ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

Б.Ж. Сағындықов

АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2016

ӘОЖ 514.12 (075.8)
КБЖ 22.151.5 я73
С 14

Пікір жазғандар:
М. Қ. Даулбаев, физ.-мат. ғыл. док., проф., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;
Қ. Қ. Шакенов., физ.-мат. ғыл. док., проф., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;
Е. Ж. Айдос, физ.-мат. ғыл. канд., доц., Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰЗТУ

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2016 жылғы басылым жоспары бойынша басылды

Сағындықов Б.Ж.
С 14 Аналитикалық геометрия: Оқу құралы./ Б.Ж.Сағындықов – Алматы: Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰЗТУ, 2016. – 174 б. Сурет 80. Кесте 1. Библиогр.– 15 атау.

ISBN 978-601-228-942-8

Оқу құралы кредиттік оқыту жүйесі бойынша "Аналитикалық геометрия" пәнінің оқу бағдарламасына сәйкес жазылған және университеттің "Математикалық және компьютерлік модельдеу", "Ақпараттық жүйелер", "Техникалық физика" және "Машиналар динамикасы мен беріктігі" мамандықтарына арналған.

Оқу құралы 4 бөлімнен тұрады. Алдымен жарылғыш заттарға жалпы түсінік және теориялық тұжырымдарынан, жарылыс кезіндегі физика-химиялық әрекеттері мен құбылыстарына, оның қолданылуына сипаттама берілген. «Жарылыс құралдары» тарауында – жарылғыш заттардың қолданылуы және олардың әрқайсысымен қалай дұрыс жұмыс істеу керектігі қамтылған. «Оқтаманы жару тәсілдері» тарауында жару жұмыстарын ұйымдастырумен қатар, әр оқтаманы тиімді пайдалану жайлы айтылады.

Оқу құралының мақсаты – жарылғыш заттар және оларды дұрыс қолдану мен оларды өндіру технологиясын жете меңгеру. Сонымен қатар, жарылыс қуатын қолдана отырып, кен жынысын қажетті көлемде ұсақтау арқылы тиеп-тасымалдау жұмыстарын жеңілдету.

Оқу құралы «Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы» мамандығы бойынша, сонымен қатар мұнай-газ, геологиялық барлау, машинажасау, тау-кен институттарының студенттері мен магистранттарының білімдерін жетілдіруге ықпал етеді.

ӘОЖ 514.12 (075.8)
КБЖ 22.151.5 я73

ISBN 978-601-228-942-8

© Сағындықов Б.Ж., 2016
© Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰЗТУ, 2016

АЛҒЫ СӨЗ

Бүгінгі таңда жоғары оқу орындары біртіндеп дәстүрлік оқытудан кредиттік оқыту технологиясына көшті деп айтуға болады. Кредиттік оқу технологиясы студенттердің өз бетімен білім алу деңгейін көтеру мақсатында жасалған. Студенттер сапалы кең көлемді білім алу үшін оларға өте мазмұнды сабақ беруге арналған кешендік пәндік оқу бағдарламалары құрылуы тиіс. Пәндік кешен жасау талабы оқытушылардың кәсіби деңгейлері мен біліктілігін көрсететіні белгілі. Дегенмен дәстүрлік оқытудың жақсы жақтарын алып, оны кредиттік технология шеңберінде қарастыратын болсақ, мазмұны жағынан да, сапасы жағынан да студенттердің ойларынан шығатын оқулықтар жазылады деген ойдамыз.

Жоғары мектеп бағдарламасында аналитикалық геометрия пәнін оқытуға бөлінетін кредит мөлшері қазіргі кезеңде оқытушылардың көңілінен шықпайды. Сондықтан заман талабына, яғни кредиттік технология стандарттарына сай келетін оқу құралдарын жазуға міндеттіміз.

Ұсынылып отырған «Аналитикалық геометрия» атты оқу құралы мазмұны және материалды таңдау жағынан кредиттік жүйе бойынша ҚР Білім және ғылым министрлігі қабылдаған стандартқа сәйкес келеді. Техникалық университетте бакалавр бағдарламасы бойынша мұндай оқу құралын жазуға келесі мақсаттар себеп болды:

- жазықтықтағы және кеңістіктегі аналитикалық геометрия есептерін шығарарда координаттық және векторлық алгебра әдістерін қарастыру, кеңейту, нақтылау;
- аналитикалық геометрия пәнінің мазмұнын математиканың басқа да бөлімдерімен сабақтастыра отырып студенттің логикалық қабілетінің дамуына негіз жасау;
- математиканың арнайы курстарына деген қызығушылықты арттыру және одан әрі ізденімпаздыққа баулу.

Оқу құралы 5 тараудан тұрады. Негізгі желісі екінші тараудан басталады. Бірінші тарауда сызықтық алгебра элементтері қосымша көмекші тарау ретінде беріледі.

1-тарау. Алғашқы мәліметтер.

2-тарау. Аналитикалық және векторлық алгебра элементтері.

3-тарау. Аффиндік кеңістіктер.

4-тарау. Түзу сызықтар және жазықтықтар.

5-тарау. Екінші ретті қисықтар мен беттер.

Кредиттік технологияның оқыту жүйесі дәстүрлік оқытудан қойылатын талаптарымен ерекшеленеді. Бұл талаптарды іске асыратындай әзірге жаңа жазылып жатқан оқу құралдары жоқтың қасы. Сондықтан студенттерге әзірге берер кеңесіміз дәстүрлік бұлақ көзі болып саналатын ғылыми-теориялық шығармаларды қолдансын дегіміз келеді. Айта кететін жай – оқу құралының мазмұны оның соңында келтірілген әдебиеттерден алынды. Бұл жерде автордың еңбегі, егер осылай айтуға болатын болса, бар мәліметтерді сұрыптау және оқушыға түсінікті тілмен жеткізу.

Оқу құралында кездесетін кемшіліктер мен қателіктерді көрсеткен оқырмандардың ескертулерін автор зор ықыласпен қабылдайды.

Е – mail: bimurat55@gmail.com

1. АЛҒАШҚЫ МӘЛІМЕТТЕР

Сызықтық теңдеу және екі белгісізді екі теңдеулер жүйесі (Крамер тәсілі)

Мектеп бағдарламасында қарастырылатын сызықтық теңдеу тақырыбына шолу жасайық.

$ax = b$ сызықтық теңдеуін шешкенде 3 жағдай болуы мүмкін:

1. Егер $a \neq 0$ (оқылады: нөлге тең емес) болса, онда теңдеудің тек жалғыз шешімі бар, ол $x = \frac{b}{a}$.

2. Егер $a = 0$ және $b = 0$ болса, онда кез келген x саны $ax = b$ теңдеуінің шешімі болады (өйткені $0 \cdot x = 0$), демек теңдеудің шексіз көп шешімдері бар.

3. Егер $a = 0$, бірақ $b \neq 0$ болса, онда теңдеудің шешімі жоқ.

Екі белгісізді екі алгебралық сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Бірінші теңдеуді a_{22}-ге, ал екінші теңдеуді $(-a_{12})$-ге көбейтіп, бұл теңдеулерді бір-біріне мүшелеп қоссақ, онда

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1.2}$$

бірінші дәрежелі сызықтық теңдеуін аламыз.

Жоғарыда айтылғандай $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ өрнегінің мәні нөлден өзгеше болса, онда (1.2) теңдеуінен

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{1.3}$$

Тура осындай жолмен (1.1) теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуін $(-a_{21})$-ге, ал екінші теңдеуін a_{11}-ге көбейтіп, мүшелеп қосатын болсақ, белгісіз x_2-нің мәнін табамыз

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_2 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}. \qquad (1.4)$$

Сонда (1.1) теңдеулер жүйесінің тек жалғыз шешімі болуы

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq 0$$

шартымен анықталады.

(1.3) және (1.4) теңдіктерінің алымдарында орналасқан өрнектердің құрылымдары бірдей. Атап айтқанда (1.1) теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен құралған

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

квадрат кестесін қарастырайық. Мұндай кестелерді математика тілінде ***матрицалар*** деп атайды.

Кейде (1.5) матрицасын қысқаша $A = (a_{ij})$, $i, j = 1,2$ түрінде де жазады. Мұнда a_{ij} сандары ***матрицаның элементтері*** деп аталады. Матрицаның көлденең қатарын құрайтын элементтерін оның ***жолдары***, ал тік қатарын құрайтын элементтерін оның ***баған жолдары*** деп атаймыз. Сонда a_{ij} элементіндегі бірінші индекс жол нөмірін, ал екінші индекс баған нөмірін білдіреді. Тұтас алғанда a_{ij} элементі i-ші жол мен j-ші бағанның қиылысуында орналасқан элемент.

a_{11}, a_{22} элементтері арқылы өтетін (1.5) квадрат матрицасының диагоналі оның бас диагоналі деп аталады. Ал осы матрицаның a_{21}, a_{12} элементтері арқылы өтетін диагональ оның қосалқы диагоналі деп аталады. (1.1) теңдеулер жүйесінің b_1 және b_2 элементтерін оның ***бос мүшелері*** деп атайды. Егер теңдеулер жүйесінің бос мүшелері нөлге тең болса, онда ондай жүйені ***біртекті***, ал нөлден өзгеше болса – ***біртексіз*** деп атау қалыптасқан.

Элементтері (1.1) жүйенің коэффициенттері мен бос мүшелерінен құралған

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

матрицасын қарастырайық. Бұл матрицаның құрамына қарайтын болсақ, ол екі жол және үш бағаннан тұрады. Яғни, матрица тек квадрат матрица болады деген ұғым дұрыс емес. Жалпы жағдайда матрица m жолдан n бағаннан тұрады. Мұндай матрицаның өлшемін $[m \times n]$ арқылы белгілейді және оны ***тік матрица*** деп атайды. Сонымен (1.1) теңдеулер жүйесіндегі белгісіздердің коэффициенттерінен кесте құрып, оны өлшемі $[2 \times 2]$ болатын квадрат матрица деп атадық. Енді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матрицасын біржақты сипаттайтын анықтауыш ұғымын енгізейік. Ол үшін (1.1) теңдеулер жүйесінің (1.3) және (1.4) шешімдерінің құрылымын зерттейік.

Мысалы, (1.3) теңдігінің бөліміндегі өрнек (1.5) матрицасындағы бас диагональдің бойында орналасқан элементтердің көбейтіндісінен қосалқы диагональдің бойында орналасқан элементтердің көбейтіндісін шегергенде шығып тұр. Сонымен, өлшемі $[2 \times 2]$ болатын әрбір квадрат матрицаға осы матрицаның анықтауышы деп аталатын санды (немесе өрнекті) бір жақты сәйкес қоямыз, және оны $detA$ немесе $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ арқылы белгілейміз. Сонда (1.5) матрицасының анықтауышы ереже бойынша келесі түрде анықталады

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ескерту. Бір жақты сәйкестікті қалай түсінеміз? Екі өлшемді квадрат матрицаның анықтауышы ереже бойынша бірмәнді анықталады, ал кері сәйкестік бірмәнді анықталмайды, өйткені кез келген санға анықтауышының мәні сол санға тең болатындай екі өлшемді матрицалардың саны көп (мүмкін ақырсыз).

Жоғарыда қарастырылған алғашқы ұғымдар төңірегінде (1.3) және (1.4) шешімдерін келесі түрде өрнектеуге болады

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.6}$$

Бұл формулаларды Крамер формулалары деп атайды. Сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімдерін зерттеуде Крамер формулалары маңызды роль атқарады.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ және } \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

белгілеулерін енгізейік. Сонда (1.6) Крамер формулалары келесі түрде жазылады:

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1},\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2}. \tag{1.7}$$

Қорытынды. Сонымен екі белгісізді екі теңдеулер жүйесі екі бірінші дәрежелі сызықтық теңдеуге келтірілді. Бұдан

1. Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда (1.1) теңдеулер жүйесінің тек жалғыз шешімі болады:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

2. Егер $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ болса, онда (1.1) теңдеулер жүйесінің шексіз көп шешімдері бар, өйткені

$$0 \cdot x_1 = 0 \text{және} 0 \cdot x_2 = 0.$$

3. Егер $\Delta = 0$, ал Δ_{x_1} немесе Δ_{x_2} анықтауыштарының ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болса, онда (1.1) теңдеулер жүйесінің шешімдері жоқ.

Матрицалар туралы мәліметтер. Матрицаларға амалдар қолдану

Анықтама. Элементтері m жолдар мен n бағандардың қиылысуларында орналасқан тік кестені өлшемі $m \times n$ болатын ***матрица*** деп атайды.

Ескерту. Матрицаның элементтері сандар, функциялар немесе алгебралық өрнектер болуы да мүмкін. Матрицаларды латын алфавитінің бас әріптерімен белгілейік: $A, B, C, D, \ldots$. Сонымен бізге өлшемі $[m \times n]$ болатын

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

матрицасы берілсін дейік. (1.8) матрицасының $A = (a_{ij})$ түріндегі белгілеуі де жиі қолданылады, мұнда $i = 1, 2, \dots, m$ және $j = 1, 2, \dots, n$.

Көбінесе матрицаның элементтері $a_{ij} \in \mathbb{R}$ нақты немесе $a_{ij} \in \mathbb{C}$ комплекс сандар болып келеді. Сондықтан өлшемдері $[m \times n]$ бүкіл матрицалардың жиынын $M_{m,n}(F)$ арқылы белгілесек, мұндағы F– матрицаның элементтері қандай сандар өрісінен алынғанын көрсетеді.

Анықтама. Өлшемдері бірдей A және B матрицаларының сәйкес элементтері өзара тең болса, яғни барлық $i = 1, 2, \dots, m$ және $j = 1, 2, \dots, n$ үшін $a_{ij} = b_{ij}$ теңдігі орындалса, онда мұндай матрицалар бір-біріне тең.

Анықтама. Бір жолдан тұратын $A = (a_{11}a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ матрицасын ***жол матрицасы*** деп, ал тек бір бағаннан тұратын $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ матрицасын ***баған матрицасы*** деп атайды.

Анықтама. Жол сандары баған сандарына тең матрицаны ***квадрат матрица*** деп атайды.

Ескерту. Бір саннан тұратын матрица сол санмен сәйкестендіріледі.

Анықтама. Өлшемі $[n \times n]$ болатын (1.8) квадрат матрицасының сол жоғарғы бұрышын оң төменгі бұрышымен қосатын диагональды оның ***бас диагоналі*** деп атайды. Ал осы матрицаның сол төменгі бұрышын оң жоғарғы бұрышымен қосатын диагональды оның ***қосалқы диагоналі*** деп атайды.

Анықтама. Нөлден өзгеше элементтері тек бас диагональдың бойында орналасқан квадрат матрицаны ***диагональдық матрица*** деп атайды. Дербес жағдайда диагональдық матрицаның бас диагоналінің бойында орналасқан бүкіл элементі 1-ге тең болса, онда оны ***бірлік матрица*** деп атайды.

Анықтама. Өлшемі $[m \times n]$ болатын A матрицасының жолдарын оның реті сақталатын сәйкес бағандарымен алмастырсақ, өлшемі $[n \times m]$ болатын және A^T арқылы белгіленетін бастапқы матрицаның ***тасымалданған матрицасын*** аламыз.

Ескерту. Симметриялы, яғни элементтерінің арасында $a_{ij} = a_{ji}$ теңдігі орындалатын матрицалар үшін $A = A^T$.

Өлшемдері бірдей $M_{m,n}(F)$ матрицалар жиынында матрицаны матрицаға қосу және матрицаны нөлден өзгеше санға көбейту ережелерін енгізейік.

1. Егер $A, B \in M_{m,n}(F)$ болса, онда бұл матрицалардың қосындысы $A + B = C$ төмендегі теңдік арқылы анықталады

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21}b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21}c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{m1}c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Егер $A \in M_{m,n}(F)$, ал$\alpha \in \mathbb{R}$ (нақтысандаржиыны) болса, ондаα санын A матрицасына көбейту үшін матрицаның бүкіл элементін сол санға көбейтеміз:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицаларды қосу және санға көбейту келесі қасиеттерге ие:

1. $A + B = B + A$ (қосудың ауыстырымдылығы).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (қосудың терімділігі).
3. $A + 0 = A$ (нөлдік матрицаның қасиеті).
4. $A + (-A) = 0$ (қосуға қатысты қарама – қарсы матрицаның қасиеті).
5. $1 \cdot A = A$ (бір санының қасиеті).
6. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$ (матрицалық көбейткішке қатысты үлестірімділік қасиеті).
7. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ (сандық көбейткішке қатысты үлестірімділік қасиеті).

8. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (сандық көбейткішке қатысты терімділік қасиеті).

Тасымалдау амалы (яғни бастапқы A матрицасынан A^T матрицасына көшу) келесі қасиеттерге ие. Мысалы $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ матрицалары және кез келген $\alpha \in \mathbb{R}$ саны үшін төмендегі қасиеттер орындалады:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Матрицаларды көбейту. $A, B \in M_{m,n}(F)$ матрицалары берілсін дейік. Бұл матрицалардың көбейтіндісін табу үшін матрицаларды бір-біріне көбейту ережесін анықтайық.

Ереже. Бірінші матрицаның баған саны екінші матрицаның жол санына тең болғанда және тек сонда ғана мұндай матрицаларды көбейтуге болады. Енді өлшемдері ережеге сай $A[m \times k]$ және $B[k \times n]$ матрицалары берілсін дейік, сонда көбейтінді $C[m \times n]$ матрицасының элементтері:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}\, b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

формуласы бойынша анықталады, мұнда $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Мысалы,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 & 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & 2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 32 & 35 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ереже. Көбейтінді C матрицасының c_{ij} элементтері A матрицасының i -ші жолының элементтерін B матрицасының j-ші бағанының сәйкес элементтеріне көбейтіп, қосқанға тең.

Матрицаларды көбейту келесі қасиеттерге ие:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (көбейтудің терімділігі).
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (үлестірімділік қасиеті).
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (үлестірімділік қасиеті).
4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$
5. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
6. $(A^T)^T = A$.

Сонымен қатар матрицаларды көбейту ауыстырымдылық заңына бағынбайтынын атап өтейік, яғни $A \cdot B \neq B \cdot A$. Сонымен қоса

$A[m \times n]$ және $B[n \times k]$ матрицалары үшін $A \cdot B$ көбейтіндісі анықталған, ал $B \cdot A$ көбейтіндісі анықталмаған, өйткені $k \neq m$.

Кері матрица. Кронекер символы деп аталатын $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ белгісін енгізейік, мұндағы i мен j– кез келген натурал сандар. Кронекер символына сүйене отырып n -ші ретті бірлік матрицаның келесі анықтамасын берейік.

Анықтама. $E[n \times n] = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ матрицасын n-ші ретті бірлік матрица деп атайды және ол үшін E_n, I, I_n белгілерін пайдаланады.

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ матрицалары берілсін дейік. Егер бұл матрицалар үшін $A \cdot B = B \cdot A = E$ теңдіктері орындалатын болса, онда $B = A^{-1}$ немесе $A = B^{-1}$. Мұнда A^{-1}символымен кері матрица белгіленеді. Кейінірек анықтауыштар теориясын өткен соң кері матрицаны толықтай анықтаймыз.

Квадрат матрицалардың анықтауыштары.

Квадрат матрица және оның анықтауышы ең басында сызықтық теңдеулер жүйесін шешу үшін қарастырылған. Сондықтан өлшемі $[2 \times 2]$ кез келген квадрат матрицаның анықтауышы (1.1) жүйенің (1.3), (1.4) шешімдерінің құрылымы арқылы анықталады. Демек өлшемі $[2 \times 2]$ болатын кез келген $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$квадрат матрицасының анықтауышы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

түрінде анықталады.

Енді үш белгісізді үш сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.9)$$

Бұл теңдеулер жүйесін $\sum$ қосынды символының көмегімен бір жолға жазуға болады

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Жүйенің негізгі матрицасын құрайық

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Осы матрица арқылы бірмәнді анықталатын $detA = |A|$ анықтауышының мәнін табайық. Ол үшін (1.9) теңдеулер жүйесін шешіп, содан кейін осы шешімдердің құрылымдарынан үшінші ретті анықтауыштың ашылу ережесін келесі түрде тағайындаймыз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.11}$$

Ескерту. Квадрат матрицаның реті өскен сайын оған бірмәнді түрде сәйкестендірілетін анықтауышты ашу ережесі де күрделене түседі. Сондықтан n-ші ретті анықтауыштарды ашу үшін жаңа ұғымдар және түсініктер қажет.

Екінші және үшінші ретті анықтауыштардың ашылу ережелерінен келесі тұжырымдар шығады:

1) әрбір жол мен әрбір бағаннан бір-бір элементтен алып, олардың әртүрлі көбейтінділерінің алгебралық қосындысын табамыз. Сонда бұл қосынды анықтауыштың мәнін береді. Әрбір мұндай көбейтінді анықтауыштың мүшесі деп аталады (n-ші ретті анықтауыштың әрбір мүшесі n элементтің көбейтіндісінен тұрады);

2) n-ші ретті анықтауыштың бүкіл мүшелерінің саны $n!$ тең. Мысалы, үшінші ретті анықтауыш 6 мүшенің алгебралық қосындысынан тұрады. (1.1) теңдігінен көріп отырғандай, анықтауыштың құрамына үшеуі „+“ таңбасымен, ал қалған үшеуі „−“ таңбасымен кіріп тұр. Бұл айтылғанды жалпылайтын болсақ,

онда n-ші ретті анықтауыштың құрамына „+“ таңбасымен $\frac{1}{2}n!$, ал „−“ таңбасымен де $\frac{1}{2}n!$ мүшелер кіреді.

Орын алмастыру және транспозиция. n-ші ретті анықтауыш.

a_1, a_2, …, a_n элементтері берілді дейік (бұлардың қатарына $1, 2, \dots, n$ сандарын да жатқызуға болады). Бұл элементтердің әртүрлі орналасуы n элементтерден алынған орын алмастыру деп аталатыны белгілі. n элементтерден барлығы $n!$ орын ауыстыру құруға болады.

Ескерту. Орын ауыстыруда a_1, a_2, …, a_n элементтерінің орнына өзімізге ұтымды болу үшін олардың индекстерімен жұмыс жасайық.

Бізге жеті элементтен тұратын қайсыбір орын алмастыру берілсін дейік. Мысалы, $[a_2, a_5, a_1, a_4, a_7, a_3, a_6]$ орын ауыстыруында элементтердің ретсіз орналасқанын көруге болады. Ретсіздікті алдымен әрбір қос элемент үшін анықтайық. Жұпта нөмірі үлкен элемент нөмірі кіші элементтің алдында орналасса, онда бұл элементтер ***инверсия*** құрайды деп айтады. $1, 2, \dots, n$ сандарынан құралған қандай да бір орын алмастырудағы инверсия санын есептеуге тоқталайық. Ол үшін жоғарыда қарастырылған мысалдағы элементтерді сәйкес индекстерімен алмастырайық. Сонда $[2, 5, 1, 4, 7, 3, 6]$ алмастыруын аламыз. Алдымен бір санының алдында тұрған шамасы бірден үлкен сандарды есептейміз, өйткені тек осы элементтер ғана бір санымен инверсия құрайды. Содан кейін бірді сызып тастап, екі санының алдында тұрған шамасы екіден үлкен сандарды есептейміз, өйткені осы элементтер ғана екі санымен инверсия құрайды. Келесі қадамда екіні сызып тастап, әрі қарай осы айтылғандарды 3, 4, 5, 6, 7 сандары үшін жалғастырып, әр қадамдағы инверсия сандарын қоссақ, біз жалпы инверсия санын аламыз.

Жалпы инверсия саны жұп болса – орын алмастыру жұп, ал жалпы инверсия саны тақ болса орын алмастыру тақ деп аталады.

n элементтен тұратын $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k, \dots, a_n$ орын алмастыруы берілсін дейік. Мұндағы a_i және a_k элементтерінің бір-бірімен орындарын ауыстырайық. Сонда $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_i, \dots, a_n$ орын алмастыруын аламыз. Екі элементтің мұндай орын ауыстыруын ***транспозиция*** деп атайды.

Теорема (дәлелдеусіз қабылдаймыз)**.** Бір транспозициядан орын алмастырудың жұптылығы ауысады.

Салдар. n элементтен $n!$ орын алмастырулар жасалынады. Оның жартысы жұп орын алмастырулар, демек қалған $n!/2$ орын алмастырулар–тақ.

Жоғарыдағы пайымдаулардан кейін n-ші ретті анықтауыштың жалпы анықтамасын берейік.

$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадрат матрицасы бойынша бірмәнді анықталатын $detA$ ($|A|$ немесе Δ_n) ***n-ші реттіанықтауышы*** деп $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ түріндегі $n!$ мүшелердің алгебралық қосындысын айтады. Сонымен

$$detA = |A| = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^N a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n},$$

мұнда қосынды бүкіл $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, яғни $1, 2, \dots, n$ сандарының орын алмастырулары бойынша алынады. Ал мұндағы N саны$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ орын алмастыруындағы жалпы инверсия саны. Дербес жағдайда $n = 2$ болсын дейік. Сонда $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum(-1)^N a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, өйткені $[1,2]$ орын алмастыруында инверсия саны $N = 0$; ал $[2,1]$ орын алмастыруында инверсия саны $N = 1$.

Анықтауыштардың негізгі қасиеттері

1. Тасымалдауда анықтауыштың мәні өзгермейді.

2. Егер анықтауыштың қандай да бір жолы немесе бағаны тек нөлдерден тұрса, онда анықтауыштың мәні нөлге тең.

3. Екі жолының немесе екі бағанының орындарын алмастырсақ, анықтауыш таңбасын өзгертеді.

4. Екі бірдей жолдан немесе екі бірдей бағаннан тұратын анықтауыштың мәні нөлге тең.

5. Егер қандай да бір жолдың немесе бағанның барлық элементтерін нөлден өзгеше санға көбейтсек, онда сол санға анықтауыштың мәні де көбейтіледі. Яғни, жол немесе баған

элементтерінің ортақ көбейткішін анықтауыштың таңбасының алдына шығаруға болады.

6. Екі пропорционал жолдардан немесе бағандардан тұратын анықтауыштың мәні нөлге тең.

7. Егер қандай да бір жолға немесе бағанға келесі бір жолдың немесе бағанның сәйкес элементтерін нөлден өзгеше бірдей санға көбейтіп қоссақ, одан анықтауыштың мәні өзгермейді.

8. Егер анықтауыштың қандай да бір жолының немесе бағанының барлық элементтері екі қосылғыштың қосындысы ретінде берілсе, онда бастапқы анықтауыш екі анықтауыштың қосындысы ретінде көрсетіледі. Бірінші анықтауыштың сәйкес жолы немесе бағаны бірінші қосылғыштардан, ал екінші анықтауыштың сәйкес жолы немесе бағаны екінші қосылғыштардан тұрады, ал қалған элементтері бастапқы анықтауыштан екеуіне де өзгеріссіз көшіріледі. Мысалы, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+a & a_{22}+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a & b \end{vmatrix}$.

Ескерту. Анықтауыштың бұл қасиетін ақырлы санды қосылғыштарға жалпылауға болады.

Минорлар мен алгебралық толықтауыштар.

Егер $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_{m,n}}(\mathbb{R})$ матрицасының кез келген $\boldsymbol{k}$ жолын және кез келген $\boldsymbol{k}$ бағанын сызсақ, онда осы жолдардың қиылысуында орналасқан элементтерден өлшемі $[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}]$ болатын матрица құруға болады. Бұл матрицаның анықтауышын $\boldsymbol{A}$ матрицасының $\boldsymbol{k}$ -шы ретті миноры деп атайды. Мұнда $\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{m}$ және $\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}$. Өлшемі $[\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}]$ болатын тік матрицаның барлық $\boldsymbol{k}$ -шы ретті минорларының саны $\boldsymbol{C_m^k} \cdot \boldsymbol{C_n^k}$ көбейтіндісіне тең, мұнда $\boldsymbol{C_n^k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}\boldsymbol{n}$ элементтен $\boldsymbol{k}$ элемент бойынша алынған теруді білдіреді; $\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!$ (эн факториал деп оқылады және бірден $\boldsymbol{n}$-ға дейінгі натурал сандардың көбейтіндісін көрсетеді). Мысалы,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ матрицасынан $C_4^1 \cdot C_3^1 = 12$ бірінші ретті минорларды құруға болады – бұлар A матрицасының элементтері. Келесі екінші ретті анықтауыштар

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\5 & 6\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 4\\5 & 8\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\6 & 7\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 4\\6 & 8\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 4\\7 & 8\end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix}5 & 6\\0 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}5 & 7\\0 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}5 & 8\\0 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}6 & 7\\1 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}6 & 8\\1 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}7 & 8\\2 & 3\end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 4\\0 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{vmatrix},$$

бастапқы Aматрицасынан құралған екінші ретті минорларды көрсетеді. Бұл минорлардың жалпы саны $C_4^2 \cdot C_3^2 = 18$ теңдігінен шығады. k-шы ретті минорды анықтау ережесіне сүйене отырып берілген $A[3 \times 4]$ матрицасынан жалпы саны $C_4^3 \cdot C_3^2 = 4$ теңдігімен анықталатын төрт үшінші ретті минорларды құруға болады:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 6 & 7\\0 & 1 & 2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\5 & 6 & 8\\0 & 1 & 3\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\5 & 7 & 8\\0 & 2 & 3\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\6 & 7 & 8\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Анықтама. $|A| = detA = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

анықтауышының i-ші жолы мен j-ші баған элементтерін сызып тастайық. Сонда сызылып тасталғаннан қалған $(n-1)$ ретті анықтауыш a_{ij} элементінің ***миноры*** деп аталады.

Анықтама. a_{ij} элементінің ***алгебралық толықтауышы*** деп $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған сол элементтің минорын айтады:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема (дәлелдеуін өзіндік жұмысқа ұсынамыз)**.** Егер k - шы жолдың (не бағанның a_{mk}) тек бір ғана a_{km}элементі нөлден өзгеше болса, онда Δ анықтауышының мәні a_{km} элементін өзінің алгебралық толықтауышына көбейткенге тең $\Delta = a_{km}A_{km}$ ($\Delta = a_{mk}A_{mk}$).

Мысалы, $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 4\\5 & 6 & 7\end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{vmatrix} = 32.$

Теорема. Анықтауыштың кез келген жолының немесе бағанының бүкіл элементін олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қоссақ, анықтауыштың мәнін табамыз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Бұл Δ анықтауышының i-ші жолдың элементтері бойынша жіктелуін көрсетеді.

Теорема. Анықтауыштың кез келген жолының немесе бағанының элементтерін келесі жолдың немесе бағанның сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қоссақ, қосынды нөлге тең болады.

Мысалы, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ анықтауышының бірінші жолының элементтерін екінші жолдың сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қоссақ,

$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = -a_{11}M_{21} + a_{12}M_{22} = -a_{11}a_{12} + a_{21}a_{11} \equiv 0$

қосындысы нөлге тең болады.

n белгісізді n сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.12)$$

n белгісізді n сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін дейік. Сонда жүйенің барлық теңдеулерін тепе-теңдікке айналдыратын белгісіздердің $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ мәндерінің жиынтығы (1.12) сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады. Белгісіздердің коэффициенттерінен құралған жүйенің бас анықтауышы нөлден өзгеше деп ұйғарайық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Жүйенің бірінші теңдеуін A_{11}-ге, екіншісін A_{21}-ге, тағы сол сияқты соңғысын A_{n1}-ге көбейтіп, жүйенің барлық теңдеулерін бір-біріне мүшелеп қосайық, сонда

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1}) +$$

……(1.13)

$$+x_n(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудегі $x_2, x_3, \dots, x_n$ белгісіздерінің коэффициенттері жоғарыда қарастырылған теоремалар негізінде нөлге тең. Ал теңдеудің оң жақ бөлігіндегі $b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}$ өрнегі бас анықтауыштағы бірінші бағанды теңдеулер жүйесінің бос мүшелерімен алмастырғанда шығатын анықтауыштың мәнін береді. Ол анықтауышты Δ_1 арқылы белгілейік, онда (1.13) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$x_1 \cdot \Delta = \Delta_1, \quad \text{мұнда} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_na_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Келесі қадамда жүйенің бірінші теңдеуін A_{12}-ге, екіншісін A_{22}-ге, тағы сол сияқты соңғысын A_{n2}-ге көбейтіп, жүйенің барлық теңдеулерін бір-біріне мүшелеп қоссақ

$x_2 \cdot \Delta = \Delta_2$ теңдеуін аламыз, мұнда $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_1a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}b_2a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}b_na_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Осы схеманы әрі қарай жалғастыра отырып (1.12) n белгісізді n сызықтық теңдеулер жүйесін оған эквивалентті бір белгісізді nсызықтық теңдеулер жүйесімен, яғни $x_1 \cdot \Delta = \Delta_1$, $x_2 \cdot \Delta = \Delta_2$, ..., $x_n \cdot$

$\Delta = \Delta_n$ теңдеулерімен алмастырамыз. Ал бір белгісізді сызықтық теңдеулер толықтай зерттелген.

Зерттеу нәтижесінде (1.12) сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімдерін өрнектейтін және талдайтын Крамер формулаларын аламыз:

1. Егер (1.12) теңдеулер жүйесінің Δ бас анықтауышы нөлден өзгеше болса, онда жүйенің

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Крамер формулаларымен өрнектелетін тек жалғыз ғана шешімі табылады.

2. Егер жүйенің Δ бас анықтауышы, сонымен қатар барлық Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n анықтауыштарының мәндері нөлге тең болса, онда (1.12) теңдеулер жүйесінің шексіз көп (ақырсыз) шешімдері табылады.

3. Егер жүйенің Δ бас анықтауышының мәні нөлге тең болып, ал Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n анықтауыштарының ең болмағанда біреуінің мәні нөлден өзгеше болса, онда (1.12) теңдеулер жүйесінің шешімі жоқ.

n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.14}$$

n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық. Белгісіздердің коэффициенттерінен өлшемі $[m \times n]$ болатын жүйенің

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \ \ldots & \ldots & \ldots \ \ldots \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

негізгі матрицасын құрайық. Келесі

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n}b_2 \\ \ldots \ \ldots & \ldots & \ldots \ \ldots \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn}b_m \end{pmatrix}$$

тік матрицасын жүйенің ***кеңейтілген матрицасы*** деп атау қабылданған. Мұнда $b_1, b_2, \dots, b_m$ коэффициенттерін теңдеулер жүйесінің ***бос мүшелері*** деп атайды. Егер жүйенің бос мүшелерінің барлығы бірдей нөлге тең болса – жүйе ***біртекті***, ал ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болған жағдайда – ***біртексіз*** деп аталады.

Ең болмағанда бір шешімі бар жүйені ***үйлесімді***, ал ешбір шешімі болмайтын жүйені ***үйлесімсіз*** деп атайды. Үйлесімді жүйелер анықталған және анықталмаған болып екі топқа бөлінеді. Тек жалғыз ғана шешімі бар жүйе ***үйлесімді анықталған***, ал шексіз көп шешімдері табылатын жүйені ***үйлесімді анықталмаған*** деп атайды. Біртекті жүйе әр уақытта үйлесімді, өйткені оның ең болмағанда бір

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

нөлдік шешімі бар.

(1.14) теңдеулер жүйесінің әрбір теңдеуін тепе-теңдікке айналдыратын белгісіздердің реттелген (α_1, α_2, ..., α_n) жиынтығы жүйенің шешімін береді. Егер бір жүйенің әрбір шешімі белгісіздері бірдей басқа бір жүйенің шешімі болса немесе бұл жүйелер үйлесімсіз болса, онда мұндай жүйелер өзара эквивалентті (пара-пар) деп аталады.

Қорытынды. Сонымен (1.14) сызықтық теңдеулер жүйесінің қандай да бір шешімін табу үшін алдымен оны үйлесімділікке зерттеу қажет. Ол үшін ***матрицаның рангы*** деген ұғымды анықтайық.

Матрицаның рангы

$A[m \times n] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ матрицасынан реті $k \leq min\{m, n\}$ және жалпы саны $C_m^k \cdot C_n^k$ көбейтіндісіне тең минорларды алуға болатыны жоғарыда қарастырылған.

Ескерту. Егер $A[m \times n]$ матрицасының барлық k -шы ретті минорлары нөлге тең болса, онда оның бүкіл жоғарғы ретті минорлары нөлге тең. Мысалы,

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының бүкіл

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

үшінші ретті минорларының барлығы бірдей нөлге тең. Ал осы матрицаның 18 екінші ретті минорларының ішінен ең болмағанда біреуінің нөлден өзгеше болатынына көз жеткізу қиындық туғызбайды, атап айтқанда $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Сондықтан A матрицасының рангысы екіге тең деп айтамыз.

Анықтама. ***Матрицаның рангы*** деп осы матрицаның нөлден өзгеше минорларының ең жоғарғы ретін айтады. Белгілеуі: $rangA$, $r(A)$–A матрицасының рангысын білдіреді.

Ескерту. Ішкі матрицалардың рангылары бастапқы матрицаның рангысынан артпайды.

Матрицаның рангысын табуда ұтымды әдістердің біріне матрицаға элементар түрлендірулер жүргізу әдісі жатады.

Матрицаға элементар түрлендірулер жүргізу деп:

1) матрицаның кез келген i-ші жолының элементтерін нөлден өзгеше санға көбейтуді;

2) матрицаның кез келген i-ші жолының элементтеріне басқа бір жолдың сәйкес элементтерін нөлден өзгеше санға көбейтіп қосқанды;

3) матрицаның кез келген j-ші бағанының элементтерін нөлден өзгеше санға көбейтуді;

4) матрицаның кез келген j-ші бағанының элементтеріне басқа бір бағанның сәйкес элементтерін нөлден өзгеше санға көбейтіп қосқанды;

5) матрицаның жолдарын немесе бағандарын бір-бірімен алмастыруды айтамыз.

Теорема (элементар түрлендірулер туралы).Матрицаға жүргізілген элементар түрлендірулер оның рангысын өзгертпейді.

Мысал ретінде жоғарыда қарастырылған $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының рангысын табайық. Ол үшін матрицаның жол және баған элементтеріне матрицаның рангысын өзгертпейтін элементар түрлендірулер жүргізіп, бастапқы матрицаны бірлік матрицаға алып

келеміз. Сонда соңғы бірлік матрицаның реті бастапқы матрицаның рангысын көрсетеді.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

екінші жол мен үшінші жолдың сәйкес элементтері өзара пропорционал, сондықтан үшінші жолды сызып тастаймыз, өйткені ол бастапқы матрицаның рангысын өзгертпейді

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементар түрлендірулерден кейін алынған соңғы матрицада бірліктердің саны екіге тең, яғни бастапқы матрицаның рангысы екіге тең.

Матрицаның рангысы келесі қасиеттерге ие:

1) $rangA \leq min\{m, n\}$, мұнда $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;
2) егер $A \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ және $B \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ болса, онда $(rangA + rangB) - k \leq rangAB \leq min\{rangA, rangB\}$;
3) $rang(A + B) \leq rangA + rangB$, мұнда$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;
4) егер $A \in M_{m,k}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$болса, онда

$$rangAB + rangBC \leq rangB + rangABC.$$

Кері матрица

Өлшемі $[n \times n]$ болатын

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

матрицасы берілсін дейік. Сонда

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \quad (1.16)$$

теңдігі орындалатындай A^{-1} матрицасын A матрицасының ***кері матрицасы*** деп атайды. Мұнда E_n матрицасы n-ші ретті бірлік матрица.

Ескерту. Егер A матрицасы бойынша бірмәнді анықталатын анықтауыштың мәні нөлге тең болса, яғни $detA = 0$, онда A матрицасын ***ерекше матрица*** деп атайды.

Теорема. Кез келген ерекше емес квадрат матрица үшін (1.16) теңдігі орындалатындай кері матрицасы табылады және ол жалғыз.

Дәлелдеуі. A матрицасының B және C екі кері матрицасы бар деп ұйғарайық. Кері матрицаның анықтамасына сай $A \cdot B = E_n$ және $C \cdot A = E_n$ теңдіктері орындалады. Матрицаларды көбейтудің ассоциативтік (терімділік) қасиетін пайдалана отырып

$$C = C \cdot E_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = E_n \cdot B = B$$

теңдігін аламыз, яғни B және C матрицалары бірдей.

Теорема. $A[n \times n]$ квадрат матрицасының кері матрицасы табылу үшін $detA \neq 0$ болуы қажетті және жеткілікті.

Қажеттілік. A матрицасының кері матрицасы A^{-1} дейік. Сонда анықтауыштың қасиетіне сүйене отырып $det(A \cdot A^{-1}) = detE_n = 1$ теңдігін аламыз. Бұдан $detA \cdot detA^{-1} = 1$ теңдігі шығады, демек $detA \neq 0$.

Жеткіліктілік. Енді $detA \neq 0$ дейік. (1.15) матрицасының әрбір a_{ij} элементінің сәйкес $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ алгебралық толықтауышын қарастырайық.

Анықтауыштың жол элементтері бойынша жіктелу теоремасын еске түсірсек, кез келген $i = 1, 2, \dots, n$ үшін

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = detA$$

теңдігі орындалады. Сонымен қатар анықтауыштың келесі бір қасиетін еске түсірейік, кез келген $k \neq i$ индекстері үшін

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0,$$

мұнда $i, k = 1,2, \dots, n$.

Басқаша айтқанда бұл қасиет анықтауыштың қандай да бір жолының элементтерін басқа бір жолдың сәйкес элементтерінің

алгебралық толықтауыштарына көбейтіп қосатын болсақ, қосынды нөлге тең болатынын білдіреді.

Келесі қадамда өлшемі $[n \times n]$ болатын, ал элементтері $b_{ij} = \frac{1}{detA} A_{ji}$ теңдігімен анықталатын B квадрат матрицасын қарастырайық. Сонда A және B матрицаларының көбейтіндісі C бірлік матрицасын береді. Шынында да матрицаны матрицаға көбейту ережесіне сәйкес көбейтінді матрицаның элементтері келесі теңдікпен анықталады:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{detA} A_{kj} = \frac{1}{detA} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

бұдан көбейтінді C матрицасының элементтері өлшемі $[n \times n]$ болатын бірлік матрицаның элементтерін құрайды, демек $C = E_n$.

Матрицаларды көбейту коммутативтік заңдылыққа бағынбайтын болғандықтан $C' = B \cdot A$ көбейтіндісін де қарастырамыз, сонда:

$$c'_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{detA} A_{ik} = \frac{1}{detA} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

демек C'– бірлік матрица. Жоғарыдағы екі теңдіктен $A \cdot B = B \cdot A$, өйткені $C = C' = E_n$. Сонда анықтама бойынша B матрицасы бастапқы A матрицасының кері матрицасы болады, белгілеуі: $B = A^{-1}$.

Салдар. Кері матрицаның анықтауышы $detA^{-1} = (detA)^{-1}$ теңдігінен анықталады.

Сонымен кері матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots \ \dots \ \dots & \dots & \dots \ \dots \ \dots \\ A_{1n} A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

формуласы бойынша анықталады.

Кері матрица келесі қасиеттерге ие:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(A^T)^{-1} =) (A^{-1})^T$;
3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Жолдарға элементар түрлендірулер жүргізу арқылы кері матрицаны табу.

$\boldsymbol{A}$ −өзгеше емес матрица дейік.

1) кез келген екі жолдың орнын алмастыру;

2) жолдың бүкіл элементін нөлден өзгеше санға көбейту;

3) қандай да бір жолдың бүкіл элементтеріне екінші бір жолдың сәйкес элементтерін нөлден өзгеше санға көбейтіп қосу – жолдарға жасалынатын элементар түрлендірулердің қатарына жатады.

Аталған элементар түрлендірулерді қосақталған

$$[A|E] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

матрицасына қолданып, оны

$$[E|B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

матрицасына келтіреміз. Бұдан $B = A^{-1}$ болатынын көреміз, өйткені

$$A^{-1}[A|E] = [A^{-1}A|A^{-1}E] = [E|A^{-1}].$$

Кронекер – Капелли теоремасы

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad i = 1,2,\dots,n$ сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді болу үшін негізгі матрицаның рангы кеңейтілген матрицаның рангысына тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни $rangA = rangB$. Сонымен қатар:

- Егер үйлесімді жүйенің рангысы белгісіздер санына тең болса, онда жүйенің тек жалғыз шешімі бар;
- Егер үйлесімді жүйенің рангысы белгісіздердің санынан кіші болса, онда жүйенің шексіз көп шешімдер жиыны бар.

(1.14) сызықтық теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазайық:

$$A \cdot X = B, \tag{1.18}$$

мұнда $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Егер $m = n$және $detA \neq 0$ болса, онда (1.18) жүйенің жалғыз шешімі

$$X = A^{-1} \cdot B$$

матрицалық теңдігімен анықталады. Бұл жерде $rangA = rang(A|B) = n$ (белгісіздердің саны) шарты орындалады деп ұйғарамыз.

Егер $m \neq n$ және $rangA = rang(A|B) = r < n$ болса, онда жүйенің

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \vdots \\ a_{m1}a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

кеңейтілген матрицасында сызықтық тәуелсіз бағандардың саны r- ға тең. Бұл жағдайда жүйенің шексіз көп шешімдері болады. Ол шешімдерді табу үшін жүйенің кеңейтілген матрицасын баспалдақты матрицаға келтіретін Гаусс әдісін пайдаланған жөн.

Ескерту. $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1r} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2r} & \cdots & d_{2n} \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & d_{3r} & \cdots & d_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (1.19)

түріндегі матрицаны баспалдақты матрица деп атаймыз. Бұл матрицаның элементтерінің орналасу ретіне қарайтын болсақ, келесі шарттардың орындалатынын көреміз.

1) матрицаның құрамында нөлдік жол (яғни барлық элементтері нөлге тең) бар және бұл жолдан төмен орналасқан жолдардың бүкіл элементтері нөлге тең;

2) қандай да бір жолдың нөлдік емес элементі i -ші бағанның бойында орналасса, онда келесі жолдың нөлдік емес элементі $j > i$ бағанда орналасады.

Жалпы жағдайда жүйенің $(A|B) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ кеңейтілген матрицасына элементар түрлендірулер жасап $m - r$ жолдарының элементтерін нөлге айналдырамыз, мұнда $r = rang(A|B) = rangA$.

Ескерту. Элементар түрлендірулер тек жолдарға қатысты жүргізіледі. Егер бағандардың бір-бірімен орындарын ауыстыратын болсақ, жоғарғы қатарға ауысатын белгісіздерді көрсетеміз. Мысалы,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін Гаусс алгоритмі бойынша табайық.

Шешуі. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ және $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right)$.

Жүйенің кеңейтілген матрицасының рангысын табайық. Ол үшін оған келесі түрдегі элементар түрлендірулер жасайық:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$rangA = rang(A|B) = 2 < 3,$$

мұнда $n = 3$ белгісіздердің саны. Жүйенің шексіз көп шешімдері бар. Базистік минор алғашқы екі бағанда орналасқан. Сондықтан x_1, x_2 белгісіздерін – бас, ал x_3-ті еркін белгісіз ретінде қабылдайық. Еркін белгісіз кез келген мәнді қабылдайды. Сонда бастапқы жүйені оған эквивалентті

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - 3x_3 \\ -3x_2 = -5 + 7x_3 \end{cases}$$

жүйесімен алмастырамыз. Жүйенің шешімін Крамер формулалары арқылы табайық:

$$x_1 = \frac{1}{3}(2 + 5\alpha_3), \quad x_2 = \frac{1}{3}(5 - 7\alpha_3), \quad x_3 = \alpha_3.$$

Квадрат матрицаны үшбұрыштық матрицалардың көбейтіндісіне жіктеу

Барлық бас диагональдық минорлары нөлден өзгеше кез келген квадрат матрицасын

$$A = L \cdot U$$

көбейтіндісі түрінде көрсетуге болады. Мұнда Lбас диагоналінің бүкіл элементтері 1 саны болатын төменгі үшбұрыштық матрица, ал U жоғарғы үшбұрыштық матрица. Мұндай жіктелуді Гаусс әдісінің көмегімен алуға болады. Мысал арқылы түсінейік.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының LU жіктелуін құрайық.

Шешуі. Aматрицасының екінші жолының элементтеріне бірінші жолдың сәйкес элементтерін (-1) -ге көбейтіп қосайық, содан кейін үшінші жолдың элементтеріне бірінші жолдың сәйкес элементтерін (-2) -ге көбейтіп қосайық, сонда нәтижесінде $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ матрицасын аламыз. Бұл матрицаның үшінші жолының элементтеріне екінші жолдың элементтерін (-2) -ге көбейтіп қосайық, сонда ақырында $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ матрицасын аламыз.

Жолдарға қатысты жүргізілген бұл амалдар A матрицасын сол жағынан біртіндеп

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

элементар матрицаларына көбейткенге пара-пар. Сонымен $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$, яғни $SA = U$, мұнда

$$S = E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$SA = U$ теңдігінің екі жағын бірдей сол жағынан S^{-1} матрицасына көбейтейік, сонда LU жіктелуін аламыз:

$$A = S^{-1}U = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

мұнда $L = S^{-1}$.

Квадрат матрицаның $A = LU$ жіктелуінен оның анықтауышын тікелей есептеуге болады

$$detA = det(LU) = detL \cdot detU = (\prod_{i=1}^{n} L_{ii})(\prod_{i=1}^{n} U_{ii}),$$

мұндағы $[n \times n]$–A матрицасының өлшемі, ал L_{ii} және U_{ii}–L және U матрицаларының диагональдық элементтері.

Есеп шығару үлгілері

1-мысал. 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

матрицалары берілсін дейік. Табу керек: $A + B$ және $A - B$.

1) Матрицаларды бір-біріне қосу немесе шегеру амалдары тек өлшемдері бірдей матрицалар үшін анықталған. Нәтижесінде өлшемі бастапқы матрицалардың өлшеміндей болатын, ал элементтері A және B матрицаларының сәйкес элементтерінің қосындысы немесе айырымы болатындай матрица аламыз.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+4 & -3+5 & 4+2 \\ 0+6 & 5-3 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-4 & -3-5 & 4-2 \\ 0-6 & 5-(-3) & -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -6 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

2) Бұл матрицалар үшін қосу және шегеру амалдары анықталмаған, өйткені матрицалардың өлшемдері әртүрлі: $A[2 \times 2]$, $B[3 \times 2]$(бұл жағдайда матрицалардағы жол сандары өзара тең емес).

2-мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ және $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

матрицалары берілсін. $2A + 3B^T - C$ өрнегінің мәнін табу керек.

Шешуі. Санға көбейту, тасымалдау, қосу және шегеру амалдарын кезегімен орындай отырып, нәтижесінде өлшемі $[3 \times 3]$ болатын матрица аламыз. Табылған матрица $2A + 3B^T - C$ мәнін көрсетеді.

а) матрицаны санға көбейткенде матрицаның әрбір элементі сол санға көбейтіледі

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 10 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

б) матрицаны тасымалдағанда бастапқы матрицаның жолдары сәйкес бағандармен, ал бағандары сәйкес жолдармен алмастырылады (мысалы, бірінші жол тасымалдағаннан кейін бірінші бағанның орнында тұрады)

$$3B^T = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T = 3\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 3 & 9 & 15 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

в) өрнектің мәнін табайық

$$2A + 3B^T - C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 10 & 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 3 & 9 & 15 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3-2 & 4+6-3 & -4+12-4 \\ 0+3+1 & 6+9-2 & 8+15-0 \\ 10+6-3 & 2+0-4 & -6+9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 4 & 13 & 23 \\ 13 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3-мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. Осы матрицалардың көбейтіндісін табу керек.

Шешуі. Бұл матрицаларды көбейтпес бұрын алдымен матрицаларды бір-біріне көбейтудің үйлесімдік ережесін тексереміз: $A[2\times 3]$, $B = [3\times 2]$, яғни бірінші матрицаның баған саны екінші матрицаның жол санына тең болып тұр; онда мұндай матрицаларды бір-біріне көбейтуге болады, нәтижесінде өлшемі $[2\times 2]$ болатын, ал элементтері $c_{ij} = \sum_{s=1}^{3} a_{is}\, b_{sj};\ \ i,j = 1,2$формуласымен анықталатын $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$матрицасын аламыз, мұнда

$c_{11} = \sum_{s=1}^{3} a_{1s}b_{s1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 3 = 6,$

$c_{12} = \sum_{s=1}^{3} a_{1s}b_{s2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 5,$

$c_{21} = \sum_{s=1}^{3} a_{2s}b_{s1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0\cdot 5 + (-4)\cdot(-4) + 5\cdot 3 = 31,$

$$c_{22} = \sum_{s=1}^{3} a_{2s}b_{s2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5.$$

Ақырында $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 31 & 5 \end{pmatrix}$.

Енді керісінше $B = [3 \times 2]$ матрицасын $A[2 \times 3]$ матрицасына көбейтейік. Көбейтудің үйлесімділік ережесі сақталады, өйткені B матрицасындағы баған сандары A матрицасындағы жол сандарына тең. Сонда нәтижесінде өлшемі $[3 \times 3]$ болатын, ал элементтері $d_{ij} = \sum_{s=1}^{2} a_{is}\, b_{sj} i, j = 1, 2, 3$ формуласымен анықталатын

$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$ матрицасын аламыз, мұнда

$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 25 \\ -4 & -8 & -12 \\ 3 & 2 & 14 \end{pmatrix}$, бұдан $A \cdot B \neq B \cdot A$,

яғни матрицалар үшін ауыстырымдылық заңдылығы орындалмайды.

4-мысал. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеп табайық:

1) үшбұрыштар ережесі бойынша;

2) Саррус ережесі бойынша

Шешуі. 1) үшінші ретті анықтауышты (1.11) үшбұрыштар ережесімен ашайық

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 4 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) \cdot 4 - (-2) \cdot 0 \cdot (-2) = -17.$$

2) Саррус ережесі бойынша үшінші ретті анықтауышты есептерде оған алғашқы екі бағанды тіркеп жазады және төмендегі схема бойынша ашып жазады

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 4 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 3 - 4(-3) \cdot 1 - (-2)(-2) \cdot 0 = -17.$$

Бұдан анықтауыштың мәні таңдап алынған есептеу әдісіне тәуелсіз екенін көреміз. Екі әдіс бойынша да бір нәтиже алдық.

5-мысал. $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}$ төртінші ретті анықтауышты есептейік.

Шешуі. Анықтауышты оның қасиеттеріне сүйене отырып есептейік. Төртінші жолдың элементтеріне үшінші жолдың сәйкес элементтерін (-1)-ге көбейтіп қосайық, бұдан анықтауыштың мәні өзгермейді.

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4 & -2\end{vmatrix}$. Соңғы алынған анықтауышта екінші және төртінші жолдардың элементтері өзара пропорционал. Олай болса анықтауыштың мәні нөлге тең, яғни $\Delta= 0$.

6-мысал. $|A| = \begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ -2 & 6 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 4 & 1\\ 3 & 3 & 6 & -1\end{vmatrix}$ төртінші ретті анықтауышты есептейік.

Шешуі. Анықтауыштың мәнін табу үшін оны кез келген жол немесе баған элементтері бойынша жіктеп жаза аламыз. Егер төртінші ретті анықтауыштың ешбір элементі нөлге тең болмаса, онда мұндай жіктеу төрт үшінші ретті анықтауышты есептеуді қажет етеді. Бірақ анықтауыштардың қасиеттеріне сүйене отырып, қандай да бір жол немесе баған элементтерінің тек біреуінен басқаларын нөлге айналдырсақ, онда тек бір ғана үшінші ретті анықтауышты есептеуге тура келеді.

Қарастырылып отырған мысалда бірінші, үшінші жолдарда және екінші, төртінші бағандарда бір нөл бар. Осы төрт қатардың біреуін таңдап аламыз. Мысалға бірінші жолды таңдап алайық. Жоғарыда айтылғандай a_{12} элементінен басқасын нөлге айналдырайық. Ол үшін бірінші бағанның элементтеріне екінші бағанның сәйкес элементтерін (-2)-ге көбейтіп, ал үшінші бағанның элементтеріне екінші бағанның

сәйкес элементтерін (+1)-ге көбейтіп қосатын болсақ, бастапқы анықтауыш келесі түрде жазылады:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14 & 6 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$ және анықтауыштың

мәні өзгермейді. Бірінші жолдың тек бір a_{12} элементі нөлден өзгеше, онда

$$|A| = a_{12}A_{12} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = -a_{12}M_{12} = -\begin{vmatrix} -14 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 9 & -1 \end{vmatrix}.$$

Үшінші ретті анықтауышты Саррус немесе үшбұрыштар ережесімен ашуға болады, бірақ жоғарыдағы схеманы пайдалансақ анықтауышты есептеу ұтымды болады.

Екінші жолды таңдап алайық, бір элементін қалдырып, қалған екеуін нөлге айналдырайық:

$$|A| = -\begin{vmatrix} -14 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -19 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 13 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -19 & -11 \\ -2 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= -19 \cdot 13 - 11 \cdot 2 = -269.$$

7-мысал. 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

матрицаларының кері матрицаларын табайық.

Шешуі. 1) A матрицасының өзгеше емес матрица екенін тексерейік, ол үшін оның анықтауышын табайық.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = 1 \neq 0$, матрица өзгеше емес, яғни оның жалғыз A^{-1} кері матрицасы табылады. Кері матрицаны (1.17) формуласы бойынша табайық:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}A^* = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

A матрицасының әрбір элементінің алгебралық толықтауышын табайық:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}(-2) = 2;$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Табылған алгебралық толықтауыштардан A^* тіркелген матрицасын құрайық:

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сонда $A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тексерейік. Кері матрицаның анықтамасы бойынша

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_2; \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

яғни кері матрица дұрыс табылған.

2) B матрицасының анықтауышын табайық

$$detB = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -32 + 35 = 3 \neq 0,$$

демек B матрицасы үшін кері матрица табылады. Оны

$B^{-1} = \frac{1}{detB} B^* = \frac{1}{detB} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ формуласы бойынша табайық:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9;$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6;$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8;$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7;$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$

$B^* = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}$ алгебралық толықтауыштардың тіркелген матрицасын құрайық. Сонда $B^{-1} = \frac{1}{detB} B^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ -10 & 8 & 7 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

8-мысал. Матрицалық теңдеуді шеш:

1) $A \cdot X = B$, мұнда $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2) $X \cdot A = B$, мұнда $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$.

Шешуі. 1) $X = A^{-1} \cdot B$. Сонымен белгісіз X матрицасын табу үшін алдымен A^{-1} кері матрицасын тауып, содан кейін оны B матрицасына көбейту қажет.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \; X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Табылған шешімді бастапқы матрицалық теңдеуге қойып тексерейік: $A \cdot X = B$ немесе $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$. Жауабы: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) $X \cdot A = B$ теңдеуін шешу үшін теңдеудің екі жағын бірдей оң жағынан A^{-1}-ге көбейтеміз, сонда $X = B \cdot A^{-1}$.

$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, мұнда $detA = 1$. Бұдан

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Табылған шешімді бастапқы теңдеуге қойып тексерейік:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}.$$ Жауабы: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9-мысал. $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының рангысын тап.

Шешуі. Баспалдақты матрицаның рангысы нөлдік емес жолдардың санына тең. Элементар түрлендірулердің көмегімен A матрицасын баспалдақты түрге келтіреміз. Есептеуге ыңғайлы болу үшін бір мен үшінші жолдардың орындарын алмастырайық.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нәтижесінде нөлдік емес екі жол бар, демек $rang(A) = 2$. Базистік минор ретінде (нөлден өзгеше минордың ең үлкен реті) $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$ минорын таңдап алуға болады. Жауабы: $rang(A) = 2$.

Мысал 10. λ параметрінің қандай мәнінде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді?

Шешуі. Жүйенің негізгі $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ және кеңейтілген $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$ матрицаларын құрайық. Кронекер – Капелли теоремасы бойынша $rang(A|B) = rangA$ болғанда және тек сонда ғана теңдеулер жүйесі үйлесімді болады. Сондықтан элементар түрлендірулердің көмегімен кеңейтілген матрицаның рангысын табамыз және бұл түрлендіру негізгі матрицаның да рангысын анықтайды, өйткені тік жақшаның сол жағы жүйенің негізгі матрицасын құрайды.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda + 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Элементар түрлендірулерден кейін $rang(A) = 2$.

Соңғы матрицадан $\lambda = 1$ болғанда және тек сонда ғана сызықтық теңдеулер жүйесінің үйлесімдігі шығады, өйткені баспалдақты матрицаның рангысы нөлдік емес жолдардың санымен анықталады. Сонымен $\lambda = 1$ мәнінде жүйе үйлесімді және $rang(A|B) = 2$.

Жаттығулар

1. Анықтауыштың қасиеттеріне сүйене отырып келесі анықтауыштарды есепте:

$$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

2. Үшінші ретті анықтауышты есепте:

$$\begin{vmatrix} 2 & sin^2\alpha & -cos^2\alpha \\ 2 & sin^2\beta & -cos^2\beta \\ 2 & sin^2\gamma & -cos^2\gamma \end{vmatrix},$$ мұнда α, β, γ – нақты сандар.

3. Бесінші ретті анықтауышты есепте:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 36 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Кез келген нақты A матрицасы үшін $det(A \cdot A^T) \geq 0$ теңсіздігінің орындалатынын дәлелде.

5. $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$Вандермонд анықтауышын есепте:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$ мұнда $x_1, x_2, \dots, x_n$ – айнымалылар.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ және $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ матрицаларының рангысын тап және матрицалардың базистік минорларын көрсет.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ теңдеуіненX матрицасын тап.

8. Үшінші дәрежелі $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ көпмүшелігінің коэффициенттерін $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$ және $f(3) = 16$ мәндері бойынша тап.

9. λ параметрінің қандай мәнінде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді.

10. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$ анықтауышын есепте, мұнда $\alpha, \beta, x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің түбірлері.

11. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ анықтауышын есепте, мұнда $\alpha, \beta, \gamma x^3 + px + q = 0$ теңдеуінің түбірлері.

12. $A(x) = \begin{pmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{pmatrix}$ матрицасы берілген.

$A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha + \beta)$; $A^{-1}(x) = A(-x)$; $A^{-1}(x) = A^T(x)$

теңдіктерінің дұрыстығын дәлелде.

13. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

матрицаларының рангысын тап.

14. Егер A және B матрицалары қайтымды болса, онда AB матрицасы да қайтымды және $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

15. Егер A матрицасы қайтымды және t нөлден өзгеше сан болса, онда tA матрицасы да қайтымды және $(tA)^{-1} = \frac{1}{t}A^{-1}$.

16. n-ші ретті A, B квадрат матрицалары және кез келген γ саны үшін келесі теңдіктердің дұрыстығын тексер:

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B); \qquad tr(\gamma A) = \gamma tr(A);$$
$$tr(A^T) = tr(A); \qquad tr(AB) = tr(BA),$$

мұнда $A = (a_{ij})$ матрицасы үшін $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (квадрат матрицасының ізі).

17. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$ анықтауышын квадратқа шығарып есепте.

18. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матрицасы $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ теңдеуін қанағаттандыратынын дәлелде.

19. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ матрицалық теңдеуін шеш.

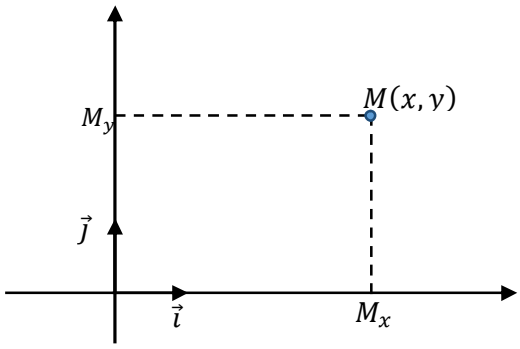
20. $\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}^n$ матрицасын есепте.

2. АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Аналитикалық геометрия – алгебра құралдарымен геометриялық фигураларды және олардың қасиеттерін зерттейтін геометрияның негізгі бөлімі. Аналитикалық геометрияның оқу бағдарламасына қатысты қарастырылатын алғашқы ұғымдарының қатарына нүктенің, түзудің, жазықтықтың, екінші ретті қисықтардың және беттердің геометриялық бейнелері жатады. Аналитикалық геометрия зерттеулерінде қолданылатын негізгі құралдар – координаталар және элементар алгебра тәсілдері.

Координаталар тәсілінің мағынасын ашайық. Ол үшін жазықтықта (немесе кеңістікте) декарттық деп аталатын қандай да бір тік бұрышты координаталар жүйесін бекітейік.

Анықтама. Жазықтықта бірдей масштаб тағайындалған, бағыттары өзара перпендикуляр қос реттелген түзулер – жазықтықтағы координаталар жүйесін анықтайды (2.1-сурет).



2.1-сурет

Жазықтықтағы кез келген M ағымдық нүктенің орны M нүктесінің Ox және Oy осьтеріне түсірілген M_x және M_y проекциялары арқылы бірмәнді анықталады. Сонымен OM_x, OM_y кесінділері ағымдық нүктенің сәйкес абсциссасын, ординатасын білдіреді. Белгілеуі: $M(x,y)$. Кеңістікте қарастырылатын нүктенің орны аппликата деп аталатын үшінші координатасымен толықтырылады, яғни - $M(x,y,z)$.

Геометриялық фигураны нүктелердің жиыны ретінде қарастыратын болсақ, онда бекітілген декарттық координаталар жүйесіне қатысты фигураның әрбір нүктесінің координаталарын табуға болады.

Сонда коррдинаталар тәсілінің негізгі мақсаты – осы нүктелердің координаталарын бір-бірімен өзара байланыстыратын алгебралық теңдеу алу, содан кейін алгебралық теңдеудің көмегімен геометриялық фигураның қасиеттерін зерттеу. Координаталар тәсілімен жазықтықтағы екі нүктенің арақашықтығы

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2.1)$$

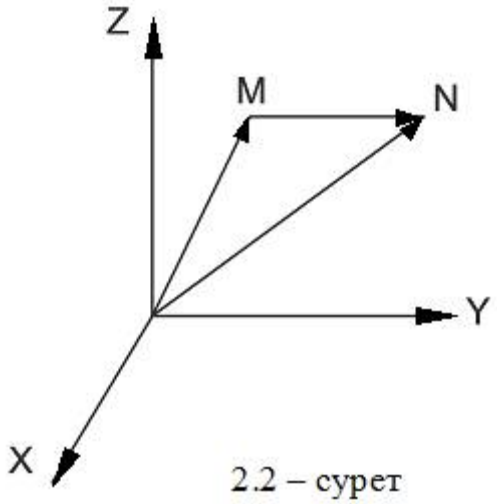
формуласымен табылады.

Кеңістіктегі векторлар

Анықтама. Реттелген (M, N) қос нүктені немесе бағытталған кесіндіні вектор деп атайды. M нүктесі вектордың бастапқы, ал N– соңғы нүктесі. Белгілеуі: $\boldsymbol{MN}$.

Бастапқы нүктесі соңғы нүктесімен беттесетін $\boldsymbol{AA}$ векторы – нөлдік вектор. Белгілеуі: $\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{0}$. Кейде бағытталған кесіндіні бір әріппен белгілейді, мысалы – $\boldsymbol{a}$. $|\boldsymbol{MN}|$ және $|\boldsymbol{a}|$ сәйкес $\boldsymbol{MN}$ және $\boldsymbol{a}$ векторларының ұзындығын білдіреді.

Декарттық, яғни тік бұрышты координаталар жүйесінде $M(x_M, y_M, z_M)$ және $N(x_N, y_N, z_N)$ нүктелерін қарастырайық (2.2-сурет). x_M–M нүктесінің абсциссасы, y_M–M нүктесінің ординатасы ал z_M–M нүктесінің аппликатасы деп оқылады.



2.2 – сурет

Енді осы екі нүктені түзумен қосып MN кесіндісін алайық. M бастапқы, N соңғы нүктесі болсын. MN кесіндісінің бойымен M нүктесінен басталып, соңғы N нүктесімен тұйықталатын сәуле жүргізейік. Жоғарыдағы анықтамаға сәйкес бұл сәулені вектор деп атаймыз.

Векторды екі параметрлі (ұзындығы және бағыты) объект ретінде қарастырамыз. Сонымен ***вектор*** – бағытталған кесінді. Осы мағынада анықталған бүкіл векторлар жиыны векторлық кеңістік құрайды. Векторлық кеңістікте векторды векторға қосу және векторды нақты санға көбейту амалдарын енгізіп, қандай да бір математикалық құрылым алайық. Егер бұл құрылымның элементтері үшін сызықтық кеңістіктің барлық аксиомалары орынды болса, онда жоғарыда айтылған векторлық кеңістік ***сызықтық векторлық кеңістік*** деп аталады.

Ескерту. Жалпы жағдайда сызықтық кеңістіктің элементтерін векторлар деп атау келісілген.

Элементтерінің табиғаттары әртүрлі және элементтерін векторлар деп атайтын L жиыны берілсін дейік. Сонымен қатар L жиынында элементтерді қосу және элементті нақты санға көбейтуге қатысты бинарлық амалдар анықталсын, яғни кез келген $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ және $\alpha \in \mathbb{R}$ үшін $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L$ және $\alpha\boldsymbol{x} \in L$. Сонда:

1) кез келген$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ үшін $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$(коммутативтік қасиеті);

2) кез келген $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ үшін $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (ассоциативтік қасиеті);

3) кез келген $\boldsymbol{x} \in L$ үшін $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ векторлық теңдігі орындалатындай $\boldsymbol{0}$ нөлдік элементі табылады;

4) әрбір $\boldsymbol{x} \in L$ үшін $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ теңдігі орындалатындай қарама-қарсы $-\boldsymbol{x} \in L$ элементі табылады;

5) кез келген $\boldsymbol{x} \in L$ элементі үшін $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ теңдігі орындалатындай бір саны табылады;

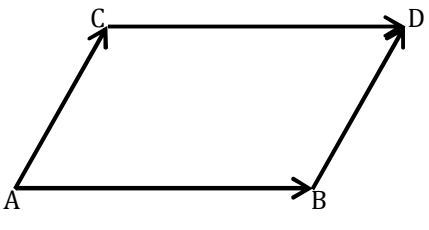
6) кез келген $\boldsymbol{x} \in L$ элементі және кез келген α, β нақты сандары үшін $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$;

7) кез келген $\boldsymbol{x} \in L$ элементі және кез келген α, β нақты сандары үшін$(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$;

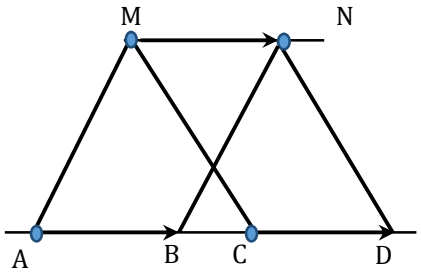
8) кез келген $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ элементі және α нақты саны үшін

$\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ заңдылықтары орындалатын болса, онда L жиыны сызықтық кеңістік құрайды.

Анықтама. Егер $ABDC$ фигурасы параллелограмм болса, онда бір түзудің бойында жатпайтын $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{CD}$ векторлары өзара тең (2.3-сурет). Егер $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{CD}$ векторлары бір l түзуінің бойында жатса, онда олардың өзара векторлық теңдігі l түзуінің бойында жатпайтын үшінші бір $\boldsymbol{MN}$ векторы арқылы анықталады (2.4-сурет).



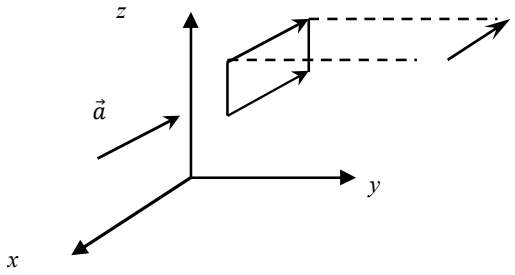
2.3-сурет



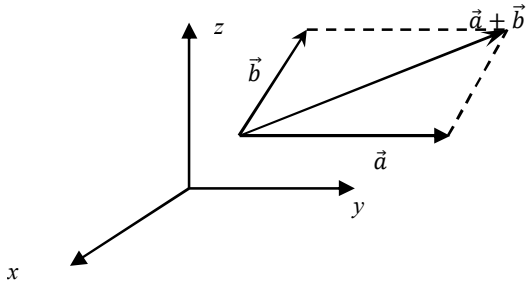
2.4-сурет

Анықтама. Тең векторлар жиынынан алынған кез келген элемент ***еркін вектор*** деп аталады. Еркін векторды өзіне-өзін параллель жылжыта отырып кеңістіктің кез келген нүктесіне

көшіруге болады, мысалы – ілгерілемелі қозғалыстың жылдамдығы (2.5-сурет).



2.5-сурет



2.6-сурет

Кейде векторларды, әсіресе механикада еркін, жылжымалыжәне байланған (связанные) векторлар тобына бөледі.

Жылжымалы векторды сол вектордың тек бағыты бойынша ғана жылжытуға болады (мысалы қатты денеге түсірілген күш).

Кеңістіктегі белгілі бір нүктеге қатысты қарастырылатын векторды ***байланған вектор*** деп атайды (мысалы, кеңістіктегі материалдық нүкте қозғалысының жылдамдығы мен үдеуі).

Кеңістікте векторды бекітілген декарттық координаталар жүйесіне қатысты бірмәнді анықтайтын тәуелсіз параметрлер санын сол вектордың еркіндік дәрежесі (еркіндік дәрежесінің саны) деп атайды.

Осы анықтама тұрғысында еркін вектор декарттық координаталар жүйесіне түсірілген үш проекциясы арқылы, демек үш параметр бойынша толықтай анықталады. Жылжымалы вектор кеңістікте бес параметр бойынша толықтай анықталады. Байланған вектор бастапқы және соңғы нүктелерінің декарттық координаталар жүйесіне түсірілген алты проекциясы арқылы толықтай анықталады.

Еркін векторлар класы үшін коллинеарлық және компланарлық ұғымдарын анықтайық.

Анықтама. Бір түзудің немесе параллель түзулердің бойында жататын векторлар коллинеар векторлар деп аталады.

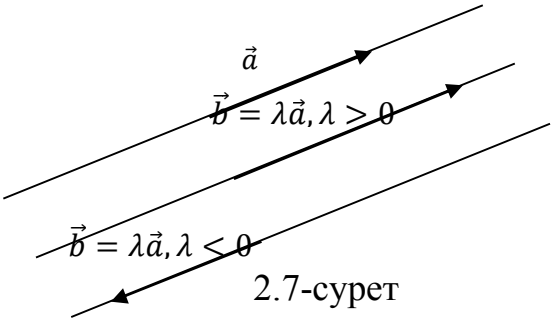
Анықтама. Бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жататын векторлар компланар векторлар деп аталады.

1. Векторлық қосу. Векторды векторға векторлық қосу үшбұрыш немесе параллелограмм ережесі бойынша анықталады. Қысқаша айтқанда, бірінші вектордың бастапқы нүктесін екінші вектордың

соңғы нүктесімен қосатын вектор осы векторлардың векторлық қосындысы деп аталады (2.6-сурет).

2. Векторды нақты санға көбейту келесі (2.7-сурет) ережелермен анықталады:

- $\boldsymbol{b}$ және $\boldsymbol{a}$ векторлары өзара коллинеар;
- $|\boldsymbol{b}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$;
- егер $\lambda > 0$ болса, $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторлары бағыттас, егер $\lambda < 0$ болса бұлар бір-біріне қарама-қарсы.



2.7-сурет

Сонымен, еркін векторлар жиынында векторлық қосу және векторды нақты санға көбейту бинарлық амалдары анықталады. Және сызықтық кеңістіктің бүкіл аксиомалары еркін векторлар жиыны үшін орындалады.

Анықтама. Бүкіл еркін векторлар жиыны сызықтық кеңістік құрайды.

Базис және координаталар

Анықтама. $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n}$ векторлық өрнегін коэффициенттері $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ болып келетін $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ векторларының сызықтық комбинациясы деп атайды. Егер бүкіл λ_i нөлге тең болса, онда сызықтық комбинация ***мардымсыз*** (тривиальный) деп аталады.

Анықтама. Егер $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$векторларының $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n}$сызықтық комбинациясы барлығы бірдей нөлге тең емес $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ коэффициенттері үшін нөлдік векторға тең болса, онда $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ векторлары өзара сызықтық тәуелді векторлар жүйесін құрайды. Басқаша айтқанда $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + +\lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$ векторлық теңдеуінің нөлден өзгеше шешімі болса, онда $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ векторлары ***сызықтық тәуелді векторлар жүйесін*** құрайды.

Анықтама. Егер $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$ векторлық теңдеуінің тек нөлдік, яғни $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ мардымсыз шешімі болса, онда $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ векторлары ***сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін*** құрайды.

Лемма. $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ векторларының ішінде қандай да бір вектор қалған векторлардың сызықтық комбинациясы болғанда және тек сонда ғана векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болады.

Дәлелдеуі. *Қажеттілік*. Айталық $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ векторлары сызықтық тәуелді векторлар жүйесін құрсын дейік: $\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \lambda_n \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$.

Ескерту. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ коэффициенттерінің ішінде ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болса, онда сызықтық комбинация тәуелді деп аталады. Айталық λ_i нөлден өзгеше болсын, сонда

$$\boldsymbol{a_i} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{a_1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{a_{i-1}} + \left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{a_{i+1}} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{a_n}.$$

Демек $\boldsymbol{a_i}$ векторы жүйенің қалған векторлары арқылы сызықтық түрде жіктеліп тұр.

Жеткіліктілік шарты бойынша $\boldsymbol{a_i}$ векторы жүйенің қалған векторлары арқылы сызықтық түрде берілсін, яғни $\boldsymbol{a_i} = \beta_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + \beta_{i-1}\boldsymbol{a_{i-1}} + \beta_{i+1}\boldsymbol{a_{i+1}} + + \dots + \beta_n \boldsymbol{a_n}$. Сонда

$(-1)\boldsymbol{a_i} + \beta_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + \beta_{i-1}\boldsymbol{a_{i-1}} + \dots + \beta_{i+1}\boldsymbol{a_{i+1}} + \dots + \beta_n \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$, демек $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ векторларының сызықтық комбинациясы мардымсыз емес (өйткені бірінші коэффициент нөлден өзгеше). Бұдан $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ векторларының сызықтық тәуелділігі шығады.

Лемма. $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_k}$ сызықтық тәуелді векторлар жүйесі дейік. Сонда $\boldsymbol{a_{k+1}, \dots, a_n}$ қандай векторлар болса да $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n}$ векторларысызықтық тәуелді векторлар жүйесі болады.

Дәлелдеу. Егер $\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \lambda_k \boldsymbol{a_k}$ мардымсыз емес комбинация болса, онда $\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \dots + \lambda_k \boldsymbol{a_k} + 0 \cdot \boldsymbol{a_{k+1}} + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$ комбинациясы да мардымсыз емес.

Лемма. 1) екі вектор өзара коллинеар болғанда және тек сонда ғана сызықтық тәуелді;

2) үш вектор өзара компланар болғанда және тек сонда ғана сызықтық тәуелді;

3) төрт вектор әрқашан да сызықтық тәуелді (дәлелдеуін өзіндік жұмысқа ұсынамыз).

Анықтама. ***Түзудің базисі*** деп осы түзуге тиісті кез келген нөлдік емес векторды айтамыз. ***Жазықтықтың базисі*** деп осы жазықтыққа тиісті кез келген қос реттелген сызықтық тәуелсіз векторларды айтамыз.

Анықтама. Базисті құрайтын векторлар өзара перпендикуляр болса, онда оны ***ортогональды базис*** деп атайды.

Анықтама. Ортогональды базисті құрайтын векторлардың ұзындықтары бірге тең болса, онда оны ***ортонормаланған базис*** деп атайды.

Кез келген $\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{q_3}$ сызықтық тәуелсіз векторларынан құралған кеңістік базисін $\{\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{q_3}\}$арқылы белгілейміз. Көбіне қолданыста кеңістік базисін $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ немесе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ рқылы белгілейді.

Теорема. $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ базисі берілсін дейік. Сонда кеңістіктің кез келген $\boldsymbol{x}$ векторын $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e_1} + \xi_2\boldsymbol{e_2} + \xi_3\boldsymbol{e_3}$ түрінде көрсетуге болады және мұндай жіктелу жалғыз (тек біреу).

Дәлелдеу. $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ үш өлшемді кеңістіктің базисі болғандықтан сызықтық кеңістіктің анықтамасынан $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігі шығады, яғни:

$$\lambda_0\boldsymbol{x} + \lambda_1\boldsymbol{e_1} + \lambda_2\boldsymbol{e_2} + \lambda_3\boldsymbol{e_3} = 0,$$

мұнда $\lambda_0 \neq 0$ нөлден өзгеше, өйткені кері жағдайда $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ векторлары сызықтық тәуелді болар еді. Соңғы векторлық теңдіктен

$$\boldsymbol{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\boldsymbol{e_1} + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)\boldsymbol{e_2} + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right)\boldsymbol{e_3} = \xi_1\boldsymbol{e_1} + \xi_2\boldsymbol{e_2} + \xi_3\boldsymbol{e_3}$$

жіктелуін аламыз. Мұндағы $\xi_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, $\xi_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$, $\xi_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ сандары $\boldsymbol{x}$ векторының $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ базисіндегі сәйкес координаталары деп аталады.

Енді $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e_1} + \xi_2\boldsymbol{e_2} + \xi_3\boldsymbol{e_3}$ жіктелуінің жалғыз екенін көрсетейік. Ол үшін $\boldsymbol{x}$ векторының осы базисте координаталары η_1, η_2, η_3 болатын екінші бір жіктелуі бар деп ұйғарайық, яғни

$$\boldsymbol{x} = \eta_1\boldsymbol{e_1} + \eta_2\boldsymbol{e_2} + \eta_3\boldsymbol{e_3}.$$

Бұл векторлық теңдіктен $\boldsymbol{x}$ векторының $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e_1} + \xi_2\boldsymbol{e_2} + \xi_3\boldsymbol{e_3}$ түріндегі жіктелуін мүшелеп бір-бірінен шегеретін болсақ, онда

$$(\eta_1 - \xi_1)\boldsymbol{e_1} + (\eta_2 - \xi_2)\boldsymbol{e_2} + (\eta_3 - \xi_3)\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{0}$$

векторлық теңдігін аламыз. Теорема шарты бойынша $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ базис құрайды, демек базистің анықтамасы бойынша $\eta_1 - \xi_1 = 0$, $\eta_2 - \xi_2 = 0$ және $\eta_3 - \xi_3 = 0$. Бұдан $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_2 = \xi_2$ және $\eta_3 = \xi_3$. Теорема дәлелденді.

Координаталары арқылы берілген векторларға амалдар қолдану

$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2} + \alpha_3\boldsymbol{e_3}$ және $\boldsymbol{y} = \beta_1\boldsymbol{e_1} + \beta_2\boldsymbol{e_2} + \beta_3\boldsymbol{e_3}$ векторлары берілсін дейік.

1. $\boldsymbol{x}$ және $\boldsymbol{y}$ векторларының сәйкес координаталары тең болғанда және тек сонда ғана бұл векторлар өзара тең:

$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ және $\alpha_3 = \beta_3$. $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

2. $\boldsymbol{x}$ және $\boldsymbol{y}$ векторларының векторлық қосындысының координаталары олардың сәйкес координаталарының қосындысына тең:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\,\boldsymbol{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\boldsymbol{e_3}.$$

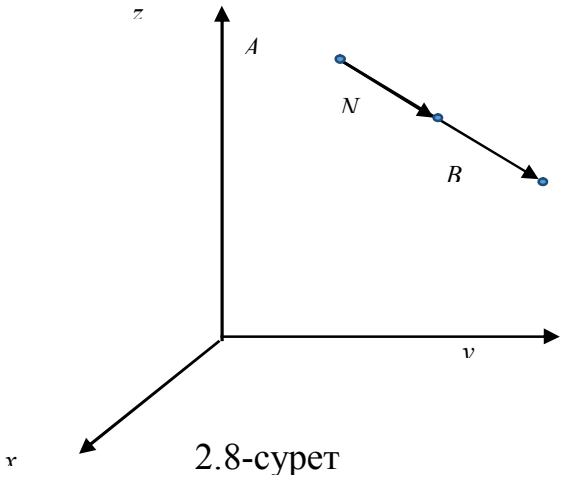
3. $\boldsymbol{x}$ векторын λ нақты санына көбейту сәйкес координаталары λ санына көбейтілетін $\lambda\boldsymbol{x}$ векторын береді:

$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda\alpha_1)\boldsymbol{e_1} + (\lambda\alpha_2)\,\boldsymbol{e_2} + (\lambda\alpha_3)\boldsymbol{e_3}.$$

Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу

Қандай да бір декарттық координаталар жүйесіне қатысты $A(x_A, y_A, z_A)$ және $B(x_B, y_B, z_B)$ нүктелері берілсін дейік.

Егер $|AB|$ кесіндісінің бойында жататын N нүктесі $|AB|$ кесіндісін $|AN| = \lambda|NB|$ теңдігі орындалатындай кесінділерге бөлсе, онда N нүктесінің координаталарын қалай табамыз. Ол үшін коллинеар және бағыттас $\boldsymbol{AN}$, $\boldsymbol{NB}$ векторларын қарастырайық (2.8-сурет). Мұнда $\boldsymbol{AN} = \{x_N - x_A, y_N - y_A, z_N - z_A\}$, а $\boldsymbol{NB} = \{x_B - x_N, y_B - y_N, z_B - z_N\}$. Бұл векторлардың коллинеарлық шартынан олардың сәйкес координаталарының пропорционалдығы шығады:



2.8-сурет

$$x_N - x_A = \lambda(x_B - x_N);$$
$$y_N - y_A = \lambda(y_B - y_N);$$
$$z_N - z_A = \lambda(z_B - z_N).$$

Бұл арақатынастардан $x_N = \frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$,

$$y_N = \frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}, \qquad (2.1)$$

$$z_N = \frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}$$

түріндегі кесіндіні берілген қатынасқа бөлу формулалары шығады.

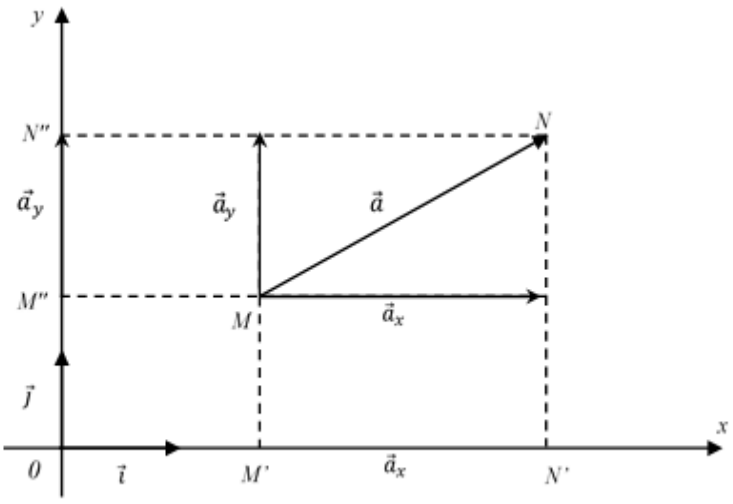
Дербес жағдайда $|AN| = |NB|$ болсын, сонда $\lambda = 1$ және N нүктесінің координаталары

$$x_N = \frac{x_A+x_B}{2}, \quad y_N = \frac{y_A+y_B}{2}, \quad z_N = \frac{z_A+z_B}{2}$$

формулаларымен анықталады.

Вектордың оське түскен проекциясы

Анықтама. Түзу өзінің бойында жатқан базистік векторы арқылы осьтің берілуін анықтайды.



2.9-сурет

Нүктенің оське түсірілген ***ортогональды проекциясы*** деп нүкте арқылы оське перпендикуляр жүргізілген жазықтық пен осьтің қиылысуынан пайда болған нүктені айтамыз.

Векторлардың оське түсірілген проекциясының геометриялық кескіндерін бейнелеу түсінікті болу үшін екі өлшемді векторлық кеңістікті, яғни жазықтықты қарастырайық.

$\boldsymbol{MN}$ векторының x осіне түсірілген проекциясын табу үшін M және N нүктелері арқылы y осіне параллель түзулер жүргізіп, бұл нүктелердің x осіндегі M'және N' ортогональды проекцияларын табамыз. Сонда $\boldsymbol{M'N' = a_x}$ векторы $\boldsymbol{a}$ векторының x осіне түсірілген векторлық проекциясы деп аталады. Ал оның $|\boldsymbol{a_x}| = a_x$ ұзындығы $\boldsymbol{a}$

векторының x осіне түсірілген скалярлық проекциясы деп аталады. Осындай жолмен $\boldsymbol{a}$ векторының y осіне түсірілген векторлық проекциясын $\boldsymbol{a_y}$, ал оның скалярлық проекциясын $|\boldsymbol{a_y}| = a_y$ арқылы белгілейміз. Векторлардың теңдік және векторларды векторлық қосу ережесіне сай $\boldsymbol{a}$ векторы келесі түрде өрнектеледі: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_x} + \boldsymbol{a_y}$ (кеңістікте $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_x} + \boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z}$). Мұнда $\boldsymbol{a_x}$ векторы x осінің бойында жатыр, олай болса $\frac{1}{|\boldsymbol{a_x}|}\boldsymbol{a_x}$ векторы x осінің бірлік векторын анықтайды. Белгілеуі $\frac{1}{|\boldsymbol{a_x}|}\boldsymbol{a_x} = \boldsymbol{i}$. Осыған ұқсас y осінің бірлік векторын $\frac{1}{|\boldsymbol{a_y}|}\boldsymbol{a_y} = \boldsymbol{j}$, ал z осінің бірлік векторын $\frac{1}{|\boldsymbol{a_z}|}\boldsymbol{a_z} = \boldsymbol{k}$ арқылы анықтаймыз. Сонда вектор оське түсірілген проекциялары арқылы келесі түрде анықталады:

1) жазықтықта $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = \{a_x, a_y\}$;

2) кеңістікте $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Ескерту. Вектордың оське түсірілген проекциясы ұғымы мен вектордың сол осьтің базистік векторына түсірілген проекциясы ұғымы бір-біріне пара-пар (эквивалентті).

Векторлардың ортогональдық проекциясының қасиеттері

1. Екі вектордың векторлық қосындысының проекциясы осы векторлардың проекцияларының қосындысына тең:

$$\text{Пр}_l(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{Пр}_l\boldsymbol{a} + \text{Пр}_l\boldsymbol{b}.$$

2. Егер векторды нақты санға көбейтсек, онда оның проекциясы да сол санға көбейтіледі:

$\text{Пр}_l(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{Пр}_l\boldsymbol{a}$.

Жоғарыдағы екі қасиетті біріктіріп, келесі тұжырымға келеміз:

3. Векторлардың сызықтық комбинациясының проекциясы сәйкес проекциялардың сызықтық комбинациясына тең:

$$\text{Пр}_l(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) = \lambda\text{Пр}_l\boldsymbol{a} + \mu\text{Пр}_l\boldsymbol{a}.$$

Векторлардың скаляр көбейтіндісі. Скаляр көбейтіндінің аксиомалары

Бағытталған кесіндіні вектор деп атадық. Нөлдік вектордың бағыты анықталмаса да оның шамасын (ұзындығын) нөл санымен

өрнектедік. Математикалық нысандарда көбіне еркін векторларды қарастырады, сондықтан бұрыш ұғымына көңіл аударуға тура келеді.

Екі вектордың арасындағы бұрышты өлшеудің алгебралық құралы ретінде сол векторлардың скаляр көбейтіндісі атты ұғымды анықтайық.

Анықтама. Нөлден өзгеше $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының ***скалярлық көбейтіндісі***деп осы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусын олардың ұзындықтарына көбейткенде шығатын санды айтады. Белгілеуі: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ немесе $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ түрінде. Сонымен $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|cos\varphi$, мұнда $0 \le \varphi \le \pi$.

Егер көбейткіштердің біреуі нөлдік вектор болса, онда бұл векторлардың скаляр көбейтіндісі нөл санына тең.

Кері тұжырым: нөлдік вектор кез келген нөлдік емес векторға ортогональ болады.

Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері

1) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ және $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ векторлары үшін $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ теңдігі $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторлары өзара ортогональды болғанда, тек сонда ғана орындалады;

2) скалярлық көбейтіндінің анықтамасынан және косинустың қасиетінен $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ ауыстырымдылық заңдылығы шығады;

3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$ үлестірімділік заңдылығы;

4) $(\boldsymbol{\lambda a},\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ тұрақты көбейткішті скалярлық көбейтіндінің таңбасының алдына шығаруға болады;

5) Кез келген нөлдік емес вектор үшін, яғни

$\forall \boldsymbol{a}$: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2 > 0$ немесе $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$.

Ескерту. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0$ шарты мен $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ теңдігі бір мағына береді.

6) $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының арасындағы φ бұрышы $cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ теңдігімен анықталады, мұнда $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ және $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.

Скалярлық көбейтіндінің нәтижесі вектор емес, қандай да бір нақты сан. Сондықтан бүкіл векторлар жиынында скалярлық көбейтінді алгебралық амал болып саналмайды. Әйткенмен де оны векторларға қолданылатын амал ретінде қарастырамыз.

Скалярлық көбейтіндіні координаталар арқылы өрнектеу

$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ және $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ векторлары декарттық координаталары арқылы берілсін дейік. Сонда осы векторлардың скалярлық көбейтіндісі $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының сәйкес координаталарының көбейтінділерінің қосындысына тең. Шынында да

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) =$$
$$= a_1b_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + a_1b_2(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) + a_1b_3(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) +$$
$$+a_2b_1(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}) + a_2b_2(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) + a_2b_3(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) +$$
$$+a_3b_1(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) + a_3b_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) + a_3b_3(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

өйткені

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}) = 0; \quad (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) = 0;$$
$$(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) = 0; \quad (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 1;$$
$$(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) = 1; \quad (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = 1.$$

Скалярлық көбейтіндінің көмегімен:

1) вектордың ұзындығын (модулін)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

2) $A(x_1, y_1, z_1)$ және $B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелерінің арақашықтығын

$$d = |\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

3) бір вектордың екінші вектордың бағытына түсірілген проекциясын

$$|\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}| = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|}, \qquad |\text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}| = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|};$$

4) векторлардың арасындағы бұрыштың косинусын

$$cos\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};$$

5) бағыттауыш косинустарын

$$cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \; cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \; cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

6) орт вектордың (бірлік вектордың) координаталарын

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}$$

табуға болады.

Скалярлық көбейтіндінің қасиеттеріне сүйене отырып кез келген $\boldsymbol{a}$ векторын

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$$

түрінде көрсетуге болады.

Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері

Кеңістікте бір нүктеде түйісетін компланар емес $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ реттелген үштік векторлары берілсін дейік.

Анықтама. Егер $\boldsymbol{a}$ векторын $\boldsymbol{b}$ векторына төте бұру (ең қысқа бұру) $\boldsymbol{c}$векторының соңғы нүктесінен қарағанда сағат тіліне қарсы орындалса, онда реттелген үштік ***оң жүйе*** құрайды. Кері жағдайда компланар емес реттелген үштік ***сол жүйе*** құрайды.

Анықтама. Коллинеар емес $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп келесі шарттар орындалатын $\boldsymbol{c}$векторын айтамыз:

1) $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$;

2) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|sin\varphi$, мұндағы $\varphi - \boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының арасындағы бұрыш;

3) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ векторлары оң жүйе құрайды.

Белгілеуі: $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ немесе $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Ескерту. Реттелген $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ үштігі қандай да бір бекітілген координаталар жүйесіне қатысты қарастырылады. Сонда координаталар жүйесі оң болса, онда $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ үштігі оң, ал керісінше теріс болса, онда $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ үштігі теріс байлам жасайды. Алда тек оң координаталар жүйесін пайдаланамыз.

Егер векторлық көбейткіштердің ең болмағанда біреуі нөлдік вектор немесе олар өзара коллинеар болса, онда векторлық көбейтіндіні нөлдік векторға тең деп санайды.

Векторлық көбейтіндінің кейбір қасиеттерін атап өтейік:

1) векторлық көбейтіндінің модулі сол векторларға тұрғызылған параллелограмның ауданына тең;

2) векторлық көбейтінді ауыстырымдылық заңдылығына бағынбайды, яғни $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \neq [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$, керісінше $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$. Соңғы векторлық теңдік векторлық көбейтудің анықтамасынан және $sin\varphi$ функциясының тақтығынан шығады;

3) скалярлық көбейткішті векторлық көбейтіндінің таңбасының алдына шығаруға болады, яғни $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$;

4) $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ үлестірімділік заңдылығы орындалады.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісін көбейткіштердің декарттық координаталары арқылы өрнектейік.

Реттелген оң $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ үштігін декарттық бірлік базис деп ұйғарайық. Сонда кеңістіктің барлық нүктелерінде базистік векторлардың шамалары мен бағыттары бірдей. Демек

$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] = -\boldsymbol{i}$ және $[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] = -\boldsymbol{k}$ векторлық және $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$ скалярлық теңдіктері орындалады.

$\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының келесі базистік бірлік арқылы жіктелуі берілсін дейік:

$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ және $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттеріне сүйене отырып бұл векторлардың векторлық көбейтіндісін ашып жазайық:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}] =$$
$$= x_1x_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] + x_1y_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] + x_1z_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] +$$
$$+y_1x_2[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] + y_1y_2[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}] + y_1z_2[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] +$$
$$+z_1x_2[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] + z_1y_2[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] + z_1z_2[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}] =$$
$$= x_1y_2\boldsymbol{k} - x_1z_2\boldsymbol{j} - y_1x_2\boldsymbol{k} + y_1z_2\boldsymbol{i} + z_1x_2\boldsymbol{j} - z_1y_2\boldsymbol{i} =$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\boldsymbol{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Сонымен
$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.2)$$

Векторлық көбейтіндінің көмегімен

1) кеңістікте төбелері $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ декарттық координаталары арқылы берілген үшбұрыштың ауданын

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}\right|; \qquad (2.3)$$

2) жазықтықтағы үшбұрыштың ауданын

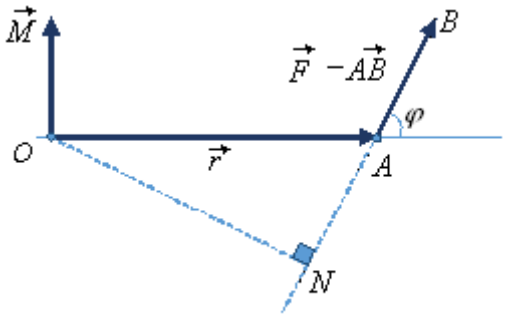
$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}\right|; \qquad (2.4)$$

3) нүктеге қатысты күш моментін

$$mom_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r},$$

$$|mom_O(\boldsymbol{F})| = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{r}| sin\varphi = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{OA}| sin\left(\widehat{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{OA}}\right); \qquad (2.5)$$

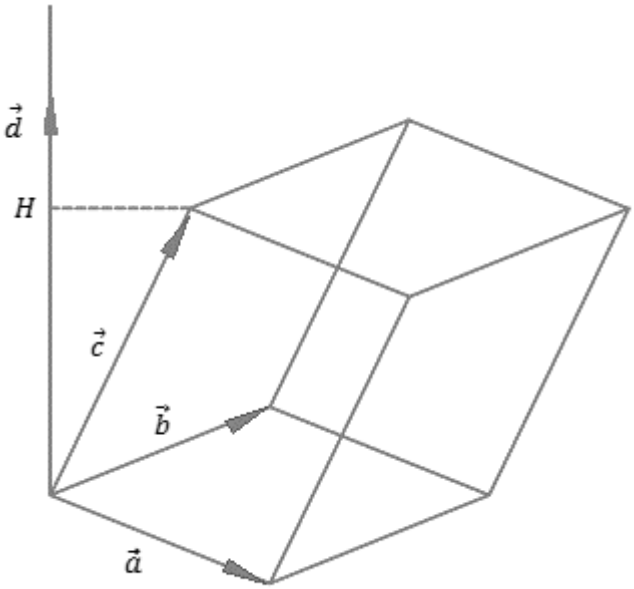
табуға болады (2.10-сурет).



2.10-сурет

Үш вектордың аралас көбейтіндісі

Үш өлшемді кеңістікте компланар емес $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ және $\boldsymbol{c}$ векторлары берілсін дейік. Осы векторлардың кез келген екеуінің векторлық көбейтіндісін үшіншісіне скаляр көбейтетін болсақ, үш вектордың аралас көбейтіндісі деп аталатын қандай да бір нақты сан аламыз.



2.11-сурет

Алғашқы екі вектордың векторлық көбейтіндісін үшінші векторға скаляр көбейтейік. Нәтижесінде шыққан санды $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c})$ немесе $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ өрнектерімен белгілейік. Аралас көбейтіндінің геометриялық мағынасын түсіну үшін кеңістіктің бір нүктесінде түйісетін $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ векторларын параллелепипедке дейін толықтырайық (2.11-сурет).

Параллелепипедтің биіктігін H, ал $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін $\boldsymbol{d}$ векторы арқылы белгілейік, яғни $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{d}$. Сонда скалярлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| \cdot |\boldsymbol{c}| cos\left(\widehat{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}}\right).$$

Егер $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ үштігі оң жүйе құрса, онда $|\boldsymbol{c}|cos(\widehat{\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}}) = H$, ал керісінше теріс жүйе құраса, онда $|\boldsymbol{c}|cos(\widehat{\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}}) = -H$.

Сонда коллинеар емес үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық мағынасы сол векторларға тұрғызылған параллелепипедтің көлеміне тең санды көрсетеді.

Егер $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$ болса, онда бұл теңдік үш вектордың компланар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын көрсетеді.

$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ базисінде $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ және $\boldsymbol{c} = x_3\boldsymbol{i} + +y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$ векторлары берілсін дейік. Үш вектордың аралас көбейтіндісін олардың декарттық координаталары арқылы өрнектейік.

Векторлық көбейтіндінің үшінші ретті анықтауыш арқылы өрнектелуінен

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\boldsymbol{k}$$

теңдігін аламыз. Содан кейін екі вектордың скаляр көбейтіндісінің координаталар арқылы жіктелуін еке түсірсек, үш вектордың аралас көбейтіндісі сол векторлардың координаталары арқылы келесі түрде өрнектеледі:

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (y_1z_2 - z_1y_2)x_3 - (x_1z_2 - z_1x_2)y_3 + (x_1y_2 - -y_1x_2)z_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

Сонымен үш вектордың аралас көбейтіндісі бірінші бағанда – бірінші, екіншіде – екінші, үшіншіде – үшінші векторлардың координаталары жазылған үшінші ретті анықтауыштың мәніне тең.

Аралас көбейтінділер үшін келесі тепе-теңдіктер дұрыс:

1$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$;

2. $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

3. $(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

Бұл тепе-теңдіктердің дұрыстығы аралас көбейтіндінің анықтамасынан, демек анықтауыштың қасиеттерінен шығады.

Векторлардың алгебралық қасиеттері. Векторлықкөбейтінді дескалярлық көбейтінді сияқты қос сызықты. Сондықтан $\mathbb{R}^3$

кеңістігінде бүкіл векторлар жиыны векторлық қосу және векторлық көбейту бинарлық амалдарына қатысты сақина құрайды.

Ассоциативтік заңдылық орындалмағанның өзінде оның кейбір алгебралық қасиеттері өте қызықты:

1. $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}$ (қарсы коммутативтілік);

2. $[\boldsymbol{a},[\,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]]+\big[\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\big]+\big[\boldsymbol{c},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\big]=\boldsymbol{0}$ (Якоби тепе-теңдігі).

Осы түрдегі қасиеттер орындалатын сақинаны Ли сақинасы деп атайды. Өзінің маңыздылығы жағынан Ли сақинасы тек коммутативтік және ассоциативтік сақиналарға ғана жол береді.

Векторлық көбейтіндінің қарсы коммутативтігі тікелей анықтауыштың қасиеттерінен шығады. Якоби тепе-теңдігін дәлелдеу үшін бізге қос векторлық көбейту деп аталатын үш вектордың векторлық көбейтіндісін қарастыруға тура келеді.

Қос векторлық көбейту

Анықтама. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ және $\boldsymbol{c}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $[\boldsymbol{a},[\,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]]$ векторын айтады.

Бірқатар практикалық есептерді шығару үшін келесі теорема пайдалы.

Теорема. Кез келген $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ векторлары үшін $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ теңдігі орынды.

Дәлелдеу. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ векторының $\boldsymbol{c}$векторына векторлық көбейтіндісі $\boldsymbol{d}$векторын берсін дейік, яғни $\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

Векторлық көбейтіндінің қасиеті бойынша $\boldsymbol{d}$ векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ векторына және $\boldsymbol{c}$ векторына да перпендикуляр. Олай болса $\boldsymbol{d}$ векторы $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторлары арқылы жүргізілген жазықтықтың бойында жатады. Демек $\boldsymbol{d}$ векторы коллинеар емес $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторлары арқылы төмендегі түрде бірмәнді жіктеледі:

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{\lambda a}+\mu\boldsymbol{b}, \qquad (2.7)$$

өйткені $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\}$ үштігікомпланар.

$\boldsymbol{d}$ және $\boldsymbol{c}$ векторларының перпендикулярлық шартынан олардың скаляр көбейтіндісінің нөлге теңдігі шығады:

$$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{c})=(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0.$$

Соңғы теңдіктен $\frac{\mu}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})} = -\frac{\lambda}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} = \nu$ қатынасын аламыз. Бұдан $\mu = \nu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$ және $\boldsymbol{\lambda} = -\nu(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ теңдіктері алынады. Сонда $\boldsymbol{d}$ векторының (2.7) жіктелуі

$$\boldsymbol{d} = \nu[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})] \tag{2.8}$$

түрінде жазылады. Енді скаляр ν шамасын анықтау ғана қалды.

Ол үшін O нүктесінде түйісетін $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторлары арқылы (α) жазықтығын жүргізейік. Осы жазықтықта Ox осін $\boldsymbol{a}$ векторының бойымен, ал Oy осін $\boldsymbol{a}$ векторына перпендикуляр бағыттайық. Oz осін $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесі оң үштік құратындай етіп (α) жазықтығына перпендикуляр жүргізейік.

Келесі қадамда $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ және $\boldsymbol{c}$ векторларын жоғарыда анықталған координаталар жүйесінің бірлік векторлары арқылы жіктейік:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}.$$

$$\text{Сонда } \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1b_2\boldsymbol{k} = \{0;0;\ a_1b_2\}.$$

$$\text{Демек } \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & a_1b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -a_1b_2c_2\boldsymbol{i} + a_1b_2c_1\boldsymbol{j}. \tag{2.9}$$

Екінші жағынан $\boldsymbol{d}$ векторын (2.8) формуласы бойынша ашып жазайық:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = a_1c_1; \qquad (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = b_1c_1 + b_2c_2;$$

$$\boldsymbol{d} = \nu[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})] = \nu[(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j})a_1c_1 - a_1\boldsymbol{i}(b_1c_1 + b_2c_2)] =$$
$$= \nu[-a_1b_2c_2\boldsymbol{i} + a_1b_2c_1\boldsymbol{j}]. \tag{2.10}$$

(2.9) және (2.10) теңдіктерін салыстыра отырып ν сандық параметрінің бірге тең екендігіне көз жеткіземіз. Сонымен қос векторлық көбейтіндінің формуласы

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \tag{2.11}$$

теңдігімен анықталады. (2.11) формуласынан шығатын салдарды көрсетейік:

1. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;
2. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;
3. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Жоғарыда қарастырылған Якоби тепе-теңдігі қос векторлық көбейтінді формуласы арқылы дәлелденетінін ескерте кетейік.

Есеп шығару үлгілері

1-мысал. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ векторлары үш өлшемді кеңістіктің базисін құрсын және қайсыбір $\boldsymbol{x}$ векторының осы базис бойынша $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ жіктелуі берілсін дейік.

1. $\boldsymbol{x}$ векторының $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ базисіндегі координаталарын табайық.
2. $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ векторларының базис құрайтынын дәлелдейік.

Шешуі. 1. $\boldsymbol{x}$ векторының $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ базисіндегі координаталары деп $\boldsymbol{x}$ векторының осы базис бойынша жіктелуіндегі коэффициенттерін айтады, яғни $\boldsymbol{x}=\{3;\ -4;\ 2\}$**.**

2. $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ векторларының $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ базисіндегі координаталарын табайық:

$\boldsymbol{p}=\{2;\ -1;\ 1\}$, $\boldsymbol{q}=\{1;\ 2;\ -1\}$, $\boldsymbol{r}=\{-1;\ 1;\ -2\}$. Бұл векторлардың координаталарынан келесі үшінші ретті анықтауышты құрайық:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың мәні $\Delta=-6\neq 0$ нөлден өзгеше, демек $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ векторлары сызықтық тәуелсіз, яғни үш өлшемді кеңістіктің базисін құрайды.

2-мысал. Декарттық координаталар жүйесінде $\boldsymbol{a}=\{1;\ 2;\ -2\}$ және $\boldsymbol{b}=\{2;\ -4;\ 4\}$ векторлары берілсін дейік. Осы векторлардың ұзындықтарын, арасындағы бұрыштың шамасын, $\boldsymbol{a}$ векторының $\boldsymbol{b}$ векторының бағытына түсірілген проекциясын және осы векторлардан тұрғызылған параллелограмның ауданын табайық.

Шешуі. 1. Векторлардың ұзындықтарын табайық:

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3;\quad |\boldsymbol{b}|=2\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=6.$$

2. $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табайық:

$$cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{1\cdot 2+2\cdot(-4)+(-2)\cdot 4}{3\cdot 6} = \frac{-7}{9},$$

яғни бұрыш доғал.

3. $\boldsymbol{a}$ векторының $\boldsymbol{b}$ векторының бағытына түсірілген скаляр проекциясын табайық:

$$|\text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}| = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{-14}{3}.$$

4. Параллелограмның ауданын табайық:

$$S = |[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]| = \left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}\right| = |0\cdot\boldsymbol{i} - 8\cdot\boldsymbol{j} - 8\cdot\boldsymbol{k}| =$$
$$= \sqrt{0^2+(-8)^2+(-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

3-мысал. Алдыңғы мысалда $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ бұрышын қақ бөлетін $\boldsymbol{c}$ векторын табайық.

Шешуі. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ және $\boldsymbol{c}$ векторлары есептің шарты бойынша бір жазықтықта жатыр, демек олар компланар. $\boldsymbol{c}$ векторын коллинеар емес $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторлары арқылы жіктейік: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\lambda a} + \mu\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{c}$ векторы (сәулесі) бұрышты қақ бөледі. Олай болса $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}) = (\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})$ бұрыштарының шамалары өзара тең, демек $|\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}| = |\text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}|$. Соңғы теңдікті вектордың оське проекциясының анықтамасына сүйене отырып ашып жазсақ, $\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{b}|}$ теңдігі шығады. Келесі қадамда бұл теңдіктердің алымдарын табу үшін $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\lambda a} + \mu\boldsymbol{b}$ векторлық теңдігін алдымен $\boldsymbol{a}$ векторына, содан кейін $\boldsymbol{b}$ векторына скаляр көбейтейік, сонда:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}),$$
$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}).$$

Демек $\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{b}|}$ теңдігінен λ, μ коэффициенттерін анықтау үшін

$$\lambda|\boldsymbol{a}| + \mu\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|} = \lambda\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} + \mu|\boldsymbol{b}|$$

теңдеуін аламыз. Алдыңғы мысалдың нәтижелерін пайдалана отырып λ және μ параметрлерінің арасындағы

$$3\lambda - \frac{14}{3}\mu = -\frac{7}{3}\lambda + 6\mu$$

теңдігін аламыз. Ықшамдап $16\lambda = 32\mu \Rightarrow \lambda = 2\mu$ теңдігіне көшеміз. Бұдан $\mu = 1$ десек, онда $\lambda = 2$. Сонымен

$$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \{4; 0; 0\} \Rightarrow \boldsymbol{c} = \{1; 0; 0\} = \boldsymbol{i}.$$

4-мысал. $\boldsymbol{a} = \{2; 3; -1\}$, $\boldsymbol{b} = \{1; -1; 3\}$, $\boldsymbol{c} = \{1; 9; -11\}$ векторлары үшін компланарлық шарттың қажетті және жеткілікті шарттары орындалады ма?

Шешуі. Бұл векторлар компланар болу үшін олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті. Демек $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептейміз. Анықтауыштың мәні нөлге тең, яғни бұл векторлар компланар.

5-мысал. Якоби тепе – теңдігінің дұрыстығын тексерейік.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Шешуі. (2.11) қос векторлық көбейтінді формуласының көмегімен ашып жазайық:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}.$$

6-мысал. Жазықтықта үшбұрыштың $A(1; 2)$, $B(5; 5)$ және $C(7; 10)$ төбелері берілген (2.12-сурет). ABC үшбұрышының барлық қабырғаларының ұзындықтарын, оның бұрыштарының косинустарын, B төбесінен AC қабырғасына түсірілген AD биіктігінің ұзындығын және ABC үшбұрышының ауданын табайық.

Шешуі. $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{AC}$ векторларын анықтайық:

$$\boldsymbol{AB} = \{4; 3\}, \ \boldsymbol{AC} = \{6; 8\}.$$

Сәйкес ұзындықтары: $|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $|\boldsymbol{AC}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

$$cos(\widehat{\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}}) = \frac{(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC})}{|\boldsymbol{AB}| \cdot |\boldsymbol{AB}|} = \frac{4 \cdot 6 + 3 \cdot 8}{5 \cdot 10} = \frac{24}{25}.$$

Әрі қарай $$|\boldsymbol{AD}| = |\text{Пр}_{\boldsymbol{AC}}\boldsymbol{AB}| = \frac{|(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC})|}{|\boldsymbol{AC}|} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}.$$

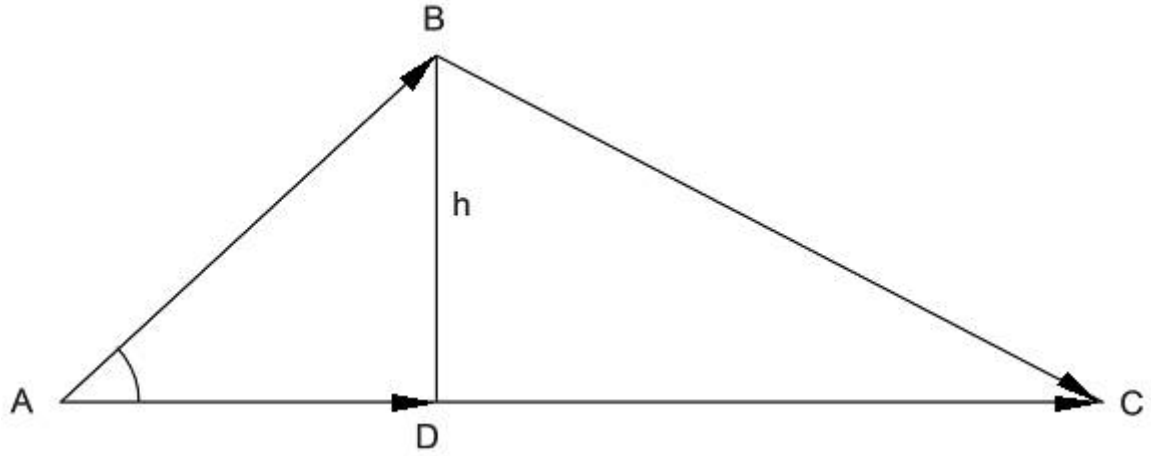
ABC үшбұрышының ауданы қабырғалары $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{AC}$ векторлары болатын параллелограмм ауданының жартысына тең:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}]|.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{k}| \cdot \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{|-6|}{2} = 3,$$

өйткені $|\boldsymbol{k}| = 1$. Екінші жағынан $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AC}| \cdot h$,

бұдан $h = \frac{2S_{ABC}}{|\boldsymbol{AC}|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.



2.12-сурет

7-мысал. Тетраэдрдің $A(1;-1;1)$, $B(3;1;2)$, $C(2;-3;3)$ және $D(1;2;5)$ төбелері берілген. Тетраэдрдің көлемін, S_{ABC} табан ауданын және D төбесінен табанына жүргізілген биіктіктің ұзындығын табайық.

Шешуі. 1. Тетраэдрдің қырларына сәйкес келетін $\boldsymbol{AB} = \{2;2;1\}$, $\boldsymbol{AC} = \{1;-2;2\}$, $\boldsymbol{BC} = \{-1;-4;1\}$ және $\boldsymbol{AD} = \{0;3;4\}$ векторларын табамыз.

2. Қырларының ұзындықтары:

$$|\boldsymbol{AB}| = 3,\ |\boldsymbol{AC}| = 3,\ |\boldsymbol{AD}| = 5,\ |\boldsymbol{BC}| = 3\sqrt{2}.$$

3. $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{AC}$ векторларының векторлық көбейтіндісі:

$$[\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k} = \{6;\ -3;\ -6\}.$$

4. S_{ABC}табайық: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}]| = \frac{9}{2}$.

5. $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AD}$ векторларының аралас көбейтіндісі:

$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}, \boldsymbol{AD}) = ([\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}], \boldsymbol{AD}) = 6 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 + (-6) \cdot 4 = -33.$

6. Тетраэдрдің көлемі:

$$V = -\frac{1}{6}(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}, \boldsymbol{AD}) = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}.$$

7. Тетраэдрдің биіктігі: $h = \frac{3V}{S} = \frac{11}{3}$.

8-мысал. C нүктесінде (2.13 - сурет) $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ қатынасындай болсын делік. Q – жазықтықтағы кез келген нүкте. Сонда

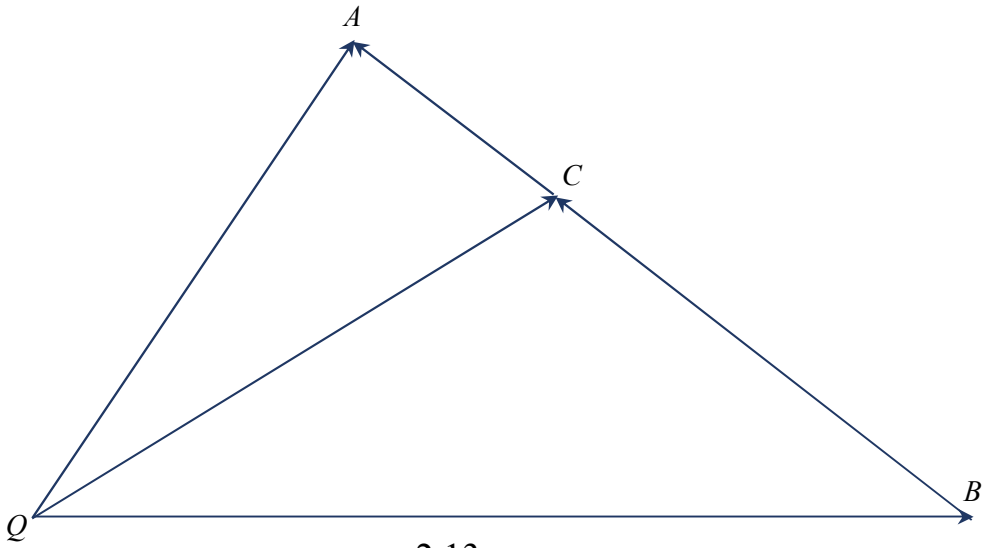
$$\boldsymbol{QC} = \frac{n}{m+n}\boldsymbol{QA} + \frac{m}{m+n}\boldsymbol{QB}.$$

Шешуі. $\boldsymbol{CA}$және $\boldsymbol{BC}$векторлары коллинеар. Дербес жағдайда $\boldsymbol{CA} = \lambda \boldsymbol{BC}$, мұнда $\lambda = \frac{m}{n}$. Векторлық қосудың ережесі бойынша:

$\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{QA} - \boldsymbol{QC}$ және $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{QC} - \boldsymbol{QB}$, онда

$(\boldsymbol{QA} - \boldsymbol{QC}) = \frac{m}{n}(\boldsymbol{QC} - \boldsymbol{QB})$, $\left(1 + \frac{m}{n}\right)\boldsymbol{QC} = \boldsymbol{QA} + \frac{m}{n}\boldsymbol{QB}$ немесе

$$\boldsymbol{QC} = \frac{n}{m+n}\boldsymbol{QA} + \frac{m}{m+n}\boldsymbol{QB}.$$

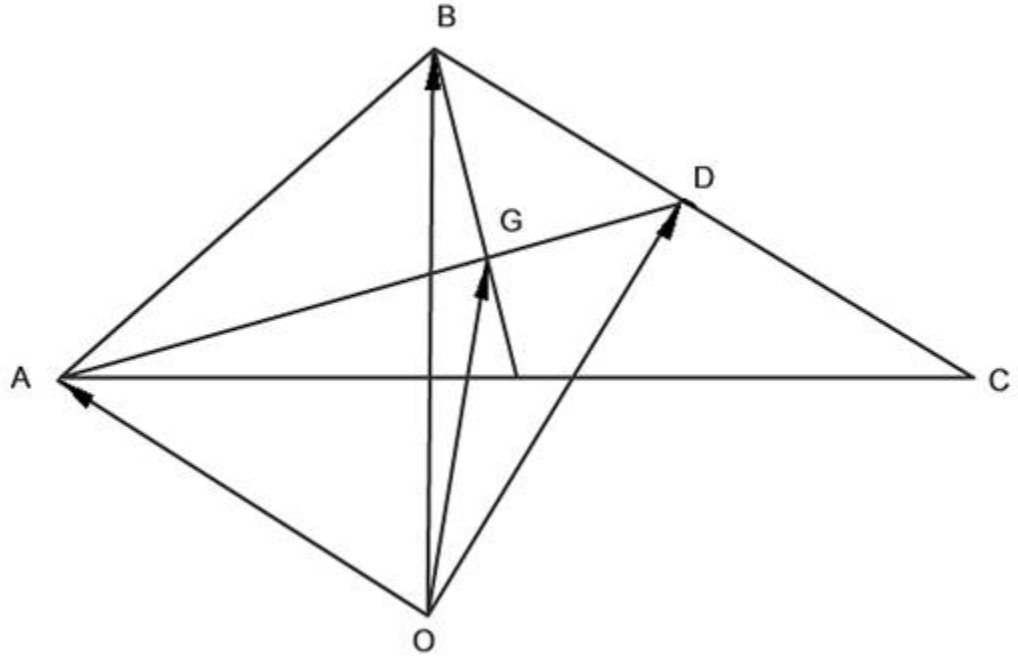


2.13-сурет

Салдар. Егер C нүктесі AB кесіндісінің ортасы болса, онда

$$\boldsymbol{QC} = \frac{\boldsymbol{QA}+\boldsymbol{QB}}{2}.$$

9-мысал. Кез келген үшбұрыштың медианалары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде төбесінен бастап санағанда $2:1$ қатынасындай кесінділерге бөлінеді (2.14-сурет).



2.14-сурет

Шешуі. O жазықтықтағы кез келген нүкте болсын дейік. D нүктесі BC кесіндісінің ортасы. G нүктесінде $\frac{AG}{GD}=\frac{2}{1}$ қатынасындай. Сонда

$$\boldsymbol{OD}=\frac{\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}}{2} \text{ және}$$

$$\boldsymbol{OG}=\frac{2}{3}\boldsymbol{OD}+\frac{1}{3}\boldsymbol{OA}=\frac{1}{3}\boldsymbol{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}}{2}=\frac{\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}}{3}.$$

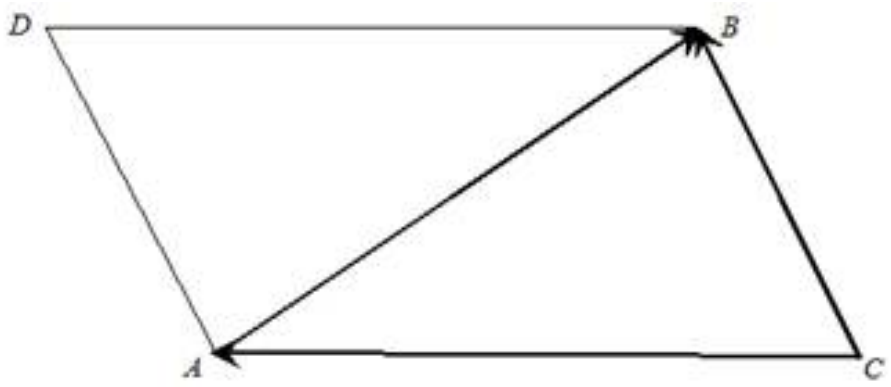
Келесі қадамда егер G' және G'' нүктелері үшбұрыштың B және C нүктелерінен шыққан медианаларын $2:1$ қатынасындай (сәйкес төбелерінен бастап санағанда) кесінділерге бөлсе, онда олар G нүктесінің ролін атқарады. Демек

$$\boldsymbol{OG'}=\boldsymbol{OG''}=\frac{\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}}{3} \text{ яғни } G=G'=G''.$$

Ескерту. Үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесін оның ауырлық центрі деп атайды.

10-мысал. ABC үшбұрышының қабырғаларының ұзындықтары – a,b,c болсын дейік. Үшбұрыштың ауданын оның қабырғалары арқылы өрнектейік.

Шешуі. $S_{ABC} = \frac{S_{CADB}}{2} = \frac{|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]|}{2}$ немесе $S^2 = \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{4} = \frac{a^2b^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}{4}$.



2.15-сурет

Векторларды векторлық қосу ережесі бойынша

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\Rightarrow c^2 = a^2+b^2-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} \quad \text{және}$$

$$S^2 = \frac{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}\left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2] =$$

$$= \frac{1}{16}(c-a+b)(c+a-b)(a+b+c)(a+b-c) =$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c),$$

өйткені $p = \frac{a+b+c}{2}$. Демек$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Герон формуласы).

11-мысал. Кез келген $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ векторлары үшін

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$$

векторлық теңдігінің дұрыстығын дәлелдейік, мұнда $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ және $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ сәйкес векторлардың аралас көбейтіндісі:

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}).$$

Дәлелдеу. Қос векторлық көбейтінді формуласының көмегімен ашайық

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$.

Демек $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$және

$$0=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=$$
$$=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})+\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Әрі қарай $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ векторлары компланар емес деп ұйғарайық, онда $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\neq\neq 0$. Соңғы теңдікті $\boldsymbol{a}$векторына қатысты шешейік:

$$\boldsymbol{a}=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}\boldsymbol{d}-\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}\boldsymbol{c}=$$

$$=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}\boldsymbol{c}+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}\boldsymbol{d}.$$

Бұл формула $\boldsymbol{a}$векторының кез келген $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$ базисіндегі $\left\{\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})};\ \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})};\ \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}\right\}$ координаталарын табуға көмектеседі.

12-мысал. Тетраэдрдің көлемін оның қырлары арқылы өрнектейік (2.16-сурет).

Шешуі. $OABC$ – бастапқы тетраэдр. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{OC}$, $\boldsymbol{c'}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{a'}=\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{b'}=\boldsymbol{CA}$. Тетраэдрді $\boldsymbol{OADBCA_1D_1B_1}$ параллелепипеді́не дейін толықтырайық. Сонда параллелепипедтің көлем і$V_{\text{пар}}=S_{OADB}\cdot h$, мұнда $h-C$ төбесінен табанына түсірілген биіктігінің ұзындығы және $V_{\text{тетр}}=\frac{1}{3}hS_{OAB}$.

$S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{OADB}$ және $V_{\text{пар}}=|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ болғандықтан

$V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ және $V_{\text{тетр}}^2=\frac{1}{36}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$.

Анықтауыштың анықтамасына сүйене отырып

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\end{vmatrix}$$

теңдігін алу қиындық туғызбайды. Векторлық қосу ережесіне сай $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a'}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b'}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$. Сондықтан

$(\boldsymbol{c'})^2=b^2+a^2-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\Rightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{a^2+b^2-(c')^2}{2}$ және осы сияқты

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=\frac{a^2+c^2-(b')^2}{2}$, $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\frac{c^2+b^2-(\boldsymbol{a'})^2}{2}$.

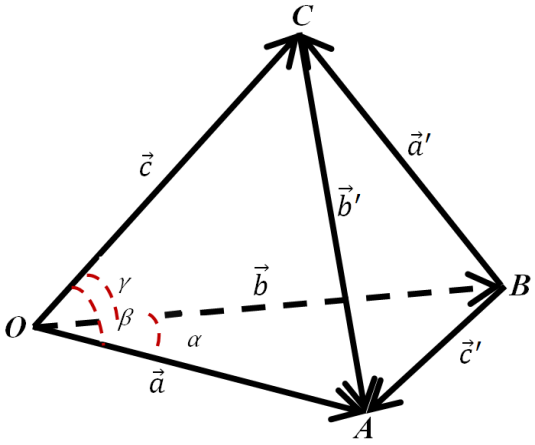
Демек

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{a^2+b^2-(c')^2}{2} & \frac{a^2+c^2-(b')^2}{2} \\ \frac{a^2+b^2-(c')^2}{2} & b^2 & \frac{b^2+c^2-(a')^2}{2} \\ \frac{a^2+c^2-(b')^2}{2} & \frac{b^2+c^2-(a')^2}{2} & c^2 \end{vmatrix}.$$

Бұдан тетраэдрдің көлемі үшін келесі формуланы аламыз

$$V_{\text{тетр}}^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-(c')^2 & a^2+c^2-(b')^2 \\ a^2+b^2-(c')^2 & 2b^2 & b^2+c^2-(a')^2 \\ a^2+c^2-(b')^2 & b^2+c^2-(a')^2 & 2c^2 \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Сонда (*) формуласы тетраэдрдің көлемін қырлары арқылы өрнектейді. Бұл формуланы кейде тетраэдрдің көлемі үшін Герон формуласының аналогы деп те атайды.



2.16-сурет

13-мысал. Тетраэдрдің көлемін бір нүктеден шығатын a, b, c қырлары арқылы және осы қырлардың арасындағы α, β, γ жазық бұрыштары арқылы өрнекте. Сонымен $\left|\overrightarrow{OA}\right| = a, \left|\overrightarrow{OB}\right| = b$, $\left|\overrightarrow{OC}\right| = c$ және $\widehat{COB} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{BOA} = \gamma$. Тетраэдрдің көлемін ($V_{тетр}$) табу керек.

Шешуі. ΔOCB, ΔOCA және ΔBOA үшбұрыштарын қарастарайық (2.16-сурет). Косинустар теоремасының көмегімен

$$(a')^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$(b')^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos\beta,$$
$$(c')^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

теңдіктерін алайық. Сонда (*) формула келесі түрде ашылады

$$V_{тетр}^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 2a^2 & 2ab\cos\gamma & 2ac\cos\beta \\ 2ab\cos\gamma & 2b^2 & 2bc\cos\alpha \\ 2ac\cos\beta & 2bc\cos\alpha & 2c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{abc}{36}\begin{vmatrix} a & b\cos\gamma & c\cos\beta \\ a\cos\gamma & b & c\cos\alpha \\ a\cos\beta & c\cos\alpha & c \end{vmatrix} = \frac{a^2b^2c^2}{36}\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{36}(1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma).$$

$$V_{тетр} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}. \qquad (**)$$

14-мысал. Тетраэдрдің көлемін бір нүктеден шығатын a, b, c қырлары арқылы және осы қырлардың арасындағы α, β, γ жазық бұрыштарына қарама-қарсы жатқан $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ екіжақты бұрыштарының көмегімен табайық (2.16-сурет).

Шешуі. Үшжақты бұрыштар үшін бірінші косинустар теоремасы бойынша

$$\cos\hat{A} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Бұдан $\sin^2\hat{A} = 1 - \cos^2\hat{A} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma}$.

Сонда

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\hat{A}.$$

Енді (**) формуланы пайдаланып тетраэдрдің көлемін табайық

$$V_{\text{тетр}} = \frac{abc}{6}\sin\beta\sin\gamma\sin\hat{A}.$$

Осыған ұқсас

$$V_{\text{тетр}} = \frac{abc}{6}\sin\alpha\sin\gamma\sin\hat{B},$$

$$V_{\text{тетр}} = \frac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\hat{C}.$$

Жаттығулар

1. Өзара коллинеар емес $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ және $\boldsymbol{c}$векторларының векторлық қосындысы нөлдік векторды береді, яғни $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ және $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ және $\boldsymbol{a}$ векторларының арасындағы бұрыштардың қосындысын тап.

2. OAB үшбұрышы берілген. $\alpha\boldsymbol{OA} + \beta\boldsymbol{OB}$, мұнда $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ түріндегі векторлардың соңғы нүктелерінің геометриялық орнын сипатта.

3. $cos7^\circ$+cos79° +cos151° +cos223° +cos295° қосындысын векторлық тәсілмен есепте.

4. OAB үшбұрышының O төбесінен $\boldsymbol{M}$ медианасы, $\boldsymbol{B}$ биссектрисасы және $\boldsymbol{H}$ биіктігі жүргізілген. Осы векторларды $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{OB}$ базисі бойынша жікте.

5. $\boldsymbol{a} = h\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + h\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$ векторлары өзара коллинеар емес, сондаh −тың қандай мәнінде олар компланар болады.

6. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ және $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ үштік векторлары арқылы тұрғызылған екі параллелепипедтің көлемдерін салыстыр.

7. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ векторлық теңдігі белгілі дейік. Сонда:

а) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ векторлары компланар болатынын;

б) егер бұл векторлар бір нүктеден шығатын болса, онда олардың соңғы нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелде.

8. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)}$

теңсіздігін дәлелде.

9. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$тепе-теңдігін дәлелде.

10. Егер $ab + bc + ca = 0$ болса, онда $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^3}$ болатынын дәлелде.

11. Скалярлық және векторлық көбейтінділерді байланыстыратын

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = a^2 b^2$$

негізгі тепе-теңдікті дәлелде.

12. Үш вектордың аралас көбейтіндісін көбейткіштердің қос скалярлық көбейтінділері арқылы өрнектейтін

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix}$$

формуласын дәлелде.

13. Екі векторлық көбейтіндінің скалярлық көбейтіндісін өрнектейтін $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{q}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}) \end{vmatrix}$ формуласын дәлелде.

14. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})$ векторын $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ векторлары бойынша жіктейтін $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{m}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{m}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}) \end{vmatrix}$

формуласын дәлелде.

15. Екі аралас көбейтіндіні скалярлық көбейтінді арқылы өрнектейтін

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{l}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{l}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{l}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{m}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{m}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}) \end{vmatrix}$$ формуласын

дәлелде.

16. Кез келген төртбұрыштың қабырғаларының орталары параллелограмның төбелері болатынын дәлелде.

17. $OABC$ үшбұрышты пирамидасы берілген. Егер пирамиданың A және B төбелерінен түсірілген биіктіктері қиылысатын болса, онда $OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2$ теңдігінің орындалатынын дәлелде.

18. Тең бүйірлі ABC үшбұрышында $AB = AC$, $CD -$ медиана, $O -$ сырттай сызылған шеңбердің центрі, $E - ACD$ үшбұрышының ауырлық центрі. EO және CD кесінділерінің перпендикуляр екенін дәлелде.

19. $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ және $D(2;1;3)$ нүктелері бір жазықтықтың бойында жататынын дәлелде.

20. ABC үшбұрышы шеңберге іштей сызылған.
$\boldsymbol{OH} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OC}$ векторлық теңдігін дәлелде, мұнда $H - ABC$ үшбұрышының ортоцентрі, ал $O -$ шеңбердің центрі.

3. АФФИНДІК КЕҢІСТІКТЕР

n өлшемді аффиндік кеңістіктің анықтамасы Аффиндік координаталар жүйесі

Элементтері нүктелер деп аталатын қайсыбір $\mathcal{A}$ жиыны және n өлшемді нақты $\boldsymbol{V}$ сызықтық кеңістігі берілсін дейік.

$\varphi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \boldsymbol{V}$ бейнелеуін қарастырайық. Бұл бейнелеу $\mathcal{A}$ жиынының әрбір реттелген қос $M, N \in \mathcal{A}$ нүктелеріне $\boldsymbol{a} = \varphi(M, N) \in \boldsymbol{V}$ векторын сәйкес қояды. Сәйкес қойылған $\varphi(M, N)$ векторын $\boldsymbol{MN}$ арқылы белгілейік, яғни $\varphi(M, N) = \boldsymbol{MN}$.

Анықтама. Егер келесі шарттар орындалатын болса:

1) кез келген $M \in \mathcal{A}$ нүктесі және кез келген $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ векторы үшін $\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{a}$ векторлық теңдігі орындалатындай тек бір ғана $N \in \mathcal{A}$ нүктесі табылады;

2) кез келген $M, N, K \in \mathcal{A}$ үш нүктесі үшін $\boldsymbol{MN} + \boldsymbol{NK} = \boldsymbol{MK}$ векторлық теңдігі дұрыс, онда $\mathcal{A}$жиынын nөлшемді аффиндік кеңістік деп атайды.

Бұл жағдайда $\boldsymbol{V}$ сызықтық кеңістігін $\mathcal{A}$ аффиндік кеңістікке сәйкестендірген деп атайды.

Дербес жағдайда элементар геометрияда қарастырылатын түзу, жазықтық және кеңістік ұғымдары сәйкес $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ өлшемді аффиндік кеңістіктер болады.

$O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ аффиндік координаталар жүйесі сәйкестендірілген $\boldsymbol{V}$ сызықтық кеңістігінің $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ базисі мен $O \in \mathcal{A}$ нүктесі арқылы толықтай анықталады. O нүктесібас координат нүктесі деп аталады.

Кейде $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ аффиндік координаталар жүйесін ***репер*** деп те атайды. Кез келген M нүктесі үшін $\boldsymbol{OM}$ векторын O нүктесіне қатысты M нүктесінің радиус – векторы деп атайды. Сонда M нүктесінің координаталары деп $\boldsymbol{OM} \in \boldsymbol{V}$ векторының $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ базисіндегі координаталарын айтады.

M нүктесінің координаталарын $M(x^1, \ldots, x^n)$ түрінде белгілейді.

$E(1, \ldots, 1)$ нүктесін аффиндік координаталар жүйесінің ***бірлік нүктесі*** деп атайды.

Сонымен түзудегі аффиндік координаталар жүйесі $-O\boldsymbol{e}$, мұнда $\boldsymbol{e} \neq 0$; жазықтықтағы аффиндік координаталар жүйесі$-O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, мұнда $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ базистік векторлары өзара коллинеар емес; үш өлшемді

кеңістіктегі аффиндік координаталар жүйесі– $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3}$, мұнда $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ базистік векторлары өзара компланар емес.

Аффиндік кеңістіктің анықтамасынан шығатын қарапайым салдарға тоқталайық.

а) Кез келген екі нүкте үшін $\boldsymbol{AA} + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AB}$. Сондықтан қос беттесетін нүктелерге сәйкес қойылатын вектор нөлдік вектор болады.

б) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}$ нүктелері үшін $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AA}$, бұдан $\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{BA}$.

Аффиндік кеңістіктегі жазықтықтар

n өлшемді $\boldsymbol{V}$ сызықтық кеңістігі $\mathcal{A}$ жиынына сәйкестендірілген және M_0 нүктесі $\mathcal{A}$ жиынында бекітілген дейік, яғни $M_0 \in \mathcal{A}$. k өлшемді $\boldsymbol{L}$ сызықтық кеңістігі $\boldsymbol{V}$-ның ішкі кеңістігі болсын, демек $k \in n$.

Анықтама. $\boldsymbol{M_0M} \in \boldsymbol{L}$ тиістілігі орындалатындай бүкіл $M \in \mathcal{A}$ нүктелерінің жиынтығын $\boldsymbol{L}$ ішкі кеңістік бағытында M_0 нүктесі арқылы өтетін k өлшемді $\mathcal{P}$ жазықтығы деп атайды.

Сонымен нөл өлшемді жазықтық–нүкте. Бір өлшемді жазықтықтар–түзулер, $n-1$ өлшемді жазықтықтар гипер жазықтықтар деп аталады.

Егер жазықтықтың бағыттауыш $\boldsymbol{L}$ ішкі кеңістігі $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots, \boldsymbol{c}$ векторларының сызықтық кеңістігі түрінде берілсе, онда жазықтықты $\mathcal{P} = M_0 + < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots, \boldsymbol{c} >$ түрінде жазамыз.

$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}$ векторлары $\boldsymbol{L}$–де сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін құрсын дейік. Сонда бүкіл $M \in \mathcal{P}$ нүктелерінің жиынтығы

$\boldsymbol{M_0M} = t_1\boldsymbol{b_1} + t_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + t_k\boldsymbol{b_k}$ (3.1) теңдеуімен анықталады, мұнда $t_1, \dots, t_k$ параметрлері $\mathbb{R}$ нақты сандар жиынының барлық мәндерін қабылдайды.

Координат бас нүктесі O полюсінде жататын $\mathcal{A}$ координаталар жүйесі таңдап алынды дейік.

$\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OM_0}$ болғандықтан (3.1) теңдеуін оған пара-пар

$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM_0} + t_1\boldsymbol{b_1} + t_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + t_k\boldsymbol{b_k}$ (3.2) теңдеуімен алмастыруға болады. (3.2) теңдігін k өлшемді жазықтықтың векторлық параметрлік теңдеуі деп атайды.

Егер таңдап алынған координаталар жүйесінде $M(x^1,\dots,x^n)$, $M_0(x_0^1,\dots,x_0^n)$ және $\boldsymbol{b_i}=\left(b_i^1,\dots,b_i^n\right)i=1,2,\dots,k$ болса, онда (3.2) теңдігі координаттық түрдегі

$$\begin{aligned} x^1&=x_0^1+b_1^1t_1+\cdots+b_k^1t_k,\\ x^2&=x_0^2+b_1^2t_2+\cdots+b_k^2t_k,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^n&=x_0^n+b_1^nt_1+\cdots+b_k^nt_k \end{aligned} \qquad (3.3)$$

теңдеулер жүйесін көрсетеді.

Сонымен k өлшемді $\mathcal{P}$жазықтығының параметрлік теңдеулерін алу үшін қандай да бір $M_0\in\mathcal{P}$ нүктесінің координаталарын және осы жазықтықта компланар k сызықтық тәуелсіз векторлардың координаталарын білу қажет.

1-мысал. а) $A(9;1;7;-4)$ және $B(1;8;2;4)$ нүктелерінен өтетін l түзуінің;

б) $A(0;9;-9;-3;3)$, $B(-1;4;-6;-7;-9)$ және $C(-6;-8;1;3;-7)$ нүктелері арқылы өтетін $\mathcal{P}$ жазықтығының параметрлік теңдеулерін құрыңдар.

Шешуі. а) $\boldsymbol{AB}=\{-8;7;-5;8\}\neq\boldsymbol{0}$ нөлдік вектор емес, онда $\boldsymbol{AB}$ векторын немесе оған коллинеар кез келген $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ векторын түзудің бағыттауыш векторы ретінде алуға болады. $\boldsymbol{AB}$ векторының өзін алайық. M_0 нүктесі ретінде A немесе B нүктелерінің біреуін алуға болады. M_0 нүктесі үшін A нүктесін алсақ, онда (3.3) бойынша түзудің ізделініп отырған

$$l:\ \begin{cases} x^1=9-8t,\\ x^2=1+7t,\\ x^3=7-5t,\\ x^4=-4+8t \end{cases}$$

параметрлік теңдеулерін аламыз, мұнда $t\in(-\infty,\infty)$.

б) ізделініп отырған жазықтыққа компланар $\boldsymbol{AB}=\{-1;-5;3;-4;-12\}$ және $\boldsymbol{AC}=\{-6;-17;10;-10\}$ векторлары өзара сызықтық тәуелсіз, сондықтан берілген нүктелер $\boldsymbol{L}=<AB,AC>$ ішкі кеңістігінің бағытында A нүктесі арқылы өтетін екі өлшемді жазықтықты бірмәнді анықтайды:

$$\mathcal{P}:\begin{cases} x^1 = -t_1 - 6t_2, \\ x^2 = 9 - 5t_1 - 17t_2, \\ x^3 = -9 + 3t_1 + 10t_2, \\ x^4 = -3 - 4t_1 + 6t_2, \\ x^5 = 3 - 12t_1 - 10t_2. \end{cases}$$

2-мысал. $A(1;0;1;0)$, $B(3;1;2;3)$, $C(4;0;0;1)$ және $D(2;2;3;1)$ нүктелері арқылы өтетін гипержазықтықтың теңдеуін тап.

Шешуі. $\boldsymbol{AB} = \{2;1;1;3\}$, $\boldsymbol{AC} = \{3;0;-1;1\}$ және $\boldsymbol{AD} = \{1;2;2;1\}$ векторлары сызықтық тәуелсіз, өйткені олардың координаталарынан құралған

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының рангысы 3-ке тең. Демек берілген нүктелер төрт өлшемді кеңістікте өлшемі үш болатын жазықтықты анықтайды. Енді осы жазықтықтың теңдеуін табу үшін төрт өлшемді кеңістіктен $M(x^1;x^2;x^3;x^4)$ ағымдық нүктесін алайық және ол $\mathcal{P}$ жазықтығына, $\boldsymbol{AM} = \{x^1 - 1; x^2; x^3 - 1; x^4\}$ векторы оның бағыттауыш $\boldsymbol{L} =< AB, AC, AD >$ ішкі кеңістігіне тиісті болғанда және тек сонда ғана тиісті болады, яғни

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ x^1 - 1 & x^2 & x^3 - 1 & x^4 \end{pmatrix} = 3.$$

Соңғы теңдік $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ x^1 - 1 & x^2 & x^3 - 1 & x^4 \end{vmatrix} = 0$ теңдігіне пара-пар.

Анықтауышты төртінші жолдың элементтері бойынша жіктеп, ізделініп отырған гипержазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$5x^1 - 13x^2 + 12x^3 - 3x^4 - 17 = 0.$$

3-мысал. $$\mathcal{P}:\begin{cases} x^1 = -1 + t_1, \\ x^2 = t_1 + t_2, \\ x^3 = -t_1 - 2t_2, \\ x^4 = -3 - 2t_1 + 2t_2, \\ x^5 = -2 - 2t_1 - t_2 \end{cases}$$

параметрлік теңдеулері арқылы берілген $\mathcal{P}$ жазықтығының сызықтық тәуелсіз теңдеулер жүйесін тап.

Шешуі. $\mathcal{P}$ жазықтығы $M_0(-1;0;0;-3;-2)$ нүктесі арқылы өтеді. Оның бағыттауыш ішкі кеңістігі $\boldsymbol{b_1} = \{1;1;-1;-3;-2\}$, $\boldsymbol{b_2} = \{0;1;-2;2;-1\}$ екі сызықтық тәуелсіз векторлар арқылы құралған. Сондықтан жазықтық бес өлшемді кеңістікте екі өлшемді болады, және екі сызықтық тәуелсіз теңдеулер жүйесі бойынша беріледі. $M(x^1;x^2;x^3;x^4,x^5)$ нүктесі жазықтыққа $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{M_0M}$ векторлары сызықты тәуелсіз болғанда, тек сонда ғана тиісті болады, яғни

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ x^1 & x^2-1 & x^3+2 & x^4-2 & x^5+1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$rang\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} & -1 & -3 & -2 \\ & -2 & 2 & -1 \\ x^1 & x^2-1 & x^3+2 & x^4-2 & x^5+1 \end{pmatrix} = 2.$$

Пунктир сызықпен көрсетілген минор нөлден өзгеше. Бұл минордың көмкерілген бүкіл үшінші ретті минорларын нөлге теңестіреміз, өйткені матрицаның рангысы екіге тең:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ x^1 & x^2-1 & x^3+2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ x^1 & x^2-1 & x^4-2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ x^1 & x^2-1 & x^5+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ізделініп отырған жүйені құрайтын сызықтық тәуелсіз теңдеулер аламыз

$$\begin{cases} x^3+2x^2-x^1=0, \\ x^4+2x^2+4x^1=0, \\ 2x^5+x^2+3x^1=-1. \end{cases}$$

4-мысал. $\begin{cases} 3x^1-2x^2+5x^3+4x^4+2x^5=1, \\ x^1+x^2-2x^3-3x^4+5x^5=0, \\ 7x^1-8x^2+19x^3+18x^4-4x^5=3, \\ 5x^1-5x^2+12x^3+11x^4-x^5=2 \end{cases}$

сызықтық теңдеулер жүйесімен берілген $\mathcal{P}$ жазықтығының өлшемін анықтайық және осы жазықтықтың параметрлік теңдеулерін табайық.

Шешуі. Бірінші сұраққа жауап беру үшін жүйенің негізгі және кеңейтілген матрицаларының рангыларын табу жеткілікті. Егер $rangA \neq rang(A|B)$, онда жүйе үйлесімсіз және ешқандай жазықтық анықталмайды. Егер $rangA = rang(A|B)$ болса, онда оның шешімдерінің жиыны бес өлшемді кеңістікте өлшемі $k = 5 - r$ болатын жазықтықты анықтайды. Біздің жағдайымызда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 7 & -8 & 19 & 18 & -4 \\ 5 & -5 & 12 & 11 & -1 \end{pmatrix}, \ (A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & -8 & 19 & 18 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 12 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Элементар түрлендірулердің көмегімен кеңейтілген матрицаның рангысын есептейік.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & -8 & 19 & 18 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 12 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & 19 & 18 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 12 & 11 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 13 & -13 & 1 \\ 0 & -15 & 33 & 39 & -39 & 3 \\ 0 & -10 & 22 & 26 & -26 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 13 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Бұл жағдайда $rangA = rang(A|B) = 2$, демек $k = 3$. Базистік минор ретінде $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ сол жоғарғы бұрыштық минорды алайық. Сонда x^1, x^2 белгісіздері базистік, ал x^3, x^4, x^5 бас параметрлер болады. Бастапқы жүйеге пара-пар екі тәуелсіз теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін табайық

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 = -5x^3 - 4x^4 - 2x^5 + 1, \\ x^1 + x^2 = 2x^3 + 3x^4 - 5x^5. \end{cases}$$

Ізделіпотырғаншешімкелесітүрдежазылады

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 - \frac{12}{5}t_3, \\ x^2 = -\frac{1}{5} + \frac{11}{5}t_1 + \frac{13}{5}t_2 - \frac{13}{5}t_3, \\ x^3 = t_1, \\ x^4 = t_2, \\ x^5 = t_3. \end{cases}$$

Бұл теңдіктер $\mathcal{P}$ жазықтығының параметрлік теңдеулері.

Евклид кеңістігі. Скалярлық көбейтінді. Грамм матрицасы. Ортогонализациялау процесі

Анықтама. E сызықтық кеңістігі берілсін дейік. Егер кез келген қос $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$ векторлары үшін

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;

2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}. \boldsymbol{a})$;

3) $(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

шарттары барлық $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ үшін орындалатындай $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}$ саны сәйкес қойылса, онда E сызықтық кеңістігінде скалярлық көбейтінді анықталған.

Анықтама. Скалярлық көбейтінді анықталған E сызықтық кеңістігін ***сызықтық евклид кеңістігі*** деп атайды.

Анықтама. nөлшемдіE евклид кеңістігінде $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k (k \leq n)$ векторларының ***Грамм матрицасы*** деп

$$G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \dots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_2) & \dots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k) \end{pmatrix}$$

матрицасын айтады.

Евклид кеңістігінің $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_n$ базистік векторларынан құралған Грамм матрицасын матрицалық коэффициенттер матрицасы деп те атайды. $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_n$базисіндегі координаталары белгілі деп санайық, яғни

$$\boldsymbol{a} = \sum_{s=1}^{n} a^s \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{b} = \sum_{s=1}^{n} b^s \boldsymbol{f}_s.$$

Сонда $$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) a^i b^j. \quad (3.4)$$

Грамм матрицасының анықтауышы әруақытта теріс емес және $detG(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ теңдігі $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігіне пара – пар.

Егер $i \neq j$ болмағанда $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}) = 0$, ал $i = j$ болғанда $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}) = 1$ шарттары орындалатын $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n} \in E$ векторлар жиынтығы ***ортонормаланған*** деп аталады. Ортонормаланған векторлар жиынтығының Грамм матрицасы бірлік матрицаны көрсетеді.

Егер евклид кеңістігінің $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_n$ базистік векторлары ортонормаланған болса, онда скалярлық көбейтіндіні есептейтін (3.4) формуласын ықшам түрде жазуға болады:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{s=1}^{n} a^s \boldsymbol{f}_s, \quad \boldsymbol{b} = \sum_{s=1}^{n} b^s \boldsymbol{f}_s \Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{s=1}^{n} a^s b^s. \qquad (3.5)$$

5-мысал. Ортонормаланған базисте өзінің координаталары арқылы берілген векторлар жүйесінің Грамм матрицасын табайық:

а) $\boldsymbol{a} = \{-2; -1\}$, $\boldsymbol{b} = \{1; 0\}$;

б)$\boldsymbol{a} = \{2; 2; 2; 1; 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{2; -2; -1; -1; 0\}$, $\boldsymbol{c} = \{-2; 2; 1; 0; -2\}$.

Шешуі. а) (3.5) формуласы бойынша $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 5$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -2$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -2$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 1$; $G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

б) Алдыңғыға ұқсас

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 14$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -3$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$,
$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -3$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 10$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -9$,
$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0$, $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -9$, $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = 13$;

$$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 14 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & -9 \\ 0 & -9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Лемма. Қос-қостан ортогональды және нөлден өзгеше векторлар сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін құрайды.

Дәлелдеу. Нөлдік вектордан өзгеше $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ векторларықос-қостан ортогональды дейік: $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a}_k) = 0$, $i \neq k$. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ векторларының сызықтық комбинациясы нөлдік векторға тең деп ұйғарайық:

$$\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}.$$

Келесі қадамдарда бұл векторлық теңдіктің екі жағын бірдей $\boldsymbol{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$ векторына скаляр көбейтіп,

$$\mu_1(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_i}) + \mu_2(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_i}) + \cdots + \mu_m(\boldsymbol{a_m}, \boldsymbol{a_i}) = 0$$

теңдігін аламыз. Бұдан $i \neq k$ болғанда $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_k}) = 0$, сонда барлық $i = 1, 2, \dots, m$ үшін $\mu_i = 0$ шығады, демек анықтамаға сай $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m}$ векторлары сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін құрайды.

Теорема. Кез келген E евклид кеңістігінде ортонормаланған базис табылады.

Дәлелдеу. $\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, \dots, \boldsymbol{g_n}$ сызықтық тәуелсіз векторлар E евклид кеңістігінің базисі дейік. $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{g_1}$ және $\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{g_2} + \alpha \boldsymbol{f_1}$ деп алайық. $\boldsymbol{f_1}$және $\boldsymbol{f_2}$векторларының ортогональдық шартынан $\alpha -$ ны табайық:

$$(\boldsymbol{g_2} + \alpha \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1}) = (\boldsymbol{g_2}, \boldsymbol{f_1}) + \alpha(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1}) = 0,$$

бұдан

$$\alpha = -\frac{(\boldsymbol{g_2}, \boldsymbol{f_1})}{(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1})}.$$

Соңғы бөлшектің бөлімі нөлден өзгеше, өйткені $\boldsymbol{f_1} \neq \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{g_1}$ және $\boldsymbol{g_2}$ векторларының сызықтық тәуелсіздігінен табылған $\boldsymbol{f_2}$ векторы да нөлдік вектордан өзгеше.

Әрі қарай қос-қостан ортогональды $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_{k-1}}$ векторлары табылды деп санайық, ал келесі $\boldsymbol{f_k}$ векторының жіктелуін төмендегі түрде қарастырайық:

$$\boldsymbol{f_k} = \boldsymbol{g_k} + \lambda_1 \boldsymbol{f_1} + \lambda_2 \boldsymbol{f_2} + \cdots + \lambda_{k-1} \boldsymbol{f_{k-1}}.$$

Мұндағы λ_1, λ_2, ..., λ_{k-1} сандары $\boldsymbol{f_k}$ векторының $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_{k-1}}$ векторларына ортогональды болу шарттарынан шығады. Демек $i = 1, 2, \dots, k-1$ мәндерінде $(\boldsymbol{f_k}, \boldsymbol{f_i}) = (\boldsymbol{g_k}, \boldsymbol{f_i}) + \lambda_i(\boldsymbol{f_i}, \boldsymbol{f_i})$ теңдігін аламыз. Бұдан $\lambda_i = -\frac{(\boldsymbol{g_k}, \boldsymbol{f_i})}{(\boldsymbol{f_i}, \boldsymbol{f_i})}$. Бөлшектің бөлімі нөлден өзгеше, өйткені ұйғаруымыз бойынша $i = 1, 2, \dots, k-1$ мәндерінде барлық $\boldsymbol{f_i}$ векторлары нөлдік векторды бермейді. Сонда

$$\boldsymbol{f_k} = \boldsymbol{g_k} + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \boldsymbol{f_i} = \boldsymbol{g_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{g_k}, \boldsymbol{f_i})}{(\boldsymbol{f_i}, \boldsymbol{f_i})} \boldsymbol{f_i}. \qquad (3.6)$$

Бұл құрылымды соңғы $\boldsymbol{f_n} = \boldsymbol{g_n} + \xi_1 \boldsymbol{f_1} + \xi_1 \boldsymbol{f_2} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{f_n}$ векторы табылғанға дейін жүргіземіз. Жоғарыдағы леммаға сай $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ векторлары сызықтық тәуелсіз, демек ортогональды

базис құрайды. Егер $\boldsymbol{f}_i$ векторларының әрқайсысын өзінің модуліне бөлетін болсақ, онда $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{f}_1}{|\boldsymbol{f}_1|}$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{f}_2}{|\boldsymbol{f}_2|}$, …, $\boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{f}_n}{|\boldsymbol{f}_n|}$ ортонормаланған базисін табамыз.

Берілген сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесінен ортонормаланған векторлар жүйесін алу тәсілін Грамм – Шмидтің ортогонализациялау процесі деп атайды.

6-мысал. Грамм – Шмидтің ортогонализациялау процесін қолданып, $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} >$ ішкі кеңістігінің ортонормаланған базисін табайық:

$$\boldsymbol{u} = \{2; 2; -2; 0\}, \boldsymbol{v} = \{-2; 2; 0; -1\}, \boldsymbol{w} = \{1; -2; 0; 1\}.$$

Шешуі. Біртіндеп (3.6) формуласы бойынша

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; 0\right\},$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v} - \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \{-2; 2; 0; -1\},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{f}_2|}\boldsymbol{f}_2 = \left\{\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}; 0; \frac{-1}{3}\right\},$$

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{w} - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = \left\{-\frac{14}{19\sqrt{306}}; \frac{5}{9\sqrt{306}}; \frac{-9}{9\sqrt{306}}; \frac{1}{9\sqrt{306}}\right\}.$$

Анықтама. Егер $\mathcal{A}$ аффиндік кеңістігіне сәйкестендірілген E сызықтық кеңістігі евклидтік болса, онда $\mathcal{A}$ аффиндік кеңістігін евклид кеңістігі деп атайды.

Сәйкестендірілген сызықтық кеңістіктің $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ базисі ортонормаланған болса, онда аффиндік евклид кеңістігінің $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ координаталар жүйесін тік бұрышты деп атайды.

Скалярлық көбейтіндінің көмегімен кеңістікте элементар геометрияның ұғымдары мен қасиеттеріне ұқсас арақашықтық, бұрыш, аудан және көлем ұғымдарын енгізуге болады.

$$|MN| = |\boldsymbol{MN}| = \sqrt{(\boldsymbol{MN}, \boldsymbol{MN})}, \tag{3.7}$$

$$cos\angle ACB = \frac{(\boldsymbol{CA},\boldsymbol{CB})}{|\boldsymbol{CA}|\cdot|\boldsymbol{CB}|} \tag{3.8}$$

формулалары нүктелерінің арақашықтығы мен $\angle ACB$ бұрышының косинусын анықтайды.

7-мысал. Базистің метрикалық коэффициенттерінің $G = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицасы белгілі дейік. Төбелері $A(2;-1)$, $B(5;3)$ және $C(1;-3)$ нүктелерінде орналасқан ΔABC үшбұрышының ABқабырғасының ұзындығын және$\angle ACB$ бұрышының косинусын табайық.

Шешуі. $\boldsymbol{AB} = \{3;4\}$, $\boldsymbol{CA} = \{1;2\}$, $\boldsymbol{CB} = \{4;6\}$. Скалярлық көбейтіндіні есептеу үшін (3.4) формуласын пайдаланамыз, өйткені кеңістіктегі координаталар жүйесі тік бұрышты емес. (3.7) және (3.8) формулалары бойынша арақашықтықты және бұрышты табамыз:

$$|AB| = |\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AB})} = \sqrt{5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2} = \sqrt{101};$$

осыған ұқсас

$$|CA| = |\boldsymbol{CA}| = \sqrt{17}, \quad |CB| = |\boldsymbol{CB}| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2},$$
$$(\boldsymbol{CA}, \boldsymbol{CB}) = 5 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 6 = 58;$$
$$cos\angle ACB = \frac{58}{\sqrt{17} \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{29\sqrt{34}}{170}.$$

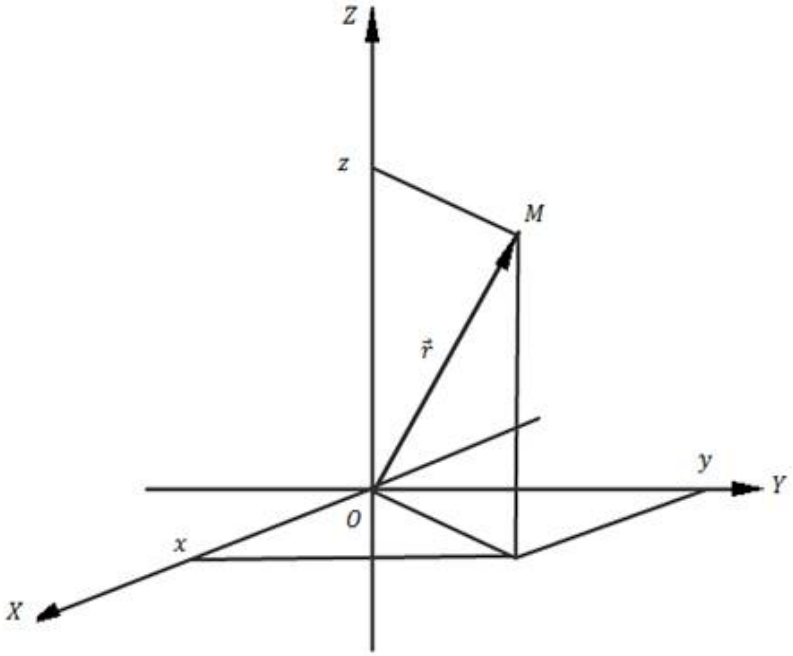
Декарттық координаталар жүйесі

Аналитикалық геометрияның негізгі ұғымдары, анықтама және теоремалары Рене Декарт енгізген координаталар жүйесімен тығыз байланысты. Кеңістіктегі декарттық координаталар жүйесі нүкте және базистік үш вектор арқылы толықтай анықталады. O нүктесі координаталар жүйесінің бас нүктесі деп аталады. Базистік векторлар бағытымен бағытталған түзулер координаталар осьтерідеп аталады. Үш өлшемді кеңістікте олар абсцисса, ордината және аппликата осьтері деп аталады. Кеңістіктегі (3.1-сурет) M нүктесінің координаталары деп $\boldsymbol{OM}$ радиус–векторының координаталарын айтамыз: $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, бұдан $M(x, y, z)$. Сонымен $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

Бұл векторлық теңдіктің екі жағын бірдей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, базистік векторларына скаляр көбейте отырып, M нүктесінің координаталарын радиус- вектормен байланыстырамыз:

$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i}) = x$; $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{j}) = y$; $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) = z$, сонда $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + +(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$.

Егер базис ортонормаланған болса, онда мұндай декарттық жүйе тікбұрышты деп аталады. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі өзара перпендикуляр Ox, Oy және Oz осьтері арқылы құрылады.

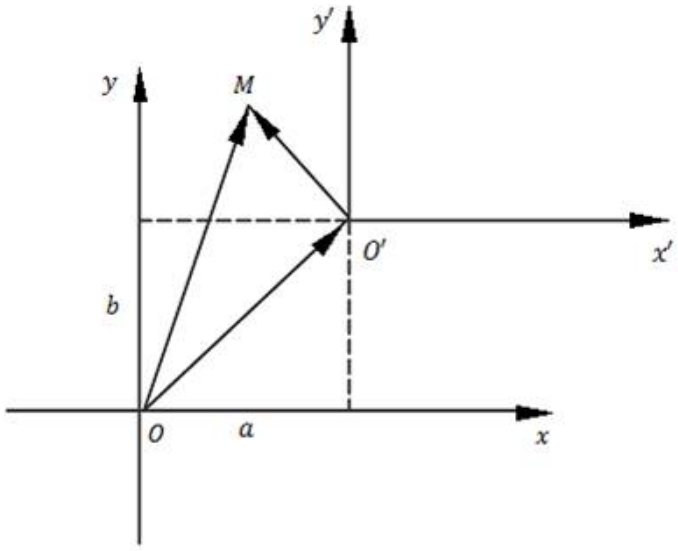


3.1-сурет

Еске түсіру. Векторлары қос-қостан ортогональды және ұзындықтары бірге тең базис ортонормаланған деп аталады.

Параллель жылжыту

Жазықтықта сәйкес осьтері өзара параллель Oxy және $O'x'y'$ тікбұрышты координаталар жүйесі берілсін дейік. Мұндай түрлендіру координаталар жүйесін параллель жылжыту немесе параллель көшіру деп аталады (3.2-сурет).



3.2-сурет

Жазықтықтағы кез келген M ағымдық нүктесінің Oxy және $O'x'y'$ жүйелеріндегі координаталарын бір-бірімен байланыстырайық:

$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}$, мұнда $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{O'M} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$ және $\boldsymbol{OO'} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$.

Сонда жаңа жүйеден ескі жүйеге параллель көшу формулалары келесі түрде жазылады

$$x = x' + a;\ y = y' + b,$$

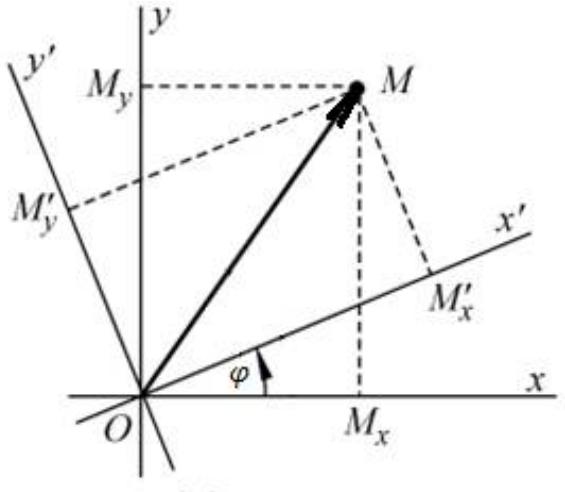
ал ескі жүйеден жаңа жүйеге параллель көшу формулалары түрінде жазылады.

$$x' = x - a;\ y' = y - b.$$

Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесін бұру

Тік бұрышты Oxy координаталар жүйесін сағат тіліне қарама-қарсы бағытта қандай да бір ақырлы φ бұрышына бұрайық. Алынған жаңа жүйені $Ox'y'$ арқылы белгілейік.

Жазықтықтағы M нүктесінің координаталары $\boldsymbol{OM}$ радиус-векторының координаталары бойынша анықталады (3.3-сурет).



3.3 – сурет

$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$векторлық теңдігіескі жүйеге қатысты, ал $\boldsymbol{OM} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'$ векторлық теңдігіжаңа жүйеге қатысты қарастырылады.

Бұдан $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'$ векторлықтеңдігін аламыз. Мұнда $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ ескі, ал $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\}$ жаңа жүйенің ортогональды базистері. Жоғарыдағы векторлық теңдікті алдымен $\boldsymbol{i}$, содан кейін $\boldsymbol{j}$ базистік векторларына скаляр көбейте отырып, бұру формулаларын аламыз

$$x = cos\varphi\ x' - sin\varphi\ y',$$
$$y = sin\varphi\ x' + cos\varphi\ y',$$

Өйткені $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 1$; $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = 0$; $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}') = cos\varphi$; $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}') = -sin\varphi$.

Керісінше жоғарыдағы векторлық теңдікті алдымен $\boldsymbol{i}'$, содан кейін $\boldsymbol{j}'$ базистік векторларына скаляр көбейтетін болсақ

$$x' = cos\varphi x + sin\varphi y,$$
$$y' = -sin\varphi x + cos\varphi y$$

бұру формулалары шығады.

Координаталар жүйесін параллель жылжыту және бұру түрлендірулерін біріктіретін болсақ, жазықтықтағы тік бұрышты координаталарды түрлендірудің жалпы формуласы алынады.

$$x = x'cos\varphi - y'sin\varphi + a,$$
$$y = x'sin\varphi + y'cos\varphi + b$$

формулалары жаңа жүйеден ескі жүйеге көшудің жалпы формулалары деп аталады. Керісінше

$$x' = (x - a)cos\varphi + (y - b)sin\varphi,$$
$$y' = -(x - a)sin\varphi + (y - b)cos\varphi$$

формулалары ескі жүйеден жаңа жүйеге көшудің жалпы формулалары деп аталады.

Жоғарыда қарастырылған жағдайларға ұқсас

$$x = x' + a, y = y' + b, z = z' + c$$

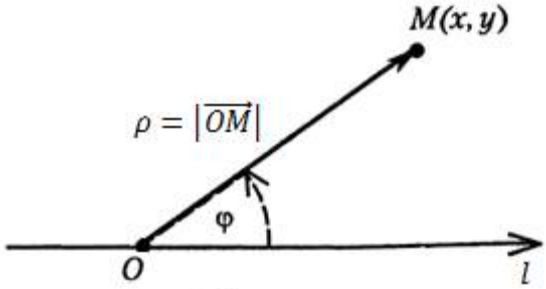
формулалары кеңістікте тік бұрышты координаталар жүйесін параллель жылжыту формуласын көрсетеді.

$$x = x'cos\varphi - y'sin\varphi,$$
$$y = x'sin\varphi + y'cos\varphi,$$
$$z = z'$$

формулалары кеңістікте z өсін айнала φ бұрышына бұру формулалары деп аталады.

Жазықтықтағы полярлық координаталар жүйесі

Жазықтықта полюс деп аталатын O нүктесі мен сол нүктеден басталатын l сәулесі бекітілсін дейік. $\boldsymbol{e}$бірлік векторы анықталған l түзуін полярлық ось депте атайды.



3.4 – сурет

Сонда жазықтықтағы кез келген нүктенің орны $\rho = |\boldsymbol{OM}|$ әне φ параметрлері арқылы толықтай анықталады. Мұнда $\rho > 0$ полярлық радиус, ал φ – полярлық бұрыш деп аталады.

M нүктесінің декарттық координаталары мен оның полярлық координаталарының арасындағы байланысты табайық:

$$x = \rho cos\varphi,\ y = \rho sin\varphi$$

$$(\rho \geq 0,\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \tag{3.9}$$

Цилиндрлік және сфералық координаталар жүйесі

Кеңістіктегі M нүктесінің ағымдық (x, y, z) декарттық координаталары сол нүктенің (ρ, φ, z) цилиндрлік (3.1-сурет) координаталары арқылы төмендегі түрде өрнектеледі:

$$x = \rho cos\varphi;\ \ y = \rho sin\varphi;\quad z = z.$$

1) $r = const$ цилиндрлік бет, ал $\boldsymbol{e_r}$ векторы оның нормаль векторы;

2) $\varphi = const Oz$ осі арқылы өтетін жарты жазықтық, ал $\boldsymbol{e_\varphi}$ векторы осы жарты жазықтықтың нормаль векторы;

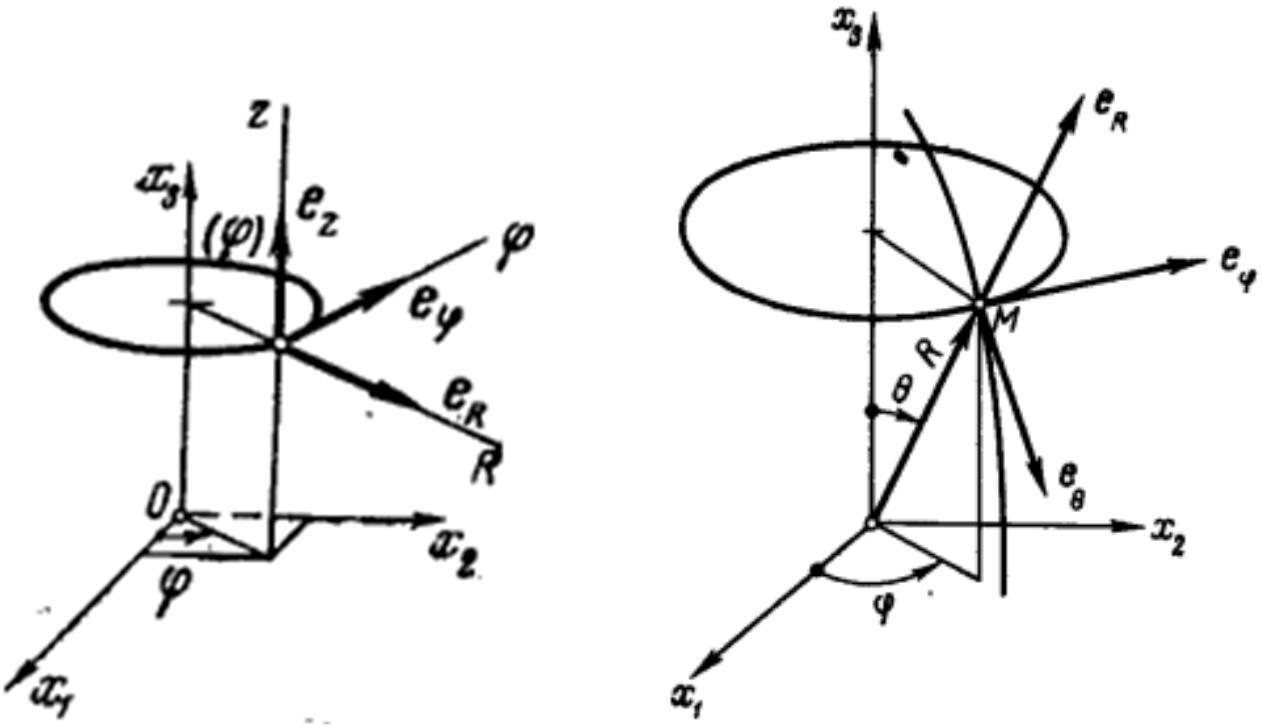
3) $z = const Oz$ осіне перпендикуляр жазықтық, ал $\boldsymbol{e_z}$ векторы осы жазықтықтың нормаль векторы.

Сонда $\{\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\varphi}, \boldsymbol{e_z}\}$ үштік векторы цилиндрлік координаталар жүйесінің базисін анықтайды (3.5-сурет).

Декарттық координаталар жүйесінен цилиндрлік координаталар жүйесіне көшкенде түрлендірудің якобианы

$$I(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rsin\varphi & 0 \\ sin\varphi & rcos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{3.10}$$

практикалық есептерді шығаруға өте қажет. $r \neq 0$ болса, онда якобиан таңбасын сақтайды.



3.5-сурет

Сфералық координаталар. Кеңістіктегі M ағымдық нүктесінің (x, y, z) декарттық координаталары (3.5-сурет) сол нүктенің сфералық координаталары арқылы келесі түрде өрнектеледі:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ағымдық нүктенің сфералық координаталарынан оның декарттық координаталарына көшу

$\Omega = \{(r; \varphi;\ \theta) \in \mathbb{R}^3:\ r \in [0, +\infty),\ \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]]\}$ тұйық облысын $Q = \mathbb{R}^3$ тұйық облысына бейнелеуді білдіреді. Бұл бейнелеу үзіліссіз дифференциалданады, бірақ сәйкестік бірмәнді емес.

Сфералық координаталардың келесі геометриялық мағынасын еске түсірейік:

1) r шамасы M нүктесінің $\boldsymbol{OM}$ радиус – векторының ұзындығы;

2) φ шамасы Ox осі мен $\boldsymbol{OM}$ радиус – векторының xOy жазықтығына түсірілген $\boldsymbol{OM_1}$ проекциясының арасындағы бұрыш;

3) θ шамасы $\boldsymbol{OM}$ векторы мен Oz осінің арасындағы бұрыш.

Сфералық координаталарға келесі координаттық беттер сәйкес қойылады:

1) центрі O нүктесінде болатын $r = const$ концентрлік сфералар;

2) Oz осі арқылы өтетін және осы осьпен шектелетін $\varphi = const$ жарты жазықтығы;

3) төбесі O нүктесінде симметрия осі Oz осі болатын $\theta = const$ дөңгелек жартылай конусы.

(3.11) бейнелеуі $\theta = 0$ немесе $\theta = \pi$ мәндеріне сәйкес келетін, яғни Oz осінің бойында жатпайтын басқа нүктелерде бірмәнді анықталған.

(3.11) түрлендіруінің якобианы

$$I(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} sin\theta cos\varphi & rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta sin\varphi \\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \\ cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 sin\theta.$$

Демек $r \neq 0$ және $\theta \in (0, 2\pi)$ болса, онда якобиан таңбасын сақтайды.

Аналитикалық геометрияның қарапайым алгебралық қисықтары

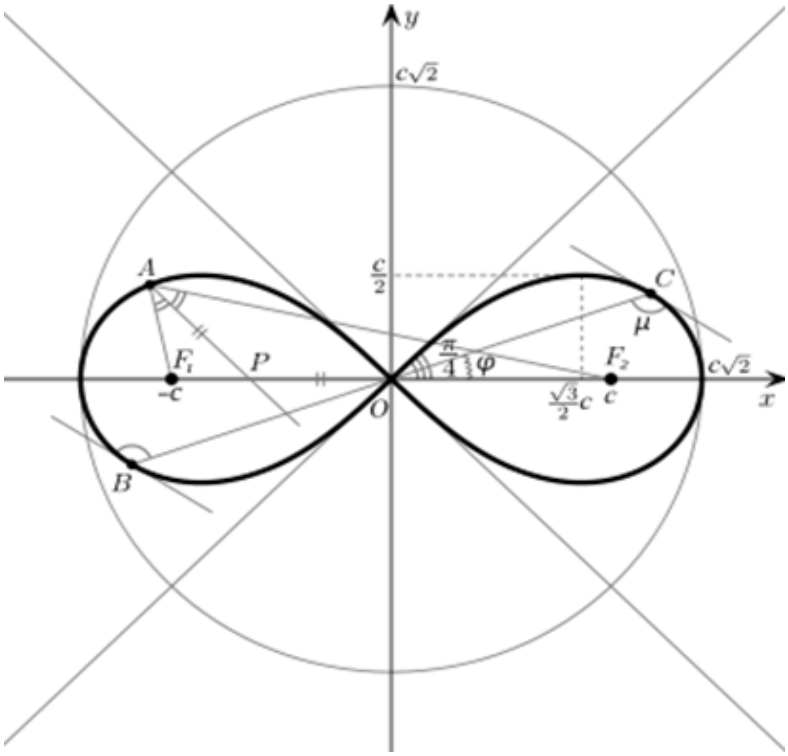
Алгебралық қисықтар евклид геометриясының қарапайым нысандарының қатарына жатады. Оларды анықтау үшін сызықтық теңдеулер жеткіліксіз. Дербес жағдайда жазық алгебралық қисықты екі айнымалы көпмүшеліктің нөлдерінің жиыны ретінде анықтайды. Мысалы, бірлік шеңбер – алгебралық қисық, өйткені ол $x^2 + y^2 - 1 = 0$ теңдеуімен беріледі.

Алгебралық қисықтардың қатарына мектеп бағдарламасынан белгілі $y - x^2 = 0$ парабола мен $xy - 1 = 0$ теңдеуімен анықталатын гиперболаны да жатқызуға болады.

Аналитикалық геометрияда алгебралық қисықтарды зерттегенде екі түрлі есеп қарастырылады: 1) қисықтың қасиеттері арқылы оның аналитикалық теңдеуін құру; 2) қисықтың берілген теңдеуі арқылы оның геометриялық қасиеттерін толықтыру және зерттеу.

Бернулли лемнискатасы – жазық алгебралық қисық

Анықтама. $F_1(-c;0)$ және $F_2(c;0)$ фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден арақашықтықтарының көбейтіндісі тұрақты және фокустар аралығының жартысының квадратына тең жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орны Бернулли лемнискатасын анықтайды (3.6-сурет).



3.6-сурет

Теңдеуі. Анықтама бойынша $|F_1M| \cdot |F_2M| = c^2$, мұнда $M(x,y)$ лемнискатаның бойынан алынған ағымдық нүкте. Сонда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2+y^2} = c^2$$

күрделі емес түрлендірулерден кейін тік бұрышты координаталар жүйесінде Бернулли лемнискатасының теңдеуі

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2)$$

түрінде жазылады. $\rho^2 = 2c^2 cos2\varphi$ теңдігі Бернулли лемнискатасының полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеуін анықтайды.

Қасиеттері:

•Лемниската – төртінші ретті қисық;

•Түйін нүктесіне қатысты симметриялы;

•Түйін нүктесі арқылы жүргізілген жанамалар бір-біріне перпендикуляр;

•Лемнискатаның бойында жатқан кез келген A нүктесі үшін $AP = PO$, мұнда AP түзуі $\angle F_1AF_2$ бұрышының биссектрисасы;

•Қисықтың екі максимум және екі минимум нүктелері бар. Олардың координаталары:$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ y = \pm\frac{c}{2}$;

•Лемниската радиусы $a = c\sqrt{2}$ тең шеңберге іштей сызылған.

Кассини сопақшасы

Жазықтықта фокустар деп аталатын $F_1(-a;0)$ және $F_2(a;0)$ нүктелерінің бір-бірінен арақашықтығы $2a$ болсын дейік. Сонда қисықтың бойында жатқан $M(x,y)$ ағымдық нүктеден осы фокустарға дейінгі арақашықтықтардың көбейтіндісі тұрақты және b^2 шамасына тең болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орны Кассини сопақшасын анықтайды.

Анықтама бойынша:$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2] = b^4$.

Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерін біріктіргеннен кейін Кассини сопақшасының теңдеуін келесі түрде аламыз

$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4$ немесе $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = b^4 - a^4$.

3.7-суретте Кассини сопақшасының теңдеуіне сәйкес келетін геометриялық фигуралар көрсетілген.



3.7-сурет

$\rho^4 - 2a^2\rho^2 cos2\varphi = b^4 - a^4$ теңдігі Кассини сопақшасының полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеуін анықтайды.

Декарт сопақшасы

Декарт сопақшасы – төртінші ретті жазық алгебралық қисық.

Анықтама. F_1және F_2 фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден сәйкес r_1 және r_2 арақашықтықтары p_1 және p_2 сандарына көбейтілген қосындысы тұрақты шама болып келетін жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орны Декарт сопақшасын анықтайды.

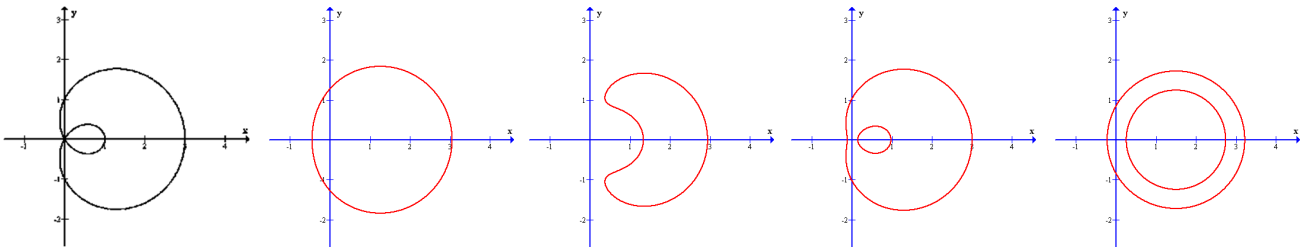
Анықтама бойынша: $p_1 r_1 + p_2 r_2 = d$.

Бұл қисық $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2) + c$ теңдеуімен өрнектеледі, мұнда a, b және c тұрақтылары p_1, p_2 және d параметрлерімен байланысты.

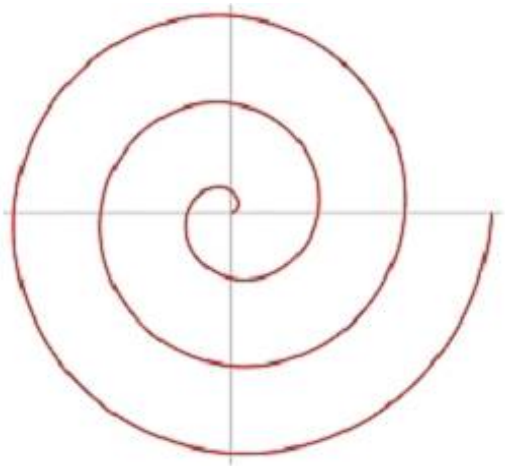
Егер $c = 0$ болса, онда Декарт сопақшасы Паскаль ұлуын көрсетеді.

Егер $p_1 = p_2$ болса, онда Декарт сопақшасы эллипсті, ал $p_1 = -p_2$ жағдайында гиперболаны көрсетеді.

Декарт сопақшасына мысалдар (3.8-сурет):



3.8-сурет



3.9 – сурет

Архимед шиыршығы – жуық фигура (3.9-сурет)

Анықтама. $\rho = OM$ арақашықтығы OV сәулесінің бұрылу бұрышына пропорционал M нүктесінің траекториясы Архимед шиыршығын анықтайды.

Анықтама бойынша $\rho = k\varphi$, мұнда k бір радианға тең бұрышқа бұрылғандағы M нүктесінің r сәулесі бойынша ығысуын білдіреді.

Астроида

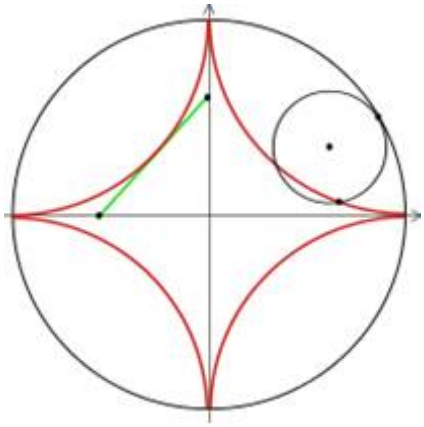
Радиусы r-ға тең шеңбер радиусы $R = 4r$ шеңберді іштей үйкеліссіз дөңгелесін дейік. Сонда ішкі шеңбердің кез келген нүктесі сызып шығатын жазық қисықты астроида деп атайды (3.10- сурет).

Декарттық тік бұрышты координаталар жүйесіндегі теңдеуі:

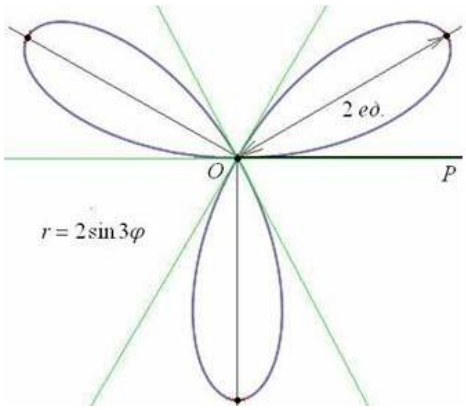
$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Параметрлік теңдеуі :$x = Rcos^3t,\ y = Rsin^3t.$

k жапырақты раушан қисығы – жуық фигура (3.11-сурет). Полярлық координаталар жүйесінде $\rho = asink\varphi$ теңдеуімен анықталады. Мұнда a және k параметрлері раушан қисығының өлшемін және жапырақтар санын білдіреді. Раушан қисығы радиусы a шеңберді іштей сызылған.



3.10-сурет



3.11-сурет

Декарт жапырағы (Декартов лист)

Тік бұрышты координаталар жүйесінде

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

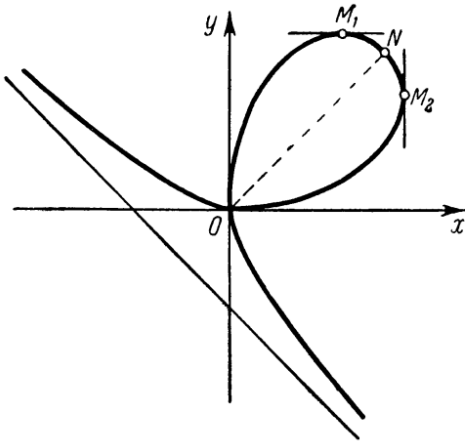
теңдеуімен анықталатын үшінші ретті қисықты Декарт жапырағы деп атайды (3.12-сурет).

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

жүйесі Декарт жапырағының параметрлік теңдеулерін көрсетеді.

$\rho = \frac{2acos\varphi sin\varphi}{cos^3\varphi + sin^3\varphi}$ теңдігі Декарт жапырағының полярлық теңдеуі.

Қисық $y = x$ түзуіне қатысты симметриялы, ал $y = -x - a$ түзуі оның асимптотасы болады.



3.12-сурет

Циклоида

Циклоида – жуық трансценденттік қисық сызық (3.13-сурет).

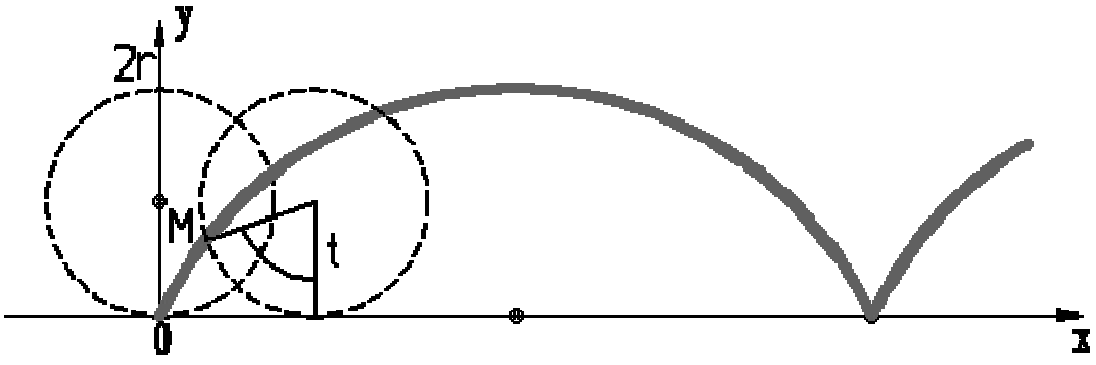
Анықтама. Түзу сызық бойымен сырғанамай дөңгелей қозғалатын дөңгелектің берілген нүктесінің сызатын траекториясы циклоиданы анықтайды.

Циклоиданың параметрлік теңдеулері:

$$x = r(t - sint)$$
$$y = r(1 - cost)$$

Декарттық координаталар жүйесіндегі теңдеуі:

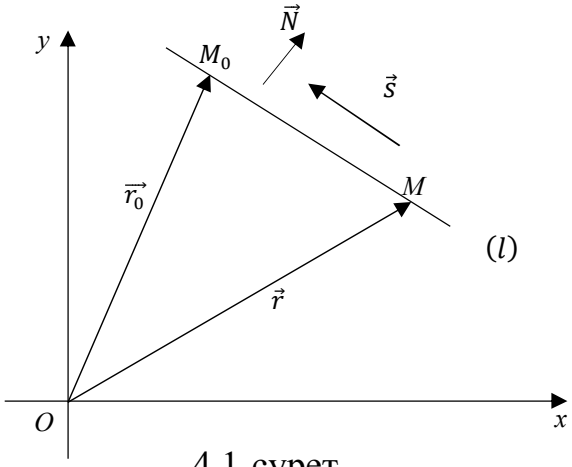
$$x = r\arccos\frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$



3.13-сурет

4. ТҮЗУ СЫЗЫҚТАР ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТАР

Тік бұрышты координаталар жүйесіне қатысты ағымдық нүктенің орны осы нүктенің радиус-векторы арқылы анықталсын дейік (4.1-сурет).



4.1-сурет

Еске түсіру. Нүктенің координаталары деп оның радиус-векторының координаталарын айтамыз.

Сонымен $\boldsymbol{r} = \{x, y\} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, мұнда $x = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i})$, $y = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{j})$.

Аксиома. Жазықтықта берілген бір нүктеден бір-бірімен беттеспейтін сансыз (ақырсыз) көп түзулер жүргізуге болады.

Жазықтықтағы түзудің бағдарын сол түзудің нормаль векторы көрсетеді.

Анықтама. Түзуге перпендикуляр нөлдік емес векторды оның нормаль векторы деп атайды.

Анықтама. Жазықтықтағы нүктелердің координаталарын байланыстыратын коэффициенттерінің бәрі бірдей нөлге тең емес

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0 \qquad (4.1)$$

сызықтық теңдеуін жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі деп атайды.

l: $Ax + By + C = 0$ жалпы теңдеуімен берілген l түзуі $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтсін делік. Демек M_0 нүктесінің координаталары түзудің жалпы теңдеуін қанағаттандырады:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Түзудің жалпы теңдеуінен соңғы теңдікті мүшелеп шегерсек, онда берілген бір $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (4.2)$$

теңдеуін аламыз.

$M(x, y)$ жазықтықтың кез келген нүктесі делік. M нүктесі M_0 нүктесі арқылы өтетін l түзуіне тиісті болу үшін $\boldsymbol{M_0M}$ векторы

түзудің нормаль векторына перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$(\boldsymbol{M_0M}, \boldsymbol{N}) = 0. \qquad (4.3)$$

Мұнда $\boldsymbol{M_0M} = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j}$, ал жалпы теңдеуімен берілген l түзуінің нормаль векторының координаталары әзірге белгісіз деп санайық және оларды N_x, N_y арқылы белгілейік. Сонда (4.3) векторлық теңдеуі

$N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) = 0$ (4.4) теңдеуін береді. Бұл теңдеуді берілген бір нүкте арқылы өтетін (4.2) теңдеуімен салыстырсақ,

$$N_x = A, \quad N_y = B$$

болатыны шығады.

Қорытынды. Егер жазықтықтағы түзу өзінің $Ax + By + C = 0$ жалпы теңдеуімен берілсе, онда A,B коэффициенттері нормаль вектордың координаталары, яғни $\boldsymbol{N} = \{A, B\}$ деген мағлұмат аламыз.

Координат осьтеріне қатысты түзудің орналасуы

Егер l түзуі координаталар жүйесінің бас нүктесі арқылы өтетін болса, онда (4.1) теңдеуінен

$$Ax + By = 0$$

теңдеуі шығады. Сондықтан $C = 0$ шарты түзудің координат бас нүктесі арқылы өтуінің қажетті және жеткілікті шарты.

Егер l түзуі x осіне параллель болса, онда оның кез келген нормаль векторы y осіне параллель, яғни $\boldsymbol{N} = B\boldsymbol{j}$. Сонымен x осіне параллель түзулердің теңдеуі

$$By + C = 0, B \neq 0.$$

Осыған ұқсас y осіне параллель түзулердің теңдеуі

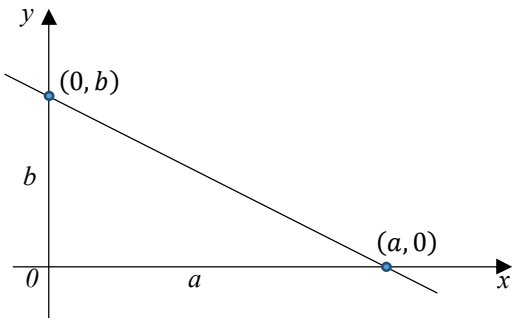
$$Ax + C = 0, A \neq 0.$$

Екі осьті де қиып өтетін түзудің теңдеуін қарастырайық ($A \neq 0$ және $B \neq 0$). Мұндай теңдеулер үшін $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$. Айталық $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ болсын. Сонда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4.5)$$

түріндегі теңдеу жазықтықтағы түзудің кесінді түрінде берілген теңдеуін анықтайды.

a және b сандарының жай геометриялық мағынасы 4.2-суретте көрсетілген.



4.2-сурет

Ескерту. Түзудің графигін салуға оның кесінді түрінде берілген теңдеуі ыңғайлы.

Егер $B \neq 0$ болса, онда түзудің жалпы теңдеуін

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{немесе}$$

$$y = kx + b \tag{4.6}$$

түріне келтіруге болады. Мұнда $k = -\frac{A}{B}$ түзудің бұрыштық коэффициенті деп аталады.

Жазықтықта өздерінің жалпы теңдеулері арқылы

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

түзулері берілсін делік. Бұл түзулердің коэффициенттерінен

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \quad \text{және} \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

матрицаларын құрайық.

Жазықтықтағы түзудің бағдарын оның нормаль векторы анықтайды. Сондықтан бұл түзулердің жазықтықта орналасуын олардың нормаль векторларына қатысты да айтуға болады.

1. Егер түзулердің нормаль векторлары өзара коллинеар болмаса, онда бұл түзулер міндетті түрде қиылысады. Ал қиылысу нүктесінің координаталарын

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

сызықтықтеңдеулержүйесініңшешіміберeді.

2. Егер нормаль векторлар өзара коллинеар болса, онда олардың $[\boldsymbol{N_1}, \boldsymbol{N_2}]$ векторлық көбейтіндісі нөлдік векторға тең. Бұдан олардың

сәйкес координаталарының $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ пропорционалдығы және l_1, l_2 түзулерінің параллельдігі шығады.

3. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ теңдіктері орындалғанда және тек сонда ғана l_1 және l_2 түзулері беттеседі.

Дәлелдеуі. $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін қарастырайық. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ шарты жүйенің үйлесімділігін көрсетеді, өйткені

$$rangA = rangB = 1.$$

Ал үйлесімді жүйенің рангысы белгісіздердің санынан кіші болуы l_1 және l_2 түзулерінің беттесуін, яғни жүйенің ақырсыз шешімдерінің бар болуын көрсетеді.

4. l_1 және l_2 түзулерінің арасындағы бұрыш деп бір-бірін 180º-қа дейін толықтыратын екі бұрыштың бірін айтады.

5. Бұрыштық коэффициенттерімен берілген l_1: $y = k_1x + b_1$ және l_2: $y = k_2x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенсі $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ теңдігімен анықталады. Бұдан

а) $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$ шарттары l_1 және l_2 түзулерінің беттесуін;

б) $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$ шарттары l_1 және l_2 түзулерінің параллельдігін;

в) $k_1 \neq k_2$ шарты l_1 және l_2 түзулерінің бір нүктеде қиылысуын;

г) $k_1 \cdot k_2 = -1$ шарты l_1 және l_2 түзулерінің перпендикулярлығын көрсетеді.

Жазықтықтағы түзудің канондық және параметрлік теңдеулері

Жазықтықта $\boldsymbol{S} = \{m, n\}$ векторына параллель және $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен өтетін l түзуі берілсін дейік.

Осы түзудің теңдеуін табайық. Ол үшін жазықтықтың бойынан радиус- векторы $\boldsymbol{r}$ болатын кез келген $M(x, y)$ ағымдық нүктесін қарастырайық.

$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}$ векторы $\boldsymbol{S} = \{m, n\}$ векторына коллинеар болғанда, тек сонда ғана, M нүктесі l түзуіне тиісті болады (4.1-сурет). Демек $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = t\boldsymbol{S}$ немесе

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{S}. \tag{4.7}$$

Мұнда t шамасын параметр деп атайды, шын мәнісінде оны M ағымдық нүктесінің ішкі координатасы деп атаған жөн.

Егер M ағымдық нүктесінің декарттық (сыртқы) координаталарын оның параметрі (ішкі координатасы) арқылы өрнектейтін болсақ, онда l түзуінің

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in (\alpha, \beta) \tag{4.8}$$

параметрлік теңдеуін аламыз. Егер t уақытты көрсетсе, онда (4.8) теңдеуі ағымдық нүктенің l түзуінің бойымен қозғалғандағы траекториясын көрсетеді.

(4.7) теңдеу түзудің векторлық түрдегі параметрлік теңдеуі деп аталады. Векторлық түрдегі түзудің параметрлік теңдеуін координаталары арқылы ашып жазсақ, түзудің координаттық түрдегі параметрлік теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \end{cases} \text{мұнда } t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Түзудің координаттық түрдегі параметрлік теңдеуіндегі t параметрінен құтылсақ, онда түзудің канондық теңдеуі алынады:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}. \tag{4.10}$$

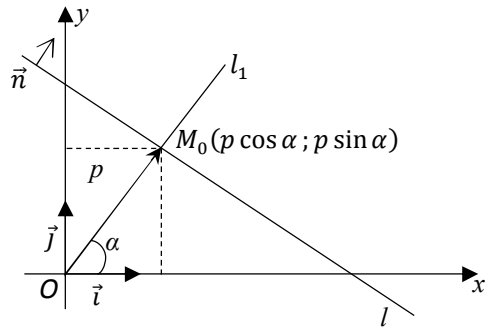
Анықтама. Жазықтықта берілген түзуге коллинеар кез келген вектор оның ***бағыттауыш векторы*** деп аталады.

Канондық теңдеуімен анықталатын l түзуі дербес жағдайда жазықтықтың $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері арқылы өтсін дейік. Сонда l түзуінің бағыттауыш векторы ретінде $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$ векторын алуға болады. Демек жазықтықта берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{4.11}$$

Түзудің нормаль теңдеуі

Координат бас нүктесі арқылы өтпейтін түзулер үшін түзудің нормаль теңдеуі деп аталатын арнайы түрлері жиі қолданылады.



4.3-сурет

l – координат бас нүктесінен өтпейтін түзу, ал $\boldsymbol{n}$ – сыртқы бірлік нормаль дейік. Координат бас нүктесінен l түзуіне перпендикуляр l_1 түзуін жүргізейік және бұл түзулердің қиылысу нүктесін M_0 әрпімен белгілейік. Сонда $\boldsymbol{n}$ мен $\boldsymbol{OM_0}$ векторлары коллинеар және бағыттас. $\boldsymbol{i}$ және $\boldsymbol{OM_0}$ векторларының арасындағы бұрышты α арқылы белгілейік, ал $p = |\boldsymbol{OM_0}|$ координат бас нүктесінен l түзуіне дейінгі арақашықтықты білдірсін. Сонда $\boldsymbol{n} = (cos\alpha)\boldsymbol{i} + (sin\alpha)\boldsymbol{j}$, ал $\boldsymbol{OM_0} = (pcos\alpha)\boldsymbol{i} + (psin\alpha)\boldsymbol{j}$. Бұдан – $M_0(pcos\alpha; psin\alpha)$, өйткені M_0 нүктесінің координаталары $\boldsymbol{OM_0}$ радиус - векторының координаталары арқылы анықталады.

l түзуінің теңдеуін анықтау үшін берілген бір M_0 нүктесінен өтетін түзудің теңдеуін жазайық

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Бұл теңдеуге M_0 нүктесі мен $\boldsymbol{n}$бірлік векторының координаталарын қоялық, сонда:

$$cos\alpha(x - pcos\alpha) + sin\alpha(y - psin\alpha) = 0 \text{ , немесе}$$

$$xcos\alpha + ysin\alpha - p(cos^2\alpha + sin^2\alpha) = 0.$$

Нәтижесінде

$$l:\ xcos\alpha + ysin\alpha - p = 0 \qquad (4.12)$$

теңдеуіне келеміз. Әдетте бұл теңдеуді түзудің нормаль теңдеуі деп атайды.

Жазықтықта l түзуі өзінің жалпы $l: Ax + By + C = 0$ теңдеуі арқылы берілсін дейік. Енді түзудің жалпы теңдеуінен оның нормаль теңдеуіне көшейік. Ол үшін түзудің жалпы теңдеуінің екі жағын бірдей μ параметріне көбейтіп, сол түзудің $l: \mu Ax + \mu By + \mu C = 0$ түріндегі нормаль теңдеуін алдық деп санайық.

Келесі қадамда түзудің соңғы алынған теңдеуін (4.12) нормаль теңдеуімен салыстыра отырып μ параметрінің мәндерін табамыз:

$$\mu A = cos\alpha, \quad \mu B = sin\alpha, \quad \mu C = -p.$$

Бұл теңдіктерден $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ формуласы бойынша анықталады. Формуладағы таңба C коэффициентінің таңбасына қарама-қарсы алынады.

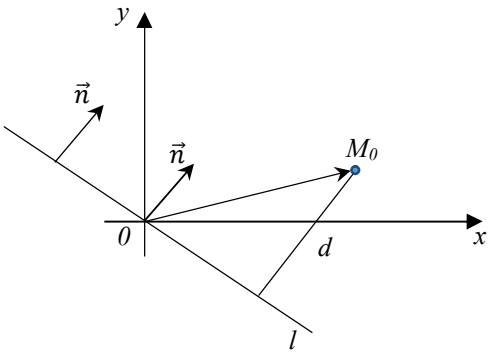
Ескерту. Түзу қандай теңдеуімен (нормаль, канондық, жалпы, т.б.) берілмесін олар тек қарастырылып отырған түзуді сипаттайтынын естен шығармау керек.

Нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық

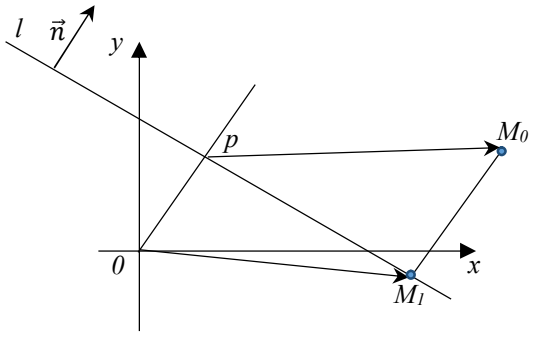
$l: Ax + By + C = 0$ жалпы теңдеуімен берілсін, ал $M_0(x_0, y_0)$ жазықтықтың қайсыбір нүктесі болсын. M_0 нүктесінен l түзуіне дейінгі арақашықтықты табудың формуласын қорытып шығарайық.

M_0 нүктесі мен l түзуінің координаталар жүйесіне қатысты орналасуының мүмкін болатын үш жағдайын қарастырайық:

а) l түзуі координат бас нүктесінен өтсін. Бұл жағдайда $l: Ax + By = 0$ теңдеуімен анықталады.



4.4-сурет



4.5-сурет

Егер M_0 нүктесінен l түзуіне дейінгі арақашықтықты d арқылы белгілесек, онда $\boldsymbol{OM_0}$ векторының $\boldsymbol{n}$ бірлік векторының бағытына түсірілген проекциясы осы арақашықтықты анықтайды (4.4-сурет). Демек

$$|\text{Пр}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{OM_0}| = \frac{|(\boldsymbol{OM_0},\boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|Ax_0+By_0|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|Ax_0+By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

б) l түзуі координат бас нүктесі арқылы өтпейді. O және M_0 нүктелері l түзуіне қатысты қарама-қарсы жақтарда орналасқан (4.5-сурет). Сонда

$$d = |\text{Пр}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{OM_0} - \text{Пр}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{OM_1}| =$$
$$= \frac{|(\boldsymbol{OM_0}, \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{OM_1}, \boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C - Ax_1 - By_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

өйткені $M_1 \in l$, яғни $Ax_1 + By_1 + C \equiv 0$.

в) O және M_0 нүктелері l түзуінің бір жағында жатқанда да тура осындай формуланы аламыз:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.13)$$

Кеңістіктегі жазықтық

Жазықтықтың жалпы теңдеуі. Кеңістіктегі нүктелердің координаталарын байланыстыратын коэффициенттерінің барлығы бірдей нөлге тең емес декарттық координаталар жүйесіне қатысты қарастырылатын

$$Ax + By + Cz + D = 0, \;\; A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

сызықтық теңдеуі ***кеңістіктегі жазықтықтың жалпы теңдеуі*** деп аталады.

Анықтама. Жазықтыққа перпендикуляр $\boldsymbol{N \neq 0}$ векторы осы жазықтықтың ***нормаль векторы*** деп аталады.

Кеңістіктегі жазықтық қайсыбір нормаль векторы мен жазықтыққа тиісті қандай да бір M_0 нүктесі арқылы бірмәнді анықталады.

Кеңістікте бекітілген декарттық координаталар жүйесіне қатысты (α)жазықтығы өзінің жалпы теңдеуімен берілсін дейік:

$$\alpha\colon\; Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Сонда M_0 нүктесінің α жазықтығына тиістілігі

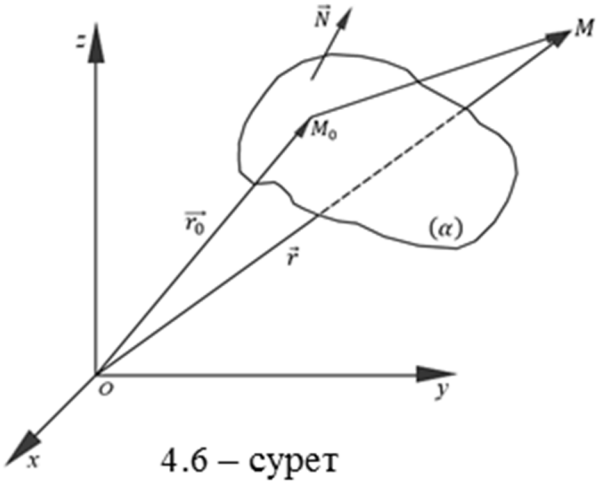
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

теңдігімен анықталады. (α) жазықтығының теңдеуінен соңғы теңдікті мүшелеп шегеріп, кеңістікте берілген бір $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Кеңістікте (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы және оған тиісті $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі және жазықтықтан тыс жатқан $M(x, y, z)$ ағымдық нүктесі берілсін дейік (4.6-сурет).

Ескерту. Ағымдық нүкте кеңістіктің кез келген нүктесін білдіреді.



4.6 – сурет

(α) жазықтығының нормаль векторын $\boldsymbol{N}$ арқылы белгілейік және оның N_x, N_y, N_z координаталарын әзірге белгісіз деп санайық. Сонда $\boldsymbol{N}$ векторының $\boldsymbol{M_0M}$ векторына ортогональдығы кеңістіктің кез келген M нүктесінің (α) жазықтығына тиістілігін көрсетеді:

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{M_0M}) = 0, \quad \text{бұдан}$$

$$N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0$$

Жоғарыда (α) жазықтығы M_0 нүктесі мен $\boldsymbol{N}$ нормальвекторы арқылы бірмәнді анықталатыны айтылған. Олай болса соңғы теңдеуді кеңістікте берілген бір нүкте арқылы өтетін (4.14) теңдеуімен салыстыра отырып келесі қорытындыға келеміз.

Қорытынды. Егер кеңістікте жазықтық өзінің $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ жалпы теңдеуімен берілсе, онда оның нормаль векторының координаталары $\{A, B, C\}$ болады, яғни $\boldsymbol{N} = \{A, B, C\}$.

Жазықтықтың координат осьтеріне қатысты орналасу белгілері

Кеңістікте декарттық координаталар жүйесі бекітілсін және қайсыбір (α) жазықтығы өзінің $Ax + By + Cz + D = 0$ жалпы теңдеуі арқылы берілсін дейік.

Егер (α) жазықтығы координат бас нүктесі арқылы өтетін болса, онда теңдеудің бос мүшесі $D = 0$. Кері тұжырым да дұрыс, яғни $D = 0$ болса, онда (α) жазықтығы координат бас нүктесінен өтеді.

Егер (α) жазықтығының нормаль $\boldsymbol{N} = \{A, B, C\}$ векторының бір компоненті нөлге тең болса, онда $\boldsymbol{N}$ векторы сәйкес оське перпендикуляр болады.

Мысалы $A = 0$ делік, онда

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{i}) = 0 \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0.$$

Сондықтан $By + Cz + D = 0$ жазықтығы x осіне параллель. Осыған ұқсас:

$Ax + By + D = 0$ жазықтығы y осіне параллель;

$Ax + Cz + D = 0$ жазықтығы z осіне параллель.

Егер $\boldsymbol{N}$ нормаль векторының кез келген екі компоненті нөлге тең болса, онда ол проекциясы нөлден өзгеше болатын оське параллель болады. Сонымен:

XOY жазықтығына параллель және z осіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі $-Cz + D = 0$;

XOY жазықтығының теңдеуі $-z = 0$;

YOZ жазықтығына параллель және x осіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі $-Ax + D = 0$;

YOZ жазықтығының теңдеуі $x = 0$;

XOZ жазықтығына параллель және y осіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі $-By + D = 0$;

XOZ жазықтығының теңдеуі $-y = 0$.

Кеңістіктегі жазықтықтың векторлық және параметрлік теңдеулері

Кеңістікте берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін

$$\alpha: \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (4.14)$$

теңдеуін жазайық (4.6-сурет). Мұнда $\boldsymbol{N} = \{A, B, C\}$ жазықтықтың нормаль векторы. Кеңістікте жазықтықтан тыс жатқан кез келген M нүктесі үшін $\boldsymbol{M_0M} \perp \boldsymbol{N}$ шарты оның жазықтыққа тиісті екенін білдіреді. Бұл векторлардың перпендикулярлық шартынан жазықтықтың

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{N}) = 0 \qquad (4.15)$$

векторлық теңдеуін аламыз, мұнда $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{M_0M}$.

Анықтама. Жазықтыққа параллель кез келген нөлдік емес вектор оның ***бағыттауыш векторы*** деп аталады.

Ескерту. Жазықтықтың кез келген екі бағыттауыш векторлары арқылы оның нормаль векторын анықтауға болады.

Өзара коллинеар емес $\boldsymbol{p}$ және $\boldsymbol{q}$ векторлары α: $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0},\boldsymbol{N})=0$ жазықтығының бағыттауыш векторлары делік. Сонда (α) жазықтығының нормаль векторы осы $\boldsymbol{p}$ және $\boldsymbol{q}$ векторларының векторлық көбейтіндісі болады: $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]$. Демек берілген M_0 нүктесі арқылы өтетін (α) жазықтығын

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}),[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]=([\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}],\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})=0$$

түрінде жазуға болады. Бұдан үш вектордың аралас көбейтіндісінің қасиеттеріне сүйене отырып жазықтықтың векторлық параметрлік теңдеуін аламыз:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}=t_1\boldsymbol{p}+t_2\boldsymbol{q}. \tag{4.16}$$

Жазықтықтың әрбір нүктесіне t_1 және t_2 параметрлерінің екі мәні сәйкес келеді.

Жазықтықтың векторлық параметрлік теңдеуін координаттық түрде жазсақ, онда келесі түрдегі жазықтықтың параметрлік теңдеулерін аламыз:

$$\begin{aligned} x-x_0&=p_1t_1+q_1t_2,\\ y-y_0&=p_2t_1+q_2t_2,\\ z-z_0&=p_3t_1+q_3t_2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

мұнда $\boldsymbol{p}=\{p_1;\ p_2;\ p_3\}$, $\boldsymbol{q}=\{q_1;\ q_2;\ q_3\}$. Сонда кеңістікте берілген M_0 нүктесі арқылы өтетін (α) жазықтығының теңдеуін

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=0 \tag{4.18}$$

түрінде анықтауға болады.

Дербес жағдайда кеңістікте бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін (4.18) формуласы бойынша анықтайық.

Кеңістікте $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ және $M_3(x_3,y_3,z_3)$ нүктелері берілсін дейік. Ізделініп отырған жазықтықтың

бағыттауыш векторларының рөлін өзара коллинеар емес $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{M_1M_2}$ және $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{M_1M_3}$ векторлары атқарсын. Сонда $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{p}$ және $\boldsymbol{q}$ аралас көбейтіндісі үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін анықтайды:

$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}, [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]) = 0$ немесе

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Жазықтықтың нормаль теңдеуі. Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық

Жазықтықтың нормаль теңдеуі деп аталатын теңдеуі координат бас нүктесінен өтпейтін жазықтықтар үшін жиі қолданылады. Алдымен жазықтықтың сыртқы бірлік $\boldsymbol{n}$ нормальвекторы анықталады. Егер $\boldsymbol{n}$ векторы x, y, z осьтерімен сәйкес α, β, γ бұрыштарын құрса, онда $\boldsymbol{n} = (cos\alpha)\boldsymbol{i} + (cos\beta)\boldsymbol{j} + (cos\gamma)\boldsymbol{k}$.

Мұнда $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ шамалары $\boldsymbol{n}$ нормаль векторының бағыттауыш косинустары деп аталады және $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$. Сондықтан ізделініп отырған жазықтықтың теңдеуі

$$xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma + D = 0$$

түрінде жазылады.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесін координат бас нүктесінің ізделініп отырған жазықтыққа түскен проекциясы дейік.

Анықтама. $\boldsymbol{OM_0}$ векторына коллинеар және бағыттас вектор жазықтықтың сыртқы нормалін анықтайды. Сондықтан

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{OM_0}) = |\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{OM_0}| cos0^\circ = |\boldsymbol{OM_0}| = p.$$

Мұнда $p = |\boldsymbol{OM_0}| > 0$ координат бас нүктесінен ізделініп отырған жазықтыққа дейінгі арақашықтық. Басқа жағынан

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{OM_0}) = x_0cos\alpha + y_0cos\beta + z_0cos\gamma$$

Соңғы теңдіктерден $x_0cos\alpha + y_0cos\beta + z_0cos\gamma = p$ теңдігі шығады. Ізделініп отырған жазықтық $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетіндіктен

$$x_0cos\alpha + y_0cos\beta + z_0cos\gamma + D = 0$$

теңдігін аламыз. Бұдан $D = -(x_0cos\alpha + y_0cos\beta + z_0cos\gamma + D) = -p$. Демек ізделініп отырған жазықтықтың теңдеуі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (4.19)$$

түрінде жазылады.

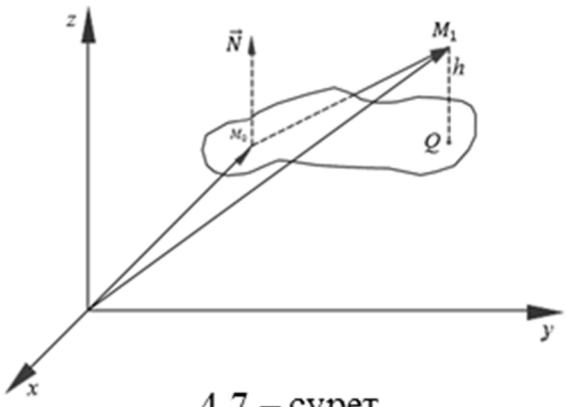
(4.19) теңдеуін ***жазықтықтың нормаль теңдеуі*** деп атайды.

Егер жазықтық өзінің жалпы теңдеуімен берілсе, онда оның нормаль теңдеуіне көшу үшін (4.1) теңдеуінің екі жағын бірдей $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ нормаланған көбейткішке көбейту керек. Нормаланған көбейткіштің таңбасы D бас мүшесінің таңбасына қарама-қарсы алынады.

Енді кеңістікте берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесінен (α) жазықтығына дейінгі арақашықтықты табу формуласын қорытып шығарайық.

(α): $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы және $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\alpha)$ нүктесі берілсін.

Анықтама. Егер кез келген жазықтық үшін $\boldsymbol{N} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1$ болса, онда сол жазықтықтың $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{N}) = 0$ векторлық теңдеуін оның нормаль (қалыпты) теңдеуі деп атайды.



4.7 – сурет

M_0 нүктесі (α) жазықтығында жатқан нүкте болғандықтан

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$

M_1 жазықтықтан сырт жатқан нүкте. Біздің негізгі мақсатымыз M_1 нүктесінен (α) жазықтығына дейінгі, яғни $|M_1Q| = h$ арақашықтығын табу. Мұнда Q нүктесі (α) жазықтығы мен M_1Q түзуінің қиылысу нүктесі (4.7-сурет). Сонда

$$h = |\text{Пр}_{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{M_0M_1}| = \frac{|(\boldsymbol{M_0M_1}, \boldsymbol{N})|}{|\boldsymbol{N}|} = |(\boldsymbol{M_0M_1}, \boldsymbol{N})|,$$

өйткені $|\boldsymbol{N}| = 1$. Немесе

$$h = |(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{N})| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= -\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Сонымен $h = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. (4.20)

„Кесінді“ түрінде берілген жазықтықтың теңдеуі

Координат бас нүктесінен өтпейтін (α) жазықтығы Ox, Oy және Oz координат осьтерін сәйкес $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ және $C(0;0;c)$ нүктелерінде қиып өтсін дейік. Сонда (α) жазықтығының жалпы теңдеуінен жазықтықтың „кесінді“ түрінде анықталған $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ теңдеуін аламыз, мұнда $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$ және $c=-\frac{D}{C}$.

Екі жазықтықтың орналасу белгілері

Тік бұрышты координаталар жүйесінде жалпы теңдеулерімен $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ және $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ жазықтықтары берілсін дейік.

Анықтама. (α_1) және (α_2) жазықтықтарының арасындағы ψ бұрышы деп осы жазықтықтардың сәйкес нормаль векторларының арасындағы бірін-бірі 180°
дейін толықтыратын екі бұрыштың сүйір бұрышын айтамыз.

Скаляр көбейтіндінің анықтамасы бойынша

$$cos\psi = \frac{(\boldsymbol{N_1},\boldsymbol{N_2})}{|\boldsymbol{N_1}||\boldsymbol{N_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

1. $(\alpha_1)\perp(\alpha_2)\Rightarrow \boldsymbol{N_1}\perp\boldsymbol{N_2}$. Нормаль векторлардың ортогональдық шартынан бұл жазықтықтардың $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ перпендикулярлық шарты шығады.

2. $(\alpha_1)||(\alpha_2)\Rightarrow \boldsymbol{N_1}||\boldsymbol{N_2}$. Нормаль векторлардың коллинеарлық шартынан олардың сәйкес координаталарының пропорционалдығы, яғни (α_1) және (α_2) жазықтықтарының параллельдік белгісі шығады: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$.

3. $(\alpha_1)\equiv(\alpha_2)\Rightarrow A_1=kA_2;\ B_1=kB_2;\ C_1=kC_2$ және $D_1=kD_2$ теңдіктері шығады. Бұдан (α_1) және (α_2) жазықтықтарының беттесу шарты келесі түрде анықталады: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Кеңістіктегі түзу

Түзудің кеңістіктегі теңдеуі. Түзу өзінің бойында жатқан нүкте мен бағыттауыш векторы арқылы кеңістікте толық анықталады. Сонымен кеңістікте l түзуі, $M_0 \in l$ нүктесі және түзудің $\boldsymbol{s}$ бағыттауыш векторы берілсін дейік.

$\boldsymbol{r_0}$ және $\boldsymbol{r}$ арқылы M_0 нүктесінің радиус – векторы мен M нүктесінің радиус- векторын белгілейік. M нүктесі – l түзуінің бойындағы кез келген нүкте, яғни ағымдық нүкте.

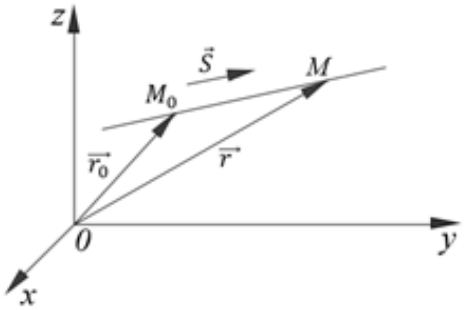
Сонда $\boldsymbol{M_0M = r - r_0}$ векторы $\boldsymbol{s}$ векторына коллинеар болады.

Сондықтан $\boldsymbol{r - r_0 = ts}$, мұнда t қандай да бір сан.

Демек l түзуінің ағымдық нүктесінің радиус - векторы үшін әдетте түзудің векторлық теңдеуі деп аталатын

$$\boldsymbol{r = r_0 + ts} \tag{4.21}$$

теңдеуін аламыз.



4.8 – сурет

Кеңістіктегі түзудің (4.21) түріндегі векторлық теңдеуін координаталар осьтеріне проекциялап, сол түзудің

$$x - x_0 = mt;\ y - y_0 = nt;\ z - z_0 = pt, \tag{4.22}$$

түріндегі параметрлік теңдеулерін аламыз, мұнда $\boldsymbol{s} = \{m, n, p\}$. Бұлай аталу себебі l түзуінің бойындағы M ағымдық нүктесінің орны $t \in (-\infty, +\infty)$ параметрі бойынша сипатталады.

(4.22) жүйесінен параметрді шығарып тастау үшін жүйенің әрбір теңдеуінен t -ны табайық:

$$t = \frac{x-x_0}{m},\ \ t = \frac{y-y_0}{n},\ \ t = \frac{z-z_0}{p}.$$

Бұдан кез келген $M(x, y, z) \in l$ нүктесі үшін

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \tag{4.23}$$

арақатынасының орындалатынына көз жеткіземіз.

(4.23) теңдеулер жүйесі ***түзудің канондық теңдеулері*** деп аталады.

Кейбір дербес жағдайларын атап өтейік.

1. Егер l түзуі қандай да бір координат осіне перпендикуляр болса, онда l түзуінің бойында жатқан кез келген вектордың оське түскен проекциясы нөлге тең. Мысалы, егер l түзуі x осіне перпендикуляр болса, онда $m = 0$. Бұл жағдайда l түзуінің теңдеуі $\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \end{cases}$ түрінде жазылады. Алайда бұл жағдайда түзудің канондық теңдеуін $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ түрінде жазу қабылданған.

2. Осыған ұқсас егер l түзуі екі координат осьтеріне перпендикуляр болса, мысалы x және y осьтеріне, онда оның канондық теңдеуі $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{p}$ түрінде жазылады, және бұл канондық теңдеу $\begin{matrix} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0 \end{matrix}$ теңдеулер жүйесіне эквивалентті, демек l z осіне параллель түзуді анықтайды.

Түзудің (4.23) канондық теңдеуінен кеңістікте берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$ және $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін қорытып шығарайық. Ол үшін M_1 және M_2 нүктелері арқылы өтетін l түзуінің бағыттауыш векторы ретінде осы түзудің бойында жататын $\boldsymbol{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ векторын алайық. Сонда

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4.24)$$

теңдеуі берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін анықтайды.

Екі түзу арасындағы бұрыш. Кеңістікте l_1 және l_2 түзулері сәйкес канондық теңдеулер арқылы берілсін дейік.

$$l_1:\ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$
$$l_2:\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Осы түзулердің арасындағы бұрыш деп олардың $\boldsymbol{s_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$ және $\boldsymbol{s_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$ бағыттауыш векторларының арасындағы бұрышты немесе оны $\pi -$ ға дейін толықтыратын іргелес бұрышын айтады. Сондықтан

$$cos\varphi = \frac{|(\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2})|}{|\boldsymbol{s_1}||\boldsymbol{s_2}|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Егер түзулер параллель болса, онда $\boldsymbol{s_1}$ және $\boldsymbol{s_2}$ векторлары коллинеар. Бұдан екі түзудің параллельдік шарты $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ түрінде жазылады.

Егер екі түзу бір-бірімен перпендикуляр болса, онда $cos\varphi = 0$. Демек екі түзудің перпендикулярлық шарты $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ теңдігімен анықталады.

Екі түзудің бір жазықтықта орналасу шарты

$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ түзулері берілсін дейік. l_1 түзуінің бойында $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі және $\boldsymbol{s_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$ векторы, ал l_2 түзуінің бойында $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктесі және $\boldsymbol{s_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$ векторы жатады. $\boldsymbol{M_1 M_2}$, $\boldsymbol{s_1}$ және $\boldsymbol{s_2}$ векторларының компланарлық шарты l_1 және l_2 түзулерінің бір жазықтықта жатуының қажетті және жеткілікті шарттарын көрсетеді.

Үш вектордың компланарлық шартынан

$$(\boldsymbol{M_1 M_2}, \boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}) = 0$$

теңдігі немесе ашып жазсақ

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

анықтауыш түріндегі теңдікті аламыз.

Кеңістіктегі түзу және жазықтық

Екі жазықтықтың қиылысуынан пайда болатын түзу.

Анықтама. Кеңістіктегі түзуді жалпы теңдеулерімен берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығы ретінде қарастыруға болады:

$$\begin{cases}(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ (\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.\end{cases} \quad (4.25)$$

Бұл түрде анықталған түзудің теңдеуін оның жалпы теңдеуі деп атайды. Анықтамадан $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ канондық теңдеуімен берілген қандай да бір түзуді $\begin{cases}\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}\\ \frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}\end{cases}$ жазықтықтарының қиылысу сызығы ретінде қарастыруға болатыны шығады.

$l = (\alpha_1) \times (\alpha_2)$ және $\boldsymbol{N_1} = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$, $\boldsymbol{N_2} = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ векторлары (α_1), (α_2) жазықтықтарының сәйкес нормаль векторлары дейік. l түзуінің бойында жатқан кез келген вектор $\boldsymbol{N_1}$ және $\boldsymbol{N_2}$ векторларына перпендикуляр болады. $\boldsymbol{N_1}$ және $\boldsymbol{N_2}$ векторларыныңвекторлық көбейтіндісі l түзуінің бағыттауыш

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{N_1}, \boldsymbol{N_2}]$$

векторын береді. Демек кеңістікте жалпы теңдеуімен берілген l түзуінің канондық теңдеуі келесі түрде жазылады:

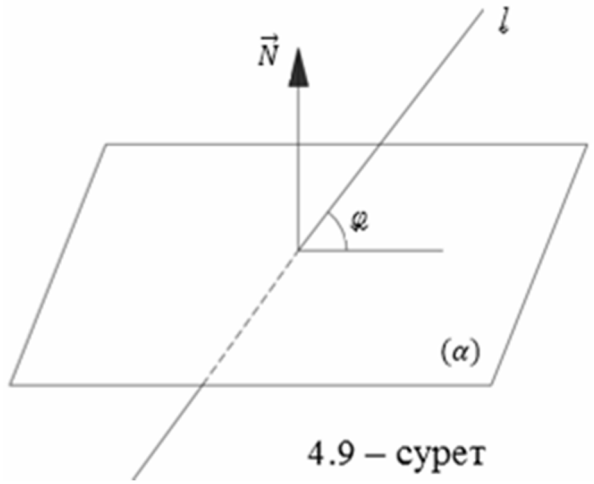
$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}. \quad (4.26)$$

Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

Анықтама. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп түзу мен сол түзудің жазықтыққа түскен проекциясының арасындағы бұрышты айтады.

l: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ түзуі мен (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы берілсін дейік. φ бұрышы l түзуі мен (α) жазықтығының арасындағы бұрыш болсын. Сонда l түзуінің бойында жатқан $\boldsymbol{S} = \{m, n, p\}$ бағыттауыш векторы мен(α) жазықтығының $\boldsymbol{N}$ нормаль векторының арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ тең (4.9 - сурет). Бұдан

$$sin\varphi = \left|cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)\right| = \frac{|(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S})|}{|\boldsymbol{N}||\boldsymbol{S}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$



4.9 – сурет

Егер l түзуі мен (α) жазықтығы параллель болса, онда $sin\varphi = 0$, демек

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Егер l түзуі мен (α) жазықтығы перпендикуляр болса, онда $\boldsymbol{N}$ және $\boldsymbol{S}$ векторлары коллинеар. Сондықтан l түзуі мен (α) жазықтығының перпендикулярлық шарты $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ түрінде жазылады.

Түзу мен жазықтықтың қиылысуы. l: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ түзуі мен (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығының қиылысу нүктесін табайық. Ол үшін алдымен түзудің канондық теңдеуінен оның $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$ параметрлік теңдеулеріне көшейік. l түзуі мен (α) жазықтығының қиылысу нүктесіне сәйкес келетін t параметрінің мәнін табайық. Қиылысу нүктесінің (x^*, y^*, z^*) координаталары жазықтықтың теңдеуін қанағаттандырады. Демек

$Ax^* + By^* + Cz^* + D = 0$ немесе

$$A(x_0 + mt^*) + B(y_0 + nt^*) + C(z_0 + pt^*) + D = 0.$$

Егер $Am + Bn + Cp \neq 0$ болмаса, (яғни l түзуі мен (α) жазықтығы параллель болмаса) онда

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Өз кезегінде $t = t^*$ мәнінде қиылысу нүктесінің координаталары табылады.

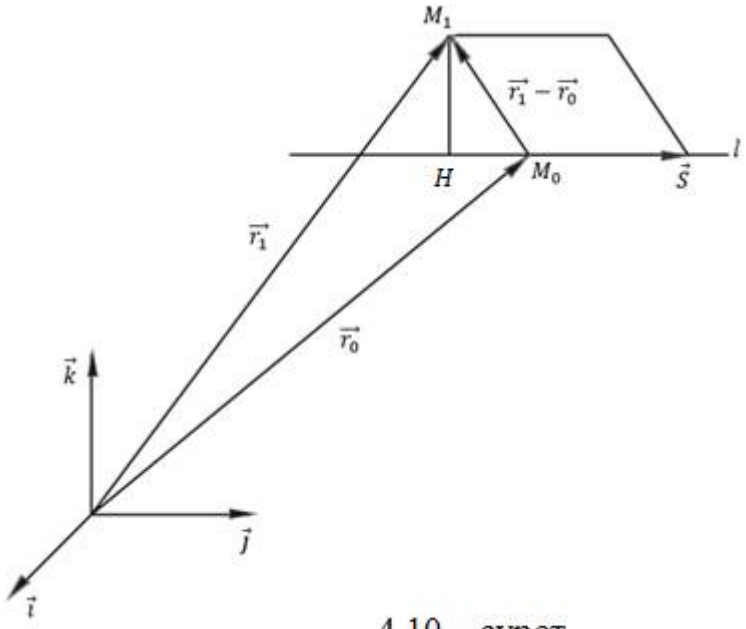
Нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық. Кеңістікте M_1 нүктесінен l түзуіне дейінгі арақашықтықты табу үшін $\boldsymbol{r_1 - r_0}$ векторы мен l түзуінің $\boldsymbol{S}$ бағыттауыш векторын параллелограмға дейін толықтырамыз (4.10-сурет).

Сонда параллелограмның M_1H биіктігі ізделініп отырған арақашықтық болады.

$$|\boldsymbol{S}| \cdot |M_1H| = |[\boldsymbol{r_1 - r_0}, \boldsymbol{S}]| \Rightarrow |M_1H| = \frac{|[\boldsymbol{r_1 - r_0}, \boldsymbol{S}]|}{|\boldsymbol{S}|}. \qquad (4.27)$$

Кеңістіктегі түзу үшін бұл өрнектің координаталар түріндегі жазылуын келтірмейміз.

Тік бұрышты координаталар жүйесінде (l): $Ax + By + C = 0$ жалпы теңдеуімен берілген жазықтықтағы түзуді қарастырайық. Түзудің бағыттауыш векторы ретінде $\boldsymbol{S} = \{-B; A\}$ векторын алайық. Жазықтықта берілген $M_1(x_1; y_1)$ нүктесінен l түзуіне дейінгі арақашықтықты табу үшін (4.27) формуласын ашып жазайық:



4.10 – сурет

$$|M_1H| = \frac{|(x_1 - x_0)A - (y_1 - y_0)(-B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

мұнда $M_0(x_0;\ y_0) \in l$. Демек $Ax_0 + By_0 + C = 0$ немесе $C = -Ax_0 - By_0$.

$$|M_1H| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Есеп шығару үлгілері

1-мысал. а) $A(2,3)$ нүктесінен өтетін және $\boldsymbol{a} = \{-1; 4\}$ векторына параллель;

б) $A(2,3)$ және $B(2,7)$ нүктелерінен өтетін;

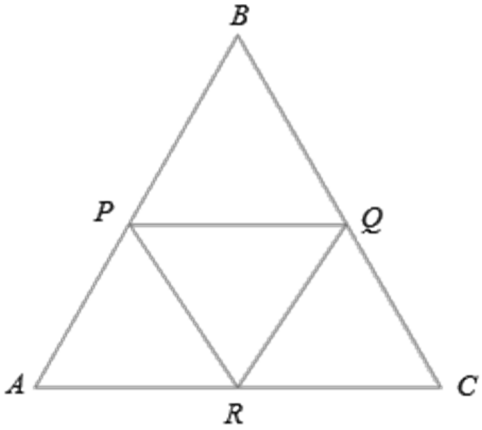
в) $M_0(-1; 0)$ нүктесінен өтетін және $\boldsymbol{n} = \{5; 2\}$ векторына перпендикуляр түзудің теңдеуін жаз.

Шешуі. а) жазықтықтағы түзудің (4.10) канондық теңдеуі бойынша $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{4}$;

б) (4.11) жазықтықта берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі бойынша $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{4}$;

в) (4.2) жазықтықта берілген бір нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі бойынша $A(x+1)+By=0$ немесе $5(x+1)+2y=0$.

2-мысал. Үшбұрыштың қабырғаларының $P(2;3)$, $Q(4;-1)$ және $R(-3;5)$ орталары берілген. Үшбұрыштың қабырғаларының теңдеулерін жаз (4.11-сурет).



4.11-сурет

Шешуі. Мектеп бағдарламасынан белгілі үшбұрыштың орта сызығының қасиетін пайдаланамыз. Мысалы, AB қабырғасының теңдеуін тапқымыз келеді. Ол үшін алдымен (AB) түзуінің бағыттауыш векторы $\boldsymbol{RQ}=\{7;\ -6\}$ табамыз. Содан кейін P нүктесі арқылы өтетін (AB) түзуінің $\frac{x-2}{7}=\frac{y-3}{-6}$ канондық теңдеуін жазамыз. Канондық теңдеуден (AB) түзуінің $(AB):\ 6x+7y-33=0$ жалпы теңдеуін аламыз. Қалған (AC) және (BC) қабырғаларының теңдеулері де осы жолмен алынады.

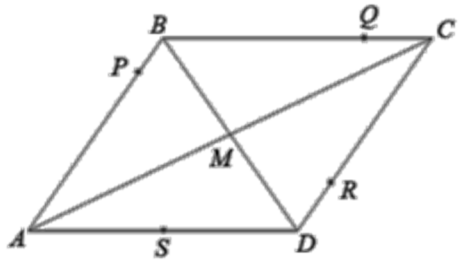
3-мысал. Диагональдары $M(1;6)$ нүктесінде қиылысатын, ал AB, BC, CD, DA қабырғалары сәйкес $P(3;0)$, $Q(6;6)$, $R(3;9)$, $S(-5;4)$ нүктелері арқылы өтетін параллелограмның қабырғаларының теңдеуін құр және параллель қабырғаларының арасындағы қашықтықты тап (4.12-сурет).

Шешуі. k бұрыштық коэффициенті белгілі және берілген $M(x_0,y_0)$ нүктесі арқылы өтетін $y-y_0=k(x-x_0)$ теңдеуін өзара параллель AB және AC қабырғаларының теңдеулерін жазу үшін пайдаланамыз:

$(AB):\ \ y=k_{AB}(x-3);$

$(CD):\ \ y-9=k_{AC}(x-5),$

мұнда $k_{AB}=k_{AC}=k.$



4.12-сурет

Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. Демек

$$x_M = \frac{x_A+x_C}{2} = 1;\ y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = 6;\ \text{бұдан}\ \begin{cases} x_A + x_C = 2 \\ y_A + y_C = 12. \end{cases}$$

(AB) және (DC) түзулерінің теңдеулерінен

$y_A = k(x_A - 3)$ және $y_C = k(x_C - 5) + 9$.

Сонда

$y_A + y_C = k(x_A - 3) + k(x_C - 5) + 9 = k(x_A + x_C) - 8k + 9 = 12$

немесе $2k - 8k + 9 = 12 \Rightarrow k = -{}^{1}/_{2}$.

$(AB):\quad y = k_{AB}(x-3) = -\frac{1}{2}(x-3)$ немесе $x + 2y - 3 = 0$;

$(CD):\quad y = k_{AC}(x-5) + 9 = -\frac{1}{2}(x-5) + 9$ немесе $x + 2y - 23 = 0$.

Осылай пайымдау арқылы (BC): $2x - y - 6 = 0$ және (AD): $2x - y + 14 = 0$ қабырғаларының теңдеулерін табамыз.

(AB) және (DC) параллель түзулерінің арасындағы h_1 қашықтық P нүктесінен (DC) түзуіне дейінгі арақашықтыққа тең:

$$h_1 = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 23|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

(BC) және (AD) түзулерінің арасындағы h_2 қашықтық Q нүктесінен (AD) түзуіне дейінгі арақашықтыққа тең:

$$h_2 = \frac{\left|Ax_Q + By_Q + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 6 - 1 \cdot 6 + 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

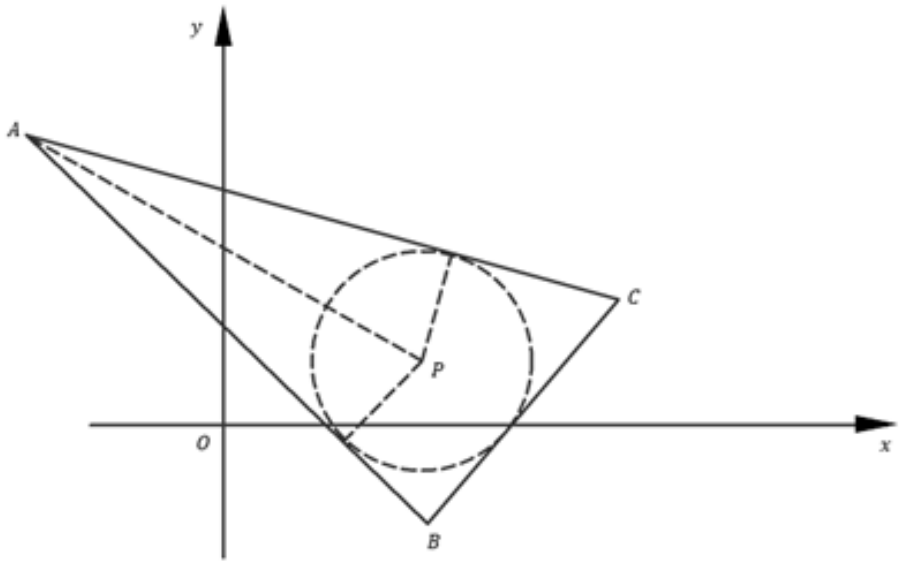
4-мысал. ABC үшбұрышының $A(-2;4)$, $B(5;-3)$ және $C(6;4)$ төбелерінің координаталары белгілі. Үшбұрышты іштей сызылған шеңбердің центрінің координаталарын және оның радиусын тап (4.13-сурет).

Шешуі. Бірінші шешім. Үшбұрышты іштей сызылған шеңбердің центрі оның биссектрисаларының қиылысу нүктесінде жатады.

Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің (4.11) теңдеуін пайдаланып, ABC үшбұрышының қабырғаларының теңдеулерін жазайық:

$$(AB):\quad x - 7y - 26 = 0;$$
$$(AC):\quad x - y - 2 = 0;$$
$$(BC):\quad 7x - y - 38 = 0.$$

$P(x, y)$ нүктесі AB және AC қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатқанда, тек сонда ғана, биссектрисаға тиісті болады. Демек $\rho(P; AC) = \rho(P; AB)$ теңдігі биссектрисаның теңдеуін анықтайды:



4.13-сурет

$$\frac{|x-7y-26|}{\sqrt{1+49}} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad |x-7y-26| = 5|x-y-2| \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-7y-26 = 5x-5y-10, \\ x-7y-26 = -5x+5y+10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1(x,y)=0, \\ x-2y-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_2(x,y)=0. \end{cases}$$

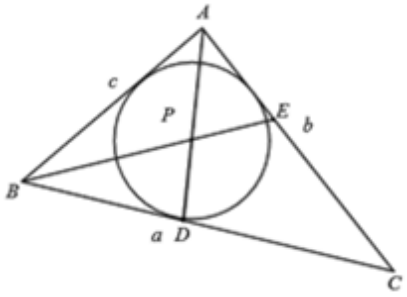
BAC бұрышының екі биссектрисасының ішінен BC қабырғасын қиып өтетін биссектрисаны таңдап аламыз. $B(5; -3)$ және $C(6; 4)$ нүктелерін тексерейік:

$\varphi_1(B) = 2 \cdot 5 + (-3) + 8 > 0, \quad \varphi_1(C) = 2 \cdot 6 + 4 + 8 > 0,$ демек бірінші түзу BC кесіндісін қиып өтпейді.

$\varphi_2(B) = 5 - 2 \cdot (-3) - 6 > 0, \quad \varphi_2(C) = 6 - 2 \cdot 4 - 9 < 0,$ демек екінші түзу BC кесіндісін қиып өтеді және BAC бұрышының биссектрисасы болады.

Іштей сызылған шеңбердің центрін табудың екінші тәсілі. P нүктесі AD және BE биссектрисаларының қиылысу нүктесі дейік (4.14-сурет).

Үшбұрыштың биссектрисасы қарама-қарсы қабырғаны пропорционал бөліктерге бөледі, яғни



4.14-сурет

$$\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}\Rightarrow\begin{cases}\frac{BD+DC}{AB+AC}=\frac{DC}{AC}, & \frac{a}{b+c}=\frac{DC}{b}\\ \frac{BD}{AB}=\frac{BD+DC}{AB+AC}, & \frac{BD}{c}=\frac{a}{b+c}\end{cases}\Rightarrow$$

$$DC=\frac{ab}{b+c}, BD=\frac{ac}{b+c}.$$

Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу формуласы бойынша

$$x_D=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}, y_D=\frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}, \text{ мұнда } \lambda=\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}.$$

$$x_D=\frac{bx_B+cx_C}{b+c}, y_D=\frac{by_B+cy_C}{b+c}.$$

Нүктенің координаталары O координаталар бас нүктесіне қатысты сол нүктенің радиус-векторы арқылы анықталатындықтан және кесіндіні берілген қатынасқа бөлу ережесіне сай келесі векторлық теңдікті аламыз:

$$\boldsymbol{OD}=\frac{b}{b+c}\boldsymbol{OB}+\frac{c}{b+c}\boldsymbol{OC}.$$

Осыған ұқсас ABD үшбұрышында BP биссектрисасы AD қабырғасын пропорционал бөліктерге бөледі:

$$\frac{AP}{PD}=\frac{AB}{BD}=\frac{c(b+c)}{ac}=\frac{b+c}{a}.$$

Сондықтан $\boldsymbol{OP}=\frac{a}{a+b+c}\boldsymbol{OA}+\frac{b+c}{a+b+c}\boldsymbol{OD}=\frac{a}{a+b+c}\boldsymbol{OA}+\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\boldsymbol{OB}+\frac{c}{b+c}\boldsymbol{OC}\right)=\frac{a}{a+b+c}\boldsymbol{OA}+\frac{b}{a+b+c}\boldsymbol{OB}+\frac{c}{a+b+c}\boldsymbol{OC}$.

Нүктенің координаталары оның радиус-векторының координаталары арқылы анықталады. Олай болса

$$x_P=\frac{1}{a+b+c}(ax_A+bx_B+cx_C),$$

$$y_P=\frac{1}{a+b+c}(ay_A+by_B+cy_C),$$

мұнда $a=|\boldsymbol{BC}|=5\sqrt{2}, b=|\boldsymbol{AC}|=8\sqrt{2}, c=5\sqrt{2}$. Сондықтан $x_P=\frac{10}{3}, y_P=-\frac{4}{3}$.

Жауабы: $P\left(\frac{10}{3};-\frac{4}{3}\right),\ r=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

5-мысал. $A(3;5;-2)$нүктесі арқылы өтетін және (α): $2x-3y+4z-5=0$ жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін жаз.

Шешуі. Екі жазықтықтың параллельдік шартынан ізделініп отырған (β) жазықтығының нормаль векторы $\boldsymbol{N}_\beta=\boldsymbol{N}_\alpha=\{2;-3;4\}$.

Келесі қадамда кеңістікте берілген A нүктесі арқылы өтетін (β) жазықтығының теңдеуін жазамыз:

$$(\beta): \quad 2(x-3)-3(y-5)+4(z+2)=0,$$
$$(\beta): \quad 2x-3y+4z+17=0.$$

6-мысал. $A(1;2;\ 0)$ нүктесі арқылы өтетін және өзара коллинеар емес $\boldsymbol{a}=\{1;2;\ -1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2;0;1\}$ векторларына параллель болатын жазықтықтың теңдеуін жаз.

Шешуі. $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторлары арқылы (α) жазықтығын жүргізейік. Сонда (α) жазықтығының нормаль векторы $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісіне коллинеар болады. Демек $\boldsymbol{N}_\alpha$ нормаль векторы үшін $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]$ көбейтіндісін алуға болады:

$$\boldsymbol{N}_\alpha=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

$$(\alpha): \quad A(x-x_A)+B(y-y_B)+C(z-z_A)=0,$$
$$(\alpha): \quad 2(x-1)-3(y-2)-4z=0\Rightarrow$$
$$(\alpha): \quad 2x-3y-4z+4=0.$$

7-мысал. $M_1(1;2;3)$, $M_2(-4;6;5)$ нүктелері арқылы өтетін және $(\alpha): 3x+4y-5=0$ теңдеуімен берілген (α) жазықтығына перпендикуляр (β) жазықтығының теңдеуін анықта.

Шешуі. (α) жазықтығының жалпы теңдеуінен оның нормаль векторының координаталарын табамыз, яғни $\boldsymbol{N}_\alpha=\{3;4;-5\}$.

(β) жазықтығында жатқан M_1, M_2 нүктелері арқылы оның бағыттауыш $\boldsymbol{M_1M_2}=\{-5;4;2\}$ векторын табуға болады.

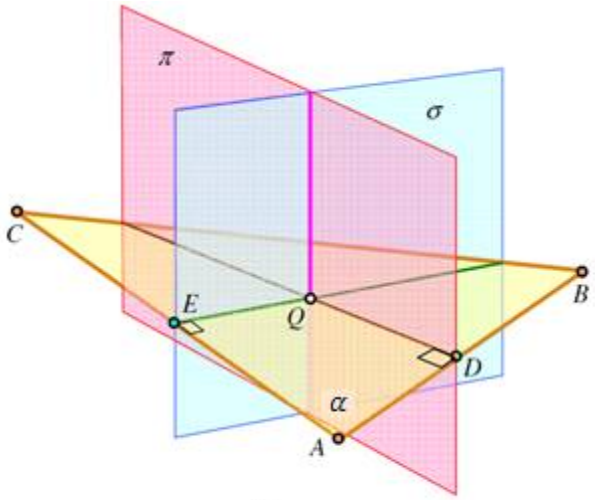
Есептің $(\alpha)\perp(\beta)$ шартынан (α) жазықтығының екінші бір $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{N}_\alpha$ бағыттауыш векторын анықтайық. Сонда осы екі бағыттауыш векторлардың векторлық көбейтіндісі ізделініп отырған (β) жазықтығының нормаль векторын анықтайды. Демек

$$\boldsymbol{N}_\beta=[\boldsymbol{M_1M_2},\boldsymbol{S}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -5 & 4 & 2\\ 3 & 4 & -5\end{vmatrix}=-28\boldsymbol{i}-19\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{k}.$$

$$\text{Сонда } (\beta): \quad 28(x-1)+19(y-2)+32(z-3)=0$$
$$(\beta): \quad 28x+19y+32z-162=0.$$

8-мысал. Кеңістікте ABC үшбұрышының $A(1;1;3)$, $B(-1;2;2)$ және $C(7;-3;1)$ төбелерінің координаталары берілген. Үшбұрышты

сырттай сызылған шеңбердің Q центрінің координаталарын және радиусын тап.



4.15-сурет

Шешуі. Сырттай сызылған шеңбердің Q центрі үшбұрыш жазықтығында және оның барлық төбелерінен бірдей қашықтықта жатады. Демек ол үш жазықтықтың қиылысуында жатыр (4.15-сурет). Атап айтқанда:

1) (α) : ABC үшбұрыш жазықтығы;

2) AB қабырғасының ортасы D нүктесі арқылы оған перпендикуляр өтетін әрі A және B төбелерінен бірдей қашықтықта жатқан барлық нүктелерден тұратын (π) жазықтығы;

в) AC қабырғасының ортасы E нүктесі арқылы оған перпендикуляр өтетін (σ) жазықтығы.

Алдымен (α) жазықтығының теңдеуін табу үшін кеңістікте бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін пайдаланамыз.

(α) : үшбұрыш жазықтығының теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x+5y-z-5=0;$$

$\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ векторларының және D, E нүктелерінің координаталарын табайық:

$\boldsymbol{AB} = \{-2; 1; -1\}$, $\boldsymbol{AC} = \{6; -4; -2\}, D(0; {}^{3}/_{2}; {}^{5}/_{2})$ және $E(4; -1; 2)$.

(π) : жазықтығының теңдеуі

$$-2(x-0) + \left(y - {}^{3}/_{2}\right) - \left(z - {}^{5}/_{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 1 = 0,$$

өйткені оның нормаль векторы $\boldsymbol{N}_{\beta} = \boldsymbol{AB} = \{-2; 1; -1\}$.

(σ) : жазықтығының теңдеуі

$$6(x-4) - 4(y+1) - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z - 12 = 0,$$

өйткені оның нормаль векторы $\boldsymbol{N}_\gamma = \boldsymbol{AC} = \{6; -4; -2\}$. Жоғарыда айтылғандай табылған (α), (π) және (σ) жазықтықтарының теңдеулерін жүйеге алып шешейік:

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 5, \\ 2x - y + z = 1, \\ 3x - 2y - z = 12. \end{cases}$$

Сонда сызықтық теңдеулер жүйесінің $x = 2$, $y = -1$, $z = -4$ шешімі сырттай сызылған шеңбердің Q центрінің координаталарын береді. Q нүктесінен үшбұрыштың кез келген төбесіне дейінгі арақашықтық шеңбердің радиусына тең болады

$$R = |\boldsymbol{QA}| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-1)^2 + (-4-3)^2} = 3\sqrt{6}.$$

Жауабы: $Q(2; -1; -4)$, $R = 3\sqrt{6}$.

9-мысал. Тетраэдрдің $A(1; 5; 4)$, $B(3; 7; 6)$, $C(4; 2; 7)$ және $D(4; 8; 1)$ төбелерінің координаталары берілген. Тетраэдрді іштей сызылған шардың Q центрінің координаталарын және оның радиусын анықтайық.

Шешуі. Тетраэдрді іштей сызылған шардың центрі оның үш екі жақты бұрыштарының биссекторлы жазықтықтарының қиылысуында жатады.

Анықтама. Екі жақты бұрыштың қыры арқылы өтетін және оны қақ бөлетін жазықтық – ***екі жақты бұрыштың биссекторлы жазықтығы*** деп аталады.

Алдымен тетраэдрдің бүкіл жақтарының теңдеулерін жазайық.

$(\alpha) \equiv (ABC)$ жазықтығы $\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - z + 3 = 0;$

$(\beta) \equiv (ABD)$ жазықтығы $\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0.$

Осыған ұқсас қалған жақтарының теңдеулерін табамыз:

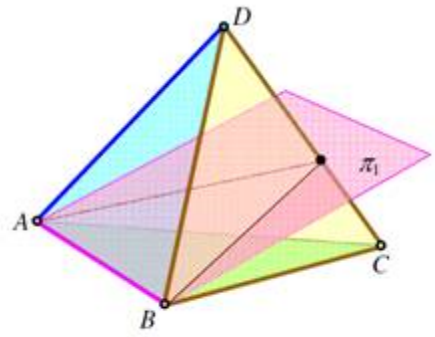
$(\gamma) \equiv (ACD)$ жазықтығы $: y + z - 9 = 0;$

$(\delta) \equiv (BCD)$ жазықтығы $: 4x + y + z - 25 = 0.$

Енді екі жақты бұрыштарды қақ бөлетін жазықтықтардың теңдеулерін табайық. ABC және ABD жақтарынан құралған екі жақты бұрыштың биссекторлы жазықтығының әрбір $M \epsilon \pi_1$ нүктесі осы жазықтықтардан бірдей қашықтықта жатады, яғни

$$\rho(M,\alpha)=\rho(M,\beta)\Leftrightarrow\frac{|x-z+3|}{\sqrt{2}}=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x-z+3=x-y+4,\\ x-z+3=-x+y-4. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y-z-1=0,\\ 2x-y-z+7=0. \end{cases}$$

Табылған $\pi_1: y-z-1=0$, $\pi_2: 2x-y-z+7=0$ жазықтықтарының ішінен бізге CD кесіндісін (4.16-сурет) қиып өтетін жазықтықты табу керек. Ол үшін $\varphi_1(x,y,z)=y-z-1; \varphi_2(x,y,z)=2x-y-z+7$ белгілеулерін енгіземіз.



4.16-сурет

Сонда $\varphi_1(C)=\varphi_1(4;2;7)=2-7-1<0, \varphi_1(D)=\varphi_1(4;8;1)=8-1-1>0,$
$\varphi_2(C)=\varphi_1(4;2;7)=2\cdot4-2-7+7>0,$
$\varphi_2(D)=\varphi_2(4;8;1)=2\cdot4-8-1+7>0.$

Бұл бірінші жазықтықтың CD кесіндісін қиып өтетінін, ал екінші жазықтықтың қимайтынын білдіреді. Сонымен $ABCD$ тетраэдрінің AB қыры арқылы жүргізілген биссекторлы жазықтығының теңдеуі: $y-z-1=0$. Осыған ұқсас AC және BC қырлары арқылы жүргізілген биссекторлы жазықтықтардың теңдеулері сәйкес: $x-y-2z+12=0$ және $7x+y-2z-16=0$. Келесі қадамда AB, AC және BC қырлары арқылы жүргізілген биссекторлы жазықтықтардың теңдеулерінен жүйе құрайық:

$$\begin{cases} y-z-1=0,\\ x-y-2z+12=0,\\ 7x+y-2z-16=0. \end{cases}$$

Сонда сызықтық теңдеулер жүйесінің $\left(\frac{14}{5};\frac{28}{5};\frac{23}{5}\right)$ шешімі тетраэдрді іштей сызылған шардың Q центрінің координаталарын көрсетеді. Ал оның радиусы Q нүктесінен оның кез келген жағына дейінгі арақашықтыққа тең:

$$r=\rho(Q,ABC)=\frac{|2.8-4.6+3|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

10-мысал. Жалпы теңдеуімен берілген $l:\begin{cases}(\alpha_1): & x-3y+2z+1=0,\\ (\alpha_2): & 2x+y-z-8=0\end{cases}$ түзуін канондық түре келтірейік.

Шешуі. (α_1) және (α_2) жазықтықтарының жалпы теңдеулерінен олардың нормаль векторларының координаталарын табамыз: $\boldsymbol{N_{\alpha_1}}=\{1;-3;2\}$ және $\boldsymbol{N_{\alpha_2}}=\{2;1;-1\}$. Сонда l түзуінің бағыттауыш векторы осы нормаль векторлардың векторлық көбейтіндісі арқылы анықталады:

$$\boldsymbol{S}=\left[\boldsymbol{N_{\alpha_1}},\boldsymbol{N_{\alpha_2}}\right]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

Әрі қарай l түзуінің бойында жататын қандай да бір A нүктесінің координаталарын табайық. Ол үшін $y=0$ деп алып, $\begin{cases}x+2z+1=0,\\ 2x-z-8=0\end{cases}$ жүйесін шешіп, $x=3$, $z=-2$ мәндерін табайық. Демек A нүктесінің координаталары $(3;0;-2)$. Енді түзудің канондық теңдеуін жазуға болады: $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{7}$.

11-мысал. Кеңістікте берілген $M(6;8;-5)$ нүктесінің $(\alpha):\ 3x+3y-4z+6=0$ жазықтығына түсірілген ортогональды проекциясының координаталарын анықтайық.

Шешуі. (α) жазықтығына перпендикуляр және M нүктесінен өтетін l түзуінің параметрлік теңдеуін құрайық.

$$l:\ \begin{cases}x=6+3t,\\ y=8+3t,\\ z=-5-4t.\end{cases}$$

Әрі қарай l түзуі мен (α) жазықтығының қиылысу нүктесін табайық. Ол үшін жазықтықтың жалпы теңдеуі мен түзудің параметрлік теңдеулерін біріктіріп шешеміз: $3(6+3t)+3(8+3t)-4(-5-4t)+6=0$. Бұдан $t=-2$ және параметрдің бұл мәнінде M_1 қиылысу нүктесінің координаталары табылады $M_1(0;2;3)$.

12-мысал. Параметрлік теңдеулері арқылы берілген l_1 және l_2 түзулерінің қиылысу нүктесінің координаталарын тап. Мұнда

$$l_1:\ \begin{cases}x=3+2t,\\ y=3t,\\ z=-1-5t.\end{cases}\qquad l_2:\ \begin{cases}x=-1+t,\\ y=5-4t,\\ z=-2+3t.\end{cases}$$

Шешуі. Қиылысу нүктесінің координаталарын $(x; y; z)$ дейік. Қиылысу нүктесі екі түзуге де тиісті (яғни екі түзуде де жатады). Демек бірінші түзудің теңдеуінде осы нүктеге сәйкес келетін параметрдің t_1 мәні, ал екінші түзудің теңдеуінде осы нүктеге сәйкес келетін параметрдің t_2 мәні табылады. Сонда қиылысу нүктесінің координаталары үшін

$$\begin{cases} x = 3 + 2t_1, \\ y = 3t_1, \\ z = -1 - 5t_1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 + t_2, \\ y = 5 - 4t_2, \\ z = -2 + 3t_2. \end{cases}$$

теңдіктерін аламыз. Бұл жүйелерді біріктіріп шешетін болсақ

$$\begin{cases} 3 + 2t_1 = -1 + t_2, \\ 3t_1 = 5 - 4t_2, \\ -1 - 5t_1 = -2 + 3t_2 \end{cases}$$

теңдіктері $t_1 = -1$, $t_2 = 2$ мәндерінде тепе-теңдіктерге айналады. Демек түзулер бір нүктеде қиылысады. Оның координаталарын табайық. Ол үшін бірінші түзудің теңдеуіндегі t параметрінің орнына $t_1 = -1$ мәнін қоямыз, сонда $x = 1$, $y = -3$, $z = 4$. Сонымен қиылысу нүктесінің координаталары (1; -3; 4). Осы нәтижені екінші түзудің теңдеуіндегі t параметрінің орнына $t_2 = 2$ мәнін қойып та алуға болады.

13-мысал. $l:\ x = 7 - 3t;\ \ y = 5;\ \ z = t$ түзуіне қатысты қарағанда $A(1; -1; 12)$ нүктесіне симметриялы нүктенің координаталарын анықтайық.

Шешуі. 1. Алдымен A нүктесінің l түзуіне түсірілген проекциясын табамыз (бұл B нүктесі болсын).

2. B нүктесі A нүктесін оған симметриялы C нүктесімен қосатын кесіндінің ортасы.

3. Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу формуласы бойынша C нүктесінің координаталарын табамыз.

1°. A нүктесі арқылы l түзуіне перпендикуляр (α) жазықтығын жүргіземіз (бұл жазықтықтың l түзуімен қиылысу нүктесі дәл B нүктесінің өзі болады). $-3x + z + D = 0$ теңдеуі (α) жазықтығының теңдеуі болады (жазықтықтың нормаль векторы ретінде l түзуінің бағыттауыш векторын алдық). Енді A нүктесі осы жазықтықта жататындай етіп D бос мүшесін табайық. Ол үшін ағымдық координаталардың орнына A нүктесінің координаталарын қоялық,

сонда $-3 \cdot 1 + +12 + D = 0$. Бұдан $D = -9$. Сонымен жазықтықтың теңдеуі: (α): $-3x + z - 9 = 0$.

2°. l түзуі мен осы (α) жазықтығының қиылысуынан пайда болған B нүктесінің координаталарын табайық. Нүктенің ізделініп отырған координаталары

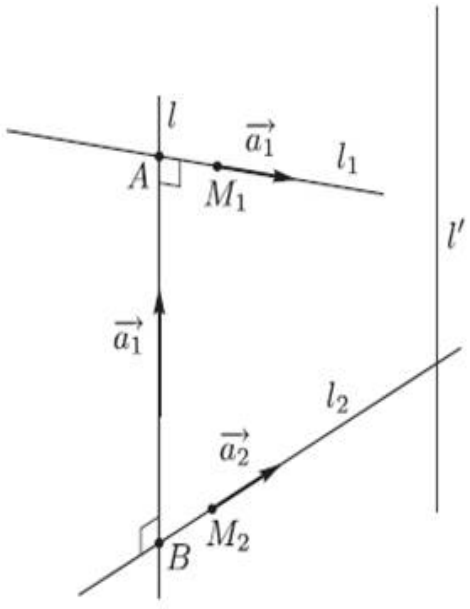
$$\begin{cases} x = 7 - 3t, \\ y = 5, \\ z = t, \\ -3x + z - 9 = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандырады. x, y, z мәндерін соңғы теңдеуге қойып, t параметрінің $t = 3$ мәнін табамыз. Демек $x = -2; y = 5$, z=3. Сонымен $B(-2; 5; 3)$.

3°. Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу формуласы бойынша $x_B = \frac{x_A + x_C}{2}$, $y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$, $z_B = \frac{z_A + z_C}{2}$. Бұдан $x_C = 2x_B - x_A = -4 - 1 = -5$, $y_C = 2y_B - y_A = 10 + +1 = 11$, $z_C = 2z_B - z_A = 6 - 12 = -6$. Сонымен $C\ (-5; 11; -6)$.

14-мысал. Айқас екі түзуге перпендикуляр жүргізілген түзудің теңдеуін жаз.

Шешуі. Мектеп бағдарламасынан айқас түзулердің екеуіне де перпендикуляр болатын тек бір ғана түзу жүргізілетіні стереометрия курсынан белгілі. Бұл түзу айқас түзулердің ортақ перпендикуляры деп аталады (4.17-сурет).



4.17-сурет

Мақсат – канондық теңдеулерімен берілген l_1 және l_2 түзулерінің ортақ перпендикулярының теңдеуін қорытып шығару.Сонымен

$$l_1: \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};$$

$$l_2: \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2};$$

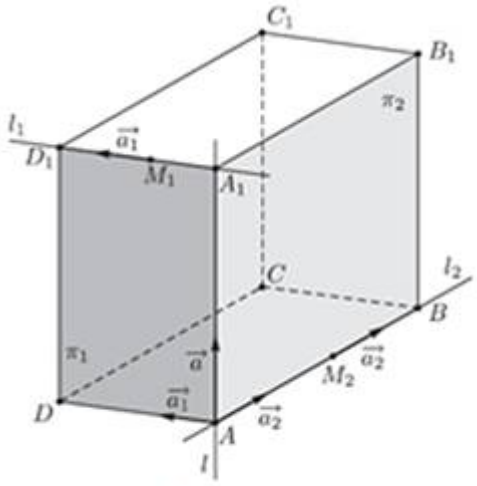
түзулері берілсін дейік. Канондық теңдеулерден l_1 және l_2 түзулеріне тиісті $M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерін және олардың

$\boldsymbol{a}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$

бағыттауыш векторларын анықтауға болады.

Алайда l ортақ перпендикулярдың канондық теңдеуін жазу үшін оның $\boldsymbol{a} = \{m; n; p\}$ бағыттауыш векторын және қандай да бір $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ нүктесін білу қажет.

Бағыттауыш векторынан бастайық. Есептің шарты бойынша $l \perp l_1$ және $l \perp l_2$ болғандықтан $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}_1$ және $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a}_2$ деп тұжырым жасаймыз. Сонымен қатар векторлық көбейтіндінің анықтамасынан $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \perp \boldsymbol{a}_1$ және $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \perp \boldsymbol{a}_2$ қасиеттері шығады. Демек ортақ перпендикулярдың бағыттауыш векторы ретінде $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ векторын алуға болады.



4.18-сурет

Ал M_0 нүктесін алдын ала табу өте қиын. Сондықтан l_1 және l_2 түзулерінің канондық теңдеулері бойынша олардың l ортақ перпендикуляры жататын екі жазықтық табыла ма деген сұрақ қоялық. Қойылған сұрақтың геометриялық мағынасы айқын болу үшін тік параллелепипедті қарастырайық (4.18-сурет).

Егер $l_1 = (D_1A_1)$ және $l_2 = (AB)$ түзулерін айқас түзулер ретінде алсақ, онда олардың ортақ перпендикуляры $l = (AA_1)$ болады. Яғни ADD_1A_1 және ABB_1A_1 жақтарының қиылысуы (AA_1) қыры. Басқаша айтқанда $l = (\pi_1) \cap (\pi_2)$. Мұнда (π_1) жазықтығы $\boldsymbol{a}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ және $\boldsymbol{a} = \{m, n, p\}$ векторларына параллель және $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нүктесі арқылы өтеді, сонда

$$(\pi_1): \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

Осыған ұқсас (π_2) жазықтығы $\boldsymbol{a}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ және $\boldsymbol{a} = \{m, n, p\}$ векторларына параллель және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктесі арқылы өтеді. Демек бұл жазықтықтың теңдеуі келесі түрде жазылады

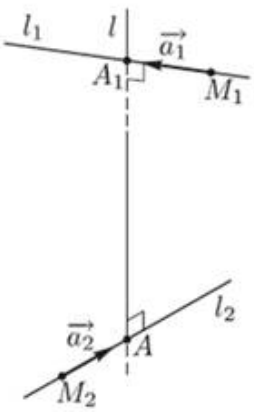
$$(\pi_2): \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

Ескерту. Нақтылы есеп шығарарда (π_1) және (π_2) жазықтықтарының теңдеулерін біріктіріп шешіп, ортақ перпендикулярдың теңдеуін аламыз.

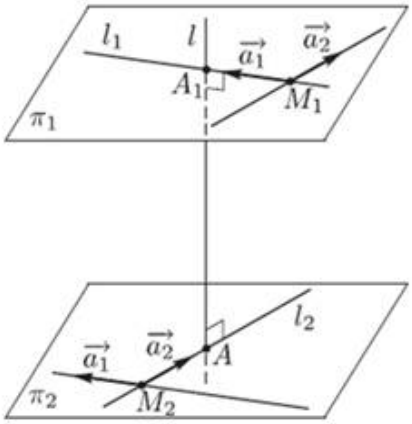
Айқас түзулердің арасындағы қашықтық

Анықтама. Екі айқас түзулердің ортақ перпендикулярының ұзындығы осы түзулердің арақашықтығын анықтайды (9-сурет).

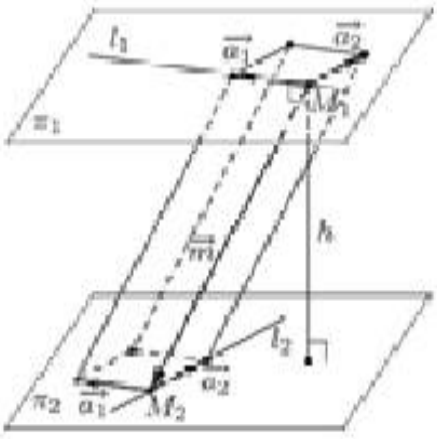
Шешуі. l_1 түзуі арқылы l_2 түзуіне параллель (α_1) жазықтығын, ал M_2 нүктесі арқылы l_1 түзуіне параллель (α_2) жазықтығын жүргізейік. Сонда 10-суреттен көріп отырғандай A_1A_2 кесіндісі –(α_1) және (α_2) жазықтықтарының арақашықтығы.



4.19-сурет



4.20-сурет



4.21-сурет

Егер жақтары (α_1) және (α_2) жазықтықтары болатындай параллелепипед табылса, онда бұлардың арақашықтығы (яғни айқас түзулердің арақашықтығы) параллелепипедтің биіктігіне тең болар еді.

Мұндай параллелепипед 11-суретте салынған. Оның қырлары ретінде $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ және $\boldsymbol{M_1M_2}$ векторлары алынған.

Енді параллелепипедтің биіктігін табу қалды. Векторлық талдаудан үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық мағынасы осы үш векторға тұрғызылған параллелепипедтің көлемін береді. Олай болса

$$V = |(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{M_1M_2})|.$$

Табанының ауданын $\boldsymbol{a}_1$ және $\boldsymbol{a}_2$ векторларының векторлық көбейтіндісінің модулі арқылы анықтаймыз. Сонда ізделініп отырған арақашықтық:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{M_1M_2})|}{|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]|}.$$

Жаттығулар

1. $M_0(3;6)$ нүктесі арқылы өтетін және $7x - y - 4 = 0$ түзуіне перпендикуляр түзудің теңдеуін құр.

2. $x = -2 + 5t,\ y = 3 + 4t,\ t \in \mathbb{R}$ параметрлік түрде берілген түзудің теңдеуінен оның жалпы теңдеуіне көш.

3. Жазықтықта $A(-1;4)$, $B(5;1)$ және $C(5;6)$ нүктелері берілген.

а) C нүктесінің (AB) түзуіне түсірілген проекциясын;

б) (AB) түзуіне қатысты C нүктесіне симметриялы нүктенің координаталарын тап.

4. ABC үшбұрышының $A(-1;-2)$, $B(2;7)$ және $C(7;2)$ төбелері берілген.

а) AL медианасын;

б) BK биссектрисасын;

в) CH биіктігін тап.

5. ABC үшбұрышының $A(-1;-2)$, $B(2;7)$ және $C(7;2)$ төбелері берілген.

а) үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің Q центрінің координаталарын;

б) A төбесінен BC қабырғасына түсірілген биіктіктің шамасын;

в) биіктіктердің H қиылысу нүктесінің координаталарын тап.

6. Табаны AB болатын тең бүйірлі ABC үшбұрышының $A(4;-3)$ және $B(-4;1)$ төбелерінің координаталары белгілі, ал C төбесі $2x - y - 7 = 0$ түзуінде жатады. C төбесінің координаталарын тап.

7. $\boldsymbol{m} = \{2;4;1\}$векторына параллель және $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін құр.

8. $(\alpha_1):\ x - 3y + 2z + 6 = 0$ және $(\alpha_2):\ -2x + 6y - 4z - 1 = 0$ жазықтықтарының параллель болатынын дәлелде және арақашықтығын тап.

9. λ параметрінің қандай мәнінде $M(1;2;3)$ нүктесінен $\lambda x - y + 2z + 7 = 0$ жазықтығына дейінгі арақашықтық 3-ке тең.

10. $A(2;4;1)$ және $B(3;6;-1)$ нүктелері арқылы өтетін түзу мен $3x - 2y + +6z - 4 = 0$ жазықтығының арасындағы бұрышты тап.

11. Тетраэдрдің $A(9;3;-2)$, $B(6;2;10)$ және $C(1;4;9)$ төбелерінің координаталары берілген. Осы тетраэдрді сырттай сызылған сфераның центрінің координаталарын және оның радиусын тап.

12. ABC үшбұрышының $A(5;-1;-3)$, $B(5;3;9)$ және $C(6;4;7)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің центрінің координаталарын және оның радиусын тап;

б) ABC үшбұрышының биіктіктерінің қиылысу нүктесінің координаталарын тап.

13. Кеңістікте жалпы теңдеуімен берілген түзудің $l:\begin{cases}2x-y+3z=6,\\x+2y+4z=-2\end{cases}$ канондық және параметрлік теңдеулерін жаз.

14. l_1 және l_2 түзулері өздерінің параметрлік теңдеулері арқылы берілген

$$l_1:\begin{cases}x=2-t,\\y=1-2t,\\z=-3t.\end{cases} l_2:\begin{cases}x=-5+2t,\\y=1,\\z=3+4t.\end{cases}$$

Осы түзулердің арасындағы бұрыштың косинусын анықта.

15. l түзуі мен (α) жазықтығының қиылысатынына көз жеткізіңдер және қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар

$$l:\begin{cases}x=3+2t,\\y=t,\\z=4-t\end{cases} \text{ және } (\alpha):\ 4x+y+2z-6=0.$$

16. $(\alpha):\ x+3y-2z+1=0$ жазықтығына қатысты қарағанда $A(1;-4;9)$ нүктесіне симметриялы нүктені тап.

17. а) $x+y=0,\ x+z=1;$

б) $2x+2y+z+9=0, 4y+3z-1=0$

жазықтықтары арқылы құралған екіжақты бұрышты қақ бөлетін жазықтықтың теңдеуін тап.

18. $\frac{x}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$ және $\frac{x-1}{-8}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2}$ параллель түзулерінің арақашықтығын анықта.

19. $l_1:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$ және $l_2:\ \frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ айқас түзулерінің l ортақ перпендикулярының теңдеуін жаз.

20. $l_1:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$ және $l_2:\ \frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ айқас түзулерінің арақашықтығын тап.

5. ЕКІНШІ РЕТТІ ҚИСЫҚТАР

Шеңбер. Шеңбердің канондық және параметрлік теңдеулері

Анықтама. Жазықтықта центр деп аталатын берілген нүктеден бірдей қашықтықта жатқан нүктелердің геометриялық орны ***шеңбер*** деп аталады.

Шеңбердің жалпы теңдеуі

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

түрінде немесе

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

түрінде жазылады, мұндағы $2x_0 = -A$, $2y_0 = -B$, $2R = \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$. (x_0, y_0) нүктесі – шеңбердің центрі, ал R – оның радиусы. Дербес жағдайда $x^2 + y^2 = R^2$ центрі бас нүктедегі радиусы R шеңбердің теңдеуі. Соңғы теңдеу шеңбердің канондық теңдеуі деп аталады.

Шеңбердің канондық теңдеуінен оның параметрлік теңдеуіне көшу үшін мектеп бағдарламасынан белгілі $sin^2t + cos^2t = 1$ негізгі тригонометриялық тепе- теңдікті пайдаланамыз. Сонда $x = Rcost$; $y = Rsint$ шеңбердің параметрлік теңдеуі.

Полярлық координаталар жүйесінде кез келген $M(x, y)$ ағымдық нүктенің координаталарын t полярлық бұрыш арқылы келесі түрде өрнектейміз

$$\begin{cases} x = \rho cost, \\ y = \rho sint, \end{cases}$$

Мұндағы $0 \le t \le 2\pi$; $\rho -$ полярлық радиус. Сонда $\rho = R$ полярлық координаталар жүйесіндегі шеңбердің теңдеуі, өйткені
$\rho^2(cos^2t + sin^2t) = R^2$.

Парабола және оның қасиеттері

Анықтама. Жазықтықта фокус деп аталатын берілген нүкте мен директриса деп аталатын берілген түзуден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орны ***парабола*** деп аталады (5.1-сурет).

Параболаның фокусынан оның директрисасына дейінгі арақашықтық ***параболаның параметрі*** деп аталады (5.2-сурет).

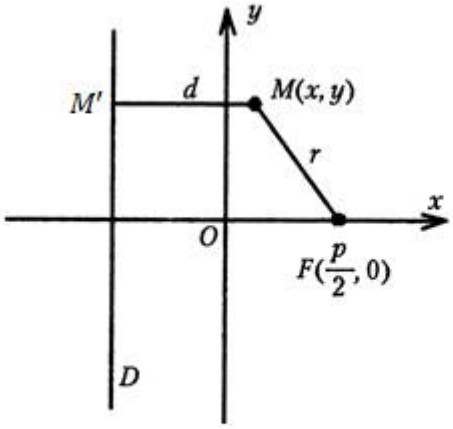
Анықтама. Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде

$$y^2 = 2px,\ p > 0 \quad \text{немесе} \quad x^2 = 2qy,\ q > 0 \qquad (5.1)$$

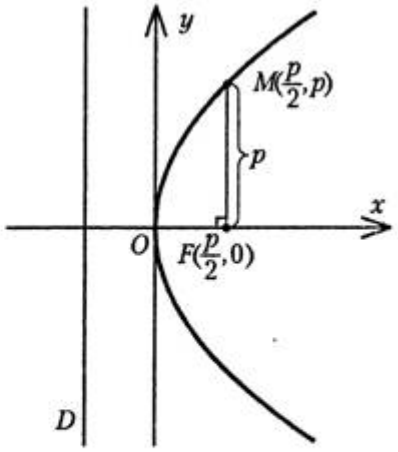
теңдеуімен анықталатын екінші ретті қисықты парабола деп атайды (5.2-сурет).

Параболаның директрисасы фокус арқылы өтпейді деп санап, оның (5.1) канондық теңдеуін қорытып шығарайық. Ол үшін $M(x, y)$ жазықтықтағы кез келген ағымдық нүкте болсын дейік. $|FM|$ арқылы осы нүктеден фокусқа дейінгі, ал $|MM'|$ арқылы сол нүктеден директрисаға дейінгі арақашықтықтарды белгілейік.

Анықтама бойынша $|FM| = |MM'|$ теңдігінің орындалуы $M(x, y)$ нүктесінің параболаға тиісті болуының қажетті және жеткілікті шартын көрсетеді.



5.1 – сурет. Параболаның фокусы және директрисасы



5.2 – сурет. Параболаны салу. Параболаның параметрі

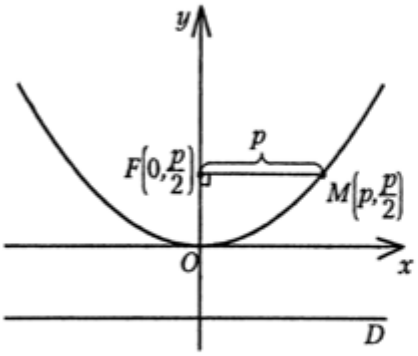
Жазықтықта берілген $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерінің

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

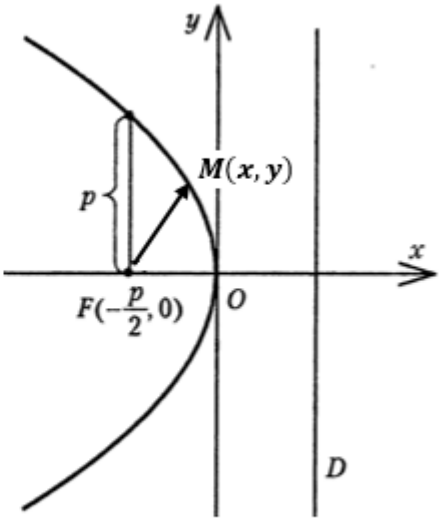
арақашықтығын табу формуласы бойынша:

$$|FM| = \sqrt{\left(x - {}^{p}/_{2}\right)^2 + y^2} \quad \text{және} \quad |MM'| = \left|x + {}^{p}/_{2}\right|.$$

Сонда $|FM| = |MM'|$ теңдігі $\sqrt{\left(x - {}^{p}/_{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + {}^{p}/_{2}\right|$ теңдеуі арқылы жазылады. Соңғы теңдеудің екі жағын бірдей квадраттап, ықшамдап және ұқсас мүшелерін біріктірсек (5.1) түріндегі параболаның канондық теңдеуін аламыз:



5.3-сурет



5.4-сурет

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px,\ p > 0.$$

Мұндағы p – параболаның параметрі.

Егер параболаның канондық теңдеуі $x^2 = 2qy,\ q > 0$ түрінде берілсе, онда оның тармақтары Oy осінің бағытымен тұспалдас болады (5.3-сурет).

Параболаның бойындағы кез келген $M(x, y)$ нүктесін оның фокусымен қосатын векторды фокустық радиус – вектор деп атайды (5.4-сурет).

Параболаның қасиеттері

1. Парабола – осьтік симметрия қисығы. Ox осі параболаның симметрия осі, оны кейде параболаның фокальдық осі деп те атайды. Параболаның басқа симметрия осі және симметрия центрі жоқ.

2. Парабола $(y^2 = 2px,\ p > 0)$ оң жарты жазықтықта орналасқан және шектеусіз қисық. Координат бас нүктесі параболаның төбесі болады.

3. $F\left(p/2, 0\right)$ нүктесі параболаның фокусы, ал $x = -\frac{p}{2}$ түзуі параболаның директрисасы деп аталады.

4. Параболаның анықтамасынан фокальдық радиус үшін $r = x + p/2$ теңдігінің дұрыстығы шығады.

5. Параболаның канондық теңдеуіндегіp саны параболаның параметрі деп аталады. $x = \frac{p}{2}$ тең болғанда фокальдық радиус $r = {}^{p}/_{2} + {}^{p}/_{2} = p$.

6. Параболаның эксцентриситеті $\varepsilon = 1$ (өйткені $|FM| = |MM'|$).

$y = f(x)$ функциясының бойында жататын $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін жанаманың теңдеуін математикалық талдау курсында

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

теңдеуі арқылы анықтайды. Бұл жалпы тұжырымды параболаға да қолдануға болады.

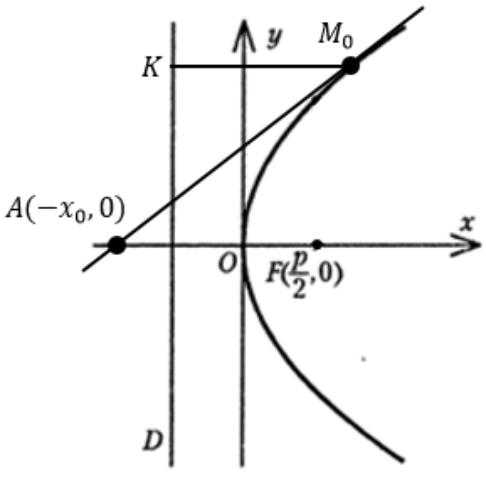
$M_0(x_0, y_0)$ нүктесі $y^2 = 2px$ канондық теңдеуімен анықталатын параболаның бойында жатады дейік, яғни $y_0^2 = 2px_0$. Ал параболаның бірінші ретті туындысы $2y(x) \cdot y'(x) = 2p$ теңдігімен анықталады. Сонда $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуі

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \quad \text{немесе} \quad yy_0 = p(x + x_0). \tag{5.2}$$

Жанаманың сызықтық теңдеуін зерттейік:

$x = -x_0$ мәнінде $y = 0$, демек жанама түзу $A(-x_0, 0)$ нүктесі арқылы өтеді. Осы нүктеден фокусқа дейінгі $|AF|$ арақашықтығын табайық:

$$|AF| = \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} + x_0\right)^2} = \left|x_0 + {}^{p}/_{2}\right|.$$

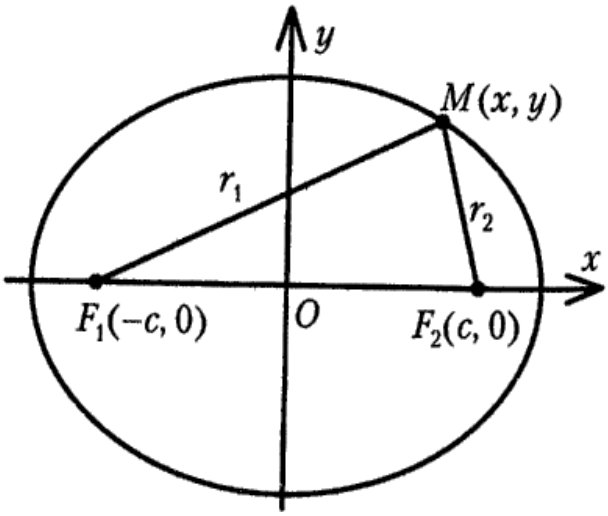


Параболаның анықтамасы бойынша параболаға тиісті нүктеден фокусқа дейінгі арақашықтық, яғни $|M_0F| = \left|x_0 + {}^{p}/_{2}\right|$ тең. Демек $|AF| = |M_0F|$, мұнда M_0F кесіндісі – M_0 нүктесінің фокальдық радиусы. $\Delta\, AFM_0$ – тең бүйірлі үшбұрыш. Оның табанындағы $\widehat{FAM_0} = \widehat{FM_0A}$ бұрыштары өзара тең. Енді жанасу нүктесінен директрисаға M_0K перпендикулярын түсірейік, сонда $\widehat{KM_0A} = \widehat{M_0AF}$ сыбайлас бұрыштары тең және жоғарыдағы теңдік бойынша бұл бұрыштар $\widehat{FM_0A}$ бұрышына да тең болады. Басқаша айтқанда параболаға жүргізілген жанама жанасу нүктесінен директрисаға түсірілген перпендикуляр арасындағы бұрыштың биссектрисасы

болатынын дәлелдедік. Параболаның бұл қасиетін оның оптикалық қасиеті деп те атайды.

Эллипс және оның қасиеті

Анықтама. Жазықтықта фокустар деп аталатын F_1 және F_2 бекітілген нүктелерінен арақашықтықтарының қосындысы тұрақты болып келетін нүктелердің геометриялық орнын ***эллипс*** деп атайды (5.5- сурет).



5.5-сурет

$M(x,y)$ нүктесі эллипстің бойында жатқан кез келген нүкте, ал $F_1(-c;0)$ және $F_2(c;0)$ оның фокустары дейік. Сонда F_1M және F_2M кесінділері $M(x,y)$ нүктесінің сәйкес r_1 және r_2 фокальдық радиустары болады. Анықтама бойынша $r_1 + r_2 = 2a$ және бұл қосынды $|F_1F_2| = 2c$ фокустар арақашықтығынан үлкен $(2a > 2c)$.

Эллипстің канондық теңдеуін қорытып шығарайық. Ол үшін жазықтықта берілген екі нүктенің арақашықтығын табу формуласын пайдаланайық. Сонда

$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ және $r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ теңдіктері эллипстің бойында жатқан $M(x,y)$ ағымдық нүктесінің сәйкес фокальдық радиустарын анықтайды. Анықтама бойынша эллипстің теңдеуін келесі түрде жазуға болады

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Алгебралық тұрғыдан бұл иррационалдық теңдеу. Қарапайым түрге келтіру үшін екі жағын бірдей квадратқа шығарып және ұқсас мүшелерін біріктіріп ықшамдайық, сонда

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

немесе $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

түріне келеді. Соңғы теңдіктің екі жағын бірдей квадратқа шығарайық

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

бұдан $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ жаңа шамасын енгізейік. b шамасының геометриялық мағынасы кейінірек ашылады. Бұл жерде тек $a > c$ екенін, демек $a^2 - c^2 > 0$ болатынын ескерте кетейік. Осының салдарынан соңғы теңдеуді

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

немесе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.3)$$

түрінде жазуға болады. (5.3) теңдеуін ***эллипстің канондық теңдеуі*** деп атайды.

Анықтама. Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0$$

теңдеуімен анықталатын екінші ретті қисықты ***эллипс*** деп атайды.

$a = b$ болғанда (5.3) теңдеуі центрі $(0; 0)$ нүктесінде радиусы a −ға тең шеңбердің теңдеуін анықтайды.

Координаталары

$x = acost,$
$y = bsint,$ $-\pi < t \leq \pi$ (5.4) болатын кез келген нүкте (5.3) теңдеуін қанағаттандырады және керісінше (5.3) теңдеуін қанағаттандыратын кез келген нүктенің координаталары (5.4) түрінде тек жалғыз түрде көрсетіледі. Бұл (5.4) эллипстің параметрлік теңдеулері болатынын көрсетеді.

Ескерту. Жоғарыда айтылғаннан эллипстің мүмкін болатын параметрлік теңдеулері тек біреу болады деген ұғым қалыптаспау керек. Мысалы,

$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$,
$y = b\frac{2t}{1+t^2,}$ мұнда $t = tg\frac{\theta}{2}, -\infty < t < +\infty$ теңдеулері де эллипстің параметрлік теңдеулерінің қатарына жатады.

Анықтама.

• a және b сандары эллипстің сәйкес үлкен жарты және кіші жарты осі;

• $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ саны эллипстің сызықтық эксцентриситеті;

- $2c$ саны эллипстің фокустық арақашықтығы;
- $\varepsilon = \frac{c}{a}$саны эллипстің сандық эксцентриситеті;
- $p = \frac{b^2}{a}$ саны эллипстің фокальдық параметрі

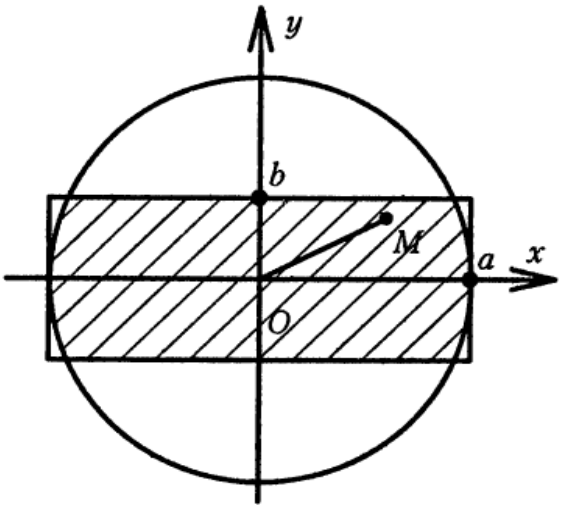
деп аталады.

Эллипстің қасиеттері

1. Эллипстің $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ канондық теңдеуінің түрінен оның

$$D = \{(x, y) : \ |x| \le a, |y| \le b\}$$

тік төртбұрышының, сондай – ақ центрі $O(0;0)$ нүктесінде радиусы a −ға тең шеңбердің ішінде жататыны шығады (5.6-сурет).



5. 6 - сурет

2. Ox және Oy осьтері эллипстің симметрия осі болып саналады. Ал координат жүйесінің бас нүктесі оның центрлік симметриясы.

3. Фокусаралық қашықтықтың үлкен осьтің ұзындығына қатынасы эллипстің эксцентриситеті деп аталады. Белгілеуі: $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Эллипс үшін $a > c$, онда $\varepsilon < 1$.

. $r_1 + r_2 = 2a$ фокальдық радиустардың қасиеті.

5. $r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x,$ өйткені $r_1^2 - r_2^2 = 4cx.$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \qquad (5.5)$$

Эллипстің бойында жататын $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуі.

Дәлелдеу. $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \equiv 0$ айқындалмаған түрде берілген эллипстің теңдеуінен (функциясынан) $dF(x, y) = 0$ немесе $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$, немесе $y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y(x)}$ теңдігі шығады. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін жанаманың теңдеуін жазайық:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Мұнда $y'(x_0)$ мәнін $y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$ мәнімен алмастырып ықшамдағаннан соң

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

теңдеуімен өрнектелетін жанаманың теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуден

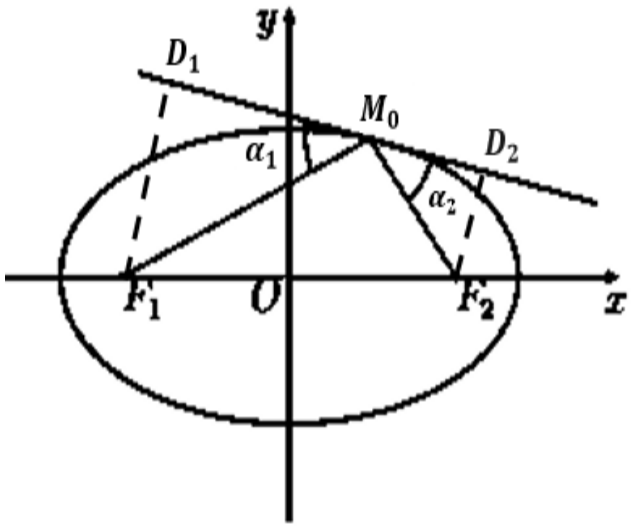
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

теңдеуіне көшеміз. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің эллипске тиістілігі $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ теңдігінің орындалатындығын көрсетеді.

Сонымен $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ сызықтық теңдеуі эллипске тиісті $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін жанаманың теңдеуі.

6. Эллипске тиісті кез келген нүктеден жүргізілген жанама оның фокальдық радиустарымен өзара тең сүйір бұрыштар жасайды. Эллипстің бұл қасиетін оның оптикалық қасиеті деп атайды.

Дәлелдеу. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы эллипске жанама жүргізілсін дейік. α_1 және α_2 арқылы жанаманың r_1 және r_2 фокальдық радиустармен жасайтын бұрыштарын белгілейік (5.7-сурет).



5.7-сурет

$F_1(-c; 0)$ фокусынан $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ теңдеуімен анықталатын жанамаға дейінгі $F_1 D_1$ арақашықтығын табайық:

$$F_1D_1 = \frac{\left|\frac{(-c)x_0}{a^2} + \frac{0\cdot y_0}{b^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

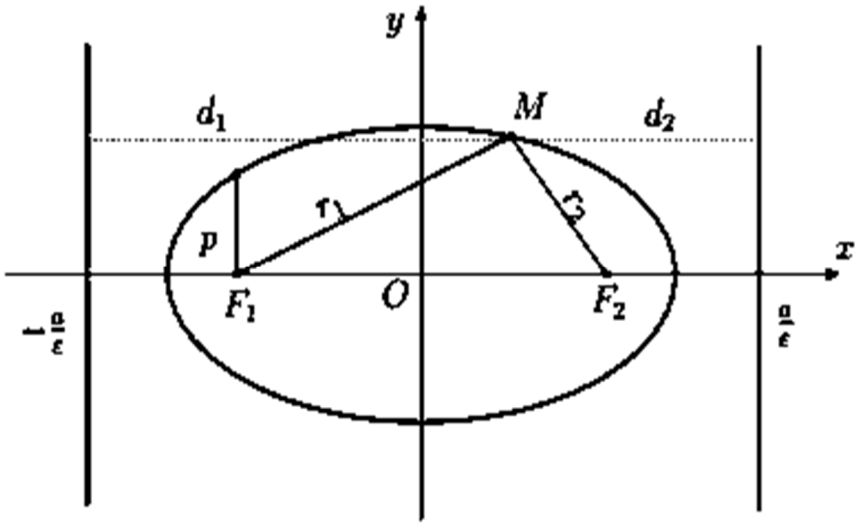
Бұдан $sin\alpha_1 = \frac{F_1D_1}{F_1M_0} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$.

Осыған ұқсас $sin\alpha_2 = \frac{F_2D_2}{F_2M_0} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$. Сонымен $\alpha_1 = \alpha_2$.

7. Эллипстің бойында жатқан кез келген нүкте үшін осы нүктеден фокусқа дейінгі арақашықтықтың сол нүктеден сәйкес директрисаға дейінгі арақашықтыққа қатынасы ε − ға тең тұрақты шама (5.8-сурет).

$$\frac{|F_1M|}{\rho(M,\alpha_1)} = \frac{|F_2M|}{\rho(M,\alpha_2)} = \varepsilon.$$

Эллипстің бұл қасиетін оның директориалдық қасиеті деп атайды.



5.8-сурет

Гипербола және оның қасиеттері

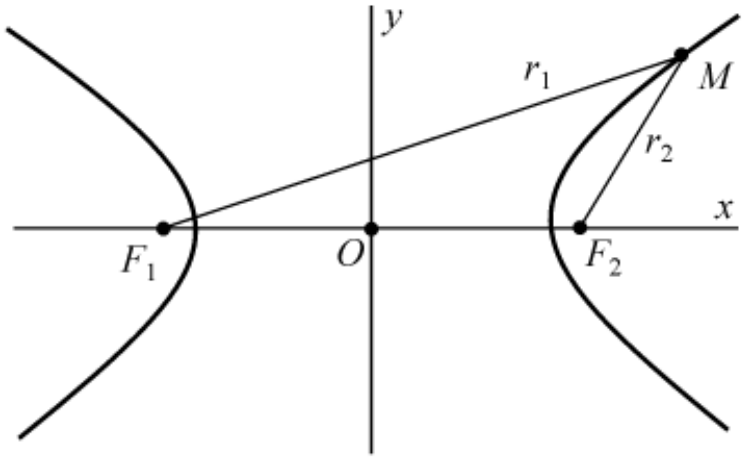
Анықтама. Жазықтықта фокустар деп аталатын $F_1(-c;0)$ және $F_2(c;0)$ бекітілген нүктелерінен арақашықтықтарының айырымы тұрақты болып келетін нүктелердің геометриялық орнын ***гипербола*** деп атайды (5.9-сурет).

Егер M нүктесі F_2 фокусына жақын жатса, онда анықтама бойынша гиперболаның бойында жатқан кез келген M нүктесі үшін

$$F_1M - F_2M = 2a.$$

Егер керісінше M нүктесі F_1 фокусына жақын жатса, онда анықтама бойынша гиперболаның бойында жатқан кез келген M нүктесі үшін

$$F_2M - F_1M = 2a.$$



5.9-сурет

Гиперболаның анықтамасы және үшбұрыштар теңсіздігі бойынша $F_1M - F_2M < F_1F_2$ және $F_2M - F_1M < F_1F_2$; бұдан $2a < 2c$, яғни $a < c$.

F_1M және F_2M кесінділері және олардың сәйкес $r_1 = |F_1M|$ және $r_2 = |F_2M|$ ұзындықтары гиперболаның бойында жатқан $M(x, y)$ нүктесінің фокальдық радиустары деп аталады.

$M(x, y)$ нүктесі үшін $r_1 - r_2 = 2a$ немесе $r_2 - r_1 = 2a$ теңдіктерінің тек бірі орындалғанда, тек сонда ғана, ол гиперболаның бойында жатады. Соңғы екі теңдікті $r_1 - r_2 = \pm 2a$ жалпы теңдігімен біріктірейік. Ізделініп отырған гиперболаның теңдеуін қорытып шығару үшін r_1 және r_2 фокальдық радиустарды $r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ өрнектерімен алмастырайық, сонда

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

теңдеуіне көшеміз (шын мәнісінде гиперболаның оң және сол тармақтары үшін екі теңдеу алынды).

Теңдеудің екі жағын бірдей квадратқа шығарып, радикалдан құтыламыз

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \text{немесе}$$

$$cx-a^2=\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Соңғы теңдеу де алгебралық тұрғыдан қарағанда иррационал теңдеу. Сондықтан тағы да квадраттаймыз

$$c^2x^2-2a^2cx-a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

Бұдан $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$.

Геометриялық мағынасы кейінірек ашылатын $b=\sqrt{c^2-a^2}$ шамасын енгізейік. Бұл жерде $c>a$, демек $c^2-a^2>0$ оң және b нақты шама. Гиперболаның теңдеуі $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ немесе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5.6)$$

түрінде жазылады. (5.6) теңдеуі гиперболаның канондық теңдеуі деп аталады.

Анықтама. Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$ теңдеуімен анықталатын екінші ретті қисықты гипербола деп атайды. Дербес жағдайда $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ немесе $x^2-y^2=a^2$ теңдеуімен анықталатын екінші ретті қисықты тең бүйірлі гипербола деп атайды.

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),$$

$$y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

теңдіктерімен анықталатын жаңа координат жүйесіне көшетін болсақ, мектеп бағдарламасынан белгілі тең бүйірлі гиперболаның $x'y'=\frac{a^2}{2}$ түріндегі теңдеуін аламыз.

Анықтама.

- a және b сандары гиперболаның нақты және жорамал жарты осьтері;
- $c=\sqrt{a^2+b^2}$ саны гиперболаның сызықтық эксцентриситеті;
- $2c$ саны фокустық арақашықтық;

• $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$саны гиперболаның эксцентриситеті;

• $p = \frac{b^2}{a}$ саны гиперболаның фокальдық параметрі деп аталады. Тең бүйірлі гипербола үшін $a = b,\ c = \sqrt{2}a,\ \varepsilon = \sqrt{2},\ p = a$;

• $O(0; 0)$нүктесі гиперболаның центрі;

• $(\pm a; 0)$нүктелері гиперболаның төбелері;

• $(\pm c; 0)$нүктелері гиперболаның фокустары;

• $r_1 = |\varepsilon x + a|$ және $r_2 = |\varepsilon x - a|$ формулалары гиперболаның фокальдық радиус – векторларының формулалары. Шынында да $M(x, y)$ нүктесінің сол r_1 фокальдық радиусы $r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$ формуласымен өрнектеледі. Демек

$$r_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 - b^2} =$$
$$= \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon a x + a^2} = |\varepsilon x + a|.$$

Осыған ұқсас оң r_2 фокальдық радиусы үшін де $r_2 = |\varepsilon x - a|$ теңдігін аламыз.

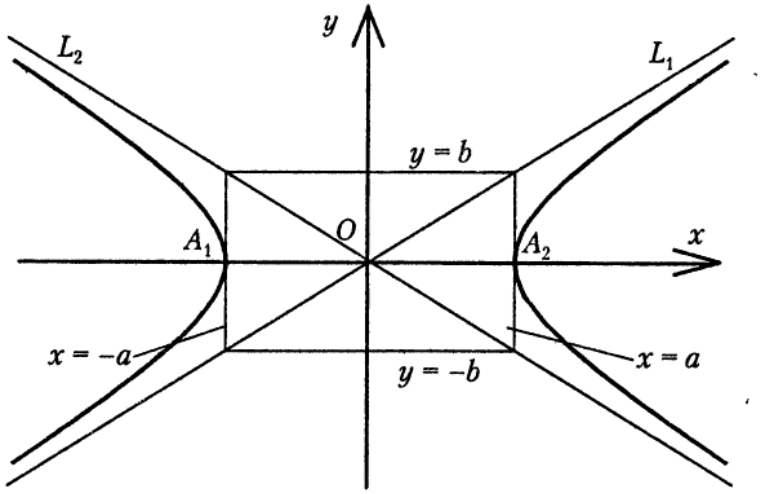
• $x = -\frac{a}{\varepsilon},\ x = \frac{a}{\varepsilon}$ түзулері гиперболаның сәйкес сол және оң директрисалары деп аталады.

Гиперболаның қасиеттері

1. Координат осьтері гиперболаның симметрия осьтері, ал координат бас нүктесі оның симметрия центрі болады (5.10-сурет).

2. Гиперболаның нүктелері $G = \left\{(x, y) :\ |x| \geq a, |y| < \frac{b}{a}|x|\right\}$ жиынына тиісті. Демек гипербола $x = \pm a$ жолағынан сырт орналасқан екі тармақтан тұратын шектеусіз қисық. Егер $M(x, y)$ ағымдық нүктесі гиперболаның оң жақ тармағында жатса, онда $r_1 > r_2$ және $r_1 - r_2 = 2a$. Егер $M(x, y)$ ағымдық нүктесі гиперболаның сол жақ тармағында жатса, онда $r_2 < r_1$ және $r_2 - r_1 = 2a$.

3. Гиперболаның $|r_1 - r_2| = 2a$ қасиеті оның фокальдық қасиеті деп аталады.

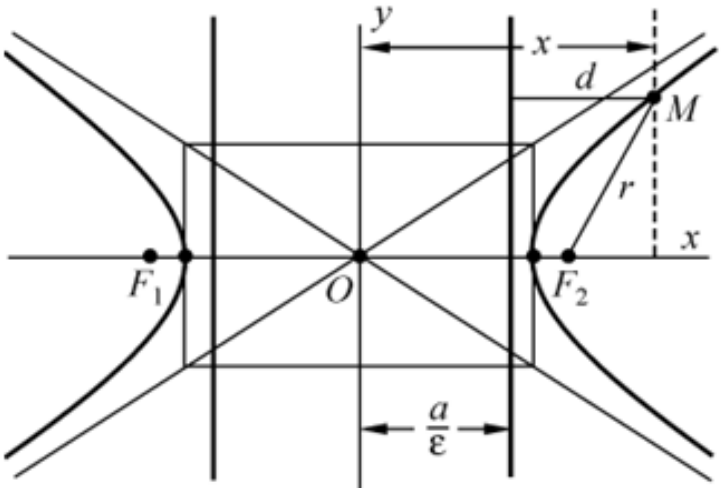


5.10-сурет

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ теңдеуімен берілген гиперболаның сызбасын қарастырайық (5.11-сурет). $M(x,y)$ нүктесі гиперболаның бойынан алынған кез келген нүкте, яғни ағымдық нүкте болсын дейік. Гиперболаның оң жақ тармағын қарастырайық.

$r_2=|F_2M|$ ағымдық нүктеден фокусқа дейінгі, ал $d=x-\frac{a}{\varepsilon}$ ағымдық нүктеден директрисаға дейінгі арақашықтықты білдірсін, сонда $\frac{r_2}{d}$ қатынасы гиперболаның эксцентриситетіне тең тұрақты шама:

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$



5.11-сурет

Дәлелдеу. M нүктесінен оң фокусқа дейінгі арақашықтық $r_2 = |\varepsilon x - a| = \varepsilon x - a$ тең, өйткені гиперболаның оң тармағы үшін $x > 0$ және $\varepsilon > 1$.

$$\frac{r_2}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(\varepsilon x - a)\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon.$$

Егер M нүктесі гиперболаның сол жақ тармағының бойында жатса, онда M нүктесінен оның оң директрисасына дейінгі арақашықтық $d = |x| + \frac{a}{\varepsilon}$ ($|x|$ - M нүктесінен Oy осіне дейінгі, $\frac{a}{\varepsilon}$– директрисадан Oy осіне дейінгі арақашықтық). Бірақ M нүктесі гиперболаның сол жақ тармағына тиісті болғандықтан x шамасы теріс, демек $|x| = -x$. Сондықтан

$$d = |x| + \frac{a}{\varepsilon}.$$

M нүктесінен оң жақ фокусқа дейінгі арақашықтық

$$r = |\varepsilon x - a| = -(\varepsilon x - a),$$

өйткені $x < 0$ және $\varepsilon > 1$. Сонда

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(-\varepsilon x + a)}{-\varepsilon x + a} = \varepsilon.$$

Гиперболаның бұл қасиетін оның директориальдық қасиеті деп атайды.

Ескерту. Екеуі де оң немесе екеуі де теріс фокус пен директриса өзара аттас деп аталады.

5. $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ сызықтық теңдеуі гиперболаға тиісті $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуі.

Дәлелдеу. Айқындалмаған түрде берілген $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ гиперболаның теңдеуін дифференциалдап $\frac{2x}{a^2}dx - \frac{2y}{b^2}dy = 0$ теңдігін аламыз, бұдан $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. Демек жанаманың бұрыштық коэффициенті $k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$. Енді $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ теңдеуімен анықталатын жанаманың теңдеуін жазайық: $y - y_0 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$. Бұл теңдеуді $\frac{y_0}{b^2}$ көбейтіп, $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$ теңдеуіне көшейік.

$M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің гиперболаға тиістілігі $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ теңдігінің орындалатындығын көрсетеді.

Сонымен $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ сызықтық теңдеуі гиперболаға тиісті $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың теңдеуі.

6. $y = \pm\frac{b}{a}x$ түзулері гиперболаның көлбеу асимптоталары (5.10-суретте L_1 және L_2 түзулері).

Дәлелдеу. Гиперболаның канондық теңдеуін $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ түрінде жазып, алдымен $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ жағдайын қарастырайық. Келесі түрдегі түрлендірулер жасайық:

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x + x\right) = \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) =$$

$$= \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} =$$

$$= \frac{b}{a}x - \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.$$

$x \to +\infty$ ұмтылғанда $\sqrt{x^2 - a^2} + x \to +\infty$, ал $\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \to +0$, сондықтан гипербола $y = \frac{b}{a}x$ түзуіне жақындайды.

Осыған ұқсас $y = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ жағдайында гипербола $y = -\frac{b}{a}x$ түзуіне жақындайды.

Ескерту. Гиперболаның асимптоталары негізгі төртбұрыштың $(|x| \le a,\ |y| \le b)$ диагональдары болады (5.10-сурет).

7. Гиперболаға тиісті $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен оның асимптоталарына дейінгі арақашықтықтардың көбейтіндісі тұрақты шама және $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ өрнегіне тең.

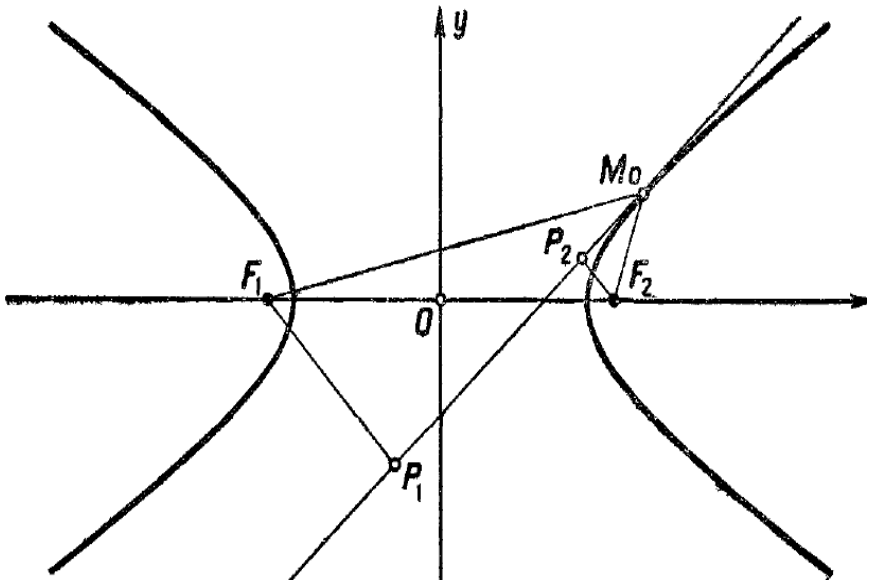
Дәлелдеу. Асимптоталардың теңдеулерін $bx - ay = 0$ және $bx + ay = 0$ түрінде жазайық. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен асимптоталарға дейінгі арақашықтықтар сәйкес $h_1 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $h_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$M_0(x_0, y_0)$нүктесі гиперболаға тиісті, онда $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ және

$$h_1 \cdot h_2 = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

8. Гиперболаның бойынан алынған кез келген M_0 нүктесінен жүргізілген жанама сол нүктенің фокальдық радиустарымен өзара тең сүйір бұрыштар жасайды. Гиперболаның бұл қасиетін оның оптикалық қасиеті деп атайды.

Дәлелдеу. Гиперболаның оң тармағында жататын $M_0(x_0, y_0)$нүктесі арқылы жанама жүргізейік. $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ сол жанаманың теңдеуі.



5.12-сурет

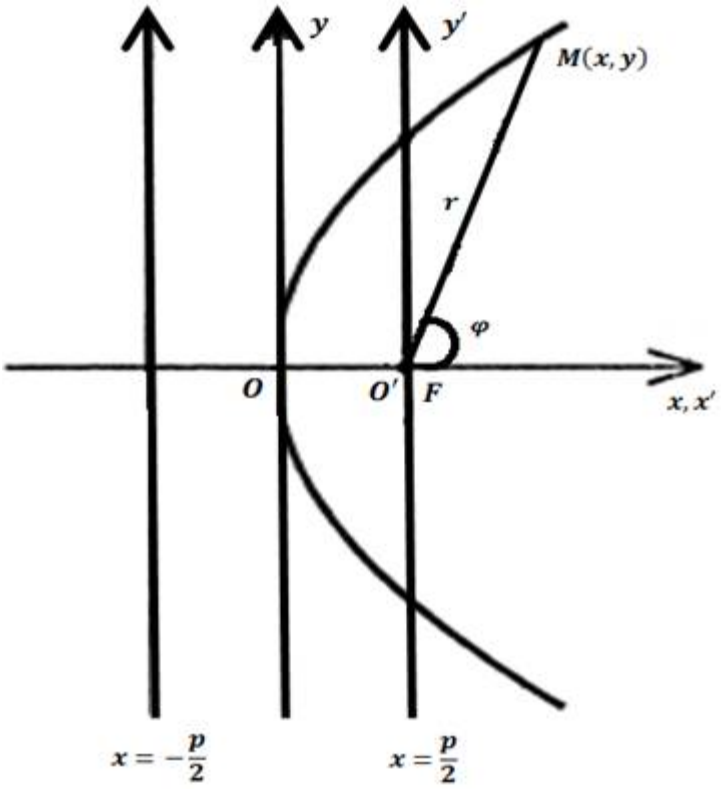
Әрі қарай $F_1(-c; 0)$ және $F_1(c; 0)$ фокустарынан жанамаға F_1P_1 және F_2P_2 перпендикулярларын түсірейік (5.12-сурет). Жазықтықта берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі арақашықтықты табу формуласын пайдаланып $h_1 = |F_1P_1| = \left|-\frac{cx_0}{a^2} - 1\right| = \left|1 + \frac{\varepsilon x_0}{a}\right|$ және $h_2 = |F_2P_2| = \left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right| = \left|1 - \frac{\varepsilon x_0}{a}\right|$ табайық. Бұдан $\frac{h_1}{h_2} = \frac{|a+\varepsilon x_0|}{|a-\varepsilon x_0|} = \frac{r_1}{r_2}$, мұндар$_1 = |F_1M_0|, r_2 = |F_2M_0|$. Соңғы теңдік $\Delta F_1M_0P_1 \sim \Delta F_2M_0P_2$ үшбұрыштарының ұқсастығын білдіреді. Олай болса

$\widehat{F_1M_0P_1} = \widehat{F_2M_0P_2}$.

Эллипс, гипербола және параболаның полярлық теңдеулері

Жазықтықтағы нүктенің орнын анықтау үшін декарттық координаталар жүйесімен қатар оның полярлық координаталар жүйесі де жиі қолданылады. Қай координаталар жүйесін қарастырсақ та жазықтықтағы нүктенің орны реттелген қос нақты сан арқылы анықталады.

1. Алдымен тік бұрышты декарттық Oxy координаталар жүйесінде канондық теңдеуі арқылы берілген кез келген $y^2 = 2px$ параболасын қарастырайық және оның полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеуін табайық. Полюсты параболаның фокусында орналастырайық, ал полярлық осьті парабола осі арқылы бағыттайық (5.13- сурет).



5.13-сурет

Бұл координаталар жүйесі $O'x'y'$ тік бұрышты координаталар жүйесімен сәйкестендірілген. Парабола бойындағы $M(x, y)$ ағымдық нүктесінің координаталары сәйкестендірілген координаталар жүйесінде

$$x' = r\cos\varphi, y' = r\sin\varphi$$

формулаларымен өрнектеледі. Өз кезегінде $O'x'y'$ координаталар жүйесі бастапқы Oxy жүйесін $O'\left({}^{p}/_{2}, 0\right)$ нүктесіне параллель жылжыту арқылы алынады.

$O'x'y'$ және Oxy координат жүйелері арасындағы байланыс

$$\begin{cases} x = x' + {}^{p}/_{2}, \\ y = y' \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x' = x - {}^{p}/_{2}, \\ y' = y \end{cases}$$

параллель көшіру формулалары арқылы анықталады. Демек

$$x = \frac{p}{2} + rcos\varphi, \quad y = rsin\varphi.$$

Бұл теңдіктерді параболаның канондық теңдеуіне қойып

$$r^2sin^2\varphi - 2prcos\varphi - p^2 = 0$$

теңдігін аламыз. Соңғы теңдеуді $r -$ ға қатысты шешейік:

$$r = \frac{pcos\varphi \pm \sqrt{p^2cos^2\varphi + p^2sin^2\varphi}}{sin^2\varphi} = \frac{p(cos\varphi \pm 1)}{sin^2\varphi}.$$

r–полярлық радиус, оң шама, сондықтан

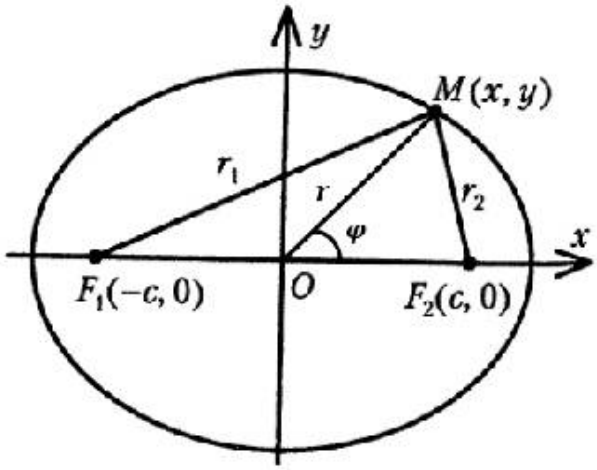
$$r = \frac{p(1 + cos\varphi)}{sin^2\varphi} = \frac{p}{1 - cos\varphi}.$$

Сонымен көрсетілген полярлық координаталар жүйесінде парабола $r = \frac{p}{1-cos\varphi}$ теңдеуімен өрнектеледі.

Тік бұрышты декарттық Oxy координаталар жүйесіне қатысты өзінің

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$$

канондық теңдеуімен анықталатын эллипсті қарастырайық (5.14-сурет).



5.14 – сурет

Полярлық осьті канондық координаталар жүйесінің абсцисса осі бойынша бағыттайық, ал полюс үшін абсциссасы теріс болатын, яғни сол жақ фокусты алайық. Сонда ағымдық нүктенің x, y канондық координаталары r, φ полярлық координаталары арқылы

$$x = -c + rcos\varphi,$$
$$y = rsin\varphi$$

формулалары бойынша өрнектеледі. Бұл өрнектерді эллипстің канондық теңдеуіне қойып, алынған квадрат теңдеуді r −ға қатысты шешетін болсақ, эллипстің полярлық теңдеуін аламыз.

Полярлық координаталар жүйесін таңдауымыз бойынша ағымдық нүктенің сол фокальдық радиусы r полярлық радиусты береді, демек $r = r_1 = a + \varepsilon x$. Сондықтан $r = a + \varepsilon(-c + rcos\varphi)$, бұдан $r = \frac{a-\varepsilon c}{1-\varepsilon cos\varphi}$ немесе $r = \frac{p}{1-\varepsilon cos\varphi}$, өйткені $a - \varepsilon c = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p$. Сонымен таңдап алынған полярлық координаталар жүйесінде эллипс $r = \frac{p}{1-\varepsilon cos\varphi}$ теңдеуімен өрнектеледі.

3. Ақырында тік бұрышты декарттық Oxy координаталар жүйесіне қатысты

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$$

канондық теңдеуімен берілген гиперболаны қарастырайық.

Полярлық осьті абсцисса осі бойынша бағыттайық, ал полюс үшін гиперболаның оң фокусын алайық. Сонда

$$\begin{cases} x = c + rcos\varphi, \\ y = rsin\varphi. \end{cases}$$

Дербес жағдайда гиперболаның оң тармағының бойында жатқан $M(x, y)$ ағымдық нүктесінің полярлық радиусы оң фокустың фокальдық радиусын көрсетеді. Демек $r = r_2 = -a + \varepsilon x$. Сондықтан $r = -a + \varepsilon(c + rcos\varphi)$, яғни

$$r = \frac{\varepsilon c - a}{1-\varepsilon cos\varphi} \quad \text{немесе} \quad r = \frac{p}{1-\varepsilon cos\varphi},$$

өйткені $\varepsilon c - a = \frac{c^2}{a^2} - a = \frac{c^2-a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p$. Сонымен таңдап алынған полярлық координаталар жүйесіне қатысты гиперболаның оң тармағы $r = \frac{p}{1-\varepsilon cos\varphi}$ теңдеуімен өрнектеледі.

Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуі

Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде екінші ретті алгебралық теңдеу $F(x, y) = 0$ теңдеуімен анықталады, мұнда $F(x, y)$ – екінші дәрежелі алгебралық көпмүшелік. Бұл көпмүшелікті

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

түрінде жазу қабылданған, мұнда $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Осыған сәйкес екінші ретті алгебралық сызықтар

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,\quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0 \tag{5.7}$$

теңдеуімен анықталады.

(5.7) теңдеу жазықтықта екінші ретті алгебралық сызықтың жалпы теңдеуі деп аталады. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ қосылғыштар тобын (яғни екінші дәрежелі бірмүшеліктер) (5.7) теңдеудің квадраттық бөлігі (немесе бас мүшелерінің тобы), ал $2a_1x + 2a_2y$ қосылғыштар тобын – сызықтық бөлігі, a_0 – бос мүшесі деп атайды.

Алдыңғы параграфта қарастырылған эллипс, гипербола және парабола екінші ретті алгебралық сызықтардың қатарына жатады. Басқа қандай сызықтар екінші ретті алгебралық сызықтардың қатарына жатады деген сұрақ туындауы мүмкін. Мұндай сұраққа жауап беру үшін (5.7) теңдеу қарапайым жай теңдеулерге жіктелетіндей декарттық теңдеулер жүйесін табуымыз қажет. Ендігі мақсат осындай жүйені табу.

Іздеу процесін екі кезеңге бөлейік. Алдымен (5.7) жалпы теңдеу анықталған Oxy координаталар жүйесін жоғарыда айтылған шарт орындалатындай әзірге белгісіз қандай да бір бұрышқа бұрайық. Осындай жолмен алынған жүйені $O'x'y'$ арқылы белгілеп, (5.7) жалпы теңдеуді осы жүйеге қатысты түрлендірейік.

Ескерту. Екінші ретті сызық және екінші ретті қисық сөздерін синоним ретінде қабылдаймыз.

Сонымен $O'x'y'$ жүйесі бастапқы Oxy координаталар жүйесін қандай да бір α бұрышына бұрғанда алынсын дейік. Бұл екі жүйеге қатысты жазықтықтағы нүктелердің координаталары

$$x = x'cos\alpha - y'sin\alpha,\quad y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \tag{5.8}$$

формулаларымен тікелей байланысты. Демек (5.7) теңдеуді $O'x'y'$ координаталар жүйесінде келесі түрде жазуға болады:

$$F(x,y) = a_{11}\left(x'^2cos^2\alpha - 2x'y'cos\alpha sin\alpha + y'^2sin^2\alpha\right) +$$
$$+2a_{12}\left(x'^2cos\alpha sin\alpha - x'y'sin^2\alpha + x'y'cos^2\alpha - y'^2sin\alpha cos\alpha\right) +$$
$$+a_{22}\left(x'^2sin^2\alpha + 2x'y'cos\alpha sin\alpha + y'^2cos^2\alpha\right) +$$
$$+2a_1x'cos\alpha - 2a_1y'sin\alpha + 2a_2x'sin\alpha + 2a_2y'cos\alpha + a_0 = 0$$

немесе $F(x,y) = (a_{11}cos^2\alpha + 2a_{12}cos\alpha sin\alpha + a_{22}sin^2\alpha)x'^2 +$
$+2(-a_{11}cos\alpha sin\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + a_{22}cos\alpha sin\alpha)x'y' +$
$+(a_{11}sin^2\alpha - 2a_{12}cos\alpha sin\alpha + a_{22}cos^2\alpha)y'^2 +$
$+2(a_1cos\alpha + a_2sin\alpha)x' + 2(-a_1sin\alpha + a_2cos\alpha)y' + a_0' =$
$= a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0' = 0,$

Мұнда $a_{11}' = a_{11}cos^2\alpha + 2a_{12}cos\alpha sin\alpha + a_{22}sin^2\alpha,$
$a_{12}' = -a_{11}cos\alpha sin\alpha + a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + a_{22}cos\alpha sin\alpha,$
$a_{22}' = a_{11}sin^2\alpha - 2a_{12}cos\alpha sin\alpha + a_{22}cos^2\alpha,$
$a_1' = a_1cos\alpha + a_2sin\alpha, a_2' = -a_1sin\alpha + a_2cos\alpha, a_0' = a_0.$

Бұдан жазықтықты бұру формуласы екінші ретті алгебралық сызық үшін инвариант болатынын көреміз.

Соңғы теңдеу қандай екінші ретті қисықты анықтайтынын білу үшін жазықтықты a_{12}' коэффициенті нөлге айналатындай бұрышқа бұрайық, яғни

$$a_{12}cos^2\alpha + (a_{22} - a_{11})cos\alpha sin\alpha - a_{12}sin^2\alpha = 0$$

немесе $a_{12}tg^2\alpha + (a_{11} - a_{22})tg\alpha - a_{12} = 0$ және $a_{12} \neq 0.$

$$tg\alpha = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

мұнда $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 > 0,$ сондықтан α бұрышын әруақытта табуға болады.

Ескерту. Ізделініп отырған α бұрышын басқаша да анықтауға болады. Ол үшін $a_{12}' = 0$ теңдігін төменгі түрде жазайық

$$a_{12}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + (a_{22} - a_{11})sin\alpha cos\alpha = 0$$

немесе $a_{12}cos2\alpha + \frac{a_{22}-a_{11}}{2}sin2\alpha = 0,$

бұдан $ctg2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$

Сонымен Oxy координаталар жүйесін α бұрышына бұрып, $O'x'y'$ жүйесіне қатысты екінші ретті алгебралық сызықтардың

$$a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0' = 0 \qquad (5.9)$$

түріндегі жалпы теңдеуін аламыз.

Келесі қадамда (5.9) теңдеуді ықшамдау оның сызықтық бөлігіне қатысты жүргізіледі. Жалпы жағдайда $a_{11}' \neq 0$ және $a_{22}' \neq 0$ дейік, сонда O' координат бас нүктесін әзірге белгісіз жазықтықтың екінші бір O'' нүктесіне көшіре отырып (5.9) теңдеудің сызықтық

бөліктерінен құтыламыз. Ол үшін (5.9) теңдеуінің сол жақ бөлігінде x' және y' айнымалыларына қатысты олардың толық квадраттарын бөліп шығарайық.

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 =$$

$$= a'_{11}\left(x'^2 + 2\frac{a'_1}{a'_{11}}x' + \frac{a'^2_1}{a'^2_{11}}\right) + a'_{22}\left(y'^2 + 2\frac{a'_2}{a'_{22}}y' + \frac{a'^2_2}{a'^2_{22}}\right) -$$

$$-\frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}} + a'_0 = a'_{11}\left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_2}{a'_{22}}\right)^2 - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}} + a'_0 = 0.$$

Жоғарыда айтылған O'' нүктесінің координаталарын табу үшін

$$x'' = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}},\ y'' = y' + \frac{a'_2}{a'_{22}}$$

параллель көшіру формулаларын пайдаланайық, сонда $O''x''y''$ координаталар жүйесінің бас нүктесі $O'x'y'$ жүйесіне қатысты қарағанда $O''\left(-\frac{a'_1}{a'_{11}}; -\frac{a'_2}{a'_{22}}\right)$ болатынын көреміз. Сонымен $O''x''y''$ координаталар жүйесінде екінші ретті алгебралық сызықтардың жалпы теңдеуі

$$a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2 + a''_0 = 0 \qquad (5.10)$$

канондық теңдеуімен анықталады, мұнда

$$a''_{11} = a'_{11},\ a''_{22} = a'_{22},\ a''_0 = -\frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}} + a'_0.$$

Дербес жағдайларда (5.10) теңдеудің коэффициенттерінің таңбаларына байланысты келесі түрдегі екінші ретті алгебралық сызықтарды аламыз:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a \geq b > 0)$–эллипс;
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$– жорамал эллипс;
3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$– қиылысатын қос жорамал түзулер;
4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$– гипербола;
5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$– қиылысатын қос түзулер;
6) $y^2 = 2px (p > 0)$– парабола;
7) $y^2 = a^2 (a \neq 0)$– параллель қос түзулер;

8) $y^2 = -a^2-$ параллель жорамал қос түзулер;

9) $y^2 = 0-$ беттесетін қос түзулер.

Алғашқы бес дербес жағдайды (5.10) канондық теңдеуінің коэффициенттері арқылы қалай анықталатынын көрсетейік.

1. a''_{11} және $a''_{22}-$ таңбалары бірдей, a''_0- қарсы. Эллипстің теңдеуін аламыз.

2. a''_{11}, a''_{22}, a''_0- таңбалары бірдей. Жорамал эллипстің теңдеуін аламыз.

3. a''_{11}, $a''_{22}-$ таңбалары бірдей, $a''_0 = 0$. Қиылысатын қос жорамал түзулердің теңдеуін аламыз.

4. a''_{11} және $a''_{22}-$ әртүрлі таңбалы $a''_0 \neq 0$. Гиперболаның теңдеуін аламыз.

5. a''_{11} және $a''_{22}-$ әртүрлі таңбалы $a''_0 = 0$. Қиылысатын қос түзулердің теңдеуін аламыз.

Екінші ретті қисықтардың ортогональды инварианттары

Анықтама. $C^T = C^{-1}$(яғни $C^T \cdot C = C \cdot C^T = E$) теңдігі орындалатын C квадрат матрицасын ***ортогональды матрица*** деп атайды.

Тұжырым. Өлшемі$[2 \times 2]$ ортогональды матрицалар тек

$$C = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \text{ немесе } C = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

түрінде табылады, мұнда φ бұрышы $[0,2\pi)$ аралығынан алынады.

Тұжырым. Кез келген ретті ортогональды матрицаның анықтауышы ± 1 тең.

Дәлелдеу.$1 = detE = det(C^T \cdot C) = detC^T \cdot detC = (detC)^2$.

Анықтама. Анықтауышы бірге тең ортогональды матрицаны арнайы ортогональды деп атайды. Өлшемі $[n \times n]$ болатын мұндай матрицалардың жиынын $SO(n)$ арқылы белгілейді.

Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуі $F(x,y) = 0$ теңдеуімен берілген дейік, мұнда

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 =$$

$$= (xy)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_1a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_0 = X^TQX + 2L^TX + a_0 =$$

$$= (x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

мұндағы $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$.

Анықтама. $I = I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$ функциясы F алгебралық көпмүшелігінің коэффициенттері арқылы анықталсын делік. Егер бұл функцияның мәні берілген тік бұрышты координаталар жүйесінен екінші бір жүйеге көшкенде өзгермейтін болса, онда оны екінші ретті қисықтың ортогональды инварианты деп атайды, яғни

$$I = I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0) = I(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a'_0).$$

Анықтама. $A[n \times n]$матрицасыныңдиагональдық элементтерінің қосындысы A матрицасының ізі деп аталады. Белгілеуі: $I_1 = TrA = a_{11} + a_{22} + + \cdots + a_{nn}$.

$I_1 = TrA$, $I_2 = |Q| = detQ$, $K_3 = |A| = detA$ сандары екінші ретті қисықтың инварианттары, ал $K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ саны жарты инварианты деп аталады.

Характеристикалық көпмүшелік. $A[n \times n]$ матрицасының характеристикалық көпмүшелігі деп $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ теңдігімен анықталатын $f(\lambda)$ функциясын айтамыз.

а) егер $n = 2$ болса, онда $f(\lambda) = (-\lambda)^2 + a_1(-\lambda) + a_0$, мұнда $a_1 = trQ, a_0 = detQ$;

б) егер $n = 3$ болса, онда $f(\lambda) = (-\lambda)^3 + a_2(-\lambda)^2 + a_1(-\lambda) + a_0$, мұнда $a_2 = trQ, a_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$, $a_0 = detA$;

Анықтама. $A[n \times n]$, $B[n \times n]$ матрицалары үшін $A = C^{-1}BC$ теңдігі орындалатындай өзгеше емес C матрицасы табылса, онда A, B матрицалары ұқсас деп аталады.

Теорема. Ұқсас матрицалардың характеристикалық матрицалары бірдей болады.

Дәлелдеу. Шынында да егер $A = C^{-1}BC$ болса, онда

$$|A - \lambda I| = |C^{-1}BC - \lambda I| = |C^{-1}BC - C^{-1}\lambda IC| =$$
$$= |C^{-1}(B - \lambda I)C| = |C^{-1}||B - \lambda I||C| = |B - \lambda I|.$$

Сонымен λ-ның кез келген мәнінде A және B матрицаларының характеристикалық көпмүшеліктері бірдей мән қабылдайды, демек беттеседі.

Салдар. Q матрицасының характеристикалық көпмүшелігінің коэффициенттері ортогональды инвариантты болады.

Дәлелдеу.

$$f_{Q'}(\lambda) = det(Q' - \lambda E) = det(C^T QC - \lambda E) = \det(C^T QC - \lambda C^T C) =$$
$$= detC^T(Q - \lambda E)C = (detC)^2 det(Q - \lambda E) = f_Q(\lambda).$$

Жоғарыда қарастырылғандай кез келген екінші ретті қисықтың теңдеуін тік бұрышты координаталарды алмастыру арқылы

1) $F = a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 + a''_0(a''_{11}, a''_{22} \neq 0)$;

2) $F = a''_{22}(y'')^2 + 2a''_1 x(a''_{22}, a''_1 \neq 0\ )$;

3) $F = a''_{22}(y'')^2 + a''_0(a''_{22} \neq 0)$

түрлерінің біріне келтіруге болады. Бұл кезеңде екінші ретті қисықтың барлық инварианттары сақталады. Демек бұл функциялардың инварианттары бойынша теңдеуді анықтай алсақ, онда бастапқы теңдеу де анықталады. Кесте құрайық:

Жағдай	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I_1}$	$\boldsymbol{I_2}$	$\boldsymbol{detA}$
1	$\begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a''_0 \end{pmatrix}$	$a''_{11} + a''_{22}$	$a''_{11} \cdot a''_{22}$	$a''_{11} \cdot a''_{22} \cdot a''_0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 \\ a''_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	a''_{22}	0	$-a''_{22}(a''_1)^2$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a''_0 \end{pmatrix}$	a''_{22}	0	0

Келесі кесте инварианттар атауында екінші ретті қисықтың классификациясын көрсетеді.

1. Эллипс $I_2 > 0 I_1 \cdot det < 0$
2. Жорамал эллипс $I_2 > 0 I_1 \cdot det > 0$
3. Қиылысатын қос жорамал $I_2 > 0 detA = 0$ түзулер
4. Гипербола $I_2 < 0 detA \neq 0$
5. Қиылысатын қос түзулер $I_2 < 0 detA = 0$
6. Парабола $I_2 = 0 detA \neq 0$
7. Параллель қос түзулер $I_2 = detA = 0 K < 0$

8. Параллель жорамал қос $I_2 = detA = 0K > 0$ түзулер
9. Беттесетін қос түзулер $I_2 = detA = 0K = 0$

Екінші ретті беттер

Екінші ретті беттердің жалпы теңдеуі. Екінші ретті беттердің классификациясы.

Анықтама. Екінші ретті бет деп қандай да бір $Oxyz$ тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде координаталары

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ +2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \qquad (5.11)$$

екінші дәрежелі алгебралық теңдеуін қанағаттандыратын нүктелердің жиынын айтамыз, мұнда $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a_0 \in \mathbb{R}$, ал

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0.$$

(5.11) теңдеуін екінші ретті беттердің жалпы теңдеуі деп атайды. Дербес жағдайда (5.11) теңдеуі төмендегі теңдеулердің біріне келтіріледі:

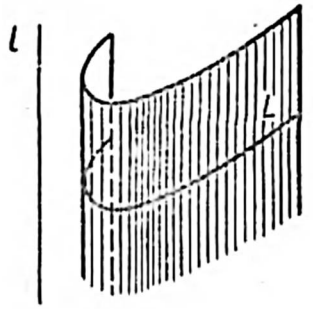
1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$
3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$
4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$
5) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0;$
6) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0;$
7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$
8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$
9) $y^2 = 2px;$
10) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$
11) $x^2 - a^2 = 0;$
12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$
13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1;$
15) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$
16) $\frac{x^2}{a^2} = -1.$

Бұл теңдеулерді екінші ретті беттердің канондық теңдеулері деп те атайды.

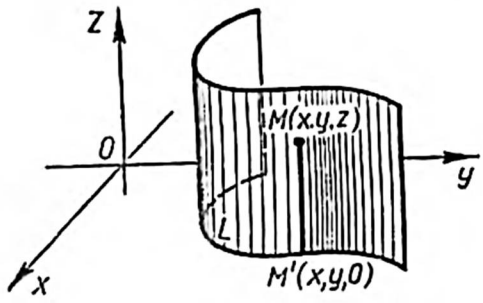
Кеңістіктегі беттер маңызды үш топқа бөлінеді:

1) цилиндрлік беттер;
2) конустық беттер;
3) айналу беттері.

Цилиндрлік беттер. $L-$ кеңістіктегі қайсыбір қисық сызық дейік. Lқисығының әрбір нүктесі арқылы берілген l түзуіне параллель түзулер жүргізейік (5.15-сурет). Сонда пайда болған бетті цилиндрлік бет деп атайды. Lсызығы цилиндрлік беттің бағыттаушысы, ал l түзуіне параллель түзулер оның жасаушысы деп аталады. L бағыттаушысы xOy жазықтығында жататын, ал жасаушысы z осіне параллель S цилиндрлік бетін қарастырайық. Сонда L бағыттаушысы $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесі арқылы беріледі (5.16-сурет).

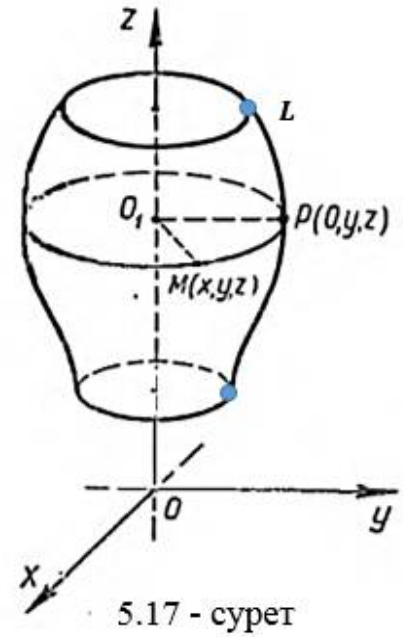


5.15-сурет



5.16-сурет

Айналу беттері. Қайсыбір L жазық қисығын l осінің төңірегінде айналдырғанда құралатын бетті ***айналу беті*** деп атайды. L сызығын (қисығын) айналу бетінің меридианы, ал l осін – айналу осі деп атайды.



5.17 - сурет

$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ теңдеулерімен берілген Oyz жазықтығында орналасқан L меридианы Oz осінің төңірегінде айналсын дейік. Сонда пайда болған S айналу бетінің теңдеуін табайық (5.17-сурет).

Oz осіне перпендикуляр M нүктесі арқылы өтетін Q жазықтығы S бетін центрі Oz осінің O_1 нүктесінде жататын K шеңбері бойынша қиып өтсін. K шеңберінің барлық нүктелерінің және O_1 нүктесінің аппликатасы M нүктесінің аппликатасына, яғни z санына тең.

P нүктесі арқылы K және L сызықтарының қиылысуын белгілейік. P

нүктесінің координаталары $(0; y; z)$, ал $O_1 - (0; 0; z)$. K шеңберінің r радиусы O_1P және O_1M кесінділерінің ұзындықтарына тең. Сондықтан

$$r = |O_1P| = |y_1|.$$

$$|O_1M| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Бұдан $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ немесе $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

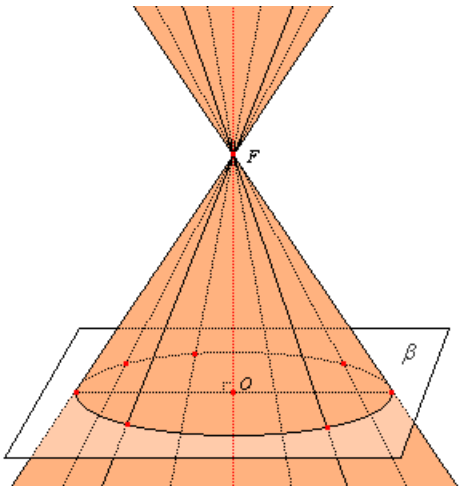
$P(0; y; z)$ нүктесі L меридианының бойында жатқандықтан $F(y, z) = 0$. Бұдан

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Сонымен S айналу бетіне тиісті кез келген M нүктесінің координаталары $F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$ теңдеуін қанағаттандырады.

Конустық беттер. Кеңістікте L қисығы және L қисығының бойында жатпайтын P нүктесі берілсін дейік. P нүктесі мен L қисығының мүмкін болатын барлық нүктелері арқылы өтетін түзулерден құрылған бетті ***конустық бет*** деп атаймыз. L қисығы конустық беттің бағыттауышы, түзулер оның жасаушылары, ал P оның төбесі деп аталады.

Төбесі координаталар жүйесінің бас нүктесінде, бағыттаушысы $z = h$ жазықтығында жататын конустық беттің теңдеуін қорытып шығарайық (5.18-сурет).



5.18-сурет

$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = h \end{cases}$ теңдеулер жүйесі L бағыттауыш қисығының теңдеуін анықтайды.

$M(x, y, z)$ нүктесін конустық бетке тиісті кез келген нүкте болсын дейік. M және O (конустық беттің төбесі) нүктелері арқылы OM түзуін жүргізейік. Бұл түзу $z = h$ жазықтығын $N(x_0; y_0; h)$ нүктесінде қиып өтеді. Сонда $\boldsymbol{OM}$ және $\boldsymbol{ON}$ векторларының коллинеарлық шартынан $\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{h}{z}$ теңдіктерін аламыз. Бұдан $x_0 = \frac{xh}{z}$, $y_0 = \frac{yh}{z}$.

$M(x, y, z)$ ағымдық нүктесінің конустық бетке тиістілігі $N(x_0; y_0; h)$ нүктесінің конустық беттің бағыттауышының бойында жатуымен пара-пар. Демек $F(x_0, y_0) = 0$ теңдігінің орындалуы конустық беттің теңдеуінің қажетті және жеткілікті шарты болады.

Сонымен табылған x_0 және y_0 мәндерін $F(x_0, y_0) = 0$ теңдеуіне қойып, ізделініп отырған конустық беттің теңдеуін аламыз:

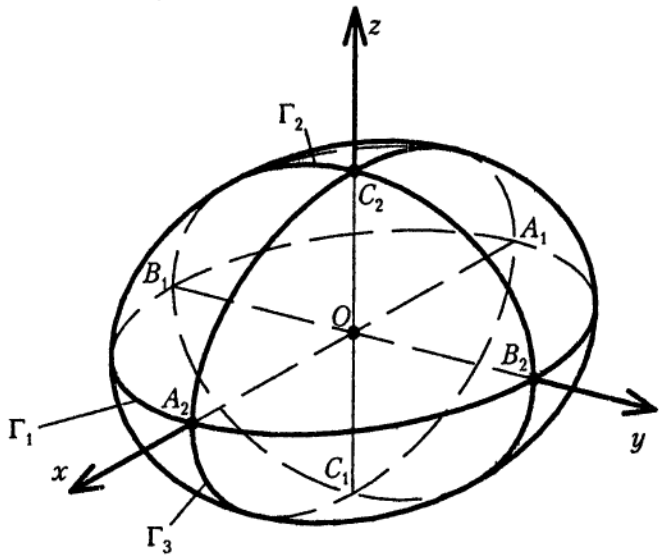
$$F\left(\frac{xh}{z}, \frac{yh}{z}\right) = 0.$$

Эллипсоид

Анықтама. Қандай да бір тік бұрышты $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ a \geq b \geq c > 0. \qquad (5.12)$$

түріндегі теңдеуімен анықталатын екінші ретті бетті ***эллипсоид*** деп атайды (5.19-сурет).



5.19-сурет

(5.12) теңдеуін эллипсоидтың канондық теңдеуі деп атайды. Эллипсоид координаталар жазықтықтарына қатысты симметриялы, ал координат бас нүктесіне қатысты центрлік симметриясы бар.

Эллипсоид центрі бас нүктеде болатын радиусы a шардың ішінде жатады, яғни шектелген бет.

Элиипсоидтың $z = 0$ жазықтығындағы қимада Γ_1 жарты осьтері a және b болатын эллипс алынады. Осыған ұқсас $x = 0$ және $y = 0$ қималарында жарты осьтері b, c және a, c болатын Γ_2 және Γ_3 эллипстері болады. a, b, c сандары эллипсоидтың жарты осьтері, ал $A_1(-a; 0; 0)$, $A_2(a; 0; 0)$, $B_1(0; -b; 0)$, $B_2(0; b; 0)$, $C_1(0; 0; -c)$, $C_2(0; 0; c)$ - оның төбелері болады.

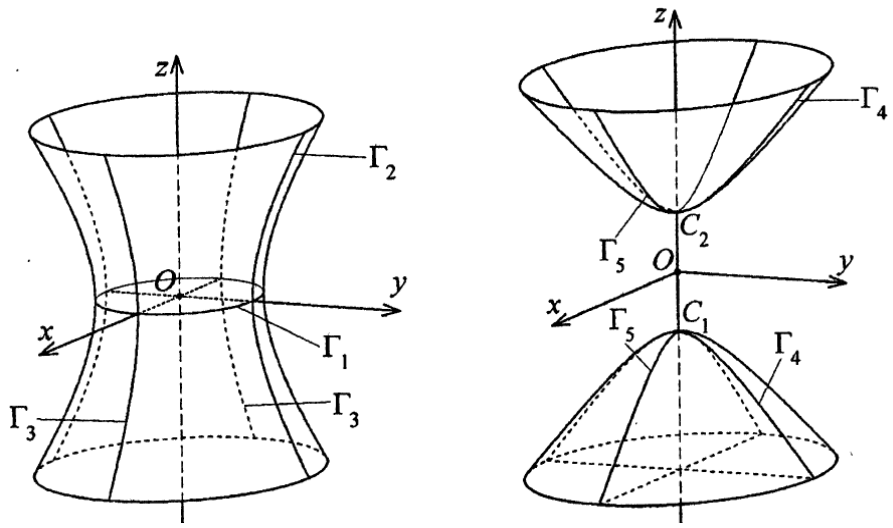
Гиперболоид

Анықтама. Қандай да бір тік бұрышты $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{5.13}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 (a \geq b > 0, c > 0) \tag{5.14}$$

теңдеулерімен анықталатын беттерді сәйкес ***бір қуысты*** және ***екі қуыстыгиперболоидтар*** деп атайды (5.20-сурет).



5.20-сурет

Бір қуысты гиперболоид. $z = 0$ қимасында жарты осьтері a және b болатын $\Gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ***алқымдық эллипсті*** (горловой эллипс) аламыз, ал $x = 0$ және $y = 0$ қималарында $\Gamma_2 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ және $\Gamma_3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболалары болады.

Екі қуысты гиперболоид. $x = 0$ және $y = 0$ қималарында $\Gamma_4 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \Gamma_5 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболоидтары болады. $C_1(0; 0; -c)$ және $C_2(0; 0; c)$ нүктелері екі қуысты гиперболоидтың төбелері.

Екінші ретті конус

Анықтама. Егерқандай да бір тік бұрышты $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесінде $n-$ ші ретті алгебралық бет

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (5.15)$$

теңдеуі арқылы берілсе, онда оны ***конустық бет*** деп атайды. Мұнда $F(x, y, z)$ көпмүшелігінің әрбір мүшесінің дәреже көрсеткіштерінің қосындысы тұрақты және $n-$ ға тең:

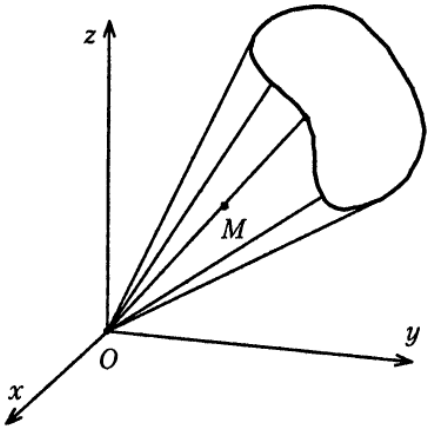
$$F(x, y, z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \cdots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s},$$
$$k_1 + l_1 + m_1 = \cdots = k_s + l_s + m_s = n, k_i, l_i, m_i, n \in N, \forall i = 1, 2, \ldots, s.$$

$O(0; 0; 0)$ координат бас нүктесі конусқа тиісті.

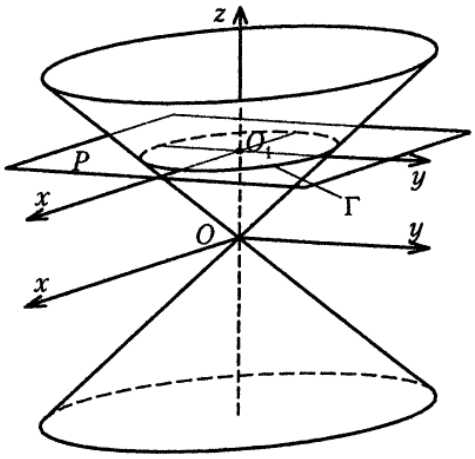
Конусқа тиісті $M_0(x_0, y_0, z_0)$ және $O(0; 0; 0)$ нүктелері арқылы түзу жүргізейік. (OM_0) түзуінің конуста жататынын дәлелдейік (5.21-сурет). Ол үшін (OM_0) түзуінің бойынан координаталары x, y, z болатын кез келген M ағымдық нүктесін алайық. Сонда $\boldsymbol{OM}$ және $\boldsymbol{OM_0}$ векторлары коллинеар болады, демек олардың сәйкес координаталары пропорционал:

$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = k$, бұдан $x = kx_0, y = ky_0, z = kz_0$ және

$$F(x, y, z) = F(kx_0, ky_0, kz_0) = k^n F(x_0, y_0, z_0) \equiv 0 \Rightarrow$$



5.21-сурет



5.22-сурет

(OM) түзуі конусқа тиісті. Мұндай түзулер конустың жасаушылары, ал O нүктесі – оның төбесі деп аталады.

Анықтама. Қандай да бір тік бұрышты $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (a>b>\ c>0) \tag{5.16}$$

түріндегі теңдеумен анықталатын екінші ретті бетті ***конус*** деп атайды (5.22-сурет).

Бұл беттің симметриялық сипаттамасы эллипсоидтық беттің сипаттамасы сияқты. $z=z_0(z_0\neq 0)$ қимасында $\Gamma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$ эллипс пайда болады.

Параболоид

Анықтама. Қандай да бір тік бұрышты $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесінде

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad p,q>0 \tag{5.17}$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p,q>0 \tag{5.18}$$

түріндегі теңдеулермен анықталатын екінші ретті беттерді сәйкес ***эллипстік*** және ***гиперболалық беттер*** деп атайды.

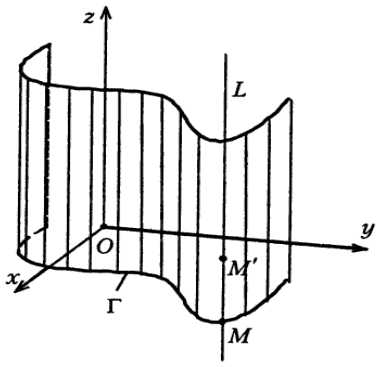
Бұл беттер Oxz және Oyz координаталар жазықтықтарына қатысты симметриялы.

Екінші ретті цилиндрлер

Анықтама. Егерқандай да бір тік бұрышты $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесінде n −ші ретті алгебралық бет

$$F(x, y) = 0 \tag{5.19}$$

теңдеуі арқылы берілсе, онда оны ***цилиндрлік бет*** деп атайды. Мұнда $F(x, y)$ құрамына z айнымалысы кірмейтін x және y айнымалыларына қатысты n −ші дәрежелі көпмүшелік (5.23-сурет).



5.23-сурет

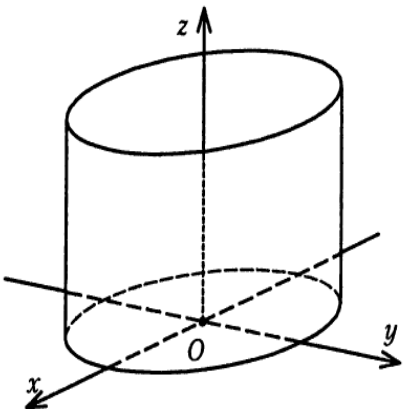
Анықтама. Қайсыбір тік бұрышты $Oxyz$ декарттық координаталар жүйесінде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0; \tag{5.20}$$

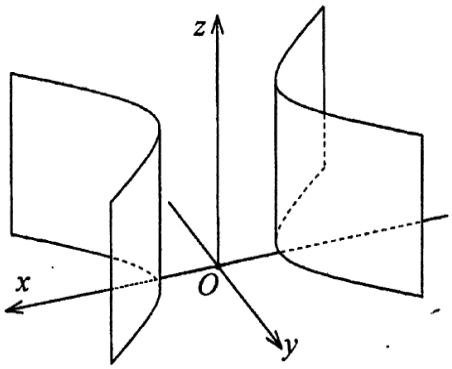
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0; \tag{5.21}$$

$$y^2 = 2px, p > 0 \tag{5.22}$$

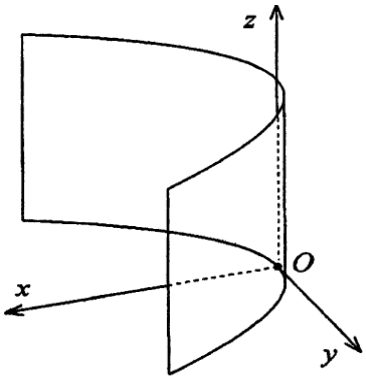
түрлеріндегі теңдеулермен анықталатын екінші ретті беттерді сәйкес эллипстік, гиперболалық және параболалық цилиндрлер деп атайды (5.24, 5.25,5.26-суреттер).



5.24-сурет



5.25-сурет

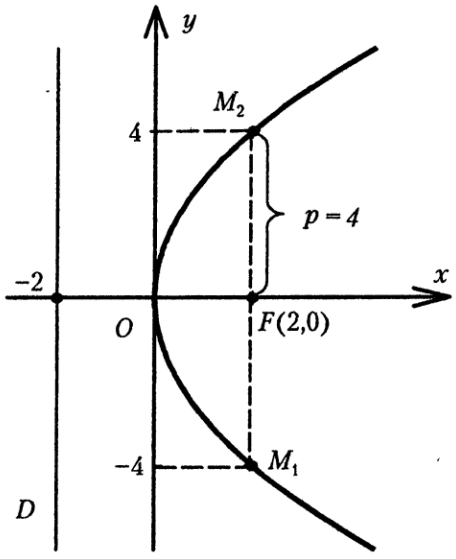


5.26-сурет

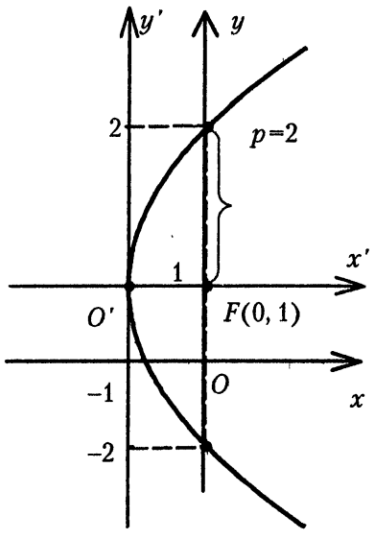
Есеп шығару үлгілері

1-мысал. Парабола $y^2 = 8x$ теңдеуімен берілген. Оның параметрін, фокустың координаталарын және директриса теңдеуін анықтайық.

Шешуі. Параболаның $y^2 = 2px$ канондық теңдеуімен берілген $y^2 = 8x$ теңдеуін салыстырсақ, бұдан $p = 4$. $F\left(^{p}/_{2}, 0\right) = F(2;0)$– параболаның фокусы, ал $x = -^{p}/_{2} = -2$ директрисаның теңдеуі. Сызбасы (5.27-сурет) көрсетілген.



5.27-сурет



5.28-сурет

2-мысал. $y^2 - 2y = 4x + 3$ параболасы берілген. Фокустың координаталарын анықтайық және сызбасын салайық.

Шешуі. Теңдеудің сол жағынан толық квадратын бөліп шығарайық:

$$y^2 - 2y + 1 = 4x + 4 \qquad \text{немесе} \qquad (y-1)^2 = 4(x+1).$$

Координат бас нүктесін (-1;1) нүктесіне көшірейік. Сонда жаңа координаталар жүйесінде - ${y'}^2 = 4x$, мұнда $x' = x + 1, y' = y - 1$.

$O'x'y'$ координаталар жүйесінде ${y'}^2 = 4x$ теңдеуі бастапқы берілген параболаның канондық теңдеуі болады, бұдан $-p = 2$. Жаңа координаталар жүйесінде параболаның фокусы $F'(1;0)$. Параболаның төбесі O' нүктесінде жатады, демек Oxy жүйесінде фокустық координаталары (-1;1) болады. Әрі қарай параметрдің қасиетін пайдалана отырып параболаны саламыз (5.28-сурет).

3-мысал. Координаталар осьтеріне қатысты симметриялы және $A\left(3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, $B(6;0)$ нүктелері арқылы өтетін эллипстің канондық теңдеуін жаз.

Шешуі. Есептің шарты бойынша эллипстің $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ канондық теңдеуін A және B нүктелерінің координаталары қанағаттандырады, демек:

$$\begin{cases} \dfrac{18}{a^2} + \dfrac{8}{b^2} = 1, \\ \dfrac{36}{a^2} + \dfrac{0}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Бұл теңдеулер жүйесін шеше отырып, $a = 6$ және $b = 4$ параметрлерін табамыз. Сонда $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипстің канондық теңдеуі.

4-мысал. Координат бас нүктесі арқылы өтетін шеңберге жүргізілген жанаманың теңдеуін жаз.

Шешуі. Координат бас нүктесі арқылы өтетін түзудің қарапайым теңдеуі $y = kx$ түрінде беріледі. Жанасу нүктесі шеңберге де және жанамаға да ортақ, яғни

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0 \\ y = kx. \end{cases}$$

Екінші теңдеуді біріншіге қойсақ, x −қа қатысты квадрат теңдеу аламыз. Бұл алынған теңдеуде жанаманың бұрыштық коэффициенті

параметр түрінде болады. Және алынған квадрат теңдеудің дискриминантының нөлге теңдігі түзудің жанама болуының шартын көрсетеді. Сонымен $(4-8k)^2-8(1+k^2)=0$.

Өз кезегінде бұл шарт k бұрыштық коэффициентіне қатысты квадрат теңдеуді көрсетеді:

$$7k^2-8k+1=0 \Rightarrow k_1=\frac{1}{7},\ k_2=1.$$

Бұл есептің шартын қанағаттандыратын екі жанаманың бар екенін білдіреді.

5-мысал. Полярлық координаталар жүйесінде $\rho(\varphi)=\frac{5}{1-\frac{1}{2}cos\varphi}$ теңдеуімен қандай сызық берілгенін анықта және оның декарттық координаталар жүйесіндегі канондық теңдеуін жаз.

Шешуі. Берілген теңдеуді полярлық координаталарға қатысты екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуімен салыстыра отырып, эллипстің эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{1}{2}$, ал параметрі $p=\frac{b^2}{a}=5$ тең екенін көреміз. Анықтамаға сай $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Сонда эллипстің a және b жарты осьтерін табу үшін екі белгісізді екі теңдеулер жүйесін аламыз. Шешіп, $a=\frac{20}{3}$ және $b=\sqrt{\frac{100}{3}}$ мәндерін табамыз. Демек эллипстің канондық теңдеуі $\frac{9x^2}{400}+\frac{3y^2}{100}=1$ түрінде жазылады.

6-мысал. Жазықтықта $A(4;1)$, $B(-3;-6)$ және $C(5;0)$ нүктелері арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жаз.

Шешуі. $A(4;1)$, $B(-3;-6)$ және $C(5;0)$ нүктелері арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ түрінде іздейік. Ізделініп отырған шеңберге A,B,C нүктелері тиісті болғандықтан олардың координаталарын теңдеуге қойып, үш сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\begin{cases} 4^2+1^2+4m+n+p=0, \\ (-3)^2+(-6)^2-3m-6n+p=0, \\ 5^2+0^2+5m+0\cdot n+p=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+n+p=-17, \\ 3m+6n-p=45, \\ 5m+p=-25. \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесін шешіп $m=-2$, $n=6$, $p=-15$ мәндерін табамыз. Сонда $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ ізделініп отырған шеңбердің теңдеуі. Ал канондық теңдеуі $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ түрінде жазылады.

7-мысал. Фокусы $F(4;3)$ нүктесінде, ал директрисасы $y+1=0$ теңдеуімен анықталатын параболаның теңдеуін құрайық.

Шешуі. $M(x,y)$ – параболаның бойындағы кез келген нүкте дейік. Анықтама бойынша $|MF|=|MN|$, мұнда $|MN|$ осы нүктеден директрисаға дейінгі арақашықтық.

$$|MF|=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2};\ \ |MN|=|y+1|;$$

сонда $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=|y+1|$ немесе $x^2-8x+24=8y$ немесе $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$.

8-мысал. $l:\ 4x+3y+46=0$ түзуінен $y^2=64x$ параболасына дейінгі ең қысқа арақашықтықты тап.

Шешуі. Түзу параболаны қиып өтсе, онда ең қысқа арақашықтық нөлге тең. Сондықтан түзу параболаны қиып өтпейді дейік. Ең қысқа арақашықтықты табу үшін параболаның бойынан алынған нүкте арқылы жүргізілген жанама берілген түзуге параллель болатындай нүктені іздейміз. Сонда параллель түзулердің бір- бірінен қашықтығы есептіңшартын береді. $4x+3y+c=0$ теңдеуі $y^2=64x$ параболасына жүргізілген жанама дейік. Жанама мен параболаның тек бір ғана ортақ нүктесі бар. Бұл шарттан c коэффициенті табылады:

$$\begin{cases} y^2=64x, \\ 4x+3y+c=0, \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=64x \\ x=-\frac{3}{4}y-\frac{c}{4}, \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+48y+16c=0, \\ x=-\frac{3}{4}y-\frac{c}{4}. \end{cases}$$

Есептің шарты орындалу үшін бірінші теңдеудің дискриминанты $48^2-4\cdot 16c=0$ нөлге тең болуы керек. Бұдан $c=36$. Жанаманың теңдеуі: $4x+3y+36=0$. Жанаманың бойынан $M(-9;0)$ нүктесін алып, осы нүктеден берілген түзуге дейінгі арақашықтықты $\rho(M,l)=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ формуласымен табайық. Сонда

$$\rho(M,l)=\frac{|4\cdot(-9)+3\cdot 0+46|}{\sqrt{16+9}}=2.$$

9-мысал. $5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0$ жалпы теңдеуімен берілген екінші ретті қисықтың канондық теңдеуін және канондық координаталар жүйесін табайық.

Шешуі. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуін жазайық:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0.$$

Бұдан $a_{11}=5, a_{12}=2, a_{22}=8, a_1=4, a_2=7, a_0=5.$

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix},\ detQ = I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 \neq 0,$$

демек берілген теңдеу орталық қисықты анықтайды. Центрдің координаталарын

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$$

жүйесін шешу арқылы табамыз. Біздің жағдайымызда

$$\begin{cases} 5x_0 + 2y_0 + 4 = 0, \\ 2x_0 + 8y_0 + 7 = 0 \end{cases}$$

жүйесін шешіп, центрдің координаталарын табамыз:

$$x_0 = -\frac{1}{2},\ y_0 = -\frac{3}{4}.$$

$$a_1' = a_1 cos\alpha + a_2 sin\alpha,\ a_2' = -a_1 sin\alpha + a_2 cos\alpha.$$

Сонда $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_1' = 0$ теңдеуі $5x'^2 + 4x'y' + 8y'^2 - \frac{9}{4} = 0$ түрінде жазылады. (5.9) формуласы бойынша

$ctg\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5-8}{4} = -\frac{3}{4}. \Rightarrow cos2\alpha = \frac{3}{5}$ және $sin2\alpha = -\frac{4}{5}$. Әрі қарай

$$cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}(\text{“}+\text{„ таңбасын аламыз})cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(\text{“}-\text{„ таңбасын аламыз})sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

a_{11}'және a_{22}' коэффициенттерін

$$a_{11}' = a_{11}cos^2\alpha + 2a_{12}cos\alpha \cdot sin\alpha + a_{22}sin^2\alpha,$$

$$a_{22}' = a_{11}sin^2\alpha - 2a_{12}cos\alpha \cdot sin\alpha + a_{22}cos^2\alpha$$

формулалары бойынша есептейік:

$$a_{11}' = 5 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 8 \cdot \frac{1}{5} = 4,$$

$$a_{22}' = 5 \cdot \frac{1}{5} - 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 8 \cdot \frac{4}{5} = 9.$$

Жаңа $Ox'y'$ координаталар жүйесінде $4x'^2 + 9y'^2 - {}^9\!/_4 = 0$ теңдеуін аламыз.

Бұл үлкен жарты осі ${}^3\!/_4$, ал кіші жарты осі ${}^1\!/_2$ болатын эллипсті көрсетеді, яғни

$$\frac{x'^2}{{}^9\!/_{16}} + \frac{y'^2}{{}^1\!/_4} = 1.$$

10-мысал. $5x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$ жалпы теңдеуімен берілген екінші ретті қисықтың канондық теңдеуін және канондық координаталар жүйесін табайық.

Шешуі. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуімен салыстыра отырып $a_{11}=5,\ a_{12}=2,\ a_{22}=1,\ \ a_1=-3,\ \ a_2=-1$ және $a_0=2$ коэффициенттерін анықтайық.

$$Q=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ detQ=I_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5-4=1\neq 0,$$

демек берілген теңдеу орталық қисықты анықтайды.

$\begin{cases}5x_0+2y_0-3=0,\\ 2x_0+y_0-1=0\end{cases}$ теңдеулер жүйесінен центрдің $\begin{matrix}x_0=1,\\ y_0=-1\end{matrix}$ координаталарын табамыз.

a_3' коэффициентін $a_3'=a_1x_0+a_2y_0+a_0$ формуласы бойынша табамыз:

$$a_3'=-3\cdot 1-1\cdot(-1)+2=0$$

және $O'x'y'$ координаталар жүйесіне көшеміз

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+a_3'=0.$$

Қисықтың жаңа теңдеуі $5x'^2+4x'y'+y'^2=0$ түрінде жазылады, мұнда $a_{12}=2\neq 0$; сондықтан берілген бастапқы теңдеудің канондық теңдеуін алу үшін $O'x'y'$ координаталар жүйесін α бұрышына бұрамыз. $ctg2\alpha=\frac{5-1}{2\cdot 2}=1$. Бұл жағдайда

$cos2\alpha=sin2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+cos2\varphi}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$(“ + „ таңбасын аламыз). $cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ және $sin\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

a_{11}' және a_{22}' коэффициенттерін жоғарыдағы формулалар бойынша есептейік: $a_{11}'=3+2\sqrt{2},\quad a_{22}'=3-2\sqrt{2}$. Сонымен бастапқы теңдеудің канондық теңдеуі

$$\frac{x'^2}{1/(3+2\sqrt{2})}+\frac{y'^2}{3-2\sqrt{2}}=0$$

түрінде жазылады.

11-мысал. $x^2+2xy+y^2+2x+y=0$ жалпы теңдеуімен берілген екінші ретті қисықтың канондық теңдеуін табайық.

Шешуі. Алдымен бұрылу бұрышын анықтайық:

$$ctg2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{1-1}{2}=0,\ 2\alpha=\pi/2,\ \alpha=\pi/4.$$

$Ox'y'$ координаталар жүйесі бастапқы Oxy координаталар жүйесін қандай да бір α бұрышына бұрғанда алынсын дейік. Сонда

жазықтықтағы нүктенің координаталары бұл екі жүйеде төмендегі формулалармен байланысты:

$$x = x'cos\alpha - y'sin\alpha,$$
$$y = x'sin\alpha + y'cos\alpha.$$

Біздің жағдайымызда

$$\begin{cases} x = x'cos\dfrac{\pi}{4} - y'sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x'sin\dfrac{\pi}{4} + y'cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

Табылған x пен $y-$тің бұл мәндерін бастапқы теңдеуге қойып,

$$2x'^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0$$

түріндегі теңдеуге көшеміз.

Соңғы теңдеуді $y'-$ке қатысты шешіп, қисықтың парабола екеніне көз жеткіземіз:

$$y' = 2\sqrt{2}x'^2 + 3x'.$$

Бұдан $x' = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$, $y' = -\frac{9}{8\sqrt{2}}$ координаталары $Ox'y'$ декарттық координаталар жүйесіне қатысты салынған параболаның төбелерін анықтайды.

Жаттығулар

1. a, b – эллипстің жарты осьтері, ал O эллипстің центрі болсын дейік. A, B нүктелері эллипстің бойында жатқан нүктелер. AB кесіндісінің ұзындығының ең үлкен және ең кіші мәндерін тап.

2. Тең бүйірлі гиперболаның эксцентриситетін есепте.

3. $9x^2 + 5y^2 = 45$ теңдеуімен эллипс берілген. Табу керек:

1) оның жарты осьтерін; 2) фокустарын; 3) эксцентриситетін; 4) директриса теңдеулерін.

4. $16x^2 - 9y^2 = -144$ теңдеуімен гипербола берілген. Табу керек:

1) оның жарты осьтерін; 2) фокустарын; 3) эксцентриситетін; 4) асимптоталарын; 5) директриса теңдеулерін.

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ канондық теңдеуімен эллипс берілген. Эксцентриситеті $\varepsilon = 2$ тең гиперболаның фокустары эллипстің фокустарымен беттеседі. Гиперболаның теңдеуін құр.

6. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$ канондық теңдеуімен эллипс берілген. Фокустары берілген эллипстің төбелерінде, ал төбелері – фокустарында орналассын. Гиперболаның теңдеуін жаз.

7. Oy осіне симметриялы және $x+y=0$ түзуімен $x^2+y^2+8y=0$ шеңберінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін параболаның теңдеуін жаз.

8. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ эллипске $P(-16;9)$ нүктесінен жанамалар жүргізілген. P нүктесінен жанасу нүктелерін қосатын хордаға дейінгі d арақашықтығын тап.

9. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=-1$ гиперболасына $2x+4y-5=0$ түзуіне параллель жанамалар жүргіз және бұлардың бір-бірінен арақашықтығын тап.

10. $2x+2y-3=0$ түзуіне параллель және $y^2=8x$ параболасын жанап өтетін түзудің теңдеуін құр.

11. $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=81$ сферасы мен $x=3-t$, $y=-3++2t$, $z=4-2t$ параметрлік теңдеулерімен берілген түзу сызықтың қиылысу нүктелерін тап.

12. Конустың бағыттауышы $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$, $y=0$ теңдеулерімен берілген, ал төбесі $S(0;-3;4)$ нүктесінде орналасқан. Конустың теңдеуін құр.

13. Эллипсоид $x^2+2y^2+3z^2=4$ теңдеуімен берілген. $M(1;1;1)$ нүктесінің эллипсоидтың ішінде немесе сыртында жататынын анықта.

14. Oz осі жоғары бағытталған. $M(1;1;1)$ нүктесі $x^2+2y^2=2z$ параболоидынан жоғары немесе төмен жататынын анықта.

15. $4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$ жалпы теңдеуімен берілген екінші ретті қисықты канондық түрге келтір.

16. $z=xy$ теңдеуі гиперболалық параболоидты анықтайтынын көрсет.

17. $5x^2+11y^2+2z^2-16xy+20xz+4yz=18$ теңдеуімен берілген беттің түрін инварианттардың көмегімен анықта.

18. *а*) $xy-2x-y+6=0$; *б*) $y=\frac{9-x}{x-3}$;
в) $6x^2+6y^2+6x-2y-1=0$; *г*) $9x^2-16y^2-6x+8y-144=0$;
д) $2x^2+6xy+10y^2-121=0$; *е*) $9xy+4=0$.

теңдеулерімен берілген екінші ретті қисықтардың түрлерін анықта және олардың канондық теңдеулерін құр.

19. *а*) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4xz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;

б) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;

в) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$;

г) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - x + 2y - 3z - 6 = 0$

теңдеулерімен берілген екінші ретті беттердің түрлерін анықта және олардың канондық теңдеулерін құр.

20. Гиперболалық параболоидтың әрбір нүктесі арқылы оған тиісті екі түзудің өтетінін дәлелде.

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512с.

2. *Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964.

3. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1970. – 528с.

4. *Итудесман К.Б.* Задачи по аналитической геометрии. Казанск.ун-т, 2003. – 63с.

5. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981. – 232с.

6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. –М.: Наука, 1971. – 432с.

7. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1979. – 336с.

8. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964. – 336с.

9. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю.* – Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматгиз, 2004.

10. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – СПб.: Специальная литература, 1998.

11. *Погорелов Л.В.* Аналитическая геометрия. –М.: Наука, 1975. – 208с.

12. *Қабдықаиров Қ.* Жоғары математика. – Алматы.: РБК, 1993.

13. *Қасымов Қ.А., Қасымов Е.А.* Жоғары математика курсы. – Алматы.: Санат, 1994.

14. *Қасымов Е.Ә., Сағындықов Б.Ж.* Жоғары математика. 2-бөлім. – Алматы.: ҚазҰТУ, 2015.

15. *Қасымов Е.Ә., Сағындықов Б.Ж.* Жоғары математика. 3-бөлім. – Алматы.: ҚазҰТУ, 2015.

МАЗМҰНЫ

Алғысөз 3
1. АЛҒАШҚЫ МӘЛІМЕТТЕР.....5
Сызықтық теңдеу және екі белгісізді екі теңдеулер жүйесі (Крамер тәсілі) 5
Матрицалар туралы мәліметтер. Матрицаларға амалдар қолдану.....8
Квадрат матрицалардың анықтауыштары 12
Орын алмастыру және транспозиция. n -ші ретті анықтауыш.....14
Анықтауыштардың негізгі қасиеттері.....15
Минорлар мен алгебралық толықтауыштар 16
n белгісізді n сызықтық теңдеулер жүйесі.....18
n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесі.....20
Матрицаның рангы.....21
Кері матрица 23
Жолдарға элементар түрлендірулер жүргізу арқылы кері матрицаны табу.....26
Кронекер – Капелли теоремасы.....26
Квадрат матрицаны үшбұрыштық матрицалардың көбейтіндісіне жіктеу.....29
Есеп шығару үлгілері 30
Жаттығулар 38
2. АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ. ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ.....41
Кеңістіктегі векторлар.....42
Базис және координаталар 45
Координаталары арқылы берілген векторларға амалдар қолдану 48
Кесіндіні берілген қатынасқа бөлу.....48
Вектордың оське түскен проекциясы.....49
Векторлардың ортогональдық проекциясының қасиеттері.....50
Векторлардың скаляр көбейтіндісі. Скаляр көбейтіндінің аксиомалары.....50
Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері.....51
Скалярлық көбейтіндіні координаталар арқылы өрнектеу.....52
Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері.....53
Үш вектордың аралас көбейтіндісі.....55
Қос векторлық көбейту 57

Есеп шығару үлгілері 59
Жаттығулар 69
3. АФФИНДІК КЕҢІСТІКТЕР 71
n өлшемді аффиндік кеңістіктің анықтамасы. Аффиндік координаталар жүйесі 71
Аффиндік кеңістіктегі жазықтықтар 72
Евклид кеңістігі. Скалярлық көбейтінді. Грамм матрицасы. Ортогонализациялау процесі 77
Декарттық координаталар жүйесі 81
Параллель жылжыту 82
Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесін бұру 83
Жазықтықтағы полярлық координаталар жүйесі 84
Цилиндрлік және сфералық координаталар жүйесі 85
Аналитикалық геометрияның қарапайым алгебралық қисықтары 87
Бернулли лемнискатасы – жазық алгебралық қисық 88
Кассини сопақшасы 89
Декарт сопақшасы 90
Астроида 91
Декарт жапырағы (Декартов лист) 91
Циклоида 92
4. ТҮЗУ СЫЗЫҚТАР ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТАР 93
Координат осьтеріне қатысты түзудің орналасуы 94
Жазықтықтағы түзудің канондық және параметрлік теңдеулері 96
Түзудің нормаль теңдеуі 98
Нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық 99
Кеңістіктегі жазықтық 100
Жазықтықтың координат осьтеріне қатысты орналасу белгілері 101
Кеңістіктегі жазықтықтың векторлық және параметрлік теңдеулері 102
Жазықтықтың нормаль теңдеуі. Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық 104
„Кесінді“ түрінде берілген жазықтықтың теңдеуі 106
Екі жазықтықтың орналасу белгілері 106
Кеңістіктегі түзу 107
Екі түзудің бір жазықтықта орналасу шарты 109
Кеңістіктегі түзу және жазықтық 109
Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш 110
Есеп шығару үлгілері 112

Айқас түзулердің арасындағы қашықтық..... 125
Жаттығулар..... 126
5. ЕКІНШІ РЕТТІ ҚИСЫҚТАР 128
Шеңбер. Шеңбердің канондық және параметрлік теңдеулері.....128
Парабола және оның қасиеттері 128
Параболаның қасиеттері 130
Эллипс және оның қасиеті 132
Эллипстің қасиеттері.....134
Гипербола және оның қасиеттері 136
Гиперболаның қасиеттері..... 139
Эллипс, гипербола және параболаның полярлық теңдеулері.....144
Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеуі.....146
Екінші ретті қисықтардың ортогональды инварианттары.....150
Екінші ретті беттер.....153
Эллипсоид 156
Гиперболоид.....157
Екінші ретті конус 158
Параболоид 159
Екінші ретті цилиндрлер.....160
Есеп шығару үлгілері 161
Жаттығулар 167
Библиографиялық тізім.....170

Оқулық басылым

Бимұрат Жұмабекұлы Сағындықов

АНАЛИТИКАДЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

Оқу құралы

ОБО РБ бастығы *З. А. Ғұбайдулина*
Редакторы *Т. С. Жақсыбаева*
Компьютерде беттеген *А. А. Қадірісізова*

Басуға қол қойылды 11.04.2016 ж.
Таралымы 300 дана. Пішімі 60х84х 1/16. № 1 баспаханалық қағаз.
Көлемі 10,9 есепті-баспа табақ. 10,1 шартты баспа табақ.
Тапсырыс № 700.

Қ. И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық
зерттеу университеті басылымы
Оқу-баспа орталығы,
Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-228-942-8