

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университеті

Е. Ә. Қасымов
Б. Ж. Сағындықов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

3-бөлім

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2015

ЖОК 510 (075.8)

КБЖ 22.1я73

Қ 45

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің
2015 жылғы жоспары бойынша басылды.

Пікір жазғандар:

Сақабеков Ә., физ.-матем. ғыл. док., проф., ҚБТУ;

Коксалов Қ. К., физ.-матем. ғыл. док., проф., Абай атындағы
ҚазҰПУ;

Айдос Е. Ж., физ.-матем. ғыл. канд., проф., Қ. И. Сәтбаев
атындағы ҚазҰТУ

Қасымов Е. Ә.

Қ 45 Жоғары математика. 3-бөлім: Оқу құралы. Қасымов Е. Ә.,
Сағындықов Б. Ж. – Алматы: ҚазҰТУ, 2015. – 229 б.

Сурет 12. Әдебиеттер тізімі – 36 атау.

ISBN 978-601-228-730-1

Оқу құралында математика курсының еселі, қисық сызықты, беттік интегралдар, өрістер теориясы, дифференциалдық теңдеулер, ықтималдықтар теориясы математикалық статистика тақырыптары толық қамтылған.

Математика курсының негізгі ұғымдары мен теориялары жан-жақты талқыланып, соңында мысалдар қарастырылып, олардың шешу жолдары мен әдістері және осы тақырыпқа қатысты сұрақтар мен өзіндік тапсырмалар ұсынылған.

Оқу құралы техникалық және экономикалық жоғары оқу орындарының барлық мамандықтары студенттеріне арналған.

ЖОК 510 (075.8)

КБЖ 22.1я73

ISBN 978-601-228-730-1

© Қасымов Е. Ә.,
Сағындықов Б. Ж., 2015
© ҚазҰТУ, 2015

МАЗМҰНЫ

	Алғы сөз.....	6
14.	Еселі интегралдар.....	7
14.1.	Негізгі ұғымдар.....	7
14.2.	Екі еселі интегралдың анықтамасы және оның бар болуы.....	8
14.3.	Екі еселі интегралдардың қасиеттері.....	11
14.4.	Екі еселі интегралды есептеу.....	13
14.5.	Екі еселі интегралда айнымалыны алмастыру.....	21
14.6.	Екі еселі интегралды физика және механика есептеріне қолдану.....	30
14.7.	Үш еселі интегралдың анықтамасы.....	37
14.8.	Үш еселі интегралды есептеу.....	39
14.9.	Үш еселі интегралда айнымалыны алмастыру.....	42
14.10.	Үш еселі интегралды физика мен механика есептеріне қолдану.....	46
15.	Қисық сызықты интегралдар.....	50
15.1.	Бірінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы және оның бар болуы (доға ұзындығы бойынша).....	50
15.2.	Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттері.....	54
15.3.	Бірінші текті қисық сызықты интегралды физика және механика есептеріне қолдану.....	59
15.4.	Екінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы және оның бар болуы.....	64
15.5.	Бірінші мен екінші текті қисық сызықты интегралдар арасындағы байланыс.....	68
15.6.	Грин формуласы.....	76
15.7.	Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігінің белгісі.....	79
16.	Беттік интегралдар.....	86
16.1.	Негізгі ұғымдар және беттің ауданы.....	86
16.2.	Бірінші текті беттік интегралдың анықтамасы.....	91
16.3.	Бірінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға келтіру. Физика және механика есептері.....	92
16.4.	Бір жақты және екі жақты беттер.....	96
16.5.	Екінші текті беттік интегралдың анықтамасы.....	99
16.6.	Екінші текті беттік интегралды есептеу.....	102
16.7.	Остроградский формуласы.....	106

16.8.	Стокс формуласы.....	107
17.	Өрістер теориясы.....	110
17.1.	Скалярлық өріс және оның градиенті.....	110
17.2.	Векторлық өрістер.....	117
17.3.	Векторлық өрістің дивергенциясы, роторы және циркуляциясы	118
18.	Дифференциалдық теңдеулер.....	126
18.1.	Дифференциалдық теңдеулердің негізгі ұғымдары.....	126
18.2.	Айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеу..	129
18.3.	Айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу.....	129
18.4.	Біртекті дифференциалдық теңдеу.....	130
18.5.	Біртекті дифференциалдық теңдеуге келтірілетін қарапайым теңдеу.....	132
18.6.	Сызықты дифференциалдық теңдеу.....	133
18.7.	Толық дифференциалдық теңдеу.....	136
18.8.	Реті төмендетілетін жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер.....	139
18.9.	Бернулли, Дарбу теңдеулері.....	143
18.10.	Коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу.....	144
18.11.	Коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу.....	149
18.12.	Коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуді жаңа әдіспен шешу.....	158
18.13.	Дифференциалдық теңдеулердің түрлері мен аталуы және оларды шешу әдістері.....	165
18.14.	Коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеудің дара шешімін табудың жаңа әдістемелік алгоритмі.....	166
19.	Ықтималдықтар теориясы.....	167
19.1.	Комбинаторика элементтері.....	167
19.2.	Элементар оқиғаның дискретте кеңістігі. Алгебралық оқиға. Классикалық ықтималдық.....	170
19.3.	Ықтималдықтың аксиомалық анықтамасы және ықтималдықтарды қосу теоремасы.....	173
19.4.	Шартты ықтималдық. Толық ықтималдық пен Байес формулалары.....	175
19.5.	Бернулли схемасының формулалары.....	178

19.6.	Дискретті кездейсоқ шамалар және олардың үлестіру заңдары мен ықтималдықтың үлестіру функциясы.....	182
19.7.	Ең ықтимал сан.....	185
19.8.	Туындатқыш функция.....	188
19.9.	Математикалық үміт. Дисперсия.....	189
19.10.	Үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Ықтималдық тығыздығы. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары.....	193
19.11.	Нормаль заңы бойынша үлестірілген үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясын есептеу.....	195
19.12.	Бірқалыпты ықтималдық үлестірім заңы. Көрсеткіштік үлестіру.....	199
19.13.	Үлкен сандар заңы.....	202
20.	Математикалық статистика элементтері.....	204
20.1.	Математикалық статистика пәні. Бас және іріктеулі жинақтықтар. Полигон. Гистограмма.....	204
20.2.	Үлестіру параметрлерінің статистикалық бағасы. Бас және таңдама орталар. Бас және таңдаулы дисперсиялар.....	208
20.3.	Медиана. Ауытқулар.....	214
20.4.	Шартты варианттар. Эмпирикалық моменттер.....	217
20.5.	Сенімділік интервалы. Сенімділік ықтималдығы.....	223
20.6.	Ең кіші квадраттар әдісі.....	224
	Библиографиялық тізім.....	227

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқырмандар, сіздердің назарларыңызға ұсынылып отырған «Жоғары математика» оқу құралы 3 бөлімнен тұрады. ҚР БҒМ-нің рұқсатымен 1-бөлімі 2004 ж. Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-дың баспасынан жарық көрді. Ал 2-бөлім дайындалып баспаға ұсынылды. Осы 3-бөлімде жоғары математика курсының еселі, қисық сызықты, беттік интегралдар, өрістер теориясы, дифференциалдық теңдеулер және ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистика элементтері тақырыптары толық қамтылған.

Техникалық жоғары оқу орындарында жоғары математика курсын оқу ерекшелігі мен пәнге бөлінген кредит санына байланысты курс мәліметтерін студенттерге мейлінше қарапайым әрі теорияны мысалдармен ұштастырып баяндаған тиімді. Сондықтан, әрбір тақырып соңында теорияны меңгеру үшін егжей-тегжейлі талданған мысалдар келтіріліп, мүмкіндігінше теорияның геометриялық мағынасы мен сызбалары, ескертулері, түсіндірмелері толық беріліп, мысалдармен қамтылған.

ҚР БҒМ-нің рұқсатымен 2004–2006, 2011 жж. Е. Ә. Қасымовтың техникалық оқу орындарына арналған «Жоғары математика» (1-б) мен «Математиканың арнайы кустары» атты оқулықтары ҚазҰТУ-дың баспасынан жарық көрді. Ал «Жоғары математиканың» 2-бөлімін сіздердің назарларыңызға ұсынып отырмыз.

1994–1997 жж. «Санат» баспасынан жарық көрген ағайынды Қасымовтардың «Жоғары математика курсы»: Аналитикалық геометрия (I т) мен Сызықты алгебра (II т) оқулықтары назарларыңызға ұсынылды. Осы курстың III томы «Математикалық анализ» пәніне арналған және 2 бөлімнен тұрады. 1-бөлім 2006 ж. әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-нің «Қазақ университеті» баспасынан, ал 2-бөлім 2014 ж. ҚР БҒМ-нің рұқсатымен ЖОО Қауымдастығының баспасынан жарық көрді. Осы оқулықтар оқыту үдерісінде кездесетін көптеген олқылықтардың орнын толтыра деп сенеміз.

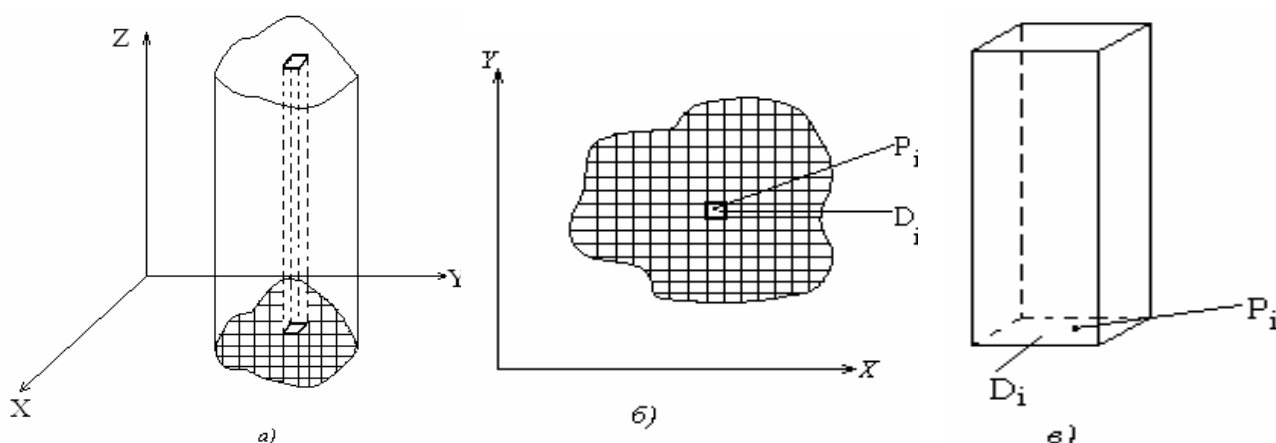
Авторлар

14. ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

14.1. Негізгі ұғымдар

Осы курстың бірінші томында бір еселі интегралды қарастырып, оны физика, механика есептерін шығаруда қолдандық. Осы сияқты екі, үш, т.с.с еселі интегралдардың көмегімен физика, механика есептерін шығаруға болады, мысалы, дененің массасын, атқарылған жұмысты, т.с.с.

Енді табаны XOY координат жазықтығындағы D облыспен, жоғарыдан $z = f(x, y) \geq 0$ бетпен, ал жасаушылары OZ осіне параллель болатын цилиндрлік бетпен шектелген $\bar{V}$ денені қарастырайық, мұндағы $z = f(x, y)$ функция D облыста анықталсын және үзіліссіз болсын (14.1, а-сурет). Осы $\bar{V}$



14.1-сурет

дененің көлемін табайық. Ол үшін D облысты фигураны еркімізше ішкі нүктелері ортақ болмайтын n кіші D_i облыстарға (фигуралар) бөліктейік (14.1, б-сурет), $i = \overline{1, n}$ және осы кіші бөліктердің аудандарын ΔD_i таңбамен белгілейік. D_i бөліктерінің әрқайсысынан кез келген $A_i(x_i, y_i)$ нүкте алайық. Бұл нүкте D_i фигураның ішкі немесе шекара нүктелерінің бірі болсын. Осылайша бөліктеу нәтижесінде біз $\bar{V}$ денені төменнен (табаны) $D_1, D_2, \dots, D_n$ фигуралармен, ал жоғардан $z = f(x, y)$ беттің бөліктерімен, ал бүйір жақтарының жасаушылары OZ осіне параллель болатын тік қисық сызықты $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$ цилиндрлік денелерді аламыз. Кіші цилиндрлік

денелердің көлемдерінің қосындысы жуық шамамен $\bar{V}$ дененің V көлеміне тең, ал осы қосынды $\bar{V}$ дененің V көлеміне тең болу үшін n бөлікке бөліктеудің санын шексіздікке арттырып, теңдік алуға болады. Енді осы айтылғандарды іске асырайық. Ол үшін $\bar{V}_i$ кіші дененің көлемін табайық (14.1, в-сурет). $\bar{V}_i$ дененің табанының ауданы ΔD_i -ге, ал биіктігі $z = f(x, y)$ функцияның $P_i(x_i, y_i)$ нүктедегі мәніне тең, онда $\bar{V}_i$ дененің көлемі $V_i = \Delta D_i \cdot f(x_i, y_i)$ болады. Осы көбейтіндіден 1-ден бастап n -ге дейін қосынды алайық (кіші $\bar{V}_i$ денелердің саны n -ге тең, $i = \overline{1, n}$):

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta D_i \cdot f(x_i, y_i). \quad (14.1)$$

Сонымен, $\bar{V}$ дененің көлемі жуық шамамен (14.1) қосындының мәніне тең. Енді (14.1) қосындыдан $n \rightarrow \infty$ болғанда шекке көшіп (егер ол шек бар болса), $\bar{V}$ дененің дәл көлемін табамыз:

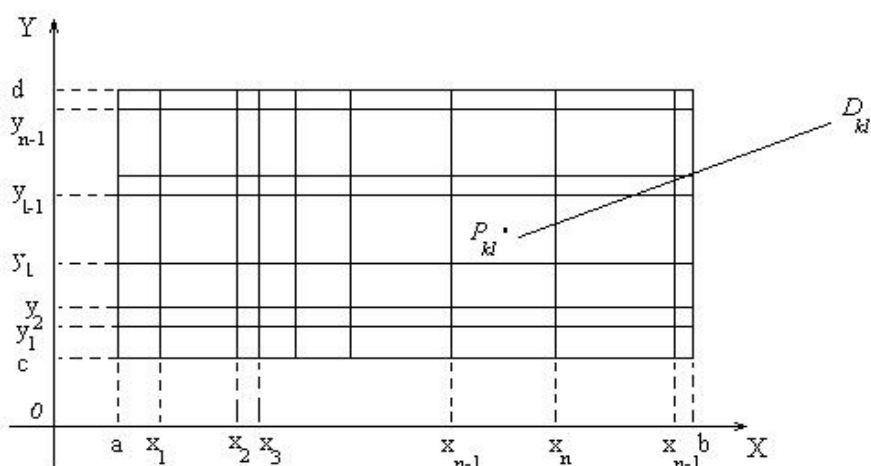
$$\bar{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta D_i \cdot f(x_i, y_i).$$

Осы сияқты $\bar{V}$ дененің массасын, ауырлық центрін, статикалық моментін, т.с.с. табуға болады.

14.2. Екі еселі интегралдың анықтамасы және оның бар болуы

Бізге $D = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ тіктөртбұрышта анықталған әрі үзіліссіз $z = f(x, y)$ функция берілсін. Енді $[a; b]$ сегментті еркімізше $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нүктелерімен n бөліктерге: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, ал $[c; d]$ сегментті $y_0, y_1, \dots, y_m$ нүктелермен m бөліктерге бөлейік: $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. Осы x_i мен y_i нүктелерден ($k = \overline{1, n}$), $l = \overline{1, m}$ сәйкес OY, OX осьтеріне параллель түзулер жүргізейік (14.2-сурет).

Осылайша, $[a; b]$ мен $[c; d]$ сегменттерін бөліктерге бөлуді τ таңбамен белгілейік. Онда D тіктөртбұрыш саны $n \cdot m$ -ге тең дербес тіктөртбұрыштарға бөлінеді және олар **элементар фигуралар** деп аталады:



14.2-сурет

$$D_{kl} = \{(x_{k-1} \leq x \leq x_k) \cap (y_{l-1} \leq y \leq y_l)\}, k = \overline{1 \cdot n}, l = \overline{1 \cdot m}.$$

Енді әрбір D_{kl} дербес тіктөртбұрыштан (элементар фигуралардан) кез келген $P(\bar{x}_k, \bar{y}_l) = P_{kl}$ нүкте алайық және $[x_{k-1}; x_k]$ мен $[y_{l-1}; y_l]$ сегменттерінің ұзындықтарын сәйкес Δx_k мен Δy_l таңбамен белгілейік:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \Delta y_l = y_l - y_{l-1},$$

ал D_{kl} дербес тіктөртбұрыштың ауданы ΔD_{kl} болсын, мұндағы $\bar{x}_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $\bar{y}_k \in [y_{l-1}; y_l]$.

Онда $\Delta D_{kl} = \Delta x_k \cdot \Delta y_l$ болады. Бұл жағдайда D тіктөртбұрыштың ауданы үшін $\Delta D = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \Delta x_k \cdot \Delta y_l$ теңдігі орындалады. Енді $P(\bar{x}_k; \bar{y}_l) = P_{kl}$ нүктедегі $f(x, y)$ функцияның мәнін ΔD_{kl} ауданға көбейтейік: $f(\bar{x}_k; \bar{y}_k) \cdot \Delta D_{kl}$ және осы көбейтіндіден k индекс, одан соң l индекс бойынша сәйкес 1-ден n -ге, 1-ден m -ге дейін қосынды алайық:

$$J(D_{kl}, P_{kl}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\bar{x}_k; \bar{y}_l) \cdot \Delta D_{kl}. \quad (14.2)$$

Сонымен, D облысты жоғардағы τ бөліктеу нәтижесінде және $P(\bar{x}_l, \bar{y}_k)$ нүктені еркімізше алуымыз бойынша (14.2) қосындыны анықтадық.

Анықтама. D тіктөртбұрышты τ бойынша бөліктеуге әрі $P(\bar{x}_l, \bar{y}_k)$ нүктені еркімізше таңдап алуымызға сәйкес келген (14.2)

қосынды D тік төртбұрыштағы $f(x, y)$ функцияның **интеграл қосындысы** деп аталады.

Енді D_{kl} дербес тіктөртбұрыштар диагональдарының ең үлкен ұзындығын λ деп белгілейік, яғни $\lambda = \max \left\{ \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2} \right\}$.

Анықтама. $\lambda \rightarrow 0$ болғанда J саны (14.2) **интеграл қосындының шегі** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, D облысты кез келген бөліктеуге $\lambda < \delta$ теңсіздік орындалса әрі D_{kl} тіктөртбұрышқа тиісті кез келген $P(\bar{x}_k; \bar{y}_l) = P_{ke}$ нүкте үшін

$$|J(D_{kl}, P_{kl}) - J| < \varepsilon \quad (14.3)$$

теңсіздік орындалса.

Демек, (14.2) интеграл қосынды D облысты бөліктеу мен $P(\bar{x}_k; \bar{y}_l)$ нүктені D_{kl} тіктөртбұрыштан таңдап алу әдістеріне тәуелсіз болады. Басқаша айтқанда, D тіктөртбұрышты әрі P_{kl} нүктені еркімізше таңдап алғанға сәйкес келетін кез келген (14.2) интеграл қосындыларға (14.3) теңсіздік орындалуы керек.

Егер $\lambda \rightarrow 0$ болғанда (14.2) интеграл қосындының шегі бар болса, онда ол шек D тіктөртбұрыштағы $f(x, y)$ **функцияның екі еселі интегралы** деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$J = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\bar{x}_k, \bar{y}_l) \cdot \Delta D_{kl} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Бұл жағдайда, $f(x, y)$ функция D тіктөртбұрышта **интегралданады** деп аталады. Сонымен, 1-бөлімде ([1]) бір еселі анықталған интегралға дәлелденген тұжырымды дәлелдеуге болады: **D тіктөртбұрышта интегралданатын кез келген $f(x, y)$ функция осы облыста шектелген.** Сондықтан, алдағы тақырыптарда шектелген функцияларды қарастыратын боламыз.

Енді тіктөртбұрышты облыста екі еселі интегралдың бар болуын қарастырайық.

14.1-теорема. D тіктөртбұрышта үзіліссіз кез келген $f(x, y)$ функция осы тіктөртбұрышта интегралданады.

Ескерту. Егер D облыста $f(x, y) = 1$ болса, онда шектелген D облыстың ауданы мына формуладан анықталады:

$$S = \iint_D dx dy.$$

Сұрақтар.

1. Элементар фигуралардың анықтамасы.
2. Элементар фигуралардың ауданы неге тең?
3. Тіктөртбұрыштағы функцияның интеграл қосындысы.
4. Интеграл қосындының шегі.
5. Функцияның екі еселі интегралы.
6. Функцияның тіктөртбұрышта интегралдануы.
7. Фигура ауданының формуласы.

14.3. Екі еселі интегралдардың қасиеттері

Екі еселі интегралдың қасиеттері бір еселі анықталған ([1], 6.6-6.8-тақырып) интегралдарға да орындалады. Сондықтан, олардың тек тұжырымдарын ғана келтіреміз.

1-қасиет. Егер $f(x, y), \varphi(x, y)$ функциялары D облыста интегралданса және $c_1, c_2 - const$, онда $c_1 f(x, y) \pm c_2 \varphi(x, y)$ функцияда D облыста интегралданады және

$$\iint_D c_1 f(x, y) \pm c_2 \varphi(x, y) dx dy = c_1 \iint_D f(x, y) dx dy \pm c_2 \iint_D \varphi(x, y) dx dy$$

теңдік орындалады.

2-қасиет. Егер $f(x, y)$ пен $\varphi(x, y)$ функциялары D облыста интегралданса, онда $f(x, y) \cdot \varphi(x, y)$ функцияда осы облыста интегралданады.

3-қасиет. Егер $f(x, y)$ функция D облыста интегралданса және ауданы нөлге тең Γ қисық сызығы осы облысты ортақ ішкі нүктесі жоқ D_1 мен D_2 байланысты облыстарға бөлсе, онда функция D_1 мен D_2 облыстарда интегралданады және

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

теңдігі орындалады.

4-қасиет. Егер $f(x, y)$ және $\varphi(x, y)$ функциялар D облыста интегралданса және облыстың барлық нүктелерінде $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D \varphi(x, y) dx dy$$

теңсіздік орындалады.

5-қасиет. Егер $f(x, y)$ функция D облыста интегралданса, онда $|f(x, y)|$ функция да осы облыста интегралданады және

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

6-қасиет (орта мән туралы теорема). Егер $f(x, y)$ пен $\varphi(x, y)$ функциялар D облыста интегралданса, $\varphi(x, y)$ функция осы облыста теріс (оң) емес болса, M мен m сандары $f(x, y)$ функцияның D облыстағы сәйкес ең жоғарғы, ең төменгі шекарасы болса, онда $m \leq \mu \leq M$ теңсіздігін қанағаттандыратын μ саны табылып,

$$\iint_D f(x, y) \varphi(x, y) dx dy = \mu \iint_D \varphi(x, y) dx dy$$

теңдік орындалады.

Осы қасиеттен: егер $f(x, y)$ функция байланысты D облыста үзіліссіз болса, онда осы облыста $A(\bar{x}, \bar{y})$ нүкте табылып, $\mu = f(\bar{x}, \bar{y})$ және

$$\iint_D f(x, y) \varphi(x, y) dx dy = f(\bar{x}, \bar{y}) \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

Сұрақтар.

1. Егер D облыс ортақ ішкі нүктесі бар D_1 мен D_2 облыстарға бөлінсе, онда 3-қасиет орындала ма?

2. Егер $f(x, y)$ функция D облыста интегралданса, ал $\varphi(x, y)$ функция осы облыста үзіліссіз болса және $c_1, c_2 - const$, онда $c_1 f(x, y) \pm c_2 \varphi(x, y)$ функция D облыста интегралдана ма?

3. Егер 6-қасиетте $\varphi(x, y)$ функция D облыста әрі оң, әрі теріс болса, онда 6-қасиет орындала ма?

4. Қандай шарт орындалғанда 1-қасиет орындалмайды?

14.4. Екі еселі интегралды есептеу

1. Алдымен екі еселі интегралды D тіктөртбұрышты облыста есептейік.

14.2-теорема. $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ тіктөртбұрышты облыста $f(x, y)$ функцияның

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (14.4)$$

екі еселі интервалы бар болсын.

Егер кез келген $x \in [a; b]$ үшін

$$J(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (14.5)$$

анықталған (бір еселі) интегралы бар болса, онда қайталанған

$$\int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (14.6)$$

интегралы бар және мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (14.7)$$

(14.6) формуланың оң жағындағы бірінші интеграл **сыртқы**, ал екінші интеграл **ішкі интеграл** деп аталады. Тіктөртбұрышты облыста екі еселі интегралды есептегенде кез келген интегралдан бастап есептеуге болады, егер $\iint_D f(x) \varphi(y) dx dy$ (3-ескерту).

Теореманың тұжырымында екі еселі интегралдың және $[c; d]$ сегментте тағайындалған кез келген y үшін

$$J_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

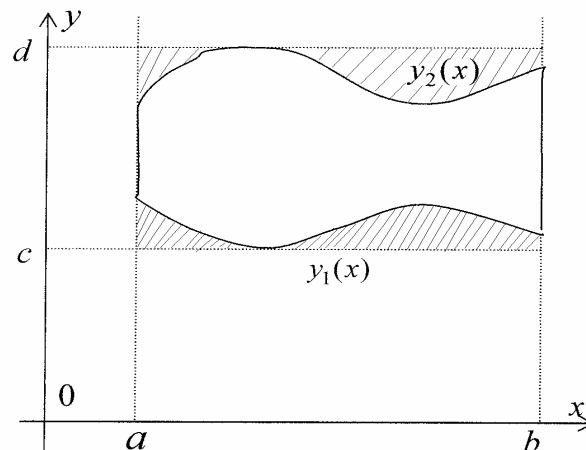
интегралының бар болуын ұйғарып, қайталанған

$$\int_c^d J_1(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

интегралының да бар болуын дәлелдеуге болады.

Енді кез келген қисық сызықты облыс үшін екі еселі интегралды қайталанған интегралға келтіруге болатынын қарастырайық.

2. Бізге $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ облыста анықталған $f(x, y)$ функция берілсін, мұндағы $y_1(x)$, $y_2(x)$, функциялары $x \in [a; b]$ сегментте үзіліссіз болсын. Тұйық D облыста OY осіне параллель жүргізілген (14.3-сурет)



14.3-сурет

түзулер $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ қисық сызықтарымен екіден артық емес нүктелерде қиылыссын, яғни D облыстың оң жағы $x = b$, сол жағы $x = a$ түзулерімен, ал жоғарыдан $y_2 = y_2(x)$ төменнен $y_1 = y_1(x)$ қисық сызықтармен шектелген.

14.3-теорема. D облыста анықталған $f(x, y)$ функцияның екі еселі

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

интегралы бар және кез келген $x \in [a, b]$ үшін

$$J(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

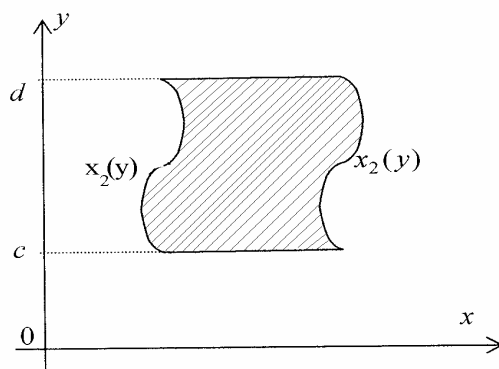
интеграл бар, онда

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

интегралы бар және мына теңдік орындалады:

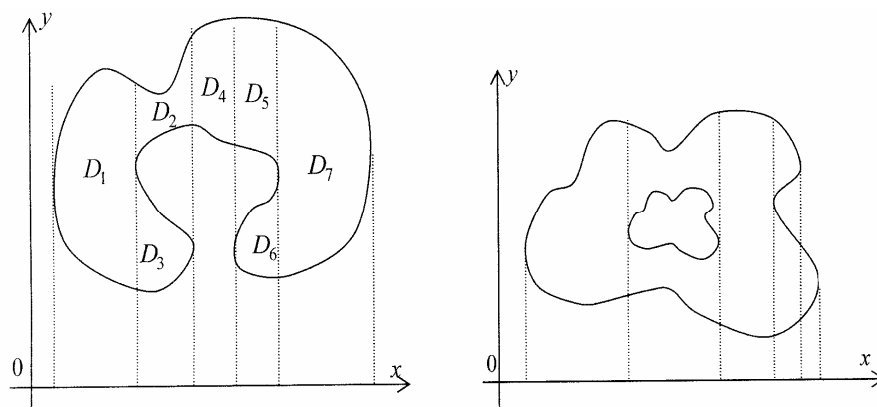
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (14.8)$$

1-ескерту. Біз жоғарыда OY осіне параллель жүргізілген $x - const$ түзулер $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ қисық сызықтарды екіден артық емес нүктелерде қисын деп



14.4-сурет

жорыдық, ал егер OX осіне параллель түзулер $x_1(y)$, $x_2(y)$ қисық сызықтарды екіден артық нүктелерде қиятын болса (14.4-сурет), онда екі еселі интеграл мына формула бойынша есептелінеді:



14.5-сурет

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (14.9)$$

Қисық сызықта екі еселі интегралды есептегенде ішкі интегралдан бастап есептеу қажет. Егер де (14.8) формуламен екі еселі интегралды есептеу қиындық әкелсе, онда интегралды (14.9)

формуламен есептеген тиімді (немесе керісінше). Бұл жағдайда, екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгерту керек.

2-ескерту. Егер D облыстың шекарасын $x - const$ немесе $y - const$ түзулері екіден артық нүктелерде қиса (14.5-сурет), онда 14.2-теорема орындалатындай D облысты кіші облыстарға бөлеміз, әр облыста екі еселі интегралды жеке-жеке есептеу керек.

3-ескерту. Егер $\iint_D f(x)\varphi(y)dx dy$ интегралы $D = \{x, y: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ тіктөртбұрышты облыста бар болса, онда мына теңдік орындалады:

$$J = \iint_D f(x)\varphi(y)dx dy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d \varphi(y)dy.$$

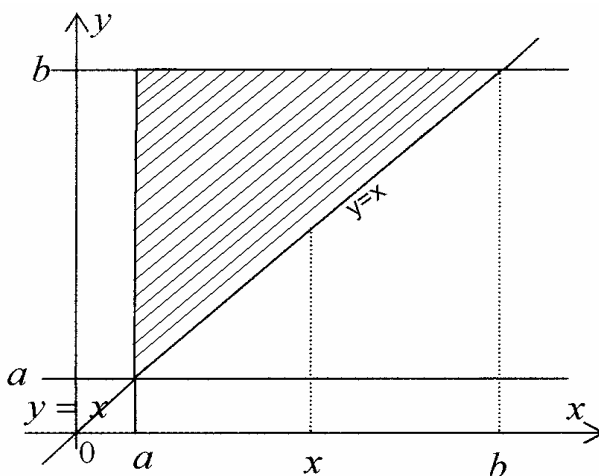
4-ескерту. Интегралдық теңдеулер теориясында жиі қолданылатын **Дирихле формуласы** деп аталатын

$$\iint_D f(x, y)dx dy = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)dx$$

формула орындалады, мұндағы

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, y = x, x = a, y = b\},$$

$f(x, y)$ функция D облыста анықталған және шектелген (14.6-сурет).



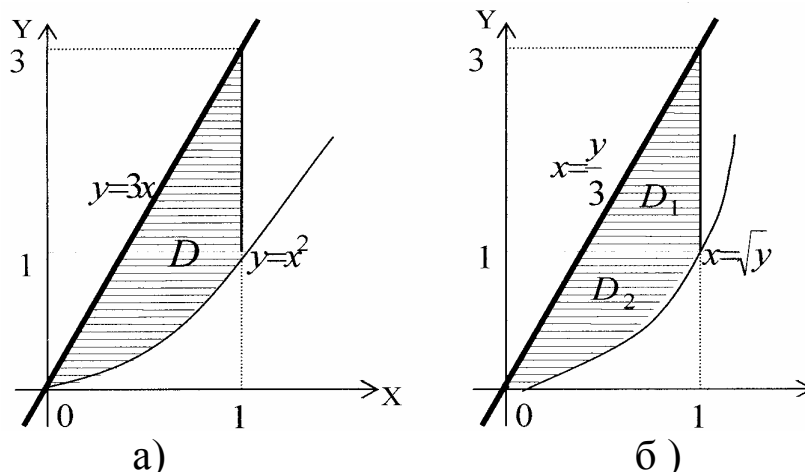
14.6-сурет

1-мысал. Екі еселі $\iint_D f(x, y)dx dy$ интегралды берілген облыста интегралдау ретін өзгертейік, яғни екі еселі интегралды қайталанған (14.8) және (14.9) формулалар арқылы өрнектейік:

$$1) D = \{(x, y) : x = 1, y = x^2, y = 3x\}.$$

$$2) D = \{(x, y) : y = \sqrt{2ax - x^2}, y = \sqrt{2ax}, x = 2a\}.$$

1) Алдымен екі еселі интегралды (14.8) формуламен интегралдайық. Ол үшін $y = x^2$, $y = 3x$, $x = 1$ теңдеулермен берілген функциялардың сызбасын



14.7-сурет

салайық (14.7, а-сурет). Сонда D облыста функциялар 14.2-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады және ол жоғарыдан $y = 3x$ түзумен, төменнен $y = x^2$ параболамен, сол жағы $x = 0$, оң жағы $x = 1$ түзулерімен шектелген. Онда D облысты мына түрде жазуға болады:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 3x\}.$$

Бұл жағдайда, x айнымалы $[0,1]$ сегментте өзгергенде y айнымалы $y = x^2$ параболадан $y = 3x$ түзуге дейін өзгереді, яғни (14.8) формуладан

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{3x} f(x, y) dy.$$

Енді екі еселі интегралды (14.9) формулаға келтірейік. Бұл жағдайда, D облыс жоғарыдан $y = 3$, төменнен $y = 0$ түзулермен, сол жағы $x = \frac{y}{3}$ түзумен, ал оң жағы екі $x = 1$ және $x = \sqrt{y}$ сәйкес түзу және қисық сызықтармен шектелген (14.7, б-сурет). Онда D облысты

$x=1$ түзумен $x=\sqrt{y}$ қисық сызықтың қиылысу нүктесі арқылы D_1 мен D_2 облыстарға бөлеміз. Осы облыстардың әрқайсысының оң жақтары мен сол жақтары тек бір ғана түзу немесе қисық сызықпен шектелген, яғни әрбір облыстағы функциялар 14.2-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады. Енді екі еселі интегралды D_1 облыста (14.9) формулаға келтірейік. Бұл облыста y айнымалы $[0,1]$ сегментте өзгергенде x айнымалы тек қана $x=\frac{y}{3}$ түзуден $x=\sqrt{y}$ параболаға дейін өзгереді (басқа түзу немесе қисық сызық жоқ), сондықтан

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Енді екі еселі интегралды D_2 облыста (14.9) формулаға келтірейік. Бұл облыста y айнымалы $[1,3]$ сегментте өзгергенде x айнымалы тек қана $x=\frac{y}{3}$ түзуден $x=1$ түзуге дейін өзгереді. Сондықтан

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_1^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx.$$

Сонымен

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx.$$

2) Алдымен (14.8) формула бойынша интегралдайық. $y=\sqrt{2ax-x^2}$ қисық сызығы радиусы 1-ге тең, центрі $A(a,0)$ нүктедегі шеңбер, ал $y=\sqrt{2ax}$ қисық сызығы – гипербола, $x=2a$ түзу. Осы қисық сызықтармен шектелген D облыс 14.8, а-суретте көрсетілген. D облыс жоғарыдан әрі төменнен сәйкес $y=\sqrt{2ax}$

және $y=\sqrt{2ax-x^2}$ қисық сызықтармен ғана шектелген. Сондықтан (14.8) формула бойынша:

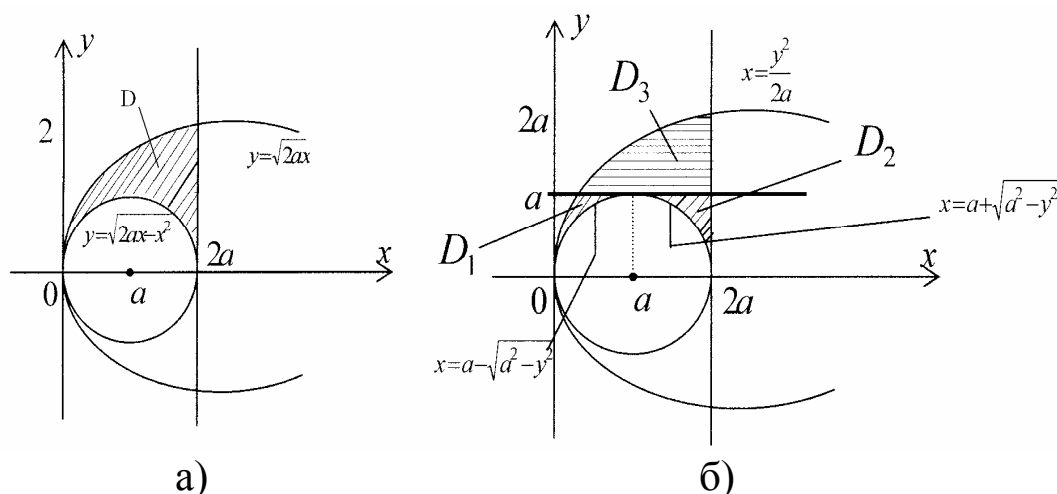
$$J = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy.$$

Енді (14.9) формула бойынша J интегралдың интегралдану ретін өзгертейік. Бұл жағдайда, J облысты D_1, D_2, D_3 облысқа бөлеміз (14.8, б-сурет), мұндағы

$$D_1 = \left\{ (x, y) : y \in [0, a], x = \frac{y^2}{2a}, x = a - \sqrt{a^2 - y^2} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : y \in [0, a], x = 2a, x = a + \sqrt{a^2 - y^2} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : y \in [0, 2a], x = \frac{y^2}{2a}, x = 2a \right\}.$$



14.8-сурет

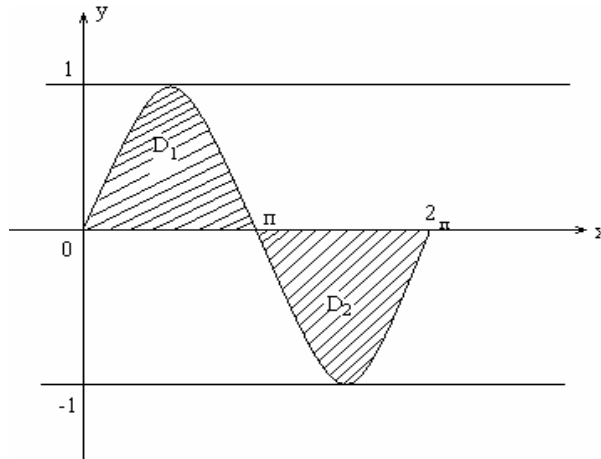
Демек, D_1 облыс үшін: y айнымалы 0-ден a -ға дейін өзгергенде x айнымалы $x = \frac{y^2}{2a}$ қисық сызықтан $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ қисық сызыққа дейін өзгереді. D_2 облыс үшін: y айнымалы a -дан $2a$ -ға дейін өзгергенде x айнымалы $x = \frac{y^2}{2a}$ қисық сызықтан $x = 2a$ түзуге дейін өзгереді. Онда

$$\begin{aligned} J &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \iint_{D_3} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a - \sqrt{a^2 - y^2}}^{a + \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

2-мысал. Екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгертейік

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

Шешуі. $D = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$ облыс (14.9-сурет) бейнеленген.



14.9-сурет

Берілген интегралды мына түрде жазайық:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy.$$

Енді әрбір екі еселі интегралдың сәйкес D_1 мен D_2 облыстарда интегралдау ретін өзгертейік. D_1 облыс үшін: y айнымалы $[0, 1]$ сегментте өзгергенде x айнымалы $x = \arcsin y$ -тен $\pi - \arcsin y$ -ке дейін өзгереді. D_2 облыс үшін: y айнымалы $[0, 1]$ сегментте өзгергенде x айнымалы $\pi - \arcsin y$ -тен $2\pi + \arcsin y$ -ке дейін өзгереді, онда

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dx = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$$

Сұрақтар.

1. Екі еселі интегралдағы сыртқы және ішкі интеграл деп қай интегралды атаймыз?
2. Екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгертуді қалай түсінеміз?
3. Дирихле формуласы.

Тапсырмалар.

1) Екі еселі интегралдарды берілген облыста есептеңдер:

$$\int_0^1 dy \int_0^2 (x^2 + y^2) dx; \int_0^2 dx \int_0^3 (x^2 + 2xy) dy; \int_1^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} xy dy; \int_{-1}^1 dy \int_0^{y^2} (x + 2y) dx,$$

$$\int_3^4 dy \int_0^{\ln y} e^x dx.$$

2) Екі еселі интегралдардың шектерін тауып есептеңдер.

1. $\iint_D x dx dy$ интегралды $y = x^2$ парабола және $x = -1, x = 2, y = x + 2$

түзулермен шектелген облыста.

2. $\iint_D (x^2 - y) dx dy$ интегралды $x = \sqrt{y}$ парабола мен $x = 0, y = 4$

түзулермен шектелген облыста.

3. $\iint_D (x + 2y) dx dy$ интегралды $y = \frac{x^2}{2}$ парабола мен $y = 3x, x = 2$

түзулермен шектелген облыста.

3) Екі еселі интегралдардың интегралдау ретін өзгертіндер.

$$\int_2^4 dx \int_0^2 f(x, y) dy, \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx, \int_0^3 dx \int_0^{9-x^2} f(x, y) dy, \int_0^4 dy \int_y^{18-y} f(x, y) dx.$$

14.5. Екі еселі интегралда айнымалыны алмастыру

Бір еселі интегралда айнымалыны алмастырғандай, екі еселі интегралда да x, y екі айнымаларды u мен v жаңа айнымаларға алмастырып, екі еселі интегралды есептеуге болады. Ол үшін декарт координат жүйеде екі XOY пен UOV жүйелерді және олардағы сәйкес нүктелердің координаттарын (x, y) пен (u, v) деп белгілейік. XOY координат жүйеде l қисық сызықпен шектелген тұйық квадратталатын D , ал UOV координат жүйеде l' қисық сызықпен шектелген тұйық квадратталатын D' облыстары берілсін (14.10-сурет).

D' облыста анықталған

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), (u, v) \in D' \quad (14.10)$$

функциялары берілсін және ол D' облыстың барлық (u, v) нүктелеріне D облыстың барлық (x, y) нүктелерін түгелдей қамтитын сәйкестік орындалсын. Демек, (14.10) функция D' облысты

D облысқа бейнелеуді анықтайды. Осы бейнелеу төмендегі шарттарды қанағаттандырсын:

I. (14.10) бейнелеу өзара бір мәнді бейнелеу болсын, яғни D' облыстың әртүрлі (u, v) нүктесіне D облыстан әртүрлі (x, y) нүкте сәйкес қойылған.

II. D' облыста $\varphi(u, v)$ мен $\psi(u, v)$ функцияларының бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болсын.

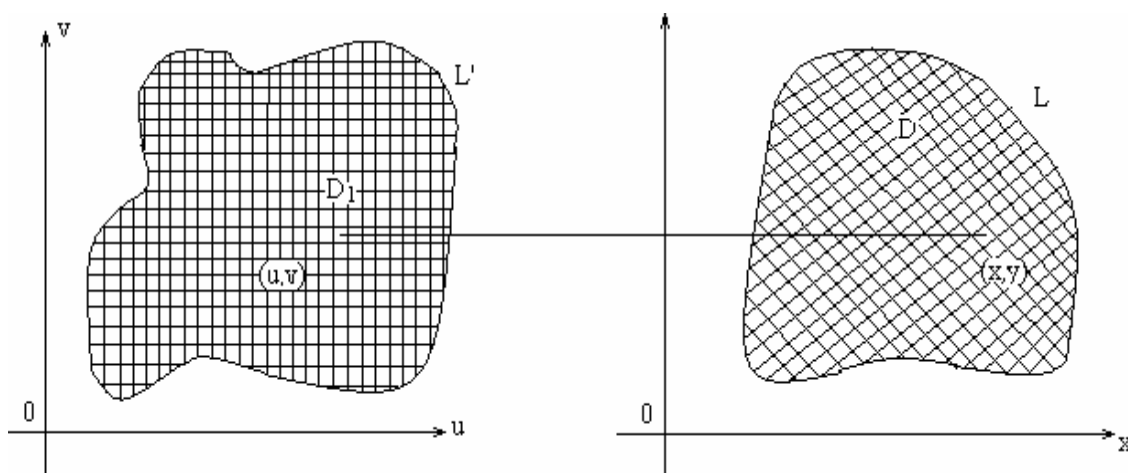
III. $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$ якобиан анықтауыш D' облыстың барлық нүктелерінде нөлге тең емес болсын.

Сонымен, D облыстың әрбір (x, y) нүктесіне D' облыстың әрбір (u, v) нүктесі, ал D' облыстың әрбір (u, v) нүктесі D облыстың әрбір (x, y) нүктесіне сәйкес келеді. Бұл жағдайда, (14.10) функция UOV жазықтықтағы D' облысты xOy жазықтығындағы D облысқа **бейнелеу** деп аталады, ал D облыс D' облыстың **бейнесі**, ал D' облыс D облыстың **түп бейнесі** деп аталады.

Демек, D' облысты D облысқа бейнелеу бірімәнді болғандықтан, D облыста u мен v -ге тәуелді (14.10) теңдеудің тек бір ғана шешімі бар

$$u = \varphi_l(x, y), v = \psi(x, y) \quad (14.11)$$

және де якобиан анықтауышындағы дербес туындылар үзіліссіз болғандықтан, якобиан анықтауышы D' облыста өзінің таңбасын сақтайды әрі (14.10) бейнелеу мен оған кері (14.11) бейнелеулердің якобиан анықтауыштары арасында мына қатынас орындалады:



14.10-сурет

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1.$$

Енді D' облыста $u = u_0$ түзуін қарастырайық. Осы түзуге D облыста

$$x = \varphi(u_0, v), y = \psi(u_0, v) \quad (14.12)$$

параметр теңдеуімен анықталатын тегіс қисық сызық сәйкес келеді, мұндағы v – параметр (14.11-сурет). Осы сияқты, D' облысындағы $v = v_0$ түзуге D облыста

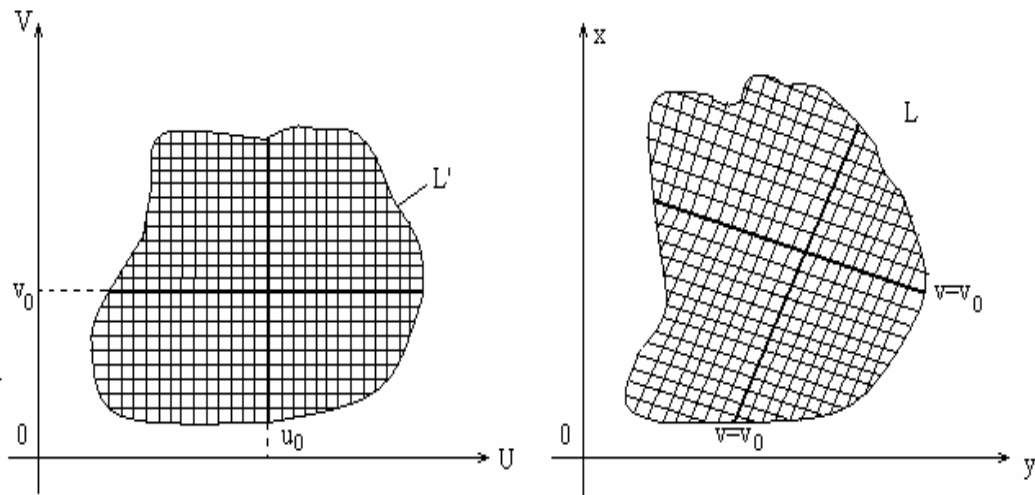
$$x = \varphi(u, v_0), y = \psi(u, v_0) \quad (14.13)$$

параметр теңдеуімен анықталатын тегіс қисық сызық сәйкес келеді, мұндағы u – параметр (14.11-сурет). D' облысындағы координат осьтеріне параллель түзулерді (14.10) бейнелеумен D облыстағы (14.12) бен (14.13) қисық сызықтарына бейнеленгендегі осы қисық сызықтар u мен v -ның **координат сызықтары** деп аталады. (14.10) бейнелеу өзара бірімді бейнелеу болғандықтан, тек бір ғана (14.12) қисық сызық D облысының әрбір (x, y) нүктесінен өтеді және де v_0 тұрақты мәнге сәйкес келетін тек бір ғана (14.13) қисық сызық өтеді.

Сондықтан, тұрақты u_0 мен v_0 мәндерді D облысының нүктелерінің координаттары ретінде қарастыруға болады әрі бұл нүктелерден өтетін түзу сызықтар емес қисық сызықтар болады. D облысындағы тұрақты u_0 мен v_0 мәндерін осы облыстағы $M_0(u_0, v_0)$ нүктенің **қисық сызықты координаттары** деп аталады (14.11-сурет).

Сонымен, D' облысты D облысқа бейнелегенде D' облыстағы тіктөртбұрыш D облысындағы қисық сызықты төртбұрышқа бейнеленеді. Сондықтан (14.10) формуланы ескі тікбұрышты (x, y) координатты жаңа қисық сызықты (u, v) координатқа көшіретін формула ретінде қарастыруға болады. Осы сияқты D облыстың l шекарасына бейнеленеді, ал ішкі нүкте ішкі нүктеге бейнеленеді.

Қисық сызықты координат ретінде (ρ, φ) поляр координатты қарастыруға болады (14.12-сурет). Поляр координатпен (x, y) тікбұрышты координат арасындағы байланыс мына формула арқылы беріледі (14.12, а-сурет):



14.11-сурет

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, 0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (14.14)$$

Поляр координатында координат қисық сызықтары центрі координаттың бас нүктесі болатын, ал радиустары осы центрден шығатын сәуле болатын концентрлі шеңберлер ($\rho - const, \varphi - const$) (14.12, б-сурет). Енді декарт координаттан поляр координатына көшудегі якобиан анықтауышын есептейік:

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0, \quad (14.15)$$

яғни якобиан анықтауыш $x = 0, y = 0$ нүктеден өзге барлық нүктелерде нөлге тең емес.

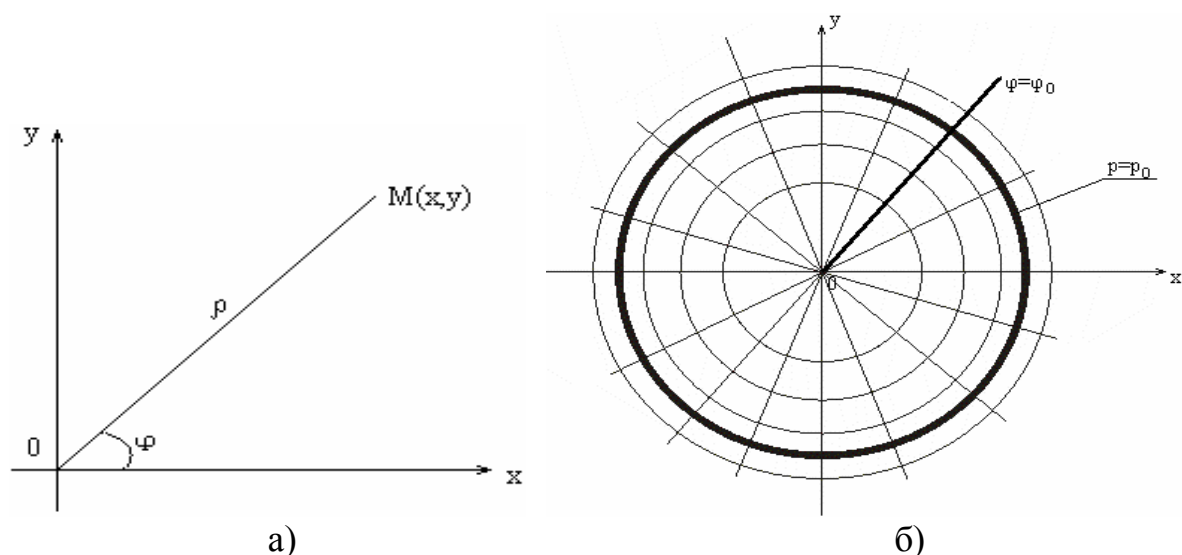
Егер D' пен D тұйық квадратталатын облыстар болса және I–III шарттар орындалса, онда D облыстың ауданы үшін мына теңдік орындалады:

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (14.16)$$

Енді айнымалыны алмастыруды екі еселі

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (14.17)$$

интегралға қолданайық.



14.12-сурет

14.4-теорема. Егер D және D' тұйық квадратталатын облыстар, $f(x, y)$ функция ауданы нөлге тең жиындардың нүктелерінен өзге D облыста шектелген және үзіліссіз, ал (14.10) бейнелеу I–III шарттарды қанағаттандырсын, онда мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv. \quad (13.18)$$

Бұл формула екі еселі интегралда **айнымалыны алмастыру формуласы** деп аталады.

Егер (14.17) екі еселі интегралға (14.14) алмастыруды қолдансақ, онда

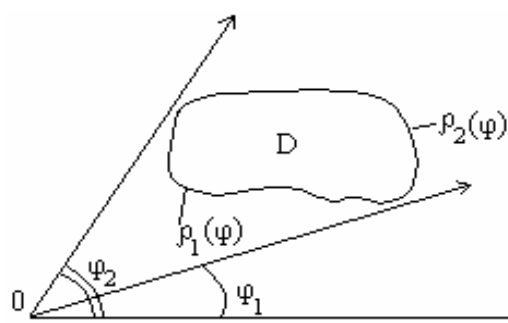
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

теңдігі орындалады.

Енді полюстің орналасуына байланысты, декарт координат жүйедегі екі еселі интегралды поляр координат жүйеге көшіруді қарастырайық. Бұл жағдайда үш жағдайды ескеруіміз қажет.

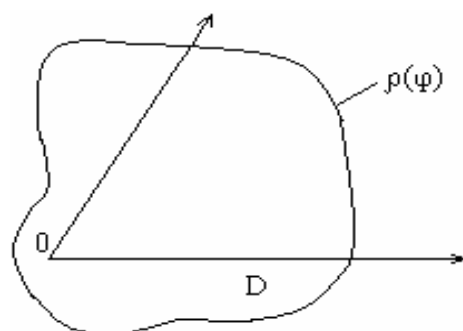
1. Егер поляр координат жүйесінің полюсі D облысының сыртқы нүктесі болса (14.13-сурет), онда екі еселі интегралды мына формуламен есептейміз:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$



14.13-сурет

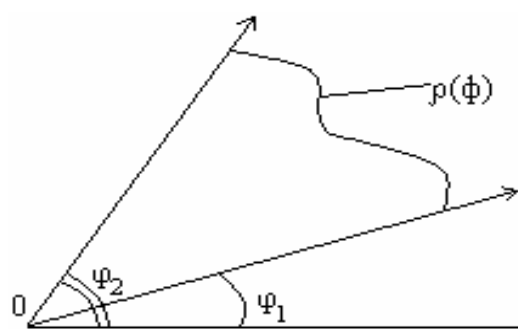
2. Егер поляр координат жүйенің полюсі D облысының ішкі нүктесі болса (14.14-сурет), онда



14.14-сурет

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

3. Егер поляр координат жүйенің полюсі D облысының шекарасына тиісті болса (14.15-сурет), онда



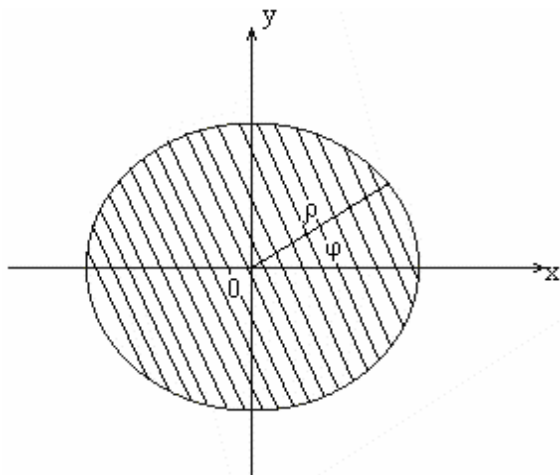
14.15-сурет

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Төмендегі мысалдарда $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ интегралды поляр координат жүйесіне көшірейік.

1-мысал. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Шешуі. Алдымен декарт координатындағы $x^2 + y^2 \leq R$ дөңгелектің теңдеуінен поляр координаттағы теңдеуін алайық (14.16-сурет):



14.16-сурет

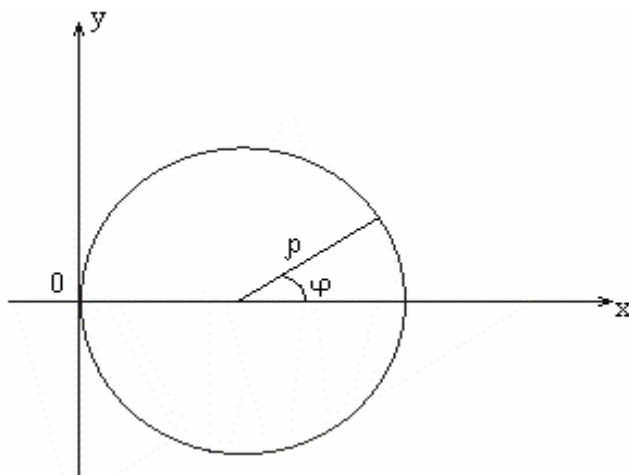
$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R^2, \rho \leq R.$$

Демек, поляр координат жүйедегі дөңгелектің теңдеуі $\rho \leq R$ болады, яғни ρ -ның мәні 0-ден R -ге дейін, ал φ -дің мәні 0-ден 2π -ге дейін өзгереді, онда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

2-мысал. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq Rx\}$

Шешуі. Центрі $(\frac{R}{2}, 0)$ нүкте, ал радиусы R -ге тең $x^2 + y^2 \leq Rx$ дөңгелектің поляр координат жүйедегі осы дөңгелектің теңдеуін табайық (14.17-сурет):



14.17-сурет

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R \rho \cos \varphi, \rho^2 \leq R \rho \cos \varphi.$$

Осыдан $\rho \leq R \cos \varphi$ поляр координат жүйедегі дөңгелектің теңдеуі болады.

Онда, ρ -ның мәні 0-ден $\rho \cos \varphi$ -ның бірге дейін өзгереді, ал φ -дің мәні $-\frac{\pi}{2}$ -ден $+\frac{\pi}{2}$ -ге дейін өзгереді, яғни

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

3-мысал. $D = \left\{ (x, y) : -R \leq x \leq R, \frac{x^2}{R} \leq y \leq R \right\}.$

Шешуі. D облысты $y = x$ және $y = -x$ түзулері арқылы үш тұйық облыстарға бөлеміз (14.18-сурет):

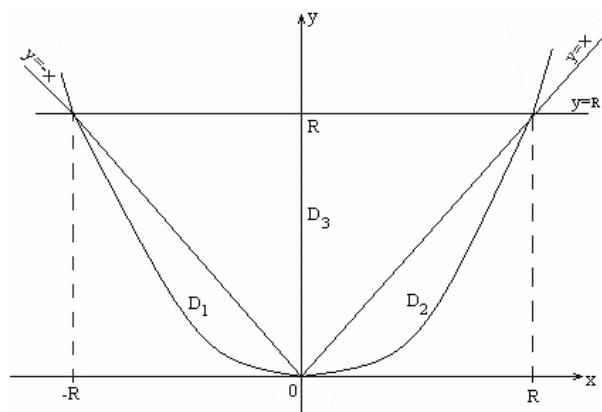
$$D_1 = \left\{ (x, y) : -R \leq x \leq 0, \frac{x^2}{R} \leq y \leq -x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq R, \frac{x^2}{R} \leq y \leq x \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : -R \leq x \leq R, |x| \leq y \leq R \right\}.$$

Онда берілген екі еселі интеграл үш екі еселі интегралдың қосындысынан анықталады (14.18-сурет):

$$I = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \iint_{D_3} f(x, y) dx dy.$$



14.18-сурет

D_1 облыста:

$$y = -x, \quad \rho \cos \varphi = -\rho \sin \varphi, \quad \operatorname{ctg} \varphi = -1, \quad \varphi = y = \frac{x^2}{R},$$

$$\rho \sin \varphi = \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{\rho \cos^2 \varphi}{R}, \quad \rho = \frac{R \sin \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

яғни D_1 облыста φ -дің мәні $\frac{3\pi}{4}$ -пен π -ге дейін, ал ρ -ның мәні 0-ден

$\frac{R \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ -ге дейін өзгереді; D_3 облыста: $y = R, \rho \cos \varphi = R, \quad \rho = \frac{R}{\cos \varphi},$

$y = x, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad y = -x, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$, яғни D_3 облыста φ -дің мәні $\frac{\pi}{4}$ -тен $\frac{3\pi}{4}$ -ке

дейін өзгереді, ал ал ρ -ның мәні 0-ден $\frac{R}{\cos \varphi}$ -ге дейін өзгереді; D_2

облыста: $y = x, \rho \cos \varphi = \rho \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}, y = x, \varphi = \frac{\pi}{4}, y = -x, \varphi = \frac{3\pi}{4},$

яғни D_2 облыста φ -дің мәні 0-ден $\frac{\pi}{4}$ -ке дейін, ал ρ -ның мәні 0-ден

$\frac{R \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ -ге дейін өзгереді. Сонымен:

$$I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\cos \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{R \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Сұрақтар.

1. Облыстың түп бейнесі.
2. Координат сызықтары.
3. Айнымаларды алмастыру формуласы.
4. Поляр координат жүйенің полюсі облыстың сыртқы нүктесі болғандағы екі еселі интегралдағы алмастыру формуласы.
3. Поляр координат жүйенің полюсі облыстың шекара нүктесі болғандағы екі еселі интегралдағы алмастыру формуласы.
4. Поляр координат жүйенің полюсі облыстың ішкі нүктесі болғандағы екі еселі интегралдағы алмастыру формуласы.

Тапсырмалар.

1) Декарт координат жүйеде берілген $\iint_D f(x,y)dx dy$ екі еселі интегралды поляр координат жүйеге көшіріңдер: $x^2 + y^2 \leq 9$ – дөңгелектің бірінші шерігінде; $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ – жарты дөңгелекте; $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ – дөңгелекте.

2) Декарт координат жүйеден поляр координат жүйеге көшіп, екі еселі интегралдың шектерін тауып есептеңдер:

1. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$ интегралды $y^2 + x^2 = 1$ мен $y^2 + x^2 = 4$ -сақиналармен шектелген облыста.

2. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ интегралды $x^2 + y^2 \leq 9$ дөңгелектің бірінші шерігінде.

3. $\iint_D y dx dy$ интегралды $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$ облыста.

4. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ интегралды $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4$ облыста.

5. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ интегралды $x^2 + y^2 \leq 4x$ облыста.

14.6. Екі еселі интегралды физика және механика есептеріне қолдану

Біз 14.1-тақырыпта, $\bar{V}$ дене жоғарыдан $z = f(x,y)$ бетпен, төменнен D облыспен, ал бүйір беті цилиндрмен (жасаушылары Oz осіне параллель) шектелсе, яғни $\bar{V} = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ онда $\bar{V}$ дененің көлемін интеграл қосындыдан шекке көшіп анықтадық:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta D_i = \iint_D f(x,y) dx dy,$$

мұндағы ΔD_i таңба D облысты бөліктерге бөлгендегі D_i бөліктердің ауданы.

Квадратталатын D облыстың ауданын да екі еселі интеграл көмегімен есептеуге болады:

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \left| \frac{D(x, y)}{D(x, y)} \right| du dv.$$

Егер $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x, y)\}$ болса, онда қисық сызықты D трапецияның ауданын

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x) dx$$

формуламен есептеуге болады.

Енді екі еселі интеграл көмегімен физика және механика есептерін шығаруды қарастырайық. Бізге xOy жазықтығында D пластинка берілсін және оның тығыздығы $\mu(x, y)$ болсын.

а) Пластинканың массасы. Берілген пластинканың тығыздығы бойынша оның массасын табайық. Ол үшін $\mu(x, y)$ тығыздығы x және y айнымалары бойынша D облыста үзіліссіз болсын. Облысты еркімізше ΔD_i ($i = \overline{1, n}$) бөліктерге бөлейік әрі әрбір D_i бөліктен кез келген $P_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нүкте алайық. Онда әрбір D бөліктердің массасы жуық шамамен $\mu(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta D_i$ көбейтіндіге тең, ал барлық пластинканың массасы $D_1, D_2, \dots, D_n$ бөліктердің массаларының қосындысына тең, яғни

$$m = \sum_{i=1}^n \mu(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta D_i,$$

мұндағы ΔD_i таңба D_i бөліктің ауданы. Пластинканың дәл массасын табу үшін, D облысты жеткілігінше кіші бөліктерге бөлеміз де, интеграл қосындыдан шекке көшіп анықтаймыз:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta D_i = \iint_D \mu(x, y) dx dy. \quad (14.19)$$

б) Пластинканың ауырлық центрінің координаттары

Пластинканың ауырлық центрінің дәл координаттарын шекке көшіп табамыз, сонда:

$$x_0 = \frac{\iint_D x \mu(x, y) dx dy}{\iint_D \mu(x, y) dx dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_D y \mu(x, y) dx dy}{\iint_D \mu(x, y) dx dy}. \quad (14.20)$$

Егер пластинка біртекті, яғни $\mu(x, y) = 1$ болса, онда оның ауырлық центрінің координаттарын мына формуладан анықтаймыз:

$$x_0 = \frac{\iint_D x dx dy}{m}, \quad y_0 = \frac{\iint_D y dx dy}{m}. \quad (14.21)$$

мұндағы m – пластинканың массасы.

в) Пластинканың инерция моменттері.

Пластинканың OY осі бойынша инерция моменті мына формуладан анықталады:

$$J_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy. \quad (14.22)$$

Пластинканың OX осі бойынша инерция моментін анықтаймыз:

$$J_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy. \quad (14.23)$$

Осы сияқты координат осінің бас нүктесі бойынша пластинканың инерция моментін табамыз:

$$J_0 = J_x + J_y = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy. \quad (14.24)$$

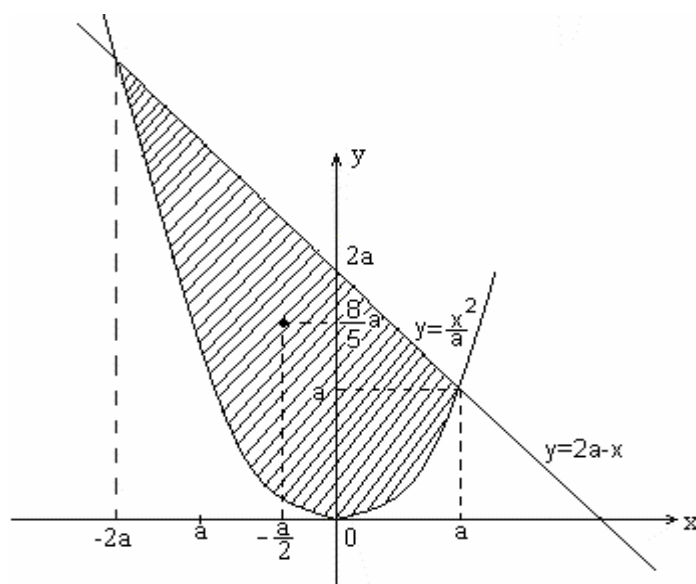
г) Пластинканың статикалық моменттері. Жоғарыдағыдай, OX және OY осьтері бойынша пластинканың сәйкес статикалық моменттерін анықтауға болады:

$$M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy.$$

1-мысал. $ay = x^2$, $x + y = 2a$, $a > 0$ қисық сызықтармен анықталған біртекті пластинканың ауырлық центрінің координаттарын табайық (14.19-сурет).

Шешуі. $y = \frac{x^2}{a}$ параболасымен $y = 2a - x$ түзуінің қиылысу нүктесін табайық:

$$\frac{x^2}{a} = 2a - x, \quad x^2 + ax - 2a^2 = 0.$$



14.19-сурет

$$x_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2} = \frac{-a \pm 3a}{2}, x_1 = a, x_2 = -2a.$$

Параболамен түзу (a, a) және $(-2a, 4a)$ нүктелерде қиылысады. Демек, пластинка жоғарыдан $y = 2a - x$ түзуімен, төменнен $y = \frac{x^2}{a}$ параболамен шектелген: $D = \{(x, y) : -2a \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq 2a - x\}$, онда пластинканың массасы

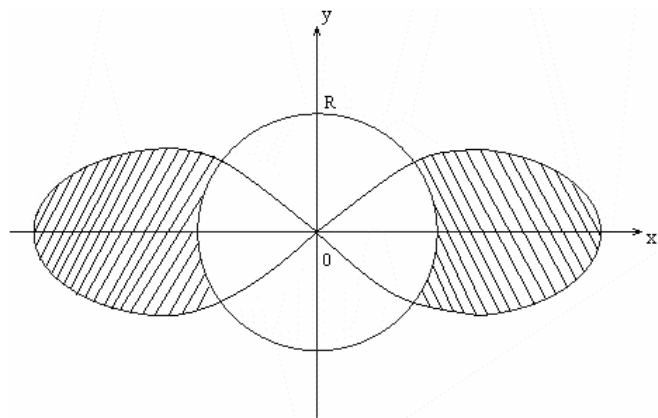
$$\begin{aligned} (\rho(x, y) = 1) : m &= \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^a y \Big|_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dx = \int_{-2a}^a \left(2a - x - \frac{x^2}{a} \right) dx = \\ &= \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_{-2a}^a = \frac{9}{2} a^2. \end{aligned}$$

Ауырлық центрінің координаттарын (14.29) формуламен есептейміз:

$$x_0 = \frac{2}{9a^2} \int_{-2a}^a x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = -\frac{a}{2}, \quad y_0 = \frac{2}{9a^2} \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{8}{5} a.$$

2-мысал. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geq a^2$ қисық сызықтармен шектелген фигураның ауданын есептейік (14.20-сурет).

Шешуі. Декарт координат жүйеден поляр координат жүйеге көшейік:



14.20-сурет

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = \\ &= 2a^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi), \quad \rho^4 = 2a^2 \rho^2 \cos 2\varphi, \quad \rho^2 = \\ &= 2a^2 \cos 2\varphi, \quad \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a^2, \quad \rho^2 = a^2. \end{aligned}$$

Сонымен, $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ поляр координат жүйедегі лемнискат Бернулли теңдеуі, ал $\rho = a$ шеңбердің теңдеуі. Енді осы қисық сызықтардың қиылысу нүктелерін табайық:

$$a^2 = 2a^2 \cos 2\varphi, \quad 2 \cos 2\varphi = 1, \quad \cos 2\varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{6}, \quad \rho = \pm a.$$

Сонда $a \leq \rho \leq a\sqrt{2 \cos 2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$

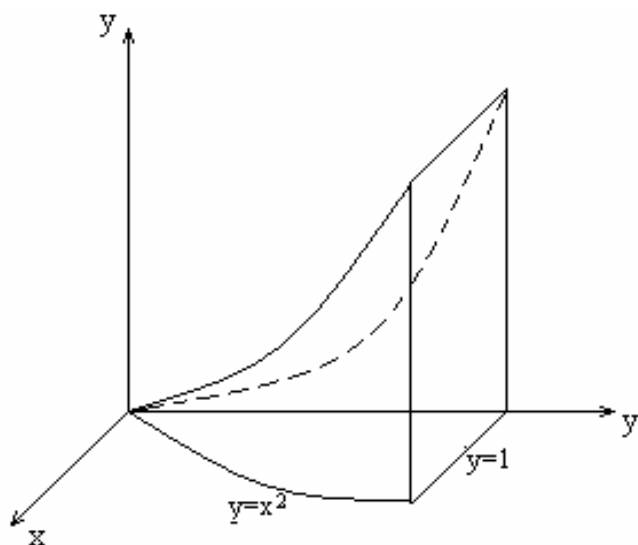
$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \Big|_a^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2 \cos 2\varphi - a^2) d\varphi = 2a^2 (\sin 2\varphi - \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. \end{aligned}$$

3-мысал. $z = x^2 + y^2, y = x^2, x = 0, y = 1, z = 0$ беттер мен шектелген дененің жарты көлемін табайық (14.21-сурет).

Шешуі. Дене жоғарыдан $z = x^2 + y^2$ параболоидпен, төменнен xOy жазықтығындағы $y = x^2$ парабола, OY осі және $z = x^2 + y^2, y = 1$ түзуімен шектелген, яғни $D = \{(x, y): y = x^2, y = 1, x = 0\}$. Онда

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_{x^2}^1 dx =$$

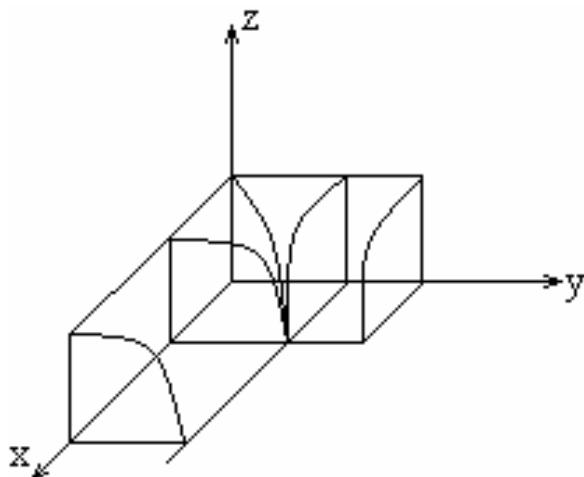
$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)_0^1 = \frac{44}{105}.$$



14.21-сурет

4-мысал. $x^2 + z^2 = a^2$, $z^2 + y^2 = a^2$ беттермен шектелген дене бетінің ауданын есептейік. (14.22-сурет).

Шешуі. Дене бетінің ауданын $S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy$ формуламен есептейміз, мұндағы $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $z'_y = 0$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq x$.



14.22-сурет.

Осыдан

$$\begin{aligned} S &= 16 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = 16 \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \int_0^x dy = \\ &= 16a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot y \Big|_0^x dx = 16a \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= -16a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^a = 16a^2. \end{aligned}$$

5-мысал. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x=0$, $y=0$, $0 \leq x \leq a$ қисық сызықтармен шектелген фигураның Ox және Oy осьтері бойынша инерция моменттерін анықтайық ($\rho(x,y)=1$).

Шешуі. Фигура $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - \sqrt{2ax - x^2}\}$.

Онда

$$\begin{aligned} J_x &= \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} y^2 dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^a y^3 \Big|_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^a \left(a - \sqrt{2ax - x^2}\right)^3 dx. \end{aligned}$$

Соңғы интегралға $x = 2a \sin^2 t$ алмастыруын қолданайық, сонда

$$x=0, t_0=0, x=a, t_a=\frac{\pi}{4}; dx=2a \sin 2t dt.$$

Онда

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{2a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a - \sqrt{4a^2 \sin^2 t - \sin^4 t}\right)^3 \sin 2t dt = \frac{2a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2t)^3 \sin 2t dt = \\ &= \frac{a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2t)^3 \sin 2t dt = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi). \end{aligned}$$

$$J_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{2ay-y^2}} x^2 dx = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi).$$

Тапсырмалар.

1. Жазықтықта $\iiint_V f(x,y,z) dv \leq \iiint_V \varphi(x,y,z) dv$ түзу мен $y = \frac{x^2}{4} - 1$

параболамен шектелген облыстың ауданын табындар.

2. Жазықтықта $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ түзулермен және $x^2 + y^2 = 2x$ параболамен шектелген облыстың ауданын табыңдар.

3. Жазықтықта $y = 0$, $y = 4$, $y = -x$, $y = \frac{x-1}{2}$ түзулермен шектелген облыстың ауданын табыңдар.

4. $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = z$ беттермен шектелген дененің көлемін табыңдар.

5. $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 4 - x^2 - y^2$ беттермен шектелген дененің көлемін табыңдар.

6. $y = x^2$ парабола және $y = 1$ түзумен шектелген материалды пластинканың ауырлық центрінің координаталарын табыңдар ($\rho(x, y) = 1$).

14.7. Үш еселі интегралдың анықтамасы

Жоғарыда екі еселі интегралдың анықтамасын фигураның ауданы арқылы бердік, ал үш еселі интегралдың анықтамасы кеңістіктегі дененің көлемі арқылы беріледі. Кеңістікте кез келген $\bar{V}$ денені қарастырайық. $\bar{V}$ дененің ішіне көпжақты денелер орналассын, осы денелердің көлемдерінің дәл жоғарғы шегі $\bar{V}$ дененің **ішкі көлемі** деп аталады, ал ең төменгі шегі $\bar{V}$ дененің **сыртқы көлемі** деп аталады. Егер $\bar{V}$ дененің ішіне бірде-бір денені орналастыра алмасақ, онда **дененің ішкі көлемі нөлге тең** дейміз. Егер дененің ішкі мен сыртқы көлемдері тең болса, онда ол $\bar{V}$ дененің **көлемі** деп аталады, ал дененің өзі **кубталатын дене** деп аталады. Төменде тек кубталатын денелерді ғана қарастыратын боламыз.

Бізге кубталатын $\bar{V}$ денеде шектелген $f(x, y, z)$ функция берілсін. Берілген денені кіші $\bar{V}_i$ бөліктерге (денелерге) бөлейік, осы бөліктерден еркімізше $P_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) = P_i$ нүктелерді алайық және

$$J(\bar{V}_i, P_i) = \sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \cdot \Delta v_i \quad (14.25)$$

қосындыны қарастырайық, мұндағы Δv_i -кіші $\bar{V}_i$ бөліктердің көлемі. $\bar{V}_i$ дененің диаметрін λ_i деп белгілейік және $\lambda = \max_i \{\lambda_i\}$ болсын.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, $\lambda < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық λ үшін $|J(\bar{V}_i, P_i) - J| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалсын.

Демек, $|J(\bar{V}_i, P_i) - J| < \varepsilon$ теңсіздігі $\lambda < \delta$ теңсіздігі орындалатындай $\bar{V}$ денені кез келген бөліктеулерге бөлгеннен және $P_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүктені таңдап алғаннан тәуелсіз болады. Егер $\lambda \rightarrow 0$ болғанда (14.25) интеграл қосындының шегі бар болса, онда ол шек $f(x, y, z)$ функцияның $\bar{V}$ дене бойынша алынған **үшінші ретті интегралы** деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$J = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \cdot \Delta v_i = \iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dv.$$

Бұл жағдайда, $\bar{V}$ денеде $f(x, y, z)$ **функция интегралданады** деп аталады.

14.5-теорема. Егер шектелген $f(x, y, z)$ функциясы кубталатын $\bar{V}$ облыстың көлемі нөлге тең жиындарынан өзге нүктелердің бәрінде үзіліссіз болса, онда функция $\bar{V}$ облыста интегралданады.

Екі еселі интегралға орындалатын негізгі қасиеттер үш еселі интегралға да орындалады.

1-қасиет. Егер $f(x, y, z)$ пен $\varphi(x, y, z)$ функциялары $\bar{V}$ облыста интегралданса және $c_1, c_2 - \text{const}$ болса, онда $c_1 f(x, y, z) \pm c_2 \varphi(x, y, z)$ функциясы да осы облыста интегралданады және

$$\iiint_{\bar{V}} (c_1 f(x, y, z) \pm c_2 \varphi(x, y, z)) dv = c_1 \iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dv \pm c_2 \iiint_{\bar{V}} \varphi(x, y, z) dv.$$

2-қасиет. Егер $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ функциялары $\bar{V}$ облыста интегралданса, онда $f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z)$ функциясы да осы облыста интегралданады.

3-қасиет. Егер $\bar{V}_1$ мен $\bar{V}_2$ облыстардың ішкі нүктелері ортақ болмаса және $f(x, y, z)$ функциясы осы облыстардың әрқайсысында да интегралданса, онда функция $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ облыста интегралданады және

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dv = \iiint_{\bar{V}_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\bar{V}_2} f(x, y, z) dv.$$

4-қасиет. Егер $f(x, y, z)$ және $\varphi(x, y, z)$ функциялары $\bar{V}$ облыста интегралданса әрі $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dv \leq \iiint_{\bar{V}} \varphi(x, y, z) dv.$$

5-қасиет. Егер $f(x, y, z)$ функциясы $\bar{V}$ облыста интегралданса, онда $|f(x, y, z)|$ функциясы да осы облыста интегралданады және

$$\left| \iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dv \right| \leq \iiint_{\bar{V}} |f(x, y, z)| dv.$$

6-қасиет (орта мән туралы теорема). Егер $f(x, y, z)$ функциясы $\bar{V}$ облыста интегралданса және $m \leq f(x, y, z) \leq M$ теңсіздігі орындалса, онда

$$mV \leq \iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dv \leq MV.$$

мұндағы V таңба $\bar{V}$ облыстың көлемі.

Соңғы қасиетті мына түрде тұжырымдауға болады, егер $\bar{V}$ тұйық шектелген байланысты облыс және $f(x, y, z)$ функциясы осы облыста үзіліссіз болса, онда осы облыста $A(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүкте табылып, мына теңдік орындалады:

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dv = f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \cdot V.$$

Сұрақтар.

1. Дененің көлемі.
2. Кубталатын дене.
3. Функцияның денеде интегралдануы.
4. Орта мән туралы теорема.

14.8. Үш еселі интегралды есептеу

Бізге $\bar{V}$ облыста үш еселі интеграл берілсін:

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (14.26)$$

1. Үш еселі интегралдың интегралдау $\bar{V}$ облысы тікбұрышты параллелепипед болсын: $\bar{V} = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, k \leq z \leq l\}$,

онда тікбұрышты параллелепипедтің xOy жазықтығындағы проекциясы $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ тіктөртбұрышы болады.

14.6-теорема. Егер (14.26) үш еселі интеграл бар болса және D облысының тағайындалған кез келген $A(x, y)$ нүктесі үшін

$$J(x, y) = \int_k^l f(x, y, z) dz$$

интегралы бар болса, онда

$$\iint_D J(x, y) dx dy = \iint_D dx dy \int_k^l f(x, y, z) dz \quad (14.27)$$

интегралы да бар және мына теңдік орындалады:

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_k^l f(x, y, z) dz \quad (14.28)$$

теңдігі **қайталама интеграл** деп аталады.

2. Енді $\bar{V}$ облысы қисық сызық болсын, яғни облыс төменнен $z_1 = z_1(x, y)$ жоғарыдан $z_2 = z_2(x, y)$ беттерімен, бүйір жақтары цилиндрлік бетпен (жасаушылары Oz осіне параллель) шектелсін, ал $\bar{V}$ облыстың xOy жазықтығындағы проекциясы D болсын:

$$\bar{V} = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

мұндағы $z_1 = z_1(x, y)$, $z_2 = z_2(x, y)$ функциялары квадратталатын D облыста үзіліссіз.

14.7-теорема. $\bar{V}$ облыста $f(x, y, z)$ функциясының үш еселі интегралы бар болсын, D облысының тағайындалған кез келген $A(x, y)$ нүктесі үшін

$$J(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

интегралы бар болсын, онда қайталанған

$$\iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

интегралы бар және мына теңдік орындалады:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Ескерту. Егер $J(x, y)$ интегралына теореманың шарттары орындалса, онда $\iint_D J(x, y) dx dy$ интегралын мына түрде жазуға болады:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Бұл жағдайда, үш еселі интегралды есептеу үшін ішкі интегралдан бастап интегралдау қажет.

Мысал. $\bar{V} = \{(x, y, z) : z = 0, z = y, y = x^2, y = 1\}$ облысында $\iiint_V xy\sqrt{z} dx dy dz$ интегралды есептейік.

Шешуі. $\bar{V}$ облыстың xOy жазықтығындағы проекциясы $D = \{(x, y) : x = 1, x = y - 1, y = x^2, y = 1\}$ болады, яғни D облысы жоғарыдан $y = 1$ түзуімен, төменнен $y = x^2$ параболасымен, сол жағынан $x = -1$ оң жағынан $x = 1$ түзулерімен шектелген. Онда

$$\begin{aligned} \iiint_V xy\sqrt{z} dx dy dz &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 y dy \int_0^y \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 yz^{\frac{3}{2}} \Big|_0^y dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 yz^{\frac{5}{2}} dy = \frac{2}{3} \frac{2}{7} \int_{-1}^1 xy^{\frac{7}{2}} \Big|_{x^2}^1 dx = \frac{4}{21} \int_{-1}^1 x(1 - |x|^7) dx = 0. \end{aligned}$$

Сұрақтар.

1. Үш еселі интегралдың қайталама интегралы.

Тапсырмалар.

1. $\iiint_V (1+x) dx dy dz$ үш еселі интегралды $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$

жазықтықтармен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.

2. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ үш еселі интегралды $x = 0, x = a$, $y = 0$,

$y = b, z = 0, z = c$ жазықтықтармен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.

3. $\iiint_V y dx dy dz$ үш еселі интегралды $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1 - y$ жазықтықтармен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.

4. $\iiint_V x z^2 dx dy dz$ үш еселі интегралды $x = \sqrt{2y - y^2}$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 3$ фигура және жазықтықтармен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.

14.9. Үш еселі интегралда айнымалыны алмастыру

Екі еселі интегралдағы айнымаларды алмастырғандай, үш еселі интегралда да айнымаларды алмастыруға болады, яғни ескі x, y, z айнымаларынан жаңа u, v, w айнымаларына

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w) \quad (14.29)$$

функциялары арқылы көшеміз. Бұл жағдайда, (14.29) формула бойынша $\bar{V}$ облыстың әрбір $A(x, y, z)$ нүктесіне $\bar{V}'$ облыстан $A'(u, v, w)$, $A'(u, v, w)$ нүктесі, ал $\bar{V}'$ облыстың әрбір $A'(u, v, w)$ нүктесіне $\bar{V}$ облыстан $A(x, y, z)$ нүкте сәйкес қойылсын. Осы сәйкестік (бейнелеу) мына үш шартты қанағаттандырсын:

I. (14.29) бейнелеу өзара бірімәнді бейнелеу болсын;

II. $\bar{V}'$ облыста бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болсын;

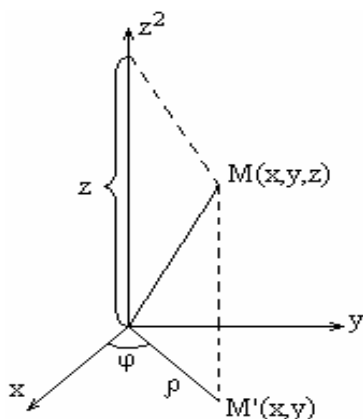
III. $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ якобиан анықтаушы $\bar{V}'$ облыстың барлық нүктелерінде нөлге тең болмасын.

Екі еселі интегралдағыдай (14.29) бейнелеу облыстың ішкі нүктелерін ішкі нүктелерге, ал шекара нүктелерін шекара нүктелеріне бейнелейді.

Сонда (14.29) алмастыру x, y, z айнымаларын u, v, w айнымаларына мына формула бойынша алмастырылады:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\varphi(\cdot), \psi(\cdot), \chi(\cdot)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

I. Цилиндрлік координаттар. Кеңістіктегі кез келген $M(x, y, z)$ нүктені алайық, ал $M'(x, y)$ нүкте $M(x, y, z)$ нүктенің xOy координат жазықтығындағы проекциясы болсын (14.23-сурет). ρ, φ, z сандары кеңістіктегі $M(x, y, z)$ нүктенің **цилиндрлік координаттары** деп аталады, мұндағы ρ, φ сандары M' нүктенің поляр координаттары.



14.23-сурет

Онда ескі x, y, z координаттан жаңа ρ, φ, z координаттарға көшу үшін

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \quad (14.30)$$

алмастыруды пайдаланамыз, мұндағы $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Осы алмастырудың якобиан анықтаушысын есептейік:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Сонда декарт координат жүйеден цилиндрлік поляр координат жүйеге мына формула көмегімен көшеміз:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

II. Сфералық координаттар. Кеңістіктегі кез келген $M(x, y, z)$ нүктені қарастырайық, ал $M'(x, y)$ нүкте $M(x, y, z)$ нүктенің xOy координат жазықтығындағы проекциясы болсын (14.24-сурет). ρ, φ, z

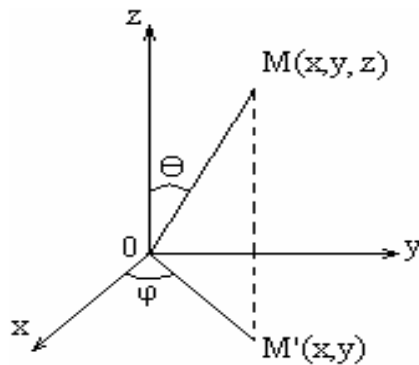
сандары M нүктенің **сфералық координаттары** деп аталады. Декарт координат жүйеден сфералық координат жүйеге көшу үшін

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta \quad (14.31)$$

алмастыруын пайдаланамыз, мұндағы $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$. Егер θ бұрышы ретінде OM мен OM' түзулерінің арасындағы бұрышты алсақ, онда (14.31) формуласындағы $\sin \theta$ -ны $\cos \theta$ -ға, ал $\cos \theta$ -ны $\sin \theta$ -ға ауыстыру керек:

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi, y = \rho \cos \theta \sin \varphi, z = \rho \sin \theta,$$

мұндағы $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Енді (14.31) алмастырудың якобиан анықтауышын есептейік:



14.24-сурет

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

Сонымен, декарт координат жүйеден сфералық координат жүйеге көшу үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V'} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Егер θ бұрышы ретінде $OMOM'$ бұрышын алсақ, онда

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V'} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta) \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

1-мысал. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ қисық сызықпен шектелген $\bar{V}$ дене бойынша мына интегралды есептейік:

$$\iiint_{\bar{V}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz.$$

Шешуі. Сфералық координаттарға көшейік:

$$x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, z = c\rho \cos \theta.$$

Онда

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dx dy dz = abc \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{4\pi abc}{5}.$$

2-мысал. $\bar{V}$ дене мына беттермен шектелген:

$$z^2 = x^2 + y^2, z = 1.$$

$\iiint_{\bar{V}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ интегралын есептейік.

Шешуі. Цилиндрлік координаттарға көшейік: $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z$. Енді берілген беттердің цилиндрлік координаттағы теңдеулерін табайық: $z^2 = \rho^2, z = \rho, z = 1$, яғни $\bar{V}' = \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$. Сонда

$$\iiint_{\bar{V}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_\rho^1 dz = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Сұрақтар.

1. Цилиндрлік координат жүйесі және осы жүйедегі нүктенің координаттарының геометриялық сызбасы.
2. Сфералық координат жүйесі және осы жүйедегі нүктенің координаттарының геометриялық сызбасы.
3. Цилиндрлік координат жүйедегі якобиан анықтауышы.
4. Сфералық координат жүйедегі якобиан анықтауышы.

Тапсырмалар.

1. $\iiint_{\bar{V}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ үш еселі интегралды $z = x^2 + y^2$ параболоид және $z = 4$ жазықтықпен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.
2. Цилиндрлік координат жүйеге көшіп, $\iiint_{\bar{V}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ үш еселі интегралды $x^2 + y^2 = 4$ параболоид және $z = 0$, $z = 3$ жазықтықтармен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.
3. Сфералық координат жүйеге көшіп, $\iiint_{\bar{V}} z dx dy dz$ үш еселі интегралды $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ сфера мен $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конуспен шектелген және конусқа қатысты оның ішкі $\bar{V}$ облысында есепте.

14.10. Үш еселі интегралды физика мен механика есептеріне қолдану

1. Дененің көлемі. Кубталатын $\bar{V}$ дененің V көлемін

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dx dy dz \quad (14.32)$$

формуласы бойынша есептейміз.

Егер

$$\bar{V} = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \varphi(x, y)\}$$

болса, онда $\bar{V}$ дененің көлемін екі еселі интеграл арқылы есептеуге болады:

$$V = \iint_D dx dy \int_0^{\varphi(x, y)} \varphi(x, y) dx dy.$$

Егер $\bar{V}$ дене $x = a$, $x = b$ жазықтықтарымен және дененің әрбір D қимасының $(x - \text{const})$ ауданы S болса, онда (14.32) үш еселі интегралға $S(x) = \iint_{D(x)} dy ds$ формуланы пайдаланып, өзімізге белгілі

анықталған интеграл арқылы дененің көлемін есептеуге болады:

$$V = \int_a^b dx \iint_{D(x)} dy ds = \int_a^b S(x) dx.$$

Декарт координат жүйедегі x, y, z айнымаларына (14.29) алмастыруын пайдаланып, дененің көлемін қисық сызықты координат арқылы есептейміз:

$$V = \iiint_{V'} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

2. Бізге кеңістікте кубталатын материалды $\bar{V}$ дене берілсін және оның тығыздығы $\mu(x, y, z)$ болсын, онда мына формулалар орындалады:

а) дененің массасы: $m = \iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz;$

б) статикалық моменттері (координат жазықтықтар бойынша):

$$M_{yz} = \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{xz} = \iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xy} = \iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz;$$

в) ауырлық центрі:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m};$$

г) инерция моменттері (координат жазықтықтар бойынша):

$$J_{yz} = \iiint_V x^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad J_{xz} = \iiint_V y^2 \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$J_{xy} = \iiint_V z^2 \mu(x, y, z) dx dy dz;$$

д) инерция моменттері (координат осьтері бойынша):

$$J_x = J_{xz} + J_{xy}, \quad J_y = J_{xy} + J_{yz}, \quad J_z = J_{xz} + J_{yz},$$

е) инерция моменттері (координаттың бас нүктесі бойынша):

$$J_0 = J_{yz} + J_{xz} + J_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz;$$

ж) дененің $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі Ньютон потенциал өрісінің тартылысы:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \gamma \iiint_V \mu(x, y, z) \frac{1}{r} dx dy dz,$$

мұндағы

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad \gamma \text{ const};$$

з) массасы m_0 -ге тең материалды $\bar{V}$ денеге $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі $\bar{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ тартылыс күш:

$$F_x = \gamma \cdot m_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} = \gamma \cdot m_0 \iiint_V \mu(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_y = \gamma \cdot m_0 \frac{\partial u}{\partial y_0} = \gamma \cdot m_0 \iiint_V \mu(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_z = \gamma \cdot m_0 \frac{\partial u}{\partial z_0} = \gamma \cdot m_0 \iiint_V \mu(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3} dx dy dz.$$

1-мысал. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$ беттермен шектелген дененің көлемін есептейік.

Шешуі. $\bar{V}$ дене $z = x^2 + y^2$ пен $z = 2x^2 + 2y^2$ параболоидтардың, $y = x$ жазықтықтың және $y = x^2$ цилиндрлік беттердің бөліктерімен шектелген, яғни $(x = x^2, x = 0, x = 1)$:

$$\bar{V} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2\}.$$

Онда

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2) dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

2-мысал. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = c$ біртекті дененің ауырлық центрін есептейік.

Шешуі. $\bar{V}$ дене $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ беттің және $z = c$ жазықтықтың бөліктерімен шектелген және Oz осі бойынша симметриялы. Олай болса, оның ауырлық центрі Oz осінде жатыр, яғни $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Онда

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint_{\bar{V}} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Дене біртекті болғандықтан, дененің массасы оның көлемінің сандық мәніне тең ($\mu(x, y, z) = 1$ болғанда $m = V$). Сондықтан дененің көлемін есептейік, ол үшін ($\alpha = 1, n = 1$)

$$x = a\rho \sin \theta \cos \varphi, y = b\rho \sin \theta \sin \varphi, z = c\rho \cos \theta$$

формуланы пайдаланайық, сонда $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $c < z < c\rho$:

$$V = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{c\rho}^c dz = 2\pi ab \int_{c\rho}^c \rho z \Big|_{c\rho}^c d\rho = 2\pi abc \int_0^1 (\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{3} abc.$$

Онда

$$z_0 = \frac{3}{\pi c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{c\rho}^c z dz = 3c \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{3}{4} c.$$

Сонымен, дененің ауырлық центрі $A\left(0, 0, \frac{3}{4}c\right)$ нүктесі болады.

Тапсырма. Үш еселі интеграл көмегімен төмендегі беттермен шектелген дененің көлемін табыңдар.

1. $\bar{V}$: $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$, $x + 2z = 3$ жазықтықтармен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.

2. $\bar{V}$: $y = 4 - x^2$, $y = x^2 + 2$, $z = -1$, $z = 2$ фигуралармен шектелген $\bar{V}$ облыста есепте.

15. ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР

Материалды қисық сызықтың тығыздығы бойынша оның массасын және берілген жол бойымен жұмсалған күш өрісін, т.б. физика және механика есептерін шығару үшін, қисық сызықты интеграл деп аталатын интегралды енгізуге тура келеді. Осы тарауда қисық сызықты интегралдың екі түрін қарастыратын боламыз: бірінші және екінші текті қисық сызықты интегралдар.

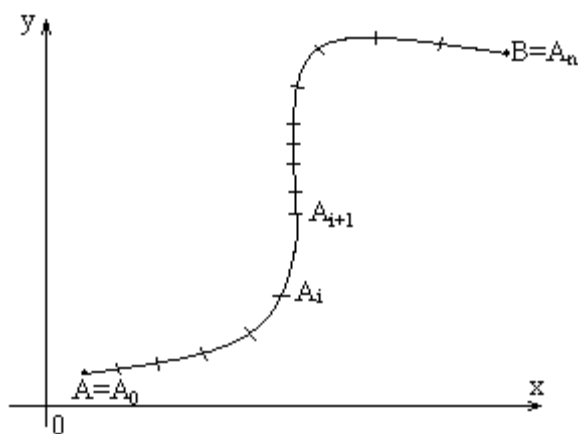
15.1. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы және оның бар болуы (доға ұзындығы бойынша)

Алдымен, алдағы тақырыптарда қажет болатын негізгі ұғымдарға тоқталайық. xOy координат жазықтығында $L = AB$ қисық сызық параметр теңдеумен берілсін:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (15.1)$$

мұндағы $t \in [\alpha; \beta]$. Қисық сызық L **жазықтықтағы тұйық емес (жай) қисық сызық** деп аталады, егер $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функциялары $[\alpha; \beta]$ сегментінде үзіліссіз және осы сегменттің t параметрінің әртүрлі мәндеріне әртүрлі $M(\varphi(t), \psi(t))$ нүктелері сәйкес келсе. Егер де $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ нүкте $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ нүктесімен беттессе, ал басқа нүктелері еселі болмаса, онда L – **тұйық жазық қисық сызық** деп аталады. Жазықтықтағы қисық сызық **түзуленуші қисық сызық** деп аталады, егер жазық қисық сызыққа іштей сызылған сынық сызықтардың шегі бар болса, $\Delta t \rightarrow 0$ болғанда, яғни егер бұл шек бар болса, онда ол шек L қисық сызықтың ұзындығына тең.

AB жазықтықтағы қисық сызық **тегіс қисық сызық (бөлікті қисық сызық)** деп аталады, егер $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функцияларының (бөлікті үзіліссіз) туындылары бар болса. AB қисық сызықтың **ерекше нүктесі** деп $\varphi'(t)$ мен $\psi'(t)$ туындыларының екеуін де нөлге айналдыратын нүктені айтамыз (9.3-тақырып). AB қисық сызықта анықталған $f(x, y)$ функциясы осы қисық сызықтың бойында үзіліссіз деп аталады, егер қисық сызық бойындағы кез келген $M_0(x_0, y_0)$ нүкте үшін $\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ теңдігі орындалса, мұнда $M_0(x_0, y_0) \in AB, M(x, y) \in AB$.



15.1-сурет

Егер бұл шек қисық сызықтың бойындағы саны санаулы нүктелерге орындалмай, ал қалған нүктелердің барлығына орындалса, онда $f(x, y)$ функциясы AB қисық сызық бойында бөлікті үзіліссіз деп аталады. Осылайша, жоғарыдағы ұғымдарды XYZ кеңістіктегі қисық сызықтар үшін де келтіруге болады.

Бізге $L = AB$ жазық, түзуленуші (тұйық немесе тұйық емес) қисық сызық (15.1) теңдеуімен берілсін және $f(x, y)$ функциясы осы қисық сызықта анықталсын (15.1-сурет).

Енді $[a; b]$ сегментті $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ нүктелермен n бөлікке бөлейік. Кез келген t_i ($t_i \in [\alpha; \beta]$) параметрге AB қисық сызық бойынан $A_i(x_i, y_i)$ нүкте сәйкес келеді және $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$. Онда L қисық сызығы да $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ нүктелермен n бөлікке бөлінеді. Әрбір $A_i A_{i+1}$ доғадан еркімізше кез келген $\bar{A}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нүктедегі $f(x, y)$ функциясының мәнін $A_i A_{i+1}$ доғаның ұзындығына көбейтейік, яғни $f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta l_i$ және осы көбейтіндіден 1-ден бастап n -ге дейін i бойынша қосынды алайық:

$$J(\bar{A}_i, A_i) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta l_i. \quad (15.2)$$

Осы қосынды $f(x, y)$ **функциясының интеграл қосындысы** деп аталады.

Анықтама. Егер $\Delta l = \max\{\Delta l_i\} \rightarrow 0$ болғанда $J(\bar{A}_i, A_i)$ интеграл қосындының шегі бар болса, онда ол шек $f(x, y)$ функциясының L қисық сызық бойымен алынған доға ұзындығы бойынша қисық сызықты интегралы немесе бірінші текті қисық сызықты интегралы деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$\int_L f(x, y) dl = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta l_i = J, \quad (15.3)$$

мұндағы x, y – тәуелсіз айнымалылар және (x, y) нүкте L қисық сызығы бойына тиісті, dl – қисық сызықтың дифференциалы.

Егер AB тұйық немесе тұйық емес қисық сызық болса да, онда бірінші текті қисық сызықты интеграл (15.3) түрінде белгіленеді.

Келтірілген анықтама мен анықталған интегралдың анықтамасы арасында аздаған айырмашылық бар және бірінші текті қисық сызықты интегралды анықталған интегралға келтіруге болады. Шынында да, AB қисық сызық бойындағы параметрді доғаның l ұзындығы деп алайық және ол A нүктеден бастап өзгерсін, онда осы қисық сызықтың теңдеуін мына түрде жазуға болады: $x = \varphi(l)$, $y = \psi(l)$, $0 \leq l \leq 1$. Бұл жағдайда, $f(x, y)$ функциясы AB қисық сызық бойында l параметрге тәуелді $f(\varphi(l), \psi(l))$ функция болады және $\bar{A}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нүктеге сәйкес келетін l параметрдің мәнін $\bar{l}_i$ таңбамен белгілейік, онда (15.2) интеграл қосынды мына түрге өрнектелінеді:

$$\sum_{i=1}^n f(\varphi(\bar{l}_i), \psi(\bar{l}_i)) \cdot \Delta l_i. \quad (15.4)$$

Ал бұл интеграл қосындыдан шекке көшсек, $\Delta l \rightarrow 0$ болғанда, онда оның шегі анықталған интеграл болады:

$$\int_0^b f(\varphi(l), \psi(l)) dl = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(\bar{l}_i), \psi(\bar{l}_i)) \cdot \Delta l_i.$$

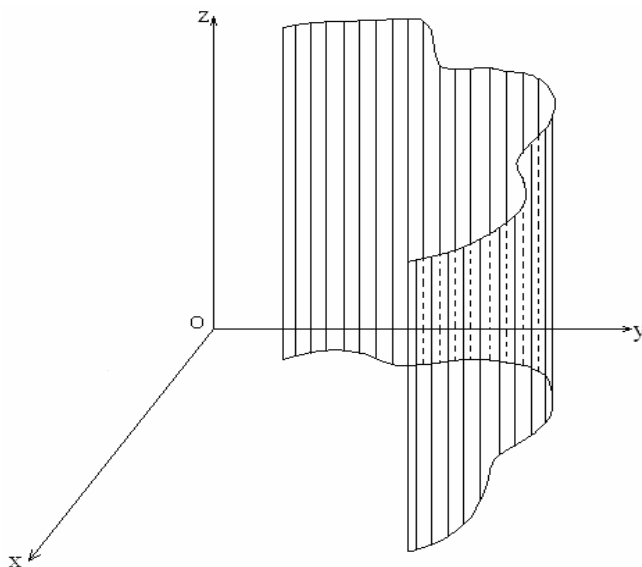
Енді (15.2) мен (15.4) интеграл қосындылары тең болғандықтан, онда олардың шектері де тең, демек, бірінші текті қисық сызықты интегралды анықталған интеграл арқылы өрнектедік:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_0^b f(\varphi(l), \psi(l)) dl.$$

және бұл екі интеграл да бір мезетте бар немесе жоқ болады. Демек, егер $f(x, y)$ функциясы AB қисық сызық (бөліктегі тегіс қисық сызық) бойында үзіліссіз болса, онда бірінші текті қисық сызықты интеграл бар, себебі анықталған интеграл бар.

Жоғарыда сөз болған анықтамалар арасында айырмашылық бар. Шынында да, (15.2) интеграл қосындыда $A_i A_{i+1}$ доғаның Δl_i ұзындығы оң сан, ал бұл оң сан A мен B нүктелері қайсысы бастапқы, қайсысы соңғы нүкте болуына тәуелсіз, яғни бірінші текті қисық сызықты интегралды AB бойымен немесе BA қисық сызықтар бойымен интегралдағанда, онда ол қисық сызықтың бағытына тәуелді емес, олай болса, мына теңдік орындалады: $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$. Ал анықталған интегралда, оның шектерін орын алмастырсақ, анықталған интегралдың мәні кері таңбаға өзгереді.

Анықталған интеграл қисық сызықты трапецияның ауданы болса, осы сияқты бірінші текті қисық сызықты интеграл жасаушылары Oz осіне перпендикуляр болатын цилиндрлік бет бөлігінің ауданы болады (15.2-сурет).



15.2-сурет

15.1-теорема. Егер AB қисық сызығы (15.1) параметр теңдеуімен берілсе, $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функцияларының $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ туындылары $[\alpha; \beta]$ сегментте үзіліссіз және $f(x, y)$ функциясы AB қисық сызығы бойында үзіліссіз болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (15.5)$$

AB қисық сызығы бойында $f(x, y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда мына теңдіктер орындалады:

а) егер AB қисық сызығы $y = \varphi(x)$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx,$$

мұнда $\varphi(x)$ функциясының туындысы $[\alpha; \beta]$ сегментінде үзіліссіз;

б) егер AB қисық сызығы поляр координат теңдеуімен берілсе, яғни $\rho = \rho(\varphi)$, онда

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi,$$

мұнда $\rho(\varphi)$ функциясының туындысы $[\alpha; \beta]$ сегментте үзіліссіз;

в) егер кеңістіктегі AB тегіс қисық сызығында $f(x, y, z)$ үзіліссіз болса, онда

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \kappa(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \kappa'^2(t)} dt,$$

мұнда AB қисық сызық $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \kappa(t)$ параметр теңдеуімен берілген және $\varphi(t), \psi(t), \kappa(t)$ функцияларының $\varphi'(t), \psi'(t), \kappa'(t)$ туындылары $[\alpha; \beta]$ сегментте үзіліссіз.

Сонымен, бірінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интеграл арқылы есептелінеді.

Сұрақтар.

1. Жазықтықтағы тұйық емес (жай) қисық сызық.
2. Тегіс қисық сызық (бөлікті қисық сызық).
3. Түзуленуші қисық сызық.
4. Қисық сызықтың ерекше нүктесі.
5. Функциясының интеграл қосындысы.
6. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы.
7. Бірінші текті қисық сызықты интегралды есептеу формулалары.

15.2. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттері

1-қасиет. Егер AB қисық сызық бойында $f(x, y)$ және $\varphi(x, y)$ функцияларының әрқайсысының бірінші текті қисық сызықты

интегралдары бар болса, онда $c_1 f(x, y) \pm c_2 \varphi(x, y)$ функциясының да AB қисық сызық бойында бірінші текті қисық сызықты интегралы бар және

$$\int_{AB} (c_1 f(x, y) \pm c_2 \varphi(x, y)) dl = c_1 \int_{AB} f(x, y) dl \pm c_2 \int_{AB} \varphi(x, y) dl,$$

мұндағы c_1, c_2 – тұрақты сандар.

2-қасиет. Егер AB қисық сызығы екі AC мен CB қисық сызықтарынан анықталса және $f(x, y)$ функцияның AB қисық сызықта бірінші текті қисық сызықты интегралы бар болса, онда функцияның AC мен CB қисық сызықтарында да бірінші текті қисық сызықты интегралдары бар және

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{CB} f(x, y) dl.$$

3-қасиет. Егер AB қисық сызықта $f(x, y) \geq 0$ функцияның бірінші текті қисық сызықты интегралы бар болса, онда

$$\int_{AB} f(x, y) dl \geq 0.$$

4-қасиет. Егер $f(x, y)$ функцияның AB қисық сызық бойында бірінші текті қисық сызықты интегралы бар болса, онда $|f(x, y)|$ функцияның да AB қисық сызық бойында бірінші текті қисық сызықты интегралы бар және

$$\left| \int_{AB} f(x, y) dl \right| \leq \int_{AB} |f(x, y)| dl.$$

5-қасиет (орта мән туралы теорема). Егер $f(x, y)$ функция AB қисық сызық бойында үзіліссіз болса, онда AB қисық сызық бойынан $M_0(x_0, y_0)$ нүкте табылып, мына теңдік орындалады:

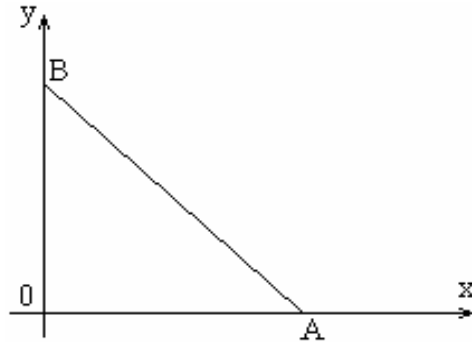
$$\int_{AB} f(x, y) dl = f(x_0, y_0) \int_{AB} dl = f(x_0, y_0) \cdot l,$$

мұндағы l – қисық сызық AB -ның ұзындығы.

6-қасиет. Бірінші текті қисық сызықты интеграл AB қисық сызықтың интегралдау бағытына тәуелсіз, яғни

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl.$$

1-мысал. Үшбұрыштың $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ төбелерін қосатын контур бойымен $\int_L (x+y) dl$ интегралын есептейік (15.3-сурет).



15.3-сурет

Шешуі. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың екінші қасиеті бойынша

$$(L = OA + AB + BO):$$

$$\int_L (x+y) dl = \int_{OA} (x+y) dl + \int_{AB} (x+y) dl + \int_{BO} (x+y) dl.$$

Үшбұрыштың OA кесіндісінде: $0 \leq x \leq 1, y = 0, dl = dx$, онда

$$\int_{OA} (x+y) dl = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

BO кесіндіде: $0 \leq y \leq 1, x = 0, dl = dy$, онда

$$\int_{BO} (x+y) dl = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2};$$

AB кесіндіде (түзу): $0 \leq x \leq 1, y+x=1$ теңдеу AB түзудің теңдеуі, осыдан $dl = \sqrt{1+\varphi'^2(x)} dx = \sqrt{2} dx$, онда

$$\int_{AB} (x+y) dl = \sqrt{2} \int_0^1 (x+1-x) dx = \sqrt{2} \int_0^1 dx = \sqrt{2}.$$

$$\text{Осылардан } \int_L (x+y) dl = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

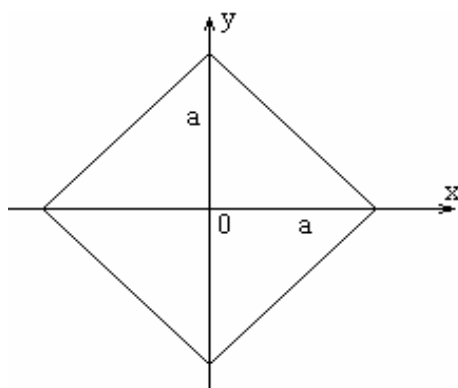
2-мысал. $\int_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$ қисық сызықты интегралды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

астроида бойымен интегралдайық (15.4-сурет).

Шешуі. Интегралдау үшін астроиданың параметрлік теңдеуін қарастырайық:

$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$. Онда

$$\begin{aligned} x' &= -3a \cos^2 t \sin t, y' = 3a \sin^2 t \cos t, dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \\ &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 3a |\sin t \cos t| dt, \end{aligned}$$



15.4-сурет

$$\begin{aligned} \int_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl &= 3a \int_0^{2\pi} \left((a \cos^3 t)^{\frac{4}{3}} + (a \sin^3 t)^{\frac{4}{3}} \right) \cdot |\sin t \cos t| dt = \\ &= 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t dt = 4 \cdot 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t dt = \\ &= 12a^{\frac{7}{3}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d(\sin t) \right] = \\ &= 12a^{\frac{7}{3}} \left(\frac{\cos^6 t}{6} + \frac{\sin^6 t}{6} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

3-мысал. $\int_L |y| dl$ қисық сызықты интегралды $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

Бернулли лемнискат сызығы бойымен интегралдайық (15.5-сурет).

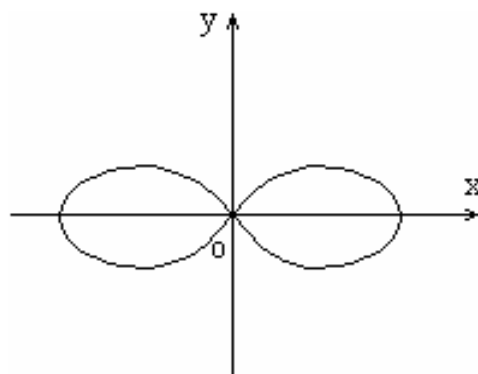
Шешуі. Декарт координат жүйедегі лемнискат теңдеуінен поляр координат жүйедегі теңдеуіне көшейік:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \\ (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 &= \\ &= a^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi), \quad \rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Осыдан поляр координат жүйедегі Бернуллидің лемнискат теңдеуін табамыз: $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, осыдан $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho' = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

Онда лемнискаттың параметр теңдеуі мына түрге өрнектелінеді:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi = \\ &= a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



15.5-сурет

Сонымен, б) формуладан:

$$\begin{aligned} \int_L |y| dl &= 2a \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin \varphi| \cdot \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin \varphi| d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = 2a^2 (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4-мысал. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ қисық сызықты интергалды $x^2 + y^2 = ax$ шеңбер бойымен интегралдайық.

Шешуі. Шеңбердің поляр координат жүйедегі теңдеуін анықтайық: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, сонда $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a \rho \cos \varphi$, $\rho = a \cos \varphi$. Сонда $\rho = a \cos \varphi$ шеңбердің поляр жүйедегі, ал $x = a \cos^2 \varphi$, $y = a \sin \varphi \cos \varphi$ осы шеңбердің параметр теңдеуі болады. Сонымен,

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2.$$

Сұрақтар.

1. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттері.
2. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қисық сызықтың интегралдау бағытына тәуелсіздігі туралы қасиеті.

Тапсырмалар.

1. $\int_{AB} \frac{1}{x-y} dl$ қисық сызықты интегралды $y = \frac{1}{2} \cdot x - 2$ түзу бойындағы $A(0, -2)$, $B(4, 0)$ нүктелер арасындағы кесіндіде есептеңдер.
2. $\int_L xy dl$ қисық сызықты интегралды $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$ тіктөртбұрыш контур бойымен есепте.
3. $\int_L y^2 dl$ қисық сызықты интегралды $x = a(t - \sin t)$, $y = a \cdot (1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ аркциклоидада есепте.
4. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$ қисық сызықты интегралды $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$ қисық сызықта есепте.

15.3. Бірінші текті қисық сызықты интегралды физика және механика есептеріне қолдану

а) материалды қисық сызықтың массасы. Материалды AB қисық сызық берілсін және $\rho(x, y)$ оның тығыздығы болсын. AB

қисық сызықтың бойынан $N(x, y)$ нүкте алайық және AN қисық доғаның ұзындығы l болсын, ал AB -ның массасы m -ге тең болсын. AB қисық сызық бойындағы $N(x, y)$ **нүктедегі тығыздық** деп мына қатынасты айтамыз: $\rho(x, y) = \frac{dm(x, y)}{dl}$. Онда AB материалды қисық

сызықтың массасын мына интеграл арқылы есептейміз: $\int_0^l \rho(x, y) dl$.

Сонымен, тығыздығы $\rho(x, y)$ болатын материалды AB қисық сызықтың массасы бірінші текті қисық сызықты интеграл арқылы есептелінеді:

$$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl;$$

б) қисық сызықтың статикалық моменттері (координат осьтері бойынша):

$$M_x = \int_{AB} \rho(x, y) y dl,$$

$$M_y = \int_{AB} \rho(x, y) x dl;$$

в) қисық сызықтың ауырлық центрінің координаттары:

$$x_0 = \frac{M_y}{m},$$

$$y_0 = \frac{M_x}{m};$$

г) қисық сызықтың инерция моменттері (координат остері бойынша):

$$J_x = \int_{AB} y^2 \rho(x, y) dl,$$

$$J_y = \int_{AB} x^2 \rho(x, y) dl;$$

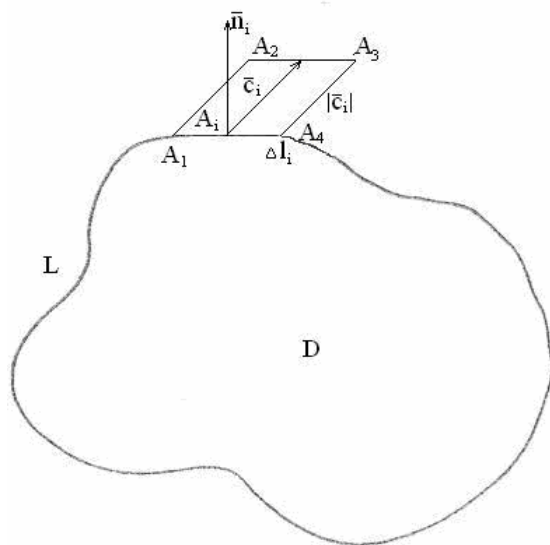
д) массасы m_0 -ге тең материалды $M_0(x_0, y_0)$ нүктенің AB қисық сызықтағы $\vec{F} = \{F_x; F_y\}$ тартылыс күші:

$$F_x = \gamma \cdot m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y) \cos \varphi}{r^2} dl,$$

$$F_y = \gamma \cdot m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y) \sin \varphi}{r^2} dl,$$

мұндағы $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, φ – бұрышы r мен OX осі арасындағы бұрыш, $\gamma = \text{const}$;

ж) сұйықтың ағып шыққан мөлшері. Жазық тасқынының $M(x, y) \in L$ нүктесіндегі сығылмаған сұйық заттың жылдамдығы $c = \{u(x), v(x)\}$ болсын. L тегіс қисық сызықпен шектелген тұйық D облыстан бірлік уақытта ағып шығатын сұйықтың мөлшерін анықтайық (15.6-сурет). Ол үшін L тұйық қисық



15.6-сурет

сызықты n бөлікке бөлейік және L қисықтың кез келген бөлігіндегі бөліктің $A(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нүктесіндегі сыртқы бірлік нормаль векторын $\bar{n}_i$ деп белгілейік, яғни $\bar{n}_i$ векторы D облысқа тиісті емес бөлігіне бағытталған, D облыстағы ұзындығы l_i -ге тең доға арқылы бірлік уақытта D облыстан (облысқа) ағып шығатын (құйылатын) сұйық заттың мөлшері $|\Delta Q_i|$ болсын. Онда $|\Delta Q_i|$ саны қабырғаларының ұзындығы Δl_i мен $|c_i|$ -ге тең $A_1 A_2 A_3 A_4$ параллелограмның ауданына тең, мұндағы $\bar{c}_i = \{u_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i); v_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\}$ және $\Delta Q_i = \Delta l_i (\bar{c}_i; \bar{n}_i)$.

Егер $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta y_i = J_2 = \int_{AB} Q(x, y) dy$ скаляр көбейтінді оң болса,

онда сұйық зат D облыстан ағып шығады, бұл жағдайда $\Delta Q_i > 0$; ал егер $(\bar{c}_i; \bar{n}_i)$ скаляр көбейтінді теріс болса, онда сұйық зат D облысқа құйылады, яғни $\Delta Q_i < 0$.

Енді $\sum_{i=1}^n (\bar{c}_i; \bar{n}_i) \cdot \Delta l_i$ интеграл қосындыдан

$\Delta l = \max \{ \Delta l_i \} \rightarrow 0$ болғанда шекке көшіп, D облыстан ағып шығатын (облысқа құйылатын) сұйық заттың мөлшерін табамыз:

$$Q = \int_L (\bar{c}_i; \bar{n}_i) dl,$$

мұндағы $\bar{n}$ векторы L тұйық сызық бойындағы $M(x, y)$ нүктедегі сыртқы бірлік нормаль вектор.

1-мысал. Тығыздығы $\rho(x, y) = |y|$ -ке тең $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ қисық сызықтың массасын есептейік, $t \in [0, 2\pi]$.

Шешуі. Массаны табу үшін $m = \int_L \rho(x, y) dl = \int_L |y| dl$ формуланы пайдаланамыз, ал бұл қисық сызықты интегралды есептеу үшін (15.5) формуланы қолданамыз: $x' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$,

$$dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt, |y| = b |\sin t|.$$

Сонда

$$\begin{aligned} m &= b \int_0^{2\pi} |\sin t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t} \sin t dt = \\ &= -\frac{4b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2} \cos t)^2} d(\sqrt{a^2 - b^2} \cos t) = \\ &= -\frac{4b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos t}{2} \sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2} \cos t)^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos t}{a} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2b^2 + \frac{2ba^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \end{aligned}$$

2-мысал. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданың ауырлық центрін есептейік, $t \in [0; \pi]$, $\rho(x, y) = 1$.

Шешуі. Қисық сызықтың дифференциалын табайық:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(1 - \cos t), y' = a \sin t, dl = \\ &= \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Циклоиданың массасын есептейік:

$$m = 2a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Енді ауырлық центрінің координаттарын есептейік:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m_L} \int x dl = \frac{2a^2}{4a} \int_0^{\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ x_0 &= \frac{1}{m_L} \int x dl = \frac{2a^2}{4a} \int_0^{\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= \frac{a}{2} \left(-2t \cos \frac{t}{2} + 4 \sin \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} - a \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \\ &= 2a - 2a \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} d\left(\sin \frac{t}{2}\right) = 2a - 2a \cdot \frac{\sin^3 \frac{t}{2}}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{4a}{3}, y_0 = \frac{a}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

3-мысал. Тығыздығы 1-ге тең $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбердің диаметрі бойынша момент инерциясын анықтайық.

Шешуі. Шеңбердің кез келген диаметрін алайық және шеңбердің бойындағы кез келген $M(x, y)$ нүктеден осы диаметрге дейінгі арақашықтықты $d(x, y)$ деп белгілейік. Енді поляр координат жүйеге көшейік: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, онда поляр координат жүйедегі шеңбердің теңдеуі $\rho = R$ болады. Онда іздестіріп отырған инерция момент мына формуладан анықталады: $J = \int_L d^2(x, y) dl$.

Алынған шеңбердің диаметрі OX осімен φ_0 бұрыш түзесін, $\varphi_0 \in [0; \pi)$, сонда:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = \\ &= R \sqrt{(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 + (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2} = R(2 - 2 \cos(\varphi - \varphi_0)) = R \sin(\varphi - \varphi_0), \\ J &= R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi - \varphi_0) \sqrt{R^2} d\varphi = R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi - \varphi_0) = \\ &= \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2(\varphi - \varphi_0)) d\varphi = \pi R^3. \end{aligned}$$

Тапсырмалар.

1. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипспен шектелген фигураның ауданын есепте.

2. Бірінше квадрантта орналасқан $x = \cos t, y = 2 \sin t$ эллипстің массасын есепте, егер $\rho(x, y) = y$.

3. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ циклоиданың ауырлық центрін есепте, $t \in [0; 2\pi]$.

15.4. Екінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы және оның бар болуы

Бізге түзуленуші тұйықталмаған $AB = L$ қисық сызық параметр теңдеумен берілсін:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \quad (15.8)$$

мұнда $A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ және осы қисық сызық бойында анықталған әрі үзіліссіз $P(x, y)$ пен $Q(x, y)$ функцияларын қарастырайық.

Енді $[\alpha; \beta]$ сегментті $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ нүктелерімен n бөлікке бөліктейік, онда AB қисық сызығы да сәйкес A нүктеден B нүктеге қарай $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ нүктелермен n доғаларға бөліктенеді. Әрбір $A_i A_{i+1}$ доғалардың әрқайсысынан еркімізше $\bar{A}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нүктені алайық, мұндағы $\bar{x}_i = \varphi(\bar{t}_i)$, $\bar{y}_i = \psi(\bar{t}_i)$, $\bar{t}_i \in [t_i; t_{i+1}]$. Осы доғаның ұзындығы Δl_i , яғни

$|A_i A_{i+1}| = \Delta l_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta l = \max\{\Delta l_i\}$ болсын.

Төмендегі екі интеграл қосындыны қарастырайық:

$$\begin{aligned} J_1(\bar{A}_i, A_i) &= \sum_{i=1}^n P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i, \quad J_2(\bar{A}_i, A_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Анықтама. Егер $\Delta l \rightarrow 0$ болғанда $J_k(\bar{A}_i, A_i)$ интеграл қосындылардың шектері бар болса, онда ол шектер сәйкес $P(x, y)$ және $Q(x, y)$ функциялардың L қисық сызық (L контурдың) бойымен алынған **координаттар бойынша қисық сызықты интегралдары** немесе **екінші ретті қисық сызықты интегралдары** деп аталады ($k = 1, 2$) және былай белгіленеді:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i = J_1 = \int_{AB} P(x, y) dx,$$

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta y_i = J_2 = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

Жалпы түрде $J = J_1 + J_2$ қосынды мына түрде жазылады:

$$J = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Жалпы түрде кеңістіктегі AB қисық сызығы

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = x(t),$$

$$t \in [\alpha; \beta], A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), x(\alpha)), B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta), x(\beta))$$

теңдеуімен берілсе, онда екінші текті интеграл мына түрде белгіленеді:

$$J = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Егер AB тұйық қисық сызық болса, яғни A нүкте B нүктемен беттесе, онда екінші текті қисық сызықты интеграл былай белгіленеді:

$$J = \oint_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (15.10)$$

15.2-теорема. Егер (15.8) теңдеумен берілген AB тегіс қисық сызықтың ерекше нүктелері жоқ болса және $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялары AB қисық сызық бойында үзіліссіз болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) \varphi'(t) dt, \\ \int_{AB} Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t)) \psi'(t) dt, \end{aligned} \quad (15.11)$$

яғни екінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интеграл арқылы есептелінеді.

Жалпы түрде (15.11) формула мына түрде жазылады:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt. \quad (15.11)'$$

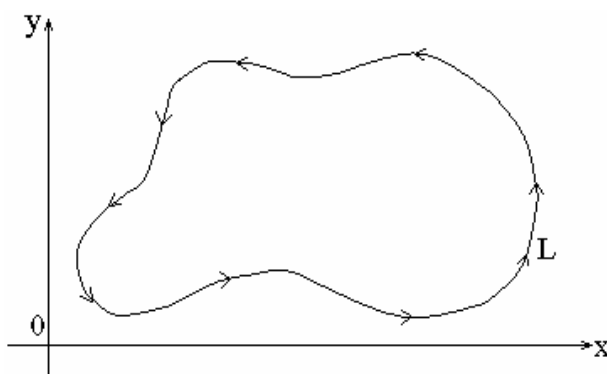
Екінші текті қисық сызықты интегралдың бірінші текті қисық сызықты интегралдан айырмашылығы мынада: екінші текті қисық сызықты интегралдың интеграл қосындысын анықтағанда функцияның $\bar{A}_i$ нүктедегі мәнін $A_i A_{i+1}$ доғаның ($\bar{A}_i \in A_i A_{i+1}$) ұзындығына емес, осы доғаның Ox, Oy, Oz осьтеріндегі проекциялары осы доғаның бағытына тәуелді. Сондықтан, егер AB қисық бойымен A нүктеден B нүктеге қарай интегралдағанда $+\Delta x_i, +\Delta y_i, +\Delta z_i$ болсын, енді B нүктеден A нүктеге қарай интегралдағанда $-\Delta x_i, -\Delta y_i, -\Delta z_i$ болады. Демек, мына теңдіктер орындалады:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx &= - \int_{BA} P(x, y, z)dx, \\ \int_{AB} Q(x, y, z)dy &= - \int_{BA} Q(x, y, z)dy, \\ \int_{AB} R(x, y, z)dz &= - \int_{BA} R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Сонымен, мына тұжырымға келеміз: екінші текті қисық сызықты интеграл L тұйық қисық сызықтың бастапқы нүктесіне тәуелді емес, ал ол тұйық қисық сызықтың бағытына тәуелді. Демек, L тұйық қисық сызық болса, онда L сызықтың бойымен бағытталған екі бағыттың бірі **оң бағыт** деп аталады (15.7-сурет), егер біз тұйық сызық бойымен қозғалғанымызда тұйық қисық сызықтың ішкі нүктелері үнемі біздің сол жағымызда қалып отырса; ал егер тұйық сызықтың ішкі нүктелері үнемі біздің оң жағымызда қалып отырса, онда ол бағыт **сол бағыт** деп аталады.

Жоғарыдағы екінші текті қисық сызықты интеграл оң бағыт бойымен интегралданды деп есептейміз.

Бірінші текті қисық сызықты интегралға анықталған интегралдың қасиеттері екінші текті интегралға да орындалады, бірақ та анықталған интегралдың модулін бағалау (15.7-тақырып, 4-ескерту), орта мән туралы теорема (15.5-тақырып, 5-мысал) қасиеттері орындалмайды.



15.7-сурет

Егер $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ болса, онда екінші текті қисық сызықты интегралды жалпы түрде (15.11) формула бойынша есептейміз, яғни

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + \\ + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + \\ + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt. \end{aligned}$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интегралға келтірілді. Енді екінші текті қисық сызықты интегралды есептегенде тәжірибеде жиі кездесетін жағдайларға тоқталайық.

Егер AB қисық сызық $y = f(x)$ функциямен берілсе, мұндағы $x \in [a; b]$, $x = a$ мәні қисық сызықтың бастапқы A нүктесі, ал $x = b$ мәні соңғы B нүкте, онда мына теңдік орындалады:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x)]dx. \quad (15.12)$$

Егер AB қисық сызық $y = y_0 - \text{const}$ түзу болса, онда қисық сызық бойында $y' = 0$, онда

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, y_0)dx. \quad (15.12)'$$

Егер AB қисық сызық $x = g(y)$ функциясымен берілсе, мұнда $y \in [c; d]$, $y = c$ нүктеге қисық сызықтың A бас нүктесі, ал $y = d$ нүктеге B соңғы нүкте сәйкес келеді, онда

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d [P(g(y), y)g'(y) + Q(g(y), y)]dy. \quad (15.13)$$

Осы сияқты, егер AB қисық сызық $x = x_0$ түзу болса, онда

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} Q(x_0, y)dy. \quad (15.13)'$$

Сұрақтар.

1. Екінші ретті қисық сызықты интеграл.
2. Оң бағыт және сол бағыт.

Тапсырмалар.

1. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ екінші текті қисық сызықты

интегралды $y = x^2$ параболаның бойындағы $A(-1,1)$ нүктеден $B(1,1)$ нүктеге қарай бағытталған бағыт бойынша есепте.

2. $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ екінші текті қисық сызықты интегралды

$A(1,1,1)$ нүктемен $B(2,3,4)$ нүктені қосатын кесіндіде есепте.

3. $\int y^2 dx + x^2 dy$ екінші текті қисық сызықты интегралды сағат

бағытына кері бағыт бойынша $x = a \cos t, y = b \sin t$ жоғарғы жарты эллипсте есепте.

15.5. Бірінші мен екінші текті қисық сызықты интегралдар арасындағы байланыс

Екінші текті қисық сызықты интегралды физика тұрғысында қарастырайық. Жазық облысты жазық күш өрісі деп қарастырайық және күш өрістің әрбір $M(x, y)$ нүктесіне $\vec{F}(x, y)$ күші әсер етсін. $\vec{F}(x, y)$ күштің OX пен OY осьтеріндегі проекцияларын сәйкес $P(x, y)$, $Q(x, y)$ деп белгілейік. Енді осы күш өрісінің әсерінен нүктенің AB бойымен қозғалғандағы жұмысты есептейік. Егер $\vec{F}(x, y)$ күш тұрақты (айнымалы), AB түзу сызық (қисық сызық) болса (күш A -дан B нүктеге қарай әсер етеді), онда атқарылатын жұмыс $\vec{F}(x, y)$ вектормен AB вектордың скаляр көбейтіндісіне тең,

яғни $(\vec{F}; AB) = P(x, y)\Delta x_i + Q(x, y)\Delta y_i$, мұндағы Δx пен Δy сандары $\vec{AB}$ вектордың координаттары. Демек, AB қисық сызық бойымен қозғалыстың бағыты өзгергенде атқарылатын жұмыстың күш өрісі де AB қисық сызық бойымен қарама-қарсы таңбаға өзгереді.

Енді осы қисық сызықты интегралдардың арасындағы байланысты қарастырайық. Бізге AB қисық сызығы (15.8) теңдеуімен берілсін және $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялары AB сызықтың бойында анықталсын.

15.3-теорема. Егер бөлікті тегіс AB қисық сызықтың бойында $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялары бөлікті үзіліссіз болса және $\vec{e} = \{\cos \alpha; \sin \alpha\}$ бірлік векторы AB қисық сызықтың $M(x, y)$ нүктесіне жүргізілген жанама вектор әрі оның бағыты A -дан B нүктеге қозғалған бағытқа бағыттас болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{AB} (P(x, y)\cos \alpha + \\ &+ Q(x, y)\sin \alpha)dl = \int_{AB} (\vec{a}; \vec{e})dl, \end{aligned} \quad (15.14)$$

мұндағы $\alpha = \alpha(M)$ бұрышы $M(x, y)$ нүктедегі $\vec{e}$ вектормен OX осі арасындағы бұрыш, $(\vec{a}; \vec{e})$ скаляр көбейтінді, $\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \{P(x, y); Q(x, y)\}$.

Осылайша, $M(x, y)$ нүктенің қисық сызық бойымен қозғалу (айналу) бағытын анықтауды **қиысық сызықтың бағытын бағдарлау** дейміз.

Егер кеңістіктегі AB қисық сызық параметр теңдеуімен берілсе:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), y = \psi(t), z = \kappa(t), A = \\ &= A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \kappa(\alpha)), B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \kappa(\beta)) \end{aligned}$$

онда екінші мен бірінші текті қисық сызықты интеграл арасындағы байланыс мына түрде өрнектелінеді:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= \int_{AB} [P(x, y, z)\cos \alpha + Q(x, y, z)\cos \beta + \\ &+ R(x, y, z)\cos \gamma]dl = \int_{AB} (\vec{a}; \vec{e})dl, \end{aligned} \quad (15.15)$$

мұндағы

$$\begin{aligned}\bar{a} &= P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}, \quad \bar{e} = \\ &= \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k},\end{aligned}$$

α, β, γ бұрыштар қисық сызықтағы $M(x, y, z)$ ($M(x, y, z) \in AB$) нүктеге жүргізілген жанаманың сәйкес OX, OY, OZ осьтерімен түзейтін бұрыштары.

Ескерту. $P(x, y, z)\cos \alpha + Q(x, y, z)\cos \beta + R(x, y, z)\cos \gamma$ өрнекті $\vec{F} = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ векторы мен $\bar{e} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ бірлік векторларының скаляр көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады, яғни AB қисық сызықтың жанамасына түсірілген $\vec{F}$ вектордың проекциясы. Осы проекцияны F_e таңбамен белгілейік, онда (11.15) формуланы ескеріп, екінші текті қисық сызықты интегралды мына түрде жазуға болады:

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AB} F_e dl = \int_{AB} (\vec{F}; \bar{dl}), \quad (15.16)$$

мұндағы $\bar{dl} = \{dl \cos \alpha; dl \cos \beta; dl \cos \gamma\} = \{dx; dy; dz\}$.

Енді екінші текті қисық сызықты интегралды физика есептеріне қолданайық.

1. Егер $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ күші массасы 1-ге тең материалды денені A нүктеден B нүктеге қарай AB қисық сызық бойымен қозғағанда атқарылатын жұмыс мына формуламен анықталады:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

осы сияқты кеңістікте

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

күш атқаратын жұмысты мына формуладан есептейміз:

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

2. Егер жазықтықтың $M(x, y)$ нүктесіндегі сұйық тасқынының жылдамдығы $\bar{c} = \{u(x, y); v(x, y)\}$ болса, онда бірлік уақытта тұйық D

облыстан ағып шығатын сұйық заттың Q мөлшері мына формуладан анықталады:

$$Q = \int_{AB} (\bar{c}; \bar{n}) dl,$$

мұндағы $\bar{n}$ берілген AB қисықтың бойындағы $M(x, y)$ нүктеге жүргізілген сыртқы нормаль вектор. Егер де AB қисық сызыққа жүргізілген $\bar{e}$ жанаманың бағыты оң бағыт болса, ал α бұрышы $\bar{e}$ векторы мен Ox осінің арасындағы бұрыш болса, онда

$$\bar{n} = \left\{ \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \{ \sin \alpha; -\cos \alpha \}, \quad (\bar{c}, \bar{n}) = u \cos \alpha - v \sin \alpha$$

теңдіктері орындалады. Олай болса, (15.14) теңдікті ескеріп, Q сұйықтың мөлшерін екінші текті қисық сызықты интеграл арқылы есептейміз:

$$Q = \int_{AB} (-v(x, y) \cos \alpha + u(x, y) \sin \alpha) dl = \oint_L -v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

мұндағы L таңба D облыстың шекарасы.

3. Тұйық $L = AB$ өткізгіштің бойымен J ток әсерінен болған магнит өрісіндегі $\vec{B} = \{B_x; B_y; B_z\}$ магнит индукцияны $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде есептейік (токтың бағыты L контур бойынша интегралдау бағытымен бағыттас болсын).

Берілген L қисық сызықты токтың бағытымен бағыттас болатындай A нүктеден B нүктеге қарай $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ нүктелермен $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$ кіші доғаларға бөлейік және $A_i A_{i+1}$ доғадан еркімізше $\bar{A}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүктені алайық. Әрбір $A_i A_{i+1}$ доғаны $A_i A_{i+1}$ кесіндіге (түзу сызыққа) алмастырайық. Онда Био-Савар заңы бойынша $A_i A_{i+1}$ кесіндіден ағып өткенде J электр токтың әсерінен магнит өрісі пайда болады, осы магнит өрісінің M_0 нүктедегі индукциясы мына формуламен анықталады:

$$\Delta B_i = \{ \Delta B_{ix}; \Delta B_{iy}; \Delta B_{iz} \} = \frac{\gamma \cdot J}{r^3} [\overrightarrow{A_i A_{i+1}}; \vec{r}_i],$$

мұндағы γ – тұрақты сан, $r = |\vec{r}_i|$, $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0 A_i} = \{ \bar{x}_i - x_0; \bar{y}_i - y_0; \bar{z}_i - z_0 \}$, $[\cdot; \cdot]$ – векторлық көбейтінді, $\overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \{ \bar{x}_i - x_0; \bar{y}_i - y_0; \bar{z}_i - z_0 \} = \{ \Delta x_i; \Delta y_i; \Delta z_i \}$. Онда

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{A_i A_{i+1}}; \vec{r}_i] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \\ \bar{x}_i - x_0 & \bar{y}_i - y_0 & \bar{z} - z_0 \end{vmatrix} = \\ &= \{(\bar{z}_i - z_0)\Delta y_i - (\bar{y}_i - y_0)\Delta z_i; (\bar{x}_i - x_0)\Delta z_i - \\ &- (\bar{z}_i - z_0)\Delta x_i; (\bar{y}_i - y_0)\Delta x_i - (\bar{x}_i - x_0)\Delta y_i\}. \end{aligned}$$

Осыдан

$$\begin{aligned} \Delta B_{ix} &= \frac{\gamma \cdot J}{r_i^3} [(\bar{z}_i - z_0)\Delta y_i - (\bar{y}_i - y_0)\Delta z_i], \\ \Delta B_{iy} &= \frac{\gamma \cdot J}{r_i^3} [(\bar{x}_i - x_0)\Delta z_i - (\bar{z}_i - z_0)\Delta x_i], \\ \Delta B_{iz} &= \frac{\gamma \cdot J}{r_i^3} [(\bar{y}_i - y_0)\Delta x_i - (\bar{x}_i - x_0)\Delta y_i]. \end{aligned}$$

Соңғы $\Delta \vec{B}_i$ вектордың координаттарынан i бойынша 1-ден n -ге дейін қосынды алайық және одан $\max\{\Delta l_i\} = \Delta l \rightarrow 0$ болғанда шекке көшейік (Δl_i таңба $A_i A_{i+1}$ доғаның ұзындығы), сонда

$$\begin{aligned} B_x &= \gamma J \oint_L \frac{(z - z_0)dy - (y - y_0)dz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \\ B_y &= \gamma J \oint_L \frac{(y - y_0)dz - (z - z_0)dx}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \\ B_z &= \gamma J \oint_L \frac{(y - y_0)dx - (x - x_0)dy}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}. \end{aligned}$$

Енді $\vec{r} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, $\overrightarrow{dl} = \{dx; dy; dz\}$ болсын, онда магнит индукцияның $\vec{B} = \{B_x \bar{i}; B_y \bar{j}; B_z \bar{k}\}$ векторын мына түрде жазуға болады:

$$\vec{B} = \gamma J \oint_L \frac{[\overrightarrow{dl}; \vec{r}]}{r^3}.$$

1-мысал. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ екінші текті қисық сызықты интегралды $L: y = x^2, -1 \leq x \leq 1$ парабола бойымен параметрдің өсу бағыты бойынша есептейік.

Шешуі. Бұл жағдайда, (15.12) формуланы пайдаланамыз:

$$\begin{aligned} dy &= 2x dx, \quad \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \\ &= \int_{-1}^1 [x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3) \cdot 2x] dx = -\frac{11}{3}. \end{aligned}$$

2-мысал. $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ қисық сызықты интегралды $L: y = 1 - |1 - x|, 0 \leq x \leq 2$ түзуі бойымен параметрдің өсу бағыты бойынша интегралдайық.

Шешуі. Алдымен, L түзуді мына түрге түрлендірейік:

$$x \geq 1, \quad |1 - x| = x - 1: \quad y = 2 - x; \quad x < 1, \quad |1 - x| = 1 - x: \quad y = x;$$

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Сонда L түзу бойымен алынған интеграл екі L_1 мен L_2 түзулер бойымен алынған интегралдардың қосындысына тең болады. Мұндағы $L_1: y = x, 0 \leq x \leq 1$; $L_2: y = 2 - x, 1 \leq x \leq 2$ және L_1 мен L_2 түзулер бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интегралдарды (15.12) формула бойынша есептейміз:

$$\int_{L_1} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \int_0^1 (x^2 + x^2 + x^2 - x^2)dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\int_{L_2} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \int_1^2 [x^2 + (2 - x)^2 - x^2 +$$

$$+ (2 - x)^2] dx = 2 \int_1^2 (2 - x)^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

3-мысал. $\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy$ қисық сызықты интегралды сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бағытта $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс бойымен интегралдайық.

Шешуі. Эллипстің параметр теңдеуін алайық:

$$x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi], x' = -a \sin t, y' = b \cos t.$$

Енді (15.11)' формуланы пайдаланайық, сонда

$$\begin{aligned} \oint_L (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_0^{2\pi} [(-a \cos t + b \sin t)a \sin t + \\ &\quad + (a \cos t - b \sin t)b \cos t] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-a^2 \cos t \sin t - ab \sin^2 t + ab \cos^2 t - b^2 \sin t \cos t] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t + ab \cos 2t \right] dt = \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \cos 2t + \frac{ab}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

4-мысал. $\int_L (2a-y)dx + xdy$ қисық сызықты интегралды сағат тілінің қарама-қарсы бағытында $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида бойымен интегралдайық, $t \in [0, 2\pi]$.

Шешуі. (15.11)' формуланы пайдаланамыз:

$$\begin{aligned} x' &= a(1 - \cos t), y' = a \sin t, \\ \int_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \\ &+ \int_{BnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t)(1 - \cos t) + t \sin t - \sin^2 t] dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 (t \cos t + \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

5-мысал. Екінші текті қисық сызықты интегралға анықталған интегралдағы орта мән туралы теорема орындалмайтынын тексерейік, яғни

$$\int_{AB} P(x, y) dx \neq P(x_0, y_0) \int_{AB} dx,$$

мұндағы AB – тегіс қисық сызық, $P(x, y)$ функция AB сызықтың бойында үзіліссіз, $M_0(x_0, y_0)$ – нүкте AB сызықтың бойындағы нүкте.

Шешуі. $AB = \{x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}$ жарты шеңбер, контурдың бағыты $A(0,1)$ нүктеден $B(0,-1)$ нүктеге қарай бағытталсын және жарты шеңбер бойында $P(x, y) = y$ болсын. Осы жарты шеңбердің параметр теңдеуін қарастырайық: $x = \cos t, y = \sin t, t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. Сонда

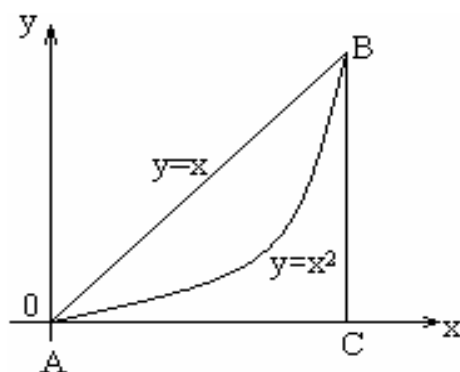
$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx &= \int_{AB} y dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t \cos t dt = -\frac{\pi}{2}; \\ \int_{AB} dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t dt = 0 \neq -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Демек, AB қисық сызық бойынан

$$\int_{AB} P(x, y) dx = P(x_0, y_0) \int_{AB} dx$$

теңдігі орындалатынай $M_0(x_0, y_0)$ нүкте табылмайды.

6-мысал. $\int 2xy dx + x^2 dy$ қисық сызықты интегралды $y = x$ түзу, $y = x^2$ парабола және $y = 0, x = 1$ түзулері бойымен жеке-жеке $A(0,0)$ нүктеден $B(1,1)$ нүктеге дейін интегралдайық (15.8-сурет).



15.8-сурет

Шешуі. а) Алдымен $y = x$ түзу бойымен интегралдайық, $y' = 1$. (15.12) формуладан:

$$J_a = \int_0^1 (2x^2 + x^2) dx = 3 \int_0^1 x^2 dx = 1.$$

б) $y = x^2$ парабола бойымен, $y' = 2x$.

$$J_b = 2 \int_0^1 (x^3 + x^3) dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 1.$$

в) $y = 0, x = 1$ түзулер бойымен, яғни сынық ACB түзу бойымен интегралдайық. Сонда $J_b = J_{AC} + J_{CB}$, мұндағы

$$AC : y = 0, y' = 0, 0 \leq x \leq 1;$$

$$J_{AC} = \int_{AC} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0) dx = 0;$$

$$CB : x = 1, x' = 0, 0 \leq y \leq 1;$$

$$J_{CB} = \int_{CB} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2 \cdot 1 \cdot y \cdot 0 + 1) dy = 1.$$

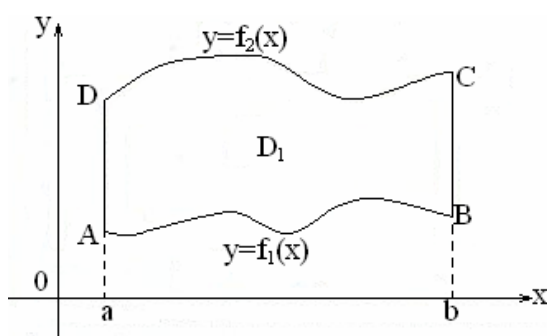
Сонымен, $J_b = 1$, демек, $J_a = J_b = J_c = 1$.

15.6. Грин формуласы

Алдымен қарапайым, бір байланысты, көп байланысты облыстардың анықтамаларына тоқталайық. 15.96, а-суретте тұйық D_1 облыс жоғарыдан және төменнен бөлікті үзіліссіз $y = f_1(x)$ пен $y = f_2(x)$ функциялармен, ал сол жағы мен оң жағы $x = a, x = b$ түзулерімен шектелген. Бұл жағдайда, D_1 облыстың жоғарыдан және төменнен шектелген контурын $x = x_0, x_0 \in [a; b]$ түзуі екіден артық нүктелерде қимайды. Осы сияқты $y = y_0, y_0 \in [c; d]$ түзуі D_2 облыстың сол және оң жақтан шектелген контурын екіден артық нүктелерде қимайды (15.9, б-сурет). Бірінші жағдайда, D_1 облыс x **трапеция тәрізді**, ал D_2 облыс y **трапеция тәрізді облыс** деп аталады. Егер D (D_1 немесе D_2) облысты саны санаулы не x трапеция, не y трапеция тәрізді облыстарға бөлуге болатын болса, онда ол облыс **қарапайым облыс** деп аталады. D облысты саны

санаулы облыстарға бөлгенде облыстардың ішкі нүктелері ортақ болмауы керек. Мысалы, тік төртбұрыш, үшбұрыш, дөңгелек, сақина, т.б. қарапайым облыстарға жатады. 15.10, а-суретте сақинаны x трапеция, ал 15.10, б-суретте y трапеция тәрізді облыстарға бөлу бейнеленген.

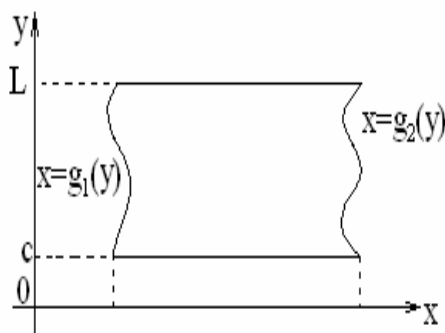
Жазықтықтағы D облыс **бір байланысты облыс** деп аталады, егер кез келген тұйық контурмен шектелген облыс осы облыста толық орналасса.



15.9, а-сурет

Демек, бір байланысты облыста “тесік” болмауы керек, яғни сақина бір байланысты облыс болмайды (15.10, в-сурет). Мысалы, дөңгелек, үшбұрыш, тік төртбұрыш бір байланысты облысқа жатады.

Бір байланысты облыс болмайтын облыс **көп байланысты облыс** деп аталады. Мысалы, сақина көп байланысты облысқа жатады.



15.9, б-сурет

Енді D облыстың тұйық L контуры бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интеграл мен осы L контурмен шектелген D облыс бойынша алынған екі еселі интегралдың арасындағы байланысты көрсетейік.

15.4-теорема. Егер $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары және $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ дербес туындылар L контурмен шектелген D

облыста үзіліссіз болса, онда **Грин формуласы** деп аталатын мына теңдік орындалады:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \quad (15.17)$$

мұнда екінші текті қисық сызықты интеграл L контур бойымен оң бағытпен алынады.

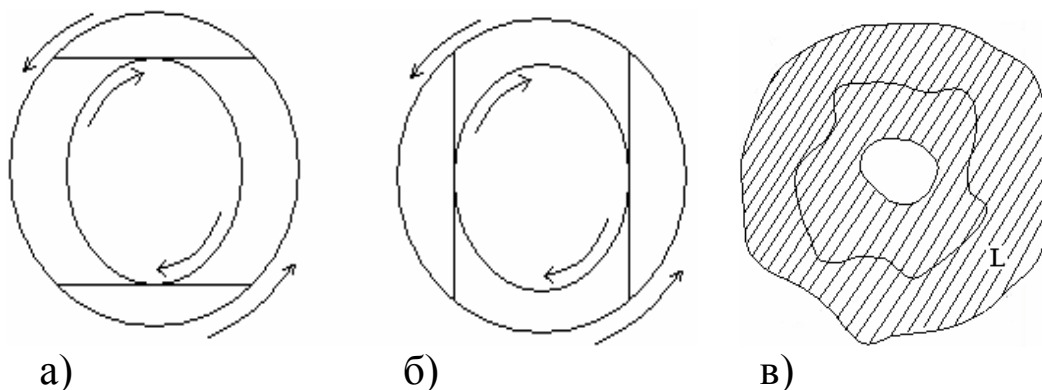
Ескерту. 1. Грин формуласы қарапайым облыс үшін орындалып қана қоймайды, сонымен қатар бөлікті-тегіс контурмен шектелген облыс үшін де орындалады.

2. Егер Грин формуласындағы $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$ ($Q(x, y) = 0$, болса, онда D облыстың ауданын екі еселі интеграл арқылы есептейтін

$\iint_D dxdy = S$ формуланы ескеріп, D облыстың ауданын екінші текті

қисық сызықты интеграл көмегімен де есептейтін формуланы аламыз:

$$S = \oint_L xdy \quad \left(S = -\oint_L ydx \right). \quad (15.21)$$



15.10-сурет

Егер α мен β сандары $\alpha + \beta = 1$ теңдігін қанағаттандырса, онда (15.21) теңдіктің біріншісін α -ға, ал екіншісін β -ға көбейтіп және оларды қосып, D облыстың ауданын есептейтін екінші формуланы аламыз:

$$S = \oint_L \alpha \cdot xdy - \beta \cdot ydx, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (15.22)$$

Егер $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ болса, онда $S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$.

Енді Гриннің екінші формуласын қрастырайық.

15.5-теорема. Егер тұйық D облыс тегіс L қисық сызықпен шектелсе, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ функцияларының өздері және олардың бірінші мен екінші дербес туындылары D облыста үзіліссіз болса, онда Гриннің екінші формуласы орындалады:

$$\oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy, \quad (15.23)$$

мұндағы $\frac{\partial u}{\partial n}$ туынды L қисық сызықтың сыртқы нормаль бағыты бойынша алынған туынды, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – **Лаплас операторы** деп аталады, теңдіктің сол жағындағы интеграл бірінші текті қисық сызықты интеграл.

Сұрақтар.

1. x – трапеция тәрізді, y – трапеция тәрізді облыстар.
2. Қарапайым облыс.
3. Бір байланысты облыс
4. Көп байланысты облыс.
6. Грин формуласы және Лаплас операторы.

Тапсырма. Грин формуласын пайдаланып, екінші текті қисық сызықты интегралды есептеңдер.

1. $\oint_L 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, мұндағы L – төбелері $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$ – нүктелер болатын үшбұрыштың контуры.
2. $\oint_L 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, мұндағы L – төбелері $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$ – нүктелер болатын үшбұрыштың контуры.

15.7. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігінің белгісі

Жоғарыдағы 15.5-тақырыпта (6-мысал) A нүкте мен B нүктені қосатын әртүрлі үш қисық сызықтар бойымен интегралданған екінші текті қисық сызықты үш интегралдардың мәндері тең болды. Осы нүктелерді қосатын кез келген бөлікті тегіс қисық сызықтар бойымен

интегралданатын екінші текті қисық сызықты интегралдардың мәндері тең болатынын дәлелдеуге болады (15.6-теорема). Бұл жағдайда, екінші текті қисық сызықты интеграл **инте-гралдау жолына тәуелсіз** деп аталады. Демек, қисық сызықты интеграл екі нүктені қосатын қисық сызықтың жолына (түрі) тәуелді емес, ал ол осы екі нүктенің өздеріне тәуелді болады.

15.7-теорема. Егер $P(x, y), Q(x, y)$ функциялары және олардың $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары бір байланысты D облыста анықталған әрі үзіліссіз болса, онда төмендегі төрт белгі эквивалентті, яғни олардың әрқайсысынан қалған үшеуін дәлелдеуге болады.

I. D облысына тиісті кез келген тұйық бөлікті-тегіс L қисық сызық бойымен алынған интеграл нөлге тең, яғни

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (15.25)$$

II. D облысына тиісті A мен B екі нүктені қосатын ($AB \subset D$) кез келген AB қисық сызық бойымен алынған

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (15.26)$$

екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау жолына тәуелсіз.

III. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ өрнегі функцияның толық дифференциалы болады, яғни D облыста $u = u(x, y)$ функция табылып,

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (15.27)$$

теңдік орындалады.

IV. Барлық D облыста мына теңдік орындалады:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (15.28)$$

I белгі орындалсын деп ұйғарып, одан II белгінің орындалатынын, II-ден III белгінің, III-ден IV белгінің, IV-ден I белгінің орындалатынын дәлелдеуге болады.

Ескертулер. 1. III белгідегі $u(x, y)$ функцияны төмендегі формуладан анықтауға болады:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(t, y) dt + Q(x_0, t) dt + C,$$

мұндағы теңдіктің оң жағындағы интеграл D облысында тағайындалған $A(x_0, y_0)$ мен $B(x, y)$ нүктелерді қосатын кез келген L контур (L контурдың барлық нүктелері D облысына тиісті) бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интеграл, $C - const$ (15.11-сурет). Көп жағдайда L контур ретінде Ox пен Oy осьтеріне параллель екі сынық түзуді қарастырған тиімді, онда жоғарыдағы екінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интегралға түрленеді:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(t, y) dt + Q(x_0, t) dt + C = \\ &= \int_{x_0}^x P(x_0, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \end{aligned} \quad (15.32)$$

Бұл жағдайда, егер AB қисық сызығы $\bar{V}$ облысқа тиісті болса, онда

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

қисық сызықты интегралы интегралдау жолына тәуелсіз болады.

Егер бір байланысты D облыста

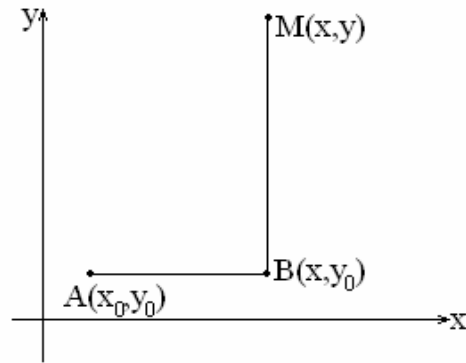
$$dw = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

теңдік орындалса, онда $w = w(x, y, z)$ функцияны мына теңдіктен анықтауға болады:

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C,$$

мұндағы $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте $\bar{V}$ облысындағы тағайындалған нүкте, $C - const$.

4. Біз жоғарыда екінші текті қисық сызықты интегралға анықталған интегралдың модулін бағалау қасиеті орындалмайтынын атап өттік, дегенмен де екінші текті қисық сызықты интегралға мына теңсіздік орындалады:



15.11-сурет

$$\left| \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \right| \leq l M,$$

мұндағы l саны AB қисық сызықтың ұзындығы,

$$M = \max_{(x, y) \in D} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}.$$

1-мысал. Грин формуласын пайдаланып,

$$J = \int_{AO} (e^x \sin y - qy)dx + (e^x \cos y - q)dy$$

интегралды $x^2 + y^2 = ax$ шеңбердің жоғарғы жарты бөлігінің AO контуры бойымен интегралдайық, мұндағы $A(a, 0)$, $O(0, 0)$ (15.12-сурет).

Шешуі. $P(x, y) = e^x \sin y - qy$, $Q(x, y) = e^x \cos y - q$. Интегралдың интегралдау контуры тұйық контур болатындай Ox осімен толықтырайық, онда

$$J = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{OA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

(15.17) Грин формуласындағы

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - e^x \cos y + q = q.$$

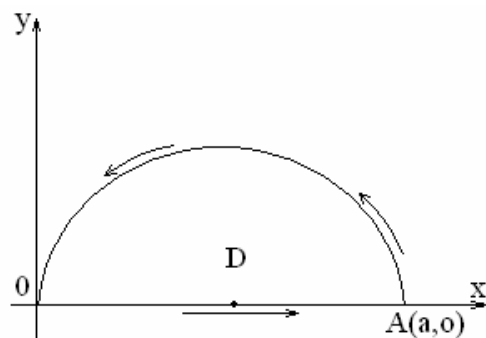
Осыдан

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D q dx dy,$$

мұндағы D облысы $x^2 + y^2 = ax$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ дөңгелек, $R = \frac{a}{2}$ және дөңгелектің ауданы S -ке тең болсын, онда

$$\int_{OA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Олай болса, $J = \frac{\pi a^2}{8} \cdot q.$



15.12-сурет

2-мысал. $\int_{A(-2;-1)}^{B(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ қисық сызықты

интеграл астындағы өрнек толық дифференциал болатынын тексерейік және интегралды есептейік.

Шешуі. (15.27) формуладағы:

$$P(x, y) = x^4 + 4xy^3, \quad Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2.$$

Демек, интеграл астындағы $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ өрнек толық дифференциал болады. Енді интегралды есептеу үшін (15.33) формуланы пайдаланайық, сонда

$$\begin{aligned} & \int_{A(-2,-1)}^{B(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy = \\ &= \int_{-2}^3 (x^4 - 4x)dx + \int_{-1}^0 (54y^2 - 5y^4)dy = \\ &= \left(\frac{x^5}{5} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^3 + (18y^3 - y^5) \Big|_{-1}^0 = 62. \end{aligned}$$

3-мысал. $J = \int_A^B \varphi(x)dx + \psi(y)dy + \kappa(z)dz$ интеграл астындағы

өрнек функцияның толық дифференциалы болғанда, осы интегралды есептейік, мұндағы $A = A(x_1, y_1, z_1)$, $B = B(x_2, y_2, z_2)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\kappa(z)$ үзіліссіз функциялар (15.17-сурет).

Шешуі. Интеграл астындағы өрнек функцияның толық дифференциалы болғандықтан, J интеграл интегралдау жолына тәуелсіз. Сондықтан (15.33) теңдікті пайдаланамыз, мұнда интегралдау AB жолды координат осьтеріне параллель сынық түзулер ретінде қарастырайық, онда

$$J = J_{AC} + J_{CD} + J_{DB}.$$

AC түзуі бойында ($AC \parallel Ox$):

$$x \in [x_1; x_2], y = y_1, z = z_1, dy = 0, dz = 0,$$

онда $J_{AC} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx.$

CD түзуі бойында ($CD \parallel Oy$):

$$y \in [y_1; y_2], x = x_2, z = z_1, dx = 0, dz = 0,$$

онда $J_{CD} = \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy.$

DB түзуі бойында ($DB \parallel Oz$):

$$z \in [z_1; z_2], x = x_2, y = y_2, dx = 0, dy = 0,$$

онда $J_{DB} = \int_{z_1}^{z_2} \kappa(z)dz$. Сонымен, $J = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy + \int_{z_1}^{z_2} \kappa(z)dz$.

4-мысал. Көп байланысты облыста $J = \int_{AB} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$

интегралын қарастырайық. (15.28) белгіден (15.25) белгінің орындалмайтынын тексерейік ($IV \rightarrow I$).

Шешуі. Ол үшін координат жүйенің $O(0,0)$ бас нүктесінде интеграл астындағы өрнектің мағынасы жоқ, сондықтан координат осінің бас нүктесінің маңайын алып (ойып) тастайық. Онда

жазықтықтың қалған бөлігінде, dx пен dy коэффициенттерінің өздері әрі олардың дербес туындылары үзіліссіз және мына теңдік орындалады:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Енді (15.28) теңдік орындалғанмен де (15.25) теңдіктің орындалмайтынын тексерейік. AB қисық сызығы шеңбер болсын, яғни $x = \cos t$, $y = \sin t$, онда $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$:

$$J = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Демек, көп байланысты облыста (15.28) белгіден (15.25) белгі орындалмайды.

Сұрақтар.

1. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігінің белгілері.
2. $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ өрнектің толық дифференциал болу белгісі.

Тапсырма. Грин формуласын пайдаланып, екінші текті қисық сызықты интегралды есептеңдер.

1. $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, мұндағы L – төбелері $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$ – нүктелер болатын үшбұрыштың контуры.
2. $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, мұндағы L – төбелері $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$ нүктелер болатын үшбұрыштың контуры.
3. $\int_L x^2 dx + y^2 dy$, мұндағы L – сағат бағыты бойынша алынған $x^2 + y^2 = 4$ шеңбердің жоғарғы жарты бөлігінің контуры.
4. $\oint_L \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2}$, мұндағы L – сағат бағытына қарсы бағытта алынған $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ шеңбердің контуры.

16. БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР

16.1. Негізгі ұғымдар және беттің ауданы

Екінші бөлімнің 11-тарауында беттің теңдеуі үзіліссіз

$$z = f(x, y) \quad (16.1)$$

функцияның сызбасы арқылы бейнеленетіні бізге белгілі, мұндағы $(x, y) \in D$, осы сияқты беттің теңдеулері

$$x = f(y, z), \quad y = f(x, z) \quad (16.1)'$$

үзіліссіз функциялары арқылы беріледі және (16.1) және (16.1)' теңдеулері беттің **айқын түрдегі** теңдеулері деп аталады. Беттің теңдеулері мына түрде де беріледі:

$$F(x, y, z) = 0, \quad (16.2)$$

яғни функциялық теңдеудегі z айнымалы қалған екеуі арқылы өрнектелінбейді. Демек, (16.2) теңдеуді (16.1) немесе (16.1)' айқын түрдің біріне келтіре алмаймыз. (16.2) теңдеу беттің **айқын емес** түрде берілуі деп аталады. Сонымен, (16.2) теңдеуді қанағаттандыратын нүктелердің жиыны бетті айқындайды.

Көп жағдайда беттің теңдеуі параметр теңдеуімен де беріледі:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (16.3)$$

мұндағы $\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$ – үзіліссіз функциялар және $(u, v) \in D'$, u мен v **параметр** деп аталады. Егер беттің теңдеуі (16.3) параметр теңдеумен берілсе, онда D' облыстағы кез келген (u, v) нүктеге үш өлшемді кеңістікте (x, y, z) нүкте сәйкес келеді. Кеңістіктегі осындай нүктелер жиыны бетті анықтайды (бейнелейді), мысалы: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ және

$$\begin{aligned} x &= R \sin u \cos v, \\ y &= R \sin u \sin v, \quad z = R \cos u, (u, v) \in D' = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \pi, \\ &\quad 0 \leq v \leq 2\pi\} \end{aligned}$$

теңдеулердің екеуі де радиусы R -ге тең, ал центрі координат жүйенің бас нүктесі болатын сфераны анықтайды.

Параметр теңдеумен берілген (16.3) беттің векторлық теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\bar{r} = \varphi(u, v)\bar{i} + \psi(u, v)\bar{j} + x(u, v)\bar{k}, \quad (u, v) \in D', \quad (16.3)'$$

мұндағы $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $x(u, v)$ беттің $A(x, y, z)$ нүктенің радиус векторы, $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ортогональ базис вектор.

Бет (16.3) параметр теңдеумен берілсін және мына шарттар орындалсын:

I. D' облыс шектелген және тұйық, ал оның шекарасы өзара қиылыспайтын бөлікті тегіс қисық сызық болсын;

II. $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $x(u, v)$ функцияларының бірінші ретті дербес туындылары D' облыста үзіліссіз, яғни үзіліссіз дифференциалдатын функциялар;

III. D' облыстың ішкі әртүрлі нүктелеріне беттің әртүрлі (x, y, z) нүктелері сәйкес келсін.

Егер III шарт D' облыстың шекарадағы нүктелеріне орындалса, онда ол бет **жай (қарапайым) бет** деп аталады. D' облыстың шекара нүктелеріне сәйкес келетін беттің нүктелер жиыны **беттің шекарасы** деп аталады. Мысалы, 16.1-суретте D' облыстың $KLMN$ шекарасына

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u, \quad (u, v) \in D' = \\ &= \{(u, v) : 0 < a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq \pi\} \end{aligned}$$

беттің тұйық $K'L'M'N'$ тұйық контуры бейнеленген.

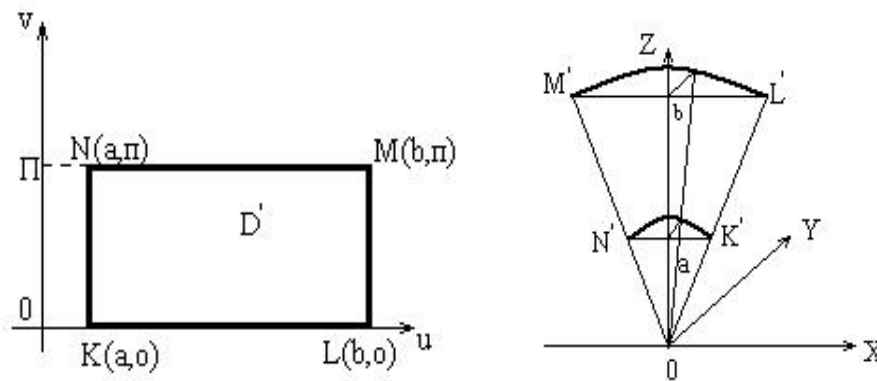
Беттің шекара нүктесі болмайтын нүктелерін **беттің ішкі нүктесі** дейміз. Егер де D' облыстың шекара нүктелеріне III шарт орындалмаса, онда беттің шекарасы болмауы мүмкін, бұл жағдайда **бет тұйық** деп аталады. Мысалы, жоғарыдағы сфера тұйық бетке мысал бола алады.

Бізге Φ бет не айқын, не айқын емес, не параметр түрде берілсін. **Бет тегіс** деп аталады, егер беттің кез келген ішкі нүктесінің маңайы табылып, осы маңайды беттен ойып алынған бет бөлігінің теңдеуі (16.1) немесе (16.1)', (16.2) теңдеулерінің бірімен өрнектелсе, яғни тегіс беттің кез келген ішкі нүктесіне жанама жазықтық және нормаль жүргізуге болады.

Бізге Φ бет (16.2) айқын емес теңдеумен берілсін және $F(x, y, z)$ үзіліссіз дифференциалдансын. Беттің $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі **ерекше емес нүкте** деп аталады, егер осы нүктеде

$$F_x'^2(x_0, y_0, z_0) + F_y'^2(x_0, y_0, z_0) + F_z'^2(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

болса, ал кері жағдайда ол **ерекше нүкте** деп аталады. Егер бетте ерекше нүкте жоқ болса, онда ол **бет тегіс** деп аталады. Беттің ішкі әрі ерекше емес $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль векторының теңдеулері сәйкес мына формуладан анықталады:



16.1-сурет

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \quad (16.4)$$

$$\bar{n} = \{ F_x'(x_0, y_0, z_0); F_y'(x_0, y_0, z_0); F_z'(x_0, y_0, z_0) \}.$$

Бізге Φ бет (16.3) немесе (16.3)' теңдеулерімен берілсін. $A_0(\varphi(u, v), \psi(u, v), \kappa(u, v))$ нүкте беттің **ерекше емес нүктесі** деп аталады, егер осы нүктеде

$$\begin{aligned} r'_u &= \varphi'_u(u, v)\bar{i} + \psi'_u(u, v)\bar{j} + \kappa'_u(u, v)\bar{k}, \\ r'_v &= \varphi'_v(u, v)\bar{i} + \psi'_v(u, v)\bar{j} + \kappa'_v(u, v)\bar{k} \end{aligned}$$

векторлары коллинеар болмаса, яғни олар сызықты тәуелсіз, ал кері жағдайда A_0 нүкте **ерекше нүкте** деп аталады. Ерекше нүктесі жоқ жай бет **тегіс** деп аталады. Беттің ерекше емес $A(\varphi(u, v), \psi(u, v), \kappa(u, v))$ нүктеге жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуі мен нормаль вектор теңдеуі бізге аналитикалық геометриядан белгілі:

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0,$$

мұндағы $x_0 = \varphi(u, v)$, $y_0 = \psi(u, v)$, $z_0 = \kappa(u, v)$,

$$A_1 = \begin{vmatrix} \psi'_u & \kappa'_u \\ \psi'_v & \kappa'_v \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} \kappa'_u & \varphi'_u \\ \kappa'_v & \varphi'_v \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}, \quad (16.5)$$

$$\bar{n} = [\bar{r}'_u; \bar{r}'_v] = A_1 \bar{i} + B_1 \bar{j} + C_1 \bar{k} = \{A_1; B_1; C_1\},$$

мұндағы $\bar{r}'_u, \bar{r}'_v$ векторлары жанама жазықтықтың бойындағы векторлар және олар беттің A нүктесіне бекітілген. Ал $\bar{n}$ нормаль вектордың бағыттауыш векторы:

$$\cos(\bar{n}, x) = \frac{A_1}{|\bar{n}|}, \quad \cos(\bar{n}, y) = \frac{B_1}{|\bar{n}|}, \quad \cos(\bar{n}, z) = \frac{C_1}{|\bar{n}|}.$$

Егер бет $z = f(x, y)$ немесе $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0) = f'_x, \quad B_1 = \begin{vmatrix} f'_x & 1 \\ f'_y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -f'_y(x_0, y_0) = -f'_y, \\ C_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \bar{n} = [\bar{r}'_x; \bar{r}'_y] = -f'_x \bar{i} - f'_y \bar{j} + \bar{k}, \end{aligned} \quad (16.6)$$

$$\cos(\bar{n}, x) = -\frac{f'_x}{|\bar{n}|}, \quad \cos(\bar{n}, y) = -\frac{f'_y}{|\bar{n}|}, \quad \cos(\bar{n}, z) = \frac{1}{|\bar{n}|}.$$

Енді Φ шектелген әрі тегіс бет болсын. Берілген бетті бөлікті тегіс қисық сызықпен саны санаулы n бөлікке бөлейік және кіші бөліктерді Φ_i ($i = \overline{1, n}$) таңбамен белгілейік әрі Φ_i бөліктің кез келген нүктесіне жүргізілген жанама жазықтыққа Φ_i бөлік бір мәнді проекциялансын. Φ_i бөліктің әрқайсысынан еркімізше $A_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүкте алып, осы нүкте арқылы бетке жанама жазықтық жүргізейік және Φ_i беттің жанама жазықтықтағы проекциясының ауданын S_i деп белгілейік, мұндағы Φ_i беттің жанама жазықтықтағы проекциясы бөлікті тегіс қисық сызықпен шектелген, яғни квадратталады. Φ_i кіші беттердің жанама жазықтықтағы проекцияларының аудандарын қосайық:

$S(\Phi_i, M_i) = \sum_{i=1}^n S_i$ және кіші беттердің сәйкес диаметрі d_i , $\max_i d_i = d$ болсын.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, Φ бетті $d < \delta$ теңсіздігі орындалатындай кез келген бөліктеу әдіске тәуелсіз әрі кез келген $A_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүкте үшін

$$|S(\Phi_i, M_i) - S| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда Φ **бет квадратталады** деп аталады, ал S саны Φ **беттің ауданы** деп аталады.

Бірнеше тегіс беттерден құралған бет **бөлікті тегіс бет** деп аталады және осы тегіс беттердің әрқайсысы квадратталса, онда олардың аудандарының қосындысын бөлікті тегіс беттің ауданы ретінде алуға болады.

16.1-теорема. Параметр теңдеумен берілген ерекше нүктесі жоқ Φ тегіс бет квадратталады және оның ауданы мына формуламен есептелінеді:

$$S = \iint_{D'} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} du dv, \quad (16.7)$$

мұндағы A_1, B_1, C_1 коэффициенттері (16.5) формуладан анықталынады.

Егер беттің саны санаулы ерекше нүктелері болған жағдайда да (16.7) теңдік орындалады. Егер бет (16.1) айқын түрде берілсе, онда оны параметр теңдеуі түрде берілді деп қарастыруға болады, мұндағы x пен y -ті параметр деп аламыз. Бұл жағдайда, (16.3) параметр теңдеу мына түрге түрленеді: $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, $(u, v) \in D$ және D облыс I шартты қанағаттандырса, ал $f(x, y)$ функция D облыста үзіліссіз дифференциалданса, онда (16.7) формуланы пайдаланып, Φ беттің ауданын мына формуладан есептейміз:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy.$$

Енді бет (16.2) айқын емес түрде берілсін, онда айқын емес функцияның дербес туындыларын табу формуланы ескеріп, яғни соңғы

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

формулананы мына түрге түрлендіреміз:

$$S = \iint_D \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dx dy.$$

Сұрақтар.

1. Беттің айқын және айқын емес теңдеулері.
2. Жай (қарапайым) бет.
3. Беттің шекара нүктелері.
4. Беттің ерекше және ерекше емес нүктелері.
5. Беттің квадратталуы және бөлікті тегіс бет.

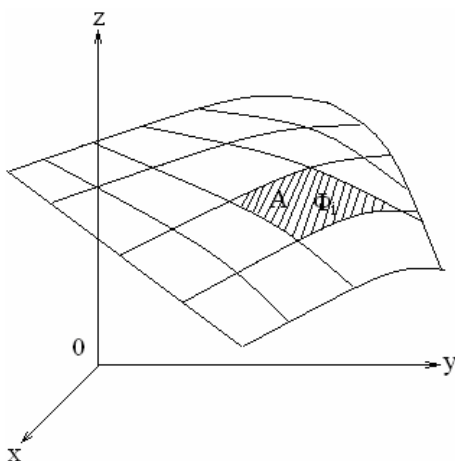
16.2. Бірінші текті беттік интегралдың анықтамасы

Бізге бөлікті тегіс Φ бет берілсін және оның шекарасы (тұйық болуы да мүмкін) бөлікті тегіс қисық сызық болсын. Квадратталатын Φ бетте анықталған және шектелген $f(x, y, z)$ функцияны қарастырайық. Енді Φ бетті бөлікті тегіс қисық сызықтармен $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ n бөліктерге бөлейік (16.2-сурет) және Φ_i бөліктердің ауданын $S(\Phi_i)$ таңбамен белгілейік ($i = \overline{1, n}$). Осы бөліктердің әрқайсысынан еркімізше $A_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүкте алып $((x, y, z) \in D)$, $f(x, y, z)$ функцияның **интеграл қосындысы** деп аталатын мына қосындыны қарастырайық:

$$J(\Phi_i, A_i) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \cdot S(\Phi_i) \quad (16.8)$$

және Φ_i бөліктің диаметрі d_i , ал $d = \max_i \{d_i\}$ болсын әрі $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \in \Phi_i$.

Анықтама. J саны $d \rightarrow 0$ ұмтылғандағы (16.8) интеграл қосындының шегі деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $d < \delta$ теңсіздігі орындалатын кез келген бөліктеу әдісіне тәуелсіз әрі кез келген $A_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүкте үшін $|J(\Phi_i, A_i) - J| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.



16.2-сурет

Бұл жағдайда, J шек интеграл қосынды $f(x, y, z)$ функциядан Φ бет бойынша алынған **бірінші текті беттік интеграл** (немесе Φ бетің ауданы бойынша алынған беттік интеграл) деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$J = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \cdot S(\Phi_i) = \iint_{\Phi} f(x, y, z) ds. \quad (16.9)$$

Сұрақтар.

1. Функцияның интеграл қосындысы.
2. Бірінші текті беттік интеграл.

16.3. Бірінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға келтіру. Физика және механика есептері

Егер бірінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға келтіре алсақ, онда біз екінші текті интегралдың бар болуын және де оны қалай есептеу керек сияқты сұрақтарға оңай жауап бере аламыз. Сондықтан, бірінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға келтіру жағын қарастырайық.

16.2-теорема. Егер Φ тегіс бет $z = \varphi(x, y)$ теңдеумен беріліп, $(x, y) \in D$, D тұйық шектелген облыс, ал $f(x, y, z)$ функция Φ бетте анықталған және шектелген болса, онда мына теңдік орындалады

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2(x, y) + \varphi'_y{}^2(x, y)} dx dy. \quad (16.10)$$

Бұл жағдайда, (16.10) теңдіктің сол жағындағы бірінші текті беттік интеграл бар, егер оң жағындағы екі еселі интеграл бар болса.

Бірінші текті беттік интегралды физика мен механика есептерін шығаруға қолданады, мысалы, егер де материалды Φ беттің $A(x, y, z)$ нүктесіндегі тығыздығы $\rho(x, y, z)$ функция болса, онда мына теңдіктер орындалады:

а) беттің массасы: $M = \iint_{\Phi} \rho(x, y, z) ds;$

б) беттің XOY, XOZ, YOZ координат жазықтықтарындағы сәйкес статикалық моменттері:

$$M_{xy} = \iint_{\Phi} z \rho(x, y, z) ds,$$

$$M_{xz} = \iint_{\Phi} y \rho(x, y, z) ds,$$

$$M_{yz} = \iint_{\Phi} x \rho(x, y, z) ds;$$

в) беттің ауырлық центрі: $x_0 = \frac{M_{yz}}{M}, y_0 = \frac{M_{xz}}{M}, z_0 = \frac{M_{xy}}{M};$

г) беттің Ox, Oy, Oz осьтеріндегі сәйкес инерция моменттері:

$$J_x = \iint_{\Phi} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_y = \iint_{\Phi} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_z = \iint_{\Phi} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds;$$

д) беттің yOz, xOy, xOz координат жазықтықтарындағы инерция моменттері:

$$J_{yz} = \iint_{\Phi} x^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_{xy} = \iint_{\Phi} z^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_{xz} = \iint_{\Phi} y^2 \rho(x, y, z) ds;$$

е) координат жүйенің бас нүктесі бойынша беттің инерция моменттері:

$$J_0 = \iint_{\Phi} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds;$$

ж) массасы M -ге тең материалды $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің материалды Φ бетке $\vec{F} = \{F_x; F_y; F_z\}$ тартылыс күші:

$$F_x = \gamma M \iint_{\Phi} \frac{x - x_0}{r^3} \rho(x, y, z) ds,$$

$$F_y = \gamma M \iint_{\Phi} \frac{y - y_0}{r^3} \rho(x, y, z) ds,$$

$$F_z = \gamma M \iint_{\Phi} \frac{z - z_0}{r^3} \rho(x, y, z) ds,$$

мұндағы $\vec{r} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, $r = |\vec{r}|$, $\gamma = const$.

1-мысал. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ жарты сферада

$$J = \iint_{\Phi} (x + y + z) ds$$

интегралын есептейік.

Шешуі. J интегралды (16.10) формуламен есептейік:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z =$$

$$= \varphi(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$ds = \sqrt{1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y} dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \frac{a dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$J = a \iint_D \left(x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= a \iint_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dxdy,$$

мұндағы D жарты сфераның xOy жазықтығындағы проекциясы, яғни $x^2 + y^2 \leq a^2$ дөңгелек. Енді поляр координат жүйеге көшейік, полюс D дөңгелектің ішкі нүктесі): $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$:

$$J = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\frac{\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi}} + 1 \right) \rho d\rho =$$

$$= a \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho = 0 + \pi a^3 = \pi a^3.$$

2-мысал. $x = 2y^2 + 1, y \geq 0$ цилиндрлік бетті $x = y^2 + z^2$ және $x = 2, x = 3$ беттермен қиғанда пайда болған Φ бетте $J = \iint_{\Phi} y ds$ интегралды есептейік.

Шешуі. Φ бетті xOz жазықтығына проекциялайық және осы облысты D таңбамен белгілейік. D облыстың шекарасын табу үшін $x = 2y^2 + 1, x = y^2 + z^2$ теңдеулерден y -ті шығарып тастайық: $x = 2(x - z^2) + 1, 2z^2 - x - 1 = 0$. Сонымен, D облыстың оң жағы мен сол жағы сәйкес $x = 3, x = 2$ түзулермен, ал қалған екі жақтары

$$z = +\sqrt{\frac{x+1}{2}}, z = -\sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

қисық сызықтармен шектелген. Енді Φ беттің теңдеуін мына түрге өрнектейік: $y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$. Осыдан $y'_x = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$. Онда

$$J = \iint_{\Phi} y ds = \iint_D \sqrt{\frac{x-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}} dx dy = \frac{1}{4} \int_2^3 \sqrt{8x-7} dx \int_{-\sqrt{\frac{x-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{2}}} dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int_2^3 \sqrt{8x-7} \left(\sqrt{\frac{x-1}{2}} + \sqrt{\frac{x-1}{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_2^3 \sqrt{8x^2 - 15x + 7} dx = \int_2^3 \sqrt{\left(x - \frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} dx =$$

$$= \left[\frac{16x-15}{2} \sqrt{\left(x - \frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} - \frac{1}{2 \cdot 256} \ln \left| x - \frac{15}{16} + \sqrt{\left(x - \frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} \right| \right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{512} \left[\ln \frac{17 + \sqrt{288}}{33 + \sqrt{1088}} + 33\sqrt{1088} - 17\sqrt{288} \right].$$

Сұрақтар.

1. Бірінші текті беттік интеграл қалай есептелінеді.
2. Материалды беттің массасы қандай формуламен есептелінеді?

Тапсырмалар.

1. $\iint_{\Phi} \left(z + 2x + \frac{3}{4}y \right) ds$ бірінші текті беттік интегралды 1-октантта орналасқан $\Phi: 6x + 4y + 3z = 12$ жазықтықта есепте.

2. Біртекті $z = x^2 + y^2$ параболоид және D жазықтықпен шектелген материалды дененің ауырлық центрінің координаттарын табыңдар.

16.4. Бір жақты және екі жақты беттер

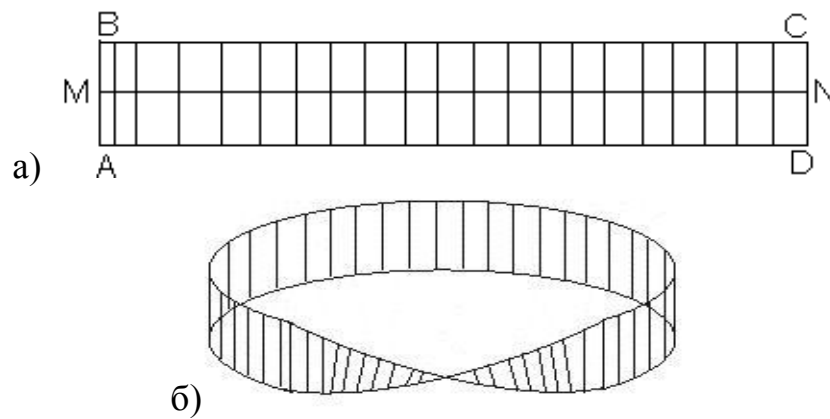
Алдағы тақырыпта екінші текті беттік интегралдың анықтамасын келтіру үшін, алдымен беттің жақтары туралы түсінік алуымыз керек. Ол үшін Φ тегіс бетті қарастырайық.

Егер Φ бет бір денені шектеп тұрса, онда ол беттің екі жағы бар: біреуі сыртқы, ал екіншісі ішкі жағы. Мысалы, сфера беттің екі жағы бар. Егер бет $z = f(x, y)$ теңдеумен берілсе, онда оның да ішкі және сыртқы жақтары бар. Беттердің бәрі тек қана екі жақта бет болып қана қоймайды, сол сияқты бір жақты беттер де бар, мысалы, **Мёбус жапырағы** деп аталатын бет бір жақты бетке мысал бола алады (16.4-сурет). Тегіс Φ беттің ішкі $A_0(x_0, y_0, z_0) = A_0$ нүктесін алайық та осы A_0 нүктеге $\vec{n}$ нормаль векторды тұрғызайық және осы нормаль вектордың мүмкін болатын екі бағытының бірін таңдап алайық. Енді беттің шекарасымен қиылыспайтын әрі осы бетке $A_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтетін тұйық L контурды жүргізейік. Ішкі $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге жүргізілген беттің $\vec{n}$ нормаль векторын осы нүктеден бастап L контур бойымен қозғағанда L контурдың барлық нүктелерінде нормаль вектор Φ бетке нормаль вектор болсын және нормаль вектордың бағыты үзіліссіз өзгерсін. Демек, бұл жағдайда $\vec{n}$ нормаль вектор бетке әр уақытта нормаль вектор болып қалады, онда вектордың бағытына екі жағдай орындалады. Біріншісі, L контур бойымен қозғалып, бастапқы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге оралғанда $\vec{n}$ вектордың бағыты бастапқы бағытпен бірдей болады, екіншісі $\vec{n}$ вектордың бағыты бастапқы бағытқа қарама-қарсы болады.

Анықтама. Егер тегіс Φ беттің шекарасымен ортақ нүктесі жоқ осы беттегі кез келген тұйық L контур бойымен қозғалған нормаль вектордың бағыты өзгермесе, онда ол бет **екіжақты бет** деп аталады, ал егер нормаль вектордың бағыты қарама-қарсы бағытқа өзгерсе, онда ол бет **біржақты бет** деп аталады.

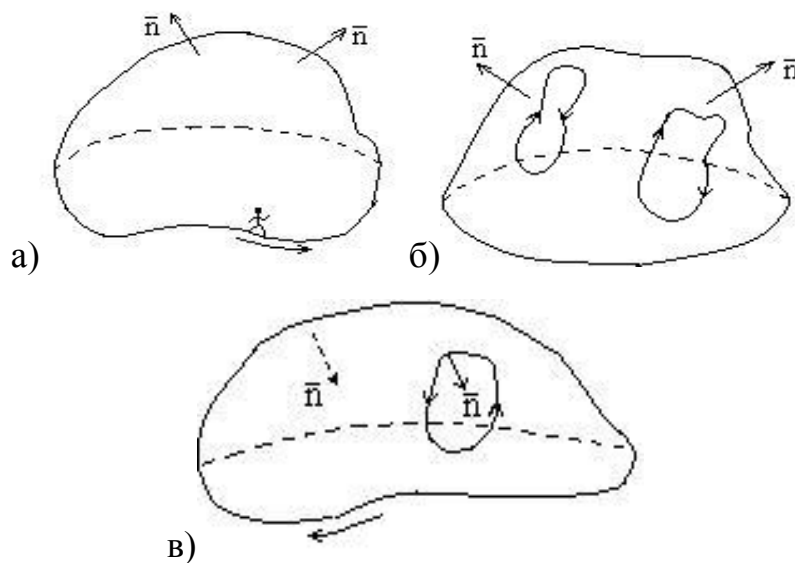
Екіжақты бетке жазықтық, сфера, гиперболоидтар мысал бола алады және кез келген тұйық әрі өзара қиылыспайтын бет екіжақты бет болады.

Егер D облыстың кез келген $A(x, y, z)$ нүктесіне $\bar{a}(A) = \bar{a}(x, y, z)$ вектор сәйкес келсе, онда бізге D облыста $\bar{a}(A) = \{a_x(A); a_y(A); a_z(A)\}$ **векторлық өріс** берілді дейміз және $\bar{a}(A)$ векторлық өріс нормальдары D облыста **үзіліссіз** деп аталады, егер векторлық өрістің $a_x(A), a_y(A), a_z(A)$ координаттары D облыста үзіліссіз болса. Демек, егер Φ тегіс бет болса, онда оның әрбір $A(x, y, z)$ нүктесінің $\bar{n}(A)$ нормалі бар және де осы нүктенің маңайы ойып алынған беттің бөлігінде векторлық өріс нормальдары үзіліссіз болады. Сонымен, егер бүкіл бетке үзіліссіз векторлық өріс нормальдары берілсе, онда бізге **екіжақты бет** берілді дейміз. Үзіліссіз векторлық өріс нормальдары жоқ бетті **біржақты бет** дейміз. Әрбір екіжақты бетке бағыттары қарама-қарсы $+\bar{n}(A)$, $-\bar{n}(A)$ екі үзіліссіз векторлық өріс нормальдарын тұрғызайық. Осы екі векторлық өріс нормальдарының бірін қалап алу беттің екі жағының бірін қалап алу болып табылады, бұл жағдайда, бет **болжанған бет** деп аталады. Мысалы, егер Φ бет $z = f(x, y)$ теңдеумен берілсе, мұндағы $f(x, y)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция, онда беттің сыртқы (жоғарғы) жағына үзіліссіз векторлық өріс нормальдарын вектор-функция $\bar{n}(A) = \{-f'_x(A); -f'_y(A); 1\}$ түрінде, ал ішкі (төменгі) жағына вектор-функция $-\bar{n}(A) = \{f'_x(A); f'_y(A); -1\}$ түрінде беруге болады. Ал егер Φ бет параметр теңдеуімен берілсе, онда беттің бір жағына $\bar{n} = \{A; B; C\}$, екінші жағына $-\bar{n}(A) = \{-A; -B; -C\}$ вектор-функцияны алуға болады. Енді 16.3-суретте бейнеленген, қағаздан жасалған $ABCD$ төртбұрышқа MN орта түзуін жүргізейік және A мен C нүкте және B мен D нүктелері беттестіндей (AB мен DC түзулері беттесетіндей) қағазды бұрап жапсырайық та, M нүктеден бастап осы нүктедегі нормаль векторды орта сызық бойымен қозғап, осы нүктеге қайтып оралғанда нормаль вектордың бағыты кері бағытқа өзгереді.



16.3-сурет

Біз болжанған бетті қарастырайық және ол бір немесе бірнеше контурлармен шектелсін. Болжанған беттің бойындағы контурлар бойымен оң бағытта айналу бағытын мына ереже бойынша анықтаймыз: егер бақылаушы беттің қалап алған жағында тұрса, яғни біздің аяғымыздан басымызға қарай бағытталған



16.4-сурет

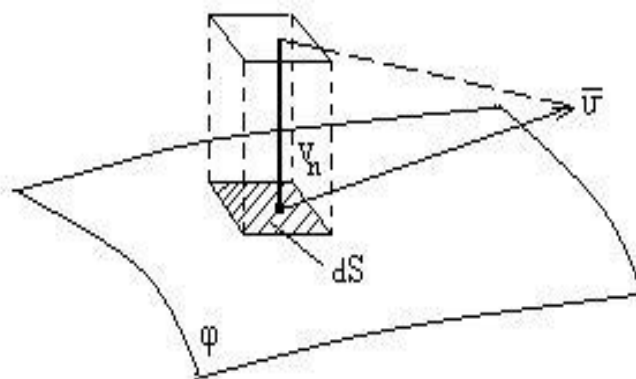
вектор беттің нормаль векторы болады, онда бақылаушы контур бойымен қозғалғанда бет біздің сол жағымызда қалуы керек (16.4, а, б-сурет). Оң бағытқа кері бағыт теріс бағыт болады (16.4, в-сурет).

Сұрақтар.

1. Біржақты және екіжақты беттер.
2. Векторлық өріс.
3. Векторлық өріс нормальдарының облыста үзіліссіздігі.
4. Болжанған бет.

16.5. Екінші текті беттік интегралдың анықтамасы

Алдымен, екінші текті беттік интегралдың анықтамасын бірінші текті беттік интегралдың анықтамасы арқылы берейік. Біз қозғалыста болатын сұйық затпен толтырылған кеңістікті қарастырайық және сұйық заттың кез келген $A(x, y, z)$ нүктедегі жылдамдығы $\vec{v}(x, y, z) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$



16.5-сурет

$R(x, y, z)$ вектор болсын. Осы кеңістіктің белгілі бір Φ бетінен бірлік уақытта ағып шығатын сұйық заттың Π мөлшерін есептейік. Ол үшін Φ беттің шексіз аз ds элементін қарастырайық, онда бірлік уақытта ds элементтен $d\Pi = v_n ds$ сұйық зат ағып шығады, мұндағы v_n шама ds элементінің $\vec{n}$ нормаль векторындағы $\vec{v}$ вектордың проекциясы және ол, $\vec{v}$ векторымен оның $\vec{v}^0 = \{\cos(\vec{n}, x); \cos(\vec{n}, y); \cos(\vec{n}, z)\}$ векторының скаляр көбейтіндісіне тең (16.5-сурет). Онда

$$d\Pi = (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) ds, \quad (16.11)$$

мұндағы $\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)$ нормаль вектор мен координат осьтерінің арасындағы α, β, γ бұрыштардың косинустары, яғни нормаль вектор бойындағы бірлік вектордың координаттары.

Соңғы өрнек ds элементтен бірлік уақытта ағып шығатын сұйық заттың мөлшерін анықтайды және ол сұйық зат тасқынының элементі деп аталады. Ал барлық Φ беттен ағып шығатын сұйық заттың Π мөлшерін анықтау үшін, (16.11) өрнектен Φ бет бойынша интеграл алсақ жеткілікті, яғни

$$\Pi = \iint_{\Phi} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds. \quad (16.11)'$$

Бұл интеграл жоғарыда қарастырылған $P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$ функциядан алынған бірінші текті беттік интеграл болып табылады. Негізінде бұл интеграл Φ бетте берілген $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функцияларына ғана тәуелді болып қоймайды, сонымен қатар ол беттің әрбір нүктесіндегі нормаль вектордың бағытына да тәуелді болады.

Енді бізге екіжақты тегіс Φ бет берілсін және осы беттің кез келген бір жағын алайық. Φ бетте анықталған $\vec{a} = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ вектор-функцияны қарастырайық. Беттің $M(x, y, z)$ нүктесінің нормаль векторындағы $\vec{a}$ вектордың проекциясын a_n әрпімен белгілейік:

$$a_n = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma.$$

Анықтама. Φ бет (таңдап алынған жағы бойынша) бойынша алынған мына интеграл:

$$\iint_{\Phi} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds,$$

$\vec{a}(M) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ вектор функциядан алынған **екінші текті** (немесе **координаттары бойынша**) **беттік интеграл** деп аталады және ол қысқаша былай белгіленеді:

$$\iint_{\Phi} P dydz + Q dx dz + R dx dy.$$

Енді беттің екінші жағын қарастырғанда бірлік вектордың координаттарының таңбасы қарама-қарсы таңбаға ауысады, демек екінші текті беттік интегралдың да таңбасы қарама-қарсы таңбаға ауысады. Ал біржақты бетке екінші текті беттік интеграл ұғымы енгізілмейді.

Егер ds беттің шексіз аз аудан элементі болса, онда $\cos \alpha ds$, $\cos \beta ds$, $\cos \gamma ds$ өрнектері сәйкес YOZ, XOZ, XOY координат жазықтықтарындағы проекциясы, олай болса, оларды сәйкесінше $dydz, dx dz, dx dy$ таңбалармен белгілейік. Онда екінші текті беттік интеграл жалпы түрде былай белгіленеді:

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds = \\ = \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Енді екінші текті беттік интегралдың анықтамасын интеграл қосынды арқылы берейік. Ол үшін $\bar{a}(M)$ вектордың $R(x, y, z)$ координатын ғана қарастырайық. Болжанған Φ тегіс бетті Φ_i кіші беттерге бөліктейік, осы Φ_i бөліктің әрқайсысынан кез келген $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүкте алып, мына интеграл қосындыны қарастырайық:

$$\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \cdot s_i, \quad (16.13)$$

мұндағы s_i шама Φ_i беттің xOy координат жазықтығындағы проекциясы және оның таңбасы оң (теріс) болады, егер Φ_i бөліктің кез келген нүктесіндегі нормаль вектордың оң бағыты Oz осімен сүйір (доғал) бұрыш түзесе.

Егер $R(x, y, z)$ функциясы тегіс Φ бетте үзіліссіз болса және осы бетті аз бөліктерге шексіз бөлгенде, онда (16.13) интеграл қосындының шегі бар әрі ол мына интегралға тең болады:

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy. \quad (16.14)$$

Осы сияқты

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \cdot s_i, \quad \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i) \cdot s_i \quad (16.15)$$

интеграл қосындылары арқылы сәйкес екінші текті беттік интегралдарды аламыз (мұнда әрбір қосындыдағы s_i әртүрлі):

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz, \quad \iint_{\Phi} Q(x, y, z) dx dz. \quad (16.16)$$

Сонда (16.14) мен (16.16) екінші текті беттік интегралдарды қосып, екінші текті беттік интегралдың жалпы түрін аламыз:

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + \iint_{\Phi} Q(x, y, z) dx dz + \iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Сонымен, екінші текті беттік интегралдың анықтамасы бойынша, екінші текті беттік интеграл беттің қай жағын (бетін) алуымызға тәуелді болады, яғни алдын ала болжанған беттің жағын өзгертсек, онда (16.15) бен (16.15)' интеграл қосындылардағы $P(x_i, y_i, z_i)$, $Q(x_i, y_i, z_i)$, $R(x_i, y_i, z_i)$ және s_i мәндері өзгермейді, ал M_i нүктедегі нормаль вектор мен координат остерінің арасындағы бұрыштардың косинустары мәндерінің таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді.

Сұрақ.

1. Екінші текті беттік интеграл.

16.6. Екінші текті беттік интегралды есептеу

1. Бізге тегіс (бөлікті-тегіс) Φ бет берілсін әрі ол $z = f(x, y)$ теңдеуімен анықталсын және осы бетте шектелген $R = R(x, y, z)$ берілсін. Онда, 16.2-теорема және екінші текті беттік интегралдың анықтамасы бойынша

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_1} R(x, y, f(x, y)) dx dy \quad (16.17)$$

теңдік орындалады. Егер осы теңдіктің оң жағындағы D_1 облыс бойынша алынған екі еселі интеграл бар болса, онда (16.17) теңдіктің сол жағындағы екінші текті беттік интеграл да бар, мұндағы D_1 облыс Φ беттің xOy координат жазықтығындағы проекциясы.

Шынында да, (16.17) теңдіктегі беттік интегралды мына түрде жазуға болады:

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) \cos \gamma ds. \quad (16.18)$$

Сонымен, мына **тұжырымға** келеміз: $z = f(x, y)$ теңдеумен берілген Φ беттің жоғарғы беті бойынша алынған $\iint_{\Phi} R(x, y, z) ds$ екінші текті беттік интегралын екі еселі интегралға келтіру үшін интеграл астындағы $R(x, y, z)$ функциядағы z -тің орнына $f(x, y)$ функцияны қойып, ал Φ бет бойынша интегралдауды осы беттің xOy координат жазықтығындағы D_1 проекциясы бойынша интегралдасақ жеткілікті.

Егер де Φ беттің ішкі беті бойынша интегралдасақ, онда екі еселі интегралдың таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді, яғни

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_1} R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

Осы сияқты

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_2} P(\varphi(y, z), y, z) dy dz, \quad (16.19)$$

мұнда Φ бет $x = \varphi(y, z)$ теңдеумен берілген, ал интеграл $+$ ($-$) таңбамен алынады, егер беттің нормаль векторы Ox осімен сүйір (доғал) бұрыш түзесе;

$$\iint_{\Phi} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{\Phi} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz, \quad (15.20)$$

мұнда Φ бет $y = \psi(x, z)$ теңдеумен берілген, ал $+$ ($-$) таңба нормаль вектор Oy осімен сүйір (доғал) бұрыш түзесе.

1-мысал. $J = \iint_{\Phi} dx dy$ екінші текті беттік интегралды $\Phi : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $0 \leq x \leq 1$ конустың төменгі жағы бойынша есептейік.

Шешуі. Конус бетінің xOy координат жазықтығындағы проекциясы D дөңгелек болады: $x^2 + y^2 \leq 1$. Енді (16.15)' формуланы пайдаланайық, сонда

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Phi} dx dy = - \iint_D dx dy = - \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy = -2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= -2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right]_{-1}^{+1} = -2 \left[0 + \frac{1}{2} \arcsin 1 + \frac{1}{2} \arcsin 1 \right] = -\pi. \end{aligned}$$

2-мысал. $J = \iint_{\Phi} y dx dz$ екінші текті беттік интегралды

$\Phi : z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$ параболоидтың жоғарғы жағы бойынша есептейік.

Шешуі. Параболоидтың жоғарғы бетін (жағын) анықтайтын $\bar{n} = \{-f'_x(x, y); -f'_y(x, y); 1\}$ нормаль векторды есептейік (16.4-тақырып), мұндағы $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, $\bar{n} = \{-2x; -2y; 1\}$. Онда

конустың жоғарғы бетіндегі $\bar{a}(M) = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ бірлік векторға мына теңдік орындалады:

$$\operatorname{sign} \cos \beta = \begin{cases} -1, & y > 0, \\ +1, & y < 0. \end{cases}$$

Сондықтан, конусты екі бөлікке бөлеміз және ол бөліктердің (конустардың) теңдеуі

$$\begin{aligned} y &= +\sqrt{z-x^2}, & \text{егер } y &\geq 0; \\ y &= -\sqrt{z-x^2}, & \text{егер } y &\leq 0 \end{aligned}$$

теңдеулермен анықталады әрі ол беттерді сәйкес Φ_1 мен Φ_2 әріптермен белгілейік. Φ_1 мен Φ_2 беттердің xOz координат жазықтығындағы проекциясы $z = x^2$ парабола мен $z = 2$ түзуден тұрады, яғни $\Phi_1 = \{(x, z) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq z \leq 2\}$. Енді Φ_1 мен Φ_2 беттер бойынша алынған екінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға өрнектейік:

$$\iint_{\Phi_1} y dz dx = - \iint_D y(x, z) dz dx = - \iint_D \sqrt{z-x^2} dz dx,$$

мұнда $\cos \beta(M) < 0$ болғандықтан, екі еселі интегралдың алдындағы таңба теріс болады. Осы сияқты:

$$\iint_{\Phi_2} y dz dx = \iint_D y(x, z) dz dx = \iint_D \left(-\sqrt{z-x^2} \right) dz dx.$$

Демек,

$$\begin{aligned} J &= \iint_D y dz dx = \iint_{\Phi_1} y dz dx - \iint_{\Phi_2} y dz dx = - \iint_D \sqrt{z-x^2} dz dx - \\ &\quad - \iint_D \sqrt{z-x^2} dz dx = -2 \iint_D \sqrt{z-x^2} dz dx = \\ &= -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 \sqrt{z-x^2} dz = -2 \cdot \frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(z-x^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x^2}^2 dx = \frac{4}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2-x^2 \right)^{\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

Соңғы интегралды есептеу үшін $x = \sqrt{2} \sin t$ алмастыруын пайдаланайық, сонда $\sin t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$, $\sin t = -1$, $t = -\frac{\pi}{2}$.

Онда

$$J = -\frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = -\frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt =$$

$$= -\frac{4}{3} \left[(t + \sin 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) dt \right] = 2\pi.$$

3-мысал. $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k} = \{x^2; y^2; z^2\}$ векторының $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ сфераның сыртқы беті бойынша тасқынын есептейік.

Шешуі. Есептің шарты бойынша:

$$P(x, y, z) = x^2, \quad Q(x, y, z) = y^2, \quad R(x, y, z) = z^2$$

және (16.11)' формуладан:

$$\Pi = \iint_{\Phi} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) ds.$$

Сфераның сыртқы бетінің нормаль векторын табайық (16.4-тақырып): $\vec{n} = \{2(x-a); 2(y-b); 2(z-c)\}$, ал оның бойындағы бірлік вектор

$$\vec{n}^0 = \left\{ \frac{x-a}{R}; \frac{y-b}{R}; \frac{z-c}{R} \right\}$$

сфераның сыртқы бетін анықтайды. Онда

$$\Pi = \iint_{\Phi} \left(x^2 \frac{x-a}{R} + y^2 \frac{y-b}{R} + z^2 \frac{z-c}{R} \right) ds.$$

Бұл интегралды 16.3-теореманы пайдаланып есептейік. Ол үшін сфераның параметр теңдеуін қарастырайық (16.1-тақырып):

$$x = a + R \cos v \sin u, \quad y = b + R \sin v \sin u, \quad z = c + R \cos u, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

Сонда

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin u, \quad E = R^2 \cos^2 v \sin^2 u + R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 u,$$

$$\begin{aligned}
 G &= R^2 \sin^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v \sin^2 u, \\
 F &= R^2 \cos v \sin v \sin^2 u + R^2 \sin v \cos v \cos u \sin u, \\
 \Pi &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi R^2 \sin u [(a + R \cos v \sin u)^2 \cos v \sin u + \\
 &\quad + (b + R \sin v \sin u)^2 \sin v \sin u + \\
 &\quad + (c + R \cos u)^2 \cos u] du = 2aR^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 v dv \int_0^\pi \sin^3 u du + \\
 &\quad + 2bR^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 v dv \int_0^\pi \sin^3 u du + 2cR^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin u du = \frac{8\pi R^3}{3} (a + b + c).
 \end{aligned}$$

16.7. Остроградский формуласы

Кеңістіктегі $\bar{V}$ цилиндрлік облыс екі бөлікті тегіс Φ_1 мен Φ_2 беттермен және олар сәйкес $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$ тендеулермен анықталсын, ал бүйір жақтары (жасаушылары) Oz осіне параллель Φ_3 бетпен шектелсін. Біз Φ беттің сыртқы (жоғарғы) бетін қарастырайық, мұндағы Φ бет Φ_1, Φ_2, Φ_3 беттерден тұрады.

16.3-теорема. Егер $\bar{V} = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$ цилиндрлік облыс, ал $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялары және олардың $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ дербес туындылары осы облыста және оның шекарасында үзіліссіз (тұйық облыста үзіліссіз) болса, онда шектелген бөлікті-тегіс Φ бетте **Остроградский формуласы** орындалады:

$$\iiint_{\bar{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Phi} P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (16.21)$$

Бұл формула **Остроградский-Гаусс формуласы** деп те аталады.

Ескерту. Егер $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялары үшін $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$ теңдік орындалса, онда (16.21) формуланың сол жағындағы интеграл $\bar{V}$ облыстың көлеміне тең, яғни

$$V = \iiint_{\bar{V}} dx dy dz \quad (16.22)$$

немесе $\bar{V}$ облыстың көлемін екінші текті беттік интеграл арқылы есептеуге болады:

$$V = \iiint_{\Phi} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy. \quad (16.23)$$

16.8. Стокс формуласы

Бізге болжанған тегіс Φ бет берілсін әрі ол болжанған бөлікті тегіс L контурмен шектелсін және Φ бет үш өлшемді $\bar{V}$ облыстың ішінде орналассын;

осы облыста $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функцияларын қарастырайық.

16.4-теорема. Егер $\bar{V}$ облыста анықталған $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялардың үзіліссіз бірінші ретті туындылары бар болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iiint_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \quad (16.24)$$

мұндағы L контурдың бағыты оң бағыт. Бұл формула **Стокс формуласы** деп аталады және оны мына түрде де жазуға болады:

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_{\Phi} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right] ds. \quad (16.25)$$

Сонымен, Стокс формуласы тұйық L контур бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интеграл мен осы L контурмен шектелген Φ бет бойынша алынған екінші текті беттік интеграл арасындағы байланысты айқындайды.

Егер Φ бет жазықтықтағы облыс болса (облыс координат жазықтықтарының біреуіне параллель облыс), онда да Стокс формуласы орындалады, бірақ бұл жағдайда Стокс формуласы Грин формуласына айналады. Мысалы, егер Φ бет xOy координат жазықтығына параллель болса, онда $\bar{n} = \{0; 0; 1\}$, $\oint_L R(x, y, z)dz = 0$ және

(16.24) теңдіктен Грин формуласын аламыз:

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Анықтама. Үш өлшемді $\bar{V}$ облыстағы бет **бір байланысты бет** деп аталады, егер $\bar{V}$ облыста жатқан кез келген тұйық L контур үшін осы облыстан L контурмен шектелген бет бар болса.

Бір байланысты бетке шар және концентрлі сферамен шектелген облыс мысал бола алады, ал бір байланысты емес бетке тор мысал бола алады.

16.5-теорема. 1. Егер $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялары бір байланысты $\bar{V}$ облыста анықталған әрі үзіліссіз болса, онда төмендегі үш белгілер эквивалентті, яғни олардың әрқайсысынан қалған екеуін алуға болады.

I. $\bar{V}$ облысына тиісті кез келген бөлікті-тегіс L контур үшін

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (16.26)$$

теңдік орындалады;

II. $\bar{V}$ облыстың кез келген A мен B нүктелерін қосатын әрі осы облыста жататын AB қисық сызығы бойымен алынған

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

интеграл интегралдау бағытына тәуелсіз;

III. $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ өрнегі толық дифференциал болады, яғни $\bar{V}$ облыстан $u = u(x, y, z)$ функция табылып, $du = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ теңдігі орындалады. Бұл жағдайда $\bar{V}$ облыста жатқан кез келген бөлікті тегіс AB қисық сызық үшін

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = u(B) - u(A) \quad (16.27)$$

теңдігі орындалады.

2. $\bar{V}$ бір байланысты облыс, ал $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ функциялардың осы облыста бірінші ретті дербес туындылары бар болса, онда I–III белгілер IV белгіге эквивалентті болады.

IV. $\bar{V}$ облыста мына теңдіктер орындалады:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (16.28)$$

Ескерту. (16.27) формуладағы $u = u(x, y, z)$ функцияны мына формуладан анықтауға болады:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{M_0}^M P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz + C, \end{aligned} \quad (16.29)$$

мұндағы $C - const$, x_0, y_0, z_0 тағайындалған M_0 нүктенің координаттары $M = M(x, y, z)$ нүкте және қисық сызық ретінде координат осьтеріне параллель сынық түзулер алынған.

Сұрақтар.

1. Бір байланысты бет.
2. Грин формуласын жаз.
3. Стокс формуласын жаз.
4. Остроградский-Гаусс формуласын жаз.
5. Екінші текті беттік интеграл қандай интегралмен есептелінеді?
 $Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

17. ӨРІСТЕР ТЕОРИЯСЫ

17.1. Скалярлық өріс және оның градиенті

Біз үш өлшемді кеңістікте (жазықтық) Φ облысты қарастырайық.

Анықтама. Егер Φ облыстың әрбір $M = M(x, y, z)$ нүктесіне белгілі бір заңдылық бойынша $u(M)$ саны сәйкес қойылса, онда бізге осы облыста **скалярлық өріс** берілді дейміз.

Скалярлық өріске денедегі өріс температурасы, беттегі заряд тығыздығының өрісі, денедегі масса тығыздығының өрісі, т.б. мысал бола алады.

Жоғарыдағы анықтама мен функция анықтамасын ескерсек, онда скалярлық өріс ұғымы мен функция ұғымы Φ облыста бірдей. Демек, төменде Φ облыстағы скалярлық өрісті $u(M)$ функция түрінде қарастыратын боламыз, $M \in \Phi$. Осы өрісте XYZ декарт координат жүйесін тұрғызсақ, онда $u(M)$ функцияны M нүктенің координаттары арқылы жазуға болады, яғни $u(M) = u(x, y, z)$.

Осы тарауда, $u(x, y, z)$ функция Φ облыста үзіліссіз әрі оның x, y, z аргументтері бойынша алынған бірінші ретті дербес туындылары осы облыста үзіліссіз деп қарастыратын боламыз, яғни ол Φ облыста дифференциалданатын функция.

Егер скалярлық өрісті тағайындалған декарт координат жүйеде қарастыратын болсақ, онда скалярлық өрісте болатын құбылыс жайлы толық мағлұмат ала алмаймыз. Сондықтан, толық мағлұмат алу үшін, беттік деңгейлер және сызықты деңгейлер ұғымдарын енгізуіміз қажет.

Анықтама. $u(M)$ функция тұрақты санды қабылдайтын бет скалярлық өрістің **беттік деңгейі** деп аталады.

$u(M)$ функцияға әртүрлі тұрақты C сандарын қабылдатып, қарастырып отырған скалярлық өрістің беттік деңгейлерінің үйірін аламыз. Беттік деңгей

$$u(x, y, z) = C \quad (17.1)$$

теңдеуімен анықталады, мұндағы $C - const$. Әртүрлі тұрақты C санына сәйкес келетін беттік деңгейлер бүкіл Φ облыстағы скалярлық өрісті толтырады және кез келген екі беттік деңгейлердің

ортақ нүктелері жоқ. Барлық беттік деңгейлер Φ облыстағы скалярлық өрісті анықтайды.

Берілген Φ облыстағы скалярлық өрістің сызықты деңгейлері де беттік деңгейлер тәрізді анықталады. Егер скалярлық өріс кеңістікте емес, жазықтықта берілсе, онда осы өрісте **сызықты деңгей** берілді дейміз, демек, скалярлық өрістің сызықты деңгейі екі айнымалы функция арқылы анықталады:

$$u(x, y) = C. \quad (17.2)$$

Бұл теңдеу жазықтықтағы түзу немесе қисық сызықтар. Типографиялық картада теңіз немесе көлдің және таудың жербеті деңгейінен қаншалықты тереңдікте және биіктікте орналасқанын сызықты деңгейлер арқылы белгіленеді.

Осы бөлімнің 15.13-тақырыбында $f(x, y, z)$ функцияның бірлік $\bar{l} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны қарастырғанбыз. Осы сияқты $u(M)$ скалярлық өрістің l бағыт бойынша алынған $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ туындысын қарастырайық.

Онда $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ таңба $u(M)$ шаманың l бағыт бойындағы жылдамдығының өзгеруін сипаттайды. Онда $u(M)$ **скалярлық өрістен $M(x, y, z) = M$ нүктеде l бағыт бойынша алынған туындысы** деп мына өрнекті айтамыз (12-тарау):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \beta + \\ &+ \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \gamma, \end{aligned} \quad (17.3)$$

мұндағы $\bar{l} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ векторы l бағыт бойындағы бірлік вектор, $\alpha, \alpha, \beta, \gamma$ бұрыштар l бағыттың сәйкес OX, OY, OZ осьтерімен түзейтін бұрыштары.

Скалярлық өрістен l бағыт бойынша алынған туындыны

$$\text{grad } u(M) = \left\{ \frac{\partial u(M)}{\partial x}; \frac{\partial u(M)}{\partial y}; \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right\} \quad (17.4)$$

мен $\bar{l}$ векторлардың скаляр көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады:

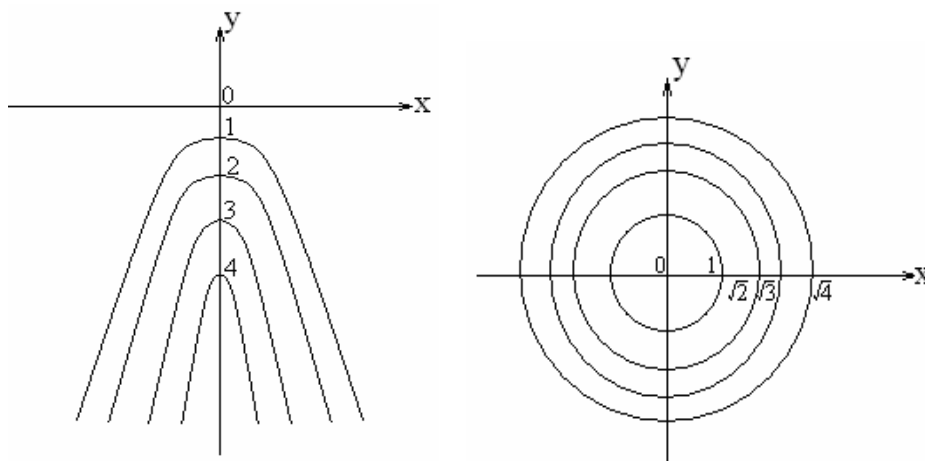
$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = (\text{grad } u; \bar{l}) \quad (17.5)$$

Осы теңдіктен $\frac{\partial u(M)}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot |\bar{l}| \cdot \cos \varphi = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi$, мұндағы φ - берілген M нүктедегі $\text{grad } u$ мен $\bar{l}$ векторларының арасындағы бұрыш, $\frac{\partial u}{\partial l}$ саны ең үлкен мәнді қабылдайды, егер $\varphi = 0$ болса, ал $|\text{grad } u|$ модулі l бағыттағы $u(M)$ функцияның жылдамдығының өсуін анықтайды. Сонымен, $\text{grad } u(M)$ векторы жүйеге тәуелді емес, ал оның модулі мен оның бағыты әрбір нүктеде $u(M)$ функцияның өзі арқылы анықталады.

Егер кез келген бағыт бойынша алынған туынды нөлге тең болса, онда скалярлық өріс **стационарлық өріс** деп аталады. Демек, M нүктеде кез келген бағыт бойынша алынған туынды нөлге тең болуы үшін, (17.3) формуладағы дербес туындылар M нүктеде нөлге тең болуы қажет әрі жеткілікті, яғни

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \frac{\partial u(M)}{\partial y} = \frac{\partial u(M)}{\partial z} = 0.$$

1-мысал. $u(x, y) = x^2 + y$, $u(x, y) = x^2 + y^2$ скалярлық өрістердің $u = 1, 2, 3, 4$ мәндеріндегі сызықты деңгейлердің графигін тұрғызайық (17.1-сурет).



17.1-сурет

Шешуі. u -дың мәндерін скалярлық өріске қойып, сызықты деңгейлердің сәйкес тендеулерін табамыз:

$$y = 1 - x^2, y = 2 - x^2, y = 3 - x^2, y = 4 - x^2;$$

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2, x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2, x^2 + y^2 = 2^2.$$

2-мысал. $u = \sqrt{xyz}$ скалярлық өрістің $M(4,3,2)$ нүктедегі а) градиентін; ә) $\bar{a} = \{2; 2; 3\}$ вектор бағытындағы туындысын табайық.

Шешуі. а) Градиенттің анықтамасы бойынша

$$\begin{aligned} \text{grad } u(M) &= \left\{ \frac{\partial u(M)}{\partial x}; \frac{\partial u(M)}{\partial y}; \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}; \frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}; \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}} \right\}_M = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{4}; \sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

ә) Берілген $\bar{a} = \{2; 2; 3\}$ векторының бірлік векторы $\bar{l} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \{2; 2; 3\}$ болады. Енді (13.5) формуланы пайдаланайық, сонда

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}} \right).$$

3-мысал. Мына функцияның қандай нүктелерде дербес туындылары нөлге тең болады: $u = e^x(x - y^2 + 2y + 3)$

Шешуі. Берілген функцияның дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x - y^2 + 2y + 3) + e^x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-2y + 2).$$

Осыдан $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Сонда $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x - y^2 + 2y + 4) = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-2y + 2) = 0$. Екінші теңдеуден $y = 1$, онда $x = -5$. Сонымен, функция тек бір ғана $A_0(-5, 1)$ нүктеде дербес туындылары нөлге тең болады.

4-мысал. $u = xyz - 3xy^2 + y^3$ скаляр өрістің $M(2,3,1)$ нүктедегі l бағыт бойынша туындысын анықтайық, мұндағы l бағыт координат осьтерімен $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}$ сүйір бұрыштар түзейді.

Шешуі. Аналитикалық геометриядан $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ теңдігі бізге белгілі, сондықтан осы теңдіктен γ бұрыштың косинусын табайық: $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \gamma = 1$. Сонда γ сүйір бұрыш болғандықтан $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$. Енді (13.3) формуланы пайдалану үшін дербес туындылардың $M(2, 3, 1)$ нүктедегі мәндерін есептейік: $\frac{\partial u(M)}{\partial x} = (yz - 3y^2)_M = -24$, $\frac{\partial u(M)}{\partial y} = (xz - 6xy + 3y^2)_M = -7$,

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = (xy)_M = 6. \quad \frac{\partial u(M)}{\partial l} = -24 \cos \frac{\pi}{4} - 7 \cos \frac{\pi}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} = -12\sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

5-мысал. $u(M) = \frac{8}{x^2 + xy + z^2 + 2}$ скалярлық өріс $M(x, y, z)$ нүктеден $M_0(1, 2, 1)$ нүкте арқылы өткенде қандай ең үлкен жылдамдықпен өседі және $u(M)$ скалярлық өріс ең үлкен жылдамдықпен кему үшін M нүкте M_1 нүктеден өткенде M нүкте қай бағытта қозғалады?

Шешуі. $u(M)$ функцияның ең үлкен жылдамдықпен өсуі мен кемуі M нүкте M_0 нүкте арқылы өткендегі бағыты M_0 нүктедегі градиент функцияның бағытымен бағыттас немесе қарама-қарсы болуына байланысты. Сондықтан $u(M)$ функцияның кез келген нүктедегі градиентін (13.4) формуладан табайық:

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= -\frac{16x + 8y}{(x^2 + xy + z^2 + 2)^2} \bar{i} - \frac{8x}{(x^2 + xy + z^2 + 2)^2} \bar{j} - \frac{16z}{(x^2 + xy + z^2 + 2)^2} \bar{k} = \\ &= -\frac{8}{(x^2 + xy + z^2 + 2)^2} ((2x + y)\bar{i} + x\bar{j} + 2z\bar{k}). \end{aligned}$$

$$\text{Осыдан } \text{grad } u(M_0) = -\frac{8}{9}\bar{i} - \frac{2}{9}\bar{j} - \frac{4}{9}\bar{k}, \quad |\text{grad } u(M_0)| = \frac{2\sqrt{21}}{9}.$$

Сонымен, $u(M)$ функцияның $M(x, y, z)$ нүктеден $M(1, 2, 1)$ нүкте арқылы өткендегі ең үлкен жылдамдықпен өсуі $\frac{2\sqrt{21}}{9}$ -ге тең. Ал $M_1(2, 1, 1)$ нүктедегі функцияның градиенті

$$\text{grad } u(M_1) = -\frac{8}{81} ((2x + y)\bar{i} + x\bar{j} + 2z\bar{k})_{M_1} = -\frac{40}{81}\bar{i} - \frac{16}{81}\bar{j} - \frac{16}{81}\bar{k}.$$

Сонда іздестіріп отырған вектордың бағыты $grad (M_1)$ векторының бағытына қарама-қарсы болады, яғни $gradu(M_1) = \frac{40}{81}\bar{i} + \frac{16}{81}\bar{j} + \frac{16}{81}\bar{k}$.

Сонымен, $u(M)$ скалярлық өріс M_1 нүктеден өтіп ең үлкен жылдамдықпен кему үшін M нүкте $grad u(M_1)$ вектордың бағытымен қозғалуы керек.

6-мысал. xyz координат жүйенің қай нүктелерінде $u(M) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ өрістің градиенті а) Ox осіне перпендикуляр; ә) Oz осіне параллель болады; б) нөлге тең болады.

Шешуі. Алдымен скалярлық өрістің градиентін табайық, ол үшін скалярлық өрістен дербес туындыларды табайық: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3yz$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2 - 3yx$. Скаляр өрістің градиентін (13.4) формула бойынша табайық:

$$grad u(M) = (3x^2 - 3yz)\bar{i} + (3y^2 - 3xz)\bar{j} + (3z^2 - 3xy)\bar{k}.$$

а) Скаляр өрістің градиенті Oz осіне перпендикуляр болуы үшін, аналитикалық геометрия курсынан ([15]) $3x^2 - 3zy = 0$ болуы керек. Осыдан $x^2 = zy$. Сонымен, $x^2 = zy$ бетке тиісті барлық нүктелерде $grad u(M)$ градиент-вектор Ox осіне перпендикуляр болады.

ә) $grad u(M)$ градиент-векторы $\bar{k}$ векторына коллинеар болады, сондықтан $3x^2 - 3yz = 0$, $3y^2 - 3xz = 0$. Осы теңдіктерден z айнымалыны шығарайық: $z = \frac{x^2}{y}$, $z = \frac{y^2}{x}$, $\frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x}$, $x^3 - y^3 = 0$, $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$. Осыдан $x = y$ және $x^2 + xy + y^2 = 0$. Екінші теңдік $x = 0$, $y = 0$ болғанда ғана орындалады. Енді $x = y$ теңдікті алғашқы теңдіктерге қойып, $x = y = z$ теңдіктерді аламыз. Демек, $u(M) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ өріс $x = 0$, $y = 0$ мен $x = y = z$ нүктелерде Oz осіне параллель болады.

б) Енді $grad u(M)$ градиент-векторы нөлге тең болуы үшін мына теңдіктер орындалуы керек: $3x^2 - 3yz = 0$, $3y^2 - 3xz = 0$, $3z^2 - 3xy = 0$

теңдіктері орындалуы керек. Онда ә) жағдайды қайталап, $x = y = z$ нүктелерде $\text{grad } u(M)$ нөлге тең болатынын табамыз.

7-мысал. $A(1, 2, 2)$ және $B(-3, 1, 0)$ нүктелеріндегі $u(M) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ скалярлық өріс градиентінің арасындағы бұрыштың косинусын есептейік.

Шешуі. A мен B нүктелеріндегі градиенттердің арасындағы косинусын төмендегі формуладан есептейміз:

$$\cos \varphi = \frac{(\text{grad } u(A); \text{grad } u(B))}{|\text{grad } u(A)| \cdot |\text{grad } u(B)|}.$$

Берілген скаляр өрістің A мен B нүктелеріндегі градиенттерін есептейік:

$$\begin{aligned} \text{grad } u(A) &= \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)_A \bar{i} - \\ &- \left(\frac{2yx}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)_A \bar{j} - \left(\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)_A \bar{k} = \frac{7}{81} \bar{i} - \frac{4}{81} \bar{j} - \frac{4}{81} \bar{k}, \\ \text{grad } u(B) &= \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)_B \bar{i} - \left(\frac{2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)_B \bar{j} - \left(\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)_B \bar{k} = \\ &= -\frac{2}{25} \bar{i} + \frac{3}{50} \bar{j}. \end{aligned}$$

$$\text{Сонда } \cos \varphi = \frac{-\frac{7}{81} \cdot \frac{2}{25} - \frac{4}{81} \cdot \frac{3}{50}}{\sqrt{\left(\frac{7}{81}\right)^2 + \left(\frac{4}{81}\right)^2 + \left(\frac{4}{81}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{-2}{25}\right)^2 + \left(\frac{3}{50}\right)^2}} = -\frac{8}{9}.$$

Сұрақтар.

1. Скалярлық өріс.
2. Скалярлық өрістің беттік деңгейі.
3. Скалярлық өрістің сызықты деңгейі.
4. Скалярлық өрістен нүктеде бағыт бойынша алынған туынды.
5. Стационарлық өріс.

Тапсырмалар.

1. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ скалярлық өрістің беттік деңгейлерін табыңдар.

2. $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ скалярлық өрістің беттік деңгейлерін табындар.

3. $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ скалярлық өрістің $\overrightarrow{M_0 M_1}$ бағыт бойынша алынған $M_0(0,0,0)$ нүктедегі туындыны табындар, мұндағы $M_1(3,4,0)$.

17.2. Векторлық өрістер

Анықтама. Берілген Φ облыста **векторлық өріс** берілді дейміз, егер Φ облыстың әрбір $M = M(x, y, z) \in D$ нүктесіне $\overline{a}(M)$ векторы сәйкес қойылса.

Электр зарядтар жүйесіндегі электрлік өріс, электр тогының әсерінен пайда болатын магнит өрісі, жүйелер массасы әсерінен анықталған тартылыс күш өрісі (гравитациялық өріс), сұйық заттың ағын жылдамдығының әсерінен пайда болатын өріс (жылдамдық өріс) векторлық өріске мысал бола алады.

Анықтамадағы $\overline{a}(M)$ векторының геометриялық сипаттамасы векторлық сызықтар, яғни қисық сызықтар болады және векторлық өріс координат жүйеге тәуелді емес, яғни әрбір M нүктеде $\overline{a}(M)$ векторлық өріс өзінің $|\overline{a}(M)|$ модулі, бағыты арқылы анықталады. Кеңістіктегі XYZ координат жүйеде $\overline{a}(M)$ векторлық өріс $\overline{a}(x, y, z)$ үш айнымалы векторлық функция арқылы анықталады: $\overline{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$, мұндағы $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ функциялары және оның бірінші ретті дербес туындылары үзіліссіз.

Осы бөлімнің 15.13-тақырыбында қарастырылғандай, $\overline{a}(M)$ векторлық өрістің l **бағыт бойынша алынған M нүктедегі туындысы** деп $\frac{\partial \overline{a}(M)}{\partial l} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial y}; \frac{\partial R}{\partial z} \right\}$ вектор-функцияны айтамыз.

Енді $u(M)$ скаляр өрісті қарастырайық. Әрбір M нүктеде $\text{grad } u(M)$ векторды тұрғызып, $u(M)$ скаляр шаманың векторлық өрісін аламыз.

Анықтама. $\overline{a}(M)$ векторлық өріс Φ облыста **потенциалды** деп аталады, егер осы облыста $u(M)$ скалярлық өрістің градиенті ретінде бейнелей алсақ, яғни

$$\overline{a}(M) = \text{grad } u(M). \quad (17.6)$$

Бұл жағдайда, $u(M)$ скалярлық өрістің өзі $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің **потенциалы** деп аталады. Егер $\bar{a} = \{P; Q; R\}$ векторлық өріс болса, онда (17.6) формуладағы векторлардың теңдігін пайдаланып, мына теңдікті аламыз: $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z}$. Кейбір жағдайларда, $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің потенциалы ретінде $\bar{a}(M) = -grad u(M)$ теңдігі орындалатын $u(M)$ функцияны қарастырамыз.

17.1-теорема. Бір байланысты Φ облыстағы $\bar{a}(M) = \{P; Q; R\}$ векторлық өріс потенциалды болу үшін

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (17.7)$$

теңдіктердің орындалуы қажет әрі жеткілікті, мұндағы P, Q, R функциялары және олардың бірінші ретті дербес туындылары үзіліссіз.

Егер $\bar{a}(M)$ векторлық өріс потенциалды болса, онда оның потенциалын табу

$$du = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

толық дифференциалының u функциясын, белгілі формула бойынша табу болып табылады.

Сұрақтар.

1. Векторлық өріс.
2. Потенциалды өріс.
3. Векторлық өрістің скалярлық потенциалы.

17.3. Векторлық өрістің дивергенциясы, роторы және циркуляциясы

Осы бөлімнің 16.5-тақырыбында сұйық заттың Φ беттен (облыстан) $\bar{n}(M)$ нормаль вектор бағытымен ағып шығатын мөлшерін

$$\Pi = \iint_{\Phi} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds \quad (17.8)$$

формуламен есептедік, интеграл астындағы функция $\vec{a}(M)$ векторлық өрістің координаттары:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma,$$

ал $\cos \alpha(M)$, $\cos \beta(M)$, $\cos \gamma(M)$ бағыттауыш косинустар Φ бетке жүргізілген $\vec{n}(M)$ нормаль вектордың бойындағы бірлік вектордың координаттары. Онда (17.8) теңдіктегі интеграл астындағы функцияны $\vec{a}(M)$ мен $\vec{n}(M)$ векторларының скаляр көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады:

$$(\vec{a}(M); \vec{n}(M)) = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma.$$

Сонда

$$\begin{aligned} \Pi = \iint_{\Phi} (\vec{a}(M); \vec{n}(M)) ds = & \iint_{\Phi} P(x, y, z) dydz + \\ & + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy \end{aligned} \quad (17.9)$$

интеграл Φ беттен таңдап алған бет бойындағы $\vec{a}(M)$ **векторлық өрістің ағыны (тасқыны)** деп аталады. Егер $\vec{a}(M)$ векторлық өріс M нүктеден ағатын сұйық заттың жылдамдығы болса, онда Φ беттен таңдап алған (болжанған) бет бойындағы сұйық заттың ағыны

$$\Pi = \iint_{\Phi} (\vec{v}(M); \vec{n}(M)) ds$$

формуламен есептелінеді.

Векторлық өрістің ағынын үш еселі интегралмен де есептеуге болады (17.11).

Егер $\Pi > 0$ болса, онда Φ беттен ағып шығатын сұйық зат мөлшері осы бетке ағып келетін сұйық заттың мөлшерінен көп болады, бұл жағдайда Φ бетте сұйық заттың қосымша көзі бар екендігін білдіреді.

Егер $\Pi < 0$ болса, онда Φ беттен ағып шығатын сұйық зат мөлшері осы бетке ағып келетін сұйық заттың мөлшерінен аз болады, бұл жағдайда Φ бетте сұйық затқа қату немесе буға айналу процестері жүреді.

Егер $\Pi = 0$ болса, онда Φ беттен ағып шығатын мен ағып келетін сұйық заттардың мөлшерлері тең болады.

Анықтама. $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ векторлық өрістің $M(x, y, z) = M$ нүктедегі **дивергенциясы** деп мына скаляр функцияны айтамыз:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (17.10)$$

Ф облыстағы $\vec{a}(M)$ векторлық өріс **соленоидальды** деп аталады, егер $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$ болса.

Бұл жағдайда, тұйық бет бойынша алынған векторлық өрістің ағыны нөлге тең, себебі Остроградский-Гаусс формуласы бойынша:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Phi} P dydz + Q dx dz + R dx dy = \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz, \end{aligned} \quad (17.11)$$

мұндағы $\bar{V}$ – цилиндрлік облыс.

Егер $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) > 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде сұйық заттың көзі бар, яғни M_0 нүктенің кез келген маңайында сұйық заттың мөлшері ұлғаяды.

Егер $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде сұйық заттың көзі жоқ, яғни M_0 нүктенің кез келген маңайында сұйық заттың мөлшері азаяды.

Векторлық өрістің дивергенциясының модулі (абсолют шамасы) сұйық зат көзінің қуатын білдіреді.

Векторлық өрістің дивергенциясына мына қасиеттер орындалады:

1. $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, егер $\vec{a}(M)$ – тұрақты векторлық өріс;
2. $\operatorname{div}(c_1 \vec{a}_1(M) \pm c_2 \vec{a}_2(M)) = c_1 \operatorname{div} \vec{a}_1(M) \pm c_2 \operatorname{div} \vec{a}_2(M)$,

мұндағы $c_1, c_2 - \text{const}$;

3. $u(M)$ скалярлық өріс пен $\vec{a}(M)$ векторлық өрістер көбейтіндісінің дивергенциясына мына теңдік орындалады:

$$\operatorname{div}(u(M) \cdot \vec{a}(M)) = u(M) \operatorname{div} \vec{a}(M) + \vec{a}(M) \operatorname{grad} u(M).$$

Дәлелдеу. 3-қасиетті дәлелдейік.

Векторлық өрістің роторына мына қасиеттер орындалады:

1. $\text{rot } \bar{a}(M) = 0$, егер $\bar{a}(M)$ тұрақты вектор болса;

2. $\text{rot} [c_1 \bar{a}_1(M) \pm c_2 \bar{a}_2(M)] = c_1 \text{rot } \bar{a}_1(M) \pm c_2 \text{rot } \bar{a}_2(M)$,

мұндағы $c_1, c_2 - \text{const}$;

3. $u(M)$ скалярлық өріс пен $\bar{a}(M)$ векторлық өріс көбейтіндісінің роторына мына теңдік орындалады:

$$\text{rot} (u(M) \cdot \bar{a}(M)) = u(M) \text{rot } \bar{a}(M) + \text{grad} (u(M) \cdot \bar{a}(M))$$

Егер қатты дене Oz осінің бойымен ω бұрыштық жылдамдықпен айналса, онда векторлық өрістегі дене нүктесінің жылдамдығын

$$\bar{v}(M) = [\bar{\omega}, \bar{r}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j}$$

түрінде жазуға болады, мұндағы $[\cdot, \cdot]$ векторлық көбейтінді. Енді $\bar{v}(M)$ жылдамдықтың роторын табайық: $\text{rot } \bar{v}(M) = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 2\omega \bar{k}$.

Сонымен, $\text{rot } \bar{v}(M)$ векторы OZ осінің бағытымен бағытталған тұрақты вектор, ал оның модулі дененің екі еселенген бұрыштық жылдамдығына тең, яғни $|\text{rot } \bar{v}(M)| = 2\omega$.

Енді $\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$ потенциалды өрісті қарастырайық. Оның потенциалы $u(M) = \frac{r^2}{2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$. Осы өрістің роторын есептейік:

$$\text{rot } \bar{a}(M) = \text{rot } \bar{r}(M) = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} = 0.$$

Сонымен, потенциалды өрістің роторы нөлге тең. Демек, потенциалды өрісте құйын жоқ.

Енді $\bar{a}(M) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ векторлық өріс, L тегіс немесе бөлікті тегіс қисық сызық болсын. Онда

$$\Pi = \int_L (\bar{a}(M), \bar{e}) dl = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

қисық сызықты интеграл $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің L контур бойымен алынған **циркуляциясы** деп аталады, мұндағы $\bar{e} = \bar{e}(M)$ қисық сызық бойындағы M нүктеге жүргізілген жанама вектордың бірлік векторы, dl – қисық сызықтың дифференциалы.

Егер векторлық өріс соленоидальды әрі потенциалды болса, онда мұндай векторлық өрісті **гармоникалық** өріс дейміз.

Егер L қисық сызық параметр теңдеулерімен берілсе:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

және t параметрге интегралдау бағытының алғашқы (бастапқы) және соңғы нүктелеріне $t = \alpha$ және $t = \beta$ мәндері сәйкес келсе, онда векторлық өрістің циркуляциясын мына формуладан есептейміз:

$$\Pi = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

Егер L қисық сызық $y = y(x), z = z(x), x \in [a; b]$ теңдеулерімен берілсе, онда

$$\Pi = \int_a^b [P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x))y'(x) + R(x, y(x), z(x))z'(x)] dx.$$

Векторлық өрістің ағынын дөңгелек цилиндрдің немесе сфераның беті бойынша есептеу үшін цилиндрлік немесе сфералық координат жүйеге көшіп есептеуге болады (денені координат жазықтығына проекцияламай).

Біз $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндрлік бет пен $z = f_1(x, y), z = f_2(x, y)$ беттермен шектелген Φ бетті қарастырайық. Енді цилиндрлік координат жүйесіне көшейік, яғни $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z$, онда берілген беттер үшін $(f_1(x, y) \leq f_2(x, y))$: $0 \leq \varphi \leq 2\pi, f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi) \leq z \leq f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi), ds = R d\varphi dz$ болады. Сондықтан, Φ беттің сыртқы жағы бойымен алынған $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің ағынын мына формуламен есептейміз:

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}^{f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)} (\bar{a}(M), \bar{n}(M)) dz,$$

мұндағы $\bar{n}(M) = \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 - R^2)|} = \frac{1}{R}(x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}).$

Егер $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера мен сфералық координат жүйеде $\theta_1 = F_1(\varphi)$, $\theta_2 = F_2(\varphi)$ теңдеулерімен беттермен шектелген Φ бетті қарастырайық. Сфералық координат жүйеге көшейік, яғни

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta,$$

мұндағы $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $ds = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

Сонда Φ беттің сыртқы беті бойынша $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің ағынын мына формуладан есептейміз: $\Pi = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\bar{a}(M), \bar{n}(M)) \sin \theta d\theta$,

мұндағы $\bar{n}(M) = \frac{1}{R}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})$ (егер толық сфера болса, онда $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

Мысалдар. 1. $\bar{a}(M) = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ векторлық өрістің $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферадағы ағынын есептейік.

Шешуі. Векторлық өрістің ағынын үш еселі интеграл көмегімен есептейік, яғни (17.11) формула: $\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a}(M) dx dy dz$, мұндағы $\bar{V}$ тұйық шар: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Сонда $\operatorname{div} \bar{a}(M) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, $\Pi = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.

Соңғы интегралды есептеу үшін сфералық координат жүйеге көшейік:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \\ &+ \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = \\ &= \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2, \quad \rho^2 \leq \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad \rho \leq \cos \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Сонда } \Pi &= 3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \theta d\varphi \int_0^{\cos \varphi \sin \theta} \rho^4 d\rho = \frac{3}{5} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi \sin^5 \theta d\varphi = \\ &= \frac{3}{5} \int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{12}{5} \int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

2. $M_1(-2, 3, -3)$, $M_2(1, 3, -2)$ нүктелерде $\bar{a}(M) = x^2 y \bar{i} + y^2 x \bar{j} + z^2 y \bar{k}$

векторлық өрістің дивергенцияларын есептейік.

Шешуі. Дивергенцияларды (17.10) формуламен есептейік:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 x) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 y) = 2xy + 2yx + 2zy = 4xy + 2zy$$

Сонда $\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = 4 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot 3 = -42 < 0$. Демек, M_1 нүктеде сұйық заттың көзі жоқ. Енді M_2 нүктедегі дивергенцияны есептейік:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_2) = 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 = 0.$$

Демек, M_2 нүктеде сұйық заттың көзі жоқ (біркалыпты).

3. $M_1(1,1,1)$ мен $M_2(2,4,8)$ нүктелер арасындағы кесінді бойында $\bar{a}(M) = \frac{1}{y}\bar{i} + \frac{1}{z}\bar{j} + \frac{1}{x}\bar{k}$ векторлық өрістің жұмысын есептейік.

Шешуі. $\overrightarrow{M_1 M_2}$ вектордың бірлік векторын табайық:

$$\bar{e} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{|\overrightarrow{M_1 M_2}|} = \frac{1}{\sqrt{59}} \{2-1; 4-1; 8-1\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{59}}; \frac{3}{\sqrt{59}}; \frac{7}{\sqrt{59}} \right\}.$$

Енді берілген M_1 мен M_2 нүктелерден өтетін түзудің канонды теңдеуін анықтайық: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{7}$. Осы теңдіктегі x параметр болсын, онда

$$x-1 = \frac{y-1}{3}, y = 3x-2, dy = 3dx, x-1 = \frac{z-1}{7}, z = 7x-6, dz = 7dx.$$

Сонда

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \\ &= \sqrt{(dx)^2 + 9(dx)^2 + 49(dx)^2} = \sqrt{59} dx. \end{aligned}$$

Енді векторлық өрістің M_1 нүктеден M_2 нүктеге дейінгі атқарылатын жұмысты есептейік:

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_1 M_2} (\bar{a}(M), \bar{e}) dl = \sqrt{59} \int_1^2 \left(\frac{1}{3x-2} + \frac{3}{7x-6} + \frac{7}{x} \right) dx = \\ &= \sqrt{59} \left(\frac{1}{3} \ln(3x-2) + \frac{1}{7} \ln(7x-6) + 7 \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{170\sqrt{59}}{21} \ln 2. \end{aligned}$$

4. $\bar{a}(M) = -y\bar{i} + x\bar{j} + c\bar{k}$ векторлық өрістің

а) $x^2 + y^2 = 1, z = 0$; б) $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$ шеңберлер бойындағы циркуляциясын есептейік, мұндағы $c = const$.

Шешуі. Тұйық L контур бойындағы векторлық өрістің циркуляциясы мына формуламен есептеледі: $\Pi = \oint_L (\bar{a}(M), \bar{e}) dl$, мұндағы $\bar{e} = \bar{e}(M)$ бірлік вектор.

б) $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ декарт координат жүйедегі теңдеудің орнына оның параметрін алайық: $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = 0, \varphi \in [0, 2\pi]$. Сонда

$$\Pi = \int_L (\bar{a}(M), \bar{e}) dl = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

в) Берілген теңдеудің орнына $x = 2 + \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = 0$ параметр теңдеуін қарастырайық және

$$\bar{e} = \{-\sin \varphi; \cos \varphi; 0\}, \bar{a}(M) = -\sin \varphi \bar{i} + (2 + \cos \varphi) \bar{j} + c\bar{k}, \\ dl = d\varphi.$$

$$\text{Сонда } \Pi = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \varphi) d\varphi = (\varphi + 2\sin \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Сұрақтар.

1. Векторлық өрістің ағыны.
2. Векторлық өрістің нүктедегі дивергенциясы және оның қасиеттері.
3. Соленоидальды векторлық өріс.
4. Векторлық өрістің роторы.
5. Векторлық өрістің контур бойымен алынған циркуляциясы.
6. Гармоникалық өріс.

Тапсырмалар.

1. $\bar{b} = u\bar{a}$ векторлық өрістің дивергенциясын табыңдар, мұндағы $u = xy^2z^3, \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$.

2. $\bar{b} = \frac{\bar{a}}{r} = \frac{y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ векторлық өрістің роторын есептеңдер.

18. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР

18.1. Дифференциалдық теңдеулердің негізгі ұғымдары

Анықтама. Тәуелсіз айнымалыны, одан тікелей тәуелділікте болатын белгісіз функция мен тәуелсіз айнымадан алынған дифференциалды байланыстыратын теңдеу **дифференциалдық теңдеу** деп аталады [20].

Анықтама. Дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция туындысының немесе дифференциалының ең жоғарғы реті **дифференциалдық теңдеудің реті** деп аталады. Мысалы, $(x^2 + \sin x)y' = y$, $\frac{y}{x}dy + (x + y^3)dx = 0$, $y' = x^2 + 5$, $y' = 3y - 4$ бірінші дәрежелі, $(x^2 + \sin x)y' = y''$, $\frac{y}{x}d^2y + (x + y^3)dx^2 = 0$ екінші дәрежелі, $y''' = x^2 + 5$, $y' = 3y''' - 4$ үшінші дәрежелі, ал $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, $y^{(n)} = f(x, y)$ n -дәрежелі дифференциалдық теңдеулер, мұндағы $y = y(x)$ – белгісіз функция, x – тәуелсіз айнымалы. Демек, жоғарыда қарастырылған дифференциалдық теңдеулердегі $y = y(x)$ – белгісіз функция тек бір ғана x тәуелсіз айнымалыға тәуелді.

Егер дифференциалдық теңдеудегі $y = y(x)$ белгісіз функция тек бір ғана x тәуелсіз айнымалыға тәуелді болса, онда ол теңдеу **жай немесе қарапайым дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Мысалы,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (18.1)$$

мұндағы x тәуелсіз айнымалы, ал $y = y(x)$ белгісіз функция тек бір ғана x тәуелсіз айнымалыға тәуелді, мұндағы

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Егер y белгісіз функция екі (немесе одан да көп) тәуелсіз айнымалыға тәуелді болса, онда ол теңдеулер **дербес туындылы дифференциалдық** немесе **физиканың математикалық теңдеулері** деп аталады. Мысалы,

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_m^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x_1^n}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x_m^n}\right) = 0,$$

қанағаттандыратын n -ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі бар және бұл шешім тек біреу ғана. (18.2) Коши есебін қанағаттандыратын n -ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі дербес (дара) шешім немесе дербес (дара) интеграл деп аталады.

Дифференциалдық теңдеудің шешімін табу төрт кезеңмен анықталады:

бірінші кезең, дифференциалдық теңдеулерді бір-бірінен ажырата алу (қарапайым теңдеу, қарапайым емес теңдеу, сызықты теңдеу, сызықты емес теңдеу, біртекті теңдеу, біртекті емес теңдеу, т.с.с.);

екінші кезең, берілген дифференциалдық теңдеудің түріне қарап, оның қалай аталатынын білу;

үшінші кезең, берілген теңдеуді шешуге қажетті әдісті таңдай білу;

төртінші кезең, сол таңдалған әдісті пайдалана алу.

Сұрақтар.

1. Дифференциалдық теңдеудің анықтамасы. Дифференциалдық теңдеулерге мысал келтіріңдер.

2. Дифференциалдық теңдеудің ретінің анықтамасы. 1, 2, 3-ретті дифференциалдық теңдеулерге мысал келтіріңдер.

3. Дифференциалдық теңдеу шешімінің анықтамасы.

4. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің анықтамасы.

5. Интегралдық қисық сызықтар қандай қисық сызықтар?

6. Интегралдық қисық сызықтар дегеніміз қандай функцияның сызбасы?

7. Екінші ретті дифференциалдық теңдеуге Коши есебін қой.

8. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге Коши есебін қой.

9. Дербес (дара) шешім деп қандай шешімді айтамыз?

Тапсырма. Төмендегі функция дифференциалдық теңдеудің шешімі немесе интегралы болатынын тексеріңдер:

1. $y = \sin 2x$, $y'' + 4y = 0$. 2. $y = e^{-2x}$, $y'' + 5y = 0$. 3. Егер $x^2 + y^2 = C$ функция $x + yy' = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы (шешімі) интегралы болса, онда теңдеудің $M_0(-3,4)$ нүктеден өтетін дара шешімінің интегралын табыңдар.

18.2. Айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеу

Анықтама. Мына теңдеу

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (18.3)$$

айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін немесе интегралын табу үшін, теңдеудің екі жағынан интеграл алсақ жеткілікті, яғни

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \quad (18.4)$$

мұндағы C – тұрақты сан. Сонымен, (18.4) формуладан анықталған функция (18.3) теңдеудің жалпы шешімі немесе интегралы болып табылады.

Мысал. $2\sqrt{x}dx - dy = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңдар.

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеу, себебі dx пен dy дифференциалдарының сәйкес коэффициенттері тек x пен y -ке тәуелді функциялар. Сондықтан, берілген теңдеудің екі жағынан интеграл алайық: $\int 2\sqrt{x}dx - \int dy = C$. Осыдан $\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - y = C$ немесе $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$ функция берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі немесе интегралы.

18.3. Айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу

Анықтама. Мына теңдеу

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін немесе интегралын табу үшін, теңдеудің екі жағын да $\frac{1}{N_1(y)M_2(x)}$ функцияға көбейтіп, айнымаларын ажырату қажет, сонда берілген теңдеу айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеуге келеді: $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$. Енді екі жағынан да интеграл

алып, берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табамыз: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C$.

Мысал. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар:

$$6e^x \cos^2 y dx + (1 - 2e^x) \operatorname{ctg} y dy = 0.$$

Шешуі. Берілген теңдеу айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Сондықтан, теңдеудің екі жағын да $\frac{1}{\cos^2 y (1 - 2e^x)}$ көбейткішке көбейтіп, берілген теңдеуді айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеуге келтіреміз: $\frac{6e^x}{1 - 2e^x} dx + \frac{1}{\cos^2 y \operatorname{tg} y} dy = 0$. Теңдеудің екі жағынан интеграл алып, берілген теңдеудің жалпы шешімін айқын емес түрдегі шешімін табамыз:

$$-3 \ln|1 - 2e^x| + \ln|\operatorname{tg} y| = \ln C, \quad \frac{\operatorname{tg} y}{(1 - 2e^x)^3} = C, \quad \operatorname{tg} y - C(1 - 2e^x)^3 = 0.$$

18.4. Біртекті дифференциалдық теңдеу

Анықтама. $f(x, y)$ функция m дәрежелі біртекті функция деп аталады егер кез келген t үшін мына теңдік орындалса ($x = xt, y = yt$):

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Анықтама. Егер $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ теңдеудегі $M(x, y), N(x, y)$ функциялар бірдей дәрежелі біртекті функция болса, онда ол **біртекті дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Біртекті дифференциалдық теңдеуге $y = u(x) \cdot x$ алмастыруын пайдаланып, оны $u = u(x)$ белгісізге тәуелді айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріп $u = u(x)$ белгісізді табамыз. Табылған $u = u(x)$ белгісізді $y = u(x) \cdot x$ алмастыруға қойып, берілген теңдеудің шешімін табамыз. Ол үшін $y = u(x) \cdot x$ алмастырудан туынды немесе дифференциал табамыз: $y' = u' \cdot x + u$ немесе $dy = xdu + udx$, оны берілген теңдеуге қойсақ жеткілікті.

Мына теңдеу:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (18.5)$$

бірінші дәрежелі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Мысал. Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңдар

$$(xy + y^2)dx - (2x^2 + xy)dy = 0.$$

Шешуі. $M(tx, yt) = xt \cdot yt + t^2 y^2 = t^2(xy + y^2) = t^2 M(x, y)$, $N(tx, yt) = (2x^2 t^2 + xt \cdot yt) = t^2 N(x, y)$ екінші дәрежелі біртекті функциялар. Сондықтан берілген теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеу болып табылады. Берілген теңдеуді (18.5) теңдеуге келтірейік, ол үшін теңдеудің екі жағын да $\frac{1}{(2x^2 + xy)dx}$ көбейткішке көбейтейік:

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}$. Соңғы теңдіктің оң жағындағы бөлшектің алымы мен

бөлімін x^2 -қа бөлейік, сонда $y' = \frac{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 + \frac{y}{x}}$.

Ал, бұл – біртекті дифференциалдық теңдеу, яғни $u = \frac{y}{x}$ алмастыруын пайдаланамыз: $y' = u' \cdot x + u = x \frac{du}{dx} + u$. Сонда берілген теңдеу, $u = u(x)$ белгісізге тәуелді айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келеді: $x \frac{du}{dx} + u = \frac{u + u^2}{2 + u}$ немесе $x \frac{du}{dx} = -\frac{u}{2 + u}$. Осыдан $\frac{dx}{x} = -\frac{u + 2}{u} du$. Екі жағын да интегралдайық: $\ln|x| = -u - 2\ln|u| - \ln C$ немесе $u = -\ln|Cxu^2|$. Осыдан $Cxu^2 = e^{-u}$. Енді $u = \frac{y}{x}$ алмастыруын ескеріп, берілген біртекті дифференциалдық теңдеудің айқын емес түрдегі жалпы интегралын табамыз:

$$y^2 - C_1 x e^{-\frac{y}{x}} = 0, \quad C_1 = \frac{1}{C}.$$

Сұрақтар.

1. m дәрежелі біртекті функцияның анықтамасы.
2. Біртекті дифференциалдық теңдеудің анықтамасы.
3. Біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін қандай алмастыруды пайдаланамыз.
4. $y = u(x) \cdot x$ алмастыруындағы $u = u(x)$ функция қандай шартты қанағаттандырады?

Тапсырма. Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңдар. 1. $y' = 2 + \frac{y}{x}$. 2. $xy' = 5y + x$. 3. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$. 4. $\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 + y^2 + xy}{x^2}$. 5. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2 + 2xy}{x^2}$.

18.5. Біртекті дифференциалдық теңдеуге келтірілетін қарапайым теңдеу

Мына теңдеуді қарастырайық:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

мұндағы a_i, b_i, c_i – нақты сандар, $i = 1, 2$.

1-жағдай. Егер $c_i = 0$ болса, онда берілген теңдеу біртекті немесе (18.4) дифференциалдық теңдеуге келеді. c_i сандардың бірі нөлге тең болмасын және $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ деп ұйғарайық.

Енді x пен y айнымаларға $y = u + \beta$, $x = t + \alpha$ алмастыруын енгізейік, α, β – нақты сандар, u – белгісіз функция, ал t – тәуелсіз айнымалы шама. Онда берілген теңдеу мына түрге түрленеді:

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1u + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2t + b_2u + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right).$$

Осы теңдеудегі α, β -нақты сандар мына жүйені қанағаттандырсын:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Онда соңғы дифференциалдық теңдеуден $\frac{du}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 u}{a_2 t + b_2 u}\right)$ теңдеуді аламыз. Соңғы теңдеуді интегралдап, $u = u(t)$ функцияны тауып және x, y айнымаларға көшіп берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз.

2-жағдай. Егер $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ болса, онда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, яғни $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. Бұл жағдайда, берілген теңдеу мына түрге түрленеді:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \equiv f(a_2 x + b_2 y).$$

Енді $z = a_2 x + b_2 y$ алмастыруын жасап, x тәуелсіз айныма жоқ дифференциал теңдеуді аламыз $\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f_1(z)$.

18.6. Сызықты дифференциалдық теңдеу

Анықтама. Теңдеудегі $y = y(x)$ белгісіз функция мен оның y' туындысы бойынша сызықты болатын теңдеу **сызықты (бірінші дәрежелі) дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі мына түрде беріледі:

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (18.6)$$

Егер $q(x) = 0$ болса, онда

$$y' + p(x)y = 0 \quad (18.7)$$

теңдеу **біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу** деп аталады. Ал егер $q(x) \neq 0$ болса, онда $y' + p(x)y = q(x)$ теңдеу **біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін **Лагранж (тұрақтыны вариациялау әдісі) және алмастыру** ($y = u(x) \cdot v(x)$) әдістерінің бірін пайдаланамыз.

Алмастыру әдіс. Сызықты теңдеудегі $y = y(x)$ белгісіз функцияны $u = u(x)$ пен $v = v(x)$ функциялардың көбейтінділеріне алмастырайық:

$$y = u(x) \cdot v(x), \quad \frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}. \quad (18.8)$$

Онда (18.6) теңдеу мына теңдеуге түрленеді:

$$v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + p(x)v \right] = q(x). \quad (18.9)$$

Енді $y = u(x) \cdot v(x)$ алмастырудағы $v = v(x)$ көбейткіш жоғарыдағы квадрат жақша ішіндегі өрнекті нөлге айналдырсын деп алайық, яғни: $\left[\frac{dv}{dx} + p(x)v \right] = 0$.

Бұл теңдеу айнымалары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Осы теңдеудегі белгісіз $v = v(x)$ функцияны іздестірейік, ол үшін айнымаларын ажыратып, оның *дербес* бір шешімін табайық:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \quad \ln|v| = -\int p(x)dx, \quad v = e^{-\int p(x)dx}. \quad (18.10)$$

Анықталған $v = e^{-\int p(x)dx}$ функцияны (18.9) теңдеуге қойып, айнымалары ажыратылатын теңдеу аламыз: $v \frac{du}{dx} = q(x)$, $du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx$. Соңғы теңдеудің *жалпы* шешімін табайық:

$$u = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C. \quad (18.11)$$

(18.10), (18.11) формулаларда анықталған $u = u(x)$ пен $v = v(x)$ функцияларды (18.8) формуладағы $y = u(x) \cdot v(x)$ алмастыру формуласына қойып, (18.6) біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} = C e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx. \quad (18.12)$$

Соңғы формуладағы бірінші қосынды (18.7) *біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі*, ал екінші қосылғыш (18.6) *біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дара немесе дербес шешімі*.

Лагранж әдісі (тұрақтыны вариациялау). (18.6) біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, алдымен (18.7) біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y' + p(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0,$$

$$\ln|y| + \int p(x)dx = \ln C, \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx.$$

Осыдан (18.7) біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (18.13)$$

Мұндағы C тұрақтыны x -ке тәуелді дифференциалданатын функция деп қарастырайық, яғни

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad (18.14)$$

мұндағы $C(x)$ функцияны, (18.14) формуладағы функция (18.6) біртекті емес дифференциалдық теңдеудің шешімі болатындай етіп іздестірейік. Ол үшін (18.14) функцияны және оның туындысын тауып, (18.6) теңдеуге қояйық:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

$$\text{Осыдан } C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}, \quad \frac{dC(x)}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Соңғы теңдеу айнымалары ажыратылған дифференциалдық теңдеу, оны интегралдайық: $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$, мұндағы C – тұрақты. Табылған $C(x)$ функцияны (18.14) формулаға қояйық: $y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$.

Сонымен, соңғы функция біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады.

Сұрақтар.

1. Сызықты (бірінші дәрежелі) дифференциалдық теңдеудің анықтамасы.
2. Біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің анықтамасы.
3. Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің анықтамасы.

4. Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін қандай әдістерді пайдаланамыз?

5. Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қанша қосылғыштан тұрады?

6. Біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешіміндегі әрбір қосылғыш нені білдіреді?

7. Алмастырудағы $u = u(x)$ пен $v = v(x)$ функцияларға қандай шарт қойылады?

Тапсырма. Төмендегі дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімін екі әдіспен табындар.

$$1. y' - \frac{y}{x} = 3x. \quad 2. y' + 4\frac{y}{x} + x = 0. \quad 3. y' - 7y = 8e^{3x}.$$

18.7. Толық дифференциалдық теңдеу

Анықтама. Егер

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (18.15)$$

теңдеудің сол жағындағы $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ өрнек $U(x, y)$ функцияның толық дифференциалы болса, онда (18.15) теңдеу **толық дифференциалдық теңдеу** деп аталады.

Егер (18.15) теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болса, онда оны мына түрде жазуға болады: $dU(x, y) = 0$, ал оның жалпы интегралы мына түрде анықталады $U(x, y) = C$, мұндағы $C - const$.

(18.15) теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болу үшін D облыстың барлық нүктелерінде $M(x, y), N(x, y)$ функциялар анықталған, үзіліссіз әрі олардың $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ дербес туындылары үзіліссіз болуы және

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (18.16)$$

теңдіктің орындалуы қажет әрі жеткілікті.

Егер (18.16) теңдік орындалса, онда (18.15) теңдеудің жалпы интегралы мына формулалардың бірімен анықталады:

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C \text{ немесе } \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C, \quad (18.17)$$

мұндағы $A_0(x_0, y_0) \in D$.

Егер (18.16) теңдік орындалмаса, онда (18.15) теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болмайды. Бірақ, кейбір жағдайларда ол теңдеуді **интегралдық көбейткіш** деп аталатын $\mu(x, y)$ функцияға көбейтіп, оны толық дифференциалдық теңдеуге келтіруге болады. Енді осы жағдайларды жеке-жеке қарастырайық.

1-жағдай. Егер мына қатынас:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x) \quad (18.18)$$

тек x **тәуелсіз айнымалыға ғана тәуелді болса**, онда интегралдық көбейткіш мына формуладан анықталады:

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx}. \quad (18.19)$$

2-жағдай. Егер мына қатынас:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \psi(y) \quad (18.20)$$

тек y **айнымалыға ғана тәуелді болса**, онда интегралдық көбейткіш мына формуладан анықталады:

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y) dy}. \quad (18.21)$$

1-мысал. $2x \cos^2 y dx + (8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y) dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар.

Шешуі. Мұндағы $M(x, y) = 2x \cos^2 y$, $N(x, y) = 8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y$ функциялардан сәйкес $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ дербес туындыларды табайық:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x \cos y \sin y = -2x \sin 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin 2y.$$

Сонымен, берілген теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болады. $A_0(x_0, y_0) \in D$ нүктенің координаты ретінде $A_0(0,0)$ нүктені алайық. Сонда

$$\int_0^x 2x \cos^2 y dx + \int_0^y 8\sqrt[3]{y} dy = C, \quad x^2 \cos^2 y + 6y\sqrt[3]{y} = C.$$

2-мысал. $ydx + x(\ln x - y^3)dy = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі. Мұндағы $M(x, y) = y$, $N(x, y) = x(\ln x - y^3)$ функциялардан сәйкес $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ дербес туындыларды табайық: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \ln x - y^3$.

Демек, толық дифференциалдық теңдеудің (18.16) шарты орындалмайды. Бірақ, (18.18), (18.20) қатынастардың бірі орындалатынын тексерейік:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1 - 1 - \ln x + y^2}{x(\ln x - y^3)} = -\frac{1}{x} = \varphi(x).$$

Сонымен, берілген дифференциалдық теңдеудің тек x аргументке ғана тәуелді интегралдық көбейткіші бар. Енді осы интегралдық көбейткішті (18.19) формуладан табамыз:

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

$\mu(x) = \frac{1}{x}$ интегралдық көбейткішке көбейтейік:

$$\frac{y}{x} dx + (\ln x - y^3) dy = 0.$$

Соңғы теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болады $M_1(x, y) = \frac{y}{x}$, $N_1(x, y) = \ln x - y^3$: $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{x}$.

Енді (18.17) формуланы пайдаланамыз, ондағы $A_0(x_0, y_0) \in D$ нүктенің координаты ретінде $A_0(1,0)$ нүктені аламыз. Сонда

$$\int_1^x \frac{y}{x} dx + \int_0^y (-y^3) dy = C, \quad y \ln x - \frac{y^4}{4} = C.$$

Сұрақтар.

1. Толық дифференциалдық теңдеудің анықтамасы.
2. Дифференциалдық теңдеудің толық теңдеу болу шарты.
3. Интегралдық көбейткіштің анықтамасы.
4. Интегралдық көбейткіштің тек x -ке тәуелді болуының формуласы.
5. Интегралдық көбейткіштің тек y -ке тәуелді болуының формуласы.
6. 2-мысалдағы $A_0(1,0)$ нүктенің орнына $A_0(0,1)$ нүктені алуға бола ма? Түсіндір.

Тапсырмалар.

1. $(2xy - 3)dx + (x^2 + 1)dy = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табыңдар.
2. $(2xy^3 + 4y)dx + (3x^2y^2 + 4x)dy = 0$ теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.
3. $(x - \cos y)dx + (x \sin y + \cos y)dy = 0$ жалпы шешімін табыңдар.
4. $\left(2x \ln y - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} - \sin y\right)dy = 0$ теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.

18.8. Реті төмендетілетін жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер

1. Мына дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$y^{(n)} = f(x), \quad (18.22)$$

мұндағы $f(x)$ функция (a, b) интервалда үзіліссіз.

Берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, теңдеуді тізбектеп n рет интегралдасақ жеткілікті. Ол үшін $y^{(n)}$ туындыны мына түрде $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$ жазайық. Енді теңдеудің екі жағын да интегралдайық, сонда

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Енді $y^{(n-1)}$ туындыны мына түрде жазып: $y^{(n-1)} = (y^{(n-2)})'$, одан интеграл алайық $y^{(n-2)} = \iint f(x)dx + C_1 \int dx + C_2 = \iint f(x)dx + C_1x + C_2$.

Осылайша жалғастырып, берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y = \int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

Сонымен, соңғы функция берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы немесе шешімі болады.

1-мысал. $y''' = \frac{1}{x^3}$ теңдеуді интегралдандар.

Шешуі. Алдымен берілген теңдеуден y'' функцияны, содан соң y' функцияны, ал ең соңында y белгісіз функцияның өзін табайық:

$$y'' = \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C_1, \quad y' = \int \left(-\frac{1}{2x^2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{1}{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

2-мысал. Белгісіз y функция жоқ (функциясыз) екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$F(x, y', y'') = 0. \quad (18.23)$$

Теңдеудің жалпы шешімін табу үшін алмастыру әдісін қолданайық:

$y'(x) = y' = p(x) = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$. Анықтаған y' , y'' туындыларды берілген теңдеуге қойып, реті бірге төмендетілген $p(x)$ белгісізге тәуелді бірінші ретті дифференциалдық теңдеу аламыз: $F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$.

3-мысал. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі. Берілген теңдеуде белгісіз y функция жоқ. $y' = p(x)$ және $y'' = \frac{dp}{dx}$ болсын, онда $x \frac{dp}{dx} = p \ln \frac{p}{x}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$. Сонымен, біз $p = p(x)$ белгісіз функцияға тәуелді бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу алдық. Біртекті дифференциалдық теңдеу $p = u(x) \cdot x$ алмастыруы арқылы шешілетіні бізге белгілі. Осы алмастыруды дифференциалдайық: $\frac{dp}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$. Енді $p = u(x) \cdot x$ алмастыруды және оның дифференциалын соңғы дифференциалдық теңдеуге

қояйық: $x \frac{du}{dx} + u = u \ln u$, $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u(\ln u - 1)}$. Соңғы теңдікті интегралдайық: $\ln|x| + \ln C_1 = \ln|\ln u - 1|$, $\ln|C_1 x| = \ln|\ln u - 1|$. Осыдан $C_1 x = \ln u - 1$, $\ln u = C_1 x + 1$, $u = x e^{C_1 x + 1}$. Енді y айнымалыға көшейік $\frac{p}{x} = e^{C_1 x + 1}$, $y' = x e^{C_1 x + 1}$. Соңғы бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді бөліктеп интегралдайық: $y = \int x e^{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2$. Сонымен, соңғы функция берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі немесе интегралы болады.

4-мысал. Тәуелсіз x айныма жоқ (айнымасыз) екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$F(y, y', y'') = 0, \quad (18.24)$$

мұндағы $y = y(x)$.

Теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, алмастыру әдісін қолданайық:

$$y'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p(y) \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Анықтаған y' , y'' туындыларды берілген теңдеуге қойып, $p(y)$ белгісізге тәуелді реті бірге төмендетілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$F\left(y, p(y), p(y) \cdot \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

5-мысал. $y'' \operatorname{tgy} = 2y'^2$ дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі. Берілген теңдеуде тәуелсіз x айныма жоқ екінші ретті дифференциалдық теңдеу. Сондықтан, $y'(x) = p(y)$, $y'' = p(y) \cdot \frac{dp}{dy}$ алмастыруды пайдаланайық. Онда берілген теңдеуден $p = p(y)$ белгісізге тәуелді реті бірге төмендетілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$p \frac{dp}{dy} \operatorname{tgy} = 2p^2, \quad \frac{dp}{p} = 2 \frac{dy}{\operatorname{tgy}}.$$

Соңғы теңдікті интегралдайық: $\ln(p) = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1|$, $p = C_1 \sin^2 y$.
 $p = p(y)$ белгісізден $\frac{dy}{dx}$ дифференциалға көшіп, $y = y(x)$ белгісізге тәуелді айнымалары ажаратылатын дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \sin^2 y, \quad \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx, \quad -\operatorname{ctgy} = C_1 x + C_2.$$

Сонымен, соңғы функция: $-\operatorname{ctgy} = C_1 x + C_2$ берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы немесе шешімі болады.

6-мысал. $y = y(x)$ белгісіз функцияға және оның y', y'' туындыларына біртекті функция болатын екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (18.25)$$

Теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, алмастыру әдісін қолданайық:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = y(x) \cdot z(x),$$

мұндағы $z = z(x)$ – белгісіз функция. Осыдан,

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'(x) \cdot z(x) + y(x) \cdot z'(x) = yz^2 + yz'.$$

Анықталған $y'(x)$, $y''(x)$ туындыларды берілген теңдеуге қойып, $z = z(x)$ белгісізге тәуелді және реті бірге төмендетілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеу аламыз: $F(x, y, y \cdot z, yz^2, yz') = 0$.

Сұрақтар.

1. Белгісіз $y = y(x)$ функция жоқ екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қандай алмастыруды пайдаланып шешеміз.
2. Тәуелсіз x айныма жоқ екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қандай алмастырумен шешеміз.
3. y белгісіз функцияға және оның y', y'' туындыларына біртекті функция болатын екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қандай алмастыруды пайдаланып шешеміз.

4. $p = p(x)$, $y' = p(y)$, $y'(x) = y(x) \cdot z(x)$ алмастырулардағы $p(x)$, $p(y)$, $z(x)$ функцияларға қандай шарттар қойылады?

Тапсырмалар.

1. $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 5\varphi^4 - 2\varphi^3 + \varphi^2$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар, мұндағы $r = r(\varphi)$ – белгісіз функция, φ – тәуелсіз айныма.

2. $y'' = \sin 3x$ дифференциалдық теңдеудің $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{9}$ шарттарды қанағаттандыратын дербес (дара) шешімін табыңдар.

3. $xy'' = 1$ дифференциалдық теңдеудің $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$ шарттарды қанағаттандыратын дербес (дара) шешімін табыңдар.

4. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ дифференциалдық теңдеудің $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ шарттарды қанағаттандыратын дербес (дара) шешімін табыңдар.

5. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ дифференциалдық теңдеудің $y(1) = \frac{1}{3}$, $y'(1) = 2$ шарттарды қанағаттандыратын дербес (дара) шешімін табыңдар.

18.9. Бернулли мен Дарбу теңдеулері

Анықтама. Мына теңдеу

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \quad (18.26)$$

Бернулли теңдеуі деп аталады, мұндағы $m \neq 0, m \neq 1$, ал $y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x)$ функциялар (a, b) интервалда үзіліссіз.

Егер $m = 0$ болса, онда Бернулли теңдеуі біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеуге, ал $m = 1$ болса, онда Бернулли теңдеуі біртекті сызықты дифференциалдық теңдеуге айналады.

Бернулли теңдеуге

$$y = z^{\frac{1}{1-m}}$$

алмастыру нәтижесінде ол сызықты дифференциалдық теңдеуге келтіріледі, мұндағы $z = z(x)$. Бернулли теңдеудің жалпы шешімін мына формуладан табуға болады:

$$y = \left\{ e^{\int (m-1)p(x)dx} \left[C + \int (1-m)q(x)e^{\int (1-m)p(x)dx} dx \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}.$$

Мына теңдеу

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0$$

Дарбу теңдеуі деп аталады, мұндағы $M(x, y)$, $N(x, y)$ функциялар бірдей m дәрежелі біртекті, ал $P(x, y)$ – l дәрежелі біртекті функциялар.

Егер $l = m - 1$ болса, онда Дарбу теңдеуі біртекті дифференциалдық теңдеу болады.

Дарбу теңдеуіне $y = z(x) \cdot x$ алмастыруын қолданып $\left(dy = zdx + xdz, xdy - ydy = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 dz \right)$, берілген теңдеуді Бернулли теңдеуіне келтіреміз.

18.10. Коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу

Анықтама. Белгісіз функция және оның туындылары бойынша сызықты болатын n -ретті мына теңдеу:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (18.27)$$

n -ретті коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты дифференциалдық теңдеу деп аталады, мұндағы $a_i, 1, 2, \dots, n$ -нақты сандар, $x \in (a, b)$.

Коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мына формуладан анықталады:

$$y'' + 4y' = -2xe^{-4x}, \quad (18.28)$$

мұндағы $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ функциялар (18.27) біртекті теңдеудің **сызықты тәуелсіз дербес (дара) шешімдері** немесе **іргелі шешімдері** деп аталады.

Теорема. Егер $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ функциялар (18.27) біртекті теңдеудің сызықты тәуелсіз дербес (дара) немесе іргелі шешімдері болса, онда **вронскиан анықтауышы** деп аталатын мына анықтауыш:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \dots & y_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

барлық $x \in (a, b)$ үшін нөлге тең емес.

Мына алгебралық теңдеу:

$$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (18.29)$$

Біртекті дифференциалдық теңдеудің **сипаттаушы (характеристикалық) теңдеуі** деп аталады.

(18.29) сипаттаушы теңдеудің λ түбірлері оның **сипаттаушы түбірлері (сандары)** деп аталады, мұндағы

$$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

n дәрежелі сипаттаушы көпмүшелік деп аталады.

n – ретті дифференциалдық теңдеудің (18.28) жалпы шешімі (18.29) сипаттаушы теңдеудің түбірлеріне тікелей тәуелді. Енді осы жалпы шешімді ежелден қалыптасқан **Лагранж әдісі (тұрақтыны вариациалау әдісі)** деп аталатын әдіспен іздестірейік.

1) (18.29) сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі болсын, яғни $\lambda_k \neq \lambda_j, k \neq j, k, j = \overline{1, n}$. Бұл жағдайда, (18.27) теңдеудің $y_1, y_2, \dots, y_n$ сызықты тәуелсіз дербес (дара) шешімдерді мына түрде анықтаймыз:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}, \quad (18.30)$$

ал (18.27) біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталады:

$$\bar{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}, \quad (18.31)$$

$C_i, i = \overline{1, n}$ – нақты сандар.

2) (18.29) сипаттаушы теңдеудің түбірлері n еселі нақты болсын, яғни $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_0$, онда (18.27) теңдеудің $y_1, y_2, \dots, y_n$ сызықты тәуелсіз дербес (дара) шешімдерді мына түрде анықтаймыз:

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}, \dots, y_n(x) = x^{n-1} e^{\lambda_0 x}, \quad (18.32)$$

ал (18.27) біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталады:

$$\bar{y} = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_0 x} \dots + C_n x^{n-1} e^{\lambda_0 x}, \quad (18.33)$$

$C_i, i = \overline{1, n}$ -нақты сандар.

3) (18.29) сипаттаушы теңдеудің түбірлері әртүрлі және олардың ішінде комплекс түбірлері де $(k = \overline{1, q})$, $p + 2q = n$ бар болсын. Мысалы, p түбірлері нақты, әртүрлі болсын: λ_j ($j = \overline{1, p}$), ал қалғандары әртүрлі комплекс сандар болсын: $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ ($k = \overline{1, q}$), $p + 2q = n$. Онда мына функциялар:

$$y_j = e^{\lambda_j x}, y_k = e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x, \bar{y}_k = e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x \quad (k = \overline{1, q}), p + 2q = n \quad (18.34)$$

(18.27) теңдеудің сызықты тәуелсіз дербес (дара) шешімдері, ал олардың (18.28) түрдегі сызықты комбинациясы осы дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады:

$$\bar{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_p e^{\lambda_p x} + e^{\alpha_1 x} (C_{p+1} \cos \beta_1 x + C_{p+2} \sin \beta_1 x) + \\ + e^{\alpha_2 x} (C_{p+3} \cos \beta_2 x + C_{p+4} \sin \beta_2 x) + \dots + e^{\alpha_n x} (C_{2q-1} \cos \beta_n x + C_{2q} \sin \beta_n x).$$

4) (18.29) сипаттаушы теңдеудің түбірлері k еселі комплекс сандар болсын: $\lambda_0 = \alpha_0 \pm i\beta_0$. Онда мына функциялардың

$$e^{(\alpha_0 + i\beta_0)x}, xe^{(\alpha_0 + i\beta_0)x}, x^2 e^{(\alpha_0 + i\beta_0)x}, \dots, x^k e^{(\alpha_0 + i\beta_0)x}$$

нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, одан (18.27) теңдеудің $2k$ нақты сызықты тәуелсіз дербес (дара) шешімдерін аламыз:

$$e^{\alpha_0 x} \cos \beta_0 x, xe^{\alpha_0 x} \cos \beta_0 x, x^2 e^{\alpha_0 x} \cos \beta_0 x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha_0 x} \cos \beta_0 x, \\ e^{\alpha_0 x} \sin \beta_0 x, xe^{\alpha_0 x} \sin \beta_0 x, x^2 e^{\alpha_0 x} \sin \beta_0 x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha_0 x} \sin \beta_0 x. \quad (18.35)$$

Ескерту. $\lambda_0 = \alpha_0 - i\beta_0$ түбірі жаңа дербес (дара) шешімдер тудырмайды.

Мысал. 1. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар.

Шешуі. Берілген дифференциалдық теңдеу коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеу. Осы теңдеудің сипаттаушы теңдеуін құрайық, ол үшін y функцияның және оның y''' , y'' , y' туындыларын λ -ның сәйкес дәрежелеріне алмастырайық:

$$y''', y'', y': \lambda^3, \lambda^2, \lambda, \lambda^0 = 1.$$

Онда белгісізі λ болатын үшінші дәрежелі алгебралық теңдеу аламыз:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^0 = 0 \text{ немесе } \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Енді осы алгебралық теңдеуді шешейік: $\lambda^2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) = 0$, $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \times (\lambda - 2) = 0$. Осыдан сипаттаушы теңдеудің сипаттаушы түбірлерін табамыз:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі, сондықтан берілген дифференциалдық теңдеудің сызықты тәуелсіз дербес (дара) немесе іргелі (фундаментальды) шешімдерін табамыз:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x, y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}, y_3(x) = e^{\lambda_3 x} = e^{2x}.$$

Осы сызықты тәуелсіз дербес немесе іргелі шешімдерден құрылған олардың сызықты комбинациясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады: $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}$.

2. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңдар.

Шешуі. Берілген дифференциалдық сипаттаушы теңдеуін құрайық:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0.$$

Осы алгебралық теңдеуді шешейік: $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$. Осыдан $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3$. Демек, сипаттаушы теңдеудің $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3$ түбірлері еселі, ал $\lambda_1 = -1$ түбірі еселі емес. Сондықтан еселі емес $\lambda_1 = -1$ түбірге сәйкес келетін сызықты тәуелсіз дербес (дара) шешімдерінің біреуін (18.30) формуладан табамыз, яғни $y_1(x) = e^{-x}$, ал қалғандарын (18.32) формуладан табамыз:

$$y_2(x) = e^{3x}, y_3(x) = x e^{3x}.$$

Анықталған сызықты тәуелсіз дербес шешімдердің сызықты комбинациясы берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы болады:

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}.$$

3. $y^{IV} + y''' + 4y'' + 4y' = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі. Берілген дифференциалдық теңдеуге мына сипаттаушы теңдеу сәйкес келеді: $\lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$. Осыдан

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) + \lambda(\lambda^2 + 4) = 0, \lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4) = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2i,$$

$\lambda_4 = -2i$. Демек, сипаттаушы теңдеудің екі нақты шешімі бар және олар еселі емес: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$, ал қалған екеуі комплекс әртүрлі: $\lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i$. Еселі емес $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ сипаттаушы түбірлерге (18.30) формуладан екі сызықты тәуелсіз дербес шешім сәйкес келеді: $y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{-x}$.

Ал $\lambda_3 = 2i$ комплекс сипаттаушы түбірге (18.34) формуладан екі сызықты тәуелсіз дербес шешім сәйкес келеді (ескертуді қара):

$$y_3(x) = \cos 2x, y_4(x) = \sin 2x.$$

Сонымен анықталған $y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{-x}, y_3(x) = \cos 2x, y_4(x) = \sin 2x$ сызықты тәуелсіз дербес шешімдердің сызықты комбинациясы берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

4. $y^{IV} + 18y''' + 81y'' = 0$ дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі. Берілген дифференциалдық теңдеуге мына сипаттаушы теңдеу сәйкес келеді: $\lambda^4 + 18\lambda^3 + 81\lambda^2 = 0$. Осыдан $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = 3i, \lambda_3 = -3i, \lambda_4 = -3i$ сипаттаушы түбірлер. Демек, сипаттаушы түбірлер қос-қостан (екі) еселі. Сондықтан оларға сызықты тәуелсіз төрт дербес (дара) шешім сәйкес келеді (ескертуді қара): $y_1 = \cos 3x, y_2 = x \cos 3x, y_3 = \sin 3x, y_4 = x \sin 3x$. Ал осы дербес шешімдердің сызықты комбинациясы берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы болады:

$$\bar{y}_1 = C_1 \cos 3x + C_2 x \cos 3x + C_3 \sin 3x + C_4 x \sin 3x.$$

Сұрақтар.

1. n -ретті коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеудің анықтамасы.
2. n дәрежелі сипаттаушы көпмүшелік және оны құру.
3. Сипаттаушы теңдеуді құру.
4. Біртекті дифференциалдық теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері.
5. Вронскиан анықтауыш.
6. Біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің формуласы.
7. $y'' + ay' + cy = 0$ теңдеудің сипаттаушы түбірлері: 1) нақты әртүрлі; 2) нақты еселі; 3) комплекс болғандағы іргелі шешімдерін және жалпы интегралын жазыңдар.

Тапсырма. Төмендегі коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулердің 1) сызықты тәуелсіз (іргелі) шешімдерін; 2) жалпы интегралдарын (шешімдерін) табыңдар:

1. $y'' - y' - 12y = 0$; 2. $y'' + 7y' + 6y = 0$; 3. $y'' + 4y' + 4y = 0$;
4. $y'' - 4y' + 13y = 0$; 5. $y'' + 8y' = 0$; 6. $y'' + 25y = 0$;
7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

18.11. Коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу

Анықтама. Белгісіз функция және оның туындылары бойынша сызықты болатын n -ретті мына теңдеу:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (18.36)$$

n -ретті коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу деп аталады, мұндағы $a_i, 1, 2, \dots, n$ – нақты сандар, $f(x) \neq 0$ функция (a, b) аралықта үзіліссіз.

(18.36) коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің $y = y(x)$ жалпы шешімін табу үшін

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (18.37)$$

біртекті теңдеудің $\bar{y} = \bar{y}(x)$ жалпы шешімін табамыз, біз оны 18.10-тақырыпта қарастырғанбыз. Содан соң (18.36) біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дербес (дара) шешімін табамыз. Сонда

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x) \quad (18.38)$$

функция (18.36) біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі болады.

Коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің дара (дербес) шешімін жоғарыда айтылған Лагранж әдісі (тұрақтыны вариациялау әдісі) немесе **белгісіз коэффициенттер әдісі** деп аталатын әдістермен табуға болады.

Біз осы тақырыпта, (18.21) теңдеудің оң жағындағы $f(x)$ функцияның арнайы түрлеріне, яғни

$$f(x) = P_m(x)e^{ax}, \quad f(x) = e^{ax} [P_m^{(1)}(x)\cos \beta x + P_l^{(2)}(x)\sin \beta x] \quad (18.39)$$

болғанда, оның $y^* = y^*(x)$ дербес (дара) шешімін белгісіз коэффициенттер әдісімен табуды қарастыратын боламыз, мұндағы $P_m(x)$, $P_m^{(1)}(x)$, $P_l^{(2)}(x)$ сәйкес m, l -дәрежелі әртүрлі белгілі көпмүшеліктер, a - нақты, $\alpha + i\beta$ -комплекс сандар (18.37) дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуінің түбірлері. $P_m(x)e^{ax}$, $e^{ax} [P_m^{(1)}(x)\cos \beta x + P_l^{(2)}(x)\sin \beta x]$ – **квазикөпмүшеліктер** деп аталады.

(18.36) біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дара немесе дербес шешімін белгісіз коэффициенттер әдісімен іздестіреміз.

I. Тұрақты коэффициентті біртекті емес мына дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n = P_m(x)e^{ax}. \quad (18.40)$$

Бұл теңдеудің дербес (дара) шешімі оның оң жағының түріне ғана емес, сол сияқты оның сол жақ бөлігінің

$$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (18.41)$$

сипаттаушы теңдеуінің түбірі болуы мен болмауына, түбірі болса, еселігі қандай болуына да тәуелді.

Дербес шешімді табу үшін екі жағдайды қарастырамыз.

1-жағдай. Көрсеткіштік функциядағы a -саны (18.41) сипаттаушы теңдеудің түбірі болмасын, яғни $M(a) \neq 0$, мұндағы a -саны нақты, нөлге тең немесе комплекс сандар болуы мүмкін. Онда (18.36) біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дербес шешімін мына түрде іздестіреміз:

$$y^* = Q_m(x)e^{ax}, \quad (18.42)$$

мұндағы $Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + q_2x^{m-2} + \dots + q_{m-1}x + q_m$ – белгісіз көпмүшелік, яғни $q_i, i = \overline{0, m}$ – белгісіз коэффициенттер. $Q_m(x)$ белгісіз көпмүшелікті табу әдісі **белгісіз коэффициенттер әдісі** деп аталатын әдіспен табуға болады. (18.40) теңдеудің дербес шешімін **Лагранж әдісі** немесе **тұрақты санды вариациялау әдісімен** де шығаруға болады. Осы белгісіз көпмүшелікті, яғни $q_i, i = \overline{0, m}$ белгісіз коэффициенттерді белгісіз коэффициенттер әдісімен табу үшін:

1. Берілген дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін қандай түрде іздестіру керек екендігін табу керек, яғни m дәрежені және a -нақты санды табамыз әрі олар сипаттаушы теңдеудің түбірі болатынын немесе болмайтынын анықтаймыз.

2. (18.42) формуладағы функциядан 1-ден бастап n рет туынды аламыз;

3. Осы туындыларды және y^* функцияның өзін (18.39) теңдеуге қойып, теңдеудің екі жағын нөлге тең емес e^{ax} функцияға қысқартамыз. Сонда $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m$ белгісіз коэффициенттерге тәуелді теңдеу аламыз;

4. Теңдеудің сол жағындағы көпмүшеліктердің ұқсас мүшелерін жинақтаймыз;

5. Сонда теңдеудің сол жағындағы белгісіз коэффициенттерге тәуелді көпмүшелік пен оң жағындағы көпмүшелік бірдей m дәрежелі көпмүшеліктер болады. Оның сол жағындағы өрнек $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m$ белгісіз коэффициенттерге тәуелді m дәрежелі белгісіз көпмүшелік, ал оң жағындағы өрнек m дәрежелі белгілі көпмүшелік. Олардың (сол мен оң жақтағы көпмүшеліктер) тең дәрежелі x -терінің коэффициенттерін теңестіріп, $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m$ белгісіз коэффициенттерге тәуелді біртекті емес сызықты жүйе аламыз.

6. Жүйедегі $P(a) \neq 0$, сондықтан жүйенің тек бір ғана $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m$ шешімі бар. Осы жүйеден табылған $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m$

белгісіздердің мәндерін (18.42) формулаға қойып, (18.39) теңдеудің дербес шешімін табамыз.

1-мысал. $y'' + 2y' = (3x^2 + 2x + 9)e^x$ теңдеудің дербес (дара) шешімін белгісіз коэффициенттер әдісімен, содан соң жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі. 1. Берілген теңдеудің оң жағындағы квазикөпмүшелікті (18.40) теңдеудің оң жағындағы квазикөпмүшелікпен салыстырып, теңдеудің дербес шешімін қандай түрде іздестіру керек екендігін анықтаймыз: $m = 2$ -ге тең, яғни $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ екінші дәрежелі белгісіз көпмүшелік, мұндағы A, B, C – табу керек белгісіз көпмүшеліктің белгісіз коэффициенттері, ал $a = 1$ саны $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ сипаттаушы теңдеудің түбірі емес. Сонымен, берілген дифференциалдық теңдеудің дербес (дара) шешімін мына түрде іздестіреміз:

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

2. $y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x$ функциядан екі рет туынды алайық:

$$y^{*'} = (Ax^2 + Bx + C)e^x + (2Ax + B)e^x = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x,$$

$$y^{*''} = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x =$$

$$= (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x.$$

3. Анықталған $y^{*'}$, $y^{*''}$ туындыларды берілген теңдеуге қоямыз:

$$(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x + 2(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x =$$

$$= (3x^2 + 2x + 9)e^x.$$

Теңдеудің екі жағын e^x функцияға қысқартамыз:

$$(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C) + 2(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C) =$$

$$= (3x^2 + 2x + 9).$$

4. Теңдіктің сол жағындағы өрнектің ұқсас мүшелерін жинақтайық, сонда:

$$3Ax^2 + (8A + 3B)x + 2A + 4B + 3C = 3x^2 + 2x + 9.$$

5. Енді тең көпмүшеліктердің x -тің бірдей дәрежелерінің

$$\text{коэффициенттерін теңестірейік: } \begin{cases} 3A & = 3, \\ 8A + 3B & = 2, \\ 2A + 4B + 3C & = 9. \end{cases}$$

6. Осы жүйені шешіп, белгісіз коэффициенттерді табамыз: $A = 1$, $B = -2$, $C = 5$. Анықталған коэффициенттердің мәндерін

$y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x$ функцияға қойып, берілген дифференциалдық теңдеудің дара шешімін табамыз:

$$y^* = (x^2 + 2x + 5)e^x.$$

Енді теңдеудің жалпы шешімін табайық. Ол үшін: $k^2 + 2k = 0$, $k = 0$, $k = -2$. Сипаттаушы түбірлері нақты және әртүрлі, онда $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-2x}$ іргелі шешімдер, $\bar{y} = C_1 + C_2e^{-2x}$ функция біртекті $y'' + 2y' = 0$ теңдеудің жалпы интегралы, ал $y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2e^{-2x} + (x^2 + 2x + 5)e^x$ функция біртекті емес $y'' + 2y' = (3x^2 + 2x + 9)e^x$ теңдеудің жалпы интегралы.

2-жағдай. Көрсеткіштік функциядағы a -саны (18.41) сипаттаушы теңдеудің k ($k \geq 1$) еселі түбірі болсын, яғни $M(a) = 0$, мұндағы a -саны нақты, нөлге тең немесе комплекс сандар болуы мүмкін. Онда (18.36) біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дербес шешімін мына түрде іздестіреміз:

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{ax}, \quad (18.43)$$

мұндағы $Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + q_2x^{m-2} + \dots + q_{m-1}x + q_m$ белгісіз көпмүшелік, яғни q_i , $i = \overline{0, m}$ – белгісіз коэффициенттер.

2-мысал. $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$ белгісіз коэффициенттер әдісімен теңдеудің жалпы интегралын табыңдар.

Шешуі. Берілген біртекті емес теңдеудің біртекті теңдеуінің $\bar{y} = \bar{y}(x)$ жалпы шешімін табайық: $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$. Демек, сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты және еселі. Сондықтан $y'' + 8y' + 16y = 0$ біртекті теңдеудің $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = xe^{-4x}$ сызықты тәуелсіз шешімдері, ал $\bar{y} = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$ оның жалпы шешімі.

Енді біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дара шешімін іздестірейік. Берілген біртекті емес теңдеудің оң жағындағы квазикөпмүшеліктен: $m = 0$, $P_0(x) = -10$, $\alpha = -4$, $\beta = 0$. Онда $\alpha + i\beta = -4$ ($\alpha = -4$, $\beta = 0$), $k = 2$ еселі. Демек, дара шешімді $y^* = Ax^2e^{-4x}$ түрінде іздестіреміз, мұндағы A – нөл ($n = 0$) дәрежелі белгісіз көпмүшелік. A – санды табу үшін $y^* = Ax^2e^{-4x}$ функциядан туындыларды табайық:

$$y^{*'} = (-4Ax^2 + 2Ax)e^{-4x}, \quad y^{*''} = (16Ax^2 - 16Ax + 2A)e^{-4x}.$$

Анықталған y^* , $y^{*'}$, $y^{*''}$ функцияларды берілген теңдеуге қояйық:

$$(16Ax^2 - 16Ax + 2A)e^{-4x} + 8(-4Ax^2 + 2Ax)e^{-4x} + 16Ax^2e^{-4x} = -10e^{-4x}.$$

Осыдан $2A = -10$, $A = -5$. Сонымен, іздестіріп отырған біртекті емес теңдеудің дара шешімі мына түрде: $y^* = -5x^2e^{-4x}$, ал оның жалпы шешімі мына түрде анықталады:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x) = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x} - 5x^2e^{-4x}.$$

II. Тұрақты коэффициентті біртекті емес мына дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = \\ = e^{\alpha x} [P_m^{(1)}(x)\cos \beta x + P_l^{(2)}(x)\sin \beta x]. \end{aligned} \quad (18.44)$$

Бұл теңдеудің дербес (дара) шешімі оның оң жағының түріне ғана емес сол сияқты, оның сол жақ бөлігінің

$$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (18.45)$$

сипаттаушы теңдеуінің түбірі болуы мен болмауына, түбірі болса еселігі қандай болуына тәуелді.

1-жағдай. Егер $\alpha + i\beta$ -саны (18.45) сипаттаушы теңдеудің түбірі болмаса, онда (18.44) біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дербес шешімін мына түрде іздестіреміз: $y^* = e^{\alpha x} [P_s^{(1)}(x)\cos \beta x + P_s^{(2)}(x)\sin \beta x]$, мұндағы $P_s^{(1)}(x)$, $P_s^{(2)}(x)$ – сәйкес $s = \max\{m, l\}$ дәрежелі әртүрлі белгісіз көпмүшеліктер.

3-мысал. $y'' + 4y = 3x \cos x$ теңдеудің жалпы шешімін табыңдар.

Шешуі. Алдымен біртекті теңдеудің $\bar{y} = \bar{y}(x)$ жалпы шешімін табайық:

$$k^2 + 4 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 2i, \quad \bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Енді (18.44) біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дара шешімін іздестірейік.

Берілген теңдеудің оң жағындағы квазикөпмүшеліктен: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1^{(1)}(x) = x$, $P_l^{(2)}(x) = 0$. Онда $\alpha + i\beta = i$ -комплекс саны сипаттаушы

теңдеудің түбірі болмайды, яғни $k = 0$. Сондықтан, $y^* = y^*(x)$ дара шешімді мына түрде іздестіреміз: $y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$, мұндағы A, B, C, D – белгісіз коэффициенттер. $y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$ функцияның екінші ретті туындысын табайық: $y^{*'} = (Cx + D + A)\cos x + (-Ax + C - B)\sin x$,

$$y^{*''} = (-Ax + 2C - B)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x.$$

Анықталған y^* , $y^{*''}$ функцияларды берілген теңдеуге қойып, $\cos x$, $\sin x$ бойынша топтастырайық:

$$(3Ax + 3B + 2C)\cos x + (3Cx + 3D - 2A)\sin x = 3x\cos x.$$

Соңғы теңдіктің $x\cos x$, $\cos x$, $x\sin x$, $\sin x$ функцияларының коэффициенттерін теңестірейік:

$$\begin{cases} 3A = 3, \\ 3B + 2C = 0, \\ 3C = 0, \\ 3D - 2A = 0. \end{cases} \quad \text{Осыдан}$$

$A = 1, B = 0, C = 0, D = \frac{2}{3}$. Дербес шешімді мына түрде анықтадық:

$y^* = x\cos x + \frac{2}{3}\sin x$. Сонымен берілген теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталды:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x\cos x + \frac{2}{3}\sin x.$$

2-жағдай. Егер $\alpha + i\beta$ -саны (18.45) сипаттаушы теңдеудің k еселі түбірі болса, онда (18.44) біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дербес шешімін мына түрде іздестіреміз: $y^* = x^k e^{\alpha x} [P_s^{(1)}(x)\cos \beta x + P_s^{(2)}(x)\sin \beta x]$, мұндағы $P_s^{(1)}(x)$, $P_s^{(2)}(x)$ – сәйкес $s = \max\{m, l\}$ дәрежелі әртүрлі белгісіз көпмүшеліктер.

4-мысал. $y'' + 9y = 9\cos 3x + 16\sin 3x$ теңдеудің жалпы шешімін табыңдар.

Шешуі. Алдымен біртекті теңдеудің $\bar{y} = \bar{y}(x)$ жалпы шешімін табайық:

$$k^2 + 9 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 3i, \quad \bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Енді (18.44) біртекті емес теңдеудің $y^* = y^*(x)$ дара шешімін іздестірейік. Берілген теңдеудің оң жағындағы квазикөпмүшеліктен: $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $P_0^{(1)}(x) = 9$, $P_0^{(2)}(x) = 16$. Онда $\alpha + i\beta = 3i$ комплекс саны сипаттаушы теңдеудің бір еселі түбірі болады, яғни $k = 1$. Сондықтан, $y^* = y^*(x)$ дара шешімді мына түрде іздестіреміз: $y^* = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$, мұндағы A, B – белгісіз коэффициенттер. $y^* = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$, функцияның екінші ретті туындысын табайық: $y^{*'} = (3Bx + A) \cos 3x + (-3Ax + B) \sin 3x$,

$$y^{*''} = (-9Ax + 6B) \cos 3x + (-9Bx - 6A) \sin 3x.$$

Анықталған y^* , $y^{*''}$ функцияларды берілген теңдеуге қойып, $\cos 3x$, $\sin 3x$ бойынша топтастырайық: $6B \cos 3x - 6A \sin 3x = 9 \cos 3x + 16 \sin 3x$.

Соңғы теңдіктің $\cos 3x$, $\sin 3x$ функцияларының коэффициенттерін теңестірейік: $\begin{cases} 6B = 9, \\ -6A = 16. \end{cases}$ Сонда $B = \frac{3}{2}$, $A = -\frac{8}{3}$. Дербес шешімді мына түрде анықтадық: $y^* = x(-\frac{8}{3} \cos 3x + \frac{3}{2} \sin 3x)$. Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталады:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x(-\frac{8}{3} \cos 3x + \frac{3}{2} \sin 3x).$$

Ескерту. Коэффициенттері тұрақты 2-ретті біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (18.46)$$

мұндағы p, q – тұрақты, $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ немесе $f(x) = e^{\alpha x} [P_m^{(1)}(x) \cos \beta x + P_l^{(2)}(x) \sin \beta x]$ арнайы түрлердің бірі. Осы теңдеудің дара шешімдерін іздестірудегі жағдайларды қарастырайық.

1) Егер $a = 0$ немесе $f(x) = P_m(x)$ болса, онда (18.46) теңдеудің дара шешімі мына түрде анықталады: $y^* = x^k (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m)$, мұндағы k ($k \geq 0$) сипаттауыш теңдеудің еселі түбірі;

2) Егер $f(x) = P_m(x)e^{ax}$ болса, онда (18.46) теңдеудің дара шешімі мына түрде анықталады: $y^* = x^k e^{ax} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m)$, мұндағы k ($k \geq 0$) сипаттаушы теңдеудің еселі түбірі;

3) Егер $\alpha = 0, m = 0, l = 0$ немесе $f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ болса, онда (18.46) теңдеудің дара шешімі мына түрде анықталады:

$$y^* = x^k (A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x),$$

мұндағы k ($k \geq 0$) сипаттаушы теңдеудің еселі түбірі;

Егер (18.46) теңдеудің оң жағы $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_r(x)$ болса, онда (18.46) теңдеудің дара шешімі $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ функцияларға сәйкес келетін $y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*$ дара шешімдердің қосындысынан анықталады:

$$y^* = y_1^* + y_2^* + \dots + y_r^*.$$

Сұрақтар.

1. n -ретті коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің түрі.

2. n -ретті коэффициенттері тұрақты біртекті емес теңдеудің жалпы шешімінің түрі.

3. $f(x) = P_2(x)e^{ax}$, мұндағы a – нақты саны сипаттаушы теңдеудің еселі түбірі болмаса, екінші ретті біртекті емес теңдеудің дара (дербес) шешімін қандай түрде іздестіреміз?

4. $f(x) = -3e^{2x}$, мұндағы $a = 2$ – нақты саны сипаттаушы теңдеудің еселі түбірі болмаса, екінші ретті біртекті емес теңдеудің дара (дербес) шешімін қандай түрде іздестіреміз?

5. $f(x) = (2x - 5)e^{-x}$, мұндағы $a = -1$ – нақты саны сипаттаушы теңдеудің еселі түбірі болмаса, екінші ретті біртекті емес теңдеудің дара (дербес) шешімін қандай түрде іздестіреміз?

6. $f(x) = P_1(x)e^{ax}$, мұндағы a – нақты саны сипаттаушы теңдеудің $k = 2$ еселі түбірі болса, екінші ретті біртекті емес теңдеудің дара (дербес) шешімін қандай түрде іздестіреміз?

Тапсырма. Төмендегі теңдеулердің жалпы шешімін табыңдар. Ал оның дербес (дара) шешімін белгісіз коэффициенттер әдісімен табыңдар:

1. $y'' + 2y' + 5y = e^{-2x}(x^2 - 7x + 2)$; 2. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$;
3. $y'' - 4y' - 5y = (27x - 39)e^{-4x}$; 4. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}$;
5. $y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$; 6. $y'' + 5y' = 50 \cos 5x$;
7. $y'' - 4y' + 5y = 2 \cos x + 6 \sin x$.

18.12. Коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуді жаңа әдіспен шешу

Білім беру стандартына сай оқыту үдерісінде қолданбалы есептерді шығаруда жиі кездесетін ұтымды әдістерді іздеп табу, бүгінгі күннің талабы мен қажеттілігіне айналып отыр. Педагогикада, **оқытушының инновациялық іс-әрекеті** деп оқыту үдерісіне қатысты өзінің немесе басқаның ұтымды жаңа идеясын, әдіс-тәсілін дер кезінде игеріп, оны оқыту үдерісіне енгізуді айтамыз.

Оқытушы жаңа білімді тек игеріп, өзі тұтынушы ретінде ғана емес, оны студенттерге насихаттаушы ретінде де қызмет жасауды қажет етеді. Сондықтан, инновациялық іс-әрекеттер мен деректерді оқыту үдерісіне енгізуді, педагогтың басты міндетіне айналдыру абзал. Осындай инновациялық іс-әрекеттің авторы әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-нің профессоры Ж. Сүлейменов [20].

Осы тақырыпта профессор Ж. Сүлейменовтің инновациялық әдісін қарастыратын боламыз. Ол әдіс – коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеудің дара (дербес) шешімін іздестіру, **бұл әдіс бұрыннан қалыптасқан әдістен өзге, жаңа әдіс**. Бұрыннан қалыптасқан белгісіз коэффициенттер әдісі студенттерге көп уақытты, әрі көптеген математикалық операцияларды орындауды қажет етеді. Себебі, онда кем дегенде төмендегі операцияларды орындауды қажет етеді:

- дара шешімді қандай түрде (коэффициенттері белгісіз квазикөпмүшеліктер) іздестіру керектігін анықтаймыз;
- квазикөпмүшеліктерден қажетті туындыларды табамыз;
- туындыларды дифференциалдық теңдеуге қоямыз;
- ұқсас мүшелерін жинақтаймыз;
- тең мүшелердің белгісіз коэффициенттерін теңестіреміз;
- теңестіру нәтижесінде жүйе құрамыз;
- жүйені шешеміз;
- құрылған жүйедегі белгісіз коэффициенттерді тауып, дара шешімді табамыз.

Студенттердің туындыны табуын, жақшаларды ашып ұқсас мүшелерді жинақтауын, жүйе құруын, жүйені шешуін, т.б., яғни олардың әртүрлі операцияларды орындаудағы математикалық қателерін ескерсек, онда қандай шешімді тапқанымызға өзіміз-ақ күмән келтіреміз. Табылған шешімді тексеру, одан да көп уақытты қажет етеді.

Сондықтан, осы кемшіліктерді жою мақсатында профессор Ж. Сүлейменов жаңа әдісті тауып, университет оқыту үдерісіне енгізіп, барлық мамандықтарға көп жылдан бері жаңа әдісті қолданып келеді. Жаңа әдістің бұрыннан қалыптасқан дәстүрлі әдістен ұтымдылығы аз операция жасау нәтижесінде, яғни туынды мен анықтауыш амалдары арқылы аз уақыт жұмсалып, дара шешімнің табылатындығында. Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-да «Дифференциалдық теңдеулер» пәні көптеген мамандықтарға жеке пән ретінде 3 кредит (2 сағ дәріс, 1 сағ тәжірибе) бөлінген. Егер осы мамандықтарға Ж. Сүлейменовтің әдісін оқу үдерісіне пайдалансақ, онда біз біріншіден, көп уақыт үнемдер едік, екіншіден, болашақ жас мамандардың білімін артыруға тиімді болар еді. Оқу үдерісіне тікелей қатысы бар осындай иновациялық әдістер баршылық және олар заман талабына сай келетініне ешкім қарсы бола қоймас деп ойлаймыз. Десек те, жоғары оқу орындарының басшылары мен тікелей «Дифференциалдық теңдеулер» пәнін жүргізетін оқытушылар ондай инновациялық әдіс-тәсілдерді естіп білсе де, ол әдіс-тәсілдерді меңгеріп, оқыту үдерісіне пайдалануға көңіл бөлмей келеді немесе ескі әдістермен оқыту үдерісін жалғастыра бергенді тиімді деп есептейді, олай ойлау өкінішті-ақ!

Біз осы әдісті пайдаланып, екінші ретті коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дара шешімін табу мақсатында жаңа әдіске алгоритм құрып, оны дара шешімді табуға пайдаландық [20], [22]. Осы әдіспен дифференциалдық теңдеудің дара шешімін табу үшін төмендегі алгоритмді құрайық [20]:

1-қадам. Дифференциалдық теңдеудің мына түрде болатынын тексереміз:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = (Q(x)\cos bx + R(x)\sin bx)e^{ax}, \quad (18.47)$$

мұндағы $Q(x)$, $R(x)$ сәйкес m_1 , m_2 -дәрежелі нақты көпмүшеліктер, a мен b – нақты сандар.

2-қадам. Мынадай ауыстыру (алмастыру) жасаймыз:

$$y = [u(x) \cos bx + v(x) \sin bx] e^{ax}. \quad (18.48)$$

Сонда

$$p_0 w + p_1 w' + p_2 w'' = P(x), \quad (18.49)$$

мұнда $p_j = \frac{1}{j!} M^{(j)}(\bar{\alpha})$, $j = \overline{0, 2}$, $M(\lambda) \equiv a_0 \lambda^2 - a_1 \lambda + a_2$ – сипаттаушы

көпмүшелік, $M^{(j)}(\lambda) = \frac{d^j M(\lambda)}{d\lambda^j}$, $\lambda = \bar{\alpha}$, $\alpha = a + ib$, $w(x) = u(x) + iv(x)$,

$P(x) = Q(x) + iR(x) - m = \max(m_1, m_2)$ -дәрежелі көпмүшелік, $m \leq 2$.

3-қадам. Егер $M(\bar{\alpha}) = p_0 \neq 0$ болса, онда

$$w(x) = \frac{1}{p_0^3} \begin{vmatrix} P(x) & p_1 & p_2 \\ P'(x) & p_0 & p_1 \\ P''(x) & 0 & p_0 \end{vmatrix} = u(x) + iv(x). \quad (18.50)$$

4-қадам. (18.47) теңдеудегі дара шешім (18.48) түрде болады.

Ескерту. 1) Егер $p_0 = 0$ болса, онда

$$w'(x) = \frac{1}{p_1^2} \begin{vmatrix} P(x) & p_2 \\ P'(x) & p_1 \end{vmatrix} \quad (18.51)$$

болады да, $w(x) = x(u_1(x) + iv_1(x))$. Дара шешім (18.48) формула арқылы табылады.

2) Егер $p_0 = p_1 = 0$ болса, онда

$$w''(x) = \frac{1}{p_2} P(x), \quad w(x) = x^2 (u_2(x) \cos bx + v_2(x) \sin bx) e^{ax}$$

түрінде табылады.

Мысал. Төменде коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін [20] оқулықта келтірілген жаңа әдіспен, содан соң, сол теңдеуді бұрыннан қалыптасқан әдіспен шешейік. Осы екі әдісті салыстырып әдістердің қайсысы тиімді, қайсысы тиімсіз емес екенін анықтайық. Алдымен,

1) жалпы шешімді табайық;

2) жоғарыда келтірілген алгоритімді пайдаланып, дара шешімді табайық;

3) дара шешімді бұрыннан қалыптасқан белгісіз коэффициенттер әдісімен шешейік.

1) Алдымен, дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табайық:

$$y'' - 6y' + 13y = 4xe^{3x} \sin 2x. \quad (18.52)$$

Ол үшін

$$y'' - 6y' + 13y = 0 \quad (18.53)$$

біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табамыз. Бұл дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, оны $M(\lambda)$ таңбамен таңбамен белгілейік, яғни $M(\lambda) \equiv \lambda^2 - 6\lambda + 13$. Оның түбірлері әртүрлі комплекс сандар: $\lambda_{1,2} = a \pm ib = 3 \pm 2i$. Сондықтан (18.53) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$\bar{y} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{3x},$$

мұндағы C_1 мен C_2 – еркін тұрақтылар.

Енді коэффициенттері тұрақты сызықтық біртекті емес (18.52) дифференциалдық теңдеудің дара шешімін табайық.

2) **Ж. Сүлейменовтің әдісі.** Ж. Сүлейменовтің [20], [22] оқулығын пайдаланылып, дербес шешімді табудың төмендегі алгоритмі құрылды және сол алгоритм бойынша дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі табылады.

1-қадам. Ол үшін (18.52) теңдеудің оң жағы $(Q(x)\cos bx + R(x)\sin bx)e^{ax}$ түрінде болатынын тексереміз. Сонда $Q(x)=0$, $m_1=0$, $R(x)=4x$, $m_2=1$, $m = \max(m_1, m_2) = \max(0,1)=1$, $\alpha = a + ib = 3 + 2i$, $\bar{\alpha} = 3 - 2i$, $P(x) = Q(x) + iR(x) = iR(x) = 4ix$.

2-қадам. (18.48) ауыстыруды енгіземіз:

$$y_1 = [u(x)\cos bx + v(x)\sin bx] e^{ax}.$$

Сонда

$$p_0 w + p_1 w' + p_2 w'' = 4ix, \quad (18.54)$$

мұндағы $w(x) = u(x) + iv(x)$, p_j – коэффициенттер 2-қадамдағы формулалардан табылады, $j = 0, 2$:

$$M(\lambda) \equiv \lambda^2 - 6\lambda + 13, \quad M'(\lambda) = 2\lambda - 6, \quad M''(\lambda) = 2,$$

$$p_0 = M(\bar{\alpha}) = (3 - 2i)^2 - 6(3 - 2i) + 13 = 0, \quad p_1 = \frac{1}{1!} M'(\bar{\alpha}) = 2(3 - 2i) - 6 = -4i,$$

$$p_2 = \frac{1}{2!} M''(\bar{\alpha}) = \frac{2}{2!} = 1.$$

3-қадам. Демек, (18.54) теңдеу мына түрде болады:

$$-4iw' + w'' = 4ix,$$

Бұдан $w'(x)$ туынды (18.51) формуладан анықталады:

$$w'(x) = \frac{1}{p_1^2} \begin{vmatrix} P(x) & p_2 \\ P'(x) & p_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-4i)^2} \begin{vmatrix} 4ix & 1 \\ 4i & -4i \end{vmatrix} = -x + \frac{1}{4}i. \quad (18.55)$$

$w' = -x + \frac{1}{4}i$. Онда, $w = -\frac{x^2}{2} + i\frac{1}{4}x$, мұндағы $w = u + iv$. Осыдан

$$u = -\frac{1}{2}x^2, \quad v = \frac{1}{4}x.$$

4-қадам. (18.52) дифференциалдық теңдеудің дара шешімі мына түрде болады:

$$y_1 = \left[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x \right] e^{3x}.$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталады:

$$y = \bar{y} + y_1 = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{3x} + \left[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x \right] e^{3x}.$$

3) Белгісіз коэффициенттер әдісі (бұрыннан қалыптасқан әдіс). Берілген теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 4xe^{3x} \sin 2x$ функцияны $f(x) = (Q(x)\cos bx + R(x)\sin bx)e^{ax}$ функциямен салыстырсақ, мұндағы $Q(x) = 0$, $m_1 = 0$, $R(x) = 4x$, $m_2 = 1$, $m = \max(m_1, m_2) = \max(0, 1) = 1$, $\alpha = a + ib = 3 + 2i$, $\bar{\alpha} = 3 - 2i$. Демек, $a = 3 \pm 2i$ саны сипаттамалық $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ теңдеудің түбірі болады, яғни $k = 1$. Сондықтан, дербес шешімді мына түрде іздестіретін боламыз:

$$\begin{aligned} y^*(x) &= x[(Ax + B)e^{3x} \sin 2x + (Cx + D)e^{3x} \cos 2x] = \\ &= (Ax^2 + Bx)e^{3x} \sin 2x + (Cx^2 + Dx)e^{3x} \cos 2x, \end{aligned}$$

мұндағы A, B, C, D – белгісіз коэффициенттер. Ендігі біздің мақсат осы белгісіз коэффициенттерді табу. Енді $y^*(x)$ функцияның $y^{*'}(x)$, $y^{*''}(x)$ туындыларын тауып, функцияның өзін және олардың туындыларын берілген теңдеуге қоямыз. Туындыларды табайық:

$$\begin{aligned}
y' * (x) &= (2Ax + B)e^{3x} \sin 2x + 3(Ax^2 + Bx)e^{3x} \sin 2x + 2(Ax^2 + Bx)e^{3x} \cos 2x + \\
&+ (2Cx + D)e^{3x} \cos 2x + 3(Cx^2 + Dx)e^{3x} \cos 2x - 2(Cx^2 + Dx)e^{3x} \sin 2x = \\
&= (2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx - 2Cx^2 - 2Dx)e^{3x} \sin 2x + \\
&+ (2Ax^2 + 2Bx + 2Cx + D + 3Cx^2 + 3Dx)e^{3x} \cos 2x = \\
&= [(3A - 2C)x^2 + (2A + 3B - 2D)x + B]e^{3x} \sin 2x + \\
&+ [(2A + 3C)x^2 + (2B + 2C + 3D)x + D]e^{3x} \cos 2x, \\
y'' &= [2(3A - 2C)x + (2A + 3B - 2D)]e^{3x} \sin 2x + \\
&+ [3(3A - 2C)x^2 + 3(2A + 3B - 2D)x + 3B]e^{3x} \sin 2x + \\
&+ [2(3A - 2C)x^2 + 2(2A + 3B - 2D)x + 2B]e^{3x} \cos 2x + \\
&+ [2(2A + 3C)x + (2B + 2C + 3D)]e^{3x} \cos 2x + \\
&+ [3(2A + 3C)x^2 + 3(2B + 2C + 3D)x + 3D]e^{3x} \cos 2x + \\
&+ [-2(2A + 3C)x^2 - 2(2B + 2C + 3D)x - 2D]e^{3x} \sin 2x.
\end{aligned}$$

Енді 13-ті $y^*(x) = (Ax^2 + Bx)e^{3x} \sin 2x (Cx^2 + Dx)e^{3x} \cos 2x$ функцияға,
ал - 6 - ны $y' * (x) = [(3A - 2C)x^2 + (2A + 3B - 2D)x + B]e^{3x} \sin 2x +$
 $+ [(2A + 3C)x^2 + (2B + 2C + 3D)x + D]e^{3x} \cos 2x$ функцияға көбейтіп,
 $y'' = [2(3A - 2C)x + (2A + 3B - 2D)]e^{3x} \sin 2x +$
 $+ [3(3A - 2C)x^2 + 3(2A + 3B - 2D)x + 3B]e^{3x} \sin 2x +$
 $+ [2(3A - 2C)x^2 + 2(2A + 3B - 2D)x + 2B]e^{3x} \cos 2x +$
 $+ [2(2A + 3C)x + (2B + 2C + 3D)]e^{3x} \cos 2x +$
 $+ [3(2A + 3C)x^2 + 3(2B + 2C + 3D)x + 3D]e^{3x} \cos 2x +$
 $+ [-2(2A + 3C)x^2 - 2(2B + 2C + 3D)x - 2D]e^{3x} \sin 2x$

функцияға қосайық, сонда берілген дифференциалдық теңдеудің сол жағындағы өрнекті аламыз. Осы өрнекті $4xe^{3x} \sin 2x$ функцияға теңестірсек, A, B, C, D белгісіз коэффициенттері бар теңдеу аламыз:

$$\begin{aligned}
&[2(3A - 2C)x + (2A + 3B - 2D)]e^{3x} \sin 2x + \\
&+ [3(3A - 2C)x^2 + 3(2A + 3B - 2D)x + 3B]e^{3x} \sin 2x + \\
&+ [2(3A - 2C)x^2 + 2(2A + 3B - 2D)x + 2B]e^{3x} \cos 2x + \\
&+ [2(2A + 3C)x + (2B + 2C + 3D)]e^{3x} \cos 2x +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ [3(2A+3C)x^2 + 3(2B+2C+3D)x + 3D]e^{3x} \cos 2x + \\
 &+ [-2(2A+3C)x^2 - 2(2B+2C+3D)x - 2D]e^{3x} \sin 2x - \\
 &- 6 [(3A-2C)x^2 + (2A+3B-2D)x + B]e^{3x} \sin 2x - \\
 &- 6 [(2A+3C)x^2 + (2B+2C+3D)x + D]e^{3x} \cos 2x + \\
 &+ 13(Ax^2 + Bx)e^{3x} \sin 2x + 13(Cx^2 + Dx)e^{3x} \cos 2x = 4xe^{3x} \sin 2x.
 \end{aligned}$$

Енді A, B, C, D белгісіздерді табу үшін, соңғы теңдіктің оң мен сол жақтарындағы $e^{3x} \sin 2x$, $e^{3x} \cos 2x$, $xe^{3x} \sin 2x$, $xe^{3x} \cos 2x$ функциялардың коэффициенттерін теңестірейік:

$$e^{3x} \sin 2x: 2A + 3B - 2D + 3B - 2D - 6B = 0,$$

$$e^{3x} \cos 2x: 2B + 2B + 2C + 3D + 3D - 6D = 0,$$

$$xe^{3x} \sin 2x: 6A - 4C + 6A + 9B - 6D - 4B - 4C - 6D - 12A - 18B + 12D + 13B = 4,$$

$$xe^{3x} \cos 2x: 4A + 6B - 4D + 4A + 6C + 6B + 6C + 9B - 12B - 12C - 18D + 13D = 0.$$

Сонымен, осыдан A, B, C, D белгісіздерді бар төрт теңдеулі жүйе

$$\text{аламыз: } \begin{cases} A - 2D = 0, \\ 2B + C = 0, \\ -8C = 4, \\ 8A = 0. \end{cases}$$

Сонда $A = 0, D = 0, C = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{4}$. Анықталған белгісіз

коэффициенттерді $y^*(x) = (Ax^2 + Bx)e^{3x} \sin 2x + (Cx^2 + Dx)e^{3x} \cos 2x$ функцияға қойып, берілген дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табамыз:

$$y^* = \left[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right] e^{3x}.$$

Ал функция

$$y = \bar{y} + y^* = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{3x} + \left[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x \right] e^{3x}$$

берілген дифференциал теңдеудің жалпы шешімі болады.

Сонымен, бір теңдеуді екі әдіспен шешкен соң, оларды салыстырып, қай әдістің тиімді екенін оқырман қауым дұрыс шешімге келе алады деп ойлаймын. Жоғарыда қысқаша баяндалған жаңа әдіс [20] оқулықта толық баяндалған.

18.13. Дифференциалдық теңдеулердің түрлері мен аталуы және оларды шешу әдістері

Теңдеудің түрлері	Теңдеудің аты	Теңдеуді шешу әдісі
1	2	3
1. $y' + p(x)y = q(x)$. 2. $y' = P(x)y + Q(x)y^n$.	Сызықтық (бірінші ретті) дифференциалдық теңдеу. Бернулли теңдеуі.	1. $y = v(x) \cdot u(x)$ – ауыстыру (алмастыру) (Бернулли) әдісі. 2. Лагранждың тұрақтыны вариациялау әдісі. $z = y^{n-1}$ – ауыстыру (алмастыру) әдісі.
3. $y^{(n)} = f(x)$, $f(x) \in C(a, b)$. 4. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$. 5. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 4. $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	Реті төмендетілетін жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер: Белгісіз функцияның жоғарғы ретті туындысы белгілі үзіліссіз функция. Белгісіз функция еңбейтін туындыларымен оның алғашқы дифференциалдық теңдеу. Белгісіз функция мен оның туындыларына қатысты біртекті дифференциалдық теңдеу. Тәуелсіз айнымалы жоқ дифференциалдық теңдеу.	$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$, ... $y = \int \dots \int f(x)dx \dots dx +$ $+ \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n$. $y^{(k)} = z(x), \dots, y^{(k+1)} = z', \dots,$ $y^{(n)} = z^{(n-k)}$ -ауыстыру әдісі. $y' = y(x) \cdot z(x), y'' = y(z^2 + z')$, $y''' = y(z^3 + 3z \cdot z' + z'')$, ...- ауыстыру әдісі $y' = z(y), y'' = z \cdot z'_y$, $y''' = z(z' + z \cdot z')$, ...- ауыстыру әдісі.
6. $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$	Коэффициенттері тұрақты біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеу. n-ретті тұрақты коэффициентті біртекті	Эйлер әдісі, сипаттаушы теңдеудің түбірлері арқылы.

$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0.$	сызықты дифференциалды теңдеу. 1-пункттегі дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеуі.	Егер сипаттаушы теңдеудің түбірлері:
--	--	--------------------------------------

18.14. Коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеудің дара шешімін табудың жаңа әдістемелік алгоритмі [20]

Қадам реті	Не істеу керектігі	Түсініктемелер
1	2	3
1.	$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = (Q(x) \cos bx + R(x) \sin bx) e^{ax}$ (1) түрінде болатынына көз жеткізу.	$Q(x), R(x)$ – сәйкес m_1, m_2 - дәрежелі нақты көпмүшеліктер, $\alpha = a + ib$.
2.	$y = [u(x) \cos bx + v(x) \sin bx] e^{ax}$ (2)	$M(\lambda) \equiv a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$ – сипаттаушы көпмүшелік. $p_j = \frac{1}{j!} M^{(j)}(\bar{\alpha}), j = \overline{0, 2},$
3.	$p_0 w + p_1 w' + p_2 w'' = P(x),$ (3) 1) Егер $M(\bar{\alpha}) = p_0 \neq 0$ болса, онда	$M^{(j)}(\lambda) = \frac{d^j M(\lambda)}{d\lambda^j},$ $\lambda = \bar{\alpha}, w(x) = u(x) + iv(x),$ $P(x) = Q(x) + iR(x)$ –
4.	$w(x) = \frac{1}{p_0^3} \begin{vmatrix} P(x) & p_1 & p_2 \\ P'(x) & p_0 & p_1 \\ P''(x) & 0 & p_0 \end{vmatrix} =$ $u(x) + iv(x).$ (4) Дара шешім (2) түрде жазылады. 2) Егер $p_0 = 0$ болса, онда $w'(x) = \frac{1}{p_1^2} \begin{vmatrix} P(x) & p_2 \\ P'(x) & p_1 \end{vmatrix}$ (5) болады да, $w(x) = x(u_1(x) + iv_1(x)).$ Дара шешім (2) түрде жазылады. 3) Егер $p_0 = p_1 = 0$ болса, онда $w''(x) = \frac{1}{p_2} P(x).$ Осыдан $w(x) = x^2 (u_2(x) \cos bx + v_2(x) \sin bx) e^{ax}$ түрінде табылады.	$m = \max(m_1, m_2)$ – дәрежелі көпмүшелік, $m \leq 2.$

19. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ

19.1. Комбинаторика элементтері

Қосынды ережесі. Егер A объектісі m тәсілдерімен, ал B объектісі басқа n тәсілдермен таңдалса және A мен B объектілері қиылыспайтын болса, онда не « A » не « B » таңдауы $m+n$ тәсілдермен таңдалады.

Көбейтінді ережесі. Егер A объектісі m тәсілдермен таңдалса және осы таңдаулардың әрқайсысынан кейін B объектісі n тәсілдермен таңдалса, онда реттелген $\{A, B\}$ жұбын таңдау mn тәсілдерімен таңдалады.

Мысал. Кітап сөресінде алгебраның 20, ықтималдықтар теориясының 12, математикалық анализдің 7, әдебиеттің 25 кітаптары тұр. Математиканың кітабын қанша тәсілмен таңдауға болады?

Шешуі. Алгебраның немесе ықтималдықтар теориясының, немесе математикалық анализдің кітабын таңдауға болатын тәсілдердің санын табамыз. Алгебарының кітабын 20 тәсілмен, ықтималдықтар теориясының – 12 тәсілмен және математикалық анализдің – 7 тәсілмен таңдауға болады. Бұл таңдаулар қиылыспайды. Сондықтан қосынды ережесі бойынша математиканың кітабын $n=20+12+7=39$ тәсілдермен таңдауға болады.

Мысал. Сандағы цифрлар қайталанбайтын болса, 1, 3, 5 цифрларынан үш орынды қанша сан жасауға болады?

Шешуі. Жүздіктің орнына үш цифрдың кез келгенін қоямыз. Әрбір осындай таңдаудан кейін ондықтың орнына қалаған екі цифрдың кез келген біреуін қоюға болады, яғни 135, 153, 315, 351, 513, 531. Сонымен, әртүрлі 3 саннан 3 орынды 6 сан жазуға болады.

Анықтама. Әртүрлі элементтерден құралуы міндетті емес $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ тізбек m ұзындықты комбинация деп аталады.

Егер $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ және $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ тізбегінің ең болмағанда бір i үшін x_i элемент y_i -ден өзгеше болса, онда екі комбинация әртүрлі деп аталады, $i = 1, \dots, m$.

n элементтен тұратын жиын қарастырайық. Қарастырып отырған жиын элементінен m ұзындықты комбинация құрайық. Комбинация элементтері қайталануы мүмкін.

Анықтама. n элементтен әрқайсысы m -нен жасалған орналастырулар саны деп $\frac{n!}{(n-m)!}$ санын айтамыз және ол A_n^m таңбамен белгіленеді, яғни

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m+1)) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad (19.1)$$

мұндағы $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ – эн факториал деп оқылады, n -натурал сан, яғни $n!$ -деп 1-ден n -ге дейінгі натурал сандардың көбейтіндісін айтамыз.

Егер $n = 8$, $m = 3$ болса, онда орналастырулар санын (19.1) формуланы пайдаланып есептейміз:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$$

Анықтама. n элементтен n -нен жасалған орналастырулар санын алмастырулар саны дейміз және ол $P_n = A_n^n$ таңбамен белгіленеді:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!, \quad (19.2)$$

мұндағы $(n-n)! = 0! = 1$.

Бұл жағдайда, алмастырулардың бір-бірінен айырмашылығы олардың элементтерінің орналасуы ретінде. Жалпы жағдайда, n элементтен әрқайсысы m -нен алынған орналастырулардың бір-бірінен айырмашылығы не элементтерінде (біз оны орналастыру деп атадық), не элементтерінің орналасу ретінде болатын комбинациялар деп қарастырдық. Ал айырмашылығы кем дегенде бір элементінде ғана болатын орналастыру **теру** деп аталады.

Анықтама. n элементтен әрқайсысы m -нен алынған терулер саны C_n^m таңбамен белгіленеді және

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (19.3)$$

Терулер санына мына қасиет орындалады: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Сонымен, орналастырулардың бір-бірінен айырмашылығы тек элементтерінің орналасу ретінде ғана болатын орналастырудың бір

түрін алмастыру деп атадық. Ал айырмашылығы бір ғана элементінде болатын алмастырудың екінші түрін **теру** деп атадық.

Анықтама. Элементтері қайталанып келетін n элементтен m -нен жасалған орналастырулар саны P_n^m таңбамен белгіленеді және ол

$$P_n^m = n^m \quad (19.4)$$

формуламен өрнектеледі.

Мысалдар. 1. Төрт студент емтихан тапсырады. Егер де бұлардың ешқайсысына қанағаттанарлықсыз баға қойылмайтын болса, онда оларға бағаларды қанша тәсілмен таңдауға болады?

Шешуі. Әрбір студент «өте жақсы», «жақсы», «қанағаттанарлық» бағаларының кез келген біреуін алады. Демек, қарастырылатын X жиыны әртүрлі үш элементтен тұрады. Мұнда бағалардың реті маңызды емес, бағалар қайталануы да мүмкін, ал қойылған бағалардың жалпы саны төртеу (мысалы, «өте жақсы», «жақсы», «өте жақсы», «қанағаттанарлық»). Олай болса, төрт элементтен үш элемент бойынша қайталамалы орналастырулар жасау қажет. Ал бұл сан $\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$ -ге тең.

2. Комитетке 9 адамнан сайланған. Бұлардан секретарьды және оның орынбасарын сайлау керек. Мұны қанша әдіспен жүргізуге болады?

Шешуі. Әртүрлі 9 элементтен тұратын жиыннан 2 элементті тандап алу керек. Реттің маңызы бар (мысалы, a_1 -секретарь, a_2 -орынбасар және a_2 -секретарь, a_1 -орынбасар таңдамалары бірдей элементтерден тұр, бірақ айырмасы бар). Элементтер қайталанбайды. Демек, тоғыз элементтен әрқайсысы екі-екі элементтен тұратын қайталанбайтын орналастырулардың санын, яғни A_9^2 санды табу керек. Олай болса, секретарь мен оның орынбасарын $A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$ тәсілдермен тандап сайлауға болады.

3. Гүл дүкенінде алты түрлі гүл сатылды. Әрбірі он түрлі гүлден тұратын букетті қанша тәсілмен құруға болады?

Шешуі. Есепің шарты бойынша алты әртүрлі элементтен тұратын жиын қарастырылады, ал ұзындығы 10 комбинациядан тұрады. Гүлдердің орналастыру реті букетте ескерілмеген, онда 10 элементтен 6 элемент бойынша қайталанба теру алынады. Сонымен, $\overline{C}_6^{10} = 3003$ әртүрлі букетті құраймыз.

Бақылау сұрақтары.

1. Қосынды және көбейтінді ережелері.
2. Алмастыру, орналастыру және терудің анықтамалары және айырмашылықтары.
3. Алмастыру, орналастыру, теру сандарының формулалары.

Тапсырмалар.

1. $n = 8$, $m = 4$ және $n = 10$, $m = 3$ болғандағы орналастыру мен теру сандарын есептеңдер.
2. Л, Қ, І, Й, Д, Б, Е әріптері жеке-жеке бірдей карточкаға жазылып, қорапқа салынды. Қораптан бір-бірден 4 карточка алынды.
 - а) айырмашылығы тек әріптердің орналасу ретінде болатын, жеті әріптен төрт-төрттен неше алмастырулар жасауға болады;
 - ә) жеті әріптен төрт-төрттен неше тәсілмен алуға болады.

19.2. Элементар оқиғаның дискретті кеңістігі. Алгебралық оқиға. Классикалық ықтималдық

Анықтама. Тәжірибе жүргізу нәтижесінде мүмкін болатын нәтижелердің тек бірі ғана пайда болуын **элементар оқиға** деп аталады.

Сонымен, сынау немесе тәжірибе нәтижесінде тек бір ғана элементар оқиға пайда болады немесе анықталады.

Анықтама. Тәжірибенің барлық мүмкін болатын нәтижелер жиыны, яғни барлық элементар оқиғалар жиыны **элементар оқиғалар кеңістігі** деп аталады және ол Ω таңбамен, ал элементар оқиғалар сәйкес $\omega_1, \omega_2, \dots$ таңбалармен белгіленеді, яғни $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

Анықтама. Элементар оқиғалар жиынының кез келген жиыншасы **оқиға** деп аталады.

Тәжірибе жүргізу нәтижесінде бізге қажетті оқиға пайда болуы да, пайда болмауы да мүмкін.

Мысал. Ойын сүйегін лақтырғанда, ω_i элементар оқиғаны « i ұпай санының түсуі (пайда болуы)» деп белгілейік, $i = 1, 2, \dots, 6$. Онда элементар оқиғалар кеңістігі $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ -ға тең болады. A – «жұп ұпай түсу» оқиғасы деп белгілейік, онда $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, осы сияқты B – «тақ ұпай түсу» оқиғасы деп белгілейік, онда $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, т.с.с.

Анықтама. Тәжірибе нәтижесінде A оқиға міндетті түрде пайда болса (орындалса, анықталса), онда ол **ақиқат оқиға** деп аталады.

Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағанда, не 1 ұпай, не 2 ұпай, не 3 ұпай, не 4 ұпай, не 5 ұпай, не 6 ұпайдың пайда болу оқиғасы ақиқат оқиға болады.

Анықтама. Тәжірибе нәтижесінде A оқиға міндетті түрде пайда болмаса (орындалмаса, анықталмаса), онда ол **мүмкін емес оқиға** деп аталады.

Мысалы, ойын сүйегін бір рет тастағанда, 7 ұпайдың пайда болу оқиғасы мүмкін емес оқиға болады.

Анықтама. Егер екі оқиғаның біреуі екіншісінің пайда болуынан анықталса, онда олар **қарама-қарсы оқиға** деп аталады. A оқиға қарама-қарсы оқиға $\bar{A}$ таңбамен белгіленеді.

Мысал. Ойын сүйегі лақтырылды. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $\bar{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ оқиғаларын қарастырайық. Бұл жағдайда, $\bar{A}$ оқиға A оқиғаға қарама-қарсы оқиға болады.

Жалпы сынау нәтижесінде бірнеше элементар (нәтижелер, жағдайлар) оқиғалар пайда болуы мүмкін болса және олардың біреуінің пайда болу мүмкіндігі екіншісіне қарағанда, артықшылығы бар деп айта алмайтын болсақ, мұндай элементар оқиғалар **тең мүмкіндікті** деп аталады. Мысалы, тиынды лақтырғанда A оқиғаның (сан түсуі) және B оқиғаның (герб түсуі) мүмкіндіктері тең, өйткені, біртекті материалдан жасалған тиынның формасы дұрыс цилиндрден тұрады және оны бір рет лақтырғанда тиынның қай жағы (сан немесе герб) жоғары қарап түссе де оқиға болады.

Анықтама. A және B оқиғаларының **қосындысы** деп кем дегенде біреуінің пайда болуын айтады және ол $A+B$ немесе $A \cup B$ таңбалардың бірі арқылы белгіленеді.

Анықтама. A және B оқиғаларының бірге пайда болуын олардың **көбейтіндісі** деп атайды және ол AB немесе $A \cap B$ таңбалардың бірі арқылы белгіленеді.

Анықтама. A оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар санының m сынаудың тең мүмкіндікті барлық элементар оқиғалар n санына қатынасы A **оқиғаның ықтималдығы** деп аталады және ол $P(A)$ таңбамен белгіленеді, яғни

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (19.5)$$

(19.5) формула **ықтималдықтың классикалық анықтамасы** деп аталады.

1-мысал. Туристер 15 ер баладан және 5 қыз баладан топ құрайды. Жеребе тастау арқылы құрамында төрт баладан тұратын шаруашылық командасын құрады. Осы команданың құрамында 2 ер бала және 2 қыз бала болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Тәжірбие жиырма ер баланың ішінде 4 баланы таңдап алудан тұрады. Таңдау жеребе бойынша жүргізілгендіктен, тәжірбие нәтижелері тең ықтималды. Тәжірбие нәтижелерінің саны $n = C_{20}^4$. Себебі, таңдама төрт элементтен тұрады, ал олардың орналасуы таңдамада ескертілмейді. A оқиға таңдалғандардың құрамында 2 ер бала мен 2 қыз бар екендігін білдіреді, яғни оны $A = \{2 \text{ ер бала, } 2 \text{ қыз бала}\}$ деп белгілейік. 2 ер баланы 15-тің ішінен C_{15}^2 тәсілмен таңдауға болады және осындай әрбір таңдамадан кейін 2 қыз баланы C_5^2 әдіспен таңдауға болады. Көбейтінді ережесі бойынша, A оқиға тәжірбиенің $m = C_{15}^2 C_5^2$ нәтижелері қолайлы сан болады. Сонда іздестіріп отырған ықтималдық (19.5) формула бойынша есептеледі:

$$p(A) = \frac{C_{15}^2 C_5^2}{C_{20}^4} \approx 0,217.$$

Енді ықтималдықтың қарапайым қасиеттерін қарастырайық.

1) Кез келген оқиғаның ықтималдығы нөл мен бір сандарының аралығында анықталған: $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) Егер A ақиқат оқиға болса, онда оның ықтималдығы бірге тең, яғни $P(A) = 1$.

3) Егер A мүмкін емес оқиға болса, онда оның ықтималдығы нөлге тең, яғни $P(A) = 0$.

Бақылау сұрақтары

1. Элементар оқиға кеңістігінің анықтамасы.
2. Кездейсоқ оқиғаның анықтамасы.
3. Оқиғаның түрлері.
4. Оқиғаларға анықтама қолдану.
5. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы және m мен n сандар нені білдіреді?
6. Оқиғаларға қолданылатын амалдар.

Тапсырма. Л, Қ, І, Й, Д, Б, Е әріптері жеке-жеке бірдей карточкаға жазылып, қорапқа салынды. Қораптан бір-бірден 4 карточка аламыз. Алынған карточкадан ЕДІЛ деген сөздің шығу ықтималдығын табыңдар.

19.3. Ықтималдықтың аксиоматикалық анықтамасы және ықтималдықтарды қосу теоремасы

Ω элементар оқиғалар кеңістігін қарастырайық.

Анықтама. L кездейсоқ оқиғалар жүйесін **алгебралық оқиға** деп атайды, егер мына шарттар орындалса: 1) $\Omega \in L$; 2) егер $A \in L$, $B \in L$, онда $AB \in L$, $A + B \in L$, $A \setminus B \in L$.

Мысал. Ойын сүйегі лақтырылды, яғни $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Ω кеңістігінің барлық ішкі жиындарын қарастырайық:

$$\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_6\}; \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \dots, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \dots, \Omega. \quad (19.6)$$

Бұл жағдайда, (19.6) жиыны алгебралық оқиғалар жиын болады.

Анықтама. $P(A)$ санды функция, A **алгебралық оқиғада анықталған ықтималдық** деп аталады, егер келесі аксиомалар орындалса:

1. L алгебралық оқиғадағы әрбір $\Omega \in L$ кездейсоқ оқиғаға оң таңбалы нақты $P(A) \geq 0$ сан сәйкес келсе.

2. Кез келген L алгебралық оқиғадағы әрбір $A \in L$ кездейсоқ ақиқат оқиғаның ықтималдығы бірге тең болса, яғни $P(\Omega) = 1$.

3. Егер A және B үйлесімсіз (қиылыспайтын) оқиғалар болса, онда $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Анықтама. (Ω, L, P) үштік **ықтималдық кеңістік** деп аталады, мұндағы L – алгебралық оқиға, P – 1–3 аксиомаларды қанағаттандыратын ықтималдық, Ω – элементар оқиғалар жиыны.

Мысал. Екі тиынды лақтырайық.

I-модель. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ықтималдық кеңістігі мына түрде болсын, бұл жердегі ω_1 – «тиын сан жағымен түсті», ω_2 – «тиын герб жағымен түсті», ω_3 – «тиын әртүрлі жағымен түсті, яғни біреуі сан, ал екіншісі герб». A – «тиын әртүрлі жағымен түсуі» оқиғасын қарастырайық, яғни $A = \{\omega_3\}$. Онда классикалық ықтималдық формуласы бойынша: $P(A) = \frac{1}{3}$.

2-модель. Ықтималдық кеңістігі мына түрде болсын $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, бұл жердегі ω_1 – «тиынның сан жағымен түсуі», ω_2 – «тиынның герб жағымен түсуі», ω_3 – «варианттар табылды: сан, герб», ω_4 – «варианттар табылды: герб, сан». Сонда $A = \{\omega_3, \omega_4\}$ болсын. Онда, классикалық ықтималдықтың формуласы бойынша $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Анықтама. Тәжірибе нәтижесінде екі оқиғаның бірі пайда болып, ал екіншісі пайда болмайтын оқиғалар **үйлесімсіз оқиғалар** деп аталады.

Осы анықтамадан: кез келген екі оқиға үйлесімсіз болатын оқиғалар жиыны **қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар** деп аталады.

Анықтама. Тәжірибе жүргізу нәтижесінде екі оқиғаның бірінің пайда болуы екіншісінің пайда болуын жоққа шығармайтын екі оқиғаны **үйлесімді оқиғалар** деп атайды.

Анықтама. $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының **толық тобы** деп мына екі шарттың орындалуын айтады:

$$a) P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1;$$

$$ә) A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Ықтималдық аксиомасынан мына теңдіктер орындалады:

1. Егер A мүмкін емес оқиға болса, онда оның ықтималдығы нөлге тең, яғни $P(A) = 0$.

2. A оқиғаның $\bar{A}$ қарама-қарсы оқиғасының ықтималдығы мына теңдіктен анықталады: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3. Кез келген A және B оқиғалар үшін мына теңдік орындалады:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (19.7)$$

4. Кез келген A және B оқиғалар үшін мына теңсіздік орындалады:

$$P(A + B) \leq P(A) + P(B).$$

5. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз ($A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) және $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L$ болса, онда $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

6. Егер $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots (A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots)$ және $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \left(A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$, онда $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

1-теорема. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ – қос-қостан тәуелсіз оқиғалар болса, онда мына теңдік орындалады:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (19.8)$$

2-теорема. Қарама-қарсы оқиғалар ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

3-теорема. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ – қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар болса және олар оқиғалардың толық тобын құраса, яғни $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, онда мына теңдік орындалады:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (19.9)$$

4-теорема. Кез келген екі A мен B оқиғаның кемінде біреуінің пайда болу $P(A + B)$ ықтималдығына мына теңдік орындалады:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

19.4. Шартты ықтималдық. Толық ықтималдық пен Байес формулалары

Анықтама. A оқиғасының пайда болуын есептегенде басқа B оқиғасының пайда болуы немесе пайда болмауы әсер етіп, A оқиғасының ықтималдығын өзгертсе, онда мұндай ықтималдық **шартты ықтималдық** деп аталады, шартты ықтималдық $P(A/B)$ немесе $P_B(A)$ таңбамен белгіленеді:

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (19.10)$$

Шартты ықтималдық былай оқылады: B оқиғасы орындалғанда A оқиғаның пайда болу ықтималдығы.

Шартты ықтималдықтың анықтамасынан, A мен B оқиғаларының тәуелсіздігін мына түрде жазуға болады:

$$P(A) = P(A/B) = P_B(A).$$

Егер A мен B тәуелді оқиғалар болса, онда (19.10) формуладан

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A). \quad (19.11)$$

Егер A, B, C тәуелді оқиғалар болса, онда (19.10) формуладан

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB). \quad (19.11)'$$

(19.11) мен (19.11)' формулалар ықтималдықтардың көбейту формулалары деп аталады.

Ықтималдықтарды көбейту теоремасы (жалпы теорема). Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ – тәуелді оқиғалар болса, онда мына теңдік орындалады:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Мысал. Жәшікте 5 ақ, 2 қара және 3 қызыл шар бар. Жәшіктен алынған үш шардың біріншісі ақ, екіншісі қара, үшіншісі қызыл болу ықтималдығын тап.

Шешуі. A_1 – оқиға біріншісі алынған ақ шар; A_2 – оқиға екінші алынған қара шар және A_3 оқиға үшінші алынған қызыл шар болсын. Онда іздестіріп отырған оқиға $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ көбейтіндісі түрінде анықталады. Сондықтан, ықтималдықтың классикалық анықтамасын пайдалана отырып, іздестіріп отырған $A_1 \times \times A_2 \cdot A_3$ оқиғаның ықтималдығын табамыз:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{24}.$$

Тәуелсіз оқиғалар үшін ықтималдықты көбейту теоремасы (жалпы теорема). Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары тәуелсіз болса, онда олардың көбейтінділерінің ықтималдығы олардың ықтималдықтарының көбейтінділеріне тең, яғни

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Теорема. Егер A және B тәуелсіз оқиғалар болса, онда

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Мысал. Үш мерген нысанаға оқ атты. Олардың нысанаға тигізу ықтималдықтары сәйкесінше 0,7, 0,8, 0,9-ға тең. Нысанаға бір оқтың тию ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Үш мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығын сәйкесінше $A_1 \cdot A_2 \times \times A_3$ арқылы белгілейік. B – ізделінетін оқиға

болсын. Онда мына теңдік орындалады: $B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$.
Бұл теңдеудегі көбейткіштер тәуелсіз, сондықтан

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ &= 0,7(1 - 0,8)(1 - 0,9) + (1 - 0,7)0,8(1 - 0,9) + (1 - 0,7)(1 - 0,8) \cdot 0,9 = \\ &= 0,014 + 0,024 + 0,054 = 0,092. \end{aligned}$$

Күрделі оқиғалар ықтималдығын есептегенде ықтималдықтарды қосу, көбейту теоремаларын жиі қолдануға тура келеді.

Теорема. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз және B оқиға A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, оқиғаларының тек біреуімен ғана бірігіп пайда болса, онда мына теңдік орындалады:

$$P(B) = P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + \dots + P(A_n)P(B / A_n),$$

мұндағы A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ – оқиғалар гипотезалар немесе болжамдар деп аталады.

Бұл формула **толық ықтималдық формуласы** деп аталады.

Мысал. Бірнеше бұйымдар үш зауыттан әкелінсін. Біріншісі зауыттан 50 %, екіншісі зауыттан 30 %, үшіншісі зауыттан 20 % бұйым болсын. Үш зауыттан әкелінген бұйымның ішінен жарамсыз болу ықтималдығы сәйкесінше 0,1; 0,2; 0,3-ке тең. Әкелінген бұйымның жарамсыз болу ықтималдығын табайық.

Шешуі. A_1, A_2, A_3 оқиғалары әкелінген бұйымның үш зауыттан сәйкесінше жасалынған болсын. Онда есептің шарты бойынша осы оқиғалардың ықтималдығы тең: $P(A_1) = \frac{50}{100} = 0,5$; $P(A_2) = 0,3$; $P(A_3) = 0,2$.

B – «жарамсыз бұйым» оқиғасы болсын. Есептің шарты бойынша $P(B / A_1) = 0,1$, $P(B / A_2) = 0,2$, $P(B / A_3) = 0,3$. Бұдан толық ықтималдық формуласы бойынша:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + P(A_3)P(B / A_3) = \\ &= 0,5 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,17. \end{aligned}$$

Байес теоремасы. $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) және B оқиға A_i оқиғаларының біреуімен бірігіп пайда болуы мүмкін болсын, $i = 1, 2, \dots, n$, онда

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(B)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (19.12)$$

мұндағы $P(B)$ толық ықтималдық формуласы бойынша табылады, яғни

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B / A_i).$$

Мысал. Жоғарыда қарастырылған мысалды алып, бірақ әкелінген бұйымның бәрі жарамсыз болсын. Ол бірінші зауыттан жасалынған болу ықтималдығын табайық.

$i = 1$ деп алып, алдыңғы есептің шешуін қолдана отырып, мынадай жауап аламыз: $P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B / A_1)}{P(B)} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{0,17} = \frac{5}{17}$.

Бақылау сұрақтары

1. Шартты ықтималдықтар анықтамасы.
2. Тәуелсіз оқиғаның анықтамасы.
3. Ықтималдықты көбейту теоремасын айт.
4. Толық ықтималдық формуласы.
5. Байес формуласы.

19.5. Бернулли схемасының формулалары

Бернулли схемасы деп төмендегі 3 шарттың орындалуын айтады:

- 1) тәуелсіз n рет тәжірбие жүргізіледі;
- 2) әрбір бөлек тәжірбие екі нәтиже береді: қарастырылып отырған оқиғаның пайда болуы (табыс) және қарастырылып отырған оқиғаның пайда болмауы (сәтсіздік);

3) әрбір бөлек тәжірбиеде қарастырылып отырған оқиғаның ықтималдығы (табыстары) тұрақты және p арқылы белгіленеді.

n рет тәуелсіз тәжірбие нәтижесінде A іздестіріп отырған оқиғаның k рет пайда болу ықтималдығын $P_n(k)$ деп белгілейік.

Теорема. Бернулли схемасы үшін мына теңдік орындалады:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (19.13)$$

мұндағы q іздестіріп отырған A оқиғаның $\bar{A}$ қарама-қарсы оқиғасының пайда болу ықтималдығы, яғни $q = 1 - p$, мұндағы $0 < p < 1$.

Бұл формула **Бернулли формуласы** деп аталады.

Мысал. Жанұяда 5 бала бар, оның 3-нің ер бала болу ықтималдығын табу керек.

Бұл оқиға Бернулли схемасына келеді. $n = 5$ және $p = 0,5$ (ер бала болу ықтималдығы). $k = 3$ үшін

$$P_5(3) = C_5^3 0,5^3 (1 - 0,5)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

Енді $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясының қасиеттерін қарастырайық:

1. Бұл функция барлық $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін анықталған және $\varphi(x) \geq 0$;
2. $\varphi(x)$ функциясы жұп, яғни $\varphi(-x) \equiv \varphi(x)$; 3. $(-\infty, 0)$ аралығында $\varphi(x)$ функция өседі, ал $(0, +\infty)$ аралығында функция кемиді; 4. $x = 0$ нүктеде $\varphi(x)$ функция өзінің ең үлкен мәнін қабылдайды:

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

$\varphi(x)$ функцияның мәндерінің кестесі оқулықтарда беріледі.

Теорема (Муавр-Лапласың локальды теоремасы). Егер Бернулли схемасындағы n, p, q параметрлер белгілі және $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ болса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)} = 1, \quad (q = 1 - p),$$

мұндағы $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Осы теоремадан мына теңдікті аламыз: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, мұндағы

$0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Бұл теңдік **Муавр-Лапласың локальды формуласы** деп аталады.

Мысал. 400 бұйымның ішінен 80-і жарамсыз болу ықтималдығын табайық.

Әрбір жарамсыз бұйым үшін ықтималдық 0,2-ге тең.

Шешуі. Онда $n = 400$, $p = 0,2$, $k = 80$ болғандықтан,

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0.$$

$$\text{Осыдан } P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(0) \approx \frac{0,3989}{8} \approx 0,04986.$$

Бернуллі схемасының n , p , q параметрлері болсын, ал тәжірибе нәтижесінде A оқиғаның k рет пайда болу ықтималдығындағы k саны $k_1 \leq k \leq k_2$ теңсіздігін қанағаттандырғандағы ықтималдықты $P_n(k_1, k_2)$ таңбамен белгілейік.

Анықтама. Лаплас функциясы деп мына функцияны айтамыз:

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$\Phi(x)$ -Лаплас функцияның қасиеттерін қарастырайық:

1. Лаплас функция барлық $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін анықталған және өспелі;

2. $x \in (0, +\infty)$ үшін $\Phi(x) > 0$, ал $x \in (-\infty, 0)$ үшін $\Phi(x) < 0$; 3. барлық $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін $\Phi(x)$ функциясы тақ, яғни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; 4. $x = 0$ болғанда $\Phi(0) = 0$; 5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -\frac{1}{2}$.

$\Phi(x)$ -Лаплас функцияның мәндері оқулықтарда беріледі, яғни $0 \leq x \leq 5$ үшін мәндерін кестеден табамыз, ал барлық $x > 5$ үшін $\Phi(x) = 0,5$ шарты орындалады.

Теорема (Муавр-Лапластың интегралдық теоремасы). Бернуллі схемасының n, p, q параметрлері және

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

болсын, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

мұндағы $0 < p < 1$, $p + q = 1$.

Осы теоремадан мына теңдікті аламыз:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \quad (19.14)$$

(19.14) формула **Муавр-Лапластың интегралдық формуласы** деп аталады.

Мысал. Алдыңғы есептің шартын пайдалана отырып, жарамсыз бұйымның саны 100-ден көп емес болу ықтималдығын табайық.

Шешуі. $n=400$, $p=0,2$, $P_{400}(0;100)$ ықтималдықты табайық. Мұнда

$$x_1 = \frac{0 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -10, \quad x_2 = \frac{100 - 40 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Ал $x_1=-10$ мәні кестеде жоқ, сондықтан $\Phi(-10) = -\Phi(10) = -0,5$.

Бұдан

$$P_{400}(0;100) = \Phi(2,5) - \Phi(-10) = 0,4938 + 0,5 = 0,9938.$$

Пуассон теоремасы. n, p, q Бернулли схемасының параметрлері, $\lambda = np$ тұрақты және $p \rightarrow 0$ (тәжірибеде іздестіріп отырған оқиғаның пайда болу p ықтималдығы өте аз, ал тәжірибе жүргізу n саны үлкен сан) болсын, онда кез келген бүтін $k \geq 0$ үшін мына теңдік орындалады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Осы теоремадан мына теңдікті аламыз:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (19.15)$$

мұндағы $\lambda = np$, $p + q = 1$.

Соңғы формула **Пуассон формуласы** деп аталады.

Мысал. Әкелінген 5000 бұйымның X жарамсыз бұйым саны. Әкелінген әрбір бұйымның жарамсыз болу ықтималдығы 0,0002 тең. Әкелінген бұйымның ең болмағанда бір бұйымның жарамсыз болу ықтималдығын табайық.

Шешуі. Пуассондық үлестіру заңы берілген, $n=5000$ және $p=0,0002$, $\lambda = 5000 \cdot 0,0002 = 1$, $P_{500}(1; 5000)$ ықтималдығын табу керек. Алдымен қарама-қарсы оқиғаның ықтималдығын табайық:

$P_{500}(0) \approx \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-1} \approx 0,37$. Енді іздестіріп отырған ықтималдықты табайық:

$$P_{500}(1;5000) = 1 - P_{500}(0) \approx 1 - 0,37 = 0,63.$$

Бақылау сұрақтары

1. Бернулли формуласы.
2. Муавр-Лапласың локальды формуласы.
3. Муавр-Лапласың интегралдық формуласы.
4. Пуассон формуласы.

19.6. Дискретті кездейсоқ шамалар және олардың үлестіру заңдары мен ықтималдықтың үлестіру функциясы

Бізге (Ω, L, P) ықтималдық кеңістігі берілсін.

Анықтама. X кездейсоқ шамасы $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ **нақты функция** деп аталады, егер кез келген x үшін мына қатынас орындалса:

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in L \quad (19.16)$$

(19.16) анықтамасын қысқаша былай жазған тиімді $X < x$.

Анықтама. Егер кездейсоқ шаманың қабылдай алатын мәндерінің жиыны ақырғы немесе саналымды жиын болса, онда ол **дискретті кездейсоқ шама** (ДКШ) деп аталады.

Мысал. 1) Сатып алынған 3 билеттің ішінен ұтысы бар билеттің саны – дискретті кездейсоқ шама. 2) Ұжымдағы n бұйымның ішінен жарамсыз бұйым саны – дискретті кездейсоқ шама.

Тәжірибе нәтижесінде X кездейсоқ шама $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндерінің бірін қабылдасын, яғни $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$. Бірақ, бұл бізге жеткіліксіз. Себебі, X кездейсоқ шама x_1 мәнді қандай ықтималдықпен қабылдай алатынын бізге білу өте қажет, ол ықтималдықтарды $p_1, p_2, \dots, p_n$ таңбалармен белгілейміз, сонда

$$p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \dots, p_n = P(X = x_n).$$

Анықтама. Дискретті кездейсоқ шаманың **үлестіру (үлестірім) заңы** деп мына кестені айтамыз: кестенің бірінші жатық жолында барлық мүмкін болатын (қабылдай алатын) мәндер, ал екінші жатық

жолында олардың (мүмкін болатын мәндердің) пайда болуының сәйкес ықтималдықтары жазылады.

Осы анықтамадан кедейсоқ шаманың қабылдай алатын мәндері мен оларға сәйкес келетін ықтималдықтарды байланыстыратын ереже немесе заңдылық **дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңы** деп аталады.

X дискретті кездейсоқ шаманың қабылдай алатын мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ таңбамен, ал оларды сәйкес қабылдай алу ықтималдықтары $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ таңбамен белгіленеді. Онда ДҚШ-ның үлестіру заңы мына түрде жазылады:

x_i	x_1	x_2	...
p_i	p_1	p_2	...

мұндағы ДҚШ үлестіру заңындағы барлық $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ ықтималдықтарының қосындысы бірге тең: $\sum_i p_i = 1$.

Мысал. X ойын сүйегін лақтырғандағы бірінші жатық жолға ұпайдың түсу саны жазылады, ал екінші жолға сәйкес әр ұпайдың пайда болу ықтималдықтары жазылады. Онда X дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңы мына түрде беріледі:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Берілген мысалда $\sum_i p_i = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

Енді бірнеше ДҚШ-ға мысалдар қарастырайық.

Егер p_i ықтималдық Бернулли формуласы бойынша анықталса, онда үлестіру заңының кестесі X дискретті кездейсоқ шаманың **биноминальды үлестіру заңы** деп аталады.

ДҚШ-ның биноминальды үлестіру заңы мына түрде беріледі:

x_i	0	1	...	k	...	$n-1$	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$np^{n-1}q$	p^n

Мысал. Жанұяда 5 ер бала бар деп үлестірім заңын жазайық. $n = 5$, $p = 0,5$. Сонда $P_n(k) = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-k} = \frac{5!}{k!(5-k)! \cdot 32}$.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Егер p_i ықтималдығы Пуассон формуласымен анықталса, онда ДҚШ-ның үлестіруі **пуассондық үлестіру заңы** деп аталады.

Пуассон үлестіру заңы мына түрде беріледі:

x_i	0	1	2	...	k	...
p_i	e^{-a}	$\frac{a}{1!}e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	...	$\frac{a^k}{k!}e^{-a}$	...

X – кездейсоқ шама, ал x – кез келген нақты сан болсын.

Анықтама. X кездейсоқ шама x -тен кіші мәндерді қабылдай алатын барлық мүмкін мәндердің ықтималдығы **үлестіру функцияның ықтималдығы (үлестіру функция)** деп аталады, яғни

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = P(X < x),$$

мұндағы x – айнымалы шама, $X < x$ теңсіздіктегі X кездейсоқ шама x -тен кіші болатын барлық мүмкін мәндерді қабылдайды, ал оның ықтималдығы $P(X < x)$ таңбамен белгіленеді.

Мысал. X дискретті кездейсоқ шаманың төмендегі үлестіру заңын қарастырайық:

x_i	1	4	8
p_i	0,3	0,1	0,6

Оның үлестіру функциясының ықтималдығын табайық:

а) егер $x \leq 1$, онда $F(x)=0$,

в) егер $1 < x \leq 4$, онда $F(x)=P(X=1)=0,3$;

с) егер $4 < x \leq 8$, онда $F(x)=P((X=1)+(X=4))=0,3+0,1=0,4$;

д) егер $x > 8$, онда $F(x)=P((X=1)+(X=4)+(X=8))=0,3+0,1+0,6=1$.

Олай болса,

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \in (-\infty, 1], \\ 0,3; & x \in (1, 4], \\ 0,4; & x \in (4, 8], \\ 1; & x \in (8, +\infty). \end{cases}$$

Үлестіру функция ықтималдығының қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. x -тің әрбір мәніне мына теңсіздік орындалды:
 $0 \leq F(x) \leq 1$.

2-қасиет. X кездейсоқ шаманың $[\alpha, \beta]$ аралығындағы мәндерді қабылдай алу ықтималдығы мына теңдіктен есептелінеді:
 $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

3-қасиет. $y = F(x)$ барлық x үшін кемімейтін функция
 $F(\beta) - F(\alpha) \geq 0$.

4-қасиет. Егер кез келген X кездейсоқ шама $(-\infty, +\infty)$ аралығындағы мәндерді қабылдаса, онда мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Дербес жағдайда, егер X -тің барлық мүмкін болатын мәндері $[a, b]$ аралығына тиісті болса, онда $x > b$ үшін $F(x) = 1$ және $x \leq a$ үшін $F(x) = 0$.

Бақылау сұрақтары:

1. Кездейсоқ шаманың анықтамасы.
2. Дискретті кездейсоқ шаманың анықтамасы.
3. ДҚШ-ның үлестіру түрлері.
4. Үлестіру функция ықтималдығы.

19.7. Ең ықтимал сан

Бізге Бернулли схемасы (тізбегі) орындалсын. n рет тәуелсіз тәжірибе жүргізейік. Әрбір тәжірибе жүргізу нәтижесінде A оқиғаның пайда болу ықтималдығы тұрақты болсын, оны p таңбамен белгілейік, онда қарастырып отырған A оқиғаға қарама-қарсы $\bar{A}$ оқиғаның пайда болу ықтималдығы $q = 1 - p$ болады және $p + q = 1$ теңдігі орындалады. Тәжірибе жүргізу нәтижесінде іздестіріп отырған A оқиғаның m рет пайда болу ықтималдығы Бернулли формуласынан анықталатыны бізге белгілі, яғни $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, мұндағы $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Енді $P_n(m)$ мен $P_n(m-1)$ ықтималдықтарының қатынасын қарастырайық:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} &= \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!}{n!m!(n-m)!} p^{m-m+1} q^{n-m-n+m-1} = \\ &= \frac{n-m+1}{m} p q^{-1} = \frac{n-m+1}{m} \frac{p}{q} = \frac{p(n+1)-mp}{mq} = \frac{p(n+1)-m+mq}{mq} = \\ &= 1 + \frac{p(n+1)-m}{mq}.\end{aligned}$$

Сонымен, $\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = 1 + \frac{p(n+1)-m}{mq}.$

Анықтама. Мына теңсіздікті $np - q \leq k_0 < np + p$ қанағаттандыратын $k_0 \geq \geq 0$ бүтін сан **ең ықтимал сан** деп аталады.

Осы анықтама мен $\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = 1 + \frac{p(n+1)-m}{mq}$ ықтималдықтардың қатынасынан мынадай қорытындыға келеміз, ең ықтимал сан соңғы теңсіздіктен анықталады және

1) егер $np - q$ бөлшек сан болса, онда тек бір ғана ең ықтимал сан бар;

2) егер $np - q$ бүтін сан болса, онда екі ең ықтимал сан бар, яғни $k_0, k_0 + 1$;

3) егер np — бүтін сан болса, онда ең ықтимал сан мына формуладан анықталады: $k_0 = np$.

Мысалдар. 1. 15 элементтен тұратын құралдың әрбір элементтерін сынақтан өткізу қажет. Әрбір элементтің сынақтан өту ықтималдығы 0,9-ға тең. Осы элементтердің сынақтан өту ең ықтимал санын табыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $n = 15, p = 0,9$. Онда $q = 0,1$ -ге тең болады. Жоғарыдағы формуладан

$$13,4 = 15 \cdot 0,9 - 0,1 = np - q \leq k_0 < np + p = 15 \cdot 0,9 + 0,4 = 14,4.$$

Осыдан, $13,4 \leq k_0 < 14,4$ теңсіздікті аламыз, мұндағы k_0 бүтін сан болғандықтан 13,4 пен 14,4 сандардың арасында тек бір ғана 14 саны бар. Сондықтан, ең ықтимал сан 14-ке тең, яғни $k_0 = 14$.

2. Техниканың бақылау бөлімі 24 бұйымды тексеруден өткізді. Әрбір тексерілетін бұйымның стандартқа сай келу ықтималдығы 0,6-ға тең. Сатуға болатын бұйымдардың ең ықтимал санын табыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $n = 24$, $p = 0,6$. Онда $q = 1 - p = 0,4$ -ге тең болады. Онда

$$14 = 24 \cdot 0,6 - 0,4 \leq k_0 < 24 \cdot 0,6 + 0,6 = 14,4.$$

Сонымен, $14 \leq k_0 < 14,4$, мұнда 14 пен 14,4 сандардың арасында орналасқан бүтін сан жоқ, Бірақ теңсіздіктің сол жағындағы $14 \leq k_0$ теңсіздіктен $k_0 = 14$ және $np - q = 14$ бүтін сан, олай болса $k_0 = 14$, $k_0 + 1 = 15$. Сонымен, ең ықтимал сан екеу, олар $k_0 = 14$, $k_0 + 1 = 15$.

3. Әрбір тәуелсіз тәжірибе жүргізу нәтижесінде оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,4-ке тең. Ең ықтимал сан 25-ке тең болатындай қанша рет тәжірибе жүргізу қажет.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $k_0 = 25$, $p = 0,4$. Онда $q = 1 - p = 0,6$. Онда формуладан

$$n \cdot 0,4 - 0,6 \leq 25 < n \cdot 0,4 + 0,4.$$

Алдымен, соңғы теңсіздіктің сол жағындағы $n \cdot 0,4 - 0,6 \leq 25$ теңсіздіктен іздестіріп отырған n белгісізді табайық: $0,4n \leq 25,6$, $n \leq \frac{25,6}{0,4} = 64$. Енді оң жағындағы теңсіздіктен іздестіріп отырған n

белгісізді табайық: $25 < n \cdot 0,4 + 0,4$, $0,4n > 24,6$, $n > \frac{24,6}{0,4} = 61,5$.

Сонымен, $61,5 < n \leq 64$. Осыдан $62 \leq n \leq 64$.

4. 49 рет тәуелсіз тәжірибе жүргізу нәтижесінде, оқиғаның пайда болу ең ықтимал саны 30-ға тең. Осы оқиғаның пайда болу ықтималдығын табыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $n = 49$, $k_0 = 30$. Формуладағы q ықтималдықты p ықтималдық арқылы өрнектейік:

$$np - (1 - p) \leq k_0 < np + p.$$

Осы теңсіздіктен іздестіріп отырған p ықтималдықты табайық:

$$49p - (1 - p) = np - (1 - p) \leq 30 < np + p = 49p + p.$$

Сонда $30 < 49p + p$, $49p - (1 - p) \leq 30$ немесе $50p > 30$, $50p \leq 31$,

$p \leq \frac{31}{50} = 0,62$. Осылардан $p > 0,6$, $p \leq 0,62$. Сонымен, $0,6 < p \leq 0,62$.

19.8. Туындатқыш функция

Біз жоғарыда n рет тәуелсіз тәжірибе жүргізгенде іздестіріп отырған A оқиғаның пайда болу ықтималдығы әрбір тәжірибеде бірдей (тең) болған жағдайды қарастырдық. Енді әрбір тәжірибеде A оқиғаның пайда болу ықтималдықтары әртүрлі болса, яғни бірінші тәжірибеде A оқиғаның пайда болу ықтималдығы p_1 , ал екінші тәжірибеде – p_2 , ..., n -тәжірибеде – p_n , ал $\bar{A}$ қарама-қарсы оқиғаның пайда болмау ықтималдығы $q_1, q_2, \dots, q_n$ болсын. n рет тәуелсіз тәжірибе жүргізгенде A оқиғаның m рет пайда болу ықтималдығы $P_n(m)$ болсын.

Анықтама. $P_n(m)$ ықтималдықтың туындатушы функциясы деп мына функцияны айтамыз:

$\varphi_n(z) = (p_1z + q_1)(p_2z + q_2)(p_3z + q_3) \cdot \dots \cdot (p_nz + q_n)$ және мына теңдік орындалады: $P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) + \dots + P_n(n) + P_n(0) = 1$.

Егер $n = 2$ болса, онда ықтималдықтың туындатушы функциясы мына түрде жазылады:

$$\varphi_2(z) = (p_1z + q_1)(p_2z + q_2) = p_1p_2z^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)z + q_1q_2,$$

мұндағы z^2 -тың p_1p_2 коэффициенті $P_2(2)$ ықтималдыққа тең, z -тің $p_1q_2 + p_2q_1$ коэффициенті $P_2(1)$ ықтималдыққа тең, ал q_1q_2 – бос мүше $P_2(0)$ – ықтималдық A оқиғаның бірде бір рет пайда болмау ықтималдығына тең.

Егер $n = 3$ болса, онда онда ықтималдықтың туындатушы функциясы мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} \varphi_3(z) &= (p_1z + q_1)(p_2z + q_2)(p_3z + q_3) = \\ &= (p_1p_2z^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)z + q_1q_2)(p_3z + q_3) = \\ &= p_1p_2p_3z^3 + (q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 + p_1p_2q_3)z^2 + \\ &\quad + (q_1q_2p_3 + q_1p_2q_3 + p_1q_2q_3)z + q_1q_2q_3, \end{aligned}$$

мұндағы z^3 -тың $p_1p_2p_3$ коэффициенті $P_3(3)$ ықтималдыққа тең, z^2 -тың $q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 + p_1p_2q_3$ коэффициенті $P_3(2)$ ықтималдыққа тең, z -тің $q_1q_2p_3 + q_1p_2q_3 + p_1q_2q_3$ коэффициенті $P_3(1)$ ықтималдыққа тең, ал $q_1q_2q_3$ бос мүше $P_3(0)$ ықтималдық A оқиғаның бірде бір рет пайда болмау ықтималдығына тең.

Мысал. Техникалық бөлшек бір-бірінен тәуелсіз жұмыс жасайтын үш элементтен құралған. Элементтердің бұзылмай жұмыс жасау ықтималдықтары сәйкес $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$ -ға тең. t уақытта техникалық бөлшектің бұзылмай жұмыс жасау ықтималдықтарын табыңдар: а) барлық элементтері; б) екі элементі; в) бір элементі; г) бірде-бір элементі.

Шешуі. Есептің шарты бойынша: $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$. Осыдан $q_1 = 0,3$, $q_2 = 0,2$, $q_3 = 0,1$. Енді ықтималдықтың туындатушы функциясын құрайық:

$$\begin{aligned}\varphi_3(z) &= (p_1z + q_1)(p_2z + q_2)(p_3z + q_3) = \\ &= (0,7z + 0,3)(0,8z + 0,2)(0,9z + 0,1) = \\ &= 0,504z^3 + 0,398z^2 + 0,092z + 0,006.\end{aligned}$$

Осыдан

а) барлық элементтері бұзылмай жұмыс жасау ықтималдығы $P_3(3) = 0,504$;

б) екі элементі бұзылмай жұмыс жасау ықтималдығы $P_3(2) = 0,398$;

в) бір элементі бұзылмай жұмыс жасау ықтималдығы $P_3(1) = 0,092$;

г) бірде-бір элементі бұзылмай жұмыс жасау ықтималдығы $P_3(0) = 0,006$.

Тексеру: $0,504 + 0,398 + 0,092 + 0,006 = 1$.

19.9. Математикалық үміт. Дисперсия

Өткен тақырыптарда кездейсоқ шаманы сипаттайтын үлестіру функциясы (немесе үлестіру тығыздығы) болатынын атап өттік. Егер кездейсоқ шаманың үлестіру функциясы белгілі болса, онда оның қабылдай алатын мәндер жиынын және осы мәндерді қандай ықтималдықтармен қабылдай алатынын таба аламыз. Көптеген тәжірибелік есептерде кездейсоқ шамалардың үлестіру заңын білу немесе оның қабылдай алатын барлық мәндерін білудің қажеті болмай қалады немесе оларды анықтау көптеген қиындықтарға әкеледі. Сондықтан, мұндай жағдайда кездейсоқ шаманы анықтау мақсатында, кездейсоқ шаманың математикалық **үміті** мен **дисперсиясы** деп аталатын ұғымдарын енгізу қажет болады.

Бізге X дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңы берілсін:

x_i	x_1	x_2	$\dots$
p_i	p_1	p_2	$\dots$

яғни X дискретті кездейсоқ шама $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ қабылдай алатын мәндерін сәйкес $p_1, p_2, \dots, p_n \dots$ ықтималдықтармен қабылдайды.

Анықтама. X дискретті кездейсоқ шаманың **математикалық үміті** деп, оның барлық қабылдай алатын x_i мәндерін оның сәйкес ықтималдықтарына көбейтілген қосындыны айтамыз және ол $M(X)$ таңбамен белгіленеді, яғни

$$M(X) = \sum_k x_k p_k, \quad (19.17)$$

мұндағы $k = \overline{1, n}$ немесе $k = 1, 2, \dots, n, \dots$

Мысал. Ойын сүйегін лақтырғанда X ұпай саны түсуінің математикалық үміті мынаған тең: $M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$, яғни, ойын сүйегін лақтырғанда орташа 3,5 ұпай түсетінін көрдік. Бұл жағдайда $k = \overline{1, 6}$.

1-қасиет. ДҚШ-ның қабылдай алатын барлық мүмкін болатын x_i мәндері $a \leq x_i \leq b$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда $a \leq M(X) \leq b$.

2-қасиет. Тұрақты санның математикалық үміті тұрақты санға тең, яғни $M(C) = C$.

Мысал. Егер ойын сүйегінің барлық жақтарына 6 саны жазылса, онда сондай ойын сүйегін лақтырғанда математикалық үміттің саны ұпай 6 санына тең.

3-қасиет. C тұрақтыны математикалық үміт таңбасының сыртына шығаруға болады, яғни $M(CX) = CM(X)$.

Мысал. Егер ойын сүйегінің жақтарына 10, 20, 30, 40, 50, 60 сандары белгіленсе, онда есептің шарты бойынша, ойын сүйегін лақтырғанда X ұпай санының пайда болуы болса, онда

$$M(10X) = 10M(X) = 10 \cdot 3,5 = 35.$$

мұндағы $M(X) = 3,5$.

Анықтама. Егер X және Y кездейсоқ шамалардың біреуі екіншісінің қандай мәнді қабылдайтынына тәуелсіз болса, онда X және Y **кездейсоқ шамалар тәуелсіз** деп аталады.

4-қасиет. Егер X және Y тәуелсіз шамалар болса, онда

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Мысал. Екі ойын сүйегін лақтырғанда ұпай саны көбейтіндісінің математикалық үмітін табайық.

Шешуі. Бұл X пен Y тәуелсіз кездейсоқ шамалар. Сондықтан

$$M(X \cdot Y) = M(X)M(Y) = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25.$$

Мұндағы X пен Y сәйкес бірінші және екінші ойын сүйектеріндегі ұпай түсу саны. Осыдан,

$$M(X \cdot X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = 91 \cdot \frac{1}{6}.$$

Демек, $M(X^2) \neq M(X) \cdot M(X) = 3,5^2$ теңсіздігі орындалатынын көреміз.

5-қасиет. X және Y кездейсоқ шамалар үшін мына теңдік орындалады: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Мысал. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Ұпай түсу саны қосындысының математикалық үмітін табайық, яғни $M(X + Y) = 3,5 + 3,5 = 7$.

Салдар. X биноминальды кездейсоқ шаманың математикалық үміті np -ға тең, яғни $M(X) = np$.

Салдар. X Пуассон заңы бойынша үлестірілген X кездейсоқ шаманың математикалық үміті λ -ға тең, яғни $M(X) = \lambda$.

Мысал. 100 баланың ішінде ер бала санының математикалық үмітін табайық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша, X биноминальды шаманың ер бала болу параметрлері $n=100$, $p=0,5$. Сондықтан, $M(X) = np = 100 \cdot 0,5 = 50$ -ге тең.

Кездейсоқ шаманың математикалық үміті осы шаманың бір сипаттамасы. Егер кездейсоқ шаманың мәні есебінде математикалық үмітті қабылдасақ, онда жіберілетін қатені бағалау қажет болады, яғни кездейсоқ шаманың мәндері оның математикалық үмітінен қаншалықты ауытқитынын табу керек болады. Басқаша айтқанда, бірінші тәжірибе мен екінші тәжірибе нәтижелерінің арасында алшақтық (ауытқу) болады. Осы алшақтықты бағалау үшін **дисперсия** мен **орта квадраттық ауытқу** деп аталатын ұғымдарды енгізуге тура келеді.

Анықтама. X кездейсоқ шаманың дисперсиясы деп X кездейсоқ шама мен оның $M(X)$ математикалық үміті айырымы квадратының математикалық үмітін айтады және дисперсия $D(X)$ таңбамен белгіленеді:

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Теорема. X кездейсоқ шаманың дисперсиясына мына теңдік орындалады:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Егер X дискретті кездейсоқ шама болса, онда оның дисперсиясы мына формуладан анықталады:

$$M(X) = \sum_i (x_i - M(x))^2 p_i.$$

Анықтама. $\sqrt{D(X)} > 0$ саны **орта квадрат ауытқу** деп аталады және $\sigma(X)$ таңбамен белгіленеді, яғни $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Мысал. Ойын сүйегі лақтырылғанда ұпай саны түсуінің дисперсиясын және орта квадраттық ауытқуын табайық.

Шешуі. Алдыңғы есепте есептелген: $M(X) = 3,5$, $M(X^2) = 15\frac{1}{6}$.

Сондықтан $D(X) = 15\frac{1}{6} - 3,5^2 = 15\frac{1}{6} - 12\frac{1}{4} = \frac{35}{12} \approx 2,917$, $\sigma(X) \approx \sqrt{2,917} \approx 1,708$.

Соңғы сан $M(X) = 3,5$ байланысты ұпай саны түсуінің орта ауытқуын сипаттайды.

Дисперсияның негізгі қасиеттерін көрсетейік.

1-қасиет. X кездейсоқ шама оң: $D(X) \geq 0$.

2-қасиет. Тұрақты кездейсоқ шаманың дисперсиясы нөлге тең: $D(C) = 0$, C -тұрақты.

3-қасиет. $D(CX) = C^2 D(X)$.

4-қасиет. X және Y тәуелсіз шама қосындысының дисперсиясы олардың дисперсияларының қосындысына тең, яғни $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

5-қасиет. X және Y тәуелсіз шамалар үшін: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Салдар. Биномиальды үлестірім дисперсиясы үшін: $D(X) = npq$.

Салдар. Пуассон заңы бойынша үлестірілген X кездейсоқ шаманың дисперсиясы мен математикалық үміті және орта

квадраттық ауытқуыдың квадраты λ -параметрге тең, яғни $D(X) = \lambda$, $M(X) = \lambda$, $\sigma^2(X) = \lambda$.

Салдар. Егер $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (X_i кездейсоқ шамалардың арифметикалық ортасы) болса, онда $M(\bar{X}) = p$, $D(\bar{X}) = \frac{pq}{n}$, $\sigma(\bar{X}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Мысал. 100 баланың ішінде ер баланың тууы 0,5-ке тең. Дисперсияны, орта квадраттық ауытқуды табыңдар.

Шешуі. Есептің шарты бойынша: $n=100$, $p=0,5$, $q=1-0,5$. Ал X – биномиальды кездейсоқ шама болғандықтан: $100 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 25$. Сонда $\sigma(X) = \sqrt{25} = 5$.

Бақылау сұрақтары:

1. Математикалық үміттің анықтамасы.
2. Математикалық үміттің қасиеттері.
3. Дисперсия анықтамасы.
4. Дисперсия қасиеттері.

19.10. Үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Ықтималдық тығыздығы. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары

Анықтама. Егер X кездейсоқ шаманың $y = F(x)$ үлестіру функциясы барлық $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін үзіліссіз болса, онда X **үзіліссіз кездейсоқ шама** деп аталады.

Мысал. 1. Транспортты аялдамада күту уақыты – үзіліссіз кездейсоқ шама.

2. Электр шамының жанып кету уақыты – үзіліссіз кездейсоқ шама.

Анықтама. $f(x)$ функция X үзіліссіз кездейсоқ шаманың **үлестіру тығыздығы (ықтималдық үлестіру тығыздығы немесе үлестіру дифференциалы)** деп аталады, егер ол үлестіру функциясының туындысына тең болса, яғни $f(x) = F'(x)$.

Осы анықтамадан, үлестіру функция мен үлестіру тығыздық бір-бірімен байланысты, яғни олар бірін-бірі анықтайды. Дегенмен де, үлестіру функция дискретті де және үзіліссіз де кездейсоқ шамаларды сипаттайды, ал үлестіру тығыздық тек үзіліссіз кездейсоқ шаманы ғана сипаттайды.

Үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығының қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. X үзіліссіз кездейсоқ шаманың тығыздығы теріс емес, яғни $f(x) \geq 0$.

2-қасиет. X үзіліссіз кездейсоқ шаманың $[\alpha, \beta]$ аралыққа тиісті болу ықтималдығы мына формуладан анықталады:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

3-қасиет. X үзіліссіз шаманың $(-\infty, +\infty)$ аралығындағы $f(x)$ үлестіру тығыздығы үшін мына теңдік орындалады: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

4-қасиет. Егер X үзіліссіз шаманың $y = f(x)$ тығыздығы берілсе, онда оның үлестіру функциясы мына теңдіктен анықталады:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Анықтама. X үзіліссіз кездейсоқ шаманың $f(x)$ үлестіру тығыздығының **математикалық үміті** деп мына формуладан анықталатын мәнді айтамыз:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx.$$

Дербес жағдайда, егер X үзіліссіз кездейсоқ шаманың қабылдай алатын барлық мәндер жиыны $[a, b]$ -ға тиісті болса, онда

$$M(X) = \int_a^b xf(x) dx.$$

Анықтама. Егер X үзіліссіз кездейсоқ шаманың барлық қабылдай алатын x мәндер жиыны $[a, b]$ -ға тиісті болса, яғни $x \in [a, b]$, онда X үзіліссіз кездейсоқ шаманың **дисперсиясы** мына формуладан анықталады:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx.$$

Егер X үзіліссіз кездейсоқ шаманың қабылдай алатын мәндері барлық OX осіне тиісті болса, яғни $x \in (-\infty, +\infty)$, онда

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx.$$

Бұл теңдіктер үзіліссіз кездейсоқ шаманың **дисперсиясы** деп аталады.

Үзіліссіз кездейсоқ шаманың орта квадраттық ауытқуы мына формуладан анықталады: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Мысал. Интегралдық функциямен берілген X кездейсоқ шаманың математикалық үмітін және дисперсиясын тап

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Шешуі. Дифференциалдық функцияны табайық:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Математикалық үмітті табайық: $M(X) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Дисперсияны табайық: $D(X) = \int_0^1 x^2 dx - \left[\frac{1}{2} \right]^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Бақылау сұрақтары:

1. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың анықтамасы.
2. Ықтималдық тығыздығының анықтамасы.

19.11. Нормаль заңы бойынша үлестірілген үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясын есептеу

Анықтама. Егер $f(x)$ функция барлық $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін мына теңдікпен берілсе:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (19.18)$$

онда ол X үзіліссіз кездейсоқ шаманың **үлестіру тығыздығы** деп аталады.

X үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы екі параметрмен анықталады, олар a мен σ , мұндағы

$a = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ — математикалық үміт,
 $\sigma = \sqrt{D(X)} > 0$ — орта квадраттық ауытқу.

Анықтама. Егер X үзіліссіз кездейсоқ шаманың $f(x)$ үлестіру тығыздығы (20.18) формула түрінде берілсе, онда X шама **нормаль заңы бойынша үлестірілген үзіліссіз кездейсоқ шама** деп аталады. Енді $M(X) = a$ теңдікті ескеріп, үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясын іздестірейік. Егер X үзіліссіз кездейсоқ шаманың қабылдай алатын мәндер жиыны $x \in (-\infty, +\infty)$ сандар осіне тиісті болса, онда нормаль заңы бойынша үлестірілген үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясы мына формуладан анықталады:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Енді $\frac{x-a}{\sigma} = z$ алмастыруын енгізейік және төмендегі интеграл астындағы $z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}$ функцияның жұп екендігін ескерейік: $x - a = \sigma z$, $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$. Сонда

$$D(X) = \frac{\sigma^3}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z \cdot ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = KA,$$

мұндағы $K = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}$, $A = \int_0^{+\infty} z \cdot ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz$. Соңғы интегралды бөліктеп интегралдайық және Пуассон интегралын пайдаланайық:

$$u = z, du = dz, dv = ze^{-\frac{z^2}{2}} dz, v = \int ze^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\int e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(-\frac{z^2}{2}\right) = -e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

$$A = \int_0^{+\infty} z \cdot ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = -ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = C + B,$$

мұндағы $C = -ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{+\infty}$, $B = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ болсын, яғни $D(X) = KA = K(C + B)$.

Алдымен C -ның мәнін есептейміз, ол үшін Лопиталь ережесін пайдаланамыз. Содан соң B -ның мәнін есептейміз, ол үшін

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = t, dz = \sqrt{2}dt \text{ алмастыруын пайдаланамыз. Сонда } C = -ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^\infty \\ = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - 0 \right) = 0, B = \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Осыдан

$$D(X) = KA = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(C + B) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}B = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2.$$

Сонымен, нормаль заңы бойынша үлестірілген X үзіліссіз кездейсоқ шаманың дисперсиясы орта квадраттық ауытқудың квадратына тең, яғни

$$D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma.$$

Егер X үзіл

іссіз кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

болса, онда нормаль заңы бойынша үлестірілген X **үзіліссіз кездейсоқ шаманың $[\alpha, \beta]$ аралығына тиісті болу ықтималдығын** мына формуладан есептейміз:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \quad (19.19)$$

мұндағы $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – Лаплас функциясы.

Егер X нормаль заңы бойынша үлестірілген үзіліссіз кездейсоқ шама болса, онда оның **үлестіру функциясы** мына формуладан есептелінеді:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}.$$

Мысал. X кездейсоқ шама қалыпты заң бойынша үлестірілген. Математикалық үміті және орта квадраттық ауытқу сәйкесінше 30 және 10-ға тең. X кездейсоқ шаманың (10, 50) аралығында тиісті болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. (19.19) формуласын қолданайық. Шарт бойынша $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, бұдан, $P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2)$.

Кестеден $\Phi(2) = 0.4772$. Онда іздеп отырған ықтималдық мына теңдікке тең $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544$.

X кездейсоқ шаманың қалыпты үлестірімнің айырымы берілген a санының абсолют шамасынан кіші болса, яғни, $|X - a| < \sigma$ теңсіздігінің ықтималдығын табу керек. Осы теңсіздікті келесі екі теңсіздікпен алмастырайық $-\delta < X - a < \delta$, немесе $a - \delta < X < a + \delta$. (19.19) формуланы қолданайық:

$$\begin{aligned} P(|X - a| < \delta) &= P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Лаплас функциясы — тақ: $\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, онда

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \text{ Дербес жағдайда, } a = 0 \text{ үшін } P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Мысал. X кездейсоқ шаманың қалыпты үлестіруі берілген. Математикалық үміт және орта квадраттық ауытқу сәйкесінше 20 және 10 тең. Ауытқудың абсолют шамасы бойынша үштен кіші болу ықтималдығын тап.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $\delta = 3$, $a = 20$, $\sigma = 10$. Олай болса, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, $P(|X - 20| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0.3)$.

Кестеден Лаплас функцияның мәнін табамыз: $\Phi(0.3) = 0.1179$.

$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуласын түрлендіріп, $\delta = \sigma t$ деп алайық.

Онда $P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$. Егер $t = 3$ және бұдан $\sigma t = 3\sigma$ болса, онда $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.49865 = 0.9973$.

Басқа сөзбен айтқанда, айырымының абсолют шамасы орта квадраттық ауытқудан өте аз ықтималдыққа тең болады, яғни

0,0027 тең. Бұл оқиға 0,27 % пайда болатынын білдіреді. Бұл тұжырым **үш сигма ережесі** деп аталады, оны нормаль заңға бағынатын кездейсоқ шаманың $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ аралығынан шықпауы мейлінше бірге жуық (0,9973) ықтималдықпен аламыз. Қалыпты заң тәжірибеде өте жиі кездеседі. Мысалы, егер кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндері әрқайсысы өте аз әсер ететін көптеген кездейсоқ факторлардың әрбіріне байланысты болмай, олардың жиынына байланысты болса, онда ондай кездейсоқ шаманың үлестіруі нормаль заңға бағынады. Ал мұндай құбылыс үлкен сандар заңының негізін қалайды.

Бақылау сұрақтары:

1. Кездейсоқ шаманың нормаль үлестіруінің анықтамасы.
2. Нормаль үлестіруінің математикалық үміті мен дисперсиясы.
3. Үш сигма ережесі.

19.12. Бірқалыпты ықтималдық үлестіру заңы.

Көрсеткіштік үлестіру

Анықтама. Егер үлестіру тығыздығы (a, b) аралығында тұрақты мәнді сақтаса, ал (a, b) аралығына тиісті емес мәндерде ол нөлге тең болса, онда (a, b) аралықта X кездейсоқ шаманың **бірқалыпты үлестіруі бар** деп аталады.

X бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығын табайық, мұндағы X кездейсоқ шаманың барлық қабылдай алтын мүмкін мәндері (a, b) аралығына тиісті және ол тұрақты болсын, яғни $f(x) = C$. Ал $x < a$ және $x > b$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын x үшін $f(x) = 0$ болсын. Есептің шарты бойынша мына теңдік орындалады: $\int_a^b f(x)dx = 1$ немесе $\int_a^b Cdx = 1$. Осы теңдіктен C тұрақтыны табайық: $C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}$. Сонымен, бірқалыпты

үлестіру заңын мына түрде жазуға болады:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & b < x < +\infty. \end{cases}$$

Анықтама. Егер X үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы $f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & b < x < +\infty. \end{cases}$ түрінде берілсе, онда X

кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірілген деп аталады.

Егер $x \leq a$ болса, онда $F(x)$ үлестіру функцияның анықтамасынан:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = 0.$$

Егер $a < x \leq b$ болса, онда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = 0 + \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Егер $x > b$ болса, онда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt = 0 + \int_a^b \frac{dt}{b-a} = 0 + 1 = 1.$$

Сонымен, егер X кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірілген болса, онда үлестіру функция мына формуладан анықталады:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & b < x < +\infty. \end{cases}$$

Демек, X кездейсоқ шама бірқалыпты үлестірілген болса, онда кездейсоқ шаманың мәндері кез келген аралықта болуы тек осы аралықтың ұзындығына ғана байланысты болады.

Егер X кездейсоқ шама $[a, b]$ аралықта бірқалыпты үлестірілген болса, онда

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b+a}{2}, D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma = \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Анықтама. Егер X үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестіру тығыздығы мына түрде берілсе: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ онда X үзіліссіз

кездейсоқ шама **көрсеткіштік заңмен берілген кездейсоқ шама** деп аталады, мұндағы λ параметр ($\lambda > 0$) және мына теңдік орындалады:

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Егер X үзіліссіз кездейсоқ шама көрсеткіштік заңмен берілсе, онда оның үлестіру функциясы $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$ ал (a, b) аралыққа тиісті болу ықтималдығы мына формуладан есептелінеді:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Көрсеткіштік кездейсоқ шаманың математикалық үміті бөліктеп интегралдау арқылы табылады:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} = - x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} + 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \left| \begin{array}{l} \text{Лопиталь} \\ \text{ережесі} \end{array} \right. \text{ бойынша} \\ &\left| = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \right. \end{aligned}$$

$$\text{Сонымен, } M(X) = \frac{1}{\lambda}. \text{ Осыдан } M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Көрсеткіштік кездейсоқ шама массалық қызмет теориясында қолданылады. Кезекті өтініш уақытын күтуде, қызмет пунктіне тапсырыс бергенде (телефон қоңырауы, т.б.) λ параметрімен көрсеткіштік шама беріледі. Бұл жердегі $T = \frac{1}{\lambda}$ – екі өтініштердің арасындағы орта уақыт. Теория жүзінде бұйымның істен шығуға дейінгі жұмыс уақыты. Теория жүзінде бұйымның істен шығуға дейінгі жұмыс уақыты көбінесе көрсеткіштік шама болып табылады,

бұл жердегі $T = \frac{1}{\lambda}$ – сондай бұйымның істен шығуға дейінгі орта жұмыс уақыт.

Мысал. Телевизордың бұзылмай қызмет істейтін орта уақыты 4 жыл болсын. Ал жөндеу мерзімі 1 жылға берілген. Телевизордың жөндеуді талап ететін ықтималдығын тап.

Шешуі. X телевизордың ақаусыз қызмет жасау уақытының көрсеткіштік шамасы $\lambda = \frac{1}{4}$ параметрімен берілсін. Тығыздықтың екінші қасиетін пайдаланып, жөндеуді талап ететін ықтималдықты табамыз:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-\frac{x}{4}} dx = -e^{-x/4} \Big|_0^1 = -e^{-1/4} + e^0 = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0,221.$$

Бақылау сұрақтары:

1. Бірқалыпты үлестірім ықтималдығының анықтамасы.
2. Көрсеткіштік кездейсоқ шама анықтамасы.

19.13. Үлкен сандар заңы

Тәжірибені шексіз көп жүргізгенде оқиғаның пайда болу жиілігі оның ықтималдығынан өте аз айырмашылықта болады. Ал бұл үлкен сандар заңының бір көрінісі. **Үлкен сандар заңы** деп кездейсоқ шамалардың арифметикалық ортасына қатысты тұжырымдалатын теоремаларды айтамыз.

Теорема (Чебышев теңсіздігі). Егер X кездейсоқ шаманың $M(X)$ математикалық үміті, $D(X)$ дисперсиясы және $\varepsilon > 0$ болса, онда мына теңсіздік орындалады:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Мысал. X – ойын сүйегін лақтырғанда ұпайдың түсу саны болсын. Алдыңғы мысалдарда тексеруіміз бойынша $M(X) = 3,5$, $D(X) = \frac{35}{12}$ –ке тең болатыны бізге белгілі.

Енді $\varepsilon = 2$ деп алып, Чебышев теңсіздігін тексерейік.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) = P(|X - 3,5| < 2) = P((X = 1) + (X = 2) + (X = 3) + (X = 4)) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{35}{12 \cdot 4} = \frac{13}{48}.$$

Сондықтан Чебышев теңсіздігі мынадай түрде болады: $\frac{2}{3} \geq \frac{13}{48}$.

Чебышев теоремасы. Егер $X_1, X_2, \dots$ – тәуелсіз кездейсоқ шама тізбегінің дисперсиясы C тұрақтымен шектелсе, яғни кез келген k үшін $D(X_k) \leq C$ және $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, $\bar{M}_n = \frac{M(X_1) + \dots + M(X_n)}{n}$ болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін мына теңдік орындалады: $\lim_{n \rightarrow \infty} (P(|\bar{X}_n - \bar{M}_n| < \varepsilon)) = 1$.

Анықтама. $Y_1, Y_2, \dots$ кездейсоқ шама тізбегі A санының ықтималдығы бойынша жинақталады деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін мына теңдік орындалса: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - A| < \varepsilon) = 1$ және ол былай белгіленеді: $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ықтимал}} A$.

Бернулли теоремасы. Сынақ тізбегі берілсін. Әрбір сынақта A_i оқиғасы p ықтималдықпен пайда болуы мүмкін және $\omega_n = \frac{m}{n}$ болсын, онда $n \rightarrow \infty$ -да $\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ықтимал}} p$.

Бақылау сұрақтары

1. Үлкен сандар заңы.
2. Чебышев теоремасы.
3. Бернулли теоремасы.

20. МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

20.1. Математикалық статистика пәні. Бас және іріктеулі жинақтылықтар. Полигон. Гистограмма

Көптеген кездейсоқ жағдайлар бағынатын белгілі бір заңдылықтарды қорытып шығару үшін, статистикалық есептерді пайдаланады. Ол үшін бірталай уақыт тәжірибелер мен сынаулар жүргізіп, олардың қорытындысын жинақтайды.

Математикалық статистиканың 1-ші есебі статистикалық мәліметтерді жинақтаудың әдістерін, топтамаларын көрсету. Математикалық статистиканың 2-ші есебі – зерттеудің мақсатына сай статистикалық мәліметтерге талдау жасау, зерттеу әдістерін көрсетіп, тәжірибелік қорытынды жасау.

Сонымен, математикалық статистика әдістерінің мақсаты статистикалық мәліметтерді жинастыру, осы мәліметтерді өңдеу, бағалау, болжамдардың дұрыстығын тексеру, қандай да болмасын белгіні санмен өлшеу.

Қандай да болмасын статистикалық мәліметтерді жинау объектілер жиынын қарастырудан басталады. Зерттеуші барлық объектілерді бірден талдауы мүмкін емес. Себебі, бір объектіні талдап, екінші объектіге көшкенде олардың сапасы, сандық қасиеті, реттік белгілері, түсі, қуаты, т.б. белгілері өзгеріп отырады. Бұл жағдайда, талдаушы немесе зерттеуші олардың біреуін таңдап, ал қалған объектілерді таңдалған объектіге **тең құқылы жиын** деп қабылдайды. Осылайша таңдалған тең құқылы объектілер жиыны **біртекті жиын** деп аталады. Біртекті жиындар **статистикалық жиынтық** деп аталады.

Анықтама. Таңдама жиынтық деп кездейсоқ алынған объектілердің жиынын айтады.

Статистикалық жиынтық сандық немесе сапалық белгіге ие болатын барлық біртекті жиындардың жиыны **бас жиынтық** деп аталады. Бас жиынның бірліктер саны санаулы шексіз болуы мүмкін.

Анықтама. Егер бас жиын шексіз болса, онда зерттеу үшін алынған оның бір бөлігі **таңдама жиынтық** деп аталады.

Көп жағдайда бас жиынтық (басжиын) өте көп болуы мүмкін, бұл жағдайда зерттеу үшін бас жиынтықтың бір бөлігін, яғни таңдаманы қарастыруды қажет етеді.

Жиынтық көлемі деп жиынтықтағы объектілер санын айтады.

Мысал. 25000 детальдан зерттеуге 300 деталь алынсын. Сонда $N = 25000$ бас жиынтық, ал $n = 300$ таңдама жиынтықтың көлемі болады. Таңдаманың көлемі бойынша бас жиынтықтың толық белгілері жайында толық қорытынды жасау қажет.

Таңдама құрастырудың тәсілдерін қарастырайық.

1. Кездейсоқ таңдау. Бұл жерде жеке бірліктерді таңдау үшін не теңгені, не ойын кубын лақтыру арқылы жеребе тастаумен немесе кездейсоқ сандар кесте арқылы анықтайды. Бұл жағдайда, жиынтықтың әрбір бірлігінің таңдамада болу мүмкіндігі бірдей болады. Таңдама бірліктерін мұндай тәсілмен алу көп жұмысты ұзақ орындауға әкелетіндіктен, оны тәжірибеде сирек қолданады.

2. Механикалық таңдау. Объект бірліктерін ойша нөмірлеп, біріншісін 5, содан соң оны 5-ке арттырып, 10, 20, т.т. осы алынған нөмірлерге 1-ді қосып, 6-ны 11-ді, 21-ді, т.т. алу арқылы таңдаманы ұйымдастырады, т.с.с.

3. Сериялық таңдау. Бұл жағдайда таңдама серия бойынша кездейсоқ алынып жасалады. Ал кездейсоқ алынған серияның бірліктерін бақылау жаппай орындалады.

4. Типтік таңдау. Бас жиынды қандай да бір белгі бойынша біртекті жиынтықтарға бөледі, сөйтіп одан бізге қажетті бірліктерді кездейсоқтық тәртіппен алады.

Бақылау нәтижесінде қарастырып отырған белгінің жиынтығы әрбір бірлікке қатысты сандық немесе сапалық өзгерісі туралы мәлімет аламыз. Статистикалық бақылау мақсаты сол жиынтықта белгінің өзгеруін (вариациясы) шешу. Ал белгінің мүмкін мәндерін статистикада варианттар деп айтады. Варианттар сандық-дискретті немесе үзіліссіз болуы мүмкін.

Тәжірибе жүргізгенде белгілі мәндер қалай болса солай орналасуы мүмкін. Мысалы, бір бұйымды тексергенде оның өлшемі 15, 12, 16, 12, 13, 14, 16, 13, 14, 12 болып шықты. Мұны реттеп жазсақ, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 16 болар еді. Мұндай жазу өте ұзақ уақытты қажет етеді. Мұны ықшамдап кесте түрінде жазайық:

1-кесте

x	12	13	14	15	16	Σ
n_i	3	2	2	1	2	10

Бұл кестенің жоғары жолында белгі мәндері (варианттар), ал төменгі жолында әрбір мәннің неше рет кездесетіні келтіріледі. Осылайша реттелген кесте **вариациялық қатар** деп аталады. Көп жағдайда бұл терминнің орнына **үлестіру қатары** немесе **белгінің эмпирикалық (тәжірибелік) үлестіруі** деп те айтады.

Әдетте белгіні кездейсоқ шамалар сияқты $X, Y, Z, \dots$ әріптерімен белгілеп, оның қабылдайтын мәндері (варианттары) сәйкес $x_1, x_2, \dots, x_k$; $y_1, \dots, y_n$; $z_2, \dots, z_m$ таңбалары арқылы белгіленеді. Варианттар қайталанып отыруы да мүмкін. Ол қайталанулардың абсолютті санын (жиілігін) $n_1, n_2, \dots, n_k$ деп белгілейміз, онда вариациялық қатардың жалпы түрі мына кесте түрінде беріледі:

2 кесте

X	x_1	x_2	...	x_k	Σ
n_i	n_1	n_2	...	n_k	n

Тәжірибеде варианттар абсолютті жиілікпен қатар салыстырмалы жиілік түрінде де беріледі. Бұл жағдайда 3-кестеде былай жазылады:

3-кесте

X	x_1	x_2	...	x_k	Σ
f_i	f_1	f_2	...	f_k	1,00

мұндағы $f_i = \frac{n_i}{n}$ – салыстырмалы жиілік, $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

Егер вариация үзіліссіз өзгертін болса, онда вариациялық қатарды интервал бойынша құруға тура келеді. Жалпы түрде интервалдық қатар мына түрлерде беріледі:

4-кесте

X	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	...	(x_m, x_{m+1})
n_i	n_1	n_2	...	n_m

5-кесте

X	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	...	(x_m, x_{m+1})
f_i	f_1	f_2	...	f_m

мұндағы $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_m, x_{m+1})$ – аралықтары белгінің мүмкін мәндері тиісті интервалдар. $k_1 = x_2 - x_1, k_2 = x_3 - x_2, \dots, k_m = x_{m+1} - x_m$ айырымдары интервал кеңдігін (ұзындығын) сипаттайды. Ал мұндағы k_i мәндері әртүрлі болуы да мүмкін. Біз келешекте интервалдар ұзындығын бірдей деп қарастырамыз, яғни $k_1 = k_2 = \dots = k_m$.

Статистикалық үлестіруді интервалдар тізбегі және оларға сәйкес жиіліктер түрінде де беруге болады.

Мысалы. Көлемі 20 болатын таңдама жиілігінің үлестіруі берілген:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

$f_i = \frac{n_i}{n}$ салыстырмалы жиіліктің үлестіруін жаз.

Шешуі. $n = 3 + 10 + 7 = 20$ таңдама көлемі. Жиіліктерін таңдама көлеміне бөліп, салыстырмалы жиіліктерін табамыз:

$$f_1 = \frac{3}{20} = 0,15, \quad f_2 = \frac{10}{20} = 0,50, \quad f_3 = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Тексеру: $0,15 + 0,5 + 0,35 = 1$.

Көрнекті болу үшін статистикалық таралудың әртүрлі сызбаларын салады. Жеке жағдайда полигон және гистограмма.

Анықтама. Жиілік полигоны деп $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ нүктелерін қосатын сызықты айтамыз. **Үлестіру полигоны** деп $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_k, f_k)$ мәндерін қосатын сынық сызықты көпбұрышты айтады. Салыстырмалы жиіліктің полигонын салу үшін абсциссалар осіне x_i варианттарын, ал ординаталар осіне f_i жиіліктерін саламыз. (x_i, f_i) нүктелерін кесінділермен жалғастырып салыстырмалы жиіліктің полигонын аламыз.

Үзіліссіз белгілер жағдайында гистограмманы салған дұрыс. Ол үшін белгінің барлық мәндері орналасқан интервалды ұзындығы n болатын n бөлікке бөлеміз.

Анықтама. Биіктігі $\frac{n_i}{h}$, ал ұзындығы h болатын тікбұрышты баспалдақтардан тұратын фигура **гистограмма** деп аталады.

Бақылау сұрақтары

1. Бас және таңдама жиынтықтар.
2. Полигон. Гистограмма.

20.2. Үлестіру параметрлерінің статистикалық бағасы. Бас және таңдама орталар. Бас және таңдаулы дисперсиялар

Әдетте үлестірудің көп сипаттамалары болады, ал бұл статистикалық зерттеулерді өте қиындатады. Сондықтан берілген статистикалық жиынтықтың негізгі қасиеттерін кеңейтілген түрде көрсететін сан жағынан аз сипаттамаларды (параметрлер) анықтап алу қажет.

Эмпирикалық үлестірулердің аса маңызды көңіл аударатын сипаттамаларына (параметрлері) әртүрлі орталар (арифметикалық орта, гармоникалық орта, медиана, мода, квартильдер, децильдер, т.б.), сондай-ақ түрлі ауытқу (шашырау) өлшеуіштер (күлаш, абсолютті ауытқу, орташа квадраттық ауытқу, дисперсия, вариация коэффициенті, т.б.) жатады. Осы аталған параметрлердің басым көпшілігінің атауларымен ықтималдықтар теориясынан таныспыз. Сондықтан, ықтималдықтар теориясында қарастырылған параметрлерді (сипаттамалар) **теориялық параметр** деп атаймыз да, ал тәжірибеден алынған сәйкес параметрлерді **эмпирикалық** немесе **тәжірибелік** немесе **статистикалық параметр** дейтін боламыз.

Теориялық және тәжірибелік параметрлердің құрылымы мен қасиеттері және сандық есептеулері бір-бірімен ұқсас екенін байқау қиын емес. Сондықтан, тәжірибелік параметрлерді шолу ретінде қарастырып, есеп шығаруға пайдаланамыз, бұлардың теориялық параметрлерге қаншалықты жинақталуын бағалаймыз және әртүрлі гипотезаларды (болжамдар) тексерудегі алып тұрғын орнын баяндаймыз.

Арифметикалық орта. Арифметикалық ортаны есептеу формулалары әртүрлі, орталардың ішінде статистикада ең кең қолданылатыны – арифметикалық орта. Бұл басқаларына қарағанда мағынасы жағынан да және есептелу тәсілі жағынан да қарапайым. Арифметикалық ортамен ықтималдықтар теориясында бірнеше рет кездесіп отырдық. Және де оның қасиеттері математикалық үміттің қасиеттеріндей болғандықтан, оның анықтамасын келтіріп, ал қасиеттерін дәлелдеусіз келтіреміз.

Анықтама. X белгінің $\bar{x}$ **арифметикалық ортасы** деп варианттардың сандық қосындысының сол варианттардың жалпы санына (көлеміне) қатынасын айтады, яғни

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (20.1)$$

Көп жағдайда белгінің дискретті үлестіруі 6-кесте түрінде келтірілген вариациялық қатармен беріледі:

6-кесте

x	x_1	x_2	$\dots$	x_k	Σ	
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k	n	

мұндағы $x_i (i = 1, 2, \dots, k)$ – варианттар (белгінің мәндері), $n_i (i = 1, 2, \dots, k)$ – варианттар салмағы (жиілігі), $n = \sum_{i=1}^k n_i$. Бұл жағдайда топтастырылған варианттар үшін (20.1) формуласы былай жазылады:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i. \quad (20.2)$$

Ал салыстырмалы жиілік үшін $f_i = \frac{n_i}{n}$ теңдігі орындалатынын ескерсек, онда

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k f_i x_i. \quad (20.3)$$

(20.2) және (20.3) формулаларымен өрнектелген арифметикалық орта топтастырылған немесе **салмақтық** (салыстырмалы) **арифметикалық орта** деп аталады.

Гармоникалық орта: $\bar{x}_{\text{гарм}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}}$.

Геометриялық орта: $\bar{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^k x_i}$.

Дәрежелік орта: $\bar{x}_\alpha = \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i x_i^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Арифметикалық ортаның қасиеттерін қарастырайық.

1-қасиет. Тұрақтының арифметикалық ортасы сол тұрақтыға тең, яғни $x_1 = x_2 = \dots x_k = C - const$ болса, онда $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C = C$.

2-қасиет. Варианттардың арифметикалық ортадан ауытқуларының қосындысы нөлге тең, яғни $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$,
 $\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x}) = 0$.

3-қасиет. Егер белгінің әрбір мәнін тұрақты a -ға өсірсек (кемітсек), онда арифметикалық орта да сол тұрақтыға өседі (кемиді) яғни

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i \pm a) = \bar{x} \pm a.$$

4-қасиет. Егер белгінің әрбір мәнін тұрақты C -ға көбейтсек (бөлсек), онда арифметикалық орта да C -ға көбейтіледі (бөлінеді), яғни

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (Cx_i) = C\bar{x}; \quad \bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \left(\frac{x_i}{C} \right) = \frac{\bar{x}}{C}.$$

5-қасиет. X және Y белгілер қосындысының (айырымы) арифметикалық ортасы олардың арифметикалық орталарының қосындысына (айырымы) тең, яғни $Z = X \pm Y$ болса, онда $\bar{Z} = \bar{X} \pm \bar{Y}$.

6-қасиет. $\bar{x} = a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - a)$, a – кез келген тұрақты.

Бұл қасиет мына түрде де жазылады:

$$\bar{x} = a + \left[\frac{l}{n} \sum_{i=1}^k \frac{n_i (x_i - a)}{l} \right] l,$$

мұндағы l – тұрақты көбейткіш.

Анықтама. Іріктеулі жиынның арифметикалық ортасы $\bar{x}_e$ **іріктеулі орта** деп аталады.

Іріктеулі жиынның n көлемінің мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ әртүрлі болса, онда

$$\bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{n}$$

статистикалық (эмпирикалық) орта деп аталады.

Егер белгінің $x_1, x_2, \dots, x_k$ мәндері әрі олардың сәйкес $n_1, n_2, \dots, n_k$ әртүрлі жиіліктері және $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ болса, онда

$$\bar{x}_e = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}$$

жалпы немесе **таңдама орта** деп аталады.

Енді n көлемді X сандық белгісінің кез келген мәндерін қарастырайық: белгінің мәндері $x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k$ жиілігі

$n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k$ және $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Жалпы ортаны табамыз: $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$. Осыдан

$$\sum n_i x_i = n \bar{x}. \quad (20.4)$$

$\bar{x} - const$ болғандықтан

$$\sum n_i \bar{x} = \bar{x} \sum n_i = n \bar{x}. \quad (20.5)$$

Анықтама. Белгінің мәнімен жалпы орта айырымы $x_i - \bar{x}$ **ауытқу** деп аталады.

Теорема. Ауытқу мен сәйкес жиіліктерінің көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең, яғни

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Ауытқудың таңбалары әртүрлі болғандықтан, оларды қосқан кезде олар бір-бірімен жойылып, қосынды нөлге тең болады.

Мысал. X сандық белгісінің үлестіруі берілген

x_i	1	2	3
n_i	10	4	6

Ауытқуы мен сәйкес жиіліктерінің көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең болатынын анықтайық.

Шешуі. Жалпы ортаны табамыз $\bar{x} = \frac{10 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{20} = 1,8$.

Ауытқумен сәйкес жиіліктерінің көбейтіндісінің қосындысын табайық:

$$\sum n_i(x_i - \bar{x}) = 10 \cdot (1 - 1,8) + 4 \cdot (2 - 1,8) + 6 \cdot (3 - 1,8) = 8 - 8 = 0.$$

Анықтама. Квадрат ауытқудың арифметикалық ортасы D_Γ **бас дисперсия** деп аталады және ол мына формуладан есептеледі:

$$D_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_\Gamma)^2}{n}.$$

Егер X белгінің $x_1, x_2, \dots, x_k$ мәндерінің сәйкес $n_1, n_2, \dots, n_k$ жиіліктері және $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ болса, онда

$$D_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^k n_i(x_i - \bar{x}_\Gamma)^2}{n}.$$

Мысал. Бас жиынтық үлестіру кесте арқылы берілсін

x_i	2	4	5	6
n_i	8	9	10	3

Бас дисперсияны есептейік.

Шешуі. Бас ортаны табайық:

$$\bar{x}_\Gamma = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4.$$

Енді бас дисперсияны табамыз:

$$D_\Gamma = \frac{8 \cdot (2 - 4)^2 + 9 \cdot (4 - 4)^2 + 10 \cdot (5 - 4)^2 + 3 \cdot (6 - 4)^2}{30} = \frac{54}{30} = 1,8.$$

Анықтама. Бас дисперсияның квадрат түбірі **бас орта квадраттық ауытқу** $\sigma_\Gamma = \sqrt{D_\Gamma}$ деп аталады.

Анықтама. Егер таңдама n көлемді белгінің $x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндері әртүрлі болса, онда **таңдама дисперсия** мына формуладан есептеледі:

$$D_\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_\sigma)^2}{n}.$$

Егер белгі $x_1, x_2, \dots, x_k$ мәндерінің сәйкес $n_1, n_2, \dots, n_k$ жиіліктеріне $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ теңдігі орындалса, онда **таңдама дисперсия** мына формуладан анықталады:

$$D_{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_{\varepsilon})^2}{n}.$$

Мысал. Таңдама жиынтық мына үлестіру кестемен берілген

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5.

Таңдама дисперсияны есептеңдер.

Шешуі. Таңдама ортаны табамыз

$$\bar{x}_{\varepsilon} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Енді таңдама дисперсияны есептейік:

$$D_{\varepsilon} = \frac{20 \cdot (1-2)^2 + 15 \cdot (2-2)^2 + 10 \cdot (3-2)^2 + 5 \cdot (4-2)^2}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Анықтама. Таңдама дисперсияның квадрат түбірі $\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}}$ таңдама орта квадраттық ауытқуы немесе стандарт деп аталады.

Дисперсияны есептеуді жеңілдету үшін төмендегі теореманы пайдаланған тиімді болады.

Теорема. Дисперсияның мәні белгі мәндерінің орта квадраттарынан жалпы ортаның квадратын алғанға тең, яғни

$$D = \bar{x}^2 - [\bar{x}_b]^2,$$

$$\text{мұндағы } \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2, \quad [\bar{x}_b]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2.$$

Мысалы. Таңдама жиынтық мына үлестіру кестемен берілген:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5.

Шешуі. Жалпы ортаны табайық:

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Белгі мәндерінің квадраттарының ортасын табайық:

$$\bar{x}^2 = \frac{20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2}{50} = 5$$

Сонда дисперсия мынаған тең болады $D = \bar{x}^2 - [\bar{x}]^2 = 5 - 2^2 = 1$.

20.3. Медиана. Ауытқулар

Жоғарыда айтылған орталар, үлестірудегі варианттар мәндерімен тығыз байланыста болады. Ал қарастырайық деп отырған құрылымдық (структуралық) орта болса, үлестіру ұштарында орналасқан варианттар мәндеріне тәуелсіз болып, реттелген варианттар қатарына, яғни үлестіру құрылымына ғана байланысты. Құрылымдық ортаға **медиана** мен **мода** жатады.

Анықтама. Жиынтықты тең екіге бөлетін белгінің мәні **медиана** деп аталады және ол M_e таңбамен белгіленеді.

Егер белгінің өзгеруші мәндері тақ болып, ұлғаю ретімен орналасса, яғни $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2n-1}$, онда бұл үлестіру үшін M_e медиана x_m варианттарға тең, яғни $M_e = x_m$. Себебі, $M_e = x_m$ -нен төменде және жоғарыдан да белгінің саны бірдей $m-1$ мәндері орналасқан.

Ал варианттар саны жұп болса, яғни $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m}$, онда бұл жиынтықты тең екіге бөлетін медиана мәні (x_m, x_{m+1}) аралығына тиісті болады. Бұл жағдайда медиана M_e -нің мәні осы екі варианттың арифметикалық ортасы болады, яғни $M_e = 0,5(x_m + x_{m+1})$.

1-мысал. X -тің кабылдайтын мәндері 1; 3; 7; 10; 14 болса, онда $M_e=7$, өйткені варианттар саны 5, сондықтан $5=2m-1$ бұдан $m=3$ -ке сәйкес X -тің мәні 7-ге тең.

2-мысал. Егер X -тің мәндері 1; 3; 6; 10; 14; 17 болса, онда $M_e=8$, себебі варианттар саны 6 (жұп), сондықтан $2m=6$, бұдан $m=3$. Демек,

$$\frac{M_e - x_{M_e(\min)}}{k} = \frac{\frac{N}{2} - s_{M_e} - 1}{n_{M_e}}.$$

Мода (M_o). Берілген вариациялық қатардың ең жиі кездесетін вариантасы **мода** деп аталады.

Үлестіру дискретті болғанда моданы анықтау қиынға соқпайды. Бұл жағдайда, ең жоғары жиілікке сәйкес варианттың мәні мода болады (мода бірнешеу болуы да мүмкін).

Ал интервалды вариациялық қатар модасын анықтау күрделі. Бұл жерде де медиананы есептеген сияқты анықталады, яғни алдымен мода болатын интервалды анықтайды (мұндай интервалдар бірнешеу болуы да мүмкін) одан соң моданың сандық мәні табылады. Бұл жағдайда, моданың жуық мәнін мына формуладан анықтаймыз:

$$M_0 = x_{M_0(\min)} + k \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{(n_{M_0} - n_{M_0-1}) + (n_{M_0} - n_{M_0+1})},$$

мұндағы $x_{M_0(\min)}$ – модалық интервалдың төменгі шекарасы, k – модалық интервалдың ұзындығы, n_{M_0} – модалық интервалға сәйкес жиілік, n_{M_0-1} – модалық интервал алдындағы интервалға сәйкес жиілік, n_{M_0+1} – модалық интервалдан кейінгі интервалға сәйкес жиілік.

Ауытқу сипаттамаларының ішіндегі ең қарапайымы **вариация құлашы**. Мұның мәні (R) белгінің максимум және минимум мәнінің айырымына тең, яғни

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (R = x_{\max} - x_{\min}).$$

1-мысал. 10 деталь салмағын өлшеу нәтижесінде төмендегі нәтиже алынған (граммен): 64; 68; 70; 71; 74; 75; 77; 79; 80; 82. Құлаш мәнін анықтау керек.

Шешуі. $R = x_{\max} - x_{\min} = 82 - 64 = 18$.

Әрине вариация құлашы белгінің ауытқу дәрежесін өте жуық шамамен бағалайды.

Сызықтық ауытқу. Ауытқудың дәлірек бағасын белгі (x_i) мәндерінің $(x_i - \bar{x})$ арифметикалық ортадан ауытқуын ескеруге де болады. Бірақ $x_i - \bar{x}$ таңбалары әртүрлі болып келуі мүмкін болғандықтан, олардың қосындысы нөлге тең болады, яғни

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (20.6)$$

Мұндай өзара жойылуды болдырмау үшін кездейсоқ ауытқу мәніне сол айырымдардың абсолютті шамасын $|x_i - \bar{x}|$ алады. Сонымен, ауытқудың абсолютті шамалары қосындысының

арифметикалық ортасын сызықтық ауытқу мөлшері ретінде қабылдаймыз. Бұл ауытқу мәні топтастырылмаған вариациялық қатар үшін

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}|,$$

ал жиіліктері топтастырылған вариациялық қатар үшін теңдіктері орындалады.

$$d = \overline{|x_i - \bar{x}|} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i |x_i - \bar{x}|, \quad d = \sum_{i=1}^k f_i |x_i - \bar{x}|$$

Сызықтық ауытқу өлшемі қарастырып отырған белгі шама өлшеміндей. Ал статистикада өлшемдері бірдей белгіні ғана қарастырмастан өлшемдері әртүрлі белгілерді де салыстыруға тура келеді. Шешу үшін вариация коэффициентін енгіземіз.

Вариация коэффициенті

$$v = \frac{\overline{|x_i - \bar{x}|}}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (20.7)$$

формуладан анықталады.

Бұл формуладан вариация коэффициентіне сызықтық вариация коэффициенті абсолютті ауытқудың арифметикалық ортаға қатынасының орта проценті алынатынын байқаймыз.

Мысалы, 1 3 4 5 6 10 қатары үшін құлаш $10 - 1 = 9$ құлаш вариациялық қатардың ең қарапайым сипаттамасы болады.

Анықтама. Абсолют ауытқудың арифметикалық ортасы **орта абсолют ауытқу** деп аталады

$$\theta = \frac{\sum n_i |x_i - \bar{x}_e|}{\sum n_i}.$$

Мысалы, мына қатар үшін

x_i	1	3	6	16
n_i	4	10	5	1

$$X_B = \frac{4 + 30 + 30 + 16}{20} = 4,$$

$$\theta = \frac{4(1-4) + 10(3-4) + 5(6-4) + 1(16-4)}{20} = 0.$$

Анықтама. Таңдама орта квадраттық ауытқудың таңдама ортаға қатынасының проценті **вариация коэффициенті** деп аталады

$$V = \frac{\sigma_{\varepsilon}}{\bar{x}_{\varepsilon}} \cdot 100\%.$$

Вариация коэффициенті вариациялық қатарларды салыстыру үшін қажет, вариация коэффициенті көп болса, вариациялық таралу да көп.

Бақылау сұрақтары

1. Бас орта.
2. Таңдама орта.
3. Бас дисперсия.
4. Таңдама дисперсия.

20.4. Шартты варианттар. Эмпирикалық моменттер

Бізге таңдама варианттары өспелі түрде, яғни вариациялық қатар түрінде берілсін. Егер берілген варианттардың айырмасы h және ол арифметикалық прогрессия қатар болса, онда ол **бірлшақты** деп аталады.

Анықтама. Мына теңдікпен жинақталатын варианттар **шартты вариант** деп аталады:

$$u_i = \frac{x_i - C}{h},$$

мұндағы C – жалған нөл (есептеменің жаңа басы), h – қатар екі варианттың айырымы.

Егер x_i таңдама варианта үлкен сандар болса, онда есептеуді жеңілдету үшін әр варианттан C тұрақтыны азайтқан тиімді. Нәтижесінде алғашқы варианттардың орнына шартты вариантты қарастыратын боламыз. Әдетте C тұрақтының орнына орта таңдама алынады.

Таңдама сипаттамаларының жиынтығын есептеуді жеңілдету үшін алғашқы варианттарды шартты вариантпен ауыстырамыз.

Варианттық қатар h арақашықтық бірдей алшақты варианттардан тұрса, шартты варианттардың бүтін сан болатынын көрсетейік. Жалған нөл ретінде кез келген x_m вариантын алайық. Сонда

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{h} = \frac{x_1 + (i-1)h - [x_1 + (m-1)h]}{h} = i - m,$$

мұндағы i, m – сандары бүтін сан болғандықтан олардың айырымы да $i - m = u_i$ бүтін сан.

1-ескерту. Жалған нөл ретінде кез келген вариантты алуға болады.

Дегенмен, вариациялық қатардың орта деңгейінде тұрған вариантты алса, есептеу жеңіл болады.

2-ескерту. Жалған нөл ретінде алынған вариантқа нөлге тең шартты вариант сәйкес келеді.

Анықтама. X кездейсоқ шаманың кез келген C тұрақтыдан ауытқуының k дәрежесінің математикалық үміті осы тұрақтыға қатысты k **ретті момент** деп аталады, яғни $M_k(X) = M(X - C)^2$.

Егер $C = 0$ болса, онда k **ретті алғашқы момент** деп аталатын моментті аламыз және ол v_k таңбамен белгіленеді: $v_k = M(X^k)$.

Егер X дискретті кездейсоқ шама болса, онда

$$v_k = \sum_i X_i^k p_i,$$

үзіліссіз кездейсоқ шама болса, онда

$$v_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Тәжірибеде бастапқы төрт моментті (нөл ретті моментті есептемегенде) қарастырады. Сондықтан, солардың сәйкес бастапқы, центрлік моменттерінің формуласын дәлелсіз келтіріп, олардың арасындағы тәуелділікті көрсететін формулаларды жазайық.

Қалаған тұрақты C -ға қатысты h **ретті момент**

$$M_h = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - C)^h$$

формуламен анықталады. Егер $C = 0$ болса, онда v_h **бастапқы моментті** аламыз:

$$v_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^h, \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

Ал $C = \bar{x}$ болса, m_h – **центрлік момент** деп аталатын моментті аламыз:

$$m_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^h, \quad h = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Сонымен, $h = 0, 1, 2, 3, 4$ болғанда бастапқы моменттер сәйкес мына түрлерде анықталады:

$$v_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^0 = 1, \quad v_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \bar{x}, \quad v_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 = \bar{x}^2,$$

$$v_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^3 = \bar{x}^3, \quad v_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^4 = \bar{x}^4.$$

Осы сияқты $h = 0, 1, 2, 3, 4$ болғанда центрлік моменттер сәйкес мына түрлерде анықталады:

$$m_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^0 = 1, \quad m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}) = 0,$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = s^2, \quad m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^3, \quad m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^4.$$

Центрлік моменттерді жоғарыдағы формулалармен есептеу көп уақытты қажет етеді. Сондықтан бастапқы моменттерді есептеу формуласын пайдаланған тиімді. Олай болса, центрлік моменттер мен бастапқы моменттер арасындағы тәуелділікті айқындайтын мына формулаларды пайдалануымыз керек:

$$m_0 = v_0 = 1, \quad m_1 = (x - \bar{x}) = \bar{x}_i - (\bar{x}) = v_1 - v_1 = 0, \quad m_2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = v_2 - v_1,$$

Мысал. Статистикалық үлестірудің шартты вариантын тап

варианттар	23,6	28,6	33,6	38,6	43,6
жиілігі	5	20	50	15	10.

Шешуі. Вариациялық қатардың ортасында тұрған 33,6 вариантын жалған нөл деп алайық және $h = 28,6 - 23,6 = 5$ айырымын табамыз. Шартты вариантты есептейік: $u_1 = \frac{x_1 - C}{h} = \frac{23,6 - 33,6}{5} = -2$. Сол сияқты $u_2 = -1$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$.

Шартты варианттар аса үлкен емес, бүтін сандар және олардың көмегімен есептеу әлдеқайда жеңіл. Таңдаманың жалпы сипаттамаларын есептеуге эмпирикалық моменттерді қолданған қолайлы.

Нормаль эмпирикалық моменттер мына формуламен есептеледі:

$$M'_k = \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n},$$

мұндағы x_i – вариант; n_i – вариант жиілігі; $n = \sum n_i$ – таңдама көлемі; C – жалған нөл.

Анықтама. $C = 0$ болғанда k ретті бастапқы момент мына формуладан есептеледі: $M_1 = \frac{\sum n_i x_i^k}{n} = 0$, яғни бастапқы эмпирикалық момент іріктеулі ортаға тең.

Дербес жағдайда $M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}_e$.

Анықтама. $C = \bar{x}_e$ болғандағы k ретті қалыпты моментті k ретті орталық эмпирикалық момент деп аталады:

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^k}{n}.$$

Дербес жағдайда

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^2}{n} = D_e,$$

яғни 2-ретті орталық эмпирикалық момент таңдама дисперсияға тең. Орталық моменттерді есептеу көп жағдайда қиыншылық туғызады.

Анықтама. Шартты варианттар үшін k ретті бастапқы момент k ретті шартты эмпирикалық момент деп аталады.

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)^k}{n}.$$

Дербес жағдайда,

$$M_1^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)}{n} = \frac{1}{h} \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - C \frac{\sum n_i}{n} \right] = \frac{1}{h} (\bar{x}_B - C).$$

Бұдан

$$\bar{x}_B = M_1^* \cdot h + C.$$

Бірдей алшақтықтағы вариациялық қатардың әртүрлі ретті шартты моменттерін есептеудің ең жеңіл тәсілі – **көбейтулер әдісі**. Шартты моменттерді тапқан соң, бастапқы, орталық моменттерді есептеу оңай. Дербес жағдайда, көбейту әдісімен таңдама орта мен таңдама дисперсияны есептеу жеңіл, ол үшін төмендегідей құрылатын есептеу кестені қолданған тиімді:

1-тік жолға, өсу ретіне қарай варианттар жазылады;

2-тік жолға, варианттар жиілігі жазылады, осы тік жолдың ең төменгі торына осы варианттардың қосындысы (n таңдама көлемі) жазылады;

3-тік жолға, $u_i = \frac{x_i - C}{h}$ шартты варианттар жазылады, ең үлкен жиілік бар жерге C – жалған нөл жазылады, одан жоғары $-1, -2, -3 \dots$, ал төмен $1, 2, 3 \dots$ сандары жазылады;

4-тік жолға, n_i шартты варианттарды u_i жиіліктеріне көбейтіп, $n_i u_i$ көбейтіндіні жазады, осы тік жолдың ең төменгі торына олардың $\sum n_i u_i$ қосындысын жазады;

5-тік жолға, n_i шартты варианттарды u_i жиіліктерінің квадраттарына көбейтіп жазады, яғни $n_i u_i^2$, осы тік жолдың ең төменгі торына олардың $\sum n_i u_i^2$ қосындысын жазады;

6-тік жолға, n_i шартты варианттарды $u_i + 1$ жиіліктің квадратына көбейтіп жазады, осы тік жолдың ең төменгі торына олардың $\sum n_i (u_i + 1)^2$ қосындысы жазылады.

Есептеу кестесі толтырылып, дұрыстығы тексерілгеннен кейін, шартты моменттер есептеледі:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}, \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}.$$

Ең соңында, таңдама орта мен таңдама дисперсия мына формуламен есептеледі:

$$x_B = M_1^* \cdot h + C, \quad D_B = \left[M_2^* - (M_1^*)^2 \right] h^2.$$

Мысал. Таңдама ортаны, дисперсияны көбейту әдісімен табу керек:

Вариант	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
тар										
жиілігі	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Шешуі. Есептеу кестесін құрайық:

Ол үшін: 1) варианттарды 1-тік жолға жазамыз;

2) жиілігін 2-тік жолға, ең төменгі клеткаға қосындысын (100) жазайық;

3) жалған нөл ретінде ең үлкен жиілігі бар 11,0 вариантын аламыз, одан жоғары -1, -2, -3, -4, ал төмен 1, 2, 3, 4, 5 сандарын жазамыз;

4) жиіліктердің шартты варианттарға көбейтіндісін 4-тік жолға, теріс және оң сандардың қосындыларын тауып қоссақ $(-46)+(103)=57$ болады, оны тік жолға ең төменгі торына жазамыз;

5) жиіліктің шартты варианттарының квадратына көбейтіндісін 5-тік жолға, ал олардың қосындысын ең төменгі торға 383 жазамыз;

6) жиіліктің 1 қосылған шартты вариантының квадартты көбейтіндісін 6-тік жолға, ал олардың ең төменгі торға 597 жазамыз.

Сонымен, мына кестені құрдық:

7-кесте

x_i	x_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
10,2	2	-4	-8	32	18
10,4	3	-3	-9	27	12
10,6	8	-2	-16	32	8
10,8	13	-1	-13	13	0
11,0	25	0	$A_1 = -46$		25
11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			$A_2 = 103$		
	$n = 100$		$\sum n_i u_i = 57$	$\sum n_i u_i^2 = 383$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597$

Тексеру: $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 383 + 2 \cdot 57 + 100 = 597$. $\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597$.
Есептеулер дұрыс.

1-ші және 2-ші ретті шартты моменттерін есептейік

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0,57; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 3,83.$$

Қадамды табайық: $h = 10,4 - 10,2 = 0,2$. Таңдама орта мен таңдама дисперсияны есептейік:

$$\overline{x_B} = M_1^* \cdot h + C = 0,57 \cdot 0,2 + 11,0 = 11,1;$$

$$D_B = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [3,83 - (0,57)^2] \cdot 0,2^2 = 0,14.$$

Бақылау сұрақтары

1. 1-ші және 2-ші ретті орталық моменттердің анықтамасы.
2. Көбейтінді әдісінің алгоритмі.

20.5. Сенімділік интервалы. Сенімділік ықтималдығы

Анықтама. Бір санмен анықталған бағалау **нүктелік бағалау** деп аталады.

Анықтама. Интервалдың екі шеткі санымен анықталған бағалау **интервалдық баға** деп аталады.

Айталық, таңдама мәліметтері бойынша $\tilde{\alpha}$ мен α белгісіз параметрдің бағасы болсын. $\alpha - \tilde{\alpha}$ айырымының модулі мейілінше аз болған сайын баға нақты болады.

Егер $\delta > 0$ және $|\alpha - \tilde{\alpha}| < \delta$ болса, онда δ қаншалықты аз болса, соншалықты $\tilde{\alpha}$ бағалау нақты, ал δ саны бағалаудың нақтылығын сипаттайды.

Анықтама. $\tilde{\alpha}$ параметрінің α бағасының **сенімділік ықтималдығы** деп $|\alpha - \tilde{\alpha}| < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын γ -ның ықтималдығын айтамыз, яғни

$$P(|\alpha - \tilde{\alpha}| < \delta) = \gamma. \quad (20.8)$$

Мұндағы γ сенімділігі алдын ала беріледі, оның мәні 1-ге жуық болады. $|\alpha - \tilde{\alpha}| < \delta$ теңсіздігін $-\delta < \alpha - \tilde{\alpha} < \delta$ деп жазуға да болады, олай болса, (20.8) формуланы мына түрде жазайық:

$$P(\tilde{\alpha} - \delta < \alpha < \tilde{\alpha} + \delta) = \gamma. \quad (20.9)$$

Бұл $(\tilde{\alpha} - \delta, \tilde{\alpha} + \delta)$ интервал α белгісіз параметрді бүркей алуының ықтималдығы γ -ға тең дегенді білдіреді.

Анықтама. Сенімділігі γ болатын белгісіз параметрді бүркейтін $(\tilde{\alpha} - \delta, \tilde{\alpha} + \delta)$ интервалы **сенімділік интервал**, ал γ ықтималдығы **сенімділік ықтималдық** деп аталады.

Сенімділік интервалдың шеткі нүктелері **сенімділік интервалдың шекаралары** деп аталады. Сенімділік шекараларды кездейсоқ шамалар деп қарастыруға болады, себебі, олар таңдама өзгерген сайын өзгеріп отырады.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ таңдама бойынша сенімділік ықтималдығымен X кездейсоқ шаманың a математикалық үміті үшін $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ сенімділік интервалы мына теңсіздіктен анықталады:

$$\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (20.10)$$

мұндағы t -ның мәнін $2\Phi(t) = \gamma$ теңдеуінен табамыз, яғни Лаплас функциясының кестесінен табамыз.

Бақылау сұрақтары

1. Сенім интервалының анықтамасы.
2. Сенім ықтималдығының анықтамасы.
3. Белгісіз математикалық күтімнің сенім интервалын жазыңыз.

20.6. Ең кіші квадраттар әдісі

Жазықтықтағы n нүктелер жиынын қарастырайық:

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n).$$

Бұл нүктелер бір түзудің бойында жуықтап орналасқан деп ұйғарайық. Олай болса, x пен y айнымалылар сызықты байланыста болады, яғни

$$y = ax + b, \quad (20.11)$$

мұндағы a және b – параметрлер және олардың мәндерін анықтау қажет.

(20.11) теңдікті мына түрде жазайық:

$$ax + b - y = 0. \quad (20.12)$$

$M_k(x_k, y_k)$ нүктелері бір түзудің бойына жуықтап тиісті болғандықтан, (20.11) формулада жуықтап алынған. Олай болса, (20.12) формулаға x пен y -тің орнына $M_k(x_k, y_k)$ нүктенің x_k, y_k ($k = 1, 2 \dots n$) мәндерін қойсақ, мына жүйені аламыз:

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + b - y_1 &= \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 &= \varepsilon_2, \\ &\dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n &= \varepsilon_n, \end{aligned} \right\}, \quad (20.13)$$

мұндағы $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ – аздаған ауытқулар немесе қателіктер.

a және b коэффициенттерін осы қателіктер абсолют шамасы бойынша мейілінше аз болатындай етіп табу керек. Ең кіші квадраттар әдісі бойынша a және b коэффициенттерін

$$u = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \quad (20.14)$$

өте аз болатындай етіп табу қажет. Егер бұл қосынды мейілінше аз болса, ауытқулар да абсолют шамасы бойынша өте аз болады.

(21.13) теңдіктерді (21.14) формулаға қойсақ, сонда

$$u = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2. \quad (20.15)$$

u айнымалы a және b шамаларына тәуелді функция және a және b шамаларын анықтау керек. u өте аз болатындай етіп a және b шамаларын лайықтап алу қажет. Ол үшін $\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \frac{\partial u}{\partial b} = 0$ теңдіктері орындалуы қажет. a және b бойынша u функцияның дербес туындыларын тауып, нөлге теңестіріп, мына теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left. \begin{aligned} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k &= \sum_{k=1}^n x_k y_k; \\ a \sum_{k=1}^n x_k + b n &= \sum_{k=1}^n y_k, \end{aligned} \right\}$$

Осыдан a және b параметрлерді табамыз.

Мысал. X және Y шамаларының мынадай пәндерін аламыз:

x	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
y	2,10	2,20	2,70	2,80	2,85

Осы шамалардың арасындағы тәуелділікті және эмпирикалық формулалардың параметрлерін анықта. Айталық (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) қосарланған сандар жазықтықтағы тікбұрышты декарт координаттар жүйесіндегі нүктелердің координаттары деп алайық, $A(1; 2,1)$, $B(1,5; 2,2)$, $C(2; 2,7)$, $D(2,5; 2,8)$, $E(3; 2,85)$ нүктелерін салсақ, олар жуықтап бір түзуден аса алшақ болмайтынын көреміз. Олай болса, X және Y шамаларының арасында сызықтық тәуелділік барын көреміз, мұндағы a және b әзірге белгісіз. Теңдеулер жүйесін пайдаланып, эмпирикалық формуланың a және b параметрлерінің ең кіші квадраттар әдісі бойынша табамыз. Бұл жүйені пайдалану үшін, оған қатысты коэффициенттерді табу үшін мына кестені құрайық:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1,00	2,10	2,10	1,00
2	1,50	2,20	3,30	2,25
3	2,00	2,70	5,40	4,00
4	2,50	2,80	7,00	6,25
5	3,00	2,85	8,55	9,00
Σ	10,00	12,65	26,35	22,50

Кестенің соңғы жолында жүйенің мына түрдегі коэффициенттерін аламыз. $22,5a + 10b = 26,35$; $10a + 5b = 12,65$. Бұл жүйені шешкенде $a = 0,42$, $b = 1,69$ коэффициенттерін табамыз. Қорыта айтқанда, x және y арасындағы тәуелділік жуық шамамен былай өрнектеледі: $y = 0,42x + 1,69$.

Бақылау сұрақтары

1. Ең кіші квадраттар әдісі неге негізделген.
2. a мен b параметрлерін анықтайтын жүйені жаз.

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. Қасымов Қ. Ә., Қасымов Е. Ә. Жоғары математика курсы. Математикалық анализ. 3-т., 1-б. Алматы: Қазақ университеті, 2006.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т 2. М.: Высшая школа, 1981.
6. Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Высшая школа, 1984.
7. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Математический анализ. М.: Наука, 1984.
8. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. 1–3 т. Алматы: Мектеп, 1987.
9. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1977.
10. Демидович Б. П. Сборник упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.
11. Қасымов Қ. Ә., Қасымов Е. Ә. Жоғары математика курсы. Аналитикалық геометрия. Алматы: Санат, 1994.
12. Қасымов Қ. Ә., Қасымов Е. Ә. Жоғары математика курсы. Сызықты алгебра. Алматы: Санат, 1997.
13. Қасымов Е. Ә. Векторлық алгебра. Алматы: МНО РК РУМК, 1991.
14. Қасымов Е. Ә., Баймулдина С. А., Мустафина К. Қ. Санды тізбектер. Бір айнымалы функциялар. Алматы: МНО РК РУМК, 1991.
15. Қасымов Е. Ә. Аналитикалық геометрия. Алматы: МНО РК РУМК 1992.
16. Қасымов Е. Ә. Анықталмаған және анықталған интегралдарды құрылыста қолдану. Алматы: МНО РК РУМК, 1994.
17. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1982.
18. Қасымов Е. Ә. Математиканың арнайы курстары анализ. Алматы: ҚазҰТУ, 2005.
19. Қасымов Е. Ә. Жоғары математика. 1-б. Алматы: ҚазҰТУ, 2003.

20. *Сүлеймен Ж.* Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Қазақ университеті, 2009.
21. *Бектаев Қ.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: Рауан, 1991.
22. *Сүлейменов Ж., Қасымов Е. Ә.* Тұрақты коэффициентті біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табудың жаңа алгоритмі // Қазақстан жоғары мектебі, 2010. № 2 (1). 5–8 б.
23. *Жаңбырбаев Б. С.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: Мектеп, 1988.
24. *Қасымов Е. Ә., Баймолдина С. А., Алиынбаева Е. Қ., Мустафина К. Қ.* Жоғары математикадан дәріс курсы. 4-б. Алматы: МНО РК РУМК, 1998.
25. *Қасымов Е. Ә., Қасымов Ә. Ә.* Дифференциал теңдеуді құрылыста қолдану. Алматы: МНО РК РУМК, 1999.
26. *Хасеинов К. А.* Каноны математика. Алматы: Атамұра, 2002.
27. *Хасеинов К. А.* Математика канондары. Алматы: Атамұра, 2003.
28. *Хасеинов К. А.* Задачи и упражнения по инженерной математики. Ч. 1. Алматы: Полиграфкомбинат, 2008.
29. *Хасеинов К. А.* Задачи и упражнения по инженерной математики. Ч. 2. Алматы: Полиграфкомбинат, 2009.
30. *Khasseinov K.* Canons of mathematics. Moscow «Nauka», 2007.
31. *Айдос Е. Ж.* Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, 2003.
32. *Айдос Е. Ж.* Студенттердің өзіндік тапсырмалары. 1–4 б. Алматы, 2008.
33. *Әубәкір С. Б.* Жоғары математика. 1, 2 б. Алматы: ҚазҰТУ, 2000.

Оқулық басылым

Еділ Әбдіхалықұлы Қасымов
Бимұрат Жұмабекұлы Сағындықов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

3-бөлім

Оқу құралы

РБ бастығы

З. А. Ғұбайдулина

Редакторы

Т. С. Жақсыбаева

Компьютерлік беттеу

Д. Ш. Тажиева

Басуға қол қойылды 23.02.2014 ж.

Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84 1/16. №1 баспаханалық қағаз.

Көлемі 14,2 е-б.т. 13,2 ш.-б.т.

Тапсырыс № . Бағасы келісімді.

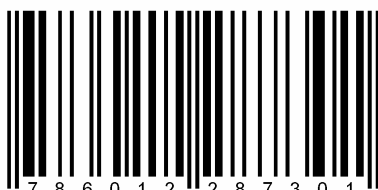
Қ. И. Сәтбаев атындағы

Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы,

Оқу-баспа орталығы.

Алматы, Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-228-730-1



9

7 8 6 0 1 2 2 8 7 3 0 1