

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

Е. Т. Божанов, А. М. Ибраимкулов, К. Д. Мурзасаимова

**ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІҢ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ**

Университеттің Оқу-әдістемелік кеңесі оқу құралы
ретінде ұсынған

Алматы 2017

ӘОЖ 519.8(075)
КБЖ 22.311 я 73
Б 70

Пікір жазғандар:

Нұржұмаев О.Н. – ф.-м.ғ.д., ХАА тұрақты мүшесі, профессор, АТУ;
Токибетов Ж.Т. – ф.-м.ғ.к., профессор, Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;
Бегимов Т. – ф.-м.ғ.д., п.ғ.д., профессор, Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ;
Сүлейменов З.И. – ф.-м.ғ.к., доцент, Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ.

Божанов Е.Т.

Б 70 Физикалық процестердің математикалық модельдері: Біртұтас тығыз ортадағы толқын түрлері және оларды қолданудың кейбір математикалық модельдері. III бөлім: Оқу құралы// *Е.Т. Божанов, А.М. Ибраимкулов, К.Д. Мурзасаймова.* –Алматы: Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ, 2017. – 139 б.: Сурет – 62. Библиогр. атау – 23.

ISBN 978-601-323-083-2

Ұсынылып отырған оқу құралының үшінші бөлімінде біртұтас тығыз орта механикасында жиі кездесетін толқын теориясы көп қабатты түтікіше келген айнымалы параметрлі конструкция негізінде қарастырылған. Толқындар формуласын, дисперсиялық қатынастарын, фазалық жылдамдықтарын, ережелерін және заңдылықтарын зерттей отырып, оның біртұтас тығыз орта механикасында таралуы ұсынылған. Серпінді қабыршықтар мен түтікіше келген тұтқырлы-серпінді конструкциялардың теориясындағы толқындар қозғалысына аналитико-теориялық есептеу модельдері енгізілген, нәтижелері графиктермен өрнектеліп көрсетілген.

Қосымша ретінде қарастырылып отырған бөлімде сызықты емес деформация үдерістері теориясына интегралдық түрлендіру негіздерін қолдану көрсетілген және оларды енгізу жобалары қарастырылған.

Оқу құралы жоғары оқу орындарының студенттері және магистранттарымен қатар жалпы ғылыми-техника-технология өндіріс бөлімдерінің қызметкерлеріне де өте пайдалы.

ISBN 978-601-323-090-0 (жалпы)

ISBN 978-601-323-083-2 (III бөлім) © Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Мурзасаймова К.Д. 2017

© Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ, 2017

КІРІСПЕ

II типтегі жүктеме классификациясының күштік факторлары әсерінен деформацияланған жүйелердің динамикасының толқынымен тербелісін есептеу барысындағы дифференциалдық теңдеулердің қазіргі таңдағы мәселелері: $N_{кр} = N_1(x) \frac{d^2 w}{dx^2}$ бойлық осьтің критикалық күші әсерінен қабілеті, (xy) көлденең осі бойымен шоғырланған момент векторы секілді кескіш күштер, ZY және ZX жазықтықтарында орналасқан қисықтар $Q_{крит} = 2B \frac{d^3 w}{dx^3}$, $\mu_{xy} = 4B\chi_{xy}$, $\mu_{yx} = 4B\chi_{yx}$ мұндағы χ_{xy} , $\chi_{yx} - ZY$ және ZX жазықтықтарындағы қисықтар, [1]–[19] түріндегі көрсеткіш моделі үйлесімді айнымалы коэффициенттері бар 4-дәрежелі дифференциалдық теңдеулерге келтіріледі.

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varepsilon'(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \varepsilon''(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + k(x)\varepsilon(x)W \\ = q_k \sin \omega_n x \left\{ m \frac{d^2 w}{dt^2} + \eta \frac{dw}{dt} + KW(t) \right\} \end{aligned}$$

x – жүйедегі еркін дәрежелі тербеліс; m – инерция моменті қаттылығы матрицасы, η – демпфердегі қаттылық; K – серіппе қаттылығы; $\varepsilon(x)$ – кесе-көлденең қиманың қаттылығының өзгеруі; q_k – критикалық активті сыртқы күш (импульс).

Берілген математикалық модельді еркін тербеліс үшін айнымалысын ажыратқан жағдайда үшке бөліп қарастыруға болады.

A) q_k – біртекті емес кесе-көлденең жүктеме осінің тербеліс есептері:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q_k f(x), \text{ мұндағы } f(x) \text{ периодты функциясы} \\ W(x) = q_k \left[\int \left(\int \frac{f(x) dx dx + c_1 x + c_2}{\varepsilon(x)} dx \right) dx + c_3 x + c_4 \right] \end{aligned}$$

Грин $\Gamma^{I,II}$ және $\Gamma^{I,III}$ типтішектік шарттармен жүктеме кезінде шарт қоямыз

$$\left. \frac{dW(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3W(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{q_k}{2D}$$

В) $N_{\text{крит}}$ – біртекті емес осьтік қысым әсерінен болатын тербеліс есептері:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_1(x)W \right] = q_k f(x),$$

Жалпы шешімі Рикатти және Вебер типіндегі тендеулерге келеді, дербес жағдайларында Эйлер типіне келеді.

Жалпы шешімі

$$W(x) = \varphi_2 \int \frac{\varphi_1(C_1x + C_2)}{W(x)} dx + \varphi_1 \int \frac{\varphi_2(C_1x + C_2)}{W(x)} dx + C_3\varphi_1 + C_2\varphi_2,$$

мұндағы $\varphi_1(x)$ және $\varphi_2(x)$ – біртекті бөлігінің жалпы шешімі, $W(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2$.

С) Кесуші күштер әсерінен болатын тербеліс есептері:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B \frac{dW}{dx} \right] = q_k f(x)$$

Біртекті бөлігінің жалпы шешімі

$$W(x) = \int \left\{ e^{-2B \int \frac{dx}{\varepsilon(x)}} \left[\int \frac{C_1x + C_2}{\varepsilon(x)} e^{2B \int \frac{dx}{\varepsilon(x)}} dx \right] \right\} dx + C_3x + C_4.$$

$Nf(x)\Gamma^{I,II}$ және $Nf(x)\Gamma^{I,III}$ Грин типті шектік шарттар; мұндағы

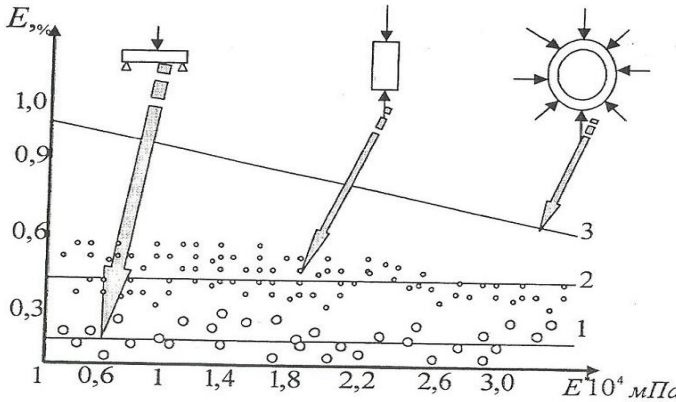
$$N = 4(b^2\alpha - 2b\beta + \gamma), \quad \alpha = \int_a^b \frac{dt}{\varepsilon(t)}, \quad \beta = \int_a^b \frac{tdt}{\varepsilon(t)}, \quad \gamma = \int_a^b \frac{t^2dt}{\varepsilon(t)},$$

$f(x)$ – периодты функция

$$f(x) = N_1f_1(x) + (x - b)f_2(x) - \varphi(x) + \Psi(x).$$

Берілген жұмыстың түсіндірме бөлігінде активті және реактивті жүктемелер және тербеліс кезіндегі түтікшелі конструкцияға әсер ететін күштік факторлар берілген. Сыртқы және ішкі күштер арасындағы байланыс (1–13-суреттер) көрсетілген.

Активті және реактивті жүктемелер және түтікшелі конструкция тербелісінің кесе-көлденең қимасындағы күштер және моменттер.



1-сурет

1. Құрылған Б-1 моделіне сүйене отырып, бір жақтағы кестелік шеттері еркін, ал екінші жақтағы кестелік шеттері орнықты жылжымалы бекітілсе, сейсмикалық алаң арқылы «көтерілу және ығыса жылжу» жүктемесі төмендегі жағдайда болғанда:

$$F(\xi, t) = \begin{cases} F_1(\xi, t) = 8/3q_0\xi; & 0,6 \leq \xi \leq 1 \\ F_2(\xi, t) = 2q_0(1 - \xi); & 0,3 \leq \xi \leq 0,6 \\ F_2(\xi, t) = 2q_0(1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}); & 0,1 \leq \xi \leq 0,3 \end{cases}$$

және

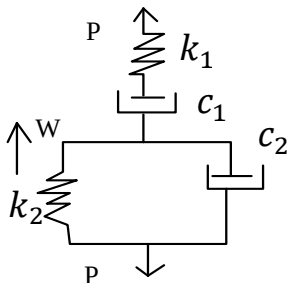
$$F(\xi, t) = \begin{cases} F_1(\xi, t) = 8/3q_0\xi\sin\omega\xi; & 0,6 \leq \xi \leq 1 \\ F_2(\xi, t) = 2q_0(1 - \xi)\sin\omega\xi; & 0,3 \leq \xi \leq 0,6 \\ F_2(\xi, t) = 2q_0(1 - \xi + \frac{\xi^2}{2})\sin\omega\xi; & 0,1 \leq \xi \leq 0,3 \end{cases}$$

$$\omega = \frac{m\pi}{L}$$

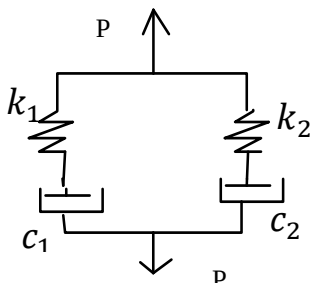
түтікті серпімді конструкцияның иілуін және майысуын есептеу.

2. Құрылған Б-2 моделіне сүйене отырып, егер бір жақтағы кестелік шектері еркін, ал екінші жақтағысы кеспектелген болса, онда түтікті серпімді конструкцияның иілуін және майысуын есептеу.

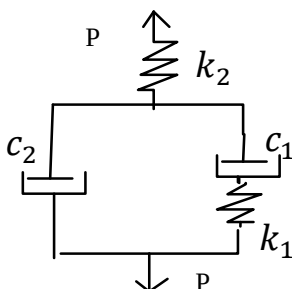
Екі серіппе және екі демпферден тұратын модельді қарастырып, теңдеуін жазайық.



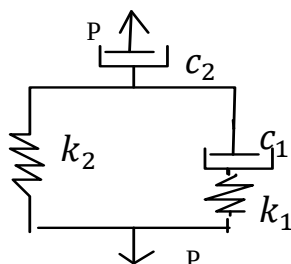
1а-сурет



1в-сурет



2а-сурет



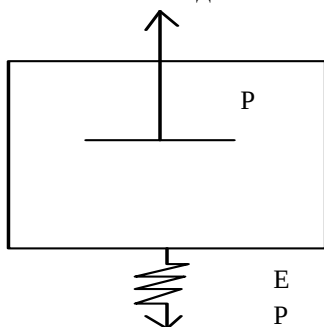
2в-сурет

$$r_0 P + r_1 \frac{dP}{dt} + r_0 \frac{d^2 P}{dt^2} + \dots = q_0 w + q_1 \frac{dP}{dt} q_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + \dots$$

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + r_1 \frac{dP}{dt} + r_0 P = q_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + q_1 \frac{dP}{dt} + q_0 w$$

Релаксация модельдері:

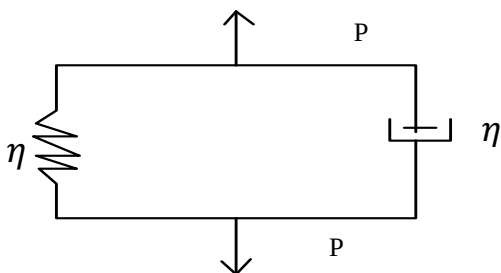
I) Масквелл моделі



3-сурет

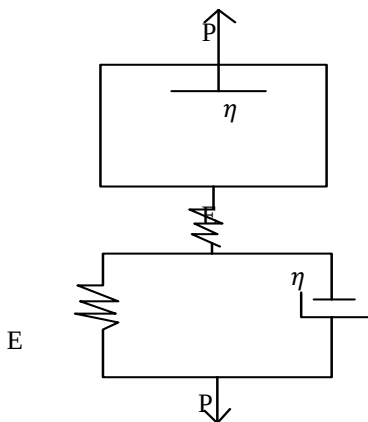
$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\eta} P$$

II) Кельвин-Фойхт моделі

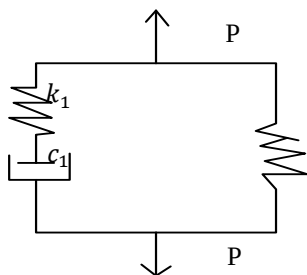


4-сурет

$$P = EW + \eta \frac{dW}{dt}$$



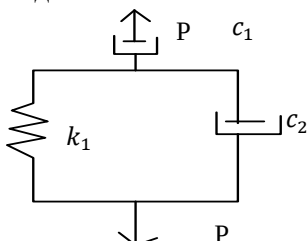
4а-сурет



$$\frac{dP}{dt} + \frac{k_2}{c_1}P = (k_1 + k_2)\frac{dw}{dt} + \frac{k_1k_2}{c_1}$$

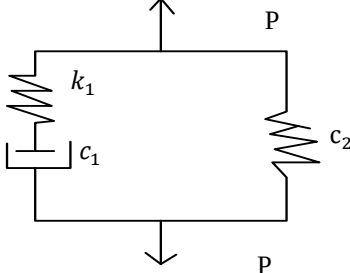
4в-сурет

Үш элементтен, бір серіппеден және демпферден тұратын модель:



$$\frac{dP}{dt} + \frac{k_1}{c_1 + c_2}P = \left(k_1 \frac{dw}{dt} + c_2 \frac{d^2w}{dt^2} \right) \frac{c_1}{c_1 + c_2}$$

5а-сурет



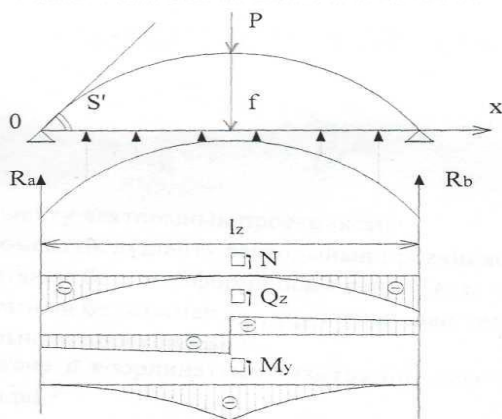
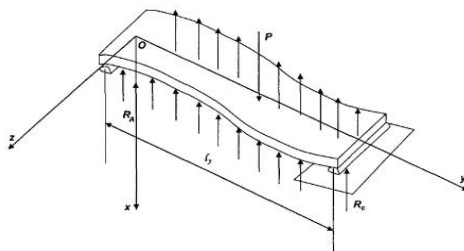
$$\frac{dP}{dt} + \frac{k_1}{c_1 + c_2}P = k \frac{c_1 + c_2}{c_1} \frac{dw}{dt} + c_2 \frac{d^2w}{dt^2}$$

5 в-сурет

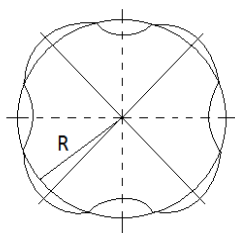
$$R(P) = Q(W)$$

$$R = \sum_{j=1}^n r_j \frac{d^j}{dt^j}, \quad Q = \sum_{j=1}^m q_j \frac{d^j}{dt^j}$$

тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық операторлар:

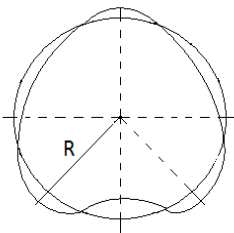


5с-сурет



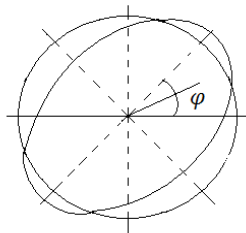
$n = 4$

6-сурет
Трапеция түріндегі
кесе-көлденең қима



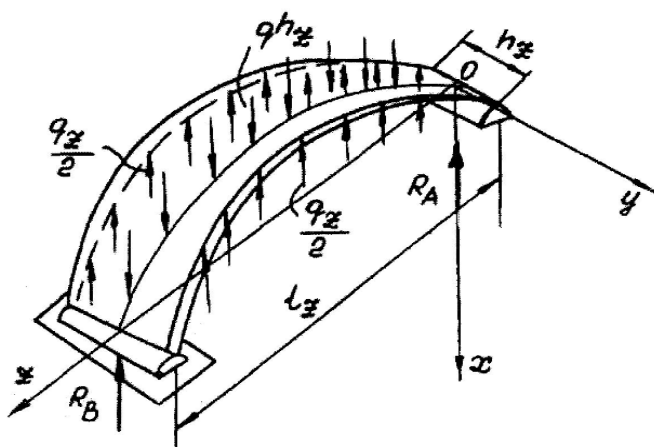
$n = 3$

7-сурет
Конус түріндегі
кесе-көлденең қима



$n = 2$

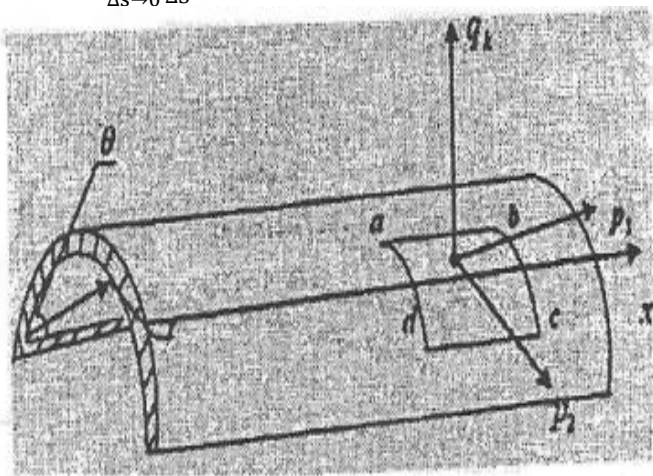
8-сурет
Овал түріндегі
кесе-көлденең қима



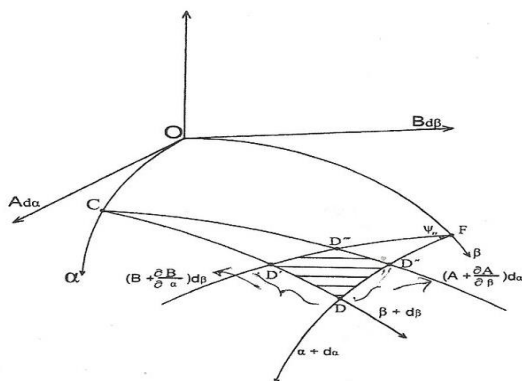
9-сурет

Сыртқы және ішкі күштер арасындағы байланыс.

Түтікшелі конструкцияның шексіз аз элементі үшін тепе-теңдік теңдеуін құрастырамыз. Ол үшін келесі сыртқы күштерді $\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{F}{\Delta S}$ қарастырамыз.



10-сурет

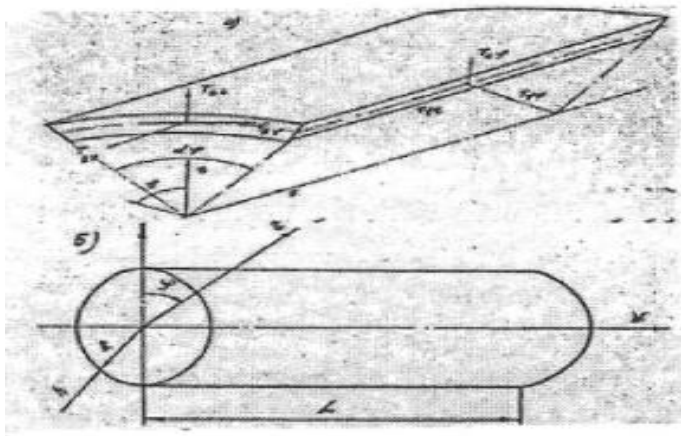


11-сурет

Орта кеңістік $z_1 \leq z \leq z_2$.

Мұнда OFDC – шексіз аз элемент;

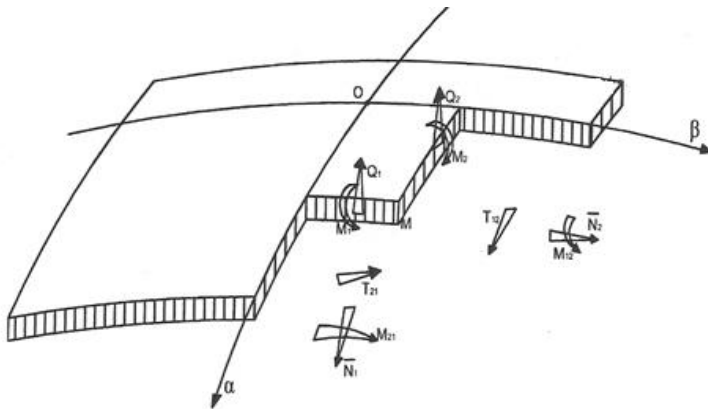
DD'D''D'' – деформация беті.



12-сурет

Классикалық теория бойынша иілгіш қабаттардың тендеуін құру үшін, интенсивті жүктемені және қисық координаттар жүйесін қарастырамыз:

$x = x(\alpha, \beta), y = y(\alpha, \beta), z = z(\alpha, \beta), r = r(\alpha, \beta) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
 Қабаттың кесе-көлденең қимасын қарастырамыз:



13-сурет

1) Нормаль күштер

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, \quad N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_2 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz$$

2) Ығысу күштері – ығысу векторының проекциялары

$$T_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, \quad T_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_{21} \left(1 + \frac{k_1}{dz} \right)$$

3) Иілу моменті бөлу күштері проекциялары

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz,$$

4) Бөлу күштері

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z1} \left(1 + \frac{z}{k_2} \right) dz, \quad Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z2} \left(1 + \frac{z}{k_1} \right) dz$$

5) Бұрау күштері

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z1} \left(1 + \frac{z}{k_2} \right) dz, \quad Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z2} \left(1 + \frac{z}{k_1} \right) dz.$$

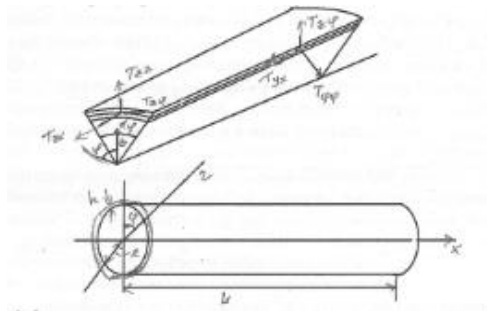
Сонымен, суреттерді негіздей отырып, барлық күш компоненттері үшін өрнек құрастырамыз (1-кесте).

1-кесте

Қа- бырға	Нормаль күштері	Ығысу күштері	Иілу моменті	Бұрау күштері	Бөлу күштері
OC	$N_2 A_1 d\alpha$	$T_{12} A_1 d\alpha$	$M_2 A_1 d\alpha$	$M_{12} A_1 d\alpha$	$Q_2 A_1 d\alpha$
FD	$N_2 A_1 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \beta}(N_2 A_1)$ $d\alpha d\beta$	$T_{12} A_1 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \beta}(T_{12} A_1)$ $d\alpha d\beta$	$M_2 A_1 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \beta}(M_2 A_1)$ $d\alpha d\beta$	$M_{12} A_1 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \beta}(M_{12} A_1)$ $d\alpha d\beta$	$Q_2 A_1 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \beta}(Q_2 A_1)$ $d\alpha d\beta$
OF	$N_2 A_2 d\beta$	$T_{21} A_2 d\beta$	$M_1 A_2 d\beta$	$M_{21} A_1 d\beta$	$Q_1 A_2 d\beta$
CD	$N_1 A_2 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1 A_2)$ $d\alpha d\beta$	$T_{12} A_2 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \alpha}(T_{21} A_2)$ $d\alpha d\beta$	$M_1 A_2 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1 A_2)$ $d\alpha d\beta$	$M_{21} A_2 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \alpha}(M_{21} A_2)$ $d\alpha d\beta$	$Q_1 A_2 d\alpha +$ $+\frac{\partial}{\partial \beta}(Q_1 A_2)$ $d\alpha d\beta$

Супер элемент бетінің беттік қабатындағы қалдық кернеу:

- беттік элемент, қалдық кернеуді құрастырушымен жүктелген;
- цилиндрлік бет үшін координаттар таңдау схемасы.



14-сурет

1. КОМПОЗИТТІК МАТЕРИАЛДАРДАҒЫ ТОЛҚЫН ҮЛГІЛЕРІ, ЗАҢДЫЛЫҒЫ ЖӘНЕ ЕРЕЖЕЛЕРІ

*“Толқындар сендерді кім тоқтаты?
Сендердің ұлы қашуларыңды кім құрсады?”*

А.С. Пушкин

*“Толқындар бірінен кейін бірі домалап,
қатты шуылмен және шомпылмен келеді”.*

М.Ю. Лермонтов

Механикалық қозғалыста тепе-теңдік жағдайының шартында материалдық нүктенің толқындық қозғалысы үлкен мәнге ие. Күнделікті өмірде және техникада толқындық қозғалыс жиі кездеседі: қабырға сағатының маятникі тік жағдайда периодты толқын жасайды; жылдам жүретін трубинаның фундаменті ротордың айналу жиілігімен дірілдейді; теміржол вагондарының қорабы рельс торабы арқылы дөңгелектер өткенде жұмсақ серіппеде тербеледі.

Объект тұрақты тепе-теңдіктен ауытқыса, онда бастапқы қалпына әкелуге ұмтылатын күш пайда болады. Бұл күштің табиғаты әртүрлі болуы мүмкін. Маятникті бастапқы жағдайға әкелетін күш жердің тартылыс күші болады. Тербемелі қозғалысты орнына келетін күштен басқа тербеліп тұрған дененің тез арада тұрақты қалпына керуіне, яғни тоқтауына мүмкіндік бермейтін тағы бір фактор бар. Тербеліс қозғалысының барлық жағдайында бұл фактор тербемелі материалдық объектінің инерциясы болып табылады.

Толқындық қозғалысты инерция күшімен орнына әкелетін күш нүктенің тепе-теңдік жағдайынан ауытқуына пропорционал болады, қозғалыс мынадай қарапайым сипатта болады:

$$X(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

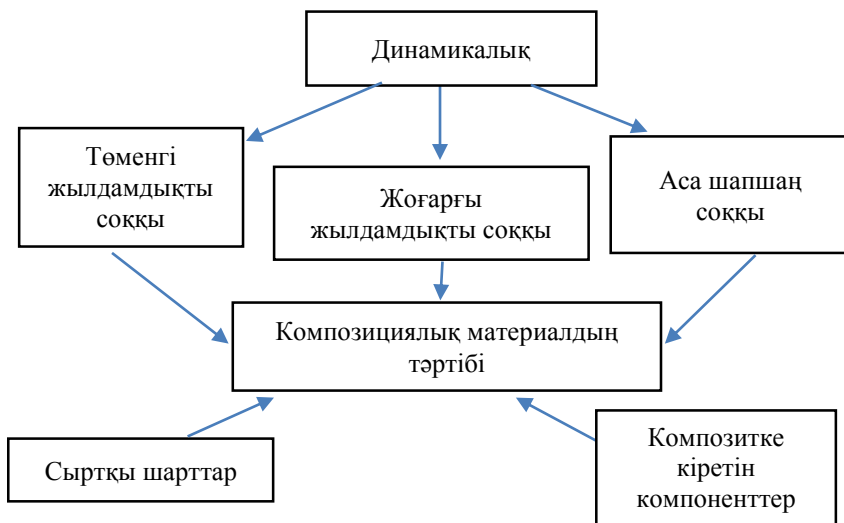
мұнда A – амплитуда (латын тілінен *amplitude* – ені),
 φ – фаза (грек тілінен *phasis* – пайда болуы), $\omega t = \frac{2\pi}{T}t$; T – период, T^{-1} – жиілік.

Толқындық қозғалыс сипаттамасы толқын таралатын ортаның қасиеттерімен анықталады. Ортаны толқынның таралу бағытына перпендикуляр жіңішке бір-бірімен қабаттасқан

қабаттар қатарына бөлейік. Жылжуға икемді ортаны алайық, бұл қабаттардың параллельді жылжуы жанама күшті талап ететін кез келген қатты дене болуы мүмкін. Бөліктердің тербемелі қозғалысына перпендикуляр бағытта болатын толқындар *көлденең толқындар* деп аталады. Сұйық және газ түріндегі ортада мұндай толқындар болмайды. Бойлық толқындар дене элементтерінің көлем деформациясымен байланысты болады, яғни мұндай толқындар көлденең жылжу деформациясының пайда болуына әкеледі.

Композиттің толқындық қозғалысының кейбір ерекшеліктерін атап өте кетейік. Үлкен жылдамдықта матрицаның және толықтырушының жүктелу тәртібі әртүрлі болады; сонымен қатар бұзу сипаттамасы да алуан түрлі болады: матрицаның бүлінуі мүмкін. Матрица байланысы мен арматураланған талшық – адгезионының бетінде бүлінулер кездеседі. Үлкен жылдамдықта жүктелулерден композициялық материалдың тұтқыр қасиетін алып тастауға болмайды. Яғни $\sigma - \varepsilon$ динамикалық әсер кезінде сәйкес диаграммадан ерекшеленеді.

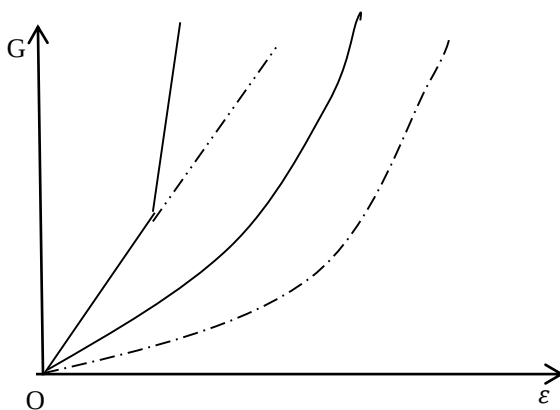
Композициялық материалда қозғалатын факторлар мен динамикалық жүктеулердің шартты жүктелуі 15-суретте келтірілген.



15-сурет

16-суретте вертикальды құлау жүгімен статикалық жүктеу кезінде алынған бір шыны талшықпен арматураланған қабаттасқан пластинаның екі сынау қорытындысы келтірілген; жүктелу кезінде v_0 соққының жылдамдығының беріктік шегі статикалық жүктелу кезіндегі композиттің беріктік шегінен 1,5 есе үлкен болады.

Матрица тәртібін зерттеу кезінде екі кезең ерекшеленеді: 1) деформация материалдың зақамдалуын қосады; 2) Зақымдалу мен бүлінудің дамуы. Талшықпен арматураланған бұзылу кезінде созылу болады, яғни бұзылу ауыр жағдайды көрсетеді.



16-сурет

Динамикалық кернеу анализіне көшейік. Толқын фронтында кернеу деңгейі

$$\sigma = \rho c v_0$$

Мұнда ρ — композит тығыздығы; c — бойлық толқын жылдамдығы; v_0 — соққы жылдамдығы.

Соққы жүктемесі қатайтатын талшық маңында бірге пайда болғанда, әртүрлі материалдың беттік ролін зерттеп, жылжу кернеуіне талшықтың көлемді бөлігінің әсерін есепке алу керек. Эпоксид пен болат қабаттары үшін сығу импульсінің ұзақтығы азайған сайын, өтіп кеткен толқында кернеу амплитудасы азаяды. Кернеу деңгейін төмендету материалда энергия диссипациясы көмегімен пластиналарды ажыратуға әкеледі.

Полиметилметакрилаттың және коррозияның болатын кезектескен қабаттар композиті үшін қабаттар саны өзгерген кезде амплитуданың үдеу уақыты максимумға дейін өзгермейтіні анықталған. Болат – эпоксид композит байланысындағы, яғни фаза бөлігінің бетіндегі байланысты айта кетейік.

Егер 5 мм жуандықтағы пластинаны композициялық материал үлгісімен ұрсақ, онда сынық және соққы болған бетте перпендикуляр қатпарласуды байқауға болады. Жалпы бет бойында жарықшақтардың таралуы кезінде екі әртүрлі материалдың жүйесі қаралады. Адгезионды байланыстың үзілуі бір жүйеге біріктірілетін материалдармен байланысқан қабаттар арасында болады. Композит құрылымын жобалаған кезде қақ бөлінген және шашыраған серпімді толқын әсерімен соққы кернеулерінің азаюына қол жеткізуге болады.

Қабатты жүйеде кернеу деңгейіне қабаттар саны, компоненттердің қасиеті мен жуандығы сияқты көрсеткіштер әсер етеді. Егер осы материалдардың біртектісі берілсе, онда қалғандарын сыртқы жүктеменің жеке түрлері үшін созылған кернеулер минималды болатындай етіп тандап алуға болады.

Егер композициялық жүйе материалдың жеңіл және ауыр қабаттарының кезектесуін көрсетсе, онда осындай периодты жүйеде толқынды процесс энергияның шексіз кумуляциялық құбылысына әкеледі. Сонымен қатар энергияның көлемдік тығыздығы өседі.

Егер дербес пластинаның акустикалық тығыздығы $\rho_i \alpha_i$ соққы толқынының таралу бағытымен азайса, онда толқындағы массалық жылдамдық өседі; ол соққы толқынындағы пластиналардың әсерінің жылдам болуына негізделген.

$m=1$ болса (бір пластина үшін), u_0 жылдамдықта бет бойынша соққы кезінде бос теріс бетінде белгілі еселеу әсерін аламыз: $u_1 = 2u_0$ әртүрлі композициялар зерттелген, мыс-дюраль-латунь пластинкасы үшін $\alpha = \frac{u_m}{u_0} = 1.66$; мыс-дюраль композициясы үшін $\alpha = 1.33$. Толқын қысымы өседі (кумуляция әсері), ал толқын формасы өзгермейді.

Бұл берілген тәсіл қабатты ортада ғана емес, синусоидальды импульс таралуы кезіндегі талшықты композиттер үшін де орынды болып табылады. Композициялық материалдағы кернеудің динамикалық шоғырлануы туралы сұрақ өз алдына бөлек қойылады. Серпімді стерженьдегі бойлық толқын жылдамдығы $\alpha = \sqrt{E/\rho}$ басқа нақты композиттер үшін серпімді толқын өткізгіші болып табылады.

Жазықфронтты толқынның таралуының қарапайым жағдайын толқындық функциямен $f(x-at)$, яғни кейбір физикалық параметрлердің (кернеу, деформация, орын ауыстыру, жылдамдық, үдеу) ауытқуымен анықталатын теңдеумен өрнектеуге болады: $u = f(x-at)$.

Толқындық функцияда аргумент $x-at = \xi$ – толқын фазасы болады. Жеке түрдегі $f(x-at)$ ауытқуы өзінің формасын өзгертпей берілген ортада тарала алады. Жеке жағдайда $f = \cos[k(x-at)]$ таралатын толқын гармоникалық толқын болып табылады. Мұнда толқынның ұзындығы $\lambda = 2\pi/k$, ал $k = 2\pi/\lambda$ – толқындық сан.

Егер фазалық жылдамдық толқындық санға тәуелді болмаса, онда өте қысқа және өте ұзын толқындар бірдей фазалық жылдамдықпен таралады (сәйкес материалдар дисперсияға ие).

Көптеген композициялық материалдар үшін энергия диссипациясына орын бар. Бұл жағдайда жылдамдық толқын ұзындығына тәуелді болады, ал материалдар дисперсиямен сипатталады. Соңғысы оның таралу өлшемінде импульс формасының бұрмалануына әкеледі.

Егер толқын мен жиіліктегі екі толқын қарама-қарсы бағытта таралса, онда толқындық қозғалыстың сызықтылығы жағдайында ағынсыз толқынды аламыз; жүргізуші толқындар өзара өшеді және нүктелер тыныш күйде болады. Қозғалыс амплитудасының үлкен нүктесі *томпак* деп аталады.

Егер толқындар шектелген материалда (стерженьде бір ұзындықта) таралса, онда толқын рөлін бос тербеліс ойнайды. Егер стержень шеттерінің ауысуы болмаса, онда $\sin(kl) = 0$ $kl = 2\pi l/\lambda = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Екі көршілес түйіндер арасындағы арақашықтық $1/2, 1/3, \dots$, айналма жиілік $w_1 = \pi a/l$; негізгі жиілік $f_1 = \frac{w_1}{2\pi} = a/2l$, жоғары мода жиілігі $f_2 = 2f_1, f_3 = 3f_1$. Жоғарғы жиілік *обертон* деп аталады.

Механикада полимерлердің маңызды құрамына қатты минералдық заттар – құм, талшық және басқа да полимерлі толықтырғыш материалдар деп аталатын құрамдар жатады. Осындай жағдайда байланысқа түсетін органикалық полимерлердің шығыны азаяды. Бірақ полимерлер мен толтырғыштар арасында жақсы адгезияға(тіркесу) жету қиын. Қымбат тұратын инструменттер толтырғыш материалдардың көмегімен тез істен шығып қалатын дайын өнімдерді жасайды. Полимерге 30–35 % -дан көбірек толтырғыш енгізсе, қоспа көптеген бағалы құрамдарды жоғалтып алады. Сондықтан көрсетілген кемшіліктерді болдырмау үшін, толтырғыш полимерлерді алудың жаңа әдістері дамытылуда.

Металдардың түйіршіктелуі мен балкуысонымен қатар ұнтақ металлургиясында қолданылады. Жақсы болат технологиялық құрамыберік, ағымдық және т.б. болатын жоғары сапалы металдық ұнтақтан ғана алынады. Ұнтақтық материал фильтрі жанармай аппаратуларының ішкі жану қозғалтқыштары химиялық өндірісте қолданылады. Электротехникалық ұнтақ материалдарына – вольфрам ұнтағы, күміс немесе мысты молибден, мыс ұнтағы графиті немесе қола композициясы жатады. Бұл материалдардан электродтар, контакттар, үлкен қуатты магниттер және ферриттер алады. Балқытуды – инструменталды қатты ұнтақты құралдың кесетін бөлігін (күрек, фрезалар, штамп, бұрғылар) және өлшегіш құралдың жұмыс бөлігін жасауда қолданады. Келесі қатты ұнтақ балқу топтарынан алынады, олар: вольфрам (бір карбидті), титанды вольфрам (қос карбидті), титанды-татало-вольфрам (үшкарбидті).

Вольфрамды ұнтақ жетіспеушілігі вольфрам карбиді негізінде ұнтақ балқуының негізгі құрамымен вольфрамсыз қатты балқуды өңдеу қажеттілігіне әкеледі.

Металл ұнтағынан өнім алу технологиясын қарастырайық. Жабық формада немесе қабыршақта ұнтақты тығыздау қысыммен жүргізіледі. Деформациялау нәтижесінде ұнтақ денесінің бастапқы көлемі азаяды және брекет құрастырылады. Көлемнің өзгеруі жеке бөлік деформациясы және араласуы нәтижесінде болады. Сынғыш материалдар үшін деформация беттің тіректерінің қосылуы мен бұзылуына әкеледі. Ұнтақ

тығыздығы түйіршік (ұнтақ бөлігі) еркін жылжуы болған кезде қысылу процесінің бірінші кезеңіне дейін өседі. Ішкі қысымның ары қарай өсуі бөліктің меншікті деформациясына және одан ары қарай «ұнтақ денесінің» тығыздалуына әкеледі.

Металл ұнтағы бірқалыпты болған сайын, төмен қысымда оның бөлігінің деформациясы әсерінен ұнтақтың нығыздалуы байқалады. Белгілі жағдайда тығыздау процесінде, яғни тығыздаудың көрсетілген кезеңдерінде кейбір бөліктердің деформациясы аз қысымда басталады, тіпті прессформаға ұнтақты себу сәтінде басталады, ал жеке бөліктердің қозғалысы ішкі салмаққа да байланысты болуы мүмкін.

Егер ұнтақ қабатын биіктігі мен массасы бірдей цилиндрлік прессформаға тығыздаса, онда ішкі қысымның нәтижесінде бұл қабаттар бір-бірімен қалыңдығы және формасы жағынан өзгешеленеді. Вертикаль бағытта әрбір жоғарғы қабат төменгісінен жіңішке болады. Қабаттардың иілуі прессформа қабырғасынан ұнтақ түйіршігінің шеткі үйкелісінен орталықта орналасқан аз арақашықтыққа жылжуымен түсіндіріледі. Максималды тығыздық зонасы оның домалақ ойық беті бөлігінің үйкелісі деп аталатын престеуші пуансонның жойылуында орналасқан.

Прессформада престерді жою үшін тығыздаудан кейін тығыздау қысымына пропорционал болатын және қабырғаның ішкі үйкеліс саны мен металдық ұнтақ иілгіштік құрамына тәуелді болатын итеріп шығатын күшті қолдану керек болады. Тығыздау өз еркімен ішкі жүкті алып тастағаннан кейін өзінің өлшемін (кейбір кезде бірнеше күн аралығында) жоғарылатады. Осыған сәйкес нақты өлшемде өнімді дайындауда тығыздауды сақтау уақыты бірнеше сағаттан аспауы керек. Құрал тек қана берілген бөлшек өлшемінің сызбасын және бұдыр бетінің параметрлерін ғана емес, сонымен қатар берілген механикалық құрамын (бірінші кезекте тең өлшемді тығыздығын) қамтамасыз етуі керек. Бұл жағдайда прессформа барынша күрделі кесінді болады.

Биіктіктің диаметрге қатынасымен өнімді тығыздау қажет болған жағдайда күш жоғары және төменгі пуансонға қоса тіркелетін, екі жақты тығыздайтын прессформалар қолданылады.

Бұл жағдайда матрица серіппеге тіркеледі (күштерді жоғары пуансонға қоса тіркейді). Прессформа бөлшектерін дайындау үшін хром, марганец, вольфрамнан басқа да элементтермен бірге тозуға төзімдіқоспасыз болатты және болат құралдар пайдаланылады. Матрицаның жұмыс істейтін бетін карбид жабындысы солбеттің қатаюына (титанның көміртегіне бірігуі) әкеледі. Карбидтердің беткі қабаты $4\div 8$ мкм қалыңдықта болады, ол тозуға төзімді және қаттылығы да жоғары болады. Алынған ванадий, ниобий, хром карбиді қабаттарынэксплуатациялауда жеткілікті тұрақтылық 3 есе өседі.

Соңғы жылдары газды ортада тозуға тұрақты химиялық тұнба жабындысын енгізудің технологиялық процесі алынды. Қазіргі таңда газды тұнба фазасынан алынған титан карбиді жабындысы ең қатты болып табылады.

Сонымен тығыздалған соң,өнім төзімділігі азаяды. Жарылыс, ультрадыбыс, вибрация және т.б. көмегімен тығыздық пен беріктікті біршама жоғарылатуға болады, бірақ бөлшек сапасында мұндай өнім жұмыс жасай алмайды, жай ғана шашылып қалады. Бұдан қалай шығуға болады? Қажетті беріктікті біріктіру жолымен алуға болады. Бекітілген сандары бар стерженьнің қозғалысы кезінде жоғары жиіліктер негізгіден еселі болады. Осы заңдылықтар қарапайым сызықты үлгілер үшін дұрыс болып табылады.

Хоу жазықтығында тіктөртбұрышты пластинканың қарапайым екі өлшемді қозғалысы кезінде тербеліс жиілігі ω -ны толқындық сан k -мен қосатын теңдеу аламыз. Әрбір нақты сан k үшін жиіліктер спектрін құрайтын шексіз жиіліктердің жиынтығын $\omega(k)$ аламыз.

Дисперсия гармоникалық толқындардың шексіз кезектесуін камтиды. Көптеген тәжірибелік жағдайларда композициялық материалдардағы кернеу импульсінің таралуы қажет болады.

Дисперсия анализі қабаттасқан композициялық материалда толқынның өту процесі кезінде кернеудің бөліп үлестірілгендігі көрінеді. Егер қабат бөлігінің шекарасымен өту кезінде бірінші ретті импульстің аздап шағылысатынын және аздап сынатынын ескерсек, соққыдан жиырылатын кернеудің бастапқы импульсі созу кернеулерінің құрылуына алып келеді. Біртекті емес қабатта

шағылысқан толқынды кернеу қабаттың жуан шекарасында үлкейеді. Мұндай кернеу қабаттарда және талшықтарда бойлай және көлденең таралу кезінде орын алады.

Композициялық материалдан жасалған цилиндрлік үлгі үшін фазалық жылдамдық келесі дисперсиялық қатынаспен беріледі $\alpha = \alpha_0 [1 - \gamma^2 / 4(kR^2)]$, $kR=1$; γ коэффициенті радиусы R болған цилиндрлік стерженьнің композициялық материалының иілгіштік коэффициентіне тең болады.

Егер бір бағыттағы композициялық материалдың талшықтары оның осіне қатысты φ бұрышпен бағытталған болса, онда оның дисперсиялық қатынасы ρ параметріне тәуелді өзгереді. Мысалы, боралюминийлік композиция үшін бұл дұрыс болып табылады.

Композиттен жіңішке пластинкада таралатын бойлық толқын фазалық жылдамдық үшін жақын тәуелділікте алынады.

$$b = b_0 [1 - \frac{c_{12}^2}{c_{22}^2} * (kh^2)/24], kh=1$$

Мұндағы h – пластина жуандығы, c_{12} және c_{22} – анизотропия коэффициенттері.

Толқын ұзындығы композиттің құрылымдық компоненттері өлшеміне жақын болған кезде дисперсия маңызды болып табылады.

Қабаттасқан материалды қарастырғанда, эквивалентті біртекті орта ұғымы қажет болады. Екі әртүрлі материалдан жасалған $\rho_1 \lambda_1$ және μ_1 қасиеттері: иілгіштік моделі $i = 1, 2$ болатын пластина үшін жуандығы d_1 , тығыздығы ρ_3 және эквиваленттік беріктігі C_3 былай есептеледі:

$$C_1 = \left(\frac{\rho_0 = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{v_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right)$$
$$v_1 = d_1(d_1 + d_2);$$
$$v_2 = d_2(d_1 + d_2);$$

Осындай келтірілген ортада серпімді толқын жылдамдығы мына тәуелділікпен есептеледі $\alpha_0 = \sqrt{C_3/\rho_3}$. Келтірілген модульдер теориясы қабатты стержень, пластина мен қабаттардағы деформацияның толқындық процестері кезінде қолданылады. Кезектесетін қабаттардың саны үлкен болғанда,

модуль теориясы тиімді болады. Қысқа толқындар үшін мұндай тәсіл жарамайды.

Бөлшектермен толтырылған композициялық материалда толқынды тарату анализін қарастырайық. Беріктік тығыздығы ρ_2 қоршаған орта тығыздығынан ρ_1 үлкен болсын делік, яғни $\rho_2 > \rho_1$, онда матрицамен байланыстағы шар қозғалысын бір теңдеу көмегімен жазуға болады. Толқындық процесс шар бөлшектерімен толтырылған композициялық материалда орын ауыстырумен анықталады, ал диссипация қатыстық жылдамдықпен сипатталады. Толқындық синусоидалық жылдамдық жылдам өшеді. Механикалық сипаттамасы бар серпімді компоненттердің қосылуын көрсететін композициялық материалда толқындардың шашырауы арасында байланыс орнатылады. Сәйкесінше анализ талшықты және қуыс материалдар үшін де қолданылады.

Соққы әсеріне байланысты материалдардың динамикалық әсерлерін қарастырайық. Пластина бетінің ортасына шар тәрізді жүк түседі делік. Пластинаның зақымдалуына әкелетін жүктің құлау биіктігін анықтау керек. Егер пластина ортасына статикалық түрде P күшін түсірсек, онда оның майсуын δ және қалыпты кернеудің бүгілуін σ_n есептеуге болады. σ_n кернеу $\sigma_{n,y}$ пропорционалдық шегіне жеткен кездегі пластинада жинақталған серпімді деформация энергиясы анықталады. Бұл энергия құлау жүгінің потенциалды энергиясына тең. Құлайтын жүктің биіктігі материалдың екпінді тұтқырлығымен байланысты болады.

Шыныталшықпен арматураланған пластмассадан жасалған пластина үшін екпінді тұрақтылық ретінде деформация ε жылдамдығына тәуелді болатын сенімділік модулі мен тұрақсыздық кернеуін σ_T қолдануға болады. Екпінді жүктеме кедергісі қатайтатын талшықты орналастыруға тәуелді болатын маңызды параметрді көрсетеді. Пластинка жазықтығындағы соққы көлденең бағыттағы соққыға қарағанда қауіпті болып табылады. Талшықпен арматураланған композит үшін соққыға кедергі болатын маңызды факторлкомпозиттегі шыны талшықтың құрамы болып табылады.

Соққы әрекетінің тиімді бағасы үшін талшық пен матрицаның механикалық қасиеттерін біле отырып, материал бірлік көлеміне келетін жұмысты бағалайды.

Екпін ретінде айнарудың қатты денелері (оқтар, снарядтар) қолданылады; нысан ретінде механикалық қасиеттің жалпы анизотропты көпқабатты пластинкасы алынады.

Қатты денелердің екпінді өзара әсерлері анализінен, егер оның өзінің тербеліс периодымен салыстырғанда екпін мен бұршақ арасындағы байланыс ұзақтығы үлкен болса, онда екпінді жүйедегі толқындық процесті елемегуге болатындығын көруге болады. Бұл жағдайда өзара байланыс күші Герц заңымен анықталады.

$$P = na^{3/2}$$

Мұнда n шар тәрізді екпіннің және соқтығысатын денелердің серпімді қасиеттерінің радиусына тәуелді болады. $a(t)$ -нысана – екпін жүйесіндегі жақындық.

Мұндағы максималды деформация

$$\varepsilon = 5v_0^2/4MnM = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

мұнда v_0 – соққы жылдамдығы, m_1 және m_2 – екпін мен бұршақ массасы. R радиусы арқылы соққы кезінде пайда болған байланыс таңбаларының алаңын белгілейік, сонда байланыс алаңында әрекет ететін қысымды қоса отырып және алынған қорытындыны P күшке теңестіре отырып, беттік қысымды табамыз.

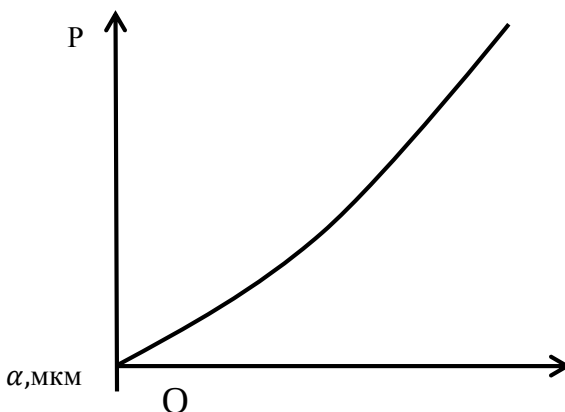
$$q = 3P/(2\pi R^2)$$

Ондай материалдан дайындалған нысананың анизотроптық параметрі $\frac{E_1}{E_2} = 14,3$ шар тәріздес қатты екпінмен соққан кезде байланыс алаңы эллипс түрінде болады; эллипстің үлкен осінің кіші осіне қатынасы 1,07-ні құрайды. Біртекті изотропты материалдан жасалған шар тәрізді екпін үшін органикалық шыныдан жасалған нысан α бүгілудің P жүктемесіне тәуелділігі 17-суретте көрсетілген.

Иілгіш композитті пластинаның динамикалық әсерін зерттеген кезде төмен жылдамдықты соққыға шар тәрізді дене орнатылады, ол беттік қысым, байланыс алаңы пластина

жиектерінің бекітілу шартына және бүгілу беріктігіне тәуелді болады. Иілгіштің артуына байланысты екпінді күш азаяды.

Ең көп тараған шекаралық шарттар тіректі контур нүктелерінің қысуы мен олардың бос тіреуі болады. Байланыс күші P екпін жылдамдығы өскен сайын жоғарылайды, ал байланыс ұзақтығы азаяды. 18-суретте жалпы біріктірілген тәуелділік көрсетілген, яғни өлшемсіз уақыт функциясындағы $t = \frac{t'}{t_0}$ қатыстық байланыс күші $P = \frac{P'}{P_0}$ көрсетілген.



17-сурет

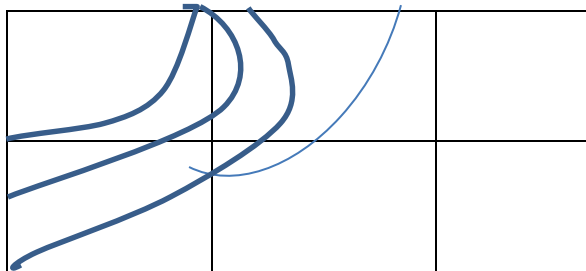
Беттік қысым мен байланыс алаңының өлшемін білсек, нысана нүктесінің координат функциясы мен уақыт сияқты барлық ішкі факторларын анықтауға болады. Максималды созушы кернеу соққы кезінде беттік байланыс қысымымен байланысты болады.

Соққы кезінде нашар материалдың бүлінуін, жарылуын беріктілігімен байланыстыруға болады және ол байланыс алаңының шеттерінде пайда болуы мүмкін. Жылжуда беріктігі төмен материалдар үшін соққы бос бет бойымен жылжымалы бүліну туғызады. Ішкі кернеулі жағдай нысан материалдарының анизотропты қасиеттеріне тәуелді болатынын ескерте кету керек. Бүлінудің ішкі аймағының конфигурациясы мен ұзындығын бағалауға болады.

Максимальды кернеу өлшемі бойынша тек бүліну сипатын ғана емес, бүліну түрлерінің кезектесуін де анықтауға болады, яғни талшыққа көлденең бағытта, қысу кернеуінің талшық бағытына қарай (немесе оларға көлденең бағытта) бүлінудің екпін тудыратынын анықтауға болады. Пішіннің өзгеру энергиясы материалдың бүлінуін конфигурация аймағында бағалауға мүмкіндік береді. Пішіннің өзгеру өлшемі алдымен анизотропты материалдың беріктігін анықтау үшін, одан кейін анизотропты материалдарды анықтау үшін құрылады. Соңғы жағдайда бүлінудің шарты:

$$\sigma_3 \geq 1$$

мұнда σ_3 — екпін әсерінен пайда болған кейбір эквивалентті кернеу; ол қалыпты немесе қатысты кернеу арқылы өрнектеледі және рұқсат ететін кернеуге тәуелді болады.



18-сурет

Диаметрі 3,81 см болат шарды 1,22 м/с жылдамдықпен қабатты пластиктен жасалған шартты шексіз нысан бойымен соққан кездегі тұрақты мәндегі эквивалентті кернеу сызығымен 25-суретте көрсетілген (R мен Z — сәйкес горизонтальды және вертикальды координаттар, α — контакт тангенсінің радиусы). Бүліну аймағы соққы берілетін бос бет арасында орналасады, бірақ тұрақты кернеудің бірде-бір сызығы $\sigma \geq 1$ осы беттен шығып кетпейді.

Соққы кезіндегі сынық бүлінуді қарастырайық. Сыртқы бетпен жүретін толқындық әсер кезінде пластинада, бұршақ ішінде сынық бүлінуді жүзеге асыратын кернеулер пайда болады. Нөлден максимумға σ_{max} дейін созылушы кернеулердің өсу уақытын келесі формуламен бағалауға болады.

$$T_H = \frac{\sigma_{max}}{d\sigma/dt}$$

2. СЕРПІМДІ ЕМЕС ОРТАДАҒЫ ТЕРБЕЛІС ПЕН ТОЛҚЫНДАРДЫҢ АРАҚАТЫНАСТАРЫ, ТҮРЛЕРІ ЖӘНЕ КОМПОЗИТТЕГІ ТОЛҚЫНДАРҒА СӘЙКЕС ТАРАЛУ ЕРЕЖЕЛЕРІ МЕН ЗАҢДЫЛЫҚТАРЫ

Біз өткен тақырыпта негізінен тербеліс пен толқынның композиттік ортада таралуын қарастырдық. Яғни, егер материалдық нүкте жылжу кезінде төмендегідей сипаттама көрсетсе,

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

онда гармоникалық толқын болды, немесе толқынның түзу сызықты моделі болды.

$$U(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right)$$

мұндағы: A – амплитуда, ω – айналу жиілігі, φ_0 – алғашқы фаза, l – толқын ұзындығы, T – кернеу, $k = \frac{2\pi}{l}$ – толқын саны.

*Егер толқын функциясының аргументін $\xi = x - vt$ деп алсақ, $\Phi = \Phi(x - vt)$ – толқын функциясы, онда ξ – толқын фазасы, v – толқын жылдамдығы болады.

* Егер Ламе теңдеуінен ұзындық бойынша бойлай тербелісті жазсақ,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 t} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x},$$

онда жылдамдық былай болады: $V = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$

* Егер Ламе теңдеуінен кесе-көлденең тербелісті жазсақ,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial^2 t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial^2 x},$$

онда жылдамдық: $V = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ болады және $V = \frac{e}{T}$ (толқын

ұзындығының периодқа қатынасы) байланысы туындайды.

Серпімді емес орта ретінде эквивалентті бірнеше қатпардан тұратын ортаны қарастырайық. Мысалы, екі жолақтан тұратын қатпардың физика-техникалық қасиеттері әртүрлі болсын. Мұнда ρ_i – тығыздық, μ_i – серпімділік моделі, v_i – Пуассон коэффициенті, d_i – қалыңдығы, l_i – толқын ұзындығы.

*Егер келтіру моделі физика-механикалық қасиеттерін төмендегідей алсақ:

$$\rho_3 = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2; v_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2}; v_2 = \frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

$$G_3 = \left(\frac{v_1}{e_1 + 2\mu_1} + \frac{v_2}{e_2 + 2\mu_2} \right)$$

Онда екі қатпарды да бір эквиваленттік қатпар ретінде қарастырады және ρ_3 – эквиваленттік тығыздығы, G_3 – анизотроптық қасиеті болады, v_1, v_2 – қалыңдығын h қалыңдығы арқылы өрнектейді.

Ереже. Әр жолақтың эквиваленттік ортада физика-механикалық қасиеті толқын ұзындығына байланысты болғандықтан, мұнда тек қана бойлай толқын болады. Олар өздерінің фазалық жылдамдығына байланысты өзгереді.

$$b = b_0 \left[1 - \frac{G_{12}^2 (kh)^2}{G_{22} 24} \right], kh \ll 1$$

G_{12}, G_{22} – екі қатпардан тұратын жолақтың анизотроптық коэффициенттері; $k = \frac{2\pi}{e}$ – толқын саны; l – толқын ұзындығы.

Заңдылық. Егер фазалық жылдамдық $k_j = \frac{2\pi}{e_j}$ толқын санына байланысты емес болса, онда қысқа және ұзын толқындар бірдей фазалық жылдамдықпен тарайды, яғни серпімді ортадағы ұзындық бойынша тербеліске ұқсас бір бағытта болады.

Заңдылық. Егер фазалық жылдамдық $k_j = \frac{2\pi}{e_j}$ толқын санына байланысты болмаса және қарама-қарсы бағытталса, онда толқын тұрақты қозғалыста болады. Себебі: егер жиілігі, толқын ұзындығы, кернеу қатынасы, амплитудасы бірдей болғанда, әр қатпардағы толқын бірін-бірі сөндіріп өшіреді де, ал толқындағы түйін нүктесі тыныштық жағдайында болады.

Ереже. Серпімді емес ортада фазалық жылдамдыққа байланысты толқын санына тәуелді фазалық жылдамдықтың дисперциялық қатынасы – α пайда болады:

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 - \frac{\gamma^2}{4(kh)} \right]$$

мұндағы $kh \ll 1$, α_0 – алғашқы фазалық жылдамдықтың дисперсиялық қатынасы; γ – коэффициенті материалдың икемділігі, оның созымдылығына тәуелді болады.

Заңдылық. Егер толқын ұзындығы қарастырылған жолақ өлшеміне жақын болса, онда дисперсиялық қатынас өте маңызды болып есептеледі. Мысалы, келтірілген эквиваленттік жолақтағы толқын жылдамдығы

$$V_3 = \sqrt{\frac{G_3}{\rho_3}}$$

болады.

Заңдылық. Алма-кезек ауысып тұратын жолақтар саны көп болған жағдайда ұзын толқындарда эквивалентті модульдер теориясы серпімді емес ортада дұрыс шешімін береді.

Заңдылық. Орташа ұзындықтағы толқындарда эквивалентті модульдер теориясын серпімді емес ортада қолдану үшін маңызды зерттеулер жүргізу керек. Ал өте қысқа толқындарда эквивалентті модульдер теориясын серпімді емес ортада қолдануға болмайды.

Заңдылық. Серпімді емес ортада толқынның серпімді энергиясының ыдырауы пайда болады да, дисперсиялық қатынастар өзгереді және дисперсиялық энергияның таралуы болады.

Ереже. Серпімді емес ортада жоғарғы заңдылыққа байланысты және серпімді емес ортаның I, II, III дәлелдеріне сәйкес механикалық энергия шашырап тарайды, материал бөлшектері ортаның бытырап шашыруы – дисперсия болады, материалда дисперсия болған жағдайда импульстік күш толқын пішінін өзгертпейді.

Заңдылық. Импульстік күш толқын пішінін өзгертуіне байланысты:

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}}$$

пайда болады,

Жоғарғы жиілік модасы

$$\omega_j = f(k_j)$$

жұмыс істей бастайды да толқын функциясы толқын санына байланысты шектелген көп жиын жиілігіне айналады. Мысалы: екі қатпардан тұратын жолақта ортадағы жанасу бетінде алғашқы импульс жартылай сынып, жартылай шағылысады, қатпардың құрамына байланыстыкері қайтуы да мүмкін.

Заңдылық. Егер алғашқы импульс синусоидалы импульс болса, онда ол ортадағы жанасу бетінің құрамына байланысты өте жылдам басылып сөне бастайды.

Заңдылық. Алғашқы сыртқы жүктемеден босаған жартылай шағылысып кері қайтқан толқындардың арақатынасы ұзарту кернеуіне әкеледі. Ал ұзарту кернеуінің уақыты

$$t_H = \frac{\sigma_{max}}{\frac{d\sigma}{dt}}$$

формуласымен өрнектеледі.

Заңдылық. Жанасу бетіндегі кернеу шамасының үлкеюі және таңбасының өзгеруі материалда куммуляция эффектісіне алып келуі мүмкін: (кернеу жиындарының бір бағыттағы әсерінің жылдамдығы)

$$V_m = 2^n \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\rho_i \alpha_i}{\rho_{i-1} \alpha_{i-1}} \right) V_0$$

мұндағы: V_0 – сыртқы өңдеудегі беттің үстіндегі толқын жылдамдығы; V_m – соңғы беттегі толқын жылдамдығы; ρ_i – жолақ санының фазалық жылдамдығының дисперсиялық қатынасы, $\alpha = \frac{U_m}{U_0}$.

Заңдылық. Жанасу бетіндегі кернеу шамасының төмендеуі екі қатпар арасының алыстауына әкелуі мүмкін. Толқын фронтындағы кернеу мөлшері

$$\sigma = \rho c V_0$$

осылай анықталуы мүмкін. ρ – тығыздығы; c – бойлай толқын жылдамдығы; V_0 – сыртқы өңдеудегі беттің үстіндегі толқын жылдамдығы.

Вжәне V_1 толқын жылдамдықтары негізінен өте үлкен болады, мәселен, $V = a = 5800$ м/сек, ал дененің құрамындағы бөлшектерінің нүктедегі жылдамдығы өте аз шама: $\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial W}{\partial t}$.

Сонымен, қорыта келгенде, бойлай да, кесе-көлденең де тербеліс серпімділік ортада шектелмеген болады, ал олардың жылдамдықтары таралуда шектелген болады. Кесе-көлденең таралу жылдамдығы бір дененің өзіндегі бойлай таралу жылдамдығынан кіші болады. Осы жағдайларды ескере отырып, тербеліс және толқын теңдеулерін шығаруымыз керек.

Серпімділік аймағында шексіз аз элементтің тепе-теңдігінің дифференциалдық теңдеуі төмендегідей болады:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{D} \frac{dW}{dx} + \frac{k}{D} W = \frac{q_k}{D} \left\{ 1, 1 - x, 1 - x + \frac{x^2}{2} \right\} \sin \omega x$$

бұл формула сипаттамалық күш түсіп тұрған жағдайдағы түтікше келген композиттік материалдан жасалған, іші керамика, шыны тектес аморфты бөлшектермен толтырылған конструкцияның тепе-теңдік немесе математикалық моделі болып есептеледі: ұзындығы – L ; ішкі радиусы – R ; қалыңдығы – h болады.

Егер төмендегідей өлшемсіз шамаларды енгізсек, академик В.Н.Крылов әдістемесі бойынша:

$x = \lambda \xi + \tau$, τ – шексіз аз уақыт;

$\xi = \frac{R}{L}$, $d\xi \rightarrow 0$; $d\tau \rightarrow 0$, $d\tau = \frac{d\xi}{V}$, онда

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{D} \frac{dW}{d\xi} + \frac{k}{D} W = \frac{q_k}{D} \left\{ 1, 1 - \xi, 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right\} \sin \omega \xi$$

болады. Мұндағы $\lambda_{mk} = \frac{mL_n}{J_{mn}}$ – майысқақтық

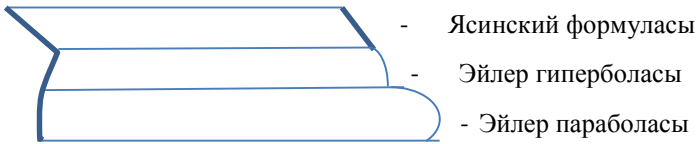
коэффициенті, J_{mn} – кесе-көлденең киманың түтікше келген конструкциясының ең аз радиусының екпіні (инерциясы);

$\alpha_n - \mu h$ – келтірілген ұзындық; h – қалыңдық; $\lambda_{шmk}$ – шектік майысқақтық коэффициенті.

$\sigma_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{пред}}^2} = \sigma_{\text{лц}}$, $\sigma_{\text{лц}}$ – материалдық шектік кернеуі;

$\sigma_{\text{лц}} < \sigma_{\text{крит}} < \sigma_i$, σ_i – ағу кернеуінің шектік шамасы.

Шектік майысқақ Ясинский формуласы, Эйлер гиперболасы, Эйлер параболасы бойынша анықталады:



19-сурет

Түтікше келген конструкцияның шектік жағдайлары:

$$\left. \begin{aligned} W|_{x=0} = 0; \quad \frac{dW}{dx}|_{x=L} = 0 & - \text{жылжымалыорнықты} \\ \frac{d^2W}{dx^2}|_{x=0} = 0; \quad \frac{d^3W}{dx^3}|_{x=L} = 0 & - \text{еркін, босбекітілген} \\ W|_{x=0} = 0; \quad \frac{d^2W}{dx^2}|_{x=L} = 0 & - \text{шарнирбойыншабекітілген} \end{aligned} \right\}$$

Мысал ретінде Б-4 моделін қарастырайық.

Біздің есептің шарты бойынша:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \eta \frac{\partial w}{\partial x} + k(x)W = q_k(x)P(t)$$

Б-4 моделінің $D \frac{d^4 w}{dx^4} + \eta \frac{dw}{dx} + kw = q_k$ жалпы есебінің қойылуы.

Серіппелі – тұтқырлы конструкцияның элементтерінің иілуін есептеу, егер оған стационар активтік күш

$$\frac{q_k}{D} = 10,2 \sqrt{1 - \nu^2} \lambda_k \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \{1; L - x\} \sin \omega x$$

$$\lambda_k = \left\{ \frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3} \right\}; \quad \frac{q_k}{D} = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}$$

түсіп тұрса, шектік жағдайында сол жағы бос, ал оң жағы жылжымалы орнықты.

Шешуі: Математикалық моделі

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{\eta}{D} \frac{dw}{dx} + kw = \frac{q_0}{D} \{1; L - x\} \sin \omega x$$

$$q_0 = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \text{ немесе}$$

$$q_0 10,2 \sqrt[4]{1 - v^2} \lambda_k \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}$$

Математикалық моделінің шешімі:

$$W(x) = w_0(x) + w_1(x)$$

$w_0(x)$ – сол жағындағы біртекті теңдеудің жалпы шешімі, яғни мына теңдеудің

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{\eta}{D} \frac{dw}{dx} + kw = 0 \quad (2.1)$$

$w_1(x)$ – теңдеудің жалпы шешімі, ал (2.1) теңдеуінің характеристикалық теңдеуі:

$$\lambda^4 + \frac{\eta}{D} \lambda + \frac{k}{D} = 0$$

$$\text{немесе } \lambda^4 + a\lambda + b = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{мұнда } a = \frac{\eta}{D}; \quad b = \frac{k}{D}$$

Егер тұтқырлық коэффициенті – η , қаттылық коэффициенті нольден үлкен болса, онда:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + a\lambda + b &= (\lambda^2 - A\lambda + B)(\lambda^2 + A\lambda + C) = \\ &= \left[\lambda^2 - A\lambda + \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right) \right] \left[\lambda^2 + A\lambda + \frac{1}{2} \left(A^2 - \frac{a}{A} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{мұнда } A^2 = \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{64b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{64b^3}{27}}}$$

характеристикалық теңдеудің түбірлері:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right)}, & A > 0 \\ \lambda_{3,4} &= -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}} \end{aligned} \right\}$$

(2.2) формуладан:

$$\Delta_1 = \frac{A^2}{4} - \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right) < 0,$$

олай болса

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad (2.31)$$

$$\text{мұнда } \alpha_1 = \frac{A}{2}; \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{a}{2A}} \quad (2.3)$$

Сонымен, характеристикалық теңдеудің екі түбірі комплексті.

Ал енді қалған екі түбірлерін табу үшін, теңдеулерінің екінші $\lambda_{3,4}$ – теңдеулерін зерттейік.

А) болжамы: Тұтқырлық коэффициенті қаттылық коэффициентінен бірнеше есе көп: $\eta \gg k$

яғни $\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4} > 0$, үшінші және төртінші теңдеулері нақты нольге тең емес сандар.

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$w_0(x) = e^{\alpha_1 x} (c_1 \cos \beta_1 x + c_2 \sin \beta_2 x) + c_3 e^{k_3 x} + c_4 e^{k_4 x}$$

Қорытынды: Егер характеристикалық теңдеудің екі түбірі нақты нольден кіші; ал екі түбірі комплексті болса, онда $\eta \gg k$ Б-4 моделінің орнына Б-3 моделін қарастыруға болады.

В) болжамы. Тұтқырлық коэффициенті қаттылық коэффициентінен анағұрлым кіші болса: $\eta \ll k$, яғни $\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4} < 0$,

$$\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2, \quad \alpha_2 = -\frac{A}{2}; \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{a}{2A}}$$

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$w_0(x) = e^{\alpha_1 x} (c_1 \cos \beta_1 x + c_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x} (c_3 \cos \beta_2 x + c_4 \sin \beta_2 x)$$

Қорытынды: Егер характеристикалық теңдеудің төрт түбірі де комплексті болса, онда $\eta \ll k$, яғни Б-4 моделінің орнына Б-2 моделін қарастыруға болады.

С) болжамы. Тұтқырлық коэффициенті қаттылық коэффициентіне тең,

$$H = k$$

$$k_3 = k_4 = -\frac{A}{2} < 0$$

Характеристикалық теңдеудің екі түбірі бір-біріне тең нақты нольден кіші сандар, ал екі түбірі комплексті.

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$w_0(x) = (C_3 + C_4 x) e^{-\frac{A}{2}x} + e^{\alpha_1 x} (c_1 \cos \beta_1 x + c_2 \sin \beta_1 x)$$

Қорытынды: Егер характеристикалық теңдеудің екі түбірі бір-біріне тең нольден кіші нақты сан болатын болса, онда $\eta = k$

Төмендегі статикалық сан жүктеменің иілімі болады:

$$k_D = 1 + \frac{meV^2}{3EI}$$

мұнда V – қойытылған динамикалық жүктеменің таралу жылдамдығы, m, I – жартылай толқындар саны.

1-жуықтау. Конструкцияға түсіп тұрған сыртқы қысым болса,

$$F(x, t) = -Pt$$

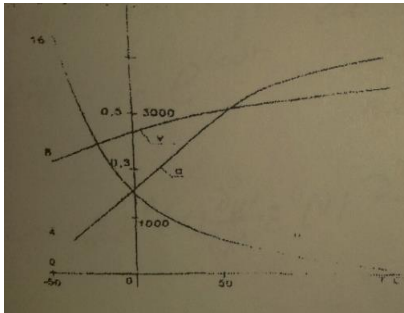
өзгермелі жылдамдық $V = \frac{v_0 E h}{R^2}$ және уақыт $t_k = 3,75 h \frac{E^{1/2}}{\rho V R}$ алынады, мұнда V – материалдың дыбысының жылдамдығы.

2-жуықтау. Өзіндік тербелісінің жиілігінен алынған түзету коэффициенті $k = \frac{\alpha \pi}{\omega_k}$

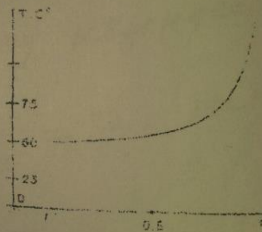
α – ерікті тұрақты, ω_k – өз тербелісінің жиілігі, толық құралудың жиілігі мына түрде алынады:

$$\eta = \sqrt[4]{6\pi^2 \sqrt{1 - v^2} \sqrt{\frac{R}{e}} \sqrt{\frac{R}{n}}}$$

Толтырғыштың барлық сипаттамалары температураға тәуелді, яғни $\mu = \mu(T)$, $v = v(T)$, $\alpha = \alpha(T)$. Сонымен қатар ығысу модулін, Пуассон коэффициентін және сызықтық кеңейту коэффициенттерінің температураға тәуелділігін, ал температураны цилиндрдің қалыңдылығы бойынша бөлуді М.Ж. Жұмабаев пен Т.Д.Кәрімбаевтың жұмыстарына сүйене отырып жүргізуге болады. Төмендегі 20 және 21-суреттерде ығысу модулі, Пуассон коэффициенті және сызықтық кеңейту коэффициенттерінің температураға тәуелділігі көрсетілген.



20-сурет



21-сурет

Алайда мұндай типтегі есептерді шешу қиынға түседі. Бұл салада Е.Т. Божанов, З.С. Утемағанбетов, Б.Т. Кулжағараевтың ағылшын тілінде жазылған математикалық физикадағы 1-ші, 2-ші және 3-ші шекаралық есептерге дискреттік факторизациялау әдістерін қолданған жұмыстары белгілі.

Статикалық есептерді тербеліс кезіндегі механикада қолдану үшін оның механико-математикалық моделі тұрақты коэффициенттермен бірнеше есептерге бөлінеді. Мысал ретінде Б-3 моделін қарастырайық.

Б-3 математикалық моделі.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = q_k^* P(t), f(x). \\ R(P) = Q(w), R = \sum_{j=0}^n r_j \frac{d^j}{dt^j}, Q = \sum_{j=0}^m q_j \frac{d^j}{dt^j} \end{cases} (2.4)$$

$f(x)$ – периодты функция.

Дербес жағдайларын қарастыратын болсақ:

$$P(t) = Kw(t) + \eta \frac{\partial w}{\partial t} - \text{Фойхт моделі,}$$

гармоникалық демпферлеу кезіндегі $P(t) = P_0 e^{-i\omega t}$

Егер $2\varepsilon'(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \varepsilon''(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ болса, онда

$$\varepsilon(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = q_k^* P(t)$$

Егер $\varepsilon(x) = D$, $P(t) = Kw(t) + \eta \frac{\partial w}{\partial t}$ Фойхт моделі болса, онда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q^*_k} \left[D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} \right] = P(t) = -\lambda^2 \\ & \begin{cases} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = -\lambda^2 q^*_k \\ Kw(t) + \eta \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda^2 = 0 \end{cases}, \quad \text{Яғни, егер } q^*_k = -\lambda^2 q^*_k \text{ болса,} \\ & \begin{cases} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial w}{\partial x} = q_k \\ Kw(t) + \eta \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda^2 = 0 \end{cases}, \quad \text{немесе} \\ & \begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\eta}{D} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{q_k}{D} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{\eta} w + \frac{\lambda^2}{\eta} = 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Статика кезінде шектік шарттар түтікше келген конструкцияның критикалық күшінің мәніне өте жоғары ықпал етеді; ол динамикада критикалық күштің мәні көп роль атқармайды, мына алғашқы шарттарға байланысты болады:

$$\begin{aligned} w(t)/_t = 0 &= w_0, & \frac{\partial w}{\partial t}/_t = 0 &= 0 \\ w(t)/_t = \frac{n}{2\pi} &= w_1, & \frac{\partial w}{\partial t}/_t = \frac{n}{2\pi} &= 0 \end{aligned}$$

мұндағы w_0, w_1 , – конструкцияның иілуі; $P_{\text{крит}}(t)$ – критикалық күшінің кесе-көлденең қимадағы қысымына байланысты.

Динамикада критикалық күштің кесе-көлденең қимадағы уақытына байланысты және рөліне қарай көп жағдайда төмендегідей алғашқы шарттарды алады:

$$\begin{aligned} w(\tau)/_\tau = 0 &= 0, & \frac{\partial w}{\partial \tau}/_\tau = 0 &= 0 \\ w(\tau)/_\tau = \frac{n}{2\pi} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial \tau}/_\tau = \frac{n}{2\pi} &= 0 \end{aligned}$$

мұндағы τ – уақытқа байланысты амплитуданың вариациясы.

Сонымен, бізге (2.4) дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу үшін, дербес түрі ретінде алдымен (2.5) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуін шешу керек, яғни

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\eta}{D} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{q_k}{D} \quad (2.6)$$

(2.6) теңдеуінің жалпы шешімін төмендегідей іздейміз.

$$W(x) = w_0(x) + w_1(x)$$

мұндағы $w_0(x)$ – сол жағындағы біртекті теңдеудің жалпы шешімі, яғни мына теңдеудің шешімі:

$$\frac{\partial^4 w_0(x)}{\partial x^4} + \frac{\eta}{D} \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} = 0, \quad (2.7)$$

Ал $w_1(x)$ шешімі – (2.6) дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі, оң жағындағы критикалық күшке байланысты болады.

$w_1(x)$ шешімін табу қиын емес болғандықтан, алдымен (2.7) теңдеуінің жалпы шешімін қарастырайық.

(2.7) теңдігінен характеристикалық теңдеуді төмендегідей жазамыз:

$$\lambda(\lambda^3 + \eta/D) = 0 \quad (2.8)$$

$$\lambda \left(\lambda^3 + \sqrt[3]{\eta/D} (k^2 - \sqrt[3]{\eta/D} k + \sqrt[3]{(\eta/D)^2}) \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$(2.9) \text{ теңдеуінен } \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -b; \lambda_{3,4} = b/2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} b_i$$

в коэффициенті берілген есептегі материалдың физика-механикалық қасиеттеріне байланысты болады, осыдан мына теңдеуді алуға болады:

$$\lambda^3 + b = 0, \quad b = \sqrt[3]{\eta/D}$$

в санының мәндерін графиктен қарауға болады. Конструкцияның шектік жағдайы мынадай болса, сол жағы еркін,

ал оң жағы жылжымалы бекітілсе, онда біз мынадай үш теңдеу аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0; & \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0; & w \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Төмендегі есептердің графиктерін аламыз:

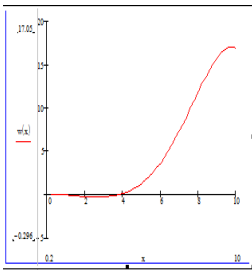
$$\begin{aligned} 1) \quad W(x) = \frac{q_k}{b\eta} \Big\{ \frac{1}{\Delta} \Big[\Big(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} b - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} b \Big) e^{-\frac{3}{2}b} - 1 + e^{-bx} - \\ \Big(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} b - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} b \Big) e^{-\frac{3}{2}b} e^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{\sqrt{3}}{2} \Big[\Big(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} b - \\ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} b \Big) e^{-\frac{3}{2}b} + 1 \Big] e^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \Big] - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + bx \Big\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\text{мұндағы} \quad \Delta = 1 + 2e^{-\frac{3}{2}b} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} b \quad (2.12)$$

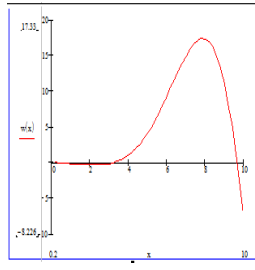
Төмендегі мәндер бойынша (2.11)–(2.12) формуласын есептейміз: $c = \{0.25; 0.5; 0.75\}$

$$B = \{b_1 = 0.63; b_2 = 0.793; b_3 = 0.9086\}$$

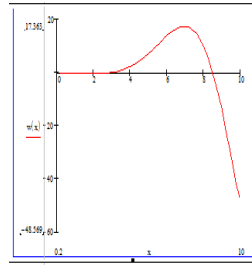
$$x = \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2; \dots, 10.0\}$$



22-сурет



23-сурет



24-сурет

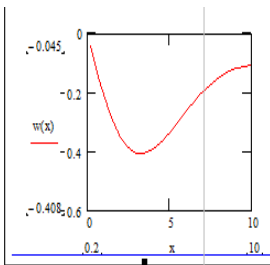
$$2) \quad W(x) = \frac{q_k}{b^2 \eta} \left\{ \frac{1}{\Delta} e^{-\frac{b}{2}x} \left[\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} b - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} b - e^{-\frac{3}{2}b} \right) \left(-1 + e^{-\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} b x + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} b x \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} b - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} b \right) \left(e^{-bx} - e^{-\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} b x + \sqrt{3} e^{-\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} b x \right) \right] + b^2 \xi^2 \right\} \quad (2.13)$$

$$\text{мұндағы } \Delta = 1 + 2e^{-\frac{3}{2}b} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} b \quad (2.14)$$

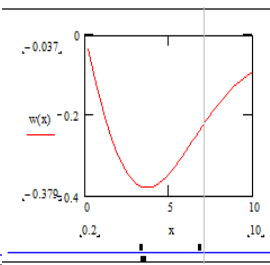
Төмендегі мәндер бойынша (2.13)–(2.14) формуласын есептейміз: $c = \{0.25; 0.5; 0.75\}$

$$b = \{b_1 = 0.63; b_2 = 0.793; b_3 = 0.9086\}$$

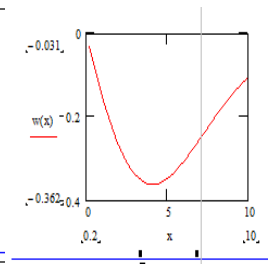
$$x = \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2; \dots, 10.0\}$$



25-сурет



26-сурет

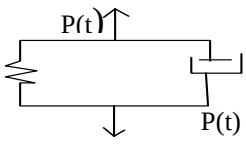


27-сурет

Б-4 математикалық моделінің тербелісін қарастырайық.

Түтікше келген конструкцияны қарастырамыз. Моделі – Б-4. Матрицасы: қатты немесе жұмсақ. Толтырғышы ұнтақ, өте тығыздалғыш, қалыңдығы аз талшықтар: кремний карбиді, оксид, алюминий, шыны, бор немесе органикалық заттар; вольфрам, хром, молибден, мыс қоспалары, темірге ерітілген қоспа, тағы басқалар. Біріктіргіші әртүрлі клейлер: смола, керамикалық, шыны тектес сияқты.

Бұл жағдайда шексіз аз элементінің тепе-теңдік тендеуін Д.Л. Журавскийдің екі теоремасына сүйеніп, Эйлердің интегралдық әдісін қолданып, төменгі дифференциалдың тендеулер жүйесін жазамыз:



$$P = kW(t) + \eta \frac{dW(t)}{dt} \quad (\text{Фойхт моделі})$$

Біртекті ортадағы тербеліс теңдеулерінің фундаменталдық шешімдерін қарастыру.

I. 1. Дифференциалды тепе-теңдік шарты, тепе-теңдік Навье теңдеуі:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho x = 0 \quad (= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}), \quad x \rightarrow y \rightarrow z, z \rightarrow x$$

$$2. \text{ Беттегі шарт } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ik}^0 \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} + \sigma_{ik}^0 \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{vx} = \sigma_{xx} \cos(vx) + \sigma_{xy} \cos(vy) + \sigma_{xz} \cos(vz)$$

$$\text{II. Геометриялық теңдеулер: } -l_{jk} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} = \rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \eta_i \frac{\partial u_i'}{\partial t} + k_i u_i'$$

3. Жылжу мен деформация арасындағы байланыс (Коши теңдеуі): $2\omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$2\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ki} + \varepsilon_{ii}\varepsilon_{ki} + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ki} + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj} + \omega_i\omega_k$$

4. Тығыздық-үзіліссіздік деформация теңдеуі (Сен-Венан теңдеуі):

$$1\text{-топ: } \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$2\text{-топ: } \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

III. Физикалық теңдеулер:

5. Жалпылама Гук заңы

$$\sigma_{xx} = f_1(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy})$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \gamma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \theta = \frac{1-2\nu}{E}; \quad \sigma_v = \frac{E}{2G} - 1$$

$$\sigma_{xx} = a_{11}\varepsilon_{xx} + a_{12}\varepsilon_{yy} + a_{13}\varepsilon_{zz} + a_{14}\varepsilon_{yz} + a_{15}\varepsilon_{zx} + a_{16}\varepsilon_{xy}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu_{\text{exx}}; & \sigma_{xy} &= \mu_{\text{exy}}; & \sigma &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} &= a_{11\text{exy}} + a_{12\text{eyz}} + a_{13\text{ezx}} + a_{14\text{eyx}} + a_{15\text{ezy}} + a_{16\text{exz}} \\ \sigma &= (3\lambda + 2\mu)\theta; & \theta &= \text{exx} + \text{eyy} + \text{ezz} \quad (5') \\ \lambda &= \frac{Ev}{(i+v)(1-2v)}; & \mu &= \frac{E}{2(i+v)}; & E &= \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}; & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\end{aligned}$$

6. Жылжудағы беттегі шарттар.

$$\begin{aligned}\sigma_{xv} &= \lambda\theta \cos(vx) + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(vz) \right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(vz) \quad (6a)$$

4. Ламе теңдеулері

$$\begin{aligned}7. (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 U + \rho x &= 0 \quad (= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}), \\ \nabla^2 U &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

Егер $x=y=z=0$, онда

$$8. \Delta^2 U + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Қисық сызықты координаттар жүйесіндегі Ламе теңдеулері және оның салдары.

М.А. Био және В.В. Новожиловтың геометриялық түзу сызықты емес теңдеуін Ламе коэффициенттері арқылы жазайық.

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \left(\lambda + \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\mu - \frac{r-q}{2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\lambda + \mu - \frac{r-q}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\end{aligned}$$

$$\left(\mu + \frac{p-q}{2}\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{r-q}{2}\right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\lambda + \mu - \frac{p-q}{2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \left(\lambda + \mu - \frac{r-q}{2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

Дербес жағдайы, егер көлем күштерін есептемесек және сыртқы күштерді алмасақ, онда

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \nabla^2 U &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ (1 + \mu) \frac{\partial Q}{\partial y} + \mu \nabla^2 V &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ (1 + \mu) \frac{\partial Q}{\partial z} + \mu \nabla^2 W &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned}$$

мұндағы $\sigma_{xx}^0 = -p$, $\sigma_{yy}^0 = -q$, $\sigma_{zz}^0 = -r$

$\nabla^2 = \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – «набла» операторы;

$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ – Лаплас теңдеуі;

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – «набла» векторы.

Дербес жағдайлары.

1. Жағдай. Егер $U(x, y, z, t) = V(x, y, z, t) = 0$ және $W = W(x, y, z, t) \neq 0$, онда (1) тендеулер жүйесінен

$$\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left(\mu - \frac{p-2}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (2.15)$$

(2.15) – OZ бағыты бойынша қозғалыс теңдеуі.

Сол сияқты $\vec{x}\vec{y}z$, $\vec{U}\vec{V}W$, $\vec{p}\vec{q}z$ циклді ауыстыру арқылы:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(\mu - \frac{p-2}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \left(\mu - \frac{p-2}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

Анықтама №1.(2.16)–(2.17) теңдеулері OX, OY, OZ – бағыттары бойынша бір бағытты кеңістіктегі қозғалыс теңдеулері деп аталады.

1-жағдай. Егер $U(x, y, z, t) = V(x, y, z, t) = 0$ және

$W = W(x, y, z, t) \neq 0$, онда (1) теңдеулер жүйесінен

$$\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\mu + T_2}{\rho} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - \text{кесе-көлденең тербеліс}, T_2 = -\frac{p-2}{2}$$

Сол сияқты $\vec{x}\vec{y}z$, $\vec{U}\vec{V}W$, $\vec{p}\vec{q}z$ циклді ауыстырудан аламыз:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\mu + T_3}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \text{кесе-көлденең тербеліс},$$

$$T_3 = -\frac{p-2}{2} \quad (2.18)$$

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\mu + T_1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - \text{кесе-көлденең тербеліс},$$

$$T_1 = -\frac{p-2}{2} \quad (2.19)$$

(2.18)–(2.19) – бір бағыттағы теңдеулер.

2-жағдай. Егер $U(x, t) = V(x, t) = 0$ және $W(x, t) \neq 0$, онда

$$\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\mu + T_2}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \text{сол сияқты } \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\mu + T_3}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\mu + T_1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

(2.20) – бір бағыттағы түзу сызықты кесе-көлденең теңдеулер.

Ұзындық бойынша бойлай тербеліс.

Есеп шарты: $U = U(x, t)$, $V = 0$, $W = 0$.

Тербелісті табу керек. Жылжу функциясы берілген.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0 \\ \nabla^2 U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 V = \nabla^2 W = 0 \rightarrow \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \rightarrow \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \end{aligned}$$

Анықтама. «Тербеліс» дегеніміз – өзінің жағдайын бірнеше рет қайталайтын қозғалыс. Математикалық физикадағы түрлері: гармоникалық тербеліс, тікбұрышты тербеліс, т.б.

$a^2 = \frac{T}{\rho}$, – сымның тербелісі, T – сымның нүктедегі тартылыс күші; ρ – тығыздық.

$a^2 = \frac{1}{GL}$, – электр сымның тербелісі, G – заряд коэффициенті;

L – индуктивтік коэффициенті.

Кесе-көлденең тербеліс.

Есеп шарты: Егер $U = 0$, $V = 0$, $W = W(x, t)$, $Q = 0$,

$$\nabla^2 U = \nabla^2 V = 0, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0; \quad (2.21)$$

$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, $\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ болса, онда классикалық Ламе тендеуі,

$$\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, b^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.22)$$

Серпімді тұтқырлы денелердегі модельдер:

- 1) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\eta}{E} \frac{\partial U}{\partial t}$ – Келвин моделі;
- 2) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial U}{\partial t}$ – Релье моделі;
- 3) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{4}{3}(1 + \nu) \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2}$ – Стокк моделі.

Серіппелі-тұтқырлы дене тербелісі, уақыт бойынша меншікті тербелісі.

$$4) \quad M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + N \frac{\partial U}{\partial t} + KU = 0$$

мұндағы M – симметриялы екпін күшінің коэффициенттерінен құрылған матрица; N – ішкі кедергі күштерінің компоненттерінен құрылған демпферленген матрицасы, демпфер тұтқырлығына байланысты; K – қайшылық матрицасы, серіппенің қайшылығына байланысты.

$U=U$ – жылжу функциясы уақытқа байланысты.

Толқын теңдеулері.

1) (2.21) – (бойлай тербеліс), (2.22) – (кесе-көлденең тербеліс) формулаларын жалпы түрде жазайық:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.23)$$

Анықтама. Толқын дегеніміз – заттың толқынының кеңістіктегі белгілі бір тұрақты жылдамдықпен таралу энергиясы.

2) Егер классикалық тепе-теңдік Ламе теңдеулер жүйесіндегі бірінші теңдеуді $\frac{\partial}{\partial x}$ бойынша, екінші теңдеуді $\frac{\partial}{\partial y}$ бойынша, үшінші теңдеуді $\frac{\partial}{\partial z}$ бойынша дифференциалдап, содан кейін қоссақ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= a^2 \nabla^2 Q, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 Q, \\ Q &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ a^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Онда (2.24) теңдеуі таралу және ығысу толқындарының жалпы түрдегі толқын теңдеулері деп аталады.

3) Егер классикалық тепе-теңдік Ламе теңдеулер жүйесінің үшінші теңдеуін

$(\lambda + \mu) \frac{\partial Q}{\partial z} + \mu \nabla^2 W = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ -ты $\frac{\partial}{\partial y}$ бойынша дифференциалдап, ал екінші теңдеуін

$(\lambda + \mu) \frac{\partial Q}{\partial y} + \mu \nabla^2 W = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ -ты $\frac{\partial}{\partial z}$ бойынша дифференциалдап, бірінен-бірін алып тастасақ,

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_x, \quad \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_y, \quad \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_z,$$

$$2\omega_x = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.25)$$

болады. Онда (2.25) теңдеулері көлемнің өзгермейтін жағдайындағы ығысу толқындарының жалпы түрі деп аталады.

4) Егер (2.25) ығысу толқындарының жалпы түрін жылжу функцияларының компоненттері арқылы жазсақ, $(\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0)$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 U, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 V, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 W, b^2 = \frac{\mu}{\rho}, V_1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.26)$$

онда (2.26) формулалары эквильюминалдық ығысу толқындар теңдеуі деп аталады.

5) Егер (2.26) ығысу толқындар теңдеулерін жылжу функциясы арқылы жазсақ, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 U, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 V, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 W, a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, V_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad (2.27)$

(Егер V_2 – толқынның жылдамдығы болса, онда (2.27) формулалар құйынсыз таралу толқындар түрі деп аталады.

6) Егер (2.23) қарапайым толқын теңдеулерінің $f(x,t)$ – характеристикасын $f = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$ түрінде алып $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.28)$ деп жазсақ, онда (2.23) формулалар түзу сызықты қарапайым толқындар түрі деп аталады.

7) Егер $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} \right)$ гармоникалық толқын болса, ал $x(t) = A \sin(\omega t - \varphi_0)$ материалдық нүкте қозғалысы болса, онда T – кернеу, l – толқын ұзындығы, φ – фаза, $\frac{1}{T}$ – жиілік, ω – дөңгелекті айналмалы жиілік – деп аталады.

8) Егер $l = \frac{h}{p}, \omega = \frac{E}{h}$
 P – импульс, E кез келген бөлшек энергиясы, h – планка тұрақтылығы болса, онда гармоникалық толқын Бройля толқыны деп аталады.

9) Егер $\xi = x - Vt$ – толқын фазасы, V – тоқын жылдамдығы, $k = \frac{2\pi}{l}$ толқын саны, h – жолақ қалыңдығы болса, онда $b = b_0 \left[1 - \frac{G_{12}^2 (kh)^2}{G_{22}^2 24} \right]$, фаза жылдамдығы болады.

(2.27) дифференциалдық теңдеуі гиперболалық типтегі толқын теңдеуі математиканың теңдеуі болады:

Мысалы, егер $a^2 = \frac{T}{\rho}$, T – қысымның нүктедегі тартылыс күші, (2.29) ρ – тығыздық онда (2.29) – сымның тербелісі; егер $a^2 = \frac{1}{GL}$ (2.30) G – заряд коэффициенті электр сымның бірге тең ұзындығы, L – индуктивтік коэффициенті болса, онда (2.30) электр сымның тербелісі.

Шешеуі: (Фурье әдісі) дербес шешімі $U(x, t) = X(x)T(t)$, (2.31) онда

$$X(x) \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2} \text{ немесе } \frac{1}{a^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$$

қанағаттанады, егер сол жағы мен оң жағы бір санға $-\lambda^2$ тең болса:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 a^2 T; \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X \quad (2.32)$$

(2.3)-тің түбірлері комплексті сыбайлас болады.

$$T = A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t,$$

$$X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x,$$

(2.31)-ді (2.32)-ге қоямыз, $U = (A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t) (C \cos \lambda x + D \sin \lambda x)$ немесе $U = \sum (A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t) (C \cos \lambda x + D \sin \lambda x)$.

Ескертпе №2. A, B, C, D, λ -ны шектік және алғашқы шарттардан табамыз.

Кесе-көлденең тербеліс. Есеп шарты:

$$U = 0; V = 0; W = W(x, t) \quad (2.33)$$

$$x = y = z = 0$$

Шешуі: (2.33) арқылы (Ламе теңдеуінен) $\partial = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0;$$

$$\nabla^2 U = \nabla^2 V = 0; \nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0; \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial^2 W}{dt^2} = \frac{d^2 W}{dt^2}$$

Яғни (2.34)-тен:

$$\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \text{ немесе } \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Бойлай тербеліспен кесе-көлденең бірдей түрді көрсетеді, айырмашылығы $a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $b^2 = \frac{1}{\rho}$ шешімі бірдей.

Толқынның түзу сызықты моделі.

$$U = U(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{e} - \frac{t}{T} \right), V = 0, W = 0 \quad (2.34)$$

(2.34)-ті $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ дифференциалдық теңдеуіне қойып табамыз:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{a^2}{e^2} \text{ немесе } \frac{e}{T} = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad (2.35)$$

Қорытынды: егер l – толқын ұзындығымен, T – жиіліктің арасында (2.35) қатынас болған жағдайда (жиілік- T), гармоникалық (2.34) тербелісі (2.35) болады. $\frac{e}{T} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$.

Ескертпе №4. (2.34) теңдеуден $e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = A \frac{2\pi}{e} \cos 2\pi \left(\frac{x}{e} - \frac{t}{T} \right)$ -ге тең, олай болса, $\cos 2\pi \left(\frac{x}{e} - \frac{t}{T} \right) = \pm 1$, $\frac{x}{e} - \frac{t}{T} = \frac{m}{2}$, (2.36)

m – бүтін нақты сан. (2.36)-дан жылдамдықты табамыз.

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{e}{T},$$

$$V = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

3. БРОЙЛЯ ТОЛҚЫНДАР ТҮРІНДЕГІ ЖИЫННЫҢ ЖЕР ҮСТІНДЕГІ ЖӘНЕ АСТЫНДАҒЫ АЙНЫМАЛЫ ПАРАМЕТРЛІ ТҮТІКШЕ КЕЛГЕН КОНСТРУКЦИЯЛАРҒА ӘСЕР ЕТУІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ, НЫСАНА ТЕРБЕЛІСІ

3.1. Толқынның таралу түрлері және олардың формулалары

$$I) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \theta, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (3.1)$$

таралу толқындары;

$$II) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \theta, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.2)$$

ығысу толқындары;

$$III) \quad \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_x, \quad \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_y, \quad \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_z$$

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.3)$$

көлемі өзгермейтін жағдайдағы ығысу толқындары;

$$IV) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 U, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 V, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 W \quad (3.4)$$

$b^2 = \frac{\mu}{\rho}, V = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – эквипотенциалдық ығысу таралу толқындары;

$$V) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 U, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 V, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 W \quad (3.5)$$

$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, V = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ – құйынсыз таралу толқындары;

$$VI) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad f = \varphi(x - ct) + \varphi(x + ct) \quad (3.6)$$

Түзу сызықты қарапайым толқындар.

Жер үстінде жатқан түтікше келген нысанаға таралу – (3.1), ығысу – (3.2), эквипотенциалды ығысу – (3.4), құйынсыз таралу – (3.5), түзу сызықты қарапайым – (3.6) толқындар жиыны q_k әсер етіп тұр. Толқындар жиынының ұзындығы: $l = \frac{h}{q_k}$, дөңгелектің айналымы: $\omega = \frac{E}{h}$, E – кез келген бөлшек энергиясы, h – Планк

тұрақтысы арқылы Бройля толқындар түріне жататын болсын. Бройля толқындар түріндегі жиынның жер үстіндегі нысанаға жанасу нүктесіндегі шартты

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{q_k}{2D}$$

түрінде алайық, ал шектік жағдайларын нысананың Гринның $\Gamma^{I,II}$ және $\Gamma^{I,III}$ шарттары ретінде қарастырайық.

Нысананың тербелісінің математикалық модельдерін [10]–[12]

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = q_k f(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{d^2 w}{dx^2} - N_1(x) W \right] = q_k f(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{d^2 w}{dx^2} + 2B(x) \frac{dw}{dx} \right] = q_k f(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\varepsilon(x) \frac{d^2 w}{dx^2} + 2B(x) \frac{dw}{dx} - N_1(x) W \right] = q_k f(x)$$

түрлерінде қарастырайық.

Мұндағы $\varepsilon(x)$ – түтікше келген конструкцияның пішінінің майысуына байланысты кесе-көлденең қимасының вертикальды осінің қатаңдығының өзгеру коэффициенті, $f(x)$ – периодты функция, B – тікелей бағытталған бұру моментінің бөлу күшінің коэффициенті, N_1 – тікелей бағытталған иілу моментінің бойлай бағытталған критикалық күшінің коэффициенті, бірінші теңдеу моделі кесе-көлденең бағытталған бірқалыпты емес күштер әсерінен түтікшенің тербелісі.

3.2. Соколов типі негізінде жатқан соққы импульсі әсерінен көпқатпарлы айнымалы шамалы конструкцияның тербеліс моделі

Ескерту. БеттеРелея толқындары қарастырылмаған, себебі Бройля толқындар түріндегі жиынның жылдамдығы Релея толқын жылдамдығынан бірнеше рет артық болады:

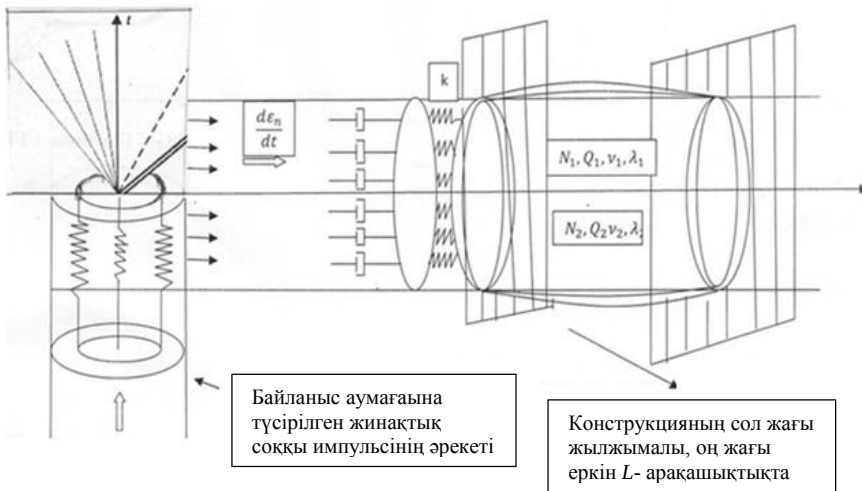
$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \mu\nabla^2\Psi - \rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

φ, Ψ – ХҮ жазықтығындағы ізделінетін функциялар, U, V – жылжу функциялары арқылы анықталған.

Есептің қойылымы.

Нысан ретінде көп қатпарлы түтікшелі конструкцияны қарастырамыз, ұзындығы– L , қалыңдығы – h , ішкі радиусы – R Соколов типі негізінде жатқан кесе-көлденең қимасының айнымалы параметрлерімен толғырғышпен берілген.

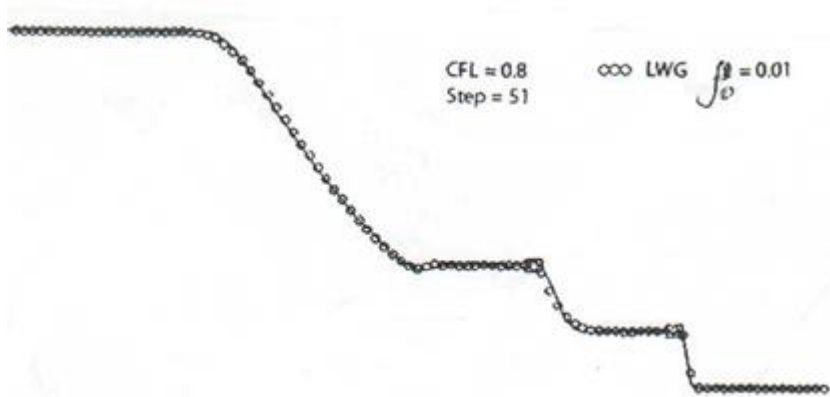
Конструкцияның беттік қабатына Риман есебі аналогиясындай (біртекті соққы түтікшесі туралы) еркін эпюрдің біртекті емес кесе-көлденең күші түріндегі критикалық импульс әсер етеді делік.



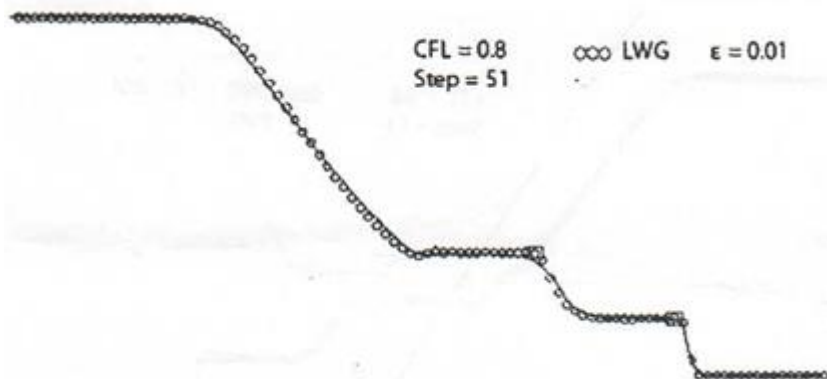
28-сурет



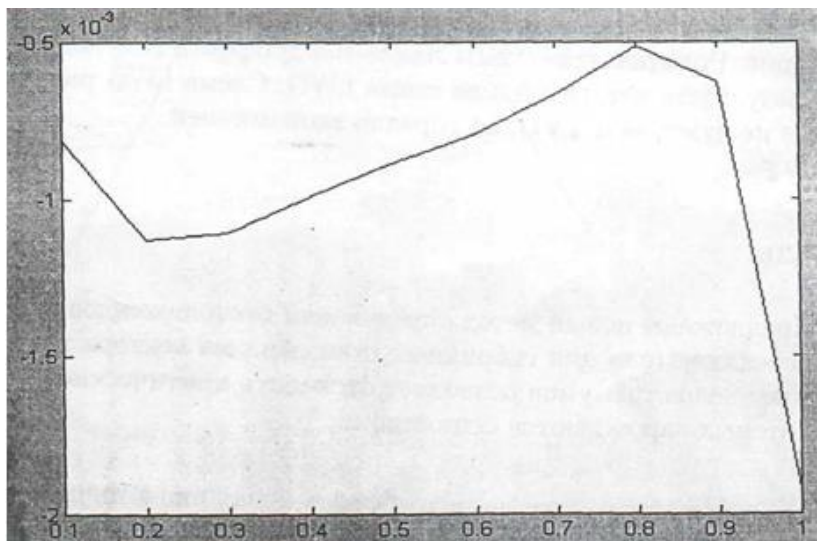
29-сурет. Байланыс аумағы материалының мүмкін болу
микрожарықшақтары сызығы.



30-сурет. Тығыздықтың $0,3 \leq \xi \leq 0,6$ аралықтағы жіктелуі



31-сурет. Тығыздықтың $0,1 \leq \xi \leq 0,3$ аралықтағы жіктелуі.



32-сурет. 2-кесте мәндері бойынша байланыс аумағы материалының мүмкін болу микрожарықшақтары сызығы.

$$F_k = \frac{q_k}{D} \lambda_k \left(\frac{R}{h} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} f(x), \quad (3.7)$$

мұнда

$$q_k = \frac{N(\rho)}{Q(\rho)} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \quad (3.8)$$

мұнда $\lambda_k(8/3; 2; 4/3)$ – конструкциялы сокқы импульсі байланыс аумағының кесе-көлденең қимасының формасы $N(\rho)$, $Q(\rho)$ – конструкцияның анизотропты сипаттамасы

байланыс аумағына тәуелді, $\gamma = 1/2 \frac{\pi h}{L}$, ω – конструкция

бүйіріндегі шектік шарттар бойынша анықталатын бойлай бағыттағы жартылай толқын саны;

$\lambda'_k = 1$ (В.В. Новожилов); $2/3$ (А.Н. Гузь); $1/3$ (М.А.Био) – байланыс аймағындағы сызықты емес деформациялық процесс бойынша; $\frac{R}{h} = \{0,1 - 0,3; 0,31 - 0,6; 0,61 - 0,99\}$ – конструкция

ұзындығының сипаттамасы сәйкесінше: (ұзын, орта ұзындықты, қысқа);

$\frac{h}{R} = \{0,005 - 0,01; 0,015 - 0,02; 0,025 - 0,03\}$ – конструкция

қалыңдығының сипаттамасы сәйкесінше: (жұқа, орта қалыңдықты, қатты);

$f(x) = \left\{ 1; 1 - x; 1 - x + \frac{x^2}{2} \right\}$ – байланыс аумағы формасына

тәуелді критикалық статикалық жүктеме түрі.

Байланыс аумағы кесе-көлденең қимасының тығыздығының өзгеруі:

$$\rho(\xi) = \frac{\rho_1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \alpha = 0,35; \quad \sigma = 0,3.$$

$$0,3 \leq \xi = \frac{R}{L} \leq 0,6 \quad (3.9)$$

Байланыс аумағы кесе-көлденең қимасы орта осі иілімінің дифференциалдық теңдеуіне қатысты өзара әрекеттесуші денелердің математикалық моделін [3] – [4] түрінде аламыз:

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + \eta \frac{dW}{dx} = \lambda_k q_k \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} f(x). \quad (3.10)$$

Дифференциалдық теңдеудің біртекті бөлігінің характеристикалық теңдеуі (3.10):

$$\lambda \left(\lambda + \sqrt[3]{\eta/D} \right) \left(\lambda^2 - \sqrt[3]{\eta/D} \lambda + \sqrt[3]{(\eta/D)^2} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Бұдан

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -b; \quad \lambda_{3,4} = b/2 \pm \sqrt{3/4}b, \\ b = \sqrt[3]{\eta/D}. \quad (3.12)$$

Онда біртекті бөліктің жалпы шешімі:

$$W_0(x) = C_1 + C_2 e^{-bx} + e^{b/2x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right).$$

(3.11) –(3.12) характеристикалық теңдеулерді зерттеу: егер $\lambda_1 = 0$ және $\lambda^3 + C = 0$ болса, онда λ_2 – шын мәнінде теріс, ал қалған екеуі $0,25 \leq C \leq 2,25$ болғанда, комплексті түйіндес екенін көрсетеді, мұнда $C = \sqrt[3]{\eta/D}$. Мысалы (1-кесте):

1-кесте

$c = 0,25: b = -0,62996;$	$c = 0,25: b = -0,7937;$
$c = 0,75: b = -0,90856;$	$c = 1,05: b = -1,077;$
$c = 1,5: b = -1,1447;$	$c = 1,75: b = -1,2051;$
$c = 2,0: b = -1,2599;$	$c = 2,25: b = -1,3104;$
$c = 2,25: b = -1,31037;$	$c = 2,5: b = -1,3572.$

1.1.Мысал ретінде байланыс аумағының жылжымалы деформациясы кезіндегі жинақтық соққы импульсі әсерінен

түтікшелі конструкцияның нығаюын қарастырамыз, сол жағы жылжымалы, ал оң жағы еркін бос бекітілген болсын.

Шектік шарттар:

$$\left. \begin{aligned} W/\xi=0 &= 0; \quad \frac{dW}{d\xi}/\xi=0 = 0, \quad W(\tau)/\tau=0 = 0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=0 = 0 \\ \frac{d^2W}{d\xi^2}/\xi=1 &= 0, \quad \frac{d^3W}{d\xi^3}/\xi=1 = 0, \quad W(\tau)/\tau=1 = 0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Жүктеме кезіндегі шарттар:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}; \quad \left. \frac{d^3w}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{q_k}{2} \quad (3.14)$$

Осы жағдайда (3.10) дифференциалдық теңдеудің бірінші бөлігі бар:

$$q_k^* = \lambda_k q_k \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \quad (3.15)$$

(3.15) негізінде (3.10) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$w(x) = c_1 + c_2 e^{-bx} + e^{b/2x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right) + \frac{q_k^*}{\eta} x \quad (3.16)$$

(3.16)-ны(3.13) кою арқылы (3.14) ескере отырыпаламыз:

$$w(x) = \frac{q_k^*}{b\eta} \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta} + e^{-bx} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{-3/2bL} - 1 + \right. \\ \left. + e^{-bx} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{-3/2bL} e^{b/2x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{-3/2bL} + 1 \right] e^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right\} - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{b/2x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + bx \}.$$

$$\Delta = 1 + 2e^{-3/2b/L} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bl \quad (3.17)$$

1.2. Жоғарыда айтылған шектік шарттар кезіндегі байланыс аумағының жылжымалы деформациясы бұрыштық соққы импульсі әсерінен түтікшелі конструкцияның нығаюына әкеледі.

Осы жағдайда (4) дифференциалдық теңдеудің бірінші бөлігі бар:

$$q_k^* = \lambda_k q_k \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} x \quad (3.18)$$

(3.18) негізінде (3.10) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі бар:

$$w(x) = c_1 + c_2 e^{bx} + e^{b/2x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right) + \frac{q_k^*}{2\eta} x^2 \quad (3.19)$$

(3.19)-ды (3.13) кою арқылы (3.14) ескере отырып, шешім аламыз:

$$w(x) = \frac{q_k^*}{b^2 \eta} \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta} e^{-b/2L} \left\{ \begin{aligned} & \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL - e^{-\frac{3}{2}bL} \right) \\ & \left(1 - e^{-\frac{3}{2}bx} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right) + \\ & + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \cos \frac{\sqrt{3}}{3} bL \right) \cdot \\ & \cdot \left(e^{-bx} - e^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{3} bx + \sqrt{3} e^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right) \end{aligned} \right\} + b^2 x^2 \right\},$$

$$\Delta = 1 + 2e^{-\frac{3}{2}bL} \cos \frac{\sqrt{3}}{3} bL. \quad (3.20)$$

1.3. Жоғарыда айтылған шектік шарттар кезіндегі байланыс аумағы ұзындықтың деформациясына қатысты жылжымалы соққы импульсі әсерінен түтікшелі конструкцияның нығаюына әкеледі.

Осы жағдайда (3.10) дифференциалдық теңдеудің бірінші бөлігі болады:

$$q_k^* = \lambda_k q_k \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} (1-x)$$

(3.18) негізінде (3.10) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$W(x) = c_1 + c_2 e^{-bx} + e^{\frac{b}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right) + \frac{q_k}{\eta} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right).$$

(3.20)-ны(3.13) кою арқылы (3.14) ескере отырып, төменгініаламыз:

$$\begin{aligned} w(x) = & \frac{q_k^*}{b^2 \eta} \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{\frac{3}{2}bL} - 1 + \frac{1}{b} \left(e^{\frac{3}{2}bL} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) + e^{\frac{b}{2}L} + \right. \\ & + \left[1 + \frac{1}{b} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{\frac{b}{2}L} \right] e^{-bx} - \\ & \left[\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) \cdot e^{\frac{3}{2}bL} + \frac{1}{b} \cdot \left(e^{\frac{3}{2}bL} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{\frac{b}{2}L} \right] \cdot \left\{ e^{\frac{b}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \right. \\ & \cdot \left[\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{\frac{3}{2}bL} + 1 + \frac{1}{b} \left(e^{\frac{3}{2}bL} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bL \right) e^{\frac{b}{2}L} \right] e^{\frac{b}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx - \\ & \left. \left. - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx + b \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{Мұндағы } \Delta = 1 + 2e^{-\frac{3}{2}bL} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bL. \quad (3.16), (3.19), (3.20)$$

теңдеулері сонымен қатар (3.9) сандық есептеу нәтижесінде шешілген келесі деректер алынды:

$c = \sqrt[3]{\frac{\eta}{D}} = 0,25; \quad b = -0,62996; \quad L = 0,3.$
$c = \sqrt[3]{\frac{\eta}{D}} = 1,25; \quad b = -1,077; \quad L = 0,4.$
$c = \sqrt[3]{\frac{\eta}{D}} = 2,25; \quad b = -1,31; \quad L = 1.$
$x = \left\{ 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; \dots, 2,0; 2,2; \right. \\ \left. 2,4; 2,6; 2,8; 3,0; \dots, 9,0; 9,2; 9,4; 9,6; 9,8; 10,0 \right\}$
$\frac{q_k}{b\eta}, \quad \frac{q_k}{b^2\eta}.$

3.3. Толқынның таралу түрлері және олардың импульсті соққы фронтының әсеріне байланысты дербес модельдері

Толқынның таралу түрлері және олардың импульсті соққы фронтының әсеріне байланысты төмендегі дербес модельдерді қолданамыз:

$$I) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q_k f(x) \sin w_n x \left\{ P(t) = kw(t) + \eta \frac{dw}{dt} \right\},$$

Фойхт моделі

(3.21)

$$II) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_1(x)W \right] = q_k f(x) \sin w_n x \left\{ \frac{dP}{dt} + \frac{k_1 + k_2}{\eta_1} P = k_2 \frac{dw}{dt} + \frac{k_1 k_2}{\eta_1} W \right\},$$

СЛТ моделі

(3.22)

$$III) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B \frac{dw}{dx} - N_1 W \right] = q_k f(x) \sin w_n x \left\{ \frac{d^2 P}{dt^2} + r_1 \frac{dP}{dt} + r_0 P = q_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + q_1 \frac{dw}{dt} + q_0 w(t) \right\}$$

(3.23)

А.Ю. Ишлинский, Ц.Зингер, А.Р.Ржаницын модельдері.

Жергілікті кесе-көлденең импульсивті біртекті емес соққы импульсі $-q_k$ резервуарда А.Н.Крыловтың түріндегі тербелісін қоздырады.

Біртекті емес кесе-көлденең қысымның әсерінен резервуардың кесе-көлденең қимасының пішіні: овалды, конус түрінде және гиперболалықградирни түрінде болуы мүмкін.

Кесе-көлденең қиманың критикалық деформация формасы тіктөртбұрышты, үшбұрышты және трапеция түрінде болады. Кесе-көлденең қиманың вертикальды осінің қаталдығының өзгеруін $\varepsilon(x)$ қиманың пішініне байланысты төмендегідей етіп аламыз:

$$\varepsilon(x) = \frac{D}{x}, \varepsilon(x) = \frac{D}{1-x}, \varepsilon(x) = \frac{D}{1-x+x^2} \quad (3.24)$$

Резервуардың динамикасына мұнай қоспасының тербелісінің әсері резервуардың симуляционды моделі толтырғышының кесе-көлденең қимасын функционалдау схемасы арқылы жүргіземіз [14].

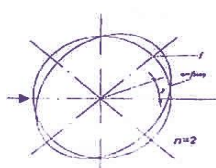
Есептің шешуі:

33-суреттегі резервуардың симуляционды моделі толтырғышының кесе-көлденең қимасының функционалды схемасын қарастырайық. Резервуардың біртекті емес кесе-көлденең қимасының пішіні овал түрінде, сыртқы импульс эпюрі тік төртбұрышты және импульс эпюріне пропорционал, 33в-сурет жағдайы; механикалық жүйенің өзара мәжбүрлі нығаюы ішкі үйкелістің әсерінен серпімді-тұтқырлы, 33с-сурет жағдайы; кесе-көлденең қиманың вертикальды осінің қаталдығының өзгеруі $\varepsilon(\xi) = \frac{D}{\xi}$ функциясы сияқты параллель бойымен (эллипсоида) Фурье қатпарына Z – қима айнымалысы қалыңдығы бойынша жіктеледі. Сонымен қатар ішкі балшықты қабырғадағы қысымдымына түрде аламыз:

$$P_3 = (1 - \alpha), P(z) \cos kz, \quad P(z) = \gamma(l - s), \\ z = \varepsilon \sqrt{b^2 - z^2}, \quad \varepsilon = a/b$$

мұнда α – параллельді дөңгелекті анықтайтын координата, γ – сұйықтықтың тығыздығы, l – резервуардың биіктігі, s – меридиана доғасының ұзындығы, z – қалыңдық.

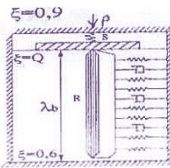
Түбіне түсірілген гидростатикалық (жоғары немесе төмен) (33- суретіндегідей, d жағдайы):



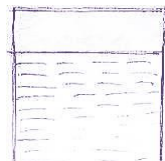
а) біртекті емес кесе-көлденең қысымның әсерінентік бұрышты эпюрдың кесе-көлденең қимасының формасы.



б) Кесе-көлденең қиманың критикалық деформациясының формасы.



с) мұнай қоспасы жағынан алғандағы серпімді-тұтқыр ортаның жүктемесі.



д) резервуардың кесе-көлденең қимасының түбіне түсірілген гидростатикалық қысым.

33-сурет. Резервуардың симуляционды моделі толтырғышының кесе-көлденең қимасын функционалдау схемасы.

Резервуардың кесе-көлденең қимасының тығыздығы мына аралықта:

$$0 < \xi < 1, \quad \xi = \frac{R}{L}, \quad x = \alpha\xi - \tau$$

$$\rho(\xi) = \frac{\rho_0}{2\pi\sigma}; \quad e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\sigma^2}}; \quad \sigma = 0,4; \quad \alpha = 0,2; \quad \rho = \rho_0(0,9)$$

мұнда α – математикалық күтілім, σ^2 – дисперсия, σ – орта квадраттық ауытқу.

$f(\xi) \cong e^{-\xi}$ функцияның нақтылы түрде таңдалуына және [23]–[34] кесе-көлденең қимасындағы сұйықтықтың тығыздығына тәуелді болып келетін ішкі критикалық динамикалық жүктеменің критикалық импульсінің шамасына резервуар шамасы айтарлықтай әсер етпейді делік:

$$\rho = \frac{\rho_1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{\sigma^2}}$$

$$0,6 \leq \xi \leq 1; \quad \rho_0 = \rho_0(1); \quad \sigma = 0,4; \quad \alpha = 0,2$$

мұнда α – математикалық күтім, σ^2 – дисперсия, σ – қозғалыстың активті орын ауыстыру бөлігі $[0,6;1]$ аралығындағы орта квадраттық ауытқу. 33-сурет жұмыстарында резервуар пластының физико-техникалық және химико-техникалық сипаттамаларын функционалдау схемасының үлкен күші көрсетілген.

Келтірілген қалың серпімді-тұтқыр қатпар үшін кезектескен мұнай горизонттарының қатпарының үлкен көлеміндегі мұнай пластын табамыз.

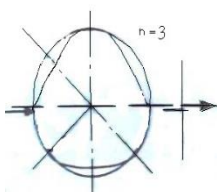
Жергілікті кесе-көлденең импульсивті біртекті емес жүктеме резервуарда В.И. Королевтың түріндегі тербелісінің моделін қоздырады делік. (33а-сурет жағдайы); критикалық деформацияның формасы біртекті емес кесе-көлденең қысымның эпюріне пропорционалды (33в-сурет жағдайы); механикалық жүйенің өзара-мәжбүрлі нығаюы ішкі үйкелістің әсері есебінен серпімді-тұтқыр денелердегі динамикалық жүктеме моделімен және резервуардың мұнай сұйықтығының өзара әсерімен (33с-сурет жағдайы); резервуардың кесе-көлденең қимасын критикалық жүктеме кезіндегі овальды форма түрінде елестетейік, $\varepsilon(\xi) = \frac{D}{1-\xi}$ функциясы секілді параллель бойымен (эллипсоида) Фурье қатарына z – қима айнаымалысы қалыңдығы

бойынша жіктеледі. Сонымен қатар ішкі балшықты қабырғадағы қысымдымына түрде аламыз:

$$P_3 = (1 - \alpha)p(z)\cos k\theta, \quad P(z) = \gamma(l - s),$$

мұнда α – параллельді дөңгелекті анықтайтын координата, γ – сұйықтықтың тығыздығы, l – резервуардың биіктігі, s – меридиана доғасының ұзындығы, z – қалыңдық, (ρ, θ) – полярлы координаталар.

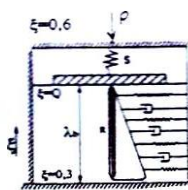
Түбіне түсірілген гидростатикалық (жоғары немесе төмен) (33-суретіндегідей, d жағдайы).



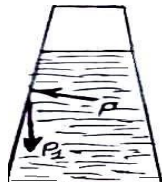
а) Біртекті емес көлденең қысымның әсерінен үшбұрышты эпюрдың кесе-көлденең қимасының формасы.



в) Критикалық-деформацияның кесе-көлденең қимасының формасы.



с) Мұнай-газ тұрғысынан серпімді-тұтқыр орта жүктемесі.



д) Резервуардың кесе-көлденең қимасының түбіне түсірілген гидростатикалық

34-сурет. Резервуардың симуляционды моделінің толтырғышының кесе-көлденең қимасын функционалдау схемасы.

Резервуардағы қоспа жеткіліксіз болған жағдайдағы кесе-көлденең қимасының тығыздығының өзгеруі мына аралықта $0 < \xi < 1$, $\xi = \frac{R}{l}$, $x = \alpha\xi - \tau$

$$\rho(\xi) = \frac{\rho_1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, \quad \alpha = 0,35; \quad \sigma = 0,3; \quad \rho = \rho(0,6)$$

мұнда α – математикалық күтім, σ^2 – дисперсия, σ – орта квадраттықауытқу.

Резервуардың ұзындығы сыртқы критикалық динамикалық жүктеменің критикалық импульсінің шамасына әсер етпейді делік, яғни функцияның заттық таңдалуынан тәуелді болатын

$f(\xi) \cong e^{-\xi}$ кесе-көлденең қимасындағы сұйықтың тығыздығынан

$$\rho = \frac{\rho_1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{\sigma^2}}$$

$$\rho_1 = \rho_1(0,6) = const,$$

$$\alpha = 0,35; \quad \sigma = 0,3; \quad 0,3 < \xi \leq 0,6$$

мұнда α – математикалық күтім, σ^2 – дисперсия, σ – орта квадраттықауытқу, $[0,3; 0,6]$ аралығындағы орта квадраттық ауытқу, аралас мұнай қоспасының кристаллизациясының бастамасыболады. Резервуар пластының физика-техникалық және химия-техникалық сипаттамаларын функционалдау схемасының үлкен күші 34-суретте көрсетілген.

Жергілікті кесе-көлденең импульсивті біртекті емес жүктеме резервуарда В.И. Крыловтың тербеліс моделін қоздырады делік (34а-сурет жағдайы); критикалық деформацияның формасы біртекті емес кесе-көлденең қысымның эпюріне пропорционалды (34в-сурет жағдайы); механикалық жүйенің өзарамажбүрлі нығаюы ішкі үйкелістің әсеріменсерпімді-тұтқыр денелердегі динамикалық жүктеме моделімен және резервуардың мұнай сұйықтығымен өзара әсерімен (34с-сурет жағдайы); резервуардың кесе-көлденең қимасын критикалық жүктеме кезіндегі градириформа түрінде делік:

$$\varepsilon(\xi) = \frac{D}{1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}} \quad (3.25)$$

функциясы секілді параллель бойымен (эллипсоида) Фурье қатарына z – қима айнымалысы қалыңдығы бойынша жіктеледі. Сонымен қатар ішкі балшықты қабырғадағы қысымдымына түрде аламыз:

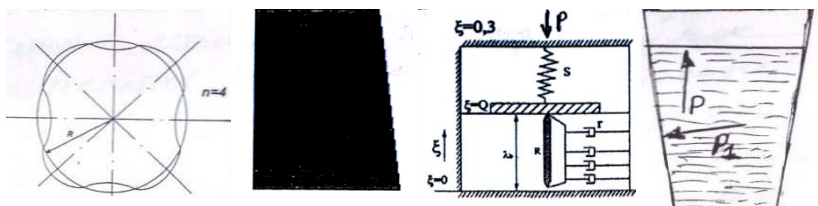
$$P_3 = (1 - \alpha)P(z)\cos k\theta, \quad P(z) = \gamma(l - s)$$

$$\sin \alpha = z/\sqrt{b^2 + z^2}, \quad \cos \alpha = b/\sqrt{b^2 + z^2}, \quad z = btg \alpha \quad (3.26)$$

Мұнда α – параллельді дөңгелекті анықтайтын координата, γ – сұйықтықтың тығыздығы, l – резервуардың биіктігі, s –

меридиана доғасының ұзындығы, z – қалыңдық, (ρ, θ) – полярлы координаталар.

Түбіне түсірілген гидростатикалық табаны немесе бөркі (35d-сурет):



а) Трапециялық эпюрдің біртекті емес көлденең қысымның әсерінен кесе-көлденең қимасының формасы.

в) Критикалық деформацияның кесе-көлденең қимасының формасы.

с) Мұнай қоспасы тұрғысынан серпімді-тұтқыр орта жүктемесі.

д) Артық мөлшердегі резервуардың кесе-көлденең қимасына түсірілген гидростатикалық қысым.

35-сурет. Дифференциалдық теңдеудің сандық есептелуі дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің бірі болып табылады.

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[L n \frac{\xi}{1-\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] + \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{2C}{\xi} \right) \frac{dW}{d\xi} + L n \frac{\xi}{1-\xi} W = \frac{q_k}{C_4}$$

$$C = \frac{\beta^2 C_4}{2D}, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{D}{C_4}},$$

C_4 – Коссера континуумы негізіндегі материалдың жаңа тұрақтысы, D – резервуардың цилиндрлік қаттылығы.

$f(\xi) \cong e^{-\xi}$ функцияның нақтылы түрде таңдалуына және кесе-көлденең қимасындағы сұйықтықтың тығыздығына тәуелді болып келетін ішкі критикалық динамикалық жүктеменің критикалық импульсінің шамасына резервуар шамасы айтарлықтай әсер етпейді делік:

$$\rho = \frac{\rho_2}{2\pi\sigma} e^{\frac{(\xi-\alpha)^2}{\sigma^2}} \sigma = 0,2; \quad \alpha = 0,7 \quad \rho_2 = \rho(0,3), \quad 0,1 \leq \xi \leq 0,$$

мұнда α – математикалық күтім, σ^2 – дисперсия, σ – қозғалыстың активті орын ауыстыру бөлігіндегі $[0,1;0,3]$ аралығындағы орта квадраттық ауытқу. Бұл жұмыстарда резервуар пластының физико-техникалық және химико-техникалық сипаттамаларын функционалдау схемасының үлкен күші 36-суретте көрсетілген.

Өңдеу және тасымалдау кезіндегі кесе-көлденең қимасының формасы сопақшалау (овал) болған жағдайдағы ауыспалы параметрлермен берілген резервуар қозғалысының симуляциянды моделінен ауыр мұнайдың аналитикалық-есептік моделі.

Резервуар толтырғышы моделінің теңдеуі мынадай түрге ие болады:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\varepsilon(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] &= \frac{8}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} P(t) \sin \omega_\xi \sin \omega_n t \\ \frac{dP}{dt} + \frac{k_1+k_2}{\eta_1} P &= k_2 \frac{dW}{dt} + \frac{k_1+k_2}{\eta_1} W \quad (\text{С. Л. Т.}) \end{aligned} \right\} I_a \quad (3.27)$$

негізінде, егер есептің қойылымын аналитикалық есептеу үшін қойсақ, яғни:

$$\varepsilon(\xi) = \frac{D}{\xi}, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad (3.28)$$

онда (I_a) жүйесі айнымалыларын ажыратқан соң төмендегідей түрде болады:

$$\left. \begin{aligned} D \left[\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - \frac{2}{\xi} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] &= \frac{8}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \xi \sin \omega_\xi \\ C e^{-\frac{k_1 t}{\eta_1}} + \frac{1}{\left(\frac{\eta_1}{K_1} \right)^2 + \omega_n^2} \left[\left(\frac{k_1+k_2+k_1 \omega_n^2}{k_1 k_2} - \frac{k_1^2 \omega_n^2 + \eta_1^2}{k_2^2} \right) \sin \omega_n t + \right. \\ &\left. + \omega_n \left(\frac{\eta_1}{k_1 k_2} - \frac{k_1+k_2}{\eta_1 k_2} \right) \cos \omega_n t \right] = 0 \end{aligned} \right\} I_b \quad (3.29)$$

Егер (I_b) жүйесін академик А.Н. Крыловтың әдісі негізде жазатын болсақ, онда:

$$Ce^{-\frac{k_1 t}{\eta_1}} + \frac{1}{\left(\frac{\eta_1}{k_1}\right)^2 + \omega_n^2} \left[\left(\frac{k_1 + k_2 + k_1 \omega_n^2}{k_1 k_2} - \frac{k_1^2 \omega_n^2 + \eta_1^2}{k_2^2} \right) \sin \omega_n t + \omega_n \left(\frac{\eta_1}{k_1 k_2} - \frac{k_1 + k_2}{\eta_1 k_2} \right) \cos \omega_n t \right] = 0 \quad \left. \vphantom{Ce^{-\frac{k_1 t}{\eta_1}}} \right\} I_c \quad (3.30)$$

немесе

$$Ce^{-\frac{k_1 t}{\eta_1}} + \frac{1}{\left(\frac{\eta_1}{k_1}\right)^2 + \omega_n^2} \left[\left(\frac{k_1 + k_2 + k_1 \omega_n^2}{k_1 k_2} - \frac{k_1^2 \omega_n^2 + \eta_1^2}{k_2^2} \right) \sin \omega_n t + \omega_n \left(\frac{\eta_1}{k_1 k_2} - \frac{k_1 + k_2}{\eta_1 k_2} \right) \cos \omega_n t \right] = 0 \quad \left. \vphantom{Ce^{-\frac{k_1 t}{\eta_1}}} \right\} I_d \quad (3.31)$$

Бастапқы және шектік шарттар қойылған жағдайда:

$$\left. \begin{aligned} W/\xi=0=0; \quad \frac{dW}{d\xi}/\xi=0=0, \quad W(\tau)/\tau=0=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=0=0 \\ \frac{d^2 W}{d\xi^2}/\xi=1=0, \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3}/\xi=1=0, \quad W(\tau)/\tau=1=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=1=0 \end{aligned} \right\} (3.32)$$

мұнда $\tau - P_{\text{крит}}(t)$ немесе уақыт функциясы болып табылатын амплитуда вариациясы. Шешімі:

(I_a) бірінші дифференциалдың тендеулер жүйесін мына түрде жазсак:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\varepsilon(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] = \frac{8N}{3Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \sin \omega \xi$$

Бұдан

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{8N}{3Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left(-\frac{1}{\omega^2} \xi \sin \omega \xi + C_1 \xi^2 + C_2 \xi \right)$$

Демек

$$W(\xi) = \frac{8N}{3Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \frac{1}{\omega^5} [2\cos\omega\xi + \omega\xi\sin\omega\xi + \omega^5 \left(\frac{C_1}{12} \xi^4 + \frac{C_2}{6} \xi^3 + C_3 \xi + C_4 \right)] \quad (3.33)$$

Негізінен алғанда:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\varepsilon(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] = \frac{8N}{3Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad \text{онда}$$

$$W(\xi) = \frac{8N}{3Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left(\frac{\xi^5}{40} + \frac{C_1}{12} \xi^4 + \frac{C_2}{6} \xi^3 + C_3 \xi + C_4 \right) \quad (3.34)$$

(3,33) және (3,34) шектік (3,32) шарттарға қоямыз, сонда сәйкесінше:

$$W(\xi) = \frac{2N}{9Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \frac{1}{\omega^5} [24\cos\omega\xi + 12\omega\xi\sin\omega\xi + (\omega^4\cos\omega)\xi^4 + 2\omega^3(\sin\omega - \omega\cos\omega)\xi^3 - 24] \quad (3.35)$$

$$W(\xi) = \frac{1}{45} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} (3\xi^3 - 10\xi + 10)\xi^3 \quad (3.36)$$

Егер осы (I_c) және (I_a) теңдеулер жүйесін (0,6;0,1) аралығында шешетін болсақ,

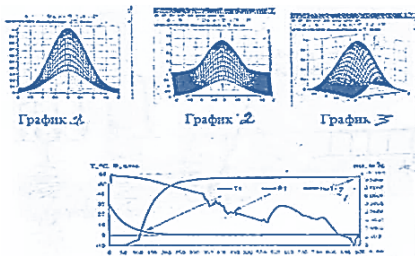
$$\varepsilon(\xi) = \frac{D}{\xi}, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}$$

онда аламыз:

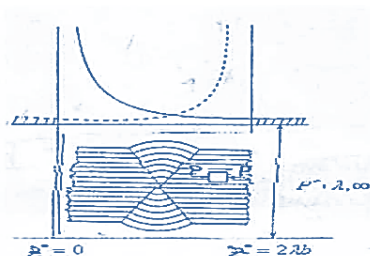
$$W(\xi) = \frac{8N}{3Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left[\frac{4}{\omega^5} \cos\omega\xi + \frac{1}{\omega^4} \xi \sin\omega\xi + \frac{1}{6\omega^2} (\omega\cos\omega - \sin\omega)\xi^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\omega} \sin\omega + \frac{2 - \omega^2}{\omega^3} \cos\omega \right) \xi^2 + \left(\frac{3}{4} \sin \frac{3}{5} \omega - \frac{3}{5\omega^3} \cos \frac{3}{5} \omega - \frac{39\omega^2 - 60}{50\omega^3} \cos\omega - \frac{60\omega - 9}{50\omega^2} \sin\omega \right) \xi + \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{9\omega^2 - 100}{25\omega^5} \cos \frac{3}{5}\omega - \frac{3(4 + 3\omega^4)}{20\omega^4} \sin \frac{3}{5}\omega \\
 & + \frac{9(17\omega^2 - 30)}{250\omega^3} \cos \omega + \\
 & + \frac{9(5\omega - 1)}{125\omega^2} \sin \omega \Big] \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$W(\xi) = \frac{1}{45} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} (\xi^3 - 10\xi + 20) \xi^2 \quad (3.38)$$



а) т уақытына байланысты тығыздықтың, температураның, технологиялық қысымның және резервуардың симуляциянды моделінің тұтқырлығының бөлінуі.



б) резервуардың толтырғышының кинетикалық тұрақтылығының азаюы және майысуға сәйкес байланысының қысылуы.

36-сурет. Үлкен күшті пластың физико-техникалық және химико-техникалық функционалдау схемасы.

Мұнда (N, Q) – резервуардың симуляциянды моделінің кесе-көлденең қимасының қатпары түрінде келтірілген анизотропты сипаттамасы, $\gamma = \frac{1}{2} \frac{\pi h}{L}$ – көлденең бағыттағы жартылай толқын саны, $\omega = \frac{n\pi R}{L}$ – бойлау бағыттағы жартылай толқын саны, $\xi = 0,6$ и $\xi = 1,0 \lambda_k^1 = \{1 \text{ (В.В. Новожилов), } 2/3 \text{ (А.Н. Бузь), } 1/3 \text{ (М.А. Био), } 1 + \frac{1}{3} \left(1 - 4 \frac{N}{Q}\right) \text{ (А.С. Лейбензон, А.Ю. Ишлинский)}\}$ беттік қабаттың шектік шарттары сызықты емес деформациялық сұрақтар бойынша анықталады:

$$\omega_n^2 = m^2 \omega^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{және}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k_2 \eta_1 - (k_1 + k_2) \eta_1}{\eta_1 - k_1 k_2} \frac{\eta_1}{k_2} > 0$$

Резонанс шарты тек жергілікті активті сыртқы және ішкі критикалық жүктеме түрінен алынады, $-M_u = m_u + \Delta m_u$, $m_u = D \frac{d^2 W}{d\xi^2}$ – серпімділіктен тыс резервуардың кесе-көлденең қимасының иілу осінің иілім моменті.

Өңдеу және тасымалдау кезіндегі кесе-көлденең қимасының формасы косинусоидалы болған жағдайдағы ауыспалы параметрлермен берілген резервуардың қозғалысының симуляционды моделінен ауыр мұнайдың аналитикалық-есептік моделі.

Резервуар толтырғышының тепе-теңдік теңдеуін мынадай түрде аламыз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\varepsilon(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] &= 2 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \sin \omega \xi P(t) \\ P(t) &= k\omega + \eta \frac{dW}{dt} - \text{Фохтмоделі}, k \gg \eta \end{aligned} \right\} II_a \quad (3.39)$$

Егер аналитикалық есептеу үшін есеп қойылымынан болжам жасасақ,

$$\varepsilon(\xi) = \frac{D}{1-\xi}, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{1-\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad (3.40)$$

(II_a) жүйесі мынадай түрге ие болады:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{2}{1-\xi} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{2}{(1-\xi)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} &= 2 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} (1-\xi) \sin \omega P(t) \\ W(t) &= \frac{1}{\left[\left(\frac{k}{\eta} \right)^2 + \omega_n^2 \right] \eta} \left(\frac{k}{\eta} \sin \omega_n t - \omega_n \cos \omega_n t \right) + C e^{-\frac{k}{\eta} t} \end{aligned} \right\} II_b$$

Енді (II_b) жүйесінің бірінші теңдеуін төмендегідей түрде қайта жазсақ:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\varepsilon(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] = 2 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \sin \omega \xi \quad (3.41)$$

Бұдан

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 2 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left[-\frac{1}{\omega^2} \sin \omega \xi + \frac{1}{\omega^2} \xi \sin \omega \xi - C_1 \xi^2 + (C_1 - C_2) \xi + C_2 \right]$$

Демек,

$$W(\xi) = 2 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \frac{1}{\omega^4} \left\{ \sin \omega \xi - \frac{2}{\omega} \cos \omega \xi - \xi \sin \omega \xi + \omega^4 \left\{ -\frac{1}{12} C_1 \xi^4 + \frac{1}{6} (C_1 - C_2) \xi^3 + \frac{1}{2} C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \right\} \right\} (3.42)$$

Төменгі шектік шартқа қою арқылы:

$$\left. \begin{aligned} W/\xi=0=0; \quad \frac{dW}{d\xi}/\xi=0=0, \quad W(\tau)/\tau=0=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=0=0 \\ \frac{d^2 W}{d\xi^2}/\xi=1=0, \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3}/\xi=1=0, \quad W(\tau)/\tau=1=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=1=0 \end{aligned} \right\} (3.43)$$

мұнда $\tau - P_{\text{крит}}(t)$ немесе уақыт функциясы болып табылатын амплитуда вариациясы.

$$W(\xi) = 2 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \frac{1}{\omega^5} (\omega \sin \omega \xi - 2 \cos \omega \xi - \omega \xi \sin \omega \xi + \omega^5 \gamma (l - s) - \omega^2 \xi + 2) (3.44)$$

шартын ескере отырып, айнамамыларды ажыратамыз:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{1 - \xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}$$

Егер осы (II_b) тендеулер жүйесін [0,3; 0,6] аралығында шектік шарттармен сәйкесінше шешетін болсақ,

$$\left. \begin{aligned} W/\xi=0,3=0; \quad \frac{dW}{d\xi}/\xi=0,3=0, \quad W(\tau)/\tau=0=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=0=0 \\ \frac{d^2 W}{d\xi^2}/\xi=0,6=0, \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3}/\xi=0,6=0, \quad W(\tau)/\tau=1=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=1=0 \end{aligned} \right\} (3.45)$$

онда шартты ескере отырып,

$$\varepsilon(\xi) = \frac{D}{1-\xi} ; \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3} = -\frac{1}{1-\xi} \frac{d^2 W}{d\xi^2} \quad (3.46)$$

аламыз:

$$\begin{aligned} W(\xi) = & 2 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left\{ \frac{1}{\omega^4} \sin \omega \xi - \frac{4}{\omega^5} \cos \omega \xi - \right. \\ & - \frac{1}{\omega^4} \xi \sin \omega \xi + \frac{1}{6\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} \sin \frac{3}{5} \omega + \frac{2}{5\omega} \cos \frac{3}{5} \omega \right) \xi^3 - \\ & - \frac{1}{10\omega^2} \left(\sin \frac{3}{5} \omega + \frac{6\omega^2 + 50}{5\omega} \cos^3 \omega \right) \xi^2 \\ & + \left(\frac{13\omega^2 + 150}{225\omega^3} \cos \frac{3}{5} \omega + \right. \\ & + \frac{1}{90\omega^2} \sin \frac{3}{5} \omega - \frac{2}{\omega^3} \cos \frac{\omega}{3} + \frac{3}{\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} \Big) \xi + \frac{2\omega^2 - 4}{\omega^5} \cos \frac{\omega}{3} \\ & - \frac{3}{\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} + \\ & \left. + \frac{1}{180\omega^2} \sin \frac{3}{5} \omega - \frac{17\omega^2 + 225}{2025\omega^3} \cos \frac{3}{5} \omega \right\} \quad (3.47) \end{aligned}$$

мұнда (N, Q) – резервуардың симуляционды моделінің кесекөлденең қимасының қатпары түрінде келтірілген анизотропты сипаттамасы, $\gamma = \frac{1}{2} \frac{\pi h}{L}$ – көлденең бағыттағы жартылай толқын саны, $\omega = \frac{n\pi R}{L}$ – бойлау бағыттағы жартылай толқын саны, $\xi = 0,6$ и $\xi = 1, 0\lambda_k^1 = \{1 \text{ (В.В. Новожилов), } 2/3 \text{ (А.Н. Бузь), } 1/3 \text{ (М.А. Био), } 1 + \frac{1}{3} \left(1 - 4 \frac{N}{Q} \right) \text{ (А.С. Лейбензон, А.Ю. Ишлинский)}\}$ беттік қабаттың шектік шарттары бойынша анықталады; сызықты емес деформация бойынша h – қалыңдық; L – ұзындық; R – мұнай қоспасы резервуарының ішкі радиусы;

$$m_u = D \frac{d^2 W}{d\xi^2}$$

серпімділік облысының иілу моменті.

Өңдеу және тасымалдау кезіндегі кесекөлденең қимасының формасы градирини болған жағдайдағы ауыспалы параметрлермен берілген резервуардың қозғалысының

симуляционды моделінен ауыр мұнайдың аналитикалық-есептік моделі.

Резервуар толтырғышының тепе-теңдік тендеуі мынадай түрге ие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\varepsilon(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] &= 4/3 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \sin \omega \xi P(t) \\ P(t) &= k\omega + \eta \frac{dW}{dt} - \text{Фохт моделі}, k \gg \eta \end{aligned} \right\} III_a \quad (3.48)$$

Егер аналитикалық есептеу үшін есеп қойылымынан болжам жасасақ,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi) &= \frac{D}{1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}} \\ \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} &= - \frac{[(\xi-1)^2+1]^2 - 4\xi(\xi-1)}{2(1-\xi)[(\xi-1)^2+1]} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

онда III_a жүйесі:

$$\left. \begin{aligned} D \left[\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - 4 \frac{\xi-1}{[(\xi-1)^2+1]} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} - 2 \left(1 - \frac{4\xi(\xi-1)}{[(\xi-1)^2+1]^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] &= \\ &= 4/3 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left(1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right) \sin \omega \xi P(t), \\ W(t) &= \frac{0,3}{\left(\frac{k}{\eta} \right)^2 + \omega_n^2} \left(\frac{k}{\eta} \sin \omega_n t - \omega_n \cos \omega_n t \right) + C e^{-\frac{k}{\eta} t} \end{aligned} \right\} (III_b) \quad (3.50)$$

III_b жүйесін төмендегідей түрде қайта жазсақ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\varepsilon(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] &= 4/3 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1+\lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \sin \omega \xi, \\ \left[\frac{1}{\left(\frac{k}{\eta} \right)^2 + \omega_n^2} \frac{k}{\eta^2} - 1 \right] \sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\left[\left(\frac{k}{\eta} \right)^2 + \omega_n^2 \right] \eta} \cos \omega_n t + C e^{-\frac{k}{\eta} t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

бұдан, егер

$$\varepsilon(\xi) = \frac{1}{1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}}, \quad (3.52)$$

онда

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{2}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} (\xi^2 - 2\xi + 2) \left(-\frac{1}{\omega^2} \sin \omega \xi + C_1 \xi + C_2 \right) \quad (3.53)$$

демек,

$$\begin{aligned} W(\xi) = & \frac{2}{3} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{\omega^4} \xi^2 \sin \omega \xi + \frac{2}{\omega^5} \xi \cos \omega \xi + \right. \\ & + \frac{2}{\omega^5} (1 - \omega) \xi \sin \omega \xi - \frac{4}{\omega^5} \cos \omega \xi - \frac{2(1 + 2\omega)}{\omega^6} \sin \omega \xi + \\ & \left. + \frac{1}{20} C_1 \xi^5 + \frac{1}{12} (C_2 - 2C_1) \xi^4 + \frac{1}{3} (C_1 - C_2) \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

(3.46) шектік шартқа қою арқылы:

$$\left. \begin{aligned} W/\xi=0=0; \quad \frac{dW}{d\xi}/\xi=0=0, \quad W(\tau)/\tau=0=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=0=0 \\ \frac{d^2 W}{d\xi^2}/\xi=1=0, \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3}/\xi=1=0, \quad W(\tau)/\tau=1=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=1=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

мұнда $\tau - P_{\text{крит}}(t)$ немесе уақыт функциясы болып табылатын амплитуда вариациясы:

$$\begin{aligned} W(\xi) = & \frac{1}{90} \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} [60\omega^2 \xi^2 \sin \omega \xi + 120\omega \xi \cos \omega \xi + \\ & + 120\omega(1 - \omega) \xi \sin \omega \xi - 240\omega \cos \omega \xi - 120(1 + 2\omega) \sin \omega \xi + \\ & + 3(\omega^5 \cos \omega) \xi^5 + 5\omega^4 (\sin \omega - 3\omega \cos \omega) \xi^4 \\ & + 20\omega^4 (2\omega \cos \omega - \sin \omega) \xi^3 + 60\omega^4 (\sin \omega \\ & - \omega \cos \omega) \xi^2 + \\ & + 120\omega^2 (1 - \omega) \xi + 240\omega] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Егер осы (III_b) тендеулер жүйесін сәйкесінше [0,1; 0,3] аралығында шектік шарттар қоя отырып шешетін болсақ:

$$\left. \begin{aligned} W/\xi=0,1=0; \quad \frac{dW}{d\xi}/\xi=0,1=0, \quad W(\tau)/\tau=0=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=0=0 \\ \frac{d^2 W}{d\xi^2}/\xi=0,3=0, \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3}/\xi=0,3=0, \quad W(\tau)/\tau=1=0, \quad \frac{dW}{d\tau}/\tau=1=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Мұндағы $\tau - P_{\text{крит}}(t)$ немесе уақыт функциясы болып табылатын амплитуда вариациясы, шартты ескере отырып:

$$\varepsilon(\xi) = \frac{D}{1 - \xi + \frac{\xi^2}{2}}; \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3} = - \frac{[(\xi-1)^2+1]^2 - 4\xi(\xi-1)}{2(\xi-1)[(\xi-1)^2+1]} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \quad (3.58)$$

аламыз:

$$\begin{aligned} W(\xi) = & 4/3 \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left\{ \left[\frac{\omega^2 - 2\omega - 6}{\omega^6} \sin \omega \xi \right. \right. \\ & - \frac{2}{\omega^6} \cos \omega \xi + \\ & + \frac{\omega - 1}{\omega^5} \xi \sin \omega \xi + \frac{3}{\omega^5} \xi \cos \omega \xi + \frac{1}{2\omega^4} \xi^2 \sin \omega \xi + \left[\frac{6\omega - 1}{6\omega^3} \sin \frac{\omega}{3} + \right. \\ & + \frac{14\omega^2 - 21\omega - 81}{54\omega^3} \cos \frac{\omega}{3} \left. \right] \xi^3 + \left[\frac{2\omega^2 + 9\omega - 18}{9\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} - \right. \\ & - \frac{14\omega^2 - 21\omega + 18}{54\omega^3} \cos \frac{\omega}{3} \left. \right] \xi^2 + \left[\frac{1,1\omega + 1}{\omega^5} \sin \frac{\omega}{10} - \right. \\ & - \frac{1,12\omega^2 - 2,1\omega - 3}{\omega^5} \cos \frac{\omega}{10} - \frac{0,67\omega^2 + 1,755\omega + 3,6}{9\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} + \\ & + \frac{1,19\omega^2 - 1,785\omega + 3,015}{27\omega^3} \cos \frac{\omega}{3} \left. \right] \xi - \frac{1,26\omega^3 - 2\omega - 6}{\omega^6} \sin \frac{\omega}{10} \\ & - \frac{0,112\omega^3 - 0,21\omega^2 - 0,6\omega + 2}{\omega^6} \cos \frac{\omega}{10} \\ & - \frac{0,42\omega^2 - 0,087\omega - 0,38}{9\omega^4} \sin \frac{\omega}{3} - \\ & \left. - \frac{0,056\omega^2 - 0,084\omega + 0,171}{27\omega^3} \cos \frac{\omega}{3} \right\} \quad (3.59) \end{aligned}$$

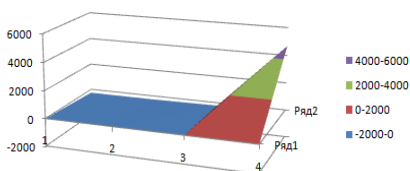
Мұнда (N, Q) – резервуардың симуляционды моделінің кесе-көлденең қимасының қатпары түрінде келтірілген анизотропты сипаттамасы, $\gamma = \frac{1}{2} \frac{\pi h}{L}$ – көлденең бағыттағы жартылай толқын саны, $\omega = \frac{n\pi R}{L}$ – бойлау бағыттағы жартылай толқын саны, $\xi = 0,6$ и $\xi = 1,0 \lambda_k^1 = \{1$ (В.В. Новожилов), $2/3$

(А.Н. Бузь), $1/3$ (М.А. Био), $1 + \frac{1}{3} \left(1 - 4 \frac{N}{Q}\right)$ (А.С. Лейбензон, А.Ю. Ишлинский)} беттік қабаттың шектік шарттары бойынша анықталады; сызықты емес деформациялық сұрақтар бойынша, h – қалыңдық; L – ұзындық; R – мұнай қоспасы резервуарының ішкі радиусы;

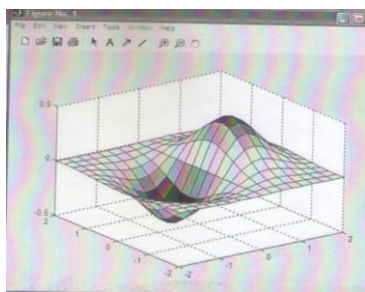
$m_u = D \frac{d^2 W}{d\xi^2}$ – серпімділік облысының иілу моменті, Δm_u – серпімділік облысындағы иілу моментінің өзгерісі.

Сандық есептеулер

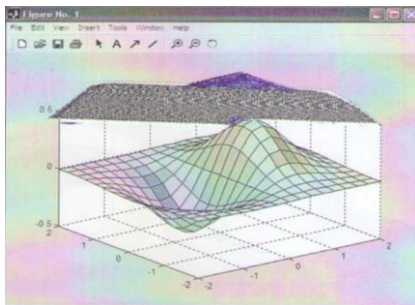
37 және 41-суреттерде мұнай қоспасының резервуардың толықсуы және ағуы аяқталған соң орналасуы, $W = W(\xi, \lambda_k^1)$, $\frac{N}{Q} = 0,5$, $k = 3$ функциясынан тәуелді резервуардағы қоспаның нығаюы; көп қатпарлы пластың газсыз бөркіндегі резонанс шарты кезіндегі резервуардағы қоспаның нығаюы, балшық типтес көп қатпарлы пластың газдық бөркі және табаны; жергілікті активті сыртқы және ішкі критикалық қысымға қатысты толтырғыш резонансының шабуылы көрсетілген.



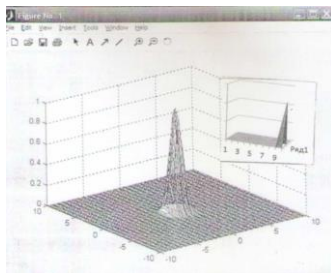
37-сурет. Мұнай қоспасының резервуардың толықсуы мен ағуы аяқталған соң орналасуы.



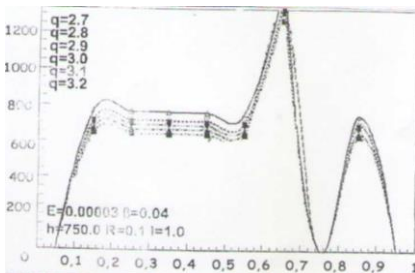
38-сурет. Көп қатпарлы пластың газсыз бөркіндегі резонанс шарты кезіндегі резервуардағы қоспаның нығаюы.



39-сурет. Көп қатпарлы пластың бөркіндегі резонанс шартындағы резервуардағы қоспаның нығаюы.



40-сурет. Толтырғыштың тек жергілікті активті сыртқы және ішкі критикалық жүктеме түріне байланыстырезонанс шабуылы $\omega_n^2 = m^2 \omega^2, m = 1, 2, 3, \dots, n$.



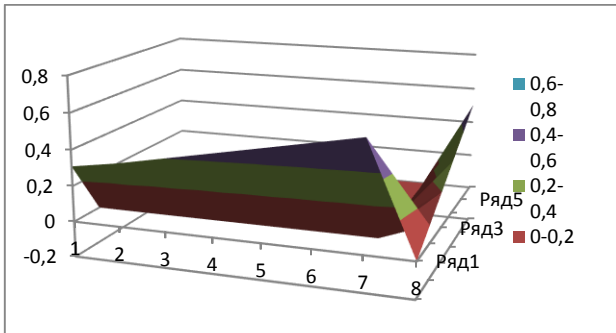
41-сурет. Толтырғыштың бір уақытта жергілікті активті сыртқы және ішкі критикалық жүктеменің және тіректің соғу түріне байланыстырезонанс шабуылы $\omega_n^2 = m^2 \omega^2, m = 1, 2, 3, \dots, n$.

37 және 41-суреттерде резервуардағы мұнай-газ қоспасының толықсуы келтірілген, көлденең қимасының формасы төмендегі функцияға конусоидальтәуелді

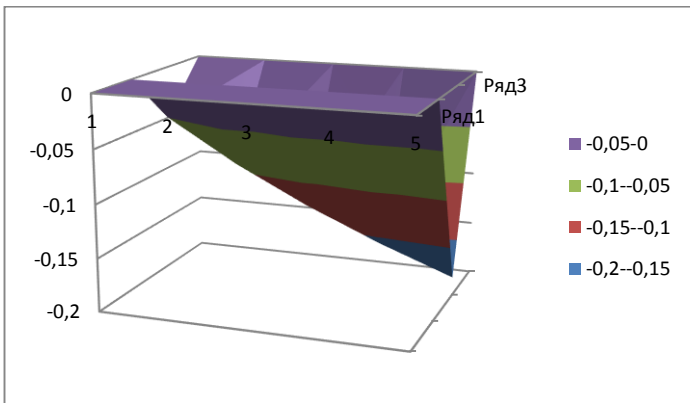
$$W = W(\xi, \gamma^2), \quad W = W(\gamma_1^2, \lambda_k^1), \quad W = W(\lambda_k^1, \omega), \\ W = W\left(\omega, \frac{N}{Q}\right), \quad W = W\left(\varepsilon, \frac{N}{Q}\right), \quad t = f(\eta, k) \quad (3.60)$$

(3.39) формуласынан жүйенің екінші теңдеуі және (3.40) келесі түрде берілгенде:

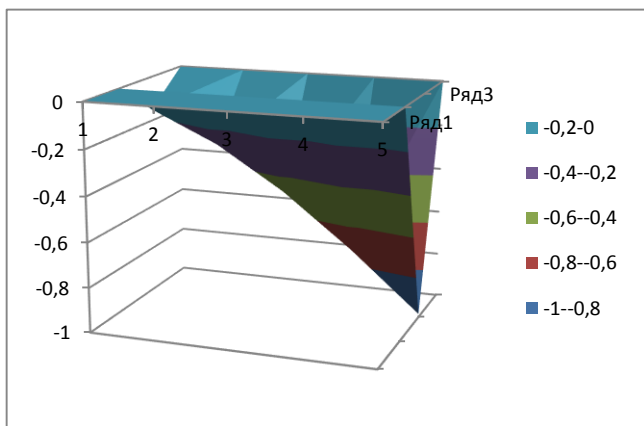
$$\begin{aligned}
 \frac{N}{Q} &= \{0,7; 1; 1,13; 4,35; 5,0; 6,2; 6,4; 6,76; 7,45\} \\
 \gamma^2 &= \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\} \lambda_k^1 \\
 &= \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1, 1 + \frac{1}{3} \left(1 - 4 \frac{N}{Q} \right) \right\} \\
 \omega &= \{2; 3; 4\} \frac{\eta}{\kappa} = \left\{ \frac{1}{3}; 0,4; 0,5; 0,6; \frac{2}{3} \right\} \\
 k &= \{9,8; 13,8\} c - const
 \end{aligned} \tag{3.61}$$



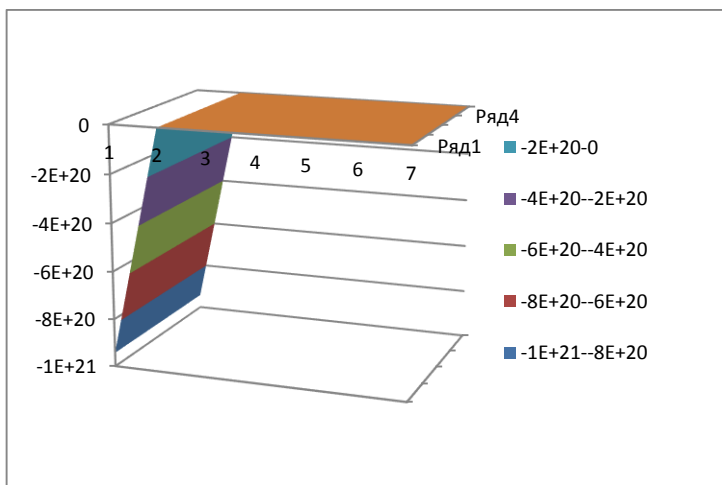
42-сурет. $W = W(\xi, \gamma^2)$ функциясына тәуелді резервуар коспасының нығаюы.



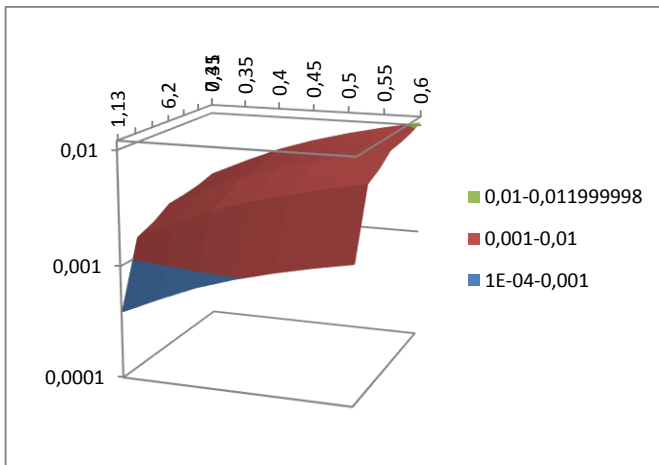
43-сурет. $W = W(\gamma^2, \lambda_k^1)$ функциясына тәуелді резервуар коспасының нығаюы.



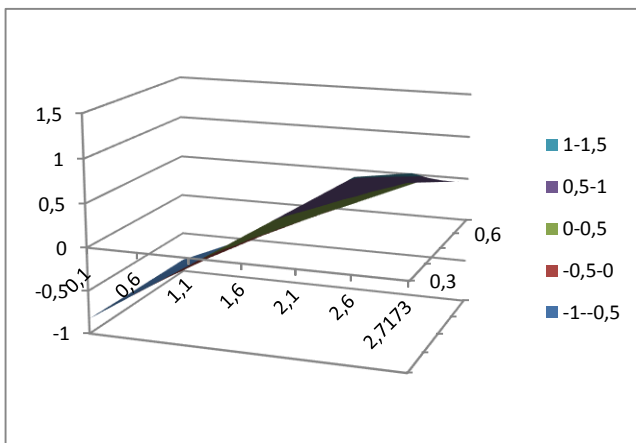
44-сурет. $W = W(\lambda_k^1, \omega)$
 функциясына тәуелді резервуар қоспасының нығаюы.



45-сурет. $W = W(\frac{N}{Q}, \omega)$
 функциясына тәуелді резервуар қоспасының нығаюы.



46-сурет. $W = W\left(\frac{N}{Q}, \xi\right)$ функциясына тәуелді резервуар коспасының нығаюы.



47-сурет. Серпінді-тұтқыр қарсылықтың физикалық сипаттамаларына байланысты өзгерісі.

42–47-суреттерде резервуардағы мұнай-газ қоспасының толықсуы келтірілген, көлденең қимасының формасы төмендегі функцияға тәуелді градири

$$W = W(\xi, \gamma^2), \quad W = W(\gamma^2, \lambda_k^1), \quad W = W(\lambda_k^1, \omega),$$

$$W = W\left(\omega, \frac{N}{Q}\right), \quad W = W\left(\varepsilon, \frac{N}{Q}\right), \quad t = f(\eta, k) \quad (3.62)$$

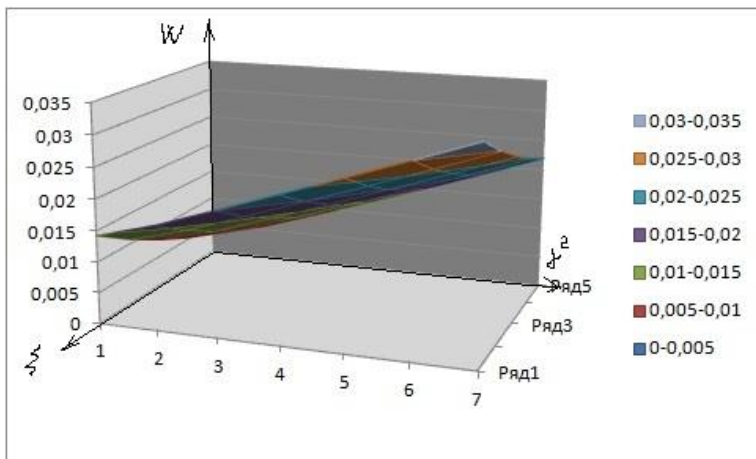
((III_b)) формуласынан (екінші теңдеулер жүйесі) және келесі деректер арқылы (3.62):

$$\frac{N}{Q} = \{0,7; 1; 1,13; 4,35; 5,0; 6,2; 6,4; 6,76; 7,45\}$$

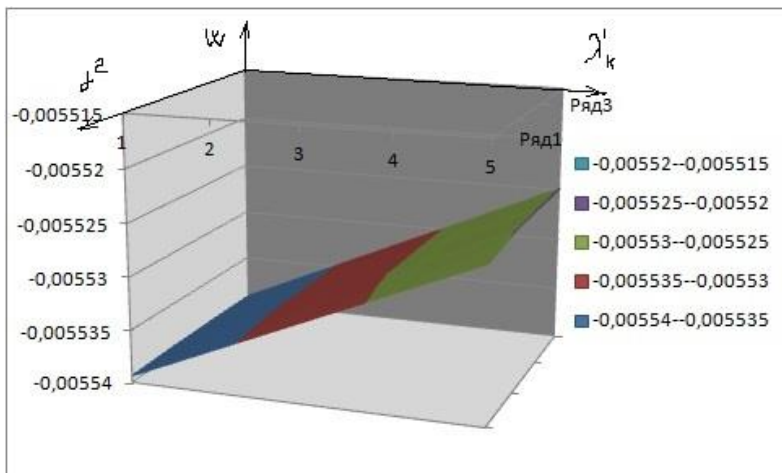
$$\gamma^2 = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\} \lambda_k^1 = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 1 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4N}{Q}\right)\right\}$$

$$\omega = \{2; 3; 4\} \frac{\eta}{\kappa} = \left\{\frac{1}{3}; 0,4; 0,5; 0,6; 2/3\right\}$$

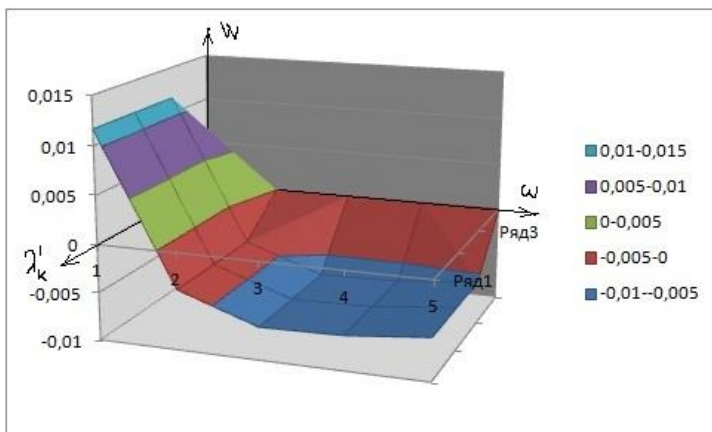
$$k = \{9,8 - 13,8\}, \quad C = const$$



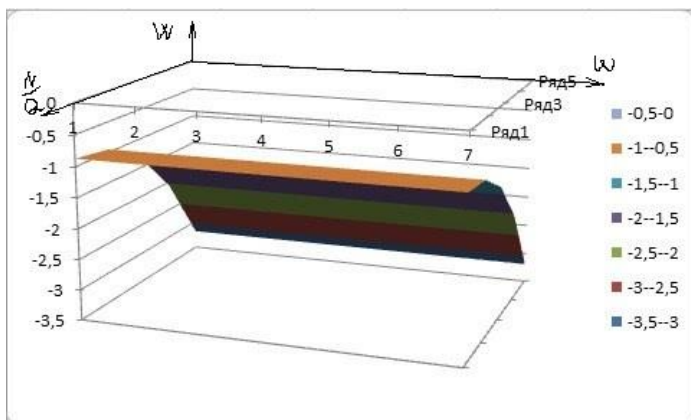
48-сурет. $W = W(\xi, \gamma^2)$ функциясына тәуелді резервуар қоспасының нығаюы.



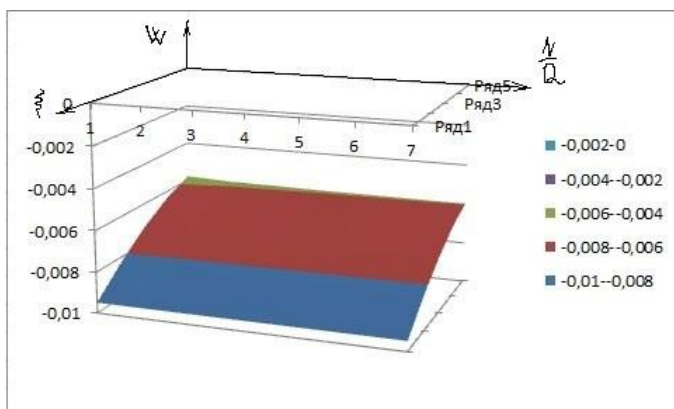
49-сурет. $W = W(\gamma^2, \lambda_k^1)$ функциясына тәуелді резервуар коспасының нығаюы.



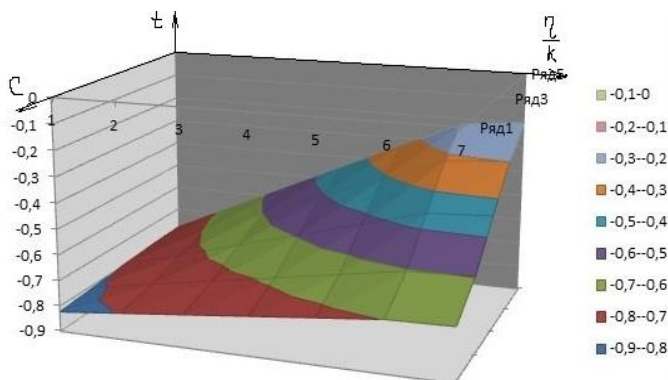
50-сурет. $W = W(\lambda_k^1, \omega)$ функциясына тәуелді резервуар коспасының нығаюы.



51-сурет. $W = W\left(\frac{N}{Q}, \omega\right)$ функциясына тәуелді резервуар қоспасының нығаюы.



52-сурет. $W = W\left(\frac{N}{Q}, \xi\right)$ функциясына тәуелді резервуар қоспасының нығаюы.



53-сурет. Серпімді-тұтқыр қарсылықтың физикалық сипаттамаларына байланысты өзгерісі.

3.4. Бройля толқындар түріндегі жиын фронтының соққы импульсі әртүрлі композиттік материалдардан жасалған конструкцияға әсер етуінің модельдері және нысана тербелісі

Есептің қойылымы

1.1. Айнымалы параметрлі жіңішке түтікшелі конструкцияны қарастырамыз. Жақтау шеттері және түбі әртүрлі модульдік байланысу модулі арқылы келтірілген әртүрлі материалдардан жасалған. Сонымен бірге ығысқан, сығылған білік сығымдаушы жүктеме және соққы импульсі кезінде серпімділік аймағынан тыс иілгіш жіпке айналады. Мұндай конструкцияның тасымалдаушы қасиетін анықтау үшін деформацияның рұқсат етілген мәндері торапта және жүктеме кезінде шектік шарттармен беріледі. Материал түбінің шығымы $m = \pi(D^3 - d^2)l\rho$ формуласымен анықталады, мұндағы D – байланыс әсері ізтаңбаларының диаметрі, ρ – ұзындығы, l – конструкцияның кесе-көлденең кимасының сопақ түріндегі бейнесінің тығыздығы.

Онда байланыс әсері жүктемесі жүктеме және жіңішке конструкция механикасы принципі шеңберіндегі сыртқы және ішкі күштер арасындағы байланыстың теориялық схемасының

ықпалын [1]–[4] математикалық моделін төмендегідей түрде жазамыз:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + 2B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = q_k$$

$$\text{мұндағы } q_k = \lambda_k \frac{N}{Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda'_k \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}}, \quad \varepsilon(x) = \frac{D}{x}$$

λ_k – ізтаңба кесе-көлденең қимасы формасының коэффициенті, β – Коссераконтинуумы коэффициенті, N, Q – материалдың анизотропты сипаттамасы, γ – бойлау бағыттағы жартылай толқын саны, λ'_k – сызықты емес деформациялық жүйелер формаларының коэффициенті, h – қалыңдық, R – байланыс әсері ізтаңбасының ең аз радиусы.

(1) дифференциалдық тендеудің жалпы шешімі [5]:

$$w(x) = \frac{1}{12} \left(4x^3 - 12 \frac{D}{B} x \right) + \frac{1}{4} (C_1 x^2 + 2C_2 x) + 4C_3 \int e^{-\frac{B}{D} x^2} dx - \\ - \frac{1}{2} C_1 \int e^{-\frac{B}{D} x^2} \left(\int e^{\frac{B}{D} x^2} dx \right) dx + C_4$$

Негізінен бірінші жуықтау кезінде:

$$w(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{D}{B} x + \frac{1}{4} \left(x^2 - 2 \frac{B}{HB} sh \beta x \right) C_1 + \frac{1}{2} C_2 x + 2B C_3 \sqrt[4]{\frac{1}{k(HB)^3}} sh \beta x + C_4 \quad (3.63)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{HB}{\kappa}}.$$

Жүктеме әсерінен жақтаудағы шектік шарттар:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{q_k}{2D} \quad (3.64)$$

$$w(x)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.65)$$

(3.63)-ті (3.64)және(3.65) кою арқылы C_1, C_2, C_3, C_4 тұрақтыларын анықтаймыз. Содан соң алынған мәндерді жалпы шешімге (3.63)кою арқылы төменгі шешімді табамыз:

$$w(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4} \left[4L + \frac{1}{\beta} \left(\frac{q_k}{D} - 4 \right) sh\beta L \right] x^2 + \left[\frac{2}{\beta^2} + \frac{2B}{k} \frac{1}{\beta^3} \left(L - \frac{1}{\beta} sh\beta L \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{B}{HB} (sh\beta L + \beta L) - \frac{q_k}{2D} \left(\frac{B}{HB} sh\beta L - \frac{B}{k} \frac{1}{\beta^4} sh\beta L + \frac{1}{\beta^2} \right) \right] x + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^3} \left(\frac{q_k}{D} - 4 \right) sh\beta x$$

$$\text{мұндағы } \beta = \left\{ \sqrt[4]{0,685}, \sqrt[4]{0,706} \right\}, \quad \frac{q_k}{D} = \{1; 0,0125; 0,125\};$$

$$\frac{B}{k} = \left\{ 0,045 \cdot \sqrt[4]{(0,685)^3}; 0,045 \cdot \sqrt[4]{(0,706)^3} \right\}$$

$$\frac{B}{HB} = \left\{ 0,6375 \cdot \sqrt[4]{(0,685)^3}; 0,0657 \cdot \sqrt[4]{(0,706)^3} \right\}, \quad L = 10.$$

1.2. Жинақталған ығыстырушы күш әсерінен түтікшелі конструкцияның түбі мен торапкаркасының байланыс аумағын есептеу.

Негізінен алғанда, конструкция материалының комплексті аққыштығы Коссерконтинуумы түбінің массасының төмендеуі коэффициентіне әсер етпейтін болса, онда математикалық моделі (I) түрінде болады:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q_k, \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{x}$$

Келесі шектік шарттарда:

$$C_1=C_2=0; \quad w(x)|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.66)$$

Дербес шешімі:

$$w(x) = \frac{q^k}{40D} (x^5 - 5L^4x + 4L^5) \quad (3.67)$$

(3.67) болатын формуласын қосымша бағдарламалық өнімдерді келесі есептерге қою арқылы есептейді.

Тапсырма 1. $\frac{q_k}{120D}$ болғанда функция графигін тұрғызу.

$$L = 10; \quad \lambda_k = \frac{8}{3}; \quad \gamma^2 = 0,2; \text{ кезінде;}$$

$$\lambda'_k = 1; \quad \gamma = 0,45; \quad \frac{N}{Q} = \{11, 13, 5\} \text{ яғни,}$$

$$w(x) = x^5 - 50 \cdot 10^3 x + 40 \cdot 10^4$$

Тапсырма 2. Материал түбінде $AG-4C$ с ПН-3 бар болған жағдайда функция графигін тұрғызу.

$$\lambda_k = \frac{8}{3}; \quad \gamma^2 = 0,2;$$

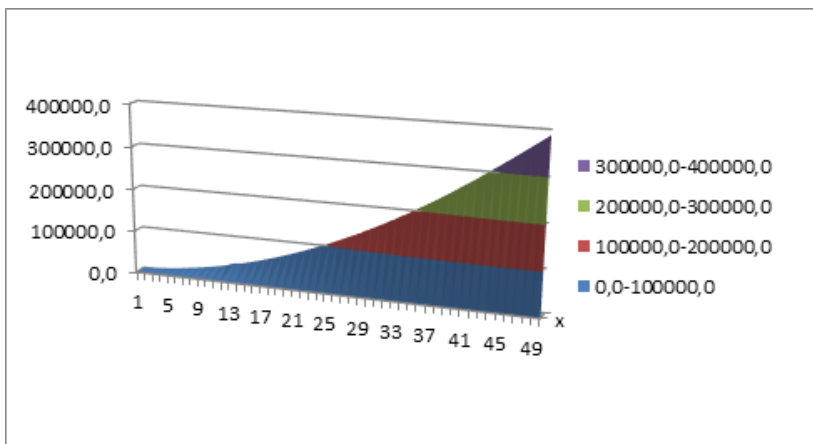
$$\lambda'_k = 1; \quad \frac{N}{Q} = \{11, 13\}; \quad \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} = \{0,005; 0,001\}$$

Тапсырма 3. Материал түбінде каст-В, ПН-3бар болған жағдайда функция графигін тұрғызу.

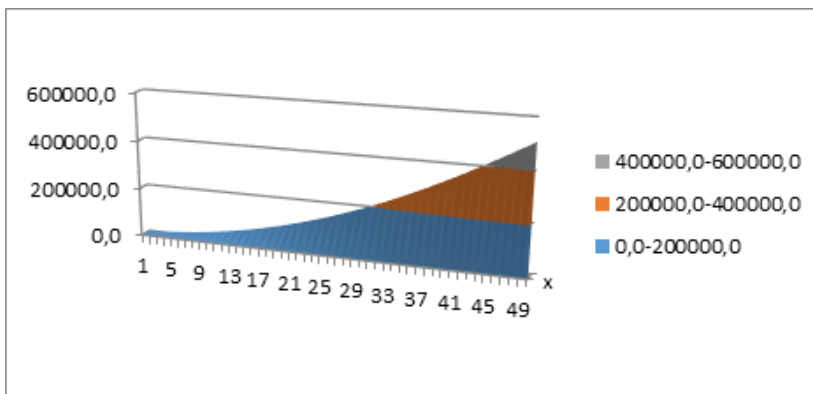
$$\lambda_k = \frac{8}{3}; \quad \gamma^2 = 0,2;$$

$$\lambda'_k = 1; \quad \frac{N}{Q} = 5; \quad \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} = \{0,005; \dots 0,001\} \text{ яғни,}$$

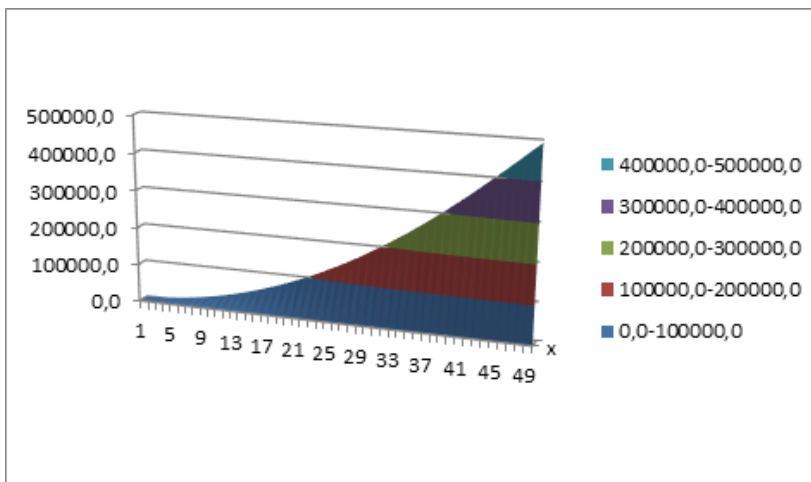
$$w(x) = \frac{1}{18} \left(x^5 - 5 \cdot 10^4 x + 4 \cdot 10^5 \right) \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \quad (3.68)$$



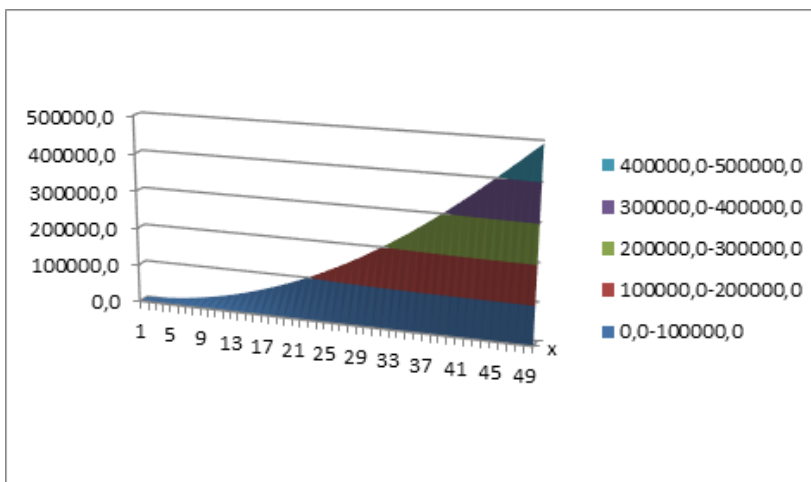
54-сурет. $\frac{N}{Q} = \{11, 13, 5\}$ болса, торап каркасы және түбіндегі байланыс аумағын есептеу.



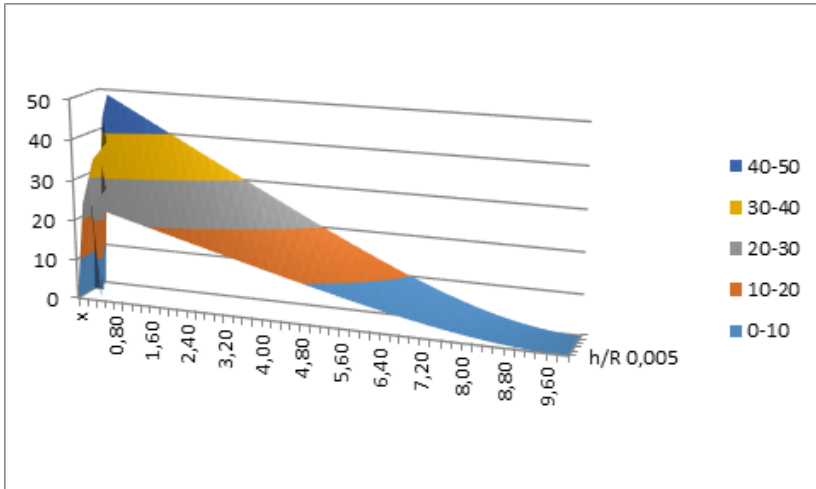
55-сурет. $\frac{N}{Q} = \{11, 13\}$ болса, торап каркасы және түбіндегі байланыс аумағын есептеу.



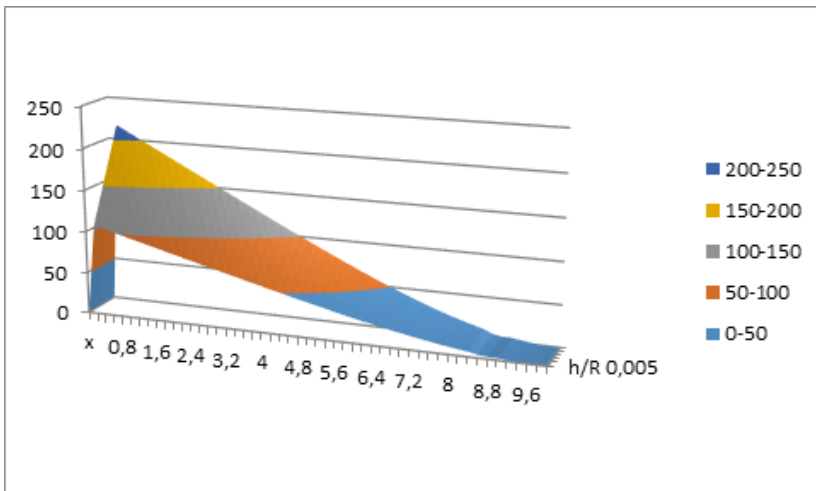
56-сурет. $\frac{N}{Q} = 5$ болса, торап каркасы және түбіндегі байланыс аумағын есептеу.



57-сурет. $\frac{q_k}{120D}$ бөлігінде торап каркасы және түбіндегі байланыс аумағын есептеу.



58-сурет. $AG-4C$, $PN-3$ болғанда торап қаркасы және түбіндегі байланыс аумағын есептеу.



59-сурет. Торап қаркасы және түбіндегі байланыс аумағын есептеу $Ast-B$, $PN-3$.

Қорытынды:

1. Есептеу нәтижелері 54–56-суреттерде келтірілген, $\frac{B}{K}$, $\frac{B}{HB}$, $\frac{q_k}{D}$ параметрлері серпімді-тұтқыр аумақтағы ықшамдаушы әсер торап контурының жылжу шамасына айтарлықтай әсер ететінін көрсетеді.

2. 57–59-суреттерінен жинақталған ығыстырушы күштің үлкен мәніне каркас торабындағы және түбіндегі байланыс аумағы контуры жылжуының аз мәні сәйкес келетінін, сол арқылы Коссераконтинуумы негізіндегі материал түбінің деформациялық қасиетіне және төзімділігіне айтарлықтай әсер ететінін көруге болады.

3. Байланыс аумағы контуры жылжуының конструкция материалының комплексті аққыштығына тәуелділігі оның ықшамдаушы әсері мен ығыстырушы импульс әрекетін ескере отырып, түбінің масса жоғалту коэффициентіне байланысты екенін көруге болады.

4. Жіңішке конструкцияның есептеулерінде көрсетілгендей, материал спайкасының ең көп шығымы материал матрицасының қаттылығының өзгеру жағдайына Бринеллю бойынша ізтаңба диаметрі мен соққы импульсіне жұмсалады екен.

3.5. Серпімді біртұтас тығыз орта механикасы теориясындағы есептердегі интегралдық түрлендіру

Фурье түрлендіруі

Кез келген бір $f(x)$ функциясын $(-\infty, +\infty)$ берілген аралығында Фурье қатарына түрлендіру деп төмендегі интегралды айтады:

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (3.69)$$

мұнда λ – негіздік сан.

$\bar{f}(\lambda)$ Фурье түрлендіруін жүзеге асыру үшін $f(x)$ функциясы кез келген шектік аралықта құрақты-үзіліссіз және $(-\infty, +\infty)$ берілген аралықта абсолютті интегралдануы керек.

$f(x)$ функциясы үшін кез келген шектік аралықта Дирихле шартын қанағаттандыратын үзіліссіздік нүктелерінде оны Фурье формуласына келтіру дұрыс болып табылады:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.70)$$

$f(x)$ функциясы Фурье арқылы түрлендірілетін функция.

(3.69)–(3.70) формуласын жұп функциялар үшін былай жазуға болады:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi, \quad -\infty < x < +\infty,$$

Сонымен қатар төмендегідей формада да жазуға болатын

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda$$

Дирихле шартын кез келген ашық $0 < x < A$ аралығында қанағаттандыра-тын және $(0; \infty)$ аралығында абсолютті интегралданатын функция үшін жіктелуі, яғни Фурье интегралы $(-\infty < 0 < +\infty)$ былай болады:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x, \quad f_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x, \quad (3.73)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(\lambda) \sin \lambda x, \quad f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x.$$

Фурье интегралдық түрлендіруінің көмегімен серпімділік теориясының кейбір екі өлшемдік шектік есептер класының дәл эффектiлiк шешiмдерi берiлуi мүмкiн жартылай кеңiстiк, шексiз жолақ және дөңгелек айшық үшiн қарастырамыз.

Қазiр шектерiнде жүктеме немесе орын ауыстыру болған жағдайдағы шексiз жолақтың тепе-теңдiгiнiң кеңiстiк есептерi, екi дөңгелек цилиндрдiң қиылысуы негiзiнде пайда болған призманың айналуы және майысуы, дөңгелек айшықтың сыртқы және iшкi бейнесi үшiн серпiмдiлiк теориясы бойынша жазықтық есебi, сонымен қатар шексiз жолақ немесе дөңгелек айшық формасына ие серпiмдi жiңiшке плиталардың майысуы қарастырылады.

Шексiз жолақ үшiн серпiмдiлiк теориясының жазықтықтағы есебi

1. Жарты кеңiстiктiң серпiмдiлiк тепе-теңдiгi.

Егер шексiз жолақ облысының контурына сыртқы күш түсiп тұрса, онда шексiз жолақ үшiн серпiмдiлiк теориясының жазықтықтағы статистикалық есептерiн шығару үшiн жүктеме кезiндегi серпiмдiлiк теңдеулерiне және шектiк шартты есептерге Фурье интегралдық түрлендiрулерiн қолданған тиiмдi.

Әдiстiң түсiндiрмесiн серпiмдi жартылай жазықтықтың неғұрлым қарапайым жағдайын қарастырудан бастаймыз. Контур бойынша жүктелген, сонымен қатар тiк бұрышты координаталарында дене $y \geq 0$ облысын алады. Онда есеп айқын түрде $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$ кернеулерi тепе-теңдiк теңдеулерiнен тұратын интегралдық жүйеде болады:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (3.71)$$

және сабақтастық шарты

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.72)$$

Шектiк шарттар кезiнде

$$\sigma_y|_{y=0} = f(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = g(x) \quad (3.73)$$

мұндағы f, g – берiлген функциялар.

Сонымен қатар кернеу өзінің бастапқы туындыларымен шексіздікте нөлге ұмтылады.

Кернеудің қарапайым формуларымен Фурье түрлендіруін енгізсек, онда

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x e^{i\lambda x} dx, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy} e^{i\lambda x} dx \quad (3.74)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x e^{i\lambda x} dx,$$

(3.71)–(3.72) теңдеулерін $e^{i\lambda x}$ -ке көбейтіп және x бойынша $-\infty -$ ден $+\infty$ -ге дейін интегралдау арқылы теп-теңдік жүйесін аламыз, яғни бөліктеп интегралдаған соң, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\sigma}_y$ шамаларына қатысты қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі шығады:

$$\begin{aligned} -i\lambda \bar{\sigma}_x + \bar{\tau}_{xy} &= 0, \\ -i\lambda \bar{\tau}_{xy} + \bar{\sigma}_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)'' - \lambda^2 (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0.$$

(3.75) жүйесі шектік шарттарда шешілуі тиіс:

$$\bar{\sigma}_y|_{y=0} = f(\lambda), \quad \bar{\tau}_{xy}|_{y=0} = g(\lambda) \quad (3.76)$$

Бұл Фурье формуласы бойынша (3.73) шартымен түрлендірілуден алынған. Ескере кететін жағдай: ары қарай да біз шектік функциялармен берілген Фурье түрлендіруін, сонымен бірге ізделінетін шама да бар деп болжам жасауды жалғастыра береміз.

Ескерту (3.75) теңдеуінен $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\sigma}_y$ шамалары бойынша формула көмегімен

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{1}{\lambda^2} \bar{\sigma}_y'', \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i\lambda} \bar{\sigma}_y' \quad (3.77)$$

$\bar{\sigma}_y$ функциясы үшін төртінші дәрежелі теңдеуге келтіреміз:

$$\bar{\sigma}_y^{IV} - \lambda^2 \bar{\sigma}_y'' + \lambda^4 \bar{\sigma}_y = 0 \quad (3.78)$$

Шексіз шарттарына сәйкес функцияны таңдау арқылы (3.78) теңдеуінің жалпы интегралы:

$$\bar{\sigma}_y = [A(\lambda) + B(\lambda)]e^{-|\lambda|y}$$

және (3.76) шектік шарттарын қанағаттандыра отырып, A және B шамаларының келесі мәндерін табамыз: $A = \bar{f}$, $B = \bar{f} + \frac{\lambda}{|\lambda|}i\bar{g}$, содан соң түрленген кернеу үшін өрнек келесі түрге ие болады:

$$\bar{\sigma} = \left[(1 - |\lambda|y)\bar{f} + \left(2\frac{\lambda}{|\lambda|} - \lambda y \right) i\bar{g} \right] e^{-|\lambda|y},$$

$$\bar{\tau}_{xy} = [i\lambda y\bar{f} + (1 - |\lambda|y)\bar{g}]e^{-|\lambda|y},$$

$$\bar{\sigma}_y = [(1 + |\lambda|y)\bar{f} + \lambda y i\bar{g}]e^{-|\lambda|y}$$

Қойылған есептің соңғы шешімі Фурье түрлендіру формуласының көмегімен алынады. Мысалы, σ_x кернеуі үшін:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x e^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1 - |\lambda|y)\bar{f} + \left(2\frac{\lambda}{|\lambda|} - \lambda y \right) i\bar{g} \right] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda x} d\xi \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2\frac{\lambda}{|\lambda|} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{-i\lambda x} d\xi + \frac{i}{2\pi} \end{aligned}$$

Интегралдау дәрежесінің орын ауыстыру мүмкін деп алып,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \sin \lambda(x - \xi) d\lambda,\end{aligned}$$

онда λ айнымалысы бойынша квадратура алған соң, бірінші дәрежелі интеграл түріне келеді:

$$\sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x - \xi)g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} (x - \xi)^2 d\xi \quad (3.79)$$

сәйкесінше келесі кернеулер үшін формулалар аламыз:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x - \xi)g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} (x - y)y d\xi \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x - \xi)g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} y^2 d\xi.\end{aligned} \quad (3.80)$$

Осылайша сыртқы кернеу жағдайында қойылған есептің шешімінің нақты квадратурасы алынды. Тікелей тексеру кезінде (3.79)–(3.80) өрнегі барлық шарттарды қанағаттандыратынына көз жеткізу қиын емес.

Жинақталған күштердің (N, T) құраушысымен координаталар басында қойылған шарттар негізінде біздің формуларға қою арқылы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\xi) d\xi = N, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(\xi) d\xi = T,$$

аламыз:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2x^2}{\pi} \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}, & \tau_{xy} &= \frac{2xy}{\pi} \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y &= \frac{2y^2}{\pi} \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

2. Шексіз жолақ үшін серпімділік теориясының бірінші негізгі есебі.

Шексіз жолақтың шектеріне қойылған күшпен серпімді тепе-теңдік жағдайын қарастырамыз ($-\infty < x < +\infty, |y| \leq b$).

Есеп (3.71)–(3.72) интегралдық теңдеулерінің серпімділік теориясының кеңістік есебінен тұрады, жолақ шектеріне $y = \pm b, \sigma_y$ және τ_{xy} кернеулері қойылған.

Алдыңғы параграфта көргеніміздей, тепе-теңдік және бірыңғайлық теңдеулеріне интегралдық Фурье түрлендіруін қолданамыз, яғни (3.77) формуласы $\bar{\sigma}_y$ кернеуіне қатысты, $\bar{\sigma}_x$ және $\bar{\tau}_{xy}$ шамаларын $\bar{\sigma}_y$ арқылы өрнектелген (3.78) қарапайым төртінші ретті дифференциалдық теңдеуге әкеледі.

Есептеуге қолайлы болу үшін қойылған есепті екіге бөлеміз:

Y координатасы бойынша симметрикалық және антисимметрикалық, бірінші жағдайды қарастырудан бастаймыз: σ_y кернеуінің шектік мәні y координатасы бойынша симметрикалық болып, ал τ_{xy} кернеуінің шектік мәні y бойынша антисимметрикалық болсын. Сонда жолақтың қарама-қарсы шектік нүктелерінде ($x = x_0, y = \pm b$) кернеу бірдей мәнге ие болады, оған қоса қалыпты кернеулер қарама-қарсы бағытта болады, сол уақытта жанама кернеулер бір бағытта бағытталады.

Әрине, жолаққа түсірілген сыртқы күштер

$$\sigma_y|_{y=\pm b} = f(x), \tau_{xy}|_{y=\pm b} = \pm g(x)$$

қанағаттандырады деп болжау жасауға болады; бұл сол сәтте төмендегі шартқа алып келеді:

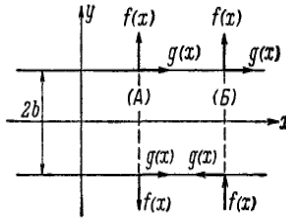
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 0 \quad (3.81)$$

Есептің шешіміне келсек, (3.78) теңдеуінің жалпы шешімін функция ретінде, y жұп координатасы бойынша аламыз

$$\bar{\sigma}_y = A(\lambda)ch\lambda y + B(\lambda)sh\lambda y$$

және жолақтың жоғарғы бөлігін қарастыра отырып ($0 \leq y \leq b$), шектік шарттар бойынша Фурье түрлендіруінен A және B мәндерін табамыз:

$$\bar{\sigma}_y|_{y=b} = \bar{f}(\lambda), \quad \bar{\tau}_{xy}|_{y=b} = \bar{g}(\lambda), \text{ сәйкесінше (3.77)}$$



60-сурет

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} [Ash\lambda y + B(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)] \quad (3.82)$$

Онда A және B белгісіздері үшін келесі теңдеулер жүйесі:

$$\begin{aligned} Ach\mu + B\mu sh\mu &= \bar{f}, \\ Ash\mu + B(\mu ch\mu + sh\mu) &= \bar{g} \end{aligned}$$

Осыдан

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{\bar{f}(\mu ch\mu + sh\mu) - \bar{g}i\mu sh\mu}{sh2\mu + 2\mu} \\ B &= 2 \frac{-\bar{f}sh\mu + \bar{g}ich\mu}{sh2\mu + 2\mu} \end{aligned}$$

мұндағы

$$\mu = \lambda b$$

Осылайша, қойылған есептің жалпы шешімі төменгі формулалармен беріледі

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + B(\lambda ysh\lambda y + 2ch\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ash\lambda y + B(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + B\lambda ysh] e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.98)$$

$\lambda = 0$ нүктесінде интегралданатын шешімнен алынған кірістің жинақтылығын зерттейміз, (3.82) формуласындағы бөлгіш нөлге айналады деп қарастырамыз (жинақтылық $\lambda \rightarrow \pm\infty$ айқын).

$\lambda=0$ болған кездегі жинақтылық шарты $A(0)$ және $B(0)$ шамаларының шектелуін талап ететінін көру қиындық туғызбайды, ол өз кезегінде мына шартқа әкеледі

$$\bar{g}(0) = 0 \quad (3.83)$$

Бірақ

$$\bar{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\lambda x} dx$$

Онда соңғы шарт орындалады немесе статика шарттармен (3.7) сәйкес келеді.

Сәйкесінше антисимметриялық есептің нақты шешімін аламыз, σ_y кернеуінің шектік мәні y координатасы бойынша антисимметрикалық болғанда, ал τ_{xy} кернеуінің шектік мәні y бойынша симметриялық болады.

Статика шарты бұл жағдайда төмендегі түрде болады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [xf(x) - bg(x)] dx = 0$$

Сонымен бірге келесі түрде де жазылады:

$$\bar{f}(0) = 0, \quad \left. \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = ib\bar{g}(0) \quad (3.84)$$

σ_y кернеуі y айнымалысы бойынша $0 \leq y \leq b$ облысында тақ функциясы деп қарастырып отырғандықтан, онда (3.81) теңдеуінің жалпы интегралын келесі түрде таңдағанымыз дұрыс болады:

$$\bar{\sigma}_y = C(\lambda)sh\lambda y + D(\lambda)\lambda ych\lambda y, \quad (3.85)$$

Түрленген жанама теңдеу үшін өрнек құрамыз:

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} [Cch\lambda y + D(\lambda ysh\lambda y + ch\lambda y)] \quad (3.86)$$

Сонымен бірге (3.84)–(3.85) шектік шарттарын (3.86)-ға қойып, біз келесі C және D белгісіздеріне қатысты теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned} Csh\mu + D\mu ch\mu &= \bar{f}, \\ Cch\mu + D(\mu sh\mu + ch\mu) &= i\bar{g}, \quad \mu = 2\lambda \end{aligned}$$

Шешу арқылы табамыз

$$\begin{aligned} C &= 2 \frac{\bar{f}(\mu sh\mu + ch\mu) - \bar{g}i\mu ch\mu}{sh2\mu - 2\mu} \\ D &= 2 \frac{-\bar{f}ch\mu + \bar{g}ish\mu}{sh2\mu - 2\mu} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ізделінген кернеулердің соңғы шешімі

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D(\lambda ych\lambda y + 2sh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Cch\lambda y + D(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D\lambda ych\lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

болады.

$\lambda = 0$ болғанда, Фурье бойынша түрленген статика шартының (3.84) осыған кіретін интегралдардың жинақтылығын тексеруге болады.

Алынған шешімдерде (3.83) және (3.87) барлық үш ізделінген кернеулер меншіксіз емес интегралдар түрінде өрнектеледі:

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mu)}{sh2\mu \pm 2\mu} e^{-i\mu\xi} d\mu, \quad (3.88)$$

оларды жуықтау әдісімен табуға болады.

(3.88) функциясын квадратура типі белгілі шарт ретінде, яғни шексіз қатар түрінде шегеру теориясы көмегімен көрсетуге болады. Ол үшін нақты ось бойынша интеграл центрі координат басында орналасқан, радиусы $R \rightarrow \infty$ жарты дөңгелегімен, жоғары жағынан ($\xi < 0$) немесе төменгі жағынан ($\xi > 0$) жартылай

жазықтықпен шектелген контур бойынша интеграл қарастырылады, интеграл астындағы функциядағынақты айнымалыны комплексті айнымалымен ауыстыра отырып интеграл алынады (мысалы, 2μ -ды z -ке). Егер алынған функция $\Phi(z) = F\left(\frac{z}{2}\right)$ мероморфты функция болса, онда интеграл шектелген контурда, Коши теориясына сәйкес, $\sum a_{-1}$ интеграл асты функциясының жоғарғы (төменгі) жартылай жазықтығындағы z комплексті айнымалы бойынша есептеп алынған қосындыға $2\pi i$ көбейткен шамаға тең болады. Егер жарты дөңгелектің интегралы $R \rightarrow \infty$ жағдайында нөлге ұмтылатынын дәлелдер болсақ, онда ізделінетін $f(\xi)$ функциясы $2\pi i \sum a_{-1}$ -ға тең болады.

Қарастырылып отырған жағдайда құрақты-үзіліссіз сыртқы жүктеме, яғни координат басынан соңғы аралықта қойылған, $\Phi(z)$ типті функциясы барлық комплексті жазықтықта бүтін, сонымен бірге жартылай жазықтыққа сәйкес жүргізілген $R \rightarrow \infty$ нөлге ұмтылатын жарты дөңгелек интегралы да бүтін болады. Осылайша, барлық ізделінген кернеулер $2\pi i \sum a_{-1}$ формуласы түрінде беріледі, мұндағы ерекше нүктелер (қарапайым полюстармен) төмендегі теңдеудің түбірлері болып табылады

$$shz + z = 0$$

симметриялық есепте,

$$shz - z = 0$$

антисимметриялық есепте.

Келтірілген 60-суретте $z = \pm\sigma \pm i\tau$ теңдеуінің бірнеше бірінші түбірлері берілген. Үлкен номерлермен берілген түбірлер асимтоталық формулармен оңай табылуы мүмкін.

Ескере кететін жағдай: Снеддономсимметрикалық жағдайы үшін алынған типтегі меншіксіз емес интегралдарды есептеу арқылы жуықтау әдісі ұсынылған, ол арнайы $(shz + z)^{-1}$ функциясының аппроксимациясына негізделген.

3. Шексіз жолақ үшін екінші негізгі есеп.

Екінші негізгі есеп ретінде негізінен дененің шектерінде серпімді орын ауыстыру берілген жағдайдағы серпімділік теориясының шектік есебін алады. Серпімділік теориясы үшін жазықтықтағы есепке бигармоникалық функция арқылы берілген

орын ауыстыруды қолдануға болады. Бірақ бізге басқа әдісті қолданған қолайлырақ болады, Панкович–Нейбер функциясын қолдануға негізделген, екінші негізгі есепті және де аралас есепті екі бөлікке бөлу арқылы шешеміз.

Біріншіден, серпімділік теориясының жазықтықтағы есебі теңдеуінің жалпы шешімін келтіреміз, Панкович–Нейберге сәйкес, үш гармоникалық функциялар Φ_0, Φ_1, Φ_2

$$\begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1 - \nu)\Phi_1, & 2Gv \\ &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1 - \nu)\Phi_1, \end{aligned} \quad (3.89)$$

мұндағы u, v — орын ауыстыру, $F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2$ — Пуассон коэффициенті.

Гармоникалық функцияның бірінің оңтайлылығын пайдалана отырып, $\Phi_1 \equiv 0$ қойып, арақатынасын келесі формада жазамыз:

$$2Gu = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad 2Gv = x\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$$

мұндағы $x = 3 - 4v$.

Берілген есеп жолақтың шегіндегі $y = 0$ және $y = b$ шектік шарттарды қанағаттандыратын Φ_0, Φ_2 гармоникалық функцияларын анықтауға арналған екені анық:

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=b} = u_b(x), \quad v|_{y=0} = v_0(x), \quad v|_{y=b} = v_b(x) \quad (3.90)$$

мұндағы u_0, u_b, v_0, v_b — берілген функциялар.

Φ_0 және Φ_2 гармоникалық функцияларын Фурье интегралы ретінде алып,

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)ch\lambda y + B(\lambda)sh\lambda y + 2ch\lambda y] e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [C(\lambda)ch\lambda y + D(\lambda)sh\lambda y + 2ch\lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (3.91)$$

серпімді орын ауыстырулар үшін келесі өрнектерді аламыз:

$$2Gu = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + Bsh\lambda y + \lambda y(Cch\lambda y + Dsh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (3.92)$$

$$2Gv = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [-(Ach\lambda y + Bsh\lambda y) + C(\chi ch\lambda y - \lambda ysh\lambda y) + D(\chi sh\lambda y - \lambda ych\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda$$

(3.92)-ні (3.90)-ші шектік шартқа қоя отырып және Фурье интегралдарының соңғы оң бөліктерін жіктеу арқылы біз A,B,C,D-ға қатысты келесі теңдеулер жүйесіне келеміз:

$$iA = 2G\bar{u}_0, \quad \chi C - B = 2G\bar{v}_0,$$

$$Ach\mu + Bsh\mu + \mu(Cch\mu + Dsh\mu) = \frac{2G}{i}\bar{u}_b$$

$$(\chi ch\mu - \mu sh\mu)C + (\chi sh\mu - \mu ch\mu)D - (Ach\mu - Bsh\mu) = 2G\bar{v}_b,$$

мұндағы сызық әдеттегідей Фурьеге түрленгендігін және $\mu = \lambda b$ қойылғандығын білдіреді.

Енді A және B шамаларын қоспай, төмендегі арақатынас көмегімен

$$A = 2Gi\bar{u}_0, \quad B = \chi C - 2G\bar{v}_0 \quad (3.93)$$

C және D екі белгісізі бар екі теңдеуден тұратын жүйеге келеміз:

$$(\chi sh\mu - \mu ch\mu)C + \mu sh\mu D = 2G(\bar{v}_0 sh\mu + i\chi\mu\bar{u}_0 - i\bar{u}_b) = \psi_1(\mu) \quad (3.94)$$

$$-\mu sh\mu C + (\chi sh\mu - \mu ch\mu)D = 2G(\bar{v}_b - \bar{v}_0 ch\mu - i\bar{u}_0 sh\mu) = \psi_2(\mu).$$

(3.94)-тен C және D мәндерін анықтап,

$$C = \frac{(\chi sh\mu - \mu ch\mu)\psi_1 - \mu sh\mu\psi_2}{\chi^2 sh^2\mu - \mu^2}$$

$$D = \frac{\mu sh\mu\psi_1 + (\chi sh\mu - \mu ch\mu)\psi_2}{\chi^2 sh^2\mu - \mu^2},$$

және оны (3.93) пен (3.94)-ке қою арқылы соңғы шешімді аламыз.

u және v орын ауыстырулары (3.92) формуласымен беріледі, ал $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$ кернеулері Φ_0, Φ_1, Φ_2 функцияларымен келесі тәуелділік бойынша өрнектеледі:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2(1 - \nu)\Phi_1 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} + x \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x \partial y} \\ &\quad + (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (3.95)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial}{\partial x} \left[2(1 - \nu)\Phi_2 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} \right),$$

сондықтан қарастырылып отырған есепте кернеуді алу үшін $\Phi_1 \equiv 0$ және (3.91)-геш $z = 0$ өрнегін қою жеткілікті.

Келтірілген 61-суретте $z = \pm \sigma \pm i\tau$ көрсетілген теңдеуінің бірнеше бірінші түбірлері берілген.

$$shz - \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad shz + \frac{z}{3-4\nu} = 0 \quad (3.96)$$

Шегерім теоремасы бойынша алынған есептеулер үшін маңызды (ν коэффициентінің мәні $\frac{1}{3}$ және $\frac{1}{4}$ деп алынған).

Ескере кететін жағдай: $\chi shz - z = 0$ теңдеуі $y = \frac{b}{2}$ орта сызығына қатысты симметрикалық, ал $\chi shz + z = 0$ теңдеуі сәйкес антисимметрикалық болады.

Қарастырылған есеп жазық деформация жағдайына жатады. Жазық шиеленіскен күй үшін барлық формулаларда ν шамасын $\frac{\nu}{1+\nu}$ шамасына алмастырған жөн. Негізінен алғанда (3.96) орнына бізде

$$shz \pm \frac{1 + \nu}{3 - \nu} z = 0,$$

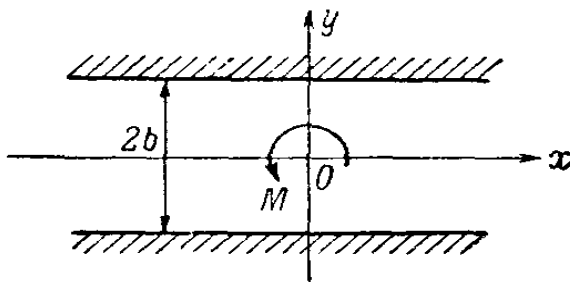
болады.

$\nu = \frac{1}{4}$ үшін теңдеудің түбірлері төменде келтірілген ($z = \pm \sigma \pm i\tau$). Есте сақтайтын жағдай z мәні (3.95)-те $\nu = \frac{1}{3}$ болған жағдайда (3.95)-дегі $\nu = \frac{1}{4}$ болған кездегі z мәніне сәйкес.

Алдыңғы тақырыптарда жолақтың бірінші және екінші негізгі есептерін басқа әдістер көмегімен, берілген серпімділік класының есептерін қарастырғанда, интегралдық түрлендіру әдісінің қарапайымдылығын және тиімділігін нақтылап көрсетеді.

4. Контуры бойынша орнатылған және жинақталған моментпен тартылған жолақ.

Орын ауыстыру шектері берілген антисимметрикалық күйзеліс жағдайына мысал ретінде шексіз жолақтың тепе-теңдігін қарастырамыз, контуры бойынша бекітілген және центріне жинақталған момент әсер етіп тұрған (62-сурет). Сонымен бірге, шын мәнінде, ν орын ауыстыруы және τ_{xy} кернеуі жұп, ал u орын ауыстыру және σ_x, σ_y координатасына қатысты тақ болады.



61-сурет

Мұндай дене нүктелерінің серпімді орын ауыстыруын біз шектелмеген жазықтықтағы M моменті тудыратын u_0, v_0 орын ауыстырулары қосындысы ретінде қарастырсақ болады, сонымен қатар қосымша u_1, v_1 орын ауыстырулары, шектіктік шарттар орындалу үшін таңдалып алынған:

$$u|_{y=\pm b} = 0, \quad v|_{y=\pm b} = 0,$$

Сонымен бірге

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1$$

u_0 және v_0 біріншілік орын ауыстырулары келесі формулалармен өрнектеледі:

$$u_0 = -N \left[\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right], \quad v_0 = N \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$N = \frac{M}{8\pi G(1 - \nu)}, \quad \chi = 3 - 4\nu.$$

u_1 және v_1 екіншілік орын ауыстыруларын Φ_0 және Φ_2 формулалары көмегімен формулаларға сәйкес бейнелей аламыз, сонымен қатар симметрия себептері Φ_0 және Φ_2 гармоникалық функцияларын Фурье синус интегралдарының келесі формулаларының көмегімен сипаттай аламыз:

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A \sin \lambda y \sin \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty B \sin \lambda y \sin \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Сондықтан

$$2Gu_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (A \sin \lambda y + B \sin \lambda y \chi) \cos \lambda x d\lambda \quad (3.97)$$

$$2Gv_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [-A \sin \lambda y + B(\chi \sin \lambda y - \sin \lambda y \chi)] \sin \lambda x d\lambda.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2P\varepsilon = M.$$

x координатасы бойынша u орын ауыстыруы симметриялық, ал v орын ауыстыруы антисимметриялық екені анық.

Қарастырылып отырған есептің шектік шарты ретінде $y=b$ алу жеткілікті, онда

$$u_1|_{y=b} = -u_0|_{y=b} = bN \left[\frac{2x^2}{(x^2 + b^2)^2} + \frac{\chi}{x^2 + b^2} \right] \quad (3.98)$$

$$v_1|_{y=b} = -v_0|_{y=b} = N \frac{x(x^2 - b^2)}{(x^2 + b^2)^2}$$

(3.97)-ні (3.98)-ге қою арқылы, сондай-ақ $u_0|_{y=b}$ және $v_0|_{y=b}$ сәйкес косинус және Фурьесинус интегралдары арқылы келесі жүйеге келеміз ($\mu = \lambda b$):

$$\begin{aligned} Ash\mu + B\mu ch\mu &= 2G\bar{u}_0|_{y=b} = -2GbN\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[\frac{2x^2}{(x^2+b^2)^2} + \frac{\chi}{x^2+b^2}\right] \cos\lambda x d\lambda \\ Ach\mu + B(\mu sh\mu - \chi ch\mu) &= 2G\bar{v}_0|_{y=b} \\ &= 2GN\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{x(x^2-b^2)}{(x^2+b^2)^2} \sin\lambda x d\lambda \end{aligned} \quad (3.99)$$

Оң жақ бөліктерінде тұратын квадратуралар есептеліп, $\bar{u}_0|_{y=b}$ және $\bar{v}_0|_{y=b}$ өрнектеріне айқын түрде келеді:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0|_{y=b} &= -N\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\mu}(1-\mu+\chi) \\ \bar{v}_0|_{y=b} &= N\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\mu}(1-\mu) \end{aligned}$$

(3.130) жүйенің шешімі келесі түрде беріледі:

$$\begin{aligned} A &= 4G \frac{(\chi ch\mu - \mu sh\mu)\bar{u}_0|_{y=b} + \mu ch\mu\bar{v}_0|_{y=b}}{\chi sh2\mu + 2\mu} \\ B &= 4G \frac{ch\mu\bar{u}_0|_{y=b} - sh\mu\bar{v}_0|_{y=b}}{sh2\mu + 2\mu}, \end{aligned}$$

содан кейін есептің соңғы шешімі (3.97) формуламен бір ретті интеграл ретінде беріледі.

Өңдеудегі қалыпты және жанама кернеулер үшін есептік формулалар (3.95) тәуелділіктен алынады:

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=b} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{-Ash\mu + [2(1-\nu)sh\mu - \mu ch\mu]B\}\lambda \sin\lambda x d\lambda \\ \tau_{xy}|_{y=b} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{-Ach\mu + [(1-\nu)ch\mu - \mu sh\mu]B\}\lambda \cos\lambda x d\lambda, \end{aligned}$$

Бірнеше түрлендірулерден соң нақты беріледі:

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=b} &= \frac{M}{2\pi b^2(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{[(1-2\nu)ch\mu sh\mu + \mu](1-\mu+\chi) - 2(1-\nu)(1-\mu)sh^2\mu}{sh2\mu + 2\mu} \\ &\quad * \mu e^{-\mu} \sin\mu \frac{x}{b} d\mu, \\ \tau_{xy}|_{y=b} &= \frac{M}{2\pi b^2(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{(1-\nu)(1-\mu+\chi)ch^2\mu - (1-\mu)[(1-2\nu)ch\mu sh\mu + \mu]}{sh2\mu + 2\mu} \\ &\quad * \mu e^{-\mu} \cos\mu \frac{x}{b} d\mu, \end{aligned}$$

Толық кернеу алу үшін табылған өрнектерге біріншілік кернеулер қосу қажет, шексіз жазықтықтағы M моментінің әрекетіне сәйкес және белгілі u_0, v_0 орын ауыстырулары бойынша оңай табылады.

5. Шексіз жолақ үшін аралас есептер.

Шексіз жолақ үшін серпімді теп-теңдікті қарастырамыз ($-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq b$), $y = 0$ шегінде u және v серпімді орын ауыстыру мәндері берілген, ал контурдың қалған бөлігінде ($y = b$) σ_y және τ_{xy} кернеулері анықталған.

Қойылған есептің тиімді шешімі Фурье интегралдық түрлендіруі көмегімен алынуы мүмкін, егер u және v орын ауыстыруларын, сонымен қатар σ_y және τ_{xy} кернеулерін Панкович–Нейбер функциясы көмегімен өрнектейміз. Жоғарыда айтылғандай кернеу функцияларының бірін нөлге тең деп ($\Phi_1 \equiv 0$) алсақ, онда

$$\begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \\ 2Gv &= \chi \Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad (\chi = 3 - 4\nu), \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (3.100)$$

Қарастырылып отырған есептің шектік шарттары төмендегідей болатыны анық:

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= u_0(x), & v|_{y=0} &= v_0(x) \\ \sigma|_{y=b} &= f(x), & \tau|_{y=b} &= g(x). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Φ_0 және Φ_2 функцияларын Фурье интегралы ретінде алып,

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 \operatorname{ch} \lambda y + B_0 \operatorname{sh} \lambda y) e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (3.102)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_2 \operatorname{ch} \lambda y + B_2 \operatorname{sh} \lambda y) e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

(3.102) өрнегін (3.100) формуласына қою арқылы және (3.101) шектік шарттарын қолдана отырып, біз келесі теңдеулер жүйесіне келеміз. A_0, B_0, A_2, B_2 шамалары үшін:

$$A_0 = 2G\bar{u}_0, \quad \chi A_2 - B_0 = 2G\bar{v}_0,$$

$$\begin{aligned} [2(1-\nu)sh\mu - \mu ch\mu]A_2 + [2(1-\nu)ch\mu - \mu sh\mu]B_2 \\ - (A_0 ch\mu + B_0 sh\mu) = \frac{\bar{f}}{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(1-2\nu)ch\mu - \mu sh\mu]A_2 + [(1-2\nu)sh\mu - \mu ch\mu]B_2 \\ - (A_0 sh\mu + B_0 ch\mu) = \frac{i\bar{g}}{\lambda} \end{aligned}$$

Мұнда, жоғарыда айтылғандай, $\mu = \lambda b$ қойылған, ал $\bar{f}f(x)$ -тен алынған комплексті Фурье түрлендіруін білдіреді.

A_0 және B_0 қоспағанда арақатынасы көмегімен

$$A_0 = 2G\bar{u}_0, \quad \chi A_2 - B_0 = 2G\bar{v}_0 \quad (3.103)$$

A_2 және B_2 белгісіздерімен алынған екі теңдеулер жүйесі:

$$\begin{aligned} -[\mu ch\mu + (1-2\nu)ch\mu]A_2 + [2(1-\nu)sh\mu - \mu ch\mu]B_2 &= \psi_1, \\ -[\mu sh\mu + 2(1-\nu)ch\mu]A_2 + [(1-2\nu)sh\mu - \mu ch\mu]B_2 &= \psi_2, \end{aligned} \quad (3.104)$$

Мұнда белгілеулер енгізілген

$$\psi_1 = \frac{\bar{f}}{\lambda} - 2Gich\mu\bar{u}_0 - 2Gish\mu\bar{v}_0$$

$$\psi_2 = \frac{i\bar{g}}{\lambda} - 2Gish\mu\bar{u}_0 - 2Gich\mu$$

(3.104) жүйесін шешу арқылы және де табылған A_2 мен B_2 мәндерін (3.103) және (3.102) қою арқылы орын ауыстыру және кернеу өрнектелетін кернеу функцияларын аламыз.

(3.104) негізгі жүйесін анықтау максатында

$$\chi sh^2\mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2 = 0 \quad (3.105)$$

Біз мынадай қорытындыға келеміз: алынған формулалар бойынша теорема көмегімен сандық есептеулер жүргізу $z = \pm\sigma \pm i\tau$ теңдеуінің түбірлерін алу керек:

$$chz + \frac{z^2}{2(3 - 4\nu)} + \frac{4(1 - \nu)^2 + (1 - 2\nu)^2}{3 - 4\nu} = 0, \quad (z = 2\mu)$$

$$chz + \frac{z^2}{2(3 - 4\nu)} + \frac{4(1 - \nu)^2 + (1 - 2\nu)^2}{3 - 4\nu}$$

$\nu=1/3$		$\nu=1/4$	
Σ	T	σ	T
0	1.768	0	1.913
3.005	5.122	2.770	5.164
4.549	11.82	4.353	11.84
5.375	18.27	5.187	18.29
5.932	24.66	5.747	24.67

$chz + \frac{z^2}{2(3 - 4\nu)} + \frac{4(1 - \nu)^2 + (1 - 2\nu)^2}{3 - 4\nu}$	
Σ	T
0	2.001
2.641	5.183
4.249	11.85
5.091	18.30
5.657	24.64

6. Негізі бекітілген жолақ тепе-теңдігі.

Жалпы аралас есептің дара түрін қарастырайық, жолақ негізі $y=0$ қозғалмайтын денеге қатты бекітілген, $u_0(x), v_0(x)$ орын ауыстырулары нөлге тепе-тең.

$y = b$ жоғарғы жиектің еркін нүктесі жинақталған күштің еркін бағытына қойылған. Жалпыламалықты бұзбай, $x = 0, y = b$ нүктелеріне түсіп тұрған күш. Ескере кетер жағдай еркін жүктеме кезінде жолақтың жоғарғы жиегіне түсірілген, жүктеме аймағындағы жинақталған күшті интегралдау жолын қарастыруға әкеледі.

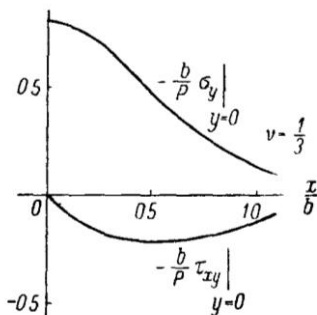
Берілген параграфта қойылған есептің шешімі аралас есептің жалпы шешімінен алынуы мүмкін, егер (3.105) формуласына қойсақ:

$$\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0, \quad \bar{f} = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}}, \quad \bar{g} = -\frac{T}{\sqrt{2\pi}}$$

Сонымен қатар

$$A_2 = \frac{b}{\mu\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{A_0 = 0, \quad B_0 = \chi A_2, \quad [\mu ch\mu - (1-2\nu)sh\mu]P + [2(1-\nu)ch\mu - \mu sh\mu]iT}{\chi sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2}$$

$$B_2 = \frac{b}{\mu\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{[\mu sh\mu + 2(1-\nu)ch\mu]P + [\mu ch\mu + (1-2\nu)sh\mu]iT}{\chi sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2},$$



62-сурет

Шектелген негіздегі кернеу үшін есептеу формулаларын келтіреміз:

$$\sigma_y|_{y=0} = (1 - \nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda B_2 e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = i(1 - \nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda A_2 e^{-i\lambda x} d\lambda$$

немесе есептеуден соң

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} &= \frac{2(1 - \nu)}{\pi b} T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu sh\mu + (1 - 2\nu)sh\mu}{(3 - 4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \sin\mu \frac{x}{b} d\mu \\ &- \frac{2(1 - \nu)}{\pi b} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu sh\mu + (1 - 2\nu)ch\mu}{(3 - 4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \cos\mu \frac{x}{b} d\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}|_{y=0} &= \frac{2(1 - \nu)}{\pi b} T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu sh\mu - 2(1 - \nu)ch\mu}{(3 - 4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \cos\mu \frac{x}{b} d\mu \\ &- \frac{2(1 - \nu)}{\pi b} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu ch\mu + (1 - 2\nu)sh\mu}{(3 - 4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \sin\mu \frac{x}{b} d\mu, \end{aligned}$$

62-суретте өңдеу кезіндегі кернеудің жіктелу графиктері көрсетілген, жоғарғы жиекке тек қалыпты күш түсіп тұрса ($T=0$).

Жіңішке плита ілімі есептеріне Фурье түрлендіруін қолдану.

7.Жиектері бекітілген жартылай жазықтықтың ілімі.

Фурье түрлендіруін плита ілімі есептеріне қолданудың қарапайым мысалы жартылай жазықтық түріндегі серпімді жұқа плитаның ілімі туралы есеп болады ($y \geq 0$).

Плитаның майысуы $\omega(x, y)$ біртекті емес биогармоникалық теңдеуді қанағаттандырады:

$$\Delta^2 \omega = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (3.106)$$

мұндағы q – сыртқы көлденең жүктеме тығыздығы; D – плитаның цилиндрлік қаттылығы.

(3.106) теңдеуін ашық түрде қайта жазар болсақ:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}$$

оның айнымалысы бойынша Фурье түрлендіруін қолданып және $|x| \rightarrow \infty$ $\omega \rightarrow 0$ деп болжамдап, өзінің бірінші үшінші ретті туындыларымен біз қарапайым төртінші ретті дифференциалдық теңдеуге келеміз:

$$\varpi^{IV} - 2\lambda^2 \varpi'' + \lambda^4 \varpi = F_\lambda(y) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, y) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (3.107)$$

ω майысуынан ϖ Фурье түрленуіне қатысты

$$\varpi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y) e^{i\lambda x} dx,$$

(3.107) теңдеуінің дербес шешімін $\varpi_0(0)$ Лаплас интегралдық түрлендіруі көмегімен тапқан оңай, ол үшін (3.107) теңдеуін e^{-py} -ке көбейтіп және y координатасы бойынша нольден бастап шексіздікке дейін интегралдау қажет. Болжам жасай отырып,

$$\varpi_0(0) = \varpi_0'(0) = \varpi_0''(0) = \varpi_0'''(0) = 0,$$

аламыз:

$$(p^4 - 2p^2\lambda^2 + \lambda^4)\varpi_0^* = F_\lambda^*, \quad (3.108)$$

мұнда Лаплас түрлендіруі үшін мән енгізілген

$$f^* = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-py} dy.$$

(3.108)-ден ϖ_0^* мәнін табу арқылы және Риман-Меллин түрлену формуласын қолдану арқылы аламыз:

$$\varpi_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F_\lambda^* e^{py}}{(p^2 + \lambda^2)^2} dp,$$

Борел теоремасын қолданған соң бізге

$$\varpi_0 = \int_0^y F_\lambda(t) \Phi_\lambda(y-t) dt$$

айта кететіні: $\Phi_\lambda(x)$ функциясы келесі комплексті интегралмен анықталады:

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{py}}{(p^2 - \lambda^2)^2} dp,$$

Есептеу туралы теореманы қолдану келесі мәнге алып келеді:

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{K_\lambda(x)}{2\lambda^3}, \quad K_\lambda(x) = \lambda x \operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{sh} \lambda x$$

Сондықтан теңдеудің дербес шешімі ϖ_0 мынадай формуламен беріледі:

$$\varpi_0(y) = \frac{1}{2D\sqrt{2\pi\lambda^3}} \int_0^y K_\lambda(y-\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, y) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (3.109)$$

(3.107) теңдеуінің жалпы шешімі белгілі тәсіл арқылы құрылған, ол келесі түрде болады:

$$\varpi(y) = (A + B\lambda y)e^{-\lambda y} + (C + D\lambda y)e^{\lambda y} + \varpi_0$$

Бізге анық болғандай, еркін сыртқы жүктеме $q(x, y)$ кезіндегі есеп шешімін жалғыз жинақталған күшке арналған есеп шешімінен жүктеме қосымшасын интегралдау жолымен алуға болады. Сондықтан P жинақталған күш бойынша плитаның майысуы туралы есепті зерттеді, плитаның еркін нүктесіне түсірілген.

Жартылай шексіз плита жағдайына ($0 \leq y \leq \infty$) назар аударсақ, ординат осінің $(0, b)$ еркін нүктесіне түсірілген P күшін ескеретін болсақ және $\omega(x, y)$ функциясынан Фурье косинустүрлендіруін енгізу арқылы

$$\varpi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \omega(x, y) \cos \lambda x d\lambda$$

(3.158) формуласы бойынша ϖ мәнін табамыз, сонымен қатар жинақталған жүктеме кезіндегі ϖ_0 дербес шешімі

$$\varpi_0 = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq b, \\ \frac{P}{2D\sqrt{2\pi\lambda^3}} K_\lambda(y-b), & b \leq y \leq \infty. \end{cases} \quad (3.110)$$

Осылай ϖ шешімі келесі өрнектермен беріледі:

$$\varpi(y) = \begin{cases} (A + B\lambda y)e^{-\lambda y} + (C + D\lambda y)e^{\lambda y}, & 0 \leq y \leq b; \\ (A + B\lambda y)e^{-\lambda y} + (C + D\lambda y)e^{\lambda y} + \frac{P}{2D\sqrt{2\pi\lambda^3}} K_\lambda(y-b), & b \leq y \leq \infty. \end{cases} \quad (3.111)$$

C және E белгісіздері шексіздік шартынан анықталады ($\varpi|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0$) және де $K_\lambda(x)_{x \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{2}(\lambda x - 1)e^{\lambda x}$ келесі шамаға тең:

$$C = \frac{Pe^{-\lambda b}(\lambda b + 1)}{4\sqrt{2\pi D\lambda^3}}, \quad E = -\frac{Pe^{-\lambda b}}{4\sqrt{2\pi D\lambda^3}} \quad (3.112)$$

Қалған екі A және B шамалары плитаның шегіндегі ($y=0$) шекті шарттардан табылады.

Бекітілген шек жағдайында $\omega|_{y=0} = \frac{\partial \omega}{\partial y}|_{y=0} = 0$, яғни $\varpi_0(0) = \varpi'_0(0)$, келесі өрнекке әкеледі:

$$A = -C, B = -(2C + E) \quad (3.113)$$

Қойылған есептің толық шешімі Фурье косинус түрлендіруі формуласымен беріледі:

$$\varpi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varpi \cos \lambda x d\lambda$$

мұндағы ϖ өрнегі (3.111)-ден анықталады, A, B, C, E – (3.112)–(3.113) формуласынан табылады.

Ескере кетер болсақ, үйлесімді шешімін табу шешімі басқа шектік шарттарынан табылады.

Енді иілім моменті үшін өрнек енгіземіз және бекітілген жиекте кесілген күш үшін формулалармен берілетін

$$M = -D \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, \quad N = -D \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \Big|_{y=0}.$$

Айналмалы майысу үшін ($0 \leq y \leq b$) мәнін енгіземіз:

$$\omega|_{0 \leq y \leq b} = \frac{P e^{-\lambda b}}{4\sqrt{2\pi} D \lambda^3} [(1 + \lambda b + \lambda^2 b y) \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y (1 + \lambda b) \operatorname{ch} \lambda y]$$

аламыз:

$$\omega''(0) = \frac{P b e^{-\lambda b}}{D \sqrt{2\pi}}, \quad \omega'''(0) = -\frac{P(1 + \lambda b)}{D \sqrt{2\pi}} e^{-\lambda b},$$

Одан айналу формуласы бойынша

$$M = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{b^2}{b^2 + x^2}, \quad M = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{b^3}{(b^2 + x^2)^2}.$$

8. Ленталық плита иілімі шешімі үшін Фурье түрлендіру үстемесі.

Енді серпімді жұқа плитаның көлденең иілімі есептерін қарастырамыз, шексіз жолақ формасын аламыз және ол қалыпты жағдайда ленталық плита деп аталады.

Әдістеме $x(-\infty < x < \infty)$ айнымалысы бойынша Фурье интегралдық түрлендіруін қолдануға негізделген, алдыңғы параграфтарда көрсетілгендей, нақтырақ айтар болсақ, ϖ майысуын Фурье бойынша түрлендіру үшін (3.107) қарапайым теңдеуі алынады, ϖ_0 дербес шешімі $\operatorname{sh} z - z = 0$ формуласымен өрнектеледі. Бірақ соңғы теңдеудің жалпы интегралын ленталық плита кезінде келесідей формада таңдаған оңтайлы болып табылады:

$$\varpi = (A + B\lambda y)ch\lambda y + (C + E\lambda y)sh\lambda y + \varpi_0 \quad (3.114)$$

Сонымен қатар А, В, С, Е шамалары плитаның екі параллель жиектерінің төрт шектік шарттарынан табылуы қажет.

Мұнан былай бірінші кезекте келесі негізгі шектік шарттар типі қарастырылады: а) екі жиекте де иілімдер және майысу бұрыштары берілген (негізінен жиекті қысу); б) екі жиекте де иілім және иілу моменттері берілген (шарнирлі жиектер); в) екі жиекте де иілу моменті және кесуші күш берілген (еркін жиектер); г) бір жиегінде ($y=0$) майысу және айналу бұрышы берілген, екінші жиегінде ($y=b$) – иілім моменті және кесуші күш берілген.

Бірінші үш жағдайда координат басын орта сызықта ($y=0$) орналастырамыз, жолақ ені $2b$, сонымен бірге әр есеп симметриялық және антисимметриялық орта сызыққа қатысты екіге бөлінеді.

Симметриялық жағдай кезінде (3.167) жалпы интегралында $B=C=0$, ал антисимметриялық жағдай кезінде $A=E=0$ екенін қабылдау керек, сонымен бірге тек жолақтың жоғарғы бөлігі ($0 \leq y \leq b$) қарастырылады және шектік шарттарды $y=b$ деп қою керек.

Қарастыруды плитаның екі жиегінде де ($y=\pm b$) майысу және айналу бұрышы берілген есептерден бастаймыз, яғни шектік шарттар

$$\omega|_{y=b} = f(x), \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{y=b} = g(x)$$

Фурье түрлендіруінен соң табамыз:

$$\varpi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \bar{f}, \quad \varpi'(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx = \bar{g}, \quad (3.115)$$

(3.114)-ті (3.115)-ке қою симметриялық жағдайда бізді A және E белгісіздері бар келесі теңдеулер жүйесіне әкеледі:

$$\begin{aligned} Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b &= \bar{f} - \varpi_0(b) \\ Ash\lambda b + E(\lambda bch\lambda b + sh\lambda b) &= \frac{1}{\lambda} [\bar{g} - \varpi_0'(b)]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Соңғы жүйенің оң жақтарында белгілі шамалар тұрғандықтан, оны анықтау $sh2\lambda b + 2\lambda b$ функциясына пропорционал болады, түбірлері I тарауда келтірілген, ендеше есепті толықтай шешілді деп есептеуге болады, принципті жағынан да, есептеу теоремасы көмегімен алынған сандық нәтижелер тұрғысынан да солай болады.

Сәйкес түрде антисимметриялық шектік шарттар кезінде (3.114) D және C үшін теңдеулер жүйесі:

$$B\lambda bch\lambda b + Csh\lambda b = \bar{f} - \varpi_0(b) \quad (3.117)$$

$$B(\lambda bsh\lambda b + ch\lambda b) + Csh\lambda b = \frac{1}{\lambda}[\bar{g} - \varpi_0'(b)].$$

анықтаушымен беріледі, $sh2\lambda b - 2\lambda b$ функциясына пропорционал болады.

Енді келесі шектік шарт жағдайына ауысамыз, яғни екі жиегінде де майысу $f(x)$ және иілім моменті $M(x)$ берілген:

$$\omega|_{y=b} = f(x), \quad \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right|_{y=b} = -\frac{M(x)}{D} - \nu f''(x) = g(x). \quad (3.118)$$

(3.91) шектік шартты Фурье түрлендіруіне (3.118) қойғаннан соң

$$\varpi|_{y=b} = \bar{f}, \quad \varpi''|_{y=b} = \bar{g}$$

A және D үшін симметриялық жағдайдағы жүйені табамыз:

$$Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b = \bar{f} - \varpi_0(b)$$

$$Ach\lambda b + E(\lambda bsh\lambda b + 2ch\lambda b) = \frac{1}{\lambda^2}[\bar{g} - \varpi_0''(b)]$$

Ал B және C шамалары үшін антисимметриялық жағдай кезінде:

$$B\lambda bch\lambda b + Csh\lambda b = \bar{f} - \varpi_0(b)$$

$$B(2ch\lambda b + \lambda bch\lambda b) + Csh\lambda b = \frac{1}{\lambda^2}[\bar{g} - \varpi_0''(b)]$$

Бірінші жағдайда жүйені анықтау $2ch^2\lambda b -$ ға тең, ал екіншіде $-2sh^2\lambda b -$ ге тең, онда сандық есептеулер жүргізу трансцендентті теңдеудің түбірлерінен арнайы кесте құруды талап етпейді.

Үшінші қарастырылатын есеп типі екі жиегінде де иілім моменті $M(x)$ және кесуші $N(x)$ бар плитаға арналған есеп:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=b} = -\frac{M(x)}{D} = f(x)$$

$$\left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=b} = -\frac{N(x)}{D} = g(x)$$

Егер осы қатынастарды $e^{i\lambda x} dx$ – ке көбейтіп, x бойынша $-\infty -$ тен $+\infty$ – ке дейінгі аралықта интегралдап және болжам жасасак, шексіздігінде майысу ($|x| \rightarrow \infty$) нольге ұмтылады, бастапқы екі туындыларымен x бойынша, онда шектік шарт түрлендіруін аламыз:

$$\varpi''(b) - \nu \lambda^2 \varpi(b) = \bar{f}, \quad \varpi'''(b) - (2 - \nu) \lambda^2 \varpi'(b) = \bar{g}. \quad (3.119)$$

Симметриялық жүктелім кезінде түрленген майысу үшін (3.119)-ға қоямыз:

$$\varpi = A ch \lambda y + D ly sh \lambda y + \varpi_0$$

Ол келесі жүйеге алып келеді:

$$A(1 - \nu) ch \lambda b + E[2 ch \lambda b + (1 - \nu) \lambda b sh \lambda b]$$

$$= \nu \varpi_0(b) + \frac{1}{\lambda^2} [\bar{f} - \varpi_0''(b)] = p_1,$$

$$-A(1 - \nu) sh \lambda b + E[(1 + \nu) sh \lambda b - (1 - \nu) \lambda b sh \lambda b]$$

$$= \frac{2 - \nu}{\lambda} \varpi_0'(b) + \frac{1}{\lambda^3} [\bar{g} - \varpi_0'''(b)] = p_2$$

Оны анықтағанда,

$$\frac{1}{2} (1 - \nu) [(3 + \nu) sh 2 \lambda b - (1 - \nu) 2 \lambda b].$$

Тең болады.

Жуықтау теоремасын қолдану арқылы сандық есептеулер жүргізуде $z = \pm \sigma \pm i\tau$ теңдеуінің түбірлерін кестелеуге мүмкіндік береді.

$$(3 + \nu) sh z - (1 - \nu) z = 0$$

Сәйкес нәтижелерді екі Пуассон коэффициенті үшін жүргіземіз: $\nu = 1/4, \nu = 1/3$.

11-кесте

$shz - \frac{1-\nu}{3+\nu}z = 0$				$shz + \frac{1-\nu}{3+\nu}z = 0$			
$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$		$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$	
σ	τ	Σ	T	σ	τ	σ	τ
0	2,596	0	2,521	0	4,105	0,3512	4,484
1,013	7,684	1,193	7,669	0	4,906	1,581	10,84
1,699	14,01	1,851	13,99	1,422	10,85	2,060	17,16
2,086	20,32	2,233	20,31	1,912	17,16	2,379	23,46
2,360	26,61	2,506	26,61	2,232	23,46	2,619	29,76
-	-	-	-	2,474	29,76	-	-

Енді алынған интегралдарды жинақтылыққа зерттеу қажет, өйткені қарастыратын жағдайлар басқа шектік шарттармен салыстырғанда өзге, есептің шешімі тек берілген шектік шарттар $N(x)$, шектік мәні $q(x,y)$ көлденең жүктемесіне теңгеріледі.

Ізделінген жағдайда симметриялық жүктеме үшін статика шарты келесі түрге ие болады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x)x dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta = 0,$$

және де келесі тепе-теңдікке эквивалентті

$$\bar{g} - \varpi_0'''(b) = O(\lambda^2)\lambda \rightarrow 0$$

Сонымен қатар $P_1 = O(\lambda^{-2})$, $P_2 = O(\lambda^{-1})$. Бұдан шығатын $A(\lambda)$ шамасы $\lambda \rightarrow 0$ кезінде λ^{-2} ретіне ие болады, ал бұл өз кезегінде $\lambda = 0$ нүктесінде Фурье интегралының жинақсыздығына алып келеді, ол $\omega(x,y)$ плита майысуын білдіреді.

Бұл жағдайдың себебі табылған есеп қойылымы кезінде майысу шексіз үлкен жолаққа дейінгі аралықта нақты табылады және қойылған есепті анықтау үшін ω мәнін плитаның қандай да бір нүктесіне қою керек, мысалы, $\omega(0,0) = 0$ екенін қабылдау қажет. $\omega(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda$ болса, онда ϖ майысудың

түрленуі үшін $A(\lambda)$ шамасын есептеу қажет, ол келесі жинақсыз интеграл түріндегі есептің соңғы шешіміне алып келеді:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [(Ach\lambda y + D\lambda ysh\lambda y + \varpi_0)e^{-i\lambda x} - A(\lambda)] d\lambda$$

Сәйкес түрде антисимметриялық жүктелу үшін:

$$B(1 - \nu)sh\lambda b + C[2ch\lambda b + (1 - \nu)\lambda bch\lambda b] = p_1,$$

$$-B(1 - \nu)ch\lambda b + C[(1 + \nu)ch\lambda b - (1 - \nu)\lambda bsh\lambda b] = p_2,$$

Бұл функцияны анықтау $(2\lambda b = z)$ функциясына пропорционал

$$(3 + \nu)shz + (1 - \nu)z,$$

түбірлері $\nu = 1/4$ және $\nu = 1/3$ үшін 11-кестеде келтірілген.

Қарастырылып отырған жағдайда статика шарты

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(x)dx - b \int_{-\infty}^{\infty} N(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^b q(\xi, \eta)d\xi d\eta = 0, \quad (3.186)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x)xdx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^b q(\xi, \eta)d\xi d\eta = 0,$$

болады.

Бір тепе-теңдік түрінде де беріледі

$$[p_1(\lambda) - \lambda bp_2(\lambda)]_{\lambda \rightarrow 0} = O(1).$$

Сонымен қатар ω майысуы үшін Фурье интегралы $\lambda = 0$ нүктесінде жинақталады, шындығында

$$\varpi_{\lambda \rightarrow 0} = \lambda y(B + C) + O(\lambda^2),$$

сонымен қатар

$$B + C_{\lambda \rightarrow 0} = O\left(\frac{p_1 - \lambda bp_2}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

Келесі тақырыпта ленталық плита иілімі үшін бірнеше есептер беріледі, жоғарыда көрсетілген әдістемелерді қолдана отырып, есепті шешеміз.

Осы кезде қалған екі типіне қатысты біз ескеретін жағдай аралас шектік шарттардың, ленталық плитаның бір жиегі ($y=0$), ені b еркін бос бекітілген. Екінші жиегіне келер болсақ ($y=b$), онда майысу және айналым бұрышы берілуі мүмкін немесе иілім моменті және кесуші күші берілуі мүмкін. Сонымен қатар көлденең жүктеме $q(x,y)$ белгілі.

$chz - \frac{1-\nu}{3+\nu}z^2 + \frac{4+(1+\nu)^2}{4-(1+\nu)^2} = 0$			
$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$	
Σ	τ	Σ	T
1.055	3.831	0	3.336
0	5.956	1.080	5.004
3.267	11.93	3.460	11.92
4.193	18.36	4.361	18.35
4.797	24.74	4.950	24.73

Сонымен бірге ені $2b$ болатын плитаны қарастыра кетер болсақ, $0 < y < b$ аралығында $q(x,y)$ жүктемесімен жүктелген, ал $b < y < 0$ аралығында жүктеме сол шамамен, бірақ қарама-қарсы бағытта болады, онда еркін бекітілген шектік шарт

$$\omega|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

орындалады. Сол арқылы қарастырылып отырған жағдай ені $2b$ ленталық плитаның антисимметриялық иіліміне әкеледі, яғни келтіріліген екі жағдай үшін есеп шешілді деуге болады. Әрине, екінші жағдайда берілген күштер және моменттер статистикалық түрде сыртқы жүктемен теңгерілуі қажет.

Сонымен интегралдық Фурье түрлендіруі ленталық плита иілімі үшін есептерге қиынырақ шектік шарт типтері кезінде сәтті қолданылады, сонымен бірге жартылай жолақ ($x \geq 0$) түріндегі плита деформациясын есептеуде де сәтті қолданылады. Соңғы жағдайда нақты шешімі жиекте $x=0$ иілім және иілім моменті берілгенде, Фурье синус түрлендіруін қолдану арқылы алынуы мүмкін.

9. Жинақталған күштің шексіз жолақ иілімі ($-\infty < x < \infty$, $|y| \leq b$), 2Р

жинақталған күшімен жүктелген $x = 0, y = a < b$ еркін нүктелерінде ленталық плитаның иілімін қарастырамыз.

Екі жиекте де шектік шарттар $y = \pm b$ біртүрлі деп есептеп, есепті симметриялық және антисимметриялық деп қарастырамыз, сонымен бірге бірінші жағдайда (3.114)-ге $B=C=0$, ал екінші жағдайда (3.116)-ға $A=E=0$ қойып, жолақтың тек жартысын қарастырамыз ($0 \leq y \leq b$).

Дербес шешім $\varpi_0(y)$ (3.114)-тің жалпы өрнегіне кіретін майысу түрлендіруі үшін

$$\varpi = (A + B\lambda y)ch\lambda y + (C + E\lambda y)sh\lambda y + \varpi_0 \quad (3.120)$$

(3.110) формуласына сәйкес қарастырылып отырған жүктеме типі

$$\varpi_0 = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a, \\ \frac{PK_{\lambda}(y-a)}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3}}, & a \leq y \leq b, \end{cases} \quad (3.121)$$

мұнда жоғарыдағыдай мән енгізіледі

$$K_{\lambda}(x) = \lambda x ch\lambda x - sh\lambda x$$

Ары қарай шектік шарттың екі типі қарастырылады: жиегі бекітілген және шарнирлі.

Плитаның симметриялық жүктелімі жағдайы үшін бекітілген жиектермен A және E шамаларын келесі жүйеден анықтау қажет:

$$Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b = -\frac{PK_{\lambda}(b-a)}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3}},$$

$$Ash\lambda b + E(\lambda bch\lambda b + sh\lambda b) = -\frac{PK'_{\lambda}(y-a)}{2\sqrt{2\pi D\lambda^4}}. \quad (3.122)$$

(3.116) формулаға $f=g=0$ мәнін қою арқылы табылған, сәйкес плита жиектерінде майысу мен айналу бұрыштары берілмеген, сонымен бірге $\varpi_0(b)$ және $\varpi'_0(b)$ мәндері (3.121)-ден алынған.

(3.122) жүйесінің шешімі:

$$A = \frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \cdot \frac{(\lambda bch\lambda b + sh\lambda b)K_\lambda(b-a) - bsh\lambda bK'_\lambda(b-a)}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b} \quad (3.123)$$

$$B = \frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \cdot \frac{\frac{1}{\lambda}ch\lambda bK'_\lambda(b-a) - sh\lambda bK_\lambda(b-a)}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b},$$

Қатысушы $K_\lambda(x)$ функциясының туындысы келесі формуламен беріледі:

$$K'_\lambda(x) = \lambda^2 x sh\lambda x. \quad (3.124)$$

Табылған мәндерді ($B=C=0$) (3.120) өрнегіне қою арқылы және түрлену формуласын қолдану арқылы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \omega \cos \lambda x d\lambda$$

қойылған есептің толық шешімін аламыз.

Өңдеудегі $M(x)$ иілім моменті үшін өрнек аламыз.

Берілген жағдай үшін Фурье түрлендіруін төмендегідей формуламен қалыптастырамыз:

$$M(x) = -D \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \Big|_{y=b}$$

табамыз

$$\bar{M} = -D\lambda^2 \left[Ach\lambda b + E(\lambda bsh\lambda b + 2ch\lambda b) + \frac{1}{\lambda^2} \bar{\omega}'_0(b) \right]$$

ескеретін болсақ,

$$K'_\lambda = \lambda^2 (\lambda x ch\lambda x + sh\lambda x),$$

бірнеше есептеулерден соң

$$\bar{M} = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{bch\lambda ach\lambda b - ach\lambda bsh\lambda a}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b}$$

немесе соңғы, түрлену формуласын қолданған соң

$$M(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{bch\lambda ach\lambda b - ach\lambda bsh\lambda a}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b} \cos \lambda x d\lambda. \quad (3.125)$$

Сәйкес есептің шешімі контурмен бекітілген ленталық плитаның антисимметриялық жүктелімі (3.117) теңдеулер жүйесіне әкеледі, $f=g=0$ кезінде:

$$\begin{aligned} B\lambda bch\lambda b + Csh\lambda b &= -\frac{PK_{\lambda}(b-a)}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \\ B(\lambda bsh\lambda b + ch\lambda b) + Cch\lambda b &= -\frac{PK'_{\lambda}(b-a)}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^4}. \end{aligned}$$

Осы жүйені шешу арқылы біз табамыз:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \cdot \frac{ch\lambda bK_{\lambda}(b-a) - \frac{1}{\lambda}sh\lambda bK'_{\lambda}(b-a)}{\lambda b - ch\lambda bsh\lambda b} \\ C &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \cdot \frac{bch\lambda bK'_{\lambda}(b-a) - (\lambda bsh\lambda b + ch\lambda b)K_{\lambda}(b-a)}{\lambda b - ch\lambda bsh\lambda b}, \end{aligned}$$

содан соң есептің шешімі түрлену формуласын қолдануға келеді.

Алдыңғы жағдайдағыдай бекітілген жиектегі иілу моментін анықтаймыз. Бізде

$$\begin{aligned} \bar{M} &= -D\bar{\omega}''(B) = -D\lambda^2 \left[B(\lambda bch\lambda b + 2sh\lambda b) + Bch\lambda b + \frac{\bar{\omega}_0''(b)}{\lambda^2} \right] \\ &= -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{bsh\lambda ach\lambda b - ash\lambda bsh\lambda a}{ch\lambda bsh\lambda b - \lambda b} \end{aligned}$$

немесе нақты

$$M(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{bsh\lambda ach\lambda b - ash\lambda bch\lambda a}{ch\lambda bsh\lambda b - \lambda b} \cos\lambda x d\lambda$$

Қорытындылай келе, ленталық плитаның бекітілген жиегіндегі ($y=b$) иілу моментінің өрнегін табамыз. Ені $2b$ кезінде $x=0, y=a < b$ нүктесінде жинақталған $2P$ күшімен жүктелген,

$$M(x) = -\frac{2P}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{(b-a)sh2\lambda bsh\lambda(a+b) - 2\lambda b(b+a)sh\lambda(b-a)}{sh^2\lambda b - (2\lambda b)^2} \cos\lambda x d\lambda,$$

Екінші мысал ретінде ленталық плитаның симметриялық жағдайын қарастырайық ($-\infty < x < \infty, -b < y < b$), жиектері

бойынша шарнирлі бекітілген және $x = 0, y = a < b$ еркін нүктесінде жинақталған күшпен жүктелген.

Бұл жағдайда түрленген майысу түрі келесі түрде болады:

$\bar{\omega} = Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda + \bar{\omega}_0(y)$ (3.202) $\bar{\omega}_0$ өрнегі үшін (3.123)–(3.124) формулаларымен берілген. A және E шамаларын (3.174) жүйесінен анықтау қажет, қарастырылып отырған жағдайда ($f=g=0$) түрін алатын:

$$Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b = -\bar{\omega}_0(b)$$

$$Ach\lambda b + E(\lambda bsh\lambda b + 2ch\lambda b) = -\frac{1}{\lambda^2} \bar{\omega}''_0(b),$$

тепе-теңдікті ескере отырып есептеу келесі мәнге әкеледі:

$$A = \frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3 ch^2\lambda b} \{ [\lambda ach\lambda(b-a) + sh\lambda(b-a)] ch\lambda b - \lambda bch\lambda a \} \quad (3.204)$$

$$B = \frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \cdot \frac{sh\lambda(b-a)}{ch\lambda b}$$

содан соң есептің шешімі Фурье косинусинтегралы түрленуімен беріледі.

Дербес жағдай кезінде $a=0$, ені $2b$ жиектері $2P$ күшпен бекітілген жолақ иілімі туралы есепке келеміз, ($x=0, y=0$) орта сызықтың еркін нүктесіне жүктелген

$$\omega(x, 0) = \frac{Pb^2}{4\pi D} \int_0^\infty \frac{sh2\mu - 2\mu}{\mu^3 ch^2\mu} \cos\mu \frac{x}{b} d\mu.$$

Күш түсірілген майысуды есептеу келесі түрдегі мәнге келеді ($\zeta(x)$ -дзета-функция):

$$\omega(0,0) = \frac{7Pb^2}{2\pi^3 D} \zeta(3) \approx 0.136 \frac{Pb^2}{D}$$

ҚОРЫТЫНДЫ

Критикалық сыртқы жүктеменің әсерінен жұқа түтікшелі конструкцияның тербелу мәселелері, жер сілкінгенде сыртқы қысымның импульсіне негізделген реакциясы және ішкі демпферлеудің ішкі үйкеліске әсері жайлы Казань мектебі мен (Х.М.Муштари, К.З.Галимов, А.Б.Сагенков, Ю.П.Артюхин және т.б.) қазақстандық мектептің (А.К.Курскеев, Т.Ж.Жунусов, Л.М. Балкина, О.М.Белосюдцев, Ю.Д.Черепинский, Е.Т. Божанов және т. б.) идеяларын дамыта отырып, серпімсіз біртұтас орта механикасының математикалық теориясы тұрғысынан біртекті денелердің ағымдағы жағдайы қарастырылады. Баушенгер тәжірибесіне сүйене отырып, материалдың физикалық негізінің серпімсіз дененің негізгі ұғымдары мен заңдылығы анықталып, демпферлеу мен серпімді-тұтқыр қарсылықтың классикалық модельдері ұсынылады, жұқа конструкцияның элементтеріне сейсмикалық импульстің әсерінен ішкі үйкелістің есептік бағалаулары көрсетіліп, демпферлеу құбылысын модельдеу барысында математикалық және вариациялау анализі әдістері қолданылады (1-2-тақырыптарда).

3-тақырыпта мұнай өндірудің даму технологиясының аналитикалық-есептік моделі және мұнай қоспасының резервуардың кесе-көлденең қимасының серпімділік шегінің дифференциалдық теңдеуіне байланысты динамикалық симуляциялау моделіне толықсудың әсерін есептеу баяндалады. Газтекес – сұйық агрегаттық күйдегі резервуардың толтырғышының моделі келтірілген үш қабатты жіңішке конструкциямен және серпімді-тұтқыр толтырғыштың айнымалы параметрлерімен берілген, яғни Винклер, Соколов, Пастернак негізінде жатқан.

Маңызды назар физика-техникалық және химия-технологиялық процестерде қолданылатын Б-3 және Б-4 математикалық модельдерін құруға және олардың $\frac{d\varepsilon_n}{dt} \neq 0$ қалдық деформацияның жылдамдығы нольге тең емес болған жағдайдағы, статикалық жүктеменің әсерінен толықсу күйіндегі материалдық ортаның теңдеуін шешудің әдістерін табу және сандық есептеу енгізуге аударылған. Демек, мұнда біз

резервуардың кесе-көлденең қимасына белгілі бір коэффициентпен түсіп тұрған негізгі күштермен серпімділігі шегінен тыс жағдайдағы стерженьдер жүйесін қарастырамыз.

Толтырғышы үш қабатты активтік толқын импульсі – q_k жүктемелерді есептеудің техника-технологияда маңыздылығы қарастырылады.

Қойылған нормативтік заңдарға байланысты статикалық жүктемелер массалары шоғырланған нысандардағы тербеліс формаларымен толықтырылған статикалық күшпен беріледі. Есептеудің бұл сатысында сейсможүктеменің эффектісі статикалық жүктеменің арнайы комбинациясының әсерінен деформацияланған жүйенің статистикасы бойынша математикалық формуламен анықталады.

Графиктерді талдау қорытындылары және қысқы резервуар үшін техникалық процестің сенімділігін қамтамасыз етуге бейім есептер шешімдері:

1) Сыртқы активті критикалық қысымның кесе-көлденең қимасының алдын ала жүктелуі динамикалық коэффициентін азайтады, сонымен қатар ішкі үйкеліске байланысты критикалық күштің ішкі жүктелімі керісінше динамикалық коэффициентін арттырады;

2) Статикада шектік шарттар активті критикалық жүктеменің шамасына айтарлықтай әсер етеді, ал динамикада бастапқы шарттарға байланысты ешқандай рөл атқармайды:

$$\left. \begin{aligned} W(t)/_{t=0} &= W_0 ; \quad \frac{dW}{dt}/_{t=0} = 0, \quad W(\tau)/_{\tau=0} = 0, \quad \frac{dW}{d\tau}/_{\tau=0} = 0, \\ W(t)/_{t=\frac{n}{2\pi}} &= W_0 ; \quad \frac{dW}{dt}/_{t=\frac{n}{2\pi}} = 0, \quad W(\tau)/_{\tau=1} = 0, \quad \frac{dW}{d\tau}/_{\tau=1} = 0 \end{aligned} \right\}$$

мұнда $P_{\text{крит}}(t)$ – критикалық қысымына сәйкес W_1, W_0 – майысулар, $P_{\text{крит}}(t)$ кезіндегі уақыт функциясы болып табылатын – амплитуда вариациясы.

3) Критикалық уақыт кезінде кез келген сәйкес $\alpha < \tau \leq 1$ аралықтағы нығаюды қабылдауға болады, мұнда майысудың әртүрлі жоғарылауы байқалады. Мұнда $\alpha - W = f(\xi, t)$ қисығының майысу нүктесі.

4) $m = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ көрсеткішінің өсуімен динамикалық коэффициенті артады. Сонымен бірге сыртқы критикалық активті және ішкі критикалық реактивті күштер $0 < \tau < 1$ аумағында қарама-қарсы бағытта жұмыс жасай алады.

5) $\alpha < \tau \leq 1$ аумағында реактивті критикалық күштер нөлден өту арқылы және өз таңбасын ауыстыру арқылы сыртқы активті критикалық күштермен бір бағытта жұмыс жасай бастайды. Резервуардың кесе-көлденең қимасын критикалық жүктеме кезіндегі овалды форма ретінде елестетуге болады, $\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\xi}$ функциясы секілді z қалыңдығы бойынша параллель бойымен (эллипсоида) Фурье қатарына жіктеледі.

$$P_3 = (1 - \alpha)P(z) \cos kz, \quad P(z) = \gamma(L - S), \quad \eta = \sqrt{b^2 - z^2}, \\ \xi = \frac{a}{b},$$

мұнда α – параллель доғаларды анықтайтын координата, γ – сұйықтықтың тығыздығы, l – биіктік, s – меридиана доғасының ұзындығы, z – қалыңдық. Егер тәуелсіз айнымалы ретінде меридиана доғасының ұзындығын алсақ, онда овалды форма жағдайында S элементарлы функциясы секілді геометриялық сипаттамасын анықтау мүмкін емес.

6) Майысудың шамасына материалдың анизотропты қасиеті (N, Q) және N/Q көлденең жылжудағы резервуардың табанының икемділігіштік дәрежесі табанның қаттылығына байланысты айтарлықтай әсер етеді. Осы жағдайда резервуар биіктігі $0,6 \leq \xi \leq 1,7$ жарты толқын ұзындығымен шамалас болады. Ал гармоникалық қозғалыс, толқын фазасы, фаза жылдамдығы, дисперсиялық қатынастар конструкцияның материалының қасиетіне байланысты өзгереді.

7) Резонанс шартты уақыттық координата бойынша

$$\omega_n^2 = \frac{k_2 \eta_1 - (k_1 + k_2) \eta_1}{\eta_1 - k_1 k_2} \frac{\eta_1}{k_2} > 0$$

амплитудамен

$$A = \omega_n \left\{ 1 - \frac{\eta_1 - k_1 k_2}{k_1 + k_2 - \eta_1 k_2} \left[1 - \frac{k_1 (k_1 + k_2)}{\eta_1^2} \right] \right\}$$

8) $\omega_n^2 = m^2 \omega^2$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$ резонанс шарты тек активті сыртқы және ішкі критикалық жүктеме бірге болған жағдайда түседі.

9) иілу моментінің өзгерісінің үстелімінен тәуелді кесіп тастаушы күш байланыс аумағы шегінде үзіліске ие болатындықтан, аналитикалық-графикалық есептеу үшін онда қосымша түрлендіру жасауға болады:

$$2\varepsilon^1(\xi) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \varepsilon^{11}(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0$$

Жалпы жағдайда (I_c) жүйесінің бірінші теңдеуі ретінде дифференциалдық теңдеуді шешу керек:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - \frac{2}{\xi} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{D Q} \gamma^2 \frac{1}{1 + \lambda_k^1 \gamma^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \xi \sin \omega_n \xi$$

10) Шектік шарттарды таңдау кезінде $\Delta m = \rho(\xi) ds$ массасымен алынған қоспаның критикалық қозғалыс жылдамдығы есепке алынбайды, мұндағы қоспаның айналмалы бөлігіндегі инерция мына формула бойынша анықталады:

$$m \frac{d^2 W}{dt^2} = m \left\{ \frac{d^2 W}{dt^2} (\text{түбірлік үдеткіш}) + \right. \\ \left. + 2V \frac{d^2 W}{d\xi dt} (\text{кориолистік үдеткіш}) + \right. \\ \left. + V^2 \frac{d^2 W}{d\xi^2} (\text{центрге тартқыш үдеткіш}) \right\} = 0$$

11) Жағдай үшін болжам жасасак,

$$\frac{d^3 W}{d\xi^3} = - \frac{1}{1 - \xi} \frac{d^2 W}{d\xi^2}$$

Берілген модель $\alpha < \tau \leq 1$ үзіліссіз функциялар аралығында қысымды табуға мүмкіндік бермейді, себебі байланыс аумағы шегінде кескіш күштің әсерінен үзіліске ие болады, иілу моментінің жетілдірілуінен тәуелді болады. Демек, аналитикалық-графиктік есепте жүргізу үшін қосымша шарт қоюға болады:

$$2\varepsilon^1(\xi) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \varepsilon^{11}(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0$$

12) Кесе-көлденең қима материалының тығыздығы айнымалы шама ретінде түбіне түсірілген гидростатикалық қысымның үлкен негізі шамасы жағына қарай азаяды, сәйкес формула бойынша аралықтағы тығыздықтың үзіліссіз жағдайлар бойынша қалыпты заңмен бөлінуі орын алады.

13) Резервуардың кесе-көлденең қимасының қабырғасына түсірілген гидростатикалық қысым қоспаның жеткіліксіздігін теңелтеді. Резервуардың кесе-көлденең қимасын үшбұрышты эпюрдың критикалық жүктемесі кезіндегі, $\varepsilon(\xi) = \frac{D}{1-\xi}$ функциясы секілді көлденең қимасының z – қалыңдығы бойынша Фурье қатарына параллель бойымен жіктелетін конусоидалы форма ретінде елестетуге болады.

14) Мұнай-газ қоспасының моделі бір сарынды өзгеріп отыруы тиіс, алайда орманның шұғыл өзгерісі орындарында және резервуардың кесе-көлденең қимасының қалыңдығының қарсылықтың түйіскен орындарында деформациялық айырмашылығынан өтіп кете алмаймыз.

15) Динамикалық схемада көрсетілген динамикалық жүктеме әсерінен ішкі үйкелісті ескере отырып, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу үшін, мұнай қоспасының толықсуы жағдайындағы иілімнің суперпозиция принципін қолдану керек.

16) М.А.Био теориясы бойынша майысу мәні В.В.Новожилов теориясынан 6% тен 12%-ке дейін өзгереді болып табылады, ал аралас жақындау теориясынан 12%-ден 20%-ке дейін резервуардың қалыңдығына $0,1 < \gamma_j < 0,637$ сәйкес өзгеше болып табылады.

17) $\alpha < \tau \leq 1$ аралығында реактивті критикалық күштер нольден өткенде және таңбасын ауыстыру арқылы сыртқы активті критикалық күштермен бір бағытта жұмыс жасай бастайды. $f(\xi) = \frac{1}{1-\xi+\frac{\xi^2}{2}}$ критикалық жүктемесі кезінде z

қалыңдығы бойынша градиенттің қабырғасына түсірілген гидростатикалық қысым қоспаның артық мөлшерін теңестіреді.

18) Девиатор тензорының кернеуі есебінен көлденең қиманың формасының шұғыл өзгеруі орындарында және түйісу орындарындағы деформация девиаторы тензорының

айырмашылығын анық аңғарамыз. Демек, Сен-Венанның үзіліссіздік шартын орындау үшін резервуарды үш бөлікке бөлу керек: қоспаның активті орын ауысу облысы $0,6 \leq \xi < 1$, қоспаның кристаллизациясының басталу облысы $0,3 \leq \xi < 0,6$, қоспаның қатаюының басталу облысы $0,1 < \xi < 0,3$ аралықта $\alpha \leq \tau \leq 1$ қоспаның артық мөлшерімен және флюидтердің таралуымен.

19) Жағдай үшін болжам жасар болсақ,

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = - \frac{[(\xi - 1)^2 + 1]^2 - 4\xi(\xi - 1)}{2(1 - \xi)[(\xi - 1)^2 + 1]} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}$$

Берілген модель үзіліссіз функциялар аралығында қысымды табуға мүмкіндік бермейді, себебі байланыс аумағы шегінде кескіш күштің әсерінен үзіліске ие болады, иілу моментінің жетілдірілуінен тәуелді болады. Демек, аналиткалық-графиктік есептеу жүргізу үшін қосымша шарт қоюға болады:

$$2\varepsilon^1(z) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \varepsilon^{11}(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. Божанов Е.Т., Ержанов Ж.С. «Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения», Алматы, 2011, 300 стр.

2. Божанов Е.Т., Ержанов Ж.С. «Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения», Алматы, 2001, 323 стр.

3. Рахимбекова З.М. «Нелинейные стержневые системы за пределом упругости», Алматы, 2002, 218 стр.

4. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М. «Численные расчеты выпучивания заполнителя нефтепроводов транспортирующих вязкость нефти методом «горячей перекачки»», Матер III – международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Том 1, Алматы, 2009, КазНТУ. Стр. 172–176.

5. Божанов Е.Т., Хайруллин Е.М., Тулешева Г.А. «Об одной механико-математической модели Константа магистральной трубы с упругим заполнителем». Там же, том 2. Алматы, 2009, КазНТУ. Стр. 176–181.

6. Божанов Е.Т., Сатыбалдиев О.С., Дадаева А.Н., Абжапарова А.А. «Исследование вынужденных выпучиваний нефтепроводов, транспортирующих вязкую нефть, лежащих на основании типа Винклера, методом «горячей перекачки». Там же, том 1, Алматы, 2009, КазНТУ. Стр. 176–181.

7. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. «Механико-математическое моделирование нефтепродуктов, транспортирующих вязкую нефть методом «горячей перекачки». Шекарасыз ғылым мен инженерлік білім. Халықаралық форум. Том 1, Алматы, 2009, КазНТУ. Стр. 276–279.

8. Божанов Е.Т., Буганова С.Н., Отарбаева Ж.О. «Об одной модели определения устойчивости, выпучивания и колебания тонкостенных конструкций в новом начале, как стационарного объекта с запаздывающим аргументом». “Найновите научни постижения”: материали за V международной конференции. том 24. Технологии.- София, 2009. Стр. 28–32.

9.Божанов Е.Т., Скакова А.Б., Азис Г. «Выпучивания подземной трубчатой конструкции под действием активной синусоидальной силы применительно к техническим задачам». Материалы VI международной научно-практической конференции, “HONORSHCHSCHOOL–2010”. том 19. Технологии.- София, 2010.Стр. 28–32

10.Божанов Е.Т., Турегельдиева Э.К., Исабаева Г.А. «Выпучивания трубчатой конструкции под действием неравномерной поперечных сил покрывающим деформациям с заполнителем, пригарничных условиях, когда оба края шарнирно–закрепленные», MATERIALU VIMIEDZYNA–RODOWE I KONFERENCJA NAUKA WYKSZTAICENIE BEZCSANIC 2010, Volume 22, premise 2010.

11.Божанов Е.Т., Скакова А.Б., Касымбекова М.Т. «О расчете выпучивания элементов конструкций из упругого однородного кристаллического материала от остаточных напряжений в условиях эксплуатации по формам кристаллической деформации по перерезного сечения», “Үшінші Ержанов окулары” халықаралық ғылыми-техникалық конференцияның материалдары. Том 1. Ақтөбе, 2010. Стр. 3–189.

12.Божанов Е.Т., Батырбек Н., Касымов Ж. «Надежность технологического потока перекачки нефти на основании математической компьютерной». Материалы республиканский международной научно-практической конференции. КазНТУ. Том 2. Алматы, 2011.

13.Божанов Е.Т., Сергеев Р.А., Сахабаева А.М., Керимбаева А.Т. «Проектные расчеты трубчатой конструкции из нескольких “пир” эластомеров, армированных между ними металлическими волокнами». Материалы VI Международной научно-практической конференции. 2011. Том 27, “БЭЛ” – Град – БГ ООД, 2011. Стр. 13–27.

14.Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Жаканова А., Дмитриева Н. «Исследование проблем устойчивости и выпучивания композитов из чередующихся двух “бутербродов” под действием критической силы по теориям М.А. Био, В.В. Новожилова, А.Н. Гузя». Труды международной научно-

практической конференции “Информационные и телекоммуникационные технологии”. Алматы, 2012.

15. *Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Дмитриева Н., Жаканова А.* «Выпучивание композитов в зависимости от предельной гибкости по поперечному сечению по теории Л.С. Лейбензона, А.Ю. Ишлинского». Там же, том II, КазНТУ, Алматы, 2012.

16. *Божанов Е.Т., Сатыбалдиев О.С., Трусбекова Б.С.* «Обобщенной математической модели определения критического технологического давления разрабатываемого горизонта по характеристикам дренажной зоны». Труды II Международной научной конференции «Высокие технологии – залы устойчивого развития». Том II. Стр. 132–137.

17. *Божанов Е.Т., Сергеев Р.А., Трусбекова Б.С.* «Выпучивание мелкослойного пласта как вязкоупругий слой, вложенный в вязкоупругую, первоначально свободную от напряжений». Там же. Алматы, КазНТУ. Том II. Стр. 137–142.

18. *Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Скакова А.Б.* «Обобщенной математической модели технологии разработки нефтяных месторождений из N-го горизонта из 4-х чередующих приведенных слоев». Там же. Алматы, КазНТУ. Том II. Стр. 144–147.

19. *Божанов Е.Т., Джунисов А.Т., Акимжанова Ш.А.* «Математическая модель движения нефтегазовой смеси по стволу траектории скважины под действием технологического практического давления в N-го горизонт аномального пласта большой мощности». Там же. Алматы, КазНТУ. Том II. Стр. 147–152.

20. *Божанов Е.Т., Хайруллин Е.М., Акимжанова Ш.А., Касымбекова М.Т.* «Неустойчивость поверхностного разламываемого слойного пласта большой мощности». Там же. Алматы, КазНТУ. Том II. Стр. 235–240.

21. *Божанов Е.Т., Акимжанова Ш.А., Байбатыр К., Кожасметов О.С.* «Движение нефтегазовой смеси по стволу траектории скважины под действием критической осевой силы – $N_{кр}$, когда форма поперечного сечения конусоидального типа». MATERIALY IX MEZINARODNI VEDECKO – PRAKTICA

KONFERENCE “ZPRAVY VEDECKE IDEJE – 2013” Dilzz, Praha, PublishingHouse “Educationandscience” s. r. o. 2013.Стр. 36–40.

22.Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Касымбекова М.Т., Койшыбаева Ж.Ж. «Выпучивание симуляционного резервуара в зависимости от вида критической силы поформекритической деформации тонкостенные градири» MATERIALY IX MEZINARODNI VEDECKO – PRAKTICKA KONFERENCE “ZPRAVY VEDECKE IDEJE – 2013” Dilzz, Praha, PublishingHouse “Educationandscience” s. r. o. 2013, 31–35.

23. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Койшыбаева Ж.Ж., Мусаева Ж.К. «Выпучивание симуляционного резервуара в зависимости от видакритической силы по формекритической деформации треугольного вида поперечного сечения». Материалы IX Международной научной конференции.Том 33, София, 2013.Стр. 17–20.

МАЗМҰНЫ

Кіріспе.....	3
1. Композиттік материалдағы толқын үлгілері, заңдылығы және ережелері.....	14
2. Серпімді емес ортадағы тербеліс пен толқындардың арақатынастары, түрлері және композиттегі толқындарға сәйкес таралу ережелері мен заңдылықтары.....	27
3. Бройля толқындар түріндегі жиынның жер үстіндегі және жер астындағы айнымалы параметрлі түтікше келген конструкцияларға әсер етуінің математикалық модельдері, нысана тербелісі.....	51
3.1. Толқынның таралу түрлері және олардың формулалары	51
3.2. Соколов типі негізінде жатқан соққы импульсі әсерінен көпқатпарлы айнымалы шамалы конструкцияның тербеліс моделі.....	52
3.3. Толқынның таралу түрлері және олардың импульсті соққы фронтының әсеріне байланысты дербес модельдері.....	61
3.4. Бройля толқындар түріндегі жиын фронтының соққы импульсі әртүрлі композиттік материалдардан жасалған конструкцияға әсер етуінің модельдері және нысана тербелісі.....	85
3.5. Серпімді біртұтас тығыз орта механикасы теориясындағы есептердегі интегралдық түрлендірулер.....	92
Қорытынды.....	128
Библиографиялық тізім.....	134

Оқулық басылым

Ескерген Тоқшылықұлы Божанов
Әуезхан Молдағызұлы Ибраимқұлов
Кульдана Джолдасқызы Мурзасаимова

ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІҢ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ

III бөлім

Оқу құралы

ҒЖБДБ бастығы

Редакторы

Компьютерде беттеген

З. Ғұбайдулина

А. Сүлейменова

Л. Қасжанова

Басуға қол қойылды 20.03.2017 ж.

Таралымы 300 дана. Пішімі 60х84 1/16.

№1 баспаханалық қағаз.

Көлемі 8,6 есепті-баспа табақ. 8,0 шартты баспа табақ.

Тапсырыс № 812.

Бағасы келісімді.

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті басылымы
Қоғаммен байланыс департаменті
Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-323-083-2



9

7 8 6 0 1 3 2 3 0 8 3 2