

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный исследовательский
технический университет имени К. И. Сатпаева

Е. Т. Божанов, Е. М. Хайруллин, Г. А. Тулешева

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Часть I

Рекомендовано Научно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Алматы 2016

УДК 510:53.085.1(075.8)

ББК 22.1:22.311 я73

Б 76

Рецензенты:

Уалиев Г. У., зав. каф. «Механика» КазНПУ им. Абая, д-р физ.-мат. наук, академик НАН РК, проф.

Нуржумаев О. Н., проф. каф. «Информационные технологии» АТУ, д-р физ.-мат. наук, проф.

Отарбаев Ж. О., дир. "Института дистанционного образования" КазНТУ им. К. И. Сатпаева, д-р физ.-мат. наук, проф.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2016 год.

Божанов Е. Т.

Б76 Божанов Е. Т. Моделирование физических процессов. Часть I: Учебное пособие. / Е. Т. Божанов, Е. М. Хайруллин, Г. А. Тулешева. – Алматы: КазННТУ им. Сатпаева, 2016. –107 с.

ISBN 978-601-228-951-0

ч.1. - 2016. - 107с

ISBN 978-601-228-952-7

Учебное пособие посвящено некоторым классам задач нелинейной математической теории упругой и неупругой сплошной среды при моделировании физико-технических процессов, разрешаемых с помощью интегральных преобразований и с применением моделей частично- независимого демпфирования. При рассмотрении такого класса задач теории упругости показана эффективность метода интегральных преобразований.

Данное учебное пособие содержит большое число задач, которое будет полезно научным работникам и студентам технических университетов.

УДК 510:53.085.1(075.8)

ББК 22.1:22.311 я73

ISBN 978-601-228-951-0

ISBN 978-601-228-952-7(ч.1)

© Божанов Е.Т., Хайруллин Е.М.,
Тулешева Г.А., 2016

© КазННТУ, 2016

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии дан комплексный анализ построения механико-математических моделей устойчивости и колебаний гибких тел под воздействием внешних и внутренних нагрузок, находящихся на упруго-вязком основании, и были поставлены следующие задачи:

- разработка методики расчета устойчивости и выпучивания гибких тел в условиях эксплуатации, основанных на современных достижениях в области нелинейной теории упругости с применением интегральных преобразований;
- разработка механико-математических моделей деформационных процессов в самом заполнителе в зависимости временного сопротивления от физико-механических свойств заполнителя в стационарном, потенциальном температурном поле;
- разработка реакции основания на гибкое тело, как внешней нагрузки типа Винклера, Пастернака, Фойхта-Максвелла;
- разработка критерия корректности и обоснование параметров для дифференциальных уравнений равновесия и дифференциальных уравнений движения заполнителя;
- определение критических статических и динамических нагрузок под действием неравномерной поперечной силы (прямоугольной, треугольной, трапециевидной и синусоидальной эпюры) на стенки гибких тел.

Учебное пособие посвящено некоторым классам задач нелинейной математической теории упругой и неупругой сплошной среды при моделировании физико-технических процессов, разрешаемых с помощью интегральных преобразований и с применением моделей частично-независимого демпфирования.

В работе применяются оба указанных метода, причем изложение ведется с той степенью строгости, которая обычно принята в проектной практике прикладного направления. И если вычислительные аспекты расчета технологии физико-технических процессов успешно решаются в результате быстрого развития информационных технологий, то для адекватного описания физических

свойств трубчатых конструкций с заполнителем, особенно из новых нетрадиционных материалов, требуется дальнейшее изучение их поведения за пределом теории упругости на основании опыта Баушенгера при различных силовых и кинематических воздействиях, влияющие на напряженно-деформированное состояние конструкции при динамическом нагружении.

Работа состоит из двух глав. В первой главе излагаются некоторые аспекты нелинейной теории упругости материальных сред как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Раскрываются истинные границы применимости классической теории упругости. Многие задачи о равновесии и устойчивости упругих материальных сред, как выяснилось, не могут быть поставлены в рамках этой теории, а входят в число задач нелинейной теории. В частности, вопросы, связанные с понятиями и критериями устойчивости, методами построения нелинейных уравнений равновесия в области упрочнения материалов входят в число задач, разрешаемых с помощью интегральных преобразований и процедур их интегрирования, с описанием техники экспериментальных исследований.

Во второй главе излагаются два подхода интегральных преобразований в краевых задачах теории упругости, применительно к торцам поперечного сечения тонкостенных трубчатых конструкций с заполнителем и для двумерных задач теории упругости бесконечной полосы, кручение и изгиб призмы, образованной пересечением двух круговых цилиндров. Вопросы изгиба тонких плит, а также некоторые смешанные задачи полосы, применительно к задачам расчета долговечности, прочности тонкостенных конструкций рассмотрены с точки зрения нелинейных деформационных процессов. В соответствии с этим основное внимание уделено нахождению эффективных, хотя и формальных результатов, полученных в предыдущем положении, что как искомые, так и заданные функции подчинены некоторым условиям общего характера. Во многих случаях можно непосредственно проверить, что найденные решения удовлетворяют всем поставленным условиям.

1.1.2. Основные понятия и аксиомы твердого тела при моделировании

Пусть под действием внешних нагрузок внутренняя точка тела переместилась на бесконечно малое расстояние, $\Delta\rho$ – деформация

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

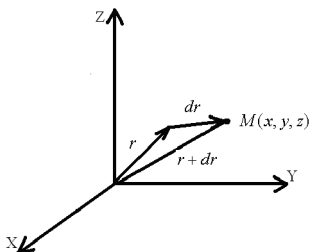


Рис. 1.

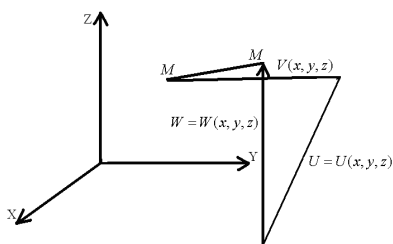


Рис. 2.

Функция перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \Delta V &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \Delta W &= \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Матрица компонентов перемещений, деформации и вращения представлена в виде

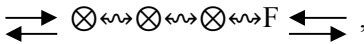
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_{xx} & \vec{e}_{xy} & \vec{e}_{xz} \\ \vec{e}_{yx} & \vec{e}_{yy} & \vec{e}_{yz} \\ \vec{e}_{zx} & \vec{e}_{zy} & \vec{e}_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

$$2w_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad 2w_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad 2w_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Постановка задачи. Пусть расстояние $|MM'|$ состоит из n -атомов (молекул), связанных между собой в упругой зоне. Тогда модель № 1



где $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ – масса сосредоточенных атомов или молекул, $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ – жесткость пружины; $\vec{F} = k\vec{w}$ – реактивная сила, находится в равновесном состоянии.

Аксиома 1. (аксиома инерции, I – закон Ньютона)

Равновесие – такое состояние тела, когда тело находится в состоянии покоя или прямолинейного и равномерного движения (т. е. по инерции). При действии внешних сил тело деформируется, изменяется взаимное расположение молекул, изменяется расстояние между ними, вызвавших деформацию.

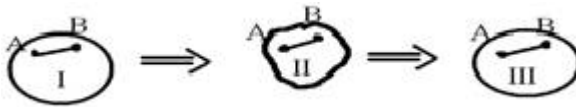


Рис. 3. I – состояние до деформации,
II – состояние после деформации

Замечание 1. Если из уравнений равновесия состояния (Ш) отнимем уравнения равновесия (II)-го состояния, то получим уравнение равновесия возмущенного состояния, а (I)-ое состояние называется начальным классическим состоянием [1].

Аксиома 2 (аксиома взаимодействия внутренних сил). Если одна часть тела действует на другое с некоторой силой, то вто-

рая часть одновременно действует на первую часть с силой, противоположной по направлению.

Определение 1. Предел отношения внутренней силы к площади, на которую она действует, называем напряжением в данной точке, нагруженного внешними силами.

Определение 2. Напряжение имеет единицу измерения Паскаль (Па). $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.

Замечание 2. По международной системе единиц (СИ) в качестве единицы измерения модулем силы установлен Ньютон, приблизительно $1 \text{ Н} = 102 \text{ см}^3$ чистой воды.

Замечание 3. Кратные и дольные единицы измерения силы образуются путем умножения или деления основной единицы на степень числа 10.

Согласно ГОСТу:

Т(тера) ... 10^{12} ,	г(гекто) ... 10^2 ,	м(милли) ... 10^{-3}
Г(гига) ... 10^9 ,	да(дека) ... 10^{10} ,	мк(микро) ... 10^{-6}
М(мега) ... 10^6 ,	д(деци) ... 10^{-1} ,	н(нано) ... 10^{-9}
К(кило) ... 10^3 ,	с(санти) ... 10^{-2} ,	п(пико) ... 10^{-12}

Например: Кн (килоньютон) = 10^3 Н

Мн (меганьютон) = 10^6 Н

мн (миллиньютон) = 10

Аксиома 3. (Условия равновесия бесконечно малого элемента тела).

Для равновесия бесконечно малого элемента тела, находящегося под действием двух напряжений, необходимо и достаточно, чтобы эти напряжения были приложены к точке в параллельных площадках и были противоположно направлены.

Определение 3. Способность тела сохранять свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения называется инерцией или инертностью.

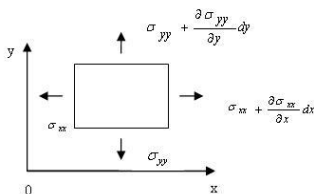


Рис. 4.

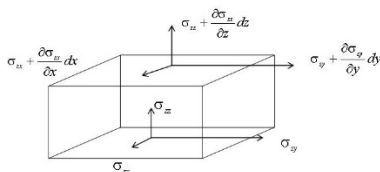


Рис. 5.

$$\sigma = \sigma(x, y, z) = \sigma_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k},$$

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz$$

$$d\sigma_{yy} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dz$$

$$d\sigma_{zz} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz$$

Тогда: на трех площадках $\perp$ к оси OX, OY, OZ

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$

↓

↓

↓

Тензор напряжения, девиатор тензора, напряжений шаровой тензор

$$S = \ddot{A}_s + \ddot{A}_o,$$

здесь $\sigma_{xx} = Ne\sigma_{yy} = Nm\sigma_{zz} = Nn$,

e, m, n – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в системе координат x, y, z .

Уравнения равновесия по классической теории имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 & \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0 & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Для того чтобы получить достоверное значение о качестве функционирования модели необходимо исследовать информационные процессы. Научный и практический процесс представления ряда детализированных информационных показателей

эффективности математическо-компьютерной модели: точность, устойчивость, надежность [2].

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} = D_s + D_u,$$

где D_s – девиатор, D_u – шаровой тензор.

Определение 4. Уровень напряжений, при которых данный материал или конструкция не разрушаются, называется его прочностью (мы говорим о прочности куполов зданий, тоннелей, ракет, самолетов, ткани, обуви и т. д.).

Определение 5. Уровень напряжений, при которых данный материал или конструкция не разрушаются при переходе от одного состояния к другому под действием дополнительных сил называется его устойчивостью, т. е. под прочностью движения тел понимается его устойчивость.

Определение 6. На основании определения 4, прочностью называется способность материала конструкций и их элементов сопротивляться действию внешних сил, не разрушаясь.

Замечание 4. Практика показывает, что все части конструкции под действием нагрузок деформируются, т. е. изменяют свои размеры и форму, а в некоторых случаях происходит разрушение конструкции.

Определение 7. Расчеты на прочность дают возможность определить размеры и форму деталей, выдерживающих заданную нагрузку при наименьшей затрате материала.

Определение 8. Расчеты на устойчивость предотвращают возможность искривления при сжатии длинных деталей прямой формы.

На практике рассматривают так же методы расчета на жесткость. Расчеты на жесткость гарантируют, что изменения формы и размеров конструкции и их элементов не превзойдут допустимых норм.

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с элементами конструкции: брус, колонна, балка, стойка, стержень, пластика, оболочка.

Определение 9. Брус – тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Брусья бывают прямолинейные и криволинейные, постоянного и переменного сечения.

Определение 10. Брусья в технике называют колоннами, балками, стойками, стержнями.

1.2. Краткие общеобразовательные сведения из теории напряжений

1.2.1. Напряжения

Все твердые тела по структуре делятся на кристаллические, в которых атомы, ионы, молекулы образуют кристаллическую решетку с определенной периодической закономерностью в объеме, и аморфные, бывают вытянутыми, а атомы и молекулы удерживаются с помощью химических связей: ковалентной, ионной, металлической, водородной и др. Расстояние между двумя соседними атомами измеряется ангстремом (А). Атомы отстоят друг от друга на расстоянии $(1 \div 2)$ А, в зависимости от чего изменяются силы взаимодействия между ними (например, силы Ван-дер-Ваальса). На определенных расстояниях силы взаимодействия уравниваются. При увеличении расстояния по сравнению с равновесным силы притяжения вначале растут (в какой-то момент достигают наибольшего значения), а затем быстро уменьшаются. При сближении атомов на расстояния, меньшие равновесных, между ними возникают силы отталкивания [3]. Они нарастают довольно быстро до некоторого предельного значения, после которого дальнейшее сближение атомов становится практически невозможным.

Сказанное выше можно проиллюстрировать простейшей механической моделью линейной цепочки сосредоточенных масс, соединенных между собой безынерционными упругими элементами (пружинами) с заданными жесткостями $C_0, C_1, C_2 \dots$ (рис. 6).

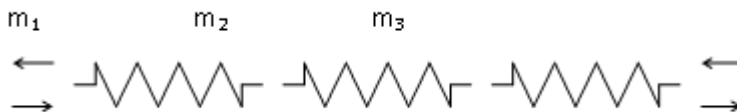


Рис. 6.

Если помимо упругих материал обладает вязкими свойствами (например, полимеры), то к упругим связям добавляются вязкие демпферы (поршень, движущийся в цилиндре с жидкостью). Описанный механизм взаимодействия атомов во многом объясняет поведение упругих (вязко-упругих) материалов при растяжении-сжатии. Равновесное состояние соответствует ненагруженному телу. При растяжении образца внешней силой расстояние между соседними атомами увеличивается, а при сжатии уменьшается. В обоих случаях происходит активное противодействие структурной цепочки внешней силы. Чтобы понять поведение твердых тел при нагружении, построим силовую модель твердого деформируемого тела. Принято считать, что все материалы представляют собой однородную сплошную среду независимо от особенностей их микроструктуры; линейные размеры элементов конструкций несоизмеримо больше не только межатомных расстояний, но и размеров возможных нарушений в структуре материала; материал – среда, непрерывным образом заполняющая отведенный ей объем, что позволяет применить к исследованию прочности материалов и конструкций математический аппарат бесконечно малых величин. Внутри тела, нагруженного произвольной системой внешних сил, выбирается произвольное сечение (например, плоское). Метод сечений, при котором данный объект мысленно расчленяется на две части, часто применяется при изучении различных вопросов математического естествознания и представляет собой не более, чем удачный прием. Силы F , с которыми одна часть тела действует на вторую мысленно отдельную часть, являются внутренними. Предел отношения внутренней силы к площади ΔS , на которую она действует, называется напряжением в данной точке, нагруженного внешними силами тела

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{F}{\Delta S}.$$

Напряжение имеет единицу измерения Паскаль (Па),

$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Растягивающие напряжения принимаются положительными, а сжимающие – отрицательными. Чаще всего известна внешняя нагрузка, которая действует на деталь из данного материала, и его предельно допускаемое напряжение $[\sigma]$. Задача конструктора заключается в выборе размеров и формы детали таким образом, чтобы напряжение $[\sigma]$ в наиболее опасной точке не превысило предельно допускаемое, т. е. $\sigma \leq [\sigma]$.

Обратимся к упругому цилиндрическому стержню конечной длины с постоянным поперечным сечением ($S = \text{const}$), растягиваемому силами F , приложенными к его торцам. Нормальное напряжение на площади, перпендикулярно к оси стержня, $\sigma_0 = \frac{F}{S}$. При заданной силе упругий стержень с большей пло-

щадью поперечного сечения испытывает меньшие напряжения, чем более тонкий стержень. Если растяжению подвергается стержень переменного поперечного сечения, то в самом тонком месте возникают наибольшие растягивающие напряжения: где тонко, там и рвется. Уровень напряжений, при которых данный материал или конструкция не разрушаются, характеризует его прочность. Мы говорим о прочности куполов зданий, тоннелей, мостов, ракет, самолетов, ткани, обуви; под прочностью движений тел понимается его устойчивость; прочностью оцениваются взаимоотношения людей и человеческие чувства. Довольно часто сейчас упоминается о стрессовом состоянии человека. Английское слово *stress* переводится как напряжение [4].

Статика – занимается изучением законов равновесия материальных точек: 1. Статика твердого тела; 2. Статика материальных систем (жидких, газообразных и упругих.)

Кинематика – изучает чисто геометрические формы механических движений материи без выяснения условий и причин, вызывающих эти движения.

Динамика – изучает движение в зависимости от физических факторов, обуславливающих его.

Механикой называют науку, изучающую механические движения.

Механическим движением называют перемещения вещественных форм материи в пространстве и во времени.

1.2.2. Напряженное состояние тела

Постановка задачи. Рассмотрим некоторое тело T , рассеченное плоскостью на две части A и B . Часть B после рассечения отбросим и выделим элементарную площадку dF . Направление этой площадки будем характеризовать внешней нормалью к ней (рис. 7):

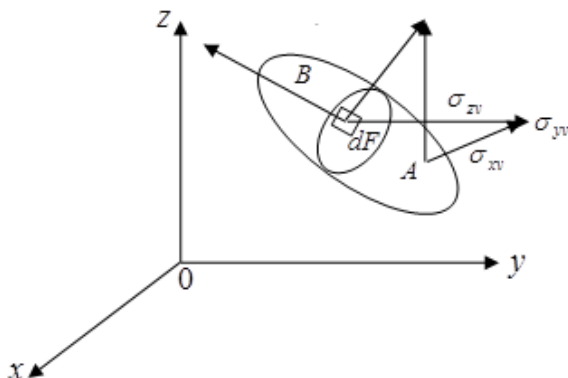


Рис. 7

Пусть σ – полное напряжение в данной точке на площадке dF . Тогда проекции напряжения σ_v на координатные оси будут: σ_{xv} – на ось Ox , σ_{yv} – на ось Oy , σ_{zv} – на ось Oz , где индекс v характеризует ориентировку площадки, напряжение на которой рассматривается [5]. В последующем чаще всего будем делать сечение, перпендикулярное к какой либо оси координат, тогда получим проекции полного напряжения на координатные оси $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$:

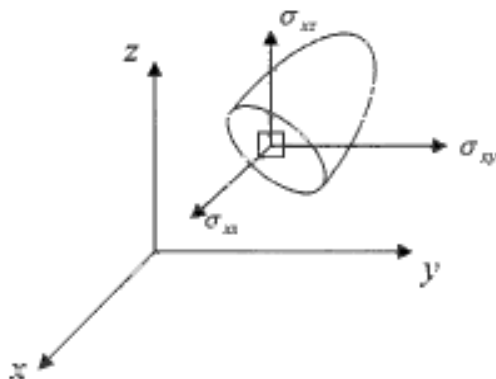


Рис. 8

Сделаем сечение, перпендикулярное к оси ОУ и получим проекции полного напряжения: $\sigma_{yy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}$ (рис.9):

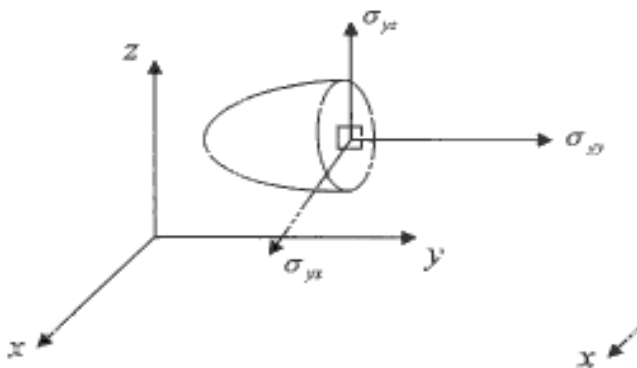


Рис. 9

Для сечения, перпендикулярного к оси ОZ, проекции полного напряжения будут: $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$:

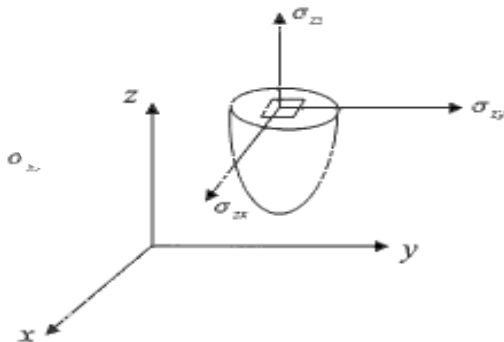


Рис. 10

Определение 1. Проекции полного напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ — называются нормальными напряжениями.

Определение 2. Проекции полного напряжения $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ — называются касательными напряжениями.

Таким образом, напряженное состояние тела в точке определяется проекциями полного напряжения в точке.

1.2.3. Дифференциальные уравнения равновесия

Из твердого тела выделим бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с тремя парами граней, параллельными координатным плоскостям. Ребра это параллелепипеда пусть будут dx, dy, dz , а объем $\Delta V = dx dy dz$.

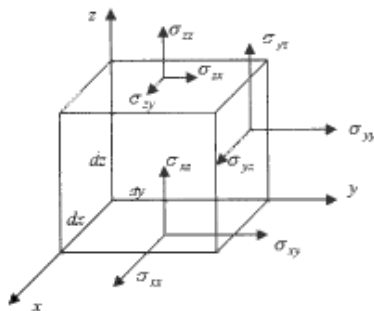


Рис. 11

На противоположных гранях проекции полного напряжения показаны на рис. 12.

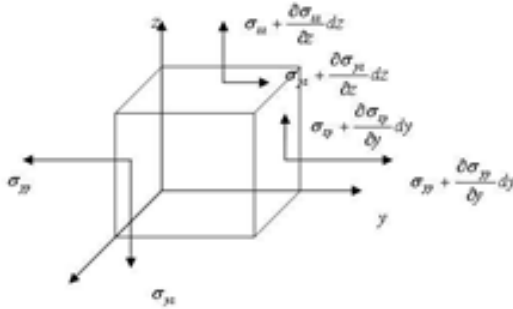


Рис. 12

Объемные силы, приходящиеся на массу параллелепипеда ρdV , будут:

$$\left. \begin{aligned} X\rho dV &= X\rho dx dy dz \\ Y\rho dV &= Y\rho dx dy dz \\ Z\rho dV &= Z\rho dx dy dz \end{aligned} \right\}, \text{ имеющих размерность } \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{см}^4},$$

где ρ – плотность тела в данной точке.

Так как $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z), \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y, z), \dots \sigma_{xz} = \sigma_{xz}(x, y, z)$, то

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} dz,$$

$$d\sigma_{yy} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} dz,$$

$$d\sigma_{zz} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz, \dots$$

$$d\sigma_{xy} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} dz.$$

Остальные формулы получаются при циклической замене $\vec{x} \vec{y} \vec{z}$.

Объединяя рис. 11 и рис. 12 имеем расчленение по площадкам.

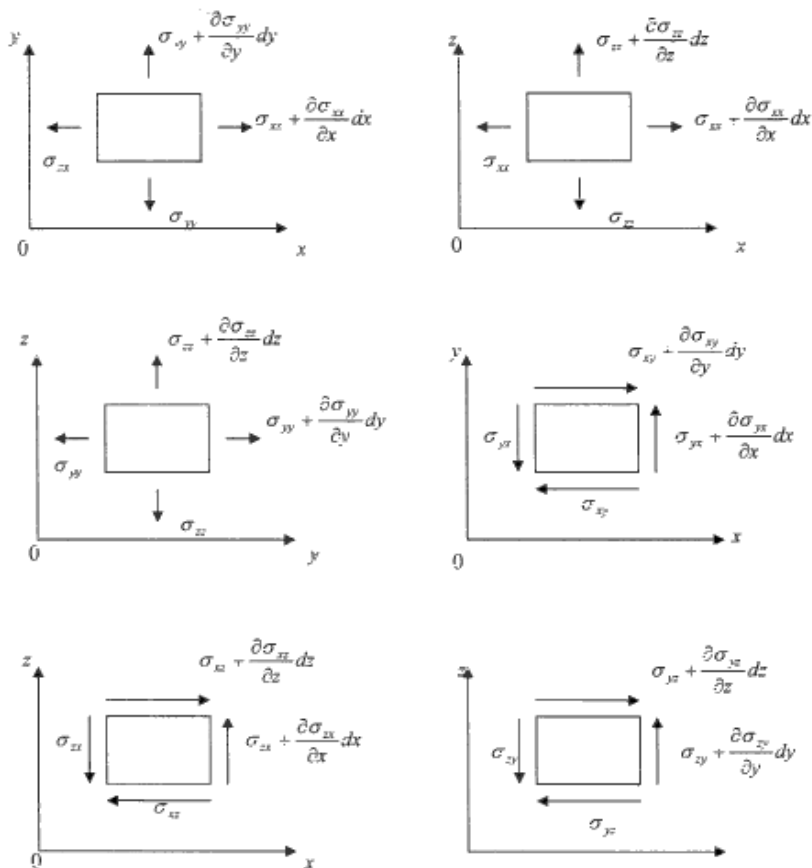


Рис.13

Предположим, что данное тело находится в равновесном состоянии, тогда каждый элемент должен удовлетворяться шести уравнениям равновесия статики:

$$\Sigma X = 0, \Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma Z = 0, \Sigma M_z = 0$$

Проектируя все внутренние и внешние силы на ось OX имеем:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \sigma_{xy} dx dz + \\ + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy - \sigma_{xz} dx dy + X p dx dy dz = 0 \left(= p dx dy dz \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)$$

$$\text{Откуда:} \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X p = 0 \left(= p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)$$

При помощи циклической подстановки получим уравнения.
И так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + pX &= 0 \left(= p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + pY &= 0 \left(= p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + pZ &= 0 \left(= p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Определение 3. Система дифференциальных уравнений (5) называется дифференциальным уравнением равновесия по классической теории.

1.2.4. Метод сечений и напряжений

В теоретической механике и в механике сплошных сред мы познакомились с методом сечений, слова поэта-философа В. Гете подтверждают, что «Живой предмет, желая изучить, чтобы ясное о нем познание получить, ученый прежде душу изгоняет, затем предмет на части расчлняет».

Метод сечений заключается в том, что тело мысленно разрезается на две части, любая из которых отбрасывается, и взамен нее к сечению прикладываются внутренние силы, действовавшие до разреза, оставшаяся часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием внешних и приложенных к сечению внутренних сил [6].

Примеры:

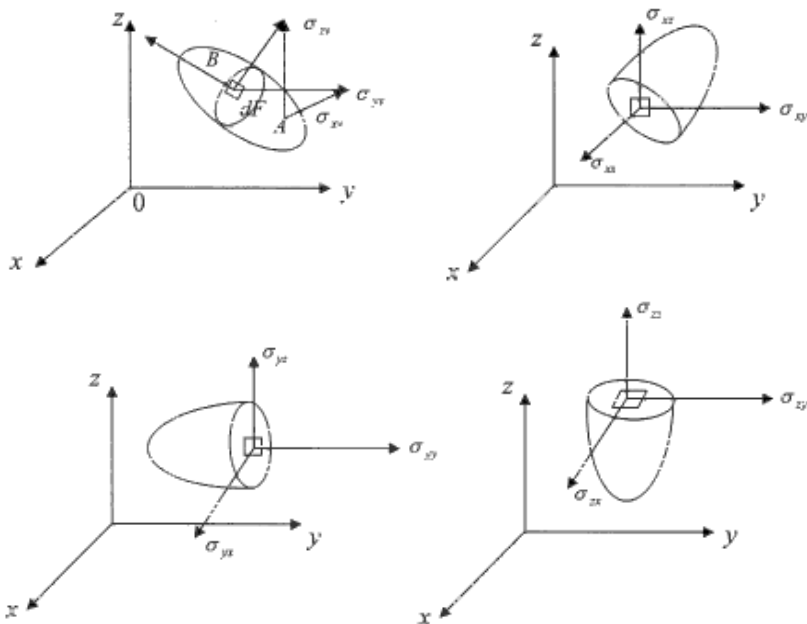


Рис. 14

1.2.5. Теория напряжений и гипотеза сечений

На рис.7 часть *A* оставляем, а часть *B* отбрасываем, тогда σ_v – полное напряжение в данной точке на площадке dF имеет вид

$$\vec{\sigma}_v = \sigma_{xv} \vec{i} + \sigma_{yv} \vec{j} + \sigma_{zv} \vec{k}.$$

В частности:

1) сечение $\perp$ к оси *OX* (рис. 8), полное напряжение в точке на площадке dF

$$\vec{\sigma} = \sigma_{xx} \vec{i} + \sigma_{xy} \vec{j} + \sigma_{xz} \vec{k},$$

2) сечение $\perp$ к оси *OY* (рис. 9), полное напряжение $\vec{\sigma}$ в точке на площадке dF

$$\vec{\sigma} = \sigma_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \sigma_{yz} \vec{k}$$

3) сечение к оси OZ (рис.10), полное напряжение $\vec{\sigma}$ в точке на площадке dF

$$\vec{\sigma} = \sigma_{xx} \vec{i} + \sigma_{xy} \vec{j} + \sigma_{xz} \vec{k}$$

Если $\sigma = \sigma(x, y, z)$, то

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{xx} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz \\ d\sigma_{yy} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dz \\ d\sigma_{zz} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \\ d\sigma_{xy} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz \\ d\sigma_{yz} &= \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dz + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx \\ d\sigma_{zx} &= \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dy \end{aligned} \right\}.$$

Пусть $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ — объемная сила. Тогда $X\rho dV = X\rho dx dy dz$, $Y\rho dV = Y\rho dx dy dz$, $Z\rho dV = Z\rho dx dy dz$.

Замечание: Если возьмем бесконечно малый параллелепипед объемом dV , то уравнения равновесия будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + pX &= 0 \left(= p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + pY &= 0 \left(= p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + pZ &= 0 \left(= p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1.2.6. Условия на поверхности

Рассмотрим бесконечно малый элемент, выделенный из данного тела (рис. 5) тремя плоскостями, параллельными координатным осям. Теперь пересечем бесконечно малый элемент четвертой плоскостью, пересекающей все три оси, в результате получим тетраэдр или треугольную пирамиду.

$$\left. \begin{aligned} S_{abc} &= dS \\ S_{oab} &= dS \cos(v, \wedge z) \\ S_{obc} &= dS \cos(v, \wedge x) \\ S_{oac} &= dS \cos(v, \wedge y) \end{aligned} \right\}.$$

Откуда $\Sigma x = 0 \Rightarrow \Sigma y = 0 \Rightarrow \Sigma z = 0 \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{vx} &= \sigma_{xx} e + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n \\ \sigma_{vy} &= \sigma_{yx} e + \sigma_{yy} m + \sigma_{yz} n \\ \sigma_{vz} &= \sigma_{zx} e + \sigma_{zy} m + \sigma_{zz} n \end{aligned} \right\}$$

и составляем таблицу.

Таблица 1

	X	y	Z
V	E	m	N
σ_{vx}	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{xz}
σ_{vy}	σ_{yx}	σ_{yy}	σ_{yz}
σ_{vz}	σ_{zx}	σ_{zy}	σ_{zz}

$$\sigma_{vx} = \sigma_{xx} e + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n \quad \xrightarrow{x \rightarrow y \rightarrow z} \quad (7)$$

Таблица 2

	$dx = \xi$	$dy = \eta$	$dz = \zeta$
σ_v	σ_ξ	σ_η	σ_ζ
N	$\cos(n, \wedge x)$	$\cos(n, \wedge y)$	$\cos(n, \wedge z)$
N	$\frac{d\eta d\zeta}{2dF}$	$\frac{d\xi d\zeta}{2dF}$	$\frac{d\xi d\eta}{2dF}$

$$\sigma_n = \sigma_\xi \cos(n, ^\wedge x) + \sigma_\eta \cos(n, ^\wedge y) + \sigma_\zeta \cos(n, ^\wedge z) \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) называются условиями на поверхности.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_{xx}e^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\sigma_{xy}em + 2\sigma_{xz}en + 2\sigma_{yz}mn \\ \Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\zeta^2 + 2\sigma_{yz}\eta\zeta + 2\sigma_{zx}\zeta\xi + 2\sigma_{xy}\xi\eta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Формула (9) называется поверхностью напряжения Коши.

Инварианты напряжения при переходе из одной системы координат к другой

$$J_1 = (\sigma_{xx} - \sigma_v) + (\sigma_{yy} - \sigma_v) + (\sigma_{zz} - \sigma_v) - \text{первый}$$

линейный инвариант;

$$J_2 = -\frac{I}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy} + \sigma_{yz} + \sigma_{zx})^2] -$$

второй квадратичный инвариант;

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_v & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_v & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_v \end{vmatrix} - \text{третий кубический инвариант.} \quad (10)$$

Замечание 1. Если данная площадка abc на плоскости xuz – главная, то полное напряжение Pv – в направлении внешней нормали v имеет проекции:

$$\sigma_{xv} = Nl, \quad \sigma_{yv} = Nm, \quad \sigma_{zv} = Nn, \quad (11)$$

тогда характеристическое уравнение перехода из xuz в $x'y'z'$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - N & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow N^3 - AN^2 + BN - C = 0,$$

где

$$A = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, B = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Замечание: Если из характеристического уравнения определим N_1, N_2, N_3 – как действительные числа, то $N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 = \pm c$ – главная площадка.

1.3. Поверхность Коши. Формулы компонентов напряжения или переход от одной системы к другой

Уравнения равновесия (5) связывают между собой напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям. Если они не наклонены параллельно координатным плоскостям, то получим другие соотношения.

Для получения таких соотношений рассмотрим бесконечно малый элемент, выделенный из данного твердого тела тремя плоскостями параллельными координатным, и четвертой плоскостью, пересекающей все три оси [7].

$$S_{abc} = ds,$$

$$S_{oab} = ds \cos(\nu, \hat{z})$$

$$S_{obc} = ds \cos(\nu, \hat{x})$$

$$S_{oac} = ds \cos(\nu, \hat{y})$$

Если обозначим $\cos(\nu, \hat{x}) = l, \cos(\nu, \hat{y}) = m, \cos(\nu, \hat{z}) = n$, то имеем:

$$\sigma_\nu = \sigma_{vxi} + \sigma_{vym} + \sigma_{vzm}. \quad (12)$$

Тогда $\sum X=0$ даст

$$\begin{aligned}\sigma_{vx} &= \sigma_{xx} l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n \\ \sigma_{vy} &= \sigma_{yx} l + \sigma_{yy} m + \sigma_{yz} n \\ \sigma_{vz} &= \sigma_{zx} l + \sigma_{zy} m + \sigma_{zz} n\end{aligned}\quad (13)$$

Из формул (12) и (13) составим таблицу.

Таблица 3

	X	y	Z
V	L	m	N
σ_{vx}	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{xz}
σ_{vy}	σ_{yx}	σ_{yy}	σ_{yz}
σ_{vz}	σ_{zx}	σ_{zy}	σ_{zz}

откуда

$$\sigma_{vx} = \sigma_{xx} l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n, \sigma_{vy} = \sigma_{yx} l + \sigma_{yy} m + \sigma_{yz} n, \sigma_{vz} = \sigma_{zx} l + \sigma_{zy} m + \sigma_{zz} n, \quad (14)$$

так как

$$\begin{aligned}\xi &= dx \\ \eta &= dy \\ \varepsilon &= dz,\end{aligned}\quad (15)$$

то из формулы (14) имеем

Таблица 4

	$\varepsilon = dx$	$\eta = dy$	$\xi = dz$
σ_v	σ_ε	σ_η	σ_ξ
N	$\cos(n, x)$	$\cos(n, y)$	$\cos(n, z)$
N	$\frac{d\eta dy}{2dS}$	$\frac{d\xi dy}{2dS}$	$\frac{d\xi d\eta}{2dS}$

откуда

$$\sigma_n = \sigma_\varepsilon \cos(\vec{n}, \wedge k) + \sigma_\eta \cos(\vec{n}, \wedge y) + \sigma_\xi \cos(\vec{n}, \wedge z) . \quad (16)$$

Определение: Формулы (13) и (16) называются условиями на поверхности.

Если рассмотрим систему координат $x'y'z'$, полученный из x,y,z путем линейного преобразования векторов матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \text{ то имеем следующие таблицы}$$

Таблица 5

	X	Y	Z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Таблица 6

	X	y	Z
$\sigma_{xx'}$	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{xz}
$\sigma_{yx'}$	σ_{yx}	σ_{yy}	σ_{yz}
$\sigma_{zx'}$	σ_{zx}	σ_{zy}	σ_{zz}
$\sigma_{xy'}$	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{xz}
$\sigma_{yy'}$	σ_{yx}	σ_{yy}	σ_{yz}
$\sigma_{zy'}$	σ_{zx}	σ_{zy}	σ_{zz}
$\sigma_{xz'}$	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{xz}
$\sigma_{yz'}$	σ_{yx}	σ_{yy}	σ_{yz}
$\sigma_{zz'}$	σ_{zx}	σ_{zy}	σ_{zz}

откуда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx'} &= \sigma_{xx} l_1 + \sigma_{xy} m_1 + \sigma_{xz} n_1 \\ \sigma_{yx'} &= \sigma_{yx} l_1 + \sigma_{yy} m_1 + \sigma_{yz} n_1 \\ \sigma_{zx'} &= \sigma_{zx} l_1 + \sigma_{zy} m_1 + \sigma_{zz} n_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Определение: (17) – называются уравнениями на поверхности, полученные в системе координат xuz , когда вектор $\vec{x}(x', y', z')$ получен от вектора $\vec{x}(x, y, z)$ путем линейного преобразования векторов матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} - \text{направляющие косинусы.}$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{xx}l_2 + \sigma_{xy}m_2 + \sigma_{xz}n_2 \\ \sigma_{yy'} &= \sigma_{yx}l_2 + \sigma_{yy}m_2 + \sigma_{yz}n_2 \\ \sigma_{zy'} &= \sigma_{zx}l_2 + \sigma_{zy}m_2 + \sigma_{zz}n_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Определение: (18) – называются уравнениями на поверхности, когда $\vec{y}(x', y', z')$ с направляющими косинусами, (e_2, m_2, n_2) получен от вектора $\vec{y}(x, y, z)$ путем линейного преобразования векторов.

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz'} &= \sigma_{xx}l_2 + \sigma_{xy}m_2 + \sigma_{xz}n_2 \\ \sigma_{yz'} &= \sigma_{yx}l_2 + \sigma_{yy}m_2 + \sigma_{yz}n_2 \\ \sigma_{zz'} &= \sigma_{zx}l_2 + \sigma_{zy}m_2 + \sigma_{zz}n_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Определение: (19) – называются уравнениями на поверхности, когда $\vec{z}(x', y', z')$ с направляющими косинусами, (l_2, m_2, n_2) получен от вектора $\vec{z}(x, y, z)$ путем линейного преобразования векторов.

Формулы (12) и (16) называются условиями на поверхности, а формулы (17) и (18) уравнениями на поверхности. Что за поверхность напряжений?

Их условия на поверхности

$$\begin{aligned} \sigma_v = & \sigma_{ix}e + \sigma_{iy}m + \sigma_{iz}n = (\sigma_{xx}e + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n)e + \\ & + (\sigma_{yx}e + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n)m + (\sigma_{zx}e + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n)n \end{aligned} \quad (20)$$

Определение: Формула (20) называется формулой поверхности полного напряжения в системе координат xuz .

Замечание: Из аналитической геометрии известно, что

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

есть общее уравнение кривых второго порядка, а уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

есть уравнение поверхности второго порядка. Тогда, если предположить $e = x; m = y; n = z$, то (20) – есть уравнение поверхности напряжений при параллельном переносе координат xuz .

Аналогично из условий на поверхности (17) имеем

$$\sigma_{xx'} = \sigma_{xx}e_1 + \sigma_{yx}m_1 + \sigma_{zx}n_1 = \left| \text{на основании формулы (17)} \right| = \sigma_{xx}e_1^2 \quad (21)$$

Аналогично из условия на поверхности (18) имеем

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{xx}e_2 + \sigma_{yx}m_2 + \sigma_{zx}n_2 = \left| \text{на основании формулы (17)} \right| = \sigma_{xx}e_1e_2 \quad (22)$$

Аналогично из условия на поверхности (19) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{z'z'} = & \sigma_{xx}e_2 + \sigma_{yx}m_2 + \sigma_{zx}n_2 = \left| \text{на основании формулы (16)} \right| = \\ = & \sigma_{xx}e_1e_2 + \sigma_{yx}m_1m_2 + \sigma_{zz}n_1n_2 \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично из условия на поверхности (18) на основании вектора $y'(e_2, m_2, n_2)$ преобразуем и имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{y'y'} = & \sigma_{xy}e_2 + \sigma_{yy}m_2 + \sigma_{zy}n_2 = \left| \text{на основании формул (18)} \right| = \\ = & \sigma_{xx}e_2^2 + \sigma_{yy}m_2^2 + 2\sigma_{xz} \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично из условия на поверхности (19) на основании вектора $z'(e_2, m_2, n_2)$ преобразуем и имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{z'z'} = & \sigma_{xz}e_2 + \sigma_{yz}m_2 + \sigma_{zz}n_2 = \left| \text{на основании формул (19)} \right| = \\ = & \sigma_{xx}e_2^2 + \sigma_{yy}m_2^2 + \sigma_{zz}n_2^2 + 2\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (25)$$

Если формулу (18) преобразуем на основании вектора $z'(e_2, m_2, n_2)$, то имеем:

$$\sigma_{y'z'} = \sigma_{xx} e_2 e_2 + \sigma_{yy} m_2 m_2 + \sigma_{zz} n_2 n_2 + \sigma_{yz} (m_2 n_2 + m_2 n_2) + \sigma_{zx} (n_2 e_2 + n_2 e_2) + \sigma_{xy} (m_2 e_2 + m_2 e_2).$$

Определение: Проекция полного напряжения σ в системе координат xuz называется тензором напряжения, а проекция полного напряжения σ в системе координат $x'y'z'$ называется компонентами тензора напряжения.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix} - \text{тензор напряжения в системе координат } xuz,$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'} & \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & \sigma_{y'z'} \\ \sigma_{z'x'} & \sigma_{z'y'} & \sigma_{z'z'} \end{Bmatrix} - \text{компоненты тензора напряжения в системе}$$

координат $x'y'z'$.

Определение: Формулы (21) – (25) называются формулами поверхности компонентов напряжения при переходе от одной системы координат к другой по заданным направлениям [8].

Определение: Формулы

$$\sigma_v = \sigma_{xx} e^2 + \sigma_{yy} m^2 + \sigma_{zz} n^2 + 2\sigma_{xy} em + 2\sigma_{xz} en + 2\sigma_{yz} mn$$

и

$$\phi(\varepsilon, \eta, \xi) = \sigma_{xx} \varepsilon^2 + \sigma_{yy} \eta^2 + \sigma_{zz} \xi^2 + 2\sigma_{yz} \eta \varepsilon + 2\sigma_{zx} \varepsilon \xi + 2\sigma_{xy} \xi \eta \quad (26)$$

называются условиями на поверхности напряжений Коши (поверхность Коши).

Определение: Компоненты тензора напряжения $\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}, \sigma_{z'z'}$ – называются напряжениями главного направления.

Например: Из аналитической геометрии используем связь между векторами $\vec{x}$ и $\vec{x'}$ на плоскости в виде табл.7.

Таблица 7

	X	y
x'	α	$\alpha + \frac{\pi}{2}$
y'	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	α
x'	$e_1 = \cos \alpha$	$m_1 = -\sin \alpha$
y'	$e_2 = \sin \alpha$	$m_2 = \cos \alpha$

Тогда

$$\sigma_{\nu} = \sigma_{xx}e^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\sigma_{xy}em + 2\sigma_{xz}en + 2\sigma_{yz}mn = \sigma_{\nu\nu}, \text{ откуда}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\nu\nu} &= \sigma_{xx} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{\mu\nu} &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\},$$

где x' – нормаль к треугольнику, y' – касательная по направлению тетраэдра

Откуда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \sin^2 \alpha_0 + \sigma_{xy} \sin 2\alpha_0 \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2 \alpha_0 + \sigma_y \cos^2 \alpha_0 - \sigma_{xy} \sin 2\alpha_0 \\ \sigma_{x'y'} &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha_0 + \sigma_{xy} \cos 2\alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Условие критических точек

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\alpha_0} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha_0 + \sigma_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (28)$$

1.4. Поверхность напряжения Коши. Наибольшие касательные напряжения. Октаэдрические площадки и октаэдрические напряжения

1.4.1. Поверхность напряжения Коши. Инварианты тензора напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sigma_{xx} l^2 + \sigma_{yy} m^2 + \sigma_{zz} n^2 + 2\sigma_{xy} lm + 2\sigma_{xz} ln + 2\sigma_{yz} mn; \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx} l_2^2 + \sigma_{yy} m_2^2 + \sigma_{zz} n_2^2 + 2\sigma_{xy} l_2 m_2 + 2\sigma_{xz} l_2 n_2 + 2\sigma_{yz} m_2 n_2; \\ \sigma_{y'x'} &= \sigma_{xx} l l_2 + \sigma_{yy} m l_2 + \sigma_{zz} n l_2 + \sigma_{xy} (l_2 m_l + l_l m_2) + \\ &+ \sigma_{xz} (l l_{n_2} + l_2 n_l) + \sigma_{yz} (m_l n_2 + m_2 n_l) \\ \sigma_{y'z'} &= \sigma_{xx} l l_2 + \sigma_{yy} m l_2 + \sigma_{zz} n l_2 + \sigma_{xy} (m_2 n_2 + m_2 n_2) + \\ &+ \sigma_{xz} (n_2 l_2 + n_2 l_2) + \sigma_{yz} (m_2 l_2 + m_2 l_2)\end{aligned}$$

Из аналитической геометрии известно, что если в системе координат $oxyz$ общее уравнение кривых имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (29)$$

то при переходе к системе координат $O'x'y'$, полученный от старой путем поворота на угол α , будет иметь вид

$$A'x'^2 + C'x'^2 + D'x'^2 + E'y' + F = 0,$$

при этом инварианты будут:

$$I_1 = A + C = A' + C',$$

$$I_2 = AC - B^2 = A'C' - B'^2,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} A & B & \frac{1}{2}D \\ B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' & \frac{1}{2}D' \\ B' & C' & \frac{1}{2}E' \\ \frac{1}{2}D' & \frac{1}{2}E' & F' \end{vmatrix},$$

когда $tg 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$.

Следовательно, если $AC - B^2 > 0$, то эллиптический тип; если $AC - B^2 < 0$, то гиперболический тип; если $AC - B^2 = 0$, то параболический тип.

При этом в системе координат $x'y'B = 0$ и произведение x у отсутствует.

Если поверхность 2-го порядка имеет вид:

$$a_1x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (30)$$

то в системе координат $x'y'z'$ квадратичная форма записывается из преобразования векторов $\vec{x} = A\vec{x}$, $\vec{y} = A\vec{y}$, $\vec{z} = A\vec{z}$, где A матрица линейного преобразования векторов,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Затем составляется характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

при каждом значении $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — определяют главные направления системы координат $x'y'z'$, на которых произведения xy, xz, yz отсутствуют, этот метод применим для теории напряжений.

Постановка задачи. В выбранной точке тела M поместим начало координат, проведем элементарную площадку с внешней нормалью ν и вдоль этой нормали построим вектор P , которую временно оставим неопределенной [9].

Координаты конца этого вектора будут:

$$dx = \xi = pl; dy = \eta = pm; dz = \zeta = pn,$$

где l, m, n – косинусы углов нормали к осям координат. Тогда нормальное напряжение в системе координат $x'y'z'$, полученный путем преобразования векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ в вектора x', y', z' будет:

$$\sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\zeta^2 + 2\sigma_{yz}\eta\zeta + 2\sigma_{zx}\xi\zeta + 2\sigma_{xy}\xi\eta = p^2\sigma_v. \quad (31)$$

Другие составляющие получаются из (31) путем циклической подстановки $\zeta, \eta, \xi; x, y, z$.

Коши предложил взять поверхность напряжений

$$p^2\sigma_v = \pm c^2,$$

$$\text{тогда } \sigma_{xx}\xi^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\zeta^2 + 2\sigma_{yz}\eta\zeta + 2\sigma_{zx}\xi\zeta + 2\sigma_{xy}\xi\eta = \pm c^2. \quad (32)$$

Определение 1. Формула (32) называется «поверхностью напряжений» или «квадрикой Коши», которая изображает поверхность второго порядка (см. формулу (30))

При этом при переходе из системы координат xuz в систему координат $x'y'z'$ (путем поворота на угол α), получим следующие инварианты (по аналогии из аналитической геометрии):

$$I_1 = I'_1 = (\sigma_{xx} - \sigma_v) + (\sigma_{yy} - \sigma_v) + (\sigma_{zz} - \sigma_v) = 0, \quad (33)$$

(33) – называется первым линейным инвариантом,

$$I_2 = I'_2 = -\frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy} + \sigma_{yz} + \sigma_{zx})^2] \quad (34)$$

(34) – называется вторым (квадратичным) инвариантом,

$$I_3 = I'_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_v & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_v & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_v \end{vmatrix} \quad (35)$$

(35) – называется третьим (кубичным) инвариантом.

1.4.2. Наибольшие касательные напряжения

Займемся определением наибольших касательных напряжений. Для простоты исследования снова направим оси координат ox, y, z по нормальям главных площадок. Выберем произвольную площадку с внешней нормалью ν , определяемой косинусами l, m, n . Тогда полное напряжение σ_ν будет иметь проекции:

$$\sigma_{x\nu} = N_1 l; \sigma_{y\nu} = N_2 m; \sigma_{z\nu} = N_3 n.$$

При этом нормальное напряжение: $\sigma_\nu = N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2$.

Если обозначим через $\sigma_{\tau\nu}$ – полное касательное напряжение на взятой площадке, то $\sigma^2 = \sigma_\nu^2 + \sigma_{\tau\nu}^2$, (36)

$$\text{следовательно, } \sigma_{\tau_1} = \pm \frac{N_3 - N_2}{2}; \sigma_{\tau_2} = \pm \frac{N_1 - N_2}{2}; \sigma_{\tau_3} = \pm \frac{N_1 - N_3}{2},$$

здесь $\sigma_{\tau_1}, \sigma_{\tau_2}, \sigma_{\tau_3}$ – наибольшие касательные напряжения по главным площадкам.

Итак, максимальные касательные напряжения равны полуразностям главных напряжений по двум площадкам, пересекающимся вдоль той из осей x, y, z через которую проходит данная площадка $\max \sigma_\tau$

Из формулы (36) имеем:

$$\sigma_{\tau\nu}^2 = (N_1^2 l^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2) - (N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2)^2, \quad (37)$$

$$\sigma_{xx}\varepsilon^2 + \sigma_{yy}\eta^2 + \sigma_{zz}\xi^2 + 2\sigma_{yz}\eta\xi + 2\sigma_{zx}\xi\varepsilon + 2\sigma_{xy}\varepsilon\eta = \Phi(\varepsilon, \eta, \xi). \quad (38)$$

Определение 1. Если из формул (37) и (38) определим напряжения на площадках, равно наклоненных к главным площадкам с направляющими косинусами,

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то таких площадок будет восемь, их называют октаэдрическими площадками, а напряжения на них октаэдрическими напряжениями.

Определение 2. Полное напряжение с внешней нормалью к октаэдрическим площадкам ν будет:

$$N_0 = \sigma_\nu = \frac{I}{3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})} . \quad (39)$$

Определение 3. Квадрат касательного октаэдрического напряжения σ_T будет:

$$\sigma^2_{T^2} = \frac{1}{9}[(N_1 - N_2)^2 + (N_3 - N_2)^2 + (N_2 - N_1)^2] .$$

1.4.3. Шаровой тензор и девиатор напряжений

Определение 4. Октаэдрическое нормальное напряжение называют средним нормальным напряжением в данной точке тела и обозначают через N_0 (см. формулу (39)).

Определение 5. Если построим напряженное состояние в данной точке, выражая тензором напряжений N_0 :

$$w = \begin{pmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{pmatrix} , \quad (40)$$

то тензор напряжений (40) называется шаровым тензором напряжений, так как поверхность напряжений Коши в повернутой системе координат будет шаром.

Определение 6. Если построим напряженное состояние в данной точке в общем случае:

$$(S) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} , \quad (41)$$

то тензор напряжений (41) называется тензором напряжения в общем случае или произвольным тензором напряжений в точке.

Определение 7. Если построим напряженное состояние в данной точке, выражая тензором

$$(D_s) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - N_0 & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - N_0 \end{pmatrix},$$

то тензор (D_s) называется девиатором тензора напряжений.

Исходя из определений 5–7 тензор напряжений в общем случае можно записать в виде

$$(S) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - N_0 & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - N_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{pmatrix}.$$

Выводы:

Геометрические смыслы:

а) шаровой тензор выделяет из произвольного напряженно-го состояния равномерное всестороннее растяжение(сжатие) во всех направлениях, при котором изменяется лишь объем данного элемента тела без изменения его формы;

б) девиатор напряжений выражает такое состояние элемента, при котором изменяется форма элемента без изменения объема;

с) произвольный тензор напряжений выражает изменение объема данного элемента тела без изменения его формы и изменения формы элемента без изменения его объема.

Замечание. Исходя из геометрических смыслов шарового тензора, девиатора напряжений легко доказываются инварианты тензора напряжений: первый линейный инвариант (33), второй (квадратичный) инвариант (34), третий (кубичный) инвариант (35).

1.5. Геометрия деформации, деформация удлинения, деформация сдвига уравнения неразрывности деформации

1.5.1. Общая постановка задачи и типы ее решения с точки зрения классической теории упругости. Геометрия деформации

Возьмем какое-либо тело и закрепим его так, чтобы оно не могло перемещаться, как тело абсолютно твердое. Тогда перемещения всякой его точки будут вызываться деформациями под действием внешней силы.

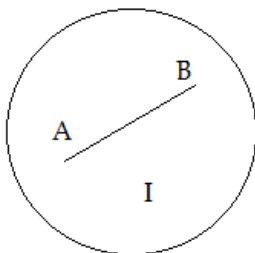


Рис. 15

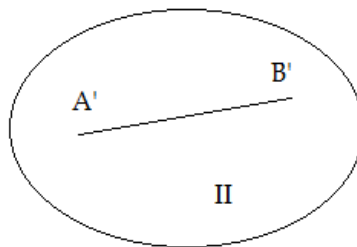


Рис. 16

На рис. 15 и 16 даны положения точек тела в первоначальном (до деформации) состоянии и даны их положения в окончательном состоянии после деформации. Нужно определить изменения расстояния между двумя произвольными бесконечно близкими точками этого тела, обусловленного переходом из I-го состояния во II-ое состояние [10].

В координатной системе $oxyz$, благодаря произошедшей деформации точка $M(x,y,z)$ перемещается в новое положение $M'(x+U,y+V,z+W)$ на оси координат через U , проекции перемещения будут функциями от координат точки: $U=U(x,y,z)$, $V=V(x,y,z)$, $W=W(x,y,z)$. От перемещений переходим к деформациям.

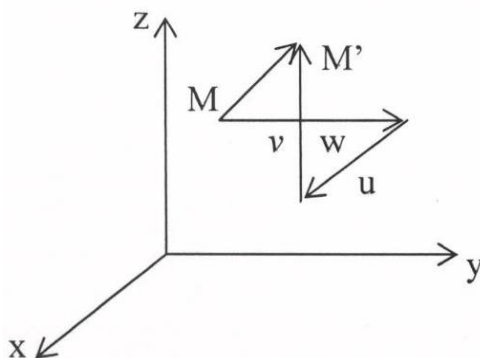


Рис. 17

1.5.2. Деформация материала в точке

Рассмотрим цилиндрический образец, у которого поперечный размер во много раз меньше его длины. Его левый торец жестко закреплен, а на правый вдоль оси Ox действует растягивающая (или сжимающая) сила F (рис.19).

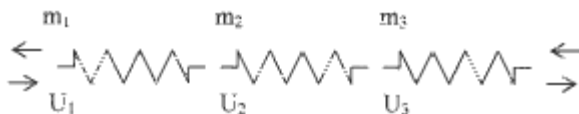


Рис.18

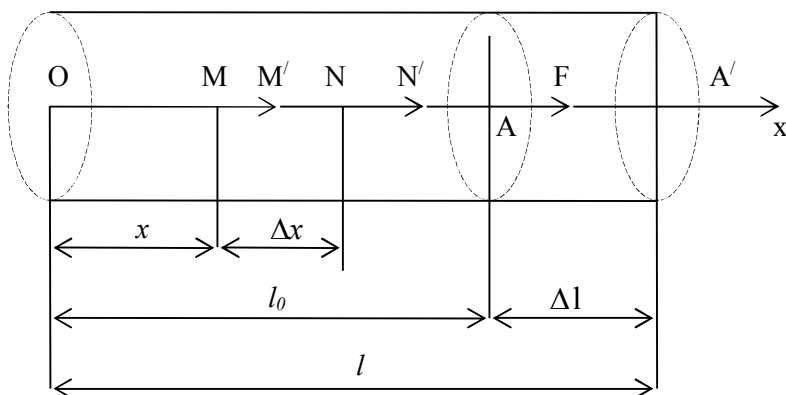


Рис. 19

Мысленно выберем на Ox цилиндрического образца две произвольные точки M и N , находящиеся на малом расстоянии Δx друг от друга (до деформации). В точке A на правом торце сила F действует вдоль оси Ox . Будем постепенно (или шагами) увеличивать ее. Образец начнет растягиваться так, что точка M перейдет в положение M' , а точка N в положение N' . Обозначим перемещение материальной точки M вдоль оси Ox через $U(x)$, а аналогичное перемещение частицы N – через $U(x + \Delta x)$, считая их малыми отклонениями от равновесного положения (вспомним линейную цепочку точечных масс, соединенных

между собой упругими пружинами, показанную на рис.19). Рассмотрим относительное перемещение этих точек $U(x + \Delta x) - U(x) = \Delta U$, получаемое в процессе растяжения, эквивалентное относительному перемещению двух соседних точечных масс в механические модели.

Определение 1. Предел отношения (если он существует) называется относительной деформацией удлинения стержня в точке с координатой x и обозначается через $\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}$. Очевидно, что деформация – величина безразмерная. При растяжении образца значение ε_x принимается положительным ($\varepsilon_x > 0$), а при сжатии – отрицательным ($\varepsilon_x < 0$).

Если стержень деформируется так, что его деформация не зависит от положения точек M и N по его длине, то деформация $\varepsilon_x = const$ считается однородной. Пусть первоначальная длина испытуемого стержня l_0 , текущая длина при его растяжении l , то абсолютное приращение длины $\Delta l = l - l_0$, причем $\Delta l > 0$. В этом частном случае осевая деформация $\varepsilon_x = \Delta l / l_0 > 0$, не зависит от координаты x . Иногда относительную деформацию стержня выражают в процентах: $\varepsilon_x = \Delta l / l_0 * 100 \%$.

Замечание 1. Так, для металлических материалов она составляет до 1 %; допустимая деформация сплавов значительно выше, а в резиноподобных материалах может достигать несколько сотен процентов.

Определение 1. При растяжение кругового цилиндрического образца первоначального диаметра d_0 в осевом направлении силы F он испытывает сужение в поперечном направлении с текущим диаметром в процессе испытаний d , отношение $(d - d_0) / d_0 < 0$ составляет поперечную деформацию и обозначается через $\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta y}$.

Определение 2. Отношение поперечной деформации ε_y к продольному удлинению ε_x называется коэффициентом Пуассона: $\varepsilon_y / \varepsilon_x = \nu$

Замечание 2. Для металлических и композиционных материалов ν изменяется от нуля до 0,5. В частности, для алюминия $\nu = 0,33$, для пластмассы $\nu = 0,015$, для винипласта $\nu = 0,354$, для натурального каучука $\nu = 0,47$, для бетона $\nu = 0,16$, для дерева $\nu = 0,43$.

Определение 3. Деформация в материале имеет место при тепловом и электромагнитном воздействии. Так, при нагревании образца длиной l_0 он испытывает относительную деформацию (продольное удлинение): $\Delta l / l_0 = \varepsilon_x = \alpha_T \Delta T$, где α_T – коэффициент линейного расширения материала; $\Delta T = T - T_0$ – повышение температуры среды от начальной температуры тела T_0 .

Ниже приведены значения коэффициента α_T линейного расширения для некоторых распространенных материалов $10^{-6} 1/^\circ\text{C}$. Титан – 8, медь – 18, бронза – 16, пластмасса – 3, каучук – 50, бетон – 10.

$$\text{Аналогично в пространстве } \varepsilon_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}.$$

Замечание 3. Значительные деформации материала возникают при быстрых режимах нагревания или охлаждения (закалка). Даже незначительные по интенсивности тепловые потоки вызывают необратимые тепловые деформации ε_x .

Замечание 4. Образцы, помещенные в постоянные или переменные магнитные поля, испытывают относительные деформации (рис. 20). Так, относительная деформация для никелевого образца $\varepsilon_x = 4 \cdot 10^{-5}$, а для феррит-гранат тербия $\varepsilon_x = 10^{-3}$. Она может оказаться существенной при разработке приборов, контролирующих малые перемещения (например, в механических приводах точных устройств). Материалы с такой относительной деформацией нашли применение в системах управления лазерным лучом, в котором для перемещения зеркал лазеров требуются миниатюрные двигатели микроперемещений [11]. В некоторых случаях материалы испытывают комплексное воздействие: механическое, магнитное и температурное.

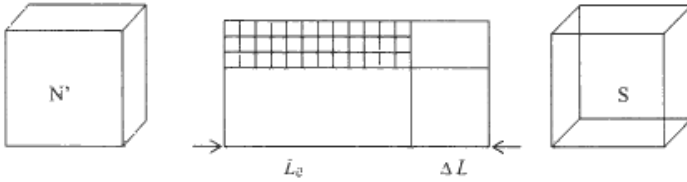


Рис.20

Пространственный случай. Выделим в упругом теле бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx , dy , dz (рис. 21). При деформации тела он переместится и сам деформируется, причем изменятся длины его ребер. Если мы имеем единичный куб, то он переходит в параллелепипед, со сторонами $1+e_{xx}$, $1+e_{yy}$, $1+e_{zz}$ (рис. 22–24).

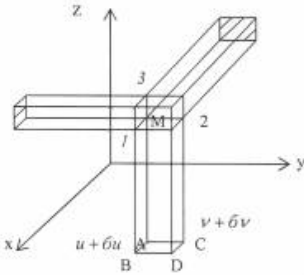


Рис. 21

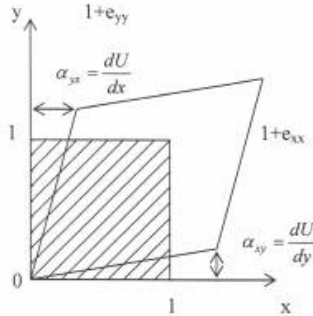


Рис. 22

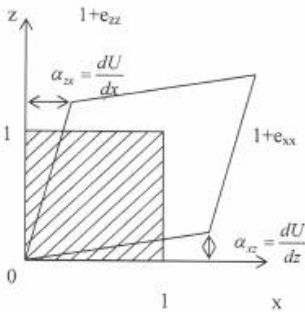


Рис. 23

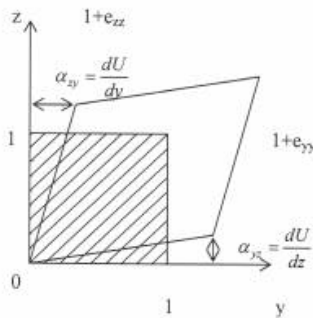


Рис. 24

Здесь

$$e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial U}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (42)$$

удлинения в данной точке тела по направлениям трех осей координат.

Перемещение точки A вдоль оси Ox равно U , то соответствующее перемещение точки B будет:

$$U + \delta U = U + \frac{\partial U}{\partial x} dx, \text{ где } \delta U - \text{приращение}$$

$$\Delta U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad \Delta V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\Delta W(x, y, z) = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz; \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{array} \right| = \bar{\varepsilon}.$$

Если перемещение точки A вдоль оси Oy будет V , то перемещение точки B вдоль той же оси будет $V + \delta V = V + \frac{\partial V}{\partial x} dx$.

Аналогично, если перемещение точки A вдоль оси Oz будет W , то перемещение точки B вдоль оси Oz будет: $W + \delta W = W + \frac{\partial W}{\partial x} dx$.

1.5.3. Деформация сдвига

Для более полного описания деформированного состояния материала в окрестности заданной точки (в предположении, что эти деформации малы), кроме относительных удлинений ε_x и ε_y вводят в рассмотрение относительный сдвиг γ под действием касательных напряжений (рис. 25).

Примерами такого сдвига могут быть: деформация стопки листов на столе; деформация полоски бумаги при резке ее ножницами; сдвиг (или срез) при разрушении заклепки в заклепочном соединении или болта в болтовом.

Прочность композиционных материалов зависит от типа их структуры, физического или фазового состояния, температуры и др. В высокоэластичном состоянии полимерные материалы испытывают большие деформации [12].

Характер развития деформации свидетельствует о том, что они обусловлены напряжением, вызывающие сдвиг одних слоев материала относительно других.

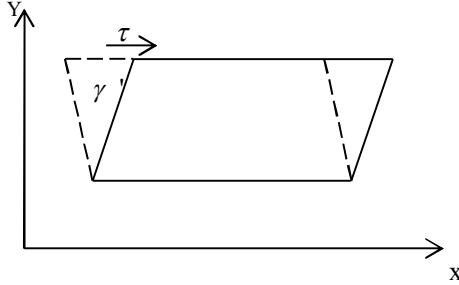


Рис. 25

Следовательно, деформации тела в данной точке $M(x,y,z)$ не только удлиняют линейные деформации ребер dx , dy , dz , но и первоначально прямые углы между гранями искажаются. Изменения углов называются сдвигами или угловыми деформациями, и обозначаются:

$$\alpha_{xx} = t_y \alpha_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y}, \alpha_{yz} = t_y \alpha_{zy} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (43)$$

Аналогично, при помощи циклической подстановки

$$\alpha_{yz} = t_y \alpha_{zy} = \frac{\partial V}{\partial z}, \alpha_{zx} = t_y \alpha_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x}, \alpha_{yx} = t_y \alpha_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x}, \alpha_{zy} = t_y \alpha_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (44)$$

$$\alpha_{zy} = t_y \alpha_{yz} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Из формул (43) и (44) Коши вывел формулы:

$$e_{xx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, e_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, e_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (45)$$

Определение 4. Формулы (45) называются относительными сдвигами деформации, при этом $e_{xy} = e_{yx}$, $e_{yz} = e_{zy}$, $e_{zx} = e_{xz}$; а формулы (42) называются относительными удлинениями деформации,

Определение 5. Шесть функций $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ называются компонентами деформации, которые линейно выражаются через девять частных производных от компонентов перемещений U, V, W .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix} = \bar{\varepsilon} \quad (\text{матрица перемещения}). \quad (46)$$

Определение 6. Иногда в формулах (42) и (45) вводятся половины углов сдвига $\bar{e}_{xy} = \frac{1}{2}e_{xy}$; $\bar{e}_{yz} = \frac{1}{2}e_{yz}$; $\bar{e}_{zx} = \frac{1}{2}e_{zx}$, и тогда отнесенные сдвиги запишутся в виде

$$2\bar{e}_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \quad 2\bar{e}_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \quad 2\bar{e}_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Определение 7. Если матрицу (46) напомним в виде:

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & \alpha_{yx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} & e_{yy} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} = \bar{\varepsilon},$$

то α_{yx} — указывает угол поворота элемента dx в направлении от оси y к оси x ; α_{zy} — указывает угол поворота элемента dy в направлении от оси z к оси y ;

α_{xy} — указывает угол поворота элемента dy в направлении от оси x к оси y ;

α_{xz} — указывает угол поворота элемента dx в направлении от оси x к оси z ;

α_{yz} — указывает угол поворота элемента dz в направлении от оси z к оси y ;

α_{yz} – указывает угол поворота элемента dz в направлении от оси z к оси y ;
и так: второй индекс при букве α указывает на тот элементарный отрезок (dx , dy , dz), поворот которого рассматривается; первый индекс указывает ось, в направлении которого происходит поворот [13].

Определение 8. Если из тела выделить элементарный кубик со сторонами равными $dx=dy=dz$, то углы поворота диагонали элементарного кубика относительно осей Ox , Oy , Oz на плоскостях yz , zx , xy называют компонентами вращения и обозначают:

$$2\omega_x = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Определение 9. Если компоненты вращения равны 0, т.е. $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, то $\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$. Тогда выражение

$Udx + Vdy + Wdz$ – является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x,y,z)$ и $U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $W = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

Определение 10. Если функция $\Phi(x,y,z)$ является полным дифференциалом, т. е. $d\Phi = Udx + Vdy + Wdz$, то имеется чистая деформация и перемещения имеют потенциал $\Phi(x,y,z)$ положительной величины (поле перемещений).

1.5.4. Уравнения неразрывности деформации

Таким образом, перемещение данной точки упругого тела определяется тремя функциями $U=U(x,y,z)$, $V=V(x,y,z)$, $W=W(x,y,z)$, а деформация в данной точке определяется шестью функциями e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} .

Замечание. Из уравнений (42) и (45) можем заключить, что если заданы перемещения, то из (45) можем определить деформацию (все шесть составляющих).

Замечание. Отсюда уже наперед можно предвидеть, что шесть составляющих деформации нельзя задать произвольно, так как между ними и перемещениями должны быть какие-то

зависимости, и они делятся на 2 группы, доказательство, которое вывел Сен-Венан.

I-ая группа неразрывности деформации:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad (47)$$

для доказательства используем формулу (45).

II-ая группа неразрывности деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}, \end{aligned} \quad (48)$$

Определение. Уравнения (47) и (48) называются уравнениями неразрывности или совместности деформации, или уравнениями Сен-Венана.

1.6. Геометрия деформации. Тензор относительных перемещений. Выражение компонентов вращения через деформации. Выражение тензора относительных перемещений через суммы тензоров чистой деформации жесткого вращения. Тензорный характер деформации тела в данной точке. Поверхность деформации

1.6.1. Тензор относительных перемещений – тензор малой деформации. Выражение компонентов вращения через деформации

Если по заданным нагрузкам найдем напряжения из уравнений равновесия и условий на поверхности, то можем определить деформации e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} .

Тогда будет необходимо одновременно удовлетворить уравнения неразрывности среды I-ой и II-ой группы. Если уравнения несов-

местности деформации не удовлетворены, то мы не можем найти перемещения $U = U(x, y, z)$, $V = V(x, y, z)$, $W = W(x, y, z)$ из

$$e_{zz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial U}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial U}{\partial z}, e_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, e_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, e_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (49)$$

так как в них будут взаимные противоречия. Необходимо рассмотреть этот вопрос подробно, введя компоненты вращения:

$$2\omega_x = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y};$$

на основании (49) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= e_{xx}; & \frac{\partial U}{\partial y} &= (\overline{e_{xy}} - \omega_z); & \frac{\partial U}{\partial z} &= (\overline{e_{xz}} + \omega_y) \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= (\overline{e_{xy}} + \omega_z); & \frac{\partial V}{\partial y} &= e_{yy}; & \frac{\partial V}{\partial z} &= (\overline{e_{yz}} - \omega_x) \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= (\overline{e_{xz}} - \omega_z); & \frac{\partial W}{\partial y} &= (\overline{e_{yz}} + \omega_x); & \frac{\partial W}{\partial z} &= e_{zz} \end{aligned} \right\}, \quad (50)$$

тогда матрица компонентов перемещения:

$$\overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \overline{e_{xy}} & \overline{e_{xz}} \\ \overline{e_{xy}} & e_{yy} & \overline{e_{yz}} \\ \overline{e_{xz}} & \overline{e_{yz}} & e_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 1. Первая симметричная матрица правой части определяет чистую деформацию (без вращения) и называется симметричным тензором чистой деформации.

Определение 2. Вторая симметричная матрица правой части определяет жесткий поворот тела (без деформации) и называется антисимметричным тензором жесткого вращения.

Определение 3. Матрица компонентов перемещения (левой части) называется тензором относительных перемещений, который равен сумме тензоров жесткой деформации и жесткого вращения.

Из уравнений (50) на основании (49) можем получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{e}_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{e}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xx}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{e}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{e}_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yy}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{e}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{yy}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{\partial \bar{e}_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{e}_{yz}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{e}_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{e}_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{e}_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{e}_{zx}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (51)$$

(51) называется формулой выражения компонентов вращения через компоненты деформации.

Замечание. Если продифференцируем уравнение (50) и исключим ω_x , ω_y , ω_z на основании (51), то опять получим уравнение Сен-Венана.

Таким образом, уравнения неразрывности деформации Сен-Венана являются необходимыми условиями для определения перемещения по заданным компонентам.

Условия Сен-Венана необходимы и достаточны для определения перемещения из деформаций. Тело должно быть односвязное, не имеющее сквозных полостей (сплошное).

Замечание. Если тело многосвязное, то кроме условий Сен-Венана, необходимо внести некоторые дополнительные условия, как этого требует физический характер задачи, чтобы перемещения были однозначны.

1.6.2. Девиатор деформации, инварианты девиатора деформации, конечная деформация. Общее понятие деформации кручения и явление изгиба на основе механических свойств компонентных материалов

Определение 4. Матрица вида

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{xx} & \overline{e_{xy}} & \overline{e_{xz}} \\ \overline{e_{xy}} & e_{yy} & \overline{e_{yz}} \\ \overline{e_{xz}} & \overline{e_{yz}} & e_{zz} \end{pmatrix} - \text{называется тензором деформации.}$$

Замечание. Аналогично тензор напряжения.

Определение 5. Если $e = \frac{1}{3}(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$ есть среднее

удлинение в данной точке, то матрица вида $(m_e) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

называется шаровым тензором деформации.

Определение 6. Матрица вида

$$(D_e) = \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \overline{e_{xy}} & \overline{e_{xz}} \\ \overline{e_{xy}} & e_{yy} - e & \overline{e_{yz}} \\ \overline{e_{xz}} & \overline{e_{yz}} & e_{zz} - e \end{pmatrix} - \text{называется девиатором деформации.}$$

Определение 7. Тензор деформации есть сумма девиатора деформации и шарового тензора деформации, т. е.

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \overline{e_{xy}} & \overline{e_{xz}} \\ \overline{e_{xy}} & e_{yy} - e & \overline{e_{yz}} \\ \overline{e_{xz}} & \overline{e_{yz}} & e_{zz} - e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = (D_e) + (m_e) \quad (52)$$

Геометрический смысл.

1. Шар деформации состоит в том, что элемент, выделенный в данной точке тела, получает одинаковые удлинения по всем

направлениям (поверхность деформации – шар); значит, элемент остается подобным себе, изменяя лишь объем;

2. Девиатор деформации характеризует формоизменение элемента, выделенного в данной точке тела, без изменения объема его.

3. Разложение (52) является не только формальной операцией; оно отражает физические свойства деформации, так как реальные материалы различно реагируют, в смысле прочности, на изменение объема и изменение формы.

1.7 Обобщенный закон Гука (гипотеза о естественном состоянии тела) и закон Гука. Выражение напряжений через деформации, выражение деформаций через напряжения, работа упругих сил и потенциал упругих сил

1.7.1. Обобщенный закон Гука (общие понятия)

Постановка задачи: нами были рассмотрены теория напряжений, а также теория перемещений и деформаций. Эти две теории сами по себе не могут служить для решения физических задач теории упругости о деформациях, которые происходят в упругом теле под действием приложенных к нему внешних сил, до тех пор, пока напряжения и деформации не связаны каким-либо физическим законом. Физический характер этого закона заключается в том, что он должен связать разнородные признаки изучаемого явления – напряжения и деформации.

Решение. В общем виде этот физический закон запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= f_1(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}), \\ \sigma_{yy} &= f_2(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}), \\ \sigma_{zz} &= f_3(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}), \\ \sigma_{yz} &= f_4(e_{xy}, e_{yx}, e_{xz}, e_{zx}, e_{yz}, e_{zy}), \\ \sigma_{zx} &= f_5(e_{xy}, e_{yx}, e_{xz}, e_{zx}, e_{yz}, e_{zy}), \\ \sigma_{xy} &= f_6(e_{xy}, e_{yx}, e_{xz}, e_{zx}, e_{yz}, e_{zy}). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

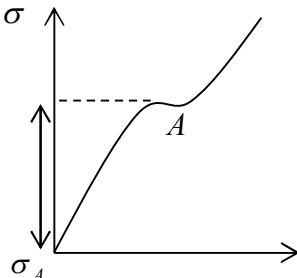


Рис. 26

Замечание 1. Для малых деформаций наиболее простой и рациональной формой зависимостей является линейная форма (53) (рис. 26), σ_n – напряжение (конечная точка А) – называется пределом пропорциональности.

Линейную форму зависимостей теперь можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= a_{11}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{33}e_{zz} + a_{23}e_{yz} + a_{31}e_{zx} + a_{12}e_{xy} \\ \sigma_{yy} &= a_{11}e_{xx} + a_{33}e_{zz} + a_{22}e_{yy} + a_{31}e_{zx} + a_{12}e_{xy} + a_{23}e_{yz} \\ \sigma_{zz} &= a_{33}e_{zz} + a_{11}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{12}e_{xy} + a_{23}e_{yz} + a_{31}e_{zx} \\ &\vdots \\ \sigma_{xy} &= a_{12}e_{xy} + a_{23}e_{yz} + a_{31}e_{zx} + a_{21}e_{yx} + a_{32}e_{zy} + a_{13}e_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Система (54) по самому своему существу формулирует закон независимости действий, например, напряжение σ_{xx} , возникшее при наличии нескольких компонентов деформаций $e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}$, равно сумме напряжений, возникающих от каждого из этих компонентов в отдельности.

Замечание: Физические тела по своему строению разделяются на однородные и неоднородные. Однородным называется тело, строение и состав которого одинаков во всех его точках.

Замечание. Однородные тела делятся на изотропные и анизотропные.

Изотропные тела – это тела, свойства которых одинаковы во всех направлениях, а анизотропными оказываются кристаллы: при однородности строения таких кристаллов их упругие и оптические свойства различны в разных направлениях.

Для изотропных тел формулы (54) получают наиболее простую форму. Следующая зависимость формируется законом упругости Гука для упругих стержней при растяжении и сжатии.

$$\sigma_{xx} = E e_{xx}, e_{yy} = e_{zz} = -\nu e_{xx}, \sigma_{yy} = E e_{yy}, \sigma_{zz} = E e_{zz},$$

где ν – есть безразмерное число, называемое коэффициентом Пуассона, E – модуль Юнга, $m = \frac{1}{\nu}$ – называется числом Пуассона.

Замечание. Коэффициент Пуассона всегда выражается правильной дробью, меньшей 0,5, $\sigma = \nu = \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$, в дальнейшем будем придерживаться обозначения ν .

Так же показано, что

$$\sigma_{xy} = G e_{xy}, \sigma_{yz} = G e_{yz}, \sigma_{zx} = G e_{zx}$$

этой зависимостью формируется закон Гука при сдвиге.

При этом коэффициент пропорциональности G носит название модуля упругости при сдвиге или модуля поперечной упругости, что

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Замечание: Из физико-механических свойств материала достаточно определить два коэффициента из трех: E – модуль Юнга и G – модуль сдвига, а третью выразить через них. На практике определяют E – модуль Юнга (размерность – $\frac{\text{ед}}{\text{м}^2}$) и G – модуль сдвига (размерность совпадает с размерностью напряжения, т. е. Паскаль), тогда коэффициент Пуассона (безразмерная величина) имеет вид

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1.$$

1.7.2. Выражение деформаций через напряжения

Постановка задачи: Пусть даны компоненты тензора деформаций и напряжений

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{yx} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{zx} & \bar{e}_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \text{ и } (\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

так называемая взаимосвязь их на основании закона Гука для изотропных материалов.

Решение: Начнем с нормальных напряжений и рассмотрим параллелепипед с ребрами, равными 1, подверженный действию нормальных сил по закону Гука. Если бы действовало только напряжение σ_{xx} , то относительное удлинение было бы

$e'_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$. При действии напряжения σ_{yy} удлинение вдоль

оси Ox составит $e''_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$. Аналогично под действием

напряжения σ_{zz} удлинение вдоль оси Ox имеем $e'''_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$.

Принимая без доказательства, закон независимости действия сил, получим полное удлинение вдоль оси Ox :

$$e_{xx} = e'_{xx} + e''_{xx} + e'''_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad \text{или}$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]. \quad (55)$$

Аналогично для удлинений по двум другим осям:

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \quad e_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]. \quad (56)$$

Определение 5. Формулы (55) и (56) выражают закон Гука для нормальных напряжений.

Если в формулах (55) и (56) прибавим в правых частях соответственно $\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{xx}$, $\nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{yy}$, $\nu\sigma_{zz} - \nu\sigma_{zz}$, то получим:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ e_{yz} &= \frac{1}{G} \sigma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz} \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} \sigma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx} \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} . \quad (57)$$

Определение. Формулы (57) дают нам обобщенный закон Гука для однородного изотропного упругого тела.

Сложив почленно первые три уравнения системы (57), получим:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{1}{E} [(1+\nu)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - 3\nu\sigma] ,$$

$$\text{где } \sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} .$$

$$\text{Так как } \theta = \frac{1-2\nu}{E} \sigma ,$$

то единичная объемная деформация θ пропорциональна сумме трех нормальных напряжений σ . Сумма нормальных напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке есть величина постоянная и не зависит от наклона этих площадок (инвариант):

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} .$$

1.7.3. Выражение напряжений через деформации

Постановка задачи: равенства

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] e_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] e_{zz} = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \quad (58)$$

$$e_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz}, e_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx}, e_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy}$$

$$\text{и} \quad (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \quad (59)$$

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} \sigma$$

дают закон Гука в форме, решенной относительно деформаций. Требуется найти обратную задачу.

Решение: если в равенство (58) внесем (59) и решим обратно, то получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu Q_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \theta + 2\mu Q_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \theta + 2\mu Q_{zz} \\ \sigma_{yz} &= \mu e_{yz} \\ \sigma_{zx} &= \mu e_{zx} \\ \sigma_{xy} &= \mu e_{xy} \end{aligned} \right\}, \quad (60)$$

$$\text{здесь} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (61)$$

Равенство (60) выражает напряжения через деформации.

Определение: Коэффициенты $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

называются коэффициентами Ламе, они так же, как и модули E и G , характеризуют упругие свойства твердого тела, при этом $\mu = G$.

Определение: Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν через коэффициенты Ламе выражают формулами:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Складывая почленно первые три уравнения (61) получим закон Гука через коэффициенты Ламе:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3\lambda Q + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$$

$$\text{или } \sigma = (3\lambda + 2\mu)Q = (3\lambda + 2\mu)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}).$$

Определение: Среднее или октаэдрическое напряжение имеет вид:

$$\frac{1}{3}G = N_0,$$

$$N_0 = (3\lambda + 2\mu), \text{ т. к. } \frac{1}{3}\theta = e$$

Рассматривая эти зависимости, можем написать:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - N_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - N_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - N_0 \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{yx} & e_{yy} - e & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{zx} & \bar{e}_{zy} & e_{zz} - e \end{pmatrix}$$

$$\text{или } (D_s) = 2\mu(D_e)$$

Если введем коэффициент $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, то $N_0 = K\theta$

Определение: Коэффициент K называется объемным модулем упругости. Рассмотрим теперь удлинение самого отрезка $MN = \rho$, т. к. $\rho^2 = \varepsilon^2 + \eta^2 + \xi^2$, то удлинение с точностью до бесконечно малого второго порядка равно:

$$\rho d\rho = \varepsilon d\varepsilon + \eta d\eta + \xi d\xi,$$

разделив обе части этого равенства на ρ^2 , получим:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{d\varepsilon}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{d\eta}{\rho} + \frac{\xi}{\rho} \cdot \frac{d\xi}{\rho}. \quad (62)$$

Левая часть (62) представляет собой удлинение отрезка ρ :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{\rho} &= e_\rho; \\ e_{x\rho} &= \frac{\partial U}{\partial x}e + \frac{\partial U}{\partial y}m + \frac{\partial U}{\partial z}n \\ e_{y\rho} &= \frac{\partial V}{\partial x}e + \frac{\partial V}{\partial y}m + \frac{\partial V}{\partial z}n \\ e_{z\rho} &= \frac{\partial W}{\partial x}e + \frac{\partial W}{\partial y}m + \frac{\partial W}{\partial z}n\end{aligned}\quad (63)$$

Теперь пользуясь обозначениями и равенствами (62) и (63) найдем:

$$e_\rho = \frac{\partial U}{\partial x}l^2 + \frac{\partial V}{\partial y}m^2 + \frac{\partial W}{\partial z}n^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)lm + \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)mn + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)nl$$

или на основании уравнений Коши

$$e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (64)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad e_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \quad e_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}$$

напишем

$$e_\rho = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + 2\bar{e}_{xy}lm + 2\bar{e}_{yz}mn + 2\bar{e}_{zx}nl. \quad (65)$$

Равенства (64) и (65) окончательно подтверждают тензорный характер величины, составляющих матрицы:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{yx} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{zx} & \bar{e}_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}.$$

Определение: Матрицу $\begin{pmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{yx} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{zx} & \bar{e}_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}$ называют тензором

деформации в точке.

Умножим обе части равенства (65) на ρ^2 и, принимая во внимание наше обозначение (63), имеем:

$$\rho^2 e_\rho = e_{xx} \varepsilon^2 + e_{yy} \eta^2 + e_{zz} \xi^2 + 2\bar{e}_{xy} \varepsilon \eta + 2\bar{e}_{yz} \eta \xi + 2\bar{e}_{zx} \xi \varepsilon .$$

Если исследуемую точку тела примем за начало координат (ε, η, ξ) и построим в ней вектор, равный по модулю отрезку ρ , то ε, η, ξ будут координатами конца этого вектора.

Если будем распоряжаться длиной вектора так, чтобы всегда было

$$\rho = \sqrt{\frac{\pm b^2}{b_\rho}}, \quad \frac{\varepsilon^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\xi^2}{c^2} = 1 ,$$

то удлинение (65) превратится в уравнение поверхности второго порядка

$$F(\varepsilon, \eta, \xi) = \pm b^2 ,$$

где $F(\varepsilon, \eta, \xi) = e_{xx} \varepsilon^2 + e_{yy} \eta^2 + e_{zz} \xi^2 + 2\bar{e}_{xy} \varepsilon \eta + 2\bar{e}_{yz} \eta \xi + 2\bar{e}_{zx} \xi \varepsilon$. (66)

Определение: Поверхность (66) аналогично поверхности напряжения Коши называется поверхностью деформации.

Замечание: Если $e_\rho = \pm \frac{b^2}{\rho^2}$, то следует: что относительное

удлинение в исследуемой точке тела по направлению вектора $MN \rightarrow \rho$ обратно пропорционально квадрату длины этого вектора; что весь пучок подобных векторов полностью характеризует деформацию тела в данной точке и поэтому может быть принят за геометрическое представление тензора деформации.

Замечание: Поверхность деформации (66) имеет три взаимно ортогональные главные оси, найденные из системы координат $oxyz$ путем векторного преобразования векторов по собственным значениям собственного вектора, то в уравнении поверхности деформации исчезнут члены:

$$\bar{e}_{xy} = \bar{e}_{yz} = \bar{e}_{zx} = 0$$

и примет вид

$$e_1 \varepsilon^2 + e_2 \eta^2 + e_3 \xi^2 = \pm b^2 \quad (67)$$

Определение: Поверхности (67) называются главными поверхностями, а e_1, e_2, e_3 – главными удлинениями.

Схема нахождения главных направлений:

1. Таким образом, приходим к условию

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{yx} & e_{yy} - e & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{zx} & \bar{e}_{zy} & e_{zz} - e \end{vmatrix} = 0.$$

2. Вычисляя определитель третьего порядка, получим кубическое уравнение относительно деформации e :

$$e^3 - \theta e^2 + \eta e - \lambda' = 0, \quad (68)$$

в котором коэффициенты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \theta &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}; \\ \eta &= \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xz} & e_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}; \\ \lambda' &= \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3. Обозначим действительные корни уравнения (68) через e_1, e_2, e_3 и подставляя в уравнения:

$$(e_{xx} - e)x + \bar{e}_{xy}y + \bar{e}_{xz}z = 0$$

$$\bar{e}_{xy}x + (e_{yy} - e)y + \bar{e}_{yz}z = 0$$

$$\bar{e}_{xz}x + \bar{e}_{yz}y + (e_{zz} - e)z = 0$$

найдем координаты главных векторов

$$x'(\varepsilon, \eta, \xi), y'(\varepsilon, \eta, \xi), z'(\varepsilon, \eta, \xi).$$

4. Уравнение поверхности деформации по главным ортогональным направлениям ε, η, ξ теперь будет:

$$e_1\varepsilon^2 + e_2\eta^2 + e_3\xi^2 = \pm b^2,$$

которая является либо эллипсоидом, либо гиперболоидом, либо параболоидом.

1.7.4. Объемная деформация. Инварианты тензора деформации

В дополнение к компонентам деформации найдем еще объемную деформацию. Рассмотрим бесконечно малый элемент тела объема

$$\Delta v = dx dy dz. \quad (69)$$

Пусть изменение элемента объема будет малой величиной высшего порядка по сравнению с деформацией сдвига, если в данном элементе произошли только сдвиги без удлинения его ребер.

Следовательно, с точностью до бесконечно малых высшего порядка можем считать, что изменение объема dV будет зависеть только от удлинений ребер dx, dy, dz . Тогда, новый объем элемента после деформации будет:

$$dv + \delta(dv) = dx(1 + e_{xx})dy(1 + e_{yy})dz(1 + e_{zz}) \quad (70)$$

$$dw + \delta(dw) = dx dy dz (1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} + e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{yy}e_{zz} + e_{xx}e_{yy}e_{zz})$$

Последние четыре члена в скобках, являющиеся малыми второго и третьего порядков, отбрасываем. Тогда, на основании (69) и (70) имеем:

$$\delta(dv) = dv(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}). \quad (71)$$

Из (71) получим относительную объемную деформацию:

$$\frac{\delta(dv)}{dv} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \quad (72)$$

Определение: Выражение (72) называется объемной деформацией и обозначается:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz},$$

или

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Таким образом, объемная деформация в точности совпадает с первым линейным инвариантом тензора деформации:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} - I_1, \text{ первый инвариант.}$$

Тогда

$$\eta = \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xz} & e_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix} - \text{второй квадратичный инвариант}$$

$$\lambda' = \begin{vmatrix} e_{xx} & \bar{e}_{xy} & \bar{e}_{xz} \\ \bar{e}_{xy} & e_{yy} & \bar{e}_{yz} \\ \bar{e}_{xz} & \bar{e}_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix} - \text{третий кубичный инвариант.}$$

Замечание: Все что сказано относительно инвариантов тензора напряжений в предыдущих лекциях может быть перенесено и на инварианты тензора деформаций и формально сведется лишь к замене обозначений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ на соответствующие обозначения $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$.

1.7.5. Работа упругих сил в твердом теле

Постановка задачи: Выделим из тела бесконечно малый параллелепипед размерами dx, dy, dz и подсчитаем работу, совершаемую упругими силами, приложенными к нему, если точкам данного тела дадим какие-либо возможные перемещения.

Решение: пусть напряжения по граням, нормальным к оси ox , будут

$$\sigma_{xx} \text{ и } \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \quad (73)$$

при этом получилось относительное удлинение $-e_{xx} dx$. После сообщения к телу каких-либо возможных перемещений это удлинение изменится на некоторую величину $-\delta e_{xx} dx$.

Отбрасывая в (73) бесконечно малую $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$ по сравнению с конечной величиной σ_{xx} найдем, что две равные и противоположные нормальные силы $\sigma_{xx} dydz$, приложенные к граням параллелепипеда, произведут работу

$$\delta(A_{xx}) = \sigma_{xx} \delta e_{xx} dx dy dz.$$

Таким же путем получим работу, совершаемую остальными нормальными силами по граням в направлении оси oy и oz параллелепипеда

$$\begin{aligned} \delta(A_{yy}) &= \sigma_{yy} \delta e_{yy} dy dx dz, \\ \delta(A_{zz}) &= \sigma_{zz} \delta e_{zz} dz dx dy. \end{aligned} \quad (74)$$

Переходим к касательным составляющим.

К верхней и нижней грани параллелепипеда приложены касательные силы $\sigma_{xz} dx dy$, $\sigma_{yz} dx dy$, $\sigma_{xy} dx dz$ (бесконечно малую разницу между ними снова отбрасываем), образующие пару с моментом:

$$(\sigma_{xz} dx dy) dz, (\sigma_{yz} dx dy) dz, (\sigma_{xy} dx dz) dy.$$

Для получения работы этих пар следует их моменты умножить на угол поворота, соответственно:

$$\delta e_{xz}, \delta e_{yz}, \delta e_{xy},$$

и так

$$\delta A_{xz} = \sigma_{xz} \delta e_{xz} dx dy dz, \delta A_{yz} = \sigma_{yz} \delta e_{yz} dz dx dy, \delta A_{xy} = \sigma_{xy} \delta e_{xy} dy dx dz. \quad (75)$$

Теперь из (74) и (75) напишем работу всех сил:

$\delta(dT) = (\sigma_{xx} \delta e_{xx} + \sigma_{yy} \delta e_{yy} + \sigma_{zz} \delta e_{zz} + \sigma_{yz} \delta e_{yz} + \sigma_{zx} \delta e_{zx} + \sigma_{xy} \delta e_{xy}) dx dy dz$ откуда работа, отнесенная к единице объема тела в той точке, где выделен параллелепипед, будет:

$$\delta A = \frac{\delta(dT)}{d\tau} = \sigma_{xx} \delta e_{xx} + \sigma_{yy} \delta e_{yy} + \sigma_{zz} \delta e_{zz} + \sigma_{yz} \delta e_{yz} + \sigma_{zx} \delta e_{zx} + \sigma_{xy} \delta e_{xy}$$

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Преобразованием Фурье некоторой функции $f(x)$, заданной в промежутке $(-\infty, +\infty)$, называется интеграл

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad (76)$$

где λ — произвольное вещественное число.

Для существования преобразования Фурье $\bar{f}(\lambda)$ достаточно предположить, что функция $f(x)$ кусочно непрерывна в любом конечном промежутке и абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, +\infty)$ [14].

Для функций $f(x)$, удовлетворяющих, сверх того, условиям Дирихле в любом конечном промежутке, в точках непрерывности справедлива формула обращения Фурье. (В точках разрыва правая часть равенства (77) дает величину $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$),

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad -\infty < x < +\infty, \quad (77)$$

выражающая функцию $f(x)$ через ее преобразование Фурье.

Пара формул (76)–(77) может быть записана в виде одного разложения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi \quad -\infty < x < +\infty,$$

которая представляется также в вещественной форме

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda.$$

Для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле в любом открытом промежутке $0 < x < A$ и абсолютно интегрируемых в интервале $(0, \infty)$, имеют место разложения в синус- и косинус-интегралы Фурье ($0 < x < \infty$)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad f_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx.$$

Во второй главе учебного пособия рассматриваются плоские задачи о равновесии бесконечной полосы при задании на ее границах напряжений или перемещений, кручение и изгиб призмы, образованной пересечением двух круговых цилиндров, плоская задача теории упругости для внутренности и внешности круговой луночки, а также вопросы изгиба упругих тонких плит, имеющих форму бесконечной полосы или круговой луночки.

2.1. Упругое равновесие полуплоскости

При рассмотрении плоских статических задач теории упругости для бесконечной полосы в том случае, когда на контуре области заданы внешние усилия, удобно применять интегральное преобразование Фурье непосредственно к уравнениям упругости в напряжениях, а также к граничным условиям задачи.

Начнем изложение указанной методики с наиболее простого случая упругой полуплоскости, нагруженной по контуру, причем будем считать, что в прямоугольных координатах рассматриваемое тело занимает область $y \geq 0$.

Тогда задача, очевидно, состоит в интегрировании системы уравнений для напряжений $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$, состоящей из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (78)$$

и условия сплошности

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (79)$$

при граничных условиях

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = f(x), \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = g(x), \quad (80)$$

где f и g – заданные функции.

Предполагается также, что на бесконечности напряжения стремятся к нулю вместе со своими первыми производными [15].

Вводя преобразования Фурье от напряжений обычными формулами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x e^{i\lambda x} dx, & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} e^{i\lambda x} dx, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y e^{i\lambda x} dx, \end{aligned}$$

умножая уравнения (78)–(79) на $e^{i\lambda x}$ и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$, получаем систему равенств, которые после интегрирования по частям превращаются в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величин $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\sigma}_y$, рассматриваемых как функции переменной y ,

$$\begin{aligned} -i\lambda \bar{\sigma}_x + \bar{\tau}_{xy}' &= 0, \\ -i\lambda \bar{\tau}_{xy} + \bar{\sigma}_y' &= 0, \end{aligned} \quad (81)$$

$$(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)'' - \lambda^2 (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0.$$

Система (81) должна быть решена при граничных условиях:

$$\bar{\sigma}_y \Big|_{y=0} = \bar{f}(\lambda), \quad \bar{\tau}_{xy} \Big|_{y=0} = \bar{g}(\lambda), \quad (82)$$

полученных после преобразования по формуле Фурье условий (80). Заметим, что здесь и в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что преобразования Фурье как заданных граничных функций, так и искомых величин существуют.

Исключение из системы (81) величин $\bar{\sigma}_y$ и $\bar{\tau}_{xy}$ с помощью формул:

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{1}{\lambda^2} \bar{\sigma}_y'', \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i\lambda} \bar{\sigma}_y' \quad (83)$$

приводит к уравнению четвертого порядка для функции $\overline{\sigma}_y$:

$$\overline{\sigma}_y^{IV} - 2\lambda^2 \overline{\sigma}_y'' + \lambda^4 \overline{\sigma}_y = 0. \quad (84)$$

Выбирая в соответствии с условиями на бесконечности общий интеграл уравнения (84) в виде:

$$\overline{\sigma}_y = [A(\lambda) + yB(\lambda)]e^{-|\lambda|y}$$

и удовлетворяя преобразованным граничным условиям (82), находим следующие значения величин A и B : $A = \overline{f}$, $B = \overline{f} + \frac{\lambda}{|\lambda|} i \overline{g}$, после

чего выражения для преобразованных напряжений принимают вид:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} &= \left[(1 - |\lambda|y) \overline{f} + \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) i \overline{g} \right] e^{-|\lambda|y}, \\ \overline{\tau}_{xy} &= [i \lambda y \overline{f} + (1 - |\lambda|y) \overline{g}] e^{-|\lambda|y}, \\ \overline{\sigma}_y &= [(1 + |\lambda|y) \overline{f} + i \lambda y \overline{g}] e^{-|\lambda|y}. \end{aligned}$$

Окончательное решение поставленной задачи может быть теперь получено с помощью формулы обращения Фурье. Например, для напряжения σ_x находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\sigma}_x e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 - |\lambda|y) \overline{f} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) i \overline{g} \right] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda x} d\xi + \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\lambda x} d\xi. \end{aligned}$$

Предполагая, что допустима перестановка порядка интегрирования, получаем

$$\sigma_x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (2 - \lambda y) e^{-\lambda y} \sin \lambda(x - \xi) d\lambda,$$

что после взятия квадратур по переменной λ приводит к решению в виде однократного интеграла

$$\sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi) + (x - \xi) g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} (x - \xi)^2 d\xi. \quad (85)$$

Аналогичным образом получаются формулы для двух других напряжений:

$$\tau_{xy} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi) + (x - \xi) g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} (x - y) y d\xi, \quad (86)$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi) + (x - \xi) g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} y^2 d\xi.$$

Таким образом, получено в однократных квадратурах точное решение поставленной задачи для случая произвольного внешнего нагружения. Нетрудно непосредственной проверкой убедиться в том, что выражения (85)-(86) удовлетворяют всем условиям задачи.

В частности, для случая, приложенной в начале координат сосредоточенной силой с составляющими (N, T) , положив в наших формулах

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\xi) d\xi = N, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(\xi) d\xi = T,$$

сразу получаем

$$\sigma_x = \frac{2x^2}{\pi} \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{2xy}{\pi} \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y = \frac{2y^2}{\pi} \frac{yN + xT}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2.2. Первая основная задача теории упругости для бесконечной полосы

Рассмотрим упругое равновесие бесконечной полосы $(-\infty < x < +\infty \mid y \leq b)$ под действием заданных усилий на ее границах.

Задача состоит в интегрировании уравнений (78)–(79) плоской задачи теории упругости при задании на границах полосы $y = \pm b$ напряжений σ_y и τ_{xy} .

Применение интегрального преобразования Фурье к уравнениям равновесия и сплошности приводит, как мы видели в предыдущем параграфе, к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка (84) относительно преобразованного напряжения $\bar{\sigma}_y$, причем величины $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\tau}_{xy}$ выражаются через $\bar{\sigma}_y$ формулами (83).

Для удобства выкладок разобьем поставленную задачу на две: симметричную и антисимметричную по координате y , и начнем рассмотрение с первого случая, когда граничные значения напряжения σ_y симметричны по координате y , а граничные значения τ_{xy} антисимметричны по y [16]. Это означает, что в противоположных точках границ полосы $(x = x_0, y = \pm b)$ напряжения имеют одинаковую величину, причем нормальные напряжения имеют противоположные направления, в то время как касательные напряжения направлены в одну сторону [рис. 27(А)].

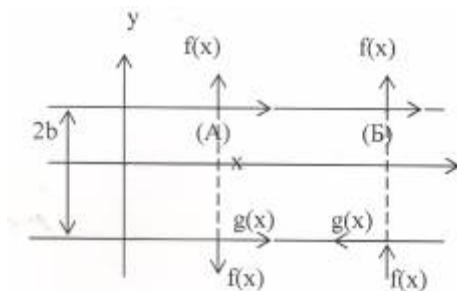


Рис. 27

Разумеется, надо предположить, что приложенные к полосе внешние усилия:

$$\sigma_y \Big|_{y=\pm b} = f(x),$$

$$\tau_{xy} \Big|_{y=\pm b} = \pm g(x)$$

уравновешиваются; это в данном случае приводит к условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 0. \quad (87)$$

Переходя к решению задачи, возьмем общий интеграл уравнения (84) в форме функции, четной по координате y ,

$$\bar{\sigma}_y = A(\lambda)ch\lambda y + B(\lambda)\lambda ysh\lambda y$$

и, рассматривая верхнюю половину полосы ($0 \leq y \leq b$), определим величины A и B из преобразованных по Фурье граничных условий:

$$\bar{\sigma}_y \Big|_{y=b} = \bar{f}(\lambda), \quad \bar{\tau}_{xy} \Big|_{y=b} = \bar{g}(\lambda). \quad (88)$$

Так как согласно (83)

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} [Ash\lambda y + B(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)],$$

то для неизвестных A и B получается следующая система уравнений:

$$Ach\mu + B\mu sh\mu = \bar{f},$$

$$Ash\mu + B(\mu ch\mu + sh\mu) = \bar{g},$$

из которой находим

$$A = 2 \frac{\bar{f}(\mu ch\mu + sh\mu) - \bar{g}i\mu sh\mu}{sh2\mu + 2\mu},$$

$$B = 2 \frac{-\bar{f}sh\mu + \bar{g}ich\mu}{sh2\mu + 2\mu}, \quad (89)$$

где введено обозначение

$$\mu = \lambda b.$$

Таким образом, полное решение поставленной задачи дается формулами

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + B(\lambda ysh\lambda y + 2ch\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ash\lambda y + B(\lambda ych\lambda y + sh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + B\lambda ysh] \lambda y e^{-i\lambda x} d\lambda.\end{aligned}\quad (90)$$

Исследуем теперь сходимость входящих в полученное решение интегралов в точке $\lambda = 0$, где знаменатель в формулах (89) обращается в нуль (сходимость при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ очевидна).

Нетрудно видеть, что условием сходимости при $\lambda = 0$ будут требования ограниченности величин $A(0)$ и $B(0)$, что, в свою очередь, приводит к условию

$$\overline{g}(0) = 0.$$

Но так как

$$\overline{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx,$$

то последнее условие выполнено, оно совпадает с условием статики.

Аналогичным образом может быть получено точное решение соответствующей антисимметричной задачи, когда граничные значения напряжения σ_y антисимметричны, а значения τ_{xy} симметричны по координате y .

Условия статики в этом случае имеют вид :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [xf(x) - bg(x)] dx = 0$$

и могут быть записаны еще в следующей форме:

$$\overline{f}(0) = 0, \quad \left. \frac{d\overline{f}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = i b \overline{g}(0).$$

Так как в рассматриваемом случае напряжение σ_y является нечетной функцией переменной y , то общий интеграл уравнения (84) следует выбрать в таком виде:

$$\bar{\sigma}_y = C(\lambda)sh\lambda y + D(\lambda)\lambda ych\lambda y, \quad (91)$$

причем достаточно рассмотреть только область $0 \leq y \leq b$.

Составляя выражение для преобразованного касательного напряжения

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i} [Cch\lambda y + D(\lambda ysh\lambda y + ch\lambda y)] \quad (92)$$

и подставляя (91) – (92) в преобразованные граничные условия (88), приходим к следующей системе уравнений относительно неизвестных величин C и D :

$$Csh\mu + D\mu ch\mu = \bar{f},$$

$$Cch\mu + D(\mu sh\mu + ch\mu) = i\bar{g}, \quad (\mu = \lambda b)$$

решая которую, найдем

$$C = 2 \frac{\bar{f}(\mu sh\mu + ch\mu) - \bar{g}i\mu ch\mu}{sh2\mu - 2\mu},$$

$$D = 2 \frac{-\bar{f}ch\mu + \bar{g}ish\mu}{sh2\mu - 2\mu}.$$

Окончательные значения искомых напряжений будут:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D(\lambda ych\lambda y + 2sh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Cch\lambda y + D(\lambda ysh\lambda y + ch\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Csh\lambda y + D\lambda ych\lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (93)$$

Можно проверить, что преобразованные по Фурье условия статистики обеспечивают сходимость при $\lambda = 0$, входящих в это решение интегралов.

В полученных решениях (90) или (93) все три искомых напряжения выражаются несобственными интегралами вида

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mu)}{sh 2\mu \pm 2\mu} e^{-i\mu\xi} d\mu, \quad (94)$$

которые можно находить приближенно с помощью различных численных методов.

Наряду с этим квадратуры типа (94) представляются при определенных условиях в виде бесконечного ряда с помощью теоремы о вычетах. Для этого интеграл по вещественной оси дополняется полукругом радиуса $R \rightarrow \infty$ с центром в начале координат, проведенным в верхней (при $\xi < 0$) или нижней (при $\xi > 0$) полуплоскости, и рассматривается интеграл по замкнутому контуру от функции, получаемой из подынтегральной функции в (94) заменой вещественной переменной на комплексную (например, 2μ на z). Если полученная при этом функция $\phi(z) = F\left(\frac{z}{2}\right)$ будет мероморфной функцией, то интеграл по замкнутому контуру, согласно теореме Коши, равен умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов $\sum a_{-1}$ подынтегральной функции в верхней (нижней) полуплоскости комплексной переменной z . Если удастся доказать, что интеграл по полукругу стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, то значение искомой функции $f(\xi)$ будет равно $2\pi i \sum a_{-1}$.

Таблица 8

$sh z + z = 0$		$sh z - z = 0$	
σ	τ	σ	τ
2,251	4,213	2,769	7,498
3,103	10,71	3,352	13,90
3,551	17,07	3,717	20,24
3,900	23,40	3,983	26,56
4,094	29,71	-	-

В рассматриваемом случае нетрудно показать, что для кусочно – непрерывных внешних нагрузок, приложенных на конечном расстоянии от начала координат, функции типа $\Phi(z)$ будут целыми на всей комплексной плоскости, причем интеграл по полуокружности, проведенному в соответствующей полуплоскости, при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю [17]. Таким образом, все искомые напряжения представляются формулами вида $2\pi i \sum a_{-1}$, где особыми точками (простыми полюсами) в подобных задачах будут корни уравнения:

$$shz + z = 0$$

в случае симметричной задачи, а корни уравнения:

$$shz - z = 0$$

- в антисимметричном случае.

В приводимой табл.8 даны значения нескольких первых корней $z = \pm\sigma \pm i\tau$ указанных уравнений. Корни с большими номерами могут быть найдены по легко получаемым асимптотическим формулам.

Заметим еще, что для симметричного случая Снеддоном предложен приближенный метод вычисления несобственных интегралов полученного типа, основанный на специальной аппроксимации функции $(shz + z)^{-1}$.

2.3. Вторая основная задача для бесконечной полосы

Под второй основной задачей обычно имеют в виду краевую задачу теории упругости для того случая, когда на границе тела заданы значения упругих перемещений. В случае плоской задачи теории упругости можно, вообще говоря, пользоваться представлением перемещений через бигармоническую функцию. Однако нам представляется более удобным другой метод решения, основанный на использовании функций Папковича-Нейбера, который и будет развит как при решении второй основной задачи, так и при решении смешанной задачи [18].

Приведем, прежде всего, общее решение уравнений плоской задачи теории упругости, содержащее, согласно Папковичу-Нейберу, три гармонические функции Φ_0, Φ_1, Φ_2 ,

$$2Gu = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad 2Gv = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2, \quad (95)$$

где u, v – перемещения, $F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2$,

ν – коэффициент Пуассона.

Пользуясь произвольностью одной из гармонических функций, положим $\Phi_1 \equiv 0$ и запишем соотношения (95) в следующей форме:

$$2Gu = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad 2Gv = x\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad (96)$$

где положено

$$x = 3 - 4\nu.$$

Поставленная задача состоит, очевидно, в нахождении двух гармонических функций Φ_0, Φ_2 , удовлетворяющих следующим краевым условиям на границах полосы $y = 0$ и $y = b$:

$$u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=b} = u_b(x), \quad v|_{y=0} = v_0(x), \quad v|_{y=b} = v_b(x), \quad (97)$$

где u_0, u_b, v_0, v_b – заданные функции.

Представляя гармонические функции Φ_0 и Φ_2 в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)ch\lambda y + B(\lambda)sh\lambda y] e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [C(\lambda)ch\lambda y + D(\lambda)sh\lambda y] e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \quad (98)$$

получим на основании (96) следующие выражения для упругих перемещений:

$$2Gu = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Ach\lambda y + Bsh\lambda y + \lambda y(Cch\lambda y + Dsh\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (99)$$

$$2Gv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [-(Ash\lambda y + Bch\lambda y) + C(\chi ch\lambda y - \lambda ysh\lambda y) + \\ + D(\chi sh\lambda y - \lambda ych\lambda y)] e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Подставляя далее (99) в граничные условия (97) и разлагая правые части последних в интегралы Фурье, мы приходим к следующей системе уравнений относительно A, B, C, D :

$$iA = 2G\bar{u}_0, \quad \chi C - B = 2G\bar{v}_0, \\ Ach\mu + Bsh\mu + \mu(Cch\mu + Dsh\mu) = \frac{2G}{i}\bar{u}_b \\ (\chi ch\mu - \mu sh\mu)C + (\chi sh\mu - \mu ch\mu)D - (Ash\mu + Bch\mu) = 2G\bar{v}_b,$$

где черта, как обычно, означает преобразование Фурье и положено $\mu = \lambda b$.

Исключая теперь величины A и B с помощью соотношений

$$A = -2Gi\bar{u}_0, \quad B = \chi C - 2G\bar{v}_0, \quad (100)$$

приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными величинами C и D

$$2(\chi sh\mu - \mu ch\mu)C + \mu sh\mu D = 2G(\bar{v}_0 sh\mu + ich\mu\bar{u}_0 - i\bar{u}_b) = \psi_1(\mu) - \\ \mu sh\mu C + (\chi sh\mu - \mu ch\mu)D = 2G(\bar{v}_b - \bar{v}_0 ch\mu - i\bar{u}_0 sh\mu) = \psi_2(\mu). \quad (101)$$

Определив из (101) значения C и D :

$$C = \frac{(\chi sh\mu - \mu ch\mu)\psi_1 - \mu sh\mu\psi_2}{\chi^2 sh^2 \mu - \mu^2}, \\ D = \frac{\mu sh\mu\psi_1 + (\chi sh\mu + \mu ch\mu)\psi_2}{\chi^2 sh^2 \mu - \mu^2}$$

и подставив их в (100) и (98), получим окончательное решение задачи.

Перемещения u и v даются формулами (99), а напряжения σ_x , τ_{xy} и σ_y выражаются через введенные функции Φ_0 , Φ_1 и Φ_2 с помощью следующих зависимостей:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2(1-\nu)\Phi_1 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} + x \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x \partial y} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \right] + 2\nu \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \left(x \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} \right),\end{aligned}\quad (102)$$

так что для получения напряжений в рассматриваемой задаче достаточно положить $\Phi_1 \equiv 0$ и подставить в (102) выражения (98).

В таблице 2 даны значения нескольких корней $z = \pm\sigma \pm i\tau$ уравнений

$$shz - \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad shz + \frac{z}{3-4\nu} = 0, \quad (103)$$

необходимых при вычислении полученных интегралов по теореме о вычетах (значение коэффициента ν принято равным $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$).

Заметим, что уравнение $\chi shz - z = 0$ относится к случаю задачи, симметричной относительно средней линии $y = \frac{b}{2}$, а уравнение $\chi shz + z = 0$ — к соответствующему антисимметричному случаю.

Рассмотренная задача относится к случаю плоской деформации. Для плоского напряженного состояния во всех формулах следует величину ν заменить на $\frac{\nu}{1+\nu}$. В частности, вместо (103) будем иметь

$$shz \mp \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0.$$

Результаты расчета корней этого уравнения для $\nu = \frac{1}{4}$ сведены в табл.10 ($z = \pm\sigma \pm i\tau$).

Заметим, что значения z в (103) при $\nu = \frac{1}{3}$ совпадают со значениями z в (103) при $\nu = \frac{1}{4}$.

Таблица 9

$sh z - \frac{z}{3-4\nu} = 0$				$sh z + \frac{z}{3-4\nu} = 0$			
$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$		$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$	
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
0	1,660	0	1,896	1,692	4,315	1,488	4,350
2,238	7,560	2,047	7,582	2,581	10,76	2,393	10,77
2,834	13,94	2,648	13,95	3,035	17,10	2,850	17,11
3,202	20,26	3,017	20,27	3,345	23,42	3,161	23,43
3,470	26,57	3,287	26,58	3,581	29,72	3,398	29,73

Таблица 10

$sh z - \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0, \nu = 1/4$		$sh z + \frac{1+\nu}{3-\nu} z = 0, \nu = 1/4$	
σ	τ	σ	τ
0	2,001	1,378	4,368
1,946	7,593	2,296	10,78
2,551	13,96	2,754	17,12
2,922	20,28	3,065	23,43
3,190	26,58	3,302	29,73

Сравнение полученных решений с результатами, относящимися к решению первой и второй основных задач для полосы с помощью других методов, убедительно иллюстрирует простоту и эффективность метода интегральных преобразований при рассмотрении данного класса задач теории упругости [19].

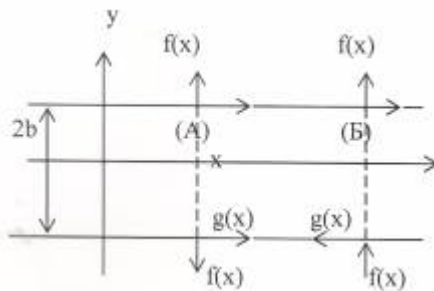


Рис. 28

2.4. Полоса, закрепленная по контуру и нагруженная сосредоточенным моментом

В качестве примера антисимметричного напряженного состояния при заданных на границе перемещениях рассмотрим равновесие бесконечной полосы, закрепленной по контуру и подверженной действию сосредоточенного момента в центре (рис.28). При этом, действительно, перемещение v и напряжение τ_{xy} четны, а перемещение u и напряжения σ_x и σ_y нечетны по координате y .

Упругие перемещения точек такого тела мы будем представлять в виде суммы перемещений u_0 , v_0 , создаваемых моментом M в неограниченной плоскости, и дополнительные перемещения u_1 , v_1 , подобранные так, чтобы выполнялись граничные условия:

$$u|_{y=\pm b} = 0, \quad v|_{y=\pm b} = 0,$$

причем

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1.$$

Первичные перемещения u_0 и v_0 даются следующими формулами :

$$u_0 = -N \left[\frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\chi y}{x^2 + y^2} \right], \quad v_0 = N \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$N = \frac{M}{8\pi G(1-\nu)}, \quad \chi = 3 - 4\nu.$$

Вторичные перемещения u_1 и v_1 мы будем представлять через функции Φ_0 и Φ_2 согласно формулам (96), причем соображения симметрии позволяют выбрать гармонические функции Φ_0 и Φ_2 в виде синус – интегралов Фурье следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A \sin \lambda y \sin \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty B \sin \lambda y \sin \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \quad (104)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2Gu_1 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (A \sin \lambda y + B \lambda y \cos \lambda y) \cos \lambda x d\lambda \\ 2Gv_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [-A \cos \lambda y + B(\chi \sin \lambda y - \lambda y \sin \lambda y)] \sin \lambda x d\lambda. \end{aligned} \quad (105)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи, которые достаточно взять лишь при $y = b$, имеют вид :

$$\begin{aligned} u_1|_{y=b} &= -u_0|_{y=b} = bN \left[\frac{2x^2}{(x^2 + b^2)^2} + \frac{\chi}{x^2 + b^2} \right], \\ v_1|_{y=b} &= -v_0|_{y=b} = -N \frac{x(x^2 - b^2)}{(x^2 + b^2)^2}. \end{aligned} \quad (106)$$

Подставляя (105) в (106) и разлагая функции $u_0|_{y=b}$ и $v_0|_{y=b}$ в косинус и синус – интегралы Фурье соответственно, приходим к следующей системе ($\mu = \lambda b$):

$$\begin{aligned} Ash\mu + B\mu ch\mu &= 2G\bar{u}_0|_{y=b} = -2GbN\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left[\frac{2x^2}{(x^2+b^2)^2} + \frac{\chi}{x^2+b^2}\right]\cos\lambda x dx, \\ Ach\mu + B(\mu sh\mu - \chi ch\mu) &= 2G\bar{v}_0|_{y=b} = 2GN\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{x(x^2-b^2)}{(x^2+b^2)^2}\sin\lambda x dx. \end{aligned} \quad (107)$$

Квадратуры, стоящие в правых частях, вычисляются и приводят к выражению $\bar{u}_0|_{y=b}$ и $\bar{v}_0|_{y=b}$ в явном виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_0|_{y=b} &= -N\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\mu}(1-\mu+\chi), \\ \bar{v}_0|_{y=b} &= N\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\mu}(1-\mu). \end{aligned}$$

Решение системы (107) представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} A &= 4G\frac{(\chi ch\mu - \mu sh\mu)\bar{u}_0|_{y=b} + \mu ch\mu\bar{v}_0|_{y=b}}{\chi sh2\mu + 2\mu}, \\ B &= 4G\frac{ch\mu\bar{u}_0|_{y=b} - sh\mu\bar{v}_0|_{y=b}}{\chi sh2\mu + 2\mu}, \end{aligned}$$

после чего окончательное решение задачи дается формулами (104) в виде однократных интегралов [20].

Приведем, в частности, расчетные формулы для нормального и касательного напряжений в заделке, полученные из зависимостей (102):

$$\sigma_y|_{y=b} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\{-Ash\mu + [2(1-\nu)sh\mu - \mu ch\mu]B\}\lambda\sin\lambda x d\lambda,$$

$$\tau_{xy}\big|_{y=b} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{-Ach\mu + [(1-2\nu)ch\mu - \mu sh\mu]B\} \lambda \cos \lambda x d\lambda,$$

что окончательно дает после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \sigma_y\big|_{y=b} &= \frac{M}{2\pi b^2(1-\nu)} \\ &\int_0^\infty \frac{[(1-2\nu)ch\mu sh\mu + \mu](1-\mu + \chi) - 2(1-\nu)(1-\mu)sh^2\mu}{\chi sh2\mu + 2\mu} \times \\ &\times \mu e^{-\mu} \sin \mu \frac{x}{b} d\mu, \\ \tau_{xy}\big|_{y=b} &= \frac{M}{2\pi b^2(1-\nu)} \\ &\int_0^\infty \frac{2(1-\nu)(1-\mu + \chi)ch^2\mu - (1-\mu)[(1-2\nu)ch\mu sh\mu + \mu]}{\chi sh2\mu + 2\mu} \times \\ &\times \mu e^{-\mu} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu. \end{aligned}$$

Для получения полных напряжений необходимо к найденным выражениям добавить еще первичные напряжения, соответствующие действию момента M в неограниченной плоскости и легко определяемые через известные перемещения u_0 и v_0 .

2.5. Смешанная задача для бесконечной полосы

Рассмотрим упругое равновесие бесконечной полосы $(-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq b)$, на границе $y=0$ которой заданы значения упругих перемещений u и v , а на остальной части контура ($y=b$) известны напряжения σ_y и τ_{xy} [21].

Эффективное решение поставленной задачи может быть получено с помощью интегрального преобразования Фурье, если предварительно выразить перемещения u и v , а также напряжения σ_y и τ_{xy} через функции Папковича-Нейбера. Принимая, как и выше, одну из функций напряжений равной нулю ($\Phi_1 \equiv 0$), имеем

$$\begin{aligned}
 2Gu &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \\
 2Gv &= \chi \Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad (\chi = 3 - 4\nu), \\
 \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, \\
 \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right].
 \end{aligned} \tag{108}$$

Граничные условия рассматриваемой задачи, очевидно, таковы

$$\begin{aligned}
 u|_{y=0} &= u_0(x), \quad v|_{y=0} = v_0(x), \\
 \sigma_y|_{y=b} &= f(x), \quad \tau_{xy}|_{y=b} = g(x).
 \end{aligned} \tag{109}$$

Представляя функции напряжений Φ_0 и Φ_2 в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 ch\lambda y + B_0 sh\lambda y) e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\
 \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_2 ch\lambda y + B_2 sh\lambda y) e^{-i\lambda x} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{110}$$

подставляя выражения (110) в формулы (108) и используя граничные условия (109), приходим к следующей системе уравнений для величин A_0, B_0, A_2, B_2 :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 2\bar{G}u_0, \quad \chi A_2 - B_0 = 2\bar{G}v_0, \\
 [2(1-\nu)sh\mu - \mu ch\mu]A_2 + [2(1-\nu)ch\mu - \mu sh\mu]B_2 - (A_0 ch\mu + B_0 sh\mu) &= \frac{\bar{f}}{\lambda}, \\
 [(1-2\nu)ch\mu - \mu sh\mu]A_2 + [(1-2\nu)sh\mu - \mu ch\mu]B_2 - (A_0 sh\mu + B_0 ch\mu) &= \frac{i\bar{g}}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, положено $\mu = \lambda b$, а символ $\bar{f}$ означает комплексное преобразование Фурье от функции $f(x)$.

Исключая A_0 и B_0 с помощью соотношений

$$A_0 = -2G\bar{i}u_0, \quad \chi A_2 - B_0 = 2G\bar{v}_0, \quad (111)$$

получаем систему двух уравнений с неизвестными A_2 и B_2

$$\begin{aligned} -[\mu\chi h\mu + (1-2\nu)sh\mu]A_2 + [2(1-\nu)ch\mu - \mu sh\mu]B_2 &= \psi_1, \\ -[\mu sh\mu + 2(1-\nu)ch\mu]A_2 + [(1-2\nu)sh\mu - \mu\chi h\mu]B_2 &= \psi_2, \end{aligned} \quad (112)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\bar{f}}{\lambda} - 2G\bar{i}ch\mu\bar{u}_0 - 2Gsh\mu\bar{v}_0, \\ \psi_2 &= \frac{\bar{i}g}{\lambda} - 2G\bar{i}sh\mu\bar{u}_0 - 2Gch\mu\bar{v}_0 \end{aligned} \quad (113)$$

Решая систему (112) и подставляя найденные значения A_2 и B_2 в (111) и (110), получаем функции напряжений, через которые выражаются перемещения и напряжения [22].

Составляя определитель основной системы (112)

$$\chi sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2 = 0,$$

мы приходим к заключению, что для проведения численных расчетов по полученным формулам с помощью теоремы о вычетах необходимо иметь корни $z = \pm\sigma \pm i\tau$ уравнения:

$$chz + \frac{z^2}{2(3-4\nu)} + \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} = 0, \quad (z = 2\mu). \quad (114)$$

Таблица 11

$ch z + \frac{z^2}{2(3-4\nu)} + \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} = 0$			
$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$	
σ	τ	σ	τ
0	1,768	0	1,913
3,005	5,122	2,770	5,164
4,549	11,82	4,353	11,84
5,375	18,27	5,187	18,29
5,932	24,66	5,747	24,67

Таблица 12

$ch z + \frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{z^2}{2} + \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2} = 0, \nu = 1/4$	
σ	τ
0	2,001
2,641	5,183
4,249	11,85
5,091	18,30
5,657	24,68

В случае плоского напряженного состояния (114) заменяется таким уравнением:

$$ch z + \frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{z^2}{2} + \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2} = 0, \nu = 1/4, \quad (115)$$

корни, которого приведены в табл.12 (при $\nu = 1/3$ уравнение (115) совпадает с уравнением (114), взятым для $\nu = 1/4$)

2.6. Равновесие полосы с закрепленным основанием

Рассмотрим частный случай общей смешанной задачи, когда основание полосы $y = 0$ жестко скреплено с неподвижным телом, т.е. перемещения $u_0(x)$ и $v_0(x)$ тождественно равны нулю.

Предположим, что в произвольной точке верхней кромки $y = b$ приложена произвольно направленная сосредоточенная сила. Не нарушая общности, можно считать, что сила приложена в точке $x = 0, y = b$. Заметим также, что случай произвольной нагрузки, приложенный к верхней кромке полосы, сводится к рассматриваемому случаю сосредоточенной силы путем интегрирования по области приложения нагрузки.

Решение поставленной в настоящем параграфе задачи может быть непосредственно получено из общего решения смешанной задачи, если в формулах (113) положить

$$\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0, \quad \bar{f} = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}}, \quad \bar{g} = -\frac{T}{\sqrt{2\pi}}.$$

При этом

$$A_0 = 0, \quad B_0 = \chi A_2,$$

$$A_2 = \frac{b}{\mu\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{[\mu\chi h\mu - (1-2\nu)sh\mu]P + [2(1-\nu)ch\mu - \mu sh\mu]iT}{\chi sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2},$$

$$B_2 = -\frac{b}{\mu\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{[\mu sh\mu + 2(1-\nu)ch\mu]P + [\mu\chi h\mu + (1-2\nu)sh\mu]iT}{\chi sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2}.$$

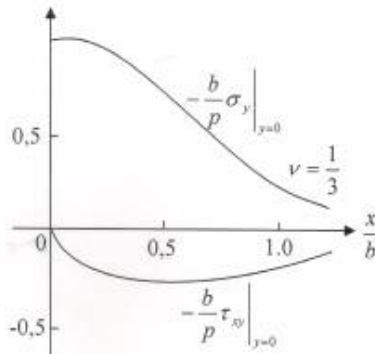


Рис. 29

Приводим расчетные формулы для напряжений в заделанном основании

$$\sigma_y|_{y=0} = (1-\nu)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda B_2 e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = i(1-\nu)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda A_2 e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

или после выкладок:

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} &= \frac{2(1-\nu)}{\pi b} T \int_0^{\infty} \frac{\mu ch\mu + (1-2\nu)sh\mu}{(3-4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \sin \mu \frac{x}{b} d\mu - \\ &\quad - \frac{2(1-\nu)}{\pi b} P \int_0^{\infty} \frac{\mu sh\mu + 2(1-\nu)ch\mu}{(3-4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu \\ \tau_{xy}|_{y=0} &= \frac{2(1-\nu)}{\pi b} T \int_0^{\infty} \frac{\mu sh\mu - 2(1-\nu)ch\mu}{(3-4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu - \\ &\quad - \frac{2(1-\nu)}{\pi b} P \int_0^{\infty} \frac{\mu ch\mu - (1-2\nu)sh\mu}{(3-4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \sin \mu \frac{x}{b} d\mu. \end{aligned}$$

На рис. 29 приведены графики распределения напряжений в заделке в случае, когда к верхней кромке приложена только нормальная сила ($T = 0$).

2.7. Изгиб полуплоскости с закрепленным краем

Простейшим примером применения преобразования Фурье к вопросам изгиба плит является задача об изгибе упругой тонкой плиты в виде полуплоскости ($y \geq 0$) [15].

Прогиб плиты $\omega(x, y)$, как известно, удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \omega = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (116)$$

где q – плотность внешней поперечной нагрузки, D – цилиндрическая жесткость плиты.

Переписывая уравнение (116) в развернутом виде:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D},$$

подвергая его преобразованию Фурье по переменной x и предполагая, что при $|x| \rightarrow \infty$ $\omega \rightarrow 0$ вместе со своими производными первых трех порядков, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\varpi^{IV} - 2\lambda^2 \varpi'' + \lambda^4 \varpi = F_\lambda(y) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, y) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (117)$$

относительно преобразования Фурье ϖ от прогиба ω

$$\varpi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y) e^{i\lambda x} dx. \quad (118)$$

Частное решение ϖ_0 уравнения (117) проще всего найти с помощью интегрального преобразования Лапласа, для чего необходимо умножить (117) на e^{-py} и проинтегрировать по y от нуля до бесконечности. Предполагая, что

$$\varpi_0(0) = \varpi_0'(0) = \varpi_0''(0) = \varpi_0'''(0) = 0,$$

получаем

$$(p^4 - 2p^2\lambda^2 + \lambda^4)\varpi_0^* = F_\lambda^*, \quad (119)$$

где введено обозначение для преобразования Лапласа

$$f^* = \int_0^{\infty} f(y) e^{-py} dy.$$

Находя из (119) значение ϖ_0^* и применяя формулу обращения Римана-Меллина, получаем

$$\varpi_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F_\lambda^* e^{py}}{(p^2 - \lambda^2)^2} dp,$$

что после применения теоремы Бореля дает

$$\varpi_0 = \int_0^y F_\lambda(t) \Phi_\lambda(y-t) dt,$$

причем функция $\Phi_\lambda(x)$ определяется следующим комплексным интегралом:

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{px} dp}{(p^2 - \lambda^2)^2}.$$

Применение теоремы о вычетах приводит к следующему значению:

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{K_\lambda(x)}{2\lambda^3}, \quad K_\lambda(x) = \lambda x \operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{sh} \lambda x,$$

так что частное решение ϖ_0 уравнения (117) дается такой формулой:

$$\varpi_0(y) = \frac{1}{2D\sqrt{2\pi\lambda^3}} \int_0^y K_\lambda(y-\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, \eta) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (120)$$

Общее же решение уравнения (117), составленное по известному способу, имеет вид

$$\varpi = (A + B\lambda y)e^{-\lambda y} + (C + E\lambda y)e^{\lambda y} + \varpi_0. \quad (121)$$

Как известно, решение задачи для случая произвольной внешней нагрузки $q(x, y)$ может быть получено из решения для одиночной сосредоточенной силы путем интегрирования последнего по области приложения нагрузки. Поэтому в дальнейшем исследуется задача об изгибе плиты сосредоточенной силой P , приложенной в произвольной точке плиты.

Обращаясь к случаю полубесконечной плиты ($0 \leq y < \infty$), считая силу P приложенной в произвольной точке (θ, b) оси ординат и вводя косинус-преобразование Фурье от функции $\omega(x, y)$:

$$\varpi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \omega(x, y) \cos \lambda x d\lambda,$$

находим, как и выше, значение ϖ по формуле (121), причем частное решение ϖ_0 для рассматриваемого случая сосредоточенной нагрузки будет:

$$\varpi_0 = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq b, \\ \frac{P}{2D\sqrt{2\pi\lambda^3}} K_\lambda(y-b), & b \leq y < \infty. \end{cases} \quad (122)$$

Таким образом, величина ϖ дается следующим выражением:

$$\varpi(y) = \begin{cases} (A+B\lambda y)e^{-\lambda y} + (C+E\lambda y)e^{\lambda y}, & 0 \leq y \leq b; \\ (A+B\lambda y)e^{-\lambda y} + (C+E\lambda y)e^{\lambda y} + \frac{P}{2D\sqrt{2\pi\lambda^3}} K_\lambda(y-b), & b \leq y < \infty. \end{cases} \quad (123)$$

Неизвестные C и E определяются из условия на бесконечности ($\varpi|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0$) и, так как $K_\lambda(x) \approx \frac{1}{2}(\lambda x - 1)e^{\lambda x}$, $x \rightarrow \infty$, равны следующим величинам:

$$C = \frac{Pe^{-\lambda b}(\lambda b + 1)}{4\sqrt{2\pi D\lambda^3}}, \quad E = -\frac{Pe^{-\lambda b}}{4\sqrt{2\pi D\lambda^3}}. \quad (124)$$

Оставшиеся две величины A и B должны быть найдены из граничных условий на краю плиты ($y=0$).

В случае закрепленного края $\omega|_{y=0} = \frac{\partial \omega}{\partial y}|_{y=0} = 0$, т.е.

$\varpi(0) = \varpi'(0) = 0$, приводит к следующим значениям:

$$A = -C, \quad B = -(2C+E). \quad (125)$$

Полное решение поставленной задачи дается формулой обращения косинус-преобразования Фурье

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varpi \cos \lambda x d\lambda,$$

где выражение ϖ определяется из (123), а значение A, B, C, E – из формул (124)–(125).

Заметим, что аналогичные решения могут быть получены и для других типов граничных условий.

Выведем теперь выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы на закрепленном крае [24], которые даются формулами:

$$M = -D \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, \quad N = -D \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \Big|_{y=0}.$$

Используя значение преобразованного прогиба при $0 \leq y \leq b$

$$\omega|_{0 \leq y \leq b} = \frac{P e^{-\lambda b}}{2\sqrt{2\pi} D \lambda^3} \left[(1 + \lambda b + \lambda^2 b y) sh \lambda y - \lambda y (1 + \lambda b) ch \lambda y \right]$$

получаем

$$\omega''(0) = \frac{P b e^{-\lambda b}}{D \sqrt{2\pi}}, \quad \omega'''(0) = -\frac{P(1 + \lambda b)}{D \sqrt{2\pi}} e^{-\lambda b},$$

откуда по формуле обращения находим

$$M = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{b^2}{b^2 + x^2}, \quad N = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{b^3}{(b^2 + x^2)^2}.$$

2.8. Изгиб ленточных плит

Обратимся теперь к решению задач поперечного изгиба упругих тонких плит, имеющих форму бесконечной полосы и называемых обычно ленточными плитами.

Методика, основанная на использовании интегрального преобразования Фурье по переменной $x (-\infty < x < \infty)$, вполне аналогична развитой в предыдущем параграфе, а именно: для преобразованного по Фурье прогиба ϖ [см. (118)] получается обыкновенное уравнение (117), частное решение которого ϖ_0 выражается формулой (120). Однако общий интеграл последнего уравнения в случае ленточной плиты удобно выбрать в такой форме:

$$\varpi = (A + B \lambda y) ch \lambda y + (C + E \lambda y) sh \lambda y + \varpi_0, \quad (126)$$

причем величины A, B, C, E должны быть найдены из четырех граничных условий на двух параллельных кромках плиты.

В дальнейшем в первую очередь будут рассмотрены следующие основные типы граничных условий: а) на обеих кромках заданы прогибы и углы поворота (в частности, защемленные края); б) на обеих кромках заданы прогибы и изгибающие моменты (в частности, шарнирноопертые края); в) на обеих кромках заданы изгибающие моменты и перерезывающие силы (в частности, свободные края); г) на одной кромке ($y=0$) заданы прогибы и углы поворота, а на другой ($y=b$) – изгибающие моменты и перерезывающие силы.

В первых трех случаях начало координат будем располагать на средней линии ($y=0$) полосы ширины $2b$, причем каждая задача разбивается нами на симметричную и антисимметричную относительно средней линии. Очевидно, что в симметричном случае в общем интеграле (126) следует принять $B=C=0$, а в антисимметричном – $A=E=0$, причем достаточно рассматривать лишь верхнюю половину полосы ($0 \leq y \leq b$) и граничные условия ставить при $y=b$.

Начнем рассмотрение с тех задач, в которых на обеих кромках ($y = \pm b$) плиты задаются прогибы и углы поворота, т. е. граничные условия имеют вид

$$\omega|_{y=b} = f(x), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=b} = g(x). \quad (127)$$

После преобразования по Фурье находим

$$\varpi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \bar{f}, \quad \varpi'(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx = \bar{g}. \quad (128)$$

Подстановка (126) в (128) в симметричном случае приводит к следующей системе уравнений для неизвестных величин A и E :

$$\begin{aligned} Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b &= \bar{f} - \varpi_0(b), \\ Ash\lambda b + E(\lambda bch\lambda b + sh\lambda b) &= \frac{1}{\lambda} [\bar{g} - \varpi_0'(b)] \end{aligned} \quad (129)$$

Так как в правых частях последней системы стоят известные величины, а ее определитель пропорционален функции $sh2\lambda b + 2\lambda b$, корни которой табулированы в главе I (см. табл. 1),

то задачу можно считать полностью решенной как с принципиальной стороны, так и с точки зрения получения численных результатов с помощью теоремы о вычетах.

Аналогичным образом в случае антисимметричного нагружения граничные условия (127) дают систему уравнений для B и C

$$\begin{aligned} B\lambda bch\lambda b + Csh\lambda b &= \bar{f} - \varpi_0(b), \\ B(\lambda bsh\lambda b + ch\lambda b) + Cch\lambda b &= \frac{1}{\lambda} [\bar{g} - \varpi_0'(b)] \end{aligned} \quad (130)$$

с определителем, пропорциональным функции $sh2\lambda b - 2\lambda b$, корни которой также приведены в табл. 1.

Переходим теперь к следующему типу граничных условий, когда на обеих кромках ($y = \pm b$) задается прогиб $f(x)$ и изгибающий момент $M(x)$

$$\omega|_{y=b} = f(x), \quad \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right|_{y=b} = -\frac{M(x)}{D} - \nu f''(x) = g(x). \quad (131)$$

После подстановки (126) в преобразованные по Фурье граничные условия (131)

$$\omega|_{y=b} = \bar{f}, \quad \varpi''|_{y=b} = \bar{g}$$

находим в симметричном случае для величин A и D систему:

$$\begin{aligned} Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b &= \bar{f} - \varpi_0(b), \\ Ach\lambda b + E(\lambda bsh\lambda b + 2ch\lambda b) &= \frac{1}{\lambda^2} [\bar{g} - \varpi_0''(b)] \end{aligned} \quad (132)$$

а в антисимметричном случае – следующую систему для B и C :

$$\begin{aligned} B\lambda bch\lambda b + Csh\lambda b &= \bar{f} - \varpi_0(b), \\ B(2ch\lambda b + \lambda bch\lambda b) + Csh\lambda b &= \frac{1}{\lambda^2} [\bar{g} - \varpi_0''(b)] \end{aligned}$$

Так как в первом случае определитель системы равен $2ch^2\lambda b$, а во втором $-2sh^2\lambda b$, то проведение численных расче-

тов в таких задачах не требует составления специальных таблиц корней трансцендентных уравнений.

Третий из рассматриваемых типов задач предусматривает задание на обеих кромках плиты изгибающих моментов $M(x)$ и перерезывающих сил $N(x)$:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{y=b} = -\frac{M(x)}{D} = f(x),$$

$$\left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=b} = -\frac{N(x)}{D} = g(x).$$

Если умножить эти соотношения на $e^{i\lambda x} dx$, проинтегрировать по x от $-\infty$ до $+\infty$ и предположить, что на бесконечности ($|x| \rightarrow \infty$) прогиб стремится к нулю вместе с первыми двумя производными по x , то получим преобразованные граничные условия:

$$\varpi''(b) - \nu \lambda^2 \varpi(b) = \bar{f}, \quad \varpi'''(b) - (2-\nu) \lambda^2 \varpi'(b) = \bar{g}. \quad (133)$$

В случае симметричного нагружения подстановка в (133) выражения для преобразованного прогиба

$$\varpi = A \cosh \lambda y + D \lambda y \sinh \lambda y + \varpi_0$$

приводит к системе:

$$A(1-\nu) \cosh \lambda b + E[2 \cosh \lambda b + (1-\nu) \lambda b \sinh \lambda b] = \nu \varpi_0(b) + \frac{1}{\lambda^2} [\bar{f} - \varpi_0''(b)] = p_1,$$

$$-A(1-\nu) \sinh \lambda b + E[(1+\nu) \sinh \lambda b - (1-\nu) \lambda b \cosh \lambda b] = \frac{2-\nu}{\lambda} \varpi_0'(b) + \frac{1}{\lambda^3} [\bar{g} - \varpi_0'''(b)] = p_2$$

определитель, которой равен

$$\frac{1}{2} (1-\nu) [(3+\nu) \sinh 2\lambda b - (1-\nu) 2\lambda b]$$

Таким образом, для проведения в этом случае численных расчетов по теореме о вычетах следует табулировать корни $z = \pm \sigma \pm i\tau$ уравнения:

$$(3+\nu) \sinh z - (1-\nu) z = 0.$$

Приводим соответствующие результаты для двух значений коэффициента Пуассона: $\nu = 1/4$ и $\nu = 1/3$ (табл. 13)

Таблица 13

$shz - \frac{1-\nu}{3+\nu} z = 0$				$shz + \frac{1-\nu}{3+\nu} z = 0$			
$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$		$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$	
σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ
0	2,596	0	2,521	0	4,105	0,3512	4,484
1,013	7,684	1,193	7,669	0	4,906	1,581	10,84
1,699	14,01	1,851	13,99	1,422	10,85	2,060	17,16
2,086	20,32	2,233	20,31	1,912	17,16	2,379	23,46
2,360	26,61	2,506	26,61	2,232	23,46	2,619	29,76
-	-	-	-	2,474	29,76	-	-

Теперь необходимо провести исследование сходимости полученных интегралов, ибо в рассматриваемом случае, в отличие от остальных типов краевых условий, решение задачи существует только в том случае, когда заданные граничные значения $N(x)$ уравниваются поперечной нагрузкой $q(x,y)$.

В исследуемом случае симметричного нагружения условия статики имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x) x dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta = 0$$

и, очевидно, эквиваленты следующему равенству:

$$\bar{g} - \sigma_0'''(b) = O(\lambda^2) \text{ при } \lambda \rightarrow 0.$$

При этом имеем: $p_1 = O(\lambda^{-2})$, $p_2 = O(\lambda^{-1})$. Отсюда вытекает, что величина $A(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ будет иметь порядок λ^{-2} , а это влечет за собой расходимость в точке $\lambda = 0$ интеграла Фурье, представляющего прогиб плиты $\omega(x, y)$. Причина этого обстоятельства заключается, очевидно, в том, что в принятой нами по-

становке задачи прогиб определен с точностью до бесконечно большой постоянной и для определенности поставленной задачи необходимо задать значение ω в какой либо точке плиты, например, принять, что $\omega(0, 0) = 0$. Так как

$$\omega(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda, \text{ то из выражения для преобразованного}$$

прогиба ϖ следует вычесть величину $A(\lambda)$, что приведет к окончательному решению задачи в виде следующего сходящегося интеграла:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A ch \lambda y + D \lambda y sh \lambda y + \varpi_0] e^{-i\lambda x} - A(\lambda) d\lambda.$$

Аналогичным образом для антисимметричной загрузки находим

$$\begin{aligned} B(1-\nu) sh \lambda b + C[2 sh \lambda b + (1-\nu) \lambda b ch \lambda b] &= p_1, \\ -B(1-\nu) ch \lambda b + C[(1+\nu) ch \lambda b - (1-\nu) \lambda b sh \lambda b] &= p_2, \end{aligned}$$

причем определитель этой системы пропорционален функции $(2\lambda b = z)$

$$(3+\nu) sh z + (1-\nu) z,$$

корни которой для $\nu = 1/4$, $\nu = 1/3$ даны в табл.13.

Условия статики[20] в рассматриваемом случае будут:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} M(x) dx - b \int_{-\infty}^{\infty} N(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b \eta q(\xi, \eta) d\xi d\eta &= 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} N(x) x dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^b q(\xi, \eta) d\xi d\eta &= 0 \end{aligned}$$

и могут быть представлены в виде одного равенства

$$[p_1(\lambda) - \lambda b p_2(\lambda)]_{\lambda \rightarrow 0} = O(1).$$

Нетрудно видеть, что при этом интеграл Фурье для прогиба ω будет сходящимся в точке $\lambda = 0$. В самом деле,

$$\varpi = \lambda y(B+C) + O(\lambda^2),$$

причем

$$B + C \underset{\lambda \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{p_1 - \lambda b p_2}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

В следующем параграфе даются решения некоторых конкретных задач изгиба ленточных плит, основанных на использовании вышеизложенной методики [25].

Здесь же мы сделаем замечание, касающееся еще двух типов смешанных граничных условий, когда одна кромка ($y=0$) ленточной плиты ширины b находится в условиях свободного опирания. Что касается другой кромки ($y=b$), то на ней могут быть заданы либо прогиб и угол поворота, либо изгибающий момент и перерезывающая сила. Кроме того, известна поперечная нагрузка $q(x, y)$.

Таблица 14

$chz + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{z^2}{2} + \frac{4+(1+\nu)^2}{4-(1+\nu)^2} = 0$			
$\nu = 1/3$		$\nu = 1/4$	
σ	τ	σ	τ
1.055	3.831	0	3.366
0	5.956	1.080	5.004
3.267	11.93	3.460	11.92
4.193	18.36	4.361	18.35
4.797	24.74	4.950	24.73

Легко видеть, что если наряду с этим рассмотреть плиту ширины $2b$, загруженную по области $0 < y < b$ теми же нагрузками $q(x, y)$, а по области $-b < y < 0$ — нагрузками той же величины, но противоположного направления, то краевые условия свободного опирания:

$$\omega|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0$$

будут выполнены. Таким образом, рассматриваемый случай сводится к антисимметричному изгибу ленточной плиты ширины $2b$, т. е. для указанных двух случаев задача может считаться решенной. Разумеется, во втором случае заданные силы и моменты должны статически уравниваться внешней нагрузкой [23].

Наконец, интегральное преобразование Фурье успешно используется для расчетов на изгиб ленточных плит и при более сложных типах граничных условий (см., например, опубликованную работу М. Б. Шереметьева и Д. Г. Хлебникова, а также при исследовании деформаций плиты в виде полуполосы ($x \geq 0$). В последнем случае точное решение может быть получено для случая, когда на кромке $x=0$ заданы прогиб и изгибающий момент, путем применения синус-преобразования Фурье.

2.9. Изгиб бесконечной полосы сосредоточенной силой

Рассмотрим изгиб ленточной плиты [26] ($-\infty < x < \infty, |y| \leq b$), нагруженной сосредоточенной силой $2P$ в произвольной точке $x=0, y=a < b$.

Считая, что краевые условия на обоих краях $y = \pm b$ однотипны, разобьем, как и выше, задачу на симметричную, причем в первом случае следует в (126) положить $B=C=0$, во втором – $A=E=0$ и рассматривать лишь половину полосы ($0 \leq y \leq b$).

Частное решение $\varpi_0(y)$, входящее в общее выражение (126) для преобразованного прогиба

$$\varpi = (A + B\lambda y)ch\lambda y + (C + E\lambda y)sh\lambda y + \varpi_0, \quad (134)$$

согласно формуле (122) имеет для рассматриваемого типа нагрузки вид:

$$\varpi_0 = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a, \\ \frac{PK_\lambda(y-a)}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3}}, & a \leq y \leq b, \end{cases} \quad (135)$$

где обозначено, как и выше,

$$K_\lambda(x) = \lambda x ch\lambda x - sh\lambda x. \quad (136)$$

Из всех разобранных в предыдущем параграфе случаев в дальнейшем рассматриваются два типа краевых условий: закрепленные края и шарнирно опертые края.

Для решения задачи о симметричном загрузении плиты с закрепленными краями необходимо определить величины A и E из системы

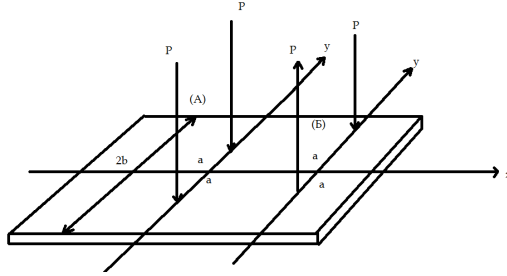


Рис. 30

$$\begin{aligned} Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b &= -\frac{PK_{\lambda}(b-a)}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3}}, \\ Ash\lambda b + E(\lambda bch\lambda b + sh\lambda b) &= -\frac{PK'_{\lambda}(b-a)}{2\sqrt{2\pi D\lambda^4}}. \end{aligned} \quad (137)$$

которая получена подстановкой в (129) значений $f=g=0$, соответствующих отсутствию на краях плиты прогибов и углов поворота, а также значений $\varpi_0(b)$ и $\varpi_0'(b)$, взятых из (135)

Решение системы (137) имеет вид

$$\begin{aligned} A &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3}} \cdot \frac{(\lambda bch\lambda b + sh\lambda b)K_{\lambda}(b-a) - bsh\lambda bK'_{\lambda}(b-a)}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b}, \\ E &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3}} \cdot \frac{\frac{1}{\lambda}ch\lambda bK'_{\lambda}(b-a) - sh\lambda bK_{\lambda}(b-a)}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b}. \end{aligned}$$

причем входящая сюда производная от функции $K_{\lambda}(x)$ дается формулой

$$K'_{\lambda}(x) = \lambda^2 xsh\lambda x.$$

Подстановка найденных значений в выражение (9.1) ($B=C=0$) и использование формулы обращения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varpi \cos \lambda x d\lambda$$

дает полное решение поставленной задачи.

Получим выражение для изгибающего момента $M(x)$ на заделке.

Преобразуя по Фурье справедливую в данном случае формулу

$$M(x) = -D \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \Big|_{y=b}$$

находим

$$\overline{M} = -D\lambda^2 \left[Ach\lambda b + E(\lambda bsh\lambda b + 2ch\lambda b) + \frac{1}{\lambda^2} \overline{\omega}_0(b) \right].$$

Учитывая еще, что

$$K''_{\lambda}(x) = \lambda^2 (\lambda xch\lambda x + sh\lambda x),$$

получаем после некоторых выкладок

$$\overline{M} = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \frac{bch\lambda ash\lambda b - ach\lambda bsh\lambda a}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b}$$

или окончательно, после применения формулы обращения,

$$M(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{bsh\lambda ash\lambda b - ach\lambda bsh\lambda a}{ch\lambda bsh\lambda b + \lambda b} \cos \lambda x d\lambda. \quad (138)$$

Решение соответствующей задачи об антисимметричном загрузении ленточной плиты с закрепленным контуром приводит к системе уравнений (130)

$$B\lambda bch\lambda b + Csh\lambda b = -\frac{PK'_{\lambda}(b-a)}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3},$$

$$B(\lambda bsh\lambda b + ch\lambda b) + Cch\lambda b = -\frac{PK'_{\lambda}(b-a)}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^4}.$$

Решая эту систему, получим

$$B = -\frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \cdot \frac{ch\lambda b K_\lambda(b-a) - \frac{1}{\lambda} sh\lambda b K'_\lambda(b-a)}{\lambda b - ch\lambda b sh\lambda b},$$

$$C = -\frac{P}{2\sqrt{2\pi}D\lambda^3} \cdot \frac{bch\lambda b K'_\lambda(b-a) - (\lambda b sh\lambda b + ch\lambda b) K_\lambda(b-a)}{\lambda b - ch\lambda b sh\lambda b},$$

после чего решение задачи сводится к применению формулы обращения.

Определим, как и в предыдущем случае, значения изгибающего момента на закрепленном крае. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{M} = -D\omega''(b) &= -D\lambda^2 \left[B(\lambda b ch\lambda b + 2sh\lambda b) + Csh\lambda b + \frac{\overline{\omega}_0(b)}{\lambda^2} \right] = \\ &= -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{bsh\lambda ach\lambda b - ash\lambda bch\lambda a}{ch\lambda b sh\lambda b - \lambda b} \end{aligned}$$

или окончательно

$$M(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{bsh\lambda ach\lambda b - ash\lambda bch\lambda a}{ch\lambda b sh\lambda b - \lambda b} \cos \lambda x d\lambda \quad . \quad (139)$$

Суммируя значения, даваемые формулами (138) и (139), находим выражение для изгибающего момента на заделанном краю ($y=b$) ленточной плиты ширины $2b$, нагруженной в точке $x=0$, $y=a$ сосредоточенной силой $2P$,

$$M(x) = -\frac{2P}{\pi} \times \int_0^\infty \frac{(b-a)sh2\lambda bsh\lambda(b+a) - 2\lambda b(b+a)sh\lambda(b-a)}{sh^2 2\lambda b - (2\lambda b)^2} \cos \lambda x d\lambda$$

В качестве второго примера исследуем симметричное напряженное состояние в ленточной плите ($-\infty < x < \infty, -b < y < b$), шарнирно опертой по краям и нагруженной сосредоточенной силой в произвольной точке $x=0$, $y=a < b$.

В этом случае преобразованный прогиб имеет вид

$$\overline{\omega} = Ach\lambda y + E\lambda y sh\lambda y + \overline{\omega}_0(y) \quad ,$$

где выражение для $\bar{\omega}_0$ дается формулами (135)–(136). Величины A и E следует определить из системы (132), принимающей в рассматриваемом случае ($f = g = 0$) вид

$$\begin{aligned} Ach\lambda b + E\lambda bsh\lambda b &= -\bar{\omega}_0(b), \\ Ach\lambda b + E(\lambda bsh\lambda b + 2ch\lambda b) &= -\frac{1}{\lambda^2}\bar{\omega}_0''(b), \end{aligned}$$

вычисление, проведенное с учетом равенств приводит к следующим значениям:

$$\begin{aligned} A &= \frac{P}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3 ch^2 \lambda b}} \{ [\lambda ach\lambda(b-a) + sh\lambda(b-a)] \times ch\lambda b - \lambda bch\lambda a \} \\ E &= -\frac{P}{2\sqrt{2\pi D\lambda^3}} \cdot \frac{sh\lambda(b-a)}{ch\lambda b}, \end{aligned}$$

после чего решение задачи дается формулой обращения косинус-интеграла Фурье.

В частном случае при $a=0$ приходим к задаче об изгибе полосы шириной $2b$ с опертыми краями силой $2P$, приложенной в произвольной точке ($x=0, y=0$) средней линии. Приводим для этого случая выражение прогиба средней линии:

$$\omega(x,0) = \frac{Pb^2}{4\pi D} \int_0^\infty \frac{sh2\mu - 2\mu}{\mu^3 ch^2 \mu} \cos \mu \frac{x}{b} d\mu.$$

Вычисление прогиба непосредственно под силой приводит к следующему значению ($\zeta(x)$ – дзета-функция):

$$\omega(0,0) = \frac{7Pb^2}{2\pi^3 D} \zeta(3) \approx 0.136 \frac{Pb^2}{D}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Божанов Е. Т., Ержанов Ж. С. Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения. – Алматы: Ғылым, 2001. – С.88–90.
- 2 Божанов Е. Т. Разработка теоретических основ стабилизирующих технологий. – Алматы: Ғылым, 1996. – С.204–205.
- 3 Божанов Е. Т., Дюсенбаев И. Н. Методика экспериментальных исследований на прочность магистральных трубопроводов на стенде, полигоне и промышленных испытаниях участка нефтяных труб // Сб. научных трудов АГТУ, Алматы, 1996. – С. 564–569.
- 4 Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.
- 5 Григолок Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – С.223–225.
- 6 Ержанов Ж. С., Божанов Е. Т. Устойчивость упругих тел, нелинейных пластин и оболочек. – Алматы: Ғылым, 1997. – С.115–117.
- 7 Божанов Е. Т., Мендыбаев Т. О. О проблемах теоретической взаимосвязи остаточных напряжений стабилизирующей технологии механической обработки с оптимальной точностью // Тезисы докладов междунауч. конф. по механике горных пород, посвященной 75-летию академика Ж.С. Ержанова. – Алма-Ата: 1997. – 106 с.
- 8 Божанов Е. Т., Мендыбаев Т. О. Установление аналитической зависимости прочности сцепления покрытия от остаточных напряжений основы детали // Сб. науч. тр. Актауского Государственного университета. – Алма-Ата: 1996. – 153 с.
- 11 Almoth B. O., Brush D. O. Bucking of a finite-length cylindrical shell under a circumferential band of pressure. // SpaseSciense, 1961. – P.573–574.
- 12 Божанов Е. Т., Иманбеков И. А. Механика и математическая модель расчета долговечности магистральных труб. – Алматы: Ғылым, 2004. – 165 с.
- 13 Божанов Е. Т., Ибраимкулов А. М., Тулешева Г. А. Анализ численных результатов устойчивости выработок в толще горных пород под действием поперечных и осевых сил. – Актобе, 2007. – 143 с.

14 *Победра Б. Е.* Проблемы прочности композиционных материалов. – Киев: Знание, 1986. – С.56–57.

15 *Партон В. З.* Механика разрушения, от теории к практике.–М.: Наука, 1990. – С.112–114.

16 *Божанов Е. Т., Буганова С. Н., Отарбаев Ж. О.* К вопросу выпучивания выработки, трубчатых конструкций с заполнителем с позиции нелинейной теории. // Мат.V междун. науч. конф., 2009. Т. 24. – С.34–37.

17 *Айталиев Ш. М., Кусаинов А. А., Божанов Е. Т., Секеев К. М.* К обоснованию расчета магистральных газотрубопроводов. Тр. II междун. науч.- практ. конф. «Транспорт Евразия». Т. 2. –Алматы: 2002. – С.115–117.

18 *Айталиев Ш. М., Божанов Е. Т., Нысангалиев А. Н.* Трубопроводный транспорт Казахстана: проблемы, перспективы, научное сопровождение //Тр. I междун. науч.-практ. конф. «Транспорт Евразии: взгляд в XXI». –Алматы: 2000. – С.213–215.

19 *Рахимбекова З. М.* Нелинейные стержневые системы за пределом упругости.–Алматы: Ғылым, 2002. – 405 с.

20 *Божанов Е. Т., Ибраимкулов А. М.* Статика деформируемых систем под действием статических нагрузок // Междун. науч.-практ. конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий». – Алматы: 2006. – С. 67–75.

21 *Божанов Е. Т., Ибраимкулов А. М.* Динамика деформируемых систем под действием динамических нагрузок //Междун. науч.-практ. конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий». –Алматы: 2006. – С. 89–97.

22 *Божанов Е. Т., Сатыбалдиев О. С., Альмухамбетов К. К., Турусбекова Б. С.* Об устойчивости выработки в массиве горных пород под действием собственного веса, находящейся на упруго-вязком основании типа Келвина-Фойхта // Сб. мат. междун. конф. «Теоретические и экспериментальные исследования строительных конструкций». –Алматы. 2007. – С.115–121.

23 *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. –М.: Наука. 1948. – С.186–189.

24 Герасимов В. И., Герасимов Е. В. Метод координат моментов для определения перемещения блок и рам. –М.: Вестник, АТИРПиХ. 1993. –С.28–31.

25 Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации.–М: Прикладная математика и механика, 1940. – С.79–92.

26 Киевчевский Н. А. Теория нестандартных динамических процессов в оболочках. –М.: Прикладная математика.1968. Т. 4, вып.8.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Математические теории упругой сплошной среды при моделировании физико-технических процессов.....	5
1.1. Основные понятия при математическо-компьютерном моделировании.....	5
1.1.1. Выбор материала.....	5
1.1.2. Основные понятия и аксиомы твердого тела при моделировании.....	6
1.2. Краткие общеобразовательные сведения из теории напряжений.....	11
1.2.1. Напряжения	11
1.2.2. Напряженное состояние тела.....	14
1.2.3. Дифференциальные уравнения равновесия.....	16
1.2.4. Метод сечений и напряжений.....	19
1.2.5. Теория напряжений и гипотеза сечений.....	20
1.2.6. Условия на поверхности.....	22
1.3. Поверхность Коши. Формулы компонентов напряжения или переход от одной системы к другой.....	24
1.4. Поверхность напряжения Коши. Наибольшие касательные напряжения. Октаэдрические площадки и октаэдрические напряжения.....	31
1.4.1. Поверхность напряжения Коши. Инварианты тензора напряжения.....	31
1.4.2. Наибольшие касательные напряжения.....	34
1.4.3. Шаровой тензор и девиатор напряжений.....	35
1.5. Геометрия деформации, деформация удлинения, деформация сдвига, уравнения неразрывности Деформации.....	36
1.5.1. Общая постановка задачи и типы ее решения с точки зрения классической теории упругости. Геометрия деформации.....	36
1.5.2. Деформация материала в точке.....	38
1.5.3. Деформация сдвига.....	42
1.5.4. Уравнения неразрывности деформации.....	45

1.6.	Геометрия деформации. Тензор относительных перемещений. Выражение компонентов вращения через деформации. Выражение тензора относительных перемещений через суммы тензоров чистой деформации жесткого вращения. Тензорный характер деформации тела в данной точке. Поверхность деформации.....	46
1.6.1.	Тензор относительных перемещений – тензор малой деформации. Выражение компонентов вращения через деформации.....	46
1.6.2.	Девииатор деформации, инварианты девиатора деформации, конечная деформация. Общее понятие деформации кручения и явление изгиба на основе механических свойств компонентных материалов.....	49
1.7.	Обобщенный закон Гука (гипотеза о естественном состоянии тела) и закон Гука. Выражение напряжений через деформации, выражение деформаций через напряжения, работа упругих сил и потенциал упругих сил	50
1.7.1.	Обобщенный закон Гука (общие понятия).....	50
1.7.2.	Выражение деформаций через напряжения.....	53
1.7.3.	Выражение напряжений через деформации.....	55
1.7.4.	Объемная деформация. Инварианты тензора деформации.....	60
1.7.5.	Работа упругих сил в твердом теле.....	61
	Глава 2. Интегральные преобразования в задачах Математической теории упругой сплошной среды...	63
2.1.	Упругое равновесие полуплоскости.....	64
2.2.	Первая основная задача теории упругости для бесконечной полосы	68
2.3.	Вторая основная задача для бесконечной полосы...	73
2.4.	Полоса, закрепленная по контуру и нагруженная сосредоточенным моментом.....	78
2.5.	Смешанная задача для бесконечной полосы.....	81
2.6.	Равновесие полосы с закрепленным основанием....	85
2.7.	Изгиб полуплоскости с закрепленным краем.....	86
2.8.	Изгиб ленточных плит.....	90
2.9.	Изгиб бесконечной полосы сосредоточенной силой..	97
	Библиографический список.....	102

Учебное издание

Ескерген Токшылыкович Божанов
Ермек Меретаевич Хайруллин
Гульнара Алиповна Тулешева

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие
часть I

Нач. РО ИИЦ
Редактор
Компьютерная верстка

З. А. Губайдулина
Г. М. Дюсенбаева
А.А. Кадирсизова

Подписано в печать 23.05.2016 г.

Тираж 300 экз. Формат 60х84х 1/16. Бумага типогр. № 1.
Уч.-изд.л. 6,7. Усл. п.л. 6,2. Заказ №. 693. Цена договорная.

Издание Казахского национального исследовательского
технического университета имени К. И. Сатпаева
Учебно-издательский центр
КазНITU имени К. И. Сатпаева,
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-228-952-7



9