

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный исследовательский технический  
университет имени К. И. Сатпаева

Н. М. Кулжабай, Г. С. Муханова

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
И МЕТОДЫ В ЛОГИСТИКЕ**

Утверждено Научно-методическим советом  
университета в качестве учебного пособия

Алматы 2017

УДК 519.86 (075)

ББК 22.18 я 73

К 90

Рецензенты:

*Лукиных В. Ф.*, зав. каф. «Логистика» КрасГАУ (г. Красноярск, Россия);

*Халикова Г. З.*, проф. каф. «Информатика и информационные технологии» КазНПУ имени Абая;

*Касен К. Р.*, проф. каф. «Управление проектами» КазНИТУ имени К. И. Сатпаева

Печатается по плану издания Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан на 2017 г.

**Кулжабай Н. М.**

**К 90**

Экономико-математические модели и методы в логистике:

Учеб. пособие / *Н. М. Кулжабай, Г. С. Муханова.* – Алматы:

КазНИТУ им. К. И. Сатпаева, 2017. –232 с.; Ил. 69; Табл. 86.;

Библиогр. – 37 назв.

ISBN 978-601-323-077-1

*В данном учебном пособии рассмотрены наиболее распространенные экономико-математические модели и методы в различных функциональных областях логистики, таких как производственная, транспортная, распределительная и закупочная. Классификация задач и моделей проводится как по областям логистики, так и по классу моделей. Рассмотрены линейные, нелинейные, дискретные и целочисленные классы задач. В соответствии классам задач описаны методы решения производственных, транспортных, сетевых задач логистики.*

*Учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов и специалистов для принятия управленческих решений.*

ISBN 978-601-323-077-1 © Кулжабай Н. М., Муханова Г. С., 2017

© КазНИТУ им. К. И. Сатпаева, 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования и управления в логистике являются материальные потоки, которые относятся к основным потокам. Сопутствующие потоки – информационные, финансовые и сервисные (потоки услуг).

В различных источниках дают различные определения материальному потоку. И среди них на наш взгляд более точное определение будет следующим: «Материальный поток – это находящиеся в состоянии движения материальные ресурсы, незавершенное производство и готовая продукция, к которым применяются логистические операции, связанные с их физическим перемещением в пространстве: погрузка, разгрузка, затаривание, перевозка, сортировка, консолидация, разукрупнение, и т. п.».

Логистика – это наука об управлении и оптимизации материальных потоков, потоков услуг и связанных с ними информационных и финансовых потоков на определенном уровне экономической системы для достижения поставленных перед ней определенных целей. Кроме того логистику необходимо воспринимать и как инструмент управления в рамках действующих компании бизнеса, для достижения целей этой компании. Следовательно, логистика связана с функционированием коммерческой экономики.

Наибольшее применение логистики находит в сфере материального производства, в транспортном обеспечении предприятий, в материально-техническом снабжении, инфраструктурных подразделениях и т. п. Хотя в условиях быстрого и успешного развития современного рынка области использования логистики все более расширяются.

К основным методам исследования таких систем относится метод экономико-математического моделирования. Общеизвестные задачи экономико-математического моделирования

описываются, во-первых, как анализ экономических субъектов и процессов исследуемой области; во-вторых, экономическое прогнозирование и предположение их совершенствования; и, в-третьих, разработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной ступени. Необходимо отметить, что не все результаты экономико-математического моделирования могут быть на практике. Они скорее могут быть рассмотрены как «консультирующие» средства. Принятие управленческих решений остается за человеком. Таким образом, экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов в структуре прогнозирования и управления рассматриваемыми социально-экономическими системами.

Рассмотрим основные методические подходы, применяющиеся при анализе рынка логистических услуг и исследовании особенностей функционирования на них объектов (предприятий, компаний, фирм, отраслей) методами моделирования.

В рамках экономико-математического моделирования логистических систем можно выделить два главных направления:

а) математические модели и методы решения конкретных прикладных задач, возникающих на рынке логистических услуг;

б) концептуальные модели функционирования и развития функциональных областей логистики (закупочная, производственная, распределительная, транспортная информационная).

В данном учебном пособии рассмотрены наиболее распространенные экономико-математические модели и методы в различных функциональных областях логистики.

В первом разделе пособия проводится классификация моделей задач в областях логистики, методов и алгоритмов их решения. Будут описаны постановки задач в таких областях логистики как транспортная, производственная, распределительная и закупочная и их математические модели.

Во втором разделе проводится описание существующих методов решения наиболее распространенных транспортных и производственных задач.

В третьем разделе книги уделено внимание методам дискретного программирования, к которым относятся задачи ком-

мивояжера и о назначении. Здесь же описаны методы решения задач теории расписания.

В четвертом разделе рассмотрены ряд методов для решения задач логистики в сетевой постановке. Такие задачи как задача о кратчайшем пути, и потоки в сетях.

Пятый раздел посвящен теории массового обслуживания, рассмотрены различные виды систем массового обслуживания (СМО). При моделировании СМО широко применяется метод имитационного моделирования. Одна из первых пакетов прикладных программ GPSS описана в данном разделе и показан пример применения этого пакета.

## **1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ**

### **1.1. Классификация моделей и методов в логистике**

Основная цель логистического подхода заключается в управлении материальным потоком, проходящего через интегрированную логистическую систему. Управление интегрированной логистической системой имеет сложный характер, которая заключается в многообразии и различии целей и задач элементов системы. Элементами системы являются области логистики или логистические функции.

Объектом управления, исследования и оптимизации в логистике являются материальные и связанные с ними финансовые и информационные потоки. Материальный поток – это грузы, товары и услуги, к которым применяются различные виды операций. К операциям относятся разгрузка, перевозка, сортировка, хранение и другие. Качественный состав материального потока может меняться по мере прохождения по логистической цепи или сети. Логистическая цепь или цепь поставок включает в себя процессы, связанные с продвижением и преобразованием груза (товаров) от поставщиков сырья или производителя продукции до конечного потребителя сырья или готовой продукции. На отдельных участках продвижения материального потока управление имеет свою специфику и свои задачи. В связи с этим различают пять функциональных областей логистики:

- закупочная (снабженческая);
- производственная;
- распределительная (складская);
- транспортная;
- информационная.

Управление интегрированной логистической цепью, включающее несколько звеньев или областей логистики, представляет сложный процесс и соответственно требует применения методологического подхода. Научную базу логистики составляют математика, экономика и кибернетика. В логистике использу-

ются такие разделы математики как теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, теория оптимизации, исследование операции и другие. Широко применяются следующие разделы исследования операции: математическое программирование, теория игр, теории массового обслуживания и управления запасами, сетевое планирование и др.

В соответствии цели и задачам элементов системы применяются математические модели и методы для эффективного управления как отдельных областей логистики, так и интегрированной логистической системой.

Экономико-математическое моделирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой и методов решения определенных классов задач.

Математический аппарат включает в себя: общенаучные методы (системный анализ, комплексный подход, программно-целевое планирование), аналитико-прогностические методы (математическое программирование, теория вероятностей, теория массового обслуживания, экономико-статистические методы, теория связи, сетевое планирование, методы экспертных оценок и др.), а также методы, заимствованные из других областей знаний, таких, как, социология, психология, экология, эстетика и др. Указанные методические основы исследования сферы логистических услуг, в первую очередь общенаучные и аналитико-прогностические, определяют особенности применения экономико-математического моделирования в этой области. Рассмотрим некоторые из названных методов, в части использования их для решения конкретных задач.

Методы теории вероятностей помогают принимать такого рода решения, которые сводятся к определению значения вероятностей наступления определенных событий, математического ожидания той или иной случайной величины и т. п. В частности, речь может идти о следующем: производить или нет тот или иной товар или услугу, расширять или реорганизовывать производство, выходить на рынок или нет и т. д.

Методы статистической обработки данных. Эти методы позволяют проверить гипотезы о наличии взаимосвязи между различными экономическими индикаторами, характеризующими функционирование сферы услуг (например, взаимосвязь среднедушевых доходов и величины спроса на отдельный вид услуг) и найти параметры соответствующих математических зависимостей (например, параметры функции спроса).

Методы теории массового обслуживания применяются при решении задач о выборе очередности обслуживания заказчиков, при составлении графиков поставок товаров и в других аналогичных случаях. Эти методы дают возможность изучить складывающиеся закономерности, связанные с наличием потока заявок на обслуживание, и соблюсти необходимую очередность выполнения таких заявок, например, с учетом приоритета обслуживания.

Теория связи, рассматривающая механизм обратных связей, дает возможность получить сигнальную информацию о процессах, выходящих за пределы установленных параметров. В сфере услуг это позволяет управлять товарными запасами (управление поступлениями и отгрузками), процессами производства и сбыта (увязка производственных мощностей с возможностями сбыта). Применение таких методов помогает совершенствовать связь предприятий и фирм с рынком, повысить эффективность использования получаемых данных о процессе производства и сбыта.

Балансовые методы и модели позволяют решить задачи сбалансированности предложения услуг и спроса на них. Эти методы и модели могут оказаться полезными при решении ряда вопросов ценовой политики и ценообразования.

Методы сетевого планирования дают возможность регулировать последовательность и взаимозависимость отдельных видов работ или операций в рамках какой-либо программы. Они позволяют четко фиксировать основные этапы работы, определять и согласовывать сроки их выполнения, разграничивать ответственность, предусматривать возможные отклонения. Использование методов сетевого планирования и управления мо-

жет стать достаточно эффективным при решении таких задач, как освоение нового вида услуг, организация пробного обслуживания, подготовка и проведение сбытовых и рекламных компаний и др.

Разрешению реальных проблемных ситуаций могут в значительной мере помочь методы теории игр. Упрощенные модели поведения конкурентов, стратегии выхода на новые рынки и тому подобные могут предварительно «проигрываться» для нахождения оптимальных решений. Особое значение в этих задачах имеют методы теории игр для принятия решений в условиях неопределенности и риска.

Важное место в методическом комплексе занимают также методы экспертных оценок. Они дают возможность достаточно быстро получить обоснованный ответ на вопрос о возможных процессах развития тех или иных событий на рынке, выявить сильные и слабые стороны предприятия, получить оценку эффективности маркетинговых мероприятий и т. д. В частности, для решения этих задач широко используются методы «Мозговой атаки», «Дельфи» и др. Использование экспертизы является достаточно весомым и перспективным методом, если правильно сформирована экспертная группа, проведена процедура экспертных оценок, выбраны методы обработки результатов экспертизы.

Широкое применение в рассматриваемой предметной области могут найти методы имитационного моделирования, которые позволяют производить сценарные расчеты и проследить последствия принимаемых решений. При этом имитационные системы могут интегрировать в себе другие методы в качестве своих составных блоков. Эти модели наиболее хорошо зарекомендовали себя в области прогнозов и могут быть рекомендованы для прогностического описания объектов сферы услуг.

В свою очередь широкое применение в логистике имеют математические методы и модели. Применение экономико-математических методов и моделей позволяет повысить эффективность управления логистической системой. К настоящему времени разработаны различные экономико-математические

модели и методы в логистике, проведена их классификация по различным признакам и областям применения.

Математическое программирование, в частности линейное программирование, как математический метод выбора из ряда альтернативных решений наиболее оптимального (с наименьшими затратами, максимальной прибылью и т. п. при прочих равных условиях), применяется при решении таких проблем, как разработка наиболее оптимального ассортимента услуг при ограниченных ресурсах, расчет оптимальной величины товарных запасов, планирование маршрутов движения сбытовых агентов и др.

Прежде всего, задачи делятся на *задачи линейного и нелинейного программирования*. При этом если все функции линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является *задачей нелинейного программирования*.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. *Линейное программирование* представляет собой теоретический аппарат модельного исследования, направленного на отыскание наилучшего способа распределения ограниченных ресурсов по нескольким взаимосвязанным по цели и использованию ресурсов видам производственной деятельности. Линейное программирование нашло широкое применение при решении многих практических задач организационно-экономического управления.

Среди задач *нелинейного программирования* наиболее глубоко изучены *задачи выпуклого программирования*. Эти задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи дискретного программирования, динамического программирования, прикладные задачи теории графов и задачи календарного планирования.

*Задачи дискретного программирования*, заключаются в нахождении условных экстремумов на конечных множествах (или целочисленных решетках). Наиболее изученными задачами этого класса являются целочисленные задачи линейного программирования, т. е. задачи линейного программирования, в которых на все переменные (либо на их часть) наложено дополнительное требование целочисленности.

Задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным, относится к задаче *динамического программирования*.

*Прикладные задачи теории графов* – задачи нахождения кратчайших и критических путей в графах, возникающие в различных прикладных областях науки и техники, поиск оптимальных маршрутов в транспортных сетях, а также включающие расчет временных параметров в системах сетевого планирования и управления и пр.

*Задачи календарного планирования* это задачи, в которых каждая операция выполняется с единичной интенсивностью, причем прерывать выполнение начатой операции не желательно. Задачи этого класса носят типично комбинаторный характер, и эффективные точные методы решения получены только для относительно небольшого числа частных постановок.

Названные методы не исчерпывают, конечно, всего множества методов и моделей, используемого при экономико-математическом моделировании задач, возникающих в сфере логистических услуг. Области логистики имеют свои специфические особенности, которые порождают различные виды задач.

Рассмотрим теперь классификацию моделей и методов в разрезе областей логистики или логистических функций.

В табл. 1.1 представлены наиболее распространенные модели, методы и алгоритмы, используемые в закупочной логистике, которые решают основные задачи этой области логистики. Целью закупочной логистики является удовлетворение потребности производства в материальных ресурсах (сырье, материалы, комплектующие и вспомогательные материалы) с максимально возможной эффективностью.

Таблица 1.1

Модели, методы и алгоритмы закупочной логистики

| Задачи закупочной логистики                                                                                                                                                                                                                                                                          | Модели, методы и алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>- Определение потребности в материальных ресурсах.</li><li>- Исследование рынка закупок.</li><li>- Выбор поставщиков материальных ресурсов.</li><li>- Осуществление закупок.</li><li>- Контроль поставок.</li><li>- Подготовка бюджета закупок и др.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>-Алгоритм выбора поставщика материальных ресурсов.</li><li>-Методы прогнозирования:<ul style="list-style-type: none"><li>1) показателей рынка сырья и материалов;</li><li>2) потребностей, спроса и другие.</li></ul></li><li>-Модели управления запасами.</li></ul> |

В закупочной логистике также рассматривается один из важных проблем или задач как управление запасами (логистика запасов). Здесь возникают две задачи создания и поддержания уровня запасов:

- материальные ресурсы (МР) в логистических каналах снабжения и производства;
- готовая продукция (ГП) в распределительных каналах.

В табл. 1.2 можно ознакомиться с основными задачами в логистике запасов и применяемыми здесь моделями и методами.

Таблица 1.2

Модели и методы по управлению запасами

| Задачи по управлению запасами                                                                                                                                                                                                                                                          | Модели, методы и алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>- Определение объема запасов на предприятии и на каждой стадии логистического и производственного процесса;</li><li>- размещение страховых запасов;</li><li>- соотношение затрат на содержание запасов в зависимости от числа складов.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>- Модель ЕОQ- экономического (целесообразного) размера заказа.</li><li>- стратегии (модели) контроля и управления запасами:<ul style="list-style-type: none"><li>1) с постоянным размером заказа;</li><li>2) с фиксированным временным интервалом (с учетом периодичности заказа);</li><li>3) установленной периодичностью</li></ul></li></ul> |

Продолжение таблицы

|  |                                                                                                                                                                                                              |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>пополнения с запасов до постоянного уровня;</p> <p>4) система управления запасами «минимум-максимум» и др.</p> <p>- Нестационарные и стохастические модели управления запасами.</p> <p>- ABC- анализ.</p> |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

В табл. 1.3 сформулированы задачи, модели, методы и алгоритмы производственной логистики.

Таблица 1.3  
Модели и методы производственной логистики

| Задачи производственной логистики                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Модели, методы и алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Оперативно-календарное планирование выпуска готовой продукции (ГП);</li> <li>- организация внутрипроизводственного складского хозяйства;</li> <li>- прогнозирование, планирование и нормирование расходов материальных ресурсов (МР) в производстве;</li> <li>- организация работы внутрипроизводственного технологического транспорта;</li> <li>- внутрипроизводственное распределение МР и ГП и др.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- концепции ЛТ ("точно-во-время" и др.);</li> <li>- методы статистической оценки и контроля производственных процессов;</li> <li>- модель EOQ (экономически целесообразного размера заказа);</li> <li>- ABC- метод (правило 80-20) и др.</li> <li>- Методы объемно-календарного (ОКМ) и объемно-динамического (ОДМ) планирования хода производства;</li> <li>- модель определения объема внутрипроизводственных логистических операций.</li> </ul> |

В распределительной (сбытовой) логистике существуют задачи, которые имеют место на микроуровне и на макроуровне. В табл. 1.4 сформулированы соответствующие задачи распределительной (сбытовой) логистики и представлены используемые модели, методы и алгоритмы [1, 2, 3].

Таблица 1.4  
Модели и методы распределительной логистики

| Задачи распределительной (сбытовой) логистики                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Модели, методы и алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>- На микроуровне:<ul style="list-style-type: none"><li>1) планирование процесса реализации;</li><li>2) организация получения и обработки заказа;</li><li>3) выбор вида упаковки, комплектация и т. д.;</li><li>4) организация доставки и контроль за транспортировкой;</li><li>4) организация послереализационного обслуживания.</li></ul></li><li>- На макроуровне:<ul style="list-style-type: none"><li>1) выбор схемы распределения материального потока;</li><li>2) определение оптимального количества складов на обслуживаемой территории;</li><li>3) определение оптимального расположения распределительного центра склада на обслуживаемой территории.</li></ul></li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>- Алгоритм выбора оптимального варианта распределения материального потока.</li><li>- Модель решения задачи размещения распределительных складских центров при распределении материальных потоков (производственно-транспортная задача).</li><li>- Метод определения координат склада.</li><li>- Выбор логистических посредников.</li></ul> |

В распределительной логистике существует ряд задач, которые выделяются отдельным классом – складская логистика. Задачи, модели и методы складской логистики представлены в табл. 1.5.

Таблица 1.5  
Модели и методы складской логистики

| Задачи складской логистики                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Модели и методы                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Преобразование производственного ассортимента в потребительский в соответствии со спросом.</li> <li>- Складирование и хранение.</li> <li>- Объединение и транспортировка грузов.</li> <li>- Предоставление услуг по подготовке товаров к продаже: фасовка, упаковка, маркировка, транспортно-экспедиторские услуги;</li> <li>1) выбор системы грузопереработки на складе и технологического складского оборудования;</li> <li>2) планировка складских помещений и оптимизация их использования и др.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Метод Парето (размещение товаров на складе, определение номенклатуры);</li> <li>- Методика принятия решения об аренде или строительстве склада.</li> <li>- Модель выбора вариантов оптимального размещения складов.</li> </ul> |

Перемещение (транспортировка) материального потока в логистической системе и подсистемах осуществляется различными видами транспорта. Под транспортировкой понимается комплексная транспортная функция как совокупность процессов погрузки-разгрузки, экспедирования, доставки и других логистических операций. Задачи, возникающие в процессе управления транспортировкой материальных потоков, относятся к транспортной логистике. В табл. 1.6 представлены задачи и применяемые модели и методы в транспортной логистике.

Таблица 1.6  
Модели и методы транспортной логистики

| Задачи транспортной логистики                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Модели и методы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- обеспечение технической и технологической сопряженности участников транспортного процесса, согласование их экономических интересов, а также использование единых систем складирования;</li> <li>- создание транспортных систем (в том числе транспортных коридоров и транспортных цепей);</li> <li>- обеспечение технологического единства транспортно-складского хозяйства;</li> <li>- совместное планирование производственного, транспортного и складского процессов;</li> <li>- выбор вида транспортного средства (ТС);</li> <li>- выбор типа ТС;</li> <li>- определение рациональных маршрутов доставки;</li> <li>- выбор перевозчика и экспедитора.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Модели выбора перевозчиков.</li> <li>- Маршрутизация перевозок:                         <ol style="list-style-type: none"> <li>1) маятниковые маршруты;</li> <li>2) развозочные маршруты;</li> <li>3) транспортная задача (закрепление поставщиков за потребителем);</li> <li>4) смешанные (комбинированные) перевозки;</li> <li>5) модели распределения услуг сервиса, идентификация торговых сегментов (склад+транспорт);</li> <li>6) модели внутри производственных транспортных систем.</li> </ol> </li> <li>- Модель «точно-во- время».</li> <li>- Экономико-математическая модель макрологистической системы (производственно-транспортная задача).</li> <li>- Модели логистических центров (ЛЦ)                         <ol style="list-style-type: none"> <li>1) производство-транспорт-потребление.</li> </ol> </li> </ul> |

В зависимости от сложности модели в логистике также подразделяются на следующие виды:

- модели, охватывающие отдельные логистические операции и функции;
- модели, охватывающие две или более логистических операций и функций;
- модели логистических систем (каналов, сетей).

Первый вид модели включает оптимизационные и без-оптимизационные задачи. Во втором виде встречаются однокритериальные и многокритериальные функции. Третий вид

модели решает соответственно задачи анализа (оценка эффективности системы) и синтеза (проектирование).

Разработка моделей интегрированной логистической системы является новизной и актуальной задачей современной логистики.

## **1.2. Экономико-математические модели транспортной логистики**

Эффективность функционирования логистической сети или цепи поставок во многом зависит от качества работы транспорта. Под транспортной логистикой понимается товародвижение, при котором совершаются операции, связанные с перемещением груза от места его производства до места его потребления.

Транспортной логистике присущи следующие специфические особенности:

1) в транспортной логистике не создается новый материальный продукт, ее продукцией является сам процесс перемещения грузов и пассажиров;

2) транспортная продукция не взаимозаменяема и невыполнение плана перевозок какого-либо груза между одними пунктами не может скомпенсировать невыполнение перевозок того же груза между другими пунктами;

3) средства производства транспортной логистики рассредоточены по всей республике и за ее пределами, большая часть из них находится в постоянном движении.

К задачам транспортной логистики относят также:

- создание транспортных систем, в т. ч. создание транспортных коридоров и транспортных цепей;
- обеспечение технологического единства транспортно-складского процесса;
- совместное планирование транспортного процесса со складским и производственным;
- выбор вида транспортного средства;
- выбор типа транспортного средства;

- определение рациональных маршрутов доставки и др.

Вопросам использования экономико-математических методов в планировании и управлении деятельностью транспорта в логистике посвящено большое количество работ. Экономико-математическое моделирование используется для составления оптимальных схем грузопотоков с целью минимизации расстояний перевозки грузов; распределения клиентуры между транспортными предприятиями для снижения нулевых пробегов транспортных средств; маршрутизации перевозок с целью минимизации непроизводительных порожних пробегов автомобилей при перевозке грузов; минимизации времени доставки грузов клиентам; определения кратчайших путей между пунктами и др.

Рассмотрим наиболее известные и имеющие применение математические модели следующих задач транспортной логистики.

#### *1.2.1. Модель классической транспортной задачи*

Наиболее известная как классическая транспортная задача. Имеется  $n$  пунктов производства ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $m$  пунктов потребления ( $j = 1, \dots, m$ ) однородной продукции. Для каждого пункта производства и каждого пункта потребления заданы величины:

- $a_i$  – объем производства  $i$ -го пункта производства ( $i = 1, \dots, n$ );
- $b_j$  – объем потребления в  $j$ -м пункте потребления ( $j = 1, \dots, m$ );
- $C_{ij}$  – затраты на перевозку единицы продукции от пункта производства  $i$  до пункта потребления  $j$ .

При этом  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$ . Требуется составить план  $\{x_{ij}\}$  перевозок, дающий минимум суммарных затрат на перевозку.

Математическая модель задачи:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (1.4)$$

### 1.2.2. Модель транспортной задачи с нарушенным балансом

При формулировке транспортной задачи в пункте 1.2.1 указывалось, что суммарная мощность поставщиков равняется суммарной потребности потребителей  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$ . Однако мощности производства и потребности потребителей сбалансированы далеко не всегда, а некоторые экономические задачи вообще возникают и ставятся только в случае небаланса. Различаются открытая ( $\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{j=1}^m b_j$ ) и закрытая ( $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$ ) модели транспортной задачи. Могут возникнуть два случая закрытой модели:

1) при превышении суммы мощностей производителей над суммой потребностей ( $\sum_{i=1}^n a_i > \sum_{j=1}^m b_j$ ) условие (1.2) будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, n};$$

2) при превышении суммы потребностей над суммой мощностей производителей ( $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{j=1}^m b_j$ ) условие (1.3) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

### 1.2.3. Модель транспортной задачи с запретами

В рассмотренных ранее задачах допускалась большая свобода действий: перевозки можно было осуществлять по любым маршрутам, разрешалось жертвовать интересами любого потребителя и т. д.

Однако на практике могут быть и иные положения.

Пусть  $E_i$  – совокупность потребителей, которые могут получать продукт из пункта  $A_i$ ;  $E_j$  – совокупность отправителей, которые могут отправлять продукт потребителю  $B_j$ ;  $E$  – набор пар, состоящих из отправителей и получателя, между которыми разрешена перевозка.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j \in E_i} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in E_j} c_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij},$$

при условиях

$$\sum_{i \in E_j} x_{ij} = b_j, j = 1 \div n,$$

$$\sum_{j \in E_i} x_{ij} = a_i, i = 1 \div m,$$

$$x_{ij} \geq 0, (i, j) \in E,$$

$$x_{ij} = 0, (i, j) \notin E.$$

### 1.2.4. Модель транспортной задачи по критерию времени

Иногда при выполнении грузовых перевозок решающее значение приобретает фактор времени. При этом именно в логистике время является одним из правил эффективности. Это имеет место, например, при транспортировке скоро портящихся грузов, при вывозке зерна на заготовительные пункты во время уборки урожая, при перевозке скота и др. Рассмотрим такую задачу.

Поскольку лимитирующей в задаче является наиболее длительная перевозка, лучшим будем считать план, у которого самая длительная перевозка имеет наименьшую длительность.

Обозначим через  $X_{ij}$  количество груза, планируемого к отправке из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$  и  $t_{ij}$  – время доставки груза из  $i$  в  $j$ .

Тогда при выбранном критерии оптимальности задача формулируется следующим образом: определить набор чисел  $X_{ij}$  (план перевозок), для которого время  $t(x)$  наиболее продолжительной перевозки  $t(x) = \max t_{ij}$  (1.5) достигает минимума при условиях

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1 \div n, \quad (1.6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1 \div m, \quad (1.7)$$

$$x_{ij} > 0, i = 1 \div m, j = 1 \div n. \quad (1.8)$$

Выражение (1.5) означает наибольшее из времён запланированных перевозок.

Так как  $t(x)$  – нелинейная функция своих переменных  $X_{ij}$ , то модель (1.6)–(1.8) не является задачей линейного программирования. Это задача на минимакс.

#### 1.2.5. Модель задачи сменно-суточного планирования перевозок помашинных отправок грузов

Разнородный груз, сосредоточенный в пунктах отправления  $A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$  в количествах  $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$  единиц соответственно, необходимо доставить в пункты назначения  $B_1, \dots, B_j, \dots, B_n$  в количествах  $b_1, \dots, b_j, \dots, b_n$  единиц. Объём перевозок из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -ый пункт назначения составляет  $g_{ij}$  единиц и известен для всех пунктов (задана заяв-

ка на перевозки груза). Расстояние от  $i$ -го пункта отправления до  $j$ -го пункта назначения равно  $l_{ij}$  и известно для всех комбинаций  $(i, j)$ .

В процессе выполнения перевозок в пунктах назначения  $B_1, \dots, B_n$  после разгрузки автомобилей будет образовываться порожняк в количествах  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$ , который нужно подать под очередную погрузку в пункты отправления  $A_1, \dots, A_m$  в количествах  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$ . Величины  $a_i, b_j, g_{ij}$ ,  $a'_i$  и  $b'_j$  могут выражаться либо в тоннах, либо в поездках автомобилей. Здесь и далее за единицу измерения принята езда автомобиля с грузом и без груза.

По смыслу рассматриваемой задачи всегда имеет место условие

$$b'_j = b_j = \sum_{i=1}^m g_{ij}, j = 1 \div n,$$

$$a'_i = a_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}, i = 1 \div m.$$

За смену каждый автомобиль выполняет несколько поездок с грузом из одного или нескольких пунктов отправления в один или несколько пунктов назначения. После каждой поездки с грузом автомобиль возвращается в пункт отправления порожняком, причём из каждого пункта назначения автомобиль может следовать под погрузку в любой пункт отправления, имеющий груз.

Дополнительным условием задачи является требование, чтобы за рабочую смену автомобиль направлялся не более чем в 4 разные пункта отправления и такое же количество назначения.

Требуется составить такой план перевозок (маршрут движения автомобилей и сменные задания водителям), который обеспечит выполнение заданных объёмов с наименьшим холостым пробегом автомобилей.

Обозначим количество порожняка (в автомобиле-поездках), подаваемого из пункта  $B_j$  в пункт  $A_i$  через  $x_{ij}$ . Тогда суммарный холостой пробег автомобилей из всех пунктов наличия порожняка во все пункты его подачи выразится суммой:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ji} \rightarrow \min \quad (1.9)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m x_{ji} = b'_j, j = 1 \div n, \quad (1.10)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} = a'_i, i = 1 \div m, \quad (1.11)$$

$$x_{ji} \geq 0, j = 1 \div n, i = 1 \div m. \quad (1.12)$$

#### 1.2.6. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза

Задачи, рассмотренные в пунктах 1.2.6–1.2.8, рассматривают перевозку груза одного или нескольких видов (мультимодальные или интермодальные перевозки) через промежуточные (перевалочные) пункты.

Содержательная постановка задачи.

Однородный груз требуется доставить из  $m$  пунктов отправления в  $n$  пункты назначения. При доставке в пункты назначения грузы могут быть сначала доставлены на  $p$  перевалочные пункты. Заданы стоимости перевозок из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения  $c_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ) и перевалочный пункт  $d_{ik}$  ( $i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p}$ ), а также стоимости перевозки из каждого перевалочного пункта в каждый пункт назначения  $h_{kj}$  ( $k = \overline{1, p}, j = \overline{1, n}$ ). Требуется составить наиболее экономичный план перевозки грузов, обеспечивающий грузом пункты назначения в заданных объёмах. При этом товар по завершению перевозок должен быть полностью вывезен с перевалочных пунктов.

Математическая постановка задачи

Обозначим:

$a_i$  – запасы груза в  $i$ -м пункте отправления;

$b_j$  – потребность в грузе в  $j$ -м пункте назначения;

$c_k$  – вместимость  $k$ -го перевалочного пункта;

$c_{ij}$  – стоимость перевозки единицы груза из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения,  $i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$ ;

$d_{ik}$  – стоимость перевозки единицы груза из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт  $i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p}$ ;

$h_{kj}$  – стоимость перевозки единицы груза из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения  $k = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, n}$ ;

$x_{ij}$  – количество груза, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения;

•  $y_{ik}$  – количество груза, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт;

•  $z_{kj}$  – количество груза, перевозимого из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения.

Математическая модель задачи с учетом выше приведенных обозначений может быть представлена в виде задачи линейного программирования:

$$s = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p d_{ik} \cdot y_{ik} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n h_{kj} \cdot z_{kj} \rightarrow \min_{x_{ij}, y_{ik}, z_{kj} \in \Omega} \quad (1.13)$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{k=1}^p y_{ik} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.14)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} + \sum_{k=1}^p z_{kj} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.15)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ik} \leq c_k, \quad k = \overline{1, p}, \quad (1.16)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ik} \equiv \sum_{j=1}^n z_{kj}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (1.17)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad y_{ikl} \geq 0; \quad z_{kjl} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p}. \quad (1.18)$$

Здесь условие (1.14) ограничивает объёмы перевозимого груза возможностями заводов-изготовителей. Ограничение (1.15) обязывает компанию удовлетворить потребности всех баз в товаре. Ограничение (1.16) исключает нарушение условия вместимости складов. Выражения (1.17) требуют полного освобождения складов после завершения перевозок. Неравенства (1.18) определяют область возможных значений переменных.

### 1.2.7. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза нескольких видов

Содержательная постановка задачи

Груз, включающий  $q$  видов продукции, требуется доставить из  $m$  пунктов отправления в  $n$  пунктов назначения. При доставке в пункты назначения грузы могут быть сначала доставлены на  $p$  перевалочных пунктов. Заданы стоимости перевозок для каждого вида груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения и перевалочный пункт, а также стоимости перевозки из каждого перевалочного пункта в каждый пункт назначения.

Математическая модель задачи

Обозначим:

$a_{il}$  – запасы  $l$ -го вида груза в  $i$ -м пункте отправления;

$b_{jl}$  – потребность в  $l$ -м виде груза в  $j$ -м пункте назначения;

$C_{kl}$  – вместимость  $k$ -го перевалочного пункта по отношению к  $l$ -му виду груза ;

$C_{ijl}$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения  $i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad l = \overline{1, q}$ ;

$C_{ikl}^*$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт  $i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p} \quad l = \overline{1, q}$ ;

$C_{kjl}^{**}$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения  $k = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, n} \quad l = \overline{1, q}$ ;

$x_{ijl}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения;

$y_{ikl}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт;

$z_{kjl}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения.

Математическая модель задачи с учетом выше приведенных обозначений может быть представлена в виде задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} y = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{ijl} x_{ijl} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q c_{ikl}^* y_{ikl} + \\ & + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{kjl}^{**} z_{kjl} \rightarrow \min_{x_{ijl}, y_{ikl}, z_{kjl} \in \Omega}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\Omega: \sum_{j=1}^n x_{ijl} + \sum_{k=1}^p y_{ikl} \leq a_{il}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.20)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijl} + \sum_{k=1}^p z_{kjl} \geq b_{jl}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.21)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} \leq c_{kl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.22)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} = \sum_{j=1}^n z_{kjl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.23)$$

$$x_{ijl} \geq 0; \quad y_{ikl} \geq 0; \quad z_{kjl} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.24)$$

1.2.8. *Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза нескольких видов по запросам потребителей*

Содержательная постановка задачи.

Существует модификация транспортной задачи двухэтапной перевозки грузов, в которой количество груза в пунктах отправления не фиксировано, а зависит от запросов потребителей.

Построим математическую модель задачи.

Обозначим:

$a_{il}$  – количество производимого  $l$ -го вида груза в  $i$ -м пункте отправления;

$t_{il}$  – затраты на производство  $l$ -го вида груза в  $i$ -м пункте отправления;

$b_{jl}$  – потребность в  $l$ -м виде груза в  $j$ -м пункте назначения;

$c_{kl}$  – вместимость  $k$ -го перевалочного пункта по отношению к  $l$ -му виду груза ;

$C_{ijl}$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения  $i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad l = \overline{1, q};$

$C_{ikl}^*$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт  $i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p} \quad l = \overline{1, q};$

$C_{kjl}^{**}$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения  $k = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, n} \quad l = \overline{1, q};$

$S_{il}$  – количество производимого  $l$ -го вида груза в  $i$ -м пункте отправления;

$x_{ijl}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения;

$y_{ikl}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт;

$z_{kjl}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения.

Математическая модель задачи с учетом выше приведенных обозначений может быть представлена в виде задачи линейного программирования:

$$y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q c_{ikl}^* y_{ikl} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q c_{kjl}^{**} z_{kjl} + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^q t_{il} s_{il} \rightarrow \min_{x_{ijl}, y_{ikl}, z_{kjl}, s_{il} \in \Omega}, \quad (1.25)$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^n x_{ijl} + \sum_{k=1}^p y_{ikl} \leq s_{il}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.26)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijl} + \sum_{k=1}^p z_{kjl} \geq b_{jl}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.27)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} \leq c_{kl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.28)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ikl} = \sum_{j=1}^n z_{kjl}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.28)$$

$$x_{ijl} \geq 0; \quad y_{ikl} \geq 0; \quad z_{kjl} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q} \quad (1.30)$$

### 1.2.9. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза нескольких видов с учетом времени

Опишем содержательную постановку транспортной задачи о двухэтапной перевозке груза нескольких видов с учетом времени.

Груз, включающий  $q$  видов продукции, требуется доставить из  $m$  пунктов отправления в  $n$  пунктов назначения в определенные моменты времени  $t$ . При доставке в пункты назначения грузы сначала доставляются на  $p$  перевалочных (промежуточных) пунктов, где возможно требуются процессы разгрузки-погрузки и хранение грузов. Заданы стоимости перевозок для каждого вида груза из каждого пункта отправления в каждый перевалочный пункт в определенные моменты времени  $t$ , стоимости перевозки из каждого перевалочного пункта в каждый пункт назначения в определенные моменты времени  $t$ , затраты на хранение, разгрузку и погрузку в перевалочном пункте, а также вместимость каждого перевалочного пункта в определенные моменты времени  $t$ . Необходимо определить оптимальный план транспортировки грузов по времени с учетом ограничений на объемы продукции каждого вида в пунктах отправления, объемов потребления в пунктах назначения и мощности (емкости складов) перевалочных пунктов.

Математическая модель задачи.

Введем пояснения переменным и обозначениям:

$a_{ilt}$  – запасы  $l$ -го вида груза в  $i$ -м пункте отправления в  $t$ -й момент времени,  $i = \overline{1, m}$ ,  $l = \overline{1, q}$ ,  $t = \overline{1, T}$ ;

$b_{jlt}$  – потребность в  $l$ -м виде груза в  $j$ -м пункте назначения в  $t$ -й момент времени,  $j = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{1, q}$ ,  $t = \overline{1, T}$ ;

$d_{kt}$  – вместимость  $k$ -го перевалочного пункта в  $t$ -й момент времени;

$c_{iklt}$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт в  $t$ -й момент времени  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, p}$ ,  $l = \overline{1, q}$ ,  $t = \overline{1, T}$ ;

$C_{iklt}^*$  – стоимость хранения и разгрузочно-погрузочных работ единицы  $l$ -го вида груза, прибывшего из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт в  $t$ -й момент времени,

$C_{kjlt}^{**}$  – стоимость перевозки единицы  $l$ -го вида груза из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения в  $t$ -й момент времени  $k = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{1, q}$ ,  $t = \overline{1, T}$ ;

$X_{iklt}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $k$ -й перевалочный пункт в  $t$ -й момент времени;

$Y_{kjlt}$  – количество  $l$ -го вида груза, перевозимого, перевозимого из  $k$ -го перевалочного пункта в  $j$ -й пункт назначения в  $t$ -й момент времени.

Математическая модель задачи с учетом выше приведенных обозначений может быть представлена в виде задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}
 Z = & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \sum_{t=1}^T c_{iklt} x_{iklt} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \sum_{t=1}^T c_{iklt}^* x_{iklt} + \\
 & + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^q \sum_{t=1}^T c_{kjlt}^{**} y_{kjlt} \rightarrow \min, \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{k=1}^p x_{iklt} \leq a_{ilt}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, q}, \quad t = \overline{1, T} \quad (1.32)$$

$$\sum_{k=1}^p z_{kjlt} \geq b_{jlt}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, q}, \quad t = \overline{1, T} \quad (1.33)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^q x_{iklt} \leq d_{kt}, \quad k = \overline{1, p}, \quad t = \overline{1, T} \quad (1.34)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{iklt} = \sum_{j=1}^n y_{kjlt}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q}, \quad t = \overline{1, T} \quad (1.35)$$

$$x_{ijlt} \geq 0; \quad y_{kjlt} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, q}, \quad t = \overline{1, T} \quad (1.36)$$

Целевая функция (1.31) определяет суммарные затраты на перевозку грузов из пунктов отправления в перевалочные пункты, из перевалочных пунктов в пункты назначения и затраты на разгрузку-погрузку и хранение грузов в перевалочных пунктах в определенные моменты времени.

Ограничения (1.32) показывают возможности пунктов отправления груза различных видов в определенные моменты времени. Ограничения (1.33) определяет объемы спроса пунктов назначения. Эти ограничения определены для каждого пункта потребления груза, для каждого вида груза в определенные моменты времени. Ограничения (1.34) показывает мощности перевалочных пунктов в определенные моменты времени. Ограничения (1.35)

указывают, что в перевалочных пунктах грузы не потребляются, полностью вывозится груз, который ввезен в них. Ограничения (1.36) указывают на не отрицательность переменных.

### 1.2.10. Модель транспортной задачи о кратчайшем пути

Выбор кратчайшего маршрута движения между двумя пунктами при разветвлённой сети дорог связано с решением оптимизационной задачи.

Рассмотрим транспортную сеть, состоящую из пунктов  $A_1, \dots, A_n$  и дорог, соединяющих эти пункты между собой. Длины участков дорог между каждой парой соседних пунктов

$A_i A_j$  известен и равен  $l_{ij}$ . Если два соседних пункта  $A_i$  и  $A_j$  непосредственно не соединены участком дороги, то принимаем  $l_{ij} = \infty$ . Пример такой транспортной сети представлен на рис. 1.1.

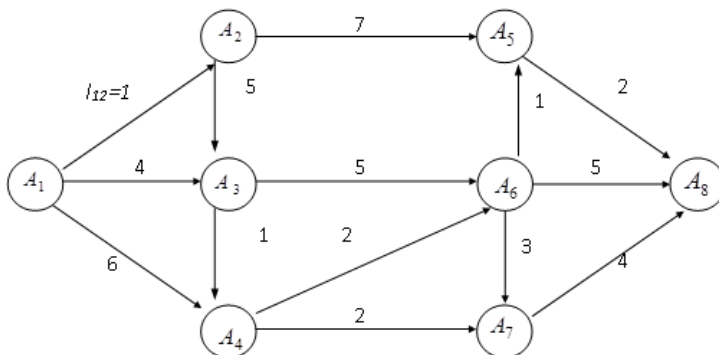


Рис. 1.1. Транспортная сеть

Из начального пункта  $A_i$  в конечный пункт  $A_n$  можно попасть по большому числу маршрутов, проходящих через разные промежуточные пункты. Требуется найти среди этих маршрутов путь наименьшей протяжённости. Построим формализованную модель задачи.

Введем обозначение:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из } i \text{ следует в } j \\ 0, & \text{если из } i \text{ не следует в } j \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min,$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^m (x_{ij} - x_{ji}) = 0, \quad i = 2 \div m - 1,$$

$$\sum_{j=1}^m (x_{1i} - x_{j1}) = 1,$$

$$\sum_{j=1}^m (x_{mj} - x_{jm}) = 1,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1; i, j = 1 \div m.$$

### 1.2.11. Транспортные задачи как потоки в сетях

В экономике, промышленности, снабжении и особенно на транспорте существует достаточно широкий класс задач, сводящихся к оптимальному перемещению различных потоков и формализуемых в терминах потоков в сетях. Большую известность получили такие задачи, как определение максимального потока в сети, поиск потока минимальной стоимости, сетевая транспортная задача и т. д. Значительную роль в становлении теории о потоках в сетях сыграли работы Л. Форда и Д. Фалкерсона. В зависимости от точки зрения авторов и используемых методов решения, задачи о потоках в сетях относят к задачам линейного программирования, комбинаторной оптимизации или к экстремальным задачам на графах. Специфика потоковых задач выделила их в отдельный класс. В следующих работах рас-

смотрены новые тенденции и описание состояния теории и практики решения потоковых задач.

Пусть транспортная сеть  $G(V, E)$  состоит из множества вершин  $V(|V| = n)$  и множества дуг  $E(|E| = m)$ , связывающих эти вершины. Сеть  $G(V, E)$  соответствует схеме железных или автомобильных дорог, карте морских путей, плану городских улиц и т. д. Естественно считать, что число вершин и дуг сети  $G(V, E)$  конечно. Каждой дуге  $(i, j) \in E$  поставлены в соответствие следующие неотрицательные числа:

-  $u_{ij}$  – пропускная способность, соответствующая максимальному количеству единиц транспортного потока, которое может пройти по дуге;

-  $c_{ij}$  – стоимость перемещения единицы потока по дуге.

Вводятся следующие обозначения:

$X = \{x_{ij}\}$  – вещественный вектор размерности  $m$ , где  $x_{ij}$  – величина потока по дуге  $(i, j) \in E$ ;

$B = \{b_i\}$  – вектор размерности  $n$  производства-потребления потока в вершине  $i \in V$ , если  $b_i > 0$  ( $b_i < 0$ ), то вершина  $i$  является источником (стоком) потока с производством  $b_i$  (потреблением  $-b_i$ ). Если  $b_i = 0$ , то вершина  $i$  является транзитной.

На основании вышеизложенного, сформулируем транспортные задачи как потоки в сетях:

1) Сетевая транспортная задача

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1.37)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1 \div n, \quad (1.38)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in E. \quad (1.39)$$

Если сеть  $G$  задается двудольным графом  $G(S_1, S_2, E)$ , в котором  $S_1 = \{i : b_i > 0\}$ ,  $S_2 = \{i : b_i < 0\}$  и транзитные вершины отсутствуют, то сетевая транспортная задача сводится к общей транспортной задаче.

2) Задача о потоке минимальной стоимости. В случае одной вершины источника  $s \in S_1$ , одной вершины стока  $t \in S_2$  и  $B = \{F, 0, \dots, 0, F\}$  задача (1.37)–(1.39) сводится к поиску потока величины  $F$  между  $s$  и  $t$  в сети  $G$  минимальной стоимости.

3) Задача о максимальном потоке. Подставив в место критерия (1.37) критерий  $F \rightarrow \max$ , получим задачу поиска максимального потока между  $s$  и  $t$  в сети  $G$ .

4) Динамические задачи. Дальнейшим развитием задач оптимизации независимых транспортных потоков являются задачи о динамических потоках, в которых учитывается время перемещения транспортных потоков по звеньям транспортной сети. На дугах сети задается еще один показатель – время  $t_{ij}, (i, j) \in E$ , прохождения единицы потока по дуге. Поток через сеть  $G(V, E)$  отправляется в дискретные моменты времени  $\tau = 0, 1, \dots, T$ .

В литературе излагаются постановки и методы решения задач о динамических потоках, таких как задачи о максимальном динамическом потоке, динамическом потоке минимальной стоимости, динамические транспортные задачи и т. д.

Важное место среди задач об оптимизации потоках занимают динамические транспортные задачи на сети  $G(V, E)$  специального вида, называемой двудольным графом. Множество вершин  $V$  этой сети можно разбить на непересекающиеся подмножества  $S_1$  и  $S_2$  пунктов производства и пунктов потребления соответственно. Дуги  $(i, j) \in E$  сети  $G$  связывают пункты производства с потребителями, т. е.  $v_i \in S_1, v_j \in S_2$ .

Заданы объемы производства  $b_i^+(t) (i = 1, \dots, m)$  пунктов производства  $v_i \in S_1$  и размеры спроса

$b_j(t) (j=1,...,n; t=0,...,T)$  в пунктах потребления  $v_j \in S_2$ . Этот спрос должен быть удовлетворен с наименьшими затратами в течение  $N$  периодов времени. Известны также транспортные издержки  $c_{ij}(t)$ , связанные с перевозкой единицы однородного продукта из  $V_i$ -го пункта в  $V_j$ -й пункт, и издержки  $h_i(t), d_j(t)$  хранения единицы продукты в  $V_i$ -м пункте производства и  $V_j$ -м пункте потребления в интервале  $t$ . Пусть  $x_{ij}(t)$  – поток товара по дуге  $(i,j) \in E$  в интервале  $t$ ;  $y_j(t), z_i(t)$  – запасы товара на этом интервале в  $V_j$ -м пункте потребления и  $V_i$ -м пункте производства соответственно. Тогда динамическая транспортная задача может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^N \sum_{i=1}^m h_i(t) z_i(t) + \sum_{t=0}^N \sum_{j=1}^n d_j(t) y_j(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \rightarrow \min, \\ & y_j(t+1) = y_j(t) + \sum_{i=1}^m x_{ij}(t) - b_j(t), \quad j=1,...,n, \quad t=0,...,N, \\ & z_i(t+1) = z_i(t) + b_i^+(t) - \sum_{j=1}^n x_{ij}(t), \quad i=1,...,m, \quad t=0,...,N, \\ & y_j(t) \geq 0; \quad z_i(t) \geq 0; \quad x_{ij}(t) \geq 0; \quad i=1,...,m, \quad j=1,...,n, \quad t=0,...,N. \end{aligned}$$

Кроме того, считаем, что объем производства удовлетворяет спросу

$$\sum_{t=0}^N \sum_{i=1}^m b_i^+(t) \geq \sum_{t=0}^N \sum_{j=1}^n b_j^-(t).$$

### 1.2.12. Транспортная задача о развозке груза

Данная задача, в отличие от всех других, рассматриваемых в данном разделе, относится к задачам организации перевозок

по схеме «один ко многим». Она условно включена в группу транспортных задач, имеющих схему «многие ко многим».

Содержательная постановка задачи.

Пусть некоторая центральная база снабжает продукцией (ее можно считать однородной)  $m$  складов. Развозка продукции на склады осуществляется одним грузовиком, причем каждый склад получает свой заказ полностью в один прием – грузоподъемность грузовика для этого достаточна. Грузовик может одновременно взять груз, соответствующий не более чем  $k$  заказам. Грузовик может объезжать склады по определенным  $r$  маршрутам. Один и тот же склад может находиться на разных маршрутах.

Пусть для каждого склада известна функция затрат в зависимости, например, от размера заказа. Требуется составить график развозок, обеспечивающий всех клиентов в полном объеме и минимизирующий суммарные затраты на перевозки. Время доставки никак не учитывается. Предполагается, что все операции по доставке заведомо могут быть осуществлены в течение некоторого периода времени, устраивающего всех потребителей. Под способом развозки будем понимать любую допустимую комбинацию выполнения заказов. Он представляет собой  $m$  – мерный столбец,  $i$  –й компонент которого равен единице, если  $i$  –й заказ в этом способе удовлетворяется, и нулю – в противном случае. Для любой реальной задачи при небольших значениях  $m, k$  и  $r$  можно выписать все такие способы развозки. Число  $n$  этих способов будет зависеть не только от перечисленных параметров, но и от числа складов на каждом маршруте, объема заказов и т. д. Каждому  $j$  –му способу развозки соответствуют затраты  $C_j$ .

Пусть при данных конкретных условиях задачи составлена матрица  $A = [a_{ij}]$  всевозможных способов развозки, состоящая из нулей и единиц. Столбцы этой матрицы представляют собой описанные выше способы развозки, т. е.  $a_{ij} = 1$ , если в  $j$  –м способе  $i$  –й заказ удовлетворяется, и  $a_{ij} = 0$  в противном случае.

Теперь задача состоит в выборе наиболее экономичной комбинации этих способов.

Математическая постановка задачи

Введем переменные

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый способ перевозки реализуется,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.40)$$

Тогда математическая модель задачи принимает вид

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min_{x_j \in \Omega}, \quad (1.41)$$

при следующих ограничениях:

$$\Omega: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.42)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.43)$$

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad i = 1, n. \quad (1.44)$$

Условие (1.42) означает, что все заказы должны быть удовлетворены только один раз. Выражения (1.43) и (1.44) определяют двоичный характер переменных  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . и элементов матрицы  $A$ .

### 1.2.13. Задача коммивояжера

Имеется  $n$  городов и задана матрица  $C_{ij}$  расстояний между этими городами. Выезжая из исходного города (будем приписывать ему 1) коммивояжер должен побывать во всех остальных городах ровно по одному разу и вернуться в исходный город. Определить в каком порядке следует объезжать города, чтобы пройденное суммарное расстояние было бы минимальным. Построить математическую модель описанной задачи.

Введем переменную

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in M \\ 0, & (i, j) \notin M \end{cases}$$

где  $M$  – оптимальный путь коммивояжера.

Целевая функция имеет вид

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min, \quad (1.45)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.46)$$

$$\sum_{j=1}^m X_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.47)$$

$$u_j - u_i + n * X_{ij} = n - 1, \quad (1.48)$$

где (1.46) – ограничение при выезде коммивояжера из одного города только один раз;

(1.47) – ограничение при въезде коммивояжера в один город только один раз;

(1.48) – условие от заикливания.

#### 1.2.14. Модели задач транспортной логистической системы

Рассмотрим механизмы функционирования транспортной системы, состоящей из  $n$  видов транспорта и  $m$  пунктов назначения груза. Каждая транспортная подсистема имеет пропускную способность  $Q_{it}$  (где  $i = \overline{1 \div n}$ ), а каждый пункт назначения – потребности в грузе  $P_{jt}$  (где  $j = \overline{1 \div m}$ ) по периодам функционирования  $t$  (где  $t = \overline{1 \div T}$ ).

Управление деятельностью системы осуществляется из координационного центра. Задача координационного центра заключается в определении объемов перевозок  $X_{ijt}$ , выполненных каждым видом транспорта так, чтобы общие затраты в системе были минимальными. Они определены в виде матрицы затрат  $C_{ij}$  для всех  $(i=1 \div n)$  и  $(j=1 \div m)$ .

Формализованное описание задачи центра имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T c_{ij} \cdot x_{ijt} \rightarrow \min \quad (1.49)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T x_{ijt} \leq Q_i, \quad i = 1 \div n, \quad (1.50)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T x_{ijt} \geq P_j, \quad j = 1 \div m, \quad (1.51)$$

$$x_{ijt} \geq 0, \quad i = 1 \div n, \quad j = 1 \div m, \quad t = 1 \div T. \quad (1.52)$$

Целевая функция  $i$ -той транспортной подсистемы, осуществляющей перевозки, определяется формулой

$$f_i = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T (\lambda_{jt} - c_{ij}) \cdot x_{ijt} \rightarrow \max, \quad (1.53)$$

где  $\lambda_{jt}$  – тариф за перевозку единицы груза для  $j$ -го потребителя грузов в периоде функционирования  $t$ .

Рассмотрим функционирование системы. На этапе формирования данных каждая транспортная подсистема, имеющая целевую функцию (1.53), сообщает в координационный центр  $S_{ij}$  оценку своих затрат  $C_{ij}$  от перевозки груза.

Зная эти величины, координационный центр решает задачу определения грузоперевозок  $x_{ijt}(s_{ij})$  с целевой функцией вида

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T s_{ij} x_{ijt} \rightarrow \min \quad (1.54)$$

при ограничениях (1.50–1.52).

### 1.2.15. Модели задач транспортной логистической системы с промежуточными пунктами

В транспортной логистике часто присутствуют промежуточные пункты между производителями и потребителями в виде распределительных складских центров (РСЦ). Рассмотрим механизм функционирования транспортной системы с промежуточными пунктами. Пусть из  $i$ -тых пунктов производства материальные потоки перевозятся через  $k$ -тые промежуточные склады (где  $k = 1 \div L$ ,  $L$  – количество распределительных складских центров), в  $j$ -тые пункты потребления. Примем следующие обозначения:  $x_{ikt}$  – грузопотоки от  $i$ -го производителя до  $k$ -го РСЦ,  $x_{kjt}$  – грузопотоки от  $k$ -го РСЦ до  $j$ -го потребителя в периоде времени  $t$ , где  $t = 1 \div T$ ,  $r_{ik}$ ,  $\theta_{kj}$  – стоимости перевозки единицы продукции соответственно из пункта производства  $i$  до  $k$ -го РСЦ и из  $k$ -го РСЦ до  $j$ -го потребителя.

Задача заключается в нахождении таких  $x_{ikt}$ ,  $x_{kjt}$ , которые минимизируют суммарные затраты:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^L \sum_{t=1}^T r_{ik} \cdot x_{ikt} + \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T \theta_{kj} \cdot x_{kjt} \rightarrow \min \quad (1.55)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{k=1}^L \sum_{t=1}^T x_{ikt} \leq Q_i, \quad i = 1 \div n, \quad (1.56)$$

$$\sum_{k=1}^L \sum_{t=1}^T x_{kjt} \geq P_j, \quad j = 1 \div m, \quad (1.57)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ikt} \geq \sum_{j=1}^m x_{kjt}, \quad k = 1 \div L, \quad t = 1 \div T, \quad (1.58)$$

$$x_{ikt} \geq 0, \quad x_{kjt} \geq 0, \quad i = 1 \div n, \quad k = 1 \div L, \quad j = 1 \div m, \quad t = 1 \div T. \quad (1.59)$$

Предположим, что  $\sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{j=1}^m P_j$  и пропускные способности транспортных организаций достаточны для перевозки соответствующего количества грузов.

В качестве целевой функции транспортной логистической системы возьмем суммарные затраты от перевозки грузов по всей сети по формуле (1.55) при условиях (1.56–1.59). Здесь необходимо отметить, что каждый отправитель и получатель грузов имеет свои интересы в виде целевых функций. Например, отправитель стремится реализовать свою продукцию дороже, и наоборот получатель стремится получить ее с минимальными издержками.

#### 1.2.16. Модели задач транспортной логистической системы в сетевой постановке

Рассмотрим модель транспортной логистической сети  $G(A, N)$ , представляющей собой совокупность путей сообщения всех видов транспорта и транспортных узлов, где  $A$  – множество узлов ТЛС, которые пронумерованы индексами  $i = 1 \div n$ ,  $i \in A$ ,  $N$  – множество дуг (путей сообщения), где  $(i, j) \in N$ . Необходимо отметить, что 1-й узел является источником,  $n$ -й

узел – стоком, а все остальные – промежуточными узлами, где товар просто переходит от одного вида транспорта на другой без переработки. Наличие нескольких видов транспорта приводит к тому, что множество  $N$  распадается на совокупность отдельных подмножеств  $N_\rho$ , в пределах которых используется определенный  $\rho$ -й вид транспорта.  $N_\rho \subset N$ ,  $\rho = 1 \div m$ , где  $m$  – количество видов транспорта. Для описания задачи перевозки сквозного материального потока  $m$  видами транспорта введем следующие обозначения:  $x_{ijt}$  – количество груза, которое должно быть перевезено от  $i$ -го узла в  $j$ -й узел по дуге  $(i, j) \in N$  в период функционирования  $t$ , где  $t = 1 \div T$ ,  $T$  – количество периодов;  $u_{ij}$  – пропускная способность пути сообщения  $(i, j) \in N$ ;  $C_{ij}$  – затраты на перевозку единицы груза по дуге  $(i, j) \in N$ ;  $x = \{x_{ijt}, (i, j) \in N\}$  – план перевозок;  $a_{it}$  – количество груза, которое должно быть вывезено или завезено из (в)  $i$ -й узел в периоде функционирования  $t$ , которое определяется как

$$a_{it} = \begin{cases} a_{it} > 0, & \text{если } i = 1 \text{ пункт отправления} \\ a_{it} < 0, & \text{если } i = n \text{ пункт потребления} \\ a_{it} = 0, & \text{если } i \neq 1, n \text{ промежуточные пункты} \end{cases}$$

Для данной системы имеют место следующие ограничения:

$$\sum_{(i,j) \in N} x_{ijt} - \sum_{(i,j) \in N} x_{jit} = a_{it}, \quad i \in A, \quad t = 1 \div T. \quad (1.60)$$

Пропускная способность каждого пути сообщения ограничена

$$0 \leq x_{ijt} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in N, \quad t = 1 \div T. \quad (1.61)$$

Целевая функция ТЛС в целом определяется как суммарные затраты от перевозки грузов по всей транспортной сети

$$F = \sum_{(i,j) \in N} \sum_{t=1}^T c_{ij} \cdot x_{ijt} \rightarrow \min. \quad (1.62)$$

Если ввести в качестве переменной величину потока  $V$ , то целевую функцию задачи можно представить в следующем виде:

$$F = BV - \sum_{(i,j) \in N} \sum_{t=1}^T c_{ij} \cdot x_{ijt} \rightarrow \max, \quad (1.63)$$

здесь  $B$  – параметр потока, который определяется как

$$B = \alpha_n - \alpha_1, \quad (1.64)$$

где  $\alpha_1, \alpha_n$  – стоимости продажи и приобретения единицы груза соответственно в пунктах производства и потребления.

Задача  $\rho$ -го вида транспорта представляется целевой функцией

$$f_\rho = \sum_{(i,j) \in N_\rho} \sum_{t=1}^T (\lambda_{ij} - c_{ij}) \cdot x_{ijt} \rightarrow \max \quad (1.65)$$

при ограничениях (1.60, 1.61), где  $N_\rho$  – множество путей сообщения  $\rho$ -го вида транспорта,  $\lambda_{ij}$  – доход от перевозки единицы груза по дуге  $(i, j) \in N_\rho$ ,  $\rho = 1 \div m$ , который определяется как  $\lambda_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  – стоимости продажи и приобретения единицы груза соответственно в пунктах отправления и получения.

Характерной особенностью рассмотренной системы является взаимодействие в перевозочном процессе различных видов

транспорта. Эта особенность усложняет функционирование организационного механизма транспортных процессов в логистической системе, т. к. в процессе транспортировки возникают задачи согласования интересов различных видов транспорта между собой, между поставщиками и потребителями грузов.

*1.2.17. Модели логистической системы в виде последовательной материалопроводящей цепи*

Рассмотрим модель задачи определения объемов материальных потоков на основе спроса потребителей на конечную продукцию. Для этого дадим описание логистической цепи, представленной на рис. 1.2 и состоящей из  $n$  элементов-звеньев, упорядоченных по направлению движения материального потока, т. е. первое звено – это поставщик исходного сырья, а  $n$ -тое звено – потребитель конечной продукции. Обозначим через  $X_{it}$  объем материального потока, проходящего через  $i$ -тое звено (где  $i = 1 \div n$ ) в периоде функционирования  $t$  (где  $t = 1 \div T$ ,  $T$  – количество периодов). Каждое звено в качестве входного ресурса использует продукцию предыдущего звена. Пусть  $r_i$  будет выражать коэффициент затрат  $i$ -того звена, т. е. количество единиц продукции предыдущего звена, используемое в производстве единицы продукции  $i$ -тым звеном. Каждое звено имеет расходы  $C_i$  на определенные операции над единицей материального потока (обработка, перевозка, хранение, расфасовка и т. д.). Пусть конечный потребитель задает общий объем спроса  $Q$  на готовую продукцию, который разбит по периодам функционирования  $t$ , т. е.

$$Q = \sum_{t=1}^T Q_t \cdot$$

Предположим, что количество ресурса неограниченно и пропускные способности звеньев достаточны для переработки

необходимого объема материального потока, т. е. ЛС всегда должна находить надежного поставщика, имеющего необходимое количество исходного ресурса. Данное условие является принципом логистики: удовлетворение спроса потребителей всеми возможными способами.

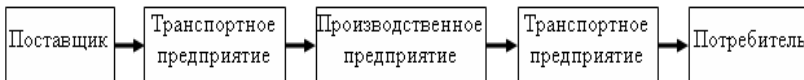


Рис. 1.2. Схема логистической системы в виде последовательной материалопроводящей цепи

Система в целом ставит перед собой цель минимизации суммарных издержек по всем звеньям. Данной задаче соответствует следующая модель:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T c_i \cdot x_{it} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_{it} - r_{i+1} \cdot x_{i+1,t} &\geq 0, \quad i = 1 \div (n-1), \quad t = 1 \div T, \\ x_{nt} &\geq Q_t, \\ x_{it} &\geq 0. \end{aligned}$$

При данной постановке каждое звено ЛС будет стремиться максимизировать свои интересы, т.е. их целевыми функциями будут

$$f_i = \sum_{t=1}^T (u_{it} - c_i) \cdot x_{it} \rightarrow \max,$$

где  $u_{it}$  – цена единицы продукции  $i$ -того звена в периоде функционирования  $t$ .

В рассмотренной модели логистической системы в виде последовательной материалопроводящей цепи все звенья будут

сообщать в координационный центр логистической системы завышенные оценки своих коэффициентов затрат и издержек, что приведет к завышению цены конечной продукции. Поэтому перейдем к рассмотрению другой системы, состоящей из нескольких подсистем.

### 1.2.18. Модели логистической системы с множеством функциональных подсистем

Так как функционирование системы, представленной в виде последовательной логистической цепи, не эффективно, рассмотрим более сложную систему, где одно функциональное звено может состоять из нескольких подсистем, например, несколько поставщиков, несколько перевозчиков и т. д. [18]. Такая система представлена на рис.1.3.

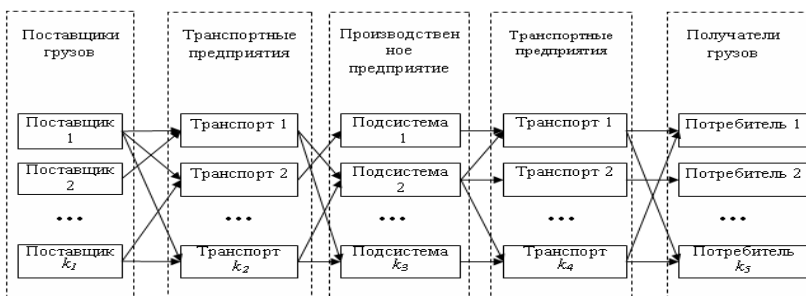


Рис. 1.3. Схема логистической системы с множеством функциональных подсистем

Сложная логистическая система состоит из  $n$  подсистем, упорядоченных по направлению движения материального потока, т. е. первая подсистема – это поставщики исходного сырья, а  $n$ -тая подсистема – потребители конечной продукции. Каждая подсистема состоит из нескольких однофункциональных элементов-звеньев. Обозначим через  $x_{ijt}$  объем материального потока, проходящего через  $j$ -тое звено  $i$ -той подсистемы (где

$i = 1 \div n$ ,  $n$  – количество подсистем,  $j = 1 \div k_i$   $k_i$  – количество элементов-звеньев в  $i$ -той подсистеме) в период функционирования  $t$  (где  $t = 1 \div T$ ,  $T$  – количество периодов).

Каждое звено в качестве входного ресурса использует продукцию звеньев предыдущей подсистемы. Пусть  $r_{ij}$  будет выражать коэффициент расхода ресурса  $j$ -того звена  $i$ -той подсистемы, т. е. количество единиц продукции предыдущей подсистемы, используемое в производстве единицы продукции  $j$ -того звена  $i$ -той подсистемы. Каждое звено имеет расходы  $c_{ij}$  на определенные операции над единицей материального потока (обработка, перевозка, хранение, расфасовка и т. д.).

Примем, что задается объем спроса  $Q$  на готовую продукцию у потребителей, который разбит по периодам функционирования  $t$ , т. е.

$$Q = \sum_{t=1}^T Q_t \cdot \quad (1.66)$$

Предположим, что количество ресурса для удовлетворения спроса на готовую продукцию неограниченно, но объем перерабатываемого материального потока в каждом звене ЛС ограничен их пропускными способностями. Система в целом ставит перед собой цель минимизации суммарных издержек по всем звеньям. Данной задаче соответствует следующая модель:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=1}^T c_{ij} \cdot x_{ijt} \rightarrow \min \quad (1.67)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{ijt} - \sum_{j=1}^{k_{i+1}} r_{i+1,j} \cdot x_{i+1,jt} \geq 0, \quad i = 1 \div (n-1), \quad t = 1 \div T, \quad (1.68)$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} x_{njt} \geq Q_t, \quad t = 1 \div T, \quad (1.69)$$

$$0 \leq x_{ijt} \leq v_{ij}. \quad (1.70)$$

При данной постановке задачи каждая подсистема ЛС будет стремиться максимизировать свои интересы, т. е. их целевыми функциями будут

$$f_i = \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=1}^T (u_{it} - c_{ij}) \cdot x_{ijt} \rightarrow \max, \quad i = 1 \div n, \quad (1.71)$$

где  $u_{it}$  – цена единицы сырья, полуфабриката, продукции  $i$ -той подсистемы (где  $i = 1 \div n$ ) в период функционирования  $t$  ( $t = 1 \div T$ ), необходимо отметить, что  $u_{nt} = \lambda_t$ .

На этапе формирования данных каждое звено сообщает в координационный центр оценку  $S_{ij}$  себестоимости переработки единицы материального потока  $C_{ij}$ . Координационный центр, зная величины  $S_{ij}$ , решает задачу определения объемов переработки грузов  $x_{ijt}(s_{ij})$  с целевой функцией вида

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=1}^T s_{ij} \cdot x_{ijt} \rightarrow \min \quad (1.72)$$

при ограничениях (1.69–1.70) и

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{ijt} - \sum_{j=1}^{k_{i+1}} r_{i+1,j} \cdot x_{i+1,jt} \geq 0, \quad i = 1 \div (n-1),$$

$$t = 1 \div T. \quad (1.73)$$

Логистическая система не всегда ставит цель минимизации издержек переработки материального потока, иногда они даже не имеют смысла. Для своевременного обеспечения потребителя необходимыми товарами систему штрафуют за отклонения в выполнении программ доставок и производства. Рассмотрим модель задачи, где система преследует цель минимизации потерь от несвоевременной поставки материальных потоков в последующие звенья. При этом задача имеет следующий вид:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \Pi_{it} \rightarrow \min, \quad (1.74)$$

$$\text{где} \quad \Pi_{it} = \gamma_{it} \cdot \left( \sum_{j=1}^{k_{i+1}} r_{i+1,j} \cdot x_{i+1,jt} - \sum_{j=1}^{k_i} x_{ijt} \right), i = 1 \div n, t = 1 \div T$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{k_n} \sum_{t=1}^T x_{njt} \geq Q, \quad (1.75)$$

$$0 \leq x_{ijt} \leq v_{ij}. \quad (1.76)$$

При данной постановке задачи каждая подсистема ЛС будет стремиться максимизировать свои интересы, т. е. их целевыми функциями будут

$$f_i = \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=1}^T (\gamma_{it} + c_{ij}) \cdot x_{ijt} \rightarrow \min, \quad i = 1 \div n. \quad (1.77)$$

где  $\gamma_{it}$  – штраф за несвоевременно поставленную единицу сырья, полуфабриката, продукции  $i$ -той подсистемы (где  $i = 1 \div n$ ) в периоде функционирования  $t$  (где  $t = 1 \div T$ ).

Для сложной логистической системы с несколькими однокритериальными звеньями в одной подсистеме наиболее эффективным принципом управления является система, в которой применяются штрафы (задача 1.74–1.77). Целевая функция

и ограничения данной задачи способствуют усилению конкурентной борьбы между звеньями одной подсистемы и стимулируют снижение издержек. Также данная задача полностью удовлетворяет принципам логистического подхода к управлению материальными потоками – своевременное выполнение заказов на доставку с минимальными издержками.

### 1.3. Экономико-математические модели распределительной логистики

Распределительные задачи логистики связаны с распределением ресурсов по работам, которые необходимо выполнить. Задачи этого класса возникают тогда, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой работы наиболее эффективным образом. Поэтому целью решения задачи этого типа является отыскание такого распределения ресурсов по работам, при котором либо минимизируются общие затраты, связанные с выполнением работ, либо максимизируется получаемый в результате общий доход. Большинство распределительных задач можно представить в виде матриц, приведенных в табл. 1.7.

Таблица 1.7  
Распределительная задача

| Ресурсы                  | Работы, которые нужно выполнить |          |     |          |     |          | Объем имеющихся ресурсов |
|--------------------------|---------------------------------|----------|-----|----------|-----|----------|--------------------------|
|                          | $J_1$                           | $J_2$    | ... | $J_j$    | ... | $J_n$    |                          |
| $R_1$                    | $C_{11}$                        | $C_{12}$ | ... | $C_{1j}$ | ... | $C_{1n}$ | $b_1$                    |
| $R_2$                    | $C_{21}$                        | $C_{22}$ | ... | $C_{2j}$ | ... | $C_{2n}$ | $b_2$                    |
| ...                      | ...                             | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...                      |
| $R_i$                    | $C_{i1}$                        | $C_{i2}$ | ... | $C_{ij}$ | ... | $C_{in}$ | $b_i$                    |
| ...                      | ...                             | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...                      |
| $R_m$                    | $C_{m1}$                        | $C_{m2}$ | ... | $C_{mj}$ | ... | $C_{mn}$ | $b_m$                    |
| Объем требуемых ресурсов | $a_1$                           | $a_2$    | ... | $a_j$    | ... | $a_n$    |                          |

Элементы  $C_{ij}$ , стоящие в клетках матрицы, соответствуют затратам или доходу, отвечающим выделению одной единицы ресурса  $R_i$  на работу  $J_j$ . Величины  $c_{ij}$  могут быть независимыми или зависимыми. Так, например, затраты, обусловленные назначением одной автомашины на некоторый маршрут доставки грузов, не зависят от того, какие машины назначены на обслуживание других маршрутов. В тоже время при распределении средств между подразделениями фирмы доход от затрат определенного количества денег одним ее подразделением обычно зависит от того, какие средства будут затрачены другими подразделениями. В теории распределения рассматриваются преимущественно задачи с независимыми затратами и доходами. Это объясняется не тем, что такие задачи более важны, а лишь тем, что для них значительно легче строить модели и получать решения.

Если затраты (или доход), определяемые объемом  $X_{ij}$  ресурса  $i$ , выделенного на выполнение работы  $j$ , равны  $X_{ij}C_{ij}$ , то имеем линейную распределительную задачу. Распределительные задачи с независимыми линейными функциями затрат (или дохода) стали объектом наиболее интенсивных исследований, в виду того что для их решения были развиты эффективные итеративные методы линейного программирования. Однако имеются также методы решения некоторых нелинейных распределительных задач, в т. ч. методы, основанные на линейной аппроксимации.

Распределение ресурсов для одного периода времени может влиять на распределение ресурсов для последующих периодов, а может не оказывать на них никакого влияния. Если каждое из последовательности распределений не зависит от всех остальных, то такая задача называется статической, в противном случае имеем динамическую распределительную задачу. Статические задачи исследованы в большей степени, чем динамические, но для решения некоторых типов динамических задач успешно применяются методы линейного динамического и ди-

намического программирования. Для решения некоторых динамических задач применяются методы стохастического программирования. В таких задачах принятие решений основано на вероятностных оценках будущих значений параметров, имеющих фиксированное распределение вероятностей.

Основные методы решения распределительных задач, в частности линейное программирование, построены на допущении, что объемы имеющихся в наличии ресурсов ( $b_i$ ), требуемые объемы ( $a_j$ ) и затраты ( $c_{ij}$ ) точно известны. Однако на самом деле в оценках этих величин возможны ошибки. Поэтому иногда требуется выяснить, насколько чувствительно решение распределительной задачи к возможным ошибкам указанных величин, выступающих в виде коэффициентов. Такой анализ чувствительности выполняется с помощью метода параметрического линейного программирования, однако в настоящее время этот метод можно использовать лишь в очень ограниченном числе случаев.

Если общий объем наличных ресурсов  $\sum_{i=1}^m b_i$  равен общей потребности в них  $\sum_{j=1}^n a_j$ , то имеет место сбалансированная (закрытая) распределительная задача. Если же  $\sum_{j=1}^n a_j \neq \sum_{i=1}^m b_i$ , то задача называется несбалансированной (открытой) и требуется не только распределить ресурсы по работам, но решить также, какие работы вообще не выполнять (если  $\sum_{j=1}^n a_j > \sum_{i=1}^m b_i$ ), либо какие ресурсы не использовать (если  $\sum_{j=1}^n a_j < \sum_{i=1}^m b_i$ ).

Например, при падении спроса на некоторый товар может возникнуть необходимость решить, какие машины, производственные участки или даже целые предприятия следует остано-

вить. При избыточном спросе может потребоваться определить, какие заказы не выполнять или какого рода новое оборудование приобрести.

Классическая транспортная задача, рассмотренная в 1.2.1, может быть интерпретирована и как распределительная задача.

### 1.3.1. Задача о назначениях

Рассмотрим ситуацию, когда требуется распределить  $m$  работ (или исполнителей) по  $n$  станкам. Работа  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), выполняемая на станке  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), связана с затратами  $C_{ij}$ . Задача состоит в таком распределении работ по станкам (одна работа выполняется одним станком), которое соответствует минимуму суммарных затрат. Такая задача известна как задача о назначениях.

Эту задачу можно рассматривать как частный случай транспортной задачи. Здесь работы представляют “исходные пункты”, а станки – “пункты назначения”. Предложение в каждом исходном пункте равно 1, т. е.  $a_i = 1$  для всех  $i$ . Аналогично спрос в каждом пункте назначения равен 1, т. е.  $b_j = 1$  для всех  $j$ . Стоимость “перевозки” работы  $i$  к станку  $j$  равна  $C_{ij}$ . В табл. 1.8 даны исходные параметры задачи о назначениях [2].

Таблица 1.8

| Задача о назначениях |          |          |     |          |     |          |       |
|----------------------|----------|----------|-----|----------|-----|----------|-------|
| Виды работ           | станки   |          |     |          |     |          |       |
|                      | 1        | 2        | ... | $j$      | ... | $N$      |       |
| 1                    | $C_{11}$ | $C_{12}$ | ... | $C_{1j}$ | ... | $C_{1n}$ | 1     |
| 2                    | $C_{21}$ | $C_{22}$ | ... | $C_{2j}$ | ... | $C_{2n}$ | $b_2$ |
| ...                  | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...   |
| $i$                  | $C_{i1}$ | $C_{i2}$ | ... | $C_{ij}$ | ... | $C_{in}$ | 1     |
| ...                  | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...   |
| $m$                  | $C_{m1}$ | $C_{m2}$ | ... | $C_{mj}$ | ... | $C_{mn}$ | 1     |
|                      | 1        | 1        | ... | 1        | ... | 1        |       |

Прежде чем решать задачу методами, ассоциированными с транспортной моделью, необходимо “ликвидировать” дисбаланс, добавив фиктивные работы или станки в зависимости от начальных условий ( $m < n$  или  $m > n$ ). Поэтому без потери общности можно положить  $m = n$ .

Задачу о назначениях можно представить следующим образом.

Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{я работа выполняется на } j - \text{м станке} \\ 0, & \text{если } i - \text{я работа не выполняется на } j - \text{м станке} \end{cases}$$

Теперь задача будет формулироваться как

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{я работа выполняется на } j - \text{м станке} \\ 0, & \text{если } i - \text{я работа не выполняется на } j - \text{м станке} \end{cases}$$

### 1.3.2. Задача распределения ресурсов при непрерывном производстве

В условиях непрерывного производства необходимость решения задачи рационального распределения ресурсов возникает почти ежедневно. Классическим примером является задача размещения пунктов отгрузки готовой продукции потребителям, причем постановка задачи зависит от конкретных условий.

Рассмотрим задачу распределения ресурсов в угольной промышленности. Главными потребителями угля являются теплоэлектростанции, функционирование которых возможно при гарантированных поставках больших объемов угля с относительной однородностью состава. Проблема в данном случае состоит в том, что объем добычи угля в большинстве карьеров не настолько значителен, чтобы можно было говорить об экономической выгодности крупномасштабных перевозок. Значительно более важным является то, что уголь, получаемый в разных участках региона, различается по своему качеству, что существенно усложняет решение проблемы распределения и затрудняет эффективное управление процессами добычи угля в различных угольных карьерах. Чтобы добиться максимальной практической отдачи и стабильности добычи угля в условиях конкуренции с внешними поставщиками данного вида топлива, можно, например, объединить разрозненные ресурсы и организовать централизованное управление уже действующими технологическими циклами и таким образом избежать технического переоснащения угольных карьеров.

Следовательно, задача сводится к определению таких уровней добычи, которые обеспечивали бы максимизацию чистой прибыли фирмы с учетом стоимости угля, затратами на хранение и доставку угля потребителю. Кроме того, поставляемый уголь должен обладать надлежащим качеством.

Обозначим через  $d_{in}$  количество угля, отправляемого с  $i$ -го карьера в  $n$ -ый пункт хранения, и предположим, что в пределах рассматриваемого региона имеется  $N$  пунктов централизованного хранения угля, добываемого в различных карьерах, число которых равняется  $r$ . Введем следующую систему ограничений: количество угля, отправляемого с  $i$ -го карьера, не должно превышать суточной добычи на данном карьере, т. е.

$$\sum_{n=1}^N d_{in} \leq q_i, \quad i = \overline{1, p},$$

где  $q_i$  – суточная добыча на  $i$ -ом карьере.

Суммарное количество угля, поступающего со всех карьеров в пункты централизованного хранения, должно равняться суммарному объему ежедневных поставок потребителю (ежедневная потребность в угле предполагается известной), т. е.

$$\sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^N d_{in} \leq y,$$

где  $y$  – суммарный объем ежедневных поставок потребителю.

Если  $a_i$  – показатель, характеризующий относительное содержание золы в угле из  $i$ -го карьера, и если  $a$  – предельно допустимое содержание золы в угольной смеси, то необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^N a_i d_{in} \leq ay.$$

Аналогичные соотношения могут быть получены для относительного содержания в угле таких компонентов, как сера, влага, летучие вещества, шлаки после сгорания:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^N s_i d_{in} \leq sy \text{ (сера),}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^N w_i d_{in} \leq wy \text{ (влага),}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^N v_i d_{in} \leq vy \text{ (летучие вещества),}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^N f_i d_{in} \leq fy \text{ (шлаки после сгорания).}$$

Требование не отрицательности  $d_{in}$  выражается неравенством

$$d_{in} \geq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Целевая функция записывается в следующем виде:

$$Z = \sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^N (\lambda_i - \gamma_{in}) d_{in} \rightarrow \max,$$

где  $\lambda_i$  – цена (включая затраты на доставку) на уголь, доставляемый из  $i$ -го карьера в пункты хранения,

$\gamma_{in}$  – транспортные расходы, связанные с перевозкой тонны угля от  $i$ -го карьера до  $n$ -го пункта централизованного хранения.

### 1.3.3. Производственная распределительная задача

В общей линейной распределительной задаче фигурируют ресурсы и работы, измеряемые в различных единицах. Так, например, рассмотрим производственное предприятие, состоящее из  $n$ -параллельно работающих цехов, которые выпускают  $m$  видов продукции.

Каждый  $i$ -ый цех характеризуется производственной мощностью в виде финансовых ресурсов  $F_i$ , материальных ресурсов (сырье)  $M_i$ , трудовых ресурсов  $R_i$ , энергоресурсов  $E_i$ , ресурсов площади  $V_i$  и временных ресурсов  $T_i$ .

Чтобы выпустить единицу продукции, каждый  $i$ -ый цех характеризуется трудоемкостью изготовления единицы  $j$ -ой продукции  $i$ -ым цехом  $t_{ij}$ , денежными затратами  $f_{ij}$ , затратами материальных ресурсов  $\mu_{ij}$ , затратами на содержание кадрового персонала  $r_{ij}$ , затратами энергоресурсов  $e_{ij}$ , затратами на единицу площади  $v_{ij}$ .

Необходимо определить оптимальный план производства продукции по всем цехам и по всем видам продукции  $X_{ij}$ , который бы максимизировал суммарный доход предприятия.

Тогда данная производственная распределительная задача формулируется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (P_j - S_{ij}) X_{ij} \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m t_{ij} X_{ij} &\leq T_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^m f_{ij} X_{ij} &\leq F_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^m \mu_{ij} X_{ij} &\leq M_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^m r_{ij} X_{ij} &\leq R_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^m e_{ij} X_{ij} &\leq E_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^m v_{ij} X_{ij} &\leq V_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ X_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

#### 1.3.4. Задача о распределении водных ресурсов

В связи с промышленной и сельскохозяйственной необходимостью во многих регионах вода превратилась в остродефицитный ресурс. Задача рационального использования водных ресурсов представляет собой одну из важнейших проблем охраны окружающей среды. На сегодняшний день исследования, направленные на разработку принципов управления распределением водных ресурсов, с целью их экономического использования являются актуальными для всех стран мира.

В данной работе проводится исследование частной модели системы «поставщик-потребители» на примере распределения водных ресурсов [7, 8, 9]. Особенности ее являются: зависимость периодов функционирования (т. к. не существует процесса хранения, заявки подаются отдельно для каждого периода  $t$ ), решение задачи происходит поэтапно, решение нижнего этапа влияет на решение верхнего (т. е. получается итеративная про-

цедура определения плана), коэффициенты потерь определяются как функций от потребностей (заявок) (обратно пропорциональны заявкам). Дается сравнительный анализ различных принципов управления.

Рассмотрим систему водораспределения для случая одномерного ресурса (воды), состоящую из водохранилища и  $m$ -потребителей (агрофирмы, промышленные предприятия, населенные пункты и т. д.). Примем, что на основании договоров-контрактов, для данного водохранилища определены потребители и предварительные объемы воды  $R_{\rho t}$ , требуемые потреби-

телю  $\rho$  за весь планируемый период  $T$  ( $\rho = \overline{1, m}$ ). Обозначим  $B_T$  – объем воды в водохранилище за планируемый период  $T$ . При

этом, возможно  $\sum_{\rho=1}^m R_{\rho T} \geq B_T$ . Предположим, что в свою оче-

редь потребитель  $\rho$  сообщает водохранилищу  $q_{\rho t}$  – заявку на требуемый объем воды на каждый период времени  $t$ , т. к. отсутствует хранение воды ( $t = \overline{1, T}$ , за  $t$  можно принимать сутки,

недели, декады и т. д.,  $\sum_{t=1}^T q_{\rho t} = Q_{\rho T}$ ). Водохранилище распре-

деляет воду в объеме  $X_{\rho t}$ , на основе заявки  $\rho$ -го потребителя в каждый период  $t$  с учетом своей мощности (своего водоизмещения, наличия воды).

Естественно допустить, что для каждого потребителя  $\rho$  существует реально-потребляемый объем воды  $r_{\rho t}$  в периоде  $t$ . При  $r_{\rho t} > x_{\rho t}$  потребитель  $\rho$  в периоде  $t$  несет потери от дефицита воды (потери в урожайности для сельского хозяйства, потери в количестве и качестве продукции для промышленности и т. д.), а при  $q_{\rho t} < x_{\rho t}$  – затраты от хранения избытка воды (если отсутствует хранение, тогда потери от покупки излишней воды).

Будем рассматривать простейший случай кусочно-линейной зависимости потерь от величины дефицита

$$\Delta_{\rho t} = r_{\rho t} - x_{\rho t},$$

а именно

$$\Pi_{\rho t} = \begin{cases} \alpha_{\rho t} \Delta_{\rho t}, & \Delta_{\rho t} > 0 \\ \gamma_{\rho t} \Delta_{\rho t}, & \Delta_{\rho t} < 0 \end{cases},$$

где  $\alpha_{\rho t}, \gamma_{\rho t}$  – коэффициенты потерь.

Суммарные потери  $\Pi = \sum_{\rho=1}^m \sum_{t=1}^T \Pi_{\rho t}$  примем за критерий

эффективности системы.

Рассмотрим следующую систему взаимоотношений между водохранилищем и потребителями. Каждый потребитель покупает воду по основной цене  $c$ , а водохранилище в свою очередь штрафуются за срыв объемов и сроков распределения воды. Принимая кусочно-линейный вид функции штрафов, запишем целевую функцию водохранилища в виде

$$F = \sum_{\rho=1}^m \sum_{t=1}^T (cx_{\rho t} - f_{\rho t}),$$

$$f_{\rho t} = \begin{cases} \beta_{\rho t} (q_{\rho t} - x_{\rho t}), & q_{\rho t} \geq x_{\rho t} \\ \mu_{\rho t} (x_{\rho t} - q_{\rho t}), & q_{\rho t} < x_{\rho t} \end{cases},$$

где  $\beta_{\rho t}, \mu_{\rho t}$  – коэффициенты штрафов.

Целевая функция потребителя включает плату за воду и потери при отклонении реально-потребляемого объема от распределяемого на весь период  $T$ :

$$P_{\rho} = \sum_{t=1}^T (cx_{\rho t} + \Pi_{\rho t}) \quad (1.79)$$

Замечание. В (1.78) не учитываются составляющие целевой функции водохранилища, независимые от процесса распределения. В (1.79) не учитываются затраты потребителей на накладные расходы и на доставку воды, т. к. предполагается, что они

слабо зависят от динамики распределения. Предполагается, что интересы системы и поставщика совпадают.

Выпишем ограничения, определяющие допустимые объемы распределения воды:

$$\sum_{\rho=1}^m \sum_{t=1}^T x_{\rho t} \leq B_T,$$

$$x_{\rho t} \geq 0, \quad \rho = \overline{1, m}, \quad t = \overline{1, T}.$$

#### **1.4. Экономико-математические модели производственной логистики**

##### *1.4.1. Модель задачи планирования работы транспортных предприятий*

Современные транспортные предприятия представляют собой крупномасштабные системы, в которых осуществляется конкретизация и детализация планов перевозок по единой транспортной системе страны. Планирование их работы охватывает как производственную (эксплуатационную) деятельность, так и непроизводственную сферу (капитальное и жилищное строительство, шефские работы, строительство и обслуживание ведомственных культурно-просветительных учреждений, домов отдыха и т. д.). В свою очередь, планирование эксплуатационной деятельности охватывает как обще транспортную сферу, образованную пересечением интересов транспортного предприятия с интересами других транспортных предприятий, так и сферу собственной деятельности.

Рассмотрим задачу составления сменно-суточного плана работы транспортного предприятия в следующей постановке [30, 31].

В течение планового периода предприятие располагает машинами  $n$  разных типов с суммарным временем  $T_k$  часов работы машин  $k$ -го типа,  $k \in \overline{1, n}$ , и обслуживающими эти машины трудовыми ресурсами  $h$  типов с объемами  $H_v, v = \overline{1, h}$ ,

для грузовых работ с объемами  $G_j$  на  $m$  участках предприятия,  $j \in \overline{1, m}$ . Технология переработки грузов допускает  $\sigma$  вариантов сочетания машин на каждом из  $m$  участков предприятия; для каждого участка  $j$ , для каждого варианта сочетания используемых на нем машин известны производительность каждой машины  $k$ -го типа  $P_{kjs}$ ,  $j \in \overline{1, m}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ,  $s \in \overline{1, \sigma}$ , и потребность в трудовых ресурсах  $v$ -го типа  $r_{kjs}^v$  для обслуживания машины  $k$ -го типа в единицу времени. Заданы предельные продолжительности времени  $t_j$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , в течение которого должны быть выполнены запланированные объемы грузовых работ  $G_j$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , а также затраты  $c_{kjs}^v$  и  $c_{kjs}$  в единицу времени на использование трудовых и технических ресурсов соответственно.

Требуется распределить трудовые и технические ресурсы предприятия по участкам грузовых работ, с тем, чтобы обеспечить выполнение запланированных объемов работ с минимальными затратами.

Для математической формулировки рассмотренной задачи введем переменные  $X_{kjs}$  – количество часов работы  $k$ -го типа машины на  $j$ -м участке работы при  $s$ -м варианте сочетания машин,  $j \in \overline{1, m}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ,  $s \in \overline{1, \sigma}$  и  $x_{kjs}^v$  – количество часов работы  $v$ -го вида трудовых ресурсов на обслуживании  $k$ -й машины на  $j$ -м участке работы при  $s$ -м варианте сочетания машин,  $j \in \overline{1, m}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ,  $s \in \overline{1, \sigma}$ , и запишем систему ограничений, которые образуют математическую модель, отражающую основные балансовые соотношения по предприятию как объекту планирования в рассматриваемом плановом периоде:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{\sigma} P_{kjs} x_{kjs} \geq G_j, \quad j \in \overline{1, m}, \quad (1.81)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{\sigma} x_{kjs} \leq T_k, \quad k \in \overline{1, n}, \quad (1.82)$$

$$x_{kjs}^v \leq x_{kjs}, \quad j \in \overline{1, m}, \quad k \in \overline{1, n}, \quad s \in \overline{1, \sigma}, \quad v = \overline{1, h},$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{\sigma} r_{kjs}^v x_{kjs}^v \leq H_v, \quad v = \overline{1, h}, \quad (1.83)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{\sigma} x_{kjs} \leq t_j, \quad j \in \overline{1, m}. \quad (1.84)$$

Условия (1.81) обеспечивают требование выполнения планируемых объемов грузовых работ, условия (1.82) описывают ограничения по лимитам времени использования машин и трудовых ресурсов в плановом периоде, условия (1.83) – ограничения по лимитам имеющихся трудовых ресурсов, условия (1.84) – ограничения по лимитам продолжительности грузовых работ на каждом их участках работы предприятия.

В качестве целевой функции в рассматриваемой задаче выступают суммарные затраты на использование трудовых и технических ресурсов

$$\sum_{v=1}^h \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{\sigma} c_{kjs}^v x_{kjs}^v + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{\sigma} c_{kjs} x_{kjs} \rightarrow \min,$$

которые подлежат минимизации.

#### 1.4.2. Модель задачи планирования развития транспорта на перспективу

Имеется  $Q$  вариантов развития транспортной сети, необходимость в котором связана с освоением новых районов и совершенствованием транспортного обслуживания, и которое предполагает расширение и реконструкцию части действующих и строительство новых транспортных магистралей, складов, ввод новых транспортных средств и т. д. [33–34]. Известны: струк-

тура имеющейся транспортной сети; число всех видов грузов, которые должны перевозиться по сети; количество всех лимитированных ресурсов, выделяемых для развития сети; капитальные вложения, выделяемые для развития каждого участка сети; оценки затрат на перевозку каждого вида груза между пунктами сети при каждой из вариантов ее возможного развития, а также нормативные показатели эффективности капитальных вложений и планы по перевозкам каждого вида грузов на каждом из участков сети.

Требуется отыскать вариант развития сети, обеспечивающий минимум приведенных затрат, связанных с развитием сети.

Для математической формулировки рассматриваемой задачи введем следующие обозначения [34]:  $q$  – номер варианта развития сети,  $q \in \overline{1, Q}$ ,  $r$  – номер вида груза,  $r \in \overline{1, R}$ ,  $(i, j)$  – дуга сети, соединяющая узлы  $i$  и  $j$  в исходном варианте сети,  $(i, j)_q$  – множество дуг, соединяющих узлы  $i$  и  $j$  при  $q$  варианте развития сети,  $s$  – номер вида лимитированного ресурса,  $s \in \overline{1, S}$ ,  $R^s(i, j)$ ,  $R^{rs}(i, j)_q$  – соответственно количества  $s$ -го вида лимитированного ресурса, выделенного для развития участка сети между узлами  $i$  и  $j$  и требуемого для перевозки  $r$ -го вида груза при реализации развития этого участка сети по варианту  $q$ ,  $c^r(i, j)_q$  – текущие затраты, связанные с перевозкой  $r$ -го вида груза между узлами  $i$  и  $j$  при реализации варианта  $q$  развития сети,  $K(i, j)$ ,  $K^r(i, j)_q$  – соответственно капитальные вложения, выделяемые для развития участка сети между узлами  $i$  и  $j$  и требуемые для организации перевозки  $r$ -го вида груза при реализации развития этого участка сети по варианту  $q$ ,  $a^r(i, j)$ ,  $a^r(i, j)_q$  – соответственно план перевозок  $r$ -го вида груза на участке сети между узлами  $i$  и  $j$  и при реализации развития этого участка сети по варианту  $q$ ,  $E$  – нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений в транспортную отрасль, и вспомогательные переменные

$$x^r(i, j)_q = \begin{cases} 1, & \text{если на участке сети между узлами } i \text{ и } j \text{ выбирается} \\ & \text{вариант развития } q \text{ для перевозки } r\text{-го вида груза,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя введенные обозначения, запишем систему, отражающую основные балансовые соотношения по перевозкам грузов на сети с учетом вариантов ее развития, которые составляют математическую модель для задачи выбора вариантов развития сети

$$\sum_{q=1}^Q x^r(i, j)_q \leq 1, \quad r = \overline{1, R}, \quad \forall(i, j), \quad (1.85)$$

$$\sum_{r=1}^R \sum_{q=1}^Q R^{rs}(i, j)_q x^r(i, j)_q \leq R^s(i, j), \quad s = \overline{1, S} \quad \forall(i, j), \quad (1.86)$$

$$\sum_{r=1}^R \sum_{q=1}^Q K^r(i, j)_q x^r(i, j)_q \leq K(i, j), \quad \forall(i, j), \quad (1.87)$$

$$\sum_{q=1}^Q a^r(i, j)_q x^r(i, j)_q \leq a^r(i, j), \quad r = \overline{1, R}, \quad \forall(i, j). \quad (1.88)$$

Условия (1.85) обеспечивают для каждого участка сети  $(i, j)$  выбор не более чем одного варианта развития, в соответствии с которым будет осуществляться перевозка каждого вида груза, условия (1.86) отражают ограничения на имеющиеся лимитированные ресурсы, условия (1.87) – ограничения на капитальные вложения. Условия (1.88) обеспечивают выполнение плана перевозок по всем видам грузов на всех участках сети.

В качестве критерия в рассматриваемой задаче выступают приведенные затраты, связанные с развитием сети, подлежащие минимизации:

$$\sum_{r=1}^R \sum_{q=1}^Q (c^r(i, j)_q + EK^r(i, j)_q) x^r(i, j)_q \rightarrow \min.$$

#### 1.4.3. Модель задач расчета, анализа и корректировки тарифов

В условиях рынка некий грузовладелец предлагает набор грузов определенной номенклатуры, интересующей покупателя, в количестве меняющихся (по каждому виду груза) в некоторых диапазонах, связанных с продажными ценами и тарифами на их перевозку. Покупатель груза и транспортная компания, выступая согласовано как единый участник торговой сделки, стремятся к снижению своих суммарных расходов, влияя на тарифы, в то время как грузовладелец с учетом конъюнктуры товарного рынка (продажных цен) может изменять в процессе заключения торговой сделки объемы продажи грузов по каждой позиции номенклатуры, влияя тем самым на собственный доход от продажи грузов [33, 34].

Пусть  $n$  – число позиций в номенклатуре продаваемых грузов,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  – вектор, компонентами которого служат объемы продаваемых грузов,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – вектор, компонентами которого служат тарифы на перевозку этих грузов,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  – вектор, компонентами которого являются продажные цены на соответствующие грузы. В простейшем, но, тем не менее, встречающемся на практике случае имеют место неравенства  $\underline{y}_i \leq y_i \leq \overline{y}_i$ ,  $\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i$ ,  $\underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i$ ,  $i = 1 \div n$ , отражающие возможности участников торговой сделки, в соответствии с которыми векторы  $y$ ,  $x$  и  $u$  являются элементами параллелепипедов

$$\begin{aligned} \Pi_y &= \{y \in R^n : \underline{y}_i \leq y_i \leq \overline{y}_i, i \in \overline{1, n}\}, \\ \Pi_x &= \{x \in R^n : \underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i, i \in \overline{1, n}\}, \\ \Pi_u &= \{u \in R : \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i, i \in \overline{1, n}\}. \end{aligned}$$

Доход, который получит грузовладелец, когда в его обязанности входит оплата перевозки продаваемых им грузов, математически описывается функцией  $\psi(y, x) = \max_{u \in I_u} \langle y, u \rangle - \langle y, x \rangle$ , так, что при конкретном выборе значений объемов продаваемых грузов (вектор  $y^0$ ), тарифов на их перевозку (векторов  $x^0$ ) соответствующий этому выбору доход грузовладельца составит  $\langle y^0, u^0 \rangle - \langle y^0, x^0 \rangle = \max_{u \in I_u} \langle y^0, u \rangle - \langle y^0, x^0 \rangle$ .

При этом значение функции  $\psi(y^0, x^0)$  определяет расходы (затраты) покупателя и перевозчика, связанные с приобретением груза. Естественно, что покупатель и перевозчик при каждом конкретном выборе покупателем и перевозчиком значения  $y^0$  стремятся так выбрать тарифы, чтобы обеспечить минимум своих затрат, т. е.  $\min_{x \in I_x} \psi(y^0, x)$ , в то время при каждом конкретном выборе покупателем и перевозчиком тарифов грузовладелец стремится так выбрать объемы продаваемых грузов, чтобы обеспечить максимум своего дохода, т. е.  $\max_{y \in I_y} \psi(y, x^0)$ .

Поведение участников торговой сделки в рассматриваемом случае соответствует поведению участников антагонистической игры, в которой один из игроков (грузовладелец) располагает множеством стратегий  $\Pi_y$ , а другой игрок (покупатель и перевозчик грузов) располагает множеством стратегий  $\Pi_x$ , а платежная функция  $\psi(y, x)$  описывает доход грузовладельца. При этом каждый из участников игры может получить наилучшее (для себя) гарантированное значение функции  $\psi(y, x)$ , которое для грузовладельца составит  $\max_{y \in \Pi_y} \min_{x \in \Pi_x} \psi(y, x)$ , для другого участника игры соответственно  $\min_{x \in \Pi_x} \max_{y \in \Pi_y} \psi(y, x)$ .

Задача определения тарифов на перевозки грузов в рассматриваемой ситуации формулируется в виде следующей оптимизационной задачи

$$\max_{y \in I_y} \{ \min_{u \in I_u} \langle y, u \rangle - \langle y, x \rangle \} \rightarrow \min_{x \in I_x}.$$

Описанная задача в соответствии с принятой в теории игр терминологией называется непрерывной минимаксной задачей, являясь в то же время задачей отыскания наилучшей стратегии одного из игроков в указанной антагонистической игре. Она не рассматривает согласование интересов транспортной системы и не описывает организационные механизмы активной транспортной системы.

#### 1.4.4. Задача планирования распределения объемов перевозок между видами транспорта

В настоящее время имеется большое количество работ, в которых применяется декомпозиционный подход [8, 10, 11]. В работах делается попытка учесть интересы не только взаимодействующих систем, но и общегосударственные интересы по удовлетворению потребностей народного хозяйства в перевозках.

Рассмотрим применение декомпозиционного подхода к решению задачи планирования распределения объемов перевозок между видами перевозок [8].

Задача планирования распределения объемов перевозок между видами транспорта формулируется в следующем виде:

$$\sum_p \sum_m \sum_j C_{pj}^m x_{pj}^m \rightarrow \min, \quad (1.89)$$

$$\sum_p \sum_m x_{pj}^m \geq \beta_j, \quad j = 1 \div \bar{j}, \quad (1.90)$$

$$\sum_j a_{pj}^m x_{pj}^m \leq t_p^m, \quad m = 1 \div \bar{m}, \quad p = 1 \div \bar{p}, \quad (1.91)$$

$$x_{pj}^m \geq 0, \quad p = 1 \div \bar{p}, \quad j = 1 \div \bar{j}, \quad m = 1 \div \bar{m}. \quad (1.92)$$

Здесь для каждого направления  $j$  перевозок известны: требуемый объем грузопотока  $\beta_j$  (чтобы не вводить лишний индекс, ограничения общности считается, что каждому направлению соответствует один род груза); трудоемкость  $a_{pj}^m$  перевозок транспортными средствами  $m$ -го типа  $p$ -го вида транспорта, а также затраты  $C_{pj}^m$  на перевозку единицы груза на единицу расстояния. Кроме того, заданы общие бюджеты времени  $t_p^m$  работы транспортных средств разного типа, имеющих на разных видах транспорта  $p$ . Требуется определить такие объемы перевозок грузов  $X_{pj}^m$ , выполняемых разными видами транспорта, при которых достигается минимум затрат на перевозку.

В модели (1.89) ÷ (1.92) могут быть учтены необходимые дополнительные ограничения (например, перерабатывающие способности пунктов погрузки и выгрузки), которые далее не будут рассматриваться в условии задачи, с целью упрощения ее формулировки.

Даже при небольших  $\bar{p}, \bar{\gamma}, \bar{m}, \bar{j}$  сформулированная многоиндексная общая задача линейного программирования имеет большую размерность, что заставляет в практических ситуациях искать специальные подходы к ее эффективному решению.

Предлагаемый в [8] подход к решению сформулированной задачи позволяет расчлнить исходную задачу на совокупность задач меньшей размерности, решаемых отдельно для каждого вида транспорта, и координирующую распределительную задачу линейного программирования, решение которых можно интерпретировать как выработку управляющего решения некоторого общетранспортного центра.

Заменим условия (1.90) в системе (1.89) ÷ (1.92) системой неравенств:

$$\sum_m x_{pj}^m \geq b_{pj}, \quad j = 1 \div \bar{j}, \quad p = 1 \div \bar{p},$$

$$\sum_p b_{pj} \geq \beta_j, \quad j = 1 \div \bar{j}$$

и рассмотрим подзадачи нижнего уровня для каждого вида транспорта (задача **P**):

$$\sum_m \sum_j c_{pj}^m x_{pj}^m \rightarrow \min,$$

$$\sum_m x_{pj}^m \geq b_{pj}, \quad j = 1 \div \bar{j},$$

$$\sum_p a_{pj}^m x_{pj}^m \leq t_p^m, \quad m = 1 \div \bar{m},$$

$$x_{pj}^m \geq 0, \quad m = 1 \div \bar{m}, \quad j = 1 \div \bar{j},$$

и координирующую задачу

$$\sum_p \sum_j d_{pj} b_{pj} \rightarrow \min, \tag{1.93}$$

$$\sum_p b_{pj} \geq \beta_j, \quad j = 1 \div \bar{j}, \tag{1.94}$$

$$b_{pj} \geq 0, \quad p = 1 \div \bar{p}, \quad j = 1 \div \bar{j}, \tag{1.95}$$

Эту совокупность задач можно рассматривать как совокупность решающих правил в двухуровневой системе планирования, в которой на нижнем уровне в результате решения распределительной транспортной задачи **P** находятся оптимальные объемы перевозок  $X_{pj}^m$  транспортными средствами  $m$ -го типа  $\beta$ -го транспорта при выделенных верхним уровнем объемах грузопотоков  $b_{pj}$  и известных значениях  $c_{pj}^m, a_{pj}^m, t_p^m$ , а объемы грузопотоков  $b_{pj}$  находятся в результате решения координирующей, отождествляемой с общетранспортным центром.

Такая декомпозиция исходной задачи устанавливает соответствие выделенных подзадач двум уровням структуры управления транспортной системой: «государственный общетранспортный орган (центр)» – «транспортные отрасли страны». В соответствии со структурой производится разбиение задачи  $(1.89) \div (1.92)$  по видам транспорта.

При согласовании решений задач центра и  $P$  на каждой  $K$ -й итерации в модели нижнего уровня вводятся новые значения  $b_{pj}(K)$ , а в модель верхнего уровня – новые значения коэффициентов критерия  $d_{pj}(K)$ . Первоначальное распределение грузопотоков  $b_{pj}$  осуществляется путем решения задачи  $(1.93) \div (1.95)$  на основе данных о потребностях в перевозках  $\beta_j$ , получаемых из заявок, и удельных затрат  $d_{pj}$ , получаемых, например, в результате прогноза по данным статистической отчетности. На каждой итерации каждая транспортная отрасль  $P$  нижнего уровня находит такие объемы  $x_{pj}^m(K)$  перевозок грузов среди выделенных им верхним уровнем  $b_{pj}(K)$ , которые обеспечивают минимум затрат на перевозку при соблюдении ограничений  $t_{(p)}^m$  на бюджет времени.

Итак, основная задача декомпозиционного подхода состоит в выработке таких критериев деятельности отдельных организаций, максимизация которых должна привести к оптимизации общесистемного критерия.

Основными недостатками декомпозиционного подхода являются:

- 1) организаций стремятся максимизировать критерии, формируемые центром, т. е. не имеют собственных интересов;
- 2) организаций не могут формировать стратегии своего поведения и искажать информацию, передаваемую в центр;
- 3) связи между организациями отсутствуют или осуществляют только через верхний уровень (центр).

Эти предположения сильно ограничивают применение декомпозиционного подхода для согласования решений транс-

портных организаций в рамках транспортной системы. Особенно жёстким являются первое и третье предположения. Декомпозиционный подход предполагает наличие центрального органа управления, то есть соответствует централизованной структуре управления транспортной системой.

#### 1.4.5. Задача планирования производства

Имеется  $n$  параллельно работающих производственных цехов, которые выпускают  $m$  видов продукции. Требуется определить план выпуска  $j$ -й продукции  $i$ -м цехом  $X_{ij}$ , который максимизировал бы суммарный доход от выпуска всех продукции всеми цехами, если заданы:  $T_i$  – реальный фонд времени  $i$ -го цеха;  $C_j$  – цена единицы  $j$ -й продукции,  $t_{ij}$  – трудоемкость выпуска единицы  $j$ -й продукции  $i$ -м цехом,  $y_{ij}$  – запланированное количество  $j$ -й продукции для  $i$ -го цеха, (т. е. нижний предел плана  $X_{ij}$ ),  $S_{ij}$  – затраты при выпуске единицы продукции  $j$ -й продукции  $i$ -м цехом. Это задача планирования производства.

Математическая модель описанной задачи

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (C_j - S_{ij}) X_{ij} \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^m t_{ij} X_{ij} \leq T_i, i = 1 : n,$$

$$X_{ij} \geq y_{ij}, j = 1 : m,$$

$$X_{ij} \geq 0.$$

#### 1.4.6. Задача о ранце

Имеется  $n$  грузов определенного веса и ценности. Заданы  $C_i$  – ценность  $i$ -го груза и  $p_i$  – вес груза. Требуется упаковать в ранец определенной грузоподъемности  $N$  такие грузы, чтобы

суммарная ценность упакованных грузов была бы максимальной. Построить математическую модель описанной задачи.

Решение.  $\sum_{i=1}^n c_i X_i \rightarrow \max$  – целевая функция.

При ограничениях  $\sum_{i=1} p_i X_i \leq N$ ,

$$x_i = \begin{cases} 1, i - \text{й груз упакован} \\ 0, i - \text{й груз не упакован} \end{cases}.$$

#### 1.4.7. Задача составления смеси (о диете)

Дневная диета должна содержать  $m$  видов различных питательных веществ соответственно в количестве не менее  $b_i$  ( $i = 1:n$ ) единиц. Имеется  $n$  различных продуктов в количестве не менее  $d_j$  ( $j = 1; m$ ) единиц. Пусть  $a_{ij}$  – количество единиц  $i$ -го питательного вещества, содержащегося в единице  $j$ -го продукта;  $C_j$  – стоимость единицы  $j$ -го продукта. Определить какие продукты и в каком количестве включить в диету: чтобы она удовлетворяла минимальной дневной потребности в каждом питательном веществе при наименьшей общей стоимости используемых продуктов. Построить математическую модель описанной задачи.

Математическая модель задачи.

$$Z = \sum_{j=1}^m C_j X_j \rightarrow \min \text{ – целевая функция}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} X_j \geq b_i, i = 1 : n,$$

$$X_j \leq d_j, j = 1 : m,$$

$$X_j \geq 0.$$

#### 1.4.8. Постановка задачи теории расписания

Требуется обработать  $n$  деталей. Каждая деталь должна пройти обработку в определённой последовательности на  $m$  станках. Предполагается, что станок может обрабатывать только одну деталь, и каждая деталь может одновременно обрабатываться только на одном станке. Перерывы в выполнении операций запрещены. Заданы продолжительности  $t_{ij}$  обработки  $i$ -ой детали на  $j$ -ом станке. Количество станков  $j$ -го типа равно  $N_j$ . Требуется организовать обработку деталей таким образом, чтобы минимизировать время обработки всех деталей. Для двух частных случаев задачи известны эффективные точные алгоритмы. Эти случаи получили специальные названия "задача Джонсона" и "задача редактора".

## 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ И ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

### 2.1. Симплекс-метод

В первой главе были рассмотрены экономико-математические модели задач функциональных областей логистики. Одним из распространенных классов этих задач являются задачи линейного программирования, где уравнения целевой функции и ограничений имеют линейную форму.

Основная задача линейного программирования формулируется так: *Дана линейная форма (целевая функция)*

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (2.1)$$

*и задана система  $m > n$  линейных неравенств (ограничений) с ограничениями-равенствами вида,*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad j = \overline{1, l} \quad (2.2)$$

*и ограничениями-неравенствами типа*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad j = \overline{l+1, m}. \quad (2.3)$$

При этом предполагается, что все переменные  $x_j$  могут принимать следующие значения

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad (2.4)$$

$x_j$  – свободные переменные,

$$x_j \quad j = \overline{l+1, n} \quad (2.5)$$

Обычные методы классического математического анализа для отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции неприменимы к рассматриваемой задаче. Основным методом

решения общей задачи линейного программирования, позволяющим преодолеть эти затруднения, является так называемый симплекс-метод. Существует несколько видов симплекс-метода:

- 1) симплекс-метод обратных матриц;
- 2) симплекс-метод базисных переменных;
- 3) симплекс-метод Данцига;
- 4) метод Зуховицкого;
- 5) двойственный симплекс-метод и др.

Симплекс-метод состоит из алгоритма отыскания какого-нибудь опорного плана среди решений системы линейных неравенств (2.2–2.3) (или из установления факта несовместности системы), и из алгоритма последовательного перехода от полученного уже опорного решения системы (2.2–2.3) к новому опорному решению, для которого целевая функция (2.1) имеет требуемое большее (меньшее) значение до получения максимального (минимального), т. е. оптимального решения.

В данном учебном пособии мы рассмотрим метод Зуховицкого.

Метод Зуховицкого предназначен для решения задачи линейного программирования (2.1–2.5) и состоит из следующих этапов:

- перевод задачи (2.1–2.5) к стандартному виду и построение симплекс-таблицы;
- исключение свободных переменных;
- исключение 0-строки (уравнение-равенство);
- определение опорного (допустимого) решения;
- определение оптимального решения.

Это табличный метод, переходя из одной таблицы в другую, определяет оптимальное решение или же доказывают несовместимость или неограниченность решения задачи.

Основу вычислительной схемы алгоритма Зуховицкого составляют Модифицированные Жордановы Исключения (МЖИ). Для начала введем некоторые понятия. Разрешающий элемент (РЭ) – элемент симплекс-таблицы, который находится по определенному правилу на каждом этапе симплекс-метода. Разре-

шающая строка ( $r$ ) – строка, на которой расположен РЭ. Разрешающий столбец ( $s$ ) – столбец, где расположен РЭ.

Алгоритм одного шага МЖИ с разрешающим элементом ( $\alpha_{rs}$ ) состоит в следующем:

1. На месте разрешающего элемента в новой таблице записывается единица;
2. Остальные элементы разрешающей строки ( $r$ ) остаются без изменений;
3. Остальные элементы разрешающего столбца ( $s$ ) изменяют лишь свои знаки;
4. Все остальные элементы таблицы вычисляются по формуле

$$B_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs}}{a_{rs}}$$

5. Все элементы новой таблицы делятся на разрешающие элементы  $\alpha_{rs}$ .

Рассмотрим симплекс-метод на примере решения конкретной задачи.

Пример решения задачи ЛП. Найти максимальное значение линейной формы:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$x_1$  – свободная переменная,

$$x_2 \geq 0.$$

Решение. Приведем задачу к стандартному виду:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 = 0 \\ y_2 = -4x_1 - x_2 + 12 = 0 \\ y_3 = x_1 - 2x_2 + 10 = 0 \\ "0" = -2x_1 - x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Построим табл. 2.1 и приступаем к исключению свободной переменной  $x_1$ .

Таблица 2.1

|         | $-x_1$ | $-x_2$ | 1  |
|---------|--------|--------|----|
| $y_1 =$ | -1     | -1     | 0  |
| $y_2 =$ | 4      | 1      | 12 |
| $y_3 =$ | -1     | 2      | 10 |
| «0» =   | 2      | 1      | 8  |
| $z =$   | -3     | -2     | 0  |

Среди коэффициентов в столбце свободной переменной выбираем любой неравный нулю. Возьмем коэффициент 4 как разрешающий элемент (РЭ), который отмечен в табл. 2.2.

Таблица 2.2

|         | $-x_1$ | $-x_2$ | 1  |
|---------|--------|--------|----|
| $y_1 =$ | -1     | -1     | 0  |
| $y_2 =$ | 4      | 1      | 12 |
| $y_3 =$ | -1     | 2      | 10 |
| «0» =   | 2      | 1      | 8  |
| $z =$   | -3     | -2     | 0  |

Относительно РЭ, выполнив 1 шаг МЖИ, получим табл. 2.3.

Таблица 2.3

|         | $-y_2$ | $-x_2$ | 1      |
|---------|--------|--------|--------|
| $y_1 =$ | $-1/4$ | $-3/4$ | $12/4$ |
| $x_1 =$ | $1/4$  | $1/4$  | $12/4$ |
| $y_3 =$ | $1/4$  | $9/4$  | $52/4$ |
| «0» =   | $-2/4$ | $2/4$  | $8/4$  |
| $z =$   | $3/4$  | $-5/4$ | $36/4$ |

Выписываем уравнение для свободной переменной:

$$x_1 = -\frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{12}{4} \text{ и эту строку вычеркиваем из табли-}$$

цы, получим табл. 2.4.

Таблица 2.4

|         | $-y_2$ | $-x_2$ | 1      |
|---------|--------|--------|--------|
| $y_1 =$ | $-1/4$ | $-3/4$ | $12/4$ |
| $y_3 =$ | $1/4$  | $9/4$  | $52/4$ |
| «0» =   | $-2/4$ | $2/4$  | $8/4$  |
| $z =$   | $3/4$  | $-5/4$ | $36/4$ |

Переходим к этапу исключения 0-строки. Просматриваем 0-строку. Первый положительный коэффициент  $2/4$  стоит во втором столбце. Его берем разрешающим, т. к.  $\min\left\{\frac{52/4}{9/4}; \frac{8/4}{2/4}\right\} = \frac{8/4}{2/4}$ . Поэтому, сделав шаг МЖИ, мы получим к табл. 2.5.

Таблица 2.5

|         | $-y_2$ | 0      | 1      |
|---------|--------|--------|--------|
| $y_1 =$ | $-1/2$ | $3/2$  | 6      |
| $y_3 =$ | $5/2$  | $-9/2$ | $52/4$ |
| $x_2 =$ | -1     | $4/2$  | 4      |
| $z =$   | $-1/2$ | $5/2$  | 14     |

0-строка становится 0-столбцом, исключаем из таблицы, получим табл. 2.6.

Таблица 2.6

|         |        |      |
|---------|--------|------|
|         | $-y_2$ | 1    |
| $y_1 =$ | $-1/2$ | 6    |
| $y_3 =$ | 5/2    | 52/4 |
| $x_2 =$ | -1     | 4    |
| $z =$   | $-1/2$ | 14   |

Опорное решение найдено, т. к. свободные элементы имеют положительный знак. Переходим к определению оптимального решения. В столбце с отрицательным коэффициентом в z-строке находится один положительный элемент 5/2, который и будет РЭ.

Относительно РЭ проводим один шаг МЖИ, и получим табл. 2.7.

Таблица 2.7

|         |        |        |
|---------|--------|--------|
|         | $-y_3$ | 1      |
| $y_1 =$ | 1/5    | 63/10  |
| $y_2 =$ | 2/5    | 3/5    |
| $x_2 =$ | 2/5    | 23/5   |
| $z =$   | 1/5    | 143/10 |

В таблице коэффициент в z-строке имеет положительный знак 1/5. Следовательно, максимальное (оптимальное) значение найдено:

$z=143/10$  и достигается при  $y_2=3/5$ ,  $x_2=23/5$ . Подставим известные значения в уравнения свободной переменной

$$x_1 = -\frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{12}{4} = \frac{34}{20}.$$

## 2.2. Двойственные задачи в логистике. Теоремы двойственности

В теории линейного программирования существует понятие двойственной задачи. Двойственная задача – задача, построенная для задачи линейного программирования на основе определенных правил. В некоторых случаях на практике требуется нахождение решения двойственных задач. Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи. Если прямая задача требует определение оптимального (максимального) плана производства продукции при ограниченных ресурсах на ее производство. Тогда решение двойственной задачи будет заключаться в определении оптимального (минимального) количества ресурсов, которое необходимо для производства максимального (оптимального) количества продукции.

Двойственная задача может быть использована для решения задач в закупочной логистике и в задачах управления запасами. Так, задача управления запасами может состоять из двух этапов, в начале из двойственной задачи определяется оптимальный уровень ресурсов для выпуска оптимального количества продукции, затем применяются модели управления запасами.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования, когда ограничения образуют смешанную систему, состоящую из неравенств и равенств, а переменные распадаются на несвободные и свободные.

Дана задача максимизации линейной формы

$$Z = p_1x_1 + \dots + p_nx_n \rightarrow \max,$$

при ограничениях-неравенствах

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq a_i, \quad i = \overline{1, k},$$

при ограничениях-равенствах

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = a_i, i = \overline{k+1, m},$$

при несвободных переменных

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, l},$$

при свободных переменных

$$x_j, j = \overline{l+1, n}.$$

Под двойственной к самой общей прямой задаче линейного программирования естественно понимать задачу, заключающуюся в минимизации линейной формы

$$W = a_1x_1 + \dots + a_mx_m \rightarrow \min,$$

при несвободных переменных

$$u_i \geq 0, i = \overline{1, k},$$

при свободных переменных

$$u_i, i = \overline{k+1, m},$$

при ограничениях-неравенствах

$$a_{1j}u_1 + \dots + a_{mj}u_n \geq p_j, j = \overline{1, l},$$

при ограничениях-равенствах

$$a_{1j}u_1 + \dots + a_{mj}u_n = p_j, j = \overline{l+1, n}.$$

Для пары взаимно двойственных задач существуют теоремы двойственности.

Основная (первая) теорема двойственности. Пусть рассматривается пара двойственных задач (табл. 2.8). Если одна из них обладает оптимальным решением, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения соответствующих целевых функций  $Z$  и  $W$  равны:

$$\max Z = \min W.$$

Если же у одной из этих задач целевая функция не ограничена, то двойственная ей задача противоречива. Наконец, если одна из этих задач противоречива, то двойственная ей задача, либо имеет неограниченную целевую функцию, либо так же противоречива.

Таблица 2.8

|                 |         |             |         |             |               |        |             |           |
|-----------------|---------|-------------|---------|-------------|---------------|--------|-------------|-----------|
|                 | $v_1 =$ | ...         | $v_l =$ | $0 =$       | ...           | $0 =$  | $w =$       |           |
|                 | $-x_1$  | ...         | $-x_l$  | $-x_{l+1}$  |               | $-x_n$ | $1$         |           |
| $u_1$           | $y_1 =$ | $a_{11}$    | ...     | $a_{1l}$    | $a_{1,l+1}$   | ...    | $a_{1n}$    | $a_1$     |
| ...             |         | ...         | ...     | ...         | ...           | ...    | ...         | ...       |
| $u_k y_k =$     |         | $a_{k1}$    | ...     | $a_{kl}$    | $a_{k,l+1}$   | ...    | $a_{kn}$    | $a_k$     |
| $u_{k+1} \ 0 =$ |         | $a_{k+1,1}$ | ...     | $a_{k+1,l}$ | $a_{k+1,l+1}$ | ...    | $a_{k+1,n}$ | $a_{k+1}$ |
| ...             |         | ...         | ...     | ...         | ...           | ...    | ...         | ...       |
| $u_m 0 =$       |         | $a_{m1}$    | ...     | $a_{ml}$    | $a_{m,l+1}$   | ...    | $a_{mn}$    | $a_m$     |
| $1$             | $z =$   | $-c_1$      | ...     | $-c_l$      | $-c_{l+1}$    | ...    | $-c_n$      | $0$       |

### Вторая теорема двойственности

Для того чтобы два допустимых решения  $x'=(x'_1,...,x'_n)$  и  $u'=(u'_1,...,u'_m)$  пары двойственных задач (табл. 2.8) были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы эти решения удовлетворяли так называемым "условиям дополняющей нежесткости":

$$1) x'_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} u'_i - c_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$2) u'_i (\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j - a_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

т. е. чтобы равнялось 0 произведение значения любой переменной одной задачи на разность между значениями левой и правой части соответствующего ограничения двойственной задачи.

Другими словами, допустимые решения  $x'$  и  $u'$  оптимальны тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующему условию: если значение какой-либо переменной допустимого решения одной задачи отлично от нуля, то допустимое решение двойственной задачи обращает в строгое равенство соответствующие этой переменной ограничение двойственной задачи, а если допустимое решение одной задачи обращает в строгое неравенство некоторое ограничение этой задачи, то в допустимом решении двойственной задачи равна нулю переменная, соответствующая этому ограничению.

Пример построения двойственной задачи 3. Построить двойственную к следующей задаче ЛП:

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1$  – свободная переменная.

*Примечание:* Прежде чем строить двойственную задачу необходимо, чтобы в прямой задаче с максимизацией (минимизацией) целевой функции уравнения-неравенства были со зна-

ком  $\leq$  ( $\geq$ ). В противном случае, выполнить соответствующие преобразования (т. е. умножить уравнения-неравенства на  $-1$ ).

*Решение.* Под двойственной к прямой задаче линейного программирования принимают задачу с переменными  $u_1, u_2, u_3, u_4$  и заключающуюся в минимизации линейной формы

$$W = u_1 - 2u_2 + 6u_3 + 4u_4 \rightarrow \min \quad (2.6)$$

при несвободных переменных  $u_2, u_3, u_4 \geq 0$ ,  
при свободной переменной

$$u_1, \quad (2.7)$$

при ограничениях-равенствах  $2u_1 - 3u_2 + u_3 - 2u_4 = 2$ ,

при ограничениях-неравенствах

$$u_1 - 2u_2 + 3u_3 + u_4 \geq 5, \quad (2.8)$$

т. о. двойственную задачу получают из прямой по следующим правилам:

1. свободные члены  $a_1=2, a_2=-2$  (т. к. выполнили вышеуказанное примечание),  $a_3=6, a_4=4$  ограничений прямой задачи служат коэффициентами целевой функции (2.6) двойственной задачи, а коэффициенты  $p_1=2, p_2=5$  целевой функции прямой задачи служат свободными членами ограничений двойственной задачи (так что число переменных двойственной задачи равно числу уравнений-ограничений прямой задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи);

2. матрицей коэффициентов ограничений двойственной задачи служит матрица  $A^*$ , получаемая транспонированием матрицы  $A$  коэффициентов ограничений прямой задачи;

матрица коэффициентов прямой задачи  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \\ 13 \\ -21 \end{pmatrix}$  ;

транспонированная матрица (матрица коэффициентов ограничений

двойственной задачи)  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Каждому ограничению-равенству  $2x_1 - x_2 = 1$  прямой задачи соответствует свободная переменная  $u_1$  двойственной задачи;

каждому ограничению-неравенству прямой задачи соответствует несвободная переменная двойственной задачи с *противоположным знаком* неравенства

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \leq -2u_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \leq 6u_3 \geq 0, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4u_4 \geq 0 \end{cases}$$

Каждой несвободной переменной  $x_2 \geq 0$  прямой задачи соответствует ограничение-неравенство двойственной задачи  $u_1 - 2u_2 + 3u_3 + u_4 \geq 5$  с тем же знаком неравенства.

Каждой свободной переменной  $x_1$  прямой задачи соответствует ограничение-равенство  $2u_1 - 3u_2 + u_3 - 2u_4 = 2$  двойственной задачи;

4. максимизация целевой функции прямой задачи заменяется минимизацией целевой функции (2.9) двойственной задачи.

### 2.3. Решение задачи логистики в среде Excel

Задачи линейного программирования на практике не решают ручным способом. Разработаны различные пакеты прикладных программ. Одним из простейших является среда Excel, в которой разработан пакет Поиск решения (Solver). В электронную таблицу вводят исходные данные, формулы уравнений целевой функции и ограничений. Затем в пакете Поиска решения заполняются соответствующие поля. Рассмотрим решение задачи производственной логистики в среде Excel.

Для производства двух видов продукции А и В стоимостью соответственно 3 у.е. и 2 у.е. расходуются 3 вида ресурсов, запасы которых соответственно равны 30, 10 и 40 единицам. Известны расходы каждого вида ресурсов на производство единицы продукции и представлены они в табл. 2.9

Таблица 2.9

|          | А | В |
|----------|---|---|
| Ресурс 1 | 5 | 6 |
| Ресурс 2 | 2 | 1 |
| Ресурс 3 | 4 | 1 |

Необходимо определить оптимальное количество производимой продукции, чтобы суммарная стоимость была максимальной.

Внесем исходные данные в электронную таблицу, который представлен на рис. 2.1. Стоимость продукции А и В в ячейках А3 и В3 соответственно. Матрица расходов ресурсов на единицу продукции занесены в ячейки В6:С8. А запасы на складах – в ячейки Е6:Е8. Для искомым переменных, определяющих количество готовой продукции А и В определены ячейки В11 и С11 соответственно. Формула для расчета значения целевой функции введена в ячейку В14.

|    | A                                                    | B | C | D                               | E  | F |
|----|------------------------------------------------------|---|---|---------------------------------|----|---|
| 1  |                                                      |   |   |                                 |    |   |
| 2  | Стоимость готовой продукции                          |   |   |                                 |    |   |
| 3  | 3                                                    | 2 |   |                                 |    |   |
| 4  |                                                      |   |   |                                 |    |   |
| 5  | Матрица расходов<br>ресурсов на единицу<br>продукции |   |   | Запасы<br>ресурсов на<br>складе |    |   |
| 6  |                                                      | 5 | 6 |                                 | 30 |   |
| 7  |                                                      | 2 | 1 |                                 | 10 |   |
| 8  |                                                      | 4 | 1 |                                 | 40 |   |
| 9  |                                                      |   |   |                                 |    |   |
| 10 | Переменные (количество продукции)                    |   |   |                                 |    |   |
| 11 |                                                      |   |   |                                 |    |   |
| 12 |                                                      |   |   |                                 |    |   |
| 13 | Целевая функция                                      |   |   |                                 |    |   |
| 14 |                                                      | 0 |   |                                 |    |   |
| 15 |                                                      |   |   |                                 |    |   |

Рис. 2.1. Исходные данные в электронной таблице

Далее в меню *Сервис* выбираем *Поиск Решения*. Появляется окно Параметры поиска решения, представленного на рис. 2.2. Заполняется поле в строке после надписи «Оптимизировать целевую функцию», где указываем номер ячейки с формулой целевой функции. Отмечается, что целевая функция стремится к максимуму. В поле под надписью «Изменяя ячейки переменных» вводим ячейки, которые были определены для значения искомых переменных. Далее заполняется поле под надписью «В соответствии с ограничениями:». Чтобы ввести ограничения нажимаем справа от этого поля кнопку *Добавить*. Вводим поочередно все уравнения ограничения. После завершения ввода ограничений нажимаем кнопку «Найти решение».

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Рис. 2.2. Окно параметров поиска решения

В результате появится окно (рис. 2.3) «Результаты поиска решения». Сообщение в этом окне в виде текста «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены» говорит о том, что решение найдено. Нажав на кнопку **Ок**, решение будет сохранено.

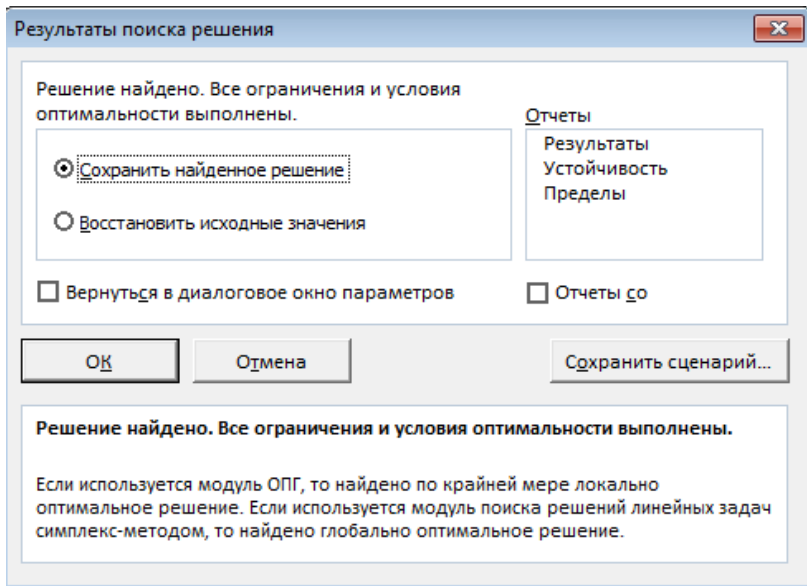


Рис. 2.3. Окно «Результаты поиска решения»

Решение появится на том же листе, где исходные данные, только ячейки, предназначенные для переменных задачи и целевой функции, будут заполнены найденными значениями (рис. 2.4).

Проанализируем решение задачи. Оптимальными значениями количества производимой продукции А и В будут 4,286 единиц и 1,429 единиц соответственно. При этом запасы ресурса 3 не будут полностью израсходованы. Общее количество ресурса 3, израсходованного для производства продукции А и В, видно из значений в ячейке D8, равное 18,57. Таким образом, ресурс 3 останется неиспользованным в количестве 21,43 единиц. Целевая функция равна 15,71 у.е.

|    | A                                                    | B     | C     | D                               | E  | F |
|----|------------------------------------------------------|-------|-------|---------------------------------|----|---|
| 1  |                                                      |       |       |                                 |    |   |
| 2  | Стоимость готовой продукции                          |       |       |                                 |    |   |
| 3  | 3                                                    | 2     |       |                                 |    |   |
| 4  |                                                      |       |       |                                 |    |   |
| 5  | Матрица расходов<br>ресурсов на единицу<br>продукции |       |       | Запасы<br>ресурсов на<br>складе |    |   |
| 6  |                                                      | 5     | 6     | 30                              | 30 |   |
| 7  |                                                      | 2     | 1     | 10                              | 10 |   |
| 8  |                                                      | 4     | 1     | 18,57                           | 40 |   |
| 9  |                                                      |       |       |                                 |    |   |
| 10 | Переменные (количество продукции)                    |       |       |                                 |    |   |
| 11 |                                                      | 4,286 | 1,429 |                                 |    |   |
| 12 |                                                      |       |       |                                 |    |   |
| 13 | Целевая функция                                      |       |       |                                 |    |   |
| 14 |                                                      | 15,71 |       |                                 |    |   |
| 15 |                                                      |       |       |                                 |    |   |

Рис. 2.4. Страница с решениями задачи

## 2.4. Метод потенциалов

Транспортную задачу, постановка и математическая модель которой описана в разделе 1.1., можно решить симплекс-методом. Однако транспортная задача обладает такими особенностями, как присутствие переменной только в двух уравнениях ограничений и наличие коэффициента 1 перед переменными в уравнениях ограничений. В связи с этим для решения этой задачи был разработан метод потенциалов. Метод потенциалов основан на теореме потенциальности. Сформулируем теорему потенциальности

*Теорема потенциальности. Потенциальность – признак оптимальности плана перевозок.* Для того чтобы некоторый допустимый план  $X' = \|x'_{ij}\|_{mn}$  транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала система из  $m + n$  чисел  $u'_1, u'_2, \dots, u'_m; v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ , удовлетворяющая условиям

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.12)$$

и

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ для всех } x'_{ij} > 0 \ (x'_{ij} \in X'). \quad (2.13)$$

Числа  $u'_i, v'_j$  называются потенциалами соответственно пунктов отправления и назначения, вся их система – потенциальной, а условия (2.12) – (2.13) – условиями потенциальности системы  $\{u'_i, v'_j\}$ ; каждое в отдельности неравенство (равенство) называется условием потенциальности для соответствующей клетки  $(i, j)$ .

Если план  $X$ , для которого существует потенциальная система  $\{u'_i, v'_j\}$ , также назвать потенциальным, то теорема коротко формулируется так: для оптимальности плана транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы он был потенциальным.

Таким образом, чтобы построенный план транспортной задачи был оптимальным необходимо выполнение условий (2.12) и (2.13), которые по-другому назовем условиями оптимальности транспортной задачи.

*Опишем алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.*

Алгоритм состоит из предварительного шага и повторяющегося общего шага.

На *предварительном* шаге составляется первоначальный ациклический план  $X$  одним из трех методов:

- метод северо-западного угла;
- метод минимального элемента (минимальной стоимости);
- приближенный метод Фогеля;

На повторяющемся общем шаге необходимо проверить выполнение условий оптимальности (2.12) и (2.13). Для этого выполняются следующие действия:

- 1) для полученного плана строится система  $m+n$  чисел  $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$  таких, чтобы выполнялись условия

$$v_j - u_i = c_{ij} \quad (2.14)$$

для всех  $X$  – выбранных  $c_{ij}$ ;

2) построенная система  $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$  исследуется на оптимальность по условию (2.13) (т. е. план  $X$  исследуется на оптимальность). Если план  $X$ , построенный в предыдущем шаге, не оптимален, т. е. условие (2.13) не выполняется, то выполняем следующие три операции:

– улучшение плана, т. е. замены плана  $X$  новым планом  $X'$  со стоимостью перевозок, не превышающей стоимости перевозок по плану  $X$ ;

– построения для плана  $X'$  (путем исправления системы  $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$ ) новой системы,  $u'_1, u'_2, \dots, u'_m; v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  удовлетворяющей условию

$$v'_j - u'_i = c_{ij} \quad (2.15)$$

для всех  $X$  – выбранных  $c_{ij}$ ;

– исследования построенной системы  $u'_1, u'_2, \dots, u'_m; v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  на потенциальность.

И так до тех пор, пока не выполнится условие (2.13).

Рассмотрим метод потенциалов на примере. Первоначально построим предварительный план. Ниже приводятся примеры применения предварительных методов для построения предварительного (первоначального) плана транспортной задачи.

*Пример 1.* Построить предварительный план методом северо-западного угла.

Пусть условия задачи заданы в табл. 2.19.

Таблица 2.19

|    |     |    |    |                |
|----|-----|----|----|----------------|
| 3  | 5   | 7  | 11 | 100            |
| 1  | 4   | 6  | 3  | 130            |
| 5  | 8   | 12 | 7  | 170            |
| 50 | 120 | 80 | 50 | $a_i$<br>$b_j$ |

*Решение.* По правилу северо-западного угла находим  
 $x_{11} = \min \{a_1, b_1\} = \min\{100; 150\} = 100$ ;  $x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0$ .

Вносим изменения в столбец запасов и строку потребления (табл. 2.8).

Таблица 2.8

|                      |     |    |    |                |
|----------------------|-----|----|----|----------------|
| 3<br>100             | 5   | 7  | 11 | 0              |
| 1                    | 4   | 6  | 3  | 130            |
| 5                    | 8   | 12 | 7  | 170            |
| <del>150</del><br>50 | 120 | 80 | 50 | $a_i$<br>$b_j$ |

Теперь  $x_{21} = \min\{130; 50\} = 50$ ,  $x_{31} = 0$ . При этом потребность первого пункта назначения полностью удовлетворена и обращается в нуль, а запас второго пункта отправления составляет  $130 - 50 = 80$ , что отмечено в правом столбце и нижней строке следующей табл. 2.9

Далее имеем:  $x_{22} = \min\{80; 120\} = 80$ ;  $x_{23} = x_{24} = 0$ , так получим табл. 2.10.

Аналогично  $x_{32} = \min\{170; 40\} = 40$ , мы приходим к табл. 2.11.

Таблица 2.9

|                                      |     |    |    |                      |
|--------------------------------------|-----|----|----|----------------------|
| 3<br>100                             | 5   | 7  | 11 | 0                    |
| 1<br>50                              | 4   | 6  | 3  | <del>130</del><br>80 |
| 5                                    | 8   | 12 | 7  | 170                  |
| <del>150</del><br><del>50</del><br>0 | 120 | 80 | 50 | $a_i$<br>$b_j$       |

Таблица 2.10

|                           |                      |    |    |                     |
|---------------------------|----------------------|----|----|---------------------|
| 3<br>100                  | 5                    | 7  | 11 | 0                   |
| 1<br>50                   | 4<br>80              | 6  | 3  | <del>130</del><br>0 |
| 5                         | 8                    | 12 | 7  | 170                 |
| <del>150</del><br>50<br>0 | <del>120</del><br>40 | 80 | 50 | $a_i$<br>$b_j$      |

Таблица 2.11

|                           |                        |    |    |                     |
|---------------------------|------------------------|----|----|---------------------|
| 3<br>100                  | 5                      | 7  | 11 | 0                   |
| 1<br>50                   | 4<br>80                | 6  | 3  | <del>130</del><br>0 |
| 5                         | 8<br>40                | 12 | 7  | <del>170</del> 130  |
| <del>150</del><br>50<br>0 | <del>120</del><br>40 0 | 80 | 50 | $a_i$<br>$b_j$      |

Наконец,  $x_{33} = \min\{130; 80\} = 80$ .

Потребность третьего пункта назначения сводится к нулю, а запас третьего пункта отправления равен 50. Этот запас в точности равен потребности  $b_4 = 50$  четвертого пункта назначения, так что  $x_{34} = 50$ .

Получен следующий ациклический план, содержащий  $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$  положительных элементов (табл. 2.12).

Таблица 2.12

|                           |                        |               |         |                          |
|---------------------------|------------------------|---------------|---------|--------------------------|
| 3<br>100                  | 5                      | 7             | 11      | 0                        |
| 1<br>50                   | 4<br>80                | 6             | 3       | <del>130</del><br>0      |
| 5                         | 8<br>40                | 12<br>80      | 7<br>50 | <del>170</del> 130<br>50 |
| <del>150</del><br>50<br>0 | <del>120</del><br>40 0 | <del>80</del> | 50      | $a_i$<br>$b_j$           |

*Пример 2.* Построение первоначального плана методом минимального элемента. Условия задачи записываем в виде табл. 2.13:

Таблица 2.13

|          |          |     |          |                |
|----------|----------|-----|----------|----------------|
| $c_{11}$ | $c_{12}$ | ... | $c_{1n}$ | $a_1$          |
| $c_{21}$ | $c_{22}$ | ... | $c_{2n}$ | $a_2$          |
| ...      | ...      | ... | ...      | ...            |
| $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | ... | $c_{mn}$ | $a_m$          |
| $b_1$    | $b_2$    | ... | $b_n$    | $a_i$<br>$b_j$ |

В методе северо-западного угла первоначальный план зависит лишь от величины  $a_i$  и  $b_j$  и совершенно игнорирует стоимости перевозок, так что обычно он значительно отличается от оптимального. Приведем теперь для построения оптимального плана так называемый метод минимального элемента или метод минимальной стоимости, в котором существенно учитывается матрица  $\|c_{ij}\|$  транспортных издержек. В этом методе заполняются последовательно клетки с минимальной во всей таблице стоимостью  $c_{ij}$  перевозки, а величины  $x_{ij}$  соответствующей перевозки определяются точно так же, как в методе северо-западного угла, т.е.  $x_{ij}$  равняется минимуму из остатка груза в  $i$ -м пункте отправления и недостающего груза в  $j$ -м пункте назначения. Получим ациклический план, состоящий из не более, чем  $m + n - 1$  положительных перевозок.

Условия задачи даны в табл. 2.14.

Таблица 2.14

|     |     |    |    |                |
|-----|-----|----|----|----------------|
| 3   | 5   | 7  | 4  | 100            |
| 1   | 4   | 6  | 3  | 130            |
| 5   | 8   | 12 | 7  | 170            |
| 150 | 120 | 80 | 50 | $a_i$<br>$b_j$ |

*Методические рекомендации.* На каждом шаге заполняем клетку с минимальной во всей таблице стоимостью. В нашем примере заполнение клеток производим в следующем порядке:

$$x_{21} = \min \{a_2 ; b_1\} = \min\{130; 150\} = 130,$$

$$x_{22} = x_{23} = x_{24} = 0;$$

далее

$$x_{11} = \min\{100 \ 20\} = 20, \quad x_{31} = 0;$$

затем

$$x_{12} = \min\{80; 120\} = 80, \quad x_{13} = x_{14} = 0$$

и, наконец

$$x_{34} = \min\{170; 50\} = 50;$$

$$x_{32} = \min\{120; 40\} = 40; \quad x_{33} = 80 .$$

Получен первоначальный план в табл. 2.15.

Таблица 2.15

|          |         |          |         |                |
|----------|---------|----------|---------|----------------|
| 3<br>20  | 5       | 7        | 4       | 100            |
| 1<br>130 | 4       | 6        | 3       | 130            |
| 5        | 8<br>40 | 12<br>80 | 7<br>50 | 170            |
| 150      | 120     | 80       | 50      | $a_i$<br>$b_j$ |

*Приближенный метод Фогеля (ПМФ).*

Этот метод является эвристическим и обычно приводит к лучшему первоначальному плану. На самом же деле ПМФ часто дает оптимальное или близкое к оптимальному начальное решение.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Вычислить разность для каждой строки (столбца), вычитая *наименьший* элемент этой строки (столбца) из *следующего* за ним по величине элемента той же строки (столбца).

*Шаг 2.* Отметить строку или столбец с самой большой разностью, а если таких несколько, выбрать среди них любую строку или любой столбец. В отмеченной строке или столбце выбрать переменную с самой минимальной стоимостью и придать ей наибольшее возможное значение. Скорректировать объем производства и спрос и вычеркнуть строку *или* столбец, соответствующие выполненному ограничению. Если ограничения по строке и столбцу выполняются одновременно, то вычеркнуть либо строку, либо столбец, а оставшемуся столбцу (строке) приписать нулевой спрос (объем производства). *Строка (или столбец) с нулевым объемом производства (или спросом) не используется в дальнейших вычислениях (на шаге 3).*

*Шаг 3.* (а) Если не вычеркнутой остается в точности одна строка или один столбец, то закончить вычисления.

(б) Если остается не вычеркнутой только одна строка (столбец) с *положительным* объемом производства (спросом), находим ненулевые значения перевозок в этой строке (столбце), используя метод минимальной стоимости.

(в) Если всем не вычеркнутым строкам и столбцам соответствуют нулевые объемы производства и величины спроса, найти *нулевые значения* перевозок, используя метод минимальной стоимости.

(г) В других случаях вычислить новые значения разностей для не вычеркнутых строк и столбцов и перейти к шагу 2. (Следует отметить, что строки и столбцы с нулевыми значениями объема производства и спроса не должны использоваться при вычислении этих разностей.)

*Пример 3. Построение предварительного плана приближенным методом Фогеля (ПМФ).*

*Методические рекомендации.* Этот метод является эвристическим и обычно приводит к лучшему первоначальному плану. На самом же деле ПМФ часто дает оптимальное или близкое к оптимальному начальное решение.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Вычислить разность для каждой строки (столбца), вычитая *наименьший* элемент этой строки (столбца) из *следующего* за ним по величине элемента той же строки (столбца).

*Шаг 2.* Отметить строку или столбец с самой большой разностью, а если таких несколько, выбрать среди них любую строку или любой столбец. В отмеченной строке или столбце выбрать переменную с самой минимальной стоимостью и придать ей наибольшее возможное значение. Скорректировать объем производства и спрос и вычеркнуть строку *или* столбец, соответствующие выполненному ограничению. Если ограничения по строке и столбцу выполняются одновременно, то вычеркнуть либо строку, либо столбец, а оставшемуся столбцу (строке) приписать нулевой спрос (объем производства). *Строка (или столбец) с нулевым объемом производства (или спросом) не используется в дальнейших вычислениях (на шаге 3).*

*Шаг 3.* (а) Если не вычеркнутой остается в точности одна строка или один столбец, то закончить вычисления.

(б) Если остается не вычеркнутой только одна строка (столбец) с *положительным* объемом производства (спросом), находим ненулевые значения перевозок в этой строке (столбце), используя метод минимальной стоимости.

(в) Если всем не вычеркнутым строкам и столбцам соответствуют нулевые объемы производства и величины спроса, найти *нулевые значения* перевозок, используя метод минимальной стоимости.

(г) В других случаях вычислить новые значения разностей для не вычеркнутых строк и столбцов и перейти к шагу 2. (Следует отметить, что строки и столбцы с нулевыми значениями объема производства и спроса не должны использоваться при вычислении этих разностей).

Решим задачу (табл. 2.15) при помощи ПМФ. Табл. 2.15 содержит первый набор разностей для строк и столбцов. Поскольку строка 3 имеет наибольшую разность ( $=14$ ) и  $c_{31} = 0$  является наименьшим коэффициентом стоимости в этой строке, переменной  $x_{31}$  приписывается значение 5. Ограничения по строке 3 и столбцу 1 выполняются одновременно. Пусть вычеркивается столбец 1. Остаток объема производства для строки 3 равен нулю.

Табл. 2.16 содержит новый набор разностей, полученный после вычеркивания столбца 1 в табл. 2.16. (Следует отметить, что строка 3 с нулевым объемом производства не используется при вычислении разностей).

Таблица 2.16

|                               | 1  | 2  | 3  | 4  | Объем произ-<br>водства | Разность<br>для строк |
|-------------------------------|----|----|----|----|-------------------------|-----------------------|
| 1                             | 10 | 0  | 20 | 11 | 15                      | 10                    |
| 2                             | 12 | 7  | 9  | 20 | 25                      | 2                     |
| 3                             | 0  | 14 | 16 | 18 | 5                       | 14                    |
| Объем по-<br>требления        | 5  | 15 | 15 | 10 |                         |                       |
| Разность<br>для столб-<br>цов | 10 | 7  | 7  | 7  |                         |                       |

Таблица 2.17

|                               | 1              | 2    | 3    | 4  | Объем про-<br>изводства       | Разность<br>для<br>строк |
|-------------------------------|----------------|------|------|----|-------------------------------|--------------------------|
| 1                             | 10             | 0    | 20   | 11 | <del>15</del> 10              | 10 11<br>11 11<br>11     |
| 2                             | 12             | 7    | 9    | 20 | <del>25</del> <del>10</del> 0 | 2 2<br>13 -              |
| 3                             | 0              | 14   | 16   | 18 | <del>5</del> 0                | 14 -                     |
| Объем по-<br>требления        | <del>5</del> 0 | 15 5 | 15 0 | 10 |                               |                          |
| Разность<br>для столб-<br>цов | 10             | 7    | 7    | 7  |                               |                          |
|                               | -              | 7    | 11   | 9  |                               |                          |
|                               | -              | 7    | -    | 9  |                               |                          |
|                               | -              | 7    | -    | 9  |                               |                          |

Строке 1 и столбцу 3 соответствуют одинаковые разности. При выборе столбца 3 переменная  $x_{23}$  принимает значение 15, в результате чего столбец 3 вычеркивается, а объем производства в строке 2 становится равным 10. Последовательное применение ПМФ дает  $x_{22} = 10$  (вычеркнуть строку 2),  $x_{12} = 5$  (вычеркнуть столбец 2),  $x_{14} = 10$  (вычеркнуть строку 1) и  $x_{34} = 0$ . (Проверьте!) Суммарные затраты равны 315 тыс. тенге; таким образом, полученное решение оказалось оптимальным.

Данный вариант ПМФ не включает правила выбора из одинаковых разностей. Однако тот или иной выбор из одина-

ковых разностей может оказать серьезное влияние на получение хорошего начального решения. Например, если в табл. 2.16 вместо столбца 3 выбрать строку 1, то получится худшее начальное решение. (Покажите, что при этом будет найдено решение  $x_{12}=15$ ,  $x_{23}=15$ ,  $x_{24}=10$ ,  $x_{31}=5$ , а суммарные затраты составят 335 тыс. тенге). Полная процедура ПМФ предусматривает наиболее выгодную стратегию выбора из одинаковых разностей.

*Пример 4.* Метод потенциалов для решения транспортной задачи

*Задание.* Решить методом потенциалов задачу, предварительный план построен методом северо-западного угла и представлен в таблице.

Таблица 2.18

|     |    |    |    |
|-----|----|----|----|
| 3   | 5  | 7  | 11 |
| 100 | 0  | 0  | 0  |
| 1   | 4  | 6  | 3  |
| 50  | 80 | 0  | 0  |
| 5   | 8  | 12 | 7  |
| 0   | 40 | 80 | 50 |

*Методические рекомендации.*

Шаг 1) Построение системы  $u_i, v_j$  для первоначального плана  $X$ .

Для построенного в нем первоначального плана определим систему  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ , удовлетворяющую уравнениям:

$$v_1 - u_1 = 3,$$

$$v_1 - u_2 = 1,$$

$$v_2 - u_2 = 4,$$

$$v_2 - u_3 = 8,$$

$$v_3 - u_3 = 12,$$

$$v_4 - u_3 = 7.$$

Полагая  $u_1 = 0$ , найдем:

$$v_1 = 3, u_2 = 2, v_2 = 6, u_3 = -2, v_3 = 10, v_4 = 5.$$

Введем их в табл. 2.19:

Таблица 2.19

| $v_i \backslash u_i$ | 3        | 6       | 10       | 5       |
|----------------------|----------|---------|----------|---------|
| 0                    | 3<br>100 | 5       | 7        | 11      |
| 2                    | 1<br>50  | 4<br>80 | 6        | 3       |
| -2                   | 5        | 8<br>40 | 12<br>80 | 7<br>50 |

*Шаг 2) Исследование построенной системы  $u_i, v_j$  на потенциальность.*

Каждый элемент  $c_{ij}$ , не являющийся  $X$  – выбранным, сравниваем с соответствующей разностью  $v_j - u_i$ . Если для всех таких элементов выполняются неравенства  $v_j - u_i \leq c_{ij}$ , то система  $u_i, v_j$  потенциальна и построенный план оптимален. Если же для некоторого  $c_{ij}$  имеет место неравенство  $v_j - u_i > c_{ij}$ , то система  $u_i, v_j$  не является потенциальной, план  $X$  не оптимален и необходимо перейти к следующему шагу. Для рассматриваемого примера имеем:

$$\begin{aligned} v_2 - u_1 &= 6 - 0 > 5 = c_{12}, \\ v_3 - u_1 &= 10 - 0 > 7 = c_{13}, \\ v_4 - u_1 &= 5 - 0 < 11 = c_{14}, \\ v_3 - u_2 &= 10 - 2 > 6 = c_{23}, \\ v_4 - u_2 &= 5 - 2 = 3 = c_{24}, \\ v_1 - u_3 &= 3 + 2 = 5 = c_{31}. \end{aligned}$$

Таким образом, система  $u_1 = 0, u_2 = 2, \dots, v_4 = 5$  не потенциальна и наш план не оптимален.

*Шаг 3) Улучшение плана.* Наибольшей разностью  $\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} > 0$  оказывается  $\alpha_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 3$ , так что клетка (1,3) должна быть введена в набор.

Строим цикл из клеток  $(1,3)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,1)$ ,  $(2,2)$ ,  $(3,2)$ ,  $(3,3)$  и отмечаем их попеременно знаками  $+$  (плюс) и  $-$  (минус), как в табл. 2.20.

Таблица 2.20

| $v_i \backslash u_i$ | 3         | 6        | 10        | 5       |
|----------------------|-----------|----------|-----------|---------|
| 0                    | -3<br>100 | 5        | +7        | 11      |
| 2                    | +1<br>50  | -4<br>80 | 6         | 3       |
| -2                   | 5         | +8<br>40 | -12<br>80 | 7<br>50 |

Находим наименьшую из перевозок  $x_{ij}$ , расположенных в клетках отрицательной полуцепи:  $\theta = x_{33} = 80$  (или  $\theta = x_{22} = 80$ ). Вычитаем  $\theta = 80$  из перевозок отрицательной полуцепи и прибавляем к перевозкам положительной. Исключив из цепи клетку  $(3,3)$ , в которой теперь  $x'_{33} = 80$ , получим новый набор, а с ним и новый план  $X'$  (табл. 2.21):

Таблица 2.21

| $v_i \backslash u_i$ | 3        | 6        | 10      | 5       |
|----------------------|----------|----------|---------|---------|
| 0                    | 3<br>20  | 5        | 7<br>80 | 11      |
| 2                    | 1<br>130 | 4<br>0   | 6       | 3       |
| -2                   | 5        | 8<br>120 | 12      | 7<br>50 |

*Исправление системы  $u_i, v_j$ .*

Для введенной в набор клетки  $(1,3)$  не выполняется условие потенциальности (см. табл. 2.22). Для его восстановления вычтем  $a_{13} = 3$  из  $v_3$ . Получим  $v'_3 = 10 - 3 = 7$ . Так как в третьем столбце, кроме  $(1,3)$ , нет других клеток набора, то для остальных

ных клеток набора потенциальность не нарушилась. Получим табл. 2.22:

Таблица 2.22

| $v_i \backslash u_i$ | 3        | 6        | 7       | 5       |
|----------------------|----------|----------|---------|---------|
| 0                    | 3<br>20  | 5        | 7<br>80 | 11      |
| 2                    | 1<br>130 | 4<br>0   | 6       | 3       |
| -2                   | 5        | 8<br>120 | 12      | 7<br>50 |

Исследование на потенциальность новой системы  $u'_i, v'_j$  производится так, как описано в шаге 2, путем сравнения разностей  $u' - v'_j$  с соответствующими  $c_{ij}$ .

В нашем примере это исследование проводится так:

$$\begin{aligned}
 v_2 - u_1 &= 6 > 5 = c_{12}, \\
 v_4 - u_1 &= 5 < 11 = c_{14}, \\
 v_3 - u_2 &= 5 < 6 = c_{23}, \\
 v_4 - u_2 &= 3 = c_{24}, \\
 v_1 - u_3 &= 5 = c_{31}, \\
 v_3 - u_3 &= 9 < 12 = c_{33}.
 \end{aligned}$$

Новая система  $u'_i, v'_j$  не является потенциальной, и план  $X'$  нуждается в улучшении.

Описанный общий шаг повторяем до тех пор, пока после конечного числа таких повторений не придем к оптимальному плану транспортной задачи. В нашем примере для получения оптимального плана, кроме первого шага, проделанного для иллюстрации, по мере описания алгоритма придется проделать еще два шага.

*Третий шаг.* 1) *Улучшение плана.* Вводим в набор клетку (1, 2), для которой  $\alpha_{12} = v_2 - u_1 - c_{12} = 1 > 0$ , строим замкнутую цепь из клеток (1,2), (1,1), (2,1), (2,2), отмечаем их попеременно знаками + (плюс) и - (минус) (табл. 2.23).

Таблица 2.23

|       |           |          |    |         |
|-------|-----------|----------|----|---------|
| $v_i$ | 3         | 6        | 7  | 5       |
| $u_i$ |           |          |    |         |
| 0     | -3<br>20  | +5<br>80 | 7  | 11      |
| 2     | +1<br>130 | -4<br>0  | 6  | 3       |
| -2    | 5         | 8<br>120 | 12 | 7<br>50 |

и перемещаем из отрицательной полуцепи в положительную минимальную перевозку  $\theta = 0$  отрицательной полуцепи. Получаем план, указанный в табл. 2.25 в котором перевозки не изменились, но в новый набор вместо клетки (2,2) вошла клетка (1,2).

Таблица 2.24

|       |          |          |         |         |
|-------|----------|----------|---------|---------|
| $v_i$ | 3        | 6        | 7       | 5       |
| $u_i$ |          |          |         |         |
| 0     | 3<br>20  | 5<br>0   | 7<br>80 | 11      |
| 2     | 1<br>130 | 4        | 6       | 3       |
| -2    | 5        | 8<br>120 | 12      | 7<br>50 |

-1                      -1

2) *Исправление системы  $u_i, v_j$ .* Для вошедшей в набор клетки (1, 2) не выполняется потенциальность. Поэтому исправляем  $v_2$ , вычитывая из него  $\alpha_{12} = 1$ :

$$v'_2 = v_2 - \alpha_{12} = 6 - 1 = 5.$$

При этом нарушается потенциальность клетки (3,2). Для ее восстановления вычитаем  $\alpha_{12} = 1$  из  $u_3$ :

$$u'_3 = -2 - 1 = -3.$$

После этого нарушается потенциальность клетки (3, 4), так что вычитаем

$$\alpha_{12} = 1 \text{ из } v_4:$$

$$v'_4 = 5 - 1 = 4.$$

В четвертом столбце больше не содержится клеток набора, и исправление  $u_i, v_j$  на этом заканчивается (табл. 2.25).

Таблица 2.25

| $v_j$ | 3         | 5          | 7       | 4       |
|-------|-----------|------------|---------|---------|
| $u_i$ |           |            |         |         |
| 0     | - 3<br>20 | + 5<br>0   | 7<br>80 | 11      |
| 2     | 1<br>130  | 4          | 6       | 3       |
| -3    | + 5       | - 8<br>120 | 12      | 7<br>50 |

3) *Исследование на потенциальность новой системы  $u'_i, v'_j$ .*

Новый план снова не оптимален, т. к.  $\alpha_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 3 - (-3) - 5 = 1 > 0$ .

*Третий шаг . 1) Улучшение плана.* Вводим в набор клетку (3,1), строим замкнутую цепь из клеток (3, 1), (3, 2), (1, 2), (1, 1), отмечаем их попеременно знаками + и - и перемещаем из отрицательной полуцепи в положительную наименьший элемент  $\theta = 20$  отрицательной полуцепи. Исключив из цепи клетку (1, 1), получаем новый набор, а с ним и новый план (табл. 2.26):

Таблица 2.26

| $v_i$ | 3        | 5        | 7       | 5       |
|-------|----------|----------|---------|---------|
| $u_i$ |          |          |         |         |
| 0     | 3        | 5<br>20  | 7<br>80 | 11      |
| 2     | 1<br>130 | 4        | 6       | 3       |
| -3    | 5<br>20  | 8<br>100 | 12      | 7<br>50 |

-  
1

Исправление системы  $u_i, v_j$ .

Для этого вычитаем  $a_{31}=1$  из  $v_1$  и  $u_2$ . Получим (табл. 2.27):

Таблица 2.27

| $u_i \backslash v_j$ | 2        | 5        | 7       | 4       |
|----------------------|----------|----------|---------|---------|
| 0                    | 3        | 5<br>20  | 7<br>80 | 11      |
| 1                    | 1<br>130 | 4        | 6       | 3       |
| -3                   | 5<br>20  | 8<br>100 | 12      | 7<br>50 |

Исследование на потенциальность новой системы  $u_i, v_j$ .

Легко проверить, что система  $u_i, v_j$  потенциальна, так что последний план оптимален. Стоимость перевозок по этому плану составляет  $w = 5 \times 20 + 7 \times 80 + 1 \times 130 + 5 \times 20 + 8 \times 100 + 7 \times 50 = 2040$ .

## 2.5. Решение транспортной задачи в среде Excel

Рассмотрим решение транспортной задачи в среде Excel. Внесем в электронную таблицу исходные данные (рис. 2.5). В ячейках B4:E6 внесены значения стоимости перевозки единицы продукции от 3-х производителей до 4-х потребителей. В ячейках G9:G11 внесены объемы производства продукции производителями, а в ячейки B13:E13 – объемы потребления потребителями.

Ячейки B9:E11, свободные от значений, зарезервированы для искомых переменных, т. е. объемов перевозимой продукции от производителей до потребителей. В ячейках F9:F11 внесены формулы, представляющую собой левую часть уравнений ограничений на объемы производства, в ячейки B12:E12 – левая часть уравнений ограничений на объемы потребления.

Формула вычисления значения целевой функции занесена в ячейку C16.

|    | A                         | B                                            | C                          | D  | E  | F | G                          | H | I |
|----|---------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|----|----|---|----------------------------|---|---|
| 1  |                           |                                              | <b>Транспортная задача</b> |    |    |   |                            |   |   |
| 2  |                           |                                              |                            |    |    |   |                            |   |   |
| 3  |                           | <b>Стоимость перевозки единицы продукции</b> |                            |    |    |   |                            |   |   |
| 4  |                           | 3                                            | 5                          | 7  | 11 |   |                            |   |   |
| 5  |                           | 1                                            | 4                          | 6  | 3  |   |                            |   |   |
| 6  |                           | 5                                            | 8                          | 12 | 7  |   |                            |   |   |
| 7  |                           |                                              |                            |    |    |   |                            |   |   |
| 8  |                           | <b>План перевозок (переменные)</b>           |                            |    |    |   | <b>Объемы производства</b> |   |   |
| 9  |                           |                                              |                            |    |    | 0 | 100                        |   |   |
| 10 |                           |                                              |                            |    |    | 0 | 130                        |   |   |
| 11 |                           |                                              |                            |    |    | 0 | 170                        |   |   |
| 12 |                           | 0                                            | 0                          | 0  | 0  |   |                            |   |   |
| 13 | <b>Объемы потребления</b> | 50                                           | 120                        | 80 | 50 |   |                            |   |   |
| 14 |                           |                                              |                            |    |    |   |                            |   |   |
| 15 |                           |                                              |                            |    |    |   |                            |   |   |
| 16 | <b>Целевая функция</b>    | 0                                            |                            |    |    |   |                            |   |   |
| 17 |                           |                                              |                            |    |    |   |                            |   |   |

Рис. 2.5. Окно подготовки данных

Теперь открываем окно Поиска решения в меню Сервис (Данные) (рис. 2.6).

Заполняем требуемые поля. Так в первом поле после наименования поля «оптимизировать целевую функцию» вставим ссылку на номер ячейки, где вычисляется целевая функция C16. Курсор подвести вначале на это поле, щелкнуть левой кнопкой мыши, затем курсором выделить ячейку целевой функции в электронной таблице.

Далее в окне Параметры поиска решения отмечаем кнопку под словом «минимуму». По наименованию «изменяя ячейки переменных» вставляем номера ячеек для переменных B9:E11. Самое большое поле под наименованием «В соответствии с ограничениями» окна Параметры поиска решения – окно ввода уравнении ограничения. Как показано на рис. 2.6 они вносятся поочередно, путем нажатия на кнопку «Добавить». После чего появляется окно «Добавление ограничения» (рис. 2.7).

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Рис. 2.6. Окно «Параметры Поиска решения»

Добавление ограничения

Ссылка на ячейки:

Ограничение:

Рис. 2.7. Окно «Добавление ограничения»

Добавив все ограничения, нажимаем на кнопку «Найти решение». Решение задачи появится в электронной таблице (рис. 2.8). Будет заполнена таблица искомых переменных и значение целевой функции (1540).

|    | A                         | B                                            | C                          | D         | E         | F                          | G          | H | I |
|----|---------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|-----------|-----------|----------------------------|------------|---|---|
| 1  |                           |                                              | <b>Транспортная задача</b> |           |           |                            |            |   |   |
| 2  |                           |                                              |                            |           |           |                            |            |   |   |
| 3  |                           | <b>Стоимость перевозки единицы продукции</b> |                            |           |           |                            |            |   |   |
| 4  |                           | 3                                            | 5                          | 7         | 11        |                            |            |   |   |
| 5  |                           | 1                                            | 4                          | 6         | 3         |                            |            |   |   |
| 6  |                           | 5                                            | 8                          | 12        | 7         |                            |            |   |   |
| 7  |                           |                                              |                            |           |           |                            |            |   |   |
| 8  |                           | <b>План перевозок (переменные)</b>           |                            |           |           | <b>Объемы производства</b> |            |   |   |
| 9  |                           | 0                                            | 20                         | 80        | 0         | 100                        | <b>100</b> |   |   |
| 10 |                           | 0                                            | 80                         | 0         | 50        | 130                        | <b>130</b> |   |   |
| 11 |                           | 50                                           | 20                         | 0         | 0         | 70                         | <b>170</b> |   |   |
| 12 |                           | 50                                           | 120                        | 80        | 50        |                            |            |   |   |
| 13 | <b>Объемы потребления</b> | <b>50</b>                                    | <b>120</b>                 | <b>80</b> | <b>50</b> |                            |            |   |   |
| 14 |                           |                                              |                            |           |           |                            |            |   |   |
| 15 |                           |                                              |                            |           |           |                            |            |   |   |
| 16 | <b>Целевая функция</b>    |                                              | <b>1540</b>                |           |           |                            |            |   |   |
| 17 |                           |                                              |                            |           |           |                            |            |   |   |

Рис. 2.8. Окно результатов решения

### *Задание для самостоятельной работы*

1) Решить в среде Excel следующие задачи, модели которых описывают производственную задачу.

2) Построить двойственную задачу к задачам в задании 1, решить двойственную задачу и сделать анализ полученного решения.

1. Решить задачи симплекс-методом

- |                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$<br>1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$                                                         | $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 - \text{свободные} \\ \text{переменные.} \end{cases}$         | $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_2 \geq 0, x_1 - \text{свободные} \\ \text{переменные} \end{cases}$ |
| $z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>4) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 - \text{свободные} \\ \text{переменные.} \end{cases}$ | $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>5) $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq -3, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 - \text{свободные} \\ \text{переменные} \end{cases}$ | $z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$                                        |

2. Построить двойственную задачу к следующим задачам.

- |                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | $z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_2, x_1 \geq 0. \end{cases}$ | $z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ |
| $z = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>4) $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + 3x_2 \geq -3, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | $z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>5) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | $z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$<br>при ограничениях<br>6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ |

3. *Задания по транспортной задаче.* Построить математические модели описанных задач и решить их методом потенциалов (используя предварительные методы для задач 1 и 3 – северо-западного угла, для задач 2 и 4 – метод минимальной стоимости, для задач 5 и 6 – метод Фогеля). Проверить решение задачи в пакете *Поиск решения* среды *Excel*.

1. Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки, соответственно, на 17, 12 и 32 т. овощехранилища имеют соответственно 20, 20, 15 и 25 т. Тарифы (в д.е. за 1 т) указаны в следующей таблице:

| Овощехранилища | Магазины |   |   |
|----------------|----------|---|---|
|                | 1        | 2 | 3 |
| 1              | 2        | 7 | 4 |
| 2              | 3        | 2 | 1 |
| 3              | 5        | 6 | 2 |
| 4              | 3        | 4 | 7 |

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

2. Имеются два склада готовой продукции:  $A_1$  и  $A_2$  с запасами однородного груза 200 и 300 т. Этот груз необходимо доставить трем потребителям:  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  в количестве 100, 150, 250 т соответственно. Стоимость перевозки 1 т груза из склада  $A_1$  потребителям  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  равна 5, 3, 6 д.е., а из склада  $A_2$  тем же потребителям – 3, 4, 2 д.е. соответственно.

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

3. Имеются четыре оперативные базы и три цели. В силу различия в типах самолетов и высоте полета вес бомб, доставляемых с любой базы к любой цели, определяется по следующей таблице:

| База | Цель |   |   |
|------|------|---|---|
|      | 1    | 2 | 3 |
| 1    | 8    | 6 | 5 |
| 2    | 6    | 6 | 6 |
| 3    | 10   | 8 | 4 |
| 4    | 8    | 6 | 4 |

Дневная интенсивность каждой базы составляет 150 самолето-вылетов в день. На каждую цель необходимо организовать 200 самолето-вылетов в день.

Определите план вылетов с каждой базы к каждой цели, дающий максимальный общий вес бомб, доставляемых к целям.

4. Заводы № 1, 2, 3 производят однородную продукцию в количестве соответственно 500, 400 и 510 единиц. Себестоимость производства единицы продукции на заводе № 1 составляет 25 д.е., на заводе № 2 – 20 д.е., на заводе № 3 – 23 д.е. Продукция отправляется в пункты А, В, С, потребности которых равны 310, 390 и 450 единицам. Стоимости перевозок 1 ед. продукции заданы матрицей

|   |   |   |
|---|---|---|
| 7 | 5 | 1 |
| 3 | 2 | 4 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 4 |

Составьте оптимальный план перевозок продукции при условии, что коммуникации между заводом № 2 и пунктом А не позволяют пропускать в рассматриваемый период более 250 единиц продукции.

5. Имеются три специализированные мастерские по ремонту двигателей. Их производственные мощности равны соответственно 100, 700, 980 ремонтов в год. В пяти районах, обслуживаемых этими мастерскими, потребность в ремонте равна соот-

ветственно 90, 180, 150, 200 двигателей в год. Затраты на перевозку одного двигателя из районов к мастерским следующие:

| Районы | Мастерские |     |     |
|--------|------------|-----|-----|
|        | 1          | 2   | 3   |
| 1      | 4,5        | 3,7 | 8,3 |
| 2      | 2,1        | 4,3 | 2,4 |
| 3      | 7,5        | 7,1 | 4,2 |
| 4      | 5,3        | 1,2 | 6,2 |

Спланируйте количество ремонтов каждой мастерской для каждого из районов, минимизирующее суммарные транспортные расходы.

6. Имеется 3 ракет и 5 целей. Вероятность поражения цели каждой из ракет задана в следующей таблице:

| Ракеты | Цели |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|
|        | 1    | 2    | 3    | 4    |
| 1      | 0,12 | 0,02 | 0,50 | 0,43 |
| 2      | 0,71 | 0,18 | 0,81 | 0,05 |
| 3      | 0,84 | 0,76 | 0,26 | 0,37 |

Распределите ракеты по целям так, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей было максимальным.

### *Контрольные вопросы*

1. Основные этапы симплекс-метода Зуховицкого;
2. Один шаг МЖИ;
3. Первая теорема двойственности;
4. Вторая теорема двойственности;
5. Правило построения двойственной задачи;
6. Теорема потенциальности;
7. Предварительные методы решения транспортной задачи;
8. Метод потенциалов.

### 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ

#### 3.1. Методы решения задачи о кратчайшем пути

Задачи нахождения кратчайших и длиннейших путей в графах возникают в различных прикладных областях науки и техники, включая расчёт временных параметров в системах сетевого планирования и управления, поиск оптимальных маршрутов в транспортных сетях и сетях связи, при раскладке и монтаже электрических цепей сетей, вычислительных машин и пр.

При поиске экстремальных путей в графе  $(X, U)$ , с  $(n+1)$  вершинами предполагается, что каждой дуге  $(i, j) \in U$  отнесено рациональное число  $l_{ij}$  или "длина" дуги (длина дуги может быть и отрицательной). Под длиной пути понимается сумма длин входящих в него дуг.

В этом случае возникают задачи о кратчайших (длиннейших) путях в  $(X, U)$ :

1) Определение кратчайшего пути из заданной вершины скажем 0 до другой вершины скажем  $n$ ;

2) Определение длиннейшего пути от вершины 0 до вершины  $n$ .

Предлагаемые далее алгоритмы позволяют находить также кратчайшие (длиннейшие) пути между любыми парами вершин в графе  $(X, U)$ . Задача нахождения длиннейшего элементарного пути может быть решена различными способами. Для определения пути минимальной длины или иначе для решения задачи о кратчайшем пути рассмотрим алгоритмы Форда, Данцига и Беллмана-Калаба. Рассмотрим прикладную задачу, которую сформулируем как задачу о поиске экстремальных путей (кратчайших и длиннейших путей, путей максимальной эффективности). Постановка и математическая модель задачи о кратчайшем пути рассмотрено в п 1.2.10.

### 3.1.1. Алгоритм Форда

Алгоритм Форда состоит из следующих шагов.

1. Помечаем каждую вершину  $i$  индексом  $\lambda_i$ , которое означает минимальное значение длины пути от начальной вершины до вершины  $i$ .

Первоначально принимаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, \lambda_i = +\infty, i \neq 0 \\ \begin{cases} \lambda_i + l_{ij} < \lambda_j, & \lambda_j = \lambda_i + l_{ij} \\ \lambda_j - \lambda_i > l_{ij}, & \lambda_j > l_{ij} + \lambda_i \end{cases} \end{aligned}$$

2. Находим такую дугу  $(i, j)$ , для которой затем заменяем индекс  $\lambda_j$  индексом  $\lambda'_j = \lambda_i + l_{ij}$ , при котором  $\lambda_i + l_{ij} < \lambda_j$ .

Продолжаем таким образом до тех пор, пока остаётся хотя бы одна вершина  $i$ , для которой можно уменьшить  $\lambda_i$ .

3. После того, как индексы установятся, находим такую вершину  $i_1$ , что  $\lambda_n - \lambda_{i_1} = l_{i_1 n}$ . Далее, находим такую вершину  $i_2$ , что  $\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} = l_{i_2 i_1}$  и т. д. Если все контуры графа положительной длины, то последовательность  $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_k}, \lambda_{i_{k-1}}, \dots, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_n$  будет обязательно элементарным путём (докажите самостоятельно) и значит в некоторый момент будет  $\lambda_{i_s} = \lambda_0$ . Путь  $(0, i_s, i_{s-1}, \dots, i_2, i_1, \lambda_n, n)$  длины  $\lambda_n$  и будет искомым кратчайшим путём. Процедура определения кратчайшего пути сложнее, если граф имеет контуры нулевой длины, т. к. в этом случае кратчайший путь не обязательно должен быть элементарным.

Если граф является сетью (т. е. не имеет контуров), алгоритм существенно упрощается. Перенумеруем вершины таким образом, что не существует пути, идущего из вершины с большим номером в вершину с меньшим номером (такая нумерация вершин сети называется правильной).

Полагаем последовательно

$$\lambda_0 = 0$$

$$\lambda_1 = l_{01}$$

$$\lambda_2 = \min[\lambda_0 + l_{02}, \lambda_1 + l_{12}]$$

$$\lambda_j = \min_{i \leq j} [\lambda_i + l_{ij}]$$

$$\lambda_n = \min_{0 \leq i \leq n} [\lambda_i + l_{in}]$$

где  $l_{ij} = +\infty$ , если  $(i, j) \notin U$ . Значение  $\lambda_n$  равно длине кратчайшего пути.

*Пример 3.1.* Определить путь минимальной длины алгоритмом Форда.

На рис. 3.1 приведён граф с правильной нумерацией вершин.

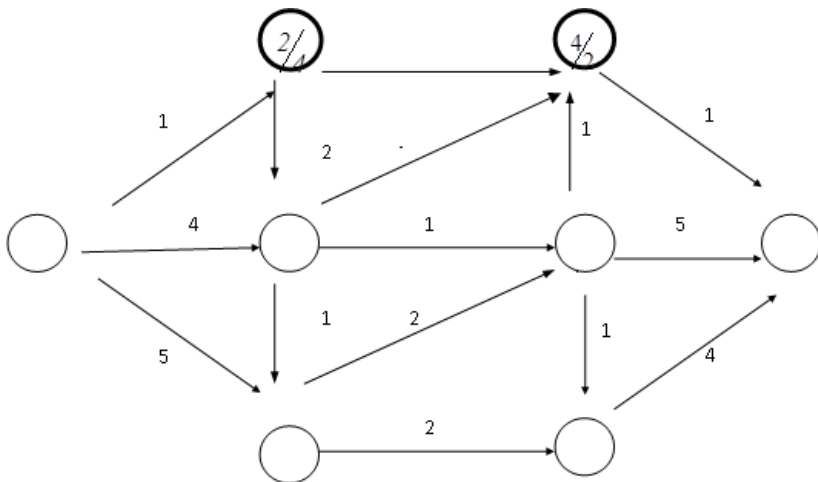


Рис. 3.1. Граф

Числа, поставленные у дуг, равны их длинам. Для удобства вычислений каждый кружок разделён на две части. В верхней будет записан номер вершины  $i$ , а в нижней – её индекс  $\lambda_i$ .

Имеем последовательно

$$\lambda_0 = 0 ,$$

$$\lambda_1 = l_{01} ,$$

$$\lambda_2 = \min(0 + 4, 1 + 2) = 3 ,$$

$$\lambda_3 = \min(0 + 6, 3 + 1) = 4 ,$$

$$\lambda_4 = \min(3 + 5, 4 + 2) = 6 ,$$

$$\lambda_5 = \min(4 + 2, 6 + 3) = 6 ,$$

$$\lambda_6 = \min(6 + 1, 1 + 7) = 7 ,$$

$$\lambda_7 = \min(7 + 2, 6 + 5, 6 + 4) = 9 .$$

Двигаясь от конца к началу, определяем дуги, входящие в кратчайший путь, как дуги, для которых  $\lambda_j - \lambda_i = l_{ij}$ . Кратчайший путь выделен на рис. 3.2. двойными линиями. Алгоритм Форда, удобный в машинной реализации, не совсем удобен при ручных вычислениях, если граф не является сетью или если нумерация вершин не является правильной .

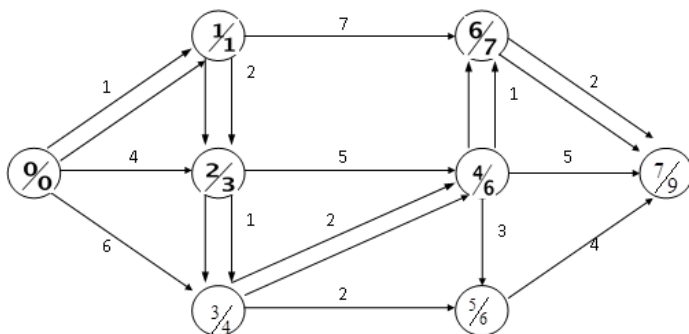


Рис. 3.2. Кратчайший путь в заданном графе

### 3.1.2. Алгоритм Данцига

Будем полагать, что длины всех дуг неотрицательны. Алгоритма Данцига состоит из следующих этапов.

1. Помечаем вершину 0 индексом  $\lambda_0 = 0$ .

2. Пусть уже помечено некоторое множество вершин.

Обозначим  $Q$  множество непомеченных вершин, смежных с помеченными. Для каждой вершины  $j \in Q$  вычисляем величину  $\mu_j = \min(\lambda_i + l_{ij})$ , где минимум берётся по всем помеченным вершинам  $i$ , смежным с  $j$ . Помечаем вершину  $j$ , для которой  $\mu_j$  минимальна, индексом  $\lambda_j = \mu_j$ . Подобную процедуру повторяем, пока не будет помечена вершина  $n$ .

3. Длина кратчайшего пути равна индексу  $\lambda_n$ , а сам путь определяется аналогично тому, как это делается в предыдущем алгоритме.

*Пример 3.2.* Граф приведён на рис. 3.3.

1 шаг  $\lambda_0 = 0, Q = \{1, 2, 3\}$ . Вычисляем  $\mu_1 = l_{01} = 1, \mu_2 = 3, \mu_3 = 5$ . Помечаем вершину 1 индексом  $\lambda_1 = 1$ .

2 шаг  $Q = \{2, 3, 4\}, \mu_2 = 3, \mu_3 = 5, \mu_4 = 2$ . Помечаем вершину 4 индексом  $\lambda_4 = 2$ .

3 шаг  $Q = \{2, 3, 7\}, \mu_2 = 3, \mu_3 = 5, \mu_7 = 3$ . Помечаем вершину 7 индексом  $\lambda_7 = 3$ .

Поскольку вершина 7 помечена, то кратчайший путь найден. Это путь (0, 1, 4, 7) длины 3. Заметим, что в данном случае нам не потребовалось даже рассматривать все вершины графа.

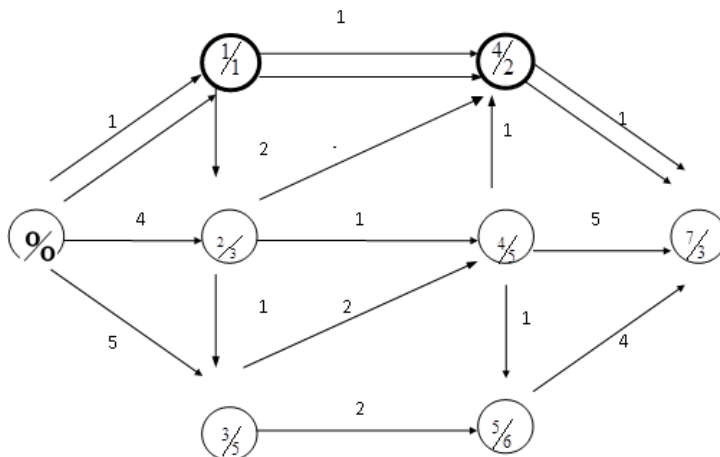


Рис. 3.3. Граф

### 3.1.3. Алгоритм Беллмана-Калаба

Этот алгоритм использует принцип оптимальности: "любой подпуть минимального пути является минимальным путем между соответствующими вершинами". Рассмотрим граф  $G = [E, U]$  с  $|E| = n + 1$  и пронумеруем вершины от 0 до  $n$ .

Пусть  $c_{ij} \geq 0$  – значение, приписанное дуге  $(X_i, X_j)$ . Положим  $c_{ij} = \infty$ , если  $(X_i, X_j) \notin U$ , и  $c_{ij} = 0$ , если  $i = j$ . Найдем такой путь

$$(X_0, X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}, X_n), \quad (3.1)$$

$$\text{что} \quad c_{0i_1} + c_{i_1i_2} + \dots + c_{i_k n} \quad (3.2)$$

минимально. Задача сводится к решению системы

$$v_i = \min_{j \neq i} (v_j + c_{ij}), i = \overline{0, n-1}, \quad (3.3)$$

$$v_n = 0, \quad (3.4)$$

где через  $v_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , обозначены значения оптимальных путей от  $X_i$  до  $X_n$ .

$$\text{Положим} \quad v_i^{(0)} = c_{in}, i = \overline{0, n-1}, \quad (3.5)$$

$$v_n^{(0)} = 0. \quad (3.6)$$

Вычисляем последовательно

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} + c_{ij}), \quad i = \overline{0, 1, 2, \dots, n-1}, \quad j = \overline{0, 1, 2, \dots, n}; \quad (3.7)$$

$$v_i^k = \min_{j \neq i} (v_j^{(k-1)} + c_{ij}), i = \overline{0, 1, 2, \dots, n-1}, \quad j = \overline{0, 1, 2, \dots, n}; \quad (3.8)$$

$$v_n^{(k)} = 0 \quad (3.9)$$

до тех пор, пока не будет выполнено равенство

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}, i = \overline{0, 1, 2, \dots, n}, \quad (3.10)$$

и тогда  $v_0^{(k)}$  будет минимальным значением оптимального пути от  $X_0$  до  $X_n$ .

Легко показать, что для его нахождения достаточно  $n-1$  итераций.

Этот алгоритм использует принцип оптимальности: "любой подпуть минимального пути является минимальным путем между соответствующими вершинами".

*Пример 3.3.* Матрица  $\|c\|$  (стоимостей) представлена на рис. 3.4, а граф на рис. 3.5.

Имеем  $v_0^{(0)} = c_{08} = \infty$ ,  $v_1^{(0)} = c_{18} = \infty$ ,  $v_2^{(0)} = c_{28} = \infty$ ,  $v_3^{(0)} = c_{38} = \infty$ ,  $v_4^{(0)} = c_{48} = 14$ ,  $v_5^{(0)} = c_{58} = 10$ ,  $v_6^{(0)} = c_{68} = 3$ ,  $v_7^{(0)} = c_{78} = 1$ ,  $v_8^{(0)} = c_{88} = 0$ .

|       | $X_0$    | $X_1$    | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    | $X_6$    | $X_7$    | $X_8$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_0$ | 0        | 7        | 8        | 9        | 15       | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 6        | $\infty$ | 4        | $\infty$ | $\infty$ | 15       | $\infty$ |
| $X_2$ | 7        | $\infty$ | 0        | 3        | $\infty$ | 6        | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $X_3$ | 5        | $\infty$ | $\infty$ | 0        | 6        | 5        | 16       | $\infty$ | $\infty$ |
| $X_4$ | $\infty$ | 3        | $\infty$ | $\infty$ | 0        | $\infty$ | 8        | $\infty$ | 14       |
| $X_5$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 2        | $\infty$ | 0        | 4        | 8        | 10       |
| $X_6$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0        | $\infty$ | 4        | 0        | 2        | 3        |
| $X_7$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 2        | 0        | 1        |
| $X_8$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 10       | $\infty$ | $\infty$ | 0        |

Рис. 3.4

Вычисляем последовательно

$$v_0^{(1)} = \min_{j \neq 0} (v_j^{(0)} + c_{0j}) = \min [v_1^{(0)} + c_{01}, v_2^{(0)} + c_{02}, \dots, v_8^{(0)} + c_{08}] = 29,$$

$$v_1^{(1)} = \min_{j \neq 1} (v_j^{(0)} + c_{1j}) = \min [v_0^{(0)} + c_{10}, v_2^{(0)} + c_{12}, \dots, v_8^{(0)} + c_{18}] = 16,$$

$$v_2^{(1)} = \min_{j \neq 2} (v_j^{(0)} + c_{2j}) = \min [v_0^{(0)} + c_{20}, v_1^{(0)} + c_{21}, \dots, v_8^{(0)} + c_{28}] = 16,$$

$$v_3^{(1)} = \min_{j \neq 3} (v_j^{(0)} + c_{3j}) = \min [v_0^{(0)} + c_{30}, v_1^{(0)} + c_{31}, \dots, v_8^{(0)} + c_{38}] = 15, \dots$$

Результаты сведены в нижеследующую табл. 3.1.

Так как  $v_i^{(4)} = v_i^{(3)}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ , то  $k=4$  и  $v_0^{(4)} = 21$  – минимальное значение. По  $v_i^{(k-1)}$ ,  $v_i^{(k-2)}, \dots, v_i^{(0)}$  легко выписать оптимальные пути.

Таблица 3.1

| Значение оптимального пути от $X_i$ до $X_j$ длины, не превосходящей $k$ | $v_0^{(k)}$ | $v_1^{(k)}$ | $v_2^{(k)}$ | $v_3^{(k)}$ | $v_4^{(k)}$ | $v_5^{(k)}$ | $v_6^{(k)}$ | $v_7^{(k)}$ | $v_8^{(k)}$ |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $k = 0$                                                                  | $\infty$    | $\infty$    | $\infty$    | $\infty$    | 14          | 10          | 3           | 1           | 0           |
| $k = 1$                                                                  | 29          | 16          | 16          | 15          | 11          | 7           | 3           | 1           | 0           |
| $k = 2$                                                                  | 23          | 15          | 13          | 12          | 11          | 7           | 3           | 1           | 0           |
| $k = 3$                                                                  | 21          | 15          | 13          | 12          | 11          | 7           | 3           | 1           | 0           |
| $k = 4$                                                                  | 21          | 15          | 13          | 12          | 11          | 7           | 3           | 1           | 0           |

### 3.2. Метод максимального парасочетания

Постановка и математическая модель задачи о назначении была дана в п. 1.

В виду того, что задача о назначении относится к классу задач дискретного программирования, то ее можно решить классическим методом «Ветвей и границ». Для решения задачи о назначении были разработаны венгерский метод и метод максимального парасочетания. Последний метод будет рассмотрен в данном разделе.

Пусть для определённости  $n \leq m$  и  $\max_j C_{ij} > 0$  для всех  $i$  (если  $\max_j C_{ij} \leq 0$ , то вершину  $i$  можно не рассматривать).

1 шаг. Определяем для каждой строки матрицы

$$C_{ij} = \max_k C_{ik}.$$

Строим матрицу  $X$  согласно следующему правилу:

$$X_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Если при этом  $\sum_{i=1}^n X_{ij}^0 \leq 1$ , то получено оптимальное реше-

ние. Пусть для некоторой вершины  $j_1$  имеет место  $\sum_{i=1}^n X_{ij}^0 > 1$ .

2 шаг. Построим двудольный граф, с левой стороны пронумеруем вершины  $i$ , с правой стороны – вершины  $j$ . Граф представлен на рис. 3.5. Рёбра  $(i, j)$ , для которых  $X_{ij}^0 = 1$ , ориентируем в направлении от  $j$  к  $i$  и полагаем  $C_{ji} = -C_{ij}$ ; рёбра, для которых  $X_{ij}^0 = 0$ , ориентируем в направлении от  $i$  к  $j$ . Определяем путь  $\mu$  максимальной длины, начинающийся в вершине  $j_1$  и кончающийся либо в одной из вершин  $i$ , либо в вершине  $j$ , такой что  $\sum_{i=1}^n X_{ij}^0 = 0$ . Путь максимальной длины находим одним из ранее рассмотренных методов (например, Форда).

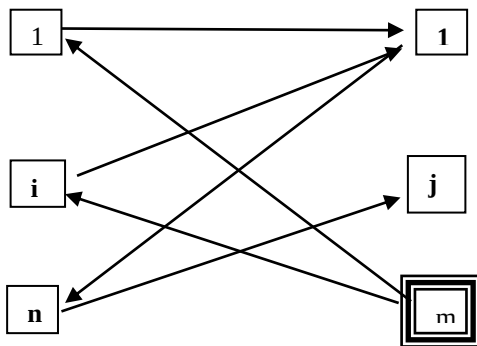


Рис. 3.5. Двудольный граф

Полагаем

$$X_{ij}^1 = \begin{cases} X_{ij}^0, & (i, j) \notin \mu \\ (1 - X_{ij}^0), & (i, j) \in \mu \end{cases}$$

Если для всех  $j$  имеет место  $\sum_{i=1}^n X_{ij}^1 \leq 1$ , то  $\{X_{ij}^1\}$  оптимальное решение. В противном случае повторяем шаг 2 для значений  $\{X_{ij}^1\}$ . Очевидно, за конечное число шагов будут получены значения  $\{X_{ij}\}$ , для которых имеет место  $\sum_{i=1}^n X_{ij} \leq 1$  для всех  $j$ . Эти значения и определяют оптимальное решение задачи парасочетания.

*Пример 3.* 4 решения задачи о назначении методом максимального парасочетания.

Исходные данные задачи о назначении заданы в табл. 3.2.

Таблица 3.2

|       | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $i=1$ | 7     |       | 4     |
| $i=2$ | 5     | 3     |       |
| $i=3$ |       | 2     | 6     |

1 шаг. Определяем для каждой строки матрицы

$$C_{ij} = \max_k C_{ik} .$$

$$C_{11} = 7, C_{21} = 5, C_{33} = 6 .$$

Строим матрицу  $X$  согласно следующему правилу:

$$X_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

$$X_{ij}^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Проверим условие

$$\sum_{i=1}^n X_{ij}^0 \leq 1$$

для каждого столбца матрицы  $X^0$ .

$$x_{11} + x_{21} = 2; x_{22} + x_{32} = 0; x_{13} + x_{33} = 1.$$

Условие не выполняется для первого столбца. Строим двудольный граф, представленный на рис. 3.7. На графе обозначим вершины  $i$  следующим образом 1, 2 и 3, а вершины  $j$  — 1', 2' и 3'.

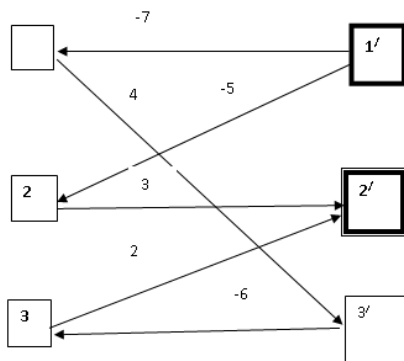


Рис. 3.6. Двудольный граф

Определим имеющиеся пути от вершины 1':

1)  $M_1 = (1', 1, 3', 3, 2')$ . Определим длину пути  $\lambda_{M_1} = -7$ .

2)  $M_2 = (1', 2, 2')$ . Определим длину пути  $\lambda_{M_2} = -2$ .

Путь максимальной длины  $M_2$ .

Строим новую матрицу  $X^1$  (рис. 3.7).

$$X_{ij}^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Рис. 3.7. Матрица  $X^1$

Как видим, условие выполняется, сумма элементов по каждому столбцу равна 1.

### 3.3. Методы решения задачи о максимальном потоке

#### 3.3.1. Потоки на сетях. Основные понятия

Теория потоков возникла первоначально в связи с разработкой методов решения задач, связанных с рациональной (максимальной) перевозкой грузов. Также к задачам о максимальном потоке сводятся и другие важные оптимизационные задачи, такие как:

- определение минимального по стоимости плана выполнения комплекта работ при заданной его продолжительности;
- определение максимального количества информации, которая может быть передана по разветвленной сети каналов связи из одного пункта в другой;
- определение оптимальных назначений;
- организация снабжения;
- определение планов по наиболее экономному строительству энергетических сетей, нефте- и газопроводов, железных и шоссейных дорог и другие прикладные задачи.

Основным в теории потоков является понятие сети. Сеть – это конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины  $I$ , которая является входом графа (исток) графа, к вершине  $S$ , которая является выходом (сток) графа. Общее количество вершин будем обозначать  $n$ .

Для наглядности будем представлять, что по ребрам  $(i, j)$  сети из истока  $I$  в сток  $S$  направляется некоторая продукция (например, груз, ресурс, информация и т. д.).

Ребрам сети присваивается один или несколько численных параметров. Например, количество ресурсов или груза из одного вершины (пункта) в другой. Максимальное количество  $r_{ij}$  продукции, которое может пропустить за единицу времени ребро  $(i, j)$ , называют его пропускной способностью. В общем слу-

чае,  $r_{ij} \neq r_{ji}$ , где первое число – пропускная способность от вершины  $i$  к  $j$ , второе – в обратном направлении. Пропускные способности сети, для удобства, задаются в виде квадратной матрицы  $n$ -го порядка. Поскольку  $r_{ii} = 0$ , на главной диагонали данной матрицы стоят нули. Пример сети представлен на рис. 3.8, матрица пропускных способностей – в табл. 3.3.

Искомое количество продукции  $x_{ij}$ , проходящее через ребро  $(i, j)$  в единицу времени, называется потоком по ребру  $(i, j)$ .

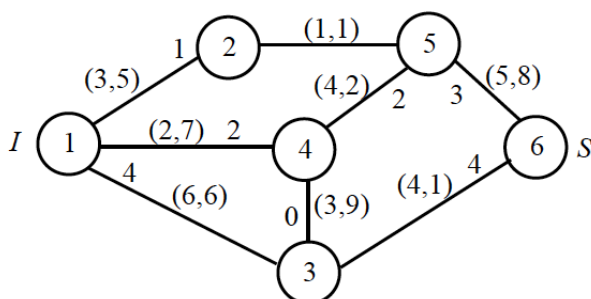


Рис. 3.8. Граф сети

Таблица 3.3

Пропускная способность сети

| $i, j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| 1      | 0 | 3 | 6 | 2 | 0 | 0 |
| 2      | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3      | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 4 |
| 4      | 7 | 0 | 9 | 0 | 4 | 0 |
| 5      | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 5 |
| 6      | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 0 |

Будем считать, что если поток из вершины  $i$  в вершину  $j$  равен  $x_{ij}$ , то поток из вершины  $j$  в вершину  $i$  равен  $-x_{ij}$ , т. е.

$$x_{ij} = -x_{ji} \quad (3.11)$$

Если поток по ребру  $X_{ij}$  меньше его пропускной способности, т. е.  $X_{ij} < r_{ij}$ , то ребро  $(i, j)$  называется ненасыщенным, если же  $X_{ij} = r_{ij}$  – насыщенным.

Совокупность потоков  $X = x_{ij}$  по всем ребрам  $(i, j)$  сети называют потоком по сети или просто потоком.

Из физического смысла грузопотока следует, что поток по каждому ребру не может превышать его пропускной способности:

$$x_{ij} \leq r_{ij}. \quad (3.12)$$

Для любой вершины, кроме истока  $I$  и стока  $S$ , количество продукции, поступающего в эту вершину, равно количеству продукции, вытекающего из него, т. е.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, i \neq I, S \quad (3.13)$$

Это условие называют условием сохранения потока, которое означает, что в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают. Следовательно, общее количество продукции, вытекающего из истока  $I$ , совпадает с общим количеством продукции, поступающего в сток  $S$ :

$$f = \sum_{j=1}^n x_{Ij} = \sum_{i=1}^n x_{iS}, \quad (3.14)$$

где  $i$  – начальные вершины ребер, входящих в  $S$ ;  $j$  – конечные вершины ребер, исходящих из  $I$ .

Таким образом, задачу о максимальном потоке можно сформулировать следующим образом: найти совокупность  $X = \{x_{ij}\}$  потоков  $x_{ij}^*$  всем ребрам  $(i, j)$  сети, которая удовлетворяет условиям (3.11)–(3.13) и максимизирует линейную функцию (3.14).

Отметим, что числа  $x_{ij}$  образуют квадратную матрицу  $n$ -го порядка, на главной диагонали расположены нули, а элементы, симметрично главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку. Откуда следует, что поток  $X = \{x_{ij}\}$  на сети представляет собой набор  $n^2$  чисел, удовлетворяющих условиям (3.11)–(3.13).

Рассмотрим на примере, представленного на рис. 3.9, как организовать какой-нибудь поток на сети. Рассмотрим, например путь  $1-2-5-6$  – это полный путь от истока к стоку. Ребро  $(2,5)$ , лежащее на этом пути, не позволяет пропустить больше 1 единицы продукции. Следовательно, поток по данному пути мощность в 1 единицу будет допустимым:  $x_{21} + x_{25} = (-x_{21}) + x_{25} = (-1) + 1 = 0$ .

На пути  $1-4-5-6$  можно пропустить 2 единицы продукции. На пути  $1-3-6$  можно пропустить 4 единицы продукции.

В результате потоки по ребрам равны:  $x_{12} = 1$ ,  $x_{13} = 4$ ,  $x_{14} = 2$ ,  $x_{25} = 1$ ,  $x_{36} = 4$ ,  $x_{56} = 1 + 2 = 3$ , а по остальным ребрам сети потоки равны 0.

В соответствии с формулой (3.14) определяем мощность сформированного потока:

$$f = x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{36} + x_{56} = 7 \text{ ед.}$$

Запишем полученный поток  $X = \{x_{ij}\}$  в виде матрицы (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Поток  $X = \{x_{ij}\}$

| $i, j$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 |
|--------|----|----|----|----|----|---|
| 1      | 0  | 1  | 4  | 2  | 0  | 0 |
| 2      | -1 | 0  | 0  | 0  | 1  | 0 |
| 3      | -4 | 0  | 0  | 0  | 0  | 4 |
| 4      | -2 | 0  | 0  | 0  | 2  | 0 |
| 5      | 0  | -1 | 0  | -2 | 0  | 3 |
| 6      | 0  | 0  | -4 | 0  | -3 | 0 |

### 3.3.2. Разрез на сети. Теорема Форда-Фалкерсона

Пусть дана сеть. Разобьем множество вершин сети на два непересекающихся подмножества  $A$  и  $B$  так, чтобы исток  $I$  попал в подмножество  $A$ , а сток  $S$  – в подмножество  $B$ . В таком случае говорят, что на сети произведен разрез, отделяющий исток  $I$  от стока  $S$ . В результате данного разбиения вершин появятся ребра  $(i, j)$ , конечные точки которых окажутся в разных подмножествах. Совокупность ребер  $(i, j)$ , начальные точки которых принадлежат подмножеству  $A$ , а конечные – подмножеству  $B$ , называют разрезом сети и обозначают  $A|B$ .

На рис. 3.9 представлена сеть, где в скобках указана пропускная способность ребра в обоих направлениях и число потоков по ребру. Стрелкой указано направление положительного потока. На сети произведены два разреза  $I$  и  $II$ .

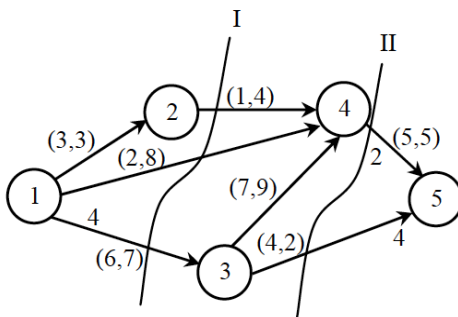


Рис. 3.9. Разрезы на сетях

При разрезе  $I$  вершины сети оказались разбитыми на подмножества  $A(1,2)$  и  $B(3,4,5)$ , а ребрами, образующими разрез, стали  $(1,3)$ ,  $(1,4)$  и  $(2,4)$ . При разрезе  $II$  –  $A(1,2,3,4)$ ,  $B(5)$ , а образующие ребра  $(3,5)$  и  $(4,5)$ .

Введем следующие важные определения.

$$\text{Величина} \quad R = (A|B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}, \quad (3.15)$$

представляющая собой сумму пропускных способностей  $r_{ij}$ , называется пропускной способностью разреза.

Пусть на сети задан поток  $X = \{x_{ij}\}$  и произведен разрез  $A|B$ .

Величина

$$X(A|B) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}, \quad (3.16)$$

представляющая собой сумму потоков  $x_{ij}$  по всем ребрам разреза, называется потоком через разрез.

На рассматриваемом примере сети (рис. 3.10) для разреза  $I$ :

$$R(I) = x_{13} + x_{14} + x_{24} = 6 + 2 + 1 = 9$$

$$X(I) = x_{13} + x_{14} + x_{24} = 4 + 2 + 1 = 7.$$

Для разреза  $II$ :

$$R(II) = r_{45} + r_{35} = 4 + 5 = 9$$

$$X(II) = x_{45} + x_{35} = 3 + 4 = 7.$$

Если на сети задан поток  $X = \{x_{ij}\}$  и произведен разрез  $A|B$ , то хотя бы одно ребро любого полного пути, ведущего из источника  $I$  в сток  $S$ , будет принадлежать разрезу  $A|B$ .

При этом величина потока по любому пути не превышает пропускную способность каждого его ребра, поэтому величина  $X$  суммарного потока, устремленного из источника  $I$  в сток  $S$ , не может превышать пропускную способность любого разреза, т. е.

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} x_{ij} \leq \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} r_{ij}. \quad (3.17)$$

Дополнительно к вышеизложенному, если удастся построить на сети поток  $X = \{x_{ij}\}$ , величина которого равна пропускной способности некоторого разреза  $A|B$ , то этот поток бу-

дет максимальным, а разрез  $A|B$  обладает минимальной пропускной способностью.

Сформулируем теорему Форда-Фалкерсона.

*На любой сети максимальная величина потока из источника  $I$  в сток  $S$  равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего  $I$  от  $S$ .*

Теорема Форда-Фалкерсона имеет важное прикладное значение.

### 3.3.3. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке

Дана сеть с источником  $I$ , стоком  $S$  и множеством промежуточных вершин. Для каждого ребра сети указана пропускная способность в обоих направлениях. Необходимо определить величину максимального потока сети.

Алгоритм решения задачи о максимальном потоке состоит из следующих шагов.

1. Построить некоторый начальный поток  $X^0 = \{x_{ij}^0\}$ .

2. Составить подмножество  $A$  вершин, достижимых из источника  $I$  по ненасыщенным ребрам. Для этого вначале построим матрицу  $(R - X^0)$ , в которой нулевые элементы будут соответствовать насыщенным ребрам, а ненулевые – ненасыщенным. Вершины подмножества  $A$  выделяют из всего подмножества вершин постепенно, начиная с  $I$ . С этой целью просматривают первую строку матрицы  $(R - X^0)$  и выписывают номера  $i_1, i_2, \dots, i_k$  вершин, соответствующих ненулевым элементам строки. Это и будут вершины, в которые можно попасть из источника  $I$ , перемещаясь по ненасыщенным вершинам. Будем записывать полученные таким образом вершины в виде  $I|i_1, i_2, \dots, i_k$  и называть данное выражение списком вершины  $I$ . Далее рассматривают каждую из вершин  $i_k$  полученного списка и составляют для нее аналогичным образом свой список. При этом вершины, встречающиеся в прежних списках, повторно не выписываются.

Если сток  $S$  не попадает в подмножество  $A$ , то построенный поток максимальный и задача решена. Если же сток  $S$  попал в подмножество  $A$ , то поток не максимален и мощность его можно увеличить. Следовательно, переходим к пункту 3 алгоритма.

3. Выделить путь из истока  $I$  в сток  $S$ , состоящий из ненасыщенных ребер и увеличить поток  $x_{ij}$  по каждому ребру этого пути на величину  $\Delta = \min\{r_{ij} - x_{ij}\}$ , где минимум берется по ребрам  $(i, j)$  данного пути. Таким образом, будет построен новый поток  $X^1 = \{x_{ij}^1\}$ . После этого надо вернуться к пункту 2.

При выполнении пункта 3 алгоритма на каждом шаге, по крайней мере, одно из ненасыщенных ребер становится насыщенным, а точнее именно то ребро, которое соответствует значению  $\Delta$ . Поскольку число ребер сети конечно, через конечное число шагов максимальный поток будет построен.

*Пример.* Рассмотрим сеть, представленную на рис. 3.10.

Матрица  $R$  пропускных способностей данной сети задана в виде табл. 3.5.

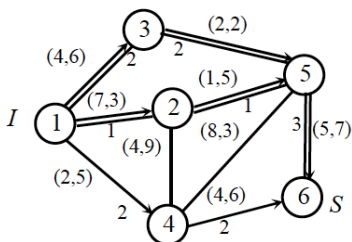


Рис. 3.10

Таблица 3.5

Пропускные способности сети

| $i, j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| 1      | 0 | 7 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| 2      | 3 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 |
| 3      | 6 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 4      | 5 | 9 | 0 | 0 | 8 | 4 |
| 5      | 0 | 5 | 2 | 3 | 0 | 5 |
| 6      | 0 | 0 | 0 | 6 | 7 | 0 |

Решаем задачу соответственно пунктам алгоритма.

1. На сети необходимо сформировать какой-либо начальный поток  $X^0$ . Примем в качестве такого потока  $X^0$ , в котором пути 1–3–5–6 перемещают 2 единицы (продукции, груза и т. д.), которые определяются как минимум среди пропускных способностей ребер, входящих в данный путь. По пути 1–2–5–6 перевозим 1 единицу, и по пути 1–4–6 имеем 2 единицы. Матрица потока  $X^0$  представлена в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Матрица потока  $X^0$

| $i, j$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 |
|--------|----|----|----|----|----|---|
| 1      | 0  | 1  | 2  | 2  | 0  | 0 |
| 2      | -1 | 0  | 0  | 0  | 1  | 0 |
| 3      | -2 | 0  | 0  | 0  | 2  | 0 |
| 4      | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | 2 |
| 5      | 0  | -1 | -2 | 0  | 0  | 2 |
| 6      | 0  | 0  | 0  | -2 | -2 | 0 |

Определим мощность потока

$$f = x_{12} + x_{13} + x_{13} = 5,$$

$$f = x_{46} + x_{56} = 5.$$

Переходим к пункту 2 алгоритма.

2. Составим матрицу  $(R - X^0)$ , элементы которой  $(r_{ij} - x_{ij}^0)$  позволяют судить о ненасыщенности ребер сети. В данной матрице насыщенным ребрам будут соответствовать нулевые элементы, а ненасыщенным – ненулевые (табл. 3.6).

Таблица 3.7

Матрица  $(R - X^0)$ 

| $i, j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 |
|--------|---|---|---|---|----|---|
| 1      | 0 | 6 | 2 | 0 | 0  | 0 |
| 2      | 4 | 0 | 0 | 4 | 0  | 0 |
| 3      | 8 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 |
| 4      | 7 | 9 | 0 | 0 | 8  | 2 |
| 5      | 0 | 6 | 4 | 3 | 0  | 2 |
| 6      | 0 | 0 | 0 | 8 | 10 | 0 |

В рассматриваемом примере  $I = 1, S = 6$ . В первой строке матрицы  $(R - X^0)$  в список вершины 1 войдут вершины 2, 3, таким образом, сделаем запись для этой вершины  $1 \parallel 2, 3$ ; для вершины 2 –  $2 \parallel 4$ ; для вершины 3 –  $3 \parallel \bullet$ ; для вершины 4 –  $4 \parallel 5, 6$ .

Получили набор списков. Сток  $S = 6$  попал в список одной из вершин. Следовательно, поток  $X^0$  не максимален и существует путь из истока  $I$  в сток  $S$  (из 1 в 6), состоящий из ненасыщенных ребер.

Построение ненасыщенного потока большей мощности начинаем с последнего ребра этого пути  $(i_{n-1}, S)$ , где  $i_{n-1}$  – вершина, в список которой попал сток  $S$ . Ребром  $(i_{n-2}, i_{n-1})$  является ребро  $(2, 4)$ , ребром  $(I, i_1)$  – ребро  $(1, 2)$ . Таким образом, путь из истока в сток по ненасыщенным ребрам пройдет через вершины  $1, 2, 4, 6$ . С помощью матрицы  $(R - X^0)$  определим величину  $\Delta = \min\{r_{ij} - x_{ij}\}$ , на которую нужно увеличить поток по каждому ребру  $(i, j)$  выделенного пути, чтобы получить новый поток  $X^1$  мощности, большей на  $\Delta$  единиц.

В нашем примере по ребру  $(1, 2)$  можно дополнительно пропустить 6 единиц, по ребру  $(2, 4)$  – 4 единицы, по ребру  $(4, 6)$  – 2 единицы. Таким образом,  $\Delta = \min\{6, 4, 2\} = 2$  – величина, на которую можно увеличить поток по всему пути  $1 - 2 - 4 - 6$ .

Построим матрицу нового потока  $X^1$ , прибавив найденное значение  $\Delta = 2$  к соответствующим элементам матрицы  $X^0$  и возвращаемся к пункту 2 алгоритма. Матрица  $X^1$  представлена в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Матрица  $X^1$

| $i, j$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 |
|--------|----|----|----|----|----|---|
| 1      | 0  | 3  | 2  | 2  | 0  | 0 |
| 2      | -3 | 0  | 0  | 2  | 1  | 0 |
| 3      | -2 | 0  | 0  | 0  | 2  | 0 |
| 4      | -2 | -2 | 0  | 0  | 0  | 4 |
| 5      | 0  | -1 | -2 | 0  | 0  | 3 |
| 6      | 0  | 0  | 0  | -4 | -3 | 0 |

Определим значения матрицы  $(R - X^1)$  (табл. 3.9).

Таблица 3.9

Матрица  $(R - X^1)$

| $i, j$ | 1 | 2  | 3 | 4  | 5  | 6 |
|--------|---|----|---|----|----|---|
| 1      | 0 | 4  | 2 | 0  | 0  | 0 |
| 2      | 6 | 0  | 0 | 2  | 0  | 0 |
| 3      | 8 | 0  | 0 | 0  | 0  | 0 |
| 4      | 7 | 11 | 0 | 0  | 8  | 0 |
| 5      | 0 | 6  | 4 | 3  | 0  | 2 |
| 6      | 0 | 0  | 0 | 10 | 10 | 0 |

Определим мощность потока  $f_I$

$$f_I = 2 + 3 + 2 = 7.$$

Определим списки вершин подмножества  $A$  по ненасыщенным путям:

$$1 \parallel 2, 3,$$

$$2 \parallel 4,$$

$$3 \parallel \bullet,$$

$4 \parallel 5$ ,

$5 \parallel 6$ .

Сток  $S$  оказался в подмножестве  $A$ , а путь, ведущий к нему, содержит ребра  $(1,2),(2,4),(4,5),(5,6)$ .

Определим  $\Delta = \min(4,2,8,2)$ .

Новый поток  $X^2$  получается путем увеличения соответствующих элементов потока  $X^1$  на величину  $\Delta = 2$ . Матрица потока  $X^2$  и матрица  $(R - X^2)$  приведены в табл. 3.10 и 3.11.

Таблица 3.10

Матрица потока  $X^2$

| $i, j$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 |
|--------|----|----|----|----|----|---|
| 1      | 0  | 5  | 2  | 2  | 0  | 0 |
| 2      | -5 | 0  | 0  | 4  | 1  | 0 |
| 3      | -2 | 0  | 0  | 0  | 2  | 0 |
| 4      | -2 | -4 | 0  | 0  | 2  | 4 |
| 5      | 0  | -1 | -2 | -2 | 0  | 5 |
| 6      | 0  | 0  | 0  | -4 | -5 | 0 |

Таблица 3.11

Матрица  $(R - X^2)$

| $i, j$ | 1 | 2  | 3 | 4  | 5  | 6 |
|--------|---|----|---|----|----|---|
| 1      | 0 | 2  | 2 | 0  | 0  | 0 |
| 2      | 8 | 0  | 0 | 0  | 0  | 0 |
| 3      | 8 | 0  | 0 | 0  | 0  | 0 |
| 4      | 7 | 13 | 0 | 0  | 6  | 0 |
| 5      | 0 | 6  | 4 | 5  | 0  | 0 |
| 6      | 0 | 0  | 0 | 10 | 12 | 0 |

Списки вершин по ненасыщенным путям:

$1 \parallel 2,3$ ,

$2 \parallel 3$ ,

$3 \parallel \bullet$ .

Определим мощность потока:

$$f = 9.$$

Далее, списки вершин по насыщенным путям:

1||2,3,

2||•,

3||•.

Таким образом, сток 6 не попал в подмножество вершин  $A$ . Следовательно, поток  $X^2$  максимален. Нанесем его на сеть с указанием направления потоков по отдельным ребрам (рис. 3.11).

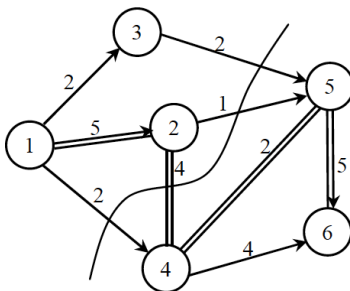


Рис. 3.11. Искомый максимальный поток

## Задания для самостоятельной работы

### 3.1. Решить задачи о кратчайшем пути

Задана сеть на рис. 3.13, состоящая из 8 точек-вершин 1, 2, ..., 8 и из некоторого количества звеньев-дуг  $(i, j)$ , соединяющие некоторые вершины. Длина этих дуг задана в таблице 1 по вариантам. Найти кратчайший путь от 1-ой вершины до вершины 8 и указать его длину. Решить описанную задачу алгоритмами Форда, Данцига и Беллмана-Калаба. В табл. 3.12 даны 5 вариантов исходных данных.

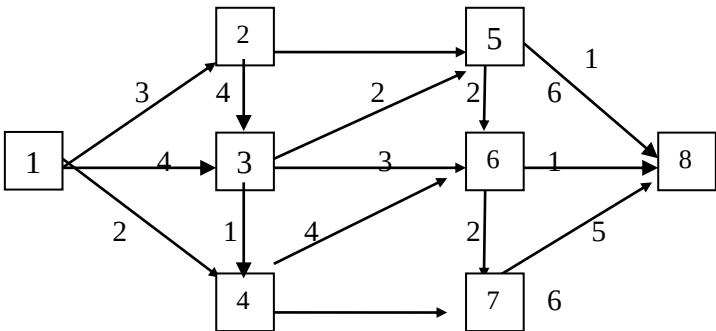


Рис. 3.12. Сеть

Таблица 3.12

Длина дуг сети

| Ва-<br>риан-<br>ты | Номера вершин, соединенных дугой |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------------------|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                    | 1-2                              | 1-3 | 1-4 | 2-3 | 2-5 | 3-4 | 3-5 | 3-6 | 4-6 | 4-7 | 5-6 | 5-8 | 6-7 | 6-8 | 7-8 |
| 1                  | 3                                | 4   | 2   | 4   | 1   | 1   | 2   | 3   | 4   | 6   | 2   | 6   | 2   | 1   | 5   |
| 2                  | 5                                | 7   | 2   | 4   | 6   | 3   | 1   | 4   | 5   | 8   | 2   | 3   | 4   | 6   | 2   |
| 3                  | 6                                | 4   | 2   | 8   | 1   | 3   | 5   | 8   | 2   | 4   | 9   | 2   | 5   | 6   | 4   |
| 4                  | 6                                | 5   | 7   | 9   | 2   | 1   | 3   | 5   | 4   | 6   | 8   | 9   | 7   | 2   | 8   |
| 5                  | 6                                | 5   | 8   | 2   | 4   | 9   | 2   | 7   | 8   | 6   | 5   | 8   | 2   | 4   | 3   |
| 4                  | 5                                | 8   | 5   | 6   | 9   | 2   | 4   | 1   | 3   | 8   | 6   | 4   | 7   | 5   | 9   |

1. Решить задачу о назначении методом максимального парасчета. В табл. 3.13 даны 6 вариантов заданий.

Таблица 3.13

| Ва-<br>риан-<br>ты | Номер группы проектировщиков – номер проекта |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------------------|----------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                    | 1-1                                          | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-1 | 2-2 | 2-3 | 2-4 | 3-1 | 3-2 | 3-3 | 3-4 | 4-1 | 4-2 | 4-3 | 4-4 |
| 1                  | 3                                            | 4   | 2   | -   | 1   | 4   | -   | 5   | 4   | 6   | 2   | 8   | -   | 1   | 5   | 2   |
| 2                  | 5                                            | -   | 2   | 4   | 6   | 3   | -   | 4   | 5   | -   | 2   | 3   | 4   | 6   | 2   | -   |
| 3                  | -                                            | 4   | 2   | 8   | 1   | -   | 5   | 8   | 2   | -   | 9   | 2   | 5   | 6   | -   | 6   |
| 4                  | 6                                            | 5   | -   | 9   | 1   | -   | 3   | -   | 4   | 6   | -   | 9   | 7   | 2   | 8   | -   |
| 5                  | -                                            | 5   | -   | 2   | 4   | 9   | -   | 7   | 8   | 6   | 5   | -   | -   | 4   | 3   | 3   |
| 6                  | 5                                            | 8   | 5   | -   | -   | 2   | -   | 1   | 3   | -   | 6   | -   | 7   | 5   | 9   | -   |

## 4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ В ЛОГИСТИКЕ

### 4.1. Метод ветвей и границ

Впервые метод ветвей и границ был предложен в 1960 г. в работе Ленд и Дойг применительно к задаче целочисленного программирования. Однако эта работа не оказала заметного непосредственного влияния на развитие дискретного программирования. Фактически "второе рождение" метода ветвей и границ связано с работой Литтла, Маурти, Суини и Кэрел.

*Идея метода ветвей и границ*

1. Рассмотрим задачу дискретного программирования в следующей общей форме.

Минимизировать  $z = f(X)$  (4.1)

при условии  $X \in G$ . (4.2)

Здесь  $G$  – некоторое конечное множество.

2. В основе метода ветвей и границ лежат следующие построения, позволяющие в ряде случаев существенно уменьшить объем перебора.

1.) *Вычисление нижней границы (оценки)*. Часто удается найти нижнюю границу (оценку) целевой функции  $f$  на множестве планов  $G$  (или на некотором его подмножестве  $G'$ ), т. е. такое число  $\zeta(G)$  ( $\zeta(G')$ ), что для  $X \in G$  имеет место  $f(X) \geq \zeta(G)$  (соответственно для  $X \in G'$  имеет место  $f(X) \geq \zeta(G')$ ).

2) *Разбиение на подмножества (ветвление)*.

Реализация метода связана с постепенным разбиением множества планов  $G$  на дерево подмножеств (ветвлением). Ветвление происходит по следующей многошаговой схеме.

0-й шаг. Имеется множество  $G^0 \equiv G$ . Некоторым способом оно разбивается на конечное число (обычно не пересекающихся) подмножеств  $G^1_1, G^1_2, \dots, G^1_{r1}$ .

$k$ -й шаг ( $k \geq 1$ ). Имеются множества  $G^k_1, G^k_2, \dots, G^k_{rk}$ , еще не подвергавшиеся ветвлению. По некоторому правилу (указанному ниже) среди них выбирается множество  $G^k_{v(k)}$  и

разбивается на конечное число подмножеств  $G_{v(k),1}^k, G_{v(k),2}^k, \dots, G_{v(k),s(k)}^k$ .

Еще не подвергшихся разбиению множества  $G_1^k, G_2^k, \dots, G_{v(k)-1}^k, G_{v(k)+1}^k, \dots, G_{rk}^k, G_{v(k),1}^k, G_{v(k),2}^k, \dots, G_{v(k),s(k)}^k$  заново обозначаются через  $G_1^{k+1}, G_2^{k+1}, \dots, G_{rk+1}^{k+1}$ .

Несколько шагов такого процесса последовательного разбиения схематически изображены на рис. 4.1.

3. *Пересчет оценок.* Если множество  $G_1 \subset G_2$ , то очевидно,

$$\min_{X \in G_1} f(X) \geq \min_{X \in G_2} f(X). \quad (4.3)$$

Поэтому, разбивая в процессе решения некоторое множество  $G'$  на подмножества  $G'_1, G'_2, \dots, G'_s$ :

$$G' = \bigcup_{i=1}^s G'_i, \quad (4.4)$$

всегда будем считать, что оценка (граница) для любого подмножества  $G'_i$  не меньше оценки для множества  $G'$ :

$$\zeta(G'_i) \geq \zeta(G'), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

В конкретных ситуациях часто оказывается возможным добиться улучшения оценки, т. е. получить хотя бы для некоторых  $i$  строгое неравенство

$$\zeta(G'_i) > \zeta(G').$$

4. *Вычисление планов.* Для конкретных задач могут быть указаны различные способы нахождения планов в последовательно разветвляемых подмножествах. Любой такой способ существенно опирается на специфику задачи.

5. *Признак оптимальности.* Пусть

$$G = \bigcup_{i=1}^s G_i \quad (4.5)$$

и план  $\bar{X}$  принадлежит некоторому подмножеству  $G_v$ . Если при этом

$$f(\bar{X}) = \zeta(G_v) \leq \zeta(G_i), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

то  $\bar{X}$  оптимальный план задачи (4.1) – (4.2).

Доказательство непосредственно следует из определения оценки.

Обычно этот признак применяется на некотором этапе ветвления (т. е., говоря формально, при  $G_i = G_i^k$ ,  $s = r_k$ ; см. п. 2.).

6. *Оценка точности приближенного решения.* Пусть

$$G = \bigcup_{i=1}^s G_i \quad (4.6)$$

$$\zeta = \min_{i=1,2,\dots,s} \zeta(G_i). \quad (4.7)$$

Если  $\bar{X}$  – некоторый план исходной задачи (т. е.  $\bar{X} \in G$ ), то

$$\zeta \leq \min_{X \in G} f(X) \leq f(\bar{X}).$$

Доказательство и здесь сразу следует из определения оценки.

Очевидно, что если разность  $\Delta = f(\bar{X}) - \zeta$  невелика (т. е. не превышает некоторого выбранного для данной задачи числа), то  $\bar{X}$  можно принять за приближенное решение, а  $\Delta$  – за оценку точности приближения.

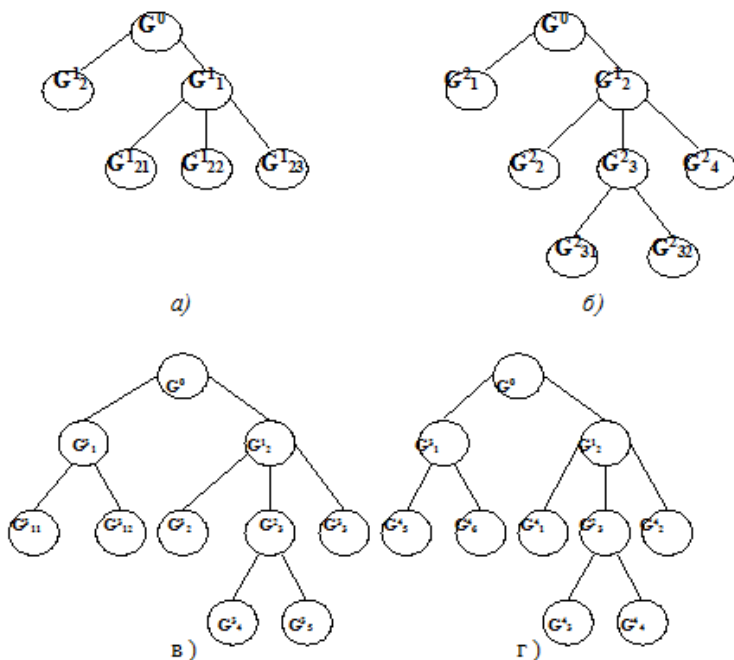


Рис. 4.1.

## 4.2. Алгоритм Литтла для решения задачи коммивояжера

Опишем алгоритм Литтла для нахождения минимального гамильтонова контура для графа с  $n$  вершинами, применяемый для решения задачи коммивояжера. Каждой дуге  $(X_i, X_j)$ , которой приписано значение  $v_{ij} = v(X_i, X_j) \geq 0$ . Эти значения представлены в виде матрицы стоимостей  $\|v_{ij}\|$ . Этот алгоритм сводится к следующим правилам.

А) Находим в каждой строке матрицы  $\|v_{ij}\|$  минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов этой строки. Если в получающейся матрице окажутся столбцы, не содержащие нуля, то в каждом из них находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов этого столбца. Таким образом, мы приходим к матрице  $\|v'_{ij}\|$ , каждая строка

и каждый столбец которой содержит, по меньшей мере, один 0 и которую назовем приведенной матрицей.

Б) Суммируем все элементы, которые мы вычитали в А). Очевидно, что эта сумма является нижней границей множества  $E$  решений, которое берется в качестве корня прадерева.

В) Выбираем дугу  $(X_k, X_l)$ , для которой

$$G(X_k, X_l) = \max_{i,j} G(X_i, X_j), \quad (4.8)$$

где  $G(X_i, X_j)$  – сумма наименьшего элемента  $i$ -ой строки (исключая  $v'(X_i, X_j)$ ) и наименьшего элемента  $j$ -го столбца (исключая  $v'(X_i, X_j)$ ), которая вычисляется для  $i$  и  $j$   $cv'(X_i, X_j) = 0$ .

Рассмотрим свойство  $T'_{ij}$ : «контур не использует дуги  $(X_i, X_j)$ » которое будет применяться к дугам с  $v'(X_i, X_j) = 0$ ; оно позволяет осуществить нужные нам разбиения.

Если гамильтонов контур не использует такой дуги  $(X_i, X_j)$ , то он должен использовать некоторые две дуги  $(X_i, X_s)$ ,  $s \neq j$ , и  $(X_r, X_j)$ ,  $r \neq i$  (иначе он не проходил бы, по крайней мере, через одну из вершин  $X_i, X_j$ ; см. рис. 3.6).

Г) Вычисляем  $G(X_k, X_l)$  по формуле (4.8) и прибавляем его к границе, соответствующей вершине прадерева, исходя из которой, производится разбиение. Эта сумма будет новой границей для новой вершины, определяемой свойством  $T'_{kl}$ , которую соединяем дугой, идущей в нее из указанной выше вершины.

Д) Аналогично Г) присоединяем к прадереву вершину, определяемую свойством  $T'_{kl}$ : «контур использует дугу  $(X_k, X_l)$ ». Удалим из матрицы  $k$ -ю строку и  $l$ -й столбец и заменим на  $\infty$ , значения тех дуг, используя которые, получают контуры длины, меньшей  $n$ .

Е) Действуем, как в А), с матрицей, получающейся в результате Д).

Ж) Действуем, как в Б), с матрицей, получающейся в результате Е). Прибавляя полученную сумму к границе для предыдущей вершины, получаем границу для вершины из Д).

З) Если в результате Д) получают матрицу порядка 1, то процесс заканчивается. В противном случае переходим к И).

И) Среди висячих вершин уже построенного прадерева выбираем вершину с наименьшей границей (если таковых нет, выбираем произвольно).

К) Если выбранная по И) вершина соответствует свойству  $T_{ij}$ , то переходим к В). В противном случае переходим к Л).

Л) Значение в клетке  $(i, j)$  матрицы, соответствующей висячей вершине, выбранной в К), заменяем на  $\infty$ . В  $i$ -й строке, а также в  $j$ -148 м столбце находим наименьший элемент и вычитаем его из всех элементов этой строки (столбца). Затем переходим к В).

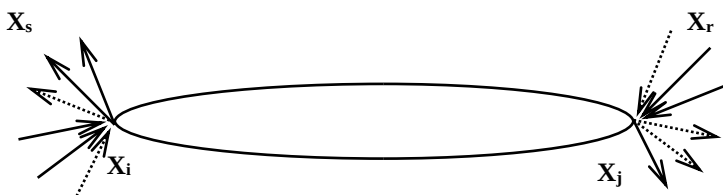


Рис. 4.2.

**Пример.** Решить задачу коммивояжера алгоритмом Литтла, исходные данные заданы в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 2        | 3        | 5        | 4        |
| $X_2$ | 2        | $\infty$ | 6        | 4        | 1        |
| $X_3$ | 5        | 3        | $\infty$ | 2        | 3        |
| $X_4$ | 7        | 4        | 2        | $\infty$ | 3        |
| $X_5$ | 5        | 2        | 4        | 3        | $\infty$ |

**Решение.**

1) Приводим таблицу к приведенной, где в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один нулевой элемент. Для этого в каждой строке определяем минимальный элемент  $h_i$ , и вычитаем его из каждого элемента этой строки, получаем табл. 4.2.

Таблица 4.2

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    |   |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 1        | 3        | 2        | 2 |
| $X_2$ | 1        | $\infty$ | 5        | 3        | 0        | 1 |
| $X_3$ | 3        | 1        | $\infty$ | 0        | 1        | 2 |
| $X_4$ | 5        | 2        | 0        | $\infty$ | 1        | 2 |
| $X_5$ | 3        | 0        | 2        | 1        | $\infty$ | 2 |
|       |          |          |          |          |          |   |

2) Теперь в каждом столбце определяем минимальный элемент  $h_j$  и вычитаем его из каждого элемента этого столбца, получаем табл. 4.3.

Таблица 4.3

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 1        | 3        | 2        |
| $X_2$ | 0        | $\infty$ | 5        | 3        | 0        |
| $X_3$ | 2        | 1        | $\infty$ | 0        | 1        |
| $X_4$ | 4        | 2        | 0        | $\infty$ | 1        |
| $X_5$ | 2        | 0        | 2        | 1        | $\infty$ |
|       | 1        | 0        | 0        | 0        | 0        |
|       |          |          |          |          |          |

3) Суммируем все элементы, которые мы вычитали в 1) и 2). Эта сумма является нижней границей множества  $E$  решений, которое берется в качестве корня прадерева  $E_c=10$ .

Корень прадерева разветвляется на две ветви с вершинами  $\bar{E}_{21}$  и  $E_{21}$ . Определяем их значения соответственно в пунктах 4) и 5).

Определяем для каждого нулевого элемента значение  $G(X_i, X_j)$  как сумму наименьшего элемента  $i$ -ой строки (исключая рассматриваемый нулевой элемент) и наименьшего элемента  $j$ -го столбца (исключая рассматриваемый нулевой элемент):

$$G_{12}(X_1, X_2)=1; G_{21}(X_2, X_1)=2; G_{25}(X_2, X_5)=1; G_{34}(X_3, X_4)=2; G_{52}(X_5, X_2)=1.$$

Выбираем дугу  $(X_k, X_l)$ , для которой

$$G(X_k, X_l) = \max_{i,j} G(X_i, X_j) = G_{21}(X_2, X_1) = 2, k=2, l=1 \quad (4.9)$$

4) Вычислив  $G(X_k, X_l)$  по формуле (4.8), прибавляем его к границе, соответствующей вершине прадерава, исходя из которой, производится разбиение. Эта сумма будет новой границей для новой вершины, определяемой свойством  $T'_{kl}$ , которую соединяем дугой, идущей в нее из указанной выше вершины. В нашем примере  $\bar{E}_{21} = E_r + G(X_2, X_1) = 10 + 2 = 12$ . (рис. 4.3)

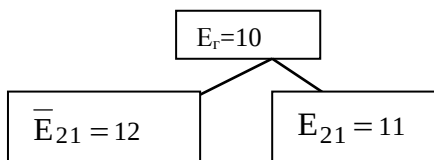


Рис. 4.3

5) Аналогично 4) присоединяем к прадереву вершину, определяемую свойством  $T_{kl}$ : «контур использует дугу  $(X_k, X_l)$ ». Удалим из матрицы  $k=2$ -ю строку и  $l=1$ -й столбец и заменим на  $\infty$ , значения дуги  $(X_1, X_l)$  или дуги, ис-

пользуя которые, получают контуры длины, меньшей  $n$ . Получим табл. 4.4.

Таблица 4.4

|       | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    |   |
|-------|----------|----------|----------|----------|---|
| $X_1$ | $\infty$ | 1        | 3        | 2        | 1 |
| $X_3$ | 1        | $\infty$ | 0        | 1        | 0 |
| $X_4$ | 2        | 0        | $\infty$ | 1        | 0 |
| $X_5$ | 0        | 2        | 1        | $\infty$ | 0 |

6) Действуем, как в 1), с табл. 4.4. Наименьший элемент в 1-й строке равен  $h_1 = 1$  и получаем табл. 4.5.

Таблица 4.5

|       | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 2        | 1        |
| $X_3$ | 1        | $\infty$ | 0        | 1        |
| $X_4$ | 2        | 0        | $\infty$ | 1        |
| $X_5$ | 0        | 2        | 1        | $\infty$ |

Табл. 4.5. является приведенной. Прибавляя полученную сумму минимальных элементов к границе для предыдущей вершины, получаем границу для вершины  $E_{21}$ , т. е. определяем значение  $E_{21}$  по следующей формуле:

$$E_{21} = E_2 + h_1 = 10 + 1 = 11.$$

7) Если в результате 6) получают матрицу порядка 1, то процесс заканчивается. В противном случае выбираем среди висячих вершин уже построенного прадерева вершину с наименьшим значением, разветвляем ее, если выбранная вершина соответствует свойству  $E_{ij}$  то переходим к 4). В противном случае переходим к 8).

В нашем примере выбрана вершина  $E_{21} = 11$ . Таким образом переходим к 4).

1) Определяем для каждого нулевого элемента значение

$$G(X_i, X_j; G_{13}(X_1, X_3)=1; G_{34}(X_3, X_4)=2; G_{43}(X_4, X_3)=0; \\ G_{52}(X_5, X_2)=2;$$

Выбираем дугу  $(X_k, X_l)$ , для которой

$$G(X_k, X_l) = \max_{i,j} G(X_i, X_j) = G_{34}(X_3, X_4) = 2, k=3, l=4.$$

В нашем примере  $\bar{E}_{34} = E_{21} + G(X_3, X_4) = 11+2=13$  (рис. 4.4).

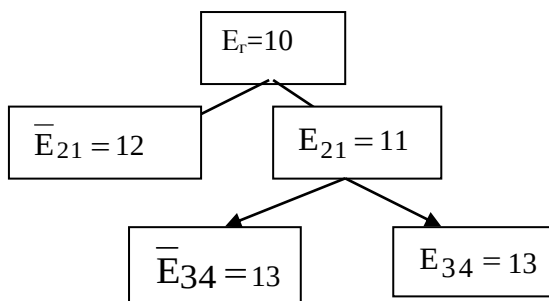


Рис. 4.4

5) Удалим из матрицы  $k=3$ -ю строку и  $l=4$ -й столбец и заменим на  $\infty$ , значения дуги  $(X_1, X_k)$  или дуги, используя которые, получают контуры длины, меньшей  $n$ . Получим табл. 4.6.

Таблица 4.6

|       | $X_2$    | $X_3$    | $X_5$    |   |
|-------|----------|----------|----------|---|
| $X_1$ | $\infty$ | 1        | 2        | 1 |
| $X_4$ | 2        | $\infty$ | 1        | 1 |
| $X_5$ | 0        | 2        | $\infty$ | 0 |

6) Действуем, как в 1), с табл. 4.6. Наименьший элемент в 1-й строке равен  $h_1 = 1$ , во 2-й строке  $h_2 = 1$  и получаем табл. 4.7.

Таблица 4.7

|       | $X_2$    | $X_3$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 1        |
| $X_4$ | 2        | $\infty$ | 0        |
| $X_5$ | 0        | 2        | $\infty$ |

Табл. 4.7. является приведенной. Прибавляя полученную сумму минимальных элементов к границе для предыдущей вершины, получаем границу для вершины  $E_{34} = E_{21} + 1 + 1 = 13$ .

Выбираем вершину  $\bar{E}_{21}$  и переходим к 8).

8) Значение в клетке (2,1) матрицы, соответствующей висячей вершине, выбранной в 7), заменяем на  $\infty$ . Во 2-й строке, а также в 1-м столбце находим наименьший элемент и вычитаем его из всех элементов этой строки (столбца). Получим табл. 4.8 и 4.9. Затем переходим к 4).

Таблица 4.8

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 1        | 3        | 2        |
| $X_2$ | $\infty$ | $\infty$ | 5        | 3        | 0        |
| $X_3$ | 2        | 1        | $\infty$ | 0        | 1        |
| $X_4$ | 4        | 2        | 0        | $\infty$ | 1        |
| $X_5$ | 2        | 0        | 2        | 1        | $\infty$ |
|       | 2        | 0        | 0        | 0        | 0        |

Таблица 4.9

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 1        | 3        | 2        |
| $X_2$ | $\infty$ | $\infty$ | 5        | 3        | 0        |
| $X_3$ | 0        | 1        | $\infty$ | 0        | 1        |
| $X_4$ | 2        | 2        | 0        | $\infty$ | 1        |
| $X_5$ | 0        | 0        | 2        | 1        | $\infty$ |

4) Определяем для каждого нулевого элемента значение  $G_{ij}(X_i, X_j)$

$G_{12}(X_1, X_2)=1$ ;  $G_{25}(X_2, X_5)=4$ ;  $G_{31}(X_3, X_1)=0$ ;  $G_{34}(X_3, X_4)=1$ ;  $G_{51}(X_5, X_1)=0$ ;  $G_{43}(X_4, X_3)=2$ .

Выбираем дугу  $(X_k, X_l)$ , для которой

$$G(X_k, X_l) = \max_{i,j} G(X_i, X_j) = G_{25}(X_2, X_5) = 4, k=2, l=5.$$

В нашем примере  $\bar{E}_{25} = \bar{E}_{21} + G_{25}(X_2, X_5) = 12 + 4 = 16$ .  
(рис. 4.5)

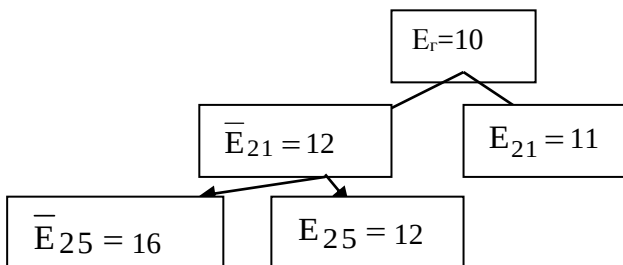


Рис. 4.5

5) Удалим из матрицы  $k=2$ -ю строку и  $l=5$ -й столбец и заменим на  $\infty$ , значения дуги  $(X_1, X_k)$  или дуги, используя которые, получают контуры длины, меньшей  $n$ . Получим таблицу 4.10.

Таблица 4.10

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_3$    | $X_4$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 1        | 3        |
| $X_3$ | 0        | 1        | $\infty$ | 0        |
| $X_4$ | 2        | 2        | 0        | $\infty$ |
| $X_5$ | 0        | $\infty$ | 2        | 1        |

6) Действуем, как в 1), с табл. 7.8. Табл. 7.10. является приведенной. Получаем границу для вершины

$$E_{25} = \bar{E}_{21} + 0 = 12.$$

Переходим к 4).

4) Определяем для каждого нулевого элемента значение  $G_{ij}(X_i, X_j)$

$$G_{12}(X_1, X_2)=2; G_{31}(X_3, X_1)=0; G_{34}(X_3, X_4)=1; \\ G_{43}(X_4, X_3)=3; G_{51}(X_5, X_1)=1.$$

Выбираем дугу  $(X_k, X_l)$ , для которой

$$G(X_k, X_l) = \max_{i,j} G(X_i, X_j) = G_{43}(X_4, X_3) = 3, k=4, l=3.$$

В нашем примере  $\bar{E}_{43} = E_{25} + G(X_4, X_3) = 12 + 3 = 15$ . (рис. 4.6).

5) Удалим из матрицы  $k=4$ -ю строку и  $l=3$ -й столбец и заменим на  $\infty$ , значения дуги  $(X_1, X_k)$  или дуги, используя которые, получают контуры длины, меньшей  $n$ . Получим табл. 4.11.

Таблица 4.11

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_4$    |
|-------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 3        |
| $X_3$ | 0        | 1        | $\infty$ |
| $X_5$ | 0        | $\infty$ | 1        |

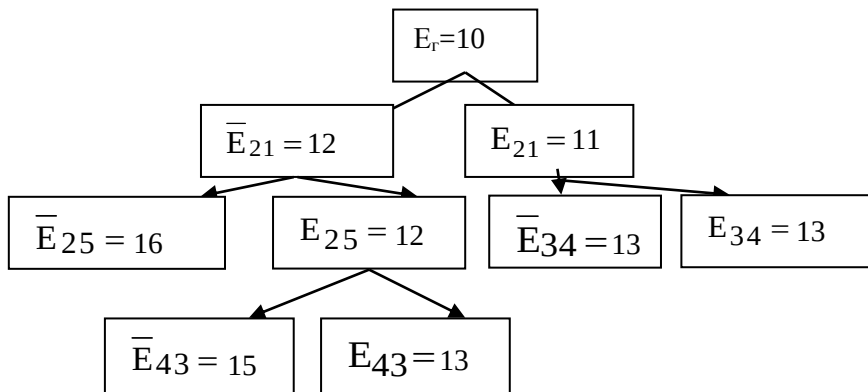


Рис. 4.6

6) Действуем, как в 1), с табл. 4.10. Минимальный элемент 3-м столбце равен 1. Табл. 4.12 является приведенной. Получаем границу для вершины  $E_{43} = E_{25} + 1 = 12 + 1 = 13$ .

Таблица 4.12

|       | $X_1$    | $X_2$    | $X_4$    |
|-------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 2        |
| $X_3$ | 0        | 1        | $\infty$ |
| $X_5$ | 0        | $\infty$ | 0        |

Разветвляем вершину  $E_{43}$  и переходим к 4).

4) Определяем для каждого нулевого элемента значение  $G_{ij}(X_i, X_j)$

$$G_{34}(X_1, X_2) = 3; G_{31}(X_3, X_1) = 1; G_{54}(X_5, X_4) = 2; G_{51}(X_5, X_1) = 0.$$

Выбираем дугу  $(X_k, X_l)$ , для которой

$$G(X_k, X_l) = \max_{i,j} G(X_i, X_j) = G_{43}(X_4, X_3) = 3, k=1, l=2.$$

В нашем примере  $\bar{E}_{12} = E_{43} + G(X_1, X_2) = 13 + 3 = 16$ . (рис. 4.7)

5) Удалим из матрицы  $k=1$ -ю строку и  $l=2$ -й столбец и заменим на  $\infty$ , значения дуги  $(X_1, X_k)$  или дуги, используя которые, получают контуры длины, меньшей  $n$ . Получим табл. 4.13.

Таблица 4.13

|       | $X_1$    | $X_4$    |
|-------|----------|----------|
| $X_3$ | 0        | $\infty$ |
| $X_5$ | $\infty$ | 1        |

6) Действуем, как в 1), с табл. 4.13. Минимальный элемент во 2-й строке равен 1. Табл. 4.13 является приведенной. Получаем границу для вершины  $\bar{E}_{12} = E_{43} + 1 = 13 + 1 = 14$ .

Таблица 4.13

|       | $X_1$    | $X_4$    |
|-------|----------|----------|
| $X_3$ | 0        | $\infty$ |
| $X_5$ | $\infty$ | 0        |

Среди висячих вершин выбираем вершину с наименьшим значением. В нашем примере это вершина  $E_{34}$ .

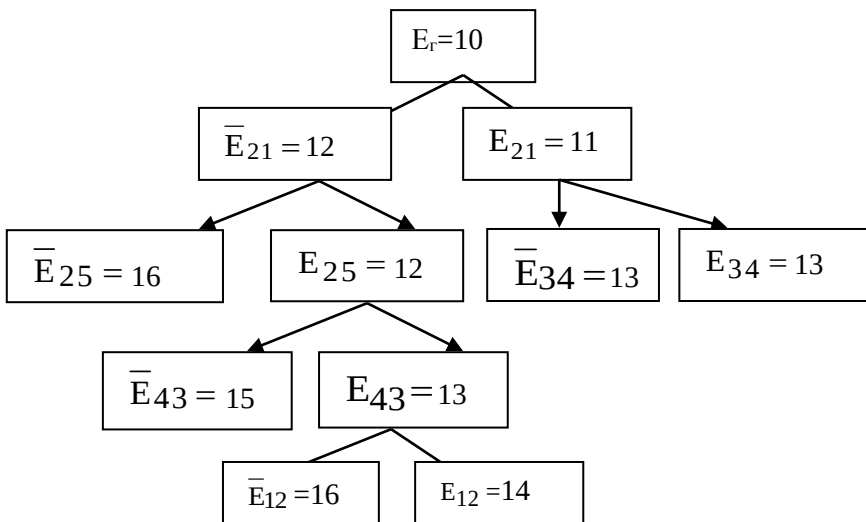


Рис. 4.7

Возвращаемся к табл. 4.14.

Таблица 4.14

|       | $X_2$    | $X_3$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|----------|
| $X_1$ | $\infty$ | 0        | 1        |
| $X_4$ | 2        | $\infty$ | 0        |
| $X_5$ | 0        | 2        | $\infty$ |

4) Определяем для каждого нулевого элемента значение  $G_{ij}(X_i, X_j)$

$$G_{13}(X_1, X_3)=3; G_{45}(X_4, X_5)=3; G_{52}(X_5, X_2)=4.$$

Выбираем дугу  $G_{52}(X_5, X_2)=4, k=5, l=2$ .

В нашем примере  $\bar{E}_{52} = E_{34} + G(X_5, X_2)=13+4=17$  (рис. 4.7).

5) Удалим из матрицы  $k=5$ -ю строку и  $l=2$ -й столбец и заменим  $(X_1, X_5)$  на  $\infty$ , значения дуги  $(X_5, X_1)$ . Получим табл. 4.15, которая к тому же и приведенная.

Таблица 4.15

|       | $X_3$    | $X_5$    |
|-------|----------|----------|
| $X_1$ | 0        | $\infty$ |
| $X_4$ | $\infty$ | 0        |

$$E_{52} = E_{34} + 0 = 13.$$

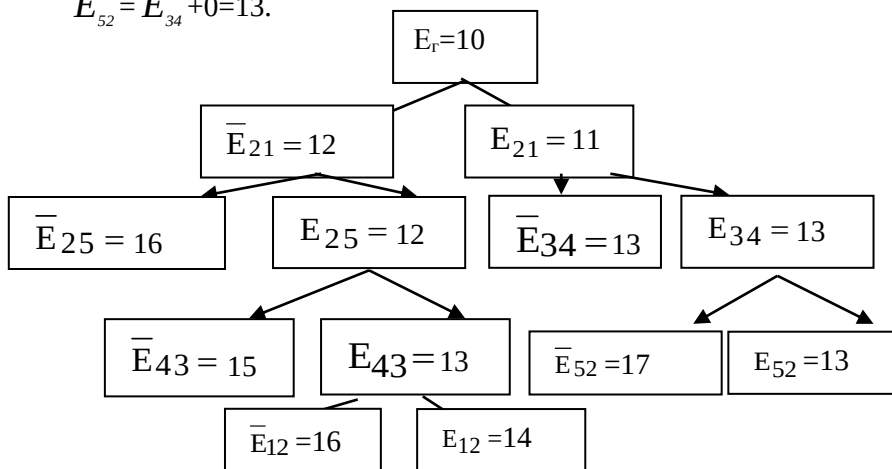


Рис. 4.8

Переходим к 4)

2) Определяем для каждого нулевого элемента значение

$$G_{ij}(X_i, X_j): G(X_1, X_3) = \infty; G_{45}(X_4, X_5) = \infty.$$

Выбираем дугу  $G_{13}(X_1, X_3), k=1, l=3$ .

В нашем примере  $\bar{E}_{13} = E_{52} + G(X_1, X_3) = 13 + \infty = \infty$  (рис. 4.9).

5) Удалим из матрицы  $k=1$ -ю строку и  $l=3$ -й. Получим табл. 4.16 с одной клеткой.

Таблица 4.16

|       | $X_5$ |
|-------|-------|
| $X_4$ | 0     |

$$E_{13} = E_{52} + 0 = 13. E_{45} = E_{13} + 0 = 13.$$

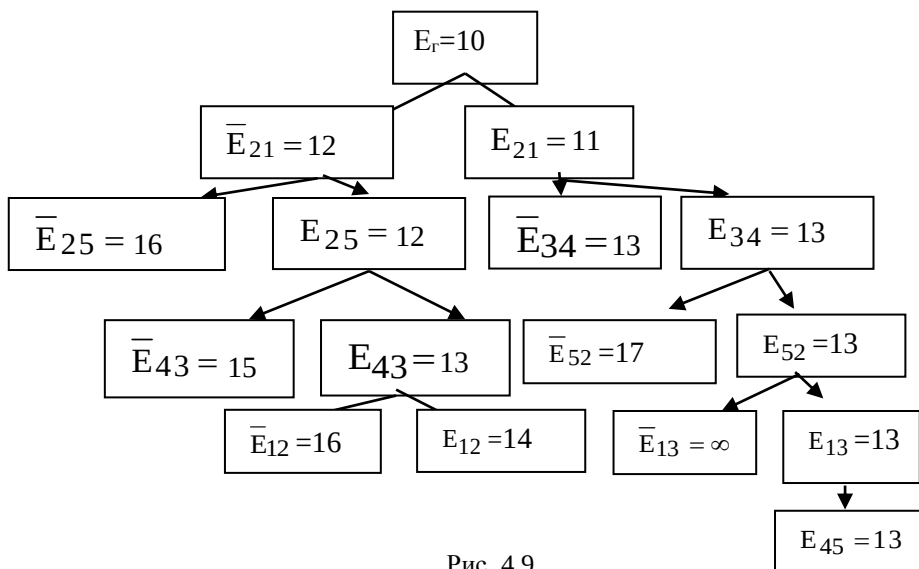


Рис. 4.9

Оптимальный путь коммивояжера представлен на рис. 4.10.

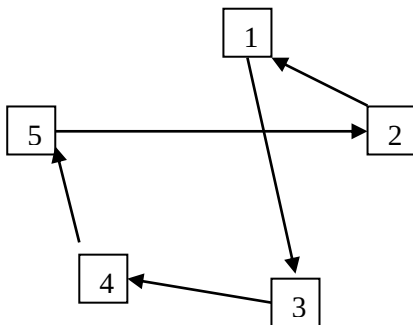


Рис. 4.10

### 4.3. Алгоритм Лэнда и Дойга

Часто в задаче линейного программирования, т. е. в задаче максимизации линейной формы

$$z = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \quad (4.10)$$

при ограничениях

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \leq a_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.11)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (4.12)$$

определяющих многогранник  $\Omega$ , по самому смыслу задачи требуется, чтобы решение было целочисленным, причем  $a_{ij}$  и  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) предполагаются целыми.

Однако симплекс-метод приводит непосредственно к целочисленному решению лишь для немногих задач. В общем случае для отыскания оптимального целочисленного решения задачи (4.10)–(4.12) требуются специальные методы. Они заключаются в подборе дополнительных к (4.11) линейных ограничений, обеспечивающих целочисленность решения. Один из методов определения целочисленного решения алгоритм Гомори

был рассмотрен в разделе 2. В алгоритме Гомори вначале задача решается обычным симплекс-методом, и если оптимальное решение не имеет целые значения, то вводится дополнительное уравнение ограничения в симплекс-таблицу и, далее опять применением симплекс-метод.

Существует другой алгоритм, именуемый алгоритмом Лэнда и Дойга, который тоже за основу решения задачи берет симплекс-метод, однако в случае нецелочисленного решения применяется метод «ветвей и границ» для определения границ (множество). Приведем описание метода Лэнда и Дойга.

Рассмотрим частично целочисленную задачу линейного программирования.

$$\text{Минимизировать } z = f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.13)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j R_i b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.14)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.15)$$

$$x_j - \text{целые}, \quad j = 1, 2, \dots, n_1. \quad (4.16)$$

Здесь  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – любые из отношений « $\leq$ », « $\geq$ », « $=$ ». Некоторые из чисел  $d_j$  в (4.15) могут равняться  $+\infty$ . В (4.16), как всегда,  $n_1 \leq n$ ; при этом, разумеется, не исключен и случай полностью целочисленной задачи ( $n_1 = n$ ).

Перейдем теперь к формальному описанию метода Лэнд и Дойг, останавливаясь на тех моментах общей схемы метода ветвей и границ, которые здесь требуют конкретизации.

1. *Задание множества  $G^0$ .* Множество  $G^0 = G$  задается условиями (3.5)–(3.7).

2. *Задание множеств  $G_v^k$ .* Множество  $G_v^k$  ( $v = 1, 2, \dots, r_k$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) определяется условиями (4.14), (4.16) и дополнительным условием

$$h_j \left( \begin{smallmatrix} k \\ v \end{smallmatrix} \right) \leq x_j \leq d_j \left( \begin{smallmatrix} k \\ v \end{smallmatrix} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.17)$$

3. *Вычисление границ (оценок).* Для множества  $G^0$  оценка  $\zeta(G^0) = f(X^0)$ , где  $X^0$  – оптимальный план задачи линейного программирования (3.4) – (3.6).

Для множества  $G_v^k$  оценка  $\zeta(G_v^k) = f(X \left( \begin{smallmatrix} k \\ v \end{smallmatrix} \right))$ , где  $X \left( \begin{smallmatrix} k \\ v \end{smallmatrix} \right)$  – оптимальный план задачи линейного программирования (4.13), (4.14), (4.17).

Если множество  $G_v^k$  оказывается пустым (т. е. соответствующая задача неразрешима), то ему приписывается оценка  $\zeta(G_v^k) = +\infty$ .

4. *Вычисление планов.* Если  $X^0$  удовлетворяет условию целочисленности (3.7), то  $X^0$  – оптимальный план задачи (4.13)–(4.16).

Если  $X \left( \begin{smallmatrix} k \\ v \end{smallmatrix} \right)$  удовлетворяет условию целочисленности (4.16), то  $X \left( \begin{smallmatrix} k \\ v \end{smallmatrix} \right)$  является оптимальным планом задачи (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) и планом исходной задачи (4.13)–(4.16).

4. *Ветвление.* Необходимость ветвления возникает в том случае, когда план  $X \left( \begin{smallmatrix} k \\ v(k) \end{smallmatrix} \right)$  не удовлетворяет условию целочисленности (4.16). Пусть  $x_r \left( \begin{smallmatrix} k \\ v(k) \end{smallmatrix} \right)$  – одна из нецелочисленных компонент этого плана (где  $1 \leq r \leq n_I$ ). Тогда множество  $G_{v(k)}^k$  разбивается на два множества

$$G_{v(k)}^k = G_{v(k),1}^k \cup G_{v(k),2}^k$$

$$\text{где } G_{v(k),1}^k = \left\{ X \mid X \in G_{v(k)}^k, x_r \leq \left\lfloor x_r \left( \begin{smallmatrix} k \\ v(k) \end{smallmatrix} \right) \right\rfloor \right\} \quad (4.19)$$

$$G_{v(k),2}^k = \left\{ X \mid X \in G_{v(k)}^k, x_r \geq \left\lfloor x_r \binom{k}{v(k)} \right\rfloor + 1 \right\} \quad (4.20)$$

*Замечание.* Если все коэффициенты  $c_j$  в (4.13) целые при  $j \leq n_1$  и равны нулю при  $j > n_1$ , то оценку  $\zeta(G_v^k)$  можно заменить на более сильную оценку

$$\zeta(G_v^k) = \left\lfloor f(X_v^k) \right\rfloor.$$

Здесь символом  $\lfloor a \rfloor$  обозначено наименьшее целое число, не меньшее чем  $a$ .

Таким образом, в чисто вычислительном отношении этот алгоритм сводится к решению серии задач линейного программирования. Конечность алгоритма Лэнд и Дойг непосредственно следует из предположенной выше ограниченности множества (4.14)–(4.15).

#### 4.4. Методы решения целочисленных задач в логистике. Метод Гомори

Часто в задаче линейного программирования, т. е. в задаче максимизации линейной формы

$$z = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \quad (4.21)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &\leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

определяющих многогранник  $\Omega$ , по самому смыслу задачи требуется, чтобы решение было целочисленным, причем  $a_{ij}$  и  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) предполагаются целыми. Такие задачи часто встречаются в производственной логистике, где в оптимальном решении должны быть целые значения.

Однако симплекс-метод не всегда приводит непосредственно к целочисленному решению. В общем же случае для отыскания оптимального целочисленного решения задачи (4.21)–(4.22) требуются специальные методы.

Один из таких методов, приводящий к целочисленному решению за конечное число шагов, предложен Р. Е. Гомори. Метод заключается в подборе дополнительных к (4.22) линейных ограничений, обеспечивающих целочисленность решения.

*Алгоритм Гомори. Предварительный шаг.* Решая задачу (4.21)–(4.22) симплекс-методом, придем через конечное число шагов к табл. 4.17, в которой все свободные члены  $b_1, \dots, b_m$  и коэффициенты  $z$ -строки  $q_1, \dots, q_n$  неотрицательны, так что

$$y_1 = \dots = y_s = x_{s+1} = \dots x_n = 0; \quad x_1 = b_1, \dots, x_s = b_s$$

дает оптимальное решение задачи.

Таблица 4.17

|             |             |     |             |               |     |             |           |
|-------------|-------------|-----|-------------|---------------|-----|-------------|-----------|
|             | $-y_1$      | ... | $-y_s$      | $-x_{s+1}$    | ... | $-x_n$      | 1         |
| $x_1 =$     | $b_{11}$    | ... | $b_{1s}$    | $b_{1,s+1}$   | ... | $b_{1n}$    | $b_1$     |
| ...         | ...         | ... | ...         | ...           | ... | ...         | ...       |
| $x_s =$     | $b_{s1}$    | ... | $b_{ss}$    | $b_{s,s+1}$   | ... | $b_{sn}$    | $b_s$     |
| $y_{s+1} =$ | $b_{s+1,1}$ | ... | $b_{s+1,s}$ | $b_{s+1,s+1}$ | ... | $b_{s+1,n}$ | $b_{s+1}$ |
| ...         | ...         | ... | ...         | ...           | ... | ...         | ...       |
| $y_m =$     | $b_{m1}$    | ... | $b_{ms}$    | $b_{m,s+1}$   | ... | $b_{mn}$    | $b_m$     |
| $z =$       | $q_1$       | ... | $q_s$       | $q_{s+1}$     | ... | $q_n$       | $Q$       |

Если решение нецелочисленное, то переходим к общему шагу алгоритма Гомори (табл. 4.18).

*Общий шаг.* 1) *Составление дополнительного ограничения.* Пусть  $b_i$  не целое. Определяем значения коэффициентов дополнительного уравнения-ограничения:

$$\beta_{ij} = b_{ij} - [b_{ij}] = b_{ij} - n_{ij}^1),$$

$$\beta_i = b_i - [b_i] = b_i - n_i$$

(так что  $n_{ij} \leq b_{ij} < n_{ij} + 1$ ,  $n_i \leq b_i < n_i + 1$  и  $0 \leq b_{ij} < 1$ ,  $0 \leq \beta < 1$ ) и составляем дополнительное ограничение к уравнению со свободным элементом  $b_i$ :

$$s_i = -\beta_{i1}(-\xi_1) - \beta_{i2}(-\xi_2) - \dots - \beta_{in}(-\xi_n) \geq 0. \quad (4.23)$$

Перепишем для удобства табл. 4.17 в виде табл. 4.18.

Таблица 4.18

|            |          |     |          |     |          |       |
|------------|----------|-----|----------|-----|----------|-------|
|            | $-\xi_1$ | ... | $-\xi_j$ | ... | $-\xi_n$ | 1     |
| $\eta_1 =$ | $b_{11}$ |     | $b_{1j}$ |     | $b_{1n}$ | $b_1$ |
| ...        | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...   |
| $\eta_i =$ | $b_{i1}$ |     | $b_{ij}$ |     | $b_{in}$ | $b_i$ |
| ...        | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...   |
| $\eta_m =$ | $b_{m1}$ | ... | $b_{mj}$ | ... | $b_{mn}$ | $b_m$ |
| $z =$      | $q_1$    | ... | $q_j$    | ... | $q_n$    | $Q$   |

Полученное  $s_i$  будет целым неотрицательным при целых неотрицательных  $\xi_j$  и  $\eta_i$ . Действительно,

$$s = -\sum_{j=1}^n \beta_{ij}(-\xi_i) - \beta_i = \sum_{j=1}^n n_{ij}(-\xi_j) + n_i - \eta_i$$

откуда (из последнего выражения) следует целочисленность  $s_i$ , а из предшествующего и из неотрицательности  $\beta_{ij}$  и  $\xi_i$  следует, что  $s_i \geq -\beta_i > -1$ , что в сочетании с целочисленностью  $s_i$  доказывает его неотрицательность. Если, как в рассматриваем-

<sup>1</sup>Символом  $[a]$  обозначена целая часть  $a$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .

мом случае, оптимальное решение исходной задачи (4.21–4.22) не целочисленно (т. к.  $\eta_i = \beta_i$  не целое), то оно не удовлетворяет дополнительному ограничению (4.23) потому что при  $x_1 = \dots = x_n = 0$  будет  $s_i = -b_i < 0$ , так что дополнительное ограничение (4.23) отсекает от  $W$  часть, содержащую нецелочисленное оптимальное решение, сохраняя целочисленные решения.

Нетрудно убедиться, что плоскость  $s_i = 0$  проходит через некоторую целочисленную точку (возможно и не принадлежащую  $W$ ).

2) *Решение измененной задачи.* Вносим ограничение  $s_i \geq 0$  в табл. (4.18) и получаем табл. 4.20. Решаем новую задачу максимизации  $z$  при ограничениях (4.22) и дополнительном ограничении (4.23).

Таблица 4.20

|         |               |     |               |     |               |            |
|---------|---------------|-----|---------------|-----|---------------|------------|
|         | $-x_1$        | ... | $-x_j$        | ... | $-x_n$        | 1          |
| $h_1 =$ | $b_{11}$      |     | $b_{1j}$      |     | $b_{1n}$      | $b_1$      |
| ...     | ...           | ... | ...           | ... | ...           | ...        |
| $h_i =$ | $b_{i1}$      |     | $b_{ij}$      |     | $b_{in}$      | $b_i$      |
| ...     | ...           | ... | ...           | ... | ...           | ...        |
| $h_m =$ | $b_{m1}$      | ... | $b_{mj}$      | ... | $b_{mn}$      | $b_m$      |
| $s_i =$ | $-\beta_{i1}$ |     | $-\beta_{ij}$ |     | $-\beta_{in}$ | $-\beta_i$ |
| $z =$   | $q_1$         | ... | $q_j$         | ... | $q_n$         | $Q$        |

Для сохранения знаков уже неотрицательных коэффициентов  $z$ -строки пользуемся для отыскания оптимального решения двойственным симплекс-методом. Если полученное при этом оптимальное решение задачи окажется нецелочисленным, то повторяем общий шаг алгоритма Гомори, и после конечного числа повторений будет найдено оптимальное целочисленное решение новой, а, следовательно, и исходной задачи, если оно существует.<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup>Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в таблице хотя бы одной строки с дробным свободным членом и целыми

Пример. Найти целочисленное неотрицательное решение системы методом отсечения Гомори.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 11,$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13,$$

максимизирующее линейную форму  $z = 4x_1 + 5x_2 + x_3$ .

*Решение.*

Перепишем ограничения в виде

$$y_1 = -3x_1 - 2x_2 + 10 \geq 0,$$

$$y_2 = -x_1 - 4x_2 + 11 \geq 0,$$

$$y_3 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 13 \geq 0$$

и составляем симплекс (табл. 4.21).

Таблица 4.21

|         | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $1$ |
|---------|--------|--------|--------|-----|
| $y_1 =$ | 3      | 2      | 0      | 10  |
| $y_2 =$ | 1      | 4      | 0      | 11  |
| $y_3 =$ | 3      | 3      | 1      | 13  |
| $z =$   | -4     | -5     | -1     | 0   |

Проделав три шага модифицированных жордановых исключений, получим табл. 4.22 и 4.23.

остальными коэффициентами, т. к. в этом случае соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах.

Таблица 4.22

|         | $-x_1$          | $-y_2$         | $-x_3$ | $1$            |
|---------|-----------------|----------------|--------|----------------|
| $y_1 =$ | $\frac{10}{4}$  | $\frac{2}{4}$  | $0$    | $\frac{18}{4}$ |
| $x_2 =$ | $\frac{1}{4}$   | $\frac{1}{4}$  | $0$    | $\frac{11}{4}$ |
| $y_3 =$ | $\frac{9}{4}$   | $-\frac{3}{4}$ | $1$    | $\frac{19}{4}$ |
| $z =$   | $-\frac{11}{4}$ | $\frac{5}{4}$  | $-1$   | $\frac{55}{4}$ |

Таблица 4.23

|         | $-y_1$          | $-x_2$          | $-x_3$ | $1$              |
|---------|-----------------|-----------------|--------|------------------|
| $x_1 =$ | $\frac{4}{10}$  | $-\frac{2}{10}$ | $0$    | $\frac{18}{10}$  |
| $y_2 =$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$  | $0$    | $\frac{23}{10}$  |
| $y_3 =$ | $-\frac{9}{10}$ | $-\frac{3}{10}$ | $1$    | $\frac{7}{10}$   |
| $z =$   | $\frac{11}{10}$ | $\frac{7}{10}$  | $-1$   | $\frac{187}{10}$ |

придём к табл. 4.24

Таблица 4.24

|         | $-y_1$          | $-y_2$          | $-y_3$ | $1$              |
|---------|-----------------|-----------------|--------|------------------|
| $x_1 =$ | $\frac{4}{10}$  | $-\frac{2}{10}$ | $0$    | $\frac{18}{10}$  |
| $x_2 =$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$  | $0$    | $\frac{23}{10}$  |
| $x_3 =$ | $-\frac{9}{10}$ | $-\frac{3}{10}$ | $1$    | $\frac{7}{10}$   |
| $z =$   | $\frac{2}{10}$  | $\frac{4}{10}$  | $1$    | $\frac{194}{10}$ |

Из табл. 4.24 находим оптимальное, но нецелочисленное решение задачи:

$$x_1 = \frac{18}{10}, x_2 = \frac{23}{10}, x_3 = \frac{7}{10}, \max z = \frac{194}{10}.$$

Для отыскания целочисленного решения вводим, согласно предыдущему, дополнительное ограничение

$$s_3 = \frac{1}{10}y_1 + \frac{7}{10}y_2 - \frac{7}{10} \geq 0.$$

Табл. 4.25 примет вид.

Таблица 4.25

|         | $-y_1$          | $-y_2$          | $-y_3$ | $1$              |
|---------|-----------------|-----------------|--------|------------------|
| $x_1 =$ | $\frac{4}{10}$  | $-\frac{2}{10}$ | $0$    | $\frac{18}{10}$  |
| $x_2 =$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$  | $0$    | $\frac{23}{10}$  |
| $x_3 =$ | $-\frac{9}{10}$ | $-\frac{3}{10}$ | $1$    | $\frac{7}{10}$   |
| $s_3 =$ | $-\frac{1}{10}$ | $-\frac{7}{10}$ | $0$    | $-\frac{7}{10}$  |
| $z =$   | $\frac{2}{10}$  | $\frac{4}{10}$  | $1$    | $\frac{194}{10}$ |

Для сохранения знаков  $z$ -строки неотрицательными применим двойственный симплекс-метод.

На основании соответствующего правила берём отрицательный разрешающий элемент  $-\frac{7}{10}$  из последней строки, т. к.

$\left| \frac{4}{1} \ 0 \ -\frac{7}{1} \right| < \left| \frac{2}{1} \ 0 \ -\frac{1}{1} \right|$  Сделав шаг модифицированного жорданова исключения, получим табл. 4.26.

Таблица 4.26

|         | $-y_1$        | $S_3 =$       | $-y_3$ | 1  |
|---------|---------------|---------------|--------|----|
| $x_1 =$ |               |               |        | 2  |
| $x_2 =$ |               |               |        | 2  |
| $x_3 =$ |               |               |        | 1  |
| $y_2 =$ |               |               |        | 1  |
| $z =$   | $\frac{1}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | 1      | 19 |

Целочисленное оптимальное решение  $\max Z = 19$ , достигаемое при  $x_1=2$ ,  $x_2=2$ ,  $x_3=1$ .

#### 4.5. Алгоритм Джонсона для решения задач теории расписания

Рассмотрим алгоритм Джонсона для решения задачи двух и трех станков (задача редактора), постановка которых дана в п. 1.4.8.

1. Рассмотрим случай двух станков.

Сформулируем алгоритм по шагам:

1) Выберем в матрице  $\|t_{ij}\|$  наименьший элемент  $t_{ik}$ .

2) Если этот элемент находится в первой строке матрицы  $\|t_{ij}\|$ , то начинаем с изделия  $P_k$ , если во второй, то заканчиваем изделием  $P_k$ .

3) Рассматриваем все изделия, исключая  $P_k$ , и действуем, как указано в 1) и 2). Поступаем так, пока не исчерпаем все  $P_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

2. Случай трех станков. Введем обозначения  $A_j$  – время обработки деталей на 1-м станке,  $B_j$  – время обработки деталей на 2-м станке,  $C_j$  – время обработки деталей на 3-м станке.

Алгоритм Джонсона применим и в этом случае, если

$$\min A_j \geq \max B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.24)$$

или

$$\min C_j \geq \max B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.25)$$

Вначале строится промежуточная таблица из 2-строк, где 1-я строка представляет собой сумму элементов  $A_j + B_j$  и 2-я строка – сумму элементов  $B_j + C_j$ . Задача приведена к задаче для двух станков. Применяем алгоритм Джонсона для двух станков. Определив порядок обработки деталей, на временной диаграмме отмечаем время обработки деталей по исходной таблице.

Пример 1.

Рассмотрим пример решения для 2-х станков. Исходная матрица дана в табл. 4.27.

Таблица 4.27

|          | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $t_{1j}$ | 1     | 5     | 3     | 2     | 6     |
| $t_{2j}$ | 3     | 2     | 7     | 1     | 4     |

Решение:

1) Выберем в матрице  $\|t_{ij}\|$  наименьший элемент  $t_{ik}$ . Это будет 1-ая деталь  $P_1$  с  $t_{11}=1$ .

2) Следовательно, эта деталь будет обрабатываться первым.

3) Рассмотрим остальные элементы табл. 4.27. Элемент  $P_4$  с  $t_{24}=1$  будет обрабатываться последним в очереди, т. к. минимальное число  $t_{24}$ . Так поступаем со всеми остальными элементами таблицы и определяем порядок обработки деталей (табл. 4.28).

Таблица 4.28

|          | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $t_{1j}$ | 1     | 5     | 3     | 2     | 6     |
| $t_{2j}$ | 3     | 2     | 7     | 1     | 4     |
| порядок  | 1     | 4     | 2     | 5     | 3     |

Строим временную диаграмму (рис. 4.29).

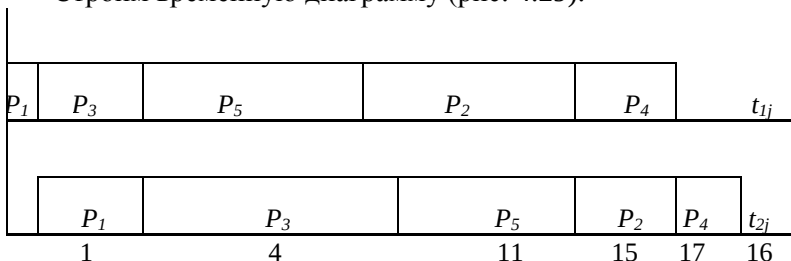


Рис. 4.29

Как видим из рисунка общее время обработки деталей составляет 16, время простоя – 1 временная единица.

*Пример 2.* Рассмотрим следующую матрицу  $\|t_{ij}\|$  (рис. 4.30).

|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $M_1$ | 20    | 10    | 14    | 12    | 12    | 18    | 25    | 15    |
| $M_2$ | 25    | 8     | 11    | 10    | 15    | 12    | 20    | 20    |

Рис. 4.30

Наименьший элемент матрицы (рис. 4.30) есть  $t_{22} = 8$ . Он находится во второй строке, поэтому процесс надо заканчивать обработкой изделия  $P_2$ . Затем идет элемент  $t_{24} = 10$ , следовательно, предпоследним нужно обрабатывать изделие  $P_4$ . Далее,  $t_{23} = 11$ , поэтому перед  $P_4$  должно проходить обработку изделие  $P_3$ .

Так как затем  $t_{15} = t_{26} = 12$ , то начинать нужно с  $P_1$ , а  $P_6$  обрабатывать перед  $P_3$ . Точно также определяется порядок прохождения остальных изделий.

На рис. 4.31 представлен порядок обработки деталей и на рис. 4.23 – временная диаграмма.

|                   | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $M_1$             | 20    | 10    | 14    | 12    | 12    | 18    | 25    | 15    |
| $M_2$             | 25    | 8     | 11    | 10    | 15    | 12    | 20    | 20    |
| Порядок обработки | 3     | 8     | 6     | 7     | 1     | 5     | 4     | 2     |

Рис. 4.31

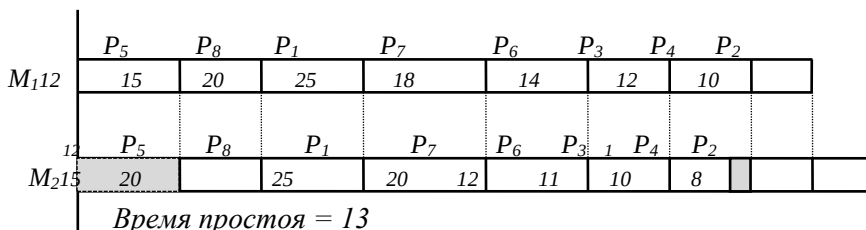


Рис. 4.32

На рис. 4.33 представлен результат другого упорядочения (всего их  $8! = 40320$ ):

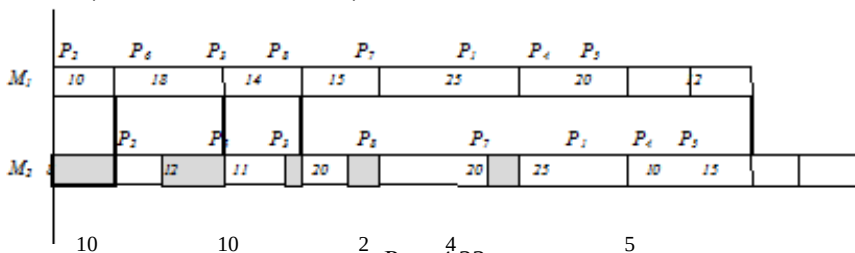


Рис. 4.33

**Пример 3. Случай трех станков.** Пусть в матрице (рис. 4.25) даны числа  $A_{1j}$ ,  $B_{2j}$ ,  $C_{3j}$ ,  $j=1, 2, \dots, 5$  – это время обработки пяти деталей соответственно на 1-м, 2-м и 3-м станках.

|          | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_{1j}$ | 7     | 11    | 8     | 7     | 6     |
| $B_{2j}$ | 6     | 5     | 3     | 5     | 3     |
| $C_{3j}$ | 4     | 12    | 7     | 8     | 3     |

Рис. 4.34

Проверим выполнение одного из условий (4.24) или (4.25).  
Выполнено условие  $\min(A_j) \geq \max(B_j)$ , (4.24), т. к.  $\min A_j = 6$  и  $\max B_j = 6$ .

Расширим таблицу на рис. 4.25 на 2 строки, где будут значения соответственно  $A_{1j}+B_{2j}$ ,  $B_{2j}+C_{3j}$ . Получим таблицу как на рис. 4.35.

|                 | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_{1j}$        | 7     | 11    | 8     | 7     | 6     |
| $B_{2j}$        | 6     | 5     | 3     | 5     | 3     |
| $C_{3j}$        | 4     | 12    | 7     | 8     | 3     |
| $A_{1j}+B_{2j}$ | 13    | 16    | 11    | 12    | 9     |
| $B_{2j}+C_{3j}$ | 10    | 17    | 10    | 13    | 6     |

Рис. 4.35

Следовательно, можно использовать алгоритм Джонсона.  
В качестве оптимального порядка получают одну из двух последовательностей, для каждой из которых время простоя равно 35. Рис. 4.36 иллюстрирует полученный результат.

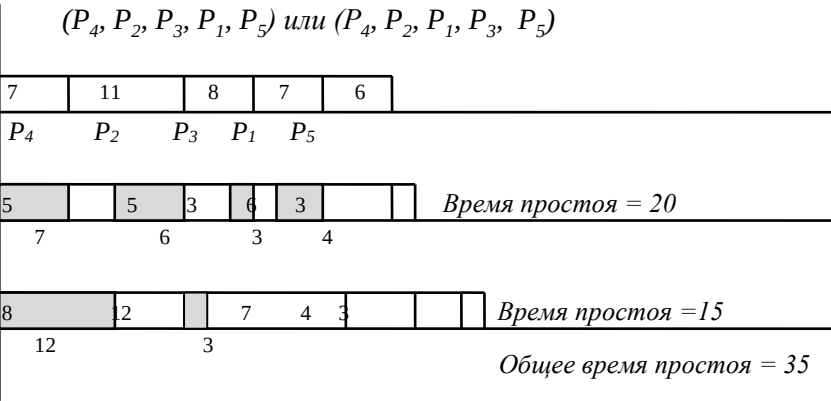


Рис. 4.36

Задания для самостоятельной работы.

4.1. Решение алгоритмом Литгла задачу коммивояжера

|    |          |          |          |          |          |    |          |          |          |          |          |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1) | $\infty$ | 1        | 5        | 4        | 3        | 2) | $\infty$ | 2        | 6        | 4        | 1        |
|    | 2        | $\infty$ | 1        | 4        | 3        |    | 5        | $\infty$ | 1        | 3        | 3        |
|    | 5        | 2        | $\infty$ | 2        | 7        |    | 4        | 8        | $\infty$ | 2        | 3        |
|    | 3        | 4        | 2        | $\infty$ | 3        |    | 3        | 4        | 5        | $\infty$ | 3        |
|    | 1        | 3        | 6        | 5        | $\infty$ |    | 2        | 3        | 4        | 8        | $\infty$ |
| 3) | $\infty$ | 3        | 5        | 8        | 2        | 4) | $\infty$ | 1        | 5        | 4        | 3        |
|    | 3        | $\infty$ | 8        | 2        | 7        |    | 2        | $\infty$ | 1        | 4        | 3        |
|    | 5        | 6        | $\infty$ | 2        | 4        |    | 5        | 2        | $\infty$ | 2        | 7        |
|    | 3        | 5        | 2        | $\infty$ | 3        |    | 3        | 4        | 2        | $\infty$ | 3        |
|    | 2        | 3        | 8        | 3        | $\infty$ |    | 1        | 3        | 6        | 5        | $\infty$ |
| 5) | $\infty$ | 2        | 9        | 2        | 1        | 6) | $\infty$ | 3        | 6        | 2        | 1        |
|    | 6        | $\infty$ | 8        | 3        | 5        |    | 2        | $\infty$ | 8        | 4        | 4        |
|    | 7        | 8        | $\infty$ | 6        | 2        |    | 4        | 5        | $\infty$ | 6        | 7        |
|    | 3        | 4        | 6        | $\infty$ | 3        |    | 3        | 3        | 2        | $\infty$ | 4        |
|    | 2        | 5        | 6        | 4        | $\infty$ |    | 2        | 4        | 7        | 6        | $\infty$ |

4.2. Имеется 2 машины и 5 деталей, каждая из которых должна пройти обработку сначала на первой, затем на второй машине. Время обработки  $i$ -ой детали на первой машине обозначим  $a_i$ , на второй –  $b_i$ . Требуется определить последовательность обработки деталей, которое минимизирует общее время простоя машин. Числовые данные приведены в таблице.

|       |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 5 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| $b_i$ | 1 | 3 | 7 | 5 | 2 |

4.3. Имеется 2 машины и 5 деталей, каждая из которых должна пройти обработку сначала на первой, затем на второй машине. Время обработки  $i$ -ой детали на первой ма-

шине обозначим  $a_i$ , на второй –  $b_i$ . Требуется определить последовательность обработки деталей, которое минимизирует общее время простоя машин. Числовые данные приведены в таблице.

|       |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 5 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| $b_i$ | 1 | 3 | 7 | 5 | 2 |

4.4. Имеется 3 машины и 5 деталей, каждая из которых должна пройти обработку на первой, на второй машине и на третьей машине. Время обработки  $i$ -ой детали на первой машине обозначим  $a_i$ , на второй –  $b_i$ , на третьей –  $c_i$ . Требуется определить последовательность обработки деталей, которое минимизирует общее время простоя машин. Решить задачу методом Джонсона. Числовые данные приведены в таблице.

|       |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 5 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| $b_i$ | 3 | 3 | 2 | 5 | 2 |
| $c_i$ | 2 | 3 | 7 | 2 | 1 |

4.5. Имеется 3 машины и 5 деталей, каждая из которых должна пройти обработку на первой, на второй машине и на третьей машине. Время обработки  $i$ -ой детали на первой машине обозначим  $a_i$ , на второй –  $b_i$ , на третьей –  $c_i$ . Требуется определить последовательность обработки деталей, которое минимизирует общее время простоя машин. Решить задачу методом Джонсона. Числовые данные приведены в таблице.

|       |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 5 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| $b_i$ | 3 | 3 | 2 | 5 | 2 |
| $c_i$ | 2 | 3 | 7 | 2 | 1 |

4.6. Имеется 3 машины и 5 деталей, каждая из которых должна пройти обработку на первой, на второй машине и на третьей машине. Время обработки  $i$ -ой детали на первой машине обозначим  $a_i$ , на второй –  $b_i$ , на третьей –  $c_i$ . Требуется

ся определить последовательность обработки деталей, которое минимизирует общее время простоя машин. Решить задачу методом Джонсона. Числовые данные приведены в таблице.

|       |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 5 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| $b_i$ | 3 | 3 | 2 | 5 | 2 |
| $c_i$ | 2 | 3 | 7 | 2 | 1 |

4.7. Имеется 3 машины и 5 деталей, каждая из которых должна пройти обработку на первой, на второй машине и на третьей машине. Время обработки  $i$ -ой детали на первой машине обозначим  $a_i$ , на второй –  $b_i$ , на третьей –  $c_i$ . Требуется определить последовательность обработки деталей, которое минимизирует общее время простоя машин. Решить задачу методом Джонсона. Числовые данные приведены в таблице.

|       |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 5 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| $b_i$ | 3 | 3 | 2 | 5 | 2 |
| $c_i$ | 2 | 3 | 7 | 2 | 1 |

*Контрольные вопросы*

1. Поясните сущность метода ветвей и границ.
2. Для решения каких задач логистики применяется метод ветвей и границ?
3. Опишите алгоритм Литтла.
4. Опишите алгоритм Лэнда и Дойга.
5. Особенность алгоритма Литтла как разновидность метода ветвей и границ.
6. Алгоритм Джонсона для двух станков.
7. Условие, при котором применяется алгоритм Джонсона для задачи трех станков?

## **5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

### **5.1. Модели и методы в системе массового обслуживания**

Многие логистические задачи связаны с системами массового обслуживания (СМО), т. е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой – происходит удовлетворение этих запросов. СМО включает в себя следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающие устройства (каналы обслуживания), выходящий поток требований. Исследованием таких систем занимается теория массового обслуживания.

Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры. Другими характерными примерами систем массового обслуживания могут служить склады или базы снабженческо-сбытовых организаций, и задача теории массового обслуживания в данном случае сводится к тому, чтобы установить оптимальное соотношение между числом поступающих на базу требований на обслуживание и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными. Теория массового обслуживания может найти применение и при расчете площади складских помещений, при этом складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство, а прибытие транспортных средств под выгрузку – как требование. Модели теории массового обслуживания применяются также при решении ряда задач организации и нормирования труда, других социально-экономических проблем.

Системы массового обслуживания могут быть классифицированы по ряду признаков.

1) В зависимости от условий ожидания начала обслуживания различают:

- СМО с потерями (отказами);
- СМО с ожиданием.

В СМО с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и теряются. Классическим примером системы с отказами является телефонная станция. Если вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и теряется.

В СМО с ожиданием требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней, называются системами с ограниченной длиной очереди.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются системами с ограниченным временем ожидания.

2) По числу каналов обслуживания СМО делятся на:

- одноканальные;
- многоканальные.

3) По месту нахождения источника требований СМО делятся на:

- разомкнутые, когда источник требования находится вне системы;
- замкнутые, когда источник находится в самой системе.

Примером разомкнутой системы может служить ателье по ремонту телевизоров. Здесь неисправные телевизоры – это источник требований на их обслуживание, находятся вне самой системы, число требований можно считать неограниченным. К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а, следовательно, источником требований на их обслуживание, например, бригадой наладчиков.

Возможны и другие признаки классификации СМО, например, по дисциплине обслуживания, однофазные и многофазные СМО и др.

Методы и модели, применяющиеся в теории массового обслуживания, можно условно разделить на аналитические и имитационные.

Аналитические методы теории массового обслуживания позволяют получить характеристики системы как некоторые функции параметров ее функционирования. Благодаря этому появляется возможность проводить качественный анализ влияния отдельных факторов на эффективность работы СМО. Имитационные методы основаны на моделировании процессов массового обслуживания на ЭВМ и применяются, если невозможно применение аналитических моделей. Далее будем рассматривать аналитические методы моделирования СМО.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких задач массового обслуживания, в которых входящий поток требований является простейшим (пуассоновским).

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т. е. вероятность поступления за время  $t$  ровно  $k$  требований задается формулой

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (5.1)$$

Простейший поток обладает тремя основными свойствами: ординарности, стационарности и отсутствием последействия.

Ординарность потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

Стационарным называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим 1), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени  $\Delta t$  зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени.

Отсутствие последствия означает, что число требований, поступивших в систему до момента  $t$ , не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Например, если на ткацком станке в данный момент произошел обрыв нити, и он устранен ткачихой, то это не определяет, произойдет новый обрыв на данном станке в следующий момент или нет, тем более это не влияет на вероятность возникновения обрыва на других станках.

Важная характеристика СМО – время обслуживания требований в системе. Время обслуживания одного требования является, как правило, случайной величиной и, следовательно, может быть описано законом распределения. Наибольшее распространение в теории и, особенно, в практических приложениях получил экспоненциальный закон распределения времени обслуживания. Функция распределения для этого закона имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (5.2)$$

т. е. вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины  $t$ , определяется формулой (2.16), где  $\mu$  – параметр экспоненциального закона распределения времени обслуживания требований в системе, т. е. величина, обратная среднему времени обслуживания  $\overline{t_{obs}}$ :

$$\mu = \frac{1}{\overline{t_{obs}}} \quad (5.3)$$

Рассмотрим аналитические модели наиболее распространенных СМО с ожиданием, т. е. таких СМО, в которых требования, поступившие в момент, когда все обслуживающие каналы заняты, ставятся в очередь и обслуживаются по мере освобождения каналов.

Общая постановка задачи состоит в следующем. Система имеет  $n$  обслуживающих каналов, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование.

В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром  $\lambda$ . Если в момент поступления очередного требования в системе на обслуживании уже находится не меньше  $n$  требований (т. е. все каналы заняты), то это требование становится в очередь и ждет начала обслуживания.

Время обслуживания каждого требования  $t_{обс}$  – случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $m$ .

СМО с ожиданием можно разбить на две большие группы: замкнутые и разомкнутые. К замкнутым относятся системы, в которых поступающий поток требований возникает в самой системе и ограничен. Например, мастер, задачей которого является наладка станков в цехе, должен периодически их обслуживать. Каждый налаженный станок становится потенциальным источником требований на накладку. В подобных системах общее число циркулирующих требований конечно и чаще всего постоянно.

Если питающий источник облачает бесконечным числом требований, то системы называются разомкнутыми. Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов и др. Для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным.

Отмеченные особенности функционирования систем этих двух видов накладывают определенные условия на используемый математический аппарат. Расчет характеристик работы СМО различного вида может быть проведен на основе расчета вероятностей состояний СМО (так называемые формулы Эрланга).

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между характером потока заявок, числом каналов, производительностью, правильностью работы и эффективностью. В качестве характеристик эффективности могут применяться следующие величины и функции:

- среднее количество заявок, которые может обслужить СМО в единицу времени;
- среднее количество заявок, получающих отказ и покидающих СМО;

- вероятность того, что поступившая заявка немедленно будет обслужена;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее количество заявок в очереди;
- средний доход СМО в единицу времени и другие экономические показатели СМО.

Экономические показатели, характеризующие работу СМО

- Время обслуживания.
- Вероятность, что канал свободен.
- Доля заявок, получивших отказ.
- Относительная пропускная способность.
- Абсолютная пропускная способность.
- Среднее время простоя СМО.
- Среднее число обслуживаемых заявок.

Средний доход СМО в единицу времени (средний чистый доход в единицу времени – разность между доходами и затратами).

Рассмотрим алгоритмы расчета показателей качества функционирования разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием.

При изучении таких систем рассчитывают различные показатели эффективности обслуживающей системы. В качестве основных показателей могут быть вероятность того, что все каналы свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди (средняя длина очереди), коэффициенты занятости и простоя каналов обслуживания и др.

1) Введем в рассмотрение параметр  $\alpha = l/m$ . Заметим, что если  $\alpha/n < 1$ , то очередь не может расти безгранично. Это условие имеет следующий смысл:  $l$  – среднее число требований, поступающих за единицу времени,  $1/m$  – среднее время обслуживания одним каналом одного требования, тогда  $\alpha = l \cdot 1/m$  – среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования. Поэтому условие  $\alpha/n < 1$  означает, что число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы за единицу времени обслужить все поступившие требования. Важнейшие характеристики работы

СМО:

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \frac{a^n}{n!(1 - a/n)} \right]^{-1} \quad (5.4)$$

2) Вероятность того, что занято ровно  $k$  обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{a^k}{k!} P_0 \quad \text{при } 1 \leq k \leq n \quad (5.5)$$

3) Вероятность того, что в системе находится  $k$  требований в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{a^k}{n! n^{k-n}} P_0 \quad \text{при } k \geq n \quad (5.6)$$

4) Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_n = \frac{a^n}{n!(1 - a/n)} P_0 \quad \text{при } a/n < 1 \quad (5.7)$$

5) Среднее время ожидания требованием начала обслуживания в системе:

$$\overline{t_{ozh}} = \frac{P_n}{\mu(n - a)} \quad (5.8)$$

6) Средняя длина очереди:

$$\overline{L_{och}} = \frac{a P_n}{n!(1 - a/n)} \frac{a^{n+1}}{n!(1 - a/n)^2} P_0; \quad (a/n < 1) \quad (5.9)$$

7) Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} P_0 \quad (5.10)$$

8) Коэффициент простоя каналов:

$$K_{pr} = \frac{\overline{N}_0}{n} \quad (5.11)$$

9) Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\overline{N}_z = n - \overline{N}_0 \quad (5.12)$$

10) Коэффициент загрузки каналов:

$$K_z = \frac{\overline{N}_z}{n} \quad (5.13)$$

Перейдем к рассмотрению алгоритмов расчета характеристик функционирования замкнутых СМО. Поскольку система замкнутая, то к постановке задачи следует добавить условие: поток поступающих требований ограничен, т. е. в системе обслуживания одновременно не может находиться больше  $m$  требований ( $m$  – число обслуживаемых объектов).

За критерий, характеризующий качество функционирования рассматриваемой системы, выберем отношение средней длины очереди к наибольшему числу требований, находящихся одновременно в обслуживающей системе, – коэффициент простоя обслуживаемого объекта. В качестве другого критерия возьмем отношение среднего числа незанятых обслуживающих каналов к их общему числу – коэффициент простоя обслуживающего канала.

Первый из названных критериев характеризует потери времени из-за ожидания начала обслуживания; второй показывает полноту загрузки обслуживающей системы.

Очевидно, что очередь может возникнуть, лишь когда число каналов меньше наибольшего числа требований, находящихся одновременно в обслуживающей системе ( $n < m$ ).

Приведем последовательность расчетов характеристик замкнутых СМО и необходимые формулы.

1) Определим параметр  $\alpha = 1/m$  – показатель загрузки системы, т. е. математическое ожидание числа требований, поступающих в систему за время, равное средней длительности обслуживания.

2) Вероятность того, что занято  $k$  обслуживающих каналов при условии, что число требований, находящихся в системе, не превосходит числа обслуживающих каналов системы:

$$P_k = \frac{m!}{k!(m-k)!} a^k P_0 \quad \text{при } 1 \leq k < m \quad (5.14)$$

3) Вероятность того, что в системе находится  $k$  требований для случая, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} a^k P_0 \quad \text{при } n \leq k \leq m \quad (5.15)$$

4) Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны, определим, используя очевидное условие:

$$\sum_{k=1}^m P_k = 1, \quad \text{откуда } P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^m P_k}$$

Величину  $P_0$  можно получить также путем подстановки в равенство значений  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , в которые  $P_0$  входит множителем. Подставляя их, получаем следующее уравнение для определения  $P_0$ :

$$P_0 \left[ \sum_{k=0}^n \frac{m!}{k!(m-k)!} a^k + \sum_{k=n+1}^n \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} a^k \right] = 1$$

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{m!}{k!(m-k)!} a^k + \sum_{k=n+1}^n \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} a^k \right]^{-1} \quad (5.16)$$

5) Среднее число требований, ожидающих начала обслуживания (средняя длина очереди):

$$M_{och} = \sum_{k=n-1}^m (k-n) P_k$$

или

$$M_{och} = \sum_{k=n-1}^m \frac{(k-n)m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} a^k P_0 \quad (5.17)$$

6) Коэффициент простоя обслуживаемого требования (объекта):

$$K_{pr.ob} = \frac{M_{och}}{m} \frac{1}{m} \sum_{k=n-1}^m (k-n) P_k \quad (5.18)$$

7) Среднее число требований, находящихся в обслуживающей системе, обслуживаемых и ожидающих обслуживания:

$$M = \sum_{k=1}^n k P_k + \sum_{k=n+1}^m k P_k \quad (5.19)$$

или

$$M = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{m!}{k!(m-k)!} a^k + \sum_{k=n+1}^m \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} a^k \right] P_0$$

8) Среднее число свободных обслуживающих каналов:

$$N_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)m!}{k!(m-k)!} a^k P_0 \quad (5.20)$$

9) Коэффициент простоя обслуживающего канала:

$$N_{pr.can} = \frac{N_0}{N} \sum_{k=0}^{n-1} P_k \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k P_k \quad (5.21)$$

## 5.2. Моделирование систем массового обслуживания с неограниченной очередью

### 5.2.1. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Компания имеет один склад для хранения композитных материалов. Рассмотрим данный склад как одноканальную систему массового обслуживания (СМО) с одним каналом для обслуживания заявок на приобретение материалов. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Если заявка застаёт обслуживающий канал занятым, то она встаёт в очередь и ожидает начала обслуживания.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $\mu$ . Среднее время обслуживания заявки  $t_{обсл} = 1/\mu$ .

На основе имитационного моделирования определим наиболее эффективное время обслуживания в данной системе массового обслуживания.

а) Рассмотрим систему со следующими входными данными:

Интенсивность потока заявок  $\lambda$ : 4 заявки в час.

Интенсивность потока обслуживания  $t_{обсл} = 15$ .

Исчисляем показатели обслуживания для одноканальной СМО.

Интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{15} = 0,0667$$

1) Интенсивность нагрузки

$$\rho = \lambda \cdot t_{обс} = 4 \cdot 15/60 = 1.$$

Интенсивность нагрузки  $\rho=1$  показывает степень согласованности входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

Поскольку  $\rho \geq 1$ , то очередь будет расти бесконечно, следовательно, предельных вероятностей не существуют. СМО не будет работать в стационарном режиме. Поэтому необходимо ввести еще один канал или уменьшить время обслуживания.

б) Рассмотрим систему, приняв время обслуживания  $t_{обсл} = 10$ .

Вычислим показатели обслуживания для одноканальной СМО.

Интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{60}{10} = 6.$$

1) Интенсивность нагрузки

$$\rho = \lambda \cdot t_{обс} = 4 \cdot 10/60 = 0,67.$$

Интенсивность нагрузки  $\rho=0.67$  показывает степень согласованности входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

2) Поскольку  $\rho < 1$ , то очередь не будет расти бесконечно, следовательно, предельные вероятности существуют.

3) Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя канала).

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0.67 = 0,33.$$

Следовательно, 33 % в течение часа канал будет не занят, время простоя равно  $t_{np} = 20$  мин.

Вероятность того, что в очереди:

1 заявка:  $p_1 = \rho(1 - \rho) = 0,67^1(1 - 0,67) = 0,22$

2 заявка:  $p_2 = \rho(1 - \rho) = 0,67^2(1 - 0,67) = 0,15$

3 заявка:  $p_3 = \rho(1 - \rho) = 0,67^3(1 - 0,67) = 0,0988$

4 заявка:  $p_4 = \rho(1 - \rho) = 0,67^4(1 - 0,67) = 0,0658$

5 заявка:  $p_5 = \rho(1 - \rho) = 0,67^5(1 - 0,67) = 0,0439$

4) Доля заявок, получивших отказ

$$p_1 = 1 - p_0 = 1 - 0,33 = 0,67.$$

Значит, 67 % из числа поступивших заявок не принимаются к обслуживанию.

5) Относительная пропускная способность.

Поскольку в рассматриваемой СМО ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому

$$Q = p_{обс} = 1.$$

6) Абсолютная пропускная способность

$$A = Q \cdot \lambda = 1 \cdot 4 = 4 \text{ заявок/час.}$$

7) Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0,67^2}{1 - 0,67} = 1,33$$

8) Среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди).

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1,33}{4} = 0,33 \text{ час.}$$

9) Среднее число обслуживаемых заявок

$$L_{об} = \rho = 0,67.$$

10) Среднее число заявок в системе

$$L_{\text{СМО}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{обс}} = 1,33 + 0,67 = 2 \text{ ед.}$$

11) Среднее время пребывания заявки в СМО

$$T_{\text{СМО}} = \frac{L_{\text{СМО}}}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ час.}$$

Число заявок, получивших отказ в течение час:  $\lambda \cdot p_1 = 0$  заявок в час.

Номинальная производительность СМО:  $1 / 0,17 = 6$  заявок в час.

Фактическая производительность СМО:  $4 / 6 = 67 \%$  от номинальной производительности.

в) Для повышения фактической производительности увеличим интенсивность потока заявок.

Рассмотрим эту же одноканальную СМО с неограниченной очередью с интенсивностью 5 заявок в час:  $\lambda = 5$ .

Исчисляем показатели обслуживания для одноканальной СМО:

Интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{60}{10} = 6.$$

1) Интенсивность нагрузки

$$\rho = \lambda \cdot t_{\text{обс}} = 5 \cdot 10/60 = 0,83.$$

Интенсивность нагрузки  $\rho=0,83$  показывает степень согласованности входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

2) Поскольку  $\rho < 1$ , то очередь не будет расти бесконечно, следовательно, предельные вероятности существуют.

3) Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя канала)

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,83 = 0,17.$$

Следовательно, 17 % в течение часа канал будет не занят, время простоя равно  $t_{np} = 10$  мин.

Вероятность того, что в очереди:

1 заявка:  $p_1 = \rho(1 - \rho) = 0,83^1(1 - 0,83) = 0,14$

2 заявки:  $p_2 = \rho(1 - \rho) = 0,83^2(1 - 0,83) = 0,12$

3 заявки:  $p_3 = \rho(1 - \rho) = 0,83^3(1 - 0,83) = 0,0965$

4 заявки:  $p_4 = \rho(1 - \rho) = 0,83^4(1 - 0,83) = 0,0804$

5 заявки:  $p_5 = \rho(1 - \rho) = 0,83^5(1 - 0,83) = 0,067.$

4) Доля заявок, получивших отказ

$$p_1 = 1 - p_0 = 1 - 0,17 = 0,83.$$

Значит, 83 % из числа поступивших заявок не принимаются к обслуживанию.

5) Относительная пропускная способность.

Поскольку в рассматриваемой СМО ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому  $Q = p_{обс} = 1.$

6) Абсолютная пропускная способность

$$A = Q \cdot \lambda = 1 \cdot 5 = 5 \text{ заявок/час.}$$

7) Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$L_{оч} = \frac{p^2}{1 - p} = \frac{0,83^2}{1 - 0,83} = 4,17.$$

8) Среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди).

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{4,17}{5} = 0,83.$$

9) Среднее число обслуживаемых заявок

$$L_{об} = \rho = 0,83.$$

10) Среднее число заявок в системе

$$L_{CMO} = L_{och} + L_{обс} = 4,17 + 0,83 = 5 \text{ ед.}$$

11) Среднее время пребывания заявки в СМО

$$T_{CMO} = \frac{L_{CMO}}{\lambda} = \frac{5}{5} = 1 \text{ ч.}$$

Число заявок, получивших отказ в течение час:  $\lambda \cdot p_1 = 0$  заявок в час.

Номинальная производительность СМО:  $1 / 0,17 = 6$  заявок в час.

Фактическая производительность СМО:  $5 / 6 = 83 \%$  от номинальной производительности.

Сведем результаты имитации в одну табл. 5.1 для наглядности и анализа.

Таблица 5.1

Результаты имитации

| Показатели                                                                                                | 1-й вариант                                      | 2-й вариант                                                                         | 3-й вариант                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Интенсивность потока заявок $\lambda$ :                                                                   | 4 заявки в час                                   | 4 заявки в час                                                                      | 5 заявок в час                                                                       |
| Интенсивность потока обслуживания                                                                         | $t_{обсл} = 15$<br>$\mu = \frac{1}{15} = 0,0667$ | $t_{обсл} = 10$ ;<br>$\mu = \frac{60}{10} = 6$                                      | $t_{обсл} = 10$                                                                      |
| 1. Интенсивность наружкир $= \lambda \cdot t_{обс}$                                                       | $\rho = 1$                                       | $\rho = 0.67$ ;                                                                     | $\rho = 0.83$                                                                        |
| 2. при $\rho \geq 1$ – очередь будет расти бесконечно; при $\rho < 1$ – очередь не будет расти бесконечно | $\rho \geq 1$                                    | $\rho < 1$                                                                          | $\rho < 1$                                                                           |
| 5. Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя канала).<br>$p_0 = 1 - \rho$                     |                                                  | $p_0 = 0,33 - 33 \%$ в течение часа канал не занят, время просто $t_{np} = 20$ мин. | $p_0 = 0,17 - 17 \%$ в течение часа канал не занят, время простоя $t_{np} = 10$ мин. |

Продолжение таблицы 5.1

| Показатели                                                                                                            | 1-й вариант | 2-й вариант                                                                         | 3-й вариант                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Вероятность того, что в очереди: $p_n = p^n (1 - p)$<br>1 заявка:<br>2 заявки:<br>3 заявки:<br>4 заявки:<br>5 заявок: |             | $p_1 = 0,22$<br>$p_2 = 0,15$<br>$p_3 = 0,0988$<br>$p_4 = 0,0658$<br>$p_5 = 0,0439$  | $p_1 = 0,14$<br>$p_2 = 0,12$<br>$p_3 = 0,0965$<br>$p_4 = 0,0804$<br>$p_5 = 0,067$   |
| 4. Доля заявок, получивших отказ.<br>$p_1 = 1 - p_0$                                                                  |             | $p_1 = 0,67$ , т. е. 67 % из числа поступивших заявок не принимаются к обслуживанию | $p_1 = 0,83$ , т. е. 83 % из числа поступивших заявок не принимаются к обслуживанию |
| 5. Относительная пропускная способность                                                                               |             | $Q = p_{обс} = 1.$                                                                  | $Q = p_{обс} = 1.$                                                                  |
| 6. Абсолютная пропускная способность                                                                                  |             | $A = Q \cdot \lambda = 1 \cdot 4 = 4$ заявок/час.                                   | $A = Q \cdot \lambda = 1 \cdot 5 = 5$ заявок/час.                                   |
| 7. Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди).                                                            |             | $L_{оч} = \frac{p^2}{1-p} = \frac{0,67^2}{1-0,67} = 1,33$                           | $L_{оч} = \frac{p^2}{1-p} = \frac{0,83^2}{1-0,83} = 4,17$                           |
| 8. Среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди) (час)                             |             | $T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1,33}{4} = 0,33$                           | $T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{4,17}{5} = 0,83$                           |
| 9. Среднее число обслуживаемых заявок                                                                                 |             | $L_{об} = \rho = 0,67$                                                              | $L_{об} = \rho = 0,83$                                                              |
| 10. Среднее число заявок в системе.                                                                                   |             | $L_{СМО} = L_{оч} + L_{обс} = 1,33 + 0,67 = 2$ ед.                                  | $L_{СМО} = L_{оч} + L_{обс} = 4,17 + 0,83 = 5$ ед.                                  |
| 11. Среднее время пребывания заявки в СМО (час)                                                                       |             | $T_{СМО} = \frac{L_{СМО}}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0,5$                             | $T_{СМО} = \frac{L_{СМО}}{\lambda} = \frac{5}{5} = 1$                               |
| Число заявок, получивших отказ в течение часа:                                                                        |             | $\lambda \cdot p_1 = 0$ заявок в час.                                               | $\lambda \cdot p_1 = 0$ заявок в час.                                               |
| Номинальная производительность СМО:                                                                                   |             | $1 / 0,17 = 6$ заявок в час.                                                        | $1 / 0,17 = 6$ заявок в час.                                                        |
| Фактическая производительность СМО.                                                                                   |             | $4/6 = 67\%$ от номинальной производительности                                      | $5/6 = 83\%$ от номинальной производительности                                      |

Если рассмотреть ситуацию при интенсивности потока заявок  $\lambda=6$ , то интенсивность нагрузки равна

$$P = \lambda \cdot t_{обс} = 6 \cdot 10/60 = 1.$$

Поскольку  $\rho \geq 1$ , то очередь будет расти бесконечно, следовательно, предельных вероятностей не существуют. СМО не будет работать в стационарном режиме. Поэтому необходимо ввести еще один канал или уменьшить время обслуживания.

Анализ имитации при различных исходных данных показывает наиболее эффективный вариант работы системы интенсивностью 5 заявок в час:  $\lambda = 5$  и времени обслуживания  $t_{обс} = 10$ .

### 5.2.2. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим склад как многоканальную СМО с неограниченной очередью с количеством каналов обслуживания  $n = 2$ .

а) В системе также задано количество заявок в очереди  $m = 5$ , интенсивность потока заявок  $\lambda = 6$  заявок в час и интенсивность потока обслуживания  $t_{обс} = 15$  мин.

Исчисляем показатели обслуживания многоканальной СМО:

Интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{60}{15} = 4.$$

1) Интенсивность нагрузки

$$\rho = \lambda \cdot t_{обс} = 6 \cdot 15/60 = 1,5.$$

Интенсивность нагрузки  $\rho=1,5$  показывает степень согласованности входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

2) Поскольку  $1,5 < 2$ , то процесс обслуживания будет стабилен.

3) Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя каналов)

$$p_0 = \frac{1}{\sum \frac{p^k}{k!} + \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)}} = \frac{1}{\frac{1,5^0}{0!} + \frac{1,5^1}{1!} + \frac{1,5^2}{2!} + \frac{1,5^{2+1}}{2!(2-1,5)}} = 0,14.$$

Следовательно, 14 % в течение часа канал будет не занят, время простоя равно  $t_{np} = 8,6$  мин.

4) Вероятность отказа (Доля заявок, получивших отказ).

Поскольку отказ в обслуживании в таких системах не может быть, то  $p_{отк} = 0$ .

5) Вероятность обслуживания поступающих заявок

$$p_{обс} = Q = 1.$$

6) Среднее число каналов, занятых обслуживанием.

$$n_3 = \rho \cdot p_{обс} = 1,5 \cdot 1 = 1,5 \text{ канала.}$$

Среднее число простаивающих каналов.

$$n_{np} = n - n_3 = 2 - 1,5 = 0,5 \text{ канала.}$$

7) Коэффициент занятости каналов обслуживанием

$$K_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{1,5}{2} = 0,75.$$

Следовательно, система на 75 % занята обслуживанием.

8) Абсолютная пропускная способность

$$A = p_{обс} \cdot \lambda = 1 \cdot 6 = 6 \text{ заявок/час.}$$

9) Среднее время простоя СМО.

$$t_{np} = p_{отк} \cdot t_{обс} = 0 \cdot 0,25 = 0 \text{ час.}$$

Вероятность образования очереди

$$p_{оч} = \frac{p^{\pi+1}}{n!(n-p)} p_0$$

$$p_{оч} = \frac{1,5^{2+1}}{2!(2-1,5)} 0,14 = 0,48$$

Вероятность отсутствия очереди.

$$p = 1 - p_{оч} = 1 - 0,48 = 0,52.$$

Вероятность того, что придется ждать начала обслуживания равна вероятности того, что все каналы заняты:

$$\pi = \frac{n^2}{(n-1)!(n-p)} p_0$$

$$\pi = \frac{2^2}{(2-1)!(2-1,5)} 0,14 = 0,64$$

10) Среднее число заявок, находящихся в очереди

$$L_{оч} = \frac{n}{n-p} p_{оч}$$

$$L_{оч} = \frac{2}{2-1,5} 0,48 = 1,93ed$$

11) Среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди)

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{A} = \frac{1,93}{6} = 0,32 \text{ часа.}$$

12) Среднее число обслуживаемых заявок

$$L_{об} = \rho = 1,5.$$

13) Среднее число заявок в системе

$$L_{CMO} = L_{оч} + L_{обс} = 1,93 + 1,5 = 3,43 \text{ ед.}$$

14) Среднее время пребывания заявки в СМО

$$T_{CMO} = \frac{L_{CMO}}{A} = \frac{3,43}{A} = 0,57 \text{ часа.}$$

Число заявок, получивших отказ в течение часа:  $\lambda \cdot p_1 = 0$  заявок в час.

Номинальная производительность СМО:  $2 / 0,25 = 8$  заявок в час.

Фактическая производительность СМО:  $6/8=75$  % от номинальной производительности.

б) Увеличив интенсивность потока заявок до  $\lambda = 7$  заявок в час, получим СМО со следующими показателями эффективности.

1) Интенсивность нагрузки

$$\rho = \lambda \cdot t_{обс} = 7 \cdot 15/60 = 1,75.$$

Интенсивность нагрузки  $\rho=1,75$  показывает степень согласованности входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

2) Поскольку  $1,75 < 2$ , то процесс обслуживания будет стабилен.

3) Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя каналов):

$$p_0 = 0,0667.$$

Следовательно, 6,67 % в течение часа канал будет не занят, время простоя равно  $t_{np} = 4$  мин.

4) Вероятность отказа (Доля заявок, получивших отказ).

Поскольку отказ в обслуживании в таких системах не может быть, то  $p_{отк} = 0$

5) Вероятность обслуживания поступающих заявок

$$p_{обс} = Q = 1.$$

6) Среднее число каналов, занятых обслуживанием

$$n_3 = \rho \cdot p_{обс} = 1.75 \cdot 1 = 1.75 \text{ канала.}$$

Среднее число простаивающих каналов

$$n_{np} = n - n_3 = 2 - 1,75 = 0,3 \text{ канала.}$$

7) Коэффициент занятости каналов обслуживанием.

$$K_3 = 0,9$$

Следовательно, система на 90 % занята обслуживанием.

8) Абсолютная пропускная способность.

$$A = p_{обс} \cdot \lambda = 1 \cdot 7 = 7 \text{ заявок/час.}$$

9) Среднее время простоя СМО.

$$t_{пр} = p_{отк} \cdot t_{обс} = 0 \cdot 0,25 = 0 \text{ час.}$$

Вероятность образования очереди

$$P_{och} = 0,71$$

Вероятность отсутствия очереди.

$$p = 1 - p_{оч} = 1 - 0,71 = 0,29$$

Вероятность того, что придется ждать начала обслуживания равна вероятности того, что все каналы заняты:

$$\pi = 0,82$$

10) Среднее число заявок, находящихся в очереди.

$$L_{och} = 5,72 \text{ ед.}$$

11) Среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди)

$$T_{och} = 0,8 \text{ часа.}$$

12) Среднее число обслуживаемых заявок

$$L_{об} = \rho = 1,75.$$

13) Среднее число заявок в системе

$$L_{СМО} = L_{оч} + L_{об} = 5,72 + 1,75 = 7,47 \text{ ед.}$$

14) Среднее время пребывания заявки в СМО

$$T_{СМО} = 1,07 \text{ часа.}$$

Число заявок, получивших отказ в течение часа:  $\lambda \cdot p_1 = 0$  заявок в час.

Номинальная производительность СМО:  $2 / 0,25 = 8$  заявок в час.

Фактическая производительность СМО:  $7 / 8 = 88 \%$  от номинальной производительности.

Сведем результаты имитации в одну табл. 5.2 для наглядности и анализа.

Таблица 5.2

Результаты имитации

| Показатели                              | 1-й вариант                                       | 2-й вариант                                       |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Количество каналов обслуживания         | $n = 2$                                           | $n = 2$                                           |
| Интенсивность потока заявок $\lambda$ : | 4 заявки в час                                    | 5 заявок в час                                    |
| 1. Интенсивность нагрузки.              | $\rho = 1,5$                                      | $\rho = 1,75$                                     |
| 2.                                      | Т.к. $1,5 < 2$ , то процесс обслуживания стабилен | Т.к. $1,7 < 2$ , то процесс обслуживания стабилен |

Продолжение таблицы 5.2

|                                                                                                                      |                                                                                                 |                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя каналов)                                                    | $p_0 = 0,14$ , т.е. 14 % в течение часа канал не занят, время простоя равно $t_{np} = 8,6$ мин. | $p_0 = 0,0667$ , т.е. 6,67 % в течение часа канал не занят, время простоя $t_{np} = 4$ мин. |
| 4. Вероятность отказа (Доля заявок, получивших отказ). Поскольку отказ в обслуживании в таких системах не может быть | $p_{отк} = 0$                                                                                   | $p_{отк} = 0$                                                                               |
| 5. Вероятность обслуживания поступающих заявок.                                                                      | $p_{обс} = 1$                                                                                   | $p_{обс} = 1$                                                                               |
| 6. Среднее число каналов, занятых обслуживанием.                                                                     | $n_z = 1,5$ канала.                                                                             | $n_z = 1,75$ канала.                                                                        |
| Среднее число простаивающих каналов.                                                                                 | $n_{np} = 0,5$ канала.                                                                          | $n_{np} = 0,3$ канала.                                                                      |
| Показатели                                                                                                           | 1-й вариант                                                                                     | 2-й вариант                                                                                 |
| 7. Коэффициент занятости каналов обслуживанием.                                                                      | $K_3 = 0,8$ , т.е. система на 80 % занята обслуживанием.                                        | $K_3 = 0,9$                                                                                 |
| 8. Абсолютная пропускная способность.                                                                                | $A = 6$ заявок/час                                                                              | $A = 7$ заявок/час.                                                                         |
| 9. Среднее время простоя СМО.                                                                                        | $t_{np} = 0$ час.                                                                               | $t_{np} = 0$ час                                                                            |
| Вероятность образования очереди.                                                                                     | $p_{och} = 0,48$                                                                                | $p_{оч} = 0,71$                                                                             |
| Вероятность отсутствия очереди                                                                                       | $p = 0,52$                                                                                      | $p = 0,29$                                                                                  |
| Вероятность того, что придется ждать начала обслуживания равна вероятности того, что все каналы заняты               | $\pi = 0,64$                                                                                    | $\pi = 0,82$                                                                                |
| 10. Среднее число заявок, находящихся в очереди.                                                                     | $L_{och} = 1,93ed$                                                                              | $L_{оч} = 5,72ed$                                                                           |

Продолжение таблицы 5.2

|                                                                                       |                                              |                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 11. Среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди). | $T_{och} = 0,32$ часа                        | $T_{оч} = 0,8$ часа                           |
| 12. Среднее число обслуживаемых заявок.                                               | $L_{об} = 1,5$                               | $L_{об} = 1,75$                               |
| 13. Среднее число заявок в системе.                                                   | $L_{СМО} = 3,43$ ед.                         | $L_{СМ} = 7,47$ ед.                           |
| 14. Среднее время пребывания заявки в СМО.                                            | $T_{СМО} = 0,57$ часа                        | $T_{СМО} = 1,07$ часа                         |
| Число заявок, получивших отказ в течение часа:                                        | $\lambda \cdot p_1 = 0$ заявок в час.        | $\lambda \cdot p_1 = 0$ заявок в час          |
| Номинальная производительность СМО:                                                   | $2/0.25 = 8$ заявок в час.                   | $2 / 0.25 = 8$ заявок в час                   |
| Фактическая производительность СМО:                                                   | $6/8=75$ % от номинальной производительности | $7/8=88$ % от номинальной производительности. |

Проведем анализ результатов имитации работы склада компании, обслуживающий заявки компании-потребителей на поставку композитных материалов. На складе имеются 2 канала обслуживания, время обслуживания постоянная величина. При количестве заявок равной 4 заявки в час, среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди)  $T_{och} = 0,32$  часа, в то время как при количестве заявок равной 5 заявок в час среднее время ожидания в очереди  $T_{оч} = 0,8$  часа, т. е. больше. Однако фактическая производительность СМО: в данном случае равна 88 %, что на 13 % больше при 4 заявках в час. Как видим из таблицы второй вариант имитации выдает более эффективный вариант работы системы (склада).

### 5.3. Моделирование работы замкнутой системы массового обслуживания

Компания обслуживает остановочные комплексы в г. Алматы. В функции отдела по обслуживанию остановочных комплексов входит ремонт и замена рекламных банеров остановочных комплексов. По городу отдел обслуживает 170 остановочных комплексов.

Если рассматривать отдел по обслуживанию остановочных комплексов как систему массового обслуживания, то это будет закрытая СМО. Система содержит  $R$  обслуживающих бригад (каналов). Заявки на обслуживание остановочных комплексов поступают с интенсивностью  $\lambda$ . Если в момент поступления требования на обслуживание имеется свободная бригада (канал), то канал немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования. Каждый канал может одновременно обслуживать только одно требование. Все бригады (каналы) функционируют независимо. Если заявка застала все обслуживающие бригады (каналы) занятыми, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания. Требование на обслуживание поступает от  $N$  обслуживаемых объектов (остановочных комплексов).

До сих пор были рассмотрены системы массового обслуживания, для которых интенсивность  $\lambda$  входящего потока заявок не зависит от состояния системы. В этом случае источник заявок является внешним по отношению к СМО и генерирует неограниченный поток требований. Рассмотрим системы массового обслуживания, для которых  $\lambda$  зависит от состояния системы, причем источник требований является внутренним и генерирует ограниченный поток заявок.

Обслуживаются остановочные комплексы в количестве 170 штук бригадой  $R$  механиков ( $N > R$ ) компании, причем каждый комплекс может обслуживаться только одним механиком. Здесь комплексы являются источниками требований (заявок на обслуживание), а механики – обслуживающими каналами. Остановочный комплекс после обслуживания используется по свое-

му прямому назначению и становится потенциальным источником возникновения требований на обслуживание. Очевидно, что интенсивность  $\lambda$  зависит от того, сколько машин в данный момент находится в эксплуатации и сколько комплексов обслуживается или стоит в очереди, ожидая обслуживания ( $k$ ).

В рассматриваемой модели емкость источника требований следует считать ограниченной. Входящий поток требований исходит из ограниченного числа остановочных комплексов ( $N - k$ ), которые в случайные моменты времени требуют обслуживания. При этом каждый остановочный комплекс из ( $N - k$ ) находится в эксплуатации. Генерирует пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda$  независимо от других объектов; общий (суммарный) входящий поток имеет интенсивность  $(N - k) \lambda$ . Требование, поступившее в систему в момент, когда свободен хотя бы один канал, немедленно идет на обслуживание. Если требование застает все каналы занятыми обслуживанием других требований, то оно не покидает систему, а становится в очередь и ждет, пока один из каналов не станет свободным.

Таким образом, в замкнутой системе массового обслуживания входящий поток требований формируется из выходящего.

Состояние  $S_k$  системы характеризуется общим числом требований, находящихся на обслуживании и в очереди, равным  $k$ . Для рассматриваемой замкнутой системы, очевидно,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ . При этом, если система находится в состоянии  $S_k$ , то число объектов, находящихся в эксплуатации, равно  $(N - k)$ .

Если  $\lambda$  – интенсивность потока требований в расчете на одну машину, то

$$\lambda_k = \begin{cases} (N - k) \cdot \lambda & 0 \leq k \leq R \\ 0 & k > N \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k \cdot \mu, & 0 \leq k \leq R, \\ R \cdot \mu & R \leq k \leq N, \\ 0 & k > N. \end{cases}$$

Система алгебраических уравнений, описывающих работу замкнутой СМО в стационарном режиме, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 0 = -\rho NP_0 + P_1; \\ 0 = (N - k + 1)\rho P_{k-1} - [(N - k)\rho + k]P_k + (k + 1)P_{k+1} & 0 < k < R, \\ 0 = (N - k + 1)\rho P_{k-1} - [(N - k)\rho + R]P_k + RP_{k+1} & R \leq k < N, \\ 0 = \rho P_{N-1} - RP_N. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим вероятность  $k$ -го состояния.

$$P_k = \begin{cases} \frac{N! \cdot \rho^k}{k! \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & 1 \leq k < R, \\ \frac{N! \cdot \rho^k}{R! \cdot R^{k-R} \cdot (N-R)!} \cdot P_0, & R \leq k \leq N \end{cases} \quad (5.22)$$

Величина  $P_0$  определяется из условия нормирования  $\sum_{k=0}^N P_k = 1$ , полученных результатов по формулам (5.41) для  $P_k, k = 1, 2, \dots, N$ .

Определим следующие вероятностные характеристики системы:

1) среднее число требований в очереди на обслуживание

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k - R)P_k;$$

2) среднее число требований, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди)

$$L_s = \sum_{k=1}^N kP_k;$$

3) среднее число механиков (каналов), простаивающих из-за отсутствия работы

$$\bar{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1} (R - k)P_k;$$

4) коэффициент простоя обслуживаемого объекта (остановочный комплекс) в очереди

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N};$$

5) коэффициент использования объектов (машин)

$$\alpha_2 = 1 - \left( \frac{L_s}{N} \right);$$

6) коэффициент простоя обслуживающих каналов (механиков)

$$\alpha_3 = \frac{\bar{R}_a}{R};$$

7) среднее время ожидания обслуживания (время ожидания обслуживания в очереди)

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left( \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\mu}.$$

Задача состояла в том, чтобы определить наиболее оптимальную систему по обслуживанию остановочных комплексов.

Проведены расчеты по нескольким вариантам решения с различными данными для поиска оптимального. В работе представлены 3 варианта решения для сравнения и подбора оптимального варианта.

Результаты детальных расчетов приведены в Приложении А.

1 вариант. Исходные данные

Количество остановочных комплексов  $N=170$ .

Количество обслуживающих бригад  $R=20$ .

Интенсивность потока  $\lambda = 0,2$ .

Время обслуживания одного комплекса  $t=0,3$  часа.

Проведем расчеты.

$$\mu = \frac{1}{t} = 3,3;$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,06.$$

Находим вероятность  $k$ -го состояния из системы уравнений (5.1).

Результаты расчетов значений  $P_k, k = \overline{1, N}$ , приведены в Приложении А.

Учитывая, что  $\sum_{k=0}^N P_k = 1$  и используя результаты расчета вычислим  $P_0$ :

$$\sum_{k=0}^N P_k = P_0 + 1,02P_1 + 5,17P_2 + \dots + 4E - 15P_{17} = 1$$

Откуда  $P_0 = 0,00005$ .

Далее, определяем значения  $P_k, k = \overline{1, N}$ .

Определим следующие вероятностные характеристики системы:

1) среднее число требований в очереди на обслуживание

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k - R) \cdot P_k = 0,001.$$

2) среднее число требований, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди)

$$L_s = 9,65;$$

3) среднее число механиков (каналов), простаивающих из-за отсутствия работы

$$\overline{R_n} = 10,4;$$

4) коэффициент простоя обслуживаемого объекта (остановочный комплекс) в очереди  $a_1 = 8,2$ ;

5) коэффициент использования объектов (машин)  $a_2 = 0,94$ ;

6) коэффициент простоя обслуживающих каналов (механиков)  $a_3 = 0,52$ ;

7) среднее время ожидания обслуживания (время ожидания обслуживания в очереди)  $W_q = 0,0008$

2 вариант задачи. Исходные данные

Количество остановочных комплексов  $N = 170$ .

Количество обслуживающих бригад  $R = 15$ .

Интенсивность потока  $\lambda = 0,2$ .

Время обслуживания одного комплекса  $t = 0,3$  часа.

Проведем расчеты.

$$\mu = \frac{1}{t} = 3,3;$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,06.$$

Находим вероятность  $k$ -го состояния из системы уравнений (5.1).

Результаты расчетов значений  $P_k, k = \overline{1, N}$ , приведены в Приложении В.

Учитывая, что  $\sum_{k=0}^N P_k = 1$ , и используя результаты расчета вычислим  $P_0$ :

$$\sum_{k=0}^N P_k = P_0 + 10,2P_1 + 51,7P_2 + \dots + 4E \quad 15P_{170} = 1.$$

Откуда  $P_0 = 0,00005$ ,

Далее, определяем значения  $P_k, k = \overline{1, N}$ .

Определим следующие вероятностные характеристики системы:

1) среднее число требований в очереди на обслуживание

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k-R) \cdot P_k = 0,10936.$$

2) среднее число требований, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди)  $L_s = 9,851$ ;

3) среднее число механиков (каналов), простаивающих из-за отсутствия работы  $\overline{R_n} = 5,45$ ;

4) коэффициент простоя обслуживаемого объекта (остановочный комплекс) в очереди  $a_1 = 0,0006$ ;

5) коэффициент использования объектов (комплексов)  $a_2 = 0,942$ ;

6) коэффициент простоя обслуживающих каналов (механиков)  $a_3 = 0,36$ ;

7) среднее время ожидания обслуживания (время ожидания обслуживания в очереди)  $W_q = 0,0008$

3 вариант задачи. Исходные данные

Количество остановочных комплексов  $N = 170$ .

Количество обслуживающих бригад  $R = 15$ .

Интенсивность потока  $\lambda = 0,3$ .

Время обслуживания одного комплекса  $t = 0,3$  часа.

Проведем расчеты.

$$\mu = \frac{1}{t} = 3,3;$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,09.$$

Находим вероятность  $k$ -го состояния из следующей системы уравнений (5.1).

Результаты расчетов значений  $P_k, k = \overline{1, N}$ , приведены в Приложении В.

Учитывая, что  $\sum_{k=0}^N P_k = 1$  и используя результаты расчета вычислим  $P_0$ :

$$\sum_{k=0}^N P_k = P_0 + 10,2P_1 + 51,7P_2 + \dots + 4E - 15P_1 = 1.$$

Откуда  $P_0 = 0,00005$ ,

Далее, определяем значения  $P_k, k = \overline{1, N}$ .

Определим следующие вероятностные характеристики системы:

1) среднее число требований в очереди на обслуживание

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k - R) \cdot P_k = 0,4,22932;$$

2) среднее число требований, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди)  $L_s = 18,64087$ ;

3) среднее число механиков (каналов), простаивающих из-за отсутствия работы  $\overline{R_n} = 1,36$ ;

4) коэффициент простоя обслуживаемого объекта (остановочный комплекс) в очереди  $a_1 = 0,025$ ;

5) коэффициент использования объектов (комплексов)  $a_2 = 0,89$ ;

6) коэффициент простоя обслуживающих каналов (механиков)  $a_3 = 0,091$ ;

7) среднее время ожидания обслуживания (время ожидания обслуживания в очереди)  $W_q = 0,11$ .

Сведем полученные результаты по 3 вариантам в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Итоговые показатели СМО

| Исходные данные                          | Варианты |        |       |
|------------------------------------------|----------|--------|-------|
|                                          |          |        |       |
|                                          | 1        | 2      | 3     |
| Количество оставочных комплексов $N=$    | 70       | 70     | 70    |
| Количество обслуживающих бригад $R=$     | 20       | 15     | 15    |
| Интенсивность потока $\lambda =$         | 0.2      | 0.3    | 0.3   |
| Время обслуживания одного комплекса $t=$ | 0.3      | 0.3    | 0.3   |
| Итоговые вероятные характеристики        |          |        |       |
| $\alpha_1$                               | 8,2      | 0,0006 | 0,025 |
| $\alpha_2$                               | 0,94     | 0,942  | 0,89  |
| $\alpha_3$                               | 0,52     | 0,36   | 0,091 |
| $W_q$ , час                              | 0,0008   | 0,0008 | 0,11  |

Проведем анализ полученного моделирования. Из трех вариантов наиболее оптимальным будет последний. По двум показателям,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , второй вариант моделирования показал лучший результат, но все же по показателю  $\alpha_3$ , наименьшему коэффициенту простоя каналов обслуживания, наиболее приемлемый вариант 3.

#### 5.4. Моделирование эффективности склада при разгрузке композитных материалов

Все композитные материалы хранятся на складах, соответствующие требованиям по хранению материалов. Склад представляет собой систему массового обслуживания с фиксированным временем обслуживания. В данном случае время обслуживания не подчиняется экспоненциальному закону распределения, это постоянная величина, представляющая собой фиксированный период времени  $t_{obsl}$ . На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Интенсивность выходного потока  $\mu = 1/t_{obsl}$ .

Эффективность склада композитных материалов как системы массового обслуживания с фиксированным временем обслуживания определяется по следующим показателям:

- 1) средняя длина очереди  $L_o = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda}$  ;
- 2) среднее время ожидания в очереди  $T_{och} = L_{och} / \lambda$  ;
- 3) среднее число заявок в системе  $L_{syst} = L_{och} + \lambda / \mu$  ;
- 4) среднее время пребывания заявки в системе  $T_{syst} = L_{syst} / \lambda = (L_{och} + \lambda / \mu) / \lambda = L_{och} / \lambda + \lambda / \mu / \lambda = T_{och} + 1 / \mu = T_{och} + t_{obsl}$ .

Используя данные формулы, определим показатели эффективности склада композитных материалов.

На склад для разгрузки материалов поступает простейший поток грузовиков с интенсивностью  $\lambda = 3$  грузовиков в час. Как показывает статистика, разгрузка одного грузовика в среднем занимает  $t_{obsl} = 15$  минут = 0,25 часа.

В данном случае, интенсивность выходного потока  $\mu = 1/t_{obsl} = 1/0,25 = 4$  грузовика в час.

$$\text{Средняя длина очереди } L_{och} = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3^2}{2 * 4(4 - 3)} = 1,13$$

грузовика.

Среднее время ожидания в очереди  $T_{och} = L_{och} / \lambda = 1,13 / 3 = 0,38$   
часа =  $0,38 * 60$  мин = 22,5 минут.

$$\text{Среднее число заявок в системе } L_{syst} = L_{och} + \lambda / \mu = 1,13 + 3 / 4 = 1,88$$

Среднее время пребывания заявки в системе  
 $T_{syst} = T_{och} + t_{obsl} = 22,5 + 15 = 37,5$  минут.

### **5.5. Имитационное моделирование системы управления запасами композитных материалов на складе в среде GPSS**

Компания располагает складом композитных материалов в г. Алматы.

Задача имитационного моделирования заключается в том, чтобы промоделировать работу склада композитных материалов. Вместимость склада составляет 10000 единиц материала. Возможна поставка на склад с периодичностью 5 дней в размере 1000 единиц материала. Начальный запас материалов на складе составляет 1000 единиц. Ежедневный спрос материала изменяется в пределах от 35 до 50 единиц с равной вероятностью. Если текущий запас равен или больше 800, то никакой поставки материалов на склад в течение недели не производят. Требуется смоделировать работу склада материалов в течение 200 дней.

Для моделирования выбран программный продукт GPSS.

GPSSWorld – мощная универсальная среда моделирования как дискретных, так и непрерывных процессов, предназначенная для профессионального моделирования самых разнообразных процессов и систем. Этот программный продукт вобрал в себя весь арсенал новейших информационных технологий. Он включает развитые графические оболочки для создания моделей и интерпретации выходных результатов моделирования, мультимедийные средства и видео, объектно-ориентированное програм-

мирование и др. В основу системы GPSSWorld положен язык имитационного моделирования GPSS (GeneralPurposeSystemSimulation – Общецелевая система моделирования), разработанный профессором Гордоном чуть более 50 лет назад. В такой бурно развивающейся области, как программное обеспечение, только небольшое количество языков программирования достигло подобного почтенного возраста. Долгожительство языка GPSS объясняется многими причинами:

- он прост в изучении и использовании;
- многие пользователи достигли больших успехов при решении реальных проблем с использованием именно языка GPSS;
- наиболее важные классы объектов (требования (транзакты), каналы, накопители, логические переключатели и др.) и их свойства широко используются в реальных вычислительных сетях, производственных и коммерческих системах и т. д.;
- диапазон использования языка достаточно широк;
- язык постоянно совершенствуется;
- расширение создаваемых моделей легко осуществимо;
- доступно широкое использование анимации;
- пользователи способны легко понять внутреннюю логику и алгоритмы GPSS;
- интерфейспрост и удобен;
- при построении модели язык позволяет оперировать непосредственно понятиями имитируемой системы.

Система GPSSWorld – мощная универсальная среда моделирования как дискретных, так и непрерывных процессов, предназначенная для профессионального моделирования самых разнообразных процессов и систем. В GPSSWorld появились дополнительные возможности, вот основные из них:

- по всем классам объектов и переменных реализованы динамические графические окна, в которых представляется в реальном времени промежуточная и выходная статистика;
- гибкий процедурный язык PLUS может быть использован для построения
- моделей и в процедурах проведения эксперимента;

– введены средства поддержки факторного анализа, традиционного дисперсионного (ANOVA) и регрессионного анализа, оптимизация на основе методологии оптимального планирования эксперимента;

- стали доступны элементы непрерывного моделирования;
- решены проблемы с целочисленным модельным временем.

С помощью этой системы, например, можно эффективно моделировать как производственные, так и непроизводственные процессы: функционирование сферы услуг, портов, уличное движение, проведение военных действий, работу редакций, учреждений и сети Internet, различных систем массового обслуживания и т. д. Система имеет большой набор команд для управления процессом моделирования, которые можно как использовать в интерактивном режиме, так и включать в модель. Обеспечена возможность проведения экспериментов, сгенерированных системой, пользовательских и оптимизационных. В системе GPSSW реализована процедура визуализации процесса функционирования модели с использованием методов мультипликации.

Выявлены следующие основные особенности.

Для моделирования работы склада необходимо сформировать входные потоки заказов материала на склад, определить спрос материалов со склада и временной интервал моделирования работы склада. Но перед этим необходимо выбрать единицу измерения времени. Для моделирования работы склада можно взять в качестве единицы измерения времени день.

Создание имитационной модели начнем с построения заголовка модели, который представлен в виде, представленном на рис. 5.1.

```
;GPSSWUp rav_zapasom.GPS
*****
**      УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ
*   НА СКЛАДЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ТОО "ВАСТЕ"   *
*****
```

Рис. 5.1. Заголовок модели

В имитационной модели создадим четыре сектора:

- 1) сектор определения входных данных;
- 2) моделирование поставки материалов на склад;
- 3) моделирование текущего запаса с учетом спроса;
- 4) установление начального размера запаса.

Окно имитационной модели представлено на рис. 5.2.

Опишем некоторые важные операторы.

Оператор **STORAGE**(Накопитель) с меткой *Zapas* определяет вместимость склада – 2000 единиц.

Оператор **VARIABLE**с меткой *Spros\_m* характеризует ежедневный спрос, который изменяется от 35 до 50 единиц с равной вероятностью. Ежедневный спрос определяется так. Датчик случайных чисел, а точнее датчик псевдослучайных чисел, определяет, используя равномерное распределение вероятностей, значение вероятностей в интервале [0–1]. Допустим, это значение равно 0,150. Тогда величина спроса будет определяться так:

$$35 + (50 - 35) \times 0,15 = 37,25.$$

Оператор **EQUs** меткой *Nach\_ug* определяет начальный уровень запасов, который в нашей задаче установлен в размере 1500 единиц.

Оператор **EQUs** меткой *Postavka* определяет тот критический уровень материалов на складе, который обуславливает необходимость очередного заказа материалов. Этот размер в нашей задаче составляет 1200 единиц.

Опишем назначение операторов второго сектора модели, который обеспечивает моделирование процесса поставки материала на склад.

Оператор **GENERATE** генерирует очередной момент времени, когда возможна поставка материала на склад. Этот интервал времени составляет, например, 5 дней, обеспечивая еженедельную поставку материала на склад при пятидневной рабочей неделе. Этот интервал времени представляется в операнде *A*. В операнде *E* определен уровень приоритетности поставки материала на склад. Он в нашей задаче равен 1. По умолчанию уровень приоритетности для всех требований (транзактов) равен 0. Чем больше число в поле операнда *E*, тем выше уровень требования.

```

Upravl_zapasami_1.gps
;GPSSW Upravl_zapasom.GPS
*****
**                УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ                **
*      НА СКЛАДЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ТОО "БАСТЕ"      *
*****
* определение исходных данных
Zapas      RMULT      413
Zapas      STORAGE    2000          ; Вместимость склада.
Zapas      TABLE     S$Zapas,100,100,20 ; Гистограмма запаса.
Material    VARIABLE   Nach_ur-S$Zapas ; Размер заказа.
Spros_m     VARIABLE   RN1@15+35      ; Размер ежедневного спроса.
Nach_ur     EQU        1500          ; Начальный уровень запаса.
Postavka    EQU        1200          ; Размер поставки.
*****
* Моделирование процесса поставки материала на склад
      GENERATE 5,,,1          ; Поставка через 5 дней.
      TEST L S$Zapas,Postavka,Out ; Нужна ли поставка.
      ASSIGN 2,V$material      ; Размер заказа в P2.
      ADVANCE 5                ; Интервал поставки.
      ENTER Zapas,P2           ; Увеличить запас на P2.
Out      TERMINATE          ; Завершение заказа.
*****
* Моделирование текущего запаса с учетом ежедневного спроса на материал
      GENERATE 1              ; Генерирование дня.
      ASSIGN 1,V$Spros_m      ; Размер спроса в P1.
      TABULATE Zapas          ; Запас тек. запаса.
      TEST GE S$Zapas,P1,Zapasout ; Можно ли заказать.
      LEAVE Zapas,P1          ; Уменьшить запас на P1.
      TERMINATE 1              ; Завершение дня.
Zapasout  TERMINATE 1          ; Завершение дня.
*****
* Установление начального размера запаса
      GENERATE ,,,1,10        ; Начальный запас
      ENTER Zapas,Nach_ur      ; Установка нач. запаса.
      TERMINATE                ; Завершение установки.
*****

```

Рис. 5.2. Листинг имитационной модели управления запасами

Оператор **TESTL** определяет необходимость очередной поставки материала на склад. Очередная поставка материалов на склад производится тогда, когда текущий запас, который определяется с помощью стандартного числового атрибута **S\$Zapas**, меньше размера поставки, определенного оператором **EQU** с меткой **Postavka** в предыдущем секторе. В противном случае поставка отменяется – требование (транзакт) направляется к оператору **TERMINATE** с меткой **Out**.

Если текущий запас меньше размера поставки, то требование переходит к следующему оператору – **ASSIGN** (Присвоить). В операторе **ASSIGN** в параметре требования под номером 2

запоминается размер заказа, который определяется переменной под именем Material.

Оператор **ADVANCE** моделирует время ожидания требования (поставки) в течение 5 дней.

Далее оператор **ENTER** моделирует поставку после истечения 5-тидневного срока и увеличивает текущее содержание склада – S\$Zapas – на величину, содержащуюся в параметре требования под номером 2.

Оператор **TERMINATE** с меткой Out удаляет требование из системы. Этот оператор используется, чтобы определить окончание моделирования состояния.

Опишем теперь третий сектор модели, который обеспечивает моделирование текущего запаса с учетом ежедневного спроса на материал.

Оператор **GENERATE** генерирует очередной день работы склада.

Оператор **ASSIGN** присваивает параметру требования (очередному дню) под номером 1 размер спроса.

Оператор **TABULATE** с меткой Zapas собирает информацию для создания таблицы и гистограммы ежедневных уровней запасов.

Оператор **TESTGE** проверяет возможность удовлетворения спроса. Если текущий запас – S\$Zapas – больше или равен величине спроса, то процесс моделирования переходит к следующему оператору – **LEAVE**(Оставить):

LEAVEZapas,P1

Если такой возможности нет, то требование направляется к оператору с меткой Zapasout.

Оператор **LEAVE** уменьшает текущий запас – S\$Zapas – на величину спроса в данный день. Это делается так: требование (очередной день), входя в блок **LEAVE**, несет в параметре требования под номером 1 величину спроса (операнд B). Эта величина спроса и вычитается из величины текущего запаса S\$Zapas.

Опишем четвертый сектор модели, который обеспечивает установление начального размера запаса.

Оператор **GENERATE** генерирует одно требование (транзакт) с приоритетом, равным 10. Оно имеет наибольший приоритет среди всех требований, генерируемых оператором **GENERATE**, и поэтому становится первым активным требованием в системе.

Оператор **ENTER** определяет величину начального запаса, чтобы установить величину  $S\$Zapas$  в начале моделирования.

Оператор **TERMINATE** уничтожает начальное требование без уменьшения индекса завершения.

GPSS позволяет многим требованиям одновременно существовать в различных местах в модели. В этой модели требования создаются в трех секторах.

После разработки программы моделирования необходимо трансляцию программы и команду запуска программы на выполнение. После этих действий появится окно отчета по имитационной модели управления запасами на складе, которое показано на рис. 5.3.

| Upravl_zapasami_1.9.1 - REPORT                       |          |          |          |        |                       |          |          |       |             |
|------------------------------------------------------|----------|----------|----------|--------|-----------------------|----------|----------|-------|-------------|
| GPSS World Simulation Report - Upravl_zapasami_1.9.1 |          |          |          |        |                       |          |          |       |             |
| Wednesday, June 11, 2014 11:13:11                    |          |          |          |        |                       |          |          |       |             |
| START TIME                                           |          | END TIME |          | BLOCKS | FACILITIES            | STORAGES |          |       |             |
| 0.000                                                |          | 200.000  |          | 16     | 0                     | 1        |          |       |             |
| STORAGE                                              | CAP.     | REM.     | MIN.     | MAX.   | ENTRIES               | AVL.     | AVE.C.   | UTIL. | RETRY DELAY |
| ZAPAS                                                | 2000     | 750      | 0        | 1972   | 9725                  | 1        | 1282.935 | 0.641 | 0 0         |
| TABLE                                                | MEAN     | STD.DEV. | RANGE    |        | RETRY FREQUENCY CUM.% |          |          |       |             |
| ZAPAS                                                | 1324.060 | 273.629  |          |        | 0                     |          |          |       |             |
|                                                      |          |          | 800.000  | -      | 900.000               |          |          | 4     | 2.00        |
|                                                      |          |          | 900.000  | -      | 1000.000              |          |          | 19    | 11.50       |
|                                                      |          |          | 1000.000 | -      | 1100.000              |          |          | 22    | 22.50       |
|                                                      |          |          | 1100.000 | -      | 1200.000              |          |          | 33    | 39.00       |
|                                                      |          |          | 1200.000 | -      | 1300.000              |          |          | 35    | 56.50       |
|                                                      |          |          | 1300.000 | -      | 1400.000              |          |          | 16    | 64.50       |
|                                                      |          |          | 1400.000 | -      | 1500.000              |          |          | 14    | 71.50       |
|                                                      |          |          | 1500.000 | -      | 1600.000              |          |          | 15    | 79.00       |
|                                                      |          |          | 1600.000 | -      | 1700.000              |          |          | 19    | 88.50       |
|                                                      |          |          | 1700.000 | -      | 1800.000              |          |          | 12    | 94.50       |
|                                                      |          |          | 1800.000 | -      | 1900.000              |          |          | 8     | 98.50       |
|                                                      |          |          | 1900.000 | -      | -                     |          |          | 3     | 100.00      |

Рис. 5.3. Окно REPORT для имитационной модели управления запасами

В верхней строке окна REPORT указывается:

- STARTTIME(Начальное время) – 0.000;
- ENDTIME(Время окончания) – 200.000;
- BLOCKS(Число блоков) – 16;
- FACILITIES(Число каналов обслуживания) – 0;
- STORAGES(Число накопителей) – 1.

Ниже указываются результаты моделирования накопителя (STORAGE) под назначенным именем ZAPAS:

- CAP. (Вместимость) – 2000;
- REM. – 750;
- MIN. (Минимальное содержимое) – 0;
- MAX. (Максимальное содержимое) – 1972;
- ENTRIES(Число входов) – 9725;
- AVL. (Доступность) – 1;
- AVE.C. (Среднее содержимое) – 1282.935;
- UTIL. (Коэффициент использования) – 0.641;
- RETRY(Повтор) – 0;
- DELAY(Отказ) – 0.

Еще ниже указываются результаты моделирования для построения по табличным данным соответствующей гистограммы функционирования склада по имени ZAPAS:

- MEAN(Средняя) – 1324.060;
- STD.DEV. (Среднее квадратическое отклонение) – 273.629;
- RANGE (Область);
- RETRY – 0;
- FREQUENCY (Частота);
- CUM.%(Суммарный процент).

Построим графики отдельных параметров функционирования системы. Допустим, мы хотим графически представить на всем периоде моделирования, как меняется размер запаса.

Фрагмент графика изображения текущего запаса на складе для нашего примера представлен на рис. 5.4.

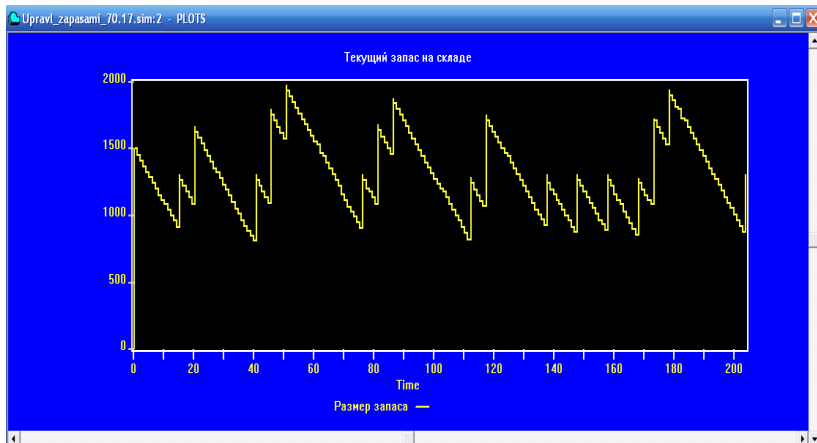


Рис. 5.4. Фрагмент изображения текущего запаса на складе в имитационной модели управления запасами

Окно гистограммы имитационной модели управления запасами представлено на рис. 5.5.

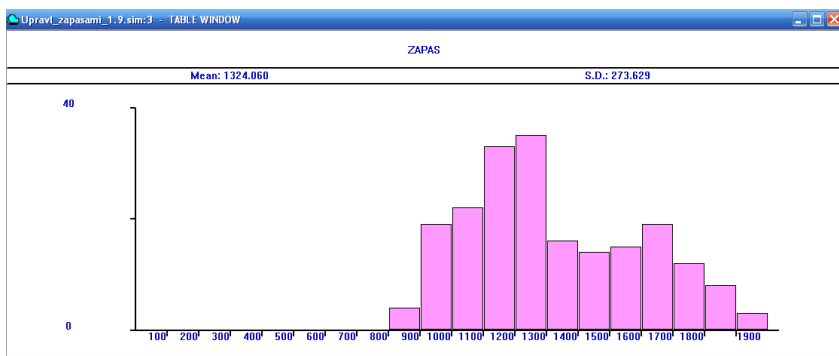
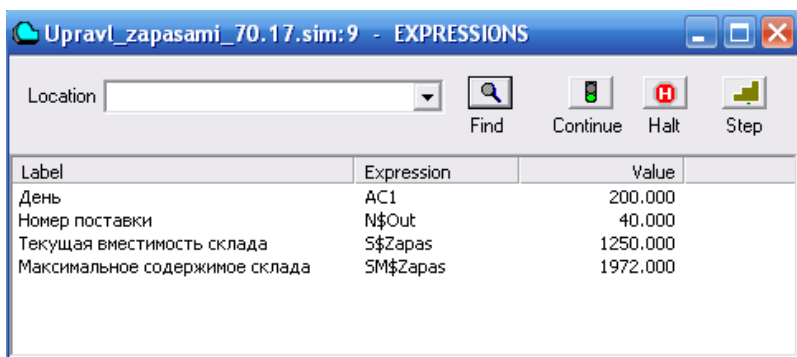


Рис. 5.5. Окно гистограммы имитационной модели управления запасами

Проведем имитацию модели при различных исходных данных и анализ результатов моделирования.

На рис. 5.6 заданы значения искомых выражений задачи управления запасами.



| Label                          | Expression | Value    |
|--------------------------------|------------|----------|
| День                           | AC1        | 200.000  |
| Номер поставки                 | N\$Out     | 40.000   |
| Текущая вместимость склада     | S\$Zapas   | 1250.000 |
| Максимальное содержимое склада | SM\$Zapas  | 1972.000 |

Рис. 5.6. Окно EXPRESSIONS

После изменения размеров получим другие результаты моделирования, представленные на рис. 5.7.

Процесс функционирования данной системы управления запасами весьма прост. Сначала в системе активизируются требования, имеющие наибольший приоритет. В нашей задаче таким является одно требование в четвертом секторе, имеющее приоритет, равный 10. Это наибольший приоритет для всех требований, генерируемых оператором **GENERATE**. Поэтому данное требование становится первым активным требованием в системе. Оно входит в накопитель **STORAGE** под именем *Zapas* с вместимостью 2000 единиц. Во время входа в накопитель в нем устанавливается начальный уровень запаса, величина которого определяется с помощью оператора **EQU**. В нашей задаче он равен 1500 единицам.

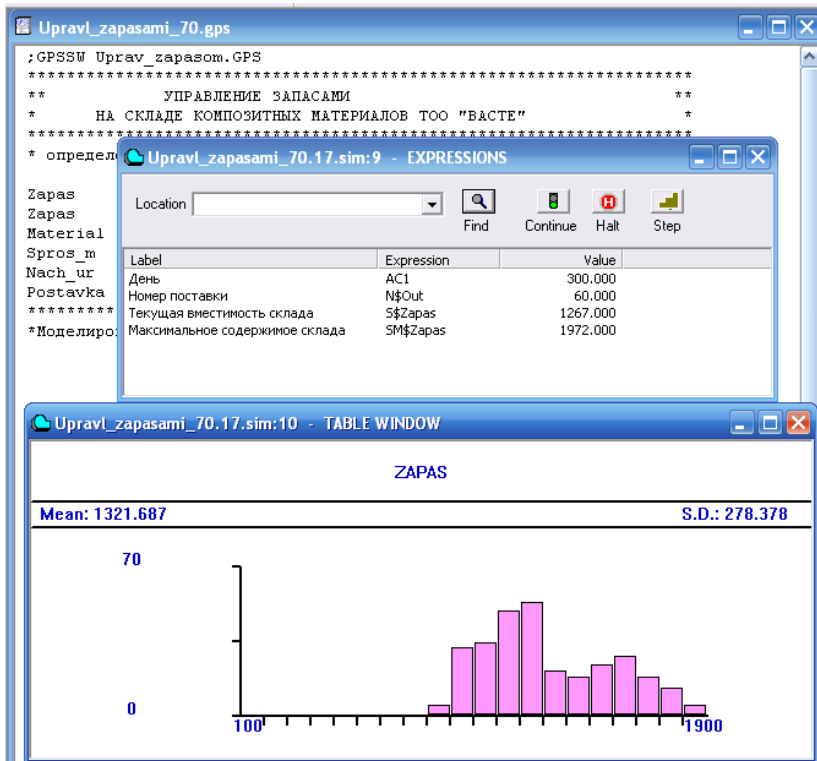


Рис. 5.7. Окно гистограммы и EXPRESSIONS для задачи управления запасами

Далее активизируются требования (недели), генерируемые оператором

**GENERATE** во втором секторе, так как на данный момент они имеют наибольший приоритет, равный 1. В этом секторе определяется время поставки материалов на склад. Если нет поставки, то активное требование второго сектора задерживается в операторе **ADVANCE** на пять дней. В это время активизируются требования, генерируемые оператором **GENERATE** в третьем секторе, которые поступают в систему каждый день. Они имеют нулевой приоритет – самый низкий в системе.

Теперь попробуем изменить некоторые входные данные в первом секторе программы. Для этого:

- щелкните по пункту **Window** главного меню системы. Появится выпадающее меню;
- щелкните по пункту **SimulationWindow** выпадающего меню. Появится всплывающее меню;
- щелкните по пункту **TableWindow** (Окно гистограммы) во всплывающем меню. Появится диалоговое окно **OpenTableWindow** (Открыть окно гистограммы), в текстовом поле которого будет имя *Zapas*;
- щелкните по кнопке **OK**. Появится соответствующая гистограмма;
- щелкните по пункту **Command** главного меню системы. Появится выпадающее меню;
- щелкните по пункту **Custom** (Заказать) выпадающего меню. Появится диалоговое окно **SimulationCommand** (Команда моделирования), в которое введем записи по установлению начального уровня запаса и размерам поставки. Данное окно выглядит так, как показано на рис. 5.8.

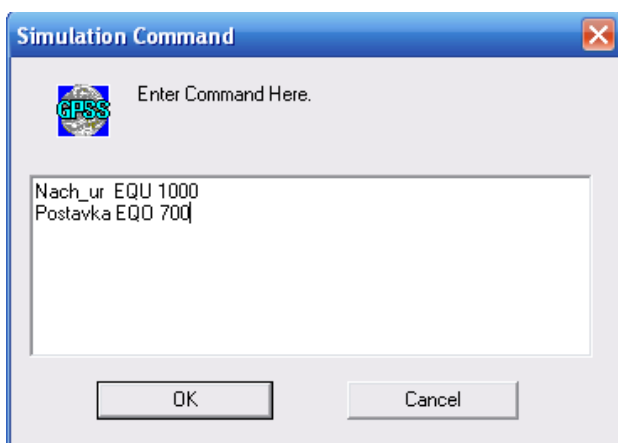


Рис. 5.8. Диалоговое окно SIMULATIONCOMMAND для ввода измененных данных в модели управления запасами

Результаты работы модели представлены на рис. 5.9.

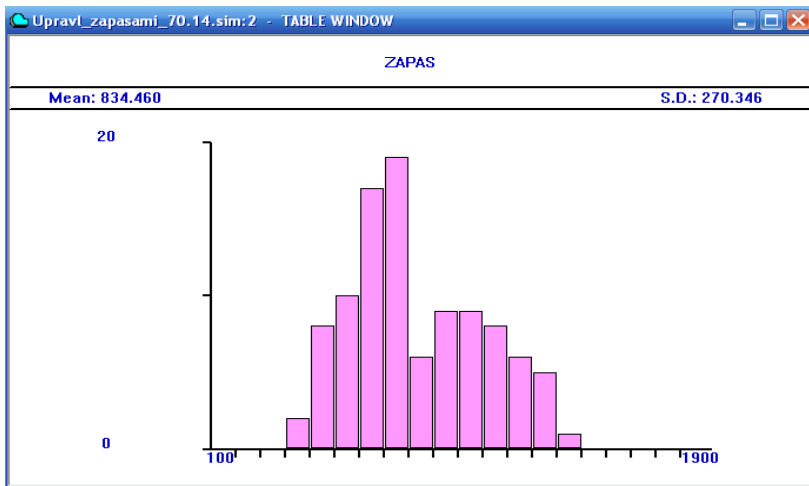


Рис. 5.9. Окно гистограммы имитационной модели управления запасами

Проведем анализ результатов моделирования при измененных исходных данных. Как видим из рисунка гистограммы, средний уровень запаса равен 834 единицам материала и изменения колеблются в пределах 270 единиц.

Таким образом, получена имитационная модель управления запасами композитных материалов на складе, которая позволит запланировать требуемый уровень запаса для удовлетворения спроса потребителей.

В настоящее время в мировой практике для имитационного моделирования СМО широко применяются следующие пакеты ExtendSim, AnyLogic, FlexSim и др.

*Контрольные вопросы.*

1. Что изучает теория массового обслуживания?
2. Перечислите признаки классификации СМО.
3. Перечислите основные показатели, характеризующие эффективность СМО.
4. Перечислите основные экономические показатели, характеризующие СМО.
5. Дайте описание одноканальной СМО с неограниченной очередью.
6. Дайте описание и основные характеристики многоканальной СМО с неограниченной очередью.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б. К., Делюкин Л. А. Экономико-математические методы и модели в логистике: Учеб. пособие. – С-Пб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2010. – 96 с.
2. Гаджинский А. М. Основы логистики: Учеб. пособие. – М.: ИВЦ «Маркетинг». 1995.
3. Модели и методы теории логистики: Учеб. пособие. 2-е изд./ Под ред. В. С. Лукинского. –С-Пб.: Питер, 2007. –448 с.
4. Лубенцова В. С. Математические модели и методы в логистике: Учеб. пособие. /Под ред. В. П. Радченко. –Самара. Самар. Гос. Техн. Ун-т, 2008. – 157 с.
5. Долгов А. П. Логистика запасов: Учеб. пособие. –С-Пб.: СПбГУЭФ, 2002. – 120 с.
6. М. М. Хайкин. Логистика в сфере услуг: Учеб. пособие. –С-Пб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2012. – 112 с.
7. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005.
8. Беленький А. С. Исследование операций в транспортных системах: идеи и схемы методов оптимизации планирования. – М.: Мир, 1992. – 582 с.
9. Бережной В. И., Порохня Т. А., Цвиринько И. А. Управление материальными потоками микрологической системы автотранспортного предприятия. – Ставрополь: СевКаз ГТУ, 2002. – 198с.
10. Лукинский В. С., Зайцев Е. И. Прогнозирование надежности автомобилей – Л.: Политехника, 1991 – 220с.
11. Лукинский В. С. и др. Логистика автомобильного транспорта. Концепция, методы, модели – М.: Финансы и статистика, 2000.
12. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986.
13. Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е. Прикладные задачи теории графов. –Тбилиси: 1974.
14. Вагнер Г. Основы исследования операции. В 3-х томах. –М.: Мир, 1972, 1973.

15. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. –М.: Советское радио, 1972.
16. *Гольштейн Е. Г. Юдин Д. Б.* Задачи и методы линейного программирования. –М.: Сов. радио, 1964.
17. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. –М.: Наука, 1967.
18. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. –М.: Мир-Прогресс, 1975.
19. Исследование операции. /Под ред. *Моудера Дж., Элмаграти С. М.* –М.: Мир, 1981.
20. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию в примерах и задачах. –М: Высш. шк., 1973.
21. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. –М.: Наука, 1975.
22. *Корбут А. А., Фinkelштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование, –М.: Наука, 1969.
23. *Кулжабаев Н. М.* Исследование операции. Учеб. пособие. –Алматы: РИК КАО имени И. Алтынсарина, 1999.
24. *Кулжабаев Н. М.* Методические указания для проведения практических занятий по дисциплине "Теоретические основы кибернетики". –Алматы: КазПТИ, 1991.
25. *Кулжабаев Н. М., Муханова Г. С.* Системный анализ и исследование операции. Метод. указ. к курсовой работе по дисциплине "Системный анализ и исследование операций". –Алматы: КазНТУ, 1996.
26. *Оре О.* Теория графов. –М.: Наука, 1968.
27. *Таха Х.* Введение в исследование операций. Ч.1, Ч. 2. –М.: Мир, 1985.
28. *Шкурба В. В., Подгасова Т. П., Питчук А. Н., Тур Л. П.* Задачи календарного планирования и методы их решения. –Киев: Наукова думка, 1966.
29. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. –М.: Мир, 1967.
30. Введение в исследование операции. /Под ред. *Крамера.* –М.: 2003.

31. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. –М.: Наука, 1981.
32. *Берж К.* Теория графов и ее применения. –М.: Иностранная литература, 1962.
33. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. –М.: Наука, 1969.
34. *Ермольев Ю. М. Мельник И. М.* Экстремальные задачи на графах. –Киев: Наукова думка, 1968.
35. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций. –Киев: Вища школа, 1975.
36. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. –М.: Наука, 1975.
37. *Кудрявцев Е. М.* GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. –М.: ДМК Пресс, 2004. – 320 с.: ил. (Серия «Проектирование»).

## СОДЕРЖАНИЕ

|       |                                                                        |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------|-----|
|       | Введение.....                                                          | 3   |
| 1     | Экономико-математические модели в логистике.....                       | 6   |
| 1.1   | Классификация моделей и методов в логистике.....                       | 6   |
| 1.2   | Экономико-математические модели транспортной логистики.....            | 17  |
| 1.3   | Экономико-математические модели распределительной логистики.....       | 51  |
| 1.4   | Экономико-математические модели производственной логистики.....        | 62  |
| 2     | Методы решения производственно-транспортных задач.....                 | 76  |
| 2.1   | Симплекс-метод.....                                                    | 76  |
| 2.2   | Двойственные задачи. Теоремы двойственности.....                       | 82  |
| 2.3   | Решение задачи логистики в среде Excel.....                            | 88  |
| 2.4   | Метод потенциалов.....                                                 | 92  |
| 2.5   | Решение транспортной задачи в среде Excel.....                         | 109 |
| 3     | Методы решения сетевых задач.....                                      | 117 |
| 3.1   | Методы решения задачи о кратчайшем пути.....                           | 117 |
| 3.1.1 | Алгоритм Форда.....                                                    | 118 |
| 3.1.2 | Алгоритм Данцига.....                                                  | 121 |
| 3.1.3 | Алгоритм Беллмана-Калаба.....                                          | 122 |
| 3.2   | Метод максимального парасочетания для решения задачи о назначении..... | 125 |
| 3.3   | Методы решения задачи о максимальном потоке.....                       | 129 |
| 3.3.1 | Потоки на сетях. Основные понятия.....                                 | 129 |
| 3.3.2 | Разрез на сети. Теорема Форда-Фалкерсона.....                          | 133 |
| 3.3.3 | Алгоритм решения задачи о максимальном потоке...                       | 135 |
| 4     | Методы решения дискретных задач в логистике.....                       | 141 |
| 4.1   | Метод ветвей и границ.....                                             | 143 |
| 4.2   | Алгоритм Литтла для решения задачи коммивояжера...                     | 143 |
| 4.3   | Алгоритм Лэнда и Дойга.....                                            | 146 |
| 4.4   | Методы решения целочисленных задач в логистике. Метод Гомори.....      | 163 |

|       |                                                                                                           |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.5   | Алгоритм Джонсона для решения задач календарного планирования.....                                        | 170 |
| 5     | Моделирование системы массового обслуживания...                                                           | 178 |
| 5.1   | Модели и методы в системе массового обслуживания....                                                      | 178 |
| 5.2   | Моделирование систем массового обслуживания с неограниченной очередью.....                                | 188 |
| 5.2.1 | Одноканальная СМО с неограниченной очередью....                                                           | 188 |
| 5.2.2 | Многоканальная СМО с неограниченной очередью...                                                           | 195 |
| 5.3   | Моделирование работы замкнутой системы массового обслуживания.....                                        | 203 |
| 5.4   | Моделирование эффективности склада при разгрузке композитных материалов.....                              | 212 |
| 5.5   | Имитационное моделирование системы управления запасами композитных материалов на складе в среде GPSS..... | 213 |
|       | Библиографический список.....                                                                             | 227 |

Кулжабай Насанбадрядден Мубаракович  
Муханова Гульмира Самудиновна

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
И МЕТОДЫ В ЛОГИСТИКЕ**

Нач. РУ ИУ ДСО  
Редактор  
Компьютерная верстка

*З. А. Губайдулина  
Г. М. Дюсенбаева  
Л.Т. Касжанова*

Подписано в печать 15.05.2017 г.  
Тираж 300 экз. Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. №1.  
Объем 14,5 уч.-изд.л. Заказ №818. Цена договорная.

Издание Казахского национального исследовательского  
технического университета им. К.И. Сатпаева  
Департамент по связям с общественностью  
Издательское управление  
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-323-077-1



9 786013 230771