

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

Б. Ж. Сағындықов

КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

Университеттің Ғылыми – әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2016

Пікір жазғандар:

Тұңғатаров А.Б., физ.-мат. ғыл. докт., проф. әл-Фараби атындағы ҚазҰТЗУ;

Дәулетқұлова А.Ө., пед. ғыл. канд., доц., ҚазМҚПУ;

Айдос Е. Ж., физ.-мат. ғыл. канд., доц., ҚазҰТЗУ.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2016 жылғы басылым жоспары бойынша басылды.

Сағындықов Б.Ж.

- С14** Комплекс айнымалы функциялар теориясы: Оқу құралы /
Б. Ж. Сағындықов – Алматы: Қ.И. Сәтбаев атындағы
ҚазҰТЗУ, 2016. – 274 б.: Сурет 30. Кесте 1. Библиогр.– 25 атау.
ISBN 978-601-228-902-2

Оқу құралы техникалық университеттердің ақпараттық жүйе, математикалық және компьютерлік модельдеу мамандықтары оқитын «Комплекс айнымалы функциялар теориясы» пәнінің бағдарламасына сәйкес жазылған. Оқу құралында КАФТ – ның әртүрлі бөлімдері қарастырылған.

Оқу құралы 3 тараудан тұрады, әр тараудың соңында қайталауға арналған сұрақтар берілген.

Оқу құралында әдетте КАФТ – ның курсына оқылатын барлық дерлік материал бар. Сондықтан жоғарғы оқу орындарының студенттеріне және КАФТ мен оның қолданылуларымен айналысатындардың барлығына ұсынуға болады.

КІРІСПЕ

Оқу құралы техникалық университеттердің математикалық және компьютерлік модельдеу, ақпараттық жүйелеу және техникалық физика мамандықтарына арналған. Оқу құралының теориялық желісі Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым Министрлігі бекіткен мемлекеттік стандартына және оның негізінде қабылданған типтік оқу бағдарламаларына сәйкестендірілген қазіргі кредиттік оқу жүйесінің талаптарына сай жазылған.

Оқу құралы «Комплекс сандар», «Нақты және комплекс айнымалының комплекс мәнді функциялары», «Тізбектер, қатарлар және шегерімдер теориясының негіздері» атты үш тараудан тұрады.

Теориялық мазмұндау практикалық есептерді шығарумен ұштастырылып, математикалық талдау, геометрия, дифференциалдық тендеулер және көптеген басқа да пәндерді түсінуге үлес қосатын материалдар сұрыпталды.

Барлық тарауларда теориялық материалдар тәжірибелік сабақтарда шығарылған есептердің шығару үлгілерімен және әдістері мысалдармен қамтылды. Комплекс сандардың негізгі ұғымдары мен фундаментальды түсініктері мен аппараты жан-жақты және жеткілікті түрде түсіндірілген.

Анықтамалар мен теоремалардың болмысын ашу үшін түсініктемелер мен ескертулер келтіріліп, әрбір тақырыптың соңында өтілетін сабаққа байланысты есеп шығару жолдары көрсетілген. Сонымен қатар теориялық материалдарды толық тексеру үшін студенттерге әрбір тақырып соңында өзіндік тапсырма ретінде қажетті сұрақтар мен тапсырмалар келтірілді.

Оқу құралын жазу және құрастыру барысында әртүрлі көптеген әдебиеттер қолданылды. Қажетті мәліметтердің барлығы дерлік оқу құралының соңында келтірілген әдебиеттерден алынды. Бұл жерде автордың еңбегі, егер осылай айтуға болатын болса, бар мәліметтерді сұрыптау және оқырманға түсінікті тілде жеткізу.

Оқу құралында кездесетін кемшіліктер мен қателіктерді көрсеткен оқырмандардың ескертулерін автор зор ықыласпен қабылдайды.

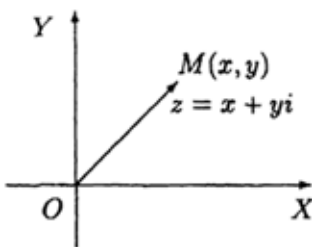
I КОМПЛЕКС САНДАР

Мектеп қабырғасында математика пәнінде натурал, рационал, иррационал және осы аталған жүйелерді біріктіретін нақты сандар жүйесімен таныстық. Әрі қарай математикада бұлардан өзгеше басқа сандар жүйесі қолданыла ма деген заңды сұрақ туады. Қойылған сұраққа жауап ретінде жоғарғы оқу орындарында көбінесе комплекс айнымалы функциялар теориясын өтеді.

Комплекс айнымалы функциялар теориясын кейбір жаратылыстану есептерінің қойылымында қолдану мүлдем күтпеген жерден есептің шешімін тауып, физикалық тұрғыдан қызықты нәтижелер алуға себеп болды.

Комплекс санды У.Р. Гамильтон белгілі бір ретпен алынған қос $(x;y)$ екі нақты сан ретінде анықтаған. Бұл қос $(x;y)$ екі нақты санды математиктер тұтас бір объект (нысан) ретінде қабылдап, оны комплекс сан деп атап, $z = x + iy$ арқылы бір әріппен белгілеген. Мұндағы "i" таңбасы тек қосақтағы бір нақты санды осы қосақтағы екінші нақты саннан бөлектеу үшін қолданылған. Сонда "+" таңбасы ретімен алынған қосақтағы екі нақты санды біріктіретін символ ретінде қарастырылады.

Комплекс санның алгебралық формасы және геометриялық кескіні. Комплекс сандар алгебрасы. Евклид жазықтығында бекітілген XOY тік бұрышты координаталар жүйесіне қатысты қарастырылатын $M(x, y)$ ағымдық нүктесінің орны $z = x + iy$ комплекс саны арқылы анықталсын дейік (1.1-сурет). Мұндағы x,y -нақты сандар, ал i символы $i^2 = -1$ теңдігі орындалатындай және элементар алгебра курсынан белгілі жорамал бірлік. Сондықтан $z = x + iy$ түріндегі бүкіл комплекс сандар жиыны мен евклид жазықтығының барлық $M(x, y)$ нүктелерінің арасында бірмәнділік сәйкестік орнатуға болады, яғни



1.1-сурет

$$\{M(x, y)\} \leftrightarrow \{z\} = \{x + iy\}.$$

Сонымен $z = x + iy$ комплекс санының геометриялық кескіні ретінде $M(x, y)$ нүктесін немесе осы нүктеге тиісті

$$\overline{OM} = \{x, y\}$$

радиус – векторын сәйкестендіруге болады. $x + 0 \cdot i = x$ нақты сандары ОХ осінің бойындағы нүктелер арқылы бейнеленеді, сондықтан ОХ осін нақты ось деп атайды, ал iy жорамал сандары ОУ осінің бойындағы нүктелер арқылы бейнеленеді.

Комплекс санның бірінші компонентасын оның нақты бөлігі деп атап, $x = \operatorname{Re} z$ арқылы белгілейді. Ал екінші компонентасы оның жорамал бөлігі деп аталады және $y = \operatorname{Im} z$ арқылы белгіленеді. $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ болғанда және тек сонда ғана $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары өзара тең деп аталады, яғни бұл сандардың жазықтықтағы сәйкес кескіндері беттеседі.

Комплекс санның

$$z = x + iy \quad (1.1)$$

түрінде жазылуын оның алгебралық түрі деп атайды. Комплекс санның алгебралық түрде жазылуынан оның геометриялық интерпретациясы шығады. Сонда берілген комплекс санға

сәйкес келетін нүктенің жазықтықтағы координаталары табылады. $x - iy$ комплекс саны $z = x + iy$ комплекс санының түйіндесі деп аталады және $\bar{z}$ арқылы белгіленеді:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Кез келген z комплекс саны үшін $\overline{(\bar{z})} = z$ теңдігінің дұрыстығы айқын. Комплекс санның анықтамасынан z комплекс саны нақты болғанда және тек сонда ғана $z = \bar{z}$ теңдігі орындалады. Комплекс жазықтығында z және $\bar{z}$ нүктелері нақты оське қатысты симметриялы, өйткені $\bar{z} = x + i(-y)$.

Комплекс жазықтығы $\mathbb{C}$ комплекс сандар өрісінде изоморфты екі өлшемді нақты $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ кеңістігін құрайды. Мұндай кеңістіктің әрбір нүктесі (x, y) түріндегі реттелген координаттардан тұрады.

Комплекс санның нақты және жорамал бөліктері $\bar{z}$ арқылы

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

түрінде өрнектеледі.

Комплекс саннан оның түйіндесіне көшу

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad \text{және} \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

арақатынастары арқылы анықталады. Комплекс санның мұндай қасиетін оның іргелілігі деп атайды.

Сонымен қоса егер $z_1, z_2, \dots$ комплекс сандарынан құралған $R(z_1, z_2, \dots)$ рационал өрнек берілсе, онда оның түйіндес өрнегі

$$\overline{R(z_1, z_2, \dots)} = R(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots)$$

теңдігімен анықталады. Бұл тұжырымнан алгебралық теңдеудің келесі қасиеті шығады. Егер

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

теңдеуінің түбірі ζ болса, онда $\bar{\zeta}$ комплекс саны

$$\bar{c}_0 z^n + \bar{c}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{c}_{n-1} z + \bar{c}_n = 0$$

теңдеуінің түбірі болады.

Дербес жағдайда, егер бұл теңдеулердің коэффициенттері нақты болса, онда ζ және $\bar{\zeta}$ комплекс сандары бір мезгілде теңдеудің түбірлері болады.

Жоғарыда комплекс жазықтығының әрбір ағымдық нүктесіне $\overrightarrow{OM}$ радиус – векторы сәйкестендірілетіні айтылған. Өз кезегінде $\{\overrightarrow{OM}\}$ радиус – векторлар жиыны векторлық қосу

мен нольден өзгеше нақты санға көбейту амалдарына қатысты векторлық кеңістік құрайды. Демек $\mathbb{C}$ комплекс сандар жиыны мен $L = \{\overrightarrow{OM}\}$ векторлық кеңістігінің араларында бірімәнді

сәйкестік орнатылады. Бұл бірімәнді сәйкестік изоморфты болады. Өйткені $z_1 \leftrightarrow \overrightarrow{OM_1}, z_2 \leftrightarrow \overrightarrow{OM_2}$ сәйкестіктерінен $z_1 + z_2 \leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ және $\lambda z \leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ сәйкестіктері шығады.

Бұдан изоморфтылық шартына сүйене отырып, комплекс сандарды қосу және нақты санға көбейту амалдарын анықтаймыз.

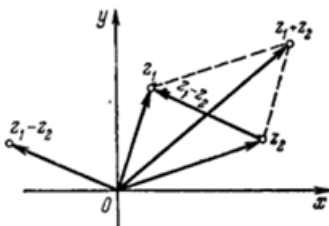
1. $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ дейік (1.2 - сурет). z_1 және z_2 комплекс сандарының қосындысы деп

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

комплекс санын айтамыз. Бұл сандардың айырымы деп

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

комплекс саны айтылады. z_1 және z_2 нүктелерінің арақашықтығы $|z_1 - z_2|$ модулінің мәніне тең (1.2-суретті қара).



1.2-сурет

$z = x + iy$ комплекс санын нольден өзгеше λ нақты санына көбейткенде $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ комплекс саны шығады.

Ozz_1 үшбұрышында (1.2-суретті қара) Oz қабырғасы оның қалған екі қабырғасының қосындысынан артпайды. Демек

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

үшбұрыш теңсіздігі орындалады. Теңдік z_1 және z_2 векторлары бағыттас болғанда және тек сонда ғана орындалады.

2. Комплекс сандарды көбейту амалына тоқталайық. Алдымен $i \cdot i = i^2$ көбейтіндісі қарастырылады. Анықтама бойынша $i^2 = -1$. Бұл анықтаманың түбегейлі маңыздылығына оқырманның назарын аударып, неліктен $i^2 = -1$ болу себебін түсіндіруге тырысайық.

Ол үшін алгебралық амал дегеніміз не деген сұраққа жауап іздейік. Егер қайсыбір A жиынының белгілі бір ретпен алынған әрбір қос элементіне осы жиынға тиісті элементті өзара бірмәнді сәйкестілік арқылы анықтайтын заңдылық тағайындалса, онда A жиынында алгебралық амал анықталған деп айтады.

Комплекс сандарды көбейткенде нақты сандарды көбейту және жақшаларды ашу ережелері сақталсын деп ұйғарым жасайық. Сонда

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2.$$

Бұдан теңдіктің оң жағындағы өрнек $\mathbb{C}$ комплекс сандар жиынына тиісті болу үшін $i^2 = -1$ не $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ теңдіктерінің бірі орындалуы қажет. $i^2 = -1$ болғанда комплекс сандар теориясы, ал $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ болғанда жалпы комплекс сандар теориясы қарастырылады.

Комплекс сандар өрісінің ішкі құрылымы болатын жалпы комплекс сандар теориясынан алғашқы мәліметтерді бере кетейік.

Жалпы комплекс сандар ұғымы

Алғашқы ұғымдар. Элементтері реттелген $z = x + py = (x, y)$ түріндегі G сандар жиынын қарастырайық, мұнда p - қандай да бір арнайы символ және $py = yp$ деп қабылдайық. Осы жиында алгебралық амал енгізетін болсақ, мысалы – көбейту, онда әрбір z_1 және z_2 сандарының көбейтіндісі осы жиында жату үшін $p^2 + \theta = p\theta_0$ түрінде алынады. Өйткені z_1, z_2 сандарының көбейтіндісі

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + py_1)(x_2 + py_2) = x_1x_2 + p(x_1y_2 + y_1x_2) + p^2y_1y_2$$

G жиынына тиісті болу үшін p символының квадраты $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ сызықтық өрнегі арқылы анықталуы қажетті және жеткілікті.

Неліктен $z = x + py$ саны жалпы комплекс сан деп аталады? Осы сұраққа жауап беру үшін келесі дербес жағдайларды қарастырайық:

1. Егер $\theta_0 = 1, \theta_1 = 0$ болса, онда $z = x + py \equiv x + iy$ комплекс санын анықтайды;
2. Егер $\theta_0 = 1, \theta_1 = 0$ болса, онда $z = x + py$ қосарланған санды (двойное число) анықтайды;
3. Егер $\theta_0 = \theta_1 = 0$ болса, онда $z = x + py$ қос санды (дуальное число) анықтайды. Мұнда $p^2 = 0$.

Амалдар қолдану. Жалпы комплекс сандар жиынында арифметикалық амалдарды келесі түрде енгізейік:

$$\text{Қосу: } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + p(y_1 + y_2);$$

$$\text{Нақты санға көбейту: } \lambda z = \lambda x + p\lambda y;$$

$$\text{Азайту: } z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2 = x_1 - x_2 + p(y_1 - y_2);$$

$$\text{Көбейту: } z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - \theta_0y_1y_2) + p(x_1y_2 + y_1x_2 + \theta_1y_1y_2).$$

Егер жалпы комплекс санның түйіндесін

$\bar{z} = x + \theta_1 y - py$ түрінде алсақ, оның модулінің квадраты төменгі өрнек арқылы беріледі:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2.$$

Сонымен қатар $\frac{z_1}{z_2}$ және z^{-1} сандары

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + py_1}{x_2 + py_2} = \frac{x_1 x_2 + \theta_0 y_1 y_2 + \theta_1 x_1 y_2}{x_2^2 + \theta_1 x_2 y_2 + \theta_0 y_2^2} + p \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + \theta_1 x_2 y_2 + \theta_0 y_2^2};$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x + py} = \frac{x + \theta_1 y}{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2} + p \frac{-y}{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2}$$

теңдіктері арқылы анықталады.

Әрі қарай комплекс сандар теориясын университеттің оқу бағдарламасына сай қарастырайық.

Сонымен $i^2 = -1$ деп санап, z_1 және z_2 комплекс сандарының көбейтіндісін анықтайық:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Көбейту ережесіне сай комплекс санның модулінің квадраты

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

теңдігі арқылы анықталады.

Комплекс сандардың қосу және көбейту ережелерінен

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

қасиеттері шығады.

3. Комплекс сандарды бөлу көбейтуге кері амал ретінде анықталады. Алгебралық түрде берілген z_1 және z_2 комплекс сандарының $\frac{z_1}{z_2}$ бөліндісін табу үшін бөлшектің алымын да, бөлімін де бөлімінің $\bar{z}_2$ түйіндесіне көбейтеміз:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

4. Жорамал бірліктің оң бүтін дәрежелері $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ... тізбегі бойынша табылады. Бұдан кез келген $k \in N$ үшін $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, теңдіктері алынады.

Кез келген $a + bi$ комплекс санының дәрежеге шығару үшін Ньютон биномын пайдаланамыз:

$$(a + bi)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} bi + C_n^2 a^{n-2} b^2 i^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} i^{n-1} + b^n i^n$$

Теңдіктің оң жақ бөлігіндегі i^k дәрежелерін олардың сәйкес мәндерімен алмастыра отырып,

$$(a + bi)^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} a^{n-2k} b^{2k} + i \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} a^{n-2k-1} b^{2k+1}$$

формуласын аламыз, мұнда $[x]$ таңбасы арқылы нақты санының бүтін бөлігі көрсетілген.

Анықтама. Нақты санның бүтін бөлігі деп $k \leq x$ теңсіздігін қанағаттандыратын бүтін сандардың ішіндегі ең үлкен бүтін санын айтады.

Есеп шығару үлгілері

Мысалы $z = 3 - i + \frac{2i}{1+i}$ комплекс санын алгебралық түрде

жазыңыз.

Шешуі. Бөлшектің алымын да, бөлімін де бөлімінің түйіндесіне көбейтеміз. Сонда

$$z = 3 - i + \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3 - i + \frac{2i(1-i)}{2} = 3 - i + i + 1 = 4.$$

Бұдан $\operatorname{Re} z = 4$, $\operatorname{Im} z = 0$.

Мысал. Комплекс жазықтығында $\left| \frac{2z}{1+z^2} \right| < 1$ теңсіздігін

қанағаттандыратын нүктелердің жиынын кескіндеңіз.

Шешуі. Комплекс санның модулінің анықтамасы бойынша

$$\left| \frac{2z}{1+z^2} \right| = \frac{2|z|}{|1+z^2|} = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}} < 1.$$

Теңсіздіктің екі жағы да оң шама. Демек екі жағын бірдей квадратқа шығарып, радикалдардан құтылуға болады:

$$4(x^2+y^2) < (1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2.$$

Бұдан $(1-x^2-y^2)^2 - 4y^2 > 0$ теңсіздігін аламыз. Теңсіздіктің сол жағын

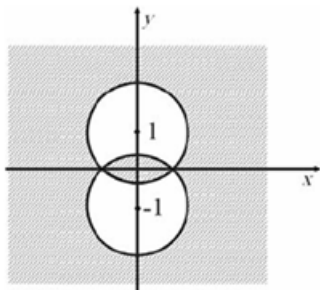
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

формуласы бойынша жіктегенде

$$[x^2 + (y+1)^2 - 2][x^2 + (y-1)^2 - 2] > 0$$

теңсіздігі шығады. Сонда ізделініп отырған комплекс жазықтығындағы нүктелердің жиыны екі теңсіздіктер жүйесі арқылы анықталады:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 > 2, \\ x^2 + (y-1)^2 > 2 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 < 2, \\ x^2 + (y-1)^2 < 2. \end{cases}$$



1.3-сурет

1.3-суретте комплекс жазықтығының штрихталған бөліктері жоғарыдағы қос теңсіздіктер жүйесінің шешімдерін көрсетеді.

Комплекс санның модулінің негізгі қасиеттерін атап өтейік. Анықтамадан

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \text{және} \quad |\bar{z}| = |z|$$

теңдіктері шығады. Комплекс сандардың көбейтіндісінің модулінің квадраты

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

теңдігімен анықталады. Бұдан

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

Егер $z_2 \neq 0$ болса, онда $\frac{z_1}{z_2}$ бөліндісін

$$z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = z_1 \Rightarrow |z_2| \cdot \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1|$$

түрінде жазуға болады, сонда

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Келесі кадамда комплекстік талдау курсына жиі қолданылатын бірқатар теңсіздіктерге тоқталайық. Комплекс сандар жиынында элементтерінің арасында бір-бірінен үлкен, кіші ұғымдары анықталмаған. Бір сөзбен айтқанда комплекс сандар жиыны реттелмеген. Сондықтан бүкіл теңсіздіктер нақты сандарға қатысты қарастырылады. Модульдің сипаттамасынан

$$|-z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, \quad |-z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$$

теңсіздіктері шығады. $\operatorname{Re} z = |z|$ теңсіздігі z нақты және $z \geq 0$ болғанда және тек сонда ғана орындалады. Одан әрі

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + (z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Соңғы теңсіздік комплекс сандар үшін үшбұрыштар теңсіздігі деп аталады:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Егер $z_1 \bar{z}_2 \geq 0$ болғанда және тек сонда ғана теңдіктің орындалатыны дәлелдеу барысынан көрініп тұр.

$z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$ комплекс санына үшбұрыштар теңсіздігін қолданайық:

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Осы сияқты

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$$

теңсіздігі алынады. Бұл алдындағы теңсіздікпен бірігіп

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

теңсіздігін береді.

Ең соңында Коши теңсіздігінің комплекстік вариантын дәлелдейік:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right),$$

мұнда $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, яғни комплекс сандар.

Кошитенсіздігін дәлелдеу алдында кез келген $\lambda \in \mathbb{C}$ үшін

$$\sum_{i=1}^n |a_i - \lambda b_i|^2 \geq 0$$

теңсіздігінің орындалатынын ескереміз. Содан кейін модульдің анықтамасына сүйене отырып, қосындыны ашып жазамыз:

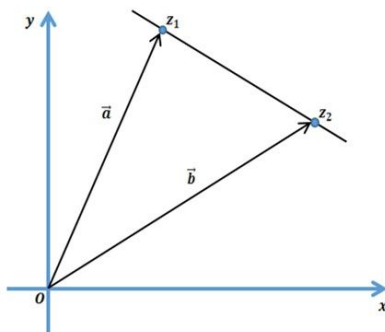
$$0 \leq \sum_{i=1}^n |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \lambda \bar{b}_i) \overline{(a_i - \lambda \bar{b}_i)} = \sum_{i=1}^n (a_i - \lambda \bar{b}_i) (\bar{a}_i - \lambda b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{i=1}^n (\lambda \bar{b}_i \bar{a}_i + \bar{\lambda} a_i b_i) = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - 2\operatorname{Re} \left\{ \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right\}.$$

Бұл жерде

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)$$

деп алып, Коши теңсіздігінің дұрыстығына көз жеткіземіз.



1.4-сурет

Мысал. Төбелері $A(z_1)$, $B(z_2)$ және $C(z_3)$ нүктелерінде жататын үшбұрыштың ауданын тап.

Шешуі. $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары берілсін дейік. Комплекс жазықтығында бұл сандар $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ және $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ радиус – векторлары арқылы бейнеленеді дейік (1.4-сурет).

$\bar{z}_1$ және z_2 комплекс сандарының көбейтіндісін құрайық:

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Осы көбейтіндінің нақты бөлігі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін көрсетеді:

$$\operatorname{Re}_1(\bar{z}_1 z_2) = (\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Сонда комплекс сандар терминінде $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)}{|z_1| |z_2|}$$

формуласы бойынша табылады.

$\bar{z}_1 z$ көбейтіндісінің жорамал бөлігі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының координаталарынан құралған

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

екінші ретгі анықтауышын береді.

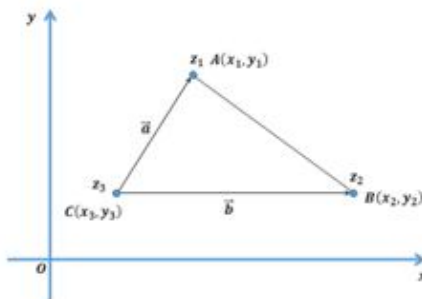
Бұл анықтауыш $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының таңбаға дейінгі дәлдікпен алынған векторлық көбейтіндісінің абсолют шамасына тең.

Өз кезегінде $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісінің абсолют шамасы осы векторлардан тұрғызылған параллелограмның ауданын береді. Демек төбелері $(0, 0)$, (x_1, y_1) және (x_2, y_2) нүктелерінде жататын жазық үшбұрыштың ауданы

$$S = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2)$$

формуласы бойынша анықталады.

Соңғы формуланы төбелері $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ және $C(x_3, y_3)$ нүктелерінде жататын кез келген жазық үшбұрыш үшін де жалпылауға болады (1.5-сурет).



1.4-сурет

Бұл жағдайда С нүктесін $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының бастапқы нүктесі ретінде қарастырайық. Сонда

$$\vec{a} = \{x_1 - x_3, y_1 - y_3\}, \vec{b} = \{x_2 - x_3, y_2 - y_3\},$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\operatorname{Re}(\overline{z_1 - z_3})(z_2 - z_3)}{|z_1 - z_3| |z_2 - z_3|},$$

$$S = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_1 - z_3})(z_2 - z_3).$$

Жаттығулар

1. $(1+i)^n + (1-i)^n$ қосындысының мәнін есепте.

2. Егер $z = x + iy$ болса, онда $z^4, \frac{1}{z}, \frac{z-1}{z+1}, \frac{1}{z^2}$

өрнектерінің нақты және жорамал бөліктерін тап.

3. $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = 1$ теңдігінің дұрыстығын тексер.

4. a және b комплекс сандары үшін $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ тепе-теңдігін дәлелде.

5. $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$ және $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$

сандарының абсолют шамаларын тап.

6. Коши теңсіздігінің теңдікке айналатын шартын тап.

7. Хнақты саны үшін $\frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}} = i$ теңдігінің

дұрыстығын дәлелде.

8. Кез келген $\alpha, b \in \mathbb{R}$ үшін $\max(|a|, |b|) \leq |a + bi| \leq 2 \max(|a|, |b|)$ арақатынастарының орындалатынын дәлелде. Төмендегі комплекс сандардың $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \operatorname{Arg} z, \arg z \in [0; 2\pi)$ табу керек.

9. а) $z = \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^7 \cdot (1+i)^{10};$

б) $z = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^{30}}{(1-i)^{45}};$

с) $z = -1 - \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7};$

д) $z = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{28}.$

10. $|z_1 \bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2).$ Тепе-теңдікті

дәлелде.

11. Теңсіздікті дәлелде: $|z-1| \leq ||z|-1| + |z| \cdot |\arg z|.$

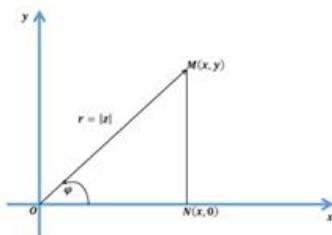
12. $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$ және $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ делік. z_1, z_2, z_3 сандарын бейнелейтін нүктелер дұрыс үшбұрыштың төбелері болатынын дәлелде.

13. $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$ делік. Сонда $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha$ теңдігінің дұрыстығын дәлелде.

Комплекс санның тригонометриялық формасы.

Аргумент және аргументтің бас мәні

Кейде комплекс санды, яғни комплекс жазықтығында осы санға сәйкес қойылатын нүктенің орнын, полярлық координаталар арқылы өрнектеу көп мәселенің шешімін береді. Полярлық координаталар жүйесінің полюсі бас нүктеде, ал полярлық ось Ox осінің бойында және оң бағытымен бағыттас болсын дейік (1.6-сурет).



1.6-сурет

Сонда OMN тікбұрышты үшбұрышынан $z = x + iy$ комплекс санының геометриялық кескіні болатын $M(x, y)$ нүктесінің (r, φ) полярлық координаталары сол нүктенің декарттық координаталары арқылы

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

түрінде өрнектеледі. Полярлық радиус (немесе $\overline{OM}$ векторының ұзындығы) $z = x + iy$ комплекс санының модулі деп аталады және

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

формуласы бойынша есептелінеді. Сонда комплекс санның полярлық координаталар жүйесінде $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ түрінде жазылуын оның тригонометриялық формасы деп атайды. Полярлық φ (Ох осінің оң бағыты мен $\overline{OM}$ векторының арасындағы бұрыш) бұрышын z комплекс санының аргументі деп атайды және оны $\varphi = \text{Arg}z$ арқылы белгілейді.

Комплекс санның модулі $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ теңдігі бойынша бізмәнді анықталады, ал оның аргументі еселігі 2π болатын кез келген қосылғышқа дейінгі дәлдікпен анықталады. Демек комплекс санның аргументі бізмәнді анықталмайды. Сонымен

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Мұнда $\arg z$ арқылы $(-\pi, \pi]$ аралығында анықталған аргументтің бас мәні көрсетілген.

Ескерту. Комплекс санның аргументі бізмәнді анықталу үшін нүктесін нақты ось бойымен координаталар бас нүктесімен қосатын тілік жүргізіледі.

Есеп шығаруға ұтымды құрал ретінде $-\pi < \arg z \leq \pi$ аралығындағы аргументтің бас мәнін $\arctg \frac{y}{x}$ арқылы өрнектейік. Сонда

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{егер } x > 0, \ y \geq 0; \\ \pi - \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{егер } x < 0, \ y \geq 0; \\ -\pi + \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{егер } x < 0, \ y < 0; \\ -\arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{егер } x > 0, \ y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0, \ y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0, \ y < 0. \end{cases}$$

Тригонометриялық түрде берілген комплекс сандардың көбейтуін және бөлуін қарастырайық.

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \ z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

дейік, мұнда $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$. Сонда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Сонымен комплекс сандарды көбейткенде олардың модульдері көбейтіледі де, ал аргументтері қосылады:

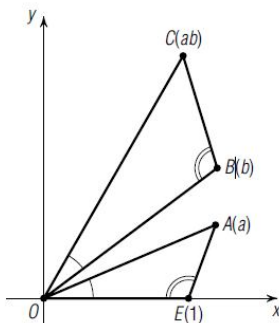
$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) &= \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

z_1 векторын φ_2 бұрышына бұрып және оның ұзындығын $|z_2|$ - ге көбейткенде шығатын $z_1 z_2$ векторы жоғарыдағы формулалардың геометриялық мағынасын білдіреді (1.7-сурет).

Санаулы комплекс сандар үшін де көбейтудің (1.2) түріндегі қасиеттері орындалады. Мысалы

$$|z_1 z_2 z_3| = |(z_1 z_2) \cdot z_3| = |z_1 z_2| \cdot |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|,$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2 z_3) = \text{Arg}((z_1 z_2) \cdot z_3) = \text{Arg}(z_1 z_2) + \text{Arg} z_3 = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + \text{Arg} z_3.$$



1.7-сурет

Дербес жағдайда

$$|z^n| = \left| \underbrace{z \cdot z \cdots z}_n \right| = |z|^n = r^n, \quad \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg} z.$$

Сондықтан $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Тригонометриялық формада берілген z_1, z_2 сандарының z_1/z_2 түріндегі бөліндісін қарастырайық. Егер $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ болса, онда

$$\bar{z}_2 = r_2 (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))$$

Сондықтан

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{r_2^2},$$

бұдан

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Сонымен комплекс сандардың бөліндісінің модулі олардың модульдерінің бөліндісіне $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ тең, ал бөліндінің аргументі бөлінгіш пен бөлгіштің аргументтерінің айырымына

$$\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2 \text{ тең.}$$

Тригонометриялық түрде берілген комплекс сандардың көбейту анықтамасынан комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару ережесі шығады:

$$z^n = (x + iy)^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Бұдан теңдігін аламыз. Соңғы теңдік Муавр формуласы деп аталады.

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (1.3)$$

Муавр формуласы еселі бұрыштың синусы мен косинусы оңай анықталатын формулаларды табуға мүмкіндік береді. Теңдіктің сол жақ бөлігін бином формуласы бойынша ашайық та, теңдіктің нақты және жорамал бөліктерін бір-біріне теңестірейік, сонда

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \cdot \sin^4 \varphi - \dots,$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \cdot \sin^5 \varphi - \dots,$$

мұнда биномдық коэффициенттің дағдылы (әдеттегі) белгілеуі:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$n = 2$ болғанда мектеп қабырғасынан белгілі

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi$$

формулаларын аламыз, ал $n = 3$ болғанда

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$$

формулалары алынады.

Ескерту. Комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару үшін оны тригонометриялық түрде жазу міндетті емес. Комплекс сандардың көбейту ережесін де пайдаланып табуға болады. Мысалы

$$(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - i2xy; (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

т.с.с.

Комплекс санның көрсеткіштік формада жазылуы

Комплекс санның тригонометриялық формасынан оның көрсеткіштік формасына көшу үшін кез келген φ нақты саны үшін теңдігі орындалатын Эйлер формуласының дәлелдеуін қарастырайық.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.4)$$

Айталық етрансценденттік саныныңіф жорамал дәрежесі қайсыбір $T(\varphi) + iS(\varphi)$ комплекс өрнегіне тең болсын дейік. Яғни

$$e^{i\varphi} = T(\varphi) + iS(\varphi). \quad (1.5)$$

Мұндағы $T(\varphi)$, $S(\varphi)$ функцияларының аналитикалық түрлері әзірге белгісіз. Оларды анықтау үшін алдымен (1.5) теңдігінің екі жағынан бірдей φ бойынша бірінші және екінші ретті туындыларын табайық:

$$\begin{aligned} ie^{i\varphi} &= T'(\varphi) + iS'(\varphi), \\ -e^{-i\varphi} &= T''(\varphi) + iS''(\varphi). \end{aligned}$$

Бұл екі теңдікті біріктіріп $T''(\varphi) + iS''(\varphi) = -T(\varphi) - iS(\varphi)$ теңдігін жазайық. Соңғы теңдіктен $T(\varphi)$ және $S(\varphi)$ функцияларын анықтау үшін

$$T''(\varphi) + T(\varphi) = 0, \quad (1.6)$$

$$S''(\varphi) + S(\varphi) = 0 \quad (1.7)$$

түрлеріндегі біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеулерді аламыз. (1.6), (1.7) теңдеулеріне φ - ге қатысты қойылатын бастапқы шарттарды анықтайық:

$$T(0) = 1, S(0) = 0;$$

$$T'(0) = 0, S'(0) = 1.$$

Сонда (1.6), (1.7) теңдеулерінің жалпы шешімдері

$$T(\varphi) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi,$$

$$S(\varphi) = c_3 \cos \varphi + c_4 \sin \varphi$$

түрінде жазылады. Ал бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімдері:

$$T(\varphi) = \cos \varphi, \quad S(\varphi) = \sin \varphi.$$

Табылған өрнектерді (1.5) қойып, Эйлер формуласының дәлелдеуін аяқтаймыз. Сонымен $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Демек кез келген нақты φ үшін

$$\varphi = \arg e^{i\varphi}, \quad |e^{i\varphi}| = 1$$

теңдіктері орынды. Дербес жағдайда

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{-\pi i/2} = -i.$$

Эйлер формуласынан $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ теңдігін алуға болады. Эйлер формуласы мен соңғы теңдікті мүшелеп қосу және азайту арқылы тригонометриялық функцияларды экспоненталармен өрнектейтін

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

формулаларын аламыз.

Сонымен z комплекс санының $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$ түрінде жазылуын комплекс санның көрсеткіштік түрде жазылуы деп атайды, мұнда

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

$e^{i\varphi}$ функциясының қайсыбір қасиеттерін атап өтейік:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Экспонентаның бұл қасиеттеріне сүйене отырып, комплекс сандардың көбейту және бөлу формулаларын оңай алуға болады, шынында да

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Комплекс саннан түбір табу

Комплекс саннан бүтін оң дәрежелі түбір табу амалы бүтін оң дәрежеге шығару амалына кері амал ретінде анықталады.

$z^n = a$ биномдық теңдеуін қарастырайық. Мұнда $a = \rho e^{i\varphi} \neq 0$ белгілі комплекс сан, али- натурал бүтін сан. Теңдеуді шешу үшін ізделініп отырған z комплекс санын көрсеткіштік, яғни $z = r e^{i\varphi}$ түрінде жазайық. Сонда

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\varphi}$$

теңдігі $r^n = \rho$, $n\varphi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ теңдіктеріне

эквивалентті. Бұл теңдіктер $z^n = a$ теңдеуінің бүкіл шешімін

$$z^k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right], k \in \mathbb{Z} \quad (1.8)$$

формуласы түрінде жазуға мүмкіндік береді.

Сонымен биномдық теңдеудің a -ның нольден өзгеше мәндерінде (1.8) формуласы арқылы табылатын әртүрлі n түбірі бар: $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. Бұл түбірлердің модульдері бірдей, ал

олардың аргументтері бірқалыпты үлестірілген: $\varphi_0 = \frac{\psi}{n}$,
 $\varphi_1 = \frac{\psi + 2\pi}{n}, \dots, \varphi_n = \frac{\psi + 2\pi(n-1)}{n}$. Бұл түбірлердің екінші бір

ерекшелігі $z_n = z_0$ және сол сияқты $z_{n+1} = z_1, z_{-1} = z_{n-1}$ теңдіктері орындалады.

Қорытынды. Комплекс жазықтығында биномдық теңдеудің түбірлері бойынша анықталатын сәйкес нүктелер центрі бас нүктеде радиусы $\sqrt[n]{\rho}$ - ға тең шеңберге іштей сызылған дұрыс бұрыштың төбелерінде жатады.

Мысал. Келесі қосындыларды табыңыз:

а) $T = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;

б) $S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.

Шешуі. Екінші теңдікті i - ге көбейтіп, бірінші теңдікке мүшелеп қосайық:

$$T + iS = (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx).$$

Соңғы теңдікті Эйлер және Муавр формулаларының көмегімен келесі түрде жазайық:

$$T + iS = e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx} = \frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{1 - e^{ix}} =$$

= |Бұл жерде геометриялық прогрессияның қосындысын табу формуласын пайдаландық| =

$$= \frac{e^{ix} e^{\frac{inx}{2}} \left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{\frac{e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}}{2i}}{\frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{2i}} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Сонымен $T + iS = \left(\cos \frac{n+1}{2}x + i \sin \frac{n+1}{2}x \right) \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$

Келесі қадамда $T + iS$ комплекс өрнегінің нақты және жорамал бөліктерін ажыратайық, сонда

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \cos \frac{n+1}{2}x \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

және

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sin \frac{n+1}{2}x \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

қосындыларын табамыз.

Мысал. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ арақатынасын пайдаланып,

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2$$

тепе-теңдігін дәлелдеңіз.

Шешуі. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ дейік. Сонда

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2), \quad |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2}.$$

Демек тепе-теңдік орынды.

Мысал. $\sqrt[4]{i}$ немесе $z^4 = i$ теңдеуінің барлық түбірлерін табыңыз.

Шешуі. $z^4 = i$ теңдеуінің түбірлерін (1.8) формуласы бойынша табамыз. Мұнда $a = i$, $\rho = |a| = 1$, $\arg a = \arg i = \frac{\pi}{2} = \psi$ және $n = 4$. Сонда

$$z_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Демек $k = 0, 1, 2, 3$ мәндерінде түбірдің әртүрлі төрт мәні алынады:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}, \quad z_1 = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} = -\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8},$$

$$z_2 = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8},$$

$$z_3 = \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{8} - i \sin \frac{3\pi}{8}.$$

Әрі қарай $|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$, $|\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

формулаларының көмегімен

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

мәндерін табамыз. Олай болса

$$z_{0,2} = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right),$$

$$z_{1,3} = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}} \right).$$

Мысал. $T = \int_0^{\infty} e^{-px} \cos qx dx$ және $S = \int_0^{\infty} e^{-px} \sin qx dx$

меншіксіз интегралдарын есептеңіз.

Шешуі. Параметрлердің $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ мәндерінде қос интеграл да жинақты.

$$T + iS = \int_0^{\infty} e^{-px} (\cos qx + i \sin qx) dx = \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot e^{iqx} dx =$$

$$\int_0^{\infty} e^{(-p+iq)x} dx = \frac{e^{(-p+iq)x}}{-p+iq} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-iq} = \frac{p+iq}{p^2+q^2} = \frac{p}{p^2+q^2} + i \frac{q}{p^2+q^2}.$$

Нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, меншіксіз интегралдардың мәндерін табамыз. Сонымен

$$T = \int_0^{\infty} e^{-px} \cos qx dx = \frac{p}{p^2+q^2},$$

$$S = \int_0^{\infty} e^{-px} \sin qx dx = \frac{q}{p^2+q^2}.$$

Мысал. $\sum_{k=1}^n \sin^2 kx$ және $\sum_{k=1}^n \cos^2 kx$ қосындыларын

табыңыз.

$$\text{Шешуі. } \sum_{k=1}^n \sin^2 kx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1 - \cos 2kx) = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{k=1}^n \cos 2kx \right).$$

Соңғы қосындыны геометриялық прогрессияға келтіріп, оның қосындысын табумен айналысайық.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos 2kx &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n e^{2ikx} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n (e^{2ix})^k = \operatorname{Re} \left(e^{2ix} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2ix})^k \right) = \operatorname{Re} \left(e^{2ix} \frac{(e^{2ix})^n - 1}{e^{2ix} - 1} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{2ix} \frac{e^{inx} (e^{inx} - e^{-inx})}{e^{ix} (e^{ix} - e^{-ix})} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)x} \frac{2i \sin nx}{2i \sin x} \right) = \\ &= \frac{\sin nx}{\sin x} \operatorname{Re} e^{i(n+1)x} = \frac{\sin nx}{\sin x} \cos(n+1)x. \end{aligned}$$

Сонымен

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin^2 kx &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1 - \cos 2kx) = \frac{1}{2} \left(n - \frac{\sin nx}{\sin x} \cos(n+1)x \right). \\ \sum_{k=1}^n \sin^2 kx + \sum_{k=1}^n \cos^2 kx &= \sum_{k=1}^n (\sin^2 kx + \cos^2 kx) = \sum_{k=1}^n 1 = n \end{aligned}$$

теңдігінен $\sum_{k=1}^n \cos^2 kx$ қосындысын табамыз.

Комплекс санның матрицалық формада жазылуы

Жоғарыда айтылғандай екі өлшемді нақты сызықтық кеңістік құрайтын $x + iy$ комплекс сандарына екі өлшемді векторларды, ал соңғысына 2×2 матрицаларды сәйкес қоюға болады.

Матрицаның формасы (тұрпаты) коммутативтік заңы орындалатын комплекс сандардың көбейтінділерінің координаттық түрде жазылуынан шығады.

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары және олардың көбейтіндісі $z = z_1 z_2 = x + iy$ саны берілсін дейік. Сонда

$$z = z_1 z_2 = z_2 z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ y = x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{x}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Сонымен $z = x + iy \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$. Бұл

Скомплекс сандар жиыны мен $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ түріндегі матрица жиындарының арасындағы бірімәнділік сәйкестікті көрсетеді.

Мұнда $1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ал $i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Сонда z комплекс санының түйіндесі $\bar{z} = x - iy$ санына сәйкестендірілетін екі өлшемді матрица келесі түрде жазылады:

$$z = x - iy \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Комплекс сандарды қосу және көбейту олардың сәйкес матрицаларын қосу және көбейту арқылы алынады. z_1 және z_2 комплекс сандарының бөліндісіне

$$\frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & -(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

матрицасы сәйкес қойылады. Мұнда $\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}^{-1}$ матрицасы z_2

санына сәйкес қойылатын матрицаның кері матрицасы.

Қорыта айтқанда комплекс санның матрицалық моделі ретінде коммутативтік және ассоциативтік заңдылықтарға бағынатын өлшемі 2×2 болатын $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ матрицасын аламыз, мұндах, $y \in \mathbb{R}$ Мұндай матрицалар жиыны өріс құрайды. Оны Гарқылы белгілейік. Сонда $Z_1, Z_2, \dots, \in G$ элементтері үшін

$$1) Z_1 + Z_2 \in G; 2) Z_1 - Z_2 \in G; 3) Z_1 \cdot Z_2 \in G; 4) Z^{-1} \in G$$

шарттары орындалады. Шынында да

$$1) \quad Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & -(x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 & x_1 + y_1 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & -(x_2 - y_2) \\ x_2 - y_2 & x_1 - y_1 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 & -(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 & x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} & -\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Сонымен, G өрісінің элементтері арифметикалық төрт амалдан кейін өзінің алғашқы формасын сақтайды. Олай болса G матрицалар өрісі формалық инвариант кеңістігін құрайды. Керісінше формалық инвариант кеңістігі өріс құрайды. Қысқасы

$z = x + iy \Leftrightarrow Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ арақатынастары төмендегі кесте

арқылы беріледі.

$$1) z_1 \pm z_2 \Leftrightarrow Z_1 \pm Z_2; \quad 2) \alpha z \Leftrightarrow \alpha Z;$$

$$3) z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow Z_1 \cdot Z_2; \quad 4) z^{-1} \Leftrightarrow Z^{-1};$$

$$5) |z|^2 = \det Z; \quad 6) (z_1 \pm z_2)^2 = \det (Z_1 \pm Z_2);$$

$$7) (\alpha z)^2 = \det (\alpha Z); \quad 8) |z_1 \cdot z_2|^2 = \det (Z_1 \cdot Z_2);$$

$$9) |z^{-1}|^2 = \det Z^{-1}.$$

Соңғы теңдіктің дұрыстығына көз жеткізейік:

$$z = x + iy, \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$|z^{-1}| = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Қабылданған ережеге сай $z^{-1} \Leftrightarrow Z^{-1}$.

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix},$$

Онда $\det Z^{-1} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$

Бұдан теңдіктің дұрыстығы шығады.

Анықтама. $z = x + iy$ комплекс санының спектрі деп Z матрицасының меншікті сандарының жиынтығын айтамыз.

Меншікті сандардың жиынтығы

$$\begin{vmatrix} x - \lambda & -y \\ y & x - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

характеристикалық теңдеуінің λ - ға қатысты шешімдерін табудан басталады. Ол үшін екінші ретті анықтауышты ашып жазып, $x^2 - 2x\lambda + \lambda^2 + y^2 = 0$ алгебралық теңдеуінің түбірлерін табайық:

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - x^2 - y^2} = x \pm iy.$$

Сонда кез келген z комплекс саны үшін $|z| = \sqrt{\|z\|} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ теңдіктері дұрыс. Λ_{z_1} және Λ_{z_2} арқылы z_1 және z_2 комплекс сандарының спектрлерін белгілейік. Қорыта келгенде комплекс сандар үшін төмендегі теңдіктердің дұрыстығы бірден көрінеді, бірақ бұл жерде біз алда кватернион және гиперкомплекс сандарын қарастыратын болғандықтан мұндай әдістемені қазірден бергенді жөн көрдік:

$$z_1 \pm z_2 \Leftrightarrow \Lambda_{z_1} \pm \Lambda_{z_2};$$

$$z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow \Lambda_{z_1} \cdot \Lambda_{z_2};$$

$$\alpha z \Leftrightarrow \alpha \Lambda_z;$$

$$z^{-1} \Leftrightarrow (\Lambda_z)^{-1}.$$

Жазықтықтағы аналитикалық геометрия

Аналитикалық геометрияда жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орны және уоординаталары арасындағы арақатынастар түрінде өрнектеледі. Оларды z және $\bar{z}$ комплекс сандар “тіліне” оңай көшіруге болады. Әдетте жазықтықтағы қисықтың комплекстік теңдеуі екі нақты теңдеулерге

эквивалентті. Сондықтан алгебралық формада жазылған комплекстік теңдеу нақты теңдеуді бере ме, жоқ әлде бермей ме деген сұрақ тууы мүмкін.

Мысалы $|z - a| = r$ теңдігі центрі $A(a)$ нүктесінде жататын радиусы r - ға тең шеңбердің теңдеуін анықтайды. Оның алгебралық формасын

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

теңдігі арқылы жазуға болады. Енді соңғы теңдіктің екі жағынан бірдей түйіндесіне көшейік:

$$\overline{(z - a)(\bar{z} - \bar{a})} = \overline{r^2}.$$

Жүргізілген амалдан кейін біз бастапқы теңдеудің өзін аламыз, өйткені

$$\overline{(z - a)(\bar{z} - \bar{a})} = (\overline{z - a})(\overline{\bar{z} - \bar{a}}) = (\bar{z} - \bar{a})(z - a) = r^2.$$

Мұнда z - ағымдық, ал a - тұрақты комплекс сандар.

Тұжырым. Жазық қисықтың алгебралық формада берілген комплекстік теңдеуінен оның түйіндес теңдеуіне көшкенде бастапқы теңдеудің өзі шығатын болса, онда комплекс сандар “тілінде” теңдеу нақты және ол түйіндес амалына қатысты инвариантты болады.

Мысал. ABCD төртбұрышында AC және BD диагональдарының сәйкес ортасы M және N нүктелері болсын дейік.

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|MN|^2$$

теңдігінің дұрыстығын дәлелде.

Шешуі. A, B, C, D, M, N нүктелерінің орындары анықтамаға сай a, b, c, d, m, n комплекс сандары арқылы анықталсын дейік. Мнүктесі қандай ткомплекс санымен өрнектелетінін білу үшін біз алдымен $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OC}$ радиус – векторларының векторлық қосындысын табамыз, сонда параллелограмм ережесі бойынша

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC})$$

векторын береді. Демек М нүктесінің комплекстік координатасы

$$m = \frac{1}{2}(a + c)$$

болады. Осыған ұқсас

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD}),$$

демек N нүктесінің комплекстік координатасы

$$n = \frac{1}{2}(b + d)$$

болады.

Енді төртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарының квадратын және MN кесіндісінің квадратын олардың сәйкес комплекстік координаталары арқылы өрнектейік. Алдымен $\overline{AB}$ векторының комплекстік координатасын табайық. Векторлық қосу ережесі бойынша $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, мұнда $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ векторлары және А нүктелерінің радиус – векторлары. Радиус – вектордың комплекстік координатасы оның соңғы нүктесінің комплекстік координатасы арқылы анықталады. Олай болса

$$\overline{AB} = b - a, \overline{BC} = c - b, \overline{CD} = d - c, \overline{DA} = a - d$$

және

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD}) - \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}) = \frac{1}{2}(b + d - a - c).$$

Екі вектордың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасына сүйене отырып $(\overline{AB}, \overline{AB}) = |\overline{AB}|^2$ теңдігін жазайық. Екінші жағынан

$$|\overline{AB}|^2 = |b-a|^2 = (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}),$$

өйткені $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ теңдігімен анықталады.

Дәлелдейтін теңдіктің оң және сол жақ бөліктерін олардың сәйкес комплекстік координаталары арқылы өрнектейік. Сонда

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2 + |\overline{DA}|^2 &= (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) + \\ &+ (c-d)(\bar{c}-\bar{d}) + (d-a)(\bar{d}-\bar{a}) = 2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - \\ &- (a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d} + \bar{c}d + d\bar{a} + \bar{d}a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{AC}|^2 + |\overline{BD}|^2 + 4|\overline{MN}|^2 &= (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-d)(\bar{b}-\bar{d}) + \\ &+ (b+d-a-c)(\bar{b}+\bar{d}-\bar{a}-\bar{c}) = 2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - \\ &- (a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d} + \bar{c}d + d\bar{a} + \bar{d}a). \end{aligned}$$

Алынған теңдіктердің оң жақ бөліктерін салыстыра отырып бастапқы теңдіктің дұрыстығына көз жеткіземіз.

Кейбір есеп шығаруға қажетті ұғымдарды, анықтамаларды және теоремаларды комплекс сандар “тіліне” көшірейік.

1. $z = x + iy$ комплекс санына жазықтықта $M(x, y)$ ағымдық нүктесі мен оның $\overline{OM}$ радиус – векторы сәйкес қойылады. Сонда m саны $M(x, y)$ нүктесінің комплекстік координатасы деп аталады.

2. $z = x - iy$ түйіндес комплекс санына $\bar{M}(x, -y)$ нүктесі мен оның $\overline{OM}$ радиус – векторы сәйкес қойылады. Сонда $\bar{m}$ саны $\bar{M}(x, -y)$ нүктесінің комплекстік координатасы деп аталады.

3. Өзінің түйіндесіне тең, яғни $z = \bar{z}$ комплекс саны нақты сан болады және $z, \bar{z}$ сандарына сәйкес қойылатын $M(z)$, $M(\bar{z})$ нүктелері Охосіне қарағанда симметриялы болады.

4. $z = -\bar{z}$ теңдігі комплекс санның таза жорамал сан екенін білдіреді.

5. Кез келген z үшін

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|, \quad z + \bar{z} = 2x, \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\text{және } \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

теңдіктері орындалады.

6. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ векторлық теңдігінен $c = a + b$ теңдігі алынады, мұнда a, b және c сандары A, B және C нүктелерінің комплекстік координаталары. O нүктесі – полюс.

7. $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$ центрі бас нүктеде жататын бірлік шеңберге

қатысты инверсия түрлендіруі, мұнда $|\omega| = \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|}$,

$\arg \omega = \arg z$.

8. $\omega = z_0 + \frac{k^2}{z - z_0}$ центрі z_0 нүктесінде жататын радиусы

R -ға тең шеңберге қатысты инверсия түрлендіруі.

9. $\omega = z + a$ түрлендіруі жазықтықтың әрбір нүктесін $\vec{a}$ векторына параллель көшіру деп аталады, мұндағы a - берілген комплекс сан.

10. $\omega = kz$ түрлендіруі центрі полюста жататын коэффициенті k болатын гомотетия деп аталады, мұнда $k > 0$.

11. $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ векторлық теңдігінен кесіндіні берілген қатынасқа бөлу формуласын комплекстік түрде жаза аламыз:

$$c = \alpha a + \beta b, \alpha + \beta = 1, \alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta}, \alpha = \frac{1}{1+\lambda}, \beta = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

және бұл теңдік $A(a)$, $B(b)$, және $C(c)$ нүктелерінің бір түзудің бойында жатуының жеткілікті шартын көрсетеді.

12. $A(a)$ және $B(b)$ нүктелерінің арақашықтығы $|AB| = |a - b|$ формуласымен анықталады.

13. $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$ теңдігі центрі $A(a)$ нүктесінде жататын радиусы R - ға тең шеңбердің теңдеуі.

$$14. \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b) \text{ теңдігі } \overrightarrow{OA} \text{ және } \overrightarrow{OB}$$

векторларының скалярлық көбейтіндісін анықтайды.

$$15. 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (a - b)(\bar{c} - \bar{d}) + (\bar{a} - \bar{b})(c - d) \text{ теңдігі } \overrightarrow{AB}$$

және $\overrightarrow{CD}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін анықтайды.

$$16. \frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \text{ немесе } a\bar{b} = \bar{a}b \text{ теңдігі } A(a) \text{ және } B(b)$$

нүктелерінің коллинеарлық шартын көрсетеді. Өйткені бұл нүктелерге сәйкес қойылатын $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ радиус – векторларының коллинеарлық шартынан

$$\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = 0$$

теңдігі шығады.

$$17. \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (a - b)(\bar{c} - \bar{d}) = (\bar{a} - \bar{b})(c - d).$$

Егер A , B , C , D нүктелері дербес жағдайда $z \cdot \bar{z} = 1$ теңдеуімен анықталатын бірлік шеңбердің бойында жатса, онда

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d} \text{ арақатынастарынан } \overrightarrow{AB} \text{ және } \overrightarrow{CD}$$

векторларының $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ab = cd$ коллинеарлық шарты шығады.

18. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторларының коллинеарлық шартынан $\frac{a-b}{c-d} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$ теңдігі шығады. Бұдан $\frac{a-b}{c-d}$ бөліндісі нақты өрнекті береді, демек АВ және CD түзулері параллель.

$$19. \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ теңдігі } \overrightarrow{AB} \text{ және } \overrightarrow{AC} \text{ векторларының}$$

немесе А, В, С нүктелерінің коллинеарлық шартын анықтайды.

$$20. \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ теңдеуі } A(a) \text{ және } B(b) \text{ нүктелері арқылы}$$

өтетін түзудің теңдеуін анықтайды.

21. $z + ab\bar{z} = a + b$ теңдеуі бірлік шеңбердің АВ хордасы арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

22. $(a\bar{b} + \bar{a}b) = 0$ теңдігі $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{OB}$ радиус – векторларының перпендикулярлық шартын көрсетеді.

23. $(a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d)$ теңдігі АВ мен CD түзулерінің перпендикулярлық шартын көрсетеді. Дербес жағдайда бірлік шеңбердің бойында жататын А, В, С, D нүктелері үшін АВ, CD кесінділерінің перпендикулярлық шарты $ab + cd = 0$ теңдігімен анықталады.

Мысал. ABC үшбұрышының Нортоцентрінің (биіктіктерінің қиылысу нүктесі) h комплекстік координатасын үшбұрыштың А, В, С төбелерінің a, b, c комплекстік координаталары арқылы өрнектейік.

Шешуі. Үшбұрыштың АН, ВН, СН биіктіктері осы үшбұрышты сырттай сызған шеңберді сәйкес A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиып өтсін дейік. $z \cdot \bar{z} = 1$ теңдеуі осы үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің теңдеуі болсын.

Сонда $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ және $CC_1 \perp AB$ шарттарынан $a_1a + bc = 0$, $b_1b + ac = 0$ және $c_1c + ab = 0$ теңдіктері шығады (23-қасиетті қара). Бұлардан $a_1 = -\frac{bc}{a}$, $b_1 = -\frac{ac}{b}$ және $c_1 = -\frac{ab}{c}$ теңдіктерін аламыз. Бірлік шеңбердің AA_1 және BB_1 хордаларының қиылысу нүктесі ізделініп отырған Нормоцентрін анықтайды. Сондықтан алдымен AA_1 және BB_1 хордаларының комплекстік теңдеулерін жазып, содан кейін біріктіріп, жүйенің шешімін табамыз.

$$\begin{cases} z + aa_1\bar{z} = a + a_1 \\ z + bb_1\bar{z} = b + b_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} & (AA_1 \text{ хордасының комплекстік} \\ & \text{теңдеуі}), \\ & (BB_1 \text{ хордасының комплекстік теңдеуі}). \end{aligned}$$

Бірінші теңдеуден екінші теңдеуді мүшелеп шегеріп,

$$\bar{z} = \frac{(a + a_1) - (b + b_1)}{aa_1 - bb_1}$$

табайық. Сонда ізделініп отырған ортоцентрдің комплекстік координатасының түйіндесі

$$\bar{h} = \frac{(a + a_1) - (b + b_1)}{aa_1 - bb_1} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

өрнегімен анықталады. Бұдан $h = a + b + c$.

Стереографикалық проекция

Ақырсыз қашық ∞ нүктесін енгізу арқылы $\mathbb{C}$ комплекс сандар жүйесін кеңейту әртүрлі себептер бойынша $\mathbb{C}$ ұтымды болады. Анықтама бойынша комплекс жазықтығы компакт жиын

емес, сондықтан комплекс сандар теориясын дамыту мақсатында ол арнайы нүктемен толықтырылады.

Анықтама. Ақырсыз қашық ∞ нүктесімен толықтырылатын $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығын $\overline{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығы деп атайық.

Ақырлы a және b комплекс сандары үшін кеңейтілген комплекс жазықтығында

$$a + \infty = \infty + a = \infty \text{ және } b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$$

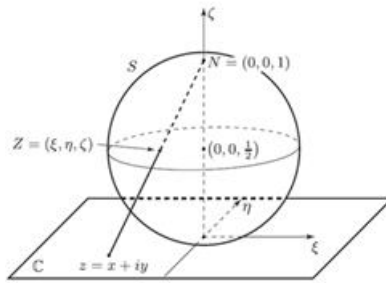
арақатынастары орын алады, мұнда $b \neq 0$. Алайда арифметиканың ережелерін жоғалтпай $\infty + \infty$ және $0 \cdot \infty$ таңбаларын анықтау мүмкін емес. Соған қарамастан $a \neq 0$ және $b \neq \infty$ сандары үшін $a/0 = \infty$ және $b/\infty = 0$ жағдайларын арнайы бөліп қарастырамыз.

Кеңейтілген комплекс жазықтығы туралы көрнекі геометриялық көрсетілімді Риманның келесі стереографикалық интерпретациясы арқылы талдауға болады.

Стереографикалық проекция көмегімен $\mathbb{C}$ жазықтығын $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ кеңейтілген комплекс жазықтығына дейін көрнекі түрде толықтырайық. Ол үшін үш өлшемді кеңістікте центрі $(0, 0, \frac{1}{2})$ нүктесінде жататын (1.8-сурет)

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \varsigma) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\varsigma - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

сфераның тендеуін қарастырайық.



1.8-сурет

Үш өлшемді $\mathbb{R}^3$ кеңістігінде $\{\zeta = 0\}$ теңдеуімен анықталатын жазықтықты $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығы деп санайық. Әрі қарай S сферасының $N = (0, 0, 1)$ солтүстік полюсін жазықтығының әрбір $z = x + iy$ нүктесімен сәуле арқылы қосайық. Сонда сәуле сфера бетін $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ нүктесінде қиып өтеді. Демек әрбір $z = x + iy \in \mathbb{C}$ нүктесіне сфера бетінен бірімәнді анықталатын $Z = (\xi, \eta, \zeta) \in S$ нүктесі сәйкес қойылады. Басқаша айтқанда $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығы мен S сфера бетінің нүктелерінің арасында бірімәнділік сәйкестік орнатылады. Осы сәйкестікті аналитикалық түрде көрсетейік. Z нүктесінің координаталарын z арқылы өрнектеу үшін сәуленің параметрлік теңдеуін анықтайық: Ол үшін

$$Z = (\xi, \eta, \zeta) \text{ және } N = (0, 0, 1)$$

нүктелері арқылы өтетін сәуленің канондық теңдеуін, оның $\vec{S} = \{x, y, -1\}$ бағыттауыш векторы бойынша жазайық:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} = t.$$

Бұдан $\xi = tx$, $\eta = ty$, $\zeta = 1 - t$ теңдіктері арқылы сәуленің параметрлік теңдеуі анықталады.

Келесі қадамда сәуленің параметрлік теңдеуі мен сфераның теңдеуін жүйеге алып, біріктіріп шешеміз.

Бұдан ізделініп отырған Z нүктесінің координаталарын табуға қажетті параметрінің мәні табылады. Сонымен

$$t^2(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$|z|^2 t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Демек Z нүктесінің координаталары

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}$$

формулалары бойынша есептелінеді.

Кері түрлендіру $t = 1 - \zeta$ қатынасының көмегімен табылады, бұдан

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

Жоғарыда келтірілген стереографикалық проекция формулалары $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығы мен солтүстік полюс кірмейтін $S \setminus \{N\}$ сферасының нүктелерінің арасындағы $Z \leftrightarrow z$ өзара бірмәнділік сәйкестікті тағайындайды. Егер N солтүстік нүктесіне $\infty \in \mathbb{C}$ нүктесін сәйкес қоя отырып, әрі қарай сәйкестікті $S \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ дейін жалғастыратын болсақ, онда алынған түрлендіру $\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығы мен S сферасы арасындағы гомеоморфизмді бейнелейді. $\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығының мұндай моделін Риман сферасы деп атайды.

Сфералық метрика. Стереографикалық проекцияның көмегімен $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығында кез келген $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ үшін

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

теңдігімен анықталатын евклид метрикасынан бөлек сфералық метриканы енгізейік. Анықтама бойынша бұл метрика $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ нүктелерінің $\rho(z_1, z_2)$ арақашықтығын көрсетеді. Сонда $\rho(z_1, z_2)$ олардың сфералық бейнелерінің арасындағы евклид арақашықтығына ($\mathbb{R}^3$) тең болады.

$$\text{Мысал. } \rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \text{ теңдігімен}$$

анықталатынын көрсетейік.

$\overline{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығының ақырлы бөлігінде (яғни қайсыбір $\{|z| < R\}$ дөңгелегіне тиісті z_1, z_2 нүктелері үшін) евклид және сфералық метрикалары арасында келесі

$$c_1(R)|z_1 - z_2| \leq \rho(z_1, z_2) \leq c_2(R)|z_1 - z_2|$$

(нақтылы: $c_1(R) = 1/(1 + R^2)$, $c_2(R) = 1$) арақатынастары орындалсын дейік. Сонда бұл арақатынастар евклид және сфералық метрикалардың эквиваленттілік мағынасын ашады. Демек сфералық метрика бойынша кез келген $z \in \mathbb{C}$ нүктесінен ∞ нүктесіне дейінгі арақашықтық ақырлы болады:

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \leq 1.$$

Дәлелдеусіз стереографикалық проекцияның екі қасиетін атап өтейік:

- 1) Ол $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығындағы шеңберге (және түзуге) S^1 сферасындағы шеңберді сәйкес қояды және керісінше;
- 2) Ол бұрыштарды сақтайды.

Жаттығулар

1. $(1+i)^n + (1-i)^n$ өрнегінің мәнін есепте.

2. Егер $z = x + iy$ болса, онда z^4 , $\frac{1}{z}$, $\frac{z-1}{z+1}$, $\frac{1}{z^2}$ өрнектерінің нақты және жорамал бөліктерін тап.

3. $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ теңдігінің дұрыстығын көрсет.

4. $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$, $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$ сандарының

абсолют шамасын тап.

5. Келесі комплекс сандардың модулі мен аргументін тап:

а) $\frac{-1}{i}$; б) $\frac{1-i}{1+i}$; в) $(1+i\sqrt{3})^3$.

6. $\cos \varphi$ және $\sin \varphi$ арқылы $\cos 3\varphi$ және $\sin 3\varphi$ өрнекте (Муавр формуласын қолдан).

7. Квадрат теңдеулерді шеш:

а) $z^2 - 2(1+i)z - 1 + 2i = 0$; б) $z^2 - 4iz - 13 = 0$.

8. а) $\sqrt{1-i}$; б) $\sqrt[3]{i}$ тап.

9. Теңдеуді шеш $z^6 + 64 = 0$.

10. $\frac{\sqrt{1+a^2} + ia}{a - i\sqrt{1+a^2}}$ өрнегін ықшамда.

11. Келесі қосындыларды тап:

$$T = \cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \dots + \cos(\varphi + n\alpha) = \sum_{k=0}^n (\varphi + k\alpha),$$

$$S = \sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \dots + \sin(\varphi + n\alpha) = \sum_{k=0}^n \sin(\varphi + k\alpha).$$

12. Төбелері $P_1(-3, 4)$, $P_2(2, 5)$ және $O(0, 0)$ нүктелерінде жататын жазық үшбұрыштың ауданын тап.

13. Алдыңғы есептің шарты бойынша $\overrightarrow{OP_1}$ және $\overrightarrow{OP_2}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін және осы векторлардың арасындағы ϕ бұрышын тап.

14. Төбелері $A(7, 2)$, $B(3, -1)$ және $C(4, -2)$ нүктелерінде жататын жазық үшбұрыштың ауданын тап.

15. $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$ теңдеуінің нақты шешімін тап.

16. $1 \leq |z + i| \leq 2$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ шарттары комплекс жазықтығында қандай нүктелердің жиынын анықтайды.

17. $|z - 1| < |z - i|$ шарты комплекс жазықтығында қандай нүктелердің жиынын анықтайды.

18. Паскаль теоремасы. Берілген алтыбұрыштың қабырғаларының созындысының қиылысуынан пайда болған нүктелер бір түзудің бойында жататынын дәлелде.

19. Ньютон теоремасы. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың диагональдарының ортасындағы нүктелер сол шеңбердің центрімен коллинеарлы.

20. Риман сферасының кез келген диаметрінің шеткі нүктелеріне комплекс жазықтығының қандай нүктелері сәйкес келеді.

21. Комплекс жазықтығының $z \mapsto \frac{1}{z}$ түрлендіруіне Риман сферасының қандай түрлендіруі жауап береді.

22. Риман сферасындағы шеңбердің стереографикалық проекциясы $\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығында қандай қисықты бейнелейді (кескіндейді).

23. $A(z_1)$, $B(z_2)$ және $C(z_3)$ нүктелері арқылы өтетін шеңбердің центрі мен радиусын тап (комплекттік формада).

24. Эллипс, гипербола және параболаның теңдеулерін эллипстік формада жаз.

25. $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ нүктелері $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана тең қабырғалы үшбұрыштың төбелері болатынын дәлелде.

Комплекс сандар тізбегі және қатары

Анықтама. Егер әрбір n ($\forall n \in \mathbb{N}$) натурал санына комплекс сандар жиынынан z_n ($z_n \in \mathbb{C}$) комплекс саны сәйкес қойылса, онда $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі берілген деп айтады.

Анықтама. Егер кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін $M > 0$ саны табылып, $|z_n| < M$ теңсіздігі орындалатын болса, онда z_n тізбегі шенелген (шектелген) деп аталады.

Ереже. Берілген тізбектің ақырсыз аз тізбек болатындығын төмендегі алгоритм бойынша дәлелдейміз:

1) $|z_n| < \varepsilon$ теңсіздігін жазамыз, мұнда ε - кез келген оң сан, $\varepsilon > 0$;

2) бұл теңсіздікті n - ға қатысты шешеміз;

3) алынған $n > N(\varepsilon)$ шешімінен $N(\varepsilon)$ анықтаймыз.

Анықтама. Егер кез келген ε саны үшін және $n > N(\varepsilon)$ шартын қанағаттандыратындай барлық n үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $|z_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда z_n тізбегін ақырсыз кіші тізбек деп атайды. z_n - ақырсыз кіші $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): N(\varepsilon), |z_n| < \varepsilon$.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $n = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n > N$ нөмірлері үшін $|z_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, ондаа комплекс санын $\{z_n\}$ тізбегінің шегі деп атайды. Сонда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ деп жазылады. Басқаша айтқанда $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0$ теңдігінен a саны $\{z_n\}$ тізбегінің шегі болатындығы шығады. Бұл жағдайда $\{z_n\}$ тізбегін a санына жинақталатын немесе a санына ұмтылатын тізбек деп те атайды.

Әрбір $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегіне $x_n = \operatorname{Re} z_n$ және $y_n = \operatorname{Im} z_n$ екі нақты сандар тізбегі сәйкес келеді.

Анықтама. Егер $a_n = z_n - A$ тізбегі ақырсыз кіші болса, онда $A (A \neq \infty, A \in \mathbb{C})$ саны z_n тізбегінің шегі болады (белгілеуі: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$).

$A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : |z_n - A| < \varepsilon$ барлық $n > N(\varepsilon)$ үшін.

Анықтама. Егер кез келген $M (M \in \mathbb{R})$ саны үшін және $n > N(M)$ шартын қанағаттандыратындай барлық n үшін $|z_n| > M$ теңсіздігі орындалатын болса, онда z_n тізбегін ақырсыз үлкен тізбек деп атайды.

Геометриялық тұрғыдан бұл z_n тізбегінің $n > N(M)$ шартын қанағаттандыратын мүшелері ақырсыз қашық нүкте аймағында, яғни $|z| > M$ аймағында, жататындығын көрсетеді.

Ақырсыз кіші және ақырсыз үлкен тізбектердің анықтамаларынан олардың арасындағы байланысты орнатуға болады. Егер α_n ақырсыз кіші тізбек болса, онда $z_n = \frac{1}{\alpha_n}$

ақырсыз үлкен, және керісінше, егер z_n ақырсыз үлкен тізбек болса, онда $\alpha_n = \frac{1}{z_n}$ - ақырсыз кіші.

$\mathbb{C}$ комплекс сандар жиынында ең жиі кездесетін ішкі жиындарды атап өтейік:

$|z - z_0| = r$ теңдігі центрі z_0 нүктесінде радиусы r - ға тең шеңберді береді;

$|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігі z_0 нүктесінің ε маңайы болады, белгілеуі: $O_\varepsilon(z_0)$;

$0 < |z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігі z_0 нүктесінің тесілген ε маңайын көрсетеді, белгілеуі: $\dot{Q}_\varepsilon(z_0)$;

$\text{Im } z > 0, (\text{Im } z < 0)$ - жоғарғы (төменгі) жарты жазықтық;

$\text{Re } z > 0, (\text{Re } z < 0)$ - оң (сол) жарты жазықтық.

Теорема. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ болғанда және тек сонда ғана

$$\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$$

комплекс сандар тізбегі $z = x + iy$ комплекс санына жинақты болады.

Дәлелдеуі. $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегінің шегі $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ болсын деп ұйғарайық. Демек $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0$ теңдігі орындалады. Сонда

$$|x_n - x| \leq |z_n - a| \quad \text{және} \quad |y_n - y| \leq |z_n - a|$$

теңсіздіктерінен $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ нақты сандар тізбектерінің шектері сәйкес хжәнеу болатындығы шығады. Яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Кері тұжырым келесі үшбұрыштар теңсіздігінен шығады:

$$|z_n - a| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Ұсыныс. $x_n = \text{Re } z_n$ және $y_n = \text{Im } z_n$ тізбектері ақырсыз кіші болғанда және тек сонда ғана z_n комплекс сандар тізбегі ақырсыз кіші болады.

Дәлелдеуі. z_n тізбегі ақырсыз кіші болсын дейік. Сонда кез келген $\varepsilon > 0$ нақты саны үшін $N(\varepsilon)$ натурал саны табылып,

барлық $n > N(\varepsilon)$ натурал сандары үшін $|z_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Демек $n > N(\varepsilon)$ болғанда

$$|x_n| < \varepsilon/2 \quad \text{және} \quad |y_n| < \varepsilon/2$$

теңсіздіктері орындалады.

Екінші жағынан x_n және y_n тізбектері ақырсыз кіші болсын дейік. Сонда кез келген нақты $\varepsilon > 0$ саны үшін $N(\varepsilon)$ натурал саны табылып, барлық $n > N(\varepsilon)$ натурал сандары үшін $|x_n| < \varepsilon/2$ және $|y_n| < \varepsilon/2$ теңсіздіктері орындалады. Демек $n > N(\varepsilon)$ болғанда $|z_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

Келесі ұсынысты дәлелдеусіз қабылдайық.

Ұсыныс. $\{u_n\}$ және $\{v_n\}$ комплекс сандар тізбектері жинақты болсын деп ұйғарайық, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$. Сонда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \pm v_n) = u \pm v;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = uv;$$

$$3) \text{ егер } v \neq 0 \text{ болса, } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n / v_n) = u/v.$$

Анықтама. Егер $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ тізбегінің әрбір мүшесінің модулі қайсыбір Моң санынан кіші болса, яғни $|z_n| < M$, онда комплекс сандар тізбегі шектелген деп аталады. Кері жағдайда комплекс сандар тізбегі шектеусіз.

Басқаша айтқанда, егер $\{|z_n|\}$ нақты сандар тізбегі шектеулі болса, онда $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі де шектеулі болады.

Анықтама. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ болса, онда $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі ақырсыз қашық нүктеге жинақталады.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty.$$

Бұл анықтама кез келген $R > 0$ үшін сондай N нөмірі табылып, барлық $n > N$ нөмірлері үшін $|z_n| > R$ теңсіздігінің орындалатынын көрсетеді.

∞ элементімен толықтырылатын комплекс жазықтығын кеңейтілген комплекс жазықтығы деп атайтынын ескерте кетейік.

$$\text{Ақырсыз қашық нүктеге қатысты } \frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty, z \cdot \infty = \infty$$

және $z \neq 0$ комплекс саны үшін $z + \infty = \infty, \frac{z}{\infty} = 0$ деп саналады.

Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = \infty$ болса, онда $\{x_n\}, \{y_n\}$ тізбектерінің кемінде біреуі ақырсыз үлкен болатынын ескерміз.

$$\text{Енді } \alpha_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ комплекс сандар тізбегін қарастырайық,}$$

мұнда $z = x + iy$ кез келген ақырлы комплекс сан. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ шегінің бар болуын дәлелдеп және табу үшін $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|$ және

$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg} \alpha_n$ шектерін табайық:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{x + iy}{n}\right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right]^{n/2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{n/2} = e^x \end{aligned}$$

(бұл шекті табуда екінші тамаша шек пайдаланылды).

Комплекс санды оң бүтін дәрежеге шығарғанда оның аргументі осы дәрежеге көбейтілетін болғандықтан

$$\operatorname{Arg} \alpha_n = n \cdot \arctan \frac{y/n}{1+x/n} + 2\pi m,$$

Мұндам - кез келген бүтін сан. Сондықтан

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Arg} \alpha_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \arctan \frac{y/n}{1+x/n} + 2\pi m \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{y/n}{1+x/n} + 2\pi m \right) = y + 2\pi m \end{aligned}$$

(бұл жерде $x \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\arctan x \sim x$ эквиваленттілігі ескерілді).

Теорема. φ және φ_n аргументтерінің келісімді таңдауларынан кейін және

$$\{z_n\} = \{x_n + iy_n\} = \{r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)\}$$

тізбегінің $z = x + iy$ санына жинақтылығынан $\{\varphi_n\}, \{r_n\}$ тізбектерінің шегі $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ болатындығы шығады.

Сонда жоғарыда аталған теореманың негізінде $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ шегінің бар болуын тұжырымдауға болады. Демек

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + iy}{n} \right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Анықтама бойынша $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ түрінде жазылды делік. Соңғы теңдікте $x=0$ болса,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

теңдігін береді. Бұдан нөлден өзгеше кез келген $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ комплекс санының $z = r e^{i\varphi}$ көрсеткіштік түріндегі жазылуын аламыз.

Мысал. $z_n = i^n, z_n = (1+i)^n$ тізбектерін шектеулікке зертте.

Бірінші тізбекте кез келген $n \in N$ үшін $|z_n| = |i^n| = |i|^n = 1$.
 Онда тізбек шегінің анықтамасы бойынша $z_n = i^n$ шектеулі.
 Екінші тізбек үшін модульдің қасиетін пайдаланайық:
 $|z_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n$. Әрі қарай $(\sqrt{2})^n \gg M$
 теңсіздігін кез келген M үшін n -қатысты шешейік;
 $n \log \sqrt{2} > \log M, n > \frac{2 \log M}{\log 2}$. Бұдан N нөмірі ретінде кез
 келген $N(M) = \frac{2 \log M}{\log 2}$ санының бүтін бөлігін алуға болады.
 Демек $\{z_n\}$ тізбегі ақырсыз қашық нүктеге жинақталады.

Мысал. $\{z_n\}$ тізбегінің шегін табыңыз, мұнда $z_n = \frac{2+i3n}{i-n}$.

Алдымен тізбектің z_n жалпы мүшесінің нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерін табайық:

$$z_n = \frac{2+i3n}{i-n} = \frac{(2+i3n)(n+i)}{-(n-i)(n+i)} = \frac{-n+i(3n^2+2)}{-(n^2+1)} = \frac{n}{n^2+1} - i \frac{3n^2+2}{n^2+1} = x_n + iy_n.$$

Бұдан $x_n = \frac{n}{n^2+1} = 0, y_n = -\frac{3n^2+2}{n^2+1}$. Келесі қадамда $\{x_n\},$
 $\{y_n\}$ нақты тізбектерінің шектерін табайық:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(3n^2+2)}{n^2+1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = -3.$$

Сонда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -3i.$$

Мысал. $\{z_n\}$ тізбегінің шегін табыңыз, мұнда

$$z_n = \left(1 + i \frac{n}{n^2 - 1}\right)^n.$$

$$|z_n|^2 = z_n \cdot \bar{z}_n, \arg z_n = n \arctan \frac{y}{x}.$$

$$|z_n| = \left(1 + \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2}\right)^{n/2}, \arg z_n = n \arctan \frac{n}{n^2 - 1}.$$

Сонда $\{|z_n|\}$, $\{\arg z_n\}$ тізбектерінің шегі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{n}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 1},$$

(бұл жерде де ақырсыз аз шамалардың эквиваленттіліктері ескерілді, өйткені $x \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\ln(1+x) \sim x$ және $\arctan x \sim x$). Демек

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| e^{i \arg z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| e^{i \lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n} = e^i = \cos 1 + i \sin 1.$$

Жаттығулар

Тізбек шегінің анықтамасына сүйене отырып, келесі теңдіктерді дәлелде:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} + i \frac{n-1}{n} \right) = 1 + i.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+ni}{1-ni} \right) = -1.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n = 0.$$

Шектерді есепте:

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1} + i \frac{n}{n+1} \right).$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+i)^2}{2n^2 i}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{n} \right).$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}, |z| < 1.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}, |z| > 1.$$

z - тің қандай мәндерінде шектің табылатынын анықта:

$$9. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} z^n; \quad \text{ b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n}.$$

$$10. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} n z^n; \quad \text{ b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{1+z^n}.$$

Сандық қатарлар

Алғашқы ұғымдар. Мүшелері комплекс сандар болатын $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ тізбегі берілсін дейік. Сонда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

түріндегі өрнекті сандық қатар деп атайды. $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$

сандары қатардың мүшелері. Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n^2}$ қатары

үшін оның жалпы мүшесі $z_n = \frac{(3+4i)^n}{n^2}$. Қатардың жалпы

мүшесін біле отырып, оның кез келген мүшесін табуға болады. Мысалы, берілген сандық қатардың z_2 мүшесі

$$z_2 = \frac{(3+4i)^2}{2^2} = -\frac{7}{4} + 6i.$$

Берілген $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ тізбегі бойынша

$$s_1 = z_1, s_2 = z_1 + z_2, \dots, s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \dots$$

тізбегін құрайық және бұл тізбекті дербес қосындылар тізбегі деп атайық.

Ескерту. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатарының алғашқы n мүшесінің

қосындысы оның n -ші дербес қосындысы деп аталады және ол $s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ арқылы белгіленеді.

Анықтама. Егер $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $\{s_n\}$ дербес қосындылар тізбегінің шегі стабылып, және ол ақырлы болса,

онда қатар жинақты және оның қосындысы тең, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Егер керісінше дербес қосындылар тізбегінің шегі табылмай немесе ∞ тең болса, онда қатар жинақсыз. Демек қосындысы табылмайды.

Егер қатар жинақты болса, онда $n \rightarrow \infty$ қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылатыны тікелей анықтамадан шығады. Өйткені

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Сонда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ шарты сандық қатардың жинақтылығының қажетті шартын көрсетеді.

Демек, егер қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмаса, онда қатар жинақсыз. Сонда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ шарты сандық қатардың жинақсыздығының жеткілікті шартын көрсетеді.

Мысал.
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (a) \quad \text{сандық қатарын}$$

жинақтылыққа зерттейік.

Шешуі. (a) қатарының құрылымынан оның мүшелері еселігі z болатын геометриялық прогрессия құрайтынын көруге болады. Егер $z = 1$ болса, онда қатардың n -ші дербес қосындысы $s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$, демек дербес қосындылар тізбегінің шегі $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$. Анықтамаға сай бұл жағдайда қатар жинақсыз.

Егер $z \neq 1$ болса, онда

$$\begin{aligned} s_n(1-z) &= (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})(1-z) = \\ &= 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} - z - z^2 - \dots - z^{n-1} - z^n = 1 - z^n. \end{aligned}$$

Бұдан
$$s_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^n}{1 - z}.$$

Сонда дербес қосындылар тізбегінің шегін табу $\{z^n\}$ тізбегінің шегін табуға келтіріледі. Егер $|z| < 1$ болса, онда

$$\left| \frac{z^n}{1 - z} \right| = \left| \frac{1}{1 - z} \right| \cdot |z|^n.$$

Демек $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z} \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Егер $|z| > 1$ болса, онда $|z^n| = |z|^n \geq 1$. Демек геометриялық прогрессияның жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды, сондықтан қатар жинақсыз.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Шешуі. Алдымен сандық қатардың жинақтылығының қажетті шартын тексерейік. Ол үшін сандық қатардың жалпы мүшесінің абсолют шамасын

$$\left| \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n \right| = \left| \frac{1+i}{1-i} \right|^n$$

түрінде жазайық.

$\frac{1+i}{1-i}$ өрнегінің мәнін тапсақ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i,$
сондықтан

$$\left| \frac{1+i}{1-i} \right|^n = |i|^n = 1.$$

Демек $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n = 1 \neq 0.$

Қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды, сондықтан $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$ қатары жинақсыз.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+i+ni)}{n(n+1)}$ қатарын жинақтылыққа

зертте.

Шешуі. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ қатарларының

жинақтылықтарынан мүшелері комплекс сандар болатын $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$

қатарының жинақтылығы шығады, мұнда $z_k = x_k + iy_k$.

Сондықтан бөлек $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ және $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ қатарларын

карастырамыз.

Екі қатар да таңбалары кезегімен ауысатын сандық қатарлар және екеуі де Лейбниц белгісін қанағаттандырады.

Демек $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+i+ni)}{n(n+1)}$ қатары жинақты.

Мысал. Жоғарыда ақырсыз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінің қосындысы үшін

$$1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

формуласы алынды. z комплекс санын $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ тригонометриялық түрде жазып, бұл теңдіктің нақты және жорамал бөліктерін ажыратайық:

$$1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots = \frac{1}{1 - r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}. \quad (6)$$

Теңдіктің оң жақ бөлігіндегі өрнектің алымын да, бөлімін де бөлімінің түйіндесіне көбейтейік:

$$\frac{1}{1 - r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1 - r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{(1 - r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \frac{1 - r \cos \varphi + ir \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}.$$

Әрі қарай (6) теңдігінде нақты бөлігін нақты бөлігіне, жорамал бөлігін жорамал бөлігіне теңестіре отырып төмендегі қатарлардың қосындысын табайық:

$$r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + \dots = \frac{r \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}, \quad r < 1.$$

Сонымен қатарды жинақтылыққа зерттеу оның дербес қосындылар тізбегін жинақтылыққа зерттеуге келтіріледі. Дербес жағдайда жинақталатын тізбектердің қасиеттерінен мүшелері комплекс сандар болатын сандық қатардың келесі қасиеттері шығады:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ қатары жинақты болу үшін } \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ және } \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

қатарларының жинақты болуы қажетті және жеткілікті, мұнда

$$z_k = x_k + iy_k. \text{ Сонда}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

2. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ қатары жинақты болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty} az_k$ қатары

да жинақты, мұндаа - комплекс сан және $\sum_{k=1}^{\infty} az_k = a \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

3. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ қатарлары жинақты болса, онда

$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \zeta_k)$ қатары да жинақты және

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \zeta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k.$$

4. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ қатарлары жинақты және

олардың қосындылары сәйкес және оболса, онда

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k z_n \zeta_{k-n+1} \right)$ қатары да жинақты және оның қосындысы

$S \cdot \sigma$ - ға тең.

5. Коши критерийі. Кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін Ннөмірі табылып, барлық $n > N$ және $m > N$ нөмірлері үшін

$$\left| \sum_{k=n}^m z_k \right| < \varepsilon \text{ теңсіздігі орындалғанда және тек сонда ғана } \sum_{k=1}^n z_k$$

қатары жинақты болады.

6. Тек абсолютті жинақты қатарларда ғана кез келген мүшелерінің орындарын ауыстырғанмен оның жинақтылығы өзгермейді, ал қосындысы бастапқы қосындысына тең болады.

Мысалы, егер $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болса, онда

осы қатардың мүшелерін топтастыру арқылы алынған $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}$

және $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n-1}$ қатарлары да жинақты болады және

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}.$$

7. Абсолютті жинақты қатарларды көпмүшелікті көпмүшелікке көбейту ережесі бойынша көбейтуге болады.

Абсолютті және шартты жинақтылық

Анықтама. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ қатары жинақты болса, онда

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты деп аталады.

Анықтама. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары жинақты болса, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

қатары жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатарын шартты жинақты деп атайды.

Теорема. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ қатары жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

қатары да жинақты, яғни абсолюттік жинақтылықтан бастапқы қатардың жинақтылығы шығады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ қатары жинақты, онда мүшелері оң нақты сандық қатар үшін Коши

критеріі орындалады. Яғни кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n > N$ және кез келген p үшін

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Бірақ

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}|.$$

Демек Коши критеріі $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ қатары үшін де орындалып тұр. Бұдан бастапқы қатардың жинақтылығы шығады.

Сонымен $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ қатарының жинақтылығынан

$\sum_{k=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$ қатарының жинақтылығы шығатынын көрсетейік, оның үстіне бұл жинақтылық абсолютті.

Ескерту. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары жинақты болып, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

қатары жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары шартты жинақты деп аталады.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ қатарларын қарастырайық. Оларды сәйкес (A) , $(|A|)$, (B) , $(|B|)$ таңбаларымен белгілейік.

Теорема. Егер барлық $n > n_0 \geq 1$ нөмірлері үшін $|a_n| \leq |b_n|$ теңсіздігі орындалатын болса, онда $(|B|)$ қатарының жинақтылығынан $(|A|)$ қатарының жинақтылығы шығады, демек (B) қатарының абсолютті жинақтылығынан (A)

қатарының абсолютті жинақтылығы шығады; сондай-ақ $(|A|)$ қатарының жинақсыздығынан $(|B|)$ қатарының жинақсыздығы шығады.

Дәлелдеуі. Теореманың дұрыстығы тікелей Коши критеріінен шығады. Шынында да, егер (B) қатары жинақты болса, онда ол үшін Коши критеріі орындалады. Бірақ $|a_n| \leq |b_n|$ теңсіздігін ескерсек, Коши критеріі $(|A|)$ қатары үшін онсыз да орындалады. Демек (A) қатары абсолютті жинақты. Егер $(|A|)$ қатары жинақсыз болса, онда бұл қатар үшін Коши критеріі орындалмайды. Демек $(|B|)$ қатары үшін де бұл шарт орындалмайды, яғни $(|B|)$ қатары жинақсыз.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(in)^n}{3^n n!}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Шешуі. Қатарды абсолютті жинақтылыққа зерттейік, яғни $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(in)^n}{3^n n!} \right|$ қатарын зерттейік:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(in)^n}{3^n n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!},$$

$$\left| \frac{(in)^n}{3^n n!} \right| = \frac{|(in)^n|}{3^n n!} = \frac{|i|^n n^n}{3^n n!} = \frac{n^n}{3^n n!}.$$

$a_n = \frac{n^n}{3^n n!}$ дейік. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарын жинақтылыққа зерттеу үшін

Даламбер белгісін пайдаланайық

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} 3^n n!}{3^{n+1} (n+1)! n^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Бұдан $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(in)^n}{3^n n!} \right|$ қатарының жинақтылығы шығады.

Мысал. Қатарды абсолютті жинақтылыққа зертте:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (1+i+ni)}{n(n+1)}.$$

Шешуі. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (1+i+ni)}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(n+1)^2)^{1/2}}{n(n+1)}.$

$$a_n = \frac{(1+(n+1)^2)^{1/2}}{n(n+1)} \text{ дейік. Сонда сандық қатардың}$$

жинақтылығының қажетті шарты орындалады, өйткені

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+(n+1)^2)^{1/2}}{n(n+1)} = 0.$$

Бірақ бұдан $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда дербес қосындылар тізбегінің шегі табылады деп айтуға болмайды. Сондықтан бұл жерде оң таңбалы сандық қатар үшін екінші салыстыру теоремасын пайдаланамыз

$$\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n(n+1)} < \frac{(1+(n+1)^2)^{1/2}}{n(n+1)}.$$

Оң таңбалы сандық қатарлар үшін бірінші қатардың мүшелері екінші қатардың сәйкес мүшелерінен кем болмаса, онда бірінші қатардың жинақсыздығынан екінші қатардың жинақсыздығы шығады.

Біздің жағдайда бірінші қатар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармониялық қатар. Ал гармониялық қатар жинақсыз, демек берілген бастапқы қатарымыз да жинақсыз.

Ескерту. Егер $(|A|)$ жинақсыз болса, онда жоғарыдағы теорема бойынша (B) қатары не жинақты, не шартты жинақты болады.

Шектік салыстыру белгісі

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = q$ ақырлы шегі табылсын дейік, онда бұл қатарлар бір мезгілде жинақты немесе жинақсыз.

Дәлелдеуі. $0 \leq q < \infty$ және $(|B|)$ қатары жинақты дейік.

Сонда жалпы мүшесі

$\frac{|a_n|}{|b_n|}$ болатын тізбектің шегі q санына тең болуы үшін келесі

шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = q \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \frac{|a_n|}{|b_n|} < q + \varepsilon.$$

Бұдан $|a_n| < (q + \varepsilon)|b_n|$ теңсіздігі шығады. Теореманың шарты

бойынша $(|B|)$ қатары жинақты, онда $\sum_{n=1}^{\infty} (q + \varepsilon)|b_n|$ қатары да

жинақты. Демек бірінші салыстыру теоремасының негізінде $(|A|)$ да жинақты.

Бұл жерде оң таңбалы сандық қатарлар үшін бірінші салыстыру теоремасын еске түсіре кетейік. Егер бірінші қатардың мүшелері екінші қатардың сәйкес мүшелерінен артпаса, онда екінші қатардың жинақтылығынан бірінші қатардың жинақтылығы шығады.

Екінші жағдайда $q > 0$ және $(|B|)$ қатары жинақсыз дейік.

Теореманың шарты бойынша бұл жағдайда да ақырлы $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|a_n|}$ шегі табылады. Демек $(|A|)$ қатары жинақсыз, өйткені жоғарыдағы дәлелдеу бойынша кері жағдайда $(|B|)$ қатары жинақты болар еді.

Сандық қатарды жинақтылық тексергенде барлық жағдайға жарайтын тәсілдер жоқ. Бірақ көп жағдайларда қатардың жинақтылығының жеткілікті шартын тексергенде төмендегі белгілер қолданылады.

Ескерту. Егер $q = \infty$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = 0$. Демек (А)

қатарының абсолютті жинақтылығынан (В) қатарының абсолютті жинақтылығы шығады.

Ескерту. Егер $q \neq 0$, $q \neq \infty$ болса, онда $(|A|)$ және $(|B|)$ қатарларының екеуі де бір мезгілде не жинақты, не жинақсыз. Ал (А) және (В) қатарлары үшін қосымша зерттеулер қажет. Бұлардың әрқайсысы бір-бірінен тәуелсіз түрде не шартты жинақты, не жинақсыз болуы мүмкін.

Даламбердің ақырлы түрдегі белгісі

Теорема. Егер қайсыбірнөмірінен бастап $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$

теңсіздігі орындалатын болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары абсолютті

жинақты. Керісінше, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ теңсіздігі орындалатын болса,

онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Дәлелдеуі. Жинақты қатардың алғашқы санаулы мүшелерін алып тастағаннан қатардың жинақтылығы өзгермейді. Сондықтан теореманың шартындағы теңсіздік барлық нөмірлер үшін орындалады делік. Сонда

$$|a_2| \leq q|a_1|, |a_3| \leq q|a_1|^2, \dots, |a_n| \leq q^{n-1}|a_1|, \dots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}|a_1|$ қатарының мүшелері еселігі $0 < q < 1$ аралығынан

алынатын кемімелі геометриялық прогрессия құрайды, демек

$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}|a_1|$ қатары жинақты. Онда салыстыру белгісі бойынша

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары абсолютті жинақты. Керісінше $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ болса,

онда кез келгені үшін $|a_{n+1}| > |a_n|$.

Соңғы теңсіздік қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайтынын көрсетеді. Демек $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз, өйткені жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды.

Даламбердің шектік түрдегі белгісі

Теорема. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$ шегі бар болса, онда $q < 1$

болғанда (A) қатары абсолютті жинақты, ал $q > 1$ болғанда – жинақсыз ($q = 1$ болғанда (A) қатарының жинақтылығы туралы ешбір тұжырым жасауға болмайды. Қосымша зерттеулер жүргізу қажет).

Дәлелдеуі. Егер $q < 1$ болса, онда $q = 1 - 2\varepsilon$ болатындай $\varepsilon > 0$ саны табылады, яғни $q + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Әрі қарай шектің анықтамасы бойынша таңдап алынған $\varepsilon > 0$ саны арқылы анықталатын барлық $n > N(\varepsilon)$ үшін

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q + \varepsilon = 1 - \varepsilon < 1$$

теңсіздігін қанағаттандыратындай $N(\varepsilon)$ нөмірі табылады.

Бұдан Даламбердің ақырлы түрдегі белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары абсолютті жинақты деген қорытынды жасаймыз.

Егер $q > 1$ болса, онда $q - \varepsilon = 1 + \varepsilon$ теңдігі орындалатындай $\varepsilon > 0$ саны табылады. Теореманың шарты

бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, онда

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q - \varepsilon = 1 + \varepsilon > 1.$$

Даламбердің ақырлы түрдегі белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Кошидің ақырлы түрдегі радикалдық белгісі

Теорема. Егер қайсыбір пнөмірінен бастап $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ теңсіздігі орындалатын болса, онда (А) қатары абсолютті жинақты. Керісінше $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ теңсіздігі орындалатын болса,

онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты барлық нөмірлер үшін орындалсын делік. Сонда $|a_1| \leq q, |a_2| \leq q^2, \dots, |a_n| \leq q^n, \dots$. Осы

жерде біз бастапқы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(A)$ қатарын $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ қатарымен

салыстырамыз. Егер $|q| < 1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ қатары жинақты.

Онда салыстыру белгісінің негізінде бастапқы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(A)$ қатары да жинақты.

Егер кез келген пүшін $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ теңсіздігі орындалатын болса, онда жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды.

Демек бастапқы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары да жинақсыз.

Кошидің шектік түрдегі радикалдық белгісі

Теорема. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ шегі бар болса, онда $q < 1$ болғанда (А) қатары абсолютті жинақты, ал $q > 1$ болғанда – жинақсыз ($q = 1$ болғанда қатар жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін. Қосымша зерттеулер жүргізу қажет).

Дәлелдеуін оқырманға өз бетімен жүргізуге ұсынамыз.

Теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$ қатарының шартты

жинақты болуы үшін $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ қатарларының екеуі де жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i \frac{1}{2^n}\right)$ қатарларын

жинақтылыққа зертте; егер жинақты болса қосындысын тап.

Бірінші қатарға Кошидің шектік түрдегі радикалдық белгісін қолданайық. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \frac{1}{2} < 1$. Демек қатар

жинақты, өйткені $|z_n| = \left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right| = \left(\left|\frac{i}{2}\right|\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Қатарлардың

қосындысын табайық. Ол үшін анықтамаға сай қатардың $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ дербес қосындыларының тізбегін құрайық та

шекке көшейік. Сонда $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k$ қосындысының құрылымы

еселігі $q = \frac{i}{2}$ тең кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын көрсетеді. Олай болса

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{i}{2 - i}.$$

Екінші қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін оны екі нақты сандық қатардың қосындысына жіктейік:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{және} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Бұл қатарлардың әрқайсысы жинақты және олардың қосындылары сәйкес

$$S_1 = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Сонда берілген бастапқы қатардың қосындысы $S = S_1 + iS_2 = \frac{1}{2} + i$ комплекс сан болады.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i3n - 1}{i2n^2 - \sqrt{3}}$ және $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i3n - 1}{i2n^4 - \sqrt{3}}$ қатарларын жинақтылыққа зертте.

Бірінші қатар жинақсыз, өйткені $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{2i} \neq 0$. Демек қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды.

Керісінше екінші қатар үшін қажетті шарт $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ орындалады, бірақ $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерінің жалпы мүшелерін табу қиын. Сондықтан берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ жинақты жалпы гармоникалық қатармен салыстырамыз.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n|}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^4 + i3n^3 - n^2}{i2n^4 - \sqrt{3}} \right| = \left| \frac{1}{2i} \right| = \frac{1}{2}.$$

Демек салыстырудың шектік белгісі бойынша екінші қатар абсолютті жинақты.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Қатардың жинақтылығына Даламбердің шектік белгісін пайдаланайық:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2i)^{n+1} n!}{(n+1)!(2i)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2i}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Демек берілген қатар абсолютті жинақты.

Жаттығулар

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{5^n}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{(1+i)n}}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-2i}{1+\sqrt{n}}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1} \right)$ қатарын жинақтылыққа

зертте.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{i}{3n} \right]$ қатарын жинақтылыққа зертте.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-i)^n}{10^n}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+3i)^n}{(3-i)^{2n}}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
11. Тізбек шегінің анықтамасына сүйене отырып,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + i \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = 1 + i$ теңдігін дәлелде.
12. Тізбектің z_n жалпы мүшесі берілген:

$$z_n = \frac{2^n - 5^{n+2}}{2^{n+1} + 5^{n+1}} - \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 1} \right)^{n^2} i. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ табу керек.}$$

13. Тізбектің z_n жалпы мүшесі берілген:

$$z_n = \frac{2n^2 - 3ni}{1 + n^2 i}. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ табу керек.}$$

14. Тізбектің z_n жалпы мүшесі берілген:

$$z_n = \frac{n^2 + in - 2i + 4}{in^2 - 5n + 4i}. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ табу керек.}$$

15. Тізбектің z_n жалпы мүшесі берілген:

$$z_n = n \tan \frac{i}{n}. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ табу керек.}$$

16. Тізбектің z_n жалпы мүшесі берілген:

$$z_n = \left(\frac{3+i}{10} \right)^n. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ табу керек.}$$

17. Тізбектің z_n жалпы мүшесі берілген:

$$z_n = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5n}\right)}. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ табу керек.}$$

18. Тізбектің z_n жалпы мүшесі берілген:

$$z_n = \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)^{i \frac{2\pi}{n^2}}. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ табу керек.}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} \right). \text{Шекті тап.}$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{16}{25} \sin \frac{\pi}{3} + \dots + \frac{4^n}{5^n} \sin \frac{n\pi}{6} \right). \text{Шекті тап.}$$

Бақылау сұрақтары

1. Қандай себептердің әсерінен нақты сандар жиынынан комплекс сандар жиынына өтудің қажеттілігі туындады?

2. Сандық жиындарды кеңейтудің жалпы қағидасы неде?

3. Комплекс санның анықтамасы. Жалпы комплекс сандар жиынының классификациясын сұрыпта.

4. Комплекс сандар үшін қосу және көбейту амалдарының анықтамаларын келтір. Осы анықтамаларға сүйене отырып, комплекс сандар жиыны өріс құрайтынын дәлелде (көрсет).

5. Берілген комплекс саннан оның түйіндесіне қалай көшеміз? Бір-біріне түйіндес комплекс сандардың көбейтіндісі қандай санды анықтайды?

6. Егер $z = x + iy$, $i^2 = -1$ комплекс саны берілсе, онда қандай амалдың көмегімен таза жорамал сан алынады?

7. Егер

а) $n \in \mathbb{N}$ саны 4 бөлінсе, онда $i^n = 1$;

б) $n \in \mathbb{N}$ саны 4 бөлінгенде қалдық 1 тең болса, онда $i^n = i$;

в) $n \in \mathbb{N}$ саны 4 бөлінгенде қалдық 2 тең болса, онда $i^n = -1$;

г) $n \in \mathbb{N}$ саны 4 бөлінгенде қалдық 3 тең болса, онда $i^n = -i$ болатынын дәлелде

8. Коэффициенттері нақты квадрат теңдеудің комплекс түбірі болатынын дәлелде және егер мұндай түбір бар болса, онда оның түйіндесі де осы теңдеудің түбірі болатынын көрсет.

9. Евклид жазықтығында кез келген нүктенің орны осы нүктенің радиус – векторының координаталары арқылы анықталады. Сонда радиус – векторлар жиыны мен $\mathbb{C}$ комплекс сандар жиындарының арасында қандай сәйкестік орнатылады?

10. Егер комплекс сан алгебралық түрде берілсе, онда оның мұндай жазылуынан қандай мағлұмат аламыз?

11. Комплекс санның аргументі бірімәнді анықталу үшін қарастырылып отырған нүктені ақырсыз қашық нүктемен қосатын тілік жүргіземіз. Демек мұндай тіліктердің саны ақырсыз көп. Сұрақ: тәжірибелік есептер шығарғанда неліктен тек қарапайым тіліктермен жұмыс жасаймыз?

$$12. (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

тепе-теңдігі квадраттардың қосындысы болатын екі бүтін санның көбейтіндісі қайтадан квадраттардың қосындысына жіктелетінін көрсетеді. Бұл тепе-теңдіктің комплекстік мағынасы неде?

13. Әртүрлі z_1, z_2, z_3 және z_4 нүктелерінің бір шеңбердің немесе бір түзудің бойында жататынын білдіретін шартты жаз.

14. Координаталар бас нүктесінен берілген нүктелер жиынына дейінгі ең үлкен және ең кіші арақашықтықты тап ($a > 0$):

$$a) \left[\frac{z+1}{z} \right] = a; b) \left[\frac{z+b}{z} \right], b \in \mathbb{R}.$$

15. Кеңейтілген комплекс жазықтығы (Риман сферасы, стереографикалық проекция, ақырсыз қашық нүкте).

16. Комплекс сандар тізбегі (шенелген тізбек, ақырсыз кіші және ақырсыз үлкен тізбектер арасындағы байланыс).

17. Комплекс сандар тізбегінің шегі (Гейне және Коши бойынша анықтама, ақырсыз қашық нүктедегі жинақтылық, тізбектің жинақтылығы туралы теорема).

18. Жинақты сандық қатардың қасиеттері (қатардың жинақтылығының қажетті шарты, сандық қатардың қалдығы туралы).

19. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары жинақты делік. Егер осы қатардың мүшелерінің орындарын бір-бірімен ауыстырып қойсақ, онда алынған жаңа қатардың жинақтылығы туралы не айтуға болады?

20. Егер (A) және (B) қатарлары өздерінің S_A және S_B қосындыларына абсолютті түрде жинақталатын болса, онда олардың $(A \cdot B)$ көбейтінді қатары туралы не айтуға болады?

II НАҚТЫ ЖӘНЕ КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫНЫҢ КОМПЛЕКСМӘНДІ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Сырт көзге нақты айнымалының функцияларына қатысты қарастырылатын теория мен комплекс айнымалы функцияларға қолданылатын теория арасында айырмашылық жоқтай көрінуі мүмкін. Алайда $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ функциясының нақты және жорамал бөліктері үшін белгілі бір шарттар орындалғанда ғана оны дифференциалдау мүмкін болады. Әдетте олар Коши – Риман шарттары арқылы жазылады. Нақты және комплекс айнымалы үзіліссіз комплекс функциясынан алынатын интеграл ұғымы да алдымен интегралдау жиыны траектория, содан кейін барып қисық болғанда қарастырылады. Сонымен бірге бұл тарауда тегіс, құрама-тегіс және жордан қисықтары қарастырылады.

Нақты айнымалының комплекс функциясы

Негізгі ұғымдар. $E \subset \mathbb{R}$ нақты сандар жиынының ішкі жиыны дейік.

Анықтама. $z(t): E \rightarrow \mathbb{C}$ бейнелеуі нақты айнымалының комплекс мәнді функциясы деп аталады. Оны $z = \varphi(t)$, $t \in E$ түрінде жазуға болады.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны және $0 < |t - t_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратындай барлық $t \in E$ үшін $|z(t) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ саны табылса, онда A санын нақты айнымалы комплекс мәнді $z(t)$ функциясының шегі деп атайды да оны белгілеу үшін

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = A, t \in E$$

шегінің таңбасы пайдаланылады.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны және $0 < |t - t_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратындай барлық $t \in E$

үшін $|z(t) - z(t_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ саны табылса, онда $z(t): E \rightarrow \mathbb{C}$ функциясын t_0 нүктесінде үзіліссіз деп атайды, оны

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z(t_0), t \in E$$

деп белгілейді.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны және $0 < |t - t_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратындай барлық $t \in E$

үшін $\left| \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} - A \right| < \varepsilon, \quad t \in E \setminus \{t_0\}$ теңсіздігі

орындалатындай $\delta > 0$ саны табылса, онда $A \in \mathbb{C}$ санын нақты айнымалы комплекс мәнді $z(t)$ функциясының t_0 нүктесіндегі туындысы деп атайды және оны $A = z'(t_0)$ түрінде жазады.

Ескерту. $t = t_0$ нүктесінде туындысы бар $z = z(t)$ функциясы осы нүктеде дифференциалданатын функция деп аталады. Егер $E_1 \subset E$ жиынының әрбір нүктесінде $z = z(t)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда оны E_1 жиынында дифференциалданатын функция деп атайды. Ал оның $z'(t_0)$ туындысы

$$z'(t_0) = \varphi'(t_0) + i\psi'(t_0)$$

формуласы бойынша есептелінеді, мұнда

$$\varphi(t) = \operatorname{Re} z(t), \psi(t) = \operatorname{Im} z(t).$$

Сонымен қоса $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ функциясының анықталған интегралы анықтама бойынша

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt + i \int_a^b \psi(t) dt$$

комплекс санын береді.

Анықтама. Үзіліссіз $z(t) : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{C}$ бейнелеуін траектория деп атайды және оны кейде қысқаша бір әріппен белгілейді, мысалы – γ .

Комплекс жазықтығындағы қисықтар мен облыстар

$\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функциялары $[a, b]$ аралығында үзіліссіз функциялар дейік. Сонда қарастырылып отырған $t \in [a, b]$ аралығында $z = \varphi(t) + i\psi(t)$ нақты айнымалының комплекс мәнді функциясы комплекс жазықтығында реттелген нүктелердің жиынтығын, яғни үзіліссіз қисықты береді. Ал

$$z = \varphi(t) + i\psi(t), a \leq t \leq b$$

теңдеуі сол қисықтың параметрлік теңдеуі деп аталады. t параметрінің өсуіне сәйкес келетін қисық бойымен қозғалатын z нүктесінің бағыты оң деп саналады.

Егер $z = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ функциясының туындысы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $z = z(t)$ функциясы осы аралықта тегіс деп аталады.

Санаулы тегіс қисықтардан тұратын үзіліссіз қисық құрама-тегіс қисық деп аталады.

Бастапқы және соңғы нүктелері беттесетін қисық тұйық қисық деп аталады. Бұл жағдайда $\varphi(a) = \varphi(b)$ және $\psi(a) = \psi(b)$.

Мысал. $z = z_0 + R \cdot e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ теңдеуі центрі z_0 нүктесінде жататын радиусы R – ға тең шеңбердің параметрлік теңдеуін көрсетеді.

Мысал. $z = \cos t, \pi \leq t \leq 2\pi$ қисығы $z = -1$ нүктесінен $z = 1$ нүктесінің бағыты бойынша бағдарланған $[-1, 1]$ кесіндісі болады (2.1-сурет).



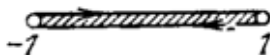
2.1-сурет

Мысал. $z = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi$ қисығы сағат тіліне қарама-қарсы бағыт бойынша бағдарланған $|z| = 1, \text{Im } z \geq 0$ жарты шеңбері болады (2.2-сурет).



2.2-сурет

Мысал. $z = \cos t, -\pi \leq t \leq \pi$ қисығы алдымен $z = -1$ нүктесінен $z = 1$ нүктесіне дейін, содан соң $z = 1$ нүктесінен $z = -1$ нүктесіне дейін жүріп өтетін тұйықталған $[-1, 1]$ кесіндісі болады. Бұл $(-1, 1)$ интервалында әрбір нүктесі өзара қиылысатын тұйық қисыққа мысал бола алады (2.3-сурет).



2.3-сурет

Кеңейтілген комплекс жазықтығында қайсыбір D нүктелер жиыны берілсін дейік.

$z_0 \in D$ таңбасы z_0 нүктесінің D жиынына тиістілігін білдірсін.

Сонда $O_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ жиыны z_0 нүктесінің маңайын көрсетеді. $O_\varepsilon(z_0)$ жиынының геометриялық интерпретациясы – центрі z_0 нүктесінде жататын радиусы ε – ға тең дөңгелек. Осы тұрғыда $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігі z_0 нүктесінің $O_\varepsilon(z_0)$ жиынында жатпайтынын білдіреді. Сондықтан

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

теңсіздігімен анықталатын жиынды z_0 нүктесінде тесілетін z_0 нүктесінің ε маңайы деп атайды.

Егер $z_0 \in D$ нүктесі үшін қандай да бір ε оң саны табылып, $O_\varepsilon(z_0) \subset D$ шарты орындалса, онда z_0 нүктесін D жиынының ішкі нүктесі деп атайды.

Тек ішкі нүктелерден ғана тұратын D жиынын ашық жиын деп атайды.

Егер қайсыбір $z_0 \in D$ нүктесінің кез келген ε маңайында D жиынында жататын да әрі жатпайтын да нүктелер табылса, онда z_0 нүктесін шекаралық нүкте деп атайды. Шекаралық нүктелердің жиынтығы жиынның шекарасын анықтайды.

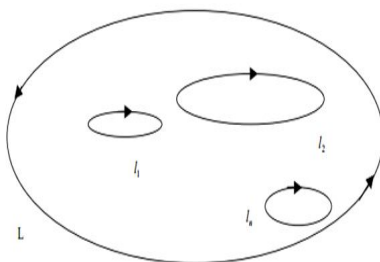
Егер D жиынының кез келген екі нүктесін барлық нүктелері осы жиында жататын үзіліссіз қисықпен қосуға болатын болса, онда D жиынын байланысты жиын деп атайды.

Кез келген ашық және байланысты жиынды облыс деп атайды. Облыстың шекаралық нүктелерінің жиынтығы осы облыстың шекарасын анықтайды.

D облысының тұйықтамасы деп өзінің бүкіл шекаралық нүктелерімен толықтырылатын $\overline{D}$ облысын айтады.

Алда шекарасы тек санаулы құрама-тегіс қисықтардан және оқшауланған нүктелерден ғана тұратын облыстар қарастырылады.

Шекаралық қисық бойымен айналғанда D облысы үнемі сол жақта қалатын болса, онда бұл бағдардың бағытын оң деп, керісінше – теріс деп санайық (2.4-сурет).



2.4-сурет

Егер облыста жататын кез келген тұйық қисықты облыстың шекарасынан шықпай облыстың кез келген бір нүктесіне дейін үзіліссіз деформациялауға болса, онда облыс бір байланысты деп аталады. Басқа жағдайларда көп байланысты облыс деп аталады (2.4-суретте төрт байланысты облыс көрсетілген).

Комплекс айнымалы функциялар теориясында көп байланысты облысты бір байланысты облысқа айналдыру үшін тіліктер жүргізіледі.

Қайсыбір қисық бойынша облысқа жүргізілген тілік деп облыстан осы қисыққа тиісті нүктелердің барлығын алып тастауды айтады. Кез келген n байланысты облысты $(n-1)$ тілік жүргізе отырып, бір байланысты облысқа алып келуге болады.

Комплекс айнымалы функциялар

Кеңейтілген комплекс сандар жазықтығының екі данасын, $z = x + iy$ және $w = u + iv$ жазықтықтарын, алайық. Бірінші жазықтықта кез келген D нүктелер жиыны, ал екіншісінде E нүктелер жиыны берілсін дейік. Комплекс айнымалының функциясы ұғымын енгізейік.

Анықтама. Егер әрбір $z \in D$ санына E жиынынан бір немесе бірнеше $w \in E$ комплекс сандары сәйкес қойылса, онда D жиынында D жиынын E жиынына бейнелейтін комплекс айнымалының $w = f(z)$ функциясы берілген деп айтады. Белгілеуі $f: D \rightarrow E$. Сонымен бірге $w \in E$ нүктесін $z \in D$ нүктесінің бейнесі, ал $z \in D$ нүктесі $w \in E$ нүктесінің түпбейнесі деп айтады.

D жиыны $f(z)$ функциясының анықталу облысы деп аталады. Егер E жиынының әрбір нүктесі $f(z)$ функциясының мәні болса, онда E жиыны осы функцияның мәндер жиыны болады. $f(z)$ функциясын

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

түрінде жазуға болады, мұнда

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Егер әрбір $z \in D$ санына E жиынынан бірқатар әртүрлі w мәндері сәйкестендірілсе, онда $w = f(z)$ функциясын көпмәнді функция деп атайды.

Қорыта келгенде $D \subset \mathbb{C} \rightarrow E \subset \mathbb{C}$ бірімәнді бейнелеуін комплекс айнымалы функция деп айтамыз.

Егер D жиынында жататын барлық z_1 және z_2 нүктелері үшін $f(z_1) \neq f(z_2)$ шартынан $z_1 \neq z_2$, ал керісінше $z_1 \neq z_2$

шартынан $f(z_1) \neq f(z_2)$ шығатын болса, онда D облысында бірмәнді $f(z)$ функциясы бірпарақты деп аталады.

z_0 нүктесінің қайсыбір маңайында бірпарақты $f(z)$ функциясы сол нүктеде бірпарақты деп аталады.

$f: D \rightarrow E$ бірмәнді $w = f(z)$ функциясы берілсін дейік.

Сонда, егер $z = \varphi(w)$ кері функциясы бірмәнді болса, онда $f: D \rightarrow E$ бейнелеуі бірпарақты болады.

Бірпарақты бейнелеулердің суперпозициясы да бірпарақты болады.

Комплекс айнымалы элементар функциялар

Бүкіл элементар функцияларды айнымалының комплекс мәнді жағдайларына жалпылауға болады.

Нақты айнымалы экспоненттік e^x функциясын және тригонометриялық $\sin x$, $\cos x$ функцияларын абсолют жинақты дәрежелік қатарлар арқылы көрсетуге болатынын еске түсіре кетейік:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}. \quad (2.3)$$

(2.1) - (2.3) дәрежелік қатарлары бүкіл нақты сандар өсінде жинақталатын болғандықтан, Абель теоремасы бойынша олар

айнымалының кез келген комплекс мәндері үшін де жинақты. Демек (2.1) - (2.3) жіктеулерін комплекс айнымалы $\sin z$, $\cos z$ және e^z функцияларының анықтамалары ретінде қарастыруға болады, мұнда $z = x + iy$:

$$e^z = \exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (2.4)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.5)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}. \quad (2.6)$$

Абель теоремасы (дәрежелік қатардың жинақталу облысының құрылымы туралы):

1. Егер $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатары $z_0 \neq 0$ нүктесінде жинақты болса, онда ол $|z| < |z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген z нүктесінде жинақты және ол $|z| \leq \rho < |z_0|$ дөңгелегінде бірқалыпты жинақты.

2. Егер $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатары z_0 нүктесінде жинақталмаса, онда ол $|z| > |z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктесінде дәрежелік қатар жинақталмаған.

1. $w = f(z) = az + b$; $ab \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ — сызықтық функциясының анықталу облысы бүкіл кеңейтілген комплекс жазықтығы болады ($f(\infty) = \infty$). Әрбір $z \in \mathbb{C}_z$ нүктесіне тек

жалғыз $w=f(z) \in \bar{\mathbb{C}}_w$ нүктесі сәйкес келеді, сондықтан сызықтық функция өзінің анықталу облысында бірімәнді.

Егер $a \neq 0$ болса, онда кері функцияны

$$f^{-1}: w \rightarrow z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} = a_1w + b_1$$

түрінде анықтауға болады, демек ол да бірімәнді. Сондықтан сызықтық функция бірпарақты болады.

Әрі қарай $z = x + iy$, $a = \alpha_1 + i\alpha_2$, $b = \beta_1 + i\beta_2$ деп алайық.

Сонда

$$f(z) = (\alpha_1 + i\alpha_2)(x + iy) + (\beta_1 + i\beta_2) = (\alpha_1x - \alpha_2y + \beta_1) + i(\alpha_2x + \alpha_1y + \beta_2).$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \alpha_1x - \alpha_2y + \beta_1 \quad \text{және} \quad \operatorname{Im} f(z) = \alpha_2x + \alpha_1y + \beta_2$$

функциялары нақты (x, y) айнымалыларының функциялары ретінде үзіліссіз, сондықтан сызықтық $\mathbb{C}_z$ функциясы үзіліссіз болады.

Енді $z_0 \in \mathbb{C}_z$ дейік. Сонда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a.$$

Демек сызықтық функция $\mathbb{C}$ комплекс сандар жиынында голоморфты, яғни бүтін функция болады.

Анықтама. Егер $f(z)$ функциясы $z_0 \in \mathbb{C}$ нүктесінің қайсыбір маңайында $\mathbb{C}$ мағынасында дифференциалданатын болса, онда $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде голоморфты.

$$\textbf{Анықтама.} \quad \text{Егер} \quad \varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{функциясы} \quad \zeta = 0$$

нүктесінде голоморфты болса, онда $f(z)$ функциясы ақырсыз қашық $z = \infty$ нүктесінде голоморфты.

Анықтама. Егер $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ функциясы $\mathbb{C}$ комплекс сандар жазықтығында голоморфты болса, онда оны бүтін функция деп атайды.

Мысалы $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ дәрежелік функциясы – бүтін функция.

2. $\mathcal{W} = e^z, z \in \mathbb{C}$ – көрсеткіштік функция. Анықтама бойынша кез келген $z = x + iy$ үшін $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Ескерту. $x = 0$ болғанда $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ Эйлер формуласы).

Ескерту. Эйлер формуласын пайдалана отырып кез келген z комплекс санын көрсеткіштік түрде жазуға болады: $z = re^{i\varphi}$, мұнда $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Көрсеткіштік функцияның қасиеттері

a) $y = 0$ болғанда $e^z = e^x$

b) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$, мұнда $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$;

Дәлелдеу. Дәлелдеу үшін $e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ көбейтіндісін қарастырайық және әрбір көбейткіш дәрежелік қатарға жіктелсін дейік:

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!},$$

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}.$$

Сонда

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{k,m} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^m}{m!}.$$

Бұл қос қосындының қосылғаштарын қосынды дәрежесі $k + m = n$ болатындай етіп топтастырамыз:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+m=n} \frac{n!}{k!m!} z_1^k z_2^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}.$$

Ньютон биномы бойынша

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k z_1^k z_2^{n-k} = (z_1 + z_2)^n.$$

Сонымен
$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1+z_2}.$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1+z_2}.$$

с) e^z – периодты функция; ең кіші периоды $T = 2\pi i$.

3. $\sin z, \cos z, z \in \mathbb{C}$ – тригонометриялық функциялар.

Анықтама бойынша

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

теңдіктері Эйлердің $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ және $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ формулалары арқылы алынады.

Тригонометриялық функциялардың қасиеттері

а) $y = 0$ болғанда $\sin z = \sin x, \cos z = \cos x$;

б) $\sin z, \cos z$ – периодты функциялар; ең кіші периоды $T = 2\pi$;

с) $\sin z$ – тақ функция, ал $\cos z$ – жұп функция.

4. Логарифмдік функция. Логарифмдік функция көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады.

Егер $z = e^w$ болса, онда $w = u + iv$ функциясы z комплекс айнымалысының натурал логарифмі деп аталады.

Логарифмді белгілеу үшін $w = \ln z$ символдық өрнегін пайдаланады.

$\exp z$ экспоненттік функция z -тің ешбір мәнінде нөлге айналмайды, сондықтан $\ln z$ функциясының анықталу облысы нөлден өзгеше барлық комплекс сандарды қамтиды.

Логарифмді табу үшін $e^w = z$ теңдеуін w -ге қатысты шешу керек. Айталық $w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$ болсын. Сонда $e^{u+iv} = re^{i\varphi}$ теңдігінен $e^u = r$, $v = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ -бүтін сандар жиыны)

$$u = \ln r, v = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

болатыны шығады. Демек

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

мұнда $|z| = r$, $\arg z = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$.

Логарифмдік функцияның қасиеттері

Комплекс айнымалы логарифмдік функцияның қасиеттері дәл нақты айнымалы логарифмдік функцияның қасиеттеріндей болады. Дербес жағдайда

$$a) \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2;$$

$$b) \ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2.$$

$$c) z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}.$$

Мысал үшін а) формуласының дұрыстығына көз жеткізейік. Осы мақсатпен $z_1 \cdot z_2$ көбейтіндісін көрсеткіштік түрде жазайық:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i \arg z_1} \cdot |z_2| e^{i \arg z_2}.$$

Бұл көбейтіндінің модулі $|z_1| \cdot |z_2|$ тең, ал аргументі z_1 және z_2 комплекс сандарының аргументтерінің қосындысына тең. Демек

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\arg z_1 + \arg z_2)$$

Осы сияқты нәтижені а) теңдігінің оң жағын түрлендіре отырып аламыз. Шынында да

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln|z_1| + i \arg z_1 + \ln|z_2| + i \arg z_2 = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\arg z_1 + \arg z_2).$$

5. Дәрежелік функция.

Егер $n \in \mathbb{N}$ натурал сандар жиынына тиісті болса, онда

$$z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ рет}}, z \in \mathbb{C}.$$

$w = z^n$ функциясы бірімәнді, өйткені $|z^n| = |z|^n$, $\arg z^n = n \arg z$.

α – кез келген комплекс сан делік. Сонда $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ функциясы көпмәнді функция болады, өйткені $\ln z$ – көпмәнді функция.

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i = \ln|z_0| + 2k\pi i,$$

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln z_0 + 2k\pi i)} = e^{\alpha \ln z_0} \cdot e^{\alpha 2k\pi i}.$$

Демек функцияның көпмәнділігі $e^{\alpha 2k\pi i}$ көбейткішіне байланысты.

6. $\sinh z$, $\cosh z$, $\tanh z$, $\coth z$ –гиперболалық функциялары төмендегі теңдіктер арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, & \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}. \end{aligned}$$

Экспоненттік e^z функциясының дәрежелік қатар түріндегі көрсетілімін ескере отырып, гиперболалық $\sinh z$ және $\cosh z$ функцияларының

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.7)$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!} \quad (2.8)$$

жіктеулерін аламыз.

(2.7) және (2.8) формулаларында $z \mapsto iz$ алмастыруын жасайық:

$$\begin{aligned} \sinh iz &= iz + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots = i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = i \sin z, \\ \cosh z &= 1 + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \cos z \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.9) және (2.10) теңдіктерінен

$$\sin iz = i \sinh z \text{ және } \cos iz = \cosh z \quad (2.11)$$

формулалары шығады.

Тригонометриялық және гиперболалық функциялар үшін қосу теоремалары

Эйлер формуласы бойынша

$$\begin{aligned} e^{iz_1} &= \cos z_1 + i \sin z_1, \\ e^{iz_2} &= \cos z_2 + i \sin z_2. \end{aligned}$$

Бұл теңдіктерді мүшелеп көбейтіп,

$$\begin{aligned} e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} &= (\cos z_1 + i \sin z_1) \cdot (\cos z_2 + i \sin z_2) = \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i (\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1) \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. Алайда

$$e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2).$$

Демек

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (2.12)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1. \quad (2.13)$$

(2.12) және (2.13) формулаларын тригонометриялық функциялар үшін қосу теоремалары деп атайды.

Гиперболалық функциялардың қосу теоремаларын алу үшін (2.11) тепе-теңдіктерін пайдаланайық:

$$\sinh z = \frac{1}{i} \sin iz \quad \text{және} \quad \cosh z = \cos iz.$$

Тригонометриялық функциялар үшін қосу теоремаларын ескере отырып

$$\begin{aligned} \sinh(z_1 + z_2) &= \frac{1}{i} \sin(iz_1 + iz_2) = \\ &= \frac{1}{i} (\sin(iz_1) \cos(iz_2) + \cos(iz_1) \sin(iz_2)) = \\ &= \frac{1}{i} (i \sinh z_1 \cosh z_2 + i \sinh z_2 \cosh z_1) = \\ &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(z_1 + z_2) &= \cos(iz_1 + iz_2) = \\ &= \cos(iz_1)\cos(iz_2) - \sin(iz_1)\sin(iz_2) = \\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2\end{aligned}$$

формулаларын аламыз.

Сонымен гиперболалық функциялар үшін қосу теоремалары келесі түрде тұжырымдалады:

$$\begin{aligned}\sinh(z_1 + z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1, \\ \cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.\end{aligned}$$

7. Тригонометриялық және гиперболалық функциялар арасындағы байланыстар келесі арақатынастар арқылы анықталады:

$$\begin{aligned}\sin z &= -i \sinh z, & \sinh z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \cosh iz, & \cosh z &= \cos iz, \\ \tan z &= -i \tanh iz, & \tanh z &= -i \tan iz \\ \cot z &= i \coth iz, & \coth z &= i \cot iz.\end{aligned}$$

8. $\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z, \operatorname{Arctan} z, \operatorname{Arccot} z$ — кері тригонометриялық функциялары сәйкес $\sin z, \cos z, \tan z, \cot z$ функцияларына кері функциялар ретінде анықталады. Мысалы, егер $z = \cos w$ болса, онда $w = u + iv$ функциясыз айнымалысының арккосинусы деп аталады.

Комплекс арккосинус функциясы $w = \operatorname{Arccos} z$ символдық өрнегімен белгіленеді.

$$\cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$$

теңдігін пайдалана отырып, $z = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$ теңдігін аламыз.

Соңғы теңдеуден

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow$$

$$w = \frac{1}{i} \ln \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \ln \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

$$\operatorname{Arccos} 0 = \frac{1}{i} \ln \left(\pm \sqrt{-1} \right) = \frac{1}{i} \ln (\pm i) = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

болатынын байқаймыз. $n = 0$ болғанда нақты айнымалы арккосинустың ноль нүктесіндегі мәні $\frac{\pi}{2}$ тең. Сондықтан біз "+" таңбасын таңдаймыз. Сонымен

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \ln (z \pm \sqrt{z^2 - 1}) = -i \ln \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (2.14)$$

Логарифм таңбасының астындағы өрнек әрқашан нөлден өзгеше, сондықтан $\operatorname{Arccos} z$ функциясының анықталу облысы бүкіл комплекс жазықтығын қамтиды.

$\operatorname{Arccos} z$ функциясының бас мәні (2.14) формуласымен анықталады және мұндағы логарифмнің бас мәні

$$\operatorname{arccos} z = \frac{1}{i} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

түрінде таңдалынады.

Комплекс айнымалы арктангенс үшін осыған ұқсас формула қорытылады:

$$\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}. \quad (2.15)$$

$\operatorname{Arctan} z$ функциясының $\pm i$ нүктелерін есептемегенде анықталу облысы бүкіл комплекс жазықтығы болады. Бұл формуланың бас мәні (2.15) формуласымен анықталады және мұндағы логарифмнің бас мәні

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

түрінде таңдалынады.

Бұл функциялардың барлығы бірдей көпмәнді және логарифмдік функция арқылы өрнектеледі:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \ln \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right);$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \ln \left(z + \sqrt{z^2-1} \right);$$

$$\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz};$$

$$\operatorname{Arccot} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{z+i}{z-i}.$$

$\arcsin z, \arccos z, \arctan z, \operatorname{arccot} z$ – кері тригонометриялық функциялардың бас мәндері, сәйкес логарифмдік функциялардың бас мәндері арқылы анықталады.

Жуковский функциясы

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (2.16)$$

түріндегі бөлшек-рационал функцияны іс жүзінде толықтай жете зерттеген және аэродинамиканың есептеріне қолданған Н.Е. Жуковский болды, сондықтан оны Жуковский функциясы деп атайды.

Конформды бейнелеудің бірпарақты облысын анықтау үшін комплекс жазықтығында жататын $z_1 \neq z_2$ нүктелері Жуковский функциясының көмегімен бір w нүктесіне бейнелене ме деген сұраққа жауап іздейік.

Бұл сұраққа жауап ретінде Жуковский функциясының z_1 және z_2 нүктелеріндегі мәндерін өзара теңестіреміз, сонда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \Rightarrow (z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 \cdot z_2} \right) = 0.$$

Егер бұл теңдік орындалса, онда функция көппарақты. Керісінше орындалмаса, онда – бірпарақты. Демек, Жуковский функциясы $z_1 \cdot z_2 = 1$ теңдігі орындалатын нүктелердің жиынынан басқа облыста бірпарақты болады, өйткені $z_1 \neq z_2$.

Бірпарақтылық шартын қанағаттандырмайтын нүктелердің жиынын табайық. Ол үшін $z_1 \cdot z_2 = 1$ теңдігін ашып жазайық:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = 1 \Leftrightarrow r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \equiv 1.$$

Соңғы теңдік бірге тең болу үшін:

- 1) полярлық бұрыштардың қосындысы нөлге тең болуы;
- 2) z_1 және z_2 комплекс сандарының модульдері бірге тең

болуы қажетті.

Ескерту. Сонымен Жуковский функциясы бірлік шеңбердің нүктелерін есептегенде бүкіл комплекс жазықтығында бірпарақты.

Жуковский функциясы арқылы z комплекс жазықтығындағы координаталық $r = \text{const}$ және $\varphi = \text{const}$ сызықтарының бейнелерін табайық. Ол үшін (2.16) формуласындағы z -ті оның көрсеткіштік түрдегі $z = r e^{i\varphi}$ жазылуымен ауыстырайық. Содан кейін теңдіктің оң жағын түрлендірейік.

z комплекс жазықтығындағы координаталық сызықтардың бейнелерін Жуковский функциясының көмегімен табайық. Ол үшін $z = r e^{i\varphi}$ алып, теңдіктің оң жағын түрлендірейік:

$$z + \frac{1}{z} = re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

$w = u + iv$ екенін ескере отырып,

$$\begin{cases} u(r, \varphi) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v(r, \varphi) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases} \quad (2.17)$$

теңдіктерін аламыз.

(2.17) теңдіктерінде ағымдық $M(r, \varphi)$ нүктесінің r координатасын тұрақты деп алайық. Ал оның фбұрыштық координатасы үшін $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ тепе-теңдігі орындалады. Олай болса (2.17) теңдіктері

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1 \quad (2.18)$$

канондық теңдеуі түрінде болатын екінші ретті қисықты анықтайды. Бұл теңдеу фокустары $w = \pm 1$ нүктелерінде

орналасқан, ал жарты осьтері $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ және $\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$

болатын эллипстердің үйірін анықтайды.

Сонымен полярлық координаталар жүйесінің координаталық сызықтары болатын центрлес $|z| = \text{const}$ шеңберлері Жуковский функциясының көмегімен фокустас эллипстерге бейнеленеді. Егер шеңбердің радиусы бірге тең болса, онда оған сәйкес эллипс $(-1, 1)$ кесіндісіне айналады.

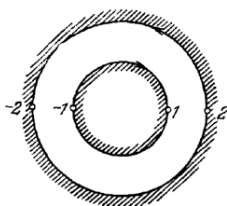
(2.17) теңдіктеріне қайта оралайық. Ағымдық нүктенің бұрыштық координатасы φ – ді тұрақты деп алсақ,

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1 \quad (2.19)$$

теңдеуіне келеміз.

Бұл теңдеудің фокустары эллипстердің фокустары сияқты $w = \pm 1$ нүктелерінде орналасқан гиперболалардың үйірін анықтайды. Бұл гиперболаларға Жуковский функциясының бейнелеуінде $\arg z = \text{const}$ түріндегі радиал сәулелер сәйкес келеді. (2.19) гиперболалар үйіріне (2.18) эллипстер үйірі ортогональды болады.

Мысал (шенелген облысқа қатысты). $1 < |z| < 2$ облысының Γ шекарасы екі қисықтан тұрады $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, мұнда Γ_1 сағат тіліне қарама – қарсы бағдарланған $|z| = 2$ шеңбері, ал Γ_2 сағат тілі бойынша бағдарланған $|z| = 1$ шеңбері (2.5-сурет).

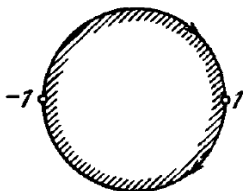


2.5-сурет

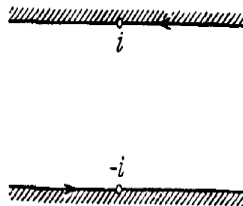
Мысал (шенелмеген облысқа қатысты).

а) $|z| > 1$ (2.6-сурет);

б) $|\operatorname{Im} z| < 1$ жолағы (2.7-сурет).



2.6-сурет



2.7-сурет

Мысал. $w = z^3 - i\bar{z}$ функциясының нақты және жорамал бөліктерін тап.

Шешуі. $z = x + iy$, $w = u + iv$ делік. Сонда

$$u + iv = (x + iy)^3 - i(x - iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x) \Rightarrow$$

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - y,$$

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x.$$

Мысал. $w = \sin z$ функциясының $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$ нүктесіндегі модулінің мәнін және аргументінің бас мәнін тап.

Шешуі.

$$w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{-ix}e^y}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-y}}{2i}(\cos x + i \sin x) - \frac{e^y}{2i}(\cos x - i \sin x). \Rightarrow$$

$$u(x, y) = e^{-y} \frac{\sin x}{2} + e^y \frac{\sin x}{2} = \sin x \cosh y,$$

$$v(x, y) = -e^{-y} \frac{\cos x}{2} + e^y \frac{\cos x}{2} = \cos x \sinh y.$$

$$\begin{aligned}
 |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} = \\
 &= \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y} = \\
 &= \sqrt{\sin^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y} = \\
 &= \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}.
 \end{aligned}$$

$$z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5}) \text{ деп алып,}$$

$$\left| \sin(\pi + i \ln(2 + \sqrt{5})) \right| = \sinh(\ln(2 + \sqrt{5})) = \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}{2} = 2$$

мәнін табамыз.

Мысал. $z = t + i \frac{1}{t}, -\infty < t < 0$ теңдеуі қандай қисықты

анықтайды. $z = x + iy$ делік. Сонда $x = t, y = \frac{1}{t} = \frac{1}{x}, -\infty < x < 0$.

Теңдеу үшінші ширекте жататын гиперболаның бір тармағын анықтайды.

Жаттығулар

Келесі функциялардың нақты және жорамал бөліктерін тап:

1. $w = \bar{z} - iz^2$;
2. $w = \frac{iz + 1}{1 + z}$;
3. $w = e^{\bar{z}^2}$;
4. $w = 2^{z^2}$;
5. $w = \cosh(z - i)$.

Комплекс сандардың модулін және аргументін тап:

6. а) $\tanh \pi i$; б) 10^i ; в) 3^{2-i} .

Келесі есептерде комплекс жазықтығында берілген шарттар арқылы анықталатын нүктелердің жиынын тап:

7. $4 \leq |z-2| + |z+2| \leq 8$.

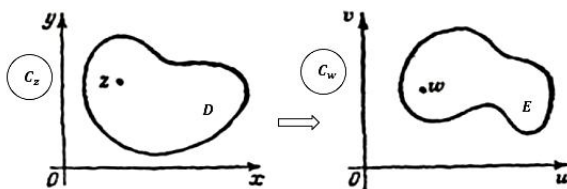
8. а) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$; б) $|z| - \operatorname{Re} z \leq 0$.

9. $|z-i| < 1, \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{4}$.

10. Есепте: а) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$; в) $(1-i)^{3-3i}$.

Комплекс айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі

(z) және (w) комплекс жазықтықтары берілсін. Комплекс мәнді $w = f(z)$ функциясы $D \subset \mathbb{C}_z$ облысында анықталсын дейік (2.8-сурет).



2.8-сурет

$f: D \subset \mathbb{C}_z \rightarrow E \subset \mathbb{C}_w$, мұнда $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ арқылы сәйкес бүкіл z, w комплекс жазықтықтары белгіленген.

Сонда $f(z)$ функциясы тек x, y, u және вайнымалылары арқылы ғана сипатталады, демек оның геометриялық иллюстрациясы төрт өлшемді кеңістікті қажет етеді. Төрт өлшемді кеңістікті көз алдымызға елестетудің өзі қиын.

Сондықтан бұл қиындықты аттап өту үшін екі $\mathbb{C}_z$ және $\mathbb{C}_w$ комплекс жазықтықтарын қарастырайық.

z_0 нүктесінің кез келген маңайыДжиынының шексіз көп нүктелерін қамтитын болса, онда z_0 нүктесі Джиынының шектік нүктесі деп аталады.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $0 < |z - z_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $z \in D$ нүктелері үшін $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда w_0 санын $f(z)$ функциясының $z \rightarrow z_0$ ұмтылғандағы шегі деп атайды және оны $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, z \in D$ түрінде жазады.

Егер:

1) z_0 нүктесі D жиыны үшін шектік нүкте болса;

2) $\{z_n\} \in D, z_n \neq z_0$ тізбегінің z_0 нүктесіне

жинақтылығынан $\{f(z_n)\}$ тізбегінің w_0 нүктесіне

жинақтылығы шықса, онда функция шегінің бұл анықтамасы математикалық талдаудағы Гейне анықтамасына эквивалентті.

Демек $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z) = w_0$.

Жоғарыда тұжырымдалған анықтамаларды математика тіліне көшіріп, келесі түрде жазайық:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D (0 < |z - z_0| < \delta) \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Комплекс мәнді функциялар үшін де $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ және

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ шектерін анықтауға болады.

Теорема. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0$ болғанда

және тек сонда ғана $w_0 = u_0 + iv_0$ саны

$z = x + iy \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$ ұмтылғандағы $f(z)$ функциясының шегі болады. Белгілеу енгізейік:

$$z = x + iy = re^{i\varphi}, z_0 = r_0 e^{i\varphi_0},$$

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = \rho(r, \varphi) e^{i\theta(r, \varphi)}, w_0 = u_0 + iv_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}.$$

Теорема. Егер $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ болса, онда аргументтерді

таңдау барысында $\lim_{\substack{r \rightarrow r_0, \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \rho(r, \varphi) = \rho_0, \lim_{\substack{r \rightarrow r_0, \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} \theta(r, \varphi) = \theta_0$

теңдіктері алынады.

Кері тұжырым ешбір шектеу қойылмай-ақ дұрыс.

Функция шегінің қасиеттері: егер $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ және

$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ шектері бар болсын десек, онда

$$1) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B;$$

$$2) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B;$$

$$3) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0).$$

Математикалық талдауда жиі кездесетін $\sim$, о, Осимволдарының түсініктемесін комплекс мәнді функциялар үшін төмендегі кесте арқылы берейік.

Формула	Түсініктеме
$f(z) \sim g(z) (z \rightarrow z_0, z \in D)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1, z \in D$
$f(z) = o(g(z)) (z \rightarrow z_0, z \in D)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0, z \in D$
$f(z) = O(g(z)) (z \in D)$	$\frac{f(z)}{g(z)}$ қатынасы D жиынында шектеулі, яғни $\frac{f(z)}{g(z)} \leq M, z \in D$
$f(z) = O(g(z)) (z \rightarrow z_0, z \in D)$	$\frac{f(z)}{g(z)}$ қатынасы z_0 нүктесінің қайсыбір маңайы мен D жиынының қиылысында шектеулі

Мұнда $f(z)$, $g(z)$ функциялары D жиынында анықталған комплекс мәнді функциялар, ал z_0 нүктесі D жиынының шектік нүктесі.

$$f(z) \sim g(z) (z \rightarrow z_0, z \in D)$$

формуласы асимптотикалық формула, ал

$$f(z) = o(g(z)) (z \rightarrow z_0, z \in D), f(z) = O(g(z)) (z \rightarrow z_0, z \in D)$$

түріндегі формулалар асимптотикалық бағалау формулалары деп аталады.

Анықтама. $f : D \subset \mathbb{C}_z \rightarrow E \subset \mathbb{C}_w$ функциясы D жиынының z_0 шектік нүктесінде анықталсын дейік. Егер $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ теңдігі орындалса, онда $f(z)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз.

Теорема. Егер $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функциялары да (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз болады және кері тұжырым да дұрыс.

Басқаша айтқанда $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функцияларының (x_0, y_0) нүктесіндегі үзіліссіздігінен

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функциясының $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесіндегі үзіліссіздігі шығады.

Егер $f(z)$ функциясы D жиынының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол D жиынында үзіліссіз деп аталады.

$f(z)$ және $g(z)$ функциялары z_0 нүктесінде үзіліссіз болсын дейік. Сонда $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, $\frac{f(z)}{g(z)}$, $g(z_0) \neq 0$ функциялары да сол нүктеде үзіліссіз болады.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, $|z_1 - z_2| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген $z_1 \in D$, $z_2 \in D$ нүктелері үшін $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда D жиынында анықталған $f(z)$ функциясы сол жиында бірқалыпты үзіліссіз деп аталады.

Сонымен қатар, егер $f(z)$ функциясы тұйық D жиынында үзіліссіз болса, онда ол:

1) осы жиында шенелген, яғни барлық $z \in D$ үшін

$$|f(z)| \leq M = \text{const} < \infty;$$

2) функцияның модулі ең үлкен және ең кіші мәндеріне ие болады, яғни $z_1, z_2 \in D$ нүктелері табылып

$$|f(z_1)| = \sup_{z \in D} |f(z)|, |f(z_2)| = \inf_{z \in D} |f(z)|;$$

3) D жиынында бірқалыпты жинақты (Кантор теоремасы).

Тұжырым. Егер D облысында $w = f(z)$ функциясы үзіліссіз және осы облысты E жиынына бірімәнді бейнелейтін болса, онда оның кері функциясы да үзіліссіз болады, ал E жиыны облыс болады (дәлелдеуін оқырмандарға қалдырамыз).

Мысал. Егер $\{z_n\}$ тізбегі жинақты және $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ болса, онда $\{\arg z_n\}$ тізбегі жинақсыз болуы мүмкін екенін дәлелде.

$\{z_n\} = -1 + i \frac{(-1)^n}{n^2}$ тізбегін қарастырайық. Тізбек жинақты және

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1, z_{2k} = -1 + \frac{i}{4k^2}, z_{2k-1} = -1 - \frac{i}{(2k-1)^2}$$

дербес тізбектері үшін де шек $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{2k-1} = -1$.

$$\arg z_{2k} = \pi - \arctan \frac{1}{4k^2}, \arg z_{2k-1} = -\pi + \arctan \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Сонда $(\arg z_n)$ тізбегінің шектік екі нүктесі бар, өйткені

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \arg z_{2k} = \pi, \lim_{k \rightarrow \infty} \arg z_{2k-1} = -\pi.$$

Демек бастапқы тізбек $(\arg z_n)$ – жинақталмаған.

Мысал. а) $f(z) = \frac{z^2}{z}$; б) $f(z) = \frac{z}{z}$ функциялары берілсін

дейік. $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ шектерін тап.

а) $z_n = x_n + iy_n$ делік, онда $f(z_n) = \frac{z_n^2}{z_n} = z_n \frac{z_n}{z_n}$; демек

$|f(z_n)| = |z_n|$, өйткені $\left| \frac{z_n}{z_n} \right| = 1$. Бұдан $z \rightarrow 0$ ұмтылғанда

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z} = 0.$$

б) $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $z_n = x_n \rightarrow 0$ дейік, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1$. Екінші жолы $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $z_n = iy_n \rightarrow 0$

дейік, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = \frac{iy_n}{-iy_n} = -1$. Демек функцияның $z \rightarrow 0$ ұмтылғандағы шегі табылмайды.

Мысал. $\lim_{z \rightarrow \pi/2i} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$ шегін тап.

$$\lim_{z \rightarrow \pi/2i} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow \pi/2i} \frac{2e^{2z}}{e^z} \quad (\text{Лапитель ережесі бойынша})$$

$$\lim_{z \rightarrow \pi/2i} \frac{2e^{2z}}{e^z} = \frac{-2}{-i} = -2i.$$

Мысал. $w = z^2$ функциясы z -тің кез келген мәнінде үзіліссіз екенін көрсет.

Кез келген z_0 және $\varepsilon > 0$ санын алайық. $f(z) = z^2$ функциясының z_0 нүктесіндегі мәні $f(z_0) = z_0^2$ болғандықтан

әрбір $\varepsilon > 0$ саны бойынша $|z - z_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын және $f(z) = z^2$ функциясы анықталған жиыннан алынған барлық z сандары үшін $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылатынын көрсетейік.

Егер $z \rightarrow z_0$ ұмтылса, онда $|z| < M$ және $|z_0| < M$ теңсіздіктері орындалатындай $M > 0$ саны табылады. Сонда

$$|z^2 - z_0^2| = |(z + z_0)(z - z_0)| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| < (|z| + |z_0|) \cdot |z - z_0| < 2M|z - z_0|.$$

Егер $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ деп алсақ, онда $|z - z_0| < \delta$ теңсіздігінен $|z^2 - z_0^2| < 2M\delta \leq \varepsilon$ шығады, яғни $w = z^2$ функциясы кез келген z_0 үшін үзіліссіз.

Жаттығулар

1. $w = \tan(\arg z)$ функциясын үзіліссіздікке зертте.
2. Функцияның үзіліссіздігінің анықтамасына сүйене отырып, $w = z^2$ функциясының бүкіл $\mathbb{C}_z$ жазықтығында үзіліссіз болатынын дәлелде.
3. а) $\frac{1}{1-z}$; б) $\frac{1}{1+z^2}$ функциялары үзілісті ме?
4. z – тің кез келген мәнінде $w = z^3$ функциясы үзіліссіз болатынын көрсет.
5. $w = \frac{\operatorname{Im} z}{z}$ функциясы үшін $z_0 = 0$ нүктесі оның шектік нүктесі болмайтынын дәлелде.
6. $w = \frac{|z|}{iz}$ функциясы үшін $z_0 = 0$ нүктесі оның шектік нүктесі болмайтынын дәлелде.

$$7. \quad f(z) = \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i} \quad \text{функциясының} \quad z_0 = -i$$

нүктесіндегі шегін есепте.

8. $w = \bar{z}^3$ функциясы $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығының әрбір ақырлы нүктесінде үзіліссіз болатынын дәлелде.

9. $w = |z|^2 \bar{z}$ функциясы $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығының әрбір нүктесінде үзіліссіз болатынын дәлелде.

10. $f(z) = e^{-1/z^2}$, $D_f = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq R\}$ функциясы берілсін дейік. Сонда $f(z)$ функциясы бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

Комплекс айнымалы функцияның дифференциалдануы

Бұл тақырыпта және одан әрі ашық байланысты ішкі жиынды облыс деп түсінеміз. Сонымен қатар нақты $\mathbb{R}^2$ жазықтығының әрбір реттелген (x, y) нүктесіне комплекс $\mathbb{C}$ жазықтығынан бір $z = x + iy$ комплекс санын сәйкес қоялық:

$$(x, y) \leftrightarrow z = x + iy.$$

Сонда

- комплекс $\mathbb{C}$ жазықтығындағы $D \subset \mathbb{C}$ облысын комплекс $\mathbb{C}$ жазықтығына бейнелеуді (белгілеуі $w = f(z)$);
- нақты $\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $D \subset \mathbb{R}^2$ облысын комплекс $\mathbb{C}$ жазықтығына бейнелеуді (белгілеуі $w = f(x, y)$);
- нақты $\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $D \subset \mathbb{R}^2$ облысын нақты $\mathbb{R}^2$ жазықтығына бейнелеуді (белгілеуі $u = u(x, y), v(x, y)$) комплекс айнымалының комплекс мәнді функциясы деп қарастырамыз.

Әрі қарай комплекс айнымалы функцияның осы тұрғыда анықталған бір мағынасынан қарастырып отырған шарттарға қатысты екіншісіне жиі өтіп тұрамыз.

Туынды. $w = f(z)$ функциясы қайсыбір $D \subset \mathbb{C}$ облысында анықталған бірімәнді функция. z_0 және $z_0 + \Delta z$ нүктелері D облысына тиісті болсын делік. Демек $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің қайсыбір маңайында анықталған. Белгілеу енгізейік: $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, мұнда $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Анықтама. Егер кез келген жолмен $z \rightarrow z_0$ ұмтылғанда $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ қатынасы белгілі бір шекке ұмтылса және ол ақырлы болса, онда $w = f(z)$ функциясы $z_0 \in D$ нүктесінде дифференциалданады. Бұл шек $w = f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі туындысы деп аталады және $f'(z_0)$ арқылы белгіленеді. Демек анықтама бойынша

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

мұнда Δz -тәуелсіз айнымалының өсімшесі, ал Δf - функцияның z_0 нүктесіндегі өсімшесі.

Жоғарыдағы теңдік, егер $0 < |\Delta z| < \delta$ болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right|$ теңсіздігі орындалатындай $\delta = \delta(\varepsilon)$ табылатындығын көрсетеді. Демек $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі өсімшесін

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) (\Delta z \rightarrow 0)$$

түрінде өрнектеуге болады.

Керісінше, егер $f(z)$ функциясының өсімшесі $\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z)$ түрінде көрсетілсе, онда $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде дифференциалданады және $A = f'(z_0)$, мұнда A комплекс тұрақтысы Δz -ке тәуелсіз. Бұл шарт $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінде дифференциалдануының қажетті және жеткілікті шарты болады.

Анықтама. $f(z)$ функциясы комплекс $\mathbb{C}$ жазықтығындағы $D \subset \mathbb{C}$ облысын комплекс жазықтығына бейнелеуді білдірсін және $z_0 \in D$ тиісті болсын дейік. Сонда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

шегі бар және ол ақырлы болса, онда $f'(z_0)$ туындысы $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі комплекс туындысы деп аталады.

Енді $f(z)$ функциясы нақты $\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $D \subset \mathbb{R}^2$ облысын нақты $\mathbb{R}^2$ жазықтығына бейнелеуді білдірсін. Олай болса $f(z)$ бейнелеуінен кез келген бағыт бойынша алынған дербес туындылары $f'(z_0) = f'(x_0, y_0)$ өзара тең. Сонымен

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \end{aligned}$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{\Delta y} =$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Бұл теңдіктердің сол жақтарын теңестіре отырып, Коши – Риман шарттарын аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

Содан кейін комплекс сандар теориясында маңызды роль атқаратын $\frac{\partial}{\partial z}$ және $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ дифференциалдық операторларын енгізейік:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Осы операторлардың көмегімен

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u + iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

Дербес туындысын анықтайық.

Лемма. Егер $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінде комплекс туындысы бар болса, онда $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ және

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Облыстың әрбір нүктесінде дифференциалданатын $f(z)$ функциясын осы облыста дифференциалданады деп атайды.

Лемма. Егер $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ функциясының $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесінде комплекс туындысы бар болса, онда оған мағынасы жағынан сәйкес $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ бейнелеуі де сол нүктеде дифференциалданады. $\alpha(\Delta z)$ арқылы

$$\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$$

айырымын белгілейік.

Сонда

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= f'(z_0) \Delta z + \alpha(\Delta z) \Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + \alpha(\Delta z) \Delta z = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right) + \alpha(\Delta z) \Delta z. \end{aligned}$$

Демек

$$(u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(|\Delta z|).$$

Теорема. $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде дифференциалданатын және Коши – Риман шарттарын қанағаттандыратын жағдайда ғана және тек сонда ғана $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ функциясының $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесінде комплекс туындысы табылады.

Дәлелдеуі. $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде дифференциалданады делік. Сонда

$$(u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(|z|),$$

мұнда $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Сондықтан $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ функциясы үшін

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) \right] (\Delta x + i\Delta y) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) \right] (\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|). \end{aligned}$$

Теореманың шарты бойынша $f(z)$ функциясы Коши – Риман шарттарын қанағаттандырады, демек $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Олай болса

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + o(|\Delta z|).$$

Соңғы теңдік комплекс айнымалы комплекс мәнді $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінде туындысының табылатындығын көрсетеді.

Ескерту. $w = f(z)$ функциясының дифференциалы да нақты айнымалының функциясы сияқты $w = f'(z) dz$ теңдігімен анықталады, мұнда $dz = \Delta z$ тәуелсіз айнымалы z -тің дифференциалы.

Анықтама. Егер $w = f(z), z \in D$ функциясы D облысының кез келген $z \in D$ нүктесінде және оның қайсыбір маңайында дифференциалданатын болса, онда оны осы облыста аналитикалық функция деп атайды.

Ескерту. D облысының $z \in D$ нүктесінде $f(z)$ функциясының аналитикалық болуы, оның $z \in D$ нүктесінің

осы облыста жататын қайсыбір маңайында да аналитикалық функция болатынын білдіреді.

Анықтама. Егер $D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ функциясының $D \subset \mathbb{C}$ облысының әрбір нүктесінде комплекс туындысы бар болса, онда оны сол облыста голоморфты функция деп атайды. Егер $f(z)$ функциясы $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ нүктесінің қайсыбір маңайында голоморфты болса, онда ол z_0 нүктесінде де голоморфты.

Ескерту. Комплекс сандар теориясында аналитикалық функция және голоморфты функция атауларын бір-біріне синоним тұрғысынан қабылдаймыз.

Мысал. $f(z) = C$ ($C = \text{const}$) функциясы бүкіл $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығында дифференциалданады және оның туындысы $(C)' = 0$.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta z}, \text{ яғни } (C)' = 0.$$

Мысал. $f(z) = z^n$ ($n \geq 1$) бүтін функциясы бүкіл $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығында дифференциалданады және $(z^n)' = nz^{n-1}$.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^n + C_n^1 z^{n-1} \Delta z + C_n^2 z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + C_n^n (\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{n z^{n-1} \cdot \Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = n z^{n-1}.$$

Ескерту. Туынды анықтамасындағы шек z -тің z_0 -ге қай жолмен ұмтылғанына тәуелсіз болатыны айтылған. Әрине бұл шарт комплекс айнымалы функцияның дифференциалдануына анағұрлым күштірек шектеу қояды.

Егер $f'(z_0)$ туындысы бар болса, онда $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

қатынасының $z \rightarrow z_0$ кез келген жол бойынша ұмтылғандағы шектері өзара тең және ол тек біреу ғана болады.

Ескерту. Комплекс айнымалы функция қайсыбір облыста дифференциалданатын болса, онда сол облыста оның барлық туындылары табылады.

Мысал. $f(z) = \bar{z}$ функциясы бүкіл $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығында анықталған, бірақ ешбір нүктеде дифференциалданбайды. Шынында да, егер $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ болса, онда

$$\Delta \bar{z} = \Delta x - i\Delta y \text{ және } \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{z + \Delta \bar{z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Бұл тендікте алдымен $\Delta y = 0$ деп алып, $\frac{\Delta f}{\Delta z} = 1$ болатынын

анықтайық. Екінші жолы $\Delta x = 0$ деп алайық, сонда $\frac{\Delta f}{\Delta z} = -1$.

Демек $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ қатынасының $\Delta z \rightarrow 0$ ұмтылғандағы шегі жоқ.

Туындының анықтамасынан және шектердің қасиеттерінен математикалық талдау курсынағы белгілі дифференциалдау ережелері де комплекс айнымалы функциялар үшін дұрыс.

1. Егер $f(z)$ және $g(z)$ функциялары z нүктесінде дифференциалданатын болса, онда олардың қосындысы, көбейтіндісі және бөліндісі де сол нүктеде дифференциалданады

$$(f \pm g)' = f' \pm g';$$

$$(cf)' = cf', \quad c = const;$$

$$(fg)' = f'g + fg';$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0.$$

2. Егер $f(z)$ функциясы z нүктесінде, ал $F(w)$ функциясы $w = f(z)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $\Phi(z) = F[f(z)]$ күрделі функциясы да сол z нүктесінде дифференциалданады және

$$\Phi'(z) = F'(w) f'(z).$$

Ескерту. $u(x, y)$, $v(x, y)$ функцияларының (x, y) нүктесінде дифференциалдануынан $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясының сол $z = x + iy$ нүктесінде әрдайым дифференциалданатыны шықпайды. Дифференциалдау талабын орындау үшін $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функцияларының дербес туындыларына қосымша шарттар қойылады, атап айтқанда - Коши – Риман шарттары.

Коши - Риман шарттары

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы $z = x + iy$ нүктесінің қайсыбір маңайында анықталсын және сол $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ нүктесінде $u(x, y)$, $v(x, y)$ функциялары дифференциалданады дейік. Сонда $f(z)$ функциясының z нүктесінде

дифференциалдануы үшін $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

арақатынастарының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілік шарты.

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \text{туындысы бар дейік.} \quad f'(z)$$

туындысы комплекс h өсімшесінің нөлге қандай жолмен ұмтылатынына тәуелсіз. Сондықтан дәлелдеуде осы шартты ескереміз. Ол үшін $h = s \overset{f}{\rightarrow} 0$, $s \in \mathbb{R}$ деп алып, 0 (нөлге) нақты оське параллель түзу бойынша ұмтылайық. Сонда

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Одан әрі жорамал оське параллель түзу бойынша қозғала отырып, $f'(z)$ табайық. Ол үшін $h = it \rightarrow 0$ деп алайық, мұнда $t \in \mathbb{R}$. Сонда

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{it} = -i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Бұл теңдеулердің нақты және жорамал бөліктерін өзара теңестіре отырып Коши – Риман шарттарын аламыз.

Жеткіліктілік шарты. $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функциялары (x, y) нүктесінде дифференциалданады және Коши – Риман шарттары орындалады дейік. Демек

$$u(x+s, y+t) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} s + \frac{\partial u}{\partial y} t + \alpha \cdot |h|,$$

$$v(x+s, y+t) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} s + \frac{\partial v}{\partial y} t + \beta \cdot |h|,$$

мұнда $h \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\alpha, \beta \rightarrow 0$. Сонда

$$\Delta f(z) = f(z+h) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t \right) + \eta \cdot |h|,$$

мұнда $\eta = \alpha + i\beta$. Бұл теңдікті Коши – Риман шарттарын пайдалана отырып, келесі түрде жазайық

$$\Delta f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) h + \eta \cdot |h| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

демек $f'(z)$ туындысы бар.

Ескерту. $f(z)$ функциясы кез келген $z = x + iy$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Мысал. $w = e^z$ функциясының бүкіл $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығында дифференциалданатынын және $(e^z)' = e^z$ болатынын дәлелдейік.

Анықтама бойынша $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, яғни

$$u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y.$$

$u(x, y), v(x, y)$ функцияларының кез келген ретті үзіліссіз дербес туындылары бар, сондықтан олар кез келген (x, y) нүктелерінде дифференциалданады. Онда тек Коши - Риман шарттарын ғана тексеру қалады:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Коши – Риман шарттары орындалады. Демек $w = e^z$ функциясы $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығында аналитикалық функция және

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

**Коши – Риман шарттарымен $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ шартының
эквиваленттігі**

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы берілсін дейік. x және y айнымалыларын $z = x + iy$ және $\bar{z} = x - iy$ айнымалылары арқылы өрнектейік: $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Сонда $f(z)$ функциясын z және $\bar{z}$ айнымалыларының функциясы ретінде қарастыруға болады, яғни

$$f(z) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

Келесі қадамда осы функциядан $\bar{z}$ бойынша алынған дербес туындысын табайық.

Екі айнымалының күрделі функциясын дифференциалдау ережесі бойынша

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Бұл теңдіктен келесі теореманың дұрыстығы шығады.

Теорема. Коши – Риман шарттары және $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ шарты өзара

эквивалентті.

Егер $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ болса, онда $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, өйткені

$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$. Демек комплекс айнымалы функцияны дифференциалдау z айнымалысы бойынша жүргізіледі.

Мысал. $f(z) = \bar{z} + z^2$, $f(z) = z + \operatorname{Re} z$, $f(z) = z^2 + \operatorname{Im} z$ функциялары ешбір нүктеде дифференциалданбайды, өйткені $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$.

Мысал. Коши – Риман шарттарын

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функциясы үшін полярлық координаталар жүйесінде жазайық.

Шешуі. $z = re^{i\varphi}$ делік, сонда $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

Мұнда

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Әрі қарай күрделі функцияларды дифференциалдау ережесін қолданайық:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi.$$

Бұл жүйені $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындыларына қатысты түрлендірейік (шешейік). Сонда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}$$

теңдіктерін аламыз. Одан әрі жүйені $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындыларына қатысты түрлендірейік. Сонда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Келесі қадамда Коши – Риман шарттарын пайдаланайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ немесе}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} &= \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} &= -\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}.\end{aligned}$$

Соңғы жүйенің бірінші теңдігін $\cos \varphi$ -ге, ал екінші теңдігін $\sin \varphi$ -ге көбейтіп, бір – біріне мүшелеп қоссақ, $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ теңдігін аламыз.

Екінші жолы бірінші теңдікті $(-\sin \varphi)$ -ге, ал екінші теңдікті $\cos \varphi$ -ге көбейтіп, бір – біріне мүшелеп қоссақ, $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$ теңдігін аламыз.

Сонымен полярлық координаталар жүйесінде $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ функциясы үшін Коши – Риман шарттары келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

және туындысы үшін

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ f'(z) &= \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}$$

формуласы алынады.

Мысал. $\ln z = \ln r + i\varphi$, $0 < \varphi < 2\pi$ функциясы үшін Коши – Риман шарттары орындалады және

$$(\ln z)' = \frac{r}{z} \left((\ln r)'_r + i(\varphi)'_r \right) = \frac{1}{z}.$$

Мысал. $f(z) = z \operatorname{Re} z$ функциясы тек $z = 0$ нүктесінде ғана дифференциалданатынын дәлелдейік және оның туындысының сол нүктедегі мәнін табайық.

Шешуі. $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi) = x^2 + ixy$ болғандықтан $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = xy$.

Бұдан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = y, \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Демек Коши – Риман шарттары тек $z = 0$ нүктесінде ғана орындалады. Анықтама бойынша

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + ixy}{x + iy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + ixy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - ix^2y + ix^2y + xy^2}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x = 0. \end{aligned}$$

Мысал. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы үшін Коши – Риман шарттарын полярлық координаталар жүйесінде жазайық.

Шешуі. Ол үшін комплекс санның көрсеткіштік түрде жазылуын пайдаланайық: $z = re^{i\varphi}$, $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

Бұл формулаларды $\bar{z}$ бойынша дифференциалдайық және алынған екі сызықтық теңдеулер жүйесін Крамер формулалары бойынша шешейік:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} e^{i\varphi} + i e^{i\varphi} r \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0, \\ \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi} - i e^{-i\varphi} r \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 1. \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесінің $\frac{\partial r}{\partial \bar{z}}$ және $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}$ белгісіздеріне қатысты бас анықтаушыны және қосалқы анықтаушытарын есептейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & ie^{i\varphi}r \\ e^{-i\varphi} & -ie^{-i\varphi}r \end{vmatrix} = -ir - ir = -2ir,$$

$$\Delta_{\frac{\partial r}{\partial \bar{z}}} = \begin{vmatrix} 0 & ie^{i\varphi}r \\ 1 & -ie^{-i\varphi}r \end{vmatrix} = -e^{i\varphi}r,$$

$$\Delta_{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}} = \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ e^{-i\varphi} & 1 \end{vmatrix} = e^{i\varphi}.$$

Крамер формулалары бойынша

$$\Delta \cdot \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \Delta_{\frac{\partial r}{\partial \bar{z}}}, \quad \Delta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \Delta_{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}}.$$

Бұдан

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{ie^{i\varphi}}{2r}.$$

Демек, күрделі функцияның туындысын табу теоремасы бойынша

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Бұл операторды $f = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ функциясына қолданайық:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.$$

Сонымен полярлық координаталар жүйесінде Коши – Риман шарттары

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

түрінде жазылады.

Түйіндес гармониялық функциялар

$D \subset \mathbb{C}$ облысында $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитикалық функциясы берілсін дейік, онда бұл функция үшін осы облыста Коши – Риман шарттары орындалады:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Бірінші теңдікті x бойынша, ал екіншісін y бойынша дифференциалдап,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

теңдіктерін аламыз. Аралас дербес туындылардың теңдігін және осы туындылардың үзіліссіздігін ескере отырып, бұл теңдіктерді бір-біріне мүшелеп қоссақ, Лаплас теңдеуі деп аталатын

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

теңдеуін аламыз.

Аналитикалық $f(z)$ функциясының жорамал бөлігі үшін де жоғарыдағы әдістеме бойынша

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

түріндегі Лаплас теңдеуі алынады.

Коши – Риман шарттарымен байланысты $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функцияларын өзара түйіндес гармониялық функциялар деп атайды.

Ескерту. Егер $u(x, y), v(x, y)$ функциялары $D \subset \mathbb{C}$ облысында өзара түйіндес гармониялық функциялар болса, онда $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы сол облыста аналитикалық функция болады.

Аналитикалық функциялардың кейбір қасиеттерін дәлелдеусіз атап өтейік.

1. Егер $D \subset \mathbb{C}$ облысында $f_1(z)$ және $f_2(z)$ аналитикалық болса, онда олардың қосындысы және $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ көбейтіндісі сол облыста аналитикалық болады, ал

бөліндісі де сол облыста аналитикалық болу үшін $f_2(z) \neq 0$ шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.

2. $w = f(z)$ функциясы $D \subset \mathbb{C}$ облысында анықталған функция болсын, ал $t = \varphi(w)$ функциясы $f(z)$ функциясының $\mathbb{C}_w$ мәндер жиынында анықталған аналитикалық функция болсын дейік. Сонда $t = \varphi[f(z)]$ функциясы D облысында аналитикалық функция болады.

3. Егер $z = x_0 + iy_0$ нүктесінің маңайында $f'(z_0) \neq 0$ болатындай аналитикалық $f(z)$ функциясы анықталса, онда $w_0 = f(z_0)$ нүктесінің маңайында аналитикалық болатын жалғыз кері $z = \varphi(w)$ функциясы анықталады және

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Ескерту. $f(z_0) \neq 0, f: D \subset \mathbb{C}_z \Rightarrow E \subset \mathbb{C}_w$ шартынан кері функцияның жалғыздығы шықпайды. Мысалы, бүкіл $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығында $(e^z)' = e^z$, бірақ кері $\ln z$ функциясы көпмәнді. Демек 3 – қасиет төңіректік сипаттаманы көрсетеді.

4. Егер $w = f(z)$ функциясы $G \subset \mathbb{C}$ облысында аналитикалық, ал оның шекарасында үзіліссіз болса, онда $|f(z)|$ өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін тек шекаралық нүктелердің бірінде қабылдайды (модульдің максимумдік қағидасы).

5. Егер $w = f(z): \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$ функциясы бүкіл комплекс жазықтығында аналитикалық және шенелген болса, онда $f(z) = \text{const}$.

Аналитикалық функцияны оның жорамал немесе нақты бөлігі бойынша қалпына келтіру

Бір байланысты $D \subset \mathbb{C}_z$ облысында гармониялық $u(x, y)$ функциясы берілсін дейік. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитикалық функциясын қалпына келтіру (табу) үшін алдымен оның жорамал бөлігі $v(x, y)$ функциясын табуымыз керек. $v(x, y)$ функциясының толық дифференциалын берілген $u(x, y)$ функциясының дербес туындылары арқылы ашып жазайық:

$$dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Артынша тұрақтыға дейінгі дәлдікпен

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

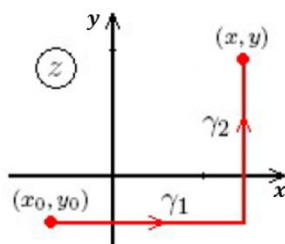
функциясының өзін табайық, мұнда интеграл D облысында жататын $A(x_0, y_0)$ нүктесінен $B(x, y)$ нүктесіне дейін кез келген құрама-тегіс қисық бойынша алынады. A нүктесі ретінде

$u(x, y)$ функциясы және оның $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындылары

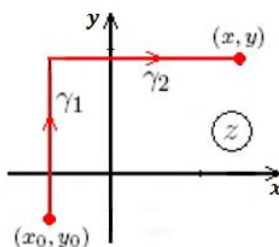
үзіліссіз болатындай кез келген нүктені алуға болады. Егер интегралдау жолы ретінде координаталар осьтеріне параллель сынық буындарды алсақ, онда жоғарыдағы функцияны келесі формулалардың біріне әкелуге болады:

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) dy + C \quad (2.9 - \text{сурет}),$$

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) dx + C \quad (2.10 - \text{сурет}).$$



2.9-сурет



2.10-сурет

Сонымен қатар біз тұрақтыға дейінгі дәлдікпен аналитикалық функцияның өзін қалпына келтірдік.

Ескерту. Егер D облысы көпбайланысты болса, онда жоғарыдағы интегралдар көпмәнді $v(x, y)$ функциясын анықтауы мүмкін.

Мысал. $u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 > 0$ функциясы гармониялық функция болатынын дәлелдейік. Сонан соң $u(x, y)$ функциясын қайсыбір $f(z)$ функциясының нақты бөлігі деп санап, аналитикалық $f(z)$ функциясын табайық.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

дербес туындыларын табамыз. Сонда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, демек

$u(x, y)$ функциясы гармониялық функция.

Енді берілген $u(x, y)$ функциясына түйіндес гармониялық $v(x, y)$ функциясының толық дифференциалын жазайық:

$$dv = \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx + \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy$$

$A(x_0, y_0)$ нүктесі үшін $(0, 1)$ нүктесін таңдап алайық та, ізделініп отырған аналитикалық $f(z)$ функциясының жорамал $v(x, y)$ бөлігін

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) dy + C$$

формуласы бойынша табайық. Сонда

$$v(x, y) = \int_0^x \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} d(x^2 + y^2) + \int_1^y \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) + C,$$

$$f(z) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) + C = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + C,$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + C.$$

Бағыт бойынша туынды

$f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде дифференциалданады дейік.

Сонда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z).$$

$\Delta z = |\Delta z| e^{i\varphi}$ полярлық көрсетілімін пайдаланайық, демек

$$\Delta \bar{z} = \overline{\Delta z} = |\Delta \bar{z}| e^{i\bar{\varphi}} = |\Delta z| e^{-i\varphi} = \Delta z e^{-2i\varphi},$$

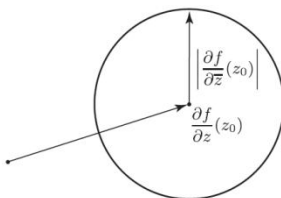
және жоғарыдағы формула келесі түрде жазылады

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-2i\varphi} \right) \Delta z + o(\Delta z).$$

Теңдіктің екі бөлігін де Δz -ке бөлейік және $\arg \Delta z = \varphi = \text{const}$ бекітілген мәнінде Δz -ті нөлге ұмтылдырып шекті табайық

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \arg \Delta z = \varphi}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) e^{-2i\varphi} = f'_{\varphi}(z_0).$$

Бұл шектің бар болуы, $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінде дифференциалдануынан шығады және оны $f(z)$ функциясынан ϕ бағыты бойынша алынған дербес туындысы деп атайды (2.11 - сурет).



2.11-сурет

Жаттығулар

Келесі функциялар аналитикалық бола ма?

1.	a) $w = z^2$;	б) $w = ze^z$;	в) $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$;	г) $w = \operatorname{Im} z$.
2.	a) $w = z^4 \bar{z}$;	б) $w = \sin z$;	в) $w = z \operatorname{Re} \bar{z}$;	г) $w = \operatorname{Im} \bar{z}$.
3.	a) $w = z^2 \bar{z}$;	б) $w = \bar{z} e^z$;	в) $w = z^2 \operatorname{Im} z$;	г) $w = \operatorname{Re} z $.
4.	a) $w = z $;	б) $w = \ln z$;	в) $w = z^2 - e^{\bar{z}}$;	г) $w = \operatorname{Re} z$.
5.	a) $w = \bar{z}^2 \bar{z}$;	б) $w = \sin \bar{z}$;	в) $w = \operatorname{Im} \bar{z}$;	г) $w = e^{ z }$.

$f(z, \bar{z})$ аналитикалық функциясын оның $u(z, \bar{z})$ нақты немесе жорамал бөлігі бойынша қалпына келтір.

6. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0$.

7. $v(x, y) = 2xy + y, f(0) = 1$.

8. $v(x, y) = e^{-y} \cos x, f(0) = 1$.

9. $u(x, y) = -2xy - 2y, f(0) = i$.

$$10. v(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y), f(0) = 0.$$

$$11. u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + x, f(1) = 2.$$

$$12. v(x, y) = 2xy - 2y, f(0) = 1.$$

$$13. u(x, y) = 1 - \sin y \cdot e^x, f(0) = 1 + i.$$

$$14. v(x, y) = e^x \cos y, f(0) = 1 + i.$$

Комплекс айнымалы функцияның интегралы Қисық сызықты интегралға келтіру. Қасиеттері

$D \subset \mathbb{C}_z$ облысында анықталған бірімәнді $f(z)$ функциясын қарастырайық: z_0 бастапқы және z соңғы нүктелері D облысында жататын құрама-тегіс бағдарланған Γ қисығы берілсін дейік. Γ қисығын $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = z$ нүктелерінің көмегімен n элементар доғаларға бөлейік. Бөлу нүктелерін нөмірлеу z_0 нүктесінен басталып, $z_n = z$ нүктесінде аяқталсын. Әрбір z_k, z_{k+1} элементар доғасынан ξ_k нүктелері таңдап алынсын. Оның үстіне

$$\sigma = \max_k |z_{k+1} - z_k|$$

делік.

Анықтама. Егер $\sigma \rightarrow 0$ ұмтылғанда ξ_k нүктелерін таңдауға және Γ қисығының бөліну тәсіліне тәуелсіз

$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k)$ қосындысының шегі бар болса, онда

бұл шек $f(z)$ функциясынан Γ қисығы бойымен алынған интегралы деп аталады және $\int_{\Gamma} f(z) dz$ арқылы белгіленеді.

Теорема. Егер Γ құрама-тегіс қисық, ал

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функциясы құрама-үзіліссіз функция болса, онда $\int_{\Gamma} f(z) dz$

интегралы қашанда бар және

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Демек $f(z)$ функциясынан Γ қисығы бойымен алынатын интегралды есептеу екінші ретті $\int_{\Gamma} u dx - v dy, \int_{\Gamma} v dx + u dy$ қисық сызықтық интегралдарын есептеуге келтіріледі.

Комплекс айнымалы бойынша алынған интегралдың негізгі қасиеттері

$$1) \int_{\Gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) dz; \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

$$2) \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz; \text{ мұнда } \Gamma_1 + \Gamma_2$$

таңбасы Γ_1 және Γ_2 доғаларынан құралған қисықты белгілейді;

$$3) \int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma_-} f(z) dz; \text{ мұнда } \Gamma_- \text{ қисығының бағдары}$$

Γ қисығының бағдарына қарама – қарсы;

$$4) \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| dz \leq M \cdot l; \text{ мұнда } M = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|, l$$

— Γ қисығының ұзындығы.

Ескерту. Егер Γ қисығы $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ (мұнда $z(t) = x(t) + iy(t)$) параметрлік теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Жордан қисығы

$\alpha \leq t \leq \beta$ кесіндісінде өзгертін нақты t айнымалысының нақты үзіліссіз $x(t)$, $y(t)$ функциялары берілсін дейік. Сонда $x = x(t)$, $y = y(t)$ теңдіктері үзіліссіз қисықтың параметрлік көрсетілімдерін береді.

Егер t параметрінің әртүрлі екі мәніне (кесіндінің $t = \alpha$ және $t = \beta$ шеткі нүктелерін есептемегенде) қисықтың әртүрлі екі мәні сәйкес келсе, ондай үзіліссіз қисықты Жордан қисығы деп атайды.

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

теңдігі үзіліссіз қисықтың комплекс түрдегі жазылуын көрсетеді. $z(\alpha) = z(\beta)$ теңдігі Жордан қисығының тұйықталғанын білдіреді.

Кеңейтілген комплекс жазықтығын тұйық Жордан қисығы шекаралары ортақ екі облысқа бөледі: ақырсыз қашық нүкте кірмейтін ішкі және ақырсыз қашық нүктені қамтитын сыртқы облысқа.

Мысал. $I = \int_{\Gamma} z \cdot \operatorname{Re} z dz$ интегралын есепте, мұнда

$\Gamma: y = 2x^2$ параболасына тиісті $A(0,0)$ және $B(1,2)$ нүктелерін қосатын доға. Сонда

$$I = \int_{\Gamma} x^2 dx - xy dy + i \int_{\Gamma} x^2 dy + xy dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx - 8 \int_0^1 x^4 dx + i \int_0^1 4x^3 dx + i \int_0^1 2x^3 dx = -\frac{19}{15} + \frac{3}{2}i.$$

Мысал. $I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ интегралын есепте, мұнда

$\Gamma: |z - z_0| = R$ центрі z_0 нүктесінде жататын радиусы R -ға тең шеңбер. Шеңберді айналу сағат тілінің қозғалысына қарама-қарсы.

Шешуі. Шеңбердің $z(t) = z_0 + Re^{it}$, $0 < t < 2\pi$ параметрлік теңдеуін жазайық, сонда берілген интеграл

$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$ формуласы бойынша есептелінеді:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}}{Re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Мысал. $I = \oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz$ интегралын есепте, мұнда

n -бүтін, $n \neq -1$, $\Gamma: |z - z_0| = R$ немесе

$$z(t) = z_0 + Re^{it}, 0 < t < 2\pi.$$

Шешуі.

$$I = i \int_0^{2\pi} R^n e^{nit} \cdot R e^{it} dt = i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i R^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{i2\pi(n+1)} - 1) = 0.$$

Мысал. $I = \int_0^i z \sin z$ интегралын есепте.

Шешуі. $f(z) = z$ және $g(z) = \sin z$ функциялары $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығында аналитикалық функциялар. Бөліктеп интегралдау формуласын қолданайық:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^i z \sin z dz = - \int_1^i z (\cos z)' dz = -z \cos z \Big|_1^i + \int_1^i \cos z dz = \\ &= -i \cos i + \cos 1 + \sin z \Big|_1^i = -i \cos i + \cos 1 + \sin i - \sin 1 = \\ &= \cos 1 - \sin 1 - i(\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 - \sin 1 - ie^i. \end{aligned}$$

Жаттығулар

Келесі интегралдарды есепте:

1. $\int_{\Gamma} z dz$, мұнда Γ - a нүктесін b нүктесімен қосатын қисық.

2. $\int_{\Gamma} |z| dz$, мұнда $\Gamma - z = 2 - i$ нүктесінің радиус - векторы.

3. $\int_{\Gamma} z \cdot \operatorname{Re}(\sin z) dz$, мұнда $\Gamma - z = \frac{\pi}{2}$ және $z = \frac{\pi}{2} + i$

нүктелерін қосатын түзу.

4. $\int_{\Gamma} \bar{z}^2 |z| dz$, мұнда $\Gamma - |z| = 2, \operatorname{Re} z \geq 0$ шеңберінің доғасы.

5. $\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(z + z^2) dz$, мұнда $\Gamma - y = 2x^2, x \in [0, 1]$

параболасының доғасы.

6. $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, мұнда $\Gamma - |z| = \rho (\operatorname{Im} z > 0)$ жоғарғы жарты

шеңбер және $\sqrt{z}$ функциясының $\sqrt{1} = 1$ болатындай тармағы таңдалды.

7. $\int_{\pi/2}^i \frac{1 - \cot z}{\sin^2 z} dz$.

$$8. \int_{\Gamma} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + 5z - 6}, \text{ мұнда } \Gamma: |z + i| = 3.$$

$$9. \int_{\Gamma} \frac{\cot(z + i)}{z^2 + 1} dz, \text{ мұнда } \Gamma: |z - i| = 1.$$

$$10. \int_{\Gamma} \frac{e^{\frac{1}{z+2}}}{z^3 - z^2 + 4z - 4} dz, \text{ мұнда } \Gamma: |z - 2i| = 1.$$

Бірбайланысты облыс үшін Коши теоремасы. Интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігі

Жалпы жағдайда $\int_{AB} f(z) dz$ интегралының мәні тек бастапқы және соңғы нүктелерге ғана емес, оның интегралдау жолының формасына (тұрпатына) да тәуелді. Қандай шарттар орындалғанда $\int_{AB} f(z) dz$ интегралының мәні интегралдау жолының формасына тәуелсіз болады? Бұл сұрақтың жауабы келесі теоремада қарастырылады.

Коши теоремасы. Егер бірбайланысты $D \subset \mathbb{C}_z$ облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда осы функциядан толықтай D облысында жататын қайсыбір тұйық құрама-тегіс контур бойымен алынған интеграл нөлге тең.

Дәлелдеуі. Бір байланысты D облысында $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы аналитикалық болсын делік. Демек осы облыста $u(x, y)$ және $v(x, y)$

функцияларының үзіліссіз $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ дербес

туындылары анықталады. Γ арқылы D облысында толықтай жататын кез келген тұйық контурды белгілейік. Ал

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} u dx - v dy + i \oint_{\Gamma} v dx + u dy$$

интегралының мәнін

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

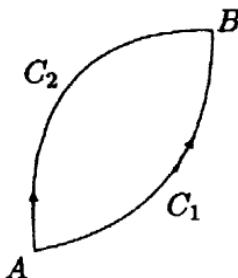
түрінде жазылатын Грин формуласының көмегімен табайық. Сонда

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = - \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Теоремада қабылданған шарттар бойынша $f(z)$ функциясы аналитикалық функция, демек $f(z)$ үшін Коши – Риман шарттары $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ орындалады. Олай болса осы шарттардың себебінен $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Теорема дәлелденді.

Ескерту (Морер теоремасы). Қандай да бір мағынада осы теоремаға кері тұжырымның дұрыстығын атап өтейік. Егер $f(z)$ функциясы бірбайланысты D облысында үзіліссіз және D облысында жататын қайсыбір құрама-тегіс Γ контуры үшін $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ шарты орындалатын болса, онда $f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық функция.

Теорема. Егер бірбайланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда $I = \int_{AB} f(z) dz$ интегралы D облысына тиісті кез келген A және B нүктелері үшін AB интегралдау жолының формасына тәуелсіз.



2.12-сурет

Дәлелдеуі. Шынында да, егер Γ_1, Γ_2 доғаларының бастапқы A және соңғы B нүктелері өзара беттесетін болса, онда олар тұйықталады (2.12 - сурет). Демек Коши теоремасы бойынша

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz - \oint_{\Gamma_2} f(z) dz = 0.$$

Бұдан

$$\oint_{\Gamma_1} f(z) dz = \oint_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Егер $\int_{AB} f(z) dz$ интегралы интегралдау жолының формасына тәуелсіз болса, онда ол

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_A^B f(z) dz$$

түрінде белгіленеді.

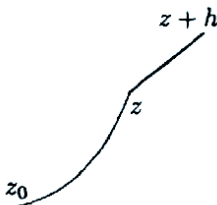
Аналитикалық функция үшін оның алғашқы функциясының бар болуы. Ньютон – Лейбниц формуласы

Теорема. Бірбайланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функциясы берілсін дейік. Онда осы облыста оның $F'(z) = f(z)$ теңдігі орындалатындай алғашқы функциясы табылады.

Дәлелдеуі. $\int_{AB} f(z) dz$ интегралы интегралдау жолының формасына тәуелсіз тек осы облыста жататын бастапқы $A(z_0)$ және соңғы $B(z)$ нүктелерінің орындарына тәуелді. Сондықтан бекітілген z_0 нүктесін айнымалы z нүктесімен қосатын кез келген қисық бойынша алынған интеграл тек z -ке тәуелді, демек z -тің функциясы. Белгілеуі: $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$.

$F'(z) = f(z)$ теңдігін дәлелдейік. Ол үшін z нүктесіне h өсімшесін берелік (2.13 - сурет). $[z, z+h]$ кесіндісін z және $z+h$ нүктелерін қосатын жол ретінде таңдап алайық. Одан әрі туындының анықтамасына сүйене отырып $h \rightarrow 0$ ұмтылғандағы

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$ шек $f(z)$ функциясын беретінін көрсетейік.



2.13-сурет

Алдымен $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)$ айырымының ақырсыз

аз шама болатынын көрсетейік.

$$\begin{aligned} 1 \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\xi \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(\xi) - f(z)| ds. \end{aligned}$$

Мұнда ds доға ұзындығының дифференциалы және

$$f(z) = f(z) \cdot 1 = f(z) \cdot \frac{h}{h} = \frac{f(z)}{h} \int_z^{z+h} d\xi = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\xi.$$

$f(z)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $|\xi - z| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратындай $\delta > 0$ саны табылып, $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Мұнда $\xi \in [z, z+h]$ кесіндісіне тиісті кез келген нүкте, демек $|z - \xi| = |\xi - z| \leq |h|$. Олай болса $\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon |h| = \varepsilon$,

яғни $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$. Демек $F'(z) = f(z)$.

Теорема дәлелденді.

Келесі қарапайым екі теореманы дәлелдеу студенттердің өзіндік жұмысына ұсынылады.

Теорема. Егер қайсыбір D облысында аналитикалық функция болатын $f(z)$ үшін $f'(z) = 0$ болса, онда осы облыста $f(z) = \text{const}$.

Теорема. Бір аналитикалық функцияның кез келген екі алғашқы функциясы бір-бірінен тұрақты бойынша ажыратылады.

Анықтама. $f(z)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиынтығын оның анықталмаған интегралы деп атайды. Белгілеуі: $\int f(z) dz$. Сонда

$$\int f(z) dz = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C.$$

Теорема. Бірбайланысты D облысында $f(z)$ аналитикалық функция болсын делік. Сонда осы облысқа тиісті кез келген z_1 және z_2 нүктелері үшін Ньютон – Лейбниц формуласын қолдануға болады, яғни $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi) d\xi = F(z_2) - F(z_1)$.

Дәлелдеуі. $f(z)$ функциясы үшін $F(z) = \int_{z_1}^z f(\xi) d\xi + C$

оның алғашқы функциясы болады.

$F(z_1) = C, F(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(\xi) d\xi$ мәндерін табайық. Бұдан

$\int_{z_1}^{z_2} f(\xi) d\xi = F(z_2) - F(z_1)$ және оны Ньютон – Лейбниц формуласы деп атайды. Ол бірбайланысты облыста аналитикалық функциядан алынатын интегралдың есептеуін жеңілдетеді.

Сондай-ақ егер бірбайланысты D облысында $f(z), g(z)$ аналитикалық функциялар, ал Γ осы облысқа тиісті z_1, z_2 нүктелерін қосатын кез келген қисық болса, онда келесі бөліктеп интегралдау формуласы дұрыс

$$\int_{\Gamma} f(z) g'(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dg(z) = f(z) g(z) \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z) f'(z) dz.$$

Мысал. $z_1 = 0$ және $z_2 = i$ нүктелерін қосатын қайсыбір қисық бойынша $f(z) = (z-i)e^{-z}$ функциясының интегралын табайық.

Шешуі. Бұл функция бүкіл $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығында аналитикалық функция. Бөліктеп интегралдау және Эйлер формулаларын пайдаланып, интегралдың мәнін есептейік

$$\begin{aligned} \int_0^i (z-i)e^{-z} dz &= - \int_0^i (z-i) d(e^{-z}) = -(z-i)e^{-z} \Big|_0^i + \int_0^i e^{-z} dz = \\ &= -(z-i)e^{-z} \Big|_0^i - e^{-z} \Big|_0^i = -i - e^{-i} + 1 = 1 - \cos 1 - i(1 - \sin 1). \end{aligned}$$

Мысал. $\int_{\Gamma} \frac{(1+z)}{z^2 - z} dz$ интегралын есепте, мұнда $\Gamma: |z| < \frac{1}{2}$.

Бұл интегралды Коши теоремасын пайдаланып есептеуге бола ма?

Шешуі. Егер $\Gamma: |z| = \frac{1}{2}$ шеңбері болса, онда Коши

теоремасын қолдануға болмайды, өйткені $|z| < \frac{1}{2}$ дөңгелегінің

ішінде $f(z) = \frac{1+z}{z^2 - z}$ функциясының үзілісті нүктесі жатыр.

Егер қисық $z_1 = 0$ және $z_2 = 1$ үзіліс нүктелерінің бірі арқылы өтетін болса, онда интегралдың мәні табылмайтынын байқауға болады, өйткені интеграл астындағы функцияның мәні шексіздікке тең.

Көпбайланысты облыс үшін Коши теоремасы

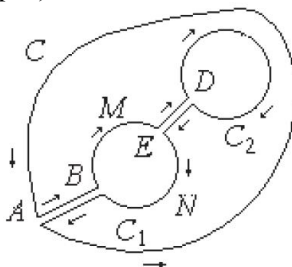
Бір – бірінен сырт жататын $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ тұйық контурларын жай тұйық құрама-тегіс Γ контуры қамтысын делік.

Теорема. Егер $f(z)$ функциясы Γ контуры мен $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ контурларының арасындағы облыста және бүкіл контурлардың өздерінде аналитикалық функция болса, онда

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{m=1}^n \oint_{\Gamma_m} f(z) dz .$$

Мұнда және одан әрі тұйық құрама-

тегіс Γ контурын айналу сағат тілінің бағытына қарама-қарсы жүргізіледі (2.14 - сурет).



2.14-сурет

Дәлелдеуі. $n = 2$ жағдайымен шектелейік. Сонда үшбайланысты облыс қарастырылады. Келесі қадамда үшбайланысты облысты бірбайланысты облысқа айналдыру үшін АВ және ED тіліктерін жүргізейік. Нәтижесінде бірбайланысты облыс аламыз. Алынған бірбайланысты облыста $f(z)$ – аналитикалық функция. Демек Коши теоремасын қолдануға болады:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{BME} f(z) dz + \int_{ED} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \\ + \int_{DE} f(z) dz + \int_{ENB} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0.$$

Немесе
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz + \oint_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Өйткені
$$\int_{AB} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0, \int_{ED} f(z) dz - \int_{DE} f(z) dz = 0,$$

ал

$$\int_{BME} f(z) dz + \int_{ENB} f(z) dz = -\oint_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

Теорема дәлелденді.

Кошидің интегралдық формуласы

Теорема. D облысы құрама-тегіс Γ контурымен шектелген делік. Егер $f(z)$ функциясы D облысында және Γ контурының өзінде де аналитикалық функция болса, онда оның $z \in D$ нүктесіндегі мәні

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Кошидің интегралдық формуласы арқылы анықталады.

Дәлелдеуі. Кошидің интегралдық формуласын дәлелдеу үшін $\varphi(\tau) = \frac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z}$ функциясын құрайық. Бұл функция z нүктесін сесептегенде Γ контурының бүкіл ішкі нүктелерінде және контурдың өзінде де аналитикалық функция

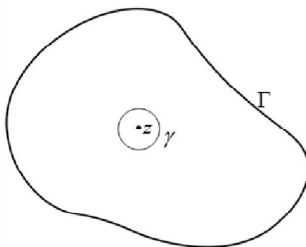
болады, ал $\tau = z$ нүктесінде $\varphi(\tau)$ функциясы анықталмайды.

Алайда $\tau \rightarrow z$ ұмтылғанда $\varphi(\tau) \rightarrow f'(z)$, өйткені

$$\lim_{\tau \rightarrow z} \varphi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow z} \frac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z} \Rightarrow f'(z).$$

Егер біз $\varphi(\tau)$ функциясының $\tau = z$ нүктесіндегі мәнін $\varphi(z) = f'(z)$ теңдігі арқылы анықтайтын болсақ, онда ол Γ контурымен шектелген тұйық облыста үзіліссіз функция болады. Демек үзіліссіз функциялардың қасиеттері бойынша $\varphi(\tau)$ функциясы қарастырып отырған облыста қайсыбір оң M санынан артпайды, яғни $|\varphi(\tau)| < M$.

Одан әрі центрі z нүктесінде радиусы ρ -ға тең γ дөңгелегі қарастырылып отырған D облысында толықтай жатсын делік (2.15-сурет).



2.15-сурет

Күрделі $\Gamma + \gamma$ контуры үшін Коши теоремасы

$$\oint_{\Gamma} \varphi(\tau) d\tau = \oint_{\gamma} \varphi(\tau) d\tau$$

теңдігімен анықталады.

Комплекс айнымалы үзіліссіз функциядан құрама-тегіс контур бойынша алынған интегралды бағалау ережесі бойынша

$$\left| \oint_{\gamma} \varphi(\tau) d\tau \right| \leq 2\pi \rho M$$

теңсіздігін аламыз.

Бұл арақатынастан $\rho \rightarrow 0$ ұмтылдырып шекке көшетін болсақ, онда

$$\oint_{\gamma} \varphi(\tau) d\tau = 0 \text{ немесе } \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z} d\tau = 0,$$

Бұдан

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z} d\tau = f(z) \oint_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Бұл жерде $\oint_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - z} = 2\pi i$, өйткені

$$\tau - z = |\tau - z| e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}, d\tau = i\rho e^{i\varphi} d\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \varphi = \arg(\tau - z).$$

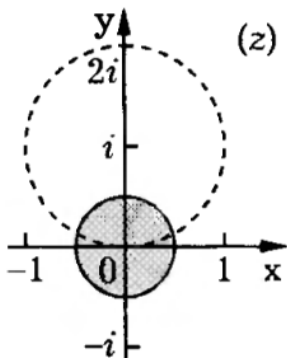
Олай болса $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau$. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Γ тұйық контурының орнына бірнеше ішкі контурлардан және оларды оларды қамтитын тұйық контурдан тұратын күрделі контурларды да қарастыруға болады.

Кошидің интегралдық формуласын контурлық интегралдарды есептеу үшін пайдалануға болады.

Мысал. $\oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$ интегралын есептейік, мұнда Γ :

$$\text{а) } |z| = \frac{1}{2}; \text{ б) } |z - i| = 1; \text{ в) } |z| = 2$$



2.16-сурет

а) $|z| \leq \frac{1}{2}$ дөңгелегінде $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ аналитикалық функция (2.16-сурет). Коши теоремасы бойынша ізделініп отырған интеграл нөлге тең.

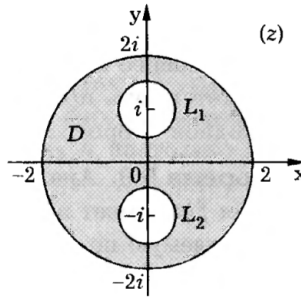
б) $|z - i| = 1$ шеңберімен шектелген облыста $f(z)$ функциясының бір $z = i$ ерекше нүктесі жатады. Сондықтан интеграл алдындағы $f(z)$ функциясын

$$\frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{1}{z - i} \frac{e^{iz}}{z + i}$$

түріне келтіреміз. Сонда $\frac{e^{iz}}{z + i}$ функциясы $|z - i| \leq 1$ дөңгелегінде аналитикалық функция болады. Кошидің интегралдық формуласы бойынша

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z - i} \frac{e^{iz}}{z + i} dz = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z + i} \Big|_{z=i} = \frac{\pi}{e}.$$

в) $|z| < 2$ дөңгелегінде $f(z)$ функциясының екі $z_1 = i$ және $z_2 = -i$ ерекше нүктелері жатыр. Бұл ерекше нүктелерді бір-бірімен қиылыспайтын, бірақ $|z| < 2$ дөңгелегінен шығып кетпейтін L_1 және L_2 дөңгелектерімен қоршаймыз (2.17-сурет).



2.17-сурет

Сонда интеграл астындағы функция суретте көрсетілгендей үшбайланысты D облысында аналитикалық функция болады. Көпбайланысты облыс үшін Коши теоремасы бойынша

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \oint_{L_1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz + \oint_{L_2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz.$$

$$\oint_{L_1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{e}, \text{ ал}$$

$$\oint_{L_2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \oint_{L_2} \frac{1}{z+i} \frac{e^{iz}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z-i} \Big|_{z=-i} = -\pi e.$$

Ақыр аяғында

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi}{e} - \pi e = -2\pi \frac{e - e^{-1}}{2} = -2\pi \sinh 1.$$

Коши типтес интеграл

$\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығында тұйық немесе тұйықталмаған қандай да бір құрама-тегіс Γ контуры және онда үзіліссіз болатын комплекс аргументті $f(t)$ функциясы берілсін делік. Сонда

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt, \quad z \notin \Gamma \quad (2.20)$$

қисық сызықты интегралын Коши типтес интеграл деп атайды, мұнда $z = x + iy$ – комплекстік координата.

Теорема. Γ тұйық контурының нүктелерін есептемегенде (2.20) Коши типтес интегралы бүкіл $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығында аналитикалық функция болады және оның жоғарғы ретті туындылары

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^{n+1}} dt \quad (2.21)$$

формуласы бойынша табылады.

Дәлелдеуі. Теореманың дәлелдеуін $n = 1$ жағдайы үшін жүргізейік. Демек $F(z)$ – аналитикалық функция, ал оның туындысы

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t - z)^2} dt$$

формуласымен анықталатынын дәлелдеуіміз керек. Ол үшін

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt - \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}$$

айырымын бағалайық. Мұнда Δz шамасы Γ контурымен шектелген D облысында $z + \Delta z \in D$ тиістілігі орындалатындай етіп таңдалынады. Сонда

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt - \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt - \frac{1}{\Delta z} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z-\Delta z} dt + \frac{1}{\Delta z} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{\Delta z(t-z-\Delta z)} + \frac{1}{\Delta z(t-z)} \right| |f(t)| |dt| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|\Delta z| |f(t)|}{|t-z-\Delta z| |t-z|^2} ds, \end{aligned}$$

мұнда ds – қисық доғасы ұзындығының дифференциалы.

Γ контурының t нүктелері мен z нүктесі арасындағы арақашықтықтардың ең минимумын $2d$ арқылы белгілейік. Сонда Γ қисығының бүкіл нүктелері үшін

$$|t-z| > 2d, |t-z-\Delta z| \geq ||t-z| - |\Delta z|| > 2d - d = d > 0$$

теңсіздіктері алынады.

Теореманың шарты бойынша $f(t)$ функциясы Γ контурында үзіліссіз, олай болса осы контурда $|f(t)| < M < \infty$.

Демек $\Delta < \frac{ML}{4\pi d^3} \cdot |\Delta z|$, мұнда L – Γ контурының ұзындығы.

Бұдан $|\Delta z| \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\Delta \rightarrow 0$ шығады, яғни

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt.$$

Кез келген n үшін (2.21) формуланың дұрыстығын математикалық индукция әдісін қолдана отырып дәлелдеуге болады.

Салдар. Тұйықталған $\bar{D}$ облысында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясының осы облыстың ішкі нүктелерінде барлық жоғарғы ретті туындылары табылады және бұл туындылар

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt,$$

мұнда Γ тұйық контуры D облысының шекарасы. Шынында да, егер $f(z)$ функциясы $\bar{D}$ облысында аналитикалық функция болса, онда ол тұйық Γ контурында үзіліссіз.

Демек жоғарыда қарастырылған теорема бойынша оның жоғарғы ретті туындыларын $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$ интегралының таңбасының ішінен z параметрі бойынша біртіндеп дифференциалдау арқылы алуға болады.

Сонымен аналитикалық функцияның туындысы да аналитикалық функция болады. Бұл - комплекс айнымалы функцияның нақты айнымалы функциядан маңызды айырмашылығының бірі.

Ескерту. Теорема тұйықталмаған контур үшін де дұрыс.

Жалпы жағдайда, егер Γ контуры құрама-тегіс қисық (тұйық немесе тұйықталмаған), ал $\varphi(t)$ функциясы осы контурда анықталған үзіліссіз функция болса, онда

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^k} dt, k \in \mathbb{N} \quad (2.22)$$

интегралы да Коши типтес интегралдың қатарына жатады.

Алдымен Γ контурының бойында жатпайтын бүкіл z мәндері үшін (2.22) теңдік арқылы анықталатын $\Phi(z)$ функциясының аналитикалық функция болатынын көрсетейік. Ол үшін мектеп бағдарламасынан белгілі

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1})$$

формуласын пайдалана отырып, $\frac{\Phi(z_1) - \Phi(z)}{z_1 - z}$ өрнегін

түрлендірейік:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z)}{z_1 - z} &= \frac{\int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{(t - z_1)^k} - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{(t - z)^k}}{z_1 - z} = \int_{\Gamma} \varphi(t) \frac{\frac{1}{(t - z_1)^k} - \frac{1}{(t - z)^k}}{z_1 - z} = \\ &= \int_{\Gamma} \varphi(t) \frac{(t - z)^k - (t - z_1)^k}{(z_1 - z)(t - z_1)^k(t - z)^k} dt = \\ &= \int_{\Gamma} \varphi(t) \frac{(t - z)^{k-1} + (t - z)^{k-2}(t - z_1) + \dots + (t - z_1)^{k-1}}{(t - z_1)^k(t - z)^k} dt. \end{aligned}$$

Одан әрі z нүктесін бекітейік те

$$\psi(t, z_1) = \frac{(t - z)^{k-1} + (t - z)^{k-2}(t - z_1) + \dots + (t - z_1)^{k-1}}{(t - z_1)^k(t - z)^k}$$

белгілеуін енгізейік. Сонда

$$\frac{\Phi(z_1) - \Phi(z)}{z_1 - z} = \int_{\Gamma} \varphi(t) \psi(t, z_1) dt$$

теңдігі алынады. Мұнда $\psi = \psi(t, z_1)$, $t \in \Gamma$, $z_1 \notin \Gamma$ функциясы үзіліссіз функция.

Егер z_1 нүктесі Γ контурымен ортақ нүктелері болмайтын центрі z нүктесінде жататын дөңгелекке тиісті болса, онда

$\psi = \psi(t, z_1)$, $t \in \Gamma$ функциясы өзінің аргументтеріне қатысты бірқалыпты үзіліссіз функция болады. Бұдан $z_1 \rightarrow z$ ұмтылғанда $\psi(t, z_1) \rightarrow \psi(t, z)$ шығады, өйткені Γ контуры t қатысты бірқалыпты. Шекке көше отырып,

$$\lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z)}{z_1 - z} = \int_{\Gamma} \varphi(t) \psi(t, z) dt$$

теңдігін аламыз. $\psi(t, z) = \frac{k}{(t-z)^{k+1}}$ теңдігінің көмегімен

$$\frac{k\varphi(t)}{(t-z)^{k+1}} \text{ өрнегін } \frac{k\varphi(t)}{(t-z)^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\varphi(t)}{(t-z)^{k+1}} \right] \text{ теңдігі арқылы}$$

анықтайық. Нәтижесінде

$$\Phi'(z) = k \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{k+1}} dt = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\varphi(t)}{(t-z)^k} \right] dt \quad (2.22)$$

формуласына келеміз.

Сонымен Γ контурының нүктелерін есептемегенде $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығының әрбір нүктесінде $\Phi(z)$ функциясының туындысы табылады. (2.23) формуланы кері жазайық:

$$\Phi'(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\varphi(t)}{(t-z)^k} \right] dt = k \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{k+1}} dt \quad (2.23)$$

Бұл теңдік интеграл таңбасы астындағы өрнекті дифференциалдау арқылы $\Phi(z)$ функциясының туындысын

табуға болатынын көрсетеді. $\Phi'(z) = k \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{k+1}} dt$ теңдігі

$\Phi'(z)$ функциясының қайтадан (2.22) типке жататынын көрсетеді, сондықтан оған $\Phi(z)$ функциясы туралы айтылған пайымдаулардың барлығын жатқызуға болады. Бұдан Γ контурының бойында жатпайтын нүктелер үшін (2.22) формула бойынша анықталатын функцияның барлық жоғары ретті туындыларын интеграл астындағы өрнекті біртіндеп дифференциалдау арқылы табуға болады. Нәтижесінде

$$\Phi^{(n)}(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{\varphi(t)}{(t-z)^k} \right] dt = k(k+1) \dots (k+n-1) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{k+n}} dt \quad (2.24)$$

формуласын аламыз.

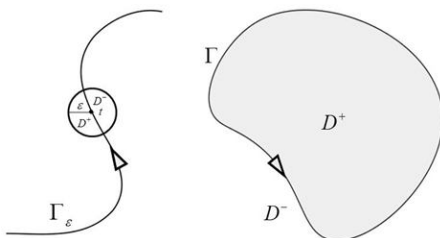
Келесі қадамда Коши типтес интегралмен қатар

$$V_p(t) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, t \in L \quad (2.25)$$

қисық сызықты интегралын қарастырайық. Егер мұнда Γ контуры тұйықталмаған болса, онда t нүктесі контурдың шеткі нүктелері емес деп санайық. Риман мағынасында бұл интеграл жинақталмайды. Алайда қайсыбір ерекше мағынада, атап айтқанда Кошидің бас мәні бойынша (2.26) интеграл жинақталады (есептеуге болады).

Айтылған пайымдауды қалай түсінеміз? Соған тоқталайық. Ол үшін $t \in \Gamma$ нүктесін центр етіп алып, Γ контурын тек екі нүктеде қиып өтетіндей радиусы өте кіші шеңбер жүргізейік және Γ контурынан жүргізілген шеңбердің ішінде жататын доғасын алып тастайық (2.18-сурет). L контурының қалған

бөлігін Γ_ε арқылы белгілейік те, $\Phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ интегралын енгізейік.



2.18-сурет

Анықтама. Егер

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

шегі табылатын болса, онда бұл шек (2.26) интегралдың Коши бойынша алынған бас мәні деп аталады.

Әрі қарай контурдың (тұйық немесе тұйықталмаған) бойында жатпайтын z нүктелері үшін

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt, \quad z \notin \Gamma \quad \text{теңдігімен анықталған } \Phi(z)$$

функциясын және оның $z \rightarrow t$ ұмтылғандағы шегін қарастырайық.

Алдымен контурдың оң және сол бағыттарын анықтайтын анықтамаларды бере кетейік.

1. Тұйық контур үшін. Контурды айналғанда оның ішкі облысы үнемі сол жақта қалатын болса, онда бұл бағыт контурдың оң бағыты болып саналады.

2. Тұйықталмаған контур үшін. Контурдың шеткі нүктелерінің бірін бастапқы нүкте ретінде қабылдайық. Сонда осы нүктеден контурдың доғасының ұзындығы өсетін бағыты оң бағыт болып саналады.

Тұйық контур бүкіл $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығын сыртқы және ішкі деп аталатын екі облысқа бөледі. Бұл облыстарды сәйкес D^+ және D^- таңбалары арқылы белгілейік.

Тұйықталмаған контурдың бойынан кез келген нүктесін алайық та осы нүктені центр етіп алып, контурды тек екі нүктеде ғана қиып өтетін радиусы ε тең өте кіші шеңбер жүргізейік. Сонда t нүктесінің маңайы радиусы ε тең дөңгелек болады. Тұйықталмаған контур бұл дөңгелекті t нүктесінің оң және сол маңайлары деп аталатын екі облысқа бөледі. Тұйықталмаған контурдың оң бағыты бойынша қозғалғанда қарастырылып отырған облыс үнемі сол жақта қалатын болса бұл бөлікті D^+ , ал оң жақта қалатын бөлігін D^- арқылы белгілейік (2.18-сурет).

$z \in D^+$ нүктесі әрқашан D^+ облысында қала отырып, Γ контурының t нүктесіне ұмтылсын делік. Сонымен бірге $\Phi(z)$ функциясы $z \in D^+$ нүктесі $t \in \Gamma$ нүктесіне қандай жолмен ұмтылғанына тәуелсіз нақты $\Phi^+(t)$ шегіне ұмтылатын болса, онда бұл шекті Коши типтес интегралдың сол шектік мәні деп атаймыз. Осы сияқты Коши типтес интегралдың оң шектік мәні де анықталады. Егер Коши типтес интегралдың шектік $\Phi^+(t)$ және $\Phi^-(t)$ мәндері табылатын болса, онда анықтама бойынша

$$\Phi^+(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D^+}} \Phi(z), \quad \Phi^-(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D^-}} \Phi(z).$$

C, C^1 және H функциялар класы

Γ контурында анықталған және үзіліссіз функциялар класын C арқылы белгілейік. Егер контур тұйықталмаған болса, онда контурдың шеткі нүктелерінде функция үзіліссіз деп ұйғарайық. Γ контурында үзіліссіз дифференциалданатын $\varphi(t)$ функциялар класын, яғни контурдың әрбір $t \in \Gamma$ нүктесінде үзіліссіз

$$\varphi'(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t)}{t_1 - t}, t, t_1 \in \Gamma$$

туындысы табылатын функциялар класын C^1 арқылы белгілейік. Тұйықталмаған контурлардың шеткі нүктелерінде де функцияның үзіліссіз туындылары табылады деп ұйғарамыз. Белгілеуі: Γ контурында $\varphi(t) \in C$ немесе $\varphi(t) \in C''$.

Γ контурында $\varphi(t)$ функциясы берілсін және контурдың кез келген $t, t_1 \in \Gamma$ нүктелері үшін

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\mu \quad (0 < \mu < 1) \quad (H)$$

теңсіздігі орындалсын делік, мұнда A – оң тұрақты. (H) теңсіздігін қанағаттандыратын мұндай $\varphi(t)$ функцияларын Γ контурында Гельдер шартын қанағаттандырады деп атайды. Сонымен бірге A оң санын Гельдер тұрақтысы, ал μ -Гельдер көрсеткіші деп атау қабылданған.

Ескерту. Егер $\varphi(t) \in H$ болса, онда $\varphi(t)$ функциясы (H) шарты бойынша үзіліссіз. Демек C класы H класына қарағанда кеңірек.

Гельдер шартын қанағаттандыратын функциялардың кейбір қасиеттерін келтірейік.

1. Егер $\varphi(t)$ функциясының $\Gamma: t = t(s), 0 \leq s \leq L$ тегіс контурындағы туындысы t бойынша шектеулі болса, яғни

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t, t_1 \in \Gamma}} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t)}{t_1 - t} = \varphi'(t) \quad \text{және} \quad |\varphi'(t)| \leq M, t \in \Gamma,$$

онда $\varphi(t)$ функциясы Γ контурында (H) шартын $\mu = 0$ жағдайын қанағаттандырады.

2. Егер $\varphi(t)$ функциясы $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\mu$ шартын Γ контурында $|t_1 - t_2| \leq \delta$ теңсіздігі орындалатындай кез келген t_1 және t_2 нүктелері үшін қанағаттандыратын болса, онда бүкіл Γ контурында $\varphi(t)$ функциясы (Н) шартын $\mu > 0$ жағдайын қанағаттандырады.

3. Γ контурында $\varphi_1(t) \in H(\mu_1)$ және $\varphi_2(t) \in H(\mu_2)$ функциялары берілсін делік. Сонда $\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \in H(\mu)$, $\varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) \in H(\mu)$ және егер $\varphi_2(t) \neq 0$, онда $\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \in H(\mu)$. Мұнда $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$.

Шварц және Пуассонның интегралдық формулалары

$K(R, z_0)$ дөңгелегінде аналитикалық, ал $\overline{K(R, z_0)}$ облысында үзіліссіз болатын $f(z)$ функциясы берілсін делік. $|t - z_0| = R$ шеңберін Γ арқылы белгілейік. Сонда Кошидің интегралдық формуласы бойынша:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in K(R, z_0). \quad (2.26)$$

Анықтама. Жазықтықта центрі координаталар бас нүктесінде жататын радиусы R тең ω шеңбері берілсін делік. Сонда жазықтықта $\overline{OM}$ сәулесінің бойында жататын әрбір $M(x, y)$ нүктесін $|\overline{OM}| \cdot |\overline{OM}^*| = R^2$ теңдігі орындалатындай

$M^*(x^*, y^*)$ нүктесіне түрлендіруді ω шеңберіне қатысты

$I_\omega = I_0^R$ инверсиясы деп атайды.

Сонымен инверсия келесі қасиеттерге ие:

$$1) \frac{z^*}{z} = \frac{|\overrightarrow{OM^*}| e^{i\varphi}}{|\overrightarrow{OM}| e^{i\varphi}} = \frac{|\overrightarrow{OM^*}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{|z^*|}{|z|} \text{ қатынасы оң сан болады;}$$

$$2) |z| \cdot |z^*| = R^2.$$

Бұл шарттарды қанағаттандыратын $M^*(x^*, y^*)$ нүктесі $M(x, y)$ нүктесінің комплекстік координатасы арқылы

$$z^* = \frac{R^2}{|z|^2} z = \frac{R^2}{\bar{z}} \text{ түрінде өрнектеледі.}$$

Осыған ұқсас центрі z_0 нүктесінде жататын инверсия

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - z_0} + z_0 \text{ формуласы арқылы анықталады.}$$

Ескерту. $K(R, z_0)$ дөңгелегінің әрбір ішкі нүктесінің инверсия нүктелері дөңгелектен сырт жатады. Олай болса $\frac{f(z)}{z - z^*}$ функциясы $K(R, z_0)$ дөңгелегінен сырт жатқан облыста аналитикалық функция.

$$\text{Сондықтан } \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z^*} d\tau = 0, \text{ мұнда}$$

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, z \in K(R, z_0) \quad (2.27)$$

(2.28) теңдігінен оның түйіндесіне көшейік. Ол үшін $\tau - z_0 = R e^{i\varphi}$ деп алайық.

$$d\tau = iR e^{i\varphi} d\varphi = i(\tau - z_0) d\varphi,$$

$$\overline{d\varphi} = -i(\overline{\tau} - \overline{z}_0) d\varphi = -\frac{\overline{\tau} - \overline{z}_0}{\tau - z_0} d\tau$$

және

$$\overline{z}^* = \overline{z}_0 + \frac{(\tau - z_0)(\overline{\tau} - \overline{z}_0)}{z - z_0},$$

сонда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} d\tau}{\overline{\tau} - \overline{z}^*} &= - \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} \frac{\overline{\tau} - \overline{z}_0}{\tau - z_0}}{(\overline{\tau} - \overline{z}_0) \left(1 - \frac{\tau - z_0}{z - z_0}\right)} d\tau = \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} (z - z_0)}{(\tau - z_0)(\tau - z)} d\tau = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} d\tau}{\tau - z} - \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} d\tau}{\tau - z_0} = 0, \end{aligned}$$

бұдан

$$\int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} d\tau}{\tau - z} = \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} d\tau}{\tau - z_0}.$$

(2.27) формуладан $z = z_0$ болғанда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z_0} d\tau$$

теңдігі шығады. Түйіндесіне көшейік:

$$\overline{f(z_0)} = \overline{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z_0} d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(\tau)} d\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)} d\tau}{\tau - z_0}.$$

Бұдан

$$\overline{f(z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(\tau)}}{\tau - z} d\tau, z \in K(R, z_0) \quad (2.28)$$

теңдігі алынады. (2.27) және (2.29) теңдіктерін бір-біріне мүшелеп қосайық және $\operatorname{Re} f(\tau) = u(\tau)$ белгілеуін енгізейік, сонда

$$f(z) + \overline{f(z_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.29)$$

теңдігі алынады. Бұл теңдіктен $z = z_0$ болғанда

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - z_0} d\tau$$

теңдігі шығады. Олай болса (2.30) теңдігін

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau - z_0} + iC$$

түрінде жазуға болады немесе

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau - 2z_0 + z}{(\tau - z_0)(\tau - z)} u(\tau) d\tau + iC, \text{ Ошибка! Закладка}$$

не определена.

мұнда

$$C = \operatorname{Im} f(z_0)$$

(2.31) теңдік Шварцтың интегралдық формуласы деп аталады.

Қысқаша қорытынды. $K(R, z_0)$ дөңгелегінде

аналитикалық, ал тұйықталған $\overline{K(R, z_0)}$ облысында үзіліссіз

болатын $f(z)$ функциясының $|\tau - z_0| = R$ шеңберінде оның үзіліссіз нақты $\operatorname{Re} f(\tau) = u(\tau)$ бөлігі анықталсын делік. Сонда Шварц формуласы $\forall z \in K(R, z_0)$ нүктесіндегі $f(z)$ функциясының мәнін оның $|\tau - z_0| = R$ шеңберінде анықталған нақты бөлігі арқылы өрнектейді.

Ескерту. Егер (2.31) формуласын $f(z)/i$ функциясына қолданатын болсақ, онда $f(z)$ функциясының мәнін оның $|\tau - z_0| = R$ шеңберінде анықталған жорамал бөлігі арқылы өрнектеуге болады.

$z - z_0 = re^{i\psi}$ деп алайық та (2.31) теңдігінің екі жағынан бірдей нақты бөліктерін ажыратайық:

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{t - z_0 + z - z_0}{(t - z_0)[\overline{t - z_0} - \overline{(z - z_0)}]} u(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + re^{i\psi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} u(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi,$$

немесе

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(z_0 + Re^{i\varphi})}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\varphi. \text{ Ошибка!}$$

Закладка не определена. (2.32)

формуласы Пуассон формуласы деп аталады. Бұл формула $K(R, z_0)$ дөңгелегінде Лаплас теңдеуі үшін қойылған Дирихле есебінің шешімін анықтайды.

Теорема. $|z - z_0| < R$ дөңгелегінде аналитикалық, ал $|z - z_0| = R$ шекарасында үзіліссіз болатын $f(z)$ функциясы берілсін делік. Сонда оның z_0 нүктесіндегі барлық туындылары үшін келесі бағалауларды аламыз:

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{Mn!}{R^n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

мұнда $M = \max \left\{ \left| f(z) \right| : |z - z_0| = R \right\}$.

Дәлелдеуі. $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau$. Бұдан

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{|2\pi i|} \oint_{|z-z_0|=R} \left| \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} \right| d\tau = \frac{n!}{2\pi} M \frac{2\pi R}{R^{n+1}} = \frac{Mn!}{R^n}.$$

Теорема дәлелденді.

Кошидің интегралдық формуласынан шығатын кейбір салдар

Теорема (Морер теоремасы). Егер $f(z)$ функциясы D облысында үзіліссіз және D облысында толықтай жататын кез келген құрама-тегіс тұйық Γ контуры үшін $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ болса,

онда $f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық болады.

Дәлелдеуі. $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ функциясын қарастырайық.

Теореманың шарты бойынша оның мәні интегралдау жолына тәуелсіз және

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

мұнда интегралдау жолы ретінде z және $z + \Delta z$ нүктелерін қосатын кесіндіні таңдап алуға болады. Алынған теңдікте $\Delta z \rightarrow 0$ ұмтылғандағы шекке өту

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta$$

теңдігін береді, бұдан $f(z)$ функциясының үзіліссіздігі бойынша

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = 0 \quad \text{және} \quad \frac{dF(z)}{dz} = f(z)$$

теңдіктері алынады. Сонымен $F(z)$ функциясы аналитикалық және оның туындысы $f(z)$ болады.

Теорема (модульдің максимумдық қағидасы). Егер $f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық, ал облыстың Γ шекарасында үзіліссіз және тұрақты болмаса, онда оның модулі ең үлкен мәнге тек облыстың шекарасында ғана жетеді.

Дәлелдеуі. z_0 нүктесі D облысының бекітілген кез келген ішкі нүктесі дейік. Сонда $w_0 = f(z_0)$ нүктесімен қатар оның қайсыбір $|w - w_0| < \delta$ маңайы да $f(z)$ функциясының мәндер жиынына тиісті. Осы маңайдан $|w_1| > |w_0|$ теңсіздігі орындалатындай w_1 нүктесін таңдап алайық. Сонда w_1 нүктесіне $w_1 = f(z_1)$ теңдігі орындалатындай $z_1 \in D$ нүктесі сәйкес қойылады. $|z_1 - z_0| = \varepsilon$ белгілеуін енгізейік. Егер $\delta \rightarrow 0$ ұмтылса, онда $f(z)$ функциясының аналитикалық қасиеті бойынша $\varepsilon \rightarrow 0$. Демек z_0 нүктесінің кез келген маңайында $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ болатындай z_1 нүктесі табылады. z_0 нүктесі кез келген нүкте болғандықтан D облысының кез келген ішкі

нүктесінде $f(z)$ функциясының модулі ең үлкен мәнге жете алмайды. Демек, $f(z)$ функциясының модулі ең үлкен мәнге тек D облысының шекарасында ғана жетеді.

Тура осы сияқты $f(z)$ функциясының модулі D облысының ішкі нүктелерінде де ең кіші мәнге ие болмайды.

Теорема (Лиувиль теоремасы). Бүкіл комплекс жазықтығында шенелген және аналитикалық болатын функция – тұрақты.

Дәлелдеуі. z_0 және z_1 нүктелері Гүйық контурының ішінде жататын кез келген екі нүкте делік. Коши формуласын пайдалана отырып

$$f(z_1) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right] f(\zeta) d\zeta$$

теңдігін алайық.

Интегралдау контуры ретінде R радиусы $|z_0|, |z_1|$ сандарынан үлкен $|\zeta| = R$ шеңберін таңдайық та, теңдікті бағалайық:

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{(z_0 - z_1)f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)} d\zeta \right|.$$

Тіпті $|\zeta| \rightarrow \infty$ ұмтылғанның өзінде де $|f(\zeta)| < M$ теңсіздігі орынды, бұдан

$$|f(z_1) - f(z_0)| < \frac{|z_0 - z_1|MR}{(R - |z_0|)(R - |z_1|)}$$

бағалауы шығады. Сонда

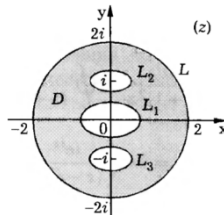
$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f(z_1) - f(z_0)| < \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|z_0 - z_1| MR}{(R - |z_0|)(R - |z_1|)} = 0.$$

Олай болса кез келген z_0, z_1 нүктелері үшін $f(z_1) - f(z_0) = 0$, демек $f(z)$ функциясы – тұрақты.

Мысал. $\oint_L \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz$ интегралын есепте, мұнда

$$L: |z| = 2.$$

Шешуі. L контурымен шектелген облыста интеграл астындағы функцияның $z_1 = 0$, $z_2 = i$ және $z = -i$ ерекше нүктелері жатыр. Бұл нүктелерді бір-бірімен қиылыспайтын және облыстан шығып кетпейтін L_1, L_2 және L_3 контурларымен қоршаймыз (2.19-сурет).



2.19-сурет

Сонда интеграл астындағы функциямыз төртбайланысты D облысында аналитикалық функция болады. Көпбайланысты облыс үшін Коши теоремасы бойынша

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz = \oint_{L_1} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz + \oint_{L_2} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz + \oint_{L_3} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz.$$

L_1 контуры тек бір ерекше $z_1 = 0$ нүктесін қоршайды, онда осы контурда және осы контурмен шектелген облыста $\frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z}$ функциясы аналитикалық болады, демек

$$\oint_{L_1} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz = \oint_{L_1} \frac{1}{z} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz = 2\pi i \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \bigg|_{z=0} = 2\pi i.$$

L_2 контуры $z_2 = i$ ерекше нүктесін қоршайды. Демек $\frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z}$ функциясы осы контурда және осы контурмен шектелген облыста аналитикалық функция болады. Сонда

$$\oint_{L_2} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz = \oint_{L_2} \frac{1}{(z-i)^2} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2 z} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right) \bigg|_{z=i} = -\frac{3\pi i}{2e}.$$

Осыған ұқсас L_3 контуры бойынша:

$$\oint_{L_3} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz = \oint_{L_3} \frac{1}{(z+i)^2} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2 z} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right) \bigg|_{z=i} = -\frac{\pi e}{2} i.$$

Нәтижесінде

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz = 2\pi i - \frac{3\pi i}{2e} - \frac{\pi e}{2} i = \pi i \left(2 - \frac{3}{2e} - \frac{e}{2} \right).$$

Жаттығулар

Келесі интегралдарды есептендер:

$$1. \oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz, \text{ мұнда } \Gamma: x^2 + y^2 + 6y = 0.$$

$$2. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+i)^3} dz.$$

$$3. \oint_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz.$$

$$4. \oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz.$$

$$5. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^3} dz.$$

$$6. \oint_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{z(1-z)^2} dz.$$

$$7. \oint \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz.$$

$$8. \oint_{|z-3|=3} \frac{z}{z^4 - 1} dz.$$

$$9. \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 16}.$$

$$10. \oint_{|z|=1/2} \frac{1}{z^2} \cos \frac{\pi}{z+1} dz.$$

$$11. \int_{|z|=1} \frac{\sinh \frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2 - 2z} dz.$$

$$12. \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z+9)}.$$

$$13. \int_{|z-i|=2} \frac{\sinh \frac{\pi}{2} z}{z^2 + 2z - 3} dz.$$

$$14. \int_{|z|=2} \frac{z \sinh z}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

$$15. \int_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)} dz.$$

$$16. \int_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz.$$

$$17. \int_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2 + 4)^2} dz.$$

$$18. \int_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2 - z} dz$$

$$19. \int_{|z|=1/2} \frac{1 - \sin z}{z^2} dz.$$

$$20. \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz .$$

Бақылау сұрақтары

1. $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз нақты аргументті комплекс мәнді $z(t)$ функциясы берілсін делік. $[a, b]$ кесіндісінің комплекс жазықтығындағы бейнелеуі нені анықтайды?

2. Егер $t_1 \neq t_2$ үшін $z = z(t_1) = z(t_2)$ шарты орындалатын болса, онда z нүктесі қисықтың қандай нүктесі деп аталады?

3. Өз-өзімен қиылыспайтын үзіліссіз қисық қалай аталады?

4. Құрама-тегіс қисықтың мағынасы неде?

5. $z = 2e^{it} + e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

6. Егер D облысына тиісті барлық z үшін $F'(z) = f(z)$ теңдігі орындалатындай $F(z)$ аналитикалық функциясы табылатын болса, онда ол қалай аталады?

7. Егер D облысында $F(z)$ функциясы $f(z)$ функциясының алғашқы функциясы болса, сонда $\Phi(z) = F(z) + C$ функциясы туралы не айтуға болады, мұнда $C = const$?

8. $f(z)$ функциясының бүкіл алғашқы функцияларының жиынтығы қалай аталады?

9. Бірбайланысты D облысында $f(z)$ функциясы аналитикалық функция және $z_1, z_2 \in D$ делік. Сонда осы нүктелерді қосатын кез-келген құрама-тегіс қисық бойынша алынған интегралдардың мәндері туралы не айтуға болады?

10. $I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ интегралы берілсін делік, мұнда

$\Gamma: |z| = 4, \operatorname{Im} z \geq 0$. Бұл интегралды есептеу үшін $\sqrt{z}$ функциясының бірімді тармағы қалай таңдалынады?

11. Бірбайланысты D облысында аналитикалық $f(z)$ функциясы берілсін делік. Сонда осы облыста жататын кез келген құрама-тегіс тұйық Жордан қисығы бойынша алынған интеграл неге тең?

12. $f(z)$ функциясы D облысында үзіліссіз және осы облыста жататын кез келген құрама-тегіс тұйық Жордан қисығы бойынша алынған интеграл нөлге тең делік. Сонда $f(z)$ функциясы туралы не айтуға болады?

13. D облысында $\Phi'(z) = f(z)$ теңдігі орындалатындай аналитикалық функциялардың жиынтығы $f(z)$ функциясының анықталмаған интегралы деп аталады және $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\tau) d\tau + C$ теңдігімен анықталады. Осы теңдіктен Стұрақтысы қалай анықталады?

14. $\int_{z_0}^z f(\tau) d\tau = \Phi(z) - \Phi(z_0)$ формуласы қалай аталады?

Осы теңдік орындалу үшін $f(z)$ және $\Phi(z)$ функциялары қандай шарттарды қанағаттандырады?

15. Неліктен $f(z) = |z|$ функциясы дифференциалданатын функциялар класына жатпайды?

16. Егер $f(z)$ функциясы тұйық дөңгелекте аналитикалық функция болса, онда оның дөңгелектің центріндегі мәні неге тең?

17. D облысында аналитикалық болатын функцияның мәні осы облыстың шекаралық мәндері арқылы толықтай анықталады. Бұл теорема қалай аталады?

18. Түйіндес гармониялық функциялар дегеніміз не?

19. D облысында екінші ретті дербес туындыларымен бірге өзі де үзіліссіз $u(x, y)$ функциясы берілсін делік. Егер $u(x, y)$ функциясы Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын болса, онда ол қалай аталады?

20. Аналитикалық функцияның нақты және жорамал бөліктері қандай теңдеудің шешімі болады?

ІІІ ТІЗБЕКТЕР, ҚАТАРЛАР ЖӘНЕ ШЕГЕРІМДЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

Функционалдық тізбектің анықтамасы. Қайсыбір D жиынында анықталған $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ функцияларын қарастырайық. D жиынының кез келген $z_0 \in D$ нүктесінде $\{f_n(z)\}$ функциялар тізбегінен $\{c_n\}$, $n=1, 2, \dots$ комплекс сандар тізбегін аламыз, мұнда $c_n = f_n(z_0)$. Егер $\{c_n\}$ тізбегі жинақты, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ тізбегінің шегі бар болса, онда z_0 нүктесінде $\{f_n(z_0)\}$ функционалдық тізбегі жинақты деп айтады. $\{f_n(z)\}_{n \in N}$ тізбегінің шегі табылатын бүкіл z нүктелерінің жиынын функционалдық тізбектің жинақталу облысы деп айтады (D облысы).

Функционалдық тізбектің

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad z \in D$$

теңдігімен анықталатын шегі функция болады. Оны тізбектің шектік функциясы деп айтады. Сандық тізбектің жинақтылығының анықтамасына сүйене отырып,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad z \in D$$

теңдігін келесі түрде жазайық

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad z \in D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, z),$$

барлық $n > N(\varepsilon, z)$, $z \in D$ үшін: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Ескерту. Мұнда N нөмірі тек ғана емес z нүктесіне де тәуелді. Сандық тізбек үшін $N = N(\varepsilon)$.

Функционалдық тізбектің бірқалыпты жинақтылығы

Егер функционалдық тізбектің анықтамасындағы N нөмірі барлық $z \in D$ нүктелері үшін тек ε - ға ғана, яғни $N = N(\varepsilon)$, тәуелді болса, онда $f_n(z)$ тізбегі D жиынында $f(z)$ функциясына бірқалыпты жинақты. Белгілеуі: $f_n(z) \Rightarrow f(z)$. Сонымен

$$f_n(z) \Rightarrow f(z), \quad z \in D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon),$$

Барлық $N > N(\varepsilon)$ және $\forall z \in D$ үшін :

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Комплекс облысындағы функционалдық қатар

Мүшелері $\{u_n(z)\}$, $n = 1, 2, \dots$ қайсыбір $D \subset \mathbb{C}_z$ жиынында анықталған комплекс айнымалы функциялар болып келетін қатар комплекс облысындағы функционалдық қатар деп аталады. Белгілеуі: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$.

Функционалдық қатар ұғымына басқа да жолмен келуге болады. Ол үшін $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ қатарының мүшелерінен келесі дербес қосындылар тізбегін құрамыз:

$$S_1(z) = u_1(z), S_2(z) = u_1(z) + u_2(z), \dots, S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z), \dots$$

$\{S_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ дербес қосындылар тізбегінің жинақталу облысын

D жиыны делік. Егер D жиынында $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ қатарының дербес қосындылар тізбегі жинақты болса, онда қатар жинақты:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n(z) = S(z), z \in D; \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z), z \in D.$$

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ қатарының қосындысын тап.

Шешуі. Дербес қосындылар тізбегін құрайық:

$$S_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z},$$

$$S_2(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2+z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2+z}, \dots,$$

$$S_n(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{n+z}.$$

Демек
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{n+z} \right) = \frac{1}{z} = S(z).$$

Қатардың жинақталу облысы және бірқалыпты жинақтылық

Жоғарыда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ қатарының D комплекс жиынындағы қосындысы деп $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$ теңдігімен анықталатын $S(z)$ функциясын айттық.

Қатардың D жинақталу облысында оның $S(z)$ қосындысы үшін $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, z)$ барлық $n > N(\varepsilon, z)$, $z \in D$ үшін $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

Мүшелері үзіліссіз комплекс айнымалы функциялар болып келетін бірқалыпты жинақталатын қатарлардың ақырлы

қосындылары да сол қатарлардың жинақталу облыстарының қиылысуында үзіліссіз функция болады. Сондай-ақ қатарды мүшелеп интегралдауға болады. Бұл

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(z) dz = \int \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \int S(z) dz$$

теңдіктерінің дұрыстығын білдіреді.

Бірқалыпты жинақтылық және Вейерштрасс белгісі

Функционалдық қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін және оның бірқалыпты жинақтылық облысын табу үшін бірқалыпты жинақтылықтың жеткілікті белгісін пайдалануға болады.

Теорема (Вейерштрасс белгісі). Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

функционалдық қатары D жиынында мүшелері оң сандық қатарымен мажорланған болса, онда ол сол D жиынында бірқалыпты жинақты, демек

$$|u_n(z)| \leq c_n, \quad n > k, \quad k \geq 1, \quad z \in D$$

шартынан $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ қатарының D жиынында бірқалыпты

жинақтылығы шығады. Мұнда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n > 0$ - сандық қатар.

Мүшелері аналитикалық функциялар болып келетін қатарлар үшін Вейерштрасс белгісі

Теорема. $u_n(z)$ функциялары D жиынында, яғни $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

қатарының жинақталу облысында аналитикалық функциялар

болсын делік. Сонда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ қатарының $S(z)$ қосындысы да сол D жиынында аналитикалық функция болады; қатарды кез келген сан рет мүшелеп дифференциалдауға болады және мүшелері $u_n^{(k)}(z)$ туындылары болатын қатар кез келген $\bar{B} \subset D$ жиынында бірқалыпты жинақты және мұндай қатардың қосындысы бастапқы қатардың қосындысынан алынған $S^{(k)}(z)$ туындысына тең, яғни

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) = S_n^{(k)}(z), k \in N.$$

Қатарлардың жинақталу облысын табу

Анықтама бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0)$ сандық қатарының

жинақтылығынан z_0 нүктесінде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ функционалдық қатарының жинақтылығы шығады. Бүкіл мұндай нүктелерді табу үшін, яғни қатардың жинақталу облысын сандық қатарлардың жинақталу белгілерін пайдалануға болады (абсолюттік жинақтылық белгісі). Ендеше

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = |f(z)|, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = |f(z)|$$

шектерін табуға болады.

Даламбер белгісі бойынша (бірінші жағдай) және Коши белгісі бойынша (екінші жағдай) қатардың абсолютті жинақты болатын облысы $|f(z)| < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын z нүктелерінің жиынын құрайды.

Мысал. а) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

қатарларын жинақтылыққа зерттейік.

Шешуі. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z|^n} = |z|$; $|z| < 1$ теңсіздігі қатардың

жинақталу облысын анықтайды. Облыстың шекарасы $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ теңдігімен анықталатын бірлік шеңбер. Шекаралық

нүктелер үшін $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi}$ немесе $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi + i \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi$

түрлеріндегі жинақсыз сандық қатар аламыз, өйткені $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\varphi$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\varphi$ шектері табылмайды. Демек

$|z| < 1$ дөңгелегі қатардың жинақталу облысы.

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{z^n}{2^n} \right|} = \frac{|z|}{2} < 1$. $|z| < 2$ теңсіздігі қатардың

жинақталу облысын анықтайды.

в) Кез келген $z \neq 0$ үшін

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$. Даламбер белгісі бойынша

қатар тек бір $z = 0$ нүктесінде жинақты.

г) Кез келген $z \neq 0$ үшін

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1} n!}{(n+1)! z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1$. Қатар бүкіл $\mathbb{C}_z$

комплекс жазықтығында жинақты.

Мысал. Функционалдық қатарларды жинақтылыққа зерттейік.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{z^n}$$

Шешуі. Алдыңғы мысалдардан ерекшелігі $z = 0$ нүктесі қатарлардың жинақталу облыстарына кірмейді. Қалған нүктелердегі жинақтылықты зерттейік.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{z^n} \right|} = \frac{1}{|z|}; \quad \text{қатардың жинақталу облысы центрі } z = 0$$

нүктесінде жататын радиусы бірге тең дөңгелектің сыртқы бөлігі. Дөңгелектің шекарасында қатар жинақсыз.

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{z^n} \right|} = \frac{2}{|z|}; \quad \text{қатардың жинақталу облысы центрі}$$

$z = 0$ нүктесінде жататын радиусы екіге тең дөңгелектің сыртқы бөлігі. Дөңгелектің шекарасында қатар жинақсыз.

в) Кез келген $z \neq 0$ үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! z^n}{(n+1)! z^{n+1}} \right| = \frac{1}{|z|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1.$$

$\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығының $z = 0$ нүктесінен басқа барлық нүктелерінде қатар жинақты.

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^n}{z^{n+1} n!} \right| = \frac{1}{|z|} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty. \quad \text{Қатар бүкіл}$$

$\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығында жинақсыз.

Дәрежелік қатарлар

$\{a_n\}$ қайсыбір комплекс сандар тізбегі дейік. Сонда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (3.1)$$

түріндегі функционалдық қатарды комплекс дәрежелік қатар деп атайды, мұнда a_n коэффициенттері z нүктесіне тәуелсіз комплекс сандар; z_0 -берілген белгілі комплекс сан, z – комплекс айнымалы. Сонымен бірге a_n комплекс сандарын осы дәрежелік қатардың коэффициенттері деп атайды.

Дербес жағдайда, яғни $z_0 = 0$ болғанда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3.2)$$

түріндегі комплекс дәрежелік қатарды аламыз. Бұл дәрежелік қатарлардың бір-бірінен айырмашылығы тек олардың қандай декарттық координаталар жүйесінде қарастырылатыны.

Комплекс айнымалы $z = z^* \in \mathbb{C}$ мәнінде (3.1) дәрежелік қатары комплекс сандық қатарды береді. Егер осындай жолмен алынған сандық қатар жинақты болса, онда дәрежелік қатарды z^* нүктесінде жинақты деп атайды.

Егер керісінше сандық қатар z^* нүктесінде жинақты болмаса, онда дәрежелік қатар сол нүктеде жинақсыз, яғни қосындысы табылмайды.

Анықтама. Дәрежелік қатар жинақты (абсолютті, шартты) болатын $z \in \mathbb{C}$ нүктелерінің жиынын осы дәрежелік қатардың жинақталу (абсолютті, шартты) облысы деп атайды.

Абель теоремасы (дәрежелік қатардың жинақталу облысын құру туралы).

1. Егер $z_0 \neq 0$ нүктесінде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ дәрежелік қатары жинақты болса, онда ол $|z| < |z_0|$ облысының әрбір нүктесінде абсолютті жинақты және ол кез келген $|z| \leq \rho \leq |z_0|$ дөңгелегінде бірқалыпты жинақты.

2. Егер дәрежелік қатар z_0 нүктесінде жинақсыз болса, онда дәрежелік қатар $|z| > |z_0|$ шартын қанағаттандыратын $\mathbb{C}_z$ комплекс жазықтығының барлық нүктелерінде жинақсыз.

Дәлелдеуі. Қатардың z_0 нүктесінде жинақтылығының қажетті шартынан $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$ теңдігін аламыз, демек барлық n үшін $|a_n z_0^n| < M$.

z нүктесі $|z| < |z_0|$ шартын қанағаттандыратын кез келген нүкте болсын дейік. Сонда

$$|a_n z_0^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| < M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = M q^n,$$

өйткені $|z| < |z_0|$, мұнда $0 < q < 1$. Соңғы теңсіздіктен және

салыстыру белгілерінен $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатарының жинақтылығы

шығады. Бұдан $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатарының z нүктесінде абсолютті

жинақтылығы шығады. Сонымен $|z| \leq \rho$ дөңгелегінде

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ сандық қатарымен мажорланған $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатары

жинақты. Демек Вейерштрасс белгісі бойынша $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатары

$|z| \leq \rho$ дөңгелегінде бірқалыпты жинақты.

Жинақталу дөңгелегі

Берілген (3.1) дәрежелік қатары жинақты болатын нүктелердің жиынын қалай табуға болады деген сұраққа тоқталайық.

(3.1) дәрежелік қатары коэффициенттердің кез келген мәнінде $z = z_0$ нүктесінде жинақты, өйткені осы нүктеде біріншісінен басқа қосылғыштардың барлығы бірдей нөлге тең.

Басқаша айтқанда $z = z_0$ нүктесінде қатардың қосындысы a_0 тең, бұл қатардың сол нүктедегі жинақтылығын білдіреді.

$|z - z_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын бүкіл z комплекс сандар жиыны комплекс жазықтығында центрі z_0 нүктесінде радиусы R болатын дөңгелекті құрайды. Бұл дөңгелекті дәрежелік қатардың жинақталу дөңгелегі деп, ал оның R радиусын дәрежелік қатардың жинақталу радиусы деп атайды.

$R = 0$ болғанда (3.1) дәрежелік қатары тек z_0 нүктесінде ғана жинақты. Керісінше $R = \infty$ болғанда бүкіл комплекс жазықтығында абсолютті жинақты.

(3.1) қатарының мүшелерінің абсолюттік шамаларынан құралған

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$$

сандық қатары жинақталу дөңгелегінің бүкіл шекаралық нүктелерінде бірдей және осы шекаралық нүктелерден тәуелсіз болады. Бұл дәрежелік қатар жинақталу дөңгелегінің шекарасындағы ең болмағанда бір нүктеде абсолютті жинақты болатынын білдіреді. Осыған ұқсас, егер дәрежелік қатар қайсыбір шекаралық нүктеде жинақсыз болса, онда ол шекаралық бүкіл нүктелерде жинақсыз болады.

Теорема. Дәрежелік қатардың қосындысы қатардың жинақталу дөңгелегінде аналитикалық функция болады. Дәрежелік қатарды мүшелеп кез келген сан рет дифференциалдауға болады.

Нәтижесінде алынған дәрежелік қатардың жинақталу радиусы да бастапқы қатардың радиусындай болады.

Теорема. Дәрежелік қатарды оның жинақталу дөңгелегінде жатқан Γ қисығы бойынша мүшелеп интегралдауға болады.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ қатарының қосындысын табайық.

Шешуі. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табу формуласын пайдаланайық

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1.$$

Бұл қатарды мүшелеп дифференциалдау арқылы

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

теңдігін аламыз. Бастапқы қосындыны табу үшін теңдіктің сол және оң бөліктерін z - ке көбейту ғана қалды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}, S(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, |z| < 1.$$

Комплекс дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табу үшін алдымен Кошидің радикал белгісін қолданайық:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

шартын қанағаттандыратын z нүктелерінде дәрежелік қатар абсолютті жинақты болады. Керісінше

$$|z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

шартын қанағаттандыратын z нүктелерінде (3.1) дәрежелік қатары жинақсыз. Белгілеу енгізейік:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (3.3)$$

Сонда $|z - z_0| < R$ теңсіздігі орындалатын нүктелерде (3.1)

қатары абсолютті жинақты, ал $|z - z_0| > R$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелерде бұл қатар жинақсыз. Демек, $|z - z_0| < R$ дөңгелегі қарастырылып отырған дәрежелік қатардың жинақталу дөңгелегі, ал (3.3) формуласы бойынша есептелетін сан оның жинақталу радиусы болады.

(3.3) формуласын жиі Коши – Адамар формуласы деп атайды (Ж.С. Адамар – француз математигі, 1865-1963).

Осы сияқты пайымдауларды Даламбер белгісі бойынша да жүргізуге болады. (3.1) қатарының барлық a_n коэффициенттері нөлден өзгеше деп ұйғарайық (немесе ең болмағанда қайсыбір номерден бастап қатардың коэффициенттері нөлден өзгеше болсын делік). Сонда қарастырылып отырған қатардың жинақталу радиусы үшін

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (3.4)$$

формуласын аламыз.

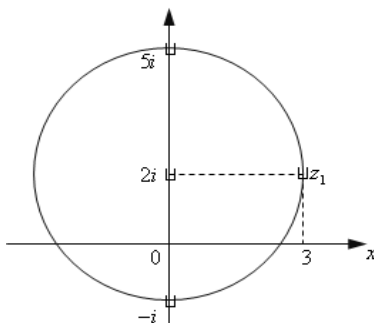
Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} (z-2i)^n$ қатарының жинақталу дөңгелегін

тап және қатарды $z_1 = 3+2i$ және $z_2 = 5i$ нүктелеріндегі жинақтылықты зертте.

Шешуі. Қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін Даламбердің белгісін пайдаланайық:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z-2i|^{n+1} 3^n n}{3^{n+1} (n+1) |z-2i|^n} = \frac{|3-2i|}{3}.$$

Сонда $|3-2i| < 3$ теңсіздігін қанағаттандыратын z нүктелерінің жиыны қатардың жинақталу дөңгелегі болады (3.1-сурет).



3.1-сурет

z_1 және z_2 нүктелері дөңгелектің шекарасында жатады.

$z_1 = 3+2i$ нүктесінде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i-2i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

сандық қатары алынады. Бұл белгілі жинақталмайтын гармониялық қатар. Сонымен бастапқы дәрежелік қатар $z_1 = 3 + 2i$ нүктесінде жинақталады. $z_2 = 5i$ нүктесінде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5i - 2i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

сандық қатарын аламыз. Бұл сандық қатар шартты түрде жинақты, демек бастапқы дәрежелік қатар да осы нүктеде шартты түрде жинақты болады.

Теорема.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots \quad \text{және}$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} = a_m + a_{m+1} (z - z_0) + \dots + a_{m+n} (z - z_0)^n + \dots$$

дәрежелік қатарларының жинақталу дөңгелектері бірдей болады (бірдей және соның өзіндей).

Дәлелдеуі. Жоғарыда көрсетілген қатарлардың біріншісі $z \neq z_0$ нүктесінде жинақты болса, онда осы нүктеде

$$a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

қалдығы да жинақты болады. Демек бірінші қатардың қалдығын $(z - z_0)^{-m}$ санына көбейтуден алынатын екінші қатар да жинақты болады. Керісінше $z \neq z_0$ нүктесінде екінші қатардың жинақтылығы осы нүктеде бірінші қатардың қалдығы жинақты болатындығын білдіреді. Сонымен екі қатардың да жинақталу облысы бірдей. Демек олардың жинақталу дөңгелектері де бірдей.

Жаттығулар

1. Комплекс сандық қатарларды жинақтылыққа зертте:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+i)^n}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}; \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} (1+in) z^n \text{ қатарының жинақталу дөңгелегін тап және}$$

осы қатарды жинақталу дөңгелегінің шекаралық нүктелерінде зертте.

3. Келесі дәрежелік қатарлардың әрқайсысының жинақталу радиусын есепте:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n; \quad \text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n; \quad \text{г)} \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

4. Келесі қатарлардың жинақталу облысының ішкі нүктелерінің жиынын тап:

$$\begin{aligned} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i\sqrt{3}}{z^n}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)(z+1-i)^n}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+4i)^n z^n}; \\ \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n (z+1)^n}; \quad \text{д)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{2^n z^n} \right); \quad \text{е)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n} \right). \end{aligned}$$

5. Келесі қатарлардың жинақталу сақинасын анықта:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{z-i} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{5} \right)^n;$$

$$\text{б)} -\frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-1+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-1+i)^n ;$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n .$$

Тейлор қатары

Дәрежелік қатар өзінің жинақталу дөңгелегінде аналитикалық функция болатыны жоғарыда тұжырымдалды. Енді кері есепті қарастырайық. Қайсыбір $|z - z_0| < R$ дөңгелегінде аналитикалық болатын $f(z)$ функциясы берілсін делік. Оны осы дөңгелекте дәрежелік қатардың қосындысы түрінде көрсетейік.

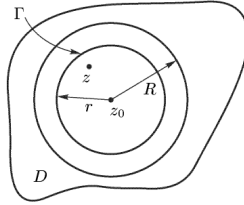
Теорема. Егер $|z - z_0| < R$ дөңгелегінде $f(z)$ аналитикалық функциясы берілсе, онда оны осы дөңгелекте төмендегі дәрежелік қатардың қосындысы түрінде көрсетуге болады

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\text{немесе } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (0! = 1), \quad f^{(0)}(z_0) = f(z_0). \quad (3.5)$$

Бұл қатар $f(z)$ функциясы үшін Тейлор қатары деп аталады.

Дәлелдеуі. $|z - z_0| = R$ шеңберін Γ' арқылы белгілейік. нүктесі $|z - z_0| < R$ дөңгелегінің кез келген нүктесі болсын дейік. Осы дөңгелектің ішінен центрі z_0 нүктесінде жататын және z нүктесі оның ішкі нүктесі болатын Γ шеңберін жүргізейік (3.2-сурет).



3.2-сурет

Сонда Кошидің интегралдық формуласы бойынша

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}. \quad (3.6)$$

$f(z)$ функциясының z нүктесіндегі мәнін қатардың қосындысы ретінде көрсету үшін (3.6) теңдігінің оң жақ бөлігін жіктейік.

Осы мақсатпен $\frac{1}{\tau - z}$ өрнегін келесі түрде түрлендірейік:

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{(\tau - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\tau - z_0) \left(1 - \frac{(z - z_0)}{\tau - z_0} \right)}.$$

Осы жерде бекітілген z және $\tau \in \Gamma$ ағымдық нүктелері үшін

$$q = \left| \frac{z - z_0}{\tau - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|\tau - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

теңсіздігі шығады. Сонда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, өйткені сандық қатардың мүшелері кемімелі геометриялық прогрессияны құрайды. Олай болса

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\tau - z_0}} = \frac{1}{\tau - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\tau - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\tau - z_0)^{n+1}}$$

Алынған қатар кемімелі геометриялық прогрессиямен мажорланған, демек бұл қатар Γ шеңберінде де функционалдық қатардың бірқалыпты жинақтылығының Вейерштрасс белгісі бойынша бірқалыпты жинақты, сондықтан оны мүшелеп интегралдауға болады.

$$f(z) = \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ f(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\tau - z_0)^{n+1}} \right\} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}} \right\} (z - z_0)^n.$$

Белгілеу енгізейік:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}} = a_n \quad (3.7)$$

делік. Сонда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

Мұнда
$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z_0}; \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_n)}{n!},$$

$n = 1, 2, \dots$

Теорема дәлелденді.

Анықтама. Коэффициенттері (3.7) формуласы бойынша анықталатын (3.5) дәрежелік қатарын z комплекс айнымалы $f(z)$ функциясының Тейлор қатары деп атайды.

Керісінше $f(z)$ функциясының Тейлор қатары түріндегі көрсетілімін осы функцияның Тейлор қатарына жіктелуі деп атайды.

Салдар. Егер аналитикалық функцияның z_0 нүктесінің маңайында дәрежелік қатар түріндегі көрсетілімі бар болса, онда мұндай көрсетілім тек жалғыз ғана болады.

Теорема. $f(z)$ функциясы $|z - z_0| \leq r$ тұйық дөңгелегінде аналитикалық және осы дөңгелектің $|z - z_0| = r$ шекарасында $|f(z)| \leq A$ теңсіздігін қанағаттандыратын болсын дейік. Сонда $f(z)$ функциясының Тейлор қатарына жіктелуіндегі коэффициенттері

$$|a_n| \leq \frac{A}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

теңсіздіктерін қанағаттандырады.

Дәлелдеуі. Кез келген $\tau \in \Gamma$ ағымдық нүктесі үшін $|\tau - z_0| = r$, онда

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{A}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{A}{r^n}. \quad (3.8)$$

теңсіздіктерін Коши теңсіздіктері деп атайды.

Ескерту. Егер $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің маңайында дәрежелік қатардың қосындысына жіктелгенде және тек сонда ғана, ол z_0 нүктесінде аналитикалық болады. Бұдан, егер $f(z)$ функциясы D облысының әрбір нүктесінің маңайында дәрежелік қатарға жіктелсе, онда ол D облысында аналитикалық болады.

Элементар функциялардың Тейлор қатарына жіктелуі:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}, \quad 0! = 1;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

Бұл жіктеулер бүкіл C_z комплекс жазықтығында орын алады.

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n;$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n};$$

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) z^n}{n!}$$

α -кез келген нақты немесе комплекс сан. Соңғы төрт жіктелуде $|z| < 1$. $(1+z)^\alpha$ өрнегімен $\psi(0)=1$ шартымен бөлектенген $\psi(z) = e^{\alpha \ln(1+z)}$ көпмәнді функцияның $\varphi(z) = e^{\alpha \ln(1+z)}$ бірімәнді тармағы белгіленген.

Функцияның Тейлор қатарына жіктелуі

z_0 нүктесінде аналитикалық болатын $f(z)$ функциясын осы нүктенің қайсыбір маңайында $(z - z_0)$ дәрежелері бойынша Тейлор қатарына жіктеуге болады. z_0 нүктесінің маңайы ретінде $|z - z_0| < R$ дөңгелегінің ішінде аналитикалық болатын, центрі z_0 нүктесінде жататын кез келген дөңгелекті алуға болады. Мұндай дөңгелектің R максималь радиусы z_0 нүктесінен ең жақын ерекше нүктеге дейінгі қашықтыққа тең.

Ескерту. Функцияның ерекше нүктелері деп функция анықталмайтын нүктелерін немесе функцияның аналитикалық қасиеті жойылатын нүктелерді айтады.

Осындай пайымдаулардан кейін қысқаша қорытынды жасайық. Аналитикалық функцияның ерекше нүктелерін талдай отырып, Тейлор қатарының жинақталу дөңгелектерін анықтауға болады.

Тәжірибеде қолданылатын көптеген функциялар элементар функциялар немесе олардың суперпозициялары болады. Мұндай функциялардың ерекше нүктелерін келесі ережелер бойынша анықтауға болады:

- өздерінің анықталу облыстарында негізгі элементар функциялар (көпмүшеліктер, көрсеткіштік функция, тригонометриялық және гиперболалық функциялар, т.б.) аналитикалық функциялар болады;

- екеуі де аналитикалық болатын нүктелерде екі аналитикалық функциялардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі де аналитикалық функциялар болады;

- алымы да, бөлімі де аналитикалық болатын және бөлімі нөлге айналмайтын нүктелерде екі аналитикалық функцияның бөліндісі де аналитикалық функция болады.

Мысалы, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ функциясы $\varphi(z) = 1$ және

$\psi(z) = 1 + z^2$ көпмүшеліктерінің қатынасы арқылы берілген.

Сонда $f(z)$ функциясының ерекше нүктелері бөлімінің нөлге айналатын нүктелерінен тұрады. Демек, $z = \pm i$ нүктелері $f(z)$ функциясының ерекше нүктелері, өйткені бұл нүктелерде функция үзілісті. $z = 0$ нүктесінен ерекше нүктелердің кез келгеніне дейінгі арақашықтық бірге тең. Сондықтан $f(z)$ функциясының Тейлор қатарына жіктелуіндегі жинақталу радиусы бірге тең. Осындай нәтижеге дәрежелік қатарды Коши белгісінің көмегімен тікелей зерттеу арқылы да жетуге болады.

Мысал. $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ функциясының z дәрежелері бойынша Тейлор қатарына жіктелуіндегі алғашқы үш мүшесін тап.

Шешуі. Тейлор коэффициенттерін $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ формуласы бойынша есептейміз:

$$a_0 = f(z_0) = f(0) = e^{\frac{1}{1-z}} \Big|_{z=0} = e,$$

$$a_1 = f'(z_0) = f'(0) = \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{(1-z)^2} \Big|_{z=0} = e,$$

$$a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!} = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{2} \left(\frac{1}{(1-z)^4} + \frac{2}{(1-z)^3} \right) \Big|_{z=0} = \frac{3e}{2}.$$

Сонымен

$$e^{\frac{1}{1-z}} = e + ez + \frac{3ez^2}{2} + \dots$$

$z = 1$ нүктесі - $f(z)$ функциясының жалғыз ерекше нүктесі. Олай болса бұл жағдайда Тейлор қатарының жинақталу радиусы $R = 1$.

Мысал. $e^z \cos z$ функциясын $z = 0$ нүктесінің маңайында дәрежелік қатарға жікте.

Шешуі. Бұл жіктелуді алу үшін e^z және $\cos z$ функцияларын бүкіл комплекс жазықтығында абсолютті жинақты болатын Тейлор қатарларына жіктейміз, сонда осы қатарлардың көбейтіндісі $e^z \cos z$ функциясының Тейлор қатарына жіктелуін береді. Алайда, мұндай көбейтінді қатардың коэффициенттерін есептеу қиын. Сондықтан біз басқа тәсіл қолданамыз. Эйлер формуласы бойынша

$$e^z \cos z = e^z \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z}}{2}.$$

Экспонентаның жіктелуін ескере отырып, кез келген $z \in \mathbb{C}$ үшін теңдіктің оң жақ бөлігін түрлендірейік.

$$e^{(1+i)z} = e^{\sqrt{2}ze^{i\pi/4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \frac{e^{in\pi/4}}{n!} z^n,$$

$$e^{(1-i)z} = e^{\sqrt{2}ze^{-i\pi/4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \frac{e^{-in\pi/4}}{n!} z^n,$$

мұнда $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ және $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

Нәтижесінде біз бүкіл комплекс жазықтығында (дербес жағдайда $z = 0$ нүктесінің кез келген маңайында) жинақталатын $e^z \cos z$ функциясының дәрежелік қатарға жіктелуін аламыз:

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \frac{e^{in\pi/4} + e^{-in\pi/4}}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n.$$

Мысал. $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ функциясы $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктелетінін дәлелде және оның жинақталу радиусын тап.

Шешуі.

$$z = \operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i[\arg(-1) + 2k\pi] = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

нүктелерінде $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ функциясы аналитикалық

қасиеттерін жоғалтады. Өйткені бұл нүктелерде $1+e^z = 0$ тең.

$$f(z) = \frac{1}{1+e^z} \text{ функциясының } i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ерекше}$$

нүктелерінің ішінде $z_0 = 0$ нүктесіне ең жақын орналасқан

$z_1 = i\pi$ нүктесі, оның $z_0 = 0$ нүктесіне дейінгі арақашықтығы π - ге тең, демек $R = \pi$. Сондықтан

$f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ функциясы $|z| < \pi$ дөңгелегінде Тейлор қатарына жіктеледі.

Мысал. $f(z) = \frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)}$ функциясын $z=1$

нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу облысын көрсет.

Шешуі. $f(z)$ функциясы комплекс жазықтығының $z=-1$ және $z=2$ нүктелерінің барлығында аналитикалық функция болады. Демек $z=-1$ және $z=2$ нүктелері берілген функцияның ерекше нүктелері болады. $f(z)$ функциясын Тейлор қатарына жіктеу үшін қатардың жинақталу радиусын табуымыз керек. Ол $z=1$ нүктесіне ең жақын жатқан ерекше нүктеге дейінгі арақашықтықты береді. Олай болса $R=1$.

Осы себептен $f(z)$ функциясының Тейлор қатары $|z-1|<1$ облысында жинақты болады.

$f(z)$ функциясын жай бөлшектерге жіктейік

$$\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \frac{1}{2-z} + \frac{2}{1+z}.$$

Қалыпты жіктелуді пайдаланып (кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын табу формуласын пайдаланамыз),

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

дәрежелік қатарын аламыз. Сонда бастапқы берілген функцияның Тейлор қатары келесі түрде жазылады

$$\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n.$$

Мысал. $\frac{e^z}{1-z}$ функциясын $z=0$ нүктесінің маңайында $O(z^3)$ дейінгі дәлдікпен Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу облысын көрсет.

Шешуі. $\frac{e^z}{1-z}$ функциясының $|z| < 1$ дөңгелегінің шекарасында жататын бір $z=1$ ерекше нүктесі бар. Сондықтан оның Тейлор қатары $|z| < 1$ дөңгелегінде жинақты. Қалыпты жіктеуді пайдалана отырып, $O(z^3)$ дейінгі дәлдікпен Тейлор қатарын аламыз:

$$\frac{e^z}{1-z} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^3)\right) \left(1 + z + z^2 + O(z^3)\right) = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + O(z^3).$$

Жаттығулар

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (3-i)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2} (z+i)^n}$ қатарларының

жинақталу облысын тап.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{z^n} + \frac{z^n}{3^n} \right)$ қатарын жинақтылыққа зертте.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2i}{z+i} \right)^n$ қатарының жинақталу облысын тап.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$ қатарының $|z| < 1$ дөңгелегінде бірқалыпты

жинақты болатынын дәлелде.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$ қатарының бірқалыпты жинақты облысын тап.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ қатарының қосындысын мүшелеп интегралдау

арқылы тап және осы қатардың жинақталу дөңгелегін көрсет.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}$ қатарының жинақталу облысын тап.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{(1+|z|)^n}$ қатарының қосындысын тап.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$ қатарының бүкіл комплекс жазықтығында

бірқалыпты жинақты болатынын дәлелде.

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^z}{n^2 + z^2}$ қатарының $|z| < 1$ дөңгелегінде бірқалыпты

болатынын дәлелде.

11. $\frac{3-z^2}{(1+z)(2+z)}$ функциясын $z=0$ нүктесінің

маңайында Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу облысын көрсет.

12. z^{-2} функциясын $z=-1$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу облысын көрсет.

13. $e^z(1+z)^{10}$ функциясын $z=0$ нүктесінің маңайында

$O(z^3)$ дейінгі дәлдікпен Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу облысын көрсет.

14. $(z + \cos(2z))^{-1}$ функциясын $z = 0$ нүктесінің маңайында $O(z^4)$ дейінгі дәлдікпен Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу облысын көрсет.

15. $e^{z \ln z}$ функциясын $z = 1$ нүктесінің маңайында $O((z-1)^4)$ дейінгі дәлдікпен Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу облысын көрсет.

16. $\frac{z+2}{z^2-2z-3}$ функциясын z_0 нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жікте, мұнда а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = 1$.

17. e^{z^2+z} функциясының Тейлор қатарына жіктелуін пайдалана отырып, оның жетінші ретті туындысының $z_0 = 0$ нүктесіндегі мәнін тап.

18. $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ функциясының $(z+i)$ дәрежесі бойынша жіктелуіндегі алғашқы үш мүшесін тап және қатардың жинақталу радиусын анықта.

19. $e^{\sin z}$ функциясының z бойынша жіктелуіндегі алғашқы бірнеше мүшелерін тап және қатардың жинақталу радиусын анықта.

20. $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$ функциясын $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жікте және қатардың жинақталу радиусын анықта.

Лоран қатарлары

Егер қайсыбір z_0 нүктесінде $f(z)$ функциясы аналитикалық болмаса, онда ол осы нүктенің маңайында дәрежелік қатардың қосындысына жіктелінбейді. Демек z_0

нүктесінің маңайында функцияның өзгерісін Тейлор қатары арқылы зерттей алмаймыз. Сондықтан жалпы жағдайда екі жақын қатарлар қарастырылады. Мұндай қатарлар $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық функцияның көрсетілімін береді. Әсіресе ішкі радиусы нөлдік болатын сақиналардағы аналитикалық функциялардың екі жақты қатарларға жіктелуі тәжірибелік тұрғыдан өте маңызды. Осындай жіктелудің мүмкіндігі 1843 жылы француз математигі П.А. Лоран (1813-1854) дәлелдеген теорема бойынша анықталды.

Лоран қатарының анықталу облысының құрылымы.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

түріндегі қатар Лоран қатары деп аталады. Анықтама бойынша

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (3.9)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ қатарын Лоран қатарының дұрыс бөлігі деп

атайды. Оның жинақталу облысы $|z - z_0| < R$ ($R = 0, R = \infty$ жағдайларын қоса санағанда) дөңгелегі болады.

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ немесе Лоран қатарының бас бөлігі деп

аталатын $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ қатарын қарастырайық.

$z - z_0 = \frac{1}{t}$ белгілеуін енгізсек, Лоран қатарының бас бөлігі

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ түрінде жазылады. Бұл қатар параметріне қатысты

қайсыбір $|t| < r'$ дөңгелегінде жинақты. Сонда Лоран

қатарының бас бөлігінің жинақталу облысы $|z - z_0| > \frac{1}{r'}$,

болады. Енді $\frac{1}{r'} = r$ делік. Егер $r > R$ болса, онда бүкіл

комплекс жазықтығында (3.9) қатары жинақталмайды. Егерде

$r < R$ болса, онда $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ қатарының жинақталу

облысы $r < |z - z_0| < R$ сақинасы болады. $r = 0$ және $R = \infty$

$R = \infty$ жағдайлары да қаралады.

Абель теоремасынан (функционалдық қатардың қосындысы аналитикалық болуы туралы теорема)

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ қатарының $r < |z - z_0| < R$ жинақталу

сақинасында аналитикалық болатыны шығады.

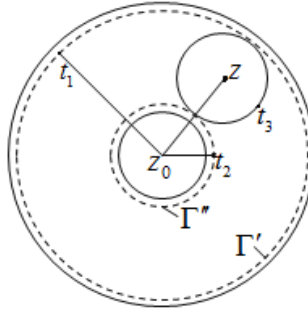
Одан әрі осы тұжырымға қарсы мағынадағы есепті қарастырайық. Егер функция сақинада аналитикалық болса, онда оның осы сақинада Лоран қатарына жіктелуі туралы сұрақ туады.

Теорема. $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық болатын әртүрлі функцияны осы сақинада жинақталатын

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ дәрежелік қатар түрінде көрсетуге

болады, мұнда $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}}$; Γ_ρ – сақинаның

ішінде центрі z_0 нүктесінде жататын кез келген шеңбер.



3.3-сурет

Дәлелдеуі. z - сақина ішінде жатқан кез келген нүкте делік. Сақинаның ішінен центрі z_0 нүктесінде жататын Γ' және Γ'' шеңберлерін z нүктесі осылардың арасында қалатындай етіп жүргізейік. Келесі қадамда $\Gamma'-\Gamma''$ сақинасының ішінде толықтай жататын центрі z нүктесінде болатын шеңберді γ таңбасымен белгілейік.

Енді Γ' , Γ'' , γ контурларымен шектелген үшбайланысты облыста аналитикалық функция болатын $\varphi(\tau) = \frac{f(\tau)}{\tau - z}$ функциясына көпбайланысты облыстар үшін Кошидің интегралдық формуласын қолданайық:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\tau_1) d\tau_1}{\tau_1 - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma''} \frac{f(\tau_2) d\tau_2}{\tau_2 - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\tau_3) d\tau_3}{\tau_3 - z}.$$

Ескерту. τ_1 және τ_2 комплекс айнымалылары сәйкес Γ' және Γ'' шеңберлерінің ағымдық нүктелері. γ контурының ішінде $f(z)$ аналитикалық функция, сондықтан Кошидің интегралдық формуласы бойынша

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\tau_3) d\tau_3}{\tau_3 - z} = f(z)$$

Алдыңғы теңдіктен

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\tau_1) d\tau_1}{\tau_1 - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma''} \frac{f(\tau_2) d\tau_2}{\tau_2 - z}.$$

$\frac{1}{\tau_1 - z}$ бөлшегін $(z - z_0)$ дәрежелері бойынша жіктейік:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1 - z} &= \frac{1}{(\tau_1 - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\tau_1 - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\tau_1 - z_0}} = \\ &= \frac{1}{\tau_1 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\tau_1 - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\tau_1 - z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

өйткені Γ' контурында $\left| \frac{z - z_0}{\tau_1 - z_0} \right| = q_1 < 1$ арақатынасы

орындалады. Ал Γ'' контурында $\left| \frac{\tau_2 - z_0}{z - z_0} \right| = q_2 < 1$

арақатынастары орындалады, демек

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_2 - z} &= \frac{1}{(\tau_2 - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\tau_2 - z_0}{z - z_0}} = \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_2 - z_0}{z - z_0} \right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau_2 - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}. \end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\tau_1-z_0)^{n+1}}$ және $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau_2-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$ қатарлары Γ' және Γ''

шеңберлерінде бірқалыпты жинақты, өйткені олар жинақты

$\sum_{n=0}^{\infty} q_1^n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} q_2^n$ сандық қатарларымен мажорланған, мұнда

$q_1 < 1$, $q_2 < 1$. Демек оларды мүшелеп интегралдауға болады.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\tau_1) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\tau_1-z_0)^{n+1}} \right] d\tau_1 - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma''} f(\tau_2) \left[\frac{(\tau_2-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \right] d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{\Gamma'} \frac{f(\tau_1) d\tau_1}{(\tau_1-z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n + \\ &\quad \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\oint_{\Gamma''} f(\tau_2) (\tau_2-z_0)^{n-1} d\tau_2 \right] \frac{1}{(z-z_0)^n}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\tau_1) d\tau_1}{(\tau_1-z_0)^{n+1}} = a_n, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma''} f(\tau_2) (\tau_2-z_0)^{n-1} d\tau_2 = a_{-n} \quad (3.9)$$

белгілеулерін енгізейік. Сонда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad (3.10)$$

жіктелуін аламыз.

Көпбайланысты облыстар үшін Коши теоремасы бойынша Γ' және Γ'' шеңберлерінің орнына центрі z_0 нүктесінде, ал өзі Γ' және Γ'' контурларының арасында жататын кез келген Γ шеңберін алуға болады. Осы тұжырымға байланысты Лоран

коэффициенттері үшін алынған (3.9) формулаларын біріктірейік, сонда

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ және}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Теорема дәлелденді.

Сонымен $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясының көрсетілімін $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ түрінде жазуға болады. $f_1(z)$ функциясы $|z - z_0| < R$ облысында, ал $f_2(z)$ функциясы $|z - z_0| > r$ облысында аналитикалық болады. $r < |z - z_0| < R$ сақинасы $f_1(z)$ және $f_2(z)$ функцияларының аналитикалық болатын облыстарының қиылысуын көрсетеді.

Егер z нүктесінде Лоран қатарын құрайтын екі қатар да абсолютті жинақты болса, онда осы нүктеде екі жақты дәрежелік қатар да абсолютті жинақты деп айтады. Осы сияқты Лоран қатарын құрайтын екі қатардың екеуі де қайсыбір M жиынында бірқалыпты жинақты болса, онда осы жиында екі жақты дәрежелік қатар да бірқалыпты жинақты болады. Осы анықтамаларға сүйеніп келесі тұжырымдарды жасауға болады:

1) $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық болатын функцияның Лоран қатары осы сақинада абсолютті жинақты болады;

2) $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық болатын функцияның Лоран қатары осы сақинаның ішкі облысында бірқалыпты жинақты, дербес жағдайда $r < r_1 \leq R_1 < R$ шарттары орындалатын кез келген тұйық $r_1 \leq |z - z_0| \leq R_1$ сақинасында ол бірқалыпты жинақты болады.

Бұдан Лоран қатарын жинақталу сақинасының ішіндесан рет мүшелеп дифференциалдауға және жинақталу сақинасының ішінде жатқан кез келген доға бойынша мүшелеп интегралдауға болатыны шығады.

Соңында кез келген сақинада аналитикалық болатын функцияның сол сақинада Лоран қатарына жіктелетінін айта кетейік. Сақинаның сыртқы шекарасындағы функцияның ерекше нүктелері Лоран қатарының дұрыс бөлігінің, ал ішкі шекарасындағы ерекше нүктелері Лоран қатарының бас бөлігінің ерекше нүктелері болады.

Лоран қатары жинақталатын $r < |z - z_0| < R$ сақинасының радиустарының дербес жағдайларда қабылдайтын мәндері:

1) $r = 0, R < \infty$ (бұл жағдай z_0 нүктесінің тесілген маңайын көрсетеді, яғни центрі тесілген радиусы R дөңгелек);

2) $r = 0, R = \infty$ (z_0 нүктесін есептемегенде Лоран қатары бүкіл комплекс жазықтығында жинақты);

3) $0 < r < \infty, R = \infty$ (бұл жағдайда Лоран қатарының жинақталу сақинасы $|z - z_0| = r$ шеңберінің сыртқы бөлігі болады).

Лоран қатарының коэффициенттері үшін де Коши теңсіздіктері дұрыс болады.

Теорема. $r < |z - z_0| < R$ сақинасында $f(z)$ функциясы аналитикалық, ал оның модулі $|z - z_0| = \rho$ ($r < \rho < R$) шеңберінде $A > 0$ санынан артпайды делік. Сонда осы функцияның Лоран қатарына жіктелуіндегі коэффициенттері

$$|a_n| \leq \frac{A}{\rho^n}, n \in \mathbb{Z}$$

теңсіздіктерін қанағаттандырады.

Функцияның Лоран қатарына жіктелуінің жалғыздығы

Теорема. $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясының осы сақинада Лоран қатарына жіктелуі тек жалғыз ғана болады.

Дәлелдеуі. $r < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясының осы сақинада

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \quad (3.11)$$

екі Лоран қатарына жіктелсін дейік. (3.11) қатарларын $(z - z_0)^{-m-1}$ көбейтейік, мұндам - бекітілген бүтін сан. Сонда

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-m-1} = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^{n-m-1} \quad (3.12)$$

теңдігі алынады. $|z - z_0| = \rho$, шеңберінде (3.12) қатарлары бірқалыпты жинақты, онда оларды осы шеңбер бойынша мүшелеп интегралдайтын болсақ, кез келген m бүтін саны үшін $c_m = d_m$ тепе-теңдігін аламыз, өйткені

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0, \text{ егер } k \neq -1, \\ 2\pi i, \text{ егер } k = -1. \end{cases}$$

Функцияны ∞ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктеу

$|z| > R$ облысында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясын ∞ нүктесінің маңайындағы аналитикалық функция деп атайды.

Егер $R < |z| < \infty$ сақинасында $f(z)$ функциясы z дәрежелері бойынша жинақталатын

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Лоран қатарына жіктелетін болса, онда функция ∞ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктелген деп айтады. $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда мүшелері нөлге ұмтылатын

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

қатарын ∞ нүктесінің маңайындағы дұрыс бөлігі деп атайды.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатары ∞ нүктесінің маңайындағы Лоран қатарының бас бөлігі деп аталады.

Мысал. $f(z) = \cos^2 \frac{1}{z}$ функциясын z бойынша Лоран қатарына жікте.

Шешуі. Бұл функция $z = 0$ нүктесінен басқа C_z комплекс жазықтығының барлық нүктелерінде аналитикалық функция болады. Демек $0 < |z| < \infty$ сақинасында берілген функциямыз Лоран қатарына жіктеледі. $f(z)$ функциясының қалыпты (стандартты) жіктелуін пайдалану үшін

$$f(z) = \cos^2 \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(21 + \cos \frac{2}{z} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2}{z}$$

түрінде жазайық. Сонда

$$\cos^2 \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{2}{z} \right)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)! z^{2n}}, \quad |z| > 0.$$

Мысал. $f(z) = e^{2z} / (z-1)$ функциясын $(z-1)$ бойынша Лоран қатарына жікте.

Шешуі. Бұл функция $|z-1| > 0$ сақинасында аналитикалық функция болады. Оны

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z-1} = \frac{e^{2(z-1)+2}}{z-1} = \frac{e^2}{z-1} e^{2(z-1)}$$

түріне келтірейік те, қалыпты жіктелуінде пайдаланайық. Сонда

$$\frac{e^{2z}}{z-1} = \frac{e^2}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(z-1))^n}{n!} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-1)^{n-1}, \quad |z-1| > 0.$$

Мысал. $f(z) = \frac{2z^2 + 6z - 14}{(z-2)(z+4)}$ функциясын $2 < |z| < 4$

сақинасында Лоран қатарына жікте.

Шешуі. $f(z)$ функциясын жай бөлшектердің қосындысына жіктейік

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z-2)(z+4)} = 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+4}.$$

Жай бөлшектерді $2 < |z| < 4$ сақинасында Лоран қатарына жіктейік және бұл жерде $\left| \frac{2}{z} \right| < 1$ және $\left| \frac{z}{4} \right| < 1$ ескерейік:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

Сонда

$$f(z) = \frac{2z^2 + 6z - 14}{(z-2)(z+4)} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

Мысал. $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$ функциясын $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жікте.

Шешуі. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$, $|z| > 0$ қалыпты жіктелуінен

$$\begin{aligned} z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} &= z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) = \\ &= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-3}} + \dots \end{aligned}$$

шығады немесе

$$f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!z} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-3}} + \dots$$

Жаттығулар

1. $z_0 = 0$ нүктесі $\frac{1}{\sin z}$ функциясының Лоран қатарына жіктелетін барлық облыстарының центрі делік. Осы облыстарды көрсет.

2. $e^{\frac{1}{z^2}}$ функциясын $0 < |z| < \infty$ сақинасында Лоран қатарына жікте.

3. $\sin \frac{1}{z-1}$ функциясын $0 < |z-1| < \infty$ сақинасында Лоран қатарына жікте.

4. $f(z) = \frac{3z^2 + 3z - 9}{(z-1)(z+2)}$ функциясын $1 < |z| < 2$ сақинасында Лоран қатарына жікте.

5. $f(z)$ функциясын z_0 нүктесінің маңайында Лоран қатарына жікте:

а) $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, |a| < |b|;$

б) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 3}, z_0 = 1.$

6. Берілген функцияларды z_0 нүктесінің маңайында Лоран қатарына жікте:

а) $\cos \frac{z}{z+1}, z_0 = -1;$ б) $\frac{1-e^{-z}}{z^3}, z_0 = 0.$

7. $f(z) = e^z / z^2$ функциясын z_0 нүктесінің маңайында Лоран қатарына жікте.

8. $e^{\frac{z+1}{z}}$ функциясын $0 < |z| < \infty$ сақинасында Лоран қатарына жікте.

9. $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)(z - 3)}$ функциясын $1 < |z| < 3$

сақинасында Лоран қатарына жікте.

10. $f(z) = \frac{\sin z}{1 - z}$ функциясын $|z| < 1$ дөңгелегінің ішкі

және сыртқы бөліктерінде Лоран қатарына жікте (жіктелудің бірнеше алғашқы мүшелерін тап).

Аналитикалық функцияның нөлдері

Функция нөлінің реті. Егер $f(z_0) = 0$ болса, онда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының нөлі деп аталады.

z_0 нүктесінде аналитикалық болатын $f(z)$ функциясы үшін $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ теңдігі орындалсын делік, мұнда $\varphi(z_0) \neq 0$. Сонда z_0 нүктесін $f(z)$ аналитикалық функциясының еселігі m тең нөлі деп атайды.

Теорема. Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының еселігі m тең нөлі болса, онда z_0 нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясының Тейлор қатарына жіктелуі келесі түрде жазылады

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad a_m \neq 0$$

және керісінше, егер бұл теңдік орындалса, онда $f(z)$ функциясы үшін z_0 нүктесі еселігі m нөлі.

Шынында да, егер $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ теңдігі орындалатын болса, онда $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) = m! \varphi(z_0) \neq 0$. Сондықтан $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$ және

$$f(z) = (z - z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots].$$

Ескерту. Егер z_0 нүктесі $f(z)$ аналитикалық функциясының еселігім тең нөлі болса, онда $f(z)$ функциясының басқа нөлдері болмайтындай z_0 нүктесінің қайсы $f(z)$. Ақырсыз қашық нүктеде $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) = 0$ болса, онда ∞ нүктесі функциясының нөлі болады.

Оқшауланған ерекше нүктелердің классификациясы

Ерекшеліктері жойылатын нүктелер. Егер $f(z)$ нүктесінде $f(z)$ аналитикалық болмаса, онда $f(z)$ нүктесін ерекше нүкте деп атайды.

Егер z_0 ерекше нүктесінің қайсыбір маңайында $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінен басқа ерекше нүктелер болмаса, онда z_0 нүктесін сол функцияның оқшауланған ерекше нүктесі деп атайды.

Анықтама. $f(z)$ функциясы $z = z_0$ нүктесінің қайсыбір тесілген маңайында аналитикалық, ал z_0 нүктесінің өзінде аналитикалық функция болмасын делік. Сонда $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі деп аталады.

Еске салу. Анықтама. z_0 ($z_0 \neq \infty$) нүктесінің тесілген маңайы деп кез келген $0 < |z - z_0| < \rho$ сақинасын айтады. Басқаша айтқанда z_0 центрі алынып тасталған $0 < |z - z_0| < \rho$ дөңгелегі.

Одан әрі $f(z)$ функциясы $\rho < |z| < \infty$ облысында аналитикалық, ал $z = \infty$ (ақырсыз қашық нүкте) нүктесінде аналитикалық функция болмасын делік. Сонда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін оқшауланған ерекше нүкте болады.

Ерекше нүктелердің оқшауланбауы да мүмкін, мысалы $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ функциясы үшін z_0 нүктесінің қандай кіші

маңайын қарастырмайық бәрібір $f(z)$ функциясының бөлімі нөлге айналатындай нүктелерін табамыз. Яғни, z_0 нүктесінің кез келген маңайында $f(z)$ функциясы аналитикалық болмайтын нүктелері табылады. Демек, $\left\{ \frac{1}{\pi n} \right\}$ нүктелер жиыны оқшауланбайтын ерекше нүктелерді береді. Сонымен бірге оқшауланбайтын ерекше нүктелердің қатарына функцияның тармақтану нүктелері де жатады (мысалы, $\sqrt[n]{z}$ және $\ln z$ функциялары үшін $z = 0$ нүктесі).

Анықтама. Айталық z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының тармақтану нүктесі делік. Сонда z_0 нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясының ешбір аналитикалық тармағы болмайды (өйткені тармақтану нүктесін айнала айналу функцияның бір тармағынан екіншісіне өтуге әкеледі).

z_0 нүктесі оқшауланған ерекше нүкте делік. Функцияның $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ шегіне қатысты оқшауланған ерекше нүктелердің классификациясын құрамыз.

1) егер $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ақырлы болса, онда z_0 ерекшелігі жойылатын нүкте;

2) егер $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ болса, онда z_0 нүктесі полюс;

3) егер $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ табылмаса, онда z_0 нүктесі маңызды ерекше нүкте.

Мысал. $f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z^3 + 1)(z^3 + i)}$ функциясының барлық

ақырлы ерекше нүктелерін тап.

Шешуі. Бөлшектің алымы да және бөлімі де аналитикалық функциялар болғандықтан $f(z)$ функциясының ерекше нүктелері бөлімінің нөлдері болады, яғни $z^3 + 1 = 0$ және $z^3 + i = 0$ теңдеулерінің түбірлері. Демек $z_1 = -1$,

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = i, \quad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ түбірлері берілген функцияның оқшауланған}$$

ерекше нүктелері және барлығы бірдей полюстер болады, өйткені әрқайсысы үшін $\lim_{z \rightarrow z_k} f(z) = \infty$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Мысал. $f(z) = \frac{\sin z}{\sin \frac{1}{z}}$ функциясының барлық ақырлы

ерекше нүктелерін тап және қай түрге жататынын анықта.

Шешуі. $f(z)$ функциясының ерекше нүктелерін

бөлшектің бөлімін нөлге теңестіріп табамыз $\sin \frac{1}{z} = 0$, бұдан

$$\frac{1}{z_k} = k\pi, \quad z_k = \frac{1}{k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Бұл оқшауланған ерекше нүктелердің әрқайсысы полюс болады, өйткені

$$\lim_{z \rightarrow z_k} f(z) = \infty, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$z_0 = 0$ нүктесі оқшауланған ерекше нүкте болмайды, өйткені

оның кез келген маңайында өзінен басқа $z_k = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$

формуласымен анықталатын ерекше нүктелердің ақырсыз жиыны жатыр. Мұндай ерекше нүкте z_k полюстерінің шектік

ерекше нүктесі деп аталады, өйткені $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0 = 0$.

Мысал. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функциясының ерекше нүктесін тап және қай түрге жататынын анықта.

Шешуі. $z = 0$ нүктесі оқшауланған ерекше нүкте.

$$\lim_{z \rightarrow +0} e^{\frac{1}{z}} = \infty \quad \text{және} \quad \lim_{z \rightarrow -0} e^{\frac{1}{z}} = 0$$

болғандықтан нақты облыста $(z = x) \lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ шегі табылмайды, олай болса комплекс

облысында да $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ шегі табылмайды, демек $z = 0$ нүктесі

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ функциясының маңызды ерекше нүктесі болады.

Мысал. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ функциясының ерекше нүктесін

тап және қай түрге жататынын анықта.

Шешуі. $z_0 = 0$ нүктесінен басқа нүктелерде $f(z)$ аналитикалық функция. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}$. Демек

$z_0 = 0$ нүктесі ерекшелігі жойылатын нүкте.

Оқшауланған ерекше нүктенің маңайында Лоран қатарының сыйпатына байланысты ерекше нүктенің қай түрге жататынын анықтайық.

Айталық z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі және осы нүктенің маңайында $f(z)$ функциясы Лоран қатарына жіктелсін делік:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{бас бөлігі}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{дұрыс бөлігі}}. \end{aligned}$$

Теорема. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының ерекшелігі жойылатын нүктесі болу үшін $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің маңайында тек Тейлор қатарына жіктелуі қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. z_0 ерекшелігі жойылатын нүкте делік. Анықтама бойынша $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ шегі ақырлы, яғни

$$|f(z)| < M < \infty.$$

Демек $f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің маңайында шектеулі (шенелген).

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\tau) (\tau - z_0)^{n-1} d\tau \quad \text{коэффициенттерін бағалайық,}$$

мұнда Γ контуры центрі z_0 нүктесінде жататын радиусы ρ - ға тең шеңбер. Сонда

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} |f(\tau)| |\tau - z_0|^{n-1} d\tau \leq \frac{M}{2\pi} \rho^{n-1} 2\pi\rho = M\rho^n.$$

Бұдан $\lim_{\rho \rightarrow +0} M\rho^n = 0 \Rightarrow a_{-n} = 0$, өйткені радиусын калауымызша таңдауға болады. Керісінше, егер

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{жіктелуі берілсе, онда} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0.$$

Демек анықтама бойынша z_0 нүктесі ерекшелігі жойылатын нүкте.

$z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының ерекшелігі жойылатын нүктесі делік. Сонда z_0 нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясы

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

дәрежелік қатарына жіктеледі.

Ескерту. Егер функцияның ерекшелігі жойылатын нүктедегі $f(z_0)$ мәнін оның сол нүктеге ұмтылатын

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0 \quad \text{мәніне теңестіретін болсақ, онда осындай}$$

қағиданың негізінде құрылған жаңа функциямыз z_0 нүктесінде аналитикалық функция болады.

Полюстер

Функцияның полюстерін зерттеу оның кері функциясының нөлдерін зерттеумен пара-пар.

z_0 нүктесінің қайсыбір маңайында $f(z)$ функциясы аналитикалық функция делік.

Теорема. z_0 нүктесінде аналитикалық болатын

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

функциясының сол z_0 нүктесіндегі мәні нөлге

тең болғанда және тек сонда ғана z_0 нүктесі бастапқы $f(z)$ функциясының полюсі болады.

Дәлелдеуі. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясы үшін полюс делік.

Полюстің анықтамасынан z_0 нүктесінің қайсыбір $0 < |z - z_0| < \delta$ маңайында $f(z)$ функциясының нөлге тең болмайтындығы шығады. Демек, осы нүктенің маңайында

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}, z \neq z_0$$

функциясы аналитикалық болады.

Полюстің анықтамасы бойынша

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, \text{ онда } g(z_0) = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)} = 0.$$

Анықтама. Айталық $z = z_0$ нүктесі $g(z) = \frac{1}{f(z)}$

функциясының нөлі делік, сонда осы нөлдің еселігі $f(z)$ функциясы үшін полюстің ретін көрсетеді (немесе полюстің еселігін.)

Теорема. $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ теңдігі орындалғанда және тек

сонда ғана z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының еселігім тең полюсі болады, мұнда z_0 нүктесінде $\psi(z)$ аналитикалық функция және $\psi(z_0) \neq 0$.

Дәлелдеуін оқырмандарға қалдырамыз.

Анықтама. $f(z) = z^m h(z)$, $h(\infty) \neq 0$ теңдігі

орындалғанда және тек сонда ғана $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болады, мұнда $h(z)$ функциясы $z = \infty$ нүктесінде аналитикалық функция, $m \geq 1$ - бүтін (m - полюстің реті).

Салдар. $z_0 \neq \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болу үшін

$$f(z) \sim A(z-z_0)^{-m}, A \neq 0 (z \rightarrow z_0)$$

асимптотикалық формуласының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Осы сияқты ақырсыз қашық нүкте $f(z)$ функциясының еселігі мтең полюсі болу үшін

$$f(z) \sim Bz^m, B \neq 0 (z \rightarrow \infty)$$

асимптотикалық формуласының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Теорема. Оқшауланған ерекше z_0 нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясы Лоран қатарына жіктелсін делік. Сонда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болу үшін Лоран қатарының бас бөлігі санаулы санды мүшелерден тұруы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілік. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының еселігі m тең полюсі делік. Сонда алдыңғы теоремаға сүйене отырып, $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ теңдігін аламыз, мұнда $\psi(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық функция және $\psi(z) \neq 0$. Әрі қарай z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық болатын $\psi(z)$ функциясын дәрежелік қатарға жіктейік:

$$\psi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_m(z-z_0)^m + \dots, \\ a_0 = \psi(z_0) \neq 0.$$

Сондықтан

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_m(z-z_0)^m + \dots}{(z-z_0)^m} = \\ = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0} + a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \dots$$

Бұл жіктелуден Лоран қатарының бас бөлігі санаулы санды қосылғыштардан тұратынын көреміз.

Жеткіліктілік. $f(z)$ функциясы келесі түрде Лоран қатарына жіктелсін делік:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

мұнда $a_{-m} \neq 0$. Сонда

$$f(z)(z-z_0)^m = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_0(z-z_0)^m + \dots \quad (3.13)$$

(3.13) қатары z_0 нүктесінің қайсыбір маңайында, сондай-ақ z_0 нүктесіндеде жинақты. Бұл қатардың қосындысын $\psi(z)$ арқылы белгілейік. Сонда (3.13) теңдігінен $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ шығады.

Демек z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының еселігі m тең полюсі.

Мысал. $g(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ функциясы үшін $z_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

нүктелері оның жай полюстері болады, өйткені $g'\left(\frac{1}{n}\right) \neq 0$.

Онда бұл нүктелер $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$ функциясының жай

полюстері болады.

Мысал. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3}$ функциясы үшін $z = 0$ нүктесі

оның жай полюсі болады, өйткені біріншіден $f(z)$ функциясы $z = 0$ нүктесінің тесілген маңайында аналитикалық функция болады. Екіншіден e^z және $\cos z$ функцияларын $z = 0$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктеп, $f(z)$ функциясынан $z \rightarrow 0$ ұмтылдырып, шекке көшсек,

$$\frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^2 / 2}{z^3} = \frac{1/2}{z}$$

асимптотикалық формуласын аламыз. Демек $z = 0$ нүктесі жай полюс.

Мысал. $f(z) = \frac{e^{(z-3)^2} - 1}{\sin(z-3) - (z-3)}$ функциясы үшін

$z_0 = 3$ нүктесінің сипаттамасын бер.

Шешуі. $\varphi(z) = e^{(z-3)^2} - 1$ және

$\psi(z) = \sin(z-3) - (z-3)$ функцияларын қарастырайық.

$\varphi(z)$ функциясы үшін $z_0 = 3$ нүктесі оның еселігі $m = 2$ нөлі, өйткені

$$\varphi(3) = 0, \varphi'(z)|_{z=3} = 2e^{(z-3)^2} \cdot (z-3)|_{z=3} = 0, \varphi''(z)|_{z=3} \neq 0.$$

Ал $\psi(z)$ функциясы үшін $z_0 = 3$ нүктесі оның еселігі $m = 3$ нөлі, өйткені

$$\psi(3) = 0, \psi'(z)|_{z=3} = (\cos(z-3) - 1)|_{z=3} = 0,$$

$$\psi''(z)|_{z=3} = -\sin(z-3)|_{z=3} = 0, \psi'''(z)|_{z=3} \neq 0.$$

Демек $\varphi(z) = (z-3)^2 \varphi_1(z)$, $\psi(z) = (z-3)^3 \psi_1(z)$, мұнда $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ функциялары $z_0 = 3$ нүктесінде аналитикалық функциялар және осы нүктеде бұл функциялар нөлге айналмайды. Белгілеу енгізейік: $\chi(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$, $\chi(3) \neq 0$.

Сонда берілген функцияны $f(z) = \frac{\chi(z)}{z-3}$ түрінде жазуға болады. Олай болса анықтамаға сай $z_0 = 3$ нүктесі бастапқы функцияның жай полюсі болады.

Теорема. Оқшауланған ерекше z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды ерекше нүктесі болу үшін z_0

нүктесінің тесілген маңайында $f(z)$ функциясының Лоран қатарына жіктелуіндегі бас бөлігі осы z_0 нүктесінің маңайында ақырсыз көп қосылғыштардан (мүшелерден) тұруы қажетті және жеткілікті.

Шынында да z_0 нүктесінің маңайында Лоран қатарының бас бөлігі болмаса, онда z_0 нүктесі ерекшелігі жойылатын нүкте болады. Керісінше, егер z_0 нүктесінің маңайында Лоран қатарының бас бөлігі санаулы санды қосылғыштардан тұрса, онда z_0 нүктесі еселігі осы қосылғыштардың реттік санына тең полюсі болады. Демек z_0 нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясының мына түрде жіктелуі

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

z_0 нүктесінің маңызды ерекше нүкте екенін көрсетеді.

Оқшауланған маңызды ерекше z_0 нүктесінің маңайындағы функцияның өзгерісін келесі Ю. Сохоцкий (1842-1927) теоремасы сипаттайды.

Теорема. Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды ерекше нүктесі болса, онда кез келген комплекс $A \in \mathbb{C}$ саны үшін осы z_0 нүктесіне жинақталатын және $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ теңдігі орындалатындай $\{z_n\}$ нүктелер тізбегін табуға болады.

Теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Ескерту. $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды ерекше нүктесі делік. Сонда $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ функциясы үшін бұл

нүкте не маңызды ерекше нүкте, не оқшауланбаған ерекше нүкте болады.

Мысал. Егер $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болса, онда $g(z) = e^{f(z)}$ функциясы үшін бұл нүкте маңызды ерекше нүкте болады.

$z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының реті m тең полюсі болсын дейік. Демек z_0 нүктесінің маңайында

$$\frac{1}{f(z)} \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} \frac{(z - z_0)^m}{A} \quad \left(f(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} A(z - z_0)^{-m} \right), \quad A \neq 0$$

асимптоталық формуласын қолдануға болады. Мұнда $A = |A|e^{i\alpha}$ және $z - z_0 = re^{i\varphi}$ делік, сонда

$$f(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} |A| r^{-m} e^{i(\alpha - m\varphi)}. \quad (3.14)$$

Нақты осымен $\varphi = \frac{\alpha}{m}$ бұрышын жасайтын және $z = z_0$ нүктесі арқылы өтетін $z - z_0 = re^{i\alpha/m}$ сәулесінің бойында жатқан $z \in \mathbb{C}$ нүктелері үшін (3.14) асимптотикалық формуланы $f(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} |A| r^{-m}$ түрінде жазуға болады. Осы сәуленің бойымен $z \rightarrow z_0$, яғни $r \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\arg f(z)$ мәні нөлге өте жақын, демек $e^{f(z)} \rightarrow \infty$.

Осы сияқты нақты осымен $\varphi = \frac{(\alpha + \pi)}{m}$ бұрышын жасайтын және $z = z_0$ нүктесі арқылы өтетін $z - z_0 = re^{i(\alpha + \pi)/m}$ сәулесінің бойында жатқан $z \in \mathbb{C}$

нүктелері үшін (3.14) асимптотикалық формуланы $f(z) \sim -|A|r^{-m}$ түрінде жазуға болады. Осы сәуленің бойымен $r \rightarrow 0$ ұмтылғанда $f(z) \rightarrow \infty$, бірақ бұл жағдайда $\arg f(z)$ мәніл немесе $(-\pi)$ мәндеріне өте жақын болады, демек $e^{f(z)} \rightarrow 0$.

Бұл $f(z)$ функциясының $z \rightarrow z_0$ ұмтылғандағы шегі табылмайтынын білдіреді, сондықтан анықтамаға сай $z = z_0$ нүктесі $g(z)$ функциясы үшін маңызды ерекше нүкте.

Ақырсыз қашық нүктенің сипаттамасы

Егер центрі координаталар бас нүктесінде жататын радиусы R тең қайсыбір $|z| \leq R$ дөңгелегінің сыртқы бөлігінде $f(z)$ функциясының ∞ нүктесінен басқа ерекше нүктелері болмаса, онда ∞ нүктесін $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі деп атайды.

Алайда кейбір функциялар үшін $z = \infty$ нүктесі оқшауланған ерекше нүкте болмайды. Мысалы $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ функциясы үшін $z = \infty$ нүктесі оның оқшауланған ерекше нүктесі емес, өйткені кез келген $|z| > R$ маңайында $f(z)$ функциясының ерекше нүктелері бар ($f(z)$ функциясының полюстері болатын $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ нүктелері). Мұндай жағдайларда ақырсыз қашық $z = \infty$ нүктесін полюстердің шектік нүктесі деп атайды.

Ақырсыз қашық нүктенің маңайында функцияның өзгерісіне байланысты оқшауланған ерекше $z = \infty$ нүктесі келесі типтерге бөлінеді:

1) егер $z \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ ақырлы болса, онда $z = \infty$ нүктесін ерекшелігі жойылатын нүкте деп атайды;

2) егер $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ болса, онда ақырсыз қашық нүкте $f(z)$ функциясының полюсі болады;

3) егер $z \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $f(z)$ функциясының ақырлы да немесе ақырсыз да шегі табылмайтын болса, онда ақырсыз қашық нүкте $f(z)$ функциясының маңызды ерекше нүктесі болады.

Ескерту. Егер $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының ерекшелігі жойылатын нүктесі болса, онда осы нүктедегі $z = \infty$ нүктесін $f(z)$ функциясының аналитикалық болатын нүктелерінің қатарына қосуға болады.

Мысал. $\frac{1}{z} \cos \frac{1}{z}$ функциясы үшін $z = \infty$ нүктесі ерекшелігі жойылатын нүкте. Шынында да $z \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $\cos \frac{1}{z} \rightarrow 1$, ал $\frac{1}{z} \rightarrow 0$. Демек $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z} = 0$. Мұндай жағдайларда $z = \infty$ нүктесін функцияның нөлі деп те атайды.

$z = \infty$ нүктесі z^3 функциясы үшін полюс, ал e^z , $\cos z$ және $\sin z$ функциялары үшін ерекше маңызды нүкте.

$z = \infty$ ерекше нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясының өзгерісін зерттеуді ақырлы $w = 0$ нүктесінің маңайында $f\left(\frac{1}{w}\right)$ функциясының өзгерісін зерттеуге алып келуге болады, өйткені

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{w \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{w}\right).$$

Анықтама. $f(z)$ функциясының $|z| > R$ облысында ақырсыз қашық нүктесінен басқа ерекше нүктелері жоқ делік. Сонда $f(z)$ функциясының z дәрежесі бойынша $|z| > R$ облысында жіктелуін $f(z)$ функциясының оқшауланған $z = \infty$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктелуі деп білеміз. Сонымен, егер

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, |z| > R \quad (3.15)$$

жіктелуі берілсе, онда ақырсыз қашық нүкте маңайында $f(z)$ функциясының Лоран жіктелуі туралы айтады. (3.15) теңдігін екі қатардың қосындысы түрінде жазайық:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}. \quad (3.16)$$

Сонда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ қатарын $z = \infty$ нүктесінің маңайында

$f(z)$ функциясының Лоран қатарына жіктелуіндегі бас бөлігі

деп атайды, ал $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ оның дұрыс бөлігі.

Лоран қатарына байланысты ∞ нүктесінің сипаттамасы

1) егер $z = \infty$ нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясының Лоран жіктелуінде оның бас бөлігі жоқ болса, онда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының ерекшелігі жойылатын нүктесі болады;

2) егер $z = \infty$ нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясының Лоран жіктелуінде оның бас бөлігі санаулы санды қосылғыштардан тұрса, онда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының еселігі осы қосылғыштардың реттік санына тең полюсі болады;

3) егер $z = \infty$ нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясының Лоран жіктелуінде оның бас бөлігі ақырсыз санды қосылғыштардан тұрса, онда $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды ерекше нүктесі болады.

Сонымен қатар, егер $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының ерекшелігі жойылатын нүктесі болса, онда осы нүктенің маңайында $f(z)$ функциясының Лоран қатары

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

түрінде жазылады.

Егер $z = \infty$ нүктесі полюс болса, онда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m a_n z^n, |z| > R, m \in \mathbb{N}.$$

Егер $z = \infty$ нүктесі маңызды ерекше нүкте болса, онда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m a_n z^n, |z| > R.$$

Бүтін және мероморфты функциялар

Анықтама. Бүкіл комплекс жазықтығында аналитикалық болатын функцияны бүтін функция деп атайды.

Мысалы, e^z , $\sin z$, $\cos z$ функциялары - бүтін функциялар.

Бүтін $f(z)$ функциясының $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Тейлор қатарын қарастырайық. Бұл қатар бүкіл комплекс жазықтығында жинақты, демек ақырсыз қашық нүктенің маңайында $f(z)$ функциясы үшін Лоран қатары болады. Кеңейтілген комплекс жазықтығында тек $z = \infty$ нүктесі ғана $f(z)$ функциясының ерекше нүктесі болады. $z = \infty$ нүктесінің ерекшелік сипаттамасына байланысты үш жағдай болуы мүмкін.

Теорема. Егер $z = \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының ерекшелігі жойылатын нүктесі болса, онда $f(z) \equiv \text{const}$.

Дәлелдеуі. Ақырсыз қашық нүкте маңайында $f(z)$ функциясы үшін Лоран қатарының бас бөлігі $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ түрінде жазылады. Бұл қатардың a_0 коэффициенттерінен басқа коэффициенттердің барлығы бірдей нөлге тең (теореманың шартына қатысты). Сонда $f(z) = a_0 = \text{const}$.

Егер $z = \infty$ нүктесі бүтін $f(z)$ функциясы үшін еселік ретік тең полюс болса, онда $f(z)$ функциясы k - дәрежелі көпмүшелік.

Егер $z = \infty$ нүктесі бүтін $f(z)$ функциясы үшін маңызды ерекше нүкте болса, онда мұндай $f(z)$ функцияларын бүтін трансцендентті функциялар деп атайды.

Теорема (Лиувиль теоремасы). $|z| > R$ облысында бүтін $f(z)$ функциясы $|f(z)| \leq Mz^k$ ($k \geq 0$ - бүтін) (3.18) теңсіздігін қанағаттандырсын дейік. Сонда $f(z)$ - дәрежесік артпайтын көпмүшелік.

Дәлелдеуі. Лоран қатарының коэффициенттері үшін

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad M = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|, \quad \gamma_\rho : |z - z_0| = \rho, \\ r < \rho < R$$

Коши теңсіздігін пайдаланайық. Сонда (3.18) теңсіздігі бойынша

$$|a_n| \leq \frac{MR^k}{R^n} = MR^{k-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

бағалауын аламыз.

Егер $n > k$ болса, онда (3.19) теңсіздігінен c_n коэффициенттерінің нөлге тең болатыны шығады, өйткені R радиусын соншалықты үлкен етіп алу біздің қолымызда. Демек $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = 0$, яғни $f(z)$ көпмүшелігінің ең үлкен дәрежесі k артпайды.

Анықтама. Бүкіл комплекс жазықтығында полюстерден басқа ерекше нүктелері болмайтын функцияны мероморфты функция деп атайды.

Комплекс жазықтығында мероморфты функцияның саналымды жиыннан артық полюстері болмайды, өйткені әрбір полюс оқшауланған ерекше нүкте, ал олардың шектік нүктесі тек ақырсыз қашық нүкте болуы мүмкін.

Теорема. Егер $z = \infty$ нүктесі мероморфты $f(z)$ функциясы үшін ерекшелігі жойылатын нүкте болса, онда $f(z)$ функциясы рационал функция болады. Теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Шегерімдер (вычеты)

Егер $f(z)$ функциясы бір байланысты D облысында аналитикалық функция болса, онда осы облыста толықтай

жататын Γ тұйық құрама-тегіс контур бойынша алынған интеграл $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ нөлге тең (Коши теоремасы).

Еске салу. Егер $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының аналитикалық нүктесі болса, онда осы нүктенің қайсыбір маңайында $f(z)$ функциясы Тейлор дәрежелік қатарына жіктеледі.

z_0 нүктесін $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болсын делік. Демек z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының аналитикалық нүктесі емес. Сондықтан біз z_0 нүктесін тесеміз де, одан әрі z_0 нүктесінің тесілген маңайын қарастырамыз. Келесі кадамда z_0 нүктесін Γ_1 және Γ_2 тұйық контурымен қоршайық және осы облыстың ішкі нүктелерінде z_0 нүктесінен басқа ерекше нүктелер жоқ дейік. Сонда Коши теоремасы бойынша (көп байланысты облыс үшін)

$$\oint_{\Gamma_1} f(z) dz = \oint_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Сонымен, егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болса, онда $f(z)$ функциясынан Γ_1 және Γ_2 контурлары бойынша алынған интегралдардың мәндері бірдей. Оқшауланған ерекше z_0 нүктесін қандай тұйық контурлармен қоршасақ та интегралдардың сол контурлар бойынша алынған мәндері бірдей болады, демек интегралдың мәні контурды таңдауға байланыссыз. Ол тек оқшауланған ерекше z_0 нүктесінің сипаттамасына (қай түрге жататыны) қатысты табылады. Бұл келесі анықтамаға негіз болады.
 $z_0 \in S$ нүктесі Γ тұйық контурымен қоршалсын делік.

Анықтама.

- 1) $z_0 \in \mathbb{C}$ нүктесі Γ тұйық контурының ішінде жатады;
- 2) Γ тұйық контурының ішкі нүктелерінде z_0 нүктесінен басқа ерекше нүктелер жоқ;
- 3) Γ тұйық контурының бойында да ерекше нүктелер жоқ

шарттары орындалатын болса, онда $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$ интегралы z_0 нүктесіндегі $f(z)$ функциясының шегерімі деп аталады.

Белгілеуі: $\operatorname{res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$ немесе

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz. \quad (3.20)$$

Ескерту. $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының аналитикалық дұрыс нүктесі болса, онда z_0 нүктесінің қайсыбір маңайында $f(z)$ функциясы Тейлор қатарына жіктеледі. Олай болса $\operatorname{res}[f(z); z = z_0] = 0$.

Енді $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі делік, онда z_0 нүктесінің тесілген қайсыбір маңайында $f(z)$ функциясы Лоран қатарына жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

мұнда

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau, \quad r < \rho < R.$$

Дербес жағдайда

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} f(\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

(3.20) және (3.21) формулаларын салыстыра отырып, келесі анықтамаға көшеміз.

Оқшауланған ерекше $z = z_0$ нүктесіндегі $f(z)$ функциясының шегерімі осы нүктенің маңайында $f(z)$ функциясы үшін анықталған Лоран қатарының a_{-1} коэффициентіне тең:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}. \quad (3.22)$$

(3.22) формуласынан

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} f(\tau) d\tau = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) \quad (3.23)$$

теңдігін аламыз.

Полюске қатысты шегерімдерді есептеудің формулалары

Оқшауланған ерекше $z = z_0$ нүктесі полюс болатын жағдайда сол нүктеде $f(z)$ функциясының шегерімін табатын (3.22) формуласынан басқа да формулаларды қарастыруға болады.

$z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін жай полюс болсын делік. Сонда

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Бұдан z_0 нүктесіндегі $f(z)$ функциясының шегерімі

$$a_{-1} = \text{res}[f(z); z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (3.24)$$

теңдігі арқылы анықталады.

Жай полюстегі шегерімді есептеу үшін екінші формуланы қорытып шығарайық. Дербес жағдайда $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\psi(z_0) \neq 0$ түрінде берілсін дейік, мұнда $z = z_0$ нүктесінде $\varphi(z)$ және $\psi(z)$ функциялары аналитикалық функциялар және $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$. Сонда $z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының жай полюсі болады.

Шегерімді табу үшін (3.24) формуланы пайдаланайық:

$$\begin{aligned} \text{res}[f(z); z = z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \end{aligned}$$

Сонымен

$$\text{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (3.25)$$

$z = z_0$ нүктесі $f(z)$ функциясының еселігі (реті) m тең полюсі болсын делік. Бұл осы нүктенің маңайында Лоран қатары

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

түрінде жазылатынын білдіреді.

Теңдіктің екі жағын бірдей $(z-z_0)^m$ көбейтейік:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

Бұл теңдікті $(m-1)$ рет дифференциалдап, $z \rightarrow z_0$ ұмтылғандағы шекке көшетін болсақ, a_{-1} коэффициенті келесі арақатынас арқылы анықталады:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right],$$

демек

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right]. \quad (3.26)$$

Маңызды ерекше нүктедегі шегерім

Маңызды ерекше нүктеде шегерімді есептейтін қарапайым формулалар жоқ. Сондықтан оны анықтамаға сүйеніп есептеу керек немесе ерекше нүктенің маңайында Лоран қатарына жіктеп, оның a_{-1} коэффициентін табу керек.

Ақырсыз қашық нүктедегі шегерім

Ақырсыз қашық ∞ нүктесін оқшауланған ерекше нүкте дейік. Сонда ∞ нүктесіндегі $f(z)$ функциясының шегерімі

$$\operatorname{res}\left[f(z); z = \infty\right] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$$

теңдігі арқылы есептелінеді. Γ контурының сыртқы бөлігінде $f(z)$ функциясының ақырлы ерекше нүктелері болмайды.

Енді кесілген ∞ нүктесінің маңайында $f(z)$ функциясы

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{Лоран қатарына жіктелсін делік, сонда}$$

$$\operatorname{res}\left[f(z); z = \infty\right] = a_{-1}.$$

1. Егер ∞ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін ерекшелігі жойылатын нүкте болса, онда оның тесілген маңайында $f(z)$ функциясын келесі түрде Лоран қатарына жіктеуге болады:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots, \quad |z| > R. \quad (3.27)$$

(3.27) теңдіктен a_{-1} коэффициентін табу үшін теңдіктің екі жағын бірдей дифференциалдап,

$$f(z) = -\frac{a_{-1}}{z^2} - \frac{2a_{-2}}{z^3} - \dots, \quad |z| > R$$

теңдігіне көшеміз. Бұдан

$$\operatorname{res}\left[f(z); z = \infty\right] = \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z). \quad (3.28)$$

Қысқаша қорытынды. Егер ∞ нүктесі ерекшелігі жойылатын нүкте болса, онда ақырсыз қашықтықтағы нүктеде функцияның шегерімі нөлге тең болмауы мүмкін. Керісінше ақырлы нүктедегі шегерім әрқашан нөлге тең.

2. Егер ∞ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін реті m тең полюс болса, онда қайсыбір $|z| > R$ облысында $f(z)$ функциясы

$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \quad (3.29)$$

түрінде Лоран қатарына жіктеледі.

(3.29) теңдігін z бойынша $(m+1)$ рет дифференциалдай отырып,

$$f^{(m+1)}(z) = \frac{(-1)^{m+1} (m+1)! a_{-1}}{z^{m+2}} - \frac{(-1)^{m+1} (m+2)! a_{-2}}{z^{m+3}} + \dots$$

теңдігін аламыз. Демек

$$\operatorname{res}[f(z); z = \infty] = \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} f^{(m+1)}(z)]. \quad (3.30)$$

3. ∞ нүктесі $f(z)$ функциясы үшін реті m тең нөлі болсын делік. Сонда $f(z)$ функциясы ақырсыз қашық нүктеде

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k+1)}}{z^{k+1}} + \dots \quad (3.31)$$

түрінде Лоран қатарына жіктеледі, мұнда $a_{-k} \neq 0$.

Келесі қадамда $z \rightarrow \infty$ ұмтылдырып, $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$,

$A = a_{-k} \neq 0$ асимптотикалық формуласын алайық.

Қысқаша қорытынды. Егер $k = 1$ болса, онда $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1} = -A$, ал егер $k \geq 2$ болса, онда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Шегерімдер туралы негізгі теорема

Теорема. Егер $f(z)$ функциясы бірбайланысты шенелген D облысында оқшауланған ақырлы санды $z_1, z_2, \dots, z_n$ ерекше нүктелерін есептемегенде аналитикалық функция, ал γ қисығы $z_1, z_2, \dots, z_n$ нүктелерін қамтитын D облысында жататын кез келген тұйық контур болса, онда

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{m=1}^n \operatorname{res} [f(z); z = z_m]. \quad (3.32)$$

Дәлелдеуі. Центрлері z_m нүктелерінде жататын радиустары сол нүктелерді қоршай алатындай жеткілікті түрде кіші болатын $\gamma_m (m=1, 2, \dots, n)$ шеңберлерін жүргізейік. Бұл шеңбердің сағат тілінің бағытына қарама-қарсы, өйткені γ контурымен шенелген ішкі D облысы үнемі сол жақта қалу керек. Сонда көпбайланысты облыстар үшін Кошидің интегралдық теоремасы бойынша

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{m=1}^n \oint_{\gamma_m} f(z) dz$$

немесе

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^n \oint_{\gamma_m} f(z) dz = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_m} f(z) dz = \sum_{m=1}^n \operatorname{res} [f(z); z = z_m].$$

Салдар. $f(z)$ функциясы оқшауланған санаулы санды ерекше нүктелерді есептемегенде кеңейтілген бүкіл комплекс жазықтығында аналитикалық функция дейік. Сонда $f(z)$ функциясының санаулы санды ерекше нүктелердегі шегерімдерінің қосындысы мен оның ақырсыз қашық нүктедегі шегерімінің қосындысы нөлге тең, яғни

$$\sum_{m=1}^n \operatorname{res}_{z=z_m} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Шынында да анықтама бойынша $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$, мұндағы γ контурының сыртқы бөлігінде $f(z)$ функциясының тек оқшауланған ақырсыз қашықтықтағы $z = \infty$ ерекше нүктесі ғана жатады.

Есеп шығару үлгілері (шегерімдерге қатысты)

Мысал. $e^{\frac{1}{z}}$ функциясының $z = 0$ нүктесіндегі шегерімін есепте.

Шешуі. $z = 0$ нүктесінің тесілген маңайында $e^{\frac{1}{z}}$ функциясын Лоран қатарына жіктейік.

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots,$$

сонда шегерімнің анықтамасы бойынша $a_{-1} = 1$ және $\operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = 1$.

Бұдан

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = 2\pi i$$

тең болатындығы шығады.

Мысал. $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$ дейік. Сонда $z = 0$ нүктесінің тесілген маңайында $f(z) = \frac{1}{z^6} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right)$ қатары оның

Лоран қатары болады. Демек $a_{-1} = \frac{1}{5!}$; онда анықтама

бойынша $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{5!}$. Бұдан

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^6} dz = \frac{2\pi i}{5!}$$

тең болатындығы шығады.

Мысал. $f(z) = \frac{z^2}{\sin 2z}$ функциясының $z_0 = \pi$

нүктесіндегі шегерімін есепте.

Шешуі. $\operatorname{res}_{z=\pi} f(z) = \frac{z^2}{(\sin 2z)'} \Big|_{z=\pi} = \frac{z^2}{2 \cos 2z} \Big|_{z=\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$

Мысал. $f(z) = \frac{2z+3}{z^2-z-6}$ функциясының ерекше

нүктелеріндегі шегерімдерін тап.

Шешуі. $z_1 = 3$ және $z_2 = -2$ нүктелері берілген функцияның жай полюстері. Жай полюстердегі шегерімдерді табу үшін (3.24) формуласын пайдаланайық:

$$\operatorname{res}_{z=3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{2z+3}{(z-3)(z+2)} = \frac{9}{5},$$

$$\operatorname{res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{2z+3}{(z-3)(z+2)} = \frac{1}{5}.$$

Екінші тәсіл: (3.25) формуласы бойынша

$$\operatorname{res}_{z=3} f(z) = \frac{2z+3}{(z^2-z-6)'} \Big|_{z=3} = \frac{2z+3}{2z-1} \Big|_{z=3} = \frac{9}{5},$$

$$\operatorname{res}_{z=-2} f(z) = \frac{2z+3}{2z-1} \Big|_{z=-2} = \frac{1}{5}.$$

Мысал. $I = \oint_{|z|=4} \frac{z^4}{1-z^8} dz$ интегралын есепте.

Шешуі. Интеграл таңбасының астындағы $f(z)$ функциясының бүкіл ақырлы ерекше нүктелерін табайық.

Оқшауланған ерекше нүктелер $z^8 = 1$ теңдеуінің түбірлері және олар $|z|=1$ шеңберінің бойында жататын жай полюстер болады. Ал $|z| \leq 4$ дөңгелегінің сыртқы бөлігінде

$f(z) = \frac{z^4}{1-z^8}$ функциясының тек бір $z = \infty$ ерекше нүктесі жатыр. Негізгі теорема бойынша ақырсыз қашық нүктедегі шегерім осы $|z| \leq 4$ дөңгелегінің ішінде жатқан сегіз ерекше нүктелердегі шегерімдердің қосындысын қарсы таңбамен алғанға тең.

$f(z) = \frac{z^4}{1-z^8}$ функциясы жұп болғандықтан, оның $z = \infty$ нүктесінің тесілген маңайындағы Лоран қатары тек жұп дәрежелері мүшелерден тұрады. Сондықтан Лоран қатарының $\frac{1}{z}$ мүшесінің алдындағы a_{-1} коэффициенті нөлге тең. Демек

$I = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Шынында да

$$f(z) = \frac{z^4}{1-z^8} = \frac{z^4}{-z^8 \left(1 - \frac{1}{z^8}\right)} = \frac{-1}{z^4} \frac{1}{1 - \frac{1}{z^8}} =$$

$$-\frac{1}{z^4} \left(1 + \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{16}} + \dots \right) = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^{12}} - \frac{1}{z^{20}} - \dots$$

Бұл жіктелуден $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ болатындығы шығады.

Мысал. $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z}{(z-2)^2(z-3)(z-6)} dz$ интегралын

есепте.

Шешуі. $|z| \leq 5$ дөңгелегінің ішкі бөлігінде $f(z)$ функциясының окшауланған $z_1 = 2$ және $z_2 = 3$ екі ерекше нүктелері жатыр. $z_1 = 2$ нүктесі реті $m = 2$ тең полюс, ал $z_2 = 3$ нүктесі интеграл таңбасы астындағы функцияның жай полюсі. Шегерімдер туралы негізгі теорема бойынша:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z}{(z-2)^2(z-3)(z-6)} dz = \operatorname{res}_{z=2} f(z) + \operatorname{res}_{z=3} f(z) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} (3.24), (3.26) \\ \text{формулалары} \\ \text{бойынша} \end{array} \right| = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[\frac{\sin 4z}{(z-3)(z-6)} \right] +$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 3} \frac{\sin 4z}{(z-2)^2(z-6)} = \cos 8 + \frac{5}{16} \sin 8 - \frac{1}{3} \sin 12.$$

Мысал. $e^{z+\frac{1}{z}}$ функциясының ерекше нүктелеріндегі шегерімдерін есепте.

Шешуі. Ерекше нүктелер: $0, \infty$. Біз тек 0 нүктесіндегі шегерімді табамыз (∞ нүктесіндегі шегерім оған қарама-қарсы).

$$\exp\left(z + \frac{1}{z}\right) = \exp(z) \cdot \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

Екі дәрежелік қатардың көбейтіндісі де дәрежелік қатарды береді. Нәтижесінде көбейтінді дәрежелік қатардың $\frac{1}{z}$ мүшесі $\frac{z^n}{n!}$ және $\frac{z^{-k}}{k!}$ түріндегі қосылғыштардың $k = m + 1$ шарты орындалатын көбейтіндісінен алынады. Демек

$$\operatorname{res}_{z=3} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Мысал. $f(z) = \sin \frac{z+4}{z-1}$ функциясының ерекше

нүктелеріндегі шегерімдерін тап.

Шешуі. Ерекше нүктелері: 1, ∞ . Тек 1 нүктесіндегі шегерімді табайық. $\sin \alpha + \beta$ формуласын (қосындының синусы) пайдалана отырып, $\frac{z+4}{z-1}$ бөлшегінің бүтін бөлігін бөліп шығарайық, сонда:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin\left(1 + \frac{5}{z-1}\right) = \sin 1 \cos \frac{5}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{5}{z-1} = \\ &= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^{2n+1}}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Бірінші қосылғыштағы шегерім нөлге тең, өйткені $(z-1)$ мүшесінің тек жұп дәрежелері ғана қатысып тұр. Ал екінші қосылғышты $(z-1)$ өрнегінің дәрежелері бойынша жіктелген

катарда, оның $\frac{1}{(z-1)}$ мүшесі $n=0$ болғанда ғана және тек сонда ғана, алынады. Сондықтан

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \cos 1 \cdot \frac{-5}{1} = -5 \cos 1.$$

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \quad \text{түріндегі интегралдарды есептеу}$$

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \quad (3.33)$$

түріндегі интегралдарды тұйық контур бойынша алынатын интегралдарға келтіру үшін $z = e^{i\varphi}$ алмастыруын жасайық. Сонда

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad d\varphi = -i \frac{dz}{z} \quad (3.34)$$

болады.

$z = e^{i\varphi}$ алмастыруы φ бұрыштық айнымалысы $[0; 2\pi]$ аралығында өзгергенде z айнымалысы $|z|=1$ шеңберін оң бағытта толықтай жүріп өтетінін көрсетеді. Демек, (3.34) алмастыруларынан кейін (3.33) интегралы

$$I = \int_{|z|=1} R_1(z) dz$$

түріндегі тұйық контур бойынша алынатын интегралға келтіріледі, мұнда

$$R_1(z) = -\frac{i}{z} \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]$$

рационал функция.

Шегерім туралы негізгі теорема бойынша

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} R_1(z),$$

мұнда $z_1, z_2, \dots, z_n$ нүктелері $|z| \leq 1$ дөңгелегінің ішінде жататын $R_1(z)$ рационал функциясының полюстері.

Мысал. $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, |a| < 1$ интегралын есепте.

Шешуі. $z = e^{i\varphi}$ алмастыруын жасайық. Сонда

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{idz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}$$

контурлық интегралын аламыз.

$f(z) = \frac{i}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}$ функциясының ерекше нүктелері

$$az^2 - (a^2 + 1)z + a = 0$$

теңдеуінің $z_1 = a$ және $z_2 = \frac{1}{a}$ түбірлері болады.

$|z| < 1$ ашық дөңгелегінің ішінде $f(z)$ функциясының тек бір $z_1 = a$ ерекше нүктесі жатады және ол интеграл таңбасы астындағы $f(z)$ функциясының жай полюсі болады. (3.25) формуласы бойынша $z = a$ нүктесіндегі шегерімді табайық:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{i}{2az - (a^2 + 1)} \Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2 - 1}, \quad I = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Шегерімдер бойынша интегралдарды есептеу үшін пайдалы мағлұматтар

Теорема (радиусы ақырсыз үлкен жарты шеңбер бойынша интегралды бағалау).

- 1) $D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R\}$, мұнда $R > 0$;
- 2) $f(z) \in C(D)$;
- 3) $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = \rho\}$, мұнда $\rho > R$;
- 4) $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \max_{z \in \gamma_\rho} |z| |f(z)| = 0$

дейік. Сонда

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 0. \quad (3.35)$$

Дәлелдеуі. $\rho \geq R$ болғанда

$$\left| \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_\rho} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \gamma_\rho} |z| |f(z)| \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{|z|} |dz| = \pi \max_{z \in \gamma_\rho} |z| |f(z)|. \quad (3.36)$$

бағалауын аламыз. (3.36) бағалауынан $\rho \rightarrow +\infty$ ұмтылдырып, шекке көшетін болсақ, (3.35) теңдігі алынады. Демек қажетті тұжырым дәлелденді.

Теорема (радиусы ақырсыз кіші жарты шеңбер бойынша интегралды бағалау).

- 1) $D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, 0 < |z| \leq R\}$, мұнда $R > 0$;
- 2) $f(z) \in C(D)$;
- 3) $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = \rho\}$, мұнда $0 < \rho < R$;

$$4) \lim_{\rho \rightarrow +0} \max_{z \in \gamma_\rho} |z| |f(z)| = 0$$

дейік. Сонда

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 0. \quad (3.37)$$

Дәлелдеуі. $\rho \leq R$ болғанда (3.36) бағалауы дұрыс. (3.36) бағалауынан $\rho \rightarrow +0$ ұмтылдырып, шекке көшетін болсақ, онда (3.37) теңдігі орындалады.

Теорема (Жордан леммасы).

- 1) $\alpha > 0$;
- 2) $D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R\}$, мұнда $R > 0$;
- 3) $f(z) \in C(D)$;
- 4) $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = \rho\}$, мұнда $\rho > R$;
- 5) $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = 0$

дейік. Сонда

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0. \quad (3.38)$$

Дәлелдеуі. $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ үшін $\sin \varphi > \frac{2}{\pi} \varphi$. Одан әрі

$M_\rho = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|$ деп алайық, сонда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\rho} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq M_\rho \int_{\gamma_\rho} |e^{i\alpha z}| |dz| = M_\rho \rho \int_0^\pi e^{-\alpha \rho \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2M_\rho \rho \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha \rho \sin \varphi} d\varphi \leq 2M_\rho \rho \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\alpha}{\pi} \rho \varphi} d\varphi = \end{aligned}$$

$$= -2M_{\rho} \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\frac{2\alpha}{\pi}\rho\varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{M_{\rho}\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\rho}) \leq \frac{M_{\rho}\pi}{\alpha}$$

теңсіздігі (бағалауы) алынады. Соңғы арақатынаста $\rho \rightarrow +\infty$ ұмтылдырып, шекке көшсек, (3.38) теңдігі алынады. Қажетті тұжырым дәлелденді.

Рационал функциялардың интегралдарын есептеу

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(z) dz \quad (3.39)$$

интегралын қарастырайық, мұнда $R(z)$ – рационал функция. (3.39) интегралы жинақты деп ұйғарайық. Шегерімдер туралы теореманы қолдану үшін $[-R, R]$ кесіндісінен және $C_R : \{z \mid |z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ жарты шеңберінен тұратын

қосымша γ_R түйық контурын енгізейік. Содан кейін $\int_{\gamma_R} R(z) dz$

интегралын қарастырайық.

Лемма. Нақты осьтің бойында жатпайтын санаулы санды оқшауланған ерекше $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ нүктелерін есептемегенде $\operatorname{Im} z \geq 0$ облысында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясы берілсін делік.

Егер $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ интегралы жинақты және

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \text{ болса, онда}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i, \quad (3.40)$$

мұнда C_R - жарты шеңбер ($|z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi$).

Дәлелдеуі. Жарты шеңбердің радиусын бүкіл z_k нүктелері Γ_R контурының ішінде жататындай етіп таңдап алайық. Шегерімдер туралы негізгі теорема бойынша

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Бұл теңдікте лемманың шарттарын ескере отырып, $R \rightarrow \infty$ ұмтылдырып, шекке көшсек (3.40) теңдігінің дұрыстығына көз жеткіземіз.

(3.39) интегралын қарастырайық. Егер бұл интеграл жинақты болса, онда $R(z)$ рационал функциясының алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшеліктің дәрежесінен кем дегенде екі бірлікке төмен болатыны математикалық талдау курсынан белгілі. Демек

$z \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $R(z) \sim \frac{A}{z^p}$, $p \geq 2$. Сонымен $|z|$ - тің

жеткілікті үлкен мәндерінде $|R(z)| \leq C|z|^{-2}$ теңсіздігі

орындалады. Олай болса C_R жарты шеңберінде $|R(z)| \leq CR^{-2}$

теңсіздігі және $R \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq CR^{-2} \pi R \rightarrow 0$

бағалауы орындалады. Осылайша лемманың шарттары орындалды және

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res} R(z). \quad (3.41)$$

Осы сияқты

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{res} R(z). \quad (3.42)$$

формуласы да дәлелденеді.

Мысал. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ меншіксіз интегралын есепте.

Шешуі. Комплекс айнымалы $R(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ рационал функциясын қарастырайық. Бұл функция жоғарға жарты жазықтықта жататын $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$ ерекше жай полюс нүктелерін есептемегенде осы жарты жазықтықта аналитикалық функция. Сонда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=z_1} R(z) + \operatorname{res}_{z=z_2} R(z) \right) = \left| (3.25) \text{ формула} \right|_{\text{бойынша}} = \\ &= 2\pi i \left(\left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=z_1} + \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=z_2} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} \right) = \\ &= \frac{2\pi i}{4} \left(e^{-\frac{3\pi i}{4}} + e^{-\frac{9\pi i}{4}} \right) = \frac{\pi i}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{9\pi}{4} - i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi i^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx, \alpha > 0 \text{ түріндегі меншіксіз интегралдарды}$$

есептеу

Басқаша айтқанда нақты ось бойынша құрамында тригонометриялық функциялар бар интегралдарды есептеу.

Алдымен келесі ұйғарымдарды қабылдайық:

1) $R(x)$ – рационал функция;

2) $R \rightarrow +\infty$ ұмтылғанда $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$;

3) $R(x)$ рационал функциясының ерекше нүктелері нақты осьтің бойында жатпайды;

4) $E_+ = \{z_1^+, z_1^+, \dots, z_n^+\} - R(x)$ функциясының жоғарғы жарты жазықтықта жататын ерекше нүктелерінің жиыны;

5) $E_- = \{z_1^-, z_1^-, \dots, z_n^-\} - R(x)$ функциясының жоғарғы жарты жазықтықта жататын ерекше нүктелерінің жиыны;

6) ρ саны - $E_+ \cup E_- \subset \{z \mid |z| < \rho\}$ тиістілігі орындалатындай оң сан;

7) $\gamma_+ - \{z \mid |z| < \rho, \operatorname{Im} z > 0\}$ жарты шеңберінің оң бағытталған доғасы;

8) $\gamma_- - \{z \mid |z| < \rho, \operatorname{Im} z < 0\}$ жарты шеңберінің теріс бағытталған доғасы;

9) $\alpha > 0$.

Теорема. $\int_R R(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{\gamma_+} R(z) e^{i\alpha z} dz,$

$$\int_R R(x) e^{-i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(z) e^{i\alpha z} dz.$$

Ескерту. $z \rightarrow +i\infty$ ұмтылғанда $e^{i\alpha z}$ функциясы жоғарғы жарты жазықтықта, ал сол кезде $z \rightarrow -i\infty$ ұмтылғанда $e^{-i\alpha z}$ функциясы төменгі жарты жазықтықта нөлге ұмтылады.

Басқаша айтқанда интегралдау контурын көрсеткіштік функция нөлге ұмтылатын жарты жазықтықта және тек сонда ғана тұйықтау керек.

Дәлелдеуі. Бірінші теңдікті дәлелдейік.

$\gamma_r - \{z \mid |z| < \rho, \operatorname{Im} z > 0\}$ жарты шеңберінің оң бағытталған доғасы делік, мұнда $r \geq \rho$. Шегерімдер туралы теорема бойынша

$$\int_{\gamma_+} R(z) e^{i\alpha z} dz = \int_{\gamma_r} R(z) e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} R(z) e^{i\alpha z}.$$

Сонымен қатар

$$\int_{\gamma_r} R(z) e^{i\alpha z} dz = \int_{-r}^r R(x) dx + \int_{C_R^+} R(z) e^{i\alpha z} dz,$$

мұнда C_R^+ - радиусы r жоғарғы жарты шеңбер. Бұдан Жордан леммасы (3.38) теңдік бойынша

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} R(z) e^{i\alpha z} dz &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} R(z) e^{i\alpha z} dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) e^{i\alpha x} dx + \\ &+ \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r^+} R(z) e^{i\alpha z} dz = \int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx. \end{aligned}$$

Мысал. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + 2x + 10}$ меншіксіз интегралын есепте.

Шешуі. Бұл интегралдың жинақтылығы $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$ интегралының жинақтылығынан және $\left| \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 10} \right| \leq \frac{1}{|x^2 + 2x + 10|}$ салыстыру белгісінен шығады.

Сонымен қатар $R(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 10}$ рационал функция үшін Жордан леммасының шарттары орындалады. Сондықтан

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + 2x + 10} = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1+3i} \left[\frac{e^{ix}}{(z+1+3i)(z+1-3i)} \right] \right\} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} (3.24) \text{ формуласы} \\ \text{бойынша} \end{array} \right| = \operatorname{Im} 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1+3i} \frac{e^{iz}}{z+1+3i} = \frac{\pi e^{-2}}{3} \operatorname{Im} e^{-i} = -\frac{\pi e^{-3}}{3} \sin 1.$$

Мысал. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 5}.$

Шешуі. $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix} dx}{x^2 - 2x + 5}$ интегралын қарастырайық,

сонда $I = \operatorname{Re} I_1$. $f_1(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$, $f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 - 2z + 5}$ делік.

Алдымен $f_1(z)$ функциясы үшін Жордан леммасының шарты орындалатынын көрсетейік:

$$M(R) \leq \sup_{|z|=R} \frac{|z|}{|z^2 - 2z + 5|} = \sup_{|z|=R} \frac{1}{|z| \left| 1 - \frac{2}{z} + \frac{5}{z^2} \right|}.$$

Бұдан $R \rightarrow +\infty$ ұмтылғанда $M(R) \rightarrow 0$. $f(z)$ функциясының жоғарғы жарты жазықтықта жататын тек бір $(1+2i)$ ерекше жай полюс нүктесі бар. Сонда

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z) &= \operatorname{res}_{z=1+2i} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 5} = \left| \begin{array}{l} (3.24) \text{ формуласы} \\ \text{бойынша} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{ze^{iz}}{2z-2} = \frac{(1+2i)e^{(1+2i)}}{4i} = \frac{(2-i)\cos 1 + i\sin 1}{4e^2}. \end{aligned}$$

Бұдан

$$I = \operatorname{Re} I_1 = \frac{(\cos 1 - 2\sin 1)\pi}{2e^2}.$$

Жаттығулар

1. Функцияны $(1-10)$ көрсетілген сақинада не көрсетілген нүктенің маңайында Лоран қатарына жікте:

1. $\frac{1}{z-2}$ функциясын $z=0$ және $z=\infty$ нүктелерінің маңайында;

2. $\frac{1}{z(1-z)}$ функциясын $z=0$, $z=1$ және $z=\infty$ нүктелерінің маңайында;

3. $\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ функциясын $z=2$ нүктесінің маңайында және $1 < |z| < 2$ сақинасында;

4. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ функциясын $z=i$ және $z=\infty$ нүктелерінің маңайында;

5. $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ функциясын $z = 0$ және $z = \infty$ нүктелерінің маңайында;

6. $e^{\frac{1}{1-z}}$ функциясын $z = 1$ және $z = \infty$ нүктелерінің маңайында;

7. $\cos \frac{z^2 - 4z}{(z - 2)^2}$ функциясын $z = 2$ нүктесінің маңайында;

8. $z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ функциясын $z = 1$ нүктесінің маңайында;

9. $e^{\frac{z+1}{z}}$ функциясын $0 < |z| < \infty$ ақырсыз қашық нүктенің маңайында;

10. $\sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$ $0 < |z| < \infty$ облысында.

II. Функцияның (1 - 10) ерекше нүктелерін тап, олардың қандай түрге жататынын анықта және функцияның ақырсыз қашық нүктедегі өзгерісін зертте:

1. $\frac{1}{z - z^3}$. 2. $\frac{z^4}{1 + z^4}$ 3. $\frac{1}{z(z^2 + 4)^2}$ 4. $\frac{e^z}{1 + z^2}$ 5. $\frac{z^2 + 1}{e^z}$.

6. $\frac{1}{z^3(2 - \cos z)}$ 7. $\sin \frac{1}{1 - z}$ 8. $\sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ 9. $e^{-z} \cos \frac{1}{z}$

10. $\frac{\cos z}{z^2}$

III. Интегралдарды шегерімдер туралы теоремаларды тікелей қолдану арқылы есепте. Мұндағы тұйық контурларды айналу оң бағытта жүргізілген.

1. $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$, мұнда $\gamma : x^2 + y^2 = 2x$ шеңбері.

2. $\oint_{\gamma} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, мұнда $\gamma : |z-2| = \frac{1}{2}$ шеңбері.

3. $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, мұнда $\gamma : |z| = 2$ шеңбері.

4. $\oint_{\gamma} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$, мұнда $\gamma : |z| = 1$ шеңбері.

5. $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$, мұнда $\gamma : |z| = 1$ шеңбері.

6. $\oint_{\gamma} \sin \frac{1}{z} dz$, мұнда $\gamma : |z| = r$ шеңбері.

7. $\oint_{\gamma} \frac{zdz}{\sin z(1-\cos z)}$, мұнда $\gamma : |z| = 5$ шеңбері.

8. $\oint_{\gamma} (1+z+z^2) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz$, мұнда $\gamma : |z| = 3$

шеңбері.

9. $\oint_{\gamma} z^n e^{\frac{2}{z}} dz$, мұнда $\gamma : |z| = r$ шеңбері, $n \in \mathbb{Z}$.

10. $\oint_{\gamma} \sin^2 \frac{1}{z} dz$, мұнда $\gamma : |z| = r$ шеңбері.

IV. Анықталған интегралдарды есепте:

1. $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad (a > 1).$

2. $\oint_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} \quad (a > b > 0).$

3. $\oint_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2} \quad (a > 0, b > 0).$

$$4. \oint_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} \quad (a \in \mathbb{C}, a \neq \pm 1).$$

$$5. \oint_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} \quad (a \in \mathbb{C}, a \neq \pm 1).$$

V. Меншіксіз интегралдарды есепте:

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0).$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

VI. Жордан леммасының көмегімен көрсетілген интегралдарды есепте:

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10};$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10};$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20};$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \quad \text{ажәне } b - \text{оң сандар.}$$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx$ ажәне b – оң сандар.

Бақылау сұрақтары

1. Тейлор және Лоран қатарларының коэффициенттерін анықтайтын интегралдық формулаларды жаз.

2. Аналитикалық функция үшін Тейлор қатарының жинақталу радиусы қалай анықталады?

3. Лоран қатарының жинақталу сақинасы дегеніміз не?

4. Лоран қатарының жинақталу сақинасында оның кіші және үлкен радиустары қалай анықталады?

5. $f(z)$ функциясының ерекшелігі жойлатын нүктедегі шегерімі қалай есептеледі?

6. $f(z)$ функциясының ерекше нүктелері қалай анықталады?

7. Ақырлы ерекше нүктедегі шегерімнің анықтамасы.

8. Ақырсыз қашықта жатқан оқшауланған ерекше нүктедегі шегерімнің анықтамасы.

9. $f(z)$ функциясының жай полюстегі шегерімі қалай табылады?

10. $f(z)$ функциясының реті m тең нүктесіндегі шегерімі қалай анықталады (есептеледі)?

11. Ақырсыз қашық оқшауланған ерекше нүкте ерекшелігі жойылатын нүкте болса, онда сол нүктедегі функцияның шегерімі неге тең?

12. Ақырсыз қашық оқшауланған ерекше нүкте жай полюс болса, онда сол нүктедегі функцияның шегерімі қалай анықталады?

13. Ақырсыз қашық оқшауланған ерекше нүкте реті m тең полюс болса, онда сол нүктедегі функцияның шегерімі қалай анықталады?

14. Маңызды ерекше нүктедегі функцияның шегерімі қалай анықталады?

15. Ақырсыз қашық оқшауланған ерекше нүктедегі шегерім басқа ақырлы оқшауланған ерекше нүктелермен қандай байланыста?

16. Шегерімдер теориясының негізгі теоремасын тұжырымда.

17. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ меншіксіз интегралын шегерімдер

теориясының көмегімен есептейтін теореманы тұжырымда.

18. Жоғарғы жарты жазықтық үшін Жордан леммасын тұжырымда.

19. Төменгі жарты жазықтық үшін Жордан леммасын тұжырымда.

20. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx$ меншіксіз интегралын шегерімдер

теориясының көмегімен есептейтін теореманы тұжырымда.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985.
2. *Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А.* Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977.
3. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука. 1981.
4. *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.: Высш.шк., 1999.
5. *Шабунин М.И., Сидоров Ю.В.* Теория функций комплексного переменного. М.:ЮНИМЕДИАСТАЛ, 2002.
6. *Ангиленко И.М., Козлова Р.В.* Задачи по теории функций комплексной переменной. Минск: ВШ, 1976. - 126 с.
7. *Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.:Наука, 1968. – 416 с.
8. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.:Наука, 1969. - 240 с.
9. *Волковский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.:Физматлит, 1994. - 312 с.
10. *Голубев В.В.* Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М.:Физматлит, 1961. - 456 с.
11. *Гончаров В.Л.* Теория функций комплексного переменного. М.:Просвещение, 1958. - 352 с.
12. *Гуц А.К.* Комплексный анализ и информатика. Омск:ОГУ, 2002. - 144 с.
13. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.:Физматлит, 1968. - 620 с.
14. *Дубинский Ю.А.* Задача Коши в комплексной области. М.:МЭИ, 1996. - 180 с.
15. *Домрин А.В., Сернеев А.Г.* Лекции по комплексному анализу. М.:МИАН, 2004. - 176 с.
16. *Евграфов М.А.* Сборник задач по теории аналитических функций. М.:Физматлит, 1972. - 321 с.

17. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.:Наука, 1991. - 448 с.
18. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.:Наука, 1965. - 716 с.
19. *Луны Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления. СПб.:Лань, 2002. - 304 с.
20. *Пантелеев А.В., Якимов А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М.:Высш.шк., 2001. 445 с.
21. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. М.:ГИТТИ, 1950. - 336 с.
22. *Радыгин В.М., Голубева О.В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.:Высш.шк., 1983. - 160 с.
23. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.:Физматлит, 2005. - 226 с.
24. *Сидоров Ю.В.* Многозначные аналитические функции. М.: МФТИ, 2004. - 68 с.
25. *Эйдерман В. Я.* Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. М.:Физматлит, 2002. - 256 с.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ	3
I КОМПЛЕКС САНДАР	4
ЖАЛПЫ КОМПЛЕКС САНДАР ҰҒЫМЫ.....	10
КОМПЛЕКС САННЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФОРМАСЫ АРГУМЕНТ ЖӘНЕ АРГУМЕНТТІҢ БАС МӨНІ.....	21
КОМПЛЕКС САННЫҢ КӨРСЕТКІШТІК ФОРМАДА ЖАЗЫЛУЫ.....	26
КОМПЛЕКС САННАН ТҮБІР ТАБУ.....	29
КОМПЛЕКС САННЫҢ МАТРИЦАЛЫҚ ФОРМАДА ЖАЗЫЛУЫ.....	34
ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ.....	38
СТЕРЕОГРАФИКАЛЫҚ ПРОЕКЦИЯ.....	45
КОМПЛЕКС САНДАР ТІЗБЕГІ ЖӘНЕ ҚАТАРЫ.....	52
САНДЫҚ ҚАТАРЛАР.....	61
АБСОЛЮТТІ ЖӘНЕ ШАРТТЫ ЖИНАҚТЫЛЫҚ.....	67
ШЕКТІК САЛЫСТЫРУ БЕЛГІСІ.....	71
ДАЛАМБЕРДІҢ АҚЫРЛЫ ТҮРДЕГІ БЕЛГІСІ.....	73
ДАЛАМБЕРДІҢ ШЕКТІК ТҮРДЕГІ БЕЛГІСІ.....	74
КОШИДІҢ АҚЫРЛЫ ТҮРДЕГІ РАДИКАЛДЫҚ БЕЛГІСІ.....	75
КОШИДІҢ ШЕКТІК ТҮРДЕГІ РАДИКАЛДЫҚ БЕЛГІСІ.....	75
II НАҚТЫ ЖӘНЕ КОМПЛЕКС.....	82
АЙНЫМАЛЫНЫҢ КОМПЛЕКС МӘНДІ ФУНКЦИЯЛАРЫ.....	82
НАҚТЫ АЙНЫМАЛЫНЫҢ КОМПЛЕКС ФУНКЦИЯСЫ.....	82
КОМПЛЕКС ЖАЗЫҚТЫҒЫНДАҒЫ ҚИСЫҚТАР МЕН ОБЛЫСТАР.....	84
КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР.....	88
КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР.....	89
КӨРСЕТКІШТІК ФУНКЦИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ.....	92
ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ.....	93
ЛОГАРИФМДІК ФУНКЦИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ.....	94

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ҮШІН ҚОСУ ТЕОРЕМАЛАРЫ.....	96
ЖУКОВСКИЙ ФУНКЦИЯСЫ.....	100
КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІГІ.....	106
КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУЫ.....	114
КОШИ - РИМАН ШАРТТАРЫ.....	122
$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$	
КОШИ – РИМАН ШАРТТАРЫМЕН $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ ШАРТЫНЫҢ ЭКВИВАЛЕНТТІГІ.....	125
ТҮЙІНДЕС ГАРМОНИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР.....	131
АНАЛИТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯНЫ ОНЫҢ ЖОРАМАЛ НЕМЕСЕ НАҚТЫ БӨЛІГІ БОЙЫНША ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ.....	133
БАҒЫТ БОЙЫНША ТУЫНДЫ.....	136
КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ИНТЕГРАЛЫ ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛҒА КЕЛТІРУ. ҚАСИЕТТЕРІ.....	138
КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ БОЙЫНША АЛЫНҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ.....	139
ЖОРДАН ҚИСЫҒЫ.....	140
БІРБАЙЛАНЫСТЫ ОБЛЫС ҮШІН КОШИ ТЕОРЕМАСЫ. ИНТЕГРАЛДЫҢ ИНТЕГРАЛДАУ ЖОЛЫНА ТӘУЕЛСІЗДІГІ.....	143
АНАЛИТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯ ҮШІН ОНЫҢ АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ БАР БОЛУЫ. НЬЮТОН – ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫ.....	146
КӨПБАЙЛАНЫСТЫ ОБЛЫС ҮШІН КОШИ ТЕОРЕМАСЫ.....	150
КОШИДІҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ФОРМУЛАСЫ.....	151
КОШИ ТИПТЕС ИНТЕГРАЛ.....	156
С, С1 ЖӘНЕ Н ФУНКЦИЯЛАР КЛАСЫ.....	163
ШВАРЦ ЖӘНЕ ПУАССОННЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ФОРМУЛАЛАРЫ.....	165

Кошидің интегралдық формуласынан шығатын кейбір салдар.....	170
ІІІ ТІЗБЕКТЕР, ҚАТАРЛАР ЖӘНЕ ШЕГЕРІМДЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ.....	179
Функционалдық тізбектің бірқалыпты жинақтылығы.....	180
Комплекс облысындағы функционалдық қатар.....	180
Қатардың жинақталу облысы және бірқалыпты жинақтылық.....	181
Бірқалыпты жинақтылық және Вейерштрасс белгісі.....	182
Мүшелері аналитикалық функциялар болып келетін қатарлар үшін Вейерштрасс белгісі.....	182
Қатарлардың жинақталу облысын табу.....	183
Дәрежелік қатарлар.....	186
Жинақталу дәңгелегі.....	188
Тейлор қатары.....	194
Функцияның Тейлор қатарына жіктелуі.....	199
Лоран қатарлары.....	206
Лоран қатарының анықталу облысының құрылымы.....	207
Функцияның Лоран қатарына жіктелуінің жалғыздығы.....	214
Функцияны ∞ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктеу.....	215
Аналитикалық функцияның нөлдері.....	219
Оқшауланған ерекше нүктелердің классификациясы.....	220
Полюстер.....	226
Ақырсыз қашық нүктенің сипаттамасы.....	233
Лоран қатарына байланысты ∞ нүктесінің сипаттамасы.....	235
Бүтін және мероморфты функциялар.....	236
Шегерімдер (вычеты).....	238

ПОЛЮСКЕ ҚАТЫСТЫ ШЕГЕРІМДЕРДІ ЕСЕПТЕУДІҢ ФОРМУЛАЛАРЫ.....	241
МАҢЫЗДЫ ЕРЕКШЕ НҮКТЕДЕГІ ШЕГЕРІМ.....	243
АҚЫРСЫЗ ҚАШЫҚ НҮКТЕДЕГІ ШЕГЕРІМ.....	243
ШЕГЕРІМДЕР ТУРАЛЫ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМА.....	246
$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ ТҮРІНДЕГІ ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЕСЕПТЕУ.....	252
ШЕГЕРІМДЕР БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЕСЕПТЕУ ҮШІН ПАЙДАЛЫ МАҒЛҰМАТТАР.....	254
РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ИНТЕГРАЛДАРЫН ЕСЕПТЕУ.....	256
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx, \alpha > 0$ ТҮРІНДЕГІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЕСЕПТЕУ.....	259
БАҚЫЛАУ СҰРАҚТАРЫ.....	266
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	268
МАЗМҰНЫ	270

Оқулық басылым

Бимұрат Жұмабекұлы Сағындықов

КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

Оқу құралы

ОБО РБ бастығы

Редакторы

Компьютерде беттеген

З. А. Ғұбайдулина

А.И. Бейсебаева

С.Е. Орысбекова

Басуға қол қойылды 24.06.2016 ж.

Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84x 1/16.

№ 1 баспаханалық қағаз.

Е.-б.т. 17. Ш.б.т.15.9. Тапсырыс № 742. Бағасы келісімді.

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық

зерттеу университетінің басылымы,

Оқу-баспа орталығы,

Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22