; 3) модели, неизменные в пространстве, – *модели с сосредоточенными и существенными параметрами*; 4) модели, изменяющиеся в пространстве, – *модели с распределенными параметрами*. Рассмотрим перечисленные классы моделей.

Модели с сосредоточенными параметрами. Для данного класса моделей характерно постоянство переменных в пространстве. Математическое описание включает алгебраические уравнения либо дифференциальные уравнения первого порядка для нестационарных процессов. Примером объекта, описываемого данным классом моделей, может служить аппарат с идеальным (полным) перемешиванием потока. Скорость мешалки такова, что концентрация во всех точках аппарата одинакова (рисунок 1.2).

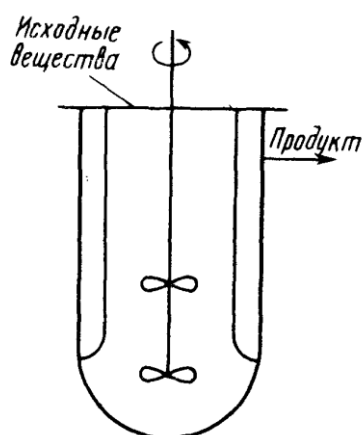


Рисунок 1.2. Пример схемы аппарата, реализующего модель идеального смешения.

Модели с распределенными параметрами. Если основные переменные процесса изменяются как во времени, так и в пространстве, или если указанные изменения происходят только в пространстве, то модели описывающие такие процессы, называются моделями с распределенными параметрами. Их математическое описание включает обычно дифференциальные уравнения в частных производных, либо обыкновенные дифференциальные уравнения в случае стационарных процессов с одной пространственной переменной.

Совокупность имеющая k параметров (или степеней свободы) называется k -мерным многообразием (говорят также – пространством), также многомерным многообразием. Многообразие состояний – фазовое состояние. Примером процесса, описываемого такими моделями, служит трубчатый аппарат с большим отношением длины к диаметру и значительной скоростью движения реагентов (рисунок 1.3).

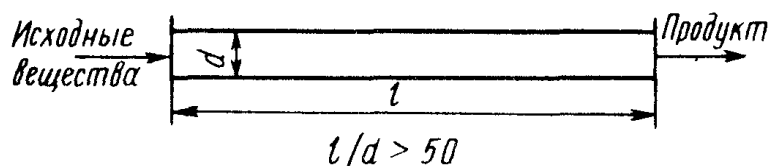


Рисунок 1.3. Пример схемы аппарата, реализующего модель идеального вытеснения.

Статические модели. Статические модели отражают работу объекта в стационарных условиях, т.е. когда параметры процесса не меняются во времени. Соответственно математическое описание в статических моделях не включает время как переменную и состоит из алгебраических уравнений либо дифференциальных уравнений в случае объектов с распределенными параметрами. Примером объекта, описываемого статической моделью, служит аппарат полного смешения объемом V в установившемся режиме работы, в который непрерывно подаются реагенты A и B в количестве ν_A , ν_B ($\nu_A + \nu_B = \nu$) и отводится продукт реакции P .

Математическое описание аппарата включает следующие уравнения материального баланса (для простоты тепловой баланс не рассматривается):

$$\nu(C_{A_0} - C_A) = Vkc_AC_B, \quad \nu(C_{B_0} - C_B) = Vkc_AC_B. \quad (2.1)$$

Здесь k – константа скорости реакции.

Динамические модели. Динамическая модель отражает изменение объекта во времени. Математическое описание таких моделей обязательно включает производную по времени. Часто динамическую модель объекта строят в виде передаточных функций, связывающих входные и выходные переменные (представление динамических моделей в виде передаточных функций особенно удобно для целей управления объектом). Примером динамической модели может служить модель рассмотренного выше аппарата полного смешения, но работающего в неустановившемся режиме. В этом случае математическое описание аппарата включает следующие уравнения материального баланса:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{\nu}{V}(C_{A_0} - C_A) - kC_AC_B, \quad (2.2)$$

$$\frac{dC_B}{dt} = \frac{\nu}{V}(C_{B_0} - C_B) - kC_AC_B. \quad (2.3)$$

а также начальные условия

$$C_A = C_{A_0}, \quad C_B = C_{B_0} \text{ при } t=0. \quad (2.4)$$

По характеру отображаемых свойств проектируемого объекта математические модели делят на функциональные и структурные. *Функциональные модели* отображают процессы функционирования объекта. Они чаще всего имеют форму систем уравнений. В зависимости от физической природы отображаемых явлений среди функциональных моделей различают модели тепловые, электрические, оптические, гидравлические, электромеханические, газодинамические, кинематические и др. *Структурные модели* отображают только структурные (в частности, геометрические) свойства объекта. Эти модели могут иметь форму матриц, графов, списков векторов и выражать взаимное расположение элементов в пространстве.

По характеру переменных, фигурирующих в модели, различают модели фазовые и факторные. *Фазовые модели* – модели, в которых фигурируют фазовые переменные. Если предмет исследования – процессы функционирования объекта, т. е. переменные в моделях рассматриваются как функции времени, то фазовые модели называют *имитационными моделями*.

Факторная модель – модель вида $F(Q, Y) = 0$ в явной форме $Y = F(Q)$, где Q – вектор внешних параметров; Y – вектор выходных параметров объекта.

Модели, в которых искомые переменные явно выражены через известные величины, называют *аналитическими моделями*. В отличие от них в *алгоритмических моделях* вычисление значений искомых величин связано с необходимостью решения систем уравнений.

Математическая модель является системой уравнений математического описания, отражающей сущность протекающих в объекте явлений, для которой определен алгоритм решения, реализованный в форме моделирующей программы. Согласно этому определению математическая модель должна рассматриваться в совокупности трех ее аспектов: смыслового, аналитического и вычислительного.

Смысловой аспект представляет собой физическое описание природы моделируемого объекта.

Аналитический аспект является математическим описанием процесса в виде некоторой системы уравнений, отражающей протекающие в объекте явления и функциональные связи между ними.

Наконец, вычислительный аспект есть метод и алгоритм решения системы уравнений математического описания, реализованные как моделирующая программа на одном из языков программирования.

1.3. Физическое описание природы объекта

Построение любой математической модели начинают с физического описания объекта моделирования. При этом выделяют «элементарные» процессы, протекающие в объекте моделирования, которые подлежат отражению в модели, и формулируют основные допущения, принимаемые при их описании. В свою очередь, перечень учитываемых «элементарных» процессов определяет совокупность явлений, описывающих объект, которые включают в математическую модель. В данном случае под «элементарным» процессом понимается физико-химический процесс, относящийся к определенному классу явлений, например массообмен, теплопередача и т.д. Здесь следует отметить, что название «элементарные» процессы отнюдь не означает, что данные процессы являются простейшими и описываются несложными уравнениями. Так, массообмен является предметом целой теории, до настоящего времени еще далекой до полного завершения. Это название означает лишь, что такие процессы являются составляющими много более сложного всего химико-технологического процесса.

Обычно при математическом моделировании объектов химической технологии принимаются во внимание следующие «элементарные» процессы: 1) движение потоков фаз; 2) массообмен между фазами; 3) теплопередача; 4) изменение агрегатного состояния (испарение, конденсация, растворение и т.д.); 5) химические превращения.

Полнота математического описания «элементарных» процессов в модели зависит от их роли во всем химико-технологическом процессе, степени

изученности, глубины взаимосвязи «элементарных» процессов в объекте и желаемой точности всего описания. Взаимосвязь «элементарных» процессов может быть чрезвычайно сложной. Поэтому на практике часто делают различные допущения относительно характера связей, что позволяет избежать необходимости введения в модель недостаточно изученных зависимостей и, следовательно, излишнего усложнения описания.

Например, при физическом описании процесса ректификации смесей выделяют следующие «элементарные» процессы: 1) гидродинамика потоков жидкости и пара в колонне; 2) массообмен между жидкостью и паром; 3) теплопередача между жидкостью и паром; 4) испарение жидкости и конденсация пара. Все указанные «элементарные» процессы протекают либо на тарелке, либо в насадочной секции колонны и прямо связаны между собой. Полное описание этих процессов представляет собой чрезвычайно сложную систему уравнений. Только описание гидродинамики потока жидкости на тарелке (либо в насадке) с помощью уравнения Навье–Стокса представляет собой задачу чрезмерной вычислительной сложности. Не менее сложно и решение задачи полного описания массообмена между потоками жидкости и пара. Вместе с тем эти задачи должны решаться совместно как единая система уравнений. Отсюда следует, что без разумных упрощающих допущений здесь не обойтись. Поэтому обычно принимают идеализированное представление относительно движения потоков пара и жидкости (пар движется в режиме полного вытеснения, а жидкость полностью перемешивается на тарелке), а массопередачу выражают через эффективность ступеней разделений, определяемую в большинстве случаев полуэмпирическими методами, либо вообще не рассматривают ее, считая, что на каждой ступени разделения достигается равновесие.

Следует отметить, что иногда физическое описание объекта моделирования устанавливается в результате математического моделирования. Так, математическое моделирование используется для проверки некоторых гипотез о механизме процессов, протекающих в объекте. Для этого в состав модели вводят исследуемые соотношения, чтобы по результатам последующего моделирования судить о справедливости того или иного физического предположения. Например, механизмы каталитических химических превращений в большинстве случаев неизвестны исследователям. Закладывая в математическую модель тот или иной механизм протекания химической реакции и сравнивая результаты моделирования с экспериментальными, можно отыскать наиболее близкий к истинному механизм.

Литература: 2[7-12], 7 [313-316]

Контрольные вопросы:

1. Назовите трех взаимосвязанных этапов математического моделирования.
2. В зависимости от процесса математическое описание может быть представлено в виде системы каких уравнений?
3. Что представляет собой описание гидродинамики потока жидкости на

тарелке (либо в насадке) с помощью уравнения Навье–Стокса?

4. Этапы математического моделирования.
5. Основные виды математических моделей.
6. Физическое описание природы объекта.

2. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1. Принципы моделирования и построения моделей

Работа над моделью достаточно сложна. Различают две формы моделей: эмпирическую модель, разрабатываемую на основе экспериментального анализа, и аксиоматическую модель, когда расчет процесса выполняется исходя из естественнонаучных и технических закономерностей, построенных на ряде аксиом.

Модели различаются конечными результатами. Выходом проектно-конструкторского моделирования являются приборы и установки, а выход функциональных моделей – схемы процессов, системы уравнений, информационные потоки и т. п.

Исходя из того, что цель моделирования заключается в оптимальной организации проектируемого технологического процесса, само моделирование следует выполнять в две стадии. На стадии технологического моделирования дается качественное описание наиболее существенных зависимостей, а на стадии математического моделирования эти зависимости оцениваются количественно.

Предпосылкой качественного моделирования является анализ моделируемого процесса – системный анализ в кибернетическом смысле. Его цель состоит в определении объективных характеристик процесса. При этом должны быть изучены связи производства с внешним миром, т. е., иначе говоря, выполнен макроанализ. Одновременно исследуются внутривыпускные связи, т. е. организация производства (его структура) и технологический процесс (функциональные связи). Это составляет предмет микроанализа. После проведения аналитических исследований начинают шаг за шагом формировать модель в такой последовательности: постановка задачи; выбор направления ее решения путем определения цели (критерия оптимальности) и ограничений, накладываемых на решение задачи; двухстадийная разработка модели; разработка алгоритма решения (последовательности расчетов); проведение расчетов по модели; проверка результатов моделирования на соответствие практическим данным; корректировка модели с целью ее уточнения.

В таблице 2.1 представлены некоторые стандартные математические модели, достоинствами которых являются: точная формулировка задачи; получение однозначного результата при заданных целях и критериях; обеспечение лучшего восприятия задачи в целом и учета взаимного влияния процессов, описываемых моделью; получение фундаментальных знаний с помощью логических, математических выводов; нахождение оптимальных вариантов процесса; вариантная проработка решений при наличии различных влияющих факторов; доказательство оптимальности полученного решения и т.п.

Таблица 2.1

Стандартные математические модели

Характеристика модели	Обозначение модели	Аналитические методы решения
Детерминированная	Модель планирования производства Оптимизационные модели – линейные – нелинейные Модели размещения Сетевые модели Модели теории расписаний Модели управления запасами Компенсационные модели Модели принятия решений	Матричные расчеты Симплексный метод, модифицированный дистрибутивный метод, метод приближений Фогеля, метод градиентов Венгерский метод Метод критического пути, метод потенциалов Комбинаторные методы Дифференциальное исчисление, динамическая оптимизация Дифференциальное исчисление Динамическая оптимизация
Стохастическая	Оптимизационные модели Модели массового обслуживания Сетевые модели Модели управления запасами Компенсационные модели Конфликтные модели	Вероятностные методы Вероятностные методы Оптимизация сети по программе ПЕРТ Вероятностные методы, методы математической статистики Вероятностные методы, методы математической статистики Теория игр

2.2. Источники ошибок при моделировании и требования к исходной информации

Поскольку модель – это упрощенное представление о реальном объекте, то при переносе информации, полученной при моделировании, на реальный объект могут возникать характерные ошибки, в числе которых отметим следующие:

1) пренебрежение существенными зависимостями. Например, в транспортной задаче нельзя использовать длину маршрута в качестве критерия оптимальности, если для перевозок применяются различные виды транспорта;

2) неточное или неверное представление функциональных зависимостей. Если, например, сказать, что продукции первого вида должно быть изготовлено вдвое больше, чем продукции второго вида, то правильно записанная математическая формулировка имеет вид $x_1 = 2x_2$, где x_1 – количество продукции первого вида, а x_2 – количество продукции второго вида;

3) использование недостоверной информации. К ней относятся: неточная исходная информация, ошибки передачи информации, счетные ошибки при промежуточных вычислениях и т. п.

Поэтому к исходной информации предъявляется ряд требований: все факторы, влияющие на конечный результат, должны быть определены точно, желательно путем измерений. Несущественные факторы могут быть впоследствии исключены, например, при корреляционном анализе; информационную основу проектирования составляют средние величины. Они должны быть определены исходя из большого числа единичных измерений, выполненных при одинаковых условиях и отобранных случайным образом; сбор и предварительная обработка информации, особенно исходной, – первоочередная задача управления, ибо на основе информации о существующем процессе проектируется новый процесс.

Из этого следует, что исходная информация не должна содержать систематических ошибок (с позиций теории ошибок), не должна нести никаких общих оценок в общепринятом смысле этого слова, не должна быть идеализированной. Модель, построенная на этой информационной основе, будет настолько верной, насколько верна использованная в ней исходная информация.

Погрешностями моделирования, сбора и обработки исходной информации определяется достоверность получаемых в результате расчетов по модели решений. При оценке моделей следует учитывать такие обстоятельства: каждая модель содержит упрощения, которые нужно оценивать; результат вычислений по модели есть формальный вывод из логических построений. Перенос его на реальный процесс зависит от степени согласованности, изоморфности модели и реального процесса; детерминированные модели (альтернатива – стохастические модели) исходят из достоверных данных, что не всегда требуется для реального проекта, но для моделирования гораздо проще использовать достоверные (в вероятностном смысле) данные; в статических моделях (альтернатива – динамические модели) не учитывается протекание процесса во времени.

2.3. Возможности оптимизации проектных решений

В любом процессе проектирования, будь то новое строительство, расширение или реконструкция, приходится принимать самые разнообразные решения. Такими решениями могут быть: выбор рациональной технологии производства; сравнение технологических вариантов; размещение зданий и оборудования; рациональное взаиморасположение оборудования, складов и т. п.; оптимальные грузопотоки; рациональная загрузка оборудования; использование запланированных мощностей; объем производимой продукции; экономичность проектируемых процессов; планирование проектирования и т.п.

Ниже рассматривается модель, позволяющая оценить с различных точек зрения технологические варианты изготовления продукции на базе имеющихся нормативов. По методическим причинам анализируется часть

технологического процесса – обработка отпечатанной продукции. Без каких-либо ограничений можно аналогичным способом сформировать модели других стадий технологического процесса: набора, фоторепродуцирования, изготовления форм или печати.

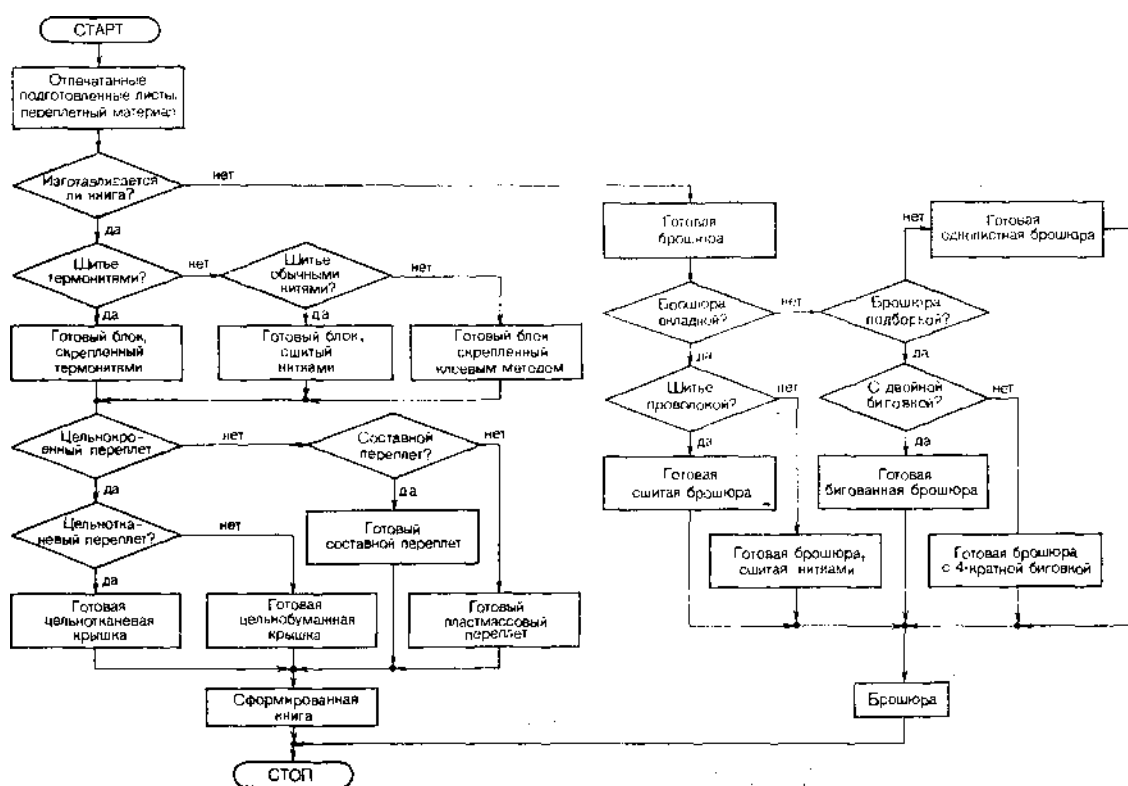


Рис. 2.1. Алгоритм формирования технологического процесса.

Структура производственной программы полиграфического производства, несмотря на специализацию предприятий, все еще разнообразна. Из этого следует, что комплексный технологический процесс на полиграфическом предприятии должен быть построен таким образом, чтобы была обеспечена возможность выпуска различной продукции.

На результат технологического процесса в целом оказывают влияние отдельные его составляющие, так как внутри процесса могут быть скомбинированы различные операции. Отправным пунктом для дальнейшего изложения является алгоритм, представленный на рис. 3.1, описывающий технологию изготовления книг и брошюр. Результатом этой стадии технологического процесса являются книги в твердом переплете (переплеты цельнотканевые, пластмассовые и т. п., скрепление блоков термонитями, нитками, бесшвейное) и брошюры (вкладкой, подборкой, причем технология формирования самих брошюр не рассматривается).

На рис. 2.2 представлена обобщенная технологическая схема изготовления книг в твердых переплетах. Показан в целом процесс, применяемый сейчас на многих полиграфических предприятиях. При этом детализация не доведена до мелких операций (изготовление крышек Е20—...Е24). С другой стороны, можно предположить, что для какого-то производства может

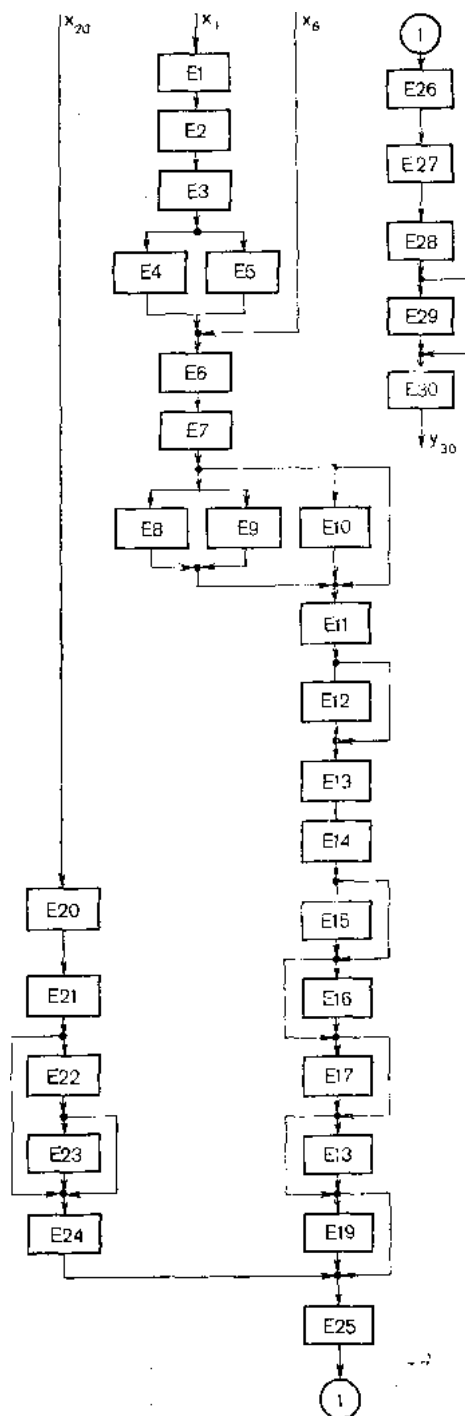


Рис. 2.2. Блок-схема технологического процесса изготовления книг:

x_1 – отпечатанные листы; x_6 – отпечатанные и сфальцованные листы; x_{20} – переплетный материал; y_{30} – упакованные книги. E1 – счет листов; E2 – сталкивание; E3 – разрезка; E4 – фальцовка без термонтей; E5 – фальцовка с термоннтами; E6 – подготовка тетрадей к подборке; E7 – подборка тетрадей; E8 – шитье на марле; E9 – шитье без марли; E10 – фрезерование корешка; E11 – заклейка корешка; E12 – оклейка корешка; E13 – сушка; E14 – обрезка; E15 – кругление корешка; E16 – покраска обреза; E17 – вкладка ленточки-ляссе; E18 – приклейка каптала; E19 – приклейка корешкового материала; E20 – раскрой переплетного материала; E21 – изготовление переплетной крышки; E22 – тиснение на крышке; E23 – очистка после тиснения; E24 – выгибка крышек; E25 – вставка блока в крышку; E26 – обжим блока; E27 – окатка рубчика; E28 – контроль; E29 – завертывание в суперобложку; E30 – упаковка.

потребуется большая детализация. Ниже рассмотрены оба варианта. В блок-схеме показаны различные технологические процессы. Входы элементов (операций) E_1 схемы обозначены символами x_1 (материалы, полуфабрикаты); выходы – y_1 (полуфабрикаты, готовая Продукция, затраты по операции). С целью упрощения рассмотрим изготовление книжных блоков только до операции трехсторонней обрезки E_{14} .

Принципиально существуют две технологии изготовления:

- 1) на обработку поступают несфальцованные листы x_1 и в некоторых случаях сфальцованные тетради с рулонных машин;
- 2) на обработку поступают только сфальцованные тетради (x_6).

По первой технологии возможны следующие варианты технологической обработки продукции:

1.1. Фальцовка без термонитей, шитье на марле

$E_1 — E_2 — E_3 — E_4 — E_6 — E_7 — E_8 — E_{11} — E_{13} — E_{14}$.

1.2. Фальцовка без термонитей, шитье без марли

$E_1 — E_2 — E_3 — E_4 — E_6 — E_7 — E_9 — E_{11} — E_{12} — E_{13} — E_{14}$.

1.3. Фальцовка без термонитей, бесшвейное скрепление

$E_1 — E_2 — E_3 — E_4 — E_6 — E_7 — E_{10} — E_{11} — E_{12} — E_{13} — E_{14}$.

1.4. Фальцовка с шитьем термонитями

$E_1 — E_2 — E_3 — E_5 — E_6 — E_7 — E_{11} — E_{12} — E_{13} — E_{14}$.

Примечание. Так как еще нет ротационной фальцовки с термонитями, то используются только несфальцованные листы.

По второй технологии существуют те же варианты обработки отпечатанной продукции, но все они начинаются с операции E_6 :

2.1. Фальцовка без термонитей, шитье на марле

2.2. Фальцовка без термонитей, без шитья на марле

2.3. Фальцовка без термонитей, бесшвейное скрепление

Если требуется представить технологический процесс более строго, чем это показано на рис. 2.2, то строится развернутая логическая схема.

Если теперь обобщить эти логические схемы и рассмотреть весь процесс изготовления книг вплоть до получения готовой продукции, то получится картина процесса P_b , происходящего на стадии брошюровочно-переплетного производства, которая представлена на рис. 2.3.

При наличии разработанной программы для компьютера становится достаточным задать входные параметры x_1 и x_6 . Задав входные величины процесса, например, количество отпечатанных листов, подлежащих обработке, и введя передаточную функцию для каждого отдельного процесса, например, затраты на разрезку 1000 листов, можно получить программу, позволяющую определить затраты на изготовление продукции по разным вариантам ее выпуска. Вместо затрат можно подставить цены, прибыль, затраты времени на всех рабочих операциях. Как будет показано в дальнейшем на примере одной программы, расчеты по отдельным процессам или группам процессов полиграфического производства рационально выполнять по стандартным программам. Предпосылками для этого являются: расчленение

технологического процесса на элементы, т. е. на отдельные операции, и определение передаточной функции в виде нормативов цены, себестоимости, затрат времени на одну рабочую операцию.

Благодаря программированию, становится возможным рассчитать: затраты для отдельных стадий и всего производственного процесса в целом; себестоимость производства в отдельных цехах и по предприятию в целом; затраты времени на отдельные процессы, на группы процессов и т. п., представляющие основу оперативно-календарного планирования.

Для семи вариантов технологических процессов, оканчивающихся операцией E14, логическая схема имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & (1.1.) x_1 y_1 y_2 y_3 y_4 y_6 y_7 y_8 y_{11} y_{13} y_{14}; \\
 & (1.2.) x_1 y_1 y_2 y_3 y_4 y_6 y_7 y_9 y_{11} y_{12} y_{13} y_{14}; \\
 & (1.3.) x_1 y_1 y_2 y_3 y_4 y_6 y_7 y_{10} y_{11} y_{12} y_{13} y_{14}; \\
 & (1.4.) x_1 y_1 y_2 y_3 y_5 y_6 y_7 y_{11} y_{12} y_{13} y_{14}; \\
 & (2.1.) x_6 y_6 y_7 y_8 y_{11} y_{13} y_{14}; \\
 & (2.2.) x_6 y_6 y_7 y_8 y_{11} y_{12} y_{13} y_{14}; \\
 & (2.3.) x_6 y_6 y_7 y_{10} y_{11} y_{12} y_{13} y_{14}. \\
 & P_b = [(x_1 y_1 y_2 y_3 y_4 V x_6) y_6 y_7 y_8 y_{11} V \\
 & \quad V(x_1 y_1 y_2 y_3 y_4 V x_6) y_6 y_7 y_9 y_{11} y_{12} V \\
 & \quad V(x_1 y_1 y_2 y_3 y_4 V x_6) y_6 y_7 y_{10} y_{11} y_{12} V \\
 & \quad V x_1 y_1 y_2 y_3 y_5 y_6 y_7 y_{11} y_{12}] y_{13} y_{14} \Lambda \\
 & \Lambda (y_{15} y_{16} y_{17} y_{18} y_{19} y_{25} V y_{15} y_{16} y_{17} y_{18} y_{25} V \\
 & \quad V y_{15} y_{16} y_{17} y_{19} y_{25} V y_{15} y_{16} y_{18} y_{19} y_{25} V \\
 & \quad V y_{15} y_{17} y_{18} y_{19} y_{25} V y_{16} y_{17} y_{18} y_{19} y_{25} V \\
 & \quad V y_{15} y_{16} y_{17} y_{25} V y_{15} y_{16} y_{18} y_{25} V y_{15} y_{16} y_{19} y_{25} V \\
 & \quad V y_{15} y_{17} y_{18} y_{25} V y_{15} y_{17} y_{19} y_{25} V y_{15} y_{18} y_{19} y_{25} V \\
 & \quad V y_{16} y_{17} y_{18} y_{25} V y_{16} y_{17} y_{19} y_{25} V y_{16} y_{18} y_{19} y_{25} V \\
 & \quad V y_{17} y_{18} y_{19} y_{25} V y_{15} y_{16} y_{25} V y_{15} y_{17} y_{25} V \\
 & \quad V y_{15} y_{18} y_{25} V y_{15} y_{19} y_{25} V y_{16} y_{17} y_{25} V y_{16} y_{18} y_{25} V \\
 & \quad V y_{16} y_{19} y_{25} V y_{17} y_{18} y_{25} V y_{17} y_{19} y_{25} V y_{18} y_{19} y_{25} V \\
 & \quad V y_{15} y_{25} V y_{16} y_{25} V y_{17} y_{25} V y_{18} y_{25} V y_{19} y_{25} V y_{25}) \Lambda \\
 & \Lambda y_{25} y_{27} y_{28} (y_{29} y_{30} V y_{30}) \Lambda \\
 & \Lambda x_{20} y_{20} y_{21} (y_{22} y_{23} y_{24} V y_{22} y_{24} V y_{24}).
 \end{aligned}$$

Рис. 2.3. Обобщенная логическая схема технологического процесса изготовления книг:

V – логический символ ИЛИ, Λ – И

Если некоторая операция E_i не участвует в процессе, то для нее $k[i]$ равно нулю. Например, при изготовлении пластмассовых крышек штриховка (E_{27}) не производится, значит, $k[27] = 0$. Если несколько операций E_i , E_{i+1} и E_{i+2} объединены в поточную линию, то принимается, что $k[i] > 0$, $k[i+1]=0$, $k[i+2]=0$.

В качестве вспомогательных данных в программу вводятся:

$x[i]$ вход для технологической операции E_i ;

$y[i]$ полные затраты по операции E_i ;
 $sl...s6$ затраты по группе операций технологического процесса;
 $ml...m7$ то же;
 $ml0...ml2$ то же;
 z то же, что $ml\ 0$

$$\underline{a} = \underline{e} = || 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0 ||$$

$$\underline{c} = \underline{F} = || 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 ||$$

$$\underline{d} = \underline{g} = || 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 ||$$

В результате получают распечатки со следующими данными.

Программа (рис. 2.4) решает следующие задачи: пересчет входной информации по процессу (системе) во входную информацию по отдельным элементам; расчет затрат, отнесенных на одно рабочее место; расчет затрат по нескольким рабочим местам с выводом результатов расчета на печать. Для расчета должны быть известны:

Символ	Обозначение	Единица измерения
$x_1 := x1$	Количество отпечатанных листов	1000 листов
$x_6 := x6$	Количество сфальцованных тетрадей	1000 тетрадей
$k[i]$	Затраты на операцию E_i в расчете на единицу измерения (учетную единицу) по этой операции, т. е. $k[1] \dots k[3]$ $k[4] \dots k[6]$ $k[7]$ при $h = 1$ при $h > 1$ (h смотрите дальше) $k[8] \dots k[19]$ $k[20] \dots k[24]$ $k[25] \dots k[30]$	1000 листов 1000 тетрадей 1000 экз. книг 1000 ударов листоподборочной машины
b	Количество тетрадей в блоке	1000 экз. книг
h	Количество одновременно подбираемых блоков	
v	Удельный вес сложных тетрадей, $0 < v < 1$	
ω	Количество тетрадей, получаемых из одного отпечатанного листа	

(1) Распечатка 1.

Затраты на изготовление книжного блока, включая трехстороннюю обрезку, при

$m1$ – формировании книжного блока из листов, отпечатанных на листовых и рулонных ротационных машинах или только на листовых машинах, с шитьем нитками на марле;

$m2$ – то же, что и для $m1$, но без шитья на марле;

$m3$ – то же, что и для $m1$, но при бесшвейном скреплении;

$m4$ – формирование книжного блока из листов, отпечатанных только на

листовых машинах, с шитьем термонитями;
m5 – формирование книжных блоков из тетрадей, сфальцованных в рулонных машинах, с шитьем нитками на марле;
m6 – то же, что и для *m5*, но без шитья на марле;
m7 – то же, что и для *m5*, но при бесшвейном скреплении.

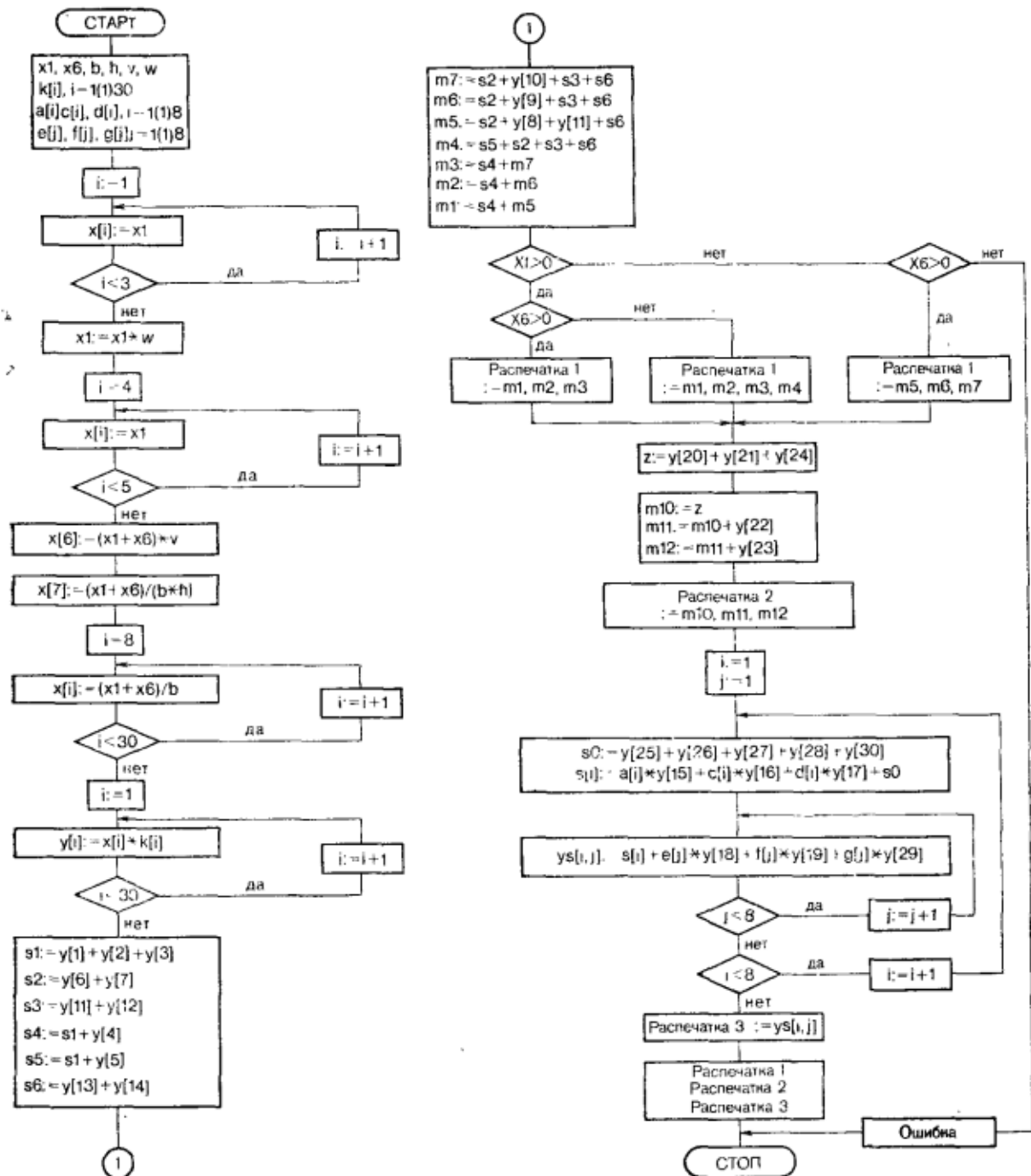


Рис. 2.4. Программа для процесса изготовления книг.

(2) Распечатка 2.

Затраты на изготовление переплетных крышек, а именно:

m10 – переплетные крышки без отделки; *m11* – переплетные крышки с красочным тиснением; *m12* – переплетные крышки с тиснением фольгой.

(3) Распечатка 3.

Затраты на выполнение операций обработки блоков после обрезки, вставки блоков в переплетные крышки и далее – до упаковки книг при различных вариантах технологии, например, с закраской обреза и приклейкой каптала, без ленточки-закладки, с суперобложкой. В распечатках не содержатся данные о стоимости основных материалов, относимых непосредственно на заказ.

Литература: 1 [37–48]

Контрольные вопросы:

1. Принципы моделирования и построения моделей.
2. Источники ошибок при моделировании и требования к исходной информации.
3. Возможности оптимизации проектных решений.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Различные подходы к классификации

Математические модели классифицируют по ряду признаков.

Доминантный признак. Иногда доминирование выражают величиной органической массы, создаваемой данными видами, или числом особей. Доминанта (от латинского *dominans*, родительный падеж *dominantis* – господствующий), господствующая идея, основной признак или важнейшая составная часть чего-либо.

По характеру отображаемых свойств проектируемого объекта модели делят на функциональные и структурные.

3.2. Функциональные и структурные модели

Обычно в математической модели отражается структура (устройство) моделируемого объекта, существенные для целей исследования свойства и взаимосвязи компонентов этого объекта; такая модель называется *структурной*. Если же модель отражает только то, как объект функционирует – например, как он реагирует на внешние воздействия, – то она называется *функциональной* или, образно, *черным ящиком*. Возможны и модели комбинированного типа.

Функциональные модели отображают процессы функционирования объекта. Эти модели чаще всего имеют форму систем уравнений. В зависимости от физической природы отображаемых явлений среды функциональных моделей различают модели тепловые, электрические, газодинамические, кинематические и др.

Структурные модели отображают только структурные (в частности геометрические) свойства объекта. Эти модели могут иметь форму матриц, графов, списков векторов и выражать взаимное расположение элементов в пространстве. Они могут характеризовать наличие непосредственных связей между элементами и в виде каналов, проводников, трубопроводов и т. п. Структурные модели обычно используют в случаях, когда задачи структурного синтеза удастся ставить и решать, абстрагируясь от особенностей физических процессов в объекте, например при оформлении конструкторской документации.

Различные подходы к выбору подсистем. Основную функциональную нагрузку несет технологическая часть подсистемы, но остальные подсистемы совершенно необходимы, чтобы эта часть действовала. Элементы подсистем должны обладать такими параметрами, чтобы функционировала с заданными характеристиками, например с заданными скоростью, точностью, чувствительностью и т. д. Все элементы системы находятся в строгих взаимосвязях.

Роль декомпозиции. Слово «декомпозиция» на гуманитарном уровне трактуется как разложение некоторого целого на части, предполагающее

дальнейшее соединение этих составных частей в единое целое, т.е. в исходный объект. Точно эквивалентна, если речь идет о точной декомпозиции, и приближенно эквивалентна, если идет речь о приближенной декомпозиции.

Особое значение имеет декомпозиция сложных управляемых процессов. Все реальные системы управления сложными техническими, социально-экономическими, биологическими процессами основаны на некоторой иерархической декомпозиции задачи назначения управляющих воздействий на процесс: каждый орган в системе управления, имеющим возможность принимать решения, ведает своим, в большинстве случаев достаточно четко очерченным, кругом вопросов.

Модель черного ящика, системы типа «вход – выход».

«Черный ящик», термин, употребляемый главным образом в системотехнике для обозначения систем, структура и внутренние процессы которых неизвестны или очень сложны; метод изучения таких систем основан на исследовании их реакций на известные (заданные) входные воздействия (сигналы).

Связь структурных и функциональных моделей. Поскольку структурные и функциональные свойства объектов тесно взаимосвязаны, в большинстве проектных процедур требуются модели с отображением особенностей как структуры объекта, так и характера физических или в функциональных моделях, которые по этой причине следует отнести к основному типу моделей в САПР (система автоматизированного проектирования).

3.3. Дискретные и непрерывные модели

Как известно, величины могут быть двух типов – *дискретные (логические)*, т. е. принимающие «оторванные» друг от друга значения, допускающие естественную нумерацию (с помощью логических отношений), и *непрерывные*, принимающие все значения из некоторого интервала (при непрерывности переменных). Возможен также смешанный случай, например, когда величина на каком-то интервале своих значений ведет себя, как дискретная, а на другом – как непрерывная. (Эти определения не являются исчерпывающими). Дискретная модель принимает «оторванные» друг от друга значения, допускающие естественную нумерацию. Дискретность (от латинского *discretus* – разделённый, прерывистый), прерывность; противопоставляется непрерывности.

Подобным образом, модели – как содержательные, так и математические – могут быть либо дискретными, либо непрерывными, либо смешанными. Между этими типами нет принципиального барьера и при уточнении или видоизменении модели дискретная картина может стать непрерывной и обратно; то же может произойти в процессе решения математической задачи. Таким образом, во многих задачах при составлении математической модели, а также при выборе метода ее исследования надо учитывать возможность применения как «дискретного», так и «непрерывного» аппаратов (например,

для дискретных моделей характерно применение сумм, а для непрерывных – производных и интегралов) независимо от характера исходной картины.

Предельные переходы: континуализация и дискретизация моделей.

К предельным переходам относится *континуализация* (от латинского слова «континуум» *continuum* – непрерывное) или *размазывания*.

Дистрибутивность (от латинского *distributivus* – распределительный), дистрибутивный (распределительный) закон, свойство сложения и умножения, выражаемое формулой $(a + b + \dots + c)n = an + bn + \dots + cn$.

Дистрибутивный анализ, метод лингвистического исследования, при котором классификация языковых единиц и изучение их свойства производятся главным образом на основе их дистрибуции в потоке речи. Разработан представителями дескриптивной лингвистики.

3.4. Динамические и статические модели

Различают *статические* и *динамические* (эволюционные) модели; для второго типа моделей предметом изучения является изменение рассматриваемого объекта во времени. Промежуточное место занимают квазистатические, стационарные и квазистационарные модели.

Непрерывные динамические модели. Непрерывные модели принимают все значения из некоторого интервала. Для динамических моделей предметом изучения является изменение рассматриваемого объекта во времени.

Квазистатическое приближение. В квазистатической модели принимается, что изменение объекта происходит столь медленно, что при рассмотрении ситуации в каждый момент можно в первом приближении объект считать статическим (грубо говоря, пренебречь инерционными силами), а время считать добавочным параметром.

Статические модели. Статистика – выборочная характеристика. Модели, неизменные во времени – статические модели. В стационарной модели считается, что процессы происходят, но изучаемый объект во времени не меняется; простейший пример – электрическая цепь с постоянным током. Установившимся процессом обычно называют стационарный или периодический процесс; переходным процессом называют процесс перехода от одного статического состояния или установившегося процесса к другому.

3.5. Детерминированные и стохастические модели

Математическая модель может включать случайные компоненты – случайные скалярные или векторные величины, случайные последовательности или функции, случайные структуры и т. п., удовлетворяющие статистическим законам. Такие модели называются *вероятностными* или *стохастическими*, а *детерминированные* (от латинского слова «детермино» – определяю; детерминант от латинского *determinans* – определяющий, то же, что определитель) модели таких компонентов не содержат. Между случайными величинами обычно существуют такая связь, при которой с изменением одной

величины меняется распределение другой. Такая связь называется *стохастической*. Вероятные модели изучаются с помощью методов теории вероятностей. При построении вероятностных моделей надо уделять существенное внимание источнику вероятностных характеристик случайных компонентов.

3.6. Линейные и нелинейные модели

Линейная зависимость одной величины от другой – это пропорциональность их приращений, т.е. зависимость вида $y = ax + b$, откуда получаем $\Delta y = a\Delta x$ (Δ – обычное обозначение приращения); аналогично, линейная зависимость величины от двух других – это зависимость вида $z = ax + by + c$, откуда $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$, и т. д. Типичные линейные зависимости между физическими величинами – закон Гука (удлинение пропорционально силе растяжения), закон Ома, закон теплового расширения и т.д.

Понятие линейной модели применяется для моделей объектов, рассматриваемых как преобразователи, для которых каждому входу соответствует некоторый выход. Будем считать, что начала отчета входа и выхода выбраны так, что нулевому входу отвечает нулевой выход. Тогда модель называется *линейной*, если в ней выполнен принцип суперпозиции (наложения) т. е. при сложении входов складываются и выходы, а при умножении входа на любое число выход умножается на то же число. Если этот принцип не выполнен, модель называется *нелинейной*. Линейные модели обычно описываются линейными неоднородными уравнениями – алгебраическими, дифференциальными и т.д., в которых неоднородный член отвечает входу, а решение – выходу.

Метод матричных функций Грина. Грина функция связанная с аналитическим представлением применяется также при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики. Грина функция названа по имени Джорджа Грина, впервые рассмотревшего один её частный случай в своём исследовании по теории потенциала (1828 год). Грина функция описывает распространение полей от источников и от порождающих (поэтому её называют также функцией распределения).

Выгоды линейности бывают столь велики, что приближенная замена нелинейных соотношений на линейные, нелинейных моделей на линейные, т. е. *линеаризация* соотношений, моделей и т. д. весьма распространена. Такая линеаризация обычно проводится в двух случаях: либо если эксперимент показывает (как, например, для закона Гука), что отклонение от линейности в рассматриваемых диапазонах изменения переменных невелико и несущественно, либо же, если эти диапазоны малы и заменяем приращения переменных на их дифференциалы, отбрасывая члены высшего порядка малости. Во втором случае применяется также линейное интерполирование.

Необходимо иметь в виду, что существуют принципиально нелинейные объекты (в том числе явления), для которых применение линейных моделей

приводит к грубым искажением картины. Это прежде всего системы, для которых изменение масштаба воздействия приводит к качественному изменению результата. Типичным примером могут служить механические системы с сухим трением, для которых малая сила не порождает движения, а большая – порождает; вообще, наличие любых барьеров подобного рода – это типичный нелинейный эффект. Существенно нелинейный является также задача об изучении околоскритического состояния объекта, зависящего от параметров, когда при их изменении тип движения – другим и т. п. Во всех таких случаях надо применять методы нелинейного анализа, которые можно найти в специальной литературе.

Литература: 7, 9, 10

Контрольные вопросы:

1. Доминантный признак
2. Декомпозиция.
3. Функциональные, структурные, дискретные и непрерывные модели.
4. Предельные переходы: континуализация и дискретизация моделей.
5. Динамические и статические модели.
6. Квазистатическое приближение.
7. Детерминированные и стохастические модели.
8. Линейные и нелинейные модели.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА, ТЕХНОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

4.1. Составление математического описания объекта

При составлении математического описания общим приемом является блочный принцип. Согласно этому принципу, составлению математического описания предшествует анализ отдельных «элементарных» процессов, протекающих в объекте моделирования. При этом эксперименты по изучению каждого такого процесса проводят в условиях, максимально приближающихся к условиям эксплуатации объекта моделирования.

Сначала исследуют гидродинамическую модель процесса как основу структуры математического описания. Далее изучают кинетику химических реакций, процессов массо- и теплопередачи с учетом гидродинамических условий найденной модели и составляют математическое описание каждого из этих процессов. Заключительным этапом в данном случае является объединение описаний всех исследованных «элементарных» процессов (блоков) в единую систему уравнений математического описания объекта моделирования. Достоинством блочного принципа построения математического описания является то, что его можно использовать на стадии проектирования объекта, когда окончательный вариант аппаратного оформления еще неизвестен.

Существуют итерационные и качественные методы. *Итерация* (от латинского *iteratio* – повторение), повторное применение какой-либо математической операции. *Итерационные методы*, в каждом из таких методов некоторая единообразная вычислительная процедура повторяется вновь и вновь, причем каждый раз результат проведенного вычисления кладется в основу последующего вычисления. *Качественные методы*, с помощью качественных методов свойства решения изучаются без его построения, путем анализа свойств заданного уравнения.

Методы составления математического описания. К указанным методам относятся аналитический, экспериментальный и экспериментально-аналитический.

Аналитическими методами составления математического описания обычно называют способы вывода уравнений статики и динамики на основе теоретического анализа физических и химических процессов, происходящих в исследуемом объекте, а также на основе заданных конструктивных параметров аппаратуры и характеристик перерабатываемых веществ. При выводе этих уравнений используются фундаментальные законы сохранения вещества и энергии, а также кинетические закономерности процессов переноса массы и теплоты, химических превращений.

Для составления математического описания с помощью аналитических методов не требуется проведения каких-либо экспериментов на объекте, поэтому такие методы пригодны для нахождения статических и динамических

характеристик вновь проектируемых объектов, физико-химические процессы в которых достаточно хорошо изучены.

Параметры (коэффициенты) составленных уравнений функционально зависят от определяющих размеров химико-технологического аппарата (диаметра, длины и т.д.), свойств обрабатываемых веществ и величин, характеризующих протекание физико-химических процессов (констант скорости реакций, коэффициентов диффузии и др.). Некоторые параметры уравнений могут быть определены расчетным путем, другие находятся с помощью принципа подобия по результатам ранее выполненных исследований.

К недостаткам аналитических методов составления математического описания можно отнести сложность решения получающейся системы уравнений при достаточно полном описании объекта.

Экспериментальный метод составления математического описания используется для управления и исследования объектов в узком, «рабочем» диапазоне изменения входных и выходных переменных (например, при построении системы автоматической стабилизации отдельных технологических параметров). Эти методы чаще всего основываются на предположении о линейности и сосредоточенности параметров объекта. Принятие этих допущений позволяет сравнительно просто описывать наблюдаемые процессы алгебраическими или линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. При экспериментальном подходе к составлению математического описания всегда требуется постановка опытов непосредственно на изучаемом объекте.

Достоинством экспериментальных методов является простота получаемого математического описания при достаточно точном описании свойств объекта в узком диапазоне изменения параметров. Основной недостаток экспериментальных методов – невозможность установления функциональной связи между входящими в уравнения числовыми параметрами и конструктивными характеристиками объекта, режимными параметрами процесса, физико-химическими свойствами веществ. Кроме того, полученные экспериментальным методом математические описания нельзя распространять на другие однотипные объекты.

Наличие «сильных» и «слабых» сторон аналитического и экспериментального методов составления математического описания привело к необходимости разработки *комбинированного экспериментально-аналитического метода*. Сущность его заключается в аналитическом составлении уравнений описания, проведении экспериментальных исследований и нахождении по их результатам параметров уравнений. При подобном подходе к получению математического описания сохраняются многие положительные свойства экспериментальных и аналитических методов.

Состав математического описания. Формально математическое описание представляет собой совокупность зависимостей, связывающих различные переменные процесса в единую систему уравнений. Среди этих

соотношений могут быть уравнения, отражающие общие физические законы (например, законы сохранения массы и энергии), уравнения, описывающие «элементарные» процессы (например, химические превращения), ограничения на переменные процесса и т.д. Кроме того, в состав математического описания входят также различные эмпирические и полуэмпирические зависимости между разными параметрами процесса, теоретическая форма которых неизвестна или слишком сложна.

В частности, при отсутствии или весьма ограниченном объеме теоретических сведений о моделируемом объекте, когда неизвестен даже ориентировочный вид соотношений, описывающих его свойства, уравнения математического описания могут представлять собой систему связывающих выходные и входные переменные эмпирических зависимостей, полученных в результате статистического обследования действующего объекта (экспериментальный метод составления математического описания). Эти модели обычно имеют вид регрессионных соотношений между входными и выходными переменными объекта и, разумеется, не отражают физическую сущность объекта моделирования, что затрудняет обобщение результатов, получаемых при их применении.

В отличие от моделей, основанных на регрессионных соотношениях, математические модели, построенные на основе аналитического метода составления описания, отражают основные закономерности процесса и качественно более правильно характеризуют его даже при наличии недостаточно точных параметров модели. Поэтому с их помощью можно изучать общие свойства объектов моделирования, относящихся к определенному классу.

В составе математического описания, разработанного на основе физической природы моделируемого объекта, можно выделить следующие группы уравнений:

1. *Уравнения сохранения массы и энергии, записанные с учетом гидродинамической структуры движения потоков.* Данная группа уравнений характеризует распределение в потоках температуры, концентраций и связанных с ним свойств. Обобщенное уравнение материального баланса имеет вид

$$\text{Приход вещества} - \text{Расход вещества} = \text{Накопление вещества.} \quad (4.1)$$

Разность между приходом и расходом вещества равна изменению его количества в рассматриваемом объекте. В стационарном режиме не может происходить ни убыль, ни накопление. В этом случае уравнение (4.1) переходит в уравнение материального баланса вида

$$\text{Приход вещества} = \text{Расход вещества.} \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1), (4.2) применяются как к каждому веществу в отдельности, так и ко всей совокупности веществ, участвующих в процессе.

Обобщенное уравнение теплового баланса имеет вид

$$\text{Приход теплоты} - \text{Расход теплоты} = \text{Накопление теплоты} \quad (4.3)$$

или для стационарных условий

$$\text{Приход теплоты} = \text{Расход теплоты.} \quad (4.4)$$

В условиях (4.3), (4.4) следует учесть работу, но поскольку во многих процессах энергетические эффекты являются тепловыми, при составлении уравнений сохранения энергии можно пользоваться указанными условиями.

2. *Уравнения элементарных процессов для локальных элементов потоков.* К этой группе относятся описания процессов массо- и теплообмена, химических реакций и другие.

3. *Теоретические, полуэмпирические или эмпирические соотношения между различными параметрами процесса.* Таковы, например, зависимость коэффициента массопередачи от скоростей потоков фаз, зависимость теплоемкости смеси от состава и т. д.

4. *Ограничения на параметры процесса.* Например, при моделировании процесса ректификации многокомпонентных смесей на любой ступени разделения должно выполняться условие, что сумма концентраций всех компонентов равна 1. Кроме того, концентрация любого компонента должна находиться в диапазоне от 0 до 1.

Общим для всех математических моделей является то, что число уравнений, включаемых в математическое описание, должно быть равно числу переменных, находимых в результате моделирования.

Рассмотрим кратко основные классы уравнений, встречающиеся в математических описаниях химико-технологических объектов. Для характеристики свойств разных объектов моделирования обычно применяют: алгебраические и трансцендентные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и интегральные уравнения. Последний тип – интегральные уравнения – сравнительно редко встречается в задачах математического моделирования объектов химической технологии.

К алгебраическим уравнениям обычно сводится математическое описание стационарных режимов работы объектов с сосредоточенными параметрами (например, реактор полного смешения). Кроме того, уравнения этого типа применяют при описании более сложных объектов для выражения стационарных связей между разными параметрами. Математические описания в виде алгебраических уравнений наиболее просты, хотя сложность существенно зависит от числа уравнений и от вида входящих в них функций.

Обыкновенные дифференциальные уравнения обычно используют для математического описания нестационарных режимов объектов с сосредоточенными параметрами (например, для описания динамики реактора полного смешения), а также стационарных режимов объектов с распределенными параметрами по одной пространственной координате. В первом случае независимой переменной является время, а во втором – пространственная координата. Следует отметить общность и даже тождественность математических описаний, которая иногда свойственна математическим моделям различных объектов. Речь идет о нестационарных моделях периодически действующих аппаратов полного смешения и стационарных моделях аппаратов идеального вытеснения. В первом случае имеем (для реакции $A + B \xrightarrow{k} P$):

$$\frac{dC_A}{dt} + kC_A C_B = 0, \frac{dC_B}{dt} + kC_A C_B = 0, C_A = C_A^0, C_B = C_B^0 \text{ при } t = 0, \quad (4.5)$$

а во втором случае

$$v \frac{dC_A}{dx} + skC_A C_B = 0, v \frac{dC_B}{dx} + kC_A C_B = 0, C_A = C_A^{BX}, C_B = C_B^{BX} \text{ при } x = 0, \quad (4.6)$$

где s – поперечное сечение реактора; v – объемный расход; $C_A^0, C_B^0, C_A^{BX}, C_B^{BX}$ – соответственно начальные и входные концентрации веществ A и B .

Как видно, системы уравнений (4.5), (4.6) совпадают с точностью до коэффициентов. Тождественность математического описания при этом позволяет сделать заключение о тождественности оптимальных решений, хотя практическая реализация оптимальных условий в обоих случаях может существенно различаться.

Сложность решения обыкновенных дифференциальных уравнений определяется рядом обстоятельств. Во-первых, она возрастает с ростом порядка уравнения (или, что практически эквивалентно этому, с ростом числа дифференциальных уравнений в системе, поскольку уравнение m -го порядка всегда можно преобразовать в систему, состоящую из уравнений первого порядка).

На сложность решения еще существеннее влияет линейность или нелинейность уравнений. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения решаются гораздо проще; для них разработан ряд специальных методов, например операционное исчисление. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют простое аналитическое решение. Решение систем линейных дифференциальных уравнений – задача, к решению которой хорошо приспособлены аналоговые вычислительные машины.

Нелинейность резко усложняет решение, и, как правило, в этом случае требуется использование численных методов.

При решении систем дифференциальных уравнений часто приходится сталкиваться со свойством «жесткости» системы, заключающемся в значительном разбросе собственных значений матрицы системы, что не позволяет использовать обычные методы решения. В таких случаях необходимо применять специально разработанные алгоритмы.

Важной особенностью математического описания, содержащего обыкновенные дифференциальные уравнения, является необходимость задания начальных условий.

Дифференциальные уравнения в частных производных используют для математического описания динамики объектов с распределенными параметрами или стационарных режимов объектов с параметрами, распределенными по нескольким координатам. Для указанных уравнений при описании динамики объекта наряду с начальными условиями нужно также задавать граничные условия, в общем случае являющиеся функциями времени. Для стационарных режимов объектов, описываемых уравнениями в частных производных, задают только граничные условия. Задачи с уравнениями в частных производных, как правило, отличаются наибольшей сложностью, и в

большинстве случаев решение каждой конкретной задачи требует серьезной работы.

Примером объекта, описываемого этим классом уравнений, является аппарат идеального вытеснения, работающий в нестационарных условиях, в котором протекает реакция $A + B \xrightarrow{k} P$. В этом случае получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + v \frac{\partial C_A}{\partial x} k C_A C_B = 0, \quad \frac{\partial C_B}{\partial t} + v \frac{\partial C_B}{\partial x} k C_A C_B = 0, \quad (4.7)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$C_A = C_{Aн}(x), C_B = C_{Bн}(x) \text{ при } t = 0, \quad (4.8)$$

$$C_A = C_{AГР}(t), C_B = C_{BГР}(t) \text{ при } t = 0. \quad (4.9)$$

Здесь v – объемный расход; s – поперечное сечение.

Исследование объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, иногда представляет собой весьма трудную вычислительную задачу. Поэтому в ряде случаев вместо математического описания объекта дифференциальными уравнениями используют его описание системой конечно-разностных уравнений, для чего непрерывный объект с распределенными параметрами рассматривают как дискретный с сосредоточенными параметрами, но имеющий ячеечную структуру. Формально математически замена непрерывного объекта дискретным эквивалентна замене дифференциальных уравнений разностными соотношениями. При этом для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, математическое описание представляют в виде системы конечно-разностных уравнений. Для процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, результатом является система дифференциально-разностных уравнений, каждое из которых, в свою очередь, может быть представлено системой конечно-разностных уравнений. При подобных преобразованиях системы уравнений математического описания, естественно, возникает погрешность, которую необходимо учитывать при оценке результатов моделирования.

Вместе с тем существует ряд объектов, которые по своей природе обладают ячеечной структурой. Типичными примерами служат секционированные реакторы, тарельчатые колонны и т.д. Поэтому ячеечные модели являются не только удобной формой аппроксимации для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, но и имеют вполне определенное самостоятельное значение.

Общее математическое описание нестационарных объектов представляют в виде совокупности дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), отражающих изменение переменных процесса во времени. Каждую переменную можно охарактеризовать временем релаксации t_i , в течение которого переменная изменяется на определенную долю от полного диапазона ее изменения при постоянных значениях остальных переменных. Пусть при этом все переменные объекта можно разделить на две группы, для одной из которых $t_i \leq t^I$, а для другой $t_i \geq t^{II}$, и, кроме того, справедливо соотношение $t_i \ll t^{II}$, означающее, что время релаксации

переменных первой группы значительно меньше времени релаксации переменных второй группы. Тогда с некоторой степенью погрешности можно принять, что переменные первой группы, имеющие значительно меньшее время релаксации, безынерционны, и считать в уравнениях математического описания производные от указанных переменных по времени равными нулю. С помощью такого приема иногда удается весьма существенно упростить нестационарную математическую модель благодаря замене части дифференциальных уравнений конечными.

Математические модели, в которых нестационарные дифференциальные уравнения, описывающие изменения во времени переменных с малым временем релаксации, заменены стационарными уравнениями, можно назвать *квазинестационарными*. Нестационарные модели, используемые на практике, фактически обычно являются квазинестационарными, хотя при этом, строго говоря, необходимо обоснование квазистационарности ряда внутренних переменных.

С учетом сказанного математические модели можно классифицировать следующим образом:

по пространственным признакам – модели с сосредоточенными параметрами; ячеечные модели; модели с распределенными параметрами;

по временным признакам – стационарные модели; квазинестационарные модели; нестационарные модели.

Важнейшим требованием к математической модели является ее *адекватности* (правильного соответствия) изучаемому реальному объекту относительно выбранной системы его свойств. В требование адекватности входит и правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью. В соответствии с этим, говорят соответственно о *количественных* или *качественных* моделях. Вместо количественной адекватности говорят также о *точности модели*.

4.2. Выбор метода решения и реализация его в виде алгоритма решения и моделирующей программы

После составления математического описания и постановки в случае необходимости соответствующих начальных и граничных условий необходимо выбрать метод решения, разработать алгоритм и составить программу решения системы уравнений математического описания.

В простейших случаях, когда возможно аналитическое решение системы уравнений математического описания, необходимость специальной разработки моделирующего алгоритма и программы не возникает, так как вся информация получается из соответствующих аналитических решений. Когда же математическое описание представляет собой систему конечных и дифференциальных уравнений, от возможности построения эффективного алгоритма решения может существенно зависеть практическая применимость математической модели.

При выборе метода решения системы уравнений математического описания обычно руководствуются требованиями обеспечения максимальной скорости получения решения, надежной сходимостью алгоритма решения к истинному и минимальной памяти компьютера. При этом должна обеспечиваться заданная точность решения.

После выбора метода решения составляют последовательность вычислительных и логических действий, обеспечивающих решений, т.е. составляется алгоритм решения задачи. Основными требованиями к форме и содержанию записи алгоритма являются его наглядность, компактность и выразительность. В практике математического моделирования наибольшее распространение получили графический способ записи алгоритма (блок-схемы) и запись алгоритма в виде последовательности шагов.

Графический способ записи алгоритма основан на представлении отдельных элементов алгоритма графическими символами, а всего алгоритма – в виде блок-схемы. На блок-схемах внутри графических символов записывают словесно или символично производимые действия. Представление алгоритма в виде блок-схемы обладает перед остальными способами тем преимуществом, что оно более наглядно. В то же время если алгоритм очень сложный или громоздкий, то графическое изображение может быть чересчур запутанным и не обладать наглядностью. В этих случаях применяют простую запись алгоритма в виде последовательности шагов. Степень детализации алгоритма зависит от его сложности, от математического обеспечения компьютера и от степени использования стандартных алгоритмов. Если, например, в программе применяется библиотечная подпрограмма, то ее, очевидно, нет необходимости детализировать, а достаточно лишь указать ее параметры.

В качестве примера рассмотрим алгоритм расчета аппарата идеального вытеснения, в котором протекает реакция $B + A \xrightarrow{k} P$.

Математическое описание аппарата в стационарном режиме работы имеет следующий вид:

$$\frac{v}{s} \cdot \frac{dC_A}{dx} = -kC_A C_B, \quad (4.10)$$

$$\frac{v}{s} \cdot \frac{dC_B}{dx} = -kC_A C_B, \quad (4.11)$$

$$C_A = C_A^0, C_B = C_B^0 \text{ при } x = 0. \quad (4.12)$$

Будем считать, что реакция протекает в изотермических условиях. Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.10), (4.11) может быть решена с помощью метода Эйлера. Для этого приводим ее к виду

$$\frac{dC_A}{dx} = -\frac{s}{v} k C_A C_B = f_1(C_A, C_B), \quad \frac{dC_B}{dx} = -\frac{s}{v} k C_A C_B = f_2(C_A, C_B). \quad (4.13)$$

Согласно методу Эйлера, искомые концентрации C_A и C_B определяются по формулам

$$C_A = C_A^0 + \Delta x f_1(C_A, C_B), \quad (4.14)$$

$$C_B = C_B^0 + \Delta x f_2(C_A, C_B). \quad (4.15)$$

Графический алгоритм решения (блок-схема) системы уравнений (4.13) представлен на рис. 4.1.

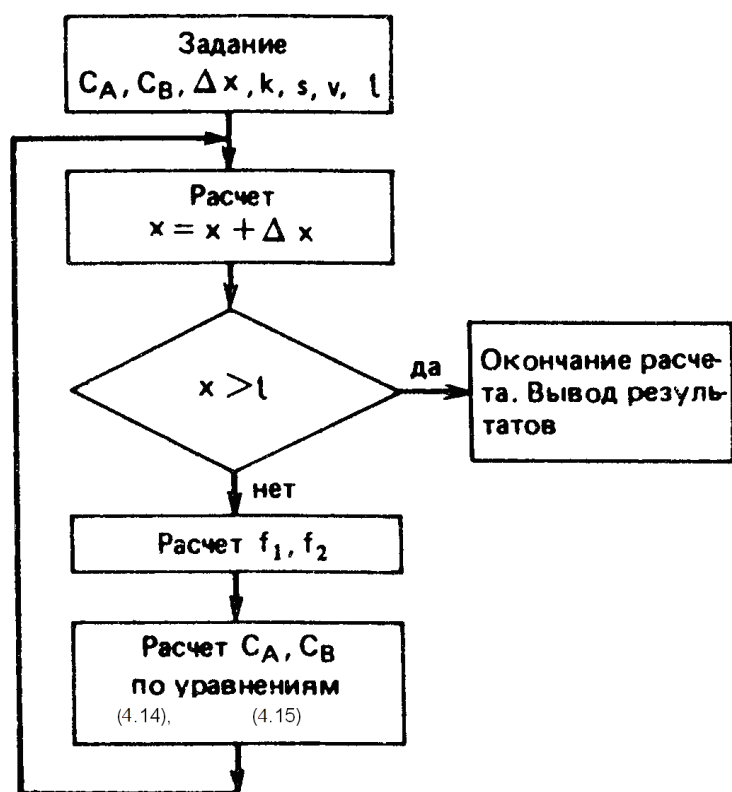


Рис. 4.1. Блок-схема алгоритма расчета реактора идеального вытеснения

Тот же алгоритм, выраженный в пошаговой форме, имеет следующий вид:

1. Задают $C_A^0, C_B^0, \Delta x, k, s, v, \ell$.
2. Находят $x = x + \Delta x$.
3. Проверяют условие на окончание интегрирования ($x > \ell$). Если оно выполнено, то выводят результаты и переходят к п. 7.
4. Рассчитывают правые части $f_1(C_A, C_B), f_2(C_A, C_B)$.
5. Определяют новые концентрации C_A и C_B .
6. Переходят к п. 2.
7. Оканчивают расчет.

Далее на основании алгоритма записывают программу на одном из языков высокого уровня. При записи программы необходимо стремиться к ее компактности, для чего широко используют процедуры и процедуры-функции, поскольку в данном случае повторяющиеся вычислительные действия будут записаны в программе один раз. При составлении Программы важно стремиться к минимизации требуемой памяти компьютера. Целесообразно записывать логически законченные части расчета в виде отдельных процедур (подпрограмм). В этом случае возможно их занесение в библиотеки и использование в различных расчетах. При составлении программы можно использовать стандартные подпрограммы, имеющиеся в библиотеках, так как

это может значительно упростить работу по разработке программы. В особенности это относится к математическим методам, которые широко представлены в пакетах прикладных программ.

Этап программирования обычно завершается составлением описания программы, в котором указываются все переменные и соответствующие идентификаторы, входные и выходные переменные, порядок ввода и вывода информации.

4.3. Блочный принцип построения математических моделей

При построении математических моделей широко используют блочный принцип, суть которого состоит в том, что модель строится из отдельных логически законченных блоков, отражающих обычно ту или иную сторону рассматриваемого процесса. Это может быть блок кинетики массо-передачи, блок гидродинамики, блок фазового равновесия и т. п. Блочный принцип построения моделей позволяет: а) разбить общую задачу построения математической модели на отдельные подзадачи и тем самым упростить ее решение; б) использовать разработанные блоки в других моделях; в) модернизировать и заменять отдельные блоки на новые, не касаясь при этом остальных.

Представление математической модели процесса в виде совокупности подсистем (блоков) позволяет представить общее математическое описание как совокупность математических описаний отдельных блоков. Тогда общая структура математической модели может иметь вид, изображенный на рис. 4.2.



Рис. 4.2. Представление математического описания процесса.

Применение блочного принципа построения математических моделей, который, в свою очередь, основан на системном подходе, позволяет во многих случаях также принципиально решить проблему масштабирования процессов. С точки зрения математического моделирования масштабный переход есть не что иное, как деформация математической модели при изменении

геометрических размеров, характеризующих аппаратное оформление процесса. При использовании блочного принципа построения математической модели влияние геометрических размеров на свойства процесса отражается лишь в одной подсистеме (блоке) – блоке «гидродинамика». Поэтому при наличии достаточно корректного в качественном и количественном отношении математического описания этого блока становится возможным осуществить масштабный переход.

Принципиально каждый блок математической модели может иметь различную степень детализации математического описания. Важно лишь, чтобы входные и выходные переменные всех блоков модели находились во взаимном соответствии, что обеспечит получение замкнутой системы уравнений математической модели процесса в целом. Что касается состава внутренних переменных блоков, то здесь существует достаточно большая свобода выбора. В идеале математическое описание каждого блока должно включать уравнения, параметрами которых являются только физико-химические свойства веществ. Однако получить такое фундаментальное описание отдельных блоков при недостаточной исследованности отдельных явлений во многих случаях в настоящее время не представляется возможным. Это связано, как правило, с чрезвычайным усложнением математического описания блока, что само по себе приводит к резкому усложнению математической модели процесса в целом и, кроме того, может вызвать определенные вычислительные трудности. Поэтому при практическом использовании блочного принципа в математическом описании каждого блока на том или ином уровне его детализации приходится применять эмпирические соотношения.

4.4. Роль математического моделирования в техническом прогрессе и в процессе познания

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все

новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми. Второе «рождение» этой методологии пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено по крайней мере двумя причинами. Первая из них – появление компьютеров, хотя и скромных по нынешним меркам, но тем не менее избавивших ученых от огромной по объему рутинной вычислительной работы. Вторая – беспрецедентный социальный заказ – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике. Этот успех во многом определил дальнейшие достижения методологии, без применения которой в развитых странах ни один крупномасштабный технологический, экологический или экономический проект теперь всерьез не рассматривается (сказанное справедливо и по отношению к некоторым социально-политическим проектам).

Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, «встраиваясь» в структуры так называемого информационного общества. Впечатляющий прогресс средств переработки, передачи и хранения информации отвечает мировым тенденциям к усложнению и взаимному проникновению различных сфер человеческой деятельности. Без владения информационными «ресурсами» нельзя и думать о решении все более укрупняющихся и все более разнообразных проблем, стоящих перед мировым сообществом. Однако информация как таковая зачастую мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки информационного «сырья» в готовый «продукт», т. е. в точное знание. История методологии математического моделирования убеждает: она может и должна быть интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

Технические, экологические, экономические и иные системы, изучаемые современной наукой, больше не поддаются исследованию (в нужной полноте и точности) обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому математическое (шире – информационное) моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

4.5. Содержательная модель исследуемой системы

Математика применяется не непосредственно к реальному объекту, а к математической модели.

Исходя из реального объекта, формулируем интересующие нас и иные связанные с ним его свойства на языке той или иной науки, другими словами, строим *механическую*, либо *физическую*, либо *биологическую*, либо *социальную* и т. п. *модель* объекта; такую модель называют *содержательной*. Очевидной, но важнейший этап построения или выбора математической модели – это получение по возможности более четкого представления о моделируемом объекте и уточнение его содержательной модели, основанное на неформальных обсуждениях. Нельзя жалеть времени и усилий на этот этап, от него в значительной мере зависит успех всего исследования. Не раз бывало, что значительный труд, затраченный на решение математической задачи, оказывался малоэффективным или даже потраченным впустую из-за недостаточного внимания к этой стороне дела.

Этот этап обычно заключается в уточнении структуры изучаемого объекта, существенных для проводимого исследования свойств его компонентов и характера их взаимодействия.

Рабочие гипотезы, постулаты модели. При построении содержательной модели формулируются и соответствующие *гипотезы* (говорят также – *постулаты модели*). Одним из методов существенного упрощения модели является выдвижение *рабочих гипотез*, относящихся к ожидаемым свойствам решения задачи и выдвигаемых в процессе ее исследования. Такие гипотезы могут относиться, например, к структуре искомой зависимости, и если они опираются на реальное истолкование математической задачи, разумные аналогии и другие рациональные доводы, опыт и здравый смысл, то могут оказаться решающими. С другой стороны, эти гипотезы могут порой открыть возможность для необоснованных выводов. Поэтому применение рабочих гипотез должно отчетливо осознаваться, а на мотивировку их включения и последующее обоснование надо обращать серьезное внимание.

Кроме того, включение модели в ту или иную науку дает возможность применять законы и иные утверждения, установленные в этой науке. Естественно, что при построении содержательной модели отвлекаемся от различного рода неидеальностей, неправильностей изучаемого реального объекта (конечно, если эти неидеальности не являются сами предметом исследования), переходим к его упрощенному, схематическому описанию.

На основе содержательной модели выписываем соответствующие уравнения или как-то иначе переводим ее на формальный математический язык и тем самым переходим к математической модели; в этом заключается первый этап – построение модели. Он существенно опирается на ненормальное обсуждение постановки задачи и необходимую квалификацию исследователя в рассматриваемой области.

Второй этап состоит в изучении математической модели, попросту говоря – решении полученной математической задачи. Выбираем метод этого решения и реализуем его; сюда входит и проведение всех необходимых вычислений, в том числе и на ЭВМ. Это изучение проводится в рамках математики, но

имеется и одна важная особенность. Все элементы математической модели (в частности, все участвующие величины) являются как бы метками соответствующих реальных элементов.

Третий этап – этап *интерпретации* (истолкования) в результате исследования математической модели. В него входит и контроль правильности (как говорят, *верификация* – от латинских слов *verus* «верус» – истинный и *facio* «фацио» – делаю; т.е. выяснения адекватности) модели на основе сравнения результата с другими известными фактами, в частности с экспериментальными данными, и т. д.

Описанные этапы тесно связаны между собой, и их расчленение является до некоторой степени искусственным. Математическая модель обычно строится с ориентацией на предполагаемый метод решения математической задачи.

Одним из методов существенного упрощения модели является выдвижение *рабочих гипотез*, относящихся к ожидаемым свойствам решения задачи и выдвигаемых в процессе ее исследования.

Немало важное место имеет *системотехника* (техника больших систем), научное направление, охватывающее проектирование, создание, испытание и эксплуатацию сложных систем.

Анализ исследуемой системы. Исследования свойств заданного объекта – это *задачи анализа*. При анализе протекающих в «неживой» природе процессов учет взаимосвязей между отдельными процессами обычно не вызывает серьезных затруднений. Другая ситуация имеет место при анализе социально-экономических явлений и процессов. Различные по своей внутренней природе процессы оказываются существенно взаимосвязанными уже на небольших характерных временах. Осознание этого обстоятельства привело к возникновению понятий *системный анализ*, *системный подход*.

«Система» – это совокупность реальных или абстрактных элементов, функционально связанных между собой. Системы могут быть физическими (реальные машины) или абстрактными (схемы, численные модели, чертежи и т. д.).

Системный подход основан на анализе и синтезе объекта проектирования с целью одновременного определения и выявления большого числа компонентов и факторов, а также их взаимосвязей, образующих данную систему. Инструментом системного подхода является системный анализ.

Системный анализ – это такой метод исследования, при котором каждое техническое решение следует рассматривать в тесной связи с другими решениями. Причем анализ производится поэлементно. Главная его задача – исследование специфических связей и установление их закономерностей.

Для системного анализа необходимо:

- параметрическое описание объекта проектирования;
- структурное описание исследуемого объекта;
- функциональное описание.

Системный анализ – это очень глубокий и широкий круг исследований и в зависимости от типа задачи и стадии проектирования решается различными

методами: логическими и математическими. С целью организации системного анализа целесообразно пользоваться определенной последовательностью решения вопросов.

Содержательные модели и их иерархия. Сложная система (каковой и являются полиграфические машины) имеет иерархическую структуру: элемент – подсистема – система. Соответственно и проектирование машины в целом имеет иерархический характер. Иерархический принцип проектирования определяется иерархией объектов проектирования. Машина состоит из нескольких подсистем. Все элементы системы находятся в строгих взаимосвязях.

4.6. Математическая модель, ее свойства и требования, предъявляемые к математическим моделям

Для рассматриваемой узкой проблемы *математическая модель* по форме представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих поведение объекта в окружающей среде с установленными краевыми и начальными условиями. Автоматизация управления реальными технологическими процессами с помощью вычислительных машин зависит во многом не столько от возможностей и надежности собственно машин, которые непрерывно возрастают, сколько от наличия разработанных, надежных с точки зрения реального производства моделей, позволяющих идентифицировать технологический процесс или в целом, или при доминировании одного или нескольких факторов. Трудность реализации многих математических моделей (динамических уравнений) связана с отсутствием соответствующих уравнений состояния, а при их наличии – с отсутствием необходимых значений физических констант для конкретных коэффициентов в таких уравнениях.

К математическим моделям предъявляют *требования* точности, экономичности и универсальности. *Точность математической модели* – свойство, отражающее степень совпадения предсказанных с помощью модели значений параметров объекта с истинными значениями этих параметров. *Экономичность математических моделей* оценивается прежде всего затратами машинного времени. Показателем экономичности математической модели может служить также число внутренних параметров, используемых в ней. Чем больше таких параметров, тем больше затраты оперативной памяти, тем больше усилий требуется для получения сведений о численных значениях параметров и их разбросе. Требования высокой точности, большой степени универсальности, с одной стороны, и высокой экономичности – с другой, противоречивы. Чем детальнее в модели отражаются различные закономерности процессов, тем точнее и универсальнее модель, но и тем больше требуемый объем вычислений и больше число используемых параметров.

Основные этапы технологии математического моделирования. Математическое моделирование означает, выполнение трех *основных этапов*:

- формулировку математической модели объекта, сопоставимой с имеющимися или прогнозируемыми экспериментальными данными, включая разработку методов построения такой модели при недостатке исходной информации:

- разработку методов решения соответствующей математической задачи и их реализацию в программах для компьютера;

- проведение в рамках принятой модели математического эксперимента (серия расчетов на компьютере), а также последующая обработка и анализ его результатов с обратной связью.

Формализация содержательной модели. Моделируемый процесс обычно записывается в форме определенных символов, поэтому о такой записи говорят как о *формализованной* модели. Среди формализованных моделей различают логические модели, т. е. построенные по законам формальной логики (моделирование схем), и математические (правильнее экономико-математические) модели (например, модели размещения, транспортная задача).

4.7. Последовательность разработки и машинной реализации моделей систем

Изучение реальных явлений математическими методами – одна из форм процесса познания, подчиняющаяся его общим закономерностям. Математическая модель некоторого реального процесса – это совокупность формализованных связей, отношений, зависимостей между характеристиками этого процесса.

Удобно все величины, которые участвуют в математической модели, делить на *внутренние* и *внешние*. Внутренние величины модели – это те величины, характеризующие процесс, которые подлежат определению в силу связей модели. Внешние величины модели – это такие величины, которые в рамках данной модели считаются известными. Модель является *замкнутой*, если участвующие в ней величины разбиты на внешние и внутренние так, что если все внешние величины заданы, то, пользуясь соотношениями модели, можно вычислить все внутренние величины.

Акт моделирования состоит как бы из двух этапов: первый этап заключается в выборе величин, характеризующих рассматриваемый процесс; второй этап: – в записи соотношений между ними. Конечно, оба эти этапа неразрывно связаны друг с другом и являются двумя неразделимыми сторонами единого процесса моделирования.

Алгоритмизация модели и ее машинная реализация. После составления математического описания и постановки в случае необходимости соответствующих начальных и граничных условий необходимо выбрать метод решения, разработать *алгоритм* и составить программу решения системы уравнений математического описания.

Получение, интерпретация и документирование результатов моделирования. Так, если какой-либо элемент изучаемого объекта является изделием массового производства и на интересующие нас свойства могут

заметно повлиять отклонения параметров от их номинальных значений, то эти параметры часто считают случайными величинами. Случайные функции появляются, например, при рассмотрении воздействия ветра на какие-либо сооружения, сигналов на фоне шума, шероховатых поверхностей, турбулентных движений жидкости и т. д.

Вероятностные модели изучаются с помощью методов теории вероятностей. К сожалению, довольно часто бывает, что вероятностные характеристики случайных компонентов (математические ожидания и дисперсии случайных величин, тем более законы распределения последних, а также аналогичные характеристики случайных функций) оказываются известными с весьма невысокой точностью или даже вовсе неизвестными, т.е. модель не удовлетворяет требованию продуктивности. Методы математической статистики направлены на определение таких характеристик, но и эти методы не всегда удается эффективно применить. Поэтому при построении вероятностных моделей надо уделять существенное внимание источнику таких характеристик. Если они не поддаются определению с необходимой точностью, то можно попытаться поискать другую модель, быть может более грубую, но и более устойчивую относительно пробелов в знании исходных данных. Например, иногда удается провести исследование и вычисления по максимальным отклонениям рассматриваемых параметров.

Приведем пример. Пусть x – решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} + a(t; \omega) = 0 \quad (0 \leq t < \infty), \quad x(0) = 1,$$

где a – случайная функция (переменная ω , как это принято в теории вероятностей, имеет смысл элементарного исхода). Тогда и $x = x(t; \omega)$ – случайная функция, характеристики которой существенно зависят от характеристик функции a . Но пусть не представляется возможным детально узнать характеристики функции a , известно только, что всегда $1 \leq a \leq 2$. Тогда, подставляя крайние возможные значения, мы получаем гарантированную оценку решения: $e^{-2t} \leq x \leq e^{-t}$; из нее, например, следует, что $x(t; \omega) \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $t < \infty$.

Получив решение математической задачи, нужно его проанализировать, разобраться в его реальном смысле, сделать выводы – это и есть *интерпретация* (истолкование) в результате исследования математической модели.

ГОСТ ЕСКД 2.103–68 регламентирует стадии разработки *документов* и определяет их содержание. Согласно ГОСТу проектные разработки осуществляются в последовательности: техническое задание (ТЗ); техническое предложение (ТП); эскизный проект (ЭП); технический проект (Техн.П); рабочая документация (РД).

Совокупность этих документов является *проектной документацией*, которая включает в себя графические и текстовые документы, определяющие состав и устройство проектируемого объекта, необходимые для его разработки или изготовления, контроля, приемки, эксплуатации и ремонта.

ТЗ – исходный документ для всех инженерных разработок. *ТЗ* разрабатывается на основе результатов научных исследований, научного прогнозирования в данной области и исходных требований заказчика.

ТП – разрабатывается в том случае, если это предусмотрено *ТЗ*. Его разрабатывают с целью выявления дополнительных или уточненных требований к объекту проектирования, которые не могли быть указаны в техническом задании, так как требовали предварительной конструкторской разработки и анализа различных вариантов решений. В *ТП* входят следующие документы: чертеж общего вида, ведомость технического предложения, пояснительная записка. Кроме того, в техническое предложение могут быть включены и конструкторские документы в соответствии с ГОСТом.

ЭП, ГОСТ 2.119–735, – совокупность конструкторских документов, которые должны содержать принципиальные конструктивные решения, дающие общее представление об устройстве и принципе работы изделия, а также данные, определяющие назначение, основные параметры и габариты разрабатываемого оборудования.

Техн. П – совокупность конструкторских документов, которые содержат окончательные технические решения, дающие полное представление об устройстве проектируемого оборудования и исходные данные для разработки рабочей документации (ГОСТ ЕСКД 2.120–73). Основное содержание работ и документов то же, что и при разработке *ЭП*, однако с большей глубиной проработки и оценки.

Технический проект является основанием для разработки рабочей документации опытного образца, установочных серий, установившегося серийного производства.

РД разрабатывается путем корректировки совокупность конструкторских документов по результатам изготовления и заводских испытаний, согласно общепринятой практике.

4.8. Моделирование систем и языки программирования

Моделирование является одним из методов проектирования процессов на основе теории систем. Модель – это упрощенное представление о реальном объекте, отражающее наиболее существенные его качества и взаимосвязи. Работа над моделью достаточно сложна. Сначала, базируясь на данных о моделируемом объекте (технологическом процессе), разрабатывают исходную модель, которую затем начинают улучшать, чтобы она точнее описывала объект. При этом пользуются известным из теории систем методом аналогий, и по моделям производят экспериментальные расчеты.

Предпосылкой качественного моделирования является анализ моделируемого процесса – системный анализ в кибернетическом смысле. Его цель состоит в определении объективных характеристик процесса. При этом должны быть изучены связи производства с внешним миром, т. е., иначе говоря, выполнен макроанализ. Одновременно исследуются внутрипроизводственные связи, т. е. организация производства (его структура)

и технологический процесс (функциональные связи). Это составляет предмет микроанализа. После проведения аналитических исследований начинают шаг за шагом формировать модель в такой последовательности: постановка задачи; выбор направления ее решения путем определения цели (критерия оптимальности) и ограничений, накладываемых на решение задачи; двухстадийная разработка модели; разработка алгоритма решения (последовательности расчетов); проведение расчетов по модели; проверка результатов моделирования на соответствие практическим данным; корректировка модели с целью ее уточнения.

Сравнительный анализ языков имитационного моделирования. С помощью имитационного моделирования можно оценить, насколько адекватна модель, понять, как течет процесс в том или ином варианте управлений, сформулировать рекомендации относительно «разумного» его управления, попытаться сформулировать критерий качества управлений и т. д. Машинная имитация становится все более важным инструментом системного анализа. Она получила широкое распространение в промышленности, и экономике, транспорте, задачах обслуживания.

Различные по своей внутренней природе процессы оказываются существенно взаимосвязанными на небольших характерных временах. Многие практические потребности приводят к рассмотрению социально-экономических процессов на достаточно больших характерных временах. Осознание этого обстоятельства привело к возникновению понятия системный анализ.

В любой науке всегда имеем дело с модельным, приближенным описанием реальности, лишь с определенной точностью отражающим те или иные ее черты. Эти модельные описания используют тот или иной язык. Если мы используем язык математики, то говорим о математических моделях. Замечательной особенностью этого языка является то, что он позволяет использовать для анализа модели, т. е. раскодирования той информации, которая в ней зашифрована, всю мощь современного математического аппарата.

Язык программирования, формальный язык для описания данных (информации) и алгоритма (программы) их обработки на ЦВМ (цифровая вычислительная машина). Примеры языка программирования: алгол, кобол, фортран, ПЛ-1 и др.

Примеры реализации языков моделирования. В качестве первого примера рассмотрим одну из самых простейших моделей роста численности населения. Предположим, что какие-либо практические надобности требуют предсказания изменения численности населения по годам в некотором регионе с населением порядка нескольких миллионов человек в течение времени порядка нескольких десятков лет. Нетрудно представить себе такие практические потребности. Например, при долгосрочном планировании развития народного хозяйства необходимо знать трудовые ресурсы данного региона, потребности его в продуктах питания и т. д. Прирост населения в год зависит от среднего количества детей в семьях и не может превысить несколько процентов в год.

В изучаемом процессе одним из факторов, который лимитирует характерный масштаб осреднения по времени, а значит, и естественную точность, с которой следует оперировать значениями численности, является имеющаяся измерительная техника. Практические потребности, породившие построение модели, возможности имеющейся измерительной техники, характерный параметр осреднения по времени, точность, с которой следует оперировать величинами модели, временной шаг модели – все эти обстоятельства взаимосвязаны и взаимообусловлены.

Пакеты программ моделирования. Если целевая функция является линейной, равно как и все уравнения и неравенства, связывающие ее аргументы, то мы имеем задачу *линейного программирования*. Имеются стандартные программы для компьютера, позволяющие решать такие задачи, даже если целевая функция имеет несколько сотен аргументов. Например, *симплекс-метод* – один из наиболее популярных способов решения задачи линейного программирования, формулировка которой включает целевую функцию, ограничения и условие неотрицательности переменных (для технико-экономических задач). Известны также алгоритмы решения задач *линейного целочисленного программирования*, т. е. задач, для которых аргументы целевой функции по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения. Для решения задач с дискретным временем применяется *метод динамического программирования*.

Литература: 2[12-23], 7. 11

Контрольные вопросы:

1. Составление математического описания объекта.
2. Выбор метода решения и реализация его в виде алгоритма решения и моделирующей программы.
3. Блочный принцип построения математических моделей.
4. Роль математического моделирования в техническом прогрессе и в процессе познания.
5. Содержательная модель исследуемой системы и ее иерархия.
6. Анализ исследуемой системы.
7. Рабочие гипотезы, постулаты модели.
8. Математическая модель, ее свойства и требования, предъявляемые к математическим моделям.
9. Основные этапы технологии математического моделирования.
10. Формализация содержательной модели.
11. Последовательность разработки и машинной реализации моделей систем.
12. Алгоритмизация модели и ее машинная реализация.
13. Получение, интерпретация и документирование результатов моделирования.
14. Моделирование систем и языки программирования.
15. Сравнительный анализ языков имитационного моделирования.
16. Примеры реализации языков моделирования.
17. Пакеты программ моделирования.

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ И УСТАНОВЛЕНИЕ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ

Идентификация математического описания объекта является основным этапом в построении адекватной математической модели процесса и поэтому представляет собой одну из центральных задач математического моделирования химико-технологических процессов. Как уже отмечалось, большинство таких процессов представляет собой многофазную многокомпонентную среду, распределенную в пространстве и во времени. Существенной особенностью этих процессов является их детерминированно-стохастическая природа, определяемая наложением стохастических особенностей гидродинамической обстановки в аппарате на процессы массо- и теплопереноса. Как следствие этого, параметры математических моделей отражают стохастические особенности протекания процесса и определяются статистическими методами.

В настоящее время наиболее разработана теория оценивания линейных по параметрам математических моделей. Однако большинство моделей химико-технологических процессов нелинейные по параметрам, что создает значительные трудности при решении задач их идентификации. Поэтому часто идентификацию нелинейных моделей проводят либо с помощью приближенных оценок, либо путем линеаризации исходной модели химико-технологического процесса. В настоящей главе будут рассмотрены методы идентификации как линейных, так и нелинейных математических моделей.

Так как наряду с оценкой неизвестных параметров задача идентификации подразумевает сравнение рассчитываемых по модели переменных состояния химико-технологического процесса с наблюдаемыми (экспериментальными) значениями, то в данной главе рассматриваются и методы установления соответствия (адекватности) модели реальному объекту.

5.1. Статистическое оценивание числовых характеристик случайных процессов

Рассмотрим следующую общую постановку задачи. Пусть в некотором случайном эксперименте наблюдается случайная величина X , функция распределения которой зависит от параметра θ . Значение параметра неизвестно и нуждается в определении. Для этого получают случайную выборку некоторого объема наблюдений над величиной $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, являющуюся источником информации относительно неизвестного параметра θ .

Последовательность наблюдений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить как n независимых случайных величин с одинаковой функцией плотности распределения $f(x, \theta)$. Тогда выборка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является случайной для n -мерной случайной величины с функцией плотности распределения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta), \quad (5.1)$$

называемой *функцией правдоподобия*.

Статистикой (выборочной характеристикой) называют функцию, зависящую только от результатов наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$Q = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что статистика представляет собой случайную величину с законом распределения, определяемым функцией правдоподобия, а следовательно, и законом распределения случайной величины.

Законы распределения выборочных характеристик. Прежде чем перейти к рассмотрению законов распределения выборочных характеристик, введем важное вспомогательное понятие.

Характеристической функцией $m_x(t)$ случайной величины X называют математическое ожидание случайной функции e^{itx} от аргумента t , т.е.

$$m_x(t) = Me^{itx}, \quad (5.3)$$

где t – произвольное действительное число.

Согласно определению характеристическая функция непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ есть

$$m_x(t) = \int_0^b e^{itx} f(x) dx, \quad (5.4)$$

где (a, b) – интервал изменения случайной величины X .

Например, *сплайн* – это кусочно-полиномиальная функция, в точках сопряжения кусков которой удовлетворяются условия непрерывности для нее самой и определенного числа производных.

Рассмотрим теперь точные распределения выборочных характеристик, т.е. законы распределения статистики $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ справедливые при любом n . Предположим, что имеется выборка объемом n из одномерной генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$, и требуется определить закон распределения статистики $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Эта задача сводится к отысканию закона распределения функции $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n независимых случайных величин X_1, X_2, X_n с одной и той же функцией распределения $F(x)$.

Теоретически доказано, что если заданы функции F и Q , то всегда существует единственное решение.

Однако при современном состоянии математической статистики приемлемое точное решение удастся получить лишь в сравнительно редких случаях. Лишь в частном случае, когда выборка берется из нормальной генеральной совокупности, получены достаточно полные результаты. Именно этот случай мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Если X_1, X_2, X_n – независимые, нормированные нормально распределенные случайные величины $N(0, 1)$, т.е. $MX_i = 0$ и $DX_i = 1$ для $i = 1, 2, \dots, k$, то случайная величина

$$U^2 = \sum_{i=1}^k X_i^2 \quad (5.5)$$

имеет распределение χ^2 с k степенями свободы, где k – единственный параметр распределения χ^2 , характеризующий число независимых слагаемых в выражении (5.5).

Плотность вероятностей распределения χ^2 имеет вид

$$f(u^2) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(\frac{k}{2})} (u^2)^{k/2-1} e^{-u^2/2}, \quad (5.6)$$

где $\Gamma(\frac{k}{2})$ – гамма-функция, определяемая равенством

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{для } z > 0. \quad (5.7)$$

Отметим, что математическое ожидание случайной величины U^2 равно числу степеней свободы k , а дисперсия – удвоенному числу степеней свободы, т.е.

$$MU^2 = k, DU^2 = 2k. \quad (5.8)$$

Рассмотрим статистики, имеющие χ^2 -распределение. С данным законом распределения тесно связано распределение выборочной дисперсии

$$S^2 = S^2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Если математическое ожидание нормально распределенной генеральной совокупности известно ($MX = \mu$), то выборочная дисперсия S_*^2 определяется выражением

$$S_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2. \quad (5.9)$$

Тогда статистика

$$\chi_*^2 = \frac{nS_*^2}{\sigma^2} \quad (5.10)$$

будет иметь χ^2 -распределение с n степенями свободы. Действительно, подставив (5.9) в (5.10), получим

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (5.11)$$

Из условия образования выборки следует, что $y_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ – независимые нормированные случайные величины $N(0, 1)$. Тогда согласно определению случайная величина χ_*^2 имеет распределение χ^2 с n степенями свободы, что и требовалось установить.

Если математическое ожидание случайной величины заранее неизвестно, то выборочная дисперсия S^2 определяется в виде

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (5.12)$$

где $\bar{x}$ – среднеарифметическое случайных величин x_i . В этом случае χ^2 -распределение с $n - 1$ степенями свободы будет иметь статистика

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}. \quad (5.13)$$

На практике среднеквадратическое отклонение σ случайной величины, как правило, неизвестно. В связи с этим возникает задача определения закона распределения среднего $\bar{x}$, не зависящего от σ , которую удалось решить английскому статистiku Стьюденту. Распределение Стьюдента находит очень

широкое применение в теории статистического оценивания параметров и в статистической проверке гипотез. Дадим его определение.

Если случайная величина Z имеет нормированное нормальное распределение $N(0, 1)$, а величина U^2 – распределение χ^2 с k степенями свободы, причем Z и U взаимно независимы, то говорят, что случайная величина

$$T = \frac{Z}{U} \sqrt{k} \quad (5.14)$$

имеет *распределение Стьюдента (t-распределение)* с k степенями свободы.

Плотность вероятностей случайной величины, имеющей распределение Стьюдента, выражается формулой

$$t_k(t) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{(\frac{t^2}{k} + 1)^{\frac{k+1}{2}}} \quad (5.15)$$

Рассмотрим пример статистики, имеющей распределение Стьюдента.

Пусть из генеральной совокупности X с нормальным законом распределения $N(\mu, \sigma)$ взята случайная выборка объемом n . Тогда статистика

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{S} \sqrt{n-1} \quad (6.16)$$

имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы.

Наряду с рассмотренными распределениями важную роль в дисперсионном анализе играет F -распределение. Это распределение отношения двух выборочных дисперсий было исследовано английским статистиком Р. Фишером. Дадим его определение.

Если U_1^2 и U_2^2 – независимые случайные величины, имеющие распределение χ^2 соответственно с k_1 и k_2 степенями свободы, то говорят, что случайная величина

$$F = \frac{U_1^2 / k_1}{U_2^2 / k_2} \quad (5.17)$$

имеет *распределение Фишера (F-распределение)* с k_1 и k_2 степенями свободы, причем $U_1^2 \geq U_2^2$.

Плотность вероятностей F -распределения с k_1 и k_2 степенями свободы определяется равенством

$$\varphi(f) = \frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})} \cdot \frac{f^{\frac{k_1}{2}-1}}{(f+1)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \quad (f > 0). \quad (5.18)$$

Это асимметричное распределение; график его плотности вероятностей изображен на рис. 5.1.

Существуют таблицы F -распределения, построенные так, что для различных значений вероятностей a и сочетаний величин k_1 и k_2 даются значения f_a , для которых справедливо равенство $P(F > f_a) = a$.

Рассмотрим выборочную дисперсию

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (5.19)$$

Покажем, что если $\hat{S}_1^2$ и $\hat{S}_2^2$ – выборочные дисперсии двух независимых выборок объемом n_1 и n_2 из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными среднеквадратическими отклонениями σ , то статистика

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \quad (5.20)$$

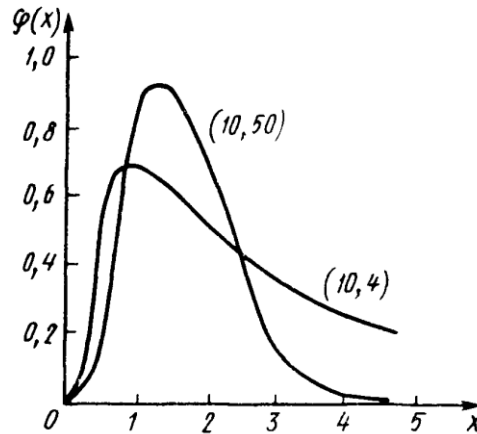


Рис. 5.1. Характерный вид плотности распределения Фишера (F -распределения) для чисел степеней свободы $k_1 = 10$, $k_2 = 50$ и $k_1 = 10$, $k_2 = 4$.

имеет распределение Фишера с $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ степенями свободы, где $\hat{S}_1^2 > \hat{S}_2^2$.

Согласно (5.13) выборочные характеристики $\chi_1^2 = \frac{(n_1-1)\hat{S}_1^2}{\sigma^2}$ и $\chi_2^2 = \frac{(n_2-1)\hat{S}_2^2}{\sigma^2}$

имеют распределение χ^2 соответственно с $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ степенями свободы. По условию выборки χ_1^2 и χ_2^2 независимы. Тогда согласно определению F -распределения статистика

$$F = \frac{\chi_1^2 / n_2 - 1}{\chi_2^2 / n_1 - 1} = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \quad (5.21)$$

имеет F -распределение с числом степеней свободы $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$.

Виды статистических оценок параметров. Предположим, что из генеральной совокупности X с законом распределения $F(x, \theta)$, функциональная форма которого известна, взята выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$, по результатам которой требуется оценить неизвестный параметр распределения θ (для простоты – единственный). Всегда существует бесконечное число функций от результатов наблюдений $\Theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые можно предложить в качестве оценки параметра θ . Возникает вопрос: какими свойствами должна обладать функция Θ_n^* , чтобы ее считать хорошей оценкой? Рассматривая $x_1, x_2, \dots, x_n$ как наблюдавшиеся значения системы одинаково распределенных независимых случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ с законом распределения $F(x, \theta)$ каждая, мы имеем случайную величину $\Theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, закон распределения которой зависит от параметра θ . Поэтому в качестве оценки следует рассматривать не отдельные ее значения, а распределение ее значений в большой серии

испытаний, т.е. закон распределения оценки. Чтобы значение $\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ было близко к θ , необходимо, очевидно, потребовать, чтобы рассеивание случайной величины θ_n^* относительно θ было по возможности меньшим. Таким образом, наилучшая оценка должна обладать наименьшей возможной дисперсией. Это основное требование к оценке.

Теория статистического оценивания рассматривает два основных вида оценок: точечные и интервальные.

Точечной оценкой называют некоторую функцию результатов наблюдения $\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которой в данных условиях принимается за наибольшее приближение к значению параметра θ генеральной совокупности.

Однако при выборке небольшого объема точечная оценка θ_n^* может существенно отличаться от истинного значения параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. Поэтому в случае малой выборки часто используют интервальные оценки.

Интервальной оценкой называют числовой интервал (θ_1^*, θ_2^*) , определяемый по результатам выборки, относительно которого можно утверждать с определенной, близкой к единице, вероятностью, что он содержит значение оцениваемого параметра генеральной совокупности.

5.2. Параметрическая идентификация моделей

Применение методов наименьших квадратов и максимального правдоподобия для нахождения точечных оценок параметров. Построенные с помощью экспериментального либо экспериментально-аналитического метода математические модели содержат неизвестные константы (параметры), значения которых определяются по экспериментальным данным. Если используемые модели линейны относительно искомых параметров, то задача их оценки сравнительно легко решается методами линейного регрессионного анализа и, в частности, методом наименьших квадратов.

Оценка неизвестных параметров в методе наименьших квадратов производится с помощью минимизации суммы квадратов рассогласований. Такой подход во многих важных ситуациях приводит к оценкам, обладающим важными свойствами оптимальности.

Между случайными величинами обычно существует такая связь, при которой с изменением одной величины меняется распределение другой. Такая связь называется *стохастической*.

Рассмотрим *однооткликовые модели*, т.е. модели с одной выходной переменной. При оценке неизвестных параметров моделей очень часто используется *метод максимального правдоподобия*, предложенный Р. Фишером и являющийся основой многих процедур проверки гипотез и доверительного интервального оценивания для больших выборок.

Суть метода, максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве оценок, параметров $\Theta_n = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ берут такие значения $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$, при

которых f_n достигает наибольшего возможного значения. Так как $\ln f_n$ достигает максимума при тех же значениях $\hat{\theta}$, что и сама f_n , то на практике часто удобнее использовать функцию $\ln f_n = L$, которую можно называть логарифмической функцией правдоподобия. Значения $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_p$ являются функциями выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ и называются *оценками максимального правдоподобия*.

Для *многооткликковых моделей*, т.е. моделей с несколькими выходными переменными, функция правдоподобия выборки $L^{(j)}(\vec{\theta}_j^*, \vec{\Psi})$ при независимых нормально распределенных ошибках наблюдений имеет свой аналитический вид.

Интервальные оценки параметров. Говорим о точечных оценках искомых параметров моделей, полученных методом максимального правдоподобия. Последние, хотя и обладают некоторыми оптимальными асимптотическими свойствами, но не обеспечивают важную дополнительную информацию о точности определяемых оценок и о мере нелинейности модели особенно в малых выборках. Такую информацию содержат характеристики доверительных областей. *Асимптота* кривой с бесконечной ветвью, прямая, к которой эта ветвь неограниченно приближается.

Доверительный интервал (доверительная область) для некоторого параметра (совокупности параметров) функции распределения есть интервал (область) в параметрическом пространстве, определяемый достаточной статистикой выборки измеренных величин и обладающий тем свойством, что вероятность того, что он содержит «истинное» значение параметра, равна по крайней мере наперед заданному значению α . Величину α называют доверительным уровнем.

5.3. Проверка адекватности моделей

Критерии адекватности моделей. Математическая модель объекта является лишь его определенным в рамках принятых допущений аналогом. Поэтому значения переменных, получаемые на модели и объекте, различаются. Здесь возникает задача установления близости модели реальному объекту (установления адекватности модели). Прежде чем приступить к проверке и установлению адекватности, необходимо выработать критерий, который позволил бы сделать заключение о соответствии модели и объекта. Они базируются в основном на методах дисперсионного анализа и анализа остатков.

Дисперсионный анализ моделей используется для сравнения величин остатков $e_u^{(j)}(\vec{\theta}_j) = y_u^{(j)} - f^{(j)}(\vec{x}_u, \vec{\theta}_j)$ с величинами ϵ_u , характеризующими ошибку измерений. Используя такое сравнение, исследователь способен установить как общую адекватность модели, так и способы ее дальнейшего упрощения с помощью выбрасывания из модели незначимых членов. Для этого вычисляют величины сумм квадратов

$$SS(1) = \sum_{u=1}^n y_u^2 \quad \text{и} \quad SS(2) = \sum_{u=1}^n \eta_u^{(y)^2} = \sum_{u=1}^n f_u^{(j)^2}, \quad (5.22)$$

характеризующие соответственно разброс экспериментальных данных и разброс рассчитанных по модели значений отклика. Разности $e_u^{(j)} = y_u - f_u^{(j)}$, называемые *остатками*, представляют собой меру неспособности модели точно описать экспериментальные данные. Очевидно, что если испытываемая модель истинна, то остатки фактически есть оценки экспериментальной ошибки измерений. Поэтому общая мера несоответствия модели результатам эксперимента $SS(3)$ представляется в виде

$$SS(3) = \sum_{u=1}^n (y_u - f_u^{(j)})^2. \quad (5.23)$$

В статистике величина $SS(1)$ называется *общей суммой квадратов*; $SS(2)$ – *суммой квадратов, обусловленной регрессией*, и $SS(3)$ – *остаточной суммой квадратов*.

Оценка адекватности однооткликowych моделей с помощью критерия Фишера. В случае однооткликowych моделей адекватность может быть проверена с помощью критерия Фишера (F -критерия). Для этого находят отношение

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{воспр}^2}, \quad (5.24)$$

где $S_{ад}^2$, $S_{воспр}^2$ – соответственно дисперсия адекватности и дисперсия воспроизводимости, определяемые как

$$S_{ад}^2 = \frac{SS(5)}{f_{ад}} = \frac{SS(3) - SS(4)}{f_{ад}}, \quad (5.25)$$

$$S_{воспр}^2 = \frac{SS(4)}{f_{воспр}}. \quad (5.26)$$

Число степеней свободы дисперсии адекватности составляет

$$f_{ад} = n - p_j, \quad (5.27)$$

если дисперсия воспроизводимости определялась в отдельной серии опытов (p_j – число устанавливаемых параметров j -й модели), и

$$f_{ад} = n - p_j - q(\tilde{n} - 1), \quad (5.28)$$

если в каждом из q различных условий проведения эксперимента проводилось $\tilde{n}$ повторных опытов.

Число степеней свободы дисперсии воспроизводимости в случае проведения отдельной серии из $\tilde{n}$ повторных экспериментов есть

$$f_{воспр} = \tilde{n} - 1, \quad (5.29)$$

а в случае, когда в каждом из q различных условий эксперимента выполняется $\tilde{n}$ опытов, оно равно

$$f_{воспр} = q(\tilde{n} - 1). \quad (5.30)$$

Оценка модели относительно среднего значения. При отсутствии параллельных опытов и дисперсии воспроизводимости качество модели можно оценить, сравнив $S_{ад}^2$ и дисперсию относительно среднего

$$S_{cp}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}, \text{ где } \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (5.31)$$

Для этого используют критерий Фишера и составляют отношение

$$F = \frac{S_{cp}^2(f_1)}{S_{ad}^2(f_2)}, \quad (5.32)$$

которое показывает, во сколько раз уменьшается рассеяние относительно результата, полученного по модели, по сравнению с рассеянием относительно среднего значения наблюдаемой переменной y .

Проверка гипотезы о законе распределения с помощью χ^2 -критерия и ω^2 -критерия. Если имеется выборочный закон распределения какой-либо величины (получаемый из эксперимента) и закон распределения генеральной совокупности (определяемый моделью), то адекватность модели эксперименту можно установить путем проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения. Проверка осуществляется с помощью критериев согласия, определяющих вероятность того, что при гипотетическом законе распределения наблюдающиеся в рассматриваемой выборке отклонения вызываются случайными причинами, а не ошибкой в гипотезе. Если эта вероятность велика, то отклонение от гипотетического закона распределения следует признать случайным и считать, что гипотеза о предполагаемом законе распределения» определяемой моделью, не опровергается. Часто в качестве критерия проверки статистических гипотез используется критерий Пирсона (χ^2 -критерий).

Анализ значимости отдельных составляющих модели.

При анализе нормальности распределения строят гистограммы распределения нормированных частот появления остатков в зависимости от их числовых значений. *Гистограмма* (столбчатая диаграмма), один из видов графического изображения статистических распределений какой-либо величины по количественному признаку; представляет собой совокупность смежных прямоугольников, построенных на одной прямой.

Анализ отсутствия в остатках неслучайных составляющих производят с помощью построения и изучения графической зависимости остатков от предсказанных значений откликов, что дает возможность установить соответствие модели экспериментальным данным.

Анализ графической зависимости остатков от рассчитанных по модели значений откликов позволяет также получить дополнительную информацию о соблюдении ряда исходных статистических посылок относительно характеристики ошибок измерений и, в частности, относительно соблюдения условия постоянства дисперсии воспроизводимости в выбранной области экспериментирования.

Установление адекватности многооткликowych моделей. Процедура установления адекватности многооткликowych моделей значительно сложнее и требует использования значительной по объему экспериментальной информации, так как здесь в противоположность однооткликowому случаю

требуется проверить гипотезу не о равенстве двух дисперсий, а о равенстве двух ковариационных матриц Σ_1 и Σ .

Литература: 2[23–57]

Контрольные вопросы:

1. Статистическое оценивание числовых характеристик случайных процессов.
2. Законы распределения выборочных характеристик.
3. Параметрическая идентификация моделей.
4. Интервальные оценки параметров.
5. Проверка и критерии адекватности моделей.
6. Оценка модели относительно среднего значения.
7. Проверка гипотезы о законе распределения с помощью χ^2 -критерия и ω^2 -критерия.
8. Анализ значимости отдельных составляющих модели. Установление адекватности многооткликовых моделей.

6. ЭЛЕМЕНТЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МОДЕЛИ ПРОСТЕЙШИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Пуанкаре поставил (в конце XIX-века) задачу качественного исследования в общем виде для простейшего случая системы двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (6.1)$$

Качественная теория динамических систем второго порядка, т. е. систем двух автономных дифференциальных уравнений (6.1), рассматриваемых на плоскости (x, y) . Случай динамических систем второго порядка естественно представляется первым и наиболее простым и его изучение необходимо как само АО себе, так и для перехода к более сложным случаям трех, четырех и т. д. автономных дифференциальных уравнений. Кроме того, системы вида (6.1) сохраняют самостоятельный интерес для приложений, так как многие явления и задачи в различных областях физики и техники могут быть при разумной идеализации описаны системами такого вида.

Для систем трех и большего числа автономных дифференциальных уравнений картина делается неизмеримо более сложной. Качественная теория таких динамических систем до настоящего времени располагает еще довольно скудным запасом сведений, хотя и развивается интенсивно в течение последнего тридцатилетия.

Задача качественного исследования может быть естественным образом поставлена не только для автономных динамических систем, но и для широких классов неавтономных динамических систем. Хотя в случае неавтономных систем эта задача имеет свою специфику, но она органически связана по своему содержанию и методам (методу точечных отображений) с задачей качественного исследования автономных динамических систем и, в частности, качественной теорией динамических систем второго порядка.

6.1. Качественная (топологическая) структура траекторий системы в пространстве состояний

Топологическим отображением плоскости в себя (или некоторого множества плоскости в другое или в то же множество плоскости) называется взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение. *Топологическим (качественным) свойством* разбиения области на траектории или *множества траекторий* или также *топологическим инвариантом* разбиения на траектории называется свойство или величина, остающиеся инвариантными при всевозможных отождествляющих отображениях. Свойство траектории, являющейся состоянием равновесия, «быть состоянием равновесия» или свойство замкнутой траектории «быть замкнутой», являются *топологическими свойствами*. Топологическими свойствами являются, например, также при наличии замкнутых траекторий их взаимное расположение, наличие (или

отсутствие) кольцевых областей, сплошь заполненных замкнутыми траекториями, наличие определенного числа состояний равновесия типа фокус и узел и др.

Качественное исследование динамической системы состоит в установлении ее топологических свойств и топологических инвариантов (например, числа и характера состояний равновесия, числа и взаимного расположения предельных циклов и т. д.).

Полным качественным исследованием динамической системы является установление топологической структуры разбиения на траектории (понятие схема разбиения на траектории в другой терминологии – схема динамической системы), определенного этой системой.

Автономная динамическая система на плоскости. Рассматриваем системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (6.2)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывные функции, определенные в некоторой области G евклидовой плоскости (x, y – декартовы координаты) и имеющие в этой области непрерывные частные производные до порядка не ниже первого. Область может быть как ограниченной, так и неограниченной. В частности, область G может совпадать со всей плоскостью (x, y) .

Системы вида (6.2) являются частным случаем систем дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями: независимое переменное t в их правые части явно не входит. Системы дифференциальных уравнений, правые части которых не содержат явно независимое переменное, называются *автономными*. Автономные системы дифференциальных уравнений называются также *динамическими системами*.

Систему (7.2) будем называть *динамической системой на плоскости* или *в плоской области*. Будем также говорить, что *динамическая система задана* или *определена в области G* .

Качественная структура окрестности состояния равновесия. Особая точка векторного поля сама является отдельной траекторией. Такая траектория называется *состоянием равновесия* (в другой терминологии «положением равновесия» или «точкой покоя»). Область, обладающую свойствами, называем *областью (или окрестностью) локальной топологической структуры*. Если в точке, являющейся состоянием равновесия, существует локальная топологическая структура, будем называть ее *топологической структурой состояния равновесия*.

Предельные траектории, устойчивые и неустойчивые циклы.

Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \Psi(t) \quad (6.3)$$

– какое-нибудь решение системы (6.1). Множество точек $M(\varphi(t), \Psi(t))$, где t принимает все значения, при которых определено решение (6.3), называется *траекторией*, соответствующей данному решению, а также траекторией векторного поля, заданного динамической системой (6.1), или просто

траекторией данной динамической системой (а также иногда фазовой траекторией).

Уравнения (6.3), очевидно, являются параметрическими уравнениями траектории. Обратно, если дана какая-нибудь траектория, то решение, которому она соответствует, будем называть *решением, соответствующим данной траектории*.

Изолированная замкнутая траектория, т. е. такая замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой, кроме нее самой, нет больше других замкнутых траекторий, называется *предельным циклом*.

Если все траектории, проходящие через точки некоторой окрестности предельного цикла L_0 вне и внутри L_0 и отличные от L_0 при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), стремятся к предельному циклу, то L_0 называется *устойчивым* (соответственно *неустойчивым*) *предельным циклом*.

Если все траектории, проходящие через достаточно близкие от предельного цикла L_0 точки, лежащие вне (внутри) L_0 , стремятся к L_0 при $t \rightarrow +\infty$, а лежащие внутри (вне) (при $t \rightarrow -\infty$), то L_0 называется *полуустойчивым предельным циклом*.

Часто, в особенности в прикладных задачах, «неустойчивым» называется всякий цикл, не являющийся устойчивым, т. е. как неустойчивый в приведенном в тексте смысле, так и полуустойчивый.

6.2. Бифуркации. Понятие грубой системы

Существуют принципиально нелинейные объекты (в том числе явления), для которых применение линейных моделей приводят к *грубым* искажениям картины. Это прежде всего системы, для которых изменение масштаба воздействия приводит к качественному изменению результата. Типичным примером могут служить механические системы с сухим трением, для которых малая сила не порождает движения, а большая – порождает; вообще, наличие любых барьеров подобного рода – это типичный нелинейный эффект. Существенно линейной является также задача об изучении околосостояния объекта, зависящего от параметров, когда при их изменении устойчивость сменяется неустойчивостью или один тип движения – другим и т. п. Во всех таких случаях надо применять методы нелинейного анализа, которые можно найти в специальной литературе.

Качественное изменение свойств объекта при переходе параметра через некоторое значение называется *бифуркацией* этого объекта.

Если математическая модель грубая, имеет низкую адекватность или есть точность исходных данных неудовлетворительна, то никакое повышение точности решения, привлечение сложных математических методов и вычислительных средств не могут сделать окончательный результат достаточно надежным.

Топологическая инвариантность фазовых портретов. Фазовый портрет – совокупность всех траекторий на фазовой поверхности. *Траектория*, линия, которую описывает частица в процессе движения. Имеются три основных вида

фазовых траекторий: точки покоя, циклы и непериодические траектории. *Точке покоя* отвечает состояние равновесие рассматриваемой реальной системы. *Цикл* (говорят также – периодическая траектория, замкнутая траектория) отвечает непостоянному периодическому решению системы, он описывает периодический процесс в реальной системе. *Непериодические траектории* – все остальные. Сохраняющий траекторию фазовый портрет является топологическим инвариантом отображений. Справедливость этого утверждения обуславливается тем, что при таких отображениях состояние равновесия переходит в состояние равновесия, а его сектор – в одноименный сектор.

Примеры. Уравнению свободных колебаний маятника без затухания после перехода к безразмерному времени можно придать вид (смотрите

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{ml^2} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{a}{l} \omega^2 \sin \varphi \cos \omega t \quad (6.4)$$

здесь k – коэффициент трения в шарнире; m – масса; l – длина; φ – угол отклонения маятника от вертикали; t – время; ω – переменная, имеет смысл элементарного исхода; a – случайная величина; g – ускорения земного тяготения)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin \varphi = 0.$$

Чтобы перейти к системе уравнений вида (7.4), обозначим $d\varphi/dt$ буквой ψ ; тогда получим систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\sin \varphi. \quad (6.5)$$

Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 6.1, *a*. Он периодичен по φ с периодом 2π , так что достаточно ограничиться картиной между двумя штриховыми линиями, считая эти линии отождествленными, т.е. как бы свернув эту полосу в трубку. Другими словами, фазовым многообразием здесь служит не плоскость, а цилиндрическая поверхность. На

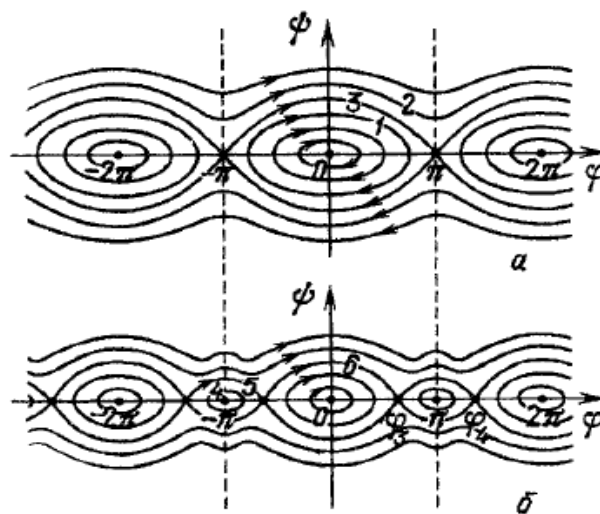


Рис. 6.1

этой поверхности система имеет две точки покоя: $(0, 0)$, отвечающую нижнему положению, и $(\pi, 0)$, отвечающую верхнему положению маятника. Траектории

типа 1 – циклы, отвечающие либрационным движениям (т. е. покачиваниям) маятника относительно нижнего, устойчивого положения равновесия. Траектории типа 2 непериодические (если рассматривать их на полной плоскости), им отвечают ротационные движения маятника, т.е. его вращения вокруг точки подвеса с неограниченным возрастанием фазового угла φ .

Любопытна траектория, обозначенная цифрой 3: соответствующий режим отделяет либрационные движения от ротационных и состоит в асимптотическом стремлении маятника к верхнему положению равновесия $t \rightarrow \pm\infty$. Такой режим, очевидно, неустойчив.

В качестве второго примера рассмотрим осредненное уравнение свободных колебаний маятника без затухания с часто колеблющейся точкой подвеса. После перехода к системе уравнений первого порядка и введения безразмерного времени этой системе можно придать вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Psi, \quad \frac{d\Psi}{dt} = -(1 + k \cos \varphi) \sin \varphi, \quad (6.6)$$

где $k = a^2 \omega^2 / (2lg) = \text{const} > 0$. Пока $k < 1$, фазовый портрет этой системы примерно такой же, как у (6.5). Но когда k , возрастая, переходит через значение $k = 1$ (смотрите условие $\frac{a^2 \omega^2}{2l^2} > \frac{g}{l}$, т. е. $\omega > \frac{\sqrt{2lg}}{a}$, (6.7)), бывшая неустойчивая

точка покоя $(\pi, 0)$ становится устойчивой и от нее отделяются две вновь появившиеся неустойчивые точки покоя $(\varphi_3, 0)$ и $(\varphi_4, 0)$. Соответствующий фазовый портрет показан на рисунке 6.1, б. Мы видим, что появились траектории типа 4, которым отвечают либрационные движения маятника относительно его верхнего положения. Траектория типа 3 исчезла, взамен нее появились траектории, обозначенные цифрами 5 и 6, им соответствует асимптотический переход маятника из одного неустойчивого положения в другое.

Обсудим происхождение нелинейности и рассмотрим некоторые ее последствия, проявляющиеся в поведении изучаемых объектов. Проиллюстрируем неизбежность применения численных методов для их анализа.

6.3. О происхождении нелинейности

Линейные модели подчиняются принципу суперпозиции. В этом случае, находя частные решения и суммируя их, как правило, удастся построить и общее решение.

Для нелинейных моделей принцип суперпозиции неприменим, и общее решение можно найти лишь в редких случаях. Отдельные же частные решения нелинейных уравнений могут не отражать характер поведения объекта в более общей ситуации.

Источниками нелинейности могут быть многие причины. Фундаментальные законы природы – закон тяготения и закон Кулона – изначально нелинейны (квадратичная зависимость силы взаимодействия между

массами или зарядами), и потому основанные на них модели, вообще говоря, также нелинейны. Свой вклад в нелинейность моделей вносят более сложная геометрия явления, различные внешние воздействия и, конечно же, изменение характера взаимодействия в самом объекте при изменении его состояния (эффект насыщения в моделях популяций, меняющаяся жесткость пружины).

В сущности, реальным явлениям отвечают только нелинейные модели, а линейные справедливы лишь при описании незначительных изменений величин, характеризующих объект.

6.4. Три режима в нелинейной модели популяции.

В отличие от модели Мальтуса и модели коэффициент рождаемости будем считать зависящим от численности популяции $N(t)$, т. е. $\alpha = \alpha(N)$. Коэффициент смертности β также зависит от N . Уравнение динамики популяции

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N))N \quad (6.7)$$

нелинейно благодаря изменению характеристик взаимодействия внутри популяции при изменении ее состояния.

Положим для определенности $\beta(N) = \beta_0 = \text{const}$, $\alpha(N) = \alpha_0 N$, т. е. рождаемость пропорциональна численности (например, потому что члены популяции заинтересованы в ее росте). Тогда уравнение (6.7) преобразуется к виду

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \quad (6.8)$$

с квадратичной нелинейностью (характерной также для некоторых химических реакций). Рассмотрим поведение функции $N(t)$ при различных начальных численностях $N(0) = N_0$ (рис. 6.2).

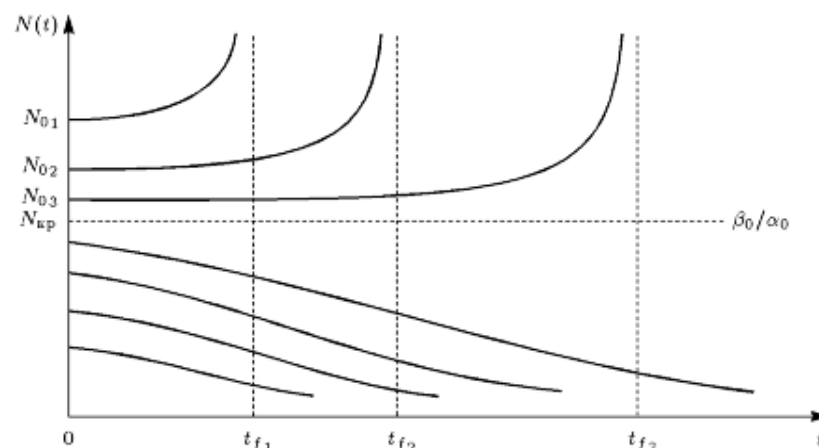


Рис. 6.2

а) При $N_0 < N_{кр} = \beta_0 / \alpha_0$ численность монотонно уменьшается со временем, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$. Решение дается формулой, где t заменяется на $-t$ (обратная логистическая кривая;).

б) При критическом значении $N_0 = N_{кр}$ численность популяции не зависит от времени.

в) При $N_0 > N_{кр}$ характер решения принципиально изменяется по сравнению со случаями а) и б): численность растет со временем, причем настолько быстро, что обращается в бесконечность за конечное время $t = t_f$. Величина t_f тем меньше, чем больше N_0 .

Нелинейность уравнения (6.8) порождает большое разнообразие эффектов, содержащихся даже в простейшей модели: три возможных режима изменения численности со временем; неустойчивость режима б) – при малых отклонениях в область а) или в) решение удаляется от линии $N_{кр} = \beta_0/\alpha_0$; сильную чувствительность функции $N(t)$ к начальным данным N_0 ; наконец, катастрофический рост численности популяции за конечное время при $N_0 > N_{кр}$.

Заметим, что последнее свойство не частный результат, а имеет место для любых моделей вида

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \quad t > 0, \quad N(0) > 0, \quad F(N) > 0,$$

если при больших N функция $F(N)$ растет быстрее первой степени N , точнее, если для $F(N)$ справедлив критерий

$$\int_{N(0)}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty,$$

получающийся непосредственным интегрированием уравнения.

6.5. Влияние сильной нелинейности на процесс колебаний

Уравнение колебаний

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r, \quad (6.9)$$

где функция $k(r) > 0$ описывает жесткость пружины, – одно из относительно немногих нелинейных уравнений, для которого можно выписать общее решение. Вводя величину скорости $v = dr/dt$, перепишем (6.3) в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -k(r)r, \quad \frac{dr}{dt} = v;$$

деля первое из этих уравнений на второе, получим нелинейное уравнение первого порядка

$$m \frac{dv}{dr} = -\frac{k(r)r}{v}. \quad (6.10)$$

Разделяя в (6.4) переменные:

$$m v dv = -k(r)r dr,$$

и дважды интегрируя последнее уравнение, находим

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -2 \int k'(r') r' dr' + C, \quad k'(r) = \frac{k(r)}{m},$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{C - 2 \int k'(r') dr'}, \quad t = \pm \int_0^r dr \left(\sqrt{C - 2 \int k'(r') r' dr'} \right)^{-1} + C_1, \quad (6.11)$$

где в неявно выписанном общем решении (6.11) константы C , C_1 можно определить, зная начальные данные.

В линейном случае ($k(r) = k_0$) интегральные кривые уравнения (6.10) представляют собой концентрические круги с центром в начале координат, радиус которых определяется начальной энергией системы и «движение» по которым описывает периодический во времени процесс колебаний (рис. 6.3).

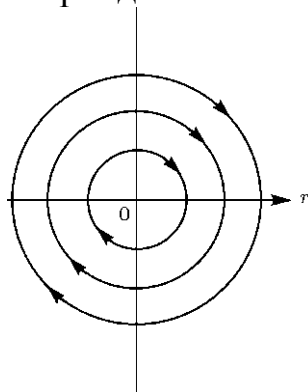


Рис. 6.3

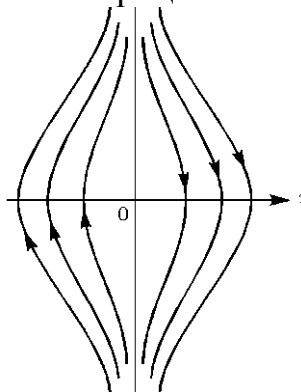


Рис. 6.4

Рассмотрим теперь сильно нелинейную систему, в которой пружина ведет себя как «сверхмягкая», например, $k(r) = 1/(r^2 + \alpha)$, $\alpha > 0$. В предельном случае $\alpha = 0$ уравнение (6.4) принимает вид

$$m \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{vr},$$

и его решение принципиально отличается от решения (6.10) (см. рис. 6.4) тем, что энергия не сохраняется и, более того, неограниченно растет при $r \rightarrow \pm 0$. При ослаблении нелинейности процесс колебаний приобретает обычный характер. *Осциллятор* (от латинского *oscillo* – качаюсь), колеблющаяся система.

6.6. О численных методах

Рассмотренные здесь примеры достаточно убедительно свидетельствуют о неизбежности применения численных методов для моделирования нелинейных объектов из-за явной недостаточности чисто теоретических подходов и сложного, разнообразного поведения характеризующих эти объекты величин. Впрочем, этот вывод справедлив и для линейных моделей, содержащих большое число неизвестных величин, независимых переменных, параметров и имеющих сложную пространственную структуру. Для построения соответствующих численных моделей широко используются методы, подходы и приемы, разрабатываемые при создании исходных моделей, и возникают свои специфические проблемы, требующие глубокого изучения.

Поясним последнее утверждение простым примером. Для уравнения

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N = \gamma N, \quad t > 0, \quad N(0) = N_0,$$

где для определенности $(\alpha - \beta) > 0$, вполне логично предложить следующую численную схему (разбив ось t на равные отрезки величины $r = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$; $t_0 = 0$ и заменив производную на конечную разность):

$$\frac{N_{i+1} - N_i}{\tau} = \gamma N_i, \quad i = 0, 1, \dots; \quad N(t_0) = N_0. \quad (6.12)$$

Из (6.6) получаем

$$N_{i+1} = (\tau\gamma + 1)N_i,$$

что дает для его решения

$$N_i = (1 + \tau\gamma)N_0, \quad N_2 = (1 + \tau\gamma)^2 N_0, \quad N_i = (1 + \tau\gamma)^i N_0 = (1 + \tau\gamma)^{t/\tau} N_0,$$

т.е. при $t \rightarrow \infty$ решение (6.12) может отличаться от искомого сколь угодно сильно. Следовательно, для получения нужной точности необходимо должным образом выбирать шаг τ в зависимости от величины отрезка интегрирования T .

Литература: 10 [124–126], 12 [2, 15–17, 119, 124], 8[53–58]

Контрольные вопросы:

1. Качественная (топологическая) структура траекторий системы в пространстве состояний.
2. Автономная динамическая система на плоскости.
3. Качественная структура окрестности состояния равновесия.
4. Предельные траектории, устойчивые и неустойчивые циклы.
5. Грубые системы. Бифуркации.
6. Топологическая инвариантность фазовых портретов. Примеры.
7. Происхождение нелинейности.
8. Три режима в нелинейной модели популяции.
9. Влияние сильной нелинейности на процесс колебаний.
10. Численные методы.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОДОБИЯ

Дадим характеристику способов упрощения математических моделей, основанных на свойствах их симметрии. Приведем описание самоподобных (автомодельных) явлений. Исследуем некоторые автомодельные процессы для нелинейных параболических и гиперболических уравнений.

7.1. Анализ размерностей и групповой анализ моделей

Одно из фундаментальных свойств природных, технологических, многих экономических и социальных объектов – симметрия (подобие, повторяемость, воспроизводимость) – находит свое отражение в их математических моделях. Наличие какого-либо вида симметрии у изучаемого явления означает большую простоту объекта в сравнении с его менее симметричным аналогом. На этом основываются широко применяемые методы упрощения математических моделей и, следовательно, методы упрощения их анализа. Они состоят в понижении порядка системы уравнений, образующих модель, в уменьшении числа переменных, от которых зависят искомые величины, или числа постоянных параметров, определяющих процесс, и т. д. (так, симметрия функции трех переменных относительно этих переменных позволила найти максимально возможное значение скорости трехступенчатой ракеты).

Типичный подход к использованию свойств симметрии – анализ размерности величин, входящих в модель. Часть характеристик объектов измеряется в каких-либо единицах, имеющих непосредственный (механический, физический, экономический и т. д.) смысл. Например, масса в граммах, температура в градусах Кельвина, валовый национальный продукт в рублях. Такие величины называются *размерными*, их численное значение зависит от выбора единиц измерения. Среди них выделяются величины с независимой (основной) размерностью, или *размерно независимые* величины. Например, если для описания механических явлений используется система единиц СГС (сантиметр, грамм, секунда), то размерности длины x , массы m и времени t независимы и не выражаются одна через другую. В отличие от них размерность кинетической энергии $E = mv^2/2$ определяется через размерности основных величин по формуле $[E] = [m][x]^2[t]^{-2} = \text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$, называемой *формулой размерности* (здесь $v = dx/dt$, через символ $[f]$ обозначается размерность величины f). Такие величины называются *размерно зависимыми*. Напомним, что явления и процессы могут описываться также и безразмерными величинами, скажем, отношением длины водоносного пласта к его ширине, показателем степени в формуле, дающей зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, годовым банковским процентом и т. п.

Системы единиц измерения можно выбирать по-разному, причем связи между величинами, характеризующими объект (получаемые из законов природы или иных соображений), не должны изменяться при изменении единиц измерения. Например, второй закон Ньютона $F = ma$ (F – сила, a –

ускорение) в системе СИ записывается точно так же, как и в системе СГС. Инвариантность явлений и процессов по отношению к изменению единиц измерения находит свое воплощение в так называемой П-теореме.

Пусть имеется функциональный байланыс

$$a = F(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (7.1)$$

между $n + 1$ размерными величинами $a, a_1, \dots, a_n$, где величины $a_1, \dots, a_k$ имеют независимую размерность, и пусть эта связь не зависит от выбора системы единиц измерения (величина a искомая, а остальные задаваемые).

Тогда связь (7.1) может быть записана как

$$\Pi = F(1, \dots, 1\}_{\underset{k}{k}}, \Pi_1 \dots, \Pi_{\underset{n-k}{n-k}}\}), \quad (7.2)$$

т. е. в виде соотношения между $n + 1 - k$ величинами $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$, представляющими собой безразмерные комбинации из $n + 1$ размерных величин $a, a_1, \dots, a_n$.

При этом величины Π , $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ связаны с $a, a_1, \dots, a_n$ простыми соотношениями

$$\begin{aligned} a &= \prod a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}, \\ a_{k+1} &= \prod_1 a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_k^{l_k}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$a_n = \prod_{n-k} a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}.$$

Здесь показатели степеней $m_1, \dots, m_k, l_1, \dots, l_k; p_1, \dots, p_k$ те же, что и в соответствующих формулах размерностей для размерно зависимых величин $a, a_{k+1}, \dots, a_n$, например в формуле $[a] = [a_1]^{m_1} [a_2]^{m_2} \dots [a_k]^{m_k}$.

Доказательство П-теоремы основано на инвариантности связи (7.1) относительно единиц измерения. Прежде всего проведем *обезразмеривание* соотношения (7.1), исходя из того, что любая размерно независимая величина a_i , $i = 1, \dots, k$, может быть представлена в виде $a_i = \overline{a_i} a_i$. Здесь безразмерный коэффициент $\overline{a_i}$ – числовое значение величины a_i в применяемой системе единиц, а сомножитель a_i имеет размерность a_i и характеризует масштаб измерения (десятки или сотни фунтов, сотни или тысячи градусов, миллионы или миллиарды рублей и т. д.). Числовые значения безразмерных множителей для размерно зависимых величин a , $a_{k+1}, \dots, a_n$ вычисляются с использованием *масштабных множителей* a_i , $i = 1, \dots, k$, по правилу

$$\bar{a} = \frac{a}{\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}, \quad \bar{a}_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \dots a_k^{l_k}}, \quad \bar{a}_n = \frac{a_n}{\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}},$$

непосредственно следующему из формул размерностей для каждой из них. Соотношение (8.1) можно трактовать также и как связь между числовыми значениями величин $a, a_1, \dots, a_n$ (т. е. связь между безразмерными величинами $\bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$), не зависящую, по предположению, от единиц измерения. Таким образом, для любых наборов масштабных множителей α_i справедливо

$$\bar{a} = F(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_n),$$

ИЛИ

$$\frac{a}{\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k}} = F\left(\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{a_k}{\alpha_k}, \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \dots \alpha_k^{l_k}}, \dots, \frac{a_n}{\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k}}\right).$$

Положим теперь $\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \dots, \alpha_k = a_k$. Другими словами, выберем масштабные множители так, чтобы в полученной системе единиц измерения величины $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}$ тождественно равнялись единице. Тогда из последнего соотношения немедленно вытекают формулы (7.2) и (7.3).

Применение П-теоремы снижает число величин, фигурирующих в описании объекта, и дает явный способ представления искомой величины a (и величин $a_{k+1}, \dots, a_n$) через $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ и $a_1, \dots, a_k$. Он «безразличен» к конкретному виду функциональной зависимости (7.1), требуется лишь достаточная гладкость функции F .

В частности, если $n = k$, то, как сразу следует из (7.2), $\Pi = \text{const}$, и

$$a = \text{const} \cdot a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k},$$

т. е. для решения получается простое выражение через задаваемые параметры (чтобы знать точное значение a , остается определить константу). Пусть, например, известно, что период малых колебаний маятника T не зависит от его начального отклонения и скорости, а определяется лишь его длиной l , массой m и ускорением свободного падения g . Функциональная связь $T = T(l, m, g)$ содержит четыре размерных величины, три из которых имеют независимые размерности. Выберем в качестве таковых T, l и m , тогда для размерности g будем иметь $[g] = [l][T]^{-2}$, или $[T] = [l]^{1/2}[g]^{-1/2}$, откуда

$$T = \text{const} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

С точностью до безразмерного множителя данная формула совпадает с полученной из решения уравнения колебаний маятника (попутно выясняется, что их период не зависит от m).

Заметим, что безразмерные параметры, характеризующие объект, при вариации единиц измерения не изменяются и поэтому в П-теореме не фигурируют.

Процедура обезразмеривания (*масштабирования*) всегда полезна при изучении математических моделей, поскольку может дать важную предварительную информацию об объекте. Например, в результате масштабирования задачи выяснилось, что ее решение определяется фактически не четырьмя, а лишь одним параметром.

Получаемые с помощью П-теоремы безразмерные величины $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ можно назвать *параметрами (критериями) подобия* в том смысле, что разные по своим масштабам, но одинаковые по сущности явления и процессы ведут себя качественно одинаково при заданном наборе параметров $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ (и одинаково изменяются при их изменении).

Инвариантность моделей по отношению к системе единиц измерения – частный случай более общих свойств их симметрии. Наиболее хорошо разработанный и широко применяемый подход, использующий подобие моделей, основан на так называемом *инвариантно-групповом методе*

исследования дифференциальных уравнений. Действительно, большинство дифференциальных уравнений, представляющих собой составную часть математических моделей многих явлений, остаются неизменными (инвариантными) при некоторых преобразованиях входящих в них независимых переменных и искомым функций.

Например, уравнение теплопередачи

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\chi \cdot \operatorname{grad} T) \quad (7.4)$$

инвариантно к «сдвигу» времени $t' = t + t_0$ и, если функции c и χ не зависят от $\vec{r}$, к «сдвигу» координат $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$. В частном случае $c = c_0$, $\chi = \chi_0 T^\sigma$, т. е. при степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, (7.4) не меняет своего вида при преобразованиях «растяжения–сжатия»: $t' = \alpha t$, $\vec{r}' = \beta \vec{r}$, $T = \gamma T$ (числа α , β , γ должны подчиняться некоторой связи).

Аналогичными свойствами обладают, как легко видеть, одномерные уравнения газовой динамики для идеального политропного газа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{\partial v}{\partial m}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (p p^{-\gamma}) = 0, \quad (7.5)$$

записанные в массовых координатах.

Рассмотренные выше преобразования переменных и различные их комбинации и обобщения относятся к классу так называемых точечных преобразований, или преобразований Ли (производные от величин не преобразуются). Пусть они к тому же удовлетворяют некоторым дополнительным условиям (представляют собой группу). Тогда дифференциальное уравнение, допускающее группу Ли, может быть упрощено: либо понижается его порядок, либо уменьшается число независимых переменных, определяющих искомые функции. Одна из целей группового анализа – определение всех групп преобразований, допускаемых данным уравнением или системой уравнений, и соответствующих этим группам так называемых инвариантных решений уравнений. С точки зрения исследования математических моделей важны, прежде всего, не сложная и громоздкая процедура группового анализа, а его конечные итоги применительно к конкретному уравнению (для большинства базовых математических моделей эти результаты получены).

Приведем в качестве важного частного примера итог группового анализа уравнения (7.4) при $c = 1$, $\chi = \chi(T)$ в одномерном случае (табл. 7.1). Номера в левом столбце таблицы отвечают различным групповым преобразованиям, а в ее клетках приведены соответствующие им инвариантные решения для различных видов (спецификаций) функции $\chi(T)$. Символ « означает повтор выражения, стоящего в строке слева, прочерк – отсутствие инвариантных решений. Через ξ обозначен инвариант – комбинация, не изменяющаяся при данном преобразовании.

При подстановке инвариантного решения $T(x, t)$ в одномерное уравнение (7.4) получается обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f(\xi)$ (также инвариант преобразования). Исследовать его гораздо

проще, чем исходное уравнение в частных производных. Далее не представляет труда выписать функцию $T(x, t)$ через $f(\xi)$ и изучить ее свойства, если известны свойства $f(\xi)$.

Таблица 7.1

Групповая классификация уравнения $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\chi) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right)$

№	$\chi(T)$ произвольное	$\chi(T) = e^T$	$\chi(T) = T^\sigma \quad (\sigma \neq -4/3)$
1	$T = f(\xi), \xi = x$	«	«
2	$T = f(\xi), \xi = t$	«	«
3	$T = f(\xi), \xi = x - t$	«	«
4	$T = f(\xi), \xi = x^2/t$	«	«
5	—	$T = \frac{1}{\alpha} \ln x + f(\xi),$ $\xi = tx^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}};$ $T = \ln t + f(\xi),$ $\xi = x(\alpha = 0)$	$T = t^{1/(2\alpha)} f(\xi),$ $\varepsilon = xt^\beta, \beta = -(\alpha + \sigma/2)/(2\alpha);$ $T = t^{-1/\sigma} f(\xi),$ $\xi = x(\alpha = -\sigma/2)$
6	—	$T = x + f(\xi),$ $\xi = te^x$	$T = e^t f(\xi),$ $\xi = xe^{-\alpha/2}$
7	—	$T = 2t + f(\xi),$ $\xi = xe^{-t}$	$T = e^x f(\xi),$ $\xi = te^{\alpha x}$

Групповые преобразования с номерами 1-4 основные, поскольку допускаются при произвольных спецификациях функции $\chi(T)$. Случай 1 – стационарное решение (инвариантность (4) по отношению к сдвигу по t), 2 – постоянное по пространству решение (инвариантность к сдвигу по x), 3 – решение типа бегущей волны (инвариантность к одновременному сдвигу по t и x), 4 – решение с постоянным значением функции $T(x, t)$ в точке $x = 0$ (инвариантность к преобразованиям вида $t' = \alpha^2 t, x' = \alpha x, T(x', t') = T(x, t)$).

Расширения основной группы (называемые подгруппами) происходят при конкретизациях $\chi(T) = e^T, \chi(T) = T^\sigma$ функции $\chi(T)$. Так, для решений пятой подгруппы величина ξ инвариантна к преобразованию растяжения-сжатия, которое в этом случае допускается исходным уравнением (поясним: решение 4 отвечает фактически частному случаю преобразований растяжения-сжатия для произвольной функции $\chi(T)$, а для $\chi(T) = T^\sigma$ им отвечают решения в разделяющихся переменных). Решения для подгрупп 6 и 7 порождаются комбинацией из преобразований сдвига и растяжения-сжатия.

Заметим: вид почти всех инвариантных решений из таблицы 8.1 был получен еще до группового анализа из других соображений (из теории размерностей, предельными переходами, угадыванием решения и прямой подстановкой его в уравнение (8.4)). Однако это не умаляет достоинства данного метода, по крайней мере в силу двух причин. Он дает строгий и

исчерпывающий ответ об основной группе преобразований и о тех спецификациях уравнений (моделей), при которых эта группа расширяется (заранее известно, что другие спецификации $\chi(T)$ в уравнении (7.4), скажем, вида $\chi(T) = \ln(1 + T)$, не допускают дополнительных к основным решений). Кроме того, свойства симметрии уравнений могут быть весьма разнообразными и неожиданными. Например, для не описанного в табл. 7.1 случая $\chi = T^\sigma$, $\sigma = -4/3$ уравнение (7.4) имеет большое число нетривиальных преобразований, определяемых лишь с помощью группового анализа, представляющего собой регулярный способ упрощения математических моделей.

Подчеркнем также, что этот метод изучает свойства дифференциального уравнения как такового, т. е. свойства лишь части модели исходного объекта (без других входных данных, например без краевых условий). Поэтому пригодность получаемых на его основе тех или иных инвариантных решений для описания конкретного явления должна исследоваться дополнительно. В отличие от группового анализа, теория размерностей (ее можно рассматривать как применение частного случая групповой симметрии, сводящейся к растяжению-сжатию единиц измерения) и вытекающая из нее П-теорема оперируют с моделью во всей ее полноте.

7.2. Автомоделные (самоподобные) процессы

Среди инвариантных решений дифференциальных уравнений выделяется важный класс *самоподобных*, или *автомоделных* решений (смысл этого названия станет понятным чуть ниже). К ним принято относить широко используемые решения типа бегущей волны (случай 4 из таблицы 3 для $\chi = T^\sigma$), степенные автомоделные решения (случай 5) и экспоненциальные автомоделные решения (случаи 6, 7).

Убедимся в полезности построения и анализа автомоделных решений для исследования математических моделей. В качестве первого примера рассмотрим решения типа бегущей волны для системы уравнений (5). Они ищутся в виде

$$\begin{aligned}\rho(m, t) &= \sigma(\xi) = \rho(m - Dt), \\ \nu(m, t) &= \nu(\xi) = \nu(m - Dt), \\ p(m, t) &= p(\xi) = p(m - Dt),\end{aligned}$$

где $D > 0$ – некоторая постоянная. Подставляя эти выражения в (7.5) с заменой для единообразия третьего уравнения дивергентным уравнением энергии, получим вместо уравнений в частных производных систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\rho} + \frac{d\nu}{d\xi} = 0, \quad -D \frac{d\nu}{d\xi} + \frac{dp}{d\xi} = 0, \quad -D \frac{d}{d\xi} \left(\varepsilon + \frac{\nu^2}{2} \right) + \frac{d}{d\xi} (p\nu) = 0,$$

где $\varepsilon(\xi) = \varepsilon(m - Dt)$ – внутренняя энергия газа ($\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$). Интегрируя их в произвольных пределах $\xi_0 > \xi_1$ убеждаемся в том, что бегущая волна отвечает течениям, в которых сохраняются три интеграла:

$$D \frac{1}{\rho} + v = C_\rho, \quad -Dv + p = C_p, \quad D\varepsilon + D \frac{v^2}{2} - pv = C_\varepsilon. \quad (7.6)$$

В случае непрерывных течений интегралы (8.6) дают единственное решение – постоянные при всех ξ значения ρ , v , p , ε .

Нетривиальный результат получается, если учесть, что уравнения газовой динамики благодаря существованию в них «градиентной катастрофы» могут допускать *разрывные решения*. Пусть разрыв функций $\rho(\xi)$, $v(\xi)$, $p(\xi)$ расположен в точке $\xi = 0$. В областях $\xi > 0$, $\xi < 0$, т. е. справа и слева от него, течение, очевидно, постоянно и характеризуется наборами величин ρ_0 , v_0 , p_0 и ρ_1 , v_1 , p_1 (смотрите рисунок 8.1, на котором решение изображено как функция координаты m в моменты времени t_1 , t_2 , t_3 ; $t_1 < t_2 < t_3$). Скачок газодинамических параметров не произволен. Покажем это, анализируя смысл написанных выше интегралов (справедливых также и для разрывных течений).

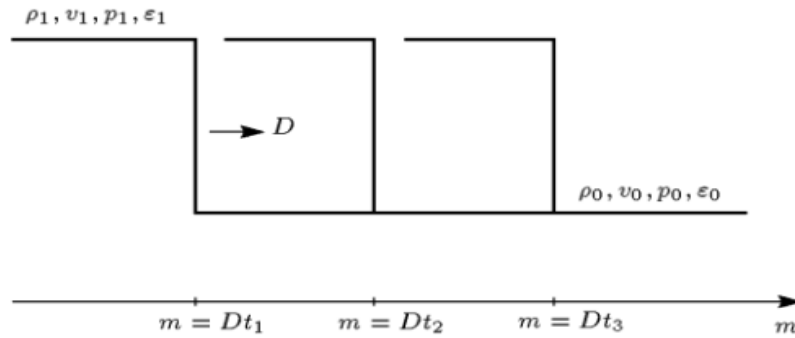


Рис. 7.1

Описываемый автомодельным решением разрыв движется по массе газа с постоянной скоростью D . Неизменность массовой скорости обеспечивает равенство потока вещества $I_\rho = D$, «втекающего» с одной стороны разрыва и «вытекающего» с другой его стороны. Нарушение этого естественного физического требования означало бы появление или исчезновение при переходе через него какого-то количества вещества. Поток «втекающей» массы равен, по определению, $I_\rho = D = \rho_0(u - v_0)$, а «вытекающей» $I_{\rho_1} = D = \rho_1(u - v_1)$, где u – эйлерова скорость движения разрыва, причем $u - v_0 > 0$ и $u - v_1 > 0$. Первый интеграл (7.6), как следует из равенства $I_\rho = I_{\rho_0} = I_{\rho_1}$, представляет собой тождество $u = u$.

Обратимся ко второму интегралу (7.6), записав его для величин с индексами 0 и 1:

$$C_{p_0} = p_0 + \rho_0(u - v_0)^2 - I_\rho u \equiv I_{p_0} - I_\rho u,$$

$$C_{p_1} = p_1 + \rho_1(u - v_1)^2 - I_\rho u \equiv I_{p_1} - I_\rho u.$$

Фигурирующие в этих равенствах величины I_{p_0} , I_{p_1} суть потоки импульса I_p справа и слева от разрыва. Поскольку $C_p = C_{p_0} = C_{p_1}$, то они также равны: $I_p = I_{p_0} = I_{p_1}$. Иначе при переходе через бесконечно тонкую поверхность

разрыва частицы вещества получали бы приращение импульса, что возможно лишь при наличии действующих на нем бесконечно больших сил.

Наконец, третий интеграл (7.6) после несложных выкладок записывается по обе стороны разрыва в виде

$$C_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_0} - u \left(I_{\rho_0} + I_{\rho_0} \frac{u}{2} \right), \quad C_{\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_1} - u \left(I_{\rho_1} - I_{\rho_1} \frac{u}{2} \right),$$

где $I_\varepsilon = \rho(u-v)\varepsilon + \rho(u-v)(u-v^2)/2 + p(u-v)$ – поток энергии. Поскольку в бегущей волне величина C_ε постоянна и, как уже установлено выше, постоянны величины I_ρ , I_p , то также постоянен поток энергии I_ε , что означает равенство $I_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_1}$. Энергия, «втекающая» в разрыв, равна «вытекающей» из него энергии (противное означало бы существование внутри него источников энергии бесконечной интенсивности).

Учитывая результаты, следующие из анализа интегралов (7.6), приходим к выводу о непрерывности потоков массы, импульса и энергии при переходе через поверхность разрыва газодинамических параметров:

$$I_{\rho_0} = I_{\rho_1}, \quad I_{p_0} = I_{p_1}, \quad I_{\varepsilon_0} = I_{\varepsilon_1}.$$

Заметим, что этот вывод справедлив также и в случае $D = 0$ (*контактный разрыв*).

Для движущегося по массе газа разрыва (*ударной волны*) из установленных равенств нетрудно найти при известной скорости D условия Гюгонио – однозначную связь между величинами до и после скачка. Эти условия можно также получить и с помощью непосредственного вычисления потоков по обе стороны ударной волны. Однако автомодельные решения типа бегущей волны в силу их свойств позволяют автоматически получать условия Гюгонио для большого числа моделей сплошных сред, в частности для ситуаций, когда скачок происходит не в бесконечно тонком слое, а имеет пространственную протяженность, обусловленную всегда присутствующими в веществе диссипативными процессами. При этом уравнения для бегущей волны описывают еще и структуру переходного слоя.

Заметим, что условия Гюгонио допускают как скачки сжатия, когда давление, плотность и внутренняя энергия газа за ударной волной возрастают, так, формально, и скачки разрежения. Последние, однако, могут реализовываться лишь при наличии в среде соответствующих физических процессов, например, специального типа химических реакций.

Самоподобность, или автомодельность, построенного решения хорошо видна на рис. 7.1: оно без изменений воспроизводится в различные моменты времени на различных участках вещества. Решение понимается в обобщенном смысле, поскольку оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (7.5) лишь в областях непрерывного течения. Рассматриваемое в области $-\infty < t < \infty$, оно представляет собой одно из *обобщенных решений* задачи Коши для уравнений газовой динамики. Если же в какой-либо точке с фиксированной массовой координатой, скажем, в точке $t = 0$, задаются соответствующие граничные условия, то его можно трактовать как решение в области $t > 0$

задачи о поршне, вдвигающемся с постоянной скоростью в среду с постоянными параметрами.

Изучим теперь степенное автомодельное решение для частного случая уравнения (7.4)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(k^0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (7.7)$$

описывающего распространение тепла в неограниченной среде $(-\infty < x < \infty)$ от мгновенного точечного источника. В момент $t = 0$ в точке $x = 0$ выделяется количество тепла Q_0 .

Для нахождения автомодельного решения используем П-теорему. Очевидно, оно зависит от четырех определяющих параметров x, t, k_0, Q_0 , т. е. $T = T(x, t, k_0, Q_0)$. Данное равенство связывает пять размерных величин, три из которых имеют независимые размерности. Следовательно, согласно П-теореме оно сводится к функциональной зависимости $\Pi = F(\Pi_1)$ между двумя безразмерными величинами, Π, Π_1 .

Выберем в качестве размерно независимых величин Q_0, x, t . Тогда из уравнения (8.7) для k_0 следует формула размерности $[k_0] = [Q_0]^{-\sigma} [x]^{\sigma-2} / [t]$. Формулу размерности $[T] = [Q_0] / [x]$ для T получаем из условия

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx, \quad t \geq 0,$$

означающего сохранение первоначально выделившейся энергии в неограниченной среде без источников и стоков тепла. Из П-теоремы и формул размерности имеем

$$\Pi = T(x, t) x Q_0^{-1}, \quad \Pi_1 = k_0 t x^{-(2+\sigma)} Q_0^\sigma$$

и, с учетом связи $\Pi = F(\Pi_1)$,

$$T(x, t) x Q_0^{-1} = F(k_0 t x^{-(2+\sigma)} Q_0^\sigma).$$

Перепишем последнее равенство в виде, принятом в таблицу 8.3, вводя обозначение $\xi = \Pi_1^{-1/(\sigma+2)}$:

$$T(x, t) = Q_0 x^{-1} F(\Pi_1) = Q_0 x^{-1} \Phi(\xi) = Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}} k_0^{\frac{1}{2+\sigma}} t^{\frac{1}{2+\sigma}} \xi \Phi(\xi),$$

или, обозначая $\xi \Phi(\xi)$ через $f(\xi)$,

$$T(x, t) = Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}} k_0^{\frac{1}{2+\sigma}} t^{\frac{1}{2+\sigma}} f(\xi), \quad \xi = Q_0^{\frac{\sigma}{2+\sigma}} k_0^{\frac{1}{2+\sigma}} t^{\frac{1}{2+\sigma}} x. \quad (7.8)$$

Безразмерный инвариант ξ называется автомодельной переменной, функция $f(\xi)$ – безразмерной функцией (представителем) температуры, размерный множитель перед $f(\xi)$ в (7.8) – масштабным множителем. *Фиксированным автомодельным состоянием* называется состояние, соответствующее фиксированной автомодельной координате $\xi = \xi_0$.

Анализ размерностей дает возможность получить ценную предварительную информацию о процессе, не находя полностью решения задачи. Так, темп изменения со временем решения в точке $\xi = \xi_0$ в частности, в точке $\xi = 0$, определяется лишь масштабным множителем. Поэтому в начале координат $x = 0$ ($\xi = 0$) температура убывает по заранее известному закону

$$x(\xi_0) \sim t^{\frac{1}{2+\sigma}} f(0).$$

Также заранее известна скорость роста со временем координаты x для состояния $\xi = \xi_0$:

$$T(0, t) \sim t^{\frac{1}{2+\sigma}} \varepsilon_0.$$

Если принять $T(0, t)$ за характерную температуру нагретой области, а $x(\varepsilon_0)$ – за ее характерный размер, то их произведение $T(0, t) \cdot x(\varepsilon_0)$ не зависит от времени, что согласуется с условием постоянства тепловой энергии Q_0 , содержащейся в среде.

Подставив (7.8) в (7.7) и проведя дифференцирование, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $f(\xi)$:

$$\frac{f}{2+\sigma} + \xi \frac{f'}{2+\sigma} = -(f^\sigma f')'.$$

Преобразуем его к виду

$$\frac{1}{(2+\sigma)} (\xi f)' + (f^\sigma f')' = 0$$

и один раз проинтегрируем:

$$\frac{1}{(2+\sigma)} \xi f + f^\sigma f' = C_1.$$

Здесь $C_1 = 0$, так как при $\varepsilon = 0$ решение считается ограниченным ($f(0) < \infty$), гладким и, по построению, симметричным, т. е. $f'(0) = 0$. При $C_1 = 0$ переменные в последнем уравнении разделяются и оно легко интегрируется:

$$f(\xi) = \left[(\xi_\Phi - \xi^2) \frac{\sigma}{2(2+\sigma)} \right]^{1/\sigma}, \quad |\xi| \leq \xi_\Phi.$$

Поскольку полученная формула при $|\xi| > \xi_\Phi$ дает отрицательные значения, то в этой области $f(\xi)$ полагается равной нулю (решение в точках $|\xi| = \xi_\Phi$ «сшивается» с тривиальным решением). Величина $|\xi| = \xi_\Phi(\sigma) > 0$ определяется из равенства $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$ – безразмерного аналога условия постоянства энергии в среде

$$\varepsilon_\Phi = \left[\frac{(2+\sigma)^{\sigma+1} 2^{1-\sigma}}{\sigma \pi^{\sigma/2}} \frac{\Gamma^\sigma(1/2 + 1/3)}{\Gamma^\sigma(1/\sigma)} \right]^{\frac{1}{\sigma+2}},$$

где Γ – гамма-функция.

Используя (7.8), приходим к окончательному виду решения задачи о мгновенном точечном источнике тепла в нелинейной среде:

$$T(x, t) = \begin{cases} Q_0^{\frac{2}{2+\sigma}} k_0^{\frac{1}{2+\sigma}} t^{\frac{1}{2+\sigma}} \left\{ \left[1 - \frac{x^2}{x_\Phi^2} \right] \frac{\xi_\Phi \sigma}{2(2+\sigma)} \right\}^{1/\sigma}, & |x| \leq x_\Phi(t), \\ 0, & |x| > x_\Phi(t). \end{cases} \quad (7.9)$$

Здесь $x_\Phi(t) = \xi_\Phi (Q_0^\sigma k_0)^{1/(2+\sigma)} t^{1/(2+\sigma)}$.

Решение (7.9) обобщенное, так как при достаточно больших σ его производные по x и t в точках $|x| = x_\Phi(t)$ не существуют и в них оно не удовлетворяет уравнению (7.7) в классическом смысле. Однако естественное физическое требование непрерывности потока тепла $W(x, t) = -k_0 T^\sigma \partial T / \partial x$ в точках $|x| = x_\Phi(t)$, выполняется (противное означало бы наличие в этих точках источников или стоков энергии бесконечной интенсивности).

Распространение тепла происходит в виде *волны*, охватывающей со временем все новые и новые участки вещества (рис. 7.2). Она движется по среде с *конечной скоростью* (для случая $\sigma = 0$). *Фронт волны* – точка, отделяющая нагретую часть пространства от холодной, – продвигается по закону $x_\Phi(t) \sim t^{\frac{1}{2+\sigma}}$, отвечая одновременно как фиксированному автомодельному состоянию $\xi = \xi_\Phi$, так и фиксированному физическому состоянию $T(x_\Phi(t), t) = 0$.

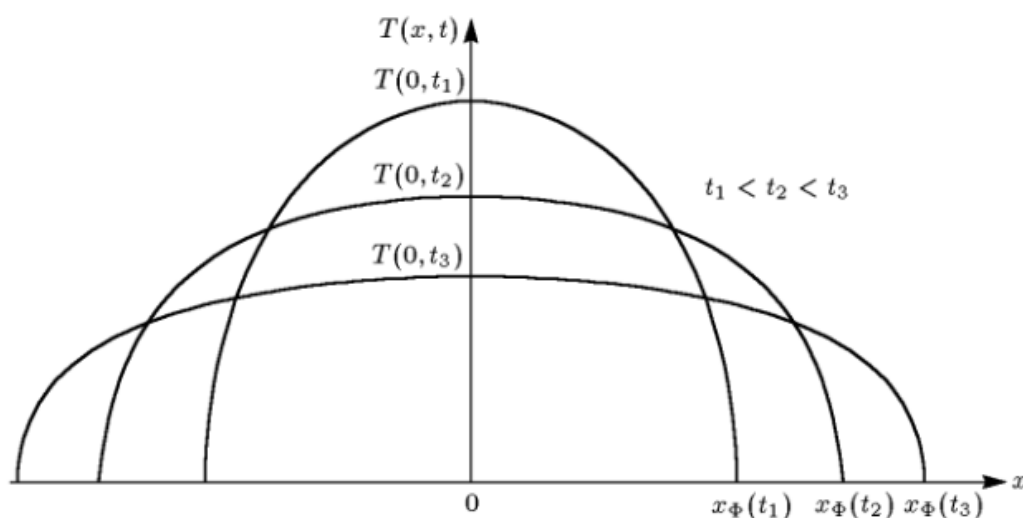


Рисунок 7.2

Самоподобие решения (7.9) имеет несколько иное геометрическое выражение, чем в предыдущем примере. Кривые на рисунке 7.2 можно совместить в одну (в функцию $f(\xi)$) после их «автомодельной обработки» – соответствующих преобразований растяжения-сжатия как аргументов x , t , так и функции $T(x, t)$.

Особую роль автомодельные решения играют для нелинейных моделей как важные частные решения, раскрывающие те или иные свойства объектов. Их изучение способствует выработке своего рода элементарного языка нелинейных явлений (ударная волна, тепловая волна и т. д.). Однако этим их значение далеко не ограничивается. При определенных условиях они служат *промежуточными асимптотиками* для большого класса формально неавтомодельных процессов. Очевидно, что выделение тепловой энергии в какой-то части вещества не может быть ни мгновенным, ни точечным. Тем не менее ее распространение в среде (с $k(T) = k_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$), достаточно холодной в момент $t = 0$, по истечении достаточно большого времени и при достаточно больших значениях $x_\Phi(t)$ с хорошей точностью описывается решением (7.9).

Детали начальной стадии «забываются», и процесс «выходит» на самоподобный режим (на промежуточную асимптотику).

8.3. Различные режимы распространения возмущений в нелинейных средах

Если нелинейная модель обладает богатыми групповыми свойствами, то появляется возможность получать не отдельные решения, а наборы промежуточных асимптотик с разнообразным поведением.

Изучим различные режимы распространения тепла, описываемые уравнением (7.7). Процесс рассматривается в полуограниченной среде $0 < x < \infty$, холодной в момент $t = t_0$:

$$T(x, t_0) = T_0(x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (7.10)$$

и нагреваемой с левой границы таким образом, что температура в точке $x = 0$ растет со временем по закону

$$T_0(0, t) = A_0(t_f - t)^n, \quad n < 0, \quad t_0 \leq t < t_f < \infty. \quad (7.11)$$

Задача (7.7), (7.10), (7.11) имеет смысл лишь при $t < t_f$, поскольку в конечный момент $t = t_f$ граничная температура обращается в бесконечность. Процессы подобного типа называются *режимами с обострением* и являются математической идеализацией многих реально наблюдаемых явлений, порождаемых геометрией объектов, их нелинейностью и т. д. К ним относятся, например, схождение сферической ударной волны к ее центру, схлопывание пузырьков воздуха в жидкостях и другие виды кумуляции (геометрический фактор). Другой пример: рост численности населения Земли $N(t)$ хорошо описывается в течение нескольких последних веков законом $N(t) = N_0/(t_f - t)$, $t_f = 2026$ (год), следующим из популяционной модели $dN/dt = \alpha_0 N^2$ (сильная нелинейность).

Решение задачи (7.7), (7.10), (7.11) определяется, очевидно, величинами x, t, k_0, A_0, t_0, t_f . Функциональная связь $T = T(x, t, k_0, A_0, t_0, t_f)$ содержит семь параметров, три из которых являются размерно независимыми. Избавимся от «мешающих» автомодельности параметров t_0, t_f . Возьмем (без ограничения общности) момент обострения $t_f = 0$ и будем рассматривать процесс при $-\infty \leq t < 0$, т. е. положим $t_f = -\infty$ (время по-прежнему возрастает, течет от прошлого к будущему). Сформулированная таким образом задача становится, по П-теореме, автомодельной. Проводя выкладки, аналогичные применявшимся при выводе формулы (8.8), получим вид искомого автомодельного решения:

$$T_0(0, t) = A_0(-t)^n f(\xi); \quad \xi = k_0^{-1/2} A_0^{-\sigma/2} (-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}} x, \quad \xi \geq 0. \quad (7.12)$$

Подстановка (7.12) в (7.7) дает для нахождения $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (с краевыми условиями, вытекающими из (7.10), (7.11)):

$$\frac{d}{d\xi} \left(f^\sigma \frac{df}{d\xi} \right) - \frac{1+n\sigma}{2} \xi \frac{df}{d\xi} + nf = 0, \quad f(\infty) = 0, \quad f(0) = 1. \quad (7.13)$$

Уравнение (7.13) в свою очередь допускает преобразование подобия $\xi' = \alpha\xi$, $f' = \beta f$, $\beta = \alpha^{2/\sigma}$ (растяжение-сжатие) и поэтому сводится к уравнению первого порядка, исследуемого стандартными методами. Анализ показывает, что решение задачи (7.13) существует при всех $n < 0$, $\sigma > 0$, единственно и монотонно.

Его свойства определяются соотношением между параметрами n (скорость роста граничной температуры) и σ (нелинейность среды). Критическим является значение $n = -1/\sigma$, при котором в уравнении (7.13) второй член выпадает и оно интегрируется явным образом. Переписывая его с помощью (7.12) в исходных переменных, имеем

$$T_S(x, t) = \begin{cases} A_0(-t)^{-1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{x_\Phi}\right)^{2/\sigma}, & x \leq x_\Phi, \\ 0, & x > x_\Phi, \end{cases} \quad (7.14)$$

где

$$x_\Phi = x_S \equiv \left(2k_0 A_0^\sigma \frac{\sigma+2}{\sigma}\right)^{1/2}. \quad (7.15)$$

Первое из краевых условий (7.13) выполняется «досрочно» (т. е. при $x = x_\Phi(k_0, A_0, \sigma) < \infty$), тепловой поток на фронте равен нулю (так же, как и в решении (7.9)). Решение (7.14) обобщенное, поскольку его производные в точке $x = x_\Phi$ при достаточно больших σ не существуют.

При $n < -1/\sigma$ условия на границе между нагретым и холодным веществом также выполняются в конечной точке $\xi_\Phi = \xi_\Phi(n, \sigma) < \infty$ (значение координаты фронта для конкретных n , σ находится численно). В ее окрестности поведение решения описывается асимптотическим выражением, первый член которого – решение упрощенного уравнения, получающегося из (7.13) в предположении $f(\xi) \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \xi_\Phi$:

$$f(\xi) = \begin{cases} \left(-\frac{1+n\sigma}{2}\sigma\xi_\Phi\right)^{1/\sigma} (\xi_\Phi - \varepsilon)^{1/\sigma} + \dots, & \xi \leq \xi_\Phi, \\ 0, & \xi > \xi_\Phi. \end{cases} \quad (7.16)$$

Здесь и далее многоточием обозначены члены более высокого порядка малости. Из (7.16) видно, что решение при $n < -1/\sigma$ обобщенное с тем же порядком гладкости, что и (7.9) (гладкость у (7.14) выше, чем у (7.9) и (7.16)). Однако поток тепла в точке фронта, как и для (7.9) и (7.14), непрерывен.

В отличие от случая $n \leq -1/\sigma$, при $n > -1/\sigma$ условия на фронте волны выполняются лишь при $\xi \rightarrow \infty$. Решение – гладкая при всех $\xi \geq 0$ функция, его асимптотическое разложение у фронта дается формулой

$$f(\xi) = C\xi^{\frac{2n}{1+n\sigma}} + C_1\xi^{\frac{2n-2}{1+n\sigma}} + \dots, \quad 1 + n\sigma > 0, \quad (7.17)$$

где $C = C(n, \sigma) > 0$ (находится численно) и $C_1 = -C^{\sigma+1} + [2n(2n + n\sigma - 1)]/(1 + n\sigma)^2 < 0$.

Для всех n , σ при $\xi \rightarrow 0$ решение имеет асимптотику

$$f(\xi) = 1 + f'(0)\xi + \dots, \quad f'(0) = \left. \frac{df}{d\xi}(n, \sigma) \right|_{\xi=0} < 0,$$

означающую, что поток тепла на границе среды положителен и энергия поступает в вещество.

Перейдем к анализу физических свойств построенных решений, различая случаи $n = -1/\sigma$, $n < -1/\sigma$ и $n > -1/\sigma$.

1) При $n = -1/\sigma$ фронт тепловой волны неподвижен. *Эффективный размер* нагретой области, например, *полуширина*, т. е. точка $x_{\text{эф}}(t)$ такая, что $T(x_{\text{эф}}(t), t)/T(0, t) = 1/2$, также не изменяется со временем. Автомодельность данного решения, как и всех решений в разделяющихся переменных (имеющих вид $u(x, t) = U(t) V(x)$), выражается в одинаковости его пространственных профилей в различные моменты времени. Профили отличаются в данном случае лишь растущей со временем амплитудой $U(t)$. Таким же свойством обладает упорядоченный режим Буссинеска, для которого амплитуда – убывающая функция времени.

Решение (7.14) можно назвать остановившейся тепловой волной (смотрите рис. 7.3, где показаны профили решения для среды с $\sigma = 2$, крестиками отмечена полуширина). В этом режиме при $t \rightarrow 0$ в вещество поступает неограниченное количество энергии; температура и коэффициент теплопроводности при всех $0 \leq x < x_S$ стремятся к бесконечности.

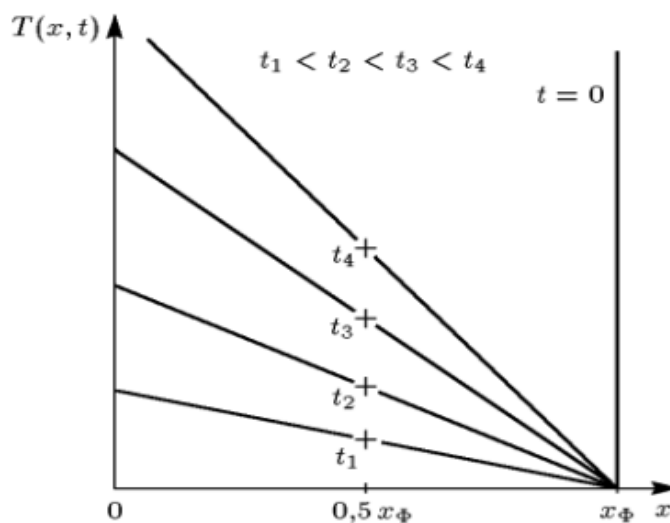


Рис. 7.3

Тем не менее тепло не проникает далее точки с координатой $x = x_S$, определяемой интенсивностью граничного режима A_0 и свойствами среды k_0 , σ . Решение (7.14) показывает, что распространение тепла может быть локализовано в области конечных размеров – *области локализации* (x_S – *глубина локализации*). Поэтому существует принципиальная возможность концентрировать любое количество энергии в ограниченных участках вещества без распространения ее за пределы зоны локализации.

2) В случае $n < -1/\sigma$ координата фронта волны нагрева неограниченно увеличивается при $t \rightarrow 0$:

$$x_{\Phi}(t) = k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}} \xi_{\Phi} \rightarrow \infty.$$

То же самое справедливо для полуширины волны $x_{\Phi}(t)$ и координат всех точек $x(t, \xi_0)$ с фиксированным автомодельным состоянием $\xi = \xi_0$.

Проследим за изменением решения в фиксированной точке вещества $x = x_0 < \infty$. Отвечающая ей автомодельная координата $\xi(t, x_0)$, как видно из второй формулы (7.12), стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Раскрывая первую формулу (7.12), получим при $t \rightarrow 0$

$$T(x_0, t) = A_0 (-t)^n f(\xi(x_0, t)) - A_0 (-t)^n f(0) = A_0 (t)^n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при приближении к моменту обострения волна охватывает все пространство, температура в любой точке среды неограниченно возрастает, локализация отсутствует. Однако бесконечные параметры достигаются не при $t \rightarrow \infty$, а за конечное время. Происходит сверхбыстрый прогрев среды.

3) Совсем по-иному реализуется распространение тепла при $n > -1/\sigma$. Из (8.12) видно, что полуширина сокращается со временем по закону

$$x_{\Phi}(t) = k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}} \xi_{\Phi} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Решение представляет собой тепловую волну с уменьшающейся эффективной глубиной прогрева. С течением времени поступающая в вещество энергия сосредоточивается в сокращающейся области вблизи границы (рис. 8.4). «Фронт» тепловой волны, как следует из (7.17), (7.12), находится в точке $x = \infty$ (при $x_{\Phi} < \infty$ размер нагретой области со временем уменьшался бы, что в среде без поглощения энергии невозможно).

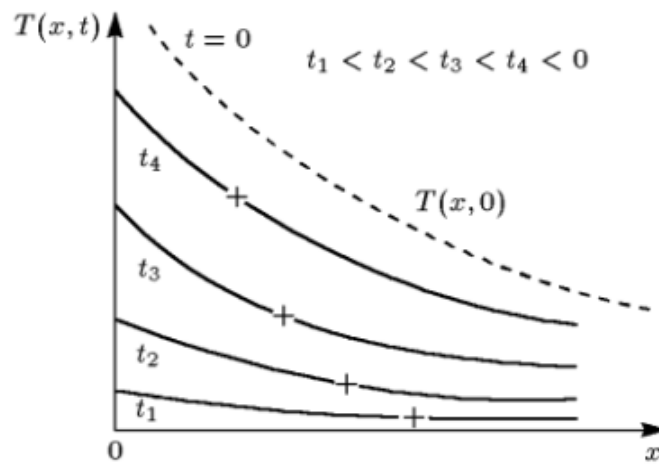


Рис. 7.4

Для фиксированной точки вещества $x = x_0$ ($0 < x_0 < \infty$) имеем $\xi(x_0, t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$, т. е. координата $\xi(x_0, t)$ стремится, в отличие от предыдущего случая, к координате фронта. Используя асимптотику (7.17) и формулу (7.12), получаем при $t \rightarrow 0$

$$T(x_0, t) \rightarrow C(k_0^{-n} A_0)^{\frac{1}{1+n\sigma}} x_0^{\frac{2n}{1+n\sigma}} + C_1(k_0^{1-n} A_0^{1-\sigma})^{\frac{1}{1+n\sigma}} x_0^{\frac{2n+2}{1+n\sigma}} (-t) + \dots \quad (7.18)$$

Несмотря на неограниченный рост температуры в точке $x = 0$, во всей остальной среде она при всех $t \leq t_f$ ограничена сверху предельной кривой (первый член в (7.18); на рис. 7.4 – штриховая кривая). В случае 3) также осуществляется локализация тепла, но в другом режиме, чем при $n = -1/\sigma$.

Анализ автомодельных решений задачи (7.7), (7.10), (7.11) позволил с помощью простых математических средств установить существование в теплопроводной среде трех принципиально различных режимов распространения тепла и изучить ряд их важных свойств. Они определяются в основном скоростью подвода энергии к среде при $t \rightarrow 0$ и степенью ее нелинейности. Для «медленных» режимов нагрева ($n = -1/\sigma$, S-режим; $n > -1/\sigma$, LS-режим) имеет место локализация тепла, при «быстром» нагреве ($n < -1/\sigma$, HS-режим) этот эффект отсутствует.

Наборы разнообразных по своим свойствам автомодельных решений можно получать не только для математических моделей, сводящихся к квазилинейным параболическим уравнениям, но, например, и для уравнений газовой динамики. Изучим обостряющиеся режимы распространения возмущений для простейшего квазилинейного гиперболического уравнения – уравнения Хопфа

$$\frac{\partial p}{\partial t} + k_0 p^\sigma \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad (7.19)$$

записанного относительно давления $p = p(m, t)$, $\sigma = (\gamma + 1)/(2\gamma) < 1$.

Рассмотрим для него задачу о поршне, сжимающем газ, занимающий полупространство $m > 0$, с нулевым начальным давлением:

$$p(m, t_0) = p_0(mt) = 0, \quad 0 < m < \infty. \quad (7.20)$$

Поршень расположен в точке $m = 0$, давление на нем растет в режиме с обострением:

$$p(0, t) = A_0(t_f - t)^n, \quad n < 0, \quad t_0 \leq t < t_f < \infty. \quad (7.21)$$

Задача (7.19)–(7.21) автомодельна, если подобно предыдущему случаю положить $t_0 = -\infty$ (как и ранее, возьмем без ограничения общности $t_f = 0$). Ее решение в соответствии с П-теоремой имеет вид

$$p(m, t) = A_0(-t)^n f(\xi), \quad \xi = k_0^{-1/2} A_0^{-\sigma} (-t)^{-(1+n\sigma)} m, \quad \xi \geq 0. \quad (7.22)$$

Из (7.19), (7.22) получаем для определения $f(\xi)$ уравнение первого порядка

$$\frac{df}{d\xi} (f^\sigma + (1+n\sigma)\xi) - nf = 0, \quad (7.23)$$

которое, будучи записанным в виде

$$\frac{d\xi}{df} = \frac{f^\sigma + (1+n\sigma)\xi}{nf},$$

линейно относительно ξ . Оно имеет общее решение

$$\xi = f^{\sigma+1/n} - f^\sigma, \quad (7.24)$$

удовлетворяющее следующему из (7.21) условию $f(0) = 1$ (при анализе (7.24) необходимо также следить за выполнением условия $f(\infty) = 0$, вытекающего из (7.20)). Свойства решений зависят от соотношений между n и σ .

1) При $n = -1/\sigma$ из (7.24), (7.22) получаем явное решение в разделяющихся переменных (*остановившаяся волна сжатия*, или газодинамический S-режим):

$$p_s(m, t) = \begin{cases} A_0(-t)^{-1/\sigma} \left(1 - \frac{m}{m_\Phi}\right)^{-1/\sigma}, & m \leq m_\Phi, \\ 0, & m > m_\Phi, \end{cases} \quad (7.25)$$

где $m_\Phi = m_s = k_0 A_0^\sigma$ – координата фронта волны сжатия, отделяющего пришедший в движение газ от невозмущенного вещества. Фронт волны и ее полуширина постоянны во времени, давление и все остальные газодинамические величины – скорость, плотность и т. д. – неограниченно нарастают в области $0 \leq m < m_s$ при $t \rightarrow 0$. Однако при $m > m_s$ газ остается неподвижным и холодным при всех $t < 0$ (в эйлеровых координатах это означает, что поршень сжимает прилегающую к нему конечную массу газа m_s в бесконечно тонкий слой, никак не затрагивая остальное вещество). Решение (8.25) демонстрирует эффект *локализации сжатия* на ограниченной глубине m_s , определяемой параметрами задачи, т. е. эффект, вполне аналогичный локализации тепла в S-режиме.

2) Такая же почти полная аналогия справедлива и в случае $n > -1/\sigma$ (газодинамический LS-режим). Решение, как видно из (7.24), монотонно убывает с увеличением ξ и обращается в нуль при $\xi = \infty$ (условие $f(\infty) = 0$ выполнено). Фронт волны сжатия расположен в точке $m = \infty$, ее полуширина

$$m_{\text{эф}}(t) = k_0 A_0^\sigma (-t)^{1+n\sigma} \xi_{\text{эф}}$$

сокращается до нуля при $t \rightarrow 0$ ($\xi_{\text{эф}}$ легко находится из (7.24) с учетом равенства $f(\xi_{\text{эф}}) = 1/2$). Энергия, сообщаемая газу поршнем, концентрируется в уменьшающейся со временем области вблизи границы.

Для любого $0 < m_0 < \infty$ имеем $\xi(m_0, t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$. Поэтому, разрешая (7.24) относительно $f(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$:

$$f(\xi) = \xi^{\frac{n}{1+n\sigma}} + n(1+n\sigma)^{-1} \xi^{\frac{n-1}{1+n\sigma}} + \dots,$$

и переходя с помощью (7.22) к исходным переменным, получаем при $t \rightarrow 0$

$$p(m_0, t) \rightarrow \left(\frac{A_0}{k_0^n}\right) m_0^{\frac{n}{1+n\sigma}} + \frac{n}{1+n\sigma} \left(\frac{A_0^{\sigma+1}}{k_0^{n-1}}\right)^{\frac{1}{1+n\sigma}} m_0^{\frac{n-1}{1+n\sigma}} (-t) + \dots$$

Решение стремится снизу к предельной кривой (первый член в полученной формуле), обращаясь в момент $t = 0$ в бесконечность лишь в точке $m = 0$.

3) Для анализа решения при $n < -1/\sigma$ рассмотрим поле интегральных кривых уравнения (7.23), показанное на рис. 7.5 (жирной линией выделена кривая I , для которой $f(0) = 1$, штриховая линия – изоклина бесконечности, разделяющая плоскость на области А и В). Из рисунка видно, что непрерывного решения, отвечающего требованию $f(\infty) = 0$ не существует, так как кривую I нельзя продолжить в область В за линию $f = \infty$. По этой же причине нельзя построить и разрывные решения, получающиеся с помощью скачков, изображенных стрелками. Таким образом, единственная возможность

– переход с кривой I скачком, попадающим на ось абсцисс, и продолжение при $\xi > \xi_\Phi$, ξ_Φ – координата скачка, решения нулем (значение $f(\xi) = 0$ удовлетворяет уравнению (7.23)).

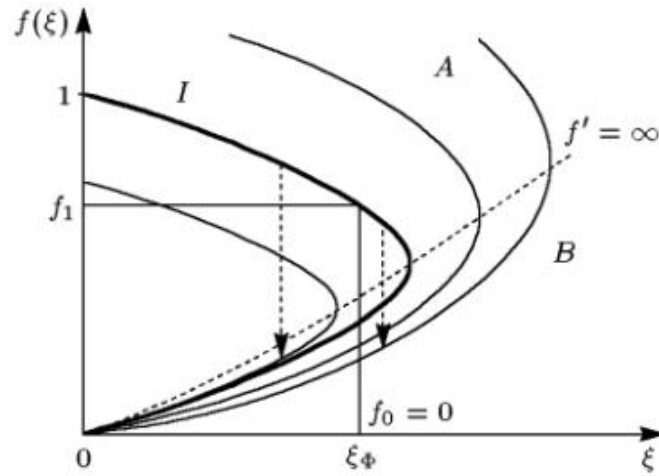


Рис. 7.5

Условие на скачке для решения уравнения (7.19) можно получить по аналогии с уравнениями (7.5), представив (7.19) в дивергентном виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(p)}{\partial m} = 0,$$

где $\varphi(p) = k_0 p^{\sigma+1}/(\sigma+1)$, и построив для него разрывное решение типа бегущей волны $p(m, t) = p(m - Dt)$. Значения функции p до и после разрыва связаны соотношением

$$D = \frac{\varphi(p_0) - \varphi(p_1)}{p_0 - p_1}.$$

Отсюда для автомодельного решения (8.22) имеем

$$\bar{D} = -(1+n\sigma)(\sigma+1)\xi_\Phi = \frac{f_0^{\sigma+1} - f_1^{\sigma+1}}{f_0 - f_1},$$

где ξ_Φ – автомодельная координата разрыва, $\bar{D}$ – его обезразмеренная скорость, связанная с мгновенной скоростью $D(t)$ соотношением $D = (\sigma+1)^{-1} k_0 A_0^\sigma (-t)^{n\sigma} \bar{D}$. Для интересующего нас случая $f_0 = 0$ находим связь между f_1 и ξ_Φ

$$f_1 = [-(1+n\sigma)(\sigma+1)\xi_\Phi]^{1/\sigma},$$

используя которую нетрудно установить, что точка (f_1, ξ_Φ) лежит выше линии $f' = \infty$, т. е. искомое разрывное решение действительно существует.

Решение как функция m изображено в различные моменты времени на рис. 7.6. Его фронт $m_\Phi(t)$ и полуширина $m_{\Phi/2}(t)$ неограниченно растут со временем по закону

$$m_\Phi(t) \sim m_{\Phi/2}(t) \sim (-t)^{1+n\sigma} \rightarrow \infty, t \rightarrow 0.$$

Возмущение в пределе охватывает все пространство, решение в любой точке $m_0 < \infty$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow 0$.

Таким образом, как и для процессов теплопроводности, в «медленных» режимах с обострением возмущения локализованы, в «быстрых» – локализация отсутствует.

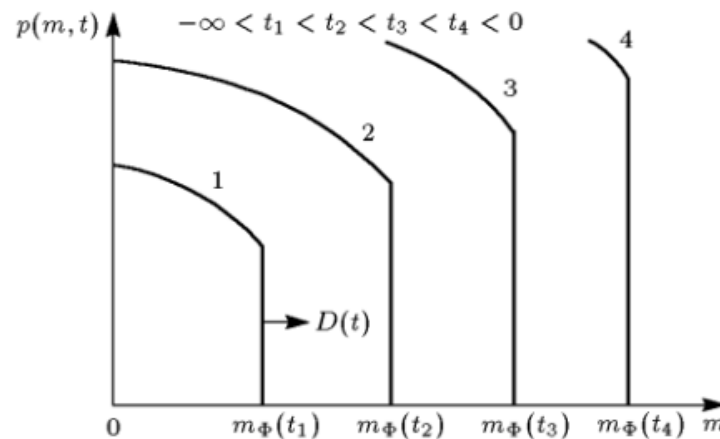


Рис. 7.6

Заметим, что уравнение (7.19) выводится из уравнений (7.5) в предположении о непрерывности и из энтропичности течения (простая волна). Так как построенные решения в случае $n \geq -1/\sigma$ непрерывны, то они удовлетворяют (7.5) и допускают непосредственную газодинамическую интерпретацию (в отличие от разрывного решения при $n < -1/\sigma$).

Дадим представление о непрерывной зависимости процесса от входных данных. С помощью теорем сравнения и набора автомодельных решений построим замкнутую классификацию режимов с обострением в нелинейных средах. Рассмотрим обобщения автомодельного метода.

7.4. Формулировка, некоторые следствия

Совокупности промежуточных асимптотик, какими бы разнообразными они ни были, не могут дать описание объекта в общем случае хотя бы потому, что при их получении всегда приходится делать сильные упрощающие предположения (нулевой начальный фон температуры в нагреваемой среде, постоянство течения до и после ударной волны, решение на границе – степенная функция времени и т. д.). Построение достаточно полной картины невозможно без использования *устойчивости* математических моделей, или *непрерывной зависимости решений от входных данных*. Под этим подразумевается свойство решений несильно (в некотором смысле) изменяться при несильном изменении краевых условий, коэффициентов уравнений и других характеристик моделей. Устойчивость, математически выражаемая по-разному для разных ситуаций, является одним из необходимых условий корректности моделей, без чего нельзя говорить об их адекватности изучаемому объекту (предполагается, что в определенном смысле устойчив и сам объект). Для устойчивых моделей наборы частных решений служат своего рода ориентирами или границами среди множества всех возможных решений.

Это особенно важно, если задача нелинейна и сконструировать ее общее решение из частных нельзя.

Применительно к уравнениям параболического типа это свойство находит свое воплощение в *принципе максимума и теоремах сравнения*. Рассмотрим задачу Коши для уравнения нелинейной теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad k(T) > 0, \quad T > 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ T(x, 0) - T_0(x) &\geq 0, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (7.26)$$

П р и н ц и п м а к с и м у м а. *Максимум решения $T(x, t)$ (температуры) в любой момент времени не превосходит максимума начальных данных $T_0(x)$ (начальной температуры):*

$$\max_{t>0, -\infty < x < \infty} T(x, t) \leq \max_{-\infty < x < \infty} T_0(x). \quad (7.27)$$

Неравенство (7.27) имеет очевидный физический смысл. Максимум начального распределения температуры никак не может увеличиться с течением времени, ведь по закону Фурье поток тепла переносит энергию от нагретых участков среды к холодным.

В случае первой краевой задачи для уравнения (7.26) в полупространстве принцип максимума имеет столь же ясный смысл и означает, что

$$\max_{t>0, -\infty < x < \infty} T(x, t) \leq \max \left\{ \max_{0 \leq x < \infty} T_0(x), \max_{t \geq 0} T(0, t) \right\} \quad (7.28)$$

где $T_0(x)$ – начальная температура вещества, $T(0, t)$ – задаваемая на его границе температура.

Из принципа максимума следуют **т е о р е м ы с р а в н е н и я**. Для задачи Коши (7.27) формулировка выглядит следующим образом.

Пусть $T^{(1)}(x, t)$, $T(x, t)$, $T^{(2)}(x, t)$ – решения задачи Коши, соответствующие начальным данным $T_0^{(1)}(x)$, $T_0(x)$, $T_0^{(2)}(x)$. Тогда если

$$T_0^{(1)}(x) \leq T_0(x) \leq T_0^{(2)}(x) \text{ для всех } -\infty < x < \infty,$$

то

$$T_0^{(1)}(x, t) \leq T_0(x, t) \leq T_0^{(2)}(x, t) \text{ для всех } -\infty < x < \infty, t > 0. \quad (7.29)$$

Другими словами, если взять два одинаковых образца теплопроводного материала таких, что начальная температура одного из них не меньше, чем в такой же точке другого, то в любой последующий момент времени это свойство сохранится. Для первой краевой задачи в полупространстве теорема сравнения решений означает следующее.

Выполнение неравенств

$$\begin{aligned} T_0^{(1)}(x) &\leq T_0(x) \leq T_0^{(2)}(x), \quad 0 < x < \infty, \\ T^{(1)}(0, t) &\leq T_0(0, t) \leq T^{(2)}(0, t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

влечет за собой неравенства

$$T^{(1)}(x, t) \leq T(x, t) \leq T^{(2)}(x, t) \text{ для всех } 0 \leq x < \infty, t > 0, \quad (7.30)$$

где $T^{(1)}(x, t)$, $T(x, t)$, $T^{(2)}(x)$ – решения задачи, соответствующие краевым условиям $T^{(1)}(x)$, $T(x)$, $T^{(2)}(x)$ и $T^{(1)}(0, t)$, $T_0(0, t)$, $T^{(2)}(0, t)$.

Как и принцип максимума, теоремы сравнения имеют непосредственный физический смысл: большее тепловое воздействие на фиксированный объект приводит к формированию в нем большего поля температуры.

Аналоги сформулированных утверждений справедливы и для других задач теории теплопроводности. Используя частные решения каких-либо задач для уравнений параболического и эллиптического типов, можно оценить (ограничить сверху и снизу) решения более общих задач и, не зная их в деталях, сделать выводы общего характера. Непрерывная зависимость решений от входных данных в той или иной форме установлена также для широких классов гиперболических уравнений (например, для уравнения (7.19) согласно теоремами сравнения выражается, аналогичными теоремам для уравнения (7.26)).

Из неравенств (7.29) и свойств решения (7.9) вытекает конечная скорость распространения возмущений в задаче Коши (7.26) для уравнения (7.26) с $k(T) = k_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$, при условии, что начальное распределение температуры $T_0(x)$ – финитная функция, т. е. $T_0(x) \equiv 0$, $|x| \geq R_0 < \infty$. Пусть T_m – максимальное значение функции $T_0(x)$. Тогда, вводя в формулу (7.9) из темы 7 сдвиг по времени на величину t_0 и выбирая постоянные Q_0 и t_0 достаточно большими, нетрудно удовлетворить неравенству $T_m \leq \bar{T}(R_0, 0)$, из которого следует неравенство $T_0(x) \leq \bar{T}_0(x, 0) \leq \bar{T}_0(x)$, $-\infty < x < \infty$, где через $\bar{T}(x, t)$ обозначено решение задачи о мгновенном точечном источнике тепла. Так как оно мажорирует решение общей задачи Коши (7.1) по начальным данным, то из теоремы сравнения (7.4) вытекает $T(x, t) \leq \bar{T}(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Поэтому в любой момент времени $t > 0$ найдется величина $R(t)$ такая, что $T(x, t) \equiv 0$ для всех $|x| \geq R(t)$. Это и означает конечную скорость движения фронта тепловой волны.

Путем схожих построений из свойств решения типа бегущей волны и неравенств (7.5) легко устанавливается (при финитной функции $T_0(x)$) конечная скорость распространения тепла в случае первой краевой задачи в полупространстве. Следовательно, этот эффект имеет общий, а не частный характер. Он связан с особенностями уравнения нелинейной теплопроводности (7.26). Для многих важных процессов температура в некоторых частях вещества может считаться практически равной нулю (например, на начальной стадии сильного взрыва в атмосфере температура вне его зоны ничтожно мала по сравнению с температурой в области, охваченной взрывом). При достаточно сильном росте коэффициента теплопроводности от температуры величина $k(T)$ в этих зонах также фактически равна нулю. Раскрывая правую часть уравнения (7.26):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2,$$

убеждаемся, что в точках x, t , в которых $T(x, t) = 0$ и, таким образом, $k(T(x, t)) = 0$, оно вырождается в уравнение первого порядка (в остальной области (7.26)

– параболическое уравнение второго порядка). Такова математическая подоплека конечной скорости распространения тепла в среду с нулевым температурным фоном. В точках вырождения решение, как уже было показано на частных примерах, следует понимать в обобщенном смысле, в остальной области оно удовлетворяет уравнению (7.1) в обычном (классическом) смысле.

Более подробно рассмотрим доказательство существования эффекта локализации тепла в задаче Коши. Утверждение состоит в следующем: решение $T(x, t)$ задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad \sigma > 0, \quad t > t_0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (7.31)$$

с начальной функцией

$$T(x, t_0) = \begin{cases} T_M \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)^{2/\sigma}, & |x| \leq x_0 \\ 0, & |x| > x_0, \end{cases} \quad (7.32)$$

локализовано в (первоначальной) области $|x| \leq x_0$ в течение времени локализации t_π , не меньшего, чем

$$t_\pi = \frac{x_0^2 \sigma}{2k_0(\sigma + 2)T_M^\sigma}, \quad (8.33)$$

т. е. $T(x, t) \equiv 0, |x| > x_0, t_0 \leq t \leq t_0 + t_\pi$.

В силу (7.27) максимум $T_m(t)$ решения задачи (7.31), (7.32) не превосходит начального при всех $t > t_0$:

$$T_m(t) = T_m(0, t) \leq T_M,$$

причем равенство $T_m(t) = T_m(0, t)$ следует из симметрии задачи. Рассмотрим решение $T(x, t)$ в области $x > 0$, обозначив его через $T_+(x, t)$. Функцию $T_+(x, t)$ можно, очевидно, трактовать при $t > t_0$ как решение первой краевой задачи для уравнения (7.6) в области $x > 0$ с начальным условием $T_+(x, t_0)$ из (7.32) и условием на границе $T_+(0, t)$, удовлетворяющим неравенству

$$T_+(0, t) = T_m(t) = T(0, t) \leq T_M.$$

По построению функция $T_+(x, t_0)$ не что иное, как решение (7.14), (8.15) (автомодельный S-режим $T_S(x, t)$, в котором $A_0 = [x_0^2 \sigma / (2k_0(\sigma + 2))]^{1/\sigma}$, $x_S = x_0$), взятое в момент $t_0 = -t_\pi = -x_0^2 \sigma / (2k_0(\sigma + 2)T_M^\sigma)$.

Сравним решения $T_+(x, t)$ и $T_S(x, t)$ при $t_0 \leq t < 0$ (взаимное расположение функций $T_+(x, t_0)$, $T_+(x, t)$ и $T_S(x, t)$, взятых в момент $t > t_0$, показано на рис. 7.1). Начальные данные в обоих случаях совпадают, а граничное условие для $T_+(x, t)$ мажорируется граничным условием для $T_S(x, t)$:

$$T_+(0, t) \leq T_M \leq A_0(-t)^{-1/\sigma}, \quad t_0 \leq t < 0.$$

Из теоремы сравнения (7.30) и свойств S-режима имеем

$$T_+(0, t) \equiv 0, \quad x > x_0, \quad t_0 \leq t < 0.$$

В силу симметрии $T_-(x, t) = T_+(-x, t)$, где $T_+(-x, t)$ – решение $T(x, t)$ в области $x < 0$ (смотрите рис. 7.7). С учетом этого окончательно получаем сформулированное выше утверждение

$$T(x, t) \equiv 0, \quad |x| \geq x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + t_\pi.$$

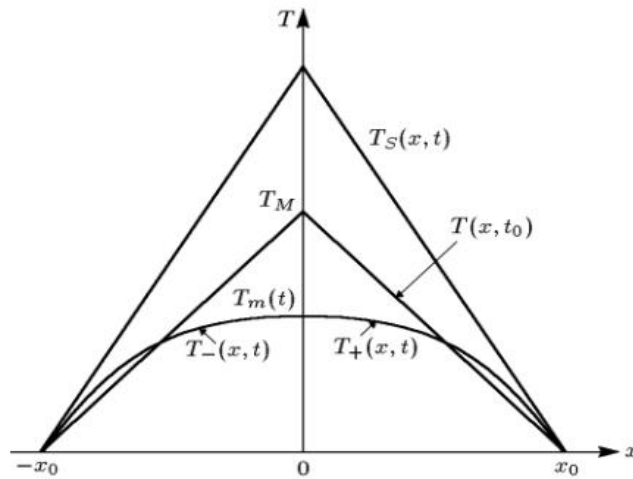


Рис. 7.7

Из теоремы сравнения (7.29) следует, что любое начальное распределение температуры, мажорируемое функцией (7.32) (и имеющее совпадающие с ней фронты), также локализовано в области $|x| \leq x_0$, а время локализации оценивается снизу по формуле (7.33). Таким образом, справедлив вывод общего характера: для среды, теплопередача в которой описывается уравнением (7.31), всегда можно указать профили температуры, обладающие «инерционностью». Фронты таких профилей, взятых в качестве начальных данных, начинают двигаться по веществу не сразу, а по истечении некоторого времени.

Заметим, что в среде с достаточно сильным поглощением тепла возможны ситуации, когда размер нагретой области ограничен постоянной величиной при всех $t_0 \leq t \leq \infty$ (физический смысл этого эффекта очевиден).

7.5. Классификация режимов с обострением

Инерционность свойственна лишь достаточно «пологим» температурным профилям; это видно из сравнения локализованного распределения (7.32) и, скажем, решения задачи о мгновенном точечном источнике тепла (формула (7.9)). Одним из способов формирования подобных профилей может быть воздействие на теплопроводную среду соответствующих граничных режимов. Например, в случае решения (7.14), (7.15) поступление энергии с границы согласовано со свойствами среды таким образом, что в любой момент времени в веществе воспроизводятся инерционные профили вида (7.7) (время локализации которых, естественно, уменьшается с ростом температуры).

Опираясь на изученные автомодельные решения и теоремы сравнения, дадим классификацию граничных режимов с обострением по результатам их воздействия на нелинейные среды.

Рассмотрим для (7.31) первую краевую задачу в полупространстве $x > 0$ с граничным условием

$$T(0, t) \rightarrow \infty, t \rightarrow 0, t_0 \leq t < \infty, \quad (7.34)$$

и, для простоты, нулевыми начальными данными

$$T(x, t_0) = T_0(x) = 0, \quad x \geq 0. \quad (7.35)$$

Локализация в этом случае, в отличие от задачи Коши, означает существование постоянной $l^* < \infty$ такой, что для решения $T(x, t)$ задачи (7.31), (7.34), (7.35) справедливо $T(x, t) \equiv 0$ при $l \geq l^*$, $t_0 \leq t < 0$. Другими словами, тепловые возмущения в течение всего процесса нагрева не проникают далее некоторой конечной глубины l^* (в противном случае локализация отсутствует).

Из теоремы сравнения (7.30) и свойств автомодельного S-режима вытекает, что если

$$T(0, t) \leq A_0 (-t)^{-1/\sigma}, \quad t_0 \leq t < 0,$$

то в задаче (7.31), (7.34), (7.35) имеет место локализация тепла на глубине $l^* = x_s$, а ее решение мажорируется функцией $T_s(x, t)$. Если же (7.34) удовлетворяет неравенству

$$T(0, t) \leq A_0 (-t)^n, \quad -1/\sigma < n < 0, \quad t_0 \leq t < 0, \quad (7.36)$$

то решение локализовано на глубине

$$l^* \leq \left(2k_0 A_0 (-t)^{1/\sigma+n} \frac{\sigma+2}{\sigma} \right)^{1/2}, \quad (7.37)$$

и при $0 \leq x \leq l^*$ для него справедлива оценка

$$T(x, t) \leq C(n, \sigma) (k_0^{-n} A_0)^{\frac{1}{1+n\sigma}} x^{\frac{2n}{1+n\sigma}}, \quad x \leq l^*, \quad t_0 \leq t < 0, \quad (7.38)$$

следующая из существования предельной кривой (7.18) для автомодельного LS-режима.

Неравенство, предшествующее (7.36), определяет класс граничных режимов с обострением, приводящих к локализации тепла; неравенство (7.36) уточняет этот результат: при его выполнении реализуется LS-режим, температура при $t \rightarrow 0$ неограниченно растет лишь в точке $x = 0$. При ненулевых, но финитных функциях $T_0(x)$ в (7.35) оба сделанных выше утверждения о локализации остаются в силе. Необходимо лишь выбрать достаточно большой величину A_0 мажорирующих решение автомодельных S- и LS-режимах; конкретные оценки (7.37), (7.38), естественно, претерпевают изменения. Заметим, что для общего LS-режима фронт волны, в отличие от автомодельного, находится не при $x = \infty$, а в конечной точке.

Эффект локализации в краевых задачах не связан с быстротой нагрева вещества как таковой. Чтобы убедиться в этом, проанализируем поведение решения (7.31), (7.34), (7.35) в случае, когда

$$T(0, t) \geq A_0 (-t)^n, \quad n < -1/\sigma, \quad t_0 \leq t < 0, \quad (7.39)$$

Прежде всего покажем, что в некоторый момент t_* ($t_0 < t_* < 0$) решение $T(x, t)$ отлично от нуля в окрестности границы $x = 0$. Для этого сравним его с решением $\bar{T}(x, t)$ типа бегущей волны

$$\bar{T}(x, t) = \begin{cases} \frac{D_\sigma}{k_0} [D(t-t_0) - x]^{1/\sigma}, & x \leq D(t-t_0), \\ 0, & x > D(t-t_0), \end{cases} \quad (7.40)$$

для уравнения (7.31), в котором $D = [A_0^\sigma (-t)^{n\sigma-1} k_0 / \sigma]^{1/2}$. По построению $\bar{T}(x, t_0) \equiv 0$, а постоянная D подобрана так, чтобы $\bar{T}(0, t) \leq T(0, t) \leq A_0(-t)^n$, $t_0 \leq t < 0$. Следовательно, $T(x, t) \leq \bar{T}(x, t)$, $0 \leq x < \infty$, $t_0 \leq t < 0$ в силу теоремы сравнения (7.30).

Обратимся теперь к решению (7.12) при $n < -1/\sigma$ (автомодельный HS-режим), обозначив его через $T_a(x, t)$. Выберем в нем величину $A_{0a} \leq A_0$ такой, чтобы при $t = t^*$ оно мажорировалось функцией (7.40), взятой в момент $t = t^*$, т. е. чтобы $T_a(x, t^*) \leq \bar{T}(x, t^*)$, $x \geq 0$ и, таким образом, $T_a(x, t^*) \leq T(x, t^*)$, $x \geq 0$. Из (7.39) имеем $T_a(0, t) \leq T(0, t)$ для всех $t > t^*$. Тогда из теоремы сравнения (7.30) получаем неравенство $T_a(x, t) \leq T(x, t)$ для всех $x \geq 0$ и $t \geq t^*$ (мажорирование при $t \geq t^*$ автомодельного HS-режима изучаемым решением). Поскольку $T_a(x, t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$, $x \geq 0$, то и $T(x, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ в любой точке $x \geq 0$.

При выполнении неравенства (7.39) локализация тепла отсутствует, волна нагрева при $t \rightarrow 0$ охватывает все вещество, температура в любой его точке неограниченно растет (данное утверждение тем более справедливо, если $T(x, t_0) \neq 0$).

Этот вывод завершает классификацию граничных режимов обострением в нелинейных теплопроводных средах. При воздействии на вещество «медленных» S- и LS-режимов ($T(0, t) \leq A_0(-t)^{-1/\sigma}$ или $T(0, t) \leq A_0(-t)^n$, $-1/\sigma < n < 0$) энергия локализуется в области конечных размеров, в «быстрых» HS-режимах (7.39) локализация не имеет места.

Для полноты картины поясним, что эффект локализации реализуется и при отказе от требования $T(x, t_0) \equiv 0$, $x \geq 0$ (или от требования финитности функции (7.35)). В этом случае локализацию следует понимать в более общем эффективном смысле как существование постоянной $L^* < \infty$ такой, что решение задачи (7.31), (7.34) при произвольной ограниченной функции $T_0(x)$ ограничено при $x \geq L^*$, $t \geq t_0$, несмотря на беспредельный рост решения в точке $x = 0$. Классификация граничных режимов с обострением не зависит от характера начального распределения температуры и остается прежней. В частности, не имеет значения, существует или нет в рассматриваемом процессе конечный фронт тепловой волны.

В качестве примера, иллюстрирующего эти утверждения, рассмотрим для уравнения (7.31) задачу с граничным условием

$$T(0, t) \leq A_S (-t)^{-1/\sigma}, \quad t_0 \leq t < 0, \quad (7.41)$$

отвечающим решению $T_S(x, t)$ – автомодельному S-режиму, но с постоянным начальным фоном температуры

$$T(x, t_0) = T_0 = A_S (-t)^{-1/\sigma}. \quad (7.42)$$

Ее решение $T(x, t)$, очевидно, мажорирует $T_S(x, t)$:

$$T_S(x, t) \leq T(x, t), \quad x \geq 0, \quad t_0 \leq t < 0.$$

Так как температура в точке $x = 0$ для обоих решений одна и та же, то из последнего неравенства вытекает следующее неравенство на производные в этой точке:

$$-\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} \leq -\frac{\partial T_s}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad t_0 \leq t < 0,$$

а из него – неравенство для потоков тепла на границе

$$W(0, t) = -k(T) \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} \leq W_s(0, t) = -k(T_s) \frac{\partial T_s}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad (7.43)$$

$$t_0 \leq t < 0.$$

Физический смысл (7.43) в том, что при прочих равных условиях первоначально более нагретая среда хуже «воспринимает» поступающую с границы энергию по сравнению с менее нагретой. Проинтегрируем (7.31) с учетом (7.43) по x от 0 до ∞ и по t от t_0 до $t < 0$ и (поскольку $W_s(\infty, t) = W(\infty, t) = 0$, $t_0 \leq t < 0$) получим

$$\int_0^{\infty} [T(x, t) - T_0] dx \leq \int_0^{\infty} [T_s(x, t) - T_s(x, t_0)] dx,$$

или, разбив область интегрирования на части от $x = 0$ до $x = x_s$ и от $x = x_s$ до $x = \infty$ и имея в виду, что $T_s(x, t) \equiv 0$, $x \geq x_s$, $t \geq t_0$, придем к неравенству

$$\int_0^{x_s} [T(x, t) - T_0] dx + \int_{x_s}^{\infty} [T(x, t) - T_0] dx \leq \int_0^{x_s} [T_s(x, t) - T_s(x, t_0)] dx.$$

Так как $T(x, t) \geq T_0$, $x \geq 0$, $t \geq t_0$, то данное неравенство можно переписать в виде

$$0 \leq \int_{x_s}^{\infty} [T(x, t) - T_0] dx \leq \int_0^{x_s} [T_s(x, t) - T(x, t)] dx + \int_0^{x_s} [T_0 - T_s(x, t_0)] dx,$$

откуда следует, в силу неравенств $T(x, t) \geq T_s(x, t)$, $x \geq 0$, $t \geq t_0$, и $T_0 \geq T_s(x, t_0)$, $x \geq 0$, ограниченность функции $T(x, t)$ при всех $x \geq x_s$, $t_0 \leq t < 0$. Другими словами, в задаче (7.31), (7.41), (7.42) осуществляется *эффективная локализация* тепла на глубине $L^* = x_s$, в точности равной глубине локализации при отсутствии температурного фона.

Классификация режимов с обострением для процессов, описываемых гиперболическим уравнением (8.19), проводится аналогичными методами и приводит к весьма схожим результатам: при действии на среду «медленных» граничных режимов имеет место локализация, в случае «быстрых» режимов этот эффект отсутствует.

7.6. Расширение «автомодельного метода»

Продемонстрированный в пп. 7.4, 7.5 подход, основанный на использовании широких классов автомодельных или иных частных решений и непрерывной зависимости процесса от входных данных, допускает разнообразные обобщения.

Покажем, что эффект локализации тепла может осуществляться не только в одномерной, но и в многомерной геометрии, построив соответствующее явное решение уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (7.44)$$

$$t_0 \leq t < 0,$$

рассматриваемого в квадранте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (здесь, как и ранее, $T = T(x, y, z, t)$ – температура).

По аналогии с одномерным S-режимом (7.14), (7.15) будем искать частное решение (7.19) в разделяющихся переменных, т. е. $T(x, y, z, t) = U(t)f(x, y, z)$. Подстановка этого выражения в (7.19) дает для $U(t)$ такую же, как и в одномерной геометрии, формулу $U(t) = A_0(-t)^{-1/\sigma}$.

Для функции $f(x, y, z)$ получается сложное эллиптическое уравнение. Поэтому ограничимся простым случаем, когда пространственная часть решения зависит фактически от одного аргумента: $f(x, y, z) = f(\xi) = x + y + z$. Тогда $f(\xi)$ подчиняется уравнению (7.13) при $n = -1/\sigma$, решение которого уже известно. В итоге приходим к многомерному S-режиму

$$T(x, y, z, t) = \begin{cases} A_0(-t)^{-1/\sigma} \left(1 - \frac{x+y+z}{r_\Phi}\right)^{2/\sigma}, & x+y+z \leq r_\Phi, \\ 0, & x+y+z > r_\Phi, \end{cases} \quad (7.45)$$

где $r_\Phi = r_s \equiv (2k_0A_0^\sigma(\sigma+2)/\sigma)^{1/2}$ вычисляется по формуле для одномерного решения. Решение (7.45) описывает нагрев трехмерной теплопроводной среды в режиме с обострением, поскольку граничная температура $T(0, y, z, t)$, $T(x, 0, z, t)$, $T(x, y, 0, t)$ обращается в бесконечность (в области $\xi < r_s$) при $t \rightarrow 0$. То же самое происходит в этой области и с решением. Однако во всем остальном пространстве $\xi > r_s$ квадранта $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ температура равна нулю вплоть до момента $t = 0$. Размер области локализации r_s (расстояние от начала координат до плоскости фронта тепловой волны), как и прежде, зависит от свойств среды k_0, σ и интенсивности граничного режима A_0 .

Поскольку для решений уравнения (7.44) справедливы теоремы сравнения, то из (7.45) сразу определяется класс граничных режимов, приводящих к локализации тепла в рассматриваемой многомерной области. Их дальнейшая классификация вполне аналогична полученным в п. 7.5 результатам.

Обратимся теперь к более широкой трактовке автомодельных решений, рассмотрев понятие *приближенные автомодельные решения*. Проще всего его ввести на примере задачи о нагреве среды с постоянными теплофизическими свойствами в режиме с обострением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, t_0 \leq t < 0, \\ T(0, t) &\rightarrow \infty, & t < 0. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Положим без ограничения общности $T(x, t_0) = 0, x \geq 0$. Общее решение линейной задачи (7.46) хорошо известно:

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k_0}} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{x^2}{4k_0(t-\tau)}\right) (t-\tau)^{-3/2} T(0, \tau) d\tau. \quad (7.47)$$

С помощью (7.47) нетрудно провести классификацию решений (7.46) в зависимости от вида $T(0, t)$. Видно, что, поскольку при $\tau \rightarrow t, t \rightarrow 0$ первый сомножитель в подынтегральном выражении стремится к нулю, а второй и

третий к бесконечности, то возможен любой из изучавшихся в п. 8.2 режимов распространения тепла.

Так, для $T(0, t) = A_0 e^{-a_0 t}$, $a_0 > 0$ – параметр, характеризующий граничный режим, температура неограниченно растет во всех точках $0 \leq x \leq x_S = 2\sqrt{k_0 a_0}$ при $t \rightarrow 0$, а в области $x \geq x_S$ ограничена для всех $t \leq 0$. Также ограничена тепловая энергия, содержащаяся правее точки $x = x_S$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_x^{\infty} T(x', t) dx' < \infty, \quad x > x_S, \quad t \leq 0,$$

т. е. осуществляется эффективная локализация тепла в S-режиме с вычисляемой из (7.22) глубиной $L^* = x_S = 2\sqrt{k_0 a_0}$.

Рассмотрев краевое условие более общего вида

$$T(0, t) = A_0 \exp(-a_0(-t)^n), \quad n < 0, \quad (7.48)$$

получим, что при $-1 < n < 0$ реализуется LS-режим, а для $n < -1$ HS-режим.

Анализ интеграла (7.48) не может дать некоторых важных деталей свойств процесса. Например, для того чтобы получить закон изменения со временем полуширины $x_{\text{эф}}(t)$, надо фактически решить интегральное уравнение (7.48). Задача (7.46), (7.48) не допускает, как легко показать с помощью П-теоремы, и построение автомодельных решений.

Модифицируем (7.46), (7.48) следующим образом: вместо (7.48) возьмем граничное условие в виде $T(0, t) = A_0 [\exp(-a_0(-t)^n) - 1]$, $n < 0$, (добавление константы сделано для удобства и при $t \rightarrow 0$ роли не играет) и проведем замену $V(x, t) = A_0 \ln(T(x, t)/A_0 + 1)$. Тогда для $V(x, t)$ получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= k_0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{k_0}{A_0} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2, \quad 0 < x < \infty, \quad t_0 \leq t < 0, \\ V(0, t) &= A_0 a_0 (-t)^n, \quad n < 0, \quad t_0 \leq t < 0, \\ V(x, t_0) &= 0, \quad 0 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Граничное условие (7.49) – степенная функция времени. Если по аналогии с п. 7.3 искать решение задачи (7.49) в виде, близком к степенному автомодельному решению, то для такого решения при $t < 0$ первый член в правой части уравнения становится ничтожно малым по сравнению со вторым, и им можно пренебречь.

Более строгий анализ показывает, что действительно решение задачи (7.49) близко при $t \rightarrow 0$ к решениям более простой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{k_0}{A_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad 0 < x < \infty, \quad -\infty < t < 0, \\ u(0, t) &= A_0 a_0 (-t)^n, \quad n < 0, \quad -\infty \leq t < 0, \\ u(x, -\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (7.50)$$

В отличие от (7.49) решение $u(x, t)$ задачи (7.50) – степенное автомодельное решение, проанализировать которое не представляет труда. Функция $u(x, t)$ является приближенным автомодельным решением для задачи (7.49) и, следовательно, для исходной задачи (7.46), (7.48). Относительная точность описания улучшается с течением времени:

$$\left| 1 - \frac{A_0}{T(x,t)} e^{u(x,t)/A_0} \right| \rightarrow 0, \quad t < 0, \quad x \geq 0.$$

Из свойств $u(x, t)$ вытекает закон для полуширины волны нагрева $x_{\text{эф}}(t) = (-t)^{(1-n)/2} \ln 2[k_0/(a_0(-n))]^{1/2}$, которая уменьшается во всех трех режимах (сравните с нелинейной средой). Заметим, что построение и анализ приближенных автомодельных решений возможны и используются при изучении широкого класса уравнений параболического типа.

Еще одно важное расширение автомодельного метода основано на *обобщении понятия сравнения решений*. Сущность этого подхода состоит в сравнении решений задач, отвечающих не только разным краевым условиям, как в пп. 7.4, 7.5, но и разным уравнениям (в случае уравнения (7.26) – разным функциям $k(T)$). В определенном смысле речь идет об устойчивости процесса теплопередачи по отношению к возмущениям тепло физических свойств среды. При этом в качестве одного из сравниваемых решений можно выбрать решение хорошо изученного уравнения (например, (7.31) или (7.46)) и получить содержательные результаты для решений более сложных уравнений.

Простейший вариант такого подхода продемонстрируем в случае уравнения (7.46). Рассмотрим решения $T^{(1)}(x, t)$ и $T^{(2)}(x, t)$ двух краевых задач в полупространстве $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} &= k_0^{(1)} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2}, & x > 0, & \quad t > 0, \\ T^{(1)}(0, t) &= T_1^{(1)}(t), & t > 0, \\ T^{(1)}(x, 0) &= T_0^{(1)}(x), & t > 0; \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} &= k_0^{(2)} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2}, & x > 0, & \quad t > 0, \\ T^{(2)}(0, t) &= T_1^{(2)}(t), & t > 0, \\ T^{(2)}(x, 0) &= T_0^{(2)}(x), & t > 0. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Для разности $V(x, t) = T^{(2)}(x, t) - T^{(1)}(x, t)$ из (7.26), (7.27) получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= k_0^{(1)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (k_0^{(2)} - k_0^{(1)}) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x}, & x > 0, & \quad t > 0, \\ V(0, t) &= T_1^{(2)}(t) - T_1^{(1)}(t), & t > 0, \\ V(x, 0) &= V_0(x) = T_0^{(2)}(x) - T_0^{(1)}(x), & x \geq 0. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Пусть выполнены требования мажорирования решения $T^{(1)}(x, t)$ решением $T^{(2)}(x, t)$ по краевым условиям:

$$T_1^{(1)}(t) \leq T_1^{(2)}(t), \quad t > 0, \quad (7.54)$$

$$T_0^{(1)}(x) \leq T_0^{(2)}(x), \quad x \geq 0,$$

и по коэффициенту теплопроводности:

$$k_0^{(1)} \leq k_0^{(2)}. \quad (7.55)$$

Пусть также для решения $T^{(2)}(x, t)$ справедливо

$$\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} \geq 0 \quad \text{при } x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (7.56)$$

Свойство (8.56) неубывания функции $T^{(2)}(x, t)$ со временем в любой точке $x \geq 0$ обеспечивается (при $T_0^{(2)}(x) \equiv 0$) неубыванием по t граничного условия $T_1^{(2)}(t)$. Проверим это, продифференцировав уравнение (7.52) по t и получив для функции $Z^{(2)}(x, t) = \partial T^{(2)} / \partial t = -W^{(2)}(x, t) / k_0$ задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z^{(2)}}{\partial t} &= k_0^{(2)} \frac{\partial^2 Z^{(2)}}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ Z^{(2)}(0, t) &\geq 0, \quad t > 0, \\ Z^{(2)}(x, 0) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Ее решение, как нетрудно показать, неотрицательно при всех $x \geq 0, t \geq 0$ (в случае $T_0^{(2)}(x) \neq 0$ для выполнения неравенства (7.31) достаточно наложить еще и условие $\partial^2 T_0(x) / \partial x^2 \geq 0, x \geq 0$).

При выполнении неравенств (7.54)–(7.56) задача (7.53) для $V(x, t)$ становится задачей

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= k_0^{(1)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad V(0, t) \geq 0, \quad t > 0, \\ V(x) &\geq 0, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (7.58)$$

с неотрицательными краевыми условиями и неотрицательной функцией $f(x, t)$ (источниками тепла) в правой части уравнения (7.58). Ее решение неотрицательно при всех $x \geq 0$ и $t \geq 0$. Отсюда следует мажорирование решения задачи (7.51) с коэффициентом $k_0^{(1)}$ решением задачи (7.52) с коэффициентом $k_0^{(2)}$ во всей рассматриваемой области:

$$T^{(1)}(x, t) \leq T^{(2)}(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (7.59)$$

В случае уравнения (7.26) неравенство (7.59) справедливо при дополнительном к (7.54)–(7.56) требованию на коэффициенты $k^{(1)}(T), k^{(2)}(T)$, имеющем вид $[k^{(2)}(T) / k^{(1)}(T)]'_T \geq 0, T \geq 0$.

С помощью подобных теорем сравнения (справедливых и для параболических уравнений общего вида) устанавливается, например, принципиально важный результат: для среды с любыми теплофизическими свойствами всегда можно указать класс граничных режимов, приводящих к локализации тепла, и класс режимов, при действии которых на среду локализация отсутствует. Таким образом, этот эффект носит общий характер.

Рассмотрим вариант метода осреднения, применяемый для изучения пространственно-временной динамики локализованных структур. Сформулируем два подхода к осредненному описанию. С их помощью получим классификацию режимов горения в теплопроводных средах.

7.7. Локализованные структуры в нелинейных средах

Изучавшийся в темах 6, 7 эффект локализации возмущений может проявляться не только при внешних воздействиях на среду, заданных в виде соответствующих граничных режимов с обострением, но и благодаря ее

собственным нелинейным свойствам. Достаточно сильная нелинейность порождает режимы с обострением, которые в свою очередь служат причиной возникновения структур – локализованных в пространстве неоднородностей величин.

Изучим пространственно-временное поведение распределения температуры в теплопроводном веществе с нелинейными источниками тепла. Энергия выделяется в результате горения, протекания химических или иных видов реакций. Среда считается неограниченной (задача Коши), процесс горения одномерным. Он описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_0 T^\beta, \\ q_0 > 0, \beta > 1, -\infty < x < \infty, t \leq t_0, \quad (7.60)$$

с начальной функцией

$$T(x, t_0) = T_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (7.61)$$

Теплофизические характеристики вещества (коэффициент теплопроводности и сильно нелинейный ($\beta > 1$) источник энергии $q_0 T^\beta$) – степенные функции температуры, хорошо аппроксимирующие в ряде случаев реальные зависимости. Горение инициируется начальным распределением температуры $T_0(x) \neq 0$ (в противном случае вещество оставалось бы холодным).

Построим пример *локализованной структуры горения* в задаче (7.60), (7.61). Будем искать ее решение в разделяющихся переменных в виде $T(x, t) = U(t)f(x)$. Тогда из (7.60) имеем

$$f \frac{dU}{dt} = U^{\sigma+1} \frac{d}{dx} \left(k_0 f^\sigma \frac{df}{dx} \right) + U^\beta q_0 f^\beta,$$

откуда видно, что переменные разделяются в случае, когда $\beta = \sigma + 1$, и тогда

$$U^{-(\sigma+1)} \frac{dU}{dt} = \frac{1}{f} \frac{d}{dx} \left(k_0 f^\sigma \frac{df}{dx} \right) + q_0 f^\sigma = C, \quad (7.62)$$

где $C > 0$ (ищутся режимы с растущей во времени температурой). Для $U(t)$ из (7.62) получаем выражение

$$U(t) = (C_1 - \sigma C t)^{-1/\sigma}, \quad C_1 > 0, \quad (7.63)$$

имеющее смысл лишь при $t < C_1/(\sigma C)$ и обращающееся в бесконечность в конечный момент времени $C_1 = \sigma C t$. Таким образом, температура растет в режиме с обострением. В дальнейшем положим без ограничения общности $C = 1/\sigma$ и обозначим $C_1 = t_f$.

Чтобы найти $f(x)$, заменой $f^{\sigma+1} = y$ преобразуем (7.62) сначала к уравнению

$$\frac{\sigma k_0}{\sigma + 1} y'' = y^{\frac{1}{\sigma+1}} - q_0 \sigma y,$$

имеющему вид уравнения колебаний шарика на пружинке с соответствующей внешней силой, а затем, используя замену $y' = \omega$, к уравнению первого порядка

$$\frac{\sigma k_0}{\sigma + 1} \frac{d\omega}{dy} = \frac{y^{\frac{1}{\sigma+1}} - q_0 \sigma y}{\omega}.$$

Его интегрирование дает связь между ω и y :

$$\frac{\sigma k_0}{\sigma+1} \frac{\omega^2}{2} = \frac{\sigma+1}{\sigma+2} y^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}} - q_0 \sigma \frac{y^2}{2} + C_2.$$

Для определения константы C_2 учтем, что функция $\omega = y' = f^\sigma f' (\sigma+1)$ с точностью до числового множителя представляет собой пространственную часть в выражении для потока $W(x, t) = -k_0 T^\sigma \cdot \partial T / \partial x = -k_0 U^{\sigma+1} f^\sigma f'$. На фронте тепловой структуры как температура f , так и тепловой поток должны обращаться в нуль. Следовательно, $\omega = 0$ при $y = 0$ ($f = 0$) и отсюда $C_2 = 0$. Переходя в последнем уравнении от y и ω обратно к f , получаем (при $C_2 = 0$) квадратуру

$$dx = \pm \frac{(\sigma+1)\sigma k_0 df}{f \sqrt{2 \frac{\sigma+1}{\sigma+2} f^{-\sigma} - q_0 \sigma}},$$

которая интегрируется явным образом:

$$f = A \cos^{2/\sigma} Bx, A = \left[q_0 \frac{\sigma(\sigma+2)}{2(\sigma+1)} \right]^{-1/\sigma}, B = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{q_0}{k_0(\sigma+1)}}. \quad (7.64)$$

Объединяя (8.63) и (8.64), приходим к окончательному виду искомого решения

$$T(x, t) = \begin{cases} [q_0(t_f - t)]^{-1/\sigma} \left\{ \frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \cos^2 \frac{\pi x}{L_T} \right\}^{1/\sigma}, & |x| \leq \frac{L_T}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{L_T}{2}, \end{cases} \quad (7.65)$$

где $L_T = 2\pi \sqrt{k_0 / q_0} \sqrt{(\sigma+1) / \sigma^2}$.

Решение (7.65) описывает немонотонное распределение температуры (структуру) с неподвижным фронтом и неизменной полушириной – автомодельный S-режим горения в нелинейной теплопроводной среде. Несмотря на беспредельный рост температуры в структуре при $t \rightarrow t_f$ (при $t \rightarrow -\infty$ температура обращается в нуль), процесс горения локализован в конечной области $|x| \leq L_T / 2$, размер которой определяется параметрами вещества k_0, q_0, σ . Локализация означает отсутствие влияния горячей структуры на участки среды, находящиеся за границами области $|x| \leq L_T / 2$.

Таким образом, горение нелинейной среды может осуществляться в виде любого числа независимых друг от друга тепловых структур (если их максимумы разделены расстоянием, большим L_T). Причина усложнения процесса, распада его на структуры заключается в *открытости* рассматриваемой системы, в обмене энергией с окружающей средой. В сравнении с такими системами термодинамикалық түрде тұйықталған үдерістер құрылымдар пайда болуына жол бермейдічески замкнутые процессы не допускают возникновения структур. В теплопроводной среде без источников, как видно из свойств решения задачи о мгновенном точечном источнике тепла и теорем сравнения, распределение температуры при $t \rightarrow \infty$ становится пространственно однородным.

По аналогии с автомодельными граничными режимами с обострением, для среды без источников тепла возможно построение также автомодельных LS- и HS-режимов горения. Они ищутся в виде

$$T(x, t) = [q_0(t_f - t)]^{\frac{1}{\beta-1}} f(\xi),$$

$$\xi = \frac{x}{k_0^{1/2} q_0^{m-1} (t_f - t)^m}, m = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)}, \quad (7.66)$$

и обладают схожими со своими граничными аналогами свойствами: в случае LS-режима ($\beta > \sigma + 1$) полуширина локализованной структуры сокращается со временем, а температура ограничена сверху предельной кривой при всех $t \leq t_f$ в случае HS-режима ($\beta < \sigma + 1$) локализация отсутствует.

Но буквальное повторение схемы, применявшейся в темах 7.1, 7.2, неприемлемо для изучения тепловых структур, по крайней мере в силу двух причин. Существование и свойства автомодельных LS- и HS-режимов горения устанавливаются (из-за сложности соответствующего уравнения) гораздо более тонкими, чем в темах 7.1, 7.2, методами. Кроме того, непосредственное применение автомодельных решений и теорем сравнения, в общем случае не дает завершенных результатов. Например, относительно нетрудно проверить, при $\beta = \sigma + 1$ любые начальные возмущения температуры будут развиваться в режиме с обострением. Доказать же их локализацию даже в этом частном случае, используя обычные теоремы сравнения, невозможно.

Действительно, в отличие от граничных режимов с обострением, различные решения задачи могут иметь различные и неизвестные заранее моменты обострения $t_f^{(1)} \neq t_f^{(2)}$ (из (7.66) видно, что при прочих равных условиях t_f тем меньше, чем больше амплитуда структуры в момент $t = t_0$). Поэтому одно из сравниваемых решений перестает существовать раньше другого, и дальнейшее равенство теряет смысл (необходимо использовать более сложные методы сравнения).

7.8. Различные способы осреднения

Для упрощенного анализа пространственно-временных характеристик тепловых структур воспользуемся методом осреднения. Различные варианты этого метода основаны на отказе от точного описания поведения решения как по пространству, так и по времени, и на переходе к некоторым средним характерным величинам, вычисляемым из более простых моделей.

Применительно к тепловым структурам в качестве таких величин можно выбрать пары «амплитуда–полуширина» или «амплитуда–положение фронта».

Рассмотрим первую из них. Будем считать начальную функцию $T_0(x)$ финитной, имеющей максимум в точке $x = 0$ и близкой к симметричной функции. Тогда решение $T(x, t)$ также будет почти симметричным. Приближенное решение ищется в похожем на автомодельный виде

$$T(x, t) = \psi(t)\theta(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{\varphi(t)}, \quad (7.67)$$

где $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ – зависящие от времени искомые амплитуда и полуширина структуры, $\theta(\xi)$ – некоторая фиксированная финитная монотонно убывающая функция, причем $\theta(0) = 1$.

Потребуем, чтобы (7.67) удовлетворяло интегральным равенствам (законам сохранения)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T}{\partial t} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx - \int_{-\infty}^{\infty} T^{\beta} dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T}{\partial t} T dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial x} \right) T dx - \int_{-\infty}^{\infty} T^{\beta+1} dx = 0.$$

Первое из них – закон сохранения энергии, второе моментное уравнение следует из интегрирования (7.60), умноженного на $T(x, t)$. Для простоты в (7.60) положено $k_0 = q_0 = 1$, что не ограничивает общности, так как эквивалентно использованию замены $t' = q_0 t$, $x' = x(q_0/k_0)^{1/2}$. Интегрированием двух последних равенств по частям с учетом того, что при $x = \pm\infty$ поток тепла $-T^{\sigma} \partial T / \partial x$ равен нулю, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} T dx = \int_{-\infty}^{\infty} T^{\beta} dx, \quad (7.68)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} T^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} T^{\sigma} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} T^{\beta+1} dx.$$

Подстановка (7.67) в (7.68) дает систему для $\psi(t)$, $\varphi(t)$:

$$\frac{d}{dt} [\Psi(t)\varphi(t)] = \nu_1 \Psi^{\beta}(t)\varphi(t),$$

$$\frac{d}{dt} [\psi^2(t)\varphi(t)] = -\nu_2 \Psi^{\sigma+2} \varphi^{-2}(t) + \nu_3 \Psi^{\beta+1}(t)\varphi(t), \quad (7.69)$$

где ν_1, ν_2, ν_3 – положительные постоянные,

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{\beta} d\xi,$$

$$\nu_2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{\sigma} \left| \frac{d\theta}{d\xi} \right|^2 d\xi / \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 d\xi, \quad (7.70)$$

$$\nu_3 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{\beta+1} d\xi / \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 d\xi.$$

При этом предполагается, что функция $\theta(\xi)$ такова, что выражения для ν_1, ν_2, ν_3 имеют смысл.

Систему (7.68) нетрудно разрешить относительно производных:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\Psi^{\sigma+1}}{\varphi^2} \left[(\nu_3 - \nu_1) \Psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 - \nu_2 \right],$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Psi^{\sigma}}{\varphi} \left[(2\nu_1 - \nu_3) \Psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 + \nu_2 \right], \quad t > t_0 = 0, \quad (7.71)$$

а от (7.71) – перейти к уравнению

$$\frac{d\Psi}{d\varphi} = - \frac{\psi}{\varphi} \frac{a \Psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 - 1}{b \Psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 - 1}, \quad \psi = 0, \varphi > 0, \quad (7.72)$$

где $a = (v_3 - v_1)/v_2$, $b = (v_3 - 2v_1)/v_2$. Потребуем выполнения условия $v_3 > 2v_1$, т. е.

$$a > 0, \quad b > 0, \quad (7.73)$$

необходимого для того, чтобы система (7.71) допускала режимы с обострением.

Итак, анализ задачи свелся к изучению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Такое же сильное упрощение получается для осреднения «амплитуда–положение фронта». Решение ищется в том же виде

$$T(x, t) = \Psi(t)\theta(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{g(t)}, \quad (7.74)$$

где $\psi(t) > 0$ – амплитуда структуры, а $g(t) > 0$ уже не полуширина, а положение ее движущегося фронта. Функция $\theta(\xi)$ выбирается так, что $\theta(\xi) > 0$, $0 < \xi < 1$, и $\theta(\xi) = 0$, $\xi \geq 1$, $\theta(0) = 1$, $\theta'(0) = 0$. В качестве первого интегрального уравнения для ψ и g выберем закон сохранения энергии и аналогично (7.69) получим

$$\frac{d}{dt}[\psi(t)g(t)] = v_1 \psi^\beta g(t), \quad t > 0. \quad (7.75)$$

Для вывода дополнительного уравнения воспользуемся тем, что $g(t)$ – фронт тепловой волны, и поэтому $W(g(t), t) \equiv 0$, $T(g(t), t) \equiv 0$. Дифференцируя второе из этих тождеств по времени:

$$\frac{\partial T}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} \equiv 0,$$

используя (7.60) и записывая производные в виде пределов, придем к равенству

$$\frac{dg}{dt} \lim_{|x| \rightarrow g^{-(t)}} \left[\frac{T(g(t), t) - T(x, t)}{g(t) - x} \right] = \lim_{|x| \rightarrow g^{-(t)}} \left[\frac{W(g(t), t) - W(x, t)}{g(t) - x} - T^\beta(x, t) \right].$$

Оно упрощается, если учесть, что $g(t)$ – точка фронта и $T(g(t), t) = W(g(t), t) \equiv 0$:

$$\frac{dg}{dt} \lim_{|x| \rightarrow g^{-(t)}} \frac{T(x, t)}{g(t) - x} = \lim_{|x| \rightarrow g^{-(t)}} \left[\frac{W(x, t)}{g(t) - x} + T^\beta(x, t) \right].$$

В окрестности фронта по предположению температура, как и в инертной среде, имеет следующее асимптотическое представление: $T(x, t) \approx (g(t) - |x|)^{1/\sigma}$ (смотрите в теме 7.1 решения с движущимся фронтом для уравнения (8.60) без источника). Тогда, как нетрудно проверить, второй член справа в последнем равенстве мал и им можно пренебречь (что и объясняет предположение о малом влиянии источника энергии на структуру решения у фронта). Отсюда получаем формулу

$$\frac{dg}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{W}{T} = - \lim_{T \rightarrow 0} \left(T^{\sigma-1} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (7.76)$$

для скорости dg/dt движения фронта волны. Подстановка (7.74) в (7.76) дает

$$\frac{dg(t)}{dt} = v_4 \frac{\psi^\sigma(t)}{g(t)}, \quad t > 0, \quad (7.77)$$

где $v_4 = -(\theta^\sigma)'(1)/\sigma > 0$.

Разрешая (7.75) относительно $\psi'(t)$, запишем (7.75), (7.77) как

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu_1 \psi^\beta - \nu_4 \psi^{\sigma+1} g^{-2}, \quad \frac{dg}{dt} = \nu_4 \psi^\sigma g^{-1}, \quad (7.78)$$

а затем перейдем к уравнению

$$\frac{d\psi}{dg} = \frac{\psi}{g} [\mu \psi^{\beta-(\sigma+1)} g^2 - 1], \quad g > 0, \quad \mu = \frac{\nu_1}{\nu_4}. \quad (7.79)$$

Как и в предыдущем случае, эволюция средних характеристик тепловой структуры описывается гораздо более простой моделью, чем исходная.

7.9. Классификация режимов горения теплопроводной среды

Начнем анализ задачи со случая $\beta = \sigma + 1$, опираясь на первый способ осреднения. Уравнение (7.72) имеет простой вид:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\psi}{\varphi} \frac{a\varphi^2 - 1}{b\varphi^2 - 1}, \quad \psi > 0, \quad \varphi > 0, \quad (7.80)$$

и легко интегрируется:

$$C_0 = \psi^{-1} \varphi^{-1} \left[1 - \frac{\nu_3 - 2\nu_1}{\nu_2} \varphi^2 \right]^{-\frac{\nu_1}{2(\nu_3 - 2\nu_1)}},$$

где $C_0 \geq 0$ – постоянная, определяемая начальными значениями $\varphi(0)$, $\psi(0)$. Характер эволюции тепловой структуры наглядно виден из поведения фазовых траекторий уравнения (7.80) (рис. 7.8).

Жирной линией показана траектория

$$\varphi \equiv \varphi_S = [\nu_2(\nu_3 - 2\nu_1)]^{1/2} = \frac{L_T}{2}, \quad (7.81)$$

отвечающая автомодельному S-режиму горения (7.66) (она же – изоклина бесконечности уравнения (7.80)), штриховая линия – изоклина нуля $\varphi = a^{-1/2} < \varphi_S$. Справедливость (7.81) вытекает из того, что в соответствии с (7.66) функцию $\theta(\xi)$ в (7.68) естественно взять в виде

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \cos^{2/\sigma} \frac{\pi \xi}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

Тогда из (7.66) получаем для амплитуды и полуширины соотношения

$$\psi(t) = \left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \right]^{1/\sigma} (t_f - t)^{-1/\sigma}, \quad \varphi(t) = \frac{L_T}{2},$$

а для коэффициентов ν_1 , ν_2 , ν_3 из (8.69) –

$$\nu_1 = \frac{\sigma+2}{2(\sigma+1)}, \quad \nu_2 = \frac{\pi^2}{\sigma(\sigma+2)}, \quad \nu_3 = \frac{\sigma+4}{\sigma+2}.$$

Подстановка этих выражений в (7.80) приводит к тождеству, т. е. автомодельное решение абсолютно точно описывается методом осреднения.

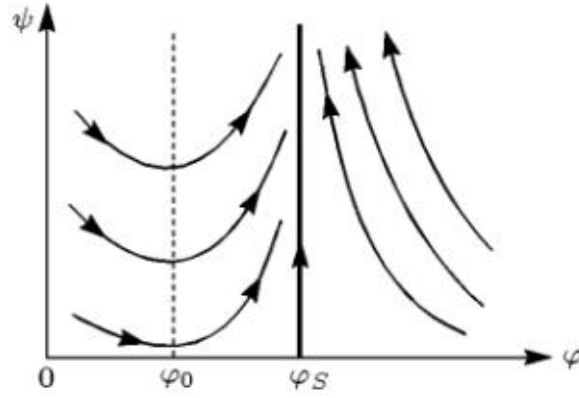


Рис. 7.8

Что же касается неавтомодельных решений, то все они, как видно из рис. 7.8, развиваются в режиме с обострением, их траектории стремятся к автомодельной: $\varphi(t) \rightarrow \varphi_S, t \rightarrow t_f$. Отсюда следует

$$\psi(t) \sim (\sigma v_1)^{-1/\sigma} (t_f - t)^{-1/\sigma}, \quad t \rightarrow t_f, \quad (7.82)$$

т. е. на развитой стадии горение протекает по автомодельному закону. На начальной стадии оно может идти более сложным образом: при функциях $T_0(x)$ с полушириной, меньшей φ_0 , температура в структуре сначала уменьшается и начинает расти лишь после достижения полушириной критического размера $\varphi = \varphi_0$.

Случай $\beta \neq \sigma + 1$ будем анализировать с помощью уравнения (7.79). Оно имеет при $\beta \neq \sigma + 3$ общее решение

$$\left| \psi^{\beta-(\sigma+1)} g^2 - l_0 \right|^{\frac{1}{\sigma+1-\beta}} \psi g = C_0, \quad l_0 = \frac{1}{\mu} \frac{\beta - (\sigma + 3)}{\beta - (\sigma + 1)}, \quad (7.83)$$

где $C_0 \geq 0$ определяется начальными данными, а при $\beta = \sigma + 3$ – решение

$$\psi^2 = [g^2(C_0 - 2\mu \ln g)]^{-1}, \quad C_0 = \text{const} > 0. \quad (7.84)$$

Поведение интегральных кривых уравнения различно в диапазонах $\beta < \sigma + 1$, $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$, $\beta > \sigma + 3$. На рис. 7.9, 7.10, соответствующих случаям $\beta < \sigma + 1$, $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$, штриховыми линиями показаны изоклины нуля ψ_0 , жирной – особая траектория (сепаратриса)

$$\psi = \psi_D = l_0^{\frac{1}{\beta-(\sigma-1)}} g^{-\frac{2}{\beta-(\sigma+1)}}, \quad (7.85)$$

существующая при $\beta < \sigma + 1$ (и $\beta > \sigma + 3$) и отвечающая значению $C_0 = 0$ в общем решении.

Рассмотрим поведение средних характеристик тепловых структур. В случае $\beta < \sigma + 1$ (рис. 7.9) все траектории сходятся к сепаратрисе (7.85), и структура, как следует из (7.78), асимптотически стремится к автомодельному режиму:

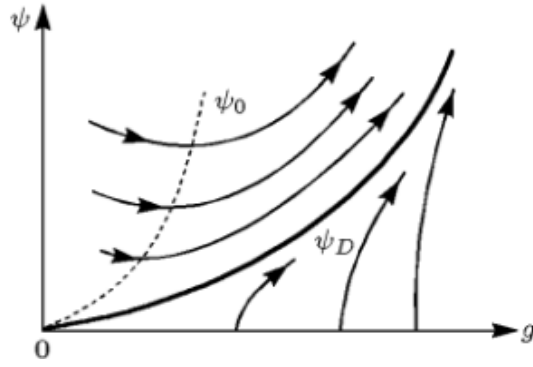


Рис. 7.9

$$\psi(t) \sim (t_f - t)^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad g(t) \sim (t_f - t)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}, \quad t \rightarrow t_f,$$

причем $g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_f$, т. е. локализация тепла в HS-режиме отсутствует.

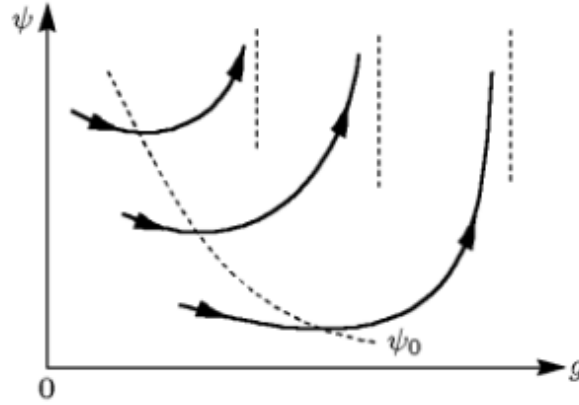


Рис. 7.10

Более разнообразно поведение тепловых структур LS-режима ($\beta > \sigma + 1$). При $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$ (рис. 7.10) любая траектория имеет вертикальную асимптоту с координатой

$$g_* = C_0^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{\beta-(\sigma+3)}},$$

т. е. $g(t) \rightarrow g_*$, $t \rightarrow t_f$, что означает локализацию горения в области $|x| < g_*$.

Амплитуда структуры растет по автомодельному закону $\psi(t) \sim (t_f - t)^{\frac{1}{\beta-1}}$, $t \rightarrow t_f$ (поведение полуширины при данном способе осреднения, естественно, не описывается).

Вывод о развитии обостряющейся локализованной структуры справедлив для части траекторий и в случае $\beta \geq \sigma + 3$, причем для $\beta = \sigma + 3$ из (7.84) получаем $g_* = e^{C_0/(2\mu)}$. Однако при $\beta > \sigma + 3$ (рис. 7.11; линии ψ_D и ψ_0 имеют тот же смысл, что и на рис. 7.9) на фазовой плоскости LS-режима существует сепаратриса (7.85), разделяющая принципиально разные классы решений. Для начальных функций $T_0(x)$, отвечающих области выше линии ψ_D , развивается уже изученный режим с обострением. Если же начальное возмущение имеет либо небольшую амплитуду, либо небольшой размер

(область ниже линии ψ_D), то режим с обострением не развивается. Температура в структуре (смотрите (7.83)) эволюционирует по закону

$$\psi(g) \sim F_0 g^{-1}, \quad F_0 = C_0 l_0^{\frac{1}{\sigma+1-\beta}} > 0, \quad g \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (7.78) получаются асимптотические оценки

$$\psi(g) \sim t^{\frac{1}{\sigma+2}}, \quad g(t) \sim t^{\frac{1}{\sigma+2}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Подобное поведение характерно для автомодельных решений в среде без выделения энергии, например, для решения задачи о мгновенном точечном источнике тепла из п. 7.2. Итак, в случае $\beta > \sigma + 3$ при недостаточно сильном инициировании процесс горения среды затухает. Заметим, что в HS-режиме и в обостряющемся LS-режиме существует (аналогично S-режиму) критический размер структуры $\varphi = \varphi_0$, при достижении которого ее температура начинает расти.

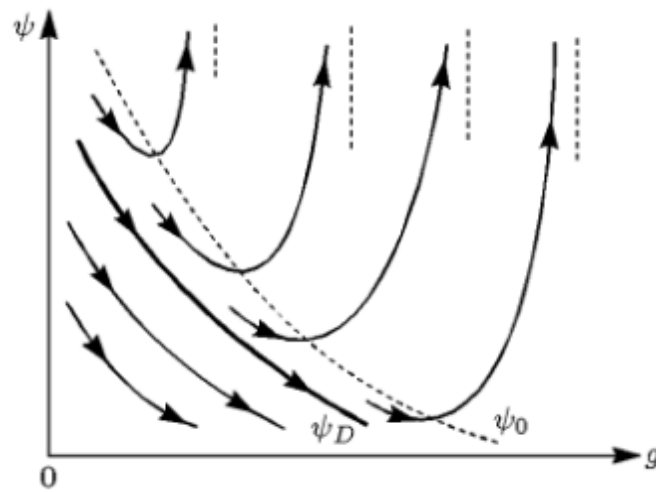


Рис. 7.11

Метод осреднения позволил получить вполне законченную классификацию структур горения в нелинейной среде. Покажем, что их возникновение не является специфическим свойством процессов, описываемых параболическими уравнениями. Построим простой пример *локализованных газодинамических структур*. Рассмотрим непрерывное (без ударных волн) сжатие конечной массы газа $2M_0$, заключенной внутри цилиндрического поршня (рис. 7.12).

Одномерный процесс описывается системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial m} r v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -r \frac{\partial p}{\partial m}, \quad p \rho^{-\gamma} = \varphi(m) \geq 0, \quad (7.86)$$

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad 0 < m < M_0, \quad t_0 \leq t,$$

где: t – время; m – массовая координата, отсчитываемая от оси симметрии и связанная с эйлеровой координатой соотношением $dm = r r$; ρ , v , p – искомые плотность, скорость и давление газа; $\gamma > 1$ – показатель адиабаты; φ – заданная энтропийная функция. Систему (7.86) нетрудно получить из уравнений движения в форме Эйлера. Напомним: первые два уравнения (7.86) – законы

сохранения массы и импульса, третье – интеграл адиабатичности (в отсутствие ударных волн энтропия фиксированной частицы газа со временем не меняется), четвертое – кинематическая связь между r и ν .

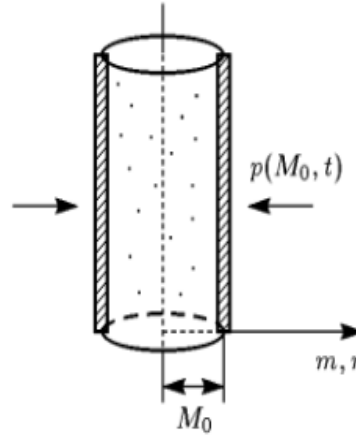


Рис. 7.12

По аналогии с тепловыми S-режимами построим решение (7.86) в разделяющихся переменных:

$$\begin{aligned} p(m, t) &= p_1(t)\pi(m), & \nu(m, t) &= u_1(t)u(m), \\ r(m, t) &= r_1(t)R(m), & & \\ 0 < m < M_0, & & t_0 \leq t < t_f, \end{aligned} \quad (7.87)$$

Причем временную часть (7.87) без существенного ограничения общности сразу возьмем в виде степенных функций

$$\begin{aligned} p &= p^0(t_f - t)^n \pi(m), & \nu &= u^0(t_f - t)^{n-1} u(m), \\ r &= r^0(t_f - t)^{n_2} R(m), & & \\ 0 < m < M_0, & & t_0 \leq t < t_f < \infty, \end{aligned} \quad (7.88)$$

и положим в дальнейшем для упрощения выкладок $p^0 = u^0 = r^0 = 1$.

Подставляя эти выражения в (7.86), получим

$$n = -2, \quad n_1 = \frac{1-\gamma}{\gamma} < 0, \quad n_2 = \frac{1}{\gamma} > 0. \quad (7.89)$$

В отличие от плоского случая (смотрите соответствующее решение в п. 7.3), показатель n в законе для давления не зависит от γ . Для определения π , u , R имеем систему

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\gamma} \varphi(m)^{1/\gamma} \pi^{-1/\gamma} &= \frac{d(Ru)}{dm}, & \frac{1-\gamma}{\gamma} u &= R \frac{d\pi}{dm}, & u &= -\frac{1}{\gamma} R, \\ 0 < m < M_0, \end{aligned}$$

которая легко решается. Например, пространственный профиль для $\pi(m)$ дается простой формулой

$$\pi(m) = \pi(M_0) + \frac{(\gamma-1)(m-M_0)}{\gamma^2}, \quad 0 < m < M_0, \quad (7.90)$$

где $\pi(M_0)$ определяется из закона для давления на поршне. Заметим, что в силу уравнения $u = -R/\gamma$ скорость газа на оси цилиндра $r = 0$ ($m = 0$) удовлетворяет естественному условию симметрии $\nu(0, t) = 0$.

Из (7.88)–(7.90) найдем окончательный вид решения для давления:

$$p(m, t) = (t_f - t)^{-2} \left[\pi(M_0) + \frac{(\gamma - 1)(m - M_0)}{\gamma^2} \right],$$

$$0 < m < M_0, \quad t_0 \leq t < t_f,$$

и (с учетом третьего уравнения (8.86)) для плотности:

$$p(m, t) = (t_f - t)^{-2/\gamma} \varphi(m)^{-1/\gamma} \left[\pi(M_0) + \frac{(\gamma - 1)(m - M_0)}{\gamma^2} \right]^{1/\gamma},$$

$$0 < m < M_0, \quad t_0 \leq t < t_f.$$

Положим в последней формуле для простоты $\pi(M_0) = \gamma - 1) M_0/\gamma^2$ и получим

$$p(m, t) = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \right)^{1/\gamma} (t_f - t)^{-2/\gamma} \left[\frac{m}{\varphi(m)} \right]^{1/\gamma}, \quad (7.91)$$

$$0 < m < M_0, \quad t_0 \leq t < t_f,$$

Из (7.91) видно, что функция $\rho(m, t)$, в отличие от $p(m, t)$, может иметь экстремумы. Степень сжатия участка среды определяется его энтропией $\varphi(m)$ и давлением в нем. Благодаря неизэнтропичности при монотонном профиле давления в волне сжатия возможно достичь большей плотности в областях с меньшим давлением и получить газодинамические структуры (в построенном примере структуры любой сложности). Они представляют собой связанные с фиксированной массой газа растущие в режиме с обострением и локализованные немонотонности плотности.

Дадим представление об элементарных требованиях к численным методам и об основных понятиях теории разностных схем. Рассмотрим некоторые типичные подходы к конструированию дискретных аналогов исходных моделей, используемых для их численного исследования.

7.10. Необходимость численного моделирования, элементарные понятия теории разностных схем

Как бы глубоки и разнообразны ни были методы качественного анализа математических моделей, область их применимости весьма ограничена. Это – либо простые, главным образом линейные, модели, либо отдельные фрагменты сложных, в том числе нелинейных моделей. Единственным универсальным способом исследования моделей является применение численных методов для нахождения приближенного решения поставленной задачи с помощью средств современной вычислительной техники информатики.

Доступный «пониманию» компьютера вычислительный алгоритм, т. е. последовательность операций (арифметических, логических и т. д.), в результате выполнения которых находится решение, должен удовлетворять весьма жестким и подчас противоречивым требованиям. К ним относится, прежде всего, необходимость получить решение с заданной точностью за разумное и по возможности минимальное число действий, поскольку время одного расчета должно измеряться минутами и лишь в уникальных случаях – часами. Объемы обрабатываемой при этом информации не могут превышать

возможностей емкости машинной памяти, в процессе вычислений нельзя допускать возникновения не воспринимаемых компьютером слишком больших (малых) чисел, структура алгоритма должна быть достаточно простой и учитывать архитектуру вычислительной системы и т. д.

Только отвечающие этим требованиям вычислительные алгоритмы позволяют проводить всестороннее численное исследование исходной модели, подвергать ее вычислительному эксперименту, проводя ее анализ в самых разных ситуациях и получая исчерпывающую информацию об изучаемом объекте. Такое понимание математического моделирования означает не просто уточнение количественных характеристик явлений, но также изучение основных их качественных свойств. Последнее важно прежде всего для нелинейных объектов, поведение которых может быть весьма разнообразным и неожиданным.

Подчеркнем, что проблемы численного моделирования не снимаются сами собой по мере появления все более мощных и дешевых компьютеров. Это связано, по меньшей мере, с двумя причинами: усложнением выдвигаемых как практикой, так и теорией задач и необходимостью проведения большого числа серий вычислительных экспериментов для достаточно полного изучения объекта.

Поэтому разработка эффективных вычислительных алгоритмов всегда остается одной из ключевых задач математического моделирования. Для их конструирования широко используются методы, идеи и подходы, применяемые при построении исходных математических моделей. Эта связь хорошо прослеживается на примере очень широкого класса моделей – тех, которые сводятся к дифференциальным уравнениям. Для них процесс создания вычислительных алгоритмов состоит из двух главных этапов: на первом строятся дискретные аналоги исходных моделей и изучаются их свойства, на втором дискретные уравнения решаются численно.

В дальнейшем основное внимание уделим первому этапу, рассмотрим сначала простейшую краевую задачу для уравнения второго порядка на отрезке

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u_1, \quad u(l) = u_2, \quad (7.92)$$

предполагая здесь и далее, что ее решение (понимаемое в соответствующем смысле) существует и единственно.

Переход от (7.92) к дискретной модели разбивается на две стадии. Заменим непрерывную область $0 < x < l$ на дискретную – совокупность конечного числа точек N . Самый простой способ – равномерное деление отрезка $[0, l]$ по правилу $x_i = ih$, $h = l/N$, $0 \leq i \leq N$. Множество $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, x = l\}$, $\omega_h = \{x_i\}$, $i = 1, \dots, N$, этих точек представляет собой (равномерную) *разностную сетку с шагом h* , точки x_i – ее узлы (смотрите рис. 7.13, на котором черточками отмечены основные узлы сетки, а крестиками – вспомогательные узлы $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2$ с полуцелыми индексами). Все фигурирующие в (7.92) функции рассматриваются теперь как функции не

непрерывного аргумента x , а дискретного аргумента x_i (сеточные функции), например, аналогом решения

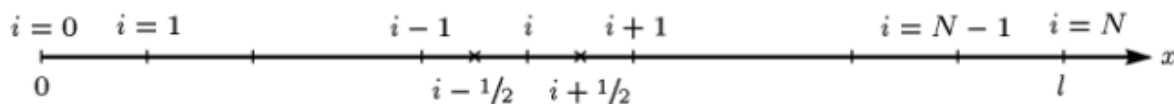


Рис. 7.13

$u(x)$, $0 \leq x \leq l$, служит аппроксимирующее его приближенное решение $y(x_i)$, $0 \leq i \leq N$.

На второй стадии строятся дискретные аналоги дифференциального уравнения (7.92) и входных данных. Наиболее естественная дискретизация дифференциального оператора – замена производных соответствующими конечными разностями. Введем обозначения

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad u_{xx} = \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h} \quad (7.93)$$

Первые два выражения из (7.93) – дискретная аппроксимация производной du/dx , для получения которой достаточно использовать значения функции $u(x)$ лишь в двух точках (двухточечный шаблон). Разлагая $u(x)$ в ряд Тейлора, нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(x) &= u_x + O(h), & \frac{du}{dx}(x) &= u_{\bar{x}} + O(h), \\ \frac{du}{dx}\left(x + \frac{h}{2}\right) &= u_x + O(h^2), & \frac{du}{dx}\left(x - \frac{h}{2}\right) &= u_{\bar{x}} + O(h^2). \end{aligned}$$

Другими словами, du/dx в целых узлах сетки $x = x_1$ аппроксимируется выражениями (8.93) с первым порядком аппроксимации, а в полужелых точках $x = x_{i+1/2}$, $x = x_{i-1/2}$ (в силу симметрии) – со вторым. Для замены второй производной функции u (третье выражение (7.93)) требуется, очевидно, трехточечный шаблон $x-h$, x , $x+h$, причем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = u_{xx} + O(h^2) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = u_{\bar{xx}} + O(h^2) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2),$$

т. е. аппроксимация имеет второй порядок.

Дискретная аппроксимация входных данных в рассматриваемом случае не представляет труда и осуществляется точно: $\varphi_i = f(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, N$; $y_0 = y(0) = u_1$, $y_N = y(l) = u_2$.

Объединяя все эти рассуждения, заменим (7.92) системой $N-1$ разностных уравнений для нахождения $N-1$ неизвестных значений приближенного решения y_i в узлах x_i сетки ω_h :

$$\begin{aligned} y_{xx} &= -\varphi, \text{ или } \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -\varphi_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, y_0 = u_1, y_N = u_2 \end{aligned} \quad (7.94)$$

Система (7.94) с краевыми условиями называется *разностной схемой* и служит дискретным аналогом модели (7.92). Ее решение находится относительно просто.

Проиллюстрируем, используя (7.91)–(7.93), элементарные понятия, связанные с разностными схемами. Сеточная функция $z_i = y_i - u_i$, $i = 1, \dots, N$, т. е. разница между точным и приближенным решениями в узлах сетки $x = x_i$, называется *погрешностью*. Если $z_i = O(h^a)$, $i = 1, \dots, N$; $a > 0$, то разностная схема (7.94) *сходится* (с порядком a), и $z_i \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ для всех i : при измельчении сетки y_i сколь угодно хорошо аппроксимирует точное решение и (x) в узлах x_i . Между узлами искомое решение можно при необходимости доопределить с помощью обычной интерполяции. В этом случае построение разностной схемы достигает своей цели.

Чтобы установить сходимость схемы (7.94), рассмотрим сеточную функцию

$$\psi_i = u_i'' - u_{xx}^-, i = 1, \dots, N-1,$$

называемую *погрешностью аппроксимации дифференциального оператора разностным*, или *невязкой* (здесь штрихами обозначено дифференцирование по x , $u'' = u''(x_i)$). Если $\psi_i = O(h^\beta)$, $i = 1, \dots, N-1$; $\beta > 0$, то имеет место аппроксимация: непрерывный оператор приближается дискретным с порядком β (здесь, как уже показано выше, $\beta = 2$), и $\psi_i \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, N-1$. Функция $f_i - \varphi_i$, $i = 0, \dots, N$, – погрешность аппроксимации правой части (в изучаемом примере она тождественно равна нулю, как и погрешность аппроксимации краевых условий).

Вычтем во внутренних узлах сетки $i = 1, \dots, N-1$ уравнение (7.92) из (7.94) и получим

$$y_{xx_i}^- - u_i'' = -\varphi_i + f_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

или, учитывая равенства $z = y_i - u_i$, $\psi_i = u_i'' - u_{xx}^-$, $\varphi_i = f_i$, придем к системе разностных уравнений для погрешности z_i с нулевыми краевыми условиями:

$$z_{xx}^- = \psi, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad z(0) = z(N) = 0, \quad (7.95)$$

правая часть которой – погрешность аппроксимации ψ .

Данное свойство позволяет установить основную связь между уже введенными понятиями сходимости и аппроксимации схемы (7.94) и понятием ее *устойчивости*. Последнее подразумевает, что для любых допустимых входных данных φ , u_1 , u_2 выполняется неравенство

$$\|y\| = \max_i |y_i| \leq C \|\varphi\| = C \max_i |\varphi_i|, \quad i = 0, \dots, N, \quad (7.96)$$

где $C > 0$ – постоянная, не зависящая от i и от h (в данном случае устойчивость по правой части).

Схема (7.95) – частный случай (7.94). Поэтому в случае выполнения (7.96) для нее немедленно имеем

$$|z| \leq C|\psi|, \text{ или } z_i = O(h^\beta) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

т. е. из свойств аппроксимации ($\psi = O(h^\beta)$) и устойчивости (7.96) разностной схемы (7.94) следует ее сходимость (с тем же порядком, что и порядок аппроксимации, $\alpha = \beta = 2$).

Поясним с помощью качественных рассуждений, что установленная связь распространяется на, вообще говоря, любые классы разностных схем. Пусть некоторая общая (абстрактная) задача

$$\begin{aligned} Lu &= f(x), & x \in G, & \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}, \\ u &= \mu(x), & x \in \Gamma, & \quad \bar{G} = G \cup \Gamma, \end{aligned} \quad (7.97)$$

в которой L – линейный дифференциальный оператор, действующий в открытой области $x \in G$ (Γ – граница замыкания $\bar{G} = G \cup \Gamma$ области G), f и μ – заданные функции $x \in \mathbb{R}^n$ (правая часть и значение искомого решения на границе), аппроксимируется некоторой разностной схемой

$$\begin{aligned} L_h u_h &= -\varphi_h, & x \in \omega_h, \\ Y_h(\gamma_h) &= \mu_h, & x \in \gamma_h, & \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h, \end{aligned} \quad (7.98)$$

где $\bar{\omega}, \omega_h, \gamma_h$ – разностные аналоги для $\bar{G}, G, \Gamma$, через L_h обозначен соответствующий разностный оператор, а сеточные функции u_h, φ_h, μ_h – аналоги точного решения и входных данных f, μ .

Введем, как и выше, погрешность $z_h = u_h - u$, невязку $\psi_h = (Lu)_h - L_h u_h$ и, считая аппроксимацию правой части и краевых условий точной, получим с учетом (7.97)

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h; \quad z_h = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (7.99)$$

Аналогично случаю схемы (7.94) правая часть разностной задачи для z представляет собой погрешность аппроксимации ψ . Если схема (7.98) устойчива, т. е. $\|Y_h\|_{(1)} \leq C\|\varphi_h\|_{(2)}$ (где символами $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ обозначены некоторые, вообще говоря, разные нормы сеточных функций u_h и φ_h), то из (7.99) следует

$$\|z_h\|_{(1)} \leq C\|\varphi_h\|_{(2)}.$$

Отсюда видно, что аппроксимация ($\|\psi_h\| \rightarrow 0, |h| \rightarrow 0$) и устойчивость схемы (7.98) обеспечивают ее сходимость ($\|z_h\| \rightarrow 0, |h| \rightarrow 0$). Такие же утверждения справедливы по отношению и к другим задачам для дифференциальных уравнений, аппроксимируемых разностными схемами, в том числе и к нелинейным (при этом определение устойчивости соответствующим образом модифицируется).

Таким образом, к дискретным моделям предъявляются по меньшей мере два требования – аппроксимация исходной модели и устойчивость. Тогда при достаточно точном численном решении разностных уравнений (как правило, они представляют собой системы линейных и нелинейных алгебраических уравнений порядка N , где N – число узлов сетки) и достаточно малых шагах получается достаточно точное приближенное решение. Подчеркнем: число узлов не может быть слишком большим (а ее шаги слишком маленькими), так как численное решение необходимо найти за приемлимое число операций, т. е. используя реальные сетки. Рассмотрим некоторые типичные методы построения дискретных моделей.

7.11. Непосредственная формальная аппроксимация

Этот, исторически первый и, как следует из названия, легко интерпретируемый метод прост, ясен и часто дает дискретные модели хорошего качества. Покажем это, построив разностную аппроксимацию первой краевой задачи на отрезке $[0, l]$ для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < l, & \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t), & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Ее решение $u(x, t)$ предполагается существующим и ищется в области $0 < x < l$ при всех $0 < t \leq T$ (рис. 7.14).

Выберем простейшую дискретизацию расчетной области, разбив ее равномерно $N - 1$ вертикальными и M горизонтальными линиями. Точки их пересечения между собой и с отрезками $[0, l]$, $[0, T]$, $[l, T]$ дадут узлы сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$. Такая сетка называется *равномерной с шагом по пространству* $h = l/N$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N$, и *по времени* $\tau = T/M$, $t^j = j\tau$, $0 \leq j \leq M$; совокупность узлов с одинаковым индексом j – *временным слоем*. В граничных (принадлежащих отрезкам $[0, l]$, $[0, T]$, $[l, T]$) узлах функция $u(x, t)$ известна из краевых условий (7.100), и аппроксимация очевидна: $y_0^j = u_1(t^j)$, $y_N^j = u_2(t^j)$, $j = 0, 1, \dots, M$; $y_i^0 = u_0(x_i)$, $0 \leq i \leq N$.

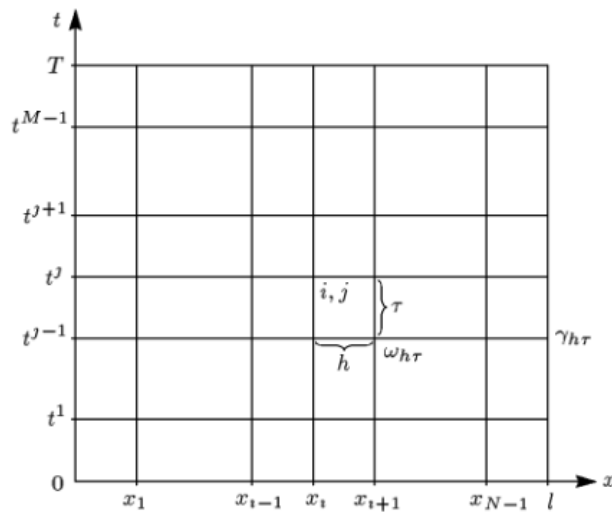


Рис. 7.14

Приближенное решение y_i^j необходимо найти на множестве внутренних узлов $\omega_{h\tau}$ сетки $\bar{\omega}_{h\tau} = \omega_{h\tau} \cup \gamma_{h\tau}$. Проведем естественную аппроксимацию дифференциального оператора разностным, записывая последний одинаково в любой точке (x_i, t^j) сетки $\omega_{h\tau}$. Производную по времени заменим первой разностью: $\partial u / \partial t \approx (y_i^{j+1} - y_i^j) / \tau$. Учитывая, что в ней фигурируют значения разностного решения с двух временных слоев, вторую производную по x заменим суммой выражений, взятых на $(j + 1)$ -м и j -м слоях:

$\partial^2 u / \partial x^2 \approx \sigma y_{xx}^{j+1} + (1-\sigma)y_{xx}^j$, где $0 \leq j \leq 1$. В итоге вместо (7.100) придем к *схеме с весами*

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} &= \sigma \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^{j+1} + y_{i+1}^j}{h^2} + (1-\sigma) \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}, \\ (x_i, y^j) &\in \omega_{h\tau}, \\ y_0^j &= u_1(0, t^j), \quad y_N^j = u_2(l, t^j), \quad j = 0, 1, \dots, M; \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (7.101)$$

представляющей собой систему $(N-1)M$ линейных алгебраических уравнений для нахождения стольких же значений функции y_i^j . Каждое из уравнений (7.101) записано при $\sigma \neq 0, 1$ на шеститочечном шаблоне с использованием узлов с индексами $(i-1, j+1)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j+1)$, $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$. Погрешность ее аппроксимации в общем случае есть величина $O(\tau + h^2)$, т. е. первого порядка по времени и второго по пространству. Для *симметричной схемы* с $\sigma = 1/2$ порядок аппроксимации по времени увеличивается до $O(\tau^2)$.

При $\sigma = 0, 1$ из (7.101) получаются более простые чисто *явная* ($\sigma = 0$, четырехточечный шаблон $(i, j+1)$, $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$) и чисто *неявная* ($\sigma = 1$, четырехточечный шаблон $(i-1, j+1)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j+1)$, (i, j)) схемы.

При $\sigma = 0$ каждое из уравнений схемы (7.101) содержит лишь одну неизвестную величину y_i^{j+1} . Поэтому ее решение легко находится по явным формулам при переходе j -го к $(j+1)$ -му слою с использованием известных значений решения на границе (на слое $j = 0$ решение известно из начальных данных).

В случае неявной схемы (и всех схем с $\sigma \neq 0$) разностные уравнения содержат три неизвестных величины: y_{i-1}^{j+1} , y_i^{j+1} , y_{i+1}^{j+1} ; на каждом временном слое получается задача. Подобные задачи для трехточечных уравнений вида

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= F_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2, \end{aligned} \quad (7.102)$$

где $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$, $i = 1, \dots, N-1$, при условиях $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$, $i = 1, \dots, N-1$; $|\chi_\alpha| \leq 1$, $\alpha = 1, 2$; $|\chi_1| + |\chi_2| < 2$ (для (7.94) и (7.101) эти условия выполнены) относительно легко решаются методом прогонки. У решения (7.102) предполагается наличие рекуррентной зависимости вида

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad (7.103)$$

подстановка которой в (7.102) дает для коэффициентов α_{i+1} и β_{i+1} рекуррентные соотношения

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Из них с помощью краевого условия при $i = 0$ находятся α_{i+1} , β_{i+1} во всех узлах сетки (прямая прогонка). Далее, с помощью условия в точке $i = N$ при известных α_{i+1} , β_{i+1} по формуле (7.103) вычисляются значения y_N , y_{N-1} , ..., y_1 , y_0 (обратная прогонка). Заметим: простота решения алгебраической системы (7.101) обусловлена простой (трехдиагональной) структурой ее матрицы.

Несколько более сложными, чем в п. 7.10, рассуждениями устанавливается устойчивость схемы (7.101), причем существует качественная разница между случаями $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$. Чисто неявная схема устойчива при любом соотношении между шагами h и τ (*безусловная устойчивость*), в то время как для чисто явной схемы необходимо выполнение неравенства $\tau \leq Ch_2$, $C > 0$ – некоторая постоянная (*условная устойчивость*). Данное требование (типичное для явных разностных схем, порождаемых параболическими уравнениями) может накладывать слишком жесткие ограничения на шаг по времени. Поэтому, несмотря на свою простоту, явные схемы для решения этих задач практически не используются.

Аналогичным образом строятся разностные схемы типа (7.101) для отличных от (8.100) краевых задач и более общих параболических уравнений. Например, для уравнения нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

одна из очевидных аппроксимаций первой краевой задачи выглядит следующим образом:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} [k_{i+1/2}^j \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k_{i-1/2}^j \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h}],$$

$$(x_i, y^j) \in \omega_{h\tau},$$

$$y_0^j = u_1(0, t^j), \quad y_N^j = u_2(l, t^j), \quad j = 0, 1, \dots, M;$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad 0 \leq i \leq N,$$

где $k_{i+1/2}^j$ и $k_{i-1/2}^j$ – некоторые приближения коэффициента теплопроводности в полу целых узлах $i + 1/2$, $i - 1/2$, взятые для простоты на j -м слое. Данная неявная устойчивая схема легко решается, как и (7.101), методом прогонки. Если же коэффициент теплопроводности аппроксимируется на $(j + 1)$ -м слое, то она становится нелинейной и решается с помощью соответствующих методов *последовательных приближений (итерационных процедур)*.

Итак, на основе прямой аппроксимации в ряде случаев просто получаются дискретные модели, обладающие нужными качествами. В то же время его формальное применение может привести также и к построению дискретных аналогов исходных моделей, не имеющих ничего общего со своими прообразами. Возьмем весьма естественную аппроксимацию уравнения (7.100) – разностное уравнение

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}, \quad (7.104)$$

записанное на пятиточечном шаблоне $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$, (i, j) , $(i - 1, j)$, $(i, j - 1)$.

Вместе с соответствующими краевыми условиями оно образует трехслойную схему (в отличие от *двухслойной схемы* (7.101)), имеющую погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ и легко решаемую по явным формулам. Однако данная схема непригодна, так как неустойчива при любых h и τ (*абсолютно неустойчива*). Ее решение при ограниченных краевых условиях

может становиться сколь угодно большим, когда $j \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$), что противоречит принципу максимума для уравнения (7.100).

Поясним это, представляя решение уравнения (7.104) с нулевыми граничными условиями как сумму частных решений (гармоник), каждая из которых имеет вид $y_{(k)}(x, t) = T_{(k)}(t) X_{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$ (разделение переменных). Тогда, подставляя $y_{(k)}(x, t)$ в (8.104) и разделяя переменные, для любой гармоники имеем

$$\frac{T_{(k)}^{j+1} - T_{(k)}^{j-1}}{2\tau T_{(k)}^j} = \frac{X_{i+1}^{(k)} - 2X_i^{(k)} + X_{i-1}^{(k)}}{h^2 X_i^{(k)}} = -\lambda_k, \quad (7.105)$$

где $\lambda_k = 4/(h^2) \cdot \sin(\pi kh/2) > 0$ – параметр разделения, или собственное значение для гармоники с номером k .

Временная часть решения $y_{(k)}(x, t)$, как следует из (7.105), подчиняется уравнению

$$T_{(k)}^{j+1} - T_{(k)}^j = -\alpha_k T_{(k)}^j, \quad \alpha_k \tau \lambda_k > 0,$$

имеющему частное решение вида $T_{(k)}^{j+1} = q_k T_{(k)}^j$ (из данной связи следует $T_{(k)}^{j+1} = q_k^{j+1} T_{(k)}^0$). При этом q_k должна удовлетворять уравнению $q_k^2 + \alpha_k q_k - 1 = 0$ с действительными корнями, один из которых по модулю больше единицы при любых α_k . В силу этого при достаточно больших j в общем решении уравнения (7.104) могут присутствовать сколь угодно большие по абсолютной величине гармоники.

Подобными примерами не исчерпываются недостатки непосредственной формальной аппроксимации. В более сложных ситуациях для порождаемых ею дискретных моделей могут не выполняться даже фундаментальные свойства, присущие исходным объектам.

Проиллюстрируем это, рассмотрев следующую задачу для стационарного равнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad k(x) \geq C_1 > 0, \\ u(0) &= 1, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \quad (7.106)$$

Модель (7.106) – одна из простейших в теории теплопередачи за тем исключением, что коэффициент теплопроводности $k(x)$ может быть разрывной функцией (теплопроводящий материал состоит из разных веществ).

Раскроем дифференциальный оператор (7.106):

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = k \frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{dk}{dx} \cdot \frac{du}{dx},$$

и используем для полученного выражения совершенно естественные, на первый взгляд, замены (сетка равномерная)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \approx u_{xx}^-, \quad \frac{dk}{dx} \approx \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}, \quad \frac{du}{dx} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

С учетом граничных условий (8.106) придем к разностной схеме

$$\begin{aligned} k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_i}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} &= 0, \\ 0 < i < N, \quad y_0 &= 1, \quad y_N = 0, \end{aligned} \quad (7.107)$$

имеющей порядок аппроксимации $O(h^2)$.

Пусть $k(x)$ – разрывная кусочно-постоянная функция:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1, \end{cases} \quad (7.108)$$

где ξ – иррациональное число, $\xi = x_n + \theta h$, $x_n = nh$, $0 < \theta < 1$, $k_1 \neq k_2$.

При такой функции $k(x)$ решение (7.106), очевидно, линейным образом зависит от x , причем наклон функции $u(x)$ различен в областях с разными значениями коэффициента теплопроводности. Единственное решение определяется из условий сопряжения в точке $x = \xi$, т. е. из условия непрерывности температуры $u^-(\xi) = u^+(\xi)$ и потока тепла $W^-(\xi) = W^+(\xi)$ ($W(x) = -k(x) du/dx$):

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, \alpha_0 = (\chi + (1 - \chi)\xi)^{-1}, \\ \beta_0(1 - x), & \xi \leq x \leq 1, \beta_0 = \chi \alpha_0, \chi = k_1 / k_2. \end{cases} \quad (7.109)$$

Нетрудно найти решение разностной задачи (8.107) в случае (8.108), пользуясь тем, что уравнение (7.107) имеет вид $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0$ при $i \neq n$, $i \neq n + 1$ и, следовательно,

$$y_i = y(x_i) = \begin{cases} 1 - \alpha x_i, & 0 \leq x \leq x_n, \\ \beta(1 - x_i), & x_{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (7.110)$$

Коэффициенты α , β получаются из уравнений (7.107) в точках $i = n$, $i = n + 1$ ($x_n = \xi - \theta h$, $x_{n+1} = \xi + (1 - \theta)h$):

$$\alpha = \frac{1}{\mu + (1 - \mu)\xi + h(\lambda - \theta - (1 - \theta)\mu)},$$

$$\mu = \frac{3 + \chi}{5 - \chi}, \quad \lambda = \frac{5\chi - 1}{3\chi + 1}, \quad \beta = \mu\alpha.$$

Из этих формул видно, что $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}_0 = (\mu + (1 - \mu)\xi)^{-1}$, $\beta \rightarrow \bar{\beta}_0 = \mu\alpha_0$ при $h \rightarrow 0$. Поэтому при $h \rightarrow 0$ функция $\tilde{y}(x, h)$ – решение (7.100), доопределенное между узлами сетки с помощью линейной интерполяции, – имеет предел

$$\bar{u}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{y}(x, h) = \begin{cases} 1 - \bar{\alpha}_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \bar{\beta}_0(1 - x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (7.111)$$

Функции (7.111) и (7.110) совпадают лишь в случае $\chi = 1$ ($k_1 = k_2$). Следовательно, решение разностной задачи стремится при $h \rightarrow 0$ не к решению задачи (7.104), а к совсем другой функции: разностная схема (7.107) *расходится*.

Причина ее расходимости устанавливается из анализа решения (7.111) в точке $x = \xi$: температура в ней непрерывна ($u^-(\xi) = u^+(\xi)$), а поток тепла претерпевает разрыв ($W^-(\xi) \neq W^+(\xi)$). Схема (7.107) нарушает закон сохранения (баланс) тепла в веществе, т.е. фундаментальный закон, на основе которого получаются все модели процесса теплопередачи. Подобные дискретные модели называются *неконсервативными* и, как правило, не могут использоваться для исследования исходных моделей.

7.12. Интегро-интерполяционный метод

Из приведенных примеров ясно, что переход к дискретным моделям нельзя осуществлять чисто формально. Он должен оставлять в силе по возможности наибольшее число основных свойств, которыми обладают модели исходных объектов.

Применительно к уравнению (7.106) это означает, что для отвечающей ему разностной схемы необходимо выполнение дискретного аналога закона сохранения энергии. Широко используемый подход к построению таких схем основан на записи этого закона в интегральной форме для ячеек $x_{i-1} \leq x < x_i$, $x_i = ih$, $i = 1, \dots, N$, разностной сетки с последующей заменой получающихся интегралов и производных приближенными разностными выражениями (*интегро-интерполяционный метод*).

Для стационарного процесса теплопроводности без поглощения и выделения энергии уравнение баланса тепла на отрезке $x_{i-1/2} \leq x < x_{i+1/2}$ (выбраны полу целые индексы) означает равенство потоков на его границах:

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (7.112)$$

Проинтегрируем равенство $W(x) = -k(x) du/dx$ на отрезке $x_{i-1/2} \leq x \leq x_i$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx,$$

и, предполагая $W(x) = \tilde{W}_{i-1/2} = \text{const}$ при $x_{i-1/2} \leq x \leq x_i$ (простейшая интерполяция), получим

$$u_{i-1} - u_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

откуда приближенное значение для $\tilde{W}_{i-1/2}$ дается формулой

$$\tilde{W}_{i-1/2} = a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

Подставив ее в (7.112), придем к *консервативной* (сравните с 7.106)) *разностной схеме*

$$\frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (7.113)$$

$$a_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1} = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i + sh)} \right]^{-1},$$

для которой закон сохранения энергии выполнен как для каждой ячейки, так и для всего отрезка $[0, 1]$. Таким же образом строятся консервативные дискретные модели для более сложных, в том числе нелинейных и нестационарных процессов теплопередачи.

Применимость интегро-интерполяционного и подобных ему методов распространяется на широкие классы моделей. Он важен, в частности, для задач газовой динамики, решения которых (смотрите п. 7.12) могут быть

разрывными. Построим консервативные разностные аппроксимации для уравнений одномерного течения газа, записанных в массовых координатах в дивергентном виде:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial m}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial m} (p v), \quad (7.114)$$

$$0 < t \leq T, \quad 0 < m < M_0.$$

Здесь t – время, m – массовая координата; $\eta = 1/\rho$ – удельный объем (ρ – плотность), v – скорость, p – давление и $\varepsilon = \varepsilon(\eta, p)$ – внутренняя энергия газа.

Введем сетку с равномерными шагами по времени и пространству:

$$\bar{\omega}_h = \{m_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = M_0 / N\},$$

$$\omega_\tau = \{t^j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M; \tau = T / M\}, \quad \bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \cup \omega_\tau.$$

Ради простоты для сеточных аналогов газодинамических величин сохраним те же обозначения, относя функцию v к целым точкам сетки ($m = m_i$), а p, η, ε – к полужелым ($m = m_{i+1/2}$).

Проинтегрируем второе уравнение (7.114) в прямоугольнике $m_{i-1/2} \leq m \leq m_{i+1/2}, t^j \leq t \leq t^{j+1}$:

$$\int_{m_{i-1/2}}^{m_{i+1/2}} (v^{j+1} - v^j) dm + \int_{t^j}^{t^{j+1}} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) dt = 0,$$

а остальные – в прямоугольнике $m_i \leq m \leq m_{i+1}, t^j \leq t \leq t^{j+1}$:

$$\int_{m_i}^{m_{i+1}} (\eta^{j+1} - \eta^j) dm - \int_{t^j}^{t^{j+1}} (v_{i+1} - v_i) dt = 0,$$

$$\int_{m_i}^{m_{i+1}} \left[\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right)^{j+1} - \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right)^j \right] dm + \int_{t^j}^{t^{j+1}} [(p v)_{i+1} - (p v)_i] dt = 0.$$

Временные интегралы, входящие в эти тождества, заменим выражениями

$$\int_{t^j}^{t^{j+1}} p dt \approx p^{(\sigma_1)} \tau, \quad \int_{t^j}^{t^{j+1}} v dt \approx v^{(\sigma_2)} \tau, \quad \int_{t^j}^{t^{j+1}} (p v)_i dt = p_{*i}^{(\sigma_3)} v_i^{(\sigma_4)} \tau,$$

где $f^{(\sigma_\alpha)} = \sigma_\alpha f^{j+1} + (1 - \sigma_\alpha) f^j$, σ_α – веса ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), $p_{*i} = 0,5 (p_{i-1/2} + p_{i+1/2})$. Пространственные интегралы заменим по очевидному правилу, например,

$$\int_{m_{i-1/2}}^{m_{i+1/2}} v dm \approx v_i h, \quad \int_{m_i}^{m_{i+1}} \eta dm \approx \eta_{i+1/2} h.$$

В итоге приходим к четырехпараметрическому семейству разностных схем

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = - \left(\frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{h} \right)^{(\sigma_1)},$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+1} - \eta_{i+1/2}^j}{\tau} = \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)^{(\sigma_2)}, \quad (7.115)$$

$$\frac{E_{i+1/2}^{j+1} - E_{i+1/2}^j}{\tau} = \frac{p_{*i+1}^{(\sigma_3)} v_{i+1}^{(\sigma_2)} - p_{*i}^{(\sigma_3)} v_i^{(\sigma_4)}}{h},$$

где $E_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2} + (v_i^2 + v_{i+1}^2)/2$ – полная энергия i -й ячейки газа. Они представляют собой консервативные дискретные аналоги уравнений (7.114)

при любых σ_α , $\alpha = 1, \dots, 4$. Для них имеют место разностные аналоги законов сохранения массы, импульса и полной энергии в любой ячейке сетки (интегрированием уравнений (7.115) по сетке $\mathfrak{w}_{ht}$ нетрудно установить справедливость законов сохранения в дискретной форме для всей массы газа $0 \leq m \leq M_0$).

При $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$ система (7.115) может быть решена по явным формулам: сначала находятся v_i^{j+1} , затем $\eta_{i+1/2}^{j+1}$, а из третьего уравнения (7.115) и уравнения состояния $p\eta = (\gamma - 1)\varepsilon$ (в случае идеального газа) методом прогонки определяются с использованием краевых условий при $i = 0$, $i = N$ значения $p_{i+1/2}$ для всех $i = 0, 1, \dots, N$. Неявные схемы (7.115) решаются с помощью итерационных методов.

В отличие от уравнений параболического типа, явные схемы для гиперболических уравнений устойчивы не при условии $\tau \leq Ch^2$, а при выполнении гораздо более мягкого неравенства $\tau \leq Ch$, и поэтому часто применяются на практике. Заметим также, что при практических вычислениях в газодинамические разностные схемы вводится *искусственная «вязкость»*, сглаживающая сильные разрывы. Это заметно облегчает проведение расчетов, так как отпадает необходимость в специальном выделении областей разрывов (*однородные схемы*).

7.13. Принцип полной консервативности

Более существенное отличие дискретных моделей газовой динамики от моделей теплопередачи заключается в разнообразии способов математического представления законов сохранения для газа. В частности, третье уравнение (7.114) может быть записано не для полной энергии $E = \varepsilon + v^2/2$, а для внутренней энергии ε , причем по меньшей мере в двух видах:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial m}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (7.116)$$

Для исходной модели эти и другие формы записи эквивалентны и переходят одна в другую при соответствующих преобразованиях уравнений. В случае дискретных моделей данное свойство отнюдь не гарантируется. Например, из третьего уравнения консервативной схемы (7.115), вообще говоря, не следуют дискретные аналоги уравнений (7.116). Верно и обратное: для схемы, аппроксимирующей уравнения внутренней энергии, не обязательно выполняется закон сохранения полной энергии. Простым примером служит неконсервативная схема «крест»

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} &= -\frac{p_{i+1/2}^{j+1/2} - p_{i-1/2}^{j+1/2}}{h}, \\ \frac{\eta_{i+1/2}^{j+3/2} - \eta_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} &= \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h}, \\ \frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2} - \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} &= -p_{i+1/2}^{j+3/2} \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^j}{h}, \end{aligned} \quad (7.117)$$

для написания которой используется «шахматная» сетка (смотрите рис. 7.15; точками и крестиками обозначены узлы применяемого шеститочечного шаблона; функции ε , p , η отнесены к полуцелым, а v – к целым узлам) и легко решаемая в случае $p\eta = (\gamma - 1)\varepsilon$ по явным формулам.

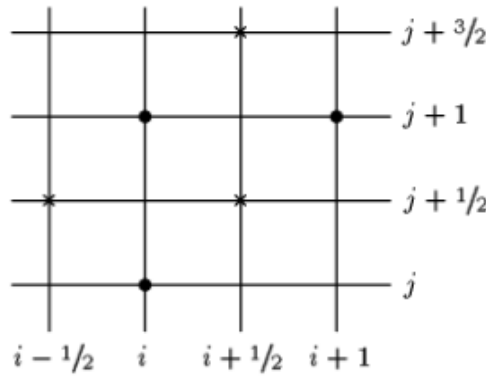


Рисунок 7.15

Подобная «частичная», неполная консервативность дискретных моделей может сделать их непригодными для численного моделирования (сохранение полной энергии не означает, что ее составляющие – кинетическая и внутренняя энергии, а с ними скорость и температура газа, – рассчитываются правильно, и т. п.). Поэтому при построении дискретных моделей необходимо отразить в них как можно большее число фундаментальных свойств исходных объектов.

Взяв за исходное четырехпараметрическое семейство консервативных схем (7.115), получим обладающие сформулированным качеством разностные аппроксимации уравнений (7.114).

Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения

$$\bar{p}_i = p_{i+1/2}, \quad \bar{\eta}_i = \eta_{i+1/2}, \quad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1/2}, \quad \bar{p} = \bar{p}_i^j, \quad v = v_i^j,$$

$$\frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{h} = \bar{p}_m, \quad \frac{v_{i+1} - v_i}{h} = v_m,$$

после чего черту над p , η и ω будем опускать (кроме специальных случаев). С той же целью будем вместо третьего уравнения (7.114) рассматривать аппроксимацию первого уравнения (7.115) для внутренней энергии. Кроме того, понадобится формула

$$f^{(\beta)} = f^{(\alpha)} + \tau(\beta - \alpha) f, \quad (7.117)$$

где α и β – любые числа, $f^{(\alpha)} = \alpha \hat{f} + (1 - \alpha) f$, $\hat{f} = f^{j+1}$.

С учетом сделанных замечаний из (7.114) получается четырехпараметрическое семейство схем

$$v_t = -p_m^{(\sigma_1)}, \quad \eta_t = v_m^{(\sigma_2)}, \quad \varepsilon_t = -p_m^{(\sigma_3)} v_m^{(\sigma_4)}, \quad (7.118)$$

от которых потребуем *полной консервативности*, т. е. того, чтобы они аппроксимировали также уравнение для полной энергии (третье уравнение (7.114)) и второе уравнение (7.116).

Из второго уравнения (7.118), равенства

$$v_m^{(\sigma_4)} = v_m^{(\sigma_2)} - \tau(\sigma_4 - \sigma_2) v_{mt} = \eta_t + \tau(\sigma_4 - \sigma_2) v_{mt}$$

и третьего уравнения (8.118) следует

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)} \eta_t + \delta_1 E,$$

где $\delta_1 E = -\tau(\sigma_4 - \sigma_2)p_{mt}^{(\sigma_3)}$. Таким образом, схема (7.118) аппроксимирует второе уравнение (7.115) лишь при выполнении равенства $\sigma_2 = \sigma_4$. Если это равенство не выполняется, то возникает дисбаланс $\delta_1 E$ внутренней энергии, вызванный появлением в дискретной среде дополнительных (фиктивных) источников и стоков энергии.

Найдем теперь $\delta_2 E$ – дисбаланс полной энергии. Умножим первое уравнение (7.118) на $v^{(0,5)} = 0,5 (v + \bar{v})$ и получим уравнение

$$\frac{v_t^2}{2} = -(v^{(0,5)}) \cdot p_m^{(\sigma_1)},$$

после чего сложим его с третьим уравнением (7.118):

$$\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right)_t = -p^{(\sigma_3)} p_m^{(\sigma_4)} - v^{(0,5)} p_m^{(\sigma_1)}. \quad (7.119)$$

Преобразуем правую часть (8.119) с помощью формулы (7.117):

$$\begin{aligned} p^{(\sigma_3)} v_m^{(\sigma_4)} + v^{(0,5)} p_m^{(\sigma_1)} &= \\ &= (p^{(\sigma_1)} + \tau(\sigma_3 - \sigma_1) p_t) (v_m^{(0,5)} + \tau(\sigma_4 - 0,5) v_{mt}) + v^{(0,5)} p_m^{(\sigma_1)} = (p_{(-1)}^{(\sigma_1)} v^{(0,5)})_m + \delta_2 E, \end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$p_{(-1)} = \bar{p}_{i-1} = p_{i-1/2},$$

$$\delta_2 E = \tau(\sigma_3 - \sigma_1) v_m^{(0,5)} p_t + \tau(\sigma_4 - 0,5) p_{mt}^{(\sigma_1)} + \tau^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_4 - 0,5) p_t v_{mt}.$$

В итоге (7.119) принимает вид

$$\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right)_t = -(p_{(-1)}^{(\sigma_1)} v^{(0,5)})_m - \delta_2 E.$$

Таким образом, уравнение (7.119) не аппроксимирует уравнение для полной энергии (то же самое относится и к схеме (7.116)). Дисбаланс $\delta_2 E$, как и дисбаланс $\delta_1 E$, имеет искусственное происхождение. Он отсутствует лишь в случае $\delta_3 = \delta_1$, $\delta_4 = 0,5$ и, следовательно, $\delta_2 = 0,5$.

Объединяя эти результаты, приходим вместо четырехпараметрического семейства схем (7.118), полученных с помощью интегро-интерполяционного метода, к однопараметрическому семейству

$$v_t = -p_m^{(\sigma_1)}, \quad \eta_t = v_m^{(0,5)}, \quad \varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)} v_m^{(0,5)} \quad (7.120)$$

полностью консервативных ($\delta_1 E = \delta_2 E = 0$) дискретных моделей газовой динамики.

Заметим, что третье из уравнений (7.120) можно заменить одним из уравнений

$$\varepsilon_e = -p^{(\sigma_1)} \eta_t, \quad \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right)_t = -(p_{(-1)}^{(\sigma_1)} v^{(0,5)})_m,$$

а вместо последнего взять одно из уравнений

$$\left(\varepsilon + \frac{v_{(+1)}^2}{2} \right)_t = -(p^{(\sigma_1)} v^{(0,5)})_m, \quad \left(\varepsilon + \frac{v^2 + v_{(+1)}^2}{4} \right)_t = -(p_*^{(\sigma)} v^{(0,5)})_m.$$

Схема (7.120) в общем случае обладает аппроксимацией $O(\tau + h^2)$, а при $\sigma_1 = 0,5$ аппроксимация по времени имеет второй порядок. При $\sigma_1 = 0$ схема (7.120) явная, и ее решение находится по простым формулам.

Из структуры $\delta_1 E$ и $\delta_2 E$ хорошо видно, что они особенно велики, если характеристики газа сильно меняются по пространству и по времени (разрывные течения, сильная неоднородность среды, режимы с обострением и т. п.). В этих ситуациях фиктивные источники энергии становятся сравнимыми с реальными величинами, и результаты численного моделирования исходного объекта заметно отличаются от его действительного поведения. Дисбалансы могут быть уменьшены с помощью уменьшения шага по времени τ , что, естественно, приводит к соответствующему увеличению числа расчетных операций (уменьшение шага сетки по пространству вообще не сказывается на величине $\delta_1 E$ и $\delta_2 E$).

Принцип полной консервативности, нашедший применение при решении многих сложных задач, – один из надежных подходов к построению дискретных моделей с необходимыми качествами.

7.14. Построение разностных схем с помощью вариационных принципов

Вариационные принципы, служащие одним из основных способов получения математических моделей различных объектов, широко используются также и для построения соответствующих дискретных аналогов. Этому способствуют их универсальность, относительная простота применения, связь с законами сохранения и свойствами симметрии. Самый естественный путь при таком подходе – дискретизация исходного объекта (среды), формулировка для полученного объекта вариационного принципа и вывод на его основе связей (уравнений) для дискретных величин, т. е. завершение конструирования искомой дискретной модели.

Построим, следуя этой логике, разностные схемы для уравнений (7.113) одномерной газовой динамики в лагранжевых координатах и сравним их со схемами пп. 7.13, 7.14.

Будем рассматривать газ как совокупность соседствующих друг с другом материальных «точек» («частиц»), разбив его массу M_0 для простоты равномерно на N частей с массой $m_{i+1/2} = M_0/N$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ (масса $m_{i+1/2}$ – аналог шага h в (7.114), (7.115)). Другими словами, как и в п. 7.13, введем разностную сетку с узлами в точках $i = 0, 1, \dots, N$ и равномерными по массе ячейками. Координаты и скорости частицы (ячейки) охарактеризуем через декартовы координаты x_i , x_{i+1} и скорости u_i , u_{i+1} соответствующих узлов. Остальные параметры материальных точек – плотность $\rho_{i+1/2}$, удельный объем $\eta_{i+1/2}$, давление $p_{i+1/2}$, внутреннюю энергию $\varepsilon_{i+1/2}$ – отнесем к середине ячейки (полуполный индекс).

Применим для построенной таким образом дискретной среды принцип Гамильтона, выбрав $x_i(t)$, $x_{i+1}(t)$ в качестве обобщенных координат ячеек

(величины $v_i(t) = dx_i/dt = \dot{x}_i$, $v_{i+1}(t) = dx_{i+1}/dt = \dot{x}_{i+1}$ играют роль обобщенных скоростей). Кинетическую энергию системы определим достаточно очевидным выражением

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} T_{i+1/2} = \sum_{i=0}^{N-1} m_{i+1/2} \frac{v_i^2 + v_{i+1}^2}{4}$$

как сумму энергий каждой частицы (возможны и другие выражения)

$$T_{i+1/2} = \frac{m_{i+1/2}}{2} \frac{v_i^2 + v_{i+1}^2}{2}.$$

«Потенциальную» энергию частиц будем соотносить с их внутренней энергией $\varepsilon_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}(x_i, x_{i+1})$ поскольку ее «высвобождение» дает возможность совершить работу, подобно тому как замыкание обкладок заряженного конденсатора высвобождает запасенную в нем энергию, преобразующуюся в движение зарядов. Заметим, что такое определение потенциальной энергии для рассматриваемой системы, как и обоснование потенциальности ее движения, требует подробного и громоздкого анализа. Поэтому ограничимся приведенными выше качественными соображениями.

Суммарная потенциальная энергия совокупности ячеек есть

$$V = \sum_{i=0}^{N-1} V_{i+1/2} = \sum_{i=0}^{N-1} m_{i+1/2} \varepsilon_{i+1/2},$$

где $V_{i+1/2}$ – энергия отдельной частицы.

«Лагранжиан» дискретной газовой среды дается выражением

$$L = T - V = \sum_{i=0}^{N-1} m_{i+1/2} \left(\frac{v_i^2 + v_{i+1}^2}{4} - \varepsilon_{i+1/2} \right), \quad (7.121)$$

а функционал действия – формулой

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{N-1} m_{i+1/2} \left(\frac{v_i^2 + v_{i+1}^2}{4} - \varepsilon_{i+1/2}(x_i, x_{i+1}) \right) dt. \quad (7.122)$$

Проварьируем в соответствии со схемой применения принципа Гамильтона действие (7.122) по всем кинематически возможным путям, вычислив сначала вариации составляющих его членов.

Так как $v_i = \dot{x}_i$, то

$$\delta \left(\frac{v_i^2}{4} \right) = \frac{1}{4} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = \frac{1}{2} v_i \delta \dot{x}_i.$$

Вариация внутренней энергии дается формулой

$$\delta \varepsilon_{i+1/2} = \frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}} \delta x_{i+1},$$

а для вариации действия имеем

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} m_{i+1/2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} v_i \delta \dot{x}_i + \frac{1}{2} v_{i+1} \delta \dot{x}_{i+1} - \frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_{i+1}} \delta x_{i+1} \right) dt.$$

Проинтегрируем в последнем равенстве члены $v_i \delta \dot{x}_i$ и $v_{i+1} \delta \dot{x}_{i+1}$ по частям, учтем перестановочность операций варьирования и дифференцирования по времени ($\delta \dot{x}_i = d(\delta x_i)/dt$) и примем во внимание условие $\delta x_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, при $t = t_0$, $t = t_1$. Получим выражение, из

которого видно, что в силу независимости вариаций δx_i для δQ имеем, что $\delta Q = 0$ лишь тогда, когда равны нулю коэффициенты при любой δx_i , т. е. при выполнении уравнений

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varepsilon_{i-1/2}}{\partial x_i}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

В их левых частях записано ускорение ячеек газа. Чтобы выяснить смысл правых частей, напомним, что для рассматриваемых здесь адиабатических течений справедливы равенства $d\varepsilon = -pd\eta$ и $\varepsilon(p, \eta) = \varepsilon(\eta)$. Отсюда для дискретной среды получаем $d\varepsilon_{i+1/2} = -p_{i+1/2}d\eta_{i+1/2}$, $\varepsilon_{i+1/2} = \varepsilon(\eta_{i+1/2}) = \varepsilon[(x_{i+1} - x_i) / m_{i+1/2}]$. Проводя преобразования

$$\frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varepsilon_{i+1/2}}{\partial \eta_{i+1/2}} \cdot \frac{\partial \eta_{i+1/2}}{\partial x_i} = \frac{p_{i+1/2}}{m_{i+1/2}},$$

придем к окончательному виду полученных из принципа Гамильтона уравнений движения газовых «частиц» (на равномерной сетке):

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{(m_{i+1/2} + m_{i-1/2})/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (7.123)$$

Присоединим к (7.123) уравнение

$$\frac{d\eta_{i+1/2}}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{m_{i+1/2}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (7.124)$$

следующее из равенства $\eta_{i+1/2} = (x_{i+1} - x_i) / m_{i+1/2}$ (закон сохранения массы ячейки), а также вытекающее из равенства $d\varepsilon_{i+1/2} = -p_{i+1/2}d\eta_{i+1/2}$ и из (7.124) уравнение

$$\frac{d\varepsilon_{i+1/2}}{dt} = -p_{i+1/2} \frac{d\eta_{i+1/2}}{dt} = -p_{i+1/2} \frac{v_{i+1} - v_i}{m_{i+1/2}}, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (7.125)$$

выражающее закон изменения внутренней энергии.

Вместе с заданным уравнением состояния $\varepsilon_{i+1/2} = \varepsilon(\eta_{i+1/2})$ система (7.123)–(7.125) представляет собой *полудискретную* модель динамики газа, отвечающую всем необходимым законам сохранения – импульса, массы, энергии (заметим, что закон сохранения полной энергии $E = T + V$ сразу следует из инвариантности лагранжиана (7.121) по отношению к сдвигу времени).

Проводя в (7.123)–(7.125) замену производных по времени конечными разностями, переходя к безындексным обозначениям и вводя веса $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, получим дискретную модель газовой динамики

$$v_t = -p^{(\sigma_1)} \bar{m}, \quad \eta_t = v_m^{(\sigma_2)}, \quad \varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)} v_m^{(\sigma_4)},$$

совпадающую с разностной схемой (7.118), построенной в п. 7.12 с помощью интегро-интерполяционного метода (при соответствующем выборе весов она становится полностью консервативной).

Применимость продемонстрированного подхода не ограничивается рассмотренным выше простейшим случаем. Вариационные принципы эффективно используются для получения дискретных моделей в весьма трудных ситуациях (многомерные процессы, сетки сложной структуры и т. д.).

8.15. Использование иерархического подхода к получению дискретных моделей

Основная идея данного подхода – использование знания о месте подлежащей дискретизации модели в иерархии моделей изучаемого объекта. Если иерархия построена по принципу «сверху вниз», то, проводя частичную или полную дискретизацию общей модели, затем переходят к дискретной модели более низкого уровня. Естественно, используется способ перехода, принятый для исходных моделей. В результате выполнения подобной процедуры в построенную дискретную модель привносятся дополнительные черты модели более высокого уровня, и это может повысить адекватность аппроксимирующей модели исходному объекту.

Конкретизируем эти рассуждения, рассмотрев уравнения, описывающие одномерные течения невязкого нетеплопроводного газа

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 + p) &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[V(E + p)] &= 0/\end{aligned}\tag{7.126}$$

Здесь $E = \rho(V^2/2 + 3RT/2)$ – сумма кинетической и внутренней энергий единицы объема газа, т. е. его полная энергия, $T = p/(\rho R)$ – температура, $R = k/m$ – газовая постоянная, k – постоянная Больцмана, m – масса атома или молекулы газа.

Напомним, что уравнения (7.126) получены из кинетического уравнения Больцмана в результате его «осреднения» при условии, что функция распределения $f(x, v, t)$ локально максвелловская:

$$f^{(0)}(v) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2kT} (v - V)^2 \right], \tag{7.127}$$

где v – скорость хаотического движения частиц газа (при максвелловском распределении в среде отсутствуют вязкие напряжения и потоки тепла).

Дискретные аналоги уравнений (7.126) можно строить любым из описанных в предыдущих пунктах способом. Иерархический подход в данном случае (и для некоторых обобщений (7.126)) заключается в следующем:

1) функция распределения f и макрохарактеристики газа рассматриваются как функции дискретного аргумента t^j , $j = 0, 1, \dots$, т. е. проводится дискретизация по времени исходной модели – кинетического уравнения Больцмана;

2) величина $\tau = t^{j+1} - t^j$ (шаг дискретизации) берется достаточно малой, чтобы удовлетворить условию $\tau \leq l / |\langle v \rangle|$, где l – характерная длина свободного пробега, $|\langle v \rangle|$ – модуль характерной скорости частиц. Поэтому за время τ число столкновений между частицами невелико и ими можно пренебречь (смотрите вывод уравнения Больцмана);

3) функция распределения $f^{j+1} = f(x, v, t^{j+1})$ изменяется (смотрите вывод уравнения Больцмана) в сравнении с функцией $f^j = f(x, v, t^j)$ лишь за счет изменения частицами их фазового объема, поэтому справедлива простая связь

$$f(x, v, t^{j+1}) = f(x - v\tau, v, t^j), \quad (7.128)$$

являющаяся решением уравнения Больцмана в отсутствие столкновений;

4) связь (7.128) упрощается путем разложения f^{j+1} в ряд Тейлора по параметру $v\tau$:

$$f^{j+1} = f^j - \tau \frac{\partial f^j}{\partial x} v + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^2} v^2 + \dots \quad (7.129)$$

с точностью до членов третьего порядка; так как функция распределения экспоненциально убывает с ростом v^2 , то вклад частиц с большими скоростями считается малым и соответствующие члены в (7.129) отбрасываются;

5) при выводе уравнений для моментов, соотношения (7.129) последовательно умножаются на функции $\Phi(v)$, соответственно равные 1, mv , $mv^2/2$ (*сумматорные инварианты*), и интегрируются по всем скоростям v ; в результате связь между f^{j+1} и f^j преобразуется в связи уже между средними гидродинамическими параметрами газа такими, как плотность, поток массы, полная энергия:

$$\rho = \int m f dv, \quad \rho V = \int m v f dv, \quad E = \int \frac{mv^2}{2} f dv,$$

и другими величинами, взятыми в моменты f^j, f^{j+1} (иными словами, получается *дискретная по времени* гидродинамическая модель среды);

6) после соответствующей дискретизации по пространству строятся окончательные дискретные (и по времени, и по пространству) модели газа, учитывающие некоторые черты исходного кинетического уравнения (*кинетически согласованные разностные схемы*); они, вообще говоря, не могут быть получены аппроксимацией гидродинамических моделей (например, уравнений (7.126)), поскольку для их конструирования используются свойства модели более высокого иерархического уровня.

Наиболее простой вариант описанных выше процедур соответствует случаю локально максвелловской функции распределения (7.127) и отвечающих ей (для одномерных течений) уравнений (7.126), полудискретные аналоги которых выглядят так:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho V^2 + p), \\ \frac{(\hat{\rho V}) - \rho V}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 + p) &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho V^3 + 3pV), \\ \frac{\hat{E} - E}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}[V(E + p)] &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[V^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p) \right], \end{aligned} \quad (7.130)$$

где для упрощения записи введено обозначение $g^{j+1} = \hat{g}$, $g^j = g$. При их выводе интегралы, получающиеся в правой части (7.129), представлены (с учетом свойств функции распределения $f^{(0)}$) как суммы и произведения моментов

функции e^{-z^2} различных порядков. Нечетные моменты равны нулю, а четные определяются по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z^{2\tau} dz = \frac{\pi^{1/2}}{2^\tau} (2\tau - 1)!!.$$

После проведения тем или иным способом дискретизации пространственных операторов из (7.130) получаются полностью дискретные аналоги уравнений (7.126), численное решение которых может быть найдено по явным формулам (нетрудно построить и неявные варианты модели (7.130), поменяв в (7.128) местами f^{i+1} и f^j). Стоящие в правой части (7.130) члены первого порядка малости по τ представляют собой добавки к обычным дискретным моделям для (7.126), несущие дополнительную информацию о происхождении аппроксимируемой модели.

Не приводя достаточно громоздкий вывод всей системы (7.130), ограничимся лишь уравнением неразрывности. Представляя (7.129) в виде

$$m \frac{f^{j+1} - f^j}{\tau} + m \frac{\partial f^j}{\partial x} v = m \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^2} v^2,$$

умножая это выражение на $\Phi(v) = 1$ и интегрируя его по v , получим

$$\frac{\rho^{j+1} - \rho^j}{\tau} + \int m \frac{\partial f^j}{\partial x} v dv = \frac{\tau}{2} \int m \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^2} v^2 dv,$$

или, вынося знак дифференцирования за интеграл

$$\frac{\rho^{j+1} - \rho^j}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \int f^j v dv = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int f^j v^2 dv.$$

Преобразуем интегралы в последнем равенстве в соответствии с определениями функций V и p и приходим к уравнению

$$\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho V^2 + p),$$

т. е. к первому из уравнений (7.126).

Описанный выше подход обобщается на многомерные аналоги уравнений (7.126) и на более сложные модели течений газа, например на уравнения Навье–Стокса. В последнем случае вместо максвелловской функции распределения $f = f^{(0)}$ используется, естественно, следующее приближение – функция $f = f^{(0)} + f^{(1)}$ отвечающая среде с ненулевыми вязкими напряжениями и потоками тепла.

Поясним: граничные условия для моделей типа (7.130) не могут быть взяты в точности такими же, как в случае уравнений Эйлера (или Навье–Стокса) уже хотя бы потому, что при автоматическом их переносе дискретная модель стала бы неконсервативной. Поэтому не только уравнения модели (7.130), но также и краевые условия для них должны быть согласованы с краевыми условиями для занимающего более высокий иерархический уровень кинетического уравнения.

Кинетически согласованные разностные схемы в силу своего построения обладают рядом свойств, делающих их весьма эффективными для численного моделирования многих достаточно сложных течений газа.

Литература: 8[202–221], 8[221–234], 8[235–246], 8[246–269]

Контрольные вопросы:

1. Анализ размерностей и групповой анализ моделей.
2. Автомодельные (самоподобные) процессы.
3. Различные режимы распространения возмущений в нелинейных средах.
4. Формулировка, некоторые следствия.
5. Классификация режимов с обострением.
6. Расширение «автомодельного метода».
7. Локализованные структуры в нелинейных средах.
8. Различные способы осреднения.
9. Классификация режимов горения теплопроводной среды.
10. Необходимость численного моделирования, элементарные понятия теории разностных схем.
11. Непосредственная формальная аппроксимация.
12. Интегро-интерполяционный метод.
13. Принцип полной консервативности.
14. Построение разностных схем с помощью вариационных принципов.
15. Использование иерархического подхода к получению дискретных моделей.

8. МОДЕЛИ ФОРМАЛИЗУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Степень универсальности математических моделей определяется их применимостью к анализу более и менее многочисленной группы однотипных объектов в одном или многих режимах функционирования. Использование машинных методов станет неудобным, если в процессе анализа объекта при каждом изменении режима функционирования потребуется смена математической модели. В большинстве случаев инженер-разработчик должен быть освобожден от сложной и ответственной работы по конструированию математических моделей элементов, прибегая к выполнению такой работы только в отдельных необходимых ситуациях. Следовательно, применяемые в САПР математические модели элементов должны иметь высокую степень универсальности.

Требования высокой точности, большой степени универсальности, с одной стороны, и высокой экономичности – с другой, противоречивы. Чем детальнее в модели отражаются различные закономерности процессов, тем точнее и универсальнее модель, но и тем больше требуемый объем вычислений и больше число используемых параметров.

8.1. Динамика скопления амёб

Амеба – одноклеточный организм размером около десяти микрон (10^{-3} см), обитающий в почве и передвигающийся в ней с помощью ложноножек, т. е. частей своего тела. Питаются амебы в основном бактериями, поглощая их вместе с землей (если пищи достаточно, то амебы размножаются делением на две части).

Из наблюдений и эксперимента известно, что динамика развития их сообщества – достаточно большого количества амёб, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга, – бывает достаточно сложной. Например, в зависимости от внешних условий амебы могут собираться в огромные (до сотен тысяч штук) скопления, которые начинают двигаться как единое целое, хотя индивидуальность каждой амебы сохраняется. Замечено, что это макроскопическое «организованное» движение происходит в направлении к более высокой концентрации некоторого химического вещества, вырабатываемого самими амебами.

Построение содержательной модели. Приближения модели. Постулаты и уравнения модели. Общая математическая модель и ее коррекция. Некоторые результаты исследования математической модели.

Математическая модель динамики скопления амёб базируется на следующих предположениях:

1) расстояние между амебами мало в сравнении с размерами их скоплений (сотни микрон), их можно рассматривать как «сплошную среду» и вводить концентрацию $N(x, y, z, t)$ – число амёб в единице объема;

2) процесс одномерный, т. е. концентрация амёб и другие величины являются функциями только координаты x и времени t ;

3) амёбы не рождаются и не умирают в процессе макроскопического движения, т. е. характерное время движения (несколько часов) мало по отношению к характерным временам размножения и жизни амёб;

4) индивидуальное движение амёб при отсутствии стимулирующих внешних воздействий (пища, тепло и т. д.) беспорядочно, хаотично; выделенных направлений нет и каждая амёба может с равной вероятностью двигаться как вправо, так и влево;

5) если в среде есть «притягивающее» химическое вещество, то к собственному неупорядоченному движению амёб добавляется их направленное движение в область с большей плотностью этого вещества.

Составим уравнение баланса амёб в элементе среды dx за время dt , используя «закон сохранения» их числа (предположение 3). В этом случае общее число амёб в объеме dx (площадь поперечного сечения единична) изменяется лишь из-за разности потока амёб $W(x, t)$ на левой и правой границах элемента. Величина $W(x, t)$ понимается в обычном смысле: это число амёб, пересекающих единичную поверхность за единичное время.

Величина $W = W_c + W_d$ складывается из двух составляющих, W_c и W_d . Часть W_c общего потока формируется за счет хаотического движения амёб, и поэтому по аналогии с законом Фурье для процесса диффузии тепла его можно записать через градиент их концентрации:

$$W_c = -\mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

где $\mu > 0$ – некоторый коэффициент, характеризующий рассматриваемую «среду». Эту формулу для W_c и величину μ нетрудно получить из более подробного анализа процесса на микроуровне, используя те же рассуждения, которые применялись для явлений передачи тепла.

При получении выражения для составляющей W_d , описывающей направленный поток амёб, будем считать, что величина W_d тем больше, чем больше градиент плотности «притягивающего» вещества:

$$W_d = \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Здесь $\eta > 0$ – некоторая постоянная, $\rho(x, t)$ – плотность вещества, а множитель N перед градиентом означает, что при заданном градиенте величины ρ составляющая потока W_d пропорциональна концентрации амёб в данной точке. Объединяя выражения для W_c , W_d и подставляя их в уравнение баланса, получаем

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial N}{\partial x} - \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (8.1)$$

В уравнении (9.1) две неизвестных функции – N и ρ . Поэтому необходимо получить, пользуясь законом сохранения вещества, уравнение баланса для величины ρ . При этом следует учесть, что скорость выделения химического вещества пропорциональна концентрации амёб. Будем учитывать также распад

вещества, скорость которого, естественно, пропорциональна его концентрации (аналогично процессу радиоактивного распада). Таким образом, в единицу времени в единичном объеме появляется и исчезает количество вещества, равное

$$f = \alpha N - \beta \rho,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – константы, характеризующие соответственно скорость его выделения амебами и скорость распада (в этом состоит отличие модели для вещества от модели для амеб, в которой они не умирают и не рождаются). Изменение плотности вещества в элементарном объеме среды происходит также и вследствие разности его потоков на левой и правой границах элемента. Оно диффундирует в среде из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией подобно тому, как тепло распространяется от более нагретых участков теплопроводной среды к менее нагретым. Это движение создает, согласно закону Фика, поток W_ρ , равный

$$W_\rho = -D \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

где $D > 0$ – коэффициент диффузии (вывод закона Фика аналогичен выводу закона Фурье).

Итак, уравнение баланса вещества имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial W_\rho}{\partial x} + f,$$

или, учитывая выражения для W_ρ и f ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \alpha N - \beta \rho. \quad (8.2)$$

Уравнения (8.1), (8.2) взаимосвязаны: в первое из них входит величина ρ , во втором фигурирует величина N . Система (8.1), (8.2) нелинейна из-за наличия члена $\eta N \partial \rho / \partial x$ в скобках, стоящих в правой части (8.1). Рассматриваемые соответственно относительно концентраций амеб N и плотности вещества ρ уравнения (8.1) и (8.2), как нетрудно видеть, принадлежат к параболическому типу.

Если амебы не выделяют «притягивающего» вещества и $\rho(x, t) \equiv 0$, то (8.1) переходит в уравнение теплопроводности (или диффузии)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2},$$

что легко объяснить, поскольку в потоке W остается лишь составляющая W_c , соответствующая беспорядочному, ненаправленному движению амеб.

Из-за нелинейности системы (8.1), (8.2) сконструировать ее общее решение нельзя, и поэтому определение пространственно-временной динамики скопления амеб – весьма непростая задача. Однако она значительно облегчается, если изучаются малые отклонения от постоянного во времени и по пространству решения $N \equiv N_0$, $\rho \equiv \rho_0$, т. е. когда нелинейная задача становится линейной. Такое решение существует лишь при соотношении

$$\alpha N_0 = \beta \rho_0,$$

означающим, что выделение вещества и его распад уравнивают друг друга.

Линеаризованная в окрестности постоянного решения система (8.1), (8.2) имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} - \eta N_0 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} + \alpha \tilde{N} - \beta \tilde{\rho}, \quad (8.3)$$

где $\tilde{N}$ и $\tilde{\rho}$ – малые возмущения ($\tilde{N} \ll N$, $\tilde{\rho} \ll \rho_0$). Ее общее решение для неограниченного пространства $-\infty < x < \infty$ (в этом случае нет необходимости удовлетворять граничным условиям) можно построить в виде суммы частных решений (гармоник)

$$\tilde{N} = C_1 \sin kx e^{\gamma t}, \quad \tilde{\rho} = C_2 \sin kx e^{\gamma t},$$

где $k > 0$ – волновое число, C_1, C_2 – константы. Для частных решений должны выполняться соотношения

$$C_1(\gamma + \mu k^2) = C_2 \eta N_0 k^2, \quad C_2(\gamma + \beta + Dk^2) = C_1 \alpha, \quad (8.4)$$

связывающие длину волны гармоник $\lambda = 2\pi/k$ с величиной γ – ее инкрементом (или декрементом), характеризующим нарастание или затухание возмущения со временем. *Декремент затухания* (от латинского *decrementum* – уменьшение), характеристика затухания колебаний в системе: $\delta = \ln(A_1/A_2)$, где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний, следующие друг за другом в одну и ту же сторону.

8.2. Диффузные процессы и дифференциальные уравнения Колмогорова. Марковские процессы, вывод прямого и обратного уравнений Колмогорова.

Случайный марковский процесс. Типичным примером подобного процесса служит движение помещенной в жидкость маленькой твердой частицы, совершающей хаотические перемещения под действием беспорядочных столкновений с молекулами жидкости (броуновское движение). Ее положение в любой момент времени $t \geq t_0$ задается координатами x, y, z трехмерного пространства R^3 . В дальнейшем для упрощения выкладок будем рассматривать одномерное движение, т. е. случайные блуждания броуновской частицы вдоль оси x , $x \in R^1$.

Случайный процесс называется *марковским*, если по положению точки x в момент времени t однозначно определяется вероятность ее нахождения в произвольный момент $t' > t$ в некоторой части (в любом измеримом подмножестве E) пространства R^1 . Другими словами, это процесс без последствия, когда события, случившиеся в промежутке времени между t и t' , не влияют на положение точки в момент t' .

Марковский процесс полностью характеризуется функцией

$$\rho(t, x, t', x'), \quad x \in R^1,$$

называемой *плотностью вероятности* в точке x' , зная которую, нетрудно вычислить вероятность

$$\rho(t, x, t', E) = \int_{E(x')} \rho(x, t, x', t') dx'$$

нахождения частицы в некоторой окрестности $E(x')$ точки x' в момент времени t' .

Очевидно, что для функции ρ выполнено условие нормировки

$$\int_{R^1} \rho(t, x, t', x') dx' = 1, \quad (8.5)$$

т. е. в любой момент частица обязательно находится в какой-либо точке пространства R^1 .

При построении модели марковского процесса существенным образом используется предположение о его *сильной непрерывности*. Считается, что частица за малые промежутки времени Δt может получить заметные приращения координаты $\Delta x \geq \delta$ лишь с малой вероятностью. Это значит, что для любого $\delta > 0$

$$\int_{|x' - x| \geq \delta} \rho(t - \Delta t, x, t, x') dx' = o(\Delta t),$$

или, в эквивалентной записи,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x' - x| \geq \delta} \rho(t - \Delta t, x, t, x') dx' = 0. \quad (8.6)$$

Предполагается также, что для любых $\delta > 0$ существуют равномерные по x пределы

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x' - x| \geq \delta} (x' - x) \rho(t - \Delta t, x, t, x') dx' = b > 0, \quad (8.7)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x' - x| \geq \delta} (x' - x)^2 \rho(t - \Delta t, x, t, x') dx' = 2a > 0. \quad (8.8)$$

Эти предположения имеют следующую интерпретацию: вероятность для частицы находиться в момент t в интервале $|x' - x| < \delta$ пропорциональна Δt (уменьшается с уменьшением промежутка времени, прошедшего от начального момента $t - \Delta t$, что естественно) и обратно пропорциональна некоторой «средней» величине размера интервала $|x' - x|$ (и его квадрату, что также естественно). Величины a и b зависят, вообще говоря, от точки x и момента t , т. е. $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$, но для простоты здесь рассматривается частный случай, когда a и b – постоянные.

Наконец, последнее используемое ниже предположение состоит в том, что для любых t, x, t', x' существуют непрерывные частные производные функции ρ по x

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (8.9)$$

Основное свойство рассматриваемого процесса выражается *тождеством Маркова*

$$\rho(t, x, t', x') = \int_{R^1} \rho(x, t, \bar{t}, \bar{x}) \rho(\bar{t}, \bar{x}, t', x') dx', \quad (8.10)$$

где $t < \bar{t} < t'$ – некоторый момент времени в промежутке от t до t' , а $\bar{x}$ – координата частицы в момент $\bar{t}$, $t < \bar{t} < t'$, некоторая промежуточная точка

при движении от точки x до точки x' . Смысл тождества (8.10) проясняется при рассмотрении перехода из точки x в точку x' как последовательности переходов – сначала из точки x в точку $\bar{x}$, а затем из точки $\bar{x}$ в точку x' (на рис. 8.1 показаны возможные комбинации этих переходов, причем промежуточные перемещения изображены штриховыми линиями, а основной переход – сплошными). Вероятность события, состоящего из двух последовательных независимых событий, равна произведению вероятностей каждого события, поэтому под интегралом в (8.10) стоит произведение соответствующих величин. Интеграл берется по всем возможным промежуточным точкам $\bar{x} \in \mathbb{R}^1$.

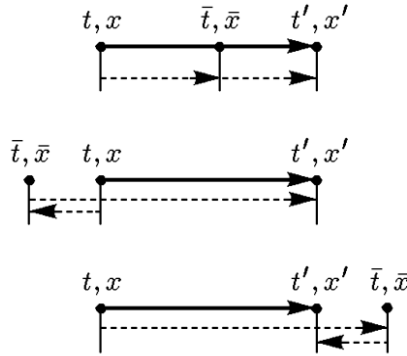


Рис. 8.1

Для рассматриваемого процесса тождество Маркова играет роль своеобразного «фундаментального закона», связывая некоторым образом значения функции ρ в точках t, x и t', x' . С его помощью вычислим сначала разность величин ρ в моменты $t - \Delta t$ и t :

$$\begin{aligned} \rho(t - \Delta t, x, t', x') - \rho(t, x, t', x') &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^1} \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) \rho(t, \bar{x}, t', x') d\bar{x} - \rho(t, x, t', x') \int_{\mathbb{R}^1} \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Первому члену в левой части этого равенства отвечает (смотрите (8.10)) первый интеграл в его правой части, а второму – тождественный 8.5) равен единице. Множитель $\rho(t, x, t', x')$ не зависит от $\bar{x}$, и поэтому, внося его под знак интеграла, перепишем равенство в виде

$$\rho(t - \Delta t, x, t', x') - \rho(t, x, t', x') = \int_{\mathbb{R}^1} [\rho(t, \bar{x}, t', x') - \rho(t, x, t', x')] \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x}.$$

Поделим теперь в этом равенстве обе его части на Δt и разобьем интеграл на два – по области $|\bar{x} - x| \geq \delta$ и $|\bar{x} - x| < \delta$:

$$\frac{\rho(t - \Delta t, x, t', x') - \rho(t, x, t', x')}{\Delta t} = I_1 + I_2, \quad (8.11)$$

$$I_1 = \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x} - x| \geq \delta} [\rho(t, \bar{x}, t', x') - \rho(t, x, t', x')] \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x},$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x} - x| < \delta} [\rho(t, \bar{x}, t', x') - \rho(t, x, t', x')] \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x}.$$

Интеграл I_1 в силу свойства сильной непрерывности (8.6) стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$ (первый сомножитель в подынтегральном выражении не зависит от Δt и не влияет на поведение I_1 при $\Delta t \rightarrow 0$).

Интеграл I_2 преобразуем, раскладывая с учетом (8.10) первый сомножитель по степеням $(\bar{x} - x)$:

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} \frac{\partial \rho(t, x, t', x')}{\partial x} (\bar{x} - x) \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x} + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(t, x, t', x')}{\partial x^2} (\bar{x} - x)^2 \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x} + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} o[(\bar{x} - x)^2] \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(t, x, t', x')}{\partial x^2} \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Устремим в этом равенстве Δt к нулю, замечая, что частные производные функции ρ , стоящие под знаком интеграла, не зависят от $\bar{x}$. Вынося их из-под интеграла, для первых двух членов получим, в силу предположений (8.9), (8.10), что их пределы соответственно равны

$$b \frac{\partial \rho(t, x, t', x')}{\partial x}, \quad a \frac{\partial^2 \rho(t, x, t', x')}{\partial x^2},$$

а третье слагаемое представим в виде

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x} - x) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(t, x, t', x')}{\partial x^2} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{x}-x|<\delta} (\bar{x} - x)^2 \rho(t - \Delta t, x, t, \bar{x}) d\bar{x},$$

где $\bar{\varepsilon}(\bar{x} - x)$ – среднее значение функции $\varepsilon(\bar{x} - x)$, причем по определению величины $\delta[(\bar{x} - x)^2]$ имеем $\bar{\varepsilon}(\bar{x} - x) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Осуществим в последнем выражении предельный переход сначала при $\delta \rightarrow 0$. Этот предел, очевидно, равен нулю при любых $\Delta t > 0$. Поэтому его предел при $\Delta t \rightarrow 0$ также равен нулю. Наконец, предел левой части (9.10) при $\Delta t \rightarrow 0$ равен производной функции ρ по времени. Суммируя эти результаты, получаем из (9.10) *уравнение Колмогорова* для плотности вероятности, справедливое для всех $t > t_0$, $-\infty < x < \infty$:

$$\frac{\partial \rho(t, x, t', x')}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \rho(t, x, t', x')}{\partial x^2} + b \frac{\partial \rho(t, x, t', x')}{\partial x}. \quad (8.12)$$

Уравнение (8.12) – линейное параболическое уравнение. Этими же свойствами обладают и его обобщения.

Простейший вариант уравнения Колмогорова получается из (8.12) при $b = 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (8.13)$$

и представляет собой *уравнение теплопроводности* (или диффузии).

Однако между математическими моделями теплопередачи и случайного марковского процесса есть существенная разница. При выводе уравнения (8.12) для функции $\rho(t, x)$ использовались (в отличие от вывода уравнения теплопроводности) условия сильной непрерывности (8.5)–(8.7). Это приводит к тому, что функция $\rho(t, x)$ не может быть любым решением уравнения

Колмогорова. Она оказывается так называемым фундаментальным решением уравнений (8.12)–(8.13).

Проще всего пояснить это свойство функции $\rho(t, x)$ в случае простейшего уравнения (8.14). Пусть функция $u(t, x)$ – решение уравнения (8.14), определенное при $t > t_0$, $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющее заданному начальному условию

$$u(t, x) \rightarrow u_0(t, x) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_0. \quad (8.14)$$

Тогда, если $\rho(x, t, t', x')$ – фундаментальное решение (8.12), то функция $u(t, x)$ находится по формуле

$$u(t, x) = \int_{R^1} \rho(t, x, t', x') u_0(x') dx'. \quad (8.15)$$

Используя условие нормировки (8.5) при $t' \rightarrow t_0$, $x' \rightarrow x$ и учитывая независимость левого предела в последней формуле от δ , получаем

$$\lim_{t' \rightarrow t_0} \int_{R^1} \rho(t, x, t', x') u_0(x') dx' = u_0(x),$$

т. е. формулу (8.15).

Простейший пример – функция мгновенного точечного источника тепла для уравнения теплопроводности (8.12), даваемая простой формулой (8.14) и имеющая те же свойства, что и функция $\rho(t, x)$. Для более общих уравнений (8.11)–(8.13) не существует столь простых представлений их фундаментальных решений. Однако то обстоятельство, что величина $\rho(t, x)$ подчиняется уравнению Колмогорова и является его фундаментальным решением, существенно используется при исследовании объектов, в которых протекают случайные марковские процессы, в частности в задачах управления такими объектами.

Итак, параболические уравнения — один из примеров универсальности математических моделей (табл. 8.1). Они описывают широкий круг процессов совершенно различной природы. Отметим, что параболические уравнения часто связываются с хаотическими неупорядоченными явлениями (теплопередача, диффузия и т. д.). Однако они применимы и ко многим процессам, которые рассматриваются как детерминированные (движение грунтовых вод, фильтрация газа в пористой среде и т. д.).

Таблица 8.1

Универсальность математических моделей.
Параболические уравнения

Объект (процесс)	Основные предположения и законы
Движение грунтовых вод	Сохранение массы, закон Дарси
Теплопередача; диффузия вещества	Сохранение энергии, закон Фурье; сохранение массы, закон Фика
Движение скопления амёб	Сохранение числа амёб, хаотичность движения амёб в отсутствие «притягивающего» вещества
Случайный марковский процесс	Тождество Маркова, сильная непрерывность процесса

Универсальность математических моделей – отражение единства окружающего нас мира и способов его описания. Поэтому методы и результаты, разработанные и накопленные при математическом моделировании одних явлений, относительно легко, «по аналогии», могут быть перенесены на широкие классы совсем других процессов.

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

8.3. Модель рекламной компании

Организация рекламной компании. Фирма начинает рекламировать новый товар или услугу. Разумеется, что прибыль от будущих продаж должна с лихвой покрывать издержки на дорогостоящую кампанию. Ясно, что вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, уже возможно рассчитывать на заметную прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар далее станет бессмысленно.

Модель рекламной компании основывается на следующих основных предположениях. Считается, что величина dN/dt – скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых купить его (t – время, прошедшее с начала рекламной компании, $N(t)$ – число уже информированных клиентов), – пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, т. е. величине $\alpha_1(t) (N_0 - N(t))$, где N_0 – общее число потенциальных платежеспособных покупателей, $\alpha_1(t) > 0$ характеризует интенсивность рекламной компании (фактически определяемую затратами на рекламу в данный момент времени). Предполагается также, что узнавшие о товаре потребители тем или иным образом распространяют полученную информацию среди неосведомленных, выступая как бы дополнительными рекламными «агентами» фирмы. Их вклад равен величине $\alpha_2(t)N(t) (N_0 - N(t))$ и тем больше, чем больше число агентов. Величина $\alpha_2(t) > 0$ характеризует степень общения покупателей между собой (она может быть установлена, например, с помощью опросов).

В итоге получаем уравнение

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)] (N_0 - N). \quad (8.16)$$

При $\alpha_1(t) \rightarrow \alpha_2N(t)$ из (8.16) получается модель типа модели Мальтуса, при противоположном неравенстве – уравнение логистической кривой

$$\frac{dN}{dt} = N (N_0 - N), \quad d\tau = \alpha_2(t)dt,$$

решение которого изучено.

Полученная аналогия вполне понятна, так как при построении данной модели и модели роста численности популяции использовалась одна и та же идея «насыщения»: скорость роста со временем какой-либо величины пропорциональна произведению текущего значения этой величины $N(t)$ на разность $N_0 - N(t)$ между ее равновесным (популяция) либо предельным (покупатели) и текущим значениями.

Аналогия между обоими процессами заканчивается, если в какой-то момент времени величина $\alpha_1 + \alpha_2 N$ становится нулевой или даже отрицательной (для этого необходимо, чтобы один или оба коэффициента $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ стали отрицательными). Подобный негативный эффект довольно часто встречается в рекламных кампаниях различного рода и должен побудить их организаторов либо изменить характер рекламы, либо вовсе отказаться от дальнейшей пропаганды. Мероприятия по увеличению популярности товара могут, в зависимости от значений величин $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$, направляться на улучшение результатов как прямой (параметр α_1), так и косвенной (параметр α_2) рекламы.

Модель (8.16) лишена очевидного недостатка, присущего логистическому уравнению. Действительно, оно не имеет решений, обращающихся в нуль в конечный момент времени (из соответствующей формулы для $N(t)$ следует, что $N(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$). Применительно к рекламе это означало бы, что часть покупателей еще до начала кампании уже знает о новом товаре. Если же рассмотреть модель (8.16) в окрестности точки $N(t = 0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ – момент начала кампании), считая, что $N \ll N_0$, $\alpha_2(t) N \ll \alpha_1(t)$, то уравнение (8.16) принимает вид

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t) N_0$$

и имеет решение

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \quad (8.17)$$

удовлетворяющее естественному начальному условию при $t = 0$.

Из (8.17) относительно легко вывести соотношение между рекламными издержками и прибылью в самом начале кампании. Обозначим через p величину прибыли от единичной продажи, какой бы она была без затрат на рекламу. Считаем для простоты, что каждый покупатель приобретает лишь одну единицу товара. Коэффициент $\alpha_1(t)$ по своему смыслу – число равнозначных рекламных действий в единицу времени (например, расклейка одинаковых афиш). Через s обозначим стоимость элементарного акта рекламы. Тогда суммарная прибыль есть

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \quad (8.18)$$

а произведенные затраты

$$S = s \int_0^t \alpha_1(t) dt.$$

Прибыль превосходит издержки при условии $pN_0 > s$, и если реклама действенна и недорога, а рынок достаточно емок, то выигрыш достигается с первых же моментов кампании (в реальности между оплатой рекламы, рекламным действием и последующей покупкой имеет место так называемый *лаг* – временная задержка, которая может быть учтена в более полных моделях). При не слишком эффективной или дорогой рекламе фирма на первых шагах несет убытки. Однако это обстоятельство, вообще говоря, не может служить основанием для прекращения рекламы. Действительно, выражение (8.18) и полученное с его помощью условие $pN_0 > s$ справедливы лишь при малых значениях $N(t)$, когда функции P и S растут со временем по одинаковым законам. При увеличении $N(t)$ отброшенные в (8.16) члены становятся заметными, в частности усиливается действие косвенной рекламы. Поэтому функция $N(t)$ может стать более «быстрой» функцией времени, чем в формуле (8.18). Этот нелинейный эффект в изменении величины $N(t)$ при неизменном темпе роста издержек дает возможность скомпенсировать финансовую неудачу начальной стадии кампании.

Поясним данное утверждение в частном случае уравнения (8.16) с постоянными коэффициентами α_1, α_2 . Заменой

$$\bar{N} = \alpha_1/\alpha_2 + N$$

оно сводится к логистическому уравнению

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N} (\bar{N}_0 - \bar{N}), \quad \bar{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2 + N_0, \quad (8.19)$$

имеющему решение

$$\bar{N} = [1 + (\bar{N}_0 \alpha_2 / \alpha_1 - 1) \exp(-\bar{N}_0 \alpha_2 t)]^{-1}. \quad (8.20)$$

При этом $\bar{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2$, так что $N(0) = 0$, и начальное условие выполняется. Из (8.19) видно, что производная функции $\bar{N}(t)$ и, следовательно, функции $N(t)$ может при $t > 0$ быть больше ее начального значения (при условии $\bar{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ или $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$). Максимум производной достигается при $\bar{N} = \bar{N}_0/2$, $N = (\alpha_1/\alpha_2 + N_0)/2$:

$$\left(\frac{d\bar{N}}{dt} \right)_m = \left(\frac{dN}{dt} \right)_m = \alpha_2 \frac{\bar{N}_0^2}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

В этот период для текущей, т. е. получаемой в единицу времени прибыли имеем

$$P = p \frac{dN}{dt} = p \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

Вычитая из P_m начальную текущую прибыль $P_0 = p (dN/dt)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ (смотрите (9.17)), получаем

$$P_m - P_0 = p \frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2} N_0)^2}{4},$$

т. е. разница между начальной и максимальной текущей прибылью может быть весьма значительной. Суммарный экономический эффект от кампании (его необходимым условием является, очевидно, выполнение неравенства $P_m = p \frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_2} N_0)^2}{4} > \alpha_1 s$) определяется всем ее ходом, характеристики

которого вычисляются из (8.19), (8.20) с помощью квадратуры (от латинского quadratura – придание квадратной формы).

Как следует из (8.19), начиная с некоторого момента, продолжать рекламу становится невыгодно. Действительно, при $\bar{N}(t)$, близких к $\bar{N}_0$, уравнение (8.19) записывается в виде

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N} (\bar{N}_0 - \bar{N}). \quad (8.21)$$

Его решение стремится при $t \rightarrow \infty$ к предельному значению $\bar{N}_0$ (а функция $N(t)$ – к N_0) по медленному экспоненциальному закону. В единицу времени появляется ничтожно малое число новых покупателей, и поступающая прибыль при любых условиях не может покрыть продолжающихся издержек.

Аналогичные характеристики вычисляются для уравнения (8.16) и различных его обобщений, широко используемых также для описания внедрения технологических и иных новшеств.

8.4. Макромодель равновесия рыночной экономики (на примере модели Кейнса). Исходные положения в построении классических экономических моделей. Математическая модель равновесного рынка

Любой участник рыночного экономического процесса действует в соответствии со своими индивидуальными интересами (извлечение прибыли, улучшение условий труда, минимизация риска, экономия ресурсов и т. д.). Простейший вариант такой системы – экономика с совершенной конкуренцией, когда каждый субъект экономически ничтожно мал и не оказывает непосредственного влияния на уровень производства, цены, зарплату и другие макропоказатели. В то же время разобщенные действия экономических агентов могут складываться через существующие в системе отношения купли-продажи в совокупную согласованную картину действий работодателей и наемных рабочих, финансистов и вкладчиков и т. д.

Если в результате такого коллективного взаимодействия общее производство товаров и услуг в системе согласовано с общим спросом на них, то такое состояние экономики называется равновесным, а устанавливающиеся при этом цены – равновесными рыночными ценами. Баланс между спросом и предложением имеет место, как подразумевается, не при произвольных, а именно при этих рыночных ценах, что означает, в частности, платежеспособность спроса.

Одна из важных задач экономической науки – определение условий равновесия экономики, и в том числе равновесных рыночных цен. Наиболее простые математические модели экономического равновесия строятся при следующих предположениях:

1) совершенная рыночная конкуренция, означающая отсутствие как крупных производственных корпораций (и, тем более, монополий), так и объединений работников, могущих диктовать свои условия для всей системы;

2) неизменность производственных возможностей системы: оборудование, производственные помещения, технологии не изменяются со временем;

3) неизменные во времени экономические интересы партнеров: предприниматели не пытаются увеличить свою прибыль, рабочие – зарплату, инвесторов устраивают проценты, получаемые по ценным бумагам, и т. д.

Отвечающие этим предположениям модели описывают весьма частный случай «застывшей» во времени идеальной рыночной экономики. Однако они дают ответ на вопрос о возможности существования экономического равновесия, формирующегося из рыночного «хаоса», и, кроме того, связывают между собой основные макропоказатели экономической системы.

Одна из таких макромоделей – *модель Кейнса* – рассматривает в качестве агентов нанимателей и нанимаемых, потребителей и сберегателей, производителей и инвесторов, действующих на рынках рабочей силы, продуктов и денег, т. е. распределяющих и обменивающих эти товары (труд, продукты, деньги) между собой.

Первый макропоказатель системы – *национальный доход* Y , являющийся единственным (для простоты) продуктом, производимым ею в единицу времени. Этот продукт вырабатывается производственным сектором экономики, а его величина дается функцией F , зависящей от количества и качества ресурсов, состава основных фондов и *числа занятых работников* R (второй макропоказатель). В соответствии с предположением 2) в состоянии равновесия производственная функция R , а с нею и продукт Y определяется лишь занятостью, т. е.

$$Y = F(R). \quad (8.22)$$

Относительно $F(R)$ обычно считается, что $F(0) = 0$, $F'(R) >> 0$, $R > 0$ и $F''(R) < 0$ при $R > 0$ (рис. 8.2). Функция $F(R)$ обладает свойством «насыщения»: с ростом R выпуск растет все медленнее. Такой подход вполне оправдан, поскольку при излишне большом числе занятых на производстве для них попросту не найдется соответствующего фронта работ. Один или несколько старателей, обнаруживших золотую жилу, быстро и без помех достигнут своей максимальной производительности; при большом количестве рабочих они начинают мешать друг другу, и их индивидуальная производительность уменьшается; наконец, при очень большом числе старателей добыча золота вообще перестает расти, так как вновь прибывающие не могут подступиться к месту разработки.

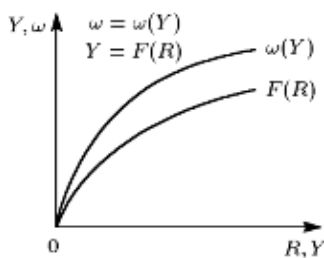


Рис. 8.2

Соотношение (8.22) дает связь между рынками труда (R) и продукта (Y). Дополнительное соотношение определяется с помощью одного из основных постулатов классической политэкономии:

4) заработная плата s работника равна стоимости продукта, которая была бы потеряна при уменьшении занятости на одну единицу (заработная плата равна предельному продукту труда).

Заметим, что в постулате (8.19) не учитываются (считаются малыми) другие издержки, которые отпали бы в результате сокращения одного рабочего места (затраты на ресурсы, оборудование и т.д.). Таким образом, из постулата получаем

$$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s,$$

где $\Delta Y^{(1)}$ – количество продукта, потерянное при уменьшении занятости на единицу, p – *цена продукта* (так что слева в данном равенстве записана величина потерянной стоимости). Если занятость изменилась на величину ΔR , то из последнего равенства, очевидно, имеем

$$\Delta Y \cdot p = s \cdot \Delta R,$$

где $\Delta Y = \Delta Y^{(1)} \Delta R$ – стоимость, потерянная или полученная при изменении числа работников на ΔR . Считая ΔR и ΔY малыми в сравнении с R и Y , перепишем последнее равенство в дифференциальной форме:

$$\frac{dY}{dR} = \frac{s}{p},$$

или, принимая во внимание (8.22),

$$F'(R) = \frac{s}{p}.$$

Поскольку $F(R)$ задана (а с нею известна функция $F'(R)$), то при известных макропоказателях s и p из (8.22) можно найти уровень занятости R , а из (8.21) и величину продукта Y . Напомним: этот уровень отвечает числу работников, согласных трудиться за данную зарплату при данных ценах и других характеристиках системы, а не вообще возможному числу наемных рабочих. Предполагается, что для обеспечения равновесного уровня занятости всегда найдется достаточное количество желающих работать на существующих условиях, т. е.:

5) предложение труда не сдерживает производства, число занятых определяется спросом на труд со стороны предпринимателей.

Два уравнения (8.21), (8.22) содержат четыре величины. Относительно одной из них предполагается, что:

6) заработная плата s в модели считается заданной.

Она определяется в результате компромисса между работодателями и нанимаемыми (реальная же зарплата зависит также и от уровня цен).

Очевидно, для построения замкнутой модели необходимо дальнейшее рассмотрение рынка продукта и рынка финансов. Произведенный продукт частично тратится на потребление, а частично сберегается:

$$Y = S + \omega,$$

где ω – *потребляемая часть* (в экономику не возвращается), а S – *сберегаемая часть*, возвращающаяся в экономическую систему (или фондообразующий продукт).

Соотношение между величинами S и ω определяется из следующих соображений. Относительно величины ω считается, что:

7) потребляемая часть выпуска зависит от величины самого выпуска, т. е. $\omega = \omega(Y)$.

При этом функция $\omega(Y)$ обладает свойством «насыщения» так же, как и функция $F(R)$: чем больше выпуск, тем меньшая доля дополнительного выпуска ΔY тратится на потребление (рисунок 9.2) и тем большая доля сберегается. Величина $d\omega/dY = c(Y)$ называется склонностью к потреблению и лежит в пределах $0 < c < 1$, иначе при малых выпусках потреблялось бы больше продукта, чем производилось бы (величина $d=1-c$ – склонность к накоплению).

Фондообразующий продукт

$$S = Y - \omega(Y) \quad (8.23)$$

вкладывается инвесторами в экономику с целью получить в будущем с этих инвестиций доход. В модели считается, что инвестиции эквивалентны отложенному (отнесенному на будущее) потреблению и поэтому определяются еще одним финансовым макропоказателем системы – *нормой банковского процента* r . Действительно, сделав *инвестиции* в размере A и получив через год доход $D = Ar$, инвестор ничего не теряет (в данном примере и не выигрывает) по сравнению с вложением этих средств в банк под процент r . В обоих случаях сегодняшнее потребление откладывается ради возможности большего потребления в следующем году. Спрос на инвестиции задается функцией $A(r)$ такой, что $A'(r) < 0$ при $0 < r < r_1$ и $A(r) = 0$ при $r \geq r_1$: при большой норме процента инвестиции отсутствуют (рисунок 9.3).

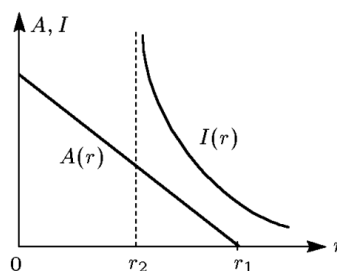


Рис. 8.3

В условиях равновесия предложение фондообразующего продукта $S(Y)$ сбалансировано со спросом на инвестиции $A(r)$:

$$S(Y) = A(r),$$

или, учитывая (8.23),

$$Y - \omega(Y) = A(r). \quad (8.24)$$

Для окончательного замыкания модели рассматривается рынок финансов. Деньги нужны экономическим агентам для покупки фондообразующего продукта, для потребления, а также как одно из средств накопления. Считается, что деньги выпускает государство, и их количество Z является заданным

управляющим параметром системы. Относительно спроса на деньги делается следующее предположение:

8) спрос на деньги представляет собой сумму операционного и спекулятивного спроса.

Операционный спрос определяется количеством денег, которое надо иметь на руках, чтобы производить покупки товара Y (как фондообразующего, так и идущего на потребление). Если цена продукта равна p , а *время обращения* равно τ , то операционный спрос равен, очевидно, величине τpY .

Спекулятивный спрос связан с величиной нормы процента r . Если норма процента высока, то большую часть денег их владельцы предпочитают хранить в банке, рассчитывая на хороший доход и жертвуя более высокой степенью ликвидности банкнот (способностью обмениваться на продукты) в сравнении с банковскими обязательствами. При низкой процентной ставке спекулятивный спрос увеличивается: владельцы желают иметь на руках все больше банкнот, аккумулируя в них свои накопления. Поэтому спекулятивный спрос за функцией $I(r)$ (рис. 8.3) такой, что и $I'(r) < 0$ при $r > r_2$ и $I(r)$ резко возрастает при $r \rightarrow r_2$ ($\lim_{r \rightarrow r_2} I(r) = \infty$, $r \rightarrow r_2$; владельцы денег не приобретают обязательств банка). Естественно считать $r_2 < r_1$, так как в противном случае либо инвестиции равны нулю, и говорить об экономическом равновесии не приходится, либо функция $I(r)$ не определена, и рассмотрение не имеет смысла.

Так как финансовый рынок находится в равновесии, то баланс («закон сохранения») денег в системе дается уравнением

$$Z = \tau pY + I(r). \quad (8.25)$$

Сводя воедино уравнения (8.21), (8.22), (8.24), (8.25), приходим к математической модели рыночного равновесия, полученной в предположениях 1) – 8):

$$Y = F(R), \quad F'(R) = s/p, \quad Y - \omega(Y) = A(r), \quad Z = \tau pY + I(r). \quad (8.26)$$

В модели (8.26) задаются параметры системы s (ставка заработной платы), Z (предложение денег) и технический параметр τ . Функции F , F' , ω , A , I – известные функции своих аргументов с описанными выше свойствами. По этим входным данным из модели определяются четыре неизвестных величины: Y (выпуск продукта), R (занятость), p (цена продукта) и r (норма прибыли).

Исключая из (8.26) величины p , r , Y , уравнения (8.26) легко свести к одному уравнению относительно R

$$-\frac{\tau s F(R)}{F'(R)} + Z = I\{A^{-1}[F(R) - \omega(F(R))]\}, \quad (8.27)$$

где A^{-1} – функция, обратная к функции A . Найдя из (8.27) значение R , из (8.26) нетрудно определить все остальные искомые величины.

Докажем с помощью нестрогих, но зато простых построений существование решения (8.27), основываясь на анализе графиков функций, входящих в его левую и правую части.

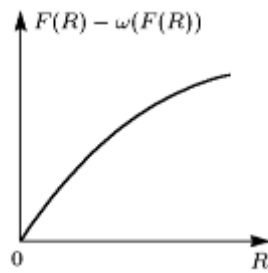


Рис. 8.4

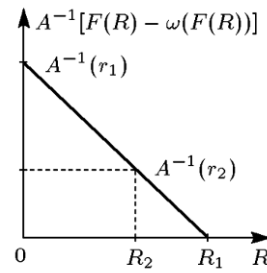


Рис. 8.5

Функция $F(R) - \omega(F(R))$ — монотонно растущая функция R , равная нулю при $R = 0$ (рис. 8.4). Ее монотонность следует из условия $d\omega(F(R))/d(F(R)) = c < 1$, а рост по мере увеличения R — из условия $dF(R)/dR > 0$. Данная функция является аргументом для монотонной функции A^{-1} , и из свойств функции A (рисунок 9.3) легко установить качественный вид зависимости A^{-1} от R (рисунок 9.5), причем $A^{-1} \equiv 0$ при $R > R_1$ (R_1 — некоторое значение величины R , $0 < R_1 < \infty$). В свою очередь A^{-1} служит аргументом монотонной функции I , свойства которой таковы (рис. 8.3), что как функция R она имеет вид,

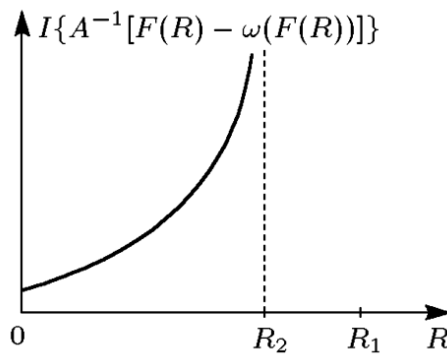


Рис. 8.6

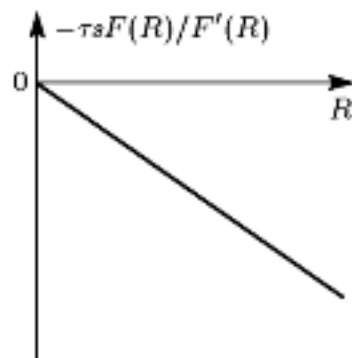


Рис. 8.7

изображенный на рис. 8.6 (для значений $R > R_2$ функция I не определена).

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (8.27). Функция $-\tau s F(R)/F'(R)$ равна нулю при $R = 0$ (считается, что $F'(0) \neq 0$). Ее первая производная по R , как следует из свойств функций $F'(R) > 0$, $F''(R) < 0$, отрицательна, т. е. она монотонно убывает (рис. 8.7).

Совмещая графики левой (кривая 2) и правой (кривая 1) частей уравнения (8.27) на одном рис. 8.8, убеждаемся в том, что при достаточно большом значении управляющего параметра Z кривые пересекаются в некоторой точке R_0 , $0 < R_0 < \infty$. Точка пересечения единственна в силу монотонности графиков. Следовательно, модель (8.24) действительно имеет единственное решение, описывающее равновесное состояние экономики.

Однако значение модели этим не ограничивается. Она может быть использована для сравнительного анализа различных, но близких состояний равновесия (не отвечая, естественно, на вопрос, каким образом система приходит в равновесное состояние или выходит из него). Допустим, что

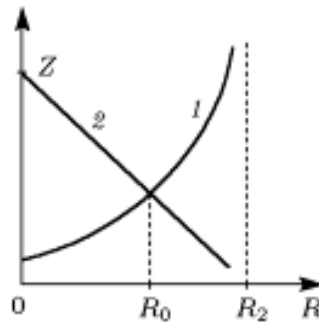


Рис. 8.8

значения равновесных параметров s_0 и Z_0 изменились на малые величины δs_0 и δZ_0 при переходе из одного равновесного состояния в другое (параметр τ считаем неизменным). Тогда изменятся и все остальные характеристики системы. Их можно найти из (8.26), имея в виду, что оба сравниваемых состояния равновесны. Например, из второго уравнения (8.26), используя разложение в ряд Тейлора, получаем

$$\frac{s_0}{p_0} \frac{\delta p}{p} = \frac{\delta s}{p_0} - F''(R_0) \delta R.$$

Проведя аналогичную процедуру с остальными уравнениями системы (8.26) и сводя результаты воедино, получаем

$$\frac{\delta p}{p_0} = a_1(\delta A + \delta \omega) + a_2(\delta Z - \delta I) + a_3 \delta s - a_4 \delta Y. \quad (8.28)$$

В выражении (8.28) присутствуют все характеристики изучаемой системы (коэффициенты $a_i < 0$, $i = 1, \dots, 4$, определяются равновесными значениями величин s_0 , p_0 , Y_0 , r_0 , функций R , ω , A , I и их производных). Поэтому с его помощью можно анализировать весь комплекс изменений, происходящих при переходе от одного равновесного состояния к другому (так называемый *системный подход*). Пусть, например, при неизменном числе занятых (т. е. $\delta R = 0$, $\delta Y = 0$), неизменных зарплате ($\delta s = 0$) и уровне потребления ($\delta \omega = 0$) требуется понизить цену ($\delta p < 0$), т. е. увеличить реальную заработную плату работающих. Тогда необходимо стремиться уменьшить инвестиции ($\delta A < 0$), снизить общий объем денег ($\delta Z < 0$) и увеличить спекулятивный спрос на них ($\delta I > 0$). Заметим, что требования, вытекающие из анализа соотношения (8.28), могут быть, вообще говоря, противоречивыми.

Разумеется, эта и другие системы мероприятий, могущие следовать из построенной модели, не реализуются автоматически путем соответствующей вариации параметра Z или s (или обоих параметров). Модель (8.26) лишь указывает на необходимые изменения в поведении экономических агентов. Вопрос о том, как действительно обеспечить эти изменения, убедив участников рыночного процесса принять их, выходит за рамки рассматриваемой модели. Его решение связано с изучением еще более трудноформализуемых объектов. При исследовании подобных объектов широко применяются подходы, почерпнутые из естественнонаучной сферы, такие, как идея насыщения,

переходы с микро- на макроуровень, использование «законов сохранения», представления о стационарности и равновесности и др.

8.5. Макромодель экономического роста

В растущей экономике число работающих $R(t)$ не постоянно, а увеличивается с течением времени. В простейшей модели считается, что темп прироста занятых работников пропорционален числу уже работающих:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha R(t).$$

Поэтому $R(t) = R_0 e^{\alpha t}$ – заранее известная функция времени (величина α задается, $R_0 = R(0)$ – число работающих в начальный момент $t = 0$). Работники производят национальный доход $Y(t)$, который частично идет на потребление и частично на накопление:

$$Y(t) = \omega + A. \quad (8.29)$$

Накопленная часть продукта A возвращается в экономику с тем, чтобы скомпенсировать выбывающие из строя производственные мощности, а также для создания новых мощностей. Под *мощностью* $M(t)$ подразумевается максимально возможный выпуск продукта экономикой. Реальный выпуск продукта зависит, естественно, от числа работающих и задается производственной функцией вида

$$Y(t) = M(t) \cdot f(x(t)). \quad (8.30)$$

В формуле (8.30) величина $x(t) = R(t)/M(t)$ по своему смыслу – количество работающих на единице мощности. Относительно функции $f(x)$ делаются следующие предположения: $f(0) = 0$, $f' > 0$ (выпуск растет с увеличением числа занятых) и $f'' < 0$ (насыщение). Функция $f(x)$ определена для значений x на отрезке $0 \leq x \leq x_M$, где $x_M = R_M/M$, а $R_M(t)$ – число рабочих мест в хозяйстве при мощности $M(t)$. Если все места заполнены, то выпуск $Y(t)$ по определению равен $M(t)$, т. е. для $f(x)$ должно выполняться условие $f(x_M) = 1$.

Одна из главных задач *теории экономического роста* – нахождение оптимальных в некотором смысле способов разделения произведенного продукта на потребляемую и накапливаемую части. Критерием оптимальности можно выбрать, например, душевое потребление (количество продукта, потребляемого одним работающим), т. е. величину $c(t) = \omega(t)/R(t)$.

Норма золотого правила роста Солоу. Проанализируем простой, но показательный случай экономического роста, когда мощность увеличивается со временем в том же темпе, что и число работающих. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\gamma - \beta = \alpha. \quad (8.31)$$

Оно означает также, что с тем же темпом растут функции $Y(t)$ (поскольку $f(x(t)) = f(x = R_0/M_0) = \text{const}$) и $\omega(t)$, $I(t)$.

Найдем число работающих и соотношение между потреблением и накоплением, при которых душевое потребление работников максимально. По определению

$$c(t) = \frac{\omega(t)}{R(t)} = \frac{Y(t) - A(t)}{R(t)}.$$

Учитывая, что $Y(t) = M(t) f(x)$, $A(t) = a\gamma M(t)$, и принимая во внимание (8.30), (9.31), получаем

$$c(t) = c = \frac{f(x) - f(\alpha + \beta)}{x}, \quad (8.32)$$

т. е. душевое потребление со временем не изменяется. Его максимум, как очевидно из (8.32), достигается при условии

$$\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x) - a(\alpha + \beta)}{x} \right] = 0,$$

которое дает уравнение для искомой величины x_m

$$x_m f'(x_m) - f(x_m) + a(\alpha + \beta) = 0. \quad (8.33)$$

Это уравнение всегда имеет единственное решение $0 < x_m \leq x_M$. Заметим, что помимо всех сделанных предположений, для реализации рассматриваемого режима экономического роста необходимо согласование численности работающих R_0 с мощностью M_0 в начальный момент времени так, чтобы $R_0 / M_0 = x_m$.

Норма накопления, обеспечивающая максимальное значение c_m ,

$$n_m = \frac{A_m}{Y_m},$$

находится из равенств $Y_m = M_m f(x_m)$, $A_m = a\gamma M_m$ и из (8.31), (8.33):

$$n_m = 1 - x_m \frac{f'(x_m)}{f(x_m)}, \quad (8.34)$$

и называется *нормой золотого правила роста Солоу*.

Если условие (8.31) не выполнено, то режимы роста экономики становятся более сложными, и оптимизация их характеристик проводится на всем рассматриваемом временном интервале. Напомним, что построенная модель и подобные ей модели не учитывают изменений в производственных отношениях (они считаются постоянными) и оперируют в основном технологическими связями, давая, в частности, верхние технологические ограничения на темп экономического роста. При их получении также широко используются аналогии с естественнонаучными объектами.

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ СОПЕРНИЧЕСТВА

8.6. Взаимоотношения в системе «хищник–жертва»

Строго говоря, эти отношения (как и отношения в аналогичной системе «паразит–хозяин») не могут называться соперничеством. «Соперничество» жертвы с хищником выражается в изменении численности жертвы, которая в свою очередь сказывается на численности хищника. Действительно, никакой организм (тем более популяция) не живет изолированно, а взаимодействует со своим окружением. Широко распространенный вид взаимодействия —

использование одними живыми организмами (животными, птицами, рыбами, насекомыми) других организмов в качестве пищи.

Математическая модель наиболее простой, т. е. двухвидовой системы «хищник–жертва» основывается на следующих предположениях:

1) численности популяций жертв N и хищников M зависят только от времени (точечная модель, не учитывающая пространственное распределение популяции на занимаемой территории);

2) в отсутствие взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса; при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает, так как им в этом случае нечем питаться:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad \frac{dM}{dt} = -\beta M, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0;$$

3) естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;

4) эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;

5) скорость роста численности жертвы уменьшается пропорционально численности хищников, т. е. величине cM , $c > 0$, а темп роста хищников увеличивается пропорционально численности жертвы, т. е. величине dN , $d > 0$. Объединяя предположения 1)-5), приходим к системе уравнений Лотки–Вольтерра

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - cM)N, \quad \frac{dM}{dt} = (-\beta + dN)M, \quad (8.35)$$

из которой по начальным численностям $N(0) = N(t = 0)$, $M(0) = M(t = 0)$ определяется численность популяции в любой момент $t > 0$.

Нелинейную систему (8.35) удобно исследовать в плоскости переменных N , M , для чего первое уравнение поделим на второе:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(\alpha - cM)N}{(-\beta + dN)M}. \quad (8.36)$$

Уравнения (8.35), (8.36) имеют положение равновесия (или стационарное, не зависящее от времени решение)

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, \quad N_0 = \frac{\beta}{d}. \quad (8.37)$$

Более точные математические описания двухвидовых взаимодействий учитывают неравномерность распределения численности популяций на занимаемых территориях (им соответствуют системы уравнений в частных производных), временное запаздывание между рождением особей и их зрелостью и т. д. Возникают гораздо более сложные картины взаимодействия как по времени, так и в пространстве.

8.7. Гонка вооружений между двумя странами

Предполагается, что общее количество вооружений у каждой страны изменяется со временем в зависимости от трех факторов: количества оружия у противника, износа уже существующего вооружения и степени недоверия

между противниками. Темпы прироста и уменьшения вооружений пропорциональны указанным факторам, т. е.

$$\frac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t), \quad \frac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t). \quad (8.38)$$

В уравнениях (8.38) $M_1(t) \geq 0$, $M_2(t) \geq 0$ – объемы вооружений, коэффициенты $\alpha_1(t) > 0$, $\alpha_2(t) > 0$, $\beta_1(t) > 0$, $\beta_2(t) > 0$ характеризуют скорости наращивания и «старения» вооружений (аналог процесса амортизации производственных мощностей в моделях экономики), функции $\gamma_1(t) \geq 0$, $\gamma_2(t) \geq 0$ описывают уровень взаимной настороженности (недоверия) конкурентов, который считается не зависящим от количества вооружений, а определяется другими причинами.

Из построенной модели нетрудно определить некоторые характеристики возможных поведений соперников при переходе от одного положения равновесия к другому. Пусть, например, темп наращивания вооружений в первой и второй странах изменяется на небольшую величину $d\alpha$ ($d\alpha = d\alpha_1 = d\alpha_2$). При этом объем вооружений также изменяется, причем обе стороны желают, чтобы приращения dM_1^0 и dM_2^0 были равными и интересы обеих сторон не ущемлялись. Для величин dM_1^0 , dM_2^0 получаем

$$dM_1^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 + \alpha_1^2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2} d\alpha, \quad dM_2^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2^2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_2}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2} d\alpha.$$

Предположим для простоты, что настороженности (недоверия) партнеров равные ($\gamma_1 = \gamma_2$). Тогда из равенства $dM_1^0 = dM_2^0$ получаем условие паритета сторон при небольшом изменении равновесия

$$\alpha_1(\alpha_1 + \beta_2 - \beta_1) = \alpha_2(\alpha_2 + \beta_1 - \beta_2),$$

которое может быть положено в основу соответствующих договоренностей между странами, если известны величины α_1 , α_2 , β_1 , β_2 . Так, например, пусть $\alpha_2 = \alpha_1$, $\sigma > 0$. В этом случае из предыдущего равенства получаем

$$\alpha_1(1 - \sigma) = \beta_1 - \beta_2. \quad (8.39)$$

При $\sigma < 1$ (темпы прироста вооружений у второй стороны меньше, чем у первой) для сохранения паритета необходимо $\beta_2 < \beta_1$, т. е. у второй стороны (в соответствии с формулой (8.39)) темпы амортизации вооружений должны быть меньше. При противоположном неравенстве $\sigma > 1$ имеем, естественно, обратное соотношение между скоростями амортизации.

8.8. Боевые действия двух армий

В противоборстве могут принимать участие как регулярные армии, так и партизанские соединения. Главной характеристикой соперников в рассматриваемых моделях являются численности сторон $N_1(t) \geq 0$ и $N_2(t) \geq 0$. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается потерпевшей поражение (притом, что в этот момент численность другой стороны положительна).

В случае действий между регулярными частями динамика их численности определяется тремя факторами:

1) скоростью уменьшения состава из-за причин, непосредственно не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);

2) темпом потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующей стороны (которые в свою очередь определяются качеством ее стратегии и тактики, уровнем морального духа и профессионализмом бойцов, вооружениями и т. д.);

3) скоростью поступления подкреплений, которая считается некоторой заданной функцией времени.

При этих предположениях для $N_1(t)$, $N_2(t)$ получаем систему уравнений

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \quad \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t), \quad (8.40)$$

из которой при заданных функциях α_i , β_i , γ_i , $i = 1, 2$, и начальных значениях $N_1(0)$, $N_2(0)$ однозначно определяется решение в любой момент времени $t > 0$. В (8.40) коэффициенты $\alpha_{1,2}(t) \geq 0$ характеризуют скорости потерь в силу обычных (не боевых) причин, $\beta_{1,2}(t) \geq 0$ – темпы потерь из-за действий соперника, $\gamma_{1,2}(t) \geq 0$ – скорости поступления подкреплений.

Война между регулярными и партизанскими частями описывается другой моделью. Главное отличие в том, что нерегулярные соединения в сравнении с армейскими менее уязвимы, так как действуют скрытно, зачастую оставаясь невидимыми для соперника, вынужденного действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений $N_1(t)$, но и численности самих партизан $N_2(t)$, т. е. определяется членом вида $\beta_1(t) N_1 N_2$. В результате модель становится нелинейной:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \quad \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 N_2 + \gamma_2(t), \quad (8.41)$$

В (8.41) все величины имеют тот же смысл, что и в (8.40).

В заключение отметим, что рассмотренные здесь простейшие модели соперничества соответствуют системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (в общем случае неавтономных и нелинейных), широко распространенным при описании многих естественнонаучных объектов. Это закономерно, так как использованные при построении подходы (насыщение, пропорциональность темпов роста величины значению этой величины и др.) аналогичны подходам, применяемым в механике, физике, химии.

8.9. Имитационное моделирование

Имитационное моделирование применяется для анализа поведения сложных экономических и т. п. задач, для которых математическую модель в виде системы уравнений даже выписать затруднительно. При имитационном моделировании задача о выборе управлений в четкой математической

постановке не формулируется. Цели исследования могут быть разнообразными: оценить, насколько адекватна модель, понять, как течет процесс в том или ином варианте управлений, сформулировать рекомендации относительно «разумного» его управления, попытаться сформулировать критерий качества управления и т. д.

Исследование проводится методом имитационных экспериментов: изучаемый процесс воспроизводится с помощью модели при нескольких вариантах управлений. Имитационное моделирование позволяет сочетать формальные и неформальные приемы анализа ситуаций и качества решений.

Случайная величина в теорий вероятностей, величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями.

Проверка качества последовательности псевдослучайных чисел. Случайные и псевдослучайные числа, числа, которые могут рассматриваться в качестве реализации некоторой случайной величины.

С развитием метода статических испытаний связано возникновение понятия *псевдослучайных чисел*. Их можно получить путём вычислений по некоторой заданной формуле (алгоритму), но их свойства должны быть близки к свойствам случайных чисел.

8.10. Методы генерации случайных воздействий – величин, последовательностей, процессов, потоков и полей

Алгоритмы методы Монте-Карло. Метод Монте-Карло, метод статических испытаний, численный метод, решения математических задач при помощи моделирования случайных процессов и событий. Термин «Монте-Карло метод» возник в 1949 году, хотя некоторые расчёты путём моделирования случайных событий осуществлялись статистическими и ранее. Название «Монте-Карло метод» происходит от города Монте-Карло, известного своим игорным домом. Широкое распространение Монте-Карло метод получил только после появления быстродействующих вычислительных машин.

Программы для расчётов по Монте-Карло методу на ЭВМ сравнительно просты и, как правило, позволяют обходиться без большой оперативной памяти. Наиболее распространены алгоритмы, в которых каждое следующее число вычисляется по предыдущему. Получаемые таким образом последовательности псевдослучайных чисел имеют период, что существенно отличает их от последовательностей псевдослучайных чисел. Алгоритмы получения псевдослучайных чисел ещё недостаточно исследованы, но при вычислениях по методу статических испытаний отдаётся предпочтение псевдослучайным числам, так как свойства последовательности псевдослучайных чисел можно исследовать путём пробных вычислений, а экспериментальные устройства дают новые последовательности случайных чисел при каждом их использовании.

8.11. Эволюция содержания терминов «имитация», «имитационная модель» и их современное понимание

Имитация (от латинского *imitatio* – подражание), подражание кому-либо или чему-либо, воспроизведение; подделка. На имитацию основываются полифонические (полифония – от *поли...* и греческого *phone* – звук, голос; вид многоголосия в музыке, основанный на равноправии голосов) формы канон, fuga.

Имитация – это основной инструмент системного анализа, позволяющий исследователю не только учесть большое количество связей, действие которых невозможно проследить традиционными средствами, но и вскрыть внутреннюю взаимозависимость ряда факторов.

Имитация – это путь к реконструкции: логика связей позволяет заполнить недостающие звенья. В конечном счете имитация включает в себя и традиционные методы анализа, и методы статистики, и любые другие мыслимые способы работы с информацией. Это средство увязать все в единую систему. При этом не обязательно стремиться к полной формализации. Более того имитация – это единственный путь к объединению творческого начала исследователя-историка с возможностью ЭВМ проводить рутинные операции.

При использовании имитационных моделей входные воздействия и результаты исследования представляются зависимостями соответствующих фазовых переменных от времени. Однако в ряде случаев не требуется столь подробная информация – достаточно знать интегральные оценки характеристик объекта. Такими интегральными оценками являются функционалы зависимостей фазовых переменных от времени.

8.12. Общая модель системы «Государственная власть – гражданское общество».

Общая постановка задачи и терминология. Изучение структур власти – одна из главных задач наук об обществе, прежде всего политологии. Понятие «власть» таинственно, многозначно, с трудом поддается формализации и количественному измерению. Естественно поэтому, что математические модели политологии носят в основном описательный, феноменологический характер и применяются к относительно узкому кругу проблем мониторинга: статистическая обработка электоральных ожиданий и результатов выборов, определение рейтингов различных политических сил, прогнозы грядущих парламентских голосований на основе уже состоявшихся и т. д.

Построение математических моделей общей политологии разумно начинать с изучения именно государственных иерархий как обладающих властью на официальных, т. е. легко формализуемых основаниях. В этом состоит важное отличие государственной власти от власти независимых средств массовой информации (СМИ), интеллектуальных и нравственных авторитетов и других видов власти.

Под *иерархией*, или *иерархической структурой*, понимается упорядоченная по старшинству совокупность институтов (инстанций,

должностей, постов, чинов и т. п.), наделенных властными полномочиями от имени государства (т. е. по Конституции, законам, уставам, постановлениям, правилам, инструкциям и т. п.).

Имеются в виду не только общегосударственные учреждения, например, федеральные министерства, но также межрегиональные, региональные и местные органы, официально имеющие соответствующую власть. Слово «иерархическая» подчеркивает, что внутри структуры заранее и четко определен порядок подчиненности. Каждое ее звено (кроме высшего) имеет старшие, «приказывающие» инстанции и (за исключением низшего звена) младшие инстанции, выполняющие «приказы», исходящие как от данной инстанции, так и от других старших звеньев. Разумеется, приказы идут только от старших к младшим.

Гражданское общество – это часть общества, непосредственно не обладающая государственной властью. К нему относятся граждане (в том числе государственные чиновники, действующие вне рамок своих служебных обязанностей) и различные их объединения (политические, культурные, профессиональные), семьи и частные предприятия и т. д.

Реакция общества – ответ (положительный, отрицательный или безразличный) гражданского общества на действия того или иного института власти (с помощью выборов, референдумов, плебисцитов, через СМИ, опросы общественного мнения, митинги, забастовки и т. д.).

В модель вводится также понятие «реакция иерархии», смысл которого, как и смысл термина «распределение власти» и другие терминологические уточнения, разъясняется ниже.

Иерархическая структура состоит из $N + 1$ инстанции (рисунок 9.8), каждой из них приписан номер i ($0 \leq i \leq N$). Высшая инстанция имеет номер 0, низшая – номер N . Стрелка 4 обозначает направление подчиненности в структуре «сверху вниз» (или «слева направо»), т. е. направление движения властных распоряжений (приказов), передаваемых по иерархической лестнице.

Однако для построения математической модели и анализа фундаментальных свойств властных структур достаточно того, что эта задача может быть решена в принципе, впрочем, на основе некоторых количественных критериев. Для прояснения этого вопроса необходимо уточнить различные понимания слова *власть*.

Оно часто употребляется в смысле *органы власти* (Верховный Суд, городская дума, местное отделение милиции и т. п.). Равноценной заменой данного понятия служат термины «инстанции», «иерархическая структура», «иерархия».

Другое важное значение этого слова описывается термином *властные полномочия*. Считается, что властные полномочия любой инстанции могут быть, вообще говоря, определены с помощью некоторого совокупного

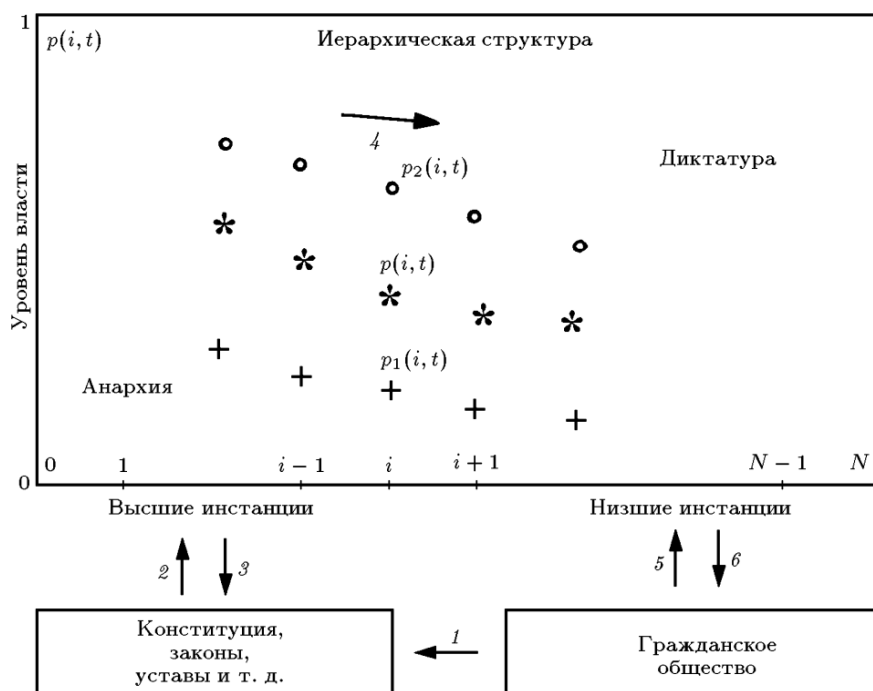


Рис. 8.9

количественного критерия, включающего в себя номинальное (формальное) положение инстанции в структуре, объем находящихся в ее распоряжении людских, финансовых, материальных, информационных, интеллектуальных, законодательных, распорядительных и иных видов ресурсов, размер и местоположение контролируемой территории, престижность в глазах общественного мнения и экспертов и т. д. В указанном понимании слово «власть» означает возможный уровень (степень, силу) влияния данного властного института на поведение других инстанций и на жизнь гражданского общества. Инстанции, имеющей большие властные полномочия, отводится, естественно, более высокое место (меньший номер) в иерархии по сравнению с инстанцией, имеющей меньшие полномочия.

Дальнейшее уточнение термина «властные полномочия» связано с понятиями *максимальные полномочия* и *минимальные полномочия*. Первое описывает те действия, которые орган власти может выполнить максимально в некоторой ситуации в соответствии с законодательством. Например, губернатор имеет право, при известных обстоятельствах, объявить чрезвычайное положение на контролируемой им территории, но никак не правомочен решать вопросы войны и мира. Минимальные полномочия описывают действия, которые власть обязана предпринимать всегда (Президент обязан представлять ежегодное бюджетное послание в Конгресс). Оба эти понятия хорошо иллюстрируются, например, статьями Уголовного кодекса, определяющими за один и тот же вид преступления максимальные и минимальные сроки наказания.

Заметим, что границы власти могут, как известно из практики многих государств, определяться не только законодательством, но также традициями и

системой прецедентов. Однако для краткости всюду дальше речь будет идти о законодательно установленных полномочиях.

В математической модели максимальные властные полномочия задаются некоторой положительной функцией $p_2(i, t)$, $0 \leq i \leq N$ (кружочки на рисунке 8.9), монотонно убывающей с ростом номера i , т. е. в любой момент времени t справедливо $p_2(i+1, t) < p_2(i, t) < p_2(i-1, t)$, $1 \leq i \leq N - 1$. Минимальные полномочия задаются положительной функцией $p_1(i, t)$, $0 \leq i \leq N$ (крестики на рис. 8.9), также монотонно убывающей с ростом i , т. е. $p_1(i+1, t) < p_1(i, t) < p_1(i-1, t)$, $1 \leq i \leq N - 1$ (разумеется, всегда $p_1(i, t) < p_2(i, t)$, $0 \leq i \leq N$). Обе функции, вообще говоря, зависят от времени t , поскольку со временем могут изменяться законодательство, территориальное деление и т. п.

Подчеркнем еще раз: для рассматриваемой таким образом (в агрегированной обобщенной манере) иерархической структуры положение любой инстанции определяется не только ее номинальным местом, но и всеми относящимися к делу (и зачастую более весомыми) факторами. Таким образом, номер инстанции, отвечающий некоторому «среднему чиновнику» из властного древа, не формальная координата, а координата «по существу». Приведенным выше рассуждениям о властных полномочиях и о способе расстановки инстанций в порядке «подчиненности» нетрудно придать более подробную и строгую математическую форму (микроописание), однако для изучения принципиальных свойств системы «власть–общество» это не имеет решающего значения.

Наконец, еще одно используемое в модели понимание слова «власть» связано с фактически осуществляемым в данный момент данной инстанцией *уровнем властного влияния* (или *величиной власти*). Действительно, властные полномочия определяют лишь верхние и нижние законные границы уровня или величины власти (в этом смысле можно понимать известное выражение «объем властных полномочий»). Эти границы, вообще говоря, достигаются не всегда и не всюду. Пусть, например, по некоторой статье Уголовного кодекса, предусматривающей от трех до пяти лет лишения свободы, суды за некоторое время вынесли достаточно много приговоров со средним сроком четыре года. Тогда реализованная ими по данной статье власть составила 80% от их максимальных и 133% от их минимальных полномочий.

В математической модели фактически достигаемой власти отвечает неотрицательная функция $p(i, t)$, $0 \leq i \leq N$, зависящая от «пространственной» координаты i и времени t (звездочки на рис. 8.9). Если для каких-то значений i , t выполняется $p(i, t) > p_2(i, t)$ (или $p(i, t) < p_1(i, t)$), то естественно говорить о «выходе» власти за рамки полномочий, или о *превышении (принижении) власти*.

Принципиальная разница между функциями $p_1(i, t)$, $p_2(i, t)$ и функцией $p(i, t)$ состоит в том, что, в отличие от известных, заданных (пусть и в самом общем виде) властных полномочий $p_1(i, t)$, $p_2(i, t)$, функция $p(i, t)$ – неизвестная, искомая величина, описывающая текущее распределение власти в иерархической структуре. Построение соответствующей математической

модели и изучение пространственно-временной динамики именно для функции $p(i, t)$ (распределения власти) в зависимости от всех факторов, присутствующих в изучаемой системе, приводится ниже.

Заметим, что понятие *реальное распределение власти* означает введение в модель следующего предположения 1:

все партнеры в системе «власть–общество» законопослушны: законы соблюдаются, налоги платятся, приказы выполняются (в противном случае функция $p(i, t)$ – величина власти – становится весьма неопределенной или вовсе теряет смысл).

Такой подход «от простого к сложному», т. е. построение модели для сильно идеализированной ситуации и дальнейшее ее усовершенствование, является типичным (а зачастую и единственно возможным) при математическом моделировании сложных объектов.

Приведем общее описание взаимодействий в системе «власть – общество». Оно состоит в следующем:

а) гражданское общество непосредственно или через своих представителей принимает (дополняет, изменяет) Конституцию (стрелка 1 на рис. 8.9). Оно, таким образом, выступает как источник (заказчик, хозяин) власти для иерархической структуры, взаимодействуя с ней с учетом существующего законодательства;

б) иерархическая структура существует не сама по себе, а как «открытая» система, взаимодействующая с Конституцией и гражданским обществом. Конституция (в широком понимании, включающем законы, уставы и т. д.) служит для иерархии своеобразным резервуаром, из которого ее звенья по мере необходимости могут либо черпать дополнительные «порции» власти (стрелка 2), либо возвращать обратно ее избыточные «доли» (стрелка 3).

Таким образом, между иерархией и Конституцией осуществляется как бы «обмен властью» и, в неявном виде, как бы обмен властью («свободой») между иерархией и гражданским обществом – учредителем Конституции;

в) внутри самой иерархической структуры происходит перераспределение текущей власти между составляющими ее инстанциями (стрелка 4) в соответствии с принятыми в иерархии механизмами передачи властных распоряжений;

г) по отношению к гражданскому обществу властные структуры выступают как запрещающие (стрелка 5) или разрешающие (стрелка 6) институты, вводящие и отменяющие те или иные ужесточения или послабления (типичный пример – ежегодный призыв в армию и демобилизация, когда одна часть населения начинает нести дополнительную повинность, а другая от нее освобождается).

Один из ключевых вопросов для описания взаимодействия в системе «иерархия–общество» – определение «величины» обмена властью между иерархической структурой и Конституцией (и, опосредованно, в итоге между иерархией и обществом). Вводится следующее предположение 2:

знак и величина обмена властью между иерархической структурой и Конституцией определяются реакцией системы.

Под *реакцией системы* подразумевается суммарная реакция обоих партнеров (иерархии и общества) на текущее распределение власти $p(i, t)$ в структуре. Например, применительно к реакции общества имеется в виду, что если в данный момент времени оно выражает свое отрицание тех или иных действий данного звена иерархии (сопротивление), то это побуждает инстанцию уменьшить осуществляемую ею власть, как бы отложив про запас некоторое ее «количество» в конституционный резервуар (и уменьшить или вовсе избежать соответствующих отрицательных, с точки зрения общества, последствий). Подходящий пример — требования смягчить те или иные виды налогов. Положительная же реакция общества (т. е. его поддержка) побуждает инстанцию увеличить уровень реализуемой ею власти, взяв необходимые «ресурсы» из законодательства (пример — требования усилить борьбу с преступностью). Качественный характер реакции общества связывается с доминирующим в нем типом сознания (правовое, анархическое, авторитарное, смешанное).

В рассматриваемой модели реакция общества описывается некоторой задаваемой функцией $F_S(i, t, p, p_1, p_2)$, зависящей, вообще говоря, от всех введенных ранее величин: номера инстанции i ; времени t ; уровня власти, осуществляемой инстанцией $p(i, t)$; властных полномочий $p_1(i, t)$, $p_2(i, t)$. Это дает возможность достаточно полно и точно отразить структурированное и меняющееся во времени отношение общества к иерархии. Например, если для всех мыслимых значений своих аргументов, т. е. в любой ситуации имеем $F_S < 0$ ($F_S > 0$), то в обществе, очевидно, преобладает анархическое (тоталитарное) сознание. Реакция общества представляется величиной, вполне наблюдаемой и измеряемой, и служит основной его поведенческой характеристикой в некотором осредненном по всем элементам гражданского общества смысле. При этом подразумевается, что реакция выражена вовремя, верно истолкована инстанцией и учтена ею в своей деятельности.

Аналогичным образом в модель вводится одна из поведенческих характеристик властной структуры — *реакция иерархии*. Это понятие характеризует стремление звеньев иерархии повысить или понизить уровень власти, реализуемый ими в данный момент времени. Ей отвечает задаваемая функция $F_H(i, t, p, p_1, p_2)$, зависящая от тех же аргументов, что и F_S , и имеющая тот же смысл, но уже применительно к иерархии (ее можно назвать степенью «властолюбия» инстанций).

В приведенном общем описании система «власть–общество» предстает как замкнутый самосогласованный и самоорганизующийся объект с различными прямыми и обратными связями. Уровень власти, осуществляемой любой инстанцией иерархии в любой момент времени, отнюдь не произволен, а является результатом системного взаимодействия всех компонент объекта: идущих по иерархической лестнице властных распоряжений, реакции общества, действующего законодательства, начального состояния системы и т.

д. Для получения на основе этой общей схемы математической модели рассмотрим подробнее собственно властную структуру.

8.13. Механизмы перераспределения власти внутри иерархической структуры

Внутри иерархии любая инстанция принимает к исполнению какие-то властные распоряжения, идущие от старших звеньев, и в свою очередь передает какие-то приказы младшим звеньям. При этом происходит некоторое перераспределение власти между ступенями иерархии (напомним, что речь идет не о властных полномочиях, а о реально осуществляемом, текущем уровне власти – величине $p(i, t)$). Вводится основной поведенческий постулат:

в иерархии власть может передаваться только от инстанций с большей текущей властью к инстанциям с меньшей текущей властью (причем скорость передачи тем больше, чем больше разница между значениями текущей власти в инстанциях).

Рассматриваются два главных механизма, ответственных за перераспределение власти внутри иерархии.

а) *Близкодействие*. Условно говоря, этот механизм можно назвать передачей власти по команде, когда начальник отдает властное распоряжение ближайшим подчиненным, которые также взаимодействуют только со своими непосредственными подчиненными. Данный механизм соответствует хорошо известной бюрократической процедуре (слово «бюрократический» и все другие понятия употребляются без каких-либо эмоциональных оттенков – как рабочий термин).

Пусть i -я инстанция передала $(i+1)$ -й инстанции некий приказ (например, поручила подготовить проект годового отчета о финансовой деятельности одного из подведомственных учреждений). Что произошло в таком элементарном акте взаимодействия между соседями по иерархии? Вместе с приказом подчиненный получил некоторую (пусть небольшую и пусть временно) порцию власти, дополнительную к тому уровню власти, который он реально занимал (например, имея приказ, он в большей степени, чем раньше, изучает финансовые документы). С другой стороны, i -я инстанция утратила некоторую часть от своей текущей власти, переложив контроль за данным участком работы на $(i + 1)$ -е звено.

Совокупность передаваемых распоряжений формирует своего рода поток власти, идущей от i -й к $(i + 1)$ -й инстанции. Определим поток власти $W(i, t)$ как количество власти, полученное в единицу времени $(i + 1)$ -й ступенью от i -й ступени.

В соответствии с постулатом величина $W(i, t)$ положительна при $p(i, t) > p(i+1, t)$, отрицательна при $p(i, t) < p(i+1, t)$ и равна нулю при $p(i, t) = p(i+1, t)$. Рассматривается весьма общее выражение для $W(i, t)$:

$$W(i, t) = -\gamma p(i, t) - p(i+1, t), p(i, t), p(i+1, t), i, i+1, t) \times [p(i+1, t) - p(i, t)], \quad (8.42)$$

где γ функция положительна при всех значениях аргументов, от которых она зависит.

б) *Дальнодействие*. Образное описание этого механизма может быть дано известным выражением «команда через голову». Это означает, что i -я инстанция отдает властные распоряжения звеньям с далекими номерами, минуя ближайших подчиненных. К такого рода действиям можно отнести, например, распоряжение о переходе вооруженных сил на летнюю форму одежды, для реализации которого фактически не требуется процедура передачи по команде, достаточно опубликовать соответствующий приказ для сведения (и исполнения) сразу всех военнослужащих.

Образующийся благодаря механизму дальнодействия поток власти, получаемый $(i + 1)$ -й инстанцией от j -го звена (или отдаваемый вниз), может быть выражен достаточно общей формулой

$$V(i + 1, j, t) = \chi(p(i + 1, t), p(j, t), i + 1, j, t) \cdot [p(j, t) - p(i + 1, t)], \quad (9.43)$$

где функция $\chi \geq 0$ в согласии с постулатом. По своему смыслу поведенческая характеристика χ близка к функции γ но, во-первых, ею описывается взаимодействие не соседних, а удаленных друг от друга инстанций, т. е. $j \neq i + 2$; во-вторых, величина χ может обращаться в нуль, т. е. предусмотрена возможность отсутствия команд через голову между какими-либо ступенями иерархии.

Отобрав часть власти у кого-либо из своих подчиненных (например, отозвав некоторое поручение), начальник рано или поздно все равно «спустит вниз» это поручение в виде какого-либо приказа, но, быть может, другими путями. Ибо в любой иерархии никакая инстанция не способна взять на себя непосредственную реализацию заметной доли поручений, с необходимостью выполняемых даже малой частью подчиненных ей звеньев (имеется в виду достаточно протяженная иерархическая структура). С другой стороны, дело в итоге должно быть сделано, и приказ, а с ним и порция власти, будут так или иначе переданы младшим. Таким образом, введенный постулат естествен и обоснован хотя бы «в среднем».

8.14. Баланс власти, правовое поле. Выход за границы правового поля

Когда введены основные модельные понятия, описаны взаимосвязи и предположения, можно сделать последний шаг в построении модели и ответить на вопрос: как найти распределение власти в иерархии, т. е. функцию $p(i, t)$? Для любого i -го звена властной структуры в любой момент времени t она подчиняется уравнению, при выводе которого используется своего рода локальный закон сохранения власти:

скорость изменения (уменьшения или увеличения) величины власти инстанции определяется потоками власти и реакцией системы.

Подсчитаем, какое количество власти получает (теряет) i -я инстанция за промежуток времени Δt между моментами t и $t + \Delta t$. Это количество формируется:

а) потоком власти, получаемым от $(i - 1)$ -й ступени по механизму (8.1), т. е. величиной

$$\Delta p_- = W(i - 1, t) \Delta t;$$

б) потоком, отдаваемым в $(i + 1)$ -е звено по аналогичному механизму,

$$\Delta p_+ = W(i + 1, t) \Delta t;$$

в) суммой потоков, получаемых и отдаваемых по механизму (8.43) от удаленных инстанций ($j \neq i + 1, i - 1$),

$$\Delta p_\Sigma = \sum_{j=0}^N V(i, j, t) \Delta t;$$

г) скоростью обмена властью между инстанцией и законодательством, которая определяется по предположению 2 реакцией гражданского общества,

$$\Delta p_F = F(i, t, p(i/t), p_1(i/t), p_2(i, t)) \Delta t.$$

Складывая величины Δp_- , Δp_+ , Δp_Σ , Δp_F , получаем суммарное изменение

$$\Delta p = p(i, t + \Delta t) - p(i, t) = \left[W(i - 1, t) - W(i, t) + \sum V(i, j, t) + F(i, t, \dots) \right] \Delta t. \quad (9.44)$$

При выводе уравнения баланса (9.44) промежуток времени Δt предполагается, как обычно, достаточно малым, так чтобы величины W , V , F можно было считать постоянными.

Система «власть–общество» называется правовой, если реакция общества на действия любой инстанции иерархии всегда направлена на удержание распределения власти в рамках предписанных ей полномочий. Подразумевается, что максимальные и минимальные полномочия соответствуют праву в общепринятом смысле этого понятия (подобный тип реакции отвечает правовому общественному сознанию).

Имеется хорошо известное единственное (неотрицательное) решение, даваемое монотонно убывающей по x функцией

$$p(x) = \frac{a^{1/2} b}{e^{-1/2} - e^{-a^{1/2}}} \left[(1 - e^{-a^{1/2}}) e^{xa^{1/2}} + (1 - e^{a^{1/2}}) e^{-xa^{1/2}} \right] + (1 - bx). \quad (8.45)$$

Качественное поведение решения (8.45) определяется параметром a (параметр $b \approx 1$, так что $1 - b \ll 1$, поскольку рассматриваются достаточно протяженные иерархические структуры с заметным перепадом полномочий). Решения для значений $b = 0,9$ и трех значений $a = 10^{-3}$, 10^{-2} , 10^{-1} . С ростом a решение становится более пологим, и при некотором $a > a_{кр}$ решение частично лежит в области $p > p_2$. Анализируя (8.45), можно сделать следующие предварительные выводы:

1) стационарное распределение власти в правовой системе существует;

2) существует область параметров системы, в которой распределение власти выходит за рамки полномочий (в данном случае для части младших ступеней власть превышена). Нетрудно выписать необходимое и достаточное условие нахождения власти в правовой области:

$$a^{1/2}b(e^{a^{-1/2}} - 1)/(e^{a^{-1/2}} + 1) \leq (1-b)(1+\alpha).. \quad (8.46)$$

С ростом величины a критерий (8.46) нарушается все сильнее, причем если $a \rightarrow \infty$, то $p(x) \rightarrow 1 - b/2$. Максимальное превышение (достигаемое в точке $x = 1$) равно $p(1) - p_2(1) = 1 - b/2 - (1 + \alpha)(1 - b)$, что при $b \approx 1$ дает $p(1) - p_2(1) \approx 0,5$, т. е. превышение составляет 50% от максимальных полномочий;

3) идеальное распределение власти не реализуется, решение всегда имеет «добавку» к величине $p^0(x) = 1 - bx$ – второму члену в правой части (8.45).

Справедливы два следующих вывода:

– для правовой системы всегда существует единственное стационарное распределение власти в иерархической структуре, причем величина власти монотонно падает при переходе от старших к младшим инстанциям;

– даже в правовой системе всегда существует область параметров, при реализации которых распределение власти выходит за границы правового поля.

Столь же общим является и предыдущий вывод 3) о невозможности реализации идеального распределения власти, т. е. такого распределения, при котором реакция общества всегда и всюду была бы нулевой.

Использование иерархического подхода к получению дискретных моделей.

Основная идея данного подхода – использование знания о месте подлежащей дискретизации модели в иерархии моделей изучаемого объекта. Если иерархия построена по принципу «сверху вниз», то, проводя частичную или полную дискретизацию общей модели, затем переходят к дискретной модели более низкого уровня. Естественно, используется способ перехода, принятый для исходных моделей. В результате выполнения подобной процедуры в построенную дискретную модель привносятся дополнительные черты модели более высокого уровня, и это может повысить адекватность аппроксимирующей модели исходному объекту.

Конкретизируем эти рассуждения, рассмотрев уравнения, описывающие одномерные течения невязкого нетеплопроводного газа (записанную в дивергентном виде одномерную систему)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(pV)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 + p) &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[V(E + p)] &= 0. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Здесь $E = \rho(V^2/2 + 3RT/2)$ – сумма кинетической и внутренней энергий единицы объема газа, т. е. его полная энергия, $T = p/(\rho R)$ – температура, $R = k/m$ – газовая постоянная, k – постоянная Больцмана, m – масса атома или молекулы газа.

Уравнения (8.47) получены из кинетического уравнения Больцмана в результате его «осреднения» при условии, что функция распределения $f(x, v, t)$ локально максвелловская:

$$f^{(0)}(v) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2kT} (v - V)^2 \right], \quad (8.48)$$

где v – скорость хаотического движения частиц газа (при максвелловском распределении в среде отсутствуют вязкие напряжения и потоки тепла).

Дискретные аналоги уравнений (8.47) можно строить любым из описанных в предыдущих пунктах способом. Иерархический подход в данном случае (и для некоторых обобщений (8.47)) заключается в следующем:

1) функция распределения f и макрохарактеристики газа рассматриваются как функции дискретного аргумента $t^j, j = 0, 1, \dots$, т. е. проводится дискретизация по времени исходной модели – кинетического уравнения Больцмана;

2) величина $\tau = t^{j+1} - t^j$ (шаг дискретизации) берется достаточно малой, чтобы удовлетворить условию $\tau \leq l/|v|$, где l – характерная длина свободного пробега, $|v|$ – модуль характерной скорости частиц. Поэтому за время τ число столкновений между частицами невелико и ими можно пренебречь;

3) функция распределения $f^{j+1} = f(x, v, t^{j+1})$ изменяется в сравнении с функцией $f^j = f(x, v, t^j)$ лишь за счет изменения частицами их фазового объема, поэтому справедлива простая связь

$$f(x, v, t^{j+1}) = f(x - v\tau, v, t^j), \quad (8.49)$$

являющаяся решением уравнения Больцмана в отсутствие столкновений;

4) связь (8.49) упрощается путем разложения f^{j+1} в ряд Тейлора по параметру $v\tau$:

$$f^{j+1} = f^j - \tau \frac{\partial f^j}{\partial x} v + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^2} + \dots \quad (8.50)$$

с точностью до членов третьего порядка; так как функция распределения экспоненциально убывает с ростом v^2 , то вклад частиц с большими скоростями считается малым и соответствующие члены в (8.50) отбрасываются;

5) при выводе уравнений для моментов, соотношения (8.50) последовательно умножаются на функции $\Phi(v)$, соответственно равные $1, mv, mv^2/2$ (сумматорные инварианты), и интегрируются по всем скоростям v ; в результате связь между f^{j+1} и f^j преобразуется в связи уже между средними гидродинамическими параметрами газа такими, как плотность, поток массы, полная энергия:

$$\rho = \int m f dv, \quad \rho V = \int m v f dv, \quad E = \int \frac{mv^2}{2} f dv,$$

и другими величинами, взятыми в моменты f^j, f^{j+1} (иными словами, получается дискретная по времени гидродинамическая модель среды);

6) после соответствующей дискретизации по пространству строятся окончательные дискретные (и по времени, и по пространству) модели газа, учитывающие некоторые черты исходного кинетического уравнения (кинетики согласованные разностные схемы); они, вообще говоря, не могут быть получены аппроксимацией гидродинамических моделей (например, уравнений (8.47)), поскольку для их конструирования используются свойства модели более высокого иерархического уровня.

8.15. Основные этапы составления математического описания процессов.

С помощью математического моделирования любой массообменный процесс можно представить как большую систему, состоящую из ряда подсистем: «равновесие», «массопередача», «гидродинамика», «теплопередача», «подсистема балансов массы и энергии». Анализ этих подсистем, в свою очередь, позволяет расчленить их на подсистемы более низкого уровня. Например, для подсистемы «гидродинамика» целесообразно рассматривать макро- и микроуровни; для подсистемы «теплопередача» – общие балансы теплоты (макроуровень) и тепловое воздействие потоков фаз (микроуровень).

При этом математическое описание массообменного процесса создается на основе математических описаний отдельных подсистем – блоков, каждый из которых характеризуется собственным набором входных переменных, отражающих влияние на него других подсистем, а также внутренних переменных, обуславливающих функционирование изучаемой подсистемы.

Представление математического описания в виде совокупности подсистем (блоков) позволяет дать процедуру его построения как совокупность операций по составлению описаний отдельных подсистем, т.е. реализовать блочный принцип построения математического описания. Точность всего описания в данном случае определяется точностью описаний отдельных подсистем, а также совокупным влиянием точности представления отдельных подсистем на точность описания в целом.

Использование блочного принципа построения математических моделей рассматриваемых процессов, основанного на системном подходе, позволяет также наметить пути решения и такой практически важной проблемы, как масштабирование массообменных процессов. При применении указанного принципа масштабный переход есть не что иное, как деформация описания при изменении геометрических размеров, характеризующих аппаратное оформление процесса, т.е. влияние геометрических размеров на свойства процесса отражается лишь в одной подсистеме, а именно в подсистеме «гидродинамика». Поэтому при наличии достаточно корректного в качественном и количественном отношении математического описания этой подсистемы становится возможным осуществить масштабный переход.

8.16. Описание равновесий жидкость – пар (газ) и жидкость – жидкость. Основные типы задач и алгоритмы их решения

Рассмотрим жидкую смесь, которая при температуре T и давлении P находится в равновесии со смесью паров при тех же температуре и давлении. Интересующими нас величинами являются температура, давление и составы обеих фаз. При расчете равновесия жидкость – пар можно выделить четыре основных типа задач в зависимости от того, какие переменные задаются и

какие рассчитываются. К первому типу задач относится расчет состава пара и температуры смеси по известному составу жидкости и давлению. Ко второму типу относится расчет состава пара и давления по составу жидкости и температуре. Третий и четвертый типы задач включают определение состава жидкости по составу пара при известном давлении, либо температуре.

Для каждого компонента i смеси условие термодинамического равновесия задается выражением

$$f_i^v = f_i^L, \quad (8.51)$$

где f – фугитивность; индекс v – означает пар, индекс L – жидкость.

Фундаментальной задачей является установление связи этих фугитивностей с составами смесей, поскольку при разработке процессов химической технологии интересуются именно такими составами.

Фугитивность компонента в смеси зависит от температуры, давления и состава смеси. Для связи f_i^v с температурой, давлением и мольной долей удобно ввести коэффициент фугитивности

$$\Phi_i = \frac{f_i^v}{y_i^P}, \quad (8.52)$$

который может быть рассчитан по диаграммам $P - v - T - y$, обычно описываемым уравнением состояния. Для смеси идеальных газов $\Phi_i = 1$.

Фугитивность компонента i в жидкой фазе связана с составом этой фазы, коэффициентом активности γ_i и фугитивностью компонента i стандартном состоянии соотношением

$$\gamma_i \equiv \frac{a_i}{X_i} = \frac{f_i^L}{X_i f_i^0}, \quad (8.53)$$

где a_i – активность компонента i . Стандартная фугитивность f_i^0 это фугитивность чистой жидкости i при общем давлении системы P и $X_i = 1$.

Классическая термодинамика не позволяет определить вид зависимости коэффициента активности от состава и температуры. Тем не менее существует термодинамическое соотношение, дающее возможность коррелировать и обобщать ограниченные экспериментальные данные, – это уравнение Гиббса–Дюгема. Согласно уравнению Гиббса–Дюгема, коэффициенты активности компонентов не являются независимыми, а связаны между собой соотношением

$$\sum_{i=1}^N X_i \left(\frac{\partial \ln \gamma_i}{\partial X_i} \right)_{T,P} = 0. \quad (8.54)$$

Уравнение Вильсона. Вильсон использовал выражения для термодинамических функций в растворах полимеров для обычных растворов, однако вместо средних объемных долей ввел «локальные» объемные доли компонентов:

$$\frac{g^E}{RT} = \sum_{i=1}^N X_i \ln \xi_i, \quad (8.55)$$

где ξ_i – «локальная» объемная доля компонента i относительно центральной молекулы того же типа.

Основная идея концепции локальных составов заключается в том, что при микроскопическом рассмотрении жидкая смесь не является однородной: состав в одной точке смеси может отличаться от состава в другой. Хотя в инженерных приложениях используется только средняя концентрация компонентов в смесях, для построения адекватного описания жидкой смеси необходимо оперировать локальными составами. Согласно концепции локальных составов, введенной Вильсоном, распределение молекул относительно центральной молекулы имеет вид

$$\frac{x_{ij}}{x_{ki}} = \frac{X_j e^{-\frac{g_{ij}}{RT}}}{X_k e^{-g_{ki}/RT}}, \quad (8.56)$$

где x_{ij} – «локальная» мольная доля j вокруг i ; величины g_{ji} пропорциональны энергии взаимодействия молекул j и i .

С учетом введенных локальных концентраций локальные объемные доли ξ_i компонента i в уравнении (8.55) могут быть определены как

$$\xi_i = \frac{X_j e^{-\frac{g_{ij}}{RT}}}{\sum_{j=1}^N X_j V_j e^{-g_{ji}/RT}}, \quad (8.57)$$

где V_j – мольный объем компонента j .

Подстановка выражения (8.57) в (8.55) дает зависимость избыточной энергии Гиббса от состава и температуры смеси:

$$\frac{g^E}{RT} = \sum_{i=1}^N X_i \ln \left(\sum_{j=1}^N X_j \Lambda_{ji} \right). \quad (8.58)$$

Дифференцирование выражения (8.58) по составу смеси приводит к широко известному уравнению Вильсона:

$$\ln \gamma_i = 1 - \ln \left(\sum_{j=1}^N X_j \Lambda_{ij} \right) - \sum_{l=1}^N \frac{X_l \Lambda_{li}}{\sum_{j=1}^N X_j \Lambda_{lj}} \quad (8.59)$$

– параметры уравнения.

Уравнение Вильсона (8.59) применимо к гомогенным смесям неэлектролитов.

Уравнения НРТЛ. Здесь, основываясь на теории свободного объема, предполагается существование в растворе двух сортов ячеек, соответствующих молекулам 1-го и 2-го типа бинарной смеси (рис. 8.9).

Избыточная свободная энергия Гиббса такого двухжидкостного раствора является суммой свободной энергии, переносимой молекулами 1 то чистой жидкости в ячейки 1-го сорта, и свободной энергии, переносимой молекулами 2, т.е.

$$G^E = X_1(G_1 - G_{11}) + X_2(G_2 - G_{22}), \quad (8.60)$$

где G_1 – свободная энергия Гиббса молекул 1 в растворе; G_{11} – свободная энергия Гиббса молекул 1 в чистой жидкости.

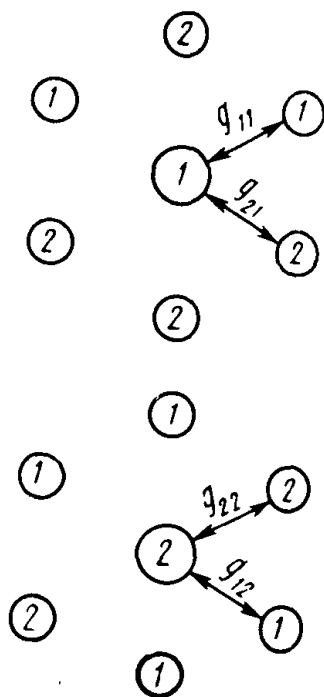


Рис. 8.9. Для типа ячеек в соответствии с двухжидкостной теорией.

Уравнение ЮНИКВАК (UNIQVAC – *universal quasy chemical*). Праусницем и другими учеными на основе квазихимической теории Гугенгейма было получено выражение для избыточной энергии Гиббса полностью или частично смешиваемых систем.

Основное преимущество уравнения ЮНИКВАК заключается в том, что при наличии двух устанавливаемых параметров для каждой бинарной пары оно обеспечивает хорошее воспроизведение равновесий жидкость – пар и жидкость – жидкость для множества жидких смесей неэлектролитов.

Метод ЮНИФАК. При определении термодинамических свойств часто бывает удобным рассматривать молекулу как агрегат функциональных групп; тогда некоторые термодинамические свойства чистых газов и жидкостей могут быть рассчитаны путем суммирования групповых составляющих. Было сделано несколько попыток создать методы расчета теплоты смешения и коэффициентов активности по групповым составляющим. Упомянем два наиболее распространенные из них. Эти методы, носящие название АСОГ (*Analitical Solution of Groups*) и ЮНИФАК (*Universal Functional Model of Coefficient Activity*), в принципе похожи, но разнятся в деталях.

В основе любого метода расчета по групповым составляющим лежит идея, заключающаяся в том, что хотя химическая технология имеет дело с тысячами химических соединений, число функциональных групп, из которых состоят эти соединения, значительно меньше.

Любой метод групповых составляющих обязательно является приближенным, поскольку вклад данной группы в одной молекуле совсем необязательно окажется таким же в другой молекуле. Основой методов групповых составляющих является предположение об аддитивности: вклад

одной группы в молекуле не зависит от вкладов других групп. Число различных групп должно оставаться небольшим, однако достаточным, чтобы учитывать существенные влияния молекулярной структуры на свойства. Распространение концепции групповых составляющих на смеси чрезвычайно интересно, поскольку число чистых жидкостей, используемых в промышленности, очень велико; тысячи, возможно, миллионы жидких смесей могут быть составлены из 50 или максимум 100 функциональных групп.

Основная идея модели «раствора групп» заключается в том, что для расчета фазового равновесия систем, по которым нет экспериментальных данных, используются имеющиеся данные по фазовому равновесию. В основе метода лежат две основные концепции:

1. Обработка экспериментально определенных значений коэффициентов активности для получения параметров, характеризующих взаимодействия между парами структурных групп в неэлектролитических системах.

2. Использование этих параметров для расчета коэффициентов активности в других системах, которые экспериментально не исследовались, но содержат те же самые функциональные группы.

Молекулярный коэффициент активности разделяется на две части. Одна часть характеризует вклад, обусловленный различиями в размере молекул, а другая часть – вклад, обусловленный молекулярными взаимодействиями.

Равновесие газ – жидкость. При равновесии фугитивность газа равна фугитивности жидкости. Отсюда получаем значение константы фазового равновесия

$$K_i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{f_i^0 \gamma_i}{P \Phi_i}, \quad (8.61)$$

где Φ_i – коэффициент фугитивности в газе.

Основная трудность в расчете равновесий газ – жидкость состоит в определении коэффициента активности в жидкой фазе γ_i и коэффициента фугитивности в газовой фазе Φ_i . Методы оценки коэффициентов активности в растворах неэлектролитов уже были рассмотрены. Оценка же коэффициента фугитивности в газовой фазе может быть выполнена на основании уравнения состояния (Ван-дер-Ваальса, вириального и др.). Однако часто растворимость газа в жидкости очень мала и в этих условиях жидкая фаза стремится к идеальной. Кроме того, при умеренных давлениях неидеальность газовой фазы незначительна. Тогда стремление того или иного компонента улетучиваться из жидкой фазы в газовую не зависит от присутствия других компонентов и система соответствует идеальной, для которой справедлив закон Генри:

$$P_i^* = K_i x_i, \quad (8.62)$$

где P_i^* – равновесное давление газа над раствором.

Для идеальных растворов K_i зависит только от температуры, увеличиваясь с возрастанием последней; при этом растворимость газа уменьшается. Поскольку закон Генри применим к разбавленным растворам, он достаточно точно описывает равновесие для плохо растворимых газов. Для

газов с сравнительно высокой растворимостью он справедлив лишь при низких концентрациях.

Расчет парожидкостных равновесий. Ранее мы рассмотрели возможные типы задач, возникающие при расчете парожидкостных равновесий. Так как их решения аналогичны, то приведем только одну из них: определение состава пара и температуры кипения смеси по заданному составу жидкости и давлению.

Система уравнений математического описания включает систему уравнений равновесия

$$y_i P = x_i \gamma_i(x_i, T) P_i^0(T), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.63)$$

и стехиометрическое соотношение

$$\sum_{i=1}^N y_i - 1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i \gamma_i P_i^0}{P} - 1 = 0. \quad (8.64)$$

В уравнениях (8.63), (8.64) паровая фаза предполагается идеальной ($\Phi_i = 1$). Зависимость коэффициента активности в жидкой фазе γ_i от состава и температуры определяется одним из уравнений парожидкостного равновесия (Вильсона, НРТЛ, ЮНИКВАК, ЮНИФАК).

Искомymi переменными являются: y_i (N значений), T . Всего имеется $N+1$ переменных. Так как система уравнений (8.63), (8.64) нелинейная, то решение ее проводится итерационными методами. Рассмотрим алгоритм решения уравнений (8.63), (8.64) методом Ньютона.

1. Задают начальное приближение температуры кипения T_0 .

2. Для заданного состава и температуры рассчитывают коэффициенты активности компонентов

3. По уравнению (8.63) рассчитывают состав пара y_i .

4. По уравнению (8.64) уточняют температуру кипения смеси T .

5. Проверяют выполнение условия

$$|T - T'| < \epsilon. \quad (8.65)$$

Если условие (8.65) выполняется, то расчет заканчивают.

Равновесие в системе жидкость – жидкость. Описанием таких систем являются покомпонентные уравнения фазового равновесия, дополненные уравнениями материального баланса и стехиометрическими соотношениями. При расчетах равновесия в системах жидкость – жидкость можно выделить следующие две задачи: первая задача состоит в определении состава равновесных фаз при заданной температуре по общему составу каждого компонента, присутствующего в смеси; вторая задача заключается в определении состава одной из равновесных фаз по заданному составу другой при известной температуре.

8.17. Детерминированный и стохастический подходы к описанию массопередачи.

Детерминированное описание переноса вещества в процессах массопередачи основано на фундаментальных законах диффузии Фика.

Уравнение Фика (молекулярный перенос):

$$q_C = -D_M \frac{dC}{dZ}. \quad (8.66)$$

Уравнение Фика (конвективный перенос):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} W_x + \frac{\partial C}{\partial y} W_y + \frac{\partial C}{\partial z} W_z = D_M \nabla^2 C. \quad (8.67)$$

Уравнение Ньютона:

$$q_C = K \Delta C. \quad (8.68)$$

Параметры детерминированной составляющей:

$$N_{Nu_0} = N_{sh} \frac{al}{D_M}; \quad N_{Pr_0} = N_{Sc} \frac{\nu}{D_M}. \quad (8.69)$$

В силу стохастического характера явлений массопереноса достижение равновесного состояния подчинено вероятностным законам распределения энергии и массы в пространстве и во времени. К наиболее существенным причинам неравновесности массообмена в промышленных условиях можно отнести: неравномерность распределения частиц потока по времени пребывания; обратный заброс фаз в результате механического уноса; недостаточное время контакта фаз. Степень достижения равновесия на ступени разделения определяется гидродинамикой потоков жидкости и пара, их взаимодействием, а следовательно, временем пребывания в аппарате. В реальных условиях неравномерность распределения элементов потока по времени пребывания обусловлена в первую очередь неравномерностью профиля скоростей, турбулизацией потоков, различием скоростей переноса отдельных компонентов, градиентами температуры и давления.

9.18. Массопередача в системах жидкость–пар (газ) и жидкость–жидкость.

Перенос вещества из одной фазы в другую включает три основных этапа: 1) подвод вещества из объема фазы к границе раздела фаз; 2) перенос вещества через границу раздела фаз; 3) перенос вещества от границы раздела в объем второй фазы.

Перенос вещества внутри фазы происходит путем молекулярной, конвективной и турбулентной диффузий. В неподвижной среде перенос происходит только путем молекулярной диффузии, в движущейся среде – путем молекулярной и конвективной диффузии. При турбулентном движении перенос происходит главным образом путем турбулентной диффузии.

Рассмотрим основные уравнения массоотдачи и массопередачи. При отсутствии равновесия между фазами происходит перенос вещества из одной фазы в другую: этот процесс называют *массопередачей*. Массопередача является сложным процессом, состоящим из процессов переноса вещества в пределах каждой из фаз (массоотдача) и переноса вещества через границу раздела фаз. Обычно считают, что сопротивление переходу вещества на границе фаз отсутствует. Количество компонента i , переносимого в направлении z через поверхность F за единицу времени, составляет

$$W_i = -DF \frac{dC_i}{dz}. \quad (8.70)$$

Уравнение (8.70) выражает закон Фика, причем в нем градиент химического потенциала приближенно заменен на градиент концентрации.

При рассмотрении процесса массопередачи за движущую силу принимают разность между фактической концентрацией компонента в одной из фаз и равновесной концентрацией в ней данного компонента. Указанные представления о процессах массоотдачи и массопередачи равносильны предположению о существовании в каждой из фаз некоторого сопротивления переходу вещества. В отсутствие сопротивления у поверхности раздела общее сопротивление процессу складывается из сопротивлений в каждой из фаз, т.е. имеет место аддитивность фазовых сопротивлений.

Уравнение массоотдачи, т. е. переноса вещества к поверхности соприкосновения фаз (или от этой поверхности), записывается в виде

$$W_i = \beta F \Delta, \quad (8.71)$$

где W_i – количество вещества, переносимого в единицу времени; F – поверхность соприкосновения фаз; Δ – движущая сила (разность концентраций); β – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом массоотдачи* и представляющий собой количество вещества, переносимое внутри фазы в единицу времени через единицу поверхности при движущей силе, равной единице.

Величина коэффициента массоотдачи зависит от характера движения фазы и ее свойств. В настоящее время получили распространение следующие модели механизма переноса вещества в фазе: пленочная модель, согласно которой коэффициент массоотдачи пропорционален коэффициенту молекулярной диффузии, модель проникания и модель обновления поверхности раздела фаз. В последних двух моделях процесс массоотдачи рассматривается как нестационарный, а коэффициент массоотдачи пропорционален коэффициенту молекулярной диффузии в степени 0,5.

Литература: 9 [136–141], 9 [150–162], 8 [170–179], 9, 10, 9[173–194], 2[225–244]

Контрольные вопросы:

1. Динамика скопления амёб.
2. Построение содержательной модели.
3. Приближения модели. Постулаты и уравнения модели.
4. Общая математическая модель и ее коррекция.
5. Некоторые результаты исследования математической модели.
6. Диффузные процессы и дифференциальные уравнения Колмогорова.
7. Марковские процессы.
8. Модель рекламной компании и содержательная модель рекламной компании. Рабочие гипотезы, приближения и основные уравнения.
9. Математическая модель, ее исследование и условие, момент останова рекламной компании.

10. Макромодель равновесия рыночной экономики (на примере модели Кейнса) и исходные положения в построении классических экономических моделей.

11. Математическая модель равновесного рынка.

12. Макромодель экономического роста.

13. Норма золотого правила роста Солоу.

14. Взаимоотношения в системе «хищник–жертва».

15. Гонка вооружений между двумя странами.

16. Боевые действия двух армий.

17. Имитационное моделирование.

18. Метод Монте-Карло.

19. Моделирование случайных величин.

20. Проверка качества последовательности псевдослучайных чисел.

21. Методы генерации случайных воздействий – величин, последовательностей, процессов, потоков и полей.

22. Эволюция содержания терминов «имитация», «имитационная модель» и их современное понимание.

23. Общая модель системы «Государственная власть – гражданское общество».

24. Общая постановка задачи и терминология.

25. Механизмы перераспределения власти внутри иерархической структуры.

26. Баланс власти, правовое поле.

27. Выход за границы правового поля.

28. Использование иерархического подхода к получению дискретных моделей.

29. Основные этапы составления математического описания процессов.

30. Описание равновесий жидкость – пар (газ) и жидкость – жидкость.

31. Основные типы задач и алгоритмы их решения.

32. Детерминированный и стохастический подходы к описанию массопередачи.

33. Массопередача в системах жидкость – пар (газ) и жидкость – жидкость.

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Адекватность (правильное соответствие) (от латинского слова *adaequatus* «адекватус» – приравненный, равный).

Алгебраическое уравнение, уравнение получающееся при приравнении двух алгебраических выражений. Например, алгебраическим уравнением являются $\frac{x}{x+1} = 2$, $x^2 + xy + y^2 - x + 2y + 1 = 0$. Алгебраическое уравнение с одним неизвестным может быть преобразовано к виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$.

Алгоритм (алгори́фм) (от *algorithmi*, *algorismus*, первоначально – латинская транслитерация имени математика аль-Хорезми) конечный набор правил, позволяющих чисто механически решать любую конкретную задачу из некоторого класса однотипных задач.

Алгоритмический язык, набор символов и система правил составления и истолкования языковых конструкций из этих символов, предназначенные для записи алгоритмов.

Аналитический аспект является математическим описанием процесса в виде некоторой системы уравнений, отражающей протекающие в объекте явления и функциональные связи между ними.

Аппроксимация (от латинского *approximo* – приближаюсь), замена одних математических объектов (например, чисел или функции) другими, более простыми и в том или ином смысле близкими к исходным (например, кривых линий близкими к ним ломаными).

Асимптота (от греческого *asymptotos* – несовпадающий) кривой с бесконечной ветвью, прямая, к которой эта ветвь неограниченно приближается; например, асимптота гиперболы.

Балансировка (техническая), уравнивание (устранение дебаланса) вращающихся частей машин (роторов, маховиков, валов, шпинделей и т. п.). Различают балансировку динамическую и статическую.

Бифуркация (от латинского *bifurcus* – раздвоенный), раздвоение, вилообразное разделение или разветвление; (медицина), разделение трубчатого органа (сосуда или бронха) на 2 ветви одинакового калибра, отходящие в стороны одинаковыми углами.

Верификация (проверка) модели – контроль правильности модели на основе сравнения результата с другими известными фактами, в частности, с экспериментальными данными, и т. д.

Вероятностная модель может включать случайные компоненты – случайные скалярные или векторные величины, случайные последовательности или функции, случайные структуры и т. п., удовлетворяющие статическим законам.

Вычислительный аспект есть метод и алгоритм решения системы уравнений математического описания, реализованные как моделирующая программа на одном из языков программирования.

Гистограмма (от греческого *histos*, здесь – столб и ...*грамма*) (столбчатая диаграмма), один из видов графического изображения статистических распределений какой-либо величины по количественному признаку. Гистограмма представляет собой совокупность смежных прямоугольников, построенных на одной прямой; площадь каждого из них пропорциональна частоте нахождения данной величины в интервале, на котором построен данный прямоугольник.

Грина функция, функция связанная с аналитическим представлением применяется также при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики. Грина функция названа по имени Джорджа Грина, впервые рассмотревшего один её частный случай в своём исследовании по теории потенциала (1828 год). Грина функция описывает распространение полей от источников от порождающих (поэтому её называют также функцией распределения).

Декомпозиция – разложение некоторого целого на части, предполагающее дальнейшее соединение этих составных частей в единое целое, т.е. в исходный объект.

Декремент затухания (от латинского *decrementum* – уменьшение), характеристика затухания колебаний в системе: $\delta = \ln(A_1 / A_2)$, где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний, следующие друг за другом в одну и ту же сторону.

Дескриптивная лингвистика (от позднелатинского *descriptivus* – описательный), одно из направлений структурной дескриптивной лингвистики в американской языкознании в 36–50 годах 20 века. Провозглашает требование формального описания языка по заданной программе.

Детерминированная модель случайных компонентов не содержат.

Дескрипция (от латинского *descriptio* – описание), языковая конструкция, заменяющая собственное или нарицательное имя предмета.

Дивергенция (позднелат. *divergentia* – расхождение) (биологическая), расхождение признаков и свойств у первоначально близких групп организмов в ходе эволюции. Понятие дивергенция введено Ч. Дарвином для объяснения многообразия сортов культурных растений, пород домашних животных и биологических видов; *скалярное поле*, характеризующее плотность источников данного *векторного поля* $\mathbf{a}$ (P); обозначение $\text{div } \mathbf{a}$. Противопоставляется конвергенции.

Дисбаланс (от *дис...* и *баланс*), то же, что *дебаланс* (от *де...* и *баланс*), неуравновешенность вращающихся частей машин (роторов, коленчатых валов, шкивов и т. п.). Возникает при несовпадении оси, проходящей через центры опорных поверхностей цапф изделия, с его главной осью инерции. Совмещение этих осей достигается балансировкой.

Динамическая модель, предметом изучения является изменение рассматриваемого объекта во времени.

Дискретная модель принимает «оторванные» друг от друга значения, допускающие естественную нумерацию.

Дистрибутивность (от латинского *distributivus* – распределительный), дистрибутивный (распределительный) закон, свойство сложения и умножения, выражаемое формулой $(a + b + \dots + c)n = an + bn + \dots + cn$.

Дистрибутивный анализ, метод лингвистического исследования, при котором классификация языковых единиц и изучение их свойств производятся главным образом на основе их дистрибуции в потоке речи. Разработан представителями дескриптивной лингвистики.

Дифференциальное уравнение, уравнение, связывающее искомую функцию, её производные (или дифференциалы) и независимые переменные.

Доминанта (от латинского *dominans*, родительный падеж *dominantis* – господствующий), господствующая идея, основной признак или важнейшая составная часть чего-нибудь.

Доминантный признак, иногда доминирование выражают величиной органической массы, создаваемой данными видами, или числом особей.

Достаточная простота модели, модель является достаточно простой, если имеющиеся в нашем распоряжении средства исследования дают возможность провести в приемлемые сроки и экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественный или количественный – в зависимости от постановки задачи – анализ исследуемых свойств и осмыслить результат.

Изоклины (от *изо...* и греческого *klino* – наклоняю), изолинии магнитного наклона на магнитных картах. Изоклин нулевого наклона определяет экватор магнитный.

Инвариант (от латинского *invariants* – неизменяющийся) (математика), величина, остающаяся неизменной при тех или иных преобразованиях. Например, площадь какой-либо фигуры, угол между двумя прямыми – инвариант движения.

Инвариантность, неизменность какой-либо величины при изменении физической условий или по отношению к некоторым преобразованиям, обычно преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой; т.е. не зависит от выбора системы координат.

Имитация (от латинского *imitatio* – подражание), подражание кому-либо или чему-либо, воспроизведение; подделка.

Имитационное моделирование применяется для анализа поведения сложных экономических и т. п. задач, для которых математическую модель в виде системы уравнений даже выписать затруднительно.

Идентификация (от позднелатинского *identifico* – отождествляю), в технике, математике установление соответствия распознаваемого предмета своему образцу (знаку), называемой идентификатором.

Идентификация модели возникает, если после выбора схемы модели требуется определить ее параметры, уточнить структуру и т. п.

Иерархия (от греческого *hieros* – священный и *arche* – власть), расположение частей или элементов целого в порядке от высшего к низшему.

Инстанция (от латинского *instantia* – непосредственная близость), ступень, звено в системе подчинённых друг другу органов (например, судебная инстанция).

Интерфейс (английский *interface*), система унифицированных связей (по виду передаваемой информации, параметрам сигналов, аппаратуре), предназначен для обмена информацией между устройствами вычислительной системы (например, между устройством ввода данных и запоминающим устройством). Применяется в ЭВМ 3-го поколения.

Информационный процесс – процесс сбора, хранения, передачи и обработки информации.

Искусственный интеллект, условное обозначение кибернетических систем, моделирующих некоторые стороны интеллектуальной деятельности человека – логическое, аналитическое мышление.

Итерационные методы (от латинского «итерацио» – повторение), в каждом из таких методов некоторая единообразная вычислительная процедура повторяется вновь и вновь, причем каждый раз результат проведенного вычисления кладется в основу последующего вычисления.

Итерация (от латинского *iteratio* – повторение), повторное применение какой-либо математической операции.

Качественные методы, с помощью качественных методов свойства решения изучаются без его построения, путем анализа свойств заданного уравнения.

Качественная модель по необходимости применяется, где количественные закономерности проявляются не вполне четко (например, в некоторых социальных или биологических науках).

Квадрант (от латинского *quadrans* – четвёртая часть), плоский сектор с центральным углом 90° , $\frac{1}{4}$ часть круга. Квадрант плоскости – любая из 4 областей (углов), на которые плоскость делится двумя взаимно перпендикулярными прямыми.

Квазистатическая модель, в этом моделировании принимается, что изменение объекта происходит столь медленно, что при рассмотрении ситуации в каждый момент можно объект считать статическим.

Кинестатика (от греческого *kinetos* – движущийся и статика), раздел механики, в котором рассматриваются способы решения задач динамики методами статики. В основе кинестатики лежит Д'Аламбера принцип.

Количественная модель делает правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик свойств, о их взаимосвязи, эволюции и т. п.

Конвергенция (от латинского *convergo* – приближаюсь, схожусь).

Континуум (от латинского *continuum* – непрерывное) в математике, непрерывная совокупность, например совокупность всех точек отрезка на прямой или всех точек прямой, эквивалентная совокупности всех действительных чисел. Точнее, в евклидовом пространстве непустое связное множество называется континуумом, если оно компактно.

Консерватизм (франц. *conservatisme* – охраняю, сохраняю), приверженность к старому, отжившему и вражда ко всему новому, передовому.

Корпорация (от позднелатинского *corporatio* – объединение), 1) объединение, союз, общество. 2) (Юридическая) совокупность лиц,

объединившихся для достижения какой-либо цели; является юридическим лицом (например, в США публичные корпорации – муниципалитеты и частные – акционерные общества).

Корреляция (в математической статистике), вероятностная или статистическая зависимость.

Коррупция (от латинского *corruption* – подкуп), преступление, заключающееся в прямом использовании должностным лицом прав, связанных с его должностью, в целях личного обогащения. Коррупция характерна для буржуазного государства и общества (подкуп чиновников и общественных, политических деятелей, дача взяток и т. д.).

Лагранжиан, лагранжа формула (по имени Лагранжа – Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736–1813) французский математик и механик), то же что конечных приращений формула.

Либрация (от латинского *libratio* – качание, колебание)

Лингвистика (от латинского *lingua* – язык), то же, что языкознание.

Линеаризация (от латинского *linearis* – линейный), один из наиболее распространённых методов анализа нелинейных систем (или зависимостей), при котором они рассматриваются (с определёнными допущениями) как линейные.

Линейная модель, в ней выполнен принцип суперпозиции (наложения), т. е. при сложении входов складываются и выходы, а при умножении входа на любое число выход умножается на то же число.

Линейное программирование, один из разделов математического программирования, в котором изучаемая функция линейна (1-й степени) и задана на множестве, заданном линейными равенствами и неравенствами.

Математическое моделирование, как термин часто применяется по отношению к области прикладной математики, включающей в себя как построение и исследование математических моделей, так и создание вычислительных алгоритмов и программ, реализующих эти алгоритмы на ЭВМ.

Математическая модель – приближенное описание какого-либо явления или процесса внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Математическое программирование, математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых некоторыми ограничениями (равенствами и неравенствами).

Метод динамического программирование, это специфический класс задач с дискретным временем (в частности задачи с непрерывным временем).

Метод Монте-Карло, метод статических испытаний, численный метод, решения математических задач при помощи моделирования случайных процессов и событий.

Механическая модель, рассматривает реальный объект связанный со своими свойствами на языке механики.

Многомерное многообразие или k -мерное многообразие, это совокупность имеющая k параметров или степеней свободы. Параметры называются (обобщенными) *координатами* на этом многообразии.

Многообразие фазовое, это многообразие состояний.

Моделирование, исследование каких либо явлений, процессов или систем объектов путём построения и изучения их моделей; использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов. Моделирование – одна из основных категорий теории познания: на идее моделирования по существу базируется любой метод научного исследования – как теоретический (при котором используются различного рода знаковые, абстрактные модели), так и экспериментальный (использующий предметные модели); является одним из методов изучения окружающего мира.

Модифицирование полимеров, направленное изменение их свойств путём регулирования надмолекулярной структуры (введение зародышей кристаллизации, термическая обработка) или изменения химического состава молекулы (введение реакционноспособных групп и другие). Применяются, например, для повышения ударной прочности пластмасс, облегчения крашения химических волокон.

Навье–Стокса уравнения, дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости или газа, выведены в 1822 году. Названы по имени А. Навье (французский инженер и учёный) и Дж. Стокса (английский физик и математик).

Наименьших квадратов метод, один из методов ошибок теории для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. Применяется при обработке наблюдений.

Нелинейная модель, в ней принцип суперпозиции не выполнен.

Непрерывная модель принимает все значения из некоторого интервала.

Неравенство (матем.), соотношение между числами, указывающее, какое из них больше или меньше другого.

Оптимизация, как термин происходит от латинского *optimus* – лучший, наиболее соответствующий определенным критериям и задачам. Основной задачей оптимизации является достижение наилучших результатов при наименьших потерях.

Плебисцит (латинский *plebiscitum*, от *plebs* – простой народ и *scitum* – решение, постановление), 1) в Древнем Риме постановление, принимаемое собраниями плебеев. 2) Один из видов народного голосования. В международных отношениях применяется при опросе населения территории о её принадлежности к тому или иному государству.

Полиграфия (греческий *polygraphia*, буквально – многоописание), 1) отрасль техники, совокупность технических средств для производства печатной продукции – книг, газет и тому подобные. Основные производственные процессы в полиграфии: изготовление печатной формы, собственно печатание и отделка отпечатанных продукции. 2) То же, что полиграфическая промышленность (изготавливает печатную продукцию).

Полнота модели дает принципиальную возможность, для определения одного параметра она является полной, для определения другого – неполной.

Постулаты модели, это то же, что гипотезы.

Программное управление, здесь все величины смещения строятся как функции времени; управление режимом работы объекта по заранее заданной программе.

Продуктивность модели связана с тем, что изучаемый объект может включать различные параметры – такие, как массы, длины и т. п. его компонент, включать функциональные зависимости, которые считаются заданными и описывают связи между рассматриваемыми величинами (например, связь между усилием и перемещением в случае нелинейного закона упругости).

Проектирование, процесс создания проекта – прототипа, прообраза предполагаемого или возможного объекта, состояния. Наряду с традиционными видами (архитектурно-строительные, машинно-строительные, технологические и другие) начали складываться самостоятельные направления проектирования человеко-машинных систем, трудовых процессов, организаций, экологическое, социальное, инженерно-психологическое, генетическое и другие.

Прямые методы вариационного исчисления, с помощью их приближенное решение задачи на экстремум функционала сводится без обращения к уравнению Эйлера к аналогичной задаче с конечным числом степеней свободы.

Процесс (от латинского *processus* – продвижение), 1) последовательная смена явлений, состояний в развитии чего-нибудь. 2) Совокупность последовательных действий достижения какого-либо результата (например, производственного процесса).

Псевдо... (от греческого *pseudos* – ложь), часть сложных слов, означающая: ложный, мнимый (например, псевдонаука).

Релаксация (от латинского *relaxation* – ослабление, расслабление), процесс установления термодинамического равновесия (полного или частичного) в физической системе, состоящей из большого числа частиц.

Сепаратриса – особая траектория.

Симплекс (от латинского *simplex* – простой), простейший выпуклый многогранник данного числа измерений n . При $n = 3$ трёхмерный симплекс представляет собой произвольный тетраэдр. Под двумерным симплексом понимают произвольный треугольник, а под одномерным – отрезок. Нульмерный симплекс есть просто точка.

Симплекс-метод, в основе которого лежит идея, упорядочного перебора вершин допустимого многогранника.

Симуляция (от латинского *simulatio* – притворство) (медицина), изображение болезни или отделение её симптомов человеком, не страдающим данным заболеванием. Умышленная симуляция обычно преследует корыстные цели (уклонение от военной службы, получение материальных льгот и др.).

Системотехника (техника больших систем), научное направление, охватывающее проектирование, создание, испытание и эксплуатацию сложных

систем. Системотехника возникла на рубеже XX века, резкий скачок в ее развитии произошел в 50-е годы с созданием мощных ЭВМ. Первый вариант общей теории систем был разработан австрийским ученым Людвигом фон Берталанфи после Второй мировой войны.

Смысловой аспект представляет собой физическое описание природы моделируемого объекта.

Содержательная модель, строение модели на языке той или иной науки.

Сплайн – это кусочно-полимиальная функция, в точках сопряжения кусков которой удовлетворяются условия непрерывности для нее самой и определенного числа производных.

Статическая модель, модель неизменная во времени

Стационарная модель, в этой модели считается, что процессы происходят, но изучаемый объект во времени не меняется.

Стохастическая модель, то же, вероятностная модель.

Стохастический (от греческого *stochastikos* – умеющий угадывать), случайный, вероятностный.

Стохастический процесс, то же, что случайный процесс.

Структурная модель, в которой отражается структура (устройство) моделируемого объекта.

Существенные параметры, т. е. при любом малом изменении параметров рассматриваемый объект фактически меняется.

Точность модели, это количественная адекватность.

Траектория, линия, которую описывает частица в процессе движения.

Условие Гюгонио – однозначная связь между величинами до и после скачка.

Фазовый портрет – совокупность всех траекторий на фазовой плоскости.

Финитизм (от латинского *finitus* – определённый, законченный), логико-математическая концепция, согласно которой в метатеории допускаются лишь финитные (интуитивно ясные, бесспорные) средства рассуждений, проводимых в терминах обычного языка.

Фрагмент (от латинского *fragmentum* – обломок, кусок), часть произведения искусства, отрывок текста.

Функциональная модель, которая отражает только то, как объект функционирует – например, как он реагирует на внешние воздействия.

Фунт (от латинского *pondus* – вес, тяжесть), основная единица массы в системе английских мер, обозначается 1b. 1Ф. (торговый) = 0,45359237 кг, 1Ф. (аптекарский и тройский, или монетный) = 0,37324177 кг; 2) единица массы в системе русских мер, 1Ф. = 0,40951241 кг = 1/40 пуда = 32 лотам = 96 золотникам = 9216 долям.

Характеристическое уравнение, алгебраическое уравнение степени n имеющее вид $\det(A - \lambda I) = 0$, где A – квадратная матрица, I – единичная матрица порядка n .

Цапфа (от немецкого *Zapfen*), опорная часть оси вала. Цапфа на конце вала называется шипом, а в середине – шейкой.

Целочисленное программирование, т. е. задач для которого аргументы целевой функции по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения.

«Черный ящик», термин, употребляемый главным образом в системотехнике для обозначения систем, структура и внутренние процессы которых неизвестны или очень сложны; метод изучения таких систем основан на исследовании их реакций на известные (заданные) входные воздействия (сигналы).

Шпиндель (нем. *Spindel*, буквально – веретено).

Эволюционная модель, то же, что динамическая модель.

Язык программирования, формальный язык для описания данных (информации) и алгоритма (программы) их обработки на ЦВМ.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АСОГ (*Analitical Solution of Groups*);

Детерминация (от латинского *determinatio* – ограничение, определение);

МДС – магнитнодинамическая система;

Осциллятор (от латинского *oscillo* – качаюсь), колеблющаяся система;

РД – рабочая документация;

Ротация (от латинского *rotation* – круговращение);

САПР – система автоматизированного проектирования;

ТАУ – теория автоматического управления;

ТЗ – техническое задание;

Техн.П – технический проект;

ТП – техническое предложение;

ЦВМ – цифровая вычислительная машина;

ЭВМ – электронно вычислительная машина;

ЭДС – электродвижущая сила;

ЭП – эскизный проект;

ЮНИКВАК (*UNIQVAC* – universal quasy chemical);

ЮНИФАК (*Universal Functional Model of Coefficient Activity*);

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Левин Ю. С. Производственные процессы в полиграфии: проектирование и расчет. [Текст]: Учебник для вузов по специальности «Технология полиграфического производства» / Ю. С. Левин, П. А. Матвеев, К. -Д. Маудрих. –Москва –Лейпциг: Книга, 1985. – 320 с.
2. Кафаров В. В., Глебов М. Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с. ISBN – 5-06-002066-5.
3. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. Курсовое проектирование: [Для вузов по специальности «Автоматизирование путем управления»]. –М.: Высшая школа, 1998, – 133 с..
4. Кафаров В. В. Методы кибернетики в химии и химической технологии: Учебник для вузов по специальности «Основные процессы химических процессов и химической кинетики». – М.: Химия, 1985. – 448 с.
5. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990, – 264 с. ISBN 5-217-00861-X.
6. Сойер Б., Фостер Д. Л. Программирование экспертных систем на языке Паскале. Перевод с английского. –М.: Финансы и статистика, 1990, – 191 с.
7. Одиноква Е. В. Проектирование полиграфических машин: Учебник для вузов / Е. В. Одиноква, Г. Б. Куликов, И. Ш. Герценштейн; Моск. гос. ун-т печати. – М.: МГУП, 2003. – 411 с. ISBN 5-8122-0307-5.
8. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с. ISBN 5-02-015186-6.
9. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.
10. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, исправленное. –М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
11. Опыт имитационного моделирования исторического процесса. Гусейнова А. С., Павловский Ю. Н., Устинов В. А. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 160 с.
12. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 568 с.
13. Каган А. В. Математическое моделирование в электромеханике: Задания на практические работы. Методические указания к выполнению практических работ. –Санкт-Петербург, 2004. –57 с.
14. Каган А. В. Основы моделирования в электромеханике: Учеб. пособие. –СПб.: СЗПИ, 1995, –58 с.
15. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высшая школа, 2001, –327 с.

16. Веников В. А., Веников Г. В. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1984, –439 с.

17. Каган А. В. Математическое моделирование в электромеханике. Ч.2: Письменные лекции. СПб.: СЗТУ, 2002. –74 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. Основные понятия и определения математического моделирования полиграфических процессов	3
1. Математическое моделирование основной метод решения задач оптимизации полиграфических процессов	9
1.1. Этапы математического моделирования	9
1.2. Основные виды математических моделей	11
1.3. Физическое описание природы объекта	15
2. Цели и задачи математического моделирования	18
2.1. Принципы моделирования и построения моделей	18
2.2. Источники ошибок при моделировании и требования к исходной информации	20
2.3. Возможности оптимизации проектных решений	22
3. Классификация математических моделей	31
3.1. Различные подходы к классификации	31
3.2. Функциональные и структурные модели	31
3.3. Дискретные и непрерывные модели	33
3.4. Динамические и статические модели	34
3.5. Детерминированные и стохастические модели	35
3.6. Линейные и нелинейные модели	35
4. Математическое описание объекта, технология математического моделирования и построения математических моделей	38
4.1. Составление математического описания объекта	38
4.2. Выбор метода решения и реализация его в виде алгоритма решения и моделирующей программы	48
4.3. Блочный принцип построения математических моделей	51
4.4. Роль математического моделирования в техническом прогрессе и в процессе познания	53
4.5. Содержательная модель исследуемой системы	55
4.6. Математическая модель, ее свойства и требования, предъявляемые к математическим моделям	59
4.7. Последовательность разработки и машинной реализации моделей систем	60
4.8. Моделирование систем и языки программирования	64
5. Идентификация параметров и установление адекватности моделей	68
5.1. Статистическое оценивание числовых характеристик случайных процессов	69
5.2. Параметрическая идентификация моделей	76
5.3. Проверка адекватности моделей	78
6. Элементы качественной теории исследования динамических систем и модели простейших нелинейных объектов	83
6.1. Качественная (топологическая) структура траекторий системы в пространстве состояний	84

6.2.	Бифуркации. Понятие грубой системы	86
6.3.	О происхождении нелинейности	90
6.4.	Три режима в нелинейной модели популяции	90
6.5.	Влияние сильной нелинейности на процесс колебаний	92
6.6.	О численных методах	94
7.	Исследование математических моделей. Применение методов подобия	97
7.1.	Анализ размерностей и групповой анализ моделей	97
7.2.	Автомодельные (самоподобные) процессы	105
7.3.	Различные режимы распространения возмущений в нелинейных средах	114
7.4.	Формулировка, некоторые следствия	126
7.5.	Классификация режимов с обострением	132
7.6.	Расширение «автомодельного метода»	137
7.7.	Локализованные структуры в нелинейных средах	144
7.8.	Различные способы осреднения	149
7.9.	Классификация режимов горения теплопроводной среды	153
7.10.	Необходимость численного моделирования, элементарные понятия теории разностных схем	161
7.11.	Непосредственная формальная аппроксимация	168
7.12.	Интегро-интерполяционный метод	176
7.13.	Принцип полной консервативности	180
7.14.	Построение разностных схем с помощью вариационных принципов	185
7.15.	Использование иерархического подхода к получению дискретных моделей	190
8.	Модели формализуемых объектов	196
8.1.	Динамика скопления амёб	196
8.2.	Диффузные процессы и дифференциальные уравнения Колмогорова. Марковские процессы, вывод прямого и обратного уравнений Колмогорова	201
8.3.	Модель рекламной компании	209
8.4.	Макромодель равновесия рыночной экономики (на примере модели Кейнса). Исходные положения в построении классических экономических моделей. Математическая модель равновесного рынка	214
8.5.	Макромодель экономического роста	224
8.6.	Взаимоотношения в системе «хищник–жертва»	227
8.7.	Гонка вооружений между двумя странами	228
8.8.	Боевые действия двух армий	230
8.9.	Имитационное моделирование	232
8.10.	Методы генерации случайных воздействий – величин, последовательностей, процессов, потоков и полей	233
8.11.	Эволюция содержания терминов «имитация», «имитационная модель» и их современное понимание	234

8.12.	Общая модель системы «Государственная власть – гражданское общество»	234
8.13.	Механизмы перераспределения власти внутри иерархической структуры	242
8.14.	Баланс власти, правовое поле. Выход за границы правового поля ...	245
8.15.	Основные этапы составления математического описания процессов	250
8.16.	Описание равновесий жидкость – пар (газ) и жидкость – жидкость..	251
8.17.	Детерминированный и стохастический подходы к описанию массопередачи	259
8.18.	Массопередача в системах жидкость – пар (газ) и жидкость – жидкость	260
	Словарь терминов	264
	Список сокращений	276
	Библиографический список	275

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛИГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Нач. РО ИИЦ
Редактор
Компьютерная верстка

З. А. Губайдулина
Г. М. Дюсенбаева
Д. Тажиева

Подписано в печать . 2015 г.
Тираж 300 экз. Формат 60х84 1/16. Бумага типографская №1.
Уч.-изд.л. 17,7. Усл. п.л. 16,4. Заказ № . Цена договорная

Издание Казахского национального технического университета
имени К. И. Сатпаева
Учебно-издательский центр КазНТУ
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-228-783-7