МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный исследовательский технический
университет имени К. И. Сатпаева



К. К. Абдрахманова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕХНОЛОГИИ БЕТОНА

Рекомендовано Научно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2017

УДК 666.972 (075)
ББК 38.33 я73
А 13

Рецензенты:
Г. Б. Нурпеисова, д-р техн. наук,
проф. КазАДИ им. Л. Б. Гончарова
Ш. К. Жакипбеков, д-р техн. наук,
проф. КазНИТУ им.К. И. Сатпаева

Печатается по плану издания Министерства образования и науки РК на 2017 год.

Абдрахманова К. К.
А13 Математическое моделирование в технологии бетона: Учеб. пособие / *К. К. Абдрахманова* – Алматы: КазНИТУ им. К. И. Сатпаева, 2017. –222 с.: Ил.83. Табл.53. Библиогр. – 60 назв.

ISBN 978-601-323-072-6

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования дипломированных специалистов по направлению «Производство строительных материалов, изделий и конструкций».

Изложены теоретические основы математического моделирования в технологии бетона, методика планирования эксперимента при исследовании свойств различных видов бетонов и решении основных технологических задач бетоноведения. Приведен обзор современных инструментов математического моделирования. Рассмотрены практические примеры использования математических методов для моделирования, оптимизации и анализа результатов испытаний с оценкой адекватности моделей.

Предназначено для студентов и магистрантов строительных специальностей всех форм обучения, а также для инженерно-технических работников предприятий стройиндустрии.

ISBN 978-601-323-072-6
© Абдрахманова К. К., 2017 г.
© КазНИТУ имени К. И. Сатпаева, 2017 г.

ВВЕДЕНИЕ

Курс "Математическое моделирование в технологии строительных материалов» обеспечивает вузовскую подготовку специалистов по направлению «Производство строительных материалов, изделий и конструкций» и ставит своей целью генерацию у специалистов знаний, позволяющих формулировать материаловедческие и технологические задачи в математических терминах, оптимизировать решения технологических задач, извлекать из результатов математического моделирования полезную инженерно-технологическую информацию. При изучении курса формируется представление:

- о методологии математического планирования экспериментальных исследований;
- об особенностях математического моделирования в материаловедческих задачах;
- о современных инструментах математического моделирования;
- о методах математической обработки экспериментальных данных, моделирования и анализа;
- о возможностях использования современного программного обеспечения для обработки и интерпретации экспериментальных данных;
- о возможностях использования методов математического анализа и моделирования в технологии производства строительных материалов и изделий.

При изучении курса «Математическое моделирование в технологии строительных материалов» приобретаются навыки:

- структурирования этапов математического моделирования решения технологических задач строительного материаловедения;
- планирования эксперимента при изучении многофакторных процессов;

- анализа факторов, определяющих свойства материала в конкретной технологической ситуации, их уровни и интервалы варьирования;
- статистического анализа математических моделей и их интерпретации;
- решения с помощью математических моделей оптимизационных строительно-технологических задач;
- анализа закономерностей изменения свойств материала, изделия и конструкции по полученной модели.

Бетон сохраняет приоритетные позиции благодаря повсеместной доступности сырья, технологичности, высоким конструктивным и эстетическим параметрам, обеспечивающим практически неограниченную номенклатуру выпускаемых изделий низкой энергоемкости и экологической чистоты, несомненную конкурентоспособность по сравнению с другими строительными материалами. Эти обстоятельства предопределяют актуальность задач глубокого изучения свойств бетонов, их зависимостей от процессов технологической переработки на различных этапах изготовления бетонных конструкций, получения необходимого представления о методах оптимизации технико-технологических свойств бетона и технологических процессов по его производству.

Свойства бетона зависят от многих факторов. Так, для бетонных конструкций их насчитывается примерно от 50, каждый из которых сам по себе является случайной величиной. Поэтому изучение основных свойств бетонов (как и других строительных материалов) необходимо производить с помощью статистических методов. С их помощью можно не только получить более полное представление о свойствах, их изменчивости и т. д., но и оптимизировать технологические особенности получения этих свойств.

Кроме основных свойств материалов, на общую несущую способность конструкции большое влияние оказывает неоднородность свойств и прежде всего прочности и деформативности. Неоднородность свойств материалов в конструкциях определяют путем испытаний образцов в лаборатории, а также при помощи различных физических методов испытаний непосредственно в конструкциях. Особенно

велика роль последних при обследовании конструкций и разработке проектов реконструкции и ремонта сооружений. Результаты этих испытаний всегда обрабатываются с использованием методов математической статистики.

Настоящее учебное пособие направлено на формирование целостного представления о принципах построения и интерпретации математических моделей при решении технологических задач в области бетоноведения и приобретение практических навыков студентами строительных специальностей и использование их при обработке результатов лабораторных и натурных испытаний материалов и конструкций и оптимизацию их свойств.

Проблема оптимизации структуры и свойств строительных композиционных материалов является первоочередной задачей технологов-проектировщиков, решение которой позволяет одновременно повысить экономичность, надежность и долговечность строительных композиционных материалов. С момента начала широкого использования строительных композитов делаются попытки получения аналитических зависимостей, связывающих свойства компонентов композиционных материалов и их концентрацию в смеси со свойствами готового композита. Получение таких зависимостей позволило бы рассчитывать концентрационно-гранулометрические характеристики смесей для изготовления материалов в зависимости от требований, которым должен соответствовать готовый материал. Решение первоочередной задачи оптимизации возможно за счет синергизма многих областей научного знания, в т. ч. технологии строительных материалов, физики, химии, математики, программирования и др.

Применение средств вычислительной техники позволяет решать многие задачи современного строительного материаловедения в области математического моделирования, прогнозирования свойств, автоматизированных расчетов и др. Появление универсальных оболочек и все более мощных алгоритмических языков программирования дает возможность использовать компьютер как средство, позволяющее автоматизировать процесс поиска оптимальных составов композитных материалов, построить модели структуры

материала в объеме, применить физические законы и спрогнозировать изменение свойств материала в зависимости от внешних условий. Компьютерные модели, построенные на основании фактора случайности, позволяют достаточно полно описать структуру композитного материала, учитывая хаотичный характер распределения структурных элементов в объеме материала, что обосновывает подход к их изучению с позиций теории вероятностей и математической статистики.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ БЕТОНА

1.1. Понятие модели и моделирования

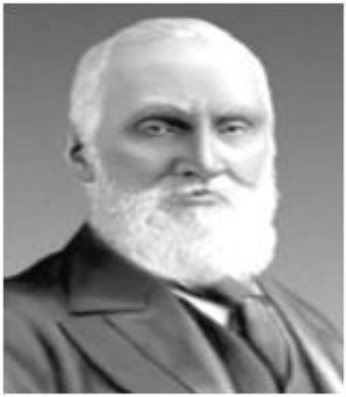
Математическое моделирование – упрощенное представление о реальном объекте, процессе или явлении, отражающее существенные особенности изучаемого объекта, процесса или явления на языке математической символики. Термин «модель» имеет латинские корни: словом «modems» на латыни обозначаются вещи, сходные в каком-либо отношении с другой вещью. Сегодня в моделях отражаются закономерности, установленные в результате целенаправленных исследований.

Моделирование – метод познания, состоящий в создании и исследовании моделей реальных объектов, процессов, явлений. При моделировании осуществляется замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах реального объекта с помощью объекта-модели.



«В любой науке науки столько, сколько в ней математики»

Иммануил Кант
1727–1804



«Понять явление – значит, построить его модель»

лорд Кельвин
1824–1907

Основной смысл моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов с моделями можно было дать необходимые ответы о характере моделируемого объекта, процесса или явления в реальных условиях. В настоящее время моделирование во всех науках является одним из научных методов исследования процессов и явлений.

Потребность в модели возникает, когда непосредственное изучение, исследование, анализ, испытания, наблюдения объекта затруднено, дорого или сопряжено с непозволительными затратами времени, или просто невозможно. Но это упрощенный, утилитарный подход к использованию моделей. В действительности, роль моделей шире и фундаментальнее. В сущности, научное познание есть нечто иное, чем отображение различных явлений, процессов, закономерностей адекватными моделями. Моделирование оправдано в качестве предварительного этапа исследования, позволяющего принять более обоснованное решение для проведения реального эксперимента.

Для классификации моделей используются разные основания. Общая классификация моделей включает более десяти основных признаков. С развитием прикладных математических исследований проблема классификации применяемых моделей усложняется. Наряду с появлением новых типов моделей (особенно смешанных типов) и новых признаков их классификации осуществляется процесс интеграции моделей разных типов в более сложные модельные конструкции. По предметной области модели можно классифицировать на физические, экономические, статистические, экологические и т. д. По способу представления модели можно классифицировать на предметные и информационные. Последняя классификация получила наибольшее распространение (рис. 1).

Предметные (или натурные, материальные) модели воспроизводят геометрические, физические и другие свойства объектов в материальной форме (например, глобус, робот, макеты зданий и т. д.).

Информационные модели отражают знания человека об объекте и представляют объекты и процессы в образной или знаковой форме (например, рисунки, фотографии, программы

на одном из языков программирования, периодическая таблица элементов Д. И. Менделеева). Другими словами, если материальная модель объекта – это его физическое подобие, то информационная модель объекта – это его описание.



Рис. 1. Классификация моделей

Построению информационной модели предшествует системный анализ, задача которого – из всего множества элементов реального объекта, его свойств и связей выделить те, которые являются существенными для целей моделирования.

Математическая модель – модель, представленная системой математических соотношений (уравнений, неравенств, функции т. д.), отражающих существенные свойства объекта или явления. Математические модели основаны на формальных языках. Математическое моделирование – процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта (уравнения, неравенств, систем).

Математический инструментарий, применяемый в прикладных математических исследованиях, весьма разнообразен. По применяемому математическому аппарату математические модели можно классифицировать на: матричные модели; модели, основанные на применении обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных; вероятностные модели и др.

Поскольку модели отражают основные свойства систем, то вид модели тесно связан с видом моделируемых систем, классификация которых приводилась ранее. При этом различают два больших класса моделей, связанных с характером моделируемых систем – статические и динамические модели. Статические модели отражают структуру, вид объектов, состав их элементов, образующих целостную систему. Динамические модели создаются для моделирования процессов в системах, протекающих в пространстве и во времени. По материалам моделей, способам построения и использования различают следующие разновидности моделей (рис. 2).



Рис. 2. Разновидности моделей

Физические модели – модели из реальных материалов, построенные с соблюдением законов подобия. Физические модели можно разделить на физически подобные, геометрически подобные и аналоговые модели. Физически подобные модели создаются для изучения отдельных физических явлений с соблюдением законов подобия для этих явлений (механические, аэродинамические, гидравлические модели, модели теплопередачи и т. п.).

Геометрически подобные модели могут выполняться из самых различных материалов. Они отличаются от оригинала масштабом, и это позволяет исследовать геометрическую структуру системы. Свойства материала модели здесь не имеют значения.

Аналоговые модели построены с использованием аналогии в различных процессах, имеющих разную физическую природу, но одинаковые зависимости между некоторыми параметрами этих процессов. При построении аналоговых моделей для решения задач, связанных с распределением ресурсов, могут использоваться также гидравлические, оптические, акустические, тепловые модели.

Аналитические (абстрактные) модели построены на основе наблюдения за окружающей природой без привлечения реальных материалов. Они могут быть математическими, знаково-графическими или текстуальными моделями.

Математические модели представляют собой совокупность формул и логических условий, связывающих параметры состояния модели и внешние воздействия. Разновидностями математической модели являются детерминированные, вероятностные (статистические или стохастические) и имитационные модели.

Детерминированная математическая модель (линейная, нелинейная, непрерывная, дискретная – по виду функций) однозначно связывает входные и выходные параметры модели функциями соответствующего вида. В вероятностной модели связи параметров носят случайный характер, описываются законами теории вероятностей и математической статистики.

Имитационная модель содержит детерминированные, вероятностные и, вообще, четко не описанные связи. Чтобы получить представление о результатах моделирования требуется многократное применение модели.

Знаково-графические модели содержат знаки, символы, схемы, таблицы, графики или чертежи, раскрывающие структуру системы и взаимосвязи между элементами. Знаково-графические модели обладают большой наглядностью.

Текстуальные модели описывают свойства систем с помощью языковых текстов, таблиц, имеют вид инструкции, руководства и т. п. Текстуальные модели отличаются наибольшей сложностью в описании связей между элементами.

Разновидностью аналитической модели является эвристическая модель. Такая модель строится на основе гипотезы, научного предположения и интуиции исследователя. Применение эвристической модели нуждается в специальном обосновании достоверности получаемых результатов моделирования.

В практике моделирования часто используют смешанные модели, представляющие собой комбинации отдельных разновидностей физических и аналитических моделей.

Независимо от вида модели все они должны отвечать следующим требованиям:

1. Модель должна быть узконаправленной на достижение конкретной цели исследования, максимально простой, отражать лишь те свойства системы, которые влияют на конечные цели функционирования этой системы в данном исследовании;

2. По набору свойств модель должна быть адекватна системе. В ней должны выполняться основные физические законы, которые проявляются в реальной системе;

3. Сложность модели, ее структура должны быть оптимальными и достаточными для обеспечения необходимой точности результатов моделирования. Чувствительность модели к изменению параметров должна удовлетворять заданным требованиям по точности;

4. Модель должна быть экономичной по затратам всех видов ресурсов в процессе моделирования. Отметим здесь противоречивость различных требований, обусловленных, с одной стороны, стремлением максимально упростить модель, с другой – получить модель, адекватную системе и достаточно полно отражающую ее свойства. Поэтому построение модели с учетом всех требований является искусством исследователя и приходит с опытом.

Основным и обобщающим требованием к моделям и процессу моделирования является обеспечение высокой достоверности и надежности результатов исследований при моделировании систем.

1.2. Оптимизационное моделирование в технологии бетона

Ведущее место среди математических моделей на производстве занимают оптимизационные модели, т. к. очень часто приходится среди множества возможных вариантов отыскивать наилучшие решения при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности производства.

Оптимизационные модели – это модели, предназначенные для выбора наилучшего варианта из определенного или бесконечного числа вариантов производства, распределения или потребления. Оптимизационные модели, как и другие, упрощают действительность. Тем не менее, оптимизационные модели по сравнению с интуитивными умозрительными моделями имеют значительные преимущества: не допускают логических ошибок, т. к. могут быть математически проверены на наличие нарушений логики; являются бескомпромиссными и не содержат ничего лишнего, сводят проблему к ее сути и содействуют выражению основополагающих взаимосвязей целей и средств.

Задачи оптимизации (или задачи математического программирования) – это задачи нахождения максимального или минимального (или равное определенному числу) значения некоторой функции, называемой целевой функцией. Если заданы ограничения на аргументы целевой функции, то задача называется задачей условной оптимизации, если ограничения не накладываются, то задачей безусловной оптимизации. «Теория оптимизации», с одной стороны, является самостоятельной наукой, а, с другой стороны, составной частью науки под названием «исследование операций».

По содержанию можно определить следующие виды задач оптимизации:

- транспортные задачи (классическая, многопродуктовая и др.);
- задачи производственного планирования (задача рационального распределения ресурсов или задача определения оптимального ассортимента продукции);
- задачи управления запасами;
- задачи загрузки производственных мощностей;

- задачи минимизации дисбаланса на технологической линии (задача минимакса);
- задачи планировки и размещения промышленного оборудования;
- задача распределения финансовых вложений (внутренних и внешних – инвестиций);
- задача оптимизации плана занятости;
- задача проектирования оптимальных трасс линейных сооружений и др.

В общей постановке задача оптимизации формулируется следующим образом: найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, при которых целевая функция

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

достигает экстремума в условиях ограничений

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (\geq, =) b_i, \ (j=\overline{1, m}).$$

Поскольку *min f(x)* эквивалентен *max [– f(x)]*, то задачу минимизации всегда можно свести к эквивалентной задаче максимизации.

Значительная часть производственных задач требует по своему смыслу неотрицательного и целочисленного решения, когда переменные величины обозначают количество неделимых единиц продукции, оборудования, заготовок. Тогда появляются ограничения вида

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \ldots, \ x_n \geq 0,$$

$$x_i \in Z, i = \overline{1, n}.$$

В некоторых практических задачах переменные могут принимать не любые целые значения, а лишь значения 0 – ответ «нет» и 1 – ответ «да». Такие переменные называются булевыми. Одной из задач с такими переменными является задача о назначениях.

В зависимости от x_i, функций g_i и f задачи оптимизации подразделяют на следующие виды (табл.1).

Таблица 1

Классификация задач оптимизации

Переменные x_i	Ограничения g_i	Целевая функция f	Класс задач оптимизации
Непрерывные	Линейные	Одна, линейная	Линейное программирование
Непрерывные	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Нелинейное программирование
Целочисленные	Линейные	Одна, линейная	Целочисленное программирование
Целочисленные	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Целочисленное нелинейное программирование
Булевы	Линейные	Одна, линейная	Линейное программирование с булевыми переменными (булево программирование)
Булевы	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Нелинейное программирование с булевыми переменными (булево нелинейное программирование)
Непрерывные	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное линейное программирование
Непрерывные	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное нелинейное программирование
Целочисленные	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное целочисленное программирование
Целочисленные	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное целочисленное нелинейное программирование

Наиболее распространенными задачами оптимизации являются задачи линейного программирования. Такая их распространенность объясняется следующим: с их помощью решают задачи распределения ресурсов, к которым сводится очень большое число самых различных задач; разработаны надежные методы их решения, которые реализованы в поставляемом программном обеспечении; ряд более сложных задач сводится к задачам линейного программирования. Термин «линейное программирование» характеризует определение программы (плана) работы конкретного технико-экономического объекта на основе выявления линейных связей между его элементами.

Существуют еще так называемые задачи динамического программирования – задачи, где целью оптимизации является установление наилучшей последовательности тех или иных работ (производственных операций). Динамическое программирование является наиболее эффективным при решении задач, распадающихся на ряд последовательных этапов (шагов) или на ряд временных интервалов (лет, кварталов, месяцев). Примерами таких задач являются планирование производства и инвестиций, последовательность тестовых испытаний при контроле аппаратуры, поиск оптимальной траектории движения и др. Окончательное решение вырабатывается последовательно (по шагам), причем на каждом шаге приходится решать однотипные задачи, которые существенно проще, чем решение исходной задачи в целом. Одной из первых задач оптимального проектирования, которую предлагалось решать с помощью метода динамического программирования, была задача поиска оптимальной трассы новой железной дороги, соединяющей две заданные точки.

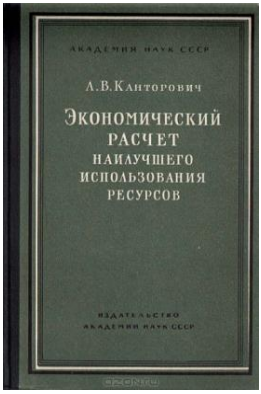
В производственной практике нередко возникают задачи, в математических моделях которых коэффициенты целевой функции или системы ограничений не являются постоянными числами, а меняются в зависимости от некоторых параметров. Например, прибыль от реализации (или цена) продукции в задаче об оптимальном использовании ресурсов может носить

сезонный характер и является функцией времени. Стохастические оптимизационные задачи представляют собой задачи вероятностного (стохастического) характера. В стохастической постановке эти задачи будут полнее отображать экономическую действительность.

Деление оптимизационных задач на эти классы представляет значительный интерес, т. к. специфические особенности тех или иных задач играют важную роль при разработке и выборе методов их решения.

Графо-аналитическим методом решаются простые задачи оптимизации. Математические модели в этих задачах не должны быть сложными, т. к. в противном случае требуется много времени для их решения. Начало линейному программированию было положено в 1939 г. советским математиком-экономистом Л. В. Канторовичем, исследования по оптимальному использованию ресурсов которого отмечены Нобелевской премией в 1975 г.





Л. В. Канторович
(1912–1986)

Спустя десять лет американский математик Дж. Данциг разработал эффективный метод решения данного класса задач – симплекс-метод.

Для решения задач нелинейного программирования с функцией одной переменной применяется классический метод, метод равномерного перебора, метод золотого сечения и метод Фибоначчи. К численным методам поиска экстремума функции n – переменных можно отнести метод покоординатного спуска, метод Хука-Дживса и Ньютона, градиентный метод, метод сопряженных направлений (в задачах без ограничений) и метод покоординатного спуска, метод условного градиента, барьерных и штрафных функций, метод линеаризации (в задачах с ограничениями).

Математические основы оптимизации были заложены уже в XVIII веке. Однако до второй половины XX в. методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись редко, т. к. их практическое использование требовало огромной вычислительной работы, которую без вычислительной техники реализовать было трудно, а в ряде случаев и невозможно.

Кроме того, в последние десятилетия в условиях научно-технического прогресса круг задач оптимизации, поставленных практикой, резко расширился. Реальные производственные задачи имеют много условий, целевая функция не задается формулой, ее значения могут получаться в результате сложных расчетов, браться из эксперимента и т. д. Развитие компьютерных технологий создает новый подход для решения задач оптимизации. Основой такого подхода является компьютерное моделирование и использование специальных программных продуктов, обладающих инструментом для решения задач оптимизации.

1.3. Корреляционно-регрессионный анализ

Корреляционно-регрессионный анализ наряду с оптимизационными расчетами считается одним из основных методов математического моделирования. Регрессионные вычисления и разработка математических моделей – универсальный исследовательский инструмент в разнообразных отраслях, включая бетоноведение.

В производственных условиях различные математические модели используются в целях объяснения, предсказания

и управления свойствами бетонной смеси и бетонных изделий. Информация в большинстве случаев визуализируется в виде электронных таблиц. Числовые данные, содержащиеся в табличной форме, позиционируют явные или скрытые связи. Явно связаны показатели, полученные методами прямого счета. Связи второго типа неизвестны, однако технологи должны владеть навыками аналитики и прогнозирования, в целях управления более сложными процессами, на основе выявления скрытых зависимостей. Эти возможности предоставляет корреляционно-регрессионный анализ. Применяя методы корреляционно-регрессионного анализа, исследователи с помощью коэффициента корреляции выявляют уровень связи показателей, формируют регрессионную модель существенных связей и оценивают статистическую значимость модели, используемую для прогнозирования изучаемого явления или параметра. Регрессионный анализ является важным инструментом выявления неявных скрытых связей между разнообразными факторами. В целом, корреляционно-регрессионный анализ связей между переменными показывает как один набор переменных (X) влияет на другой набор (Y).

На рис. 3 приведена технологическая схема последовательности этапов корреляционно-регрессионного анализа.

Нулевой этап – сбор данных в соответствии с рядом правил и требований. Данные должны быть наблюдаемыми, т. е. полученными в результате измерения, а не расчета. Данных должно быть в 7–8 раз больше, чем число факторов. В силу закона больших чисел, при этом обеспечивается эффективное погашение случайных отклонений от закономерного характера связи признаков. Чем больше неодинаковых (не повторяющихся) данных и чем они однороднее, тем надежнее получаемый результат.

Первый этап – корреляционный анализ. Цель корреляции – определение характера связи (прямая, обратная) и силы связи. При многофакторном анализе строят корреляционную матрицу, анализ которой определяет:

1 – связи зависимой переменной с независимыми данными;

2 – связи между независимыми переменными.



Рис. 3. Этапы корреляционно-регрессионного анализа

Анализ результатов корреляции позволяет, во-первых, выявить факторы, действительно влияющие на исследуемую зависимую переменную и ранжировать, во-вторых, минимизировать число факторов в модели, исключив факторы, функционально связанные друг с другом. Например, в одно регрессионное уравнение нельзя одновременно включать переменные «удобоукладываемость бетонной смеси» и «расход воды» как независимые, поскольку удобоукладываемость определяется количеством воды затворения. Аналогично связаны показатели прочности бетона и марка вяжущего, поскольку прочность – функция прочности вяжущего.

Второй этап – расчет параметров и построение регрессионной модели. На этом этапе позиционируют наиболее точную меру выявленной связи, обобщенно выражаемую математической моделью линейной множественной регрессионной зависимости:

$$Y=a_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n;$$

где Y – отклик;

$X_1, X_2, \ldots X_n$ – факторы или предикторы.

Рассчитываются параметры модели: свободный член a_0 (константа или пересечение) и коэффициенты регрессии b_n.

Третий этап – оценка статистической значимости модели. Этап реализуется на основе анализа значений *коэффициента детерминации и критерия Фишера*.

Коэффициент детерминации R Squared (R^2) – квадрат множественного коэффициента корреляции между наблюдаемым значением Y и его теоретическим значением, вычисленным по модели. Коэффициент детерминации, принимая значения от 0 до 1, позиционирует наилучший вариант модели. R^2 – доля вариации прогнозируемой (теоретической) величины Y относительно наблюдаемых значений Y, синтезируемая за счет включенных в модель факторов. Оптимально, если $R^2 > 80$ %, остальная доля теоретических значений Y зависит от других, не включенных в модель факторов.

Средствами регрессионного анализа вычисляется *F*-критерий значимости регрессии для модели в целом. Расчетное значение F_p сравнивается с критическим значением *F*-критерия (табличное значение). Модель считается удовлетворительной для прогнозирования в случае, если наблюдаемое значение *F* – критерия превышает выбранную процентную точку *F* – распределения примерно в 4 раза. При этом размах предсказываемых значений отклика значительно больше стандартной ошибки отклика.

На четвертом этапе корреляционно-регрессионного анализа после оценки статистической значимости модели, ее применяют для прогнозирования.

Существуют несколько способов и алгоритмов выбора наилучшего уравнения регрессии:

- метод всех возможных регрессий;
- метод выбора «наилучшего подмножества» предикторов;
- метод исключения;
- шаговый регрессионный метод;
- гребневая регрессия;
- ПРЕСС;
- регрессия на главных компонентах;
- регрессия на собственных значениях;
- ступенчатый регрессионный метод;
- робастная (устойчивая) регрессия;
- метод деления пополам и т. д.

Наиболее эффективными из перечисленного признан метод исключения и шаговый метод.

Метод исключения исследует только наилучшие модели. На первом этапе рассматривается уравнение, включающее все независимые переменные. При анализе корреляционной матрицы на основании табл. 2 выявляют независимую переменную, имеющую наиболее слабую по модулю связь с зависимой переменной, и исключают ее из уравнения.

Далее анализируют уравнение с меньшим количеством независимых переменных. Если по сравнению с предыдущим расчетом значимость уравнения в целом (*F*-критерий) и коэффициент детерминации (R^2) повысились, то выбран правильный алгоритм решения. Исключение независимых

переменных продолжается до снижения значимости уравнения в целом и доли объясненной вариации по сравнению с предшествующим вариантом.

Таблица 2

Оценка характера и силы связи

Значение r	*Оценка связи*
$r<0$	Обратная
$r<0.1$	Отсутствует
$0,1<r<0,3$	Слабая
$0,3<r<0.5$	Умеренная
$0,5<r<0,7$	Заметная
$0,7<r<0,9$	Сильная
$0,9<r<0,99$	Весьма сильная
$0,99<r<1$	Полная (функциональная)

Шаговый метод предполагает на первоначальном этапе включение в уравнение одного фактора с наибольшим по модулю значением коэффициента корреляции между независимой и зависимой переменными. На следующем шаге, из оставшихся не включенными в уравнение независимых переменных, в предыдущую модель добавляются по одной независимой переменной, наиболее связанной с зависимой и производят пересчет параметров регрессии. После пересчета производят сравнение оценки нового уравнения с оценками предыдущего шага. Процедура продолжается до получения наилучшего уравнения с наибольшими расчетными значениями F и R^2.

Корректность исключения или добавления факторов в рассмотренных методах реализуется на основе *анализа t-критерия Стьюдента*, оценивающего индивидуальный вклад конкретного параметра в значимость модели и представляющего резерв повышения эффективности и надежности поиска регрессионного уравнения.

Множественный корреляционно-регрессионный анализ ориентирован на средства пакета *Анализ данных*. Активация команды *Сервис\Анализ данных* открывает окно *Инструменты анализа*, среди которых *Корреляция и Регрессия* непосредственно поддерживают множественный корреляционно-регрессионный анализ.

Характеристика элементов диалогового окна Корреляция

Входной интервал – задается весь диапазон анализируемых независимых (не более 16) и зависимых переменных.

Метки – требуется активизация в случае, если первая строка входного интервала содержит заголовки.

Новый рабочий лист – активизируется при необходимости представления результата корреляции на новом листе.

Выходной интервал – активизируется заданием адреса ячейки при необходимости представления результата корреляции на текущем листе.

Результат использования инструмента *Корреляция* – получение корреляционной матрицы (табл. 3). С помощью *вспомогательной диагностирующей формулы* корреляционная матрица преобразуется в целях диагностики связей по модулю коэффициента детерминации (табл. 4).

Таблица 3

Корреляционная матрица, полученная в результате определения поля с метками

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1				
X_2	0,22857947	1			
X_3	-826407471	-0,127454877	1		
X_4	-0,245445107	-0,972954999	0,01903653	1	
X_5	0,730717472	0,81625257	-0,525376875	-0,821305037	1

Вспомогательная диагностирующая формула =ЕСЛИ (ABS(B3)<0,1; “Нет связи“; ЕСЛИ(ABS(B3)<0,3; “Слабая“; ЕСЛИ (ABS(B3)<0,5; “Умеренная”; ЕСЛИ (ABS(B3)<0,7; “Заметная”; ЕСЛИ (ABS(B3)<0,9; “Сильная”; ЕСЛИ (ABS(B3)<=0,99; “Весьма сильная”; “Полная”))))))

Таблица 4

Преобразованная корреляционная матрица

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1				
X_2	слабая	1			
X_3	сильная	слабая	1		
X_4	слабая	весьма сильная	нет связи	1	
X_5	сильная	сильная	заметная	сильная	1

Характеристика элементов диалогового окна Регрессия

Входной интервал Y – диапазон анализируемых зависимых данных

Входной интервал X – диапазон подлежащих анализу смежных рядов независимых данных (не более 16 независимых).

Метки – активизируется в случае если первая строка входного интервала содержит заголовки

Уровень надежности – по умолчанию применяется 95 % уровень надежности

Константа-ноль – активизируется при необходимости получению модели без свободного члена. При этом линия регрессии проходит через начало координат.

Новый лист – сформирует результаты регрессионного анализа на новом листе.

Остатки – включает остатки в выходной диапазон.

Стандартизированные остатки – включает стандартизированные остатки в выходной диапазон.

График остатков –вывод диаграммы остатков для каждой независимой переменной.

График подбора – представляет информацию о согласованности теоретической линии регрессии (предсказанной) с экспериментальными данными.

График нормальной вероятности – диаграмма персентиля.

1.4. Компьютерное моделирование в технологии бетона

Развитие промышленного производства неразрывно связано с применением моделирования и по мере усложнения производственных процессов моделирование все чаще проводится с помощью современных компьютерных технологий.

Компьютерное моделирование, возникшее как одно из направлений математического моделирования, с развитием информационных компьютерных технологий стало самостоятельной и важной областью применения компьютеров. В настоящее время компьютерное моделирование в научных и практических исследованиях является одним из основных методов познания. Без компьютерного моделирования сейчас невозможно решение производственных задач.

Компьютерная модель – представление информации о моделируемом объекте, системе, процессе или явлении средствами компьютера. Компьютерная модель описывает функционирование отдельных частей системы и правила взаимодействия между ними.

Компьютерное моделирование – процесс создания и исследования компьютерной модели. Компьютерное моделирование целесообразно проводить, когда отсутствуют или неприемлемы аналитические методы решения задачи, при необходимости проведения большого количества вычислений, при визуализации и т. п.

Компьютерное моделирование дополняет результаты аналитического исследования и обладает некоторыми преимуществами: позволяет снизить трудоемкость расчетов и сроки исследования; предоставляет богатые возможности визуального представления явлений и процессов.

В технологии компьютерного моделирования можно выделить несколько этапов:

- постановка, анализ задачи и построение информационной модели;
- формализация (в частности – разработка математической модели);
- выбор программного обеспечения и построение компьютерной модели;
- тестирование модели, отладка;
- исследование модели и анализ результатов.

Моделирование начинается с анализа и объекта изучения. На первом этапе формируются законы, управляющие исследованием, происходит отделение информации от реального объекта, формируется существенная информация, отбрасывается несущественная, происходит первый шаг абстракции.

На втором этапе строится так называемая формальная (в частности, математическая) модель явления, которая содержит: набор постоянных величин, констант, которые характеризуют моделируемый объект в целом и его составные части (постоянные параметры модели); набор переменных величин, меняя значение которых можно управлять поведением

модели; формулы, связывающие величины в каждом из состояний моделируемого объекта; формулы, описывающие процесс смены состояний моделируемого объекта.

На третьем этапе формальная модель реализуется на компьютере, выбираются подходящие программные средства.

На четвертом этапе компьютерного моделирования выполняется тестирование и исправление ошибок. Проверить компьютерную модель на соответствие оригиналу, проверить насколько хорошо или плохо отражает модель основные свойства объекта, часто удается с помощью простых модельных примеров, когда результат моделирования известен заранее.

На последнем этапе, выполняется исследование модели в зависимости от поставленной задачи. Например, оптимизационные модели можно исследовать на чувствительность. Анализ модели на чувствительность – это процесс, реализуемый после получения оптимального решения. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к изменениям исходной модели. Результаты компьютерного моделирования можно представить в виде графиков, диаграмм, таблиц, демонстрации явления в реальном или виртуальном времени и т. п. В заключение экспериментов с моделью можно выработать рекомендации по повышению эффективности существующей или проектируемой экономической системы.

Современное производство бетонных изделий и конструкций базируется на высокотехнологичных процессах обработки бетонных смесей. Уровень производства, совокупность показателей эффективности использования оборудования, качество и себестоимость бетона и изделий на его основе определенным образом зависят от соответствия параметров механического оснащения технологических линий, технологических процессов требованиям, предъявляемым к свойствам смеси.

При необходимости совершенствования технологии или создании нового оборудования возникает особый интерес к оптимизации этих параметров. Наряду с экспериментальными исследованиями, важнейшим инструментом оптимизации является математическое компьютерное моделирование.

Сформулировав требуемые показатели производственного процесса и свойства получаемой бетонной смеси, посредством моделирования можно определить параметры оборудования, необходимые для их реализации.

Известен целый ряд высокоэффективных методов моделирования производственных процессов: метод конечных элементов, используемый для расчета амплитуды колебаний в бетонной смеси (рис. 4, 5); метод компьютерного моделирования гидродинамики потоков (CFD) с успехом применяемый при моделировании процессов смешивания бетона (рис. 6); метод дискретных элементов (DEM), служащий для моделирования процессов производства гранулированных (зернистых) материалов (рис. 7).

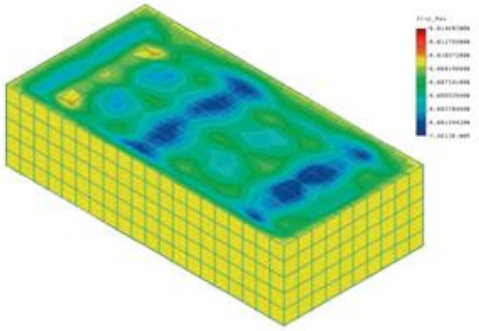


Рис. 4. Математическая модель объема бетонной смеси для расчета амплитуды колебаний

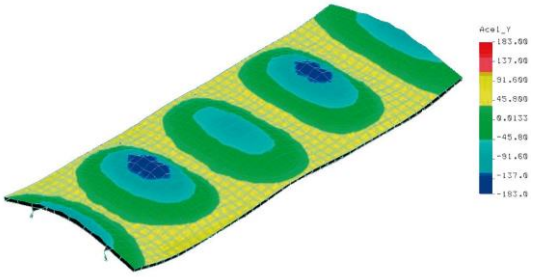


Рис. 5. МКЭ модель распределения вибрационных импульсов в бетонной смеси

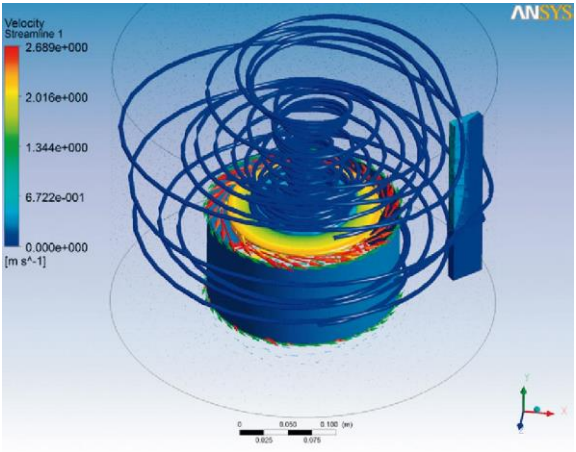


Рис. 6. Моделирование потоков в смесителе

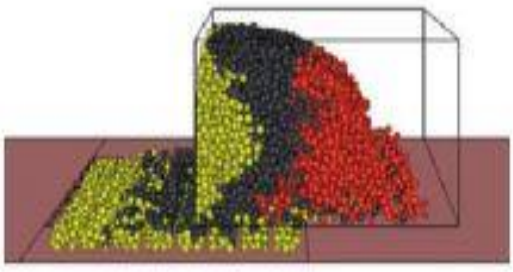


Рис. 7. Моделирование процесса укладки зерен заполнителя

В случаях, когда характеристики процесса и параметры оборудования определены в недостаточной степени, особое практическое значение приобретает возможность построения математической модели смеси.

Если структура вещества не представляет интереса или ничтожно мала по сравнению с его объемом, смесь моделируется в виде «идеальной» сплошной среды (т. е. ее внутренняя структура не принимается во внимание). Такой подход удобен для исследования потоков вещества. При их моделировании широко применяются CFD-программы, а также лабораторно-технические методы измерения параметров материалов.

Преимущества моделирования, когда вещество рассматривается как совокупность твердых частиц, раскрывается при необходимости учета влияния внутренней структуры материала на изучаемые процессы. Условием эффективного применения математической модели является нахождение уравнений, наиболее адекватно описывающих состояния материала и параметров моделирования для конкретной смеси. Наилучший результат гарантирует комбинирование моделирования и экспериментальных методов.

Первоочередными задачами моделирования технологических процессов производства и обработки бетонных смесей является оптимизация качественных (смешиваемые материалы, степень сжатия равномерность заполнения), и количественных (продолжительность перемешивания, производительность) характеристик процесса. Кроме того, исследуются уровень износа оборудования, энергоэффективность, ресурсоемкость и т. д. В последнее время при создании виртуальных моделей процессов смешивания ведущими производителями бетонных смесей успешно моделируется поведение частиц бетонной смеси, состоящей из фракций различной зернистости.

Для этого используется метод дискретных элементов: модели фракций различной зернистости добавляются в «смеситель», а затем имитируется перемешивание материала (рис. 8).

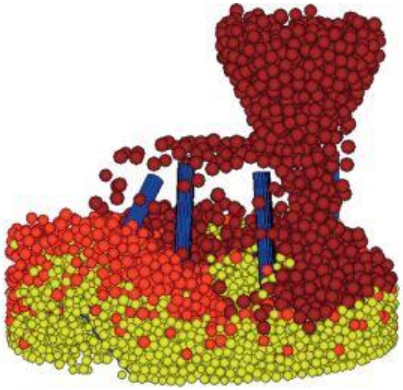


Рис. 8. Моделирование заполнения рабочего объема смесителя фракциями с различным гранулометрическим составом

Очевидным преимуществом математического моделирования является возможность определения коэффициентов вибрации в любой произвольный момент времени. Для этого из виртуального «смесителя» берутся виртуальные «пробы» (рис. 9) и путем статистических расчетов определяются коэффициенты вибрации.

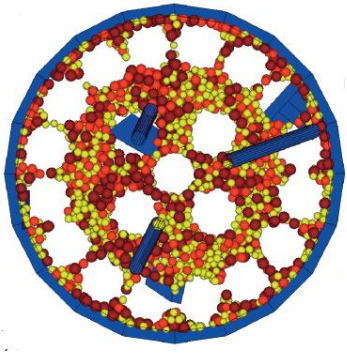


Рис. 9. Виртуальная выборка бетонной смеси

На рис. 10 показано изменение коэффициентов вибрации во времени при различном расположении рабочих органов бетоносмесителя.

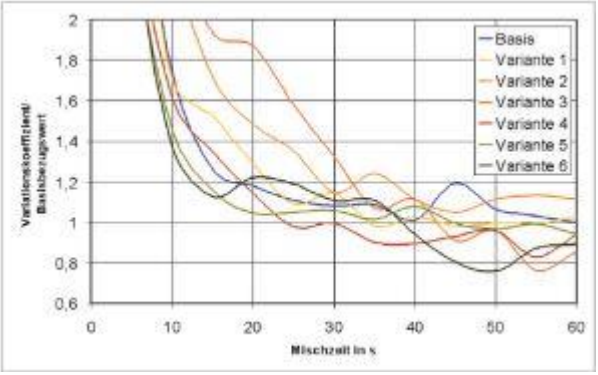


Рис. 10. Изменение коэффициента вибрации во времени при различных вариантах формы смесителя

Анализ моделей позволяет выбрать оптимальные конструктивные решения для получения наилучших результатов перемешивания, определить необходимую для подачи на оборудование мощность, а также подобрать необходимый крутящий момент.

Представляется перспективным направление более активного комбинирования различных методов моделирования. Уже сегодня для МКЭ-расчетов деталей машин (рис. 11) используются комбинации метода конечных элементов (МКЭ) с методами динамики многих тел (MKD) и компьютерной гидродинамики (CFD).

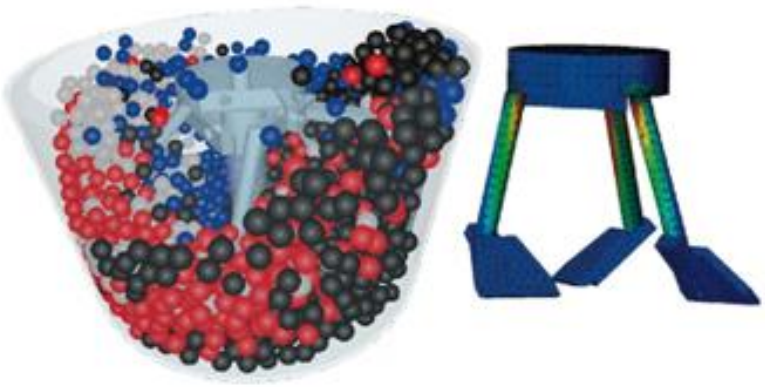


Рис. 11. МКЭ-моделирование процесса перемешивания бетонной смеси и МКЭ-расчет лопасти смесителя

Первые попытки сочетания технологий компьютерной гидродинамики (CFD) и метода конечных элементов (МКЭ) делают возможным моделирование процессов взаимодействия жидкости и твердых частиц (рис. 12).

Следующим шагом в их развитии станет создание принципиально новых многофункциональных моделей взаимодействия технологического оборудования и компонентов бетонной смеси.

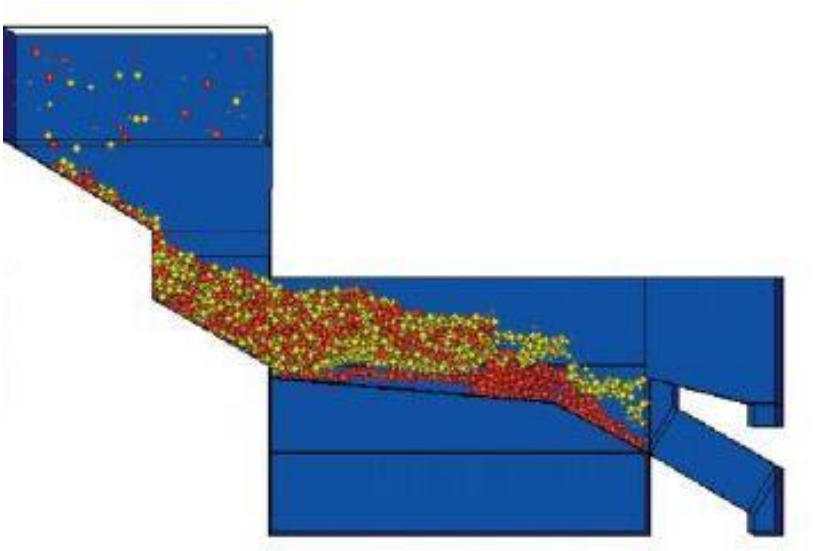


Рис. 12. Комбинирование CFD и МКЭ в моделировании процесса разделения фракций водопульсационным методом

1.5. Имитационное моделирование в технологии бетона

Аналитические методы описания и анализа не позволяют учесть особенности бетона как композиционного конгломерата, свойства которого связанны с непрерывностью и дискретностью составляющих, с нелинейностью связи между характеристиками бетона, с воздействием многочисленных внешних и внутренних случайных факторов. В сравнении с аналитическими инструментами имитационное моделирование воспроизводит процесс функционирования объекта во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса в определенные моменты времени.

Имитационные модели могут применяться в самых различных областях: для исследования, принятия и проверки

решений, полученных другими методами; построения и оценки альтернатив; расчета широкого диапазона прогнозов и оценок будущего состояния бетона в изделии; оценки долгосрочных последствий от принятого решения.

В технических объектах производится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы или подсистемы и для описания тех из них, для которых это возможно и целесообразно, используются функциональные зависимости – аналитические модели (уравнения математической физики, экспериментально-статистические и др.).

Имитационное моделирование является эффективным инструментом исследования и проектирования сложных систем, когда реальный эксперимент невозможен или нецелесообразен по различным причинам. К достоинствам имитационного моделирования, в частности, относятся: возможность исследовать поведения объекта в любых условиях; значительное сокращение продолжительности испытаний по сравнению с натуральным экспериментом; гибкость структуры модели и возможность замены ее элементов (моделей подсистем, алгоритмов, базы данных и пр.) в ходе экспериментов с целью поиска оптимального варианта, как имитационной модели, так и самой системы при ее проектировании.

К недостаткам имитационного моделирования относится то, что в результате машинной реализации всей цепи анализа системы будет получено частное численное решение, отвечающее фиксированным параметрам системы, уровням факторов, алгоритмам поведения и другим элементам структуры модели. Поэтому для анализа результатов процесса функционирования системы необходимо проводить имитационный эксперимент многократно, варьируя исходные условия каждой реализации. Это требует значительных затрат машинного времени на проведение имитационных экспериментов.

Имитационное моделирование представляет собой серию численных экспериментов ориентированных на получение эмпирической оценки степени влияния различных факторов на некоторые, зависящие от них результаты. Одна из наиболее развитых областей применения имитационных моделей при решении инженерных задач – это исследование процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, методам статистического моделирования. При этом исходные

условия каждой реализации задаются как случайные величины, закон распределения которых известен, а результаты множества таких реализаций как выборочная совокупность числовых значений выхода системы. Для этой совокупности нужно найти статистические оценки неизвестного распределения (по тем же алгоритмам, которые применяются для обработки результатов натурного эксперимента) и сделать инженерные выводы о поведении системы. Технология реализации имитационного моделирования включает следующие этапы:

1. Выявление взаимосвязи между исходными и выходными показателями в виде математического уравнения или неравенства;
2. Определение закона распределения вероятностей для ключевых параметров модели;
3. Компьютерная имитация значений ключевых параметров;
4. Расчет основных характеристик распределений исходных и выходных показателей;
5. Анализ полученных результатов и принятие решения.

В основе имитационного моделирования лежит универсальный численный метод решения математических задач при моделировании случайных величин – метод Монте-Карло.

Применительно к бетоноведению метод Монте-Карло дает интересные и полезные инженерные результаты при использовании в режиме имитации моделей заполнения объема зернами разных размеров и форм, при моделировании деформации и прочности бетона методами механики разрушения, при исследовании проницаемости бетона, при анализе однородности смешивания технологических смесей и в ряде других материаловедческих и технологических задач.

Метод Монте-Карло широко применяют при моделировании структуры и свойств бетонов. Бетоны на уровне макроструктуры состоят из зерен крупного заполнителя разного размера и формы и цементно-песчаной матрицы. Характерный дефект структуры – трещины на границе раздела матрицы и заполнителя, проявляющиеся из-за седиментационных явлений при твердении бетона. На уровне мезоструктуры цементно-песчаная матрица состоит

из зерен крупно-дисперсионного наполнителя (песка) и матрицы из цементного камня, с распределенными дефектами в виде трещин и крупных пор. На уровне микроструктуры цементная матрица представлена затвердевшим цементным гелем с твердыми включениями в виде зерен цементного клинкера и тонкомолотого наполнителя. Характерные элементы структуры на этом уровне – поры различной конфигурации и технологические трещины. В зависимости от цели исследования в структуре бетона могут быть выявлены как иные уровни, так и иные структурные элементы.

Проблема моделирования структуры и ее влияния на свойства бетона является одной из самых актуальных в материаловедении. Целесообразно выделить несколько базовых задач в этой проблеме. Во-первых, в структуре должны быть выявлены характерные элементы, которым придается идеализированная геометрическая форма с заданным законом распределения размеров и которые наделяются комплексом свойств (плотностью, модулем упругости, проводимостью и т. п.) с уровнями, распределенными по известным законам. Во-вторых, структурные элементы должны быть ориентированы в пространстве. Некоторые представления, связанные с моделированием структуры, поясняются на рис. 13.

В плоский контейнер, размеры которого левая стенка и дно совпадают с осями координат, в случайном порядке «упаковываются» элементы структуры.

Для круглого зерна «1» (пора, наполнитель и т. п.) задаются три случайных числа, которые определяют случайный выбор одного из возможных радиусов $R^{(1)}$ расстояние центра зерна от левой стенки $X_1^{(1)}$ и от дна $X_2^{(1)}$. Поскольку контейнер пока пустой, то все эти числа запоминаются. Следующее зерно «2» считается неупакованным и не запоминается, поскольку оно пересеклось со стенкой, т. е. нарушено условие

$$R^{(2)} \le X_1^{(2)} \le 1 - R^{(2)}.$$

Зерно «3» укладывается в контейнер, т. к. оно попало на пустое место – выполняется условие

$$\left| X_{I1}^{(3)} - X_I^{(1)} \right| \ge R^{(1)} + R^{(3)}$$

Информация о зерне «4» не запоминается, т. к. оно пересекает уже уложенное зерно «1». Повторяя процедуру *n* раз, можно «заполнить» контейнер, промоделировав случайную укладку зерен, радиусы которых подчиняются заданному закону распределения, и тем самым оценить пустотность, пористость, проницаемость бетона. Следует отметить, что существуют алгоритмы, «сдвигающие» зерно, попавшее на занятое место, до тех пор, пока оно не упакуется. Кроме того, у каждого зерна 1, 2, 3, ... может быть свой случайно распределенный или связанный с размером зерна уровень физического свойства (модуль упругости, электропроводность, плотность), что расширяет круг решаемых с помощью такого «контейнера» инженерно-технологических задач.

Структурные элементы могут иметь форму, отличную от сферической. Для фиксации прямоугольника 5 (кристалл, волокно и т. п.) кроме координат центра необходимо задать еще три случайные величины: размер одной из сторон, соотношение между сторонами, угол наклона к оси координат. Для фиксации многоугольника 6 (крупный заполнитель и т. п.) дополнительно задается радиус описанной окружности и координаты его вершин.

Важнейшими структурными элементами, особенно в задачах моделирования деформации и прочности бетона методом механики разрушения, являются дефекты – трещины в матрицах разного структурного уровня. Трещины на контактах матрицы и включения (зерно «7» на рис. 13, *а)* распределяются в случайном порядке сначала по зернам, а потом на одну из граней выбранного зерна.

Если имитируются трещины, возникающие от седиментационного расслоения смеси, то они располагаются всегда на нижней части зерна «8» (рис. 13, *а).* Трещины около отверстий (пор) моделируются структурным элементом «9», для которого обычно задается случайный угол наклона, случайные радиусы пор и длина трещины. Допустимо такое расположение двух пор, при котором трещины пересекаются (элемент «10» на рис. 13, *а*), образуя непрерывную слившуюся трещину.

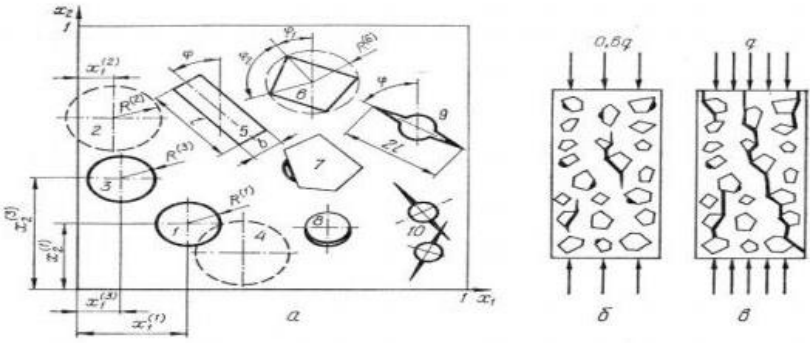


Рис. 13. Имитация структуры материала:
а – упаковка контейнера элементами структуры;
б, в – изменения в структуре при изменении внешней нагрузки

Алгоритм, описывающий закономерности поведения структуры бетона при изменении условий внешней среды, строится, как правило, прежде всего, как пошаговый процесс поведения каждого типа элементов структуры (с учетом возможного взаимодействия с контактирующими соседними элементами). При этом можно использовать любые модели, но наиболее удачными являются модели, в которых четко прослеживаются физические особенности процесса. Например, пора «1» в нагруженном материале описывается формулами технической механики как круговой концентратор напряжений. После того, как пиковые напряжения превысят некоторый уровень, и появится радиальная трещина, произойдет переход к другим формулам технической механики, описывающим деформации элемента «9». Когда длина трещины значительно превысит радиус отверстия или две соседние трещины сольются в элемент «10», то для описания процесса деформации потребуется третий комплекс формул (таблиц, графиков и т. п.).

Уровень влияния внешней среды (нагрузка, термическое напряжение, давление жидкости и др.), при котором достигается критическое состояние, а также общий характер процесса поведения материала при воздействии внешней среды сравниваются с результатами натурального эксперимента.

На основе такого сравнения принимается решение об адекватности имитационной модели.

Преимущества имитационного моделирования в приложении к анализу структуры и свойств бетона очевидны. К отличительным особенностям имитационного моделирования относятся следующие обстоятельства:

- на любом этапе исследования в связи с появлением более сильных физических гипотез или точных формул можно коррелировать отдельные элементы имитационной модели;
- при реализации имитационного моделирования генерируются сочетания структуры элементов и влияния внешней среды, при которых моделируемое явление идет по неизвестному направлению, что открывает возможности целенаправленного создания новых материалов и технологий.

Задача интенсификации развития инновационных технологий в бетоноведении обуславливает необходимость представления физико-механических свойств материала в виде математических зависимостей от внутреннего строения и внешних воздействий в заданных условиях эксплуатации. Эти зависимости позволяют выявить факторы, обеспечивающие формирование эффективной структуры материалов, а также оценить долговечность и надежность бетонных конструкций без длительных и дорогостоящих натурных экспериментов.

Наибольшую сложность с позиции математического выражения представляют цементные композиты. Описание подобных сложно-структурированных систем должно предусматривать отражение распределения в объеме, взаимной ориентации и сопряжения структурообразующих элементов, а также учет их совместной работы на различных уровнях, что, в целом, составляет технологию структурно-имитационного моделирования.

Сущность структурно-имитационного моделирования заключается в воспроизведении с помощью уравнений математической физики и теории упругости явно учитываемых параметров, определенных в ходе предварительных структурных исследований, способствующих более реалистичному отражению строения бетона и возможности получения откликов системы на внешние и внутренние воздействия. Данный метод позволяет непосредственно связать

структуру и свойства бетона, что представляет одну из фундаментальных задач материаловедения.

Структурно-имитационное численное моделирование цементных композиций базируется на представлении их структуры в виде многоуровневой иерархической модели, реализующей алгоритмы физико-механических процессов и явлений, и позволяет прогнозировать поведение материала в заданных условиях эксплуатации, а также проектировать композиции с эффективной структурой.

Численная многоуровневая иерархическая модель цементного бетона включает наноразмерный уровень, который в явном виде отражает физическую и геометрическую гетерогенность его структуры. Данная модель позволяет расчетным путем оценить совместную работу структурных элементов и их влияние на механические свойства бетона на различных структурных и масштабных уровнях при заданных внешних и внутренних воздействиях на основе применения метода конечных элементов. Алгоритм моделирования механизма влажностной усадки цементных композиций, позволяет прогнозировать воздействие капиллярного давления и изменения свободной поверхностной энергии во взаимосвязи с относительной влажностью окружающей среды. Математическая модель для определения величины влажностной усадки бетона позволит учитывать структурные особенности материала. Количественная мера влияния отдельных компонентов структуры цементных композиционных материалов, включая гидратные новообразования, на механические свойства материала.

Структурно-имитационные модели реализуют расчетную оценку прочности цементно-песчаных композиций путем моделирования процесса трещинообразования, охватывающего не только поровое пространство, но и твердую фазу. Математическая модель отражает количественные закономерности изменения показателей трещиностойкости цементных систем в зависимости от соотношения упругих свойств компонентов структуры. Модели реализуют расчетную оценку степени совместного влияния деформаций влажностной усадки и рабочей нагрузки на напряженно-деформированное состояние предварительно напряженных

конструкций при явном учете особенностей структуры материала и влажностных условий эксплуатации. Использование методов моделирования процессов влажностной усадки и трещинообразования позволяет вести более целенаправленный поиск рациональных технологических решений и существенно сократить объем и стоимость лабораторных исследований при проектировании составов цементных композиций с требуемым уровнем свойств. Метод оценки степени совместного влияния усадочных деформаций и рабочей нагрузки на напряженно-деформированное состояние предварительно напряженной конструкций может быть использован для существенного сокращения трудозатрат при разработке конструктивных и технологических решений в области проектирования бетонных и железобетонных конструкций с увеличенным эксплуатационным ресурсом.

Проблеме моделирования структуры и свойств бетонов посвящены многочисленные исследования. Анализ результатов, достигнутых в области математического описания свойств композиционных материалов во взаимосвязи с их структурой, позволяет выбрать основное направление решения задачи прогнозирования свойств цементных систем, заключающееся в обобщении известных закономерностей в форме имитационных численных моделей. Преимущество таких моделей перед статистическими и феноменологическими концепциями заключено в возможности явного учета параметров структуры и воспроизведения физической природы явлений с помощью численных методов. Наиболее развитым и апробированным методом решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение сплошных сред, является метод конечных элементов.

На современном этапе можно выделить два основных подхода в отношении создания компьютерной модели структуры цементных систем и исследования свойств на ее основе:

- разработка кинетической имитационной модели гидратации цемента и применение на ее основе МКЭ для описания основных физико-механических свойств материала на отдельных временных отрезках формирования структуры;

- использование дискретных структурных моделей, алгоритм построения которых основан на стохастическом заполнении некоторого объема геометрическими элементами в соответствии с заданными распределениями их формы, размеров и ориентации. Дальнейшее моделирование свойств композиций связано с применением теории «эффективной среды» или МКЭ.

Концептуальная основа имитационного моделирования цементных систем заключается в:

- первоначальном структурированном распределении наночастиц в пределах границ заданного полигона модели, за счет чего достигается имитация структуры цементного геля. Принцип структурирования подразумевает взаимное расположение частиц в пространстве, воспроизводящее явление кластеризации;
- получении имитационной модели системы конкретного состава с использованием статистического механизма генерации размещения элементов структуры в соответствии с заданной функцией распределения по размеру.

При этом учитывается форма размещаемых элементов, определяемая принадлежностью к отдельной структуро-образующей фазе. Матричную основу составляет структура предыдущего уровня моделирования, рассматриваемая как континуальная среда. Все это относится к микро-, мезо- и макроуровню материала. При многоуровневом подходе параметры свойств, определенные для моделей предыдущего уровня, используются в качестве исходных данных, относящихся к матричной составляющей модели последующего уровня. Подобная иерархичность построения общей модели цементной композиции позволяет напрямую увязать структурные особенности на уровне нанометра с макро свойствами материала.

1.6. Инструменты математического моделирования

В настоящее время IT-сфера предлагает разнообразнейшие средства моделирования и квалифицированный инженер, технолог или менеджер должен уметь уже не просто

моделировать сложные объекты, а моделировать их с помощью современных технологий, реализованных в форме графических сред или пакетов визуального моделирования, позволяющие создавать многоуровневые структурные модели исследуемых объектов в графических терминах.

Для реализации моделей, требующих не столько визуализации объектов и процессов, сколько расчетов различных параметров, могут быть использованы универсальные программы, например электронные таблицы (рис. 14) и математические пакеты.

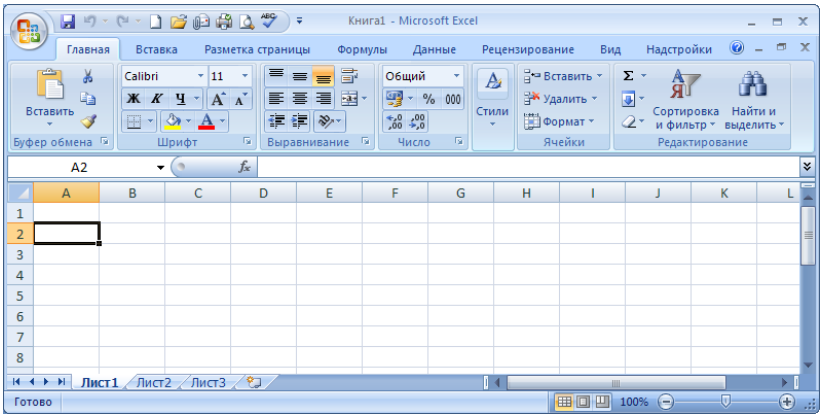


Рис. 14. Интерфейс табличного процессора MS Excel

Особенность электронных таблиц заключается в возможности применения формул для описания связи между значениями различных ячеек. Расчет по заданным формулам выполняется автоматически. Изменение содержимого какой-либо ячейки приводит к пересчету значений всех ячеек, которые с ней связаны формульными отношениями и, тем самым, к обновлению всей таблицы в соответствии с изменившимися данными.

Функциональные возможности MS Excel позволяют расширить вспомогательные программы – надстройки (рис. 15).

Надстройка Поиск решений (рис. 16) позволяет найти оптимальное значение формулы содержащейся в ячейке,

которая называется целевой. Эта процедура работает с группой ячеек, прямо или косвенно связанных с формулой в целевой ячейке. Чтобы получить по формуле, содержащейся в целевой ячейке, заданный результат, процедура изменяет значения во влияющих ячейках. Чтобы сузить множество значений, используемых в модели, применяются ограничения. Эти ограничения могут ссылаться на другие влияющие ячейки.

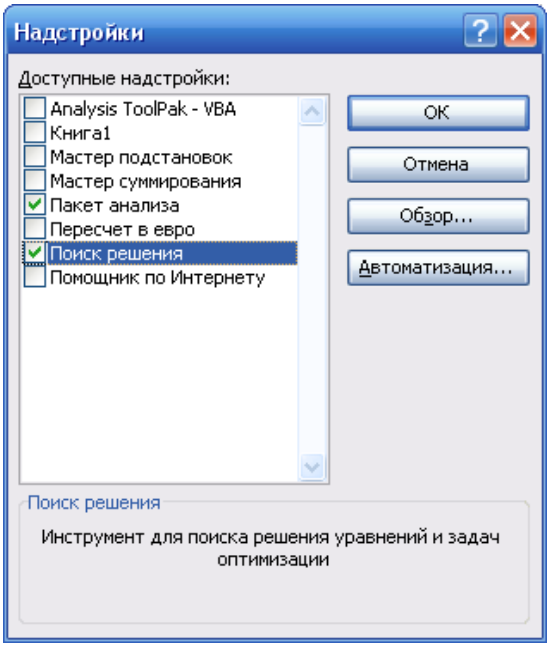


Рис. 15. Надстройки MS Excel

Теоретической основой надстройки «Поиск решения» является симплекс-метод, позволяющий находить оптимальное решение задачи с помощью итерационного процесса. Средство поиска решения MS Excel использует алгоритм нелинейной оптимизации Generalized Reduced Gradient (GRG2).

Инструмент графического моделирования Advanced Grapher.

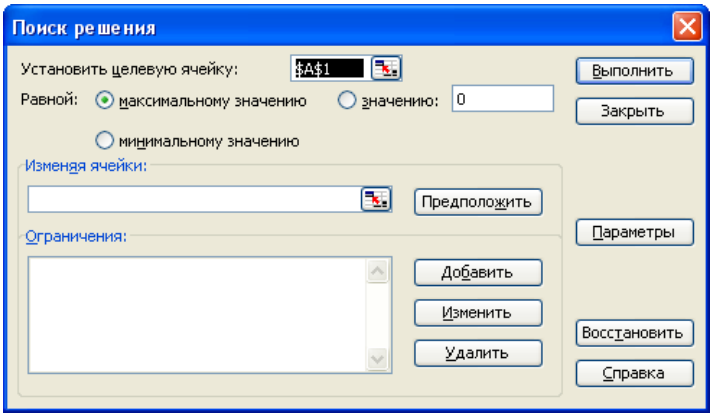


Рис. 16. Надстройка MS Excel Поиск решения

Программа Advanced Grapher поддерживает построение графиков функций вида *Y(x), X(y),* в полярных координатах, заданных параметрическими уравнениями, графиков таблиц, неявных функций (уравнений) и неравенств, генерируя до 30 графиков в одном окне (рис. 17).

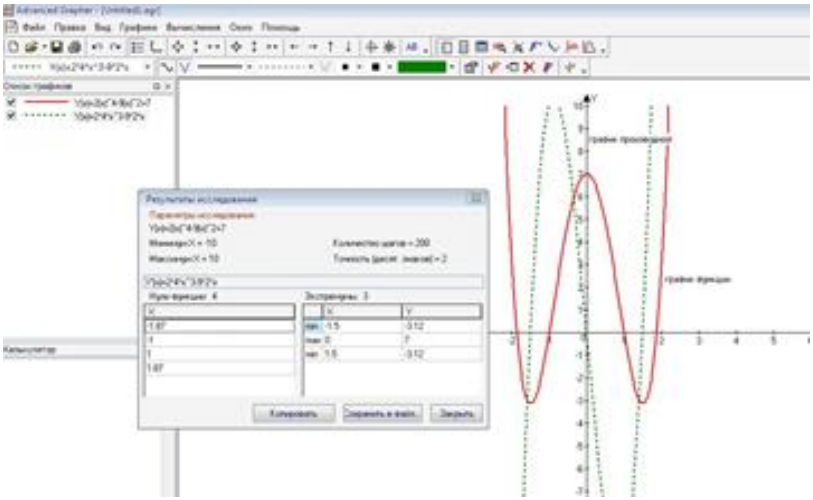


Рис. 17. Результаты исследования в Advanced Grapher

Программа Advanced Grapher позволяет не только строить разнообразные графики на плоскости, но и проводить исследование функций, находить точки экстремума функции переменной, получать аналитическое выражение для производной, выполнять численное интегрирование, графически решать неравенства, осуществлять регрессионный анализ и т. д.

Система имитационного моделирования GPSS World

GPSS – это не только система имитационного моделирования, а, прежде всего, это неординарное явление в мире программирования. Это один из самых удачных на то время (1961 г.) проблемно-ориентированных языков программирования. Основой имитационных алгоритмов в GPSS является дискретно-событийный подход. В GPSS разработчикам удалось очень четко и изящно пройти по грани как соответствия проблемной области (по терминологии, по функциям, методике исследований и т. д.), так и эффективности программирования (удобства разработки моделей, быстродействия, использованию ресурсов ЭВМ и т. д.). Более фундаментальные изменения были объявлены в 1993 г. в форме GPSS World. Эта версия, разработанная для операционной системы для OS/2, была анонсирована совместно с анимационной программой Simulation Studio базирующейся на 2/D векторной графике. В силу меньшего признания в мире OS/2, чем Windows, дальнейшие усилия Minuteman Software были ориентированы на Windows, и в 2000 году появилась версия GPSS World 2000. Система GPSS World – это мощная среда компьютерного моделирования общего назначения, разработанная для профессионалов в области моделирования. Это комплексный моделирующий инструмент, охватывающий области как дискретного, так и непрерывного компьютерного моделирования, обладающий высочайшим уровнем интерактивности и визуального представления информации. Использование GPSS World дает возможность оценить эффект конструкторских решений в чрезвычайно сложных системах реального мира. В эту систему интегрированы следующие новшества:

- объектно-ориентированный интерфейс пользователя, включающий объекты "Модель", "Процесс моделирования", "Отчет" и "Текст";

- программные эксперименты с автоматическим анализом данных;
- многозадачность;
- сохранение и продолжение выполнения запущенных процессов моделирования;
- одновременная интеграция нескольких имитационных процессов;
- свыше 20 встроенных вероятностных распределений;
- 17 различных графических окон для наблюдения за выполняющимся процессом моделирования.
- новые блоки, обеспечивающие ввод-вывод во время моделирования;
- автоматическое интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка;
- быстрая и удобная отладка с использованием графического интерфейса;
- автоматические генераторы отсеивающих и оптимизирующих экспериментов;
- пакетный режим с контролируемой процедурой выхода из приложения;
- возможность динамического вызова функций из внешних файлов.

Система компьютерного моделирования MvStudium Standard

Система компьютерного моделирования MvSTUDIUM позволяет быстро создавать визуальные интерактивные модели многокомпонентных непрерывных, дискретных и гибридных (непрерывно-дискретных) систем и проводить с ними активные вычислительные эксперименты. Создание модели, визуализация результатов и управление вычислительным экспериментом не требует написания никакого программного кода. Модели задаются на математическом уровне абстракции. Для описания непрерывного поведения используются дифференциально-алгебраические уравнения в произвольной форме, включающие вторые производные и неразрешенные относительно производных. Для описания дискретного и гибридного поведения используются визуальные карты поведений, являющиеся расширением карт состояний UML.

Система имитационного моделирования Arena

Программное обеспечение для имитационного моделирования Arena (1993 г.) позволяет создавать подвижные компьютерные модели, используя которые можно адекватно генерировать многочисленные реальные системы. Arena снабжена удобным объектно-ориентированным интерфейсом и обладает удивительными возможностями по адаптации к всевозможным предметным областям. Последняя версия системы Arena удачно соединяет интерфейсные возможности среды Windows и присущую Arena легкость иерархического построения модели и ее последовательного приближения к реальному объекту.

Архитектура Arena позволяет исследовать управляющие процедуры, правила принятия решений, организационную структуру, потоки информации и т.д. без вмешательства в работу реальной системы. Новые технические средства, планы размещения, программное обеспечение, транспортные системы и т. п. могут быть опробованы до того, как ресурсы будут потрачены на их приобретение или создание. Имитационное моделирование позволяет:

- проверять гипотезы о причинах возникновения тех или иных наблюдаемых феноменов;
- рассматривать процессы в различных масштабах времени;
- выделить переменные, наиболее важные для успешного функционирования моделируемой системы, и проанализировать имеющиеся между ними связи;
- выявлять "узкие места" в материальных, информационных и других потоках.

Моделирование на платформе Arena дает возможность изучать объекты, о поведении которых имеется недостаточно информации. Шаблоны решений Arena представляют набор специализированных модулей, превращающих Arena в проблемно-ориентированную среду моделирования, адаптированную для решения узкоспециализированных задач и позволяющей перейти от абстрактных понятий методологии моделирования к принятым в рассматриваемой предметной области терминам.

Программа компьютерного моделирования BPwin

BPwin (All Fusion Process Modeler) – программный продукт в области реализации средств CASE-технологий. Поддерживает три стандартные нотации – IDEF0 (функциональное моделирование), DFD (моделирование потоков данных) и IDEF3 (моделирование потоков работ). Эти три основных ракурса позволяют:

- описывать предметную область более комплексно;
- повысить эффективность бизнеса, оптимизировать любые процедуры в компании;
- полную поддержку методов расчета себестоимости по объему хозяйственной деятельности (функционально-стоимостной анализ, АВС);
- облегчить сертификацию на соответствие стандартам качества ISO9000.

Интуитивно-понятный графический интерфейс позволяет сосредоточиться на анализе самой предметной области, не отвлекаясь на изучение инструментальных средств. Интерактивное выделение объектов обеспечивает постоянную визуальную обратную связь при построении модели. BPwin поддерживает ссылочную целостность, не допуская определения некорректных связей и гарантируя непротиворечивость отношений между объектами при моделировании.

BPwin автоматизирует задачи, связанные с построением моделей процессов, обеспечивая семантическую точность, необходимую для гарантии правильных и согласованных результатов. Подсветка объектов упрощает построение модели, исключая часто встречающиеся ошибки моделирования.

BPwin поддерживает автоматическую настройку размеров диаграмм, возможность изменения масштабов изображения моделей и генерирует:

- контекстные диаграммы для описания границ системы, области действия, назначения объектов;
- иерархическую структуру диаграмм, облегчающая последовательное уточнение элементов модели;
- декомпозиционные диаграммы для описания особенностей взаимодействия различных процессов.

BPwin – мощный инструмент моделирования, разработанный для анализа и реорганизации сложных бизнес-процессов. В результате формируется целостная картина деятельности предприятия – от моделей организации работы в производственных цехах до сложных иерархических структур. Модели BPwin дают основу для анализа бизнес-процессов и оценки влияния тех или иных событий, а также описывают взаимодействие процессов и потоков информации в организации. Неэффективная, высокозатратная или избыточная деятельность может быть легко выявлена и, следовательно, усовершенствована, изменена или устранена в соответствии с общими целями организации.

BPwin позволяет адаптироваться к постоянно меняющимся реалиям современного рынка. Конкуренция предполагает мгновенную реакцию на новые возможности, угрозы и потребности. Модели бизнес-процессов в масштабах всего предприятия могут оказаться очень сложными. BPwin предоставляет возможности, призванные облегчить инкрементальную разработку моделей и разграничение процессов. BPwin позволяет разбить модель на фрагменты, поработать с ними, а затем вновь объединить их в одно целое.

Использование BPwin эффективно использовать в проектах, в которых нужно сделать описание существующих баз предприятия, внедрить на предприятии корпоративные информационные систем и для проведения реорганизации существующих бизнес-проектов. С помощью BPwin можно провести оптимизацию деятельности предприятия и осуществить проверку на соответствие ее стандартам ISO 9000, создать проект организационной структуры, исключить ненужные операции, уменьшить размер издержек и увеличить эффективность. Использование этого программного комплекса позволяет эффективно обеспечить все аспекты моделирования информационных систем.

Ключевые преимущества программы компьютерного моделирования BPwin:

- управление сложными бизнес-процессами;
- автоматизация процесса проектирования;
- развитые диаграммы;
- организационные диаграммы;

- технологии моделирования;
- функционально-стоимостной анализ;
- собственный генератор отчетов.

Система компьютерного моделирования STRATUM

Stratum – инструментальное программное средство позволяет на основе простейших функциональных элементов моделировать элементов, сложных систем, конструкций, процессов, и исследовать модели сложных систем без знания языков программирования.

Интуитивно понятный интерфейс Stratum 2000 адаптирован к использованию в технологиях имитационного и математического моделирования систем. В Stratum 2000 используется дискретный метод расчета модели. Пользователь может выполнить расчет модели в пошаговом или динамическом режиме. Среда автоматически генерирует исполняемый код, и позволяет изменять модель системы даже во время выполнения. Визуальные средства проектирования среды Stratum 2000 обеспечивают построение прототипа системы из объектов, соединяемых между собой информационными связями. Для их изображения используются статическая и анимационная графика.

Эффективность применения среды Stratum 2000 достигается за счет: повышения скорости разработки, сведения к минимуму ручного программирования, легкой модификации построенной системы. Применение среды Stratum 2000 особенно эффективно для моделирования технических систем, автоматизированных систем правления, систем управления натурными объектами и технологическими процессами, систем научных исследований, принятия тактических и стратегических решений.

Stratum Computer – универсальная инструментальная оболочка по манипуляции данными, математическими и графическими объектами и образами, поддерживающая основные виды инженерной деятельности.

Основными видами деятельности, поддерживаемыми программным продуктом являются: конструирование и проектирование, управление, моделирование, алгоритмизация, синтез, поиск решений, графический дизайн, элементы управления базами данных, функционирование и создание

автоматизированных рабочих мест в ряде предметных областей, элементы электронных таблиц, мультипликация, исследования в математических и предметных областях знания, манипулирование данными и объектами.

Программный продукт Stratum Computer 1.3 состоит из трех частей Visual Stratum;Mathematical Stratum; Algorithmical Stratum. Visual Stratum служит для фиксации неформальных образов в виде чертежей, текстов, графиков, трехмерных сценариев. В части Mathematical Stratum программного продукта свойства объекта записаны в виде математической, условно-символьной, словесной и натурально-графической модели. Таким образом, предоставлена возможность создания и использования действующих моделей: конструкций, процессов, явлений. Algorithmical Stratum позволяет отказаться от написания программы посредством создания алгоритма. По алгоритму программа воссоздается автоматически.

Система численно-математического моделирования MathCAD

Mathcad – система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением.

Mathcad имеет простой и интуитивный для использования интерфейс пользователя (рис. 18). Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов.

Mathcad эффективна в сложных проектах для визуализации результатов математического моделирования, путем использования распределённых вычислений и традиционных языков программирования. Mathcad целесообразна в крупных инженерных проектах с превалирующим значением трассируемости и соответствие стандартам. Ключевые возможности MathCad :

- решение дифференциальных уравнений, в т. ч. и численными методами;
- построение двумерных и трёхмерных графиков функций (в разных системах координат, контурные, векторные и т. д.);
- выполнение операций с векторами и матрицами;

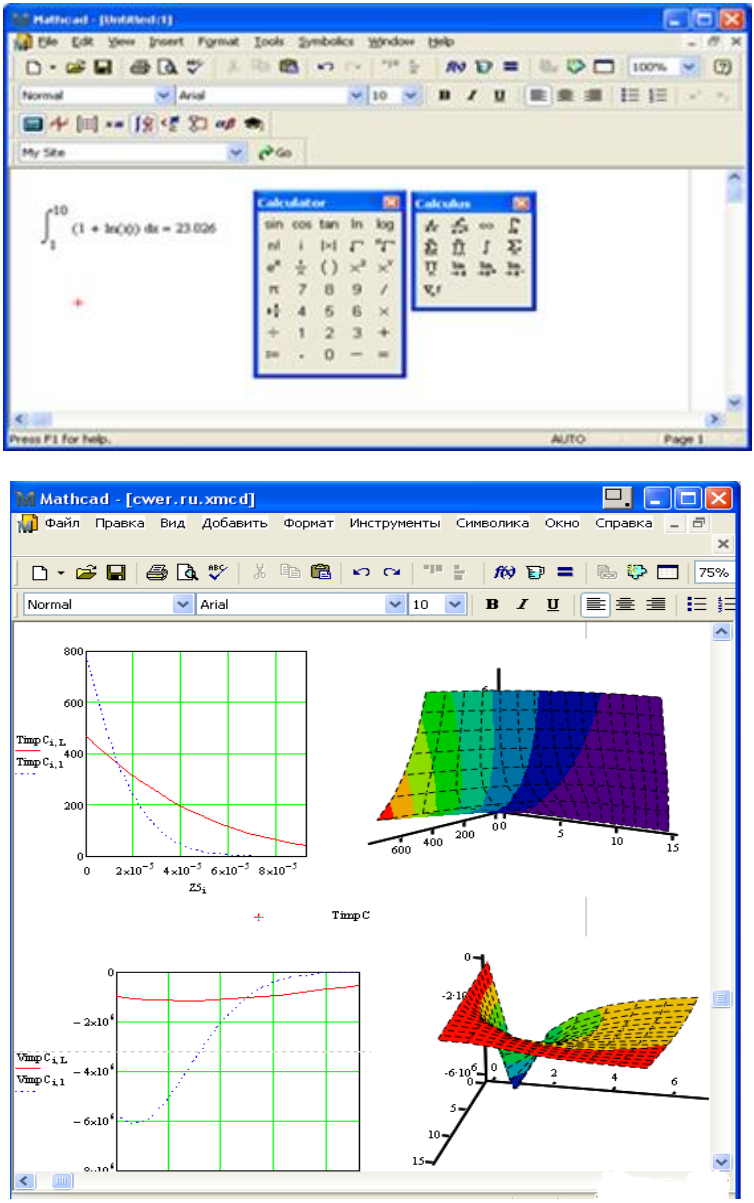


Рис. 18. Интерфейс MathCad

- символьное решение систем уравнений;
- аппроксимация кривых;
- поиск корней многочленов и функций;
- статистический расчёт и работа с распределением вероятностей;
- вычисления с единицами измерения;
- интеграция с САПР системами, использование результатов вычислений в качестве управляющих параметров.

Mathcad изначально создавался для численного решения математических задач, он ориентирован на решение задач именно прикладной, а не теоретической математики, когда нужно получить результат без углубления в математическую суть задачи.

Основное отличие Mathcad от аналогичных программ – это графический, а не текстовый режим ввода выражений. Вычисления с введенными формулами осуществляются одновременно с набором либо по команде. Обычные формулы вычисляются слева направо и сверху вниз.

В среде Mathcad фактически нет графиков функций в математическом понимании термина, а есть визуализация данных, находящихся в векторах и матрицах (т. е. осуществляется построение как линий, так и поверхностей по точкам с интерполяцией), хотя пользователь может об этом и не знать, поскольку у него есть возможность использования непосредственно функций одной или двух переменных для построения графиков или поверхностей соответственно.

Система численно-математического моделирования MatLab

MatLab – это пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования, используемый в этом пакете. Среди средств общего назначения, используемых в исследовательских задачах, пакет MatLab занимает особое место. Это объясняется тем, что MatLab является мощным и универсальным обработки многомерных данных. Сама структура пакета делает его удобным средством для проведения матричных вычислений. MatLab – это язык высокого уровня, имеющий открытый код, MatLab прекрасно интегрируется с Microsoft Word и Excel (рис. 19).

MatLab – это очень популярный инструмент для анализа данных. Пакет MatLab включает различные интерфейсы

для получения доступа к внешним подпрограммам, написанным на других языках программирования, данным, клиентам и серверам, общающимся через технологии Component Object Model или Dynamic Data Exchange, а также периферийным устройствам, которые взаимодействуют напрямую с MatLab. Для MatLab имеется возможность создавать специальные наборы инструментов (англ. toolbox), расширяющие его функциональность. Наборы инструментов представляют собой коллекции функций, написанных на языке MatLab для решения определённого класса задач, включая сбор и анализ экспериментальных данных, визуализация научной информации с помощью технологий виртуальной реальности.

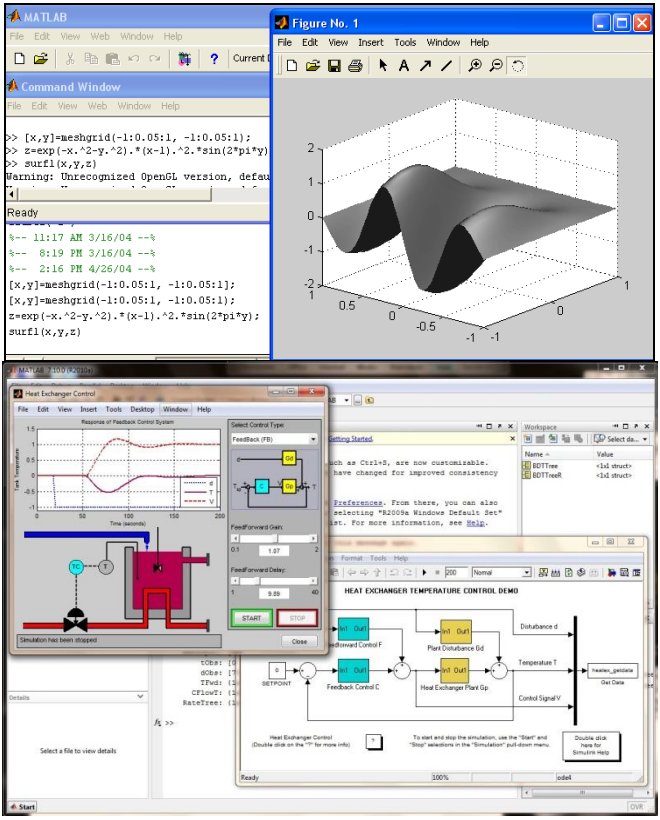
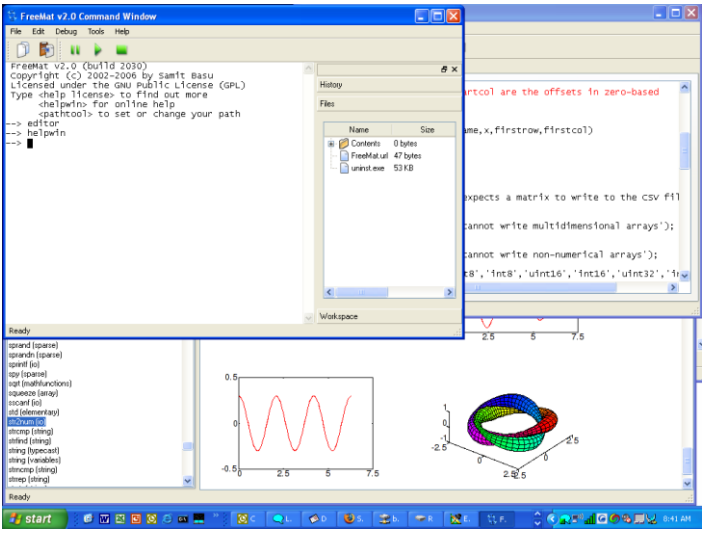


Рис. 19. Интерфейс MatLab

Система математического моделирования FreeMat

FreeMat – это среда для инженерного и научного моделирования и обработки данных. FreeMat похожа на коммерческую среду Matlab, но является продуктом с открытым исходным кодом, использует инструментарий *Qt*, что обеспечивает кроссплатформенность этого продукта (рис. 20).



Ри. 20. Интерфейс FreeMat

FreeMat имеет возможности, обеспечивающие примерно 95 % функциональности среды Matlab. Недостатком является отсутствие поддержки создания графических интерфейсов в стиле Matlab .

Система математического моделирования GNU Octave

GNU Octave – свободная система для математических вычислений, использующая совместимый с MATLAB язык высокого уровня. Octave представляет интерактивный командный интерфейс для решения линейных и нелинейных математических задач, а также проведения других численных экспериментов (рис. 21). Язык Octave оперирует арифметикой вещественных и комплексных скаляров и матриц, имеет расширения для решения линейных алгебраических задач,

нахождения корней систем нелинейных алгебраических уравнений, работы с полиномами, решения различных дифференциальных уравнений, интегрирования систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений первого порядка, интегрирования функций на конечных и бесконечных интервалах.

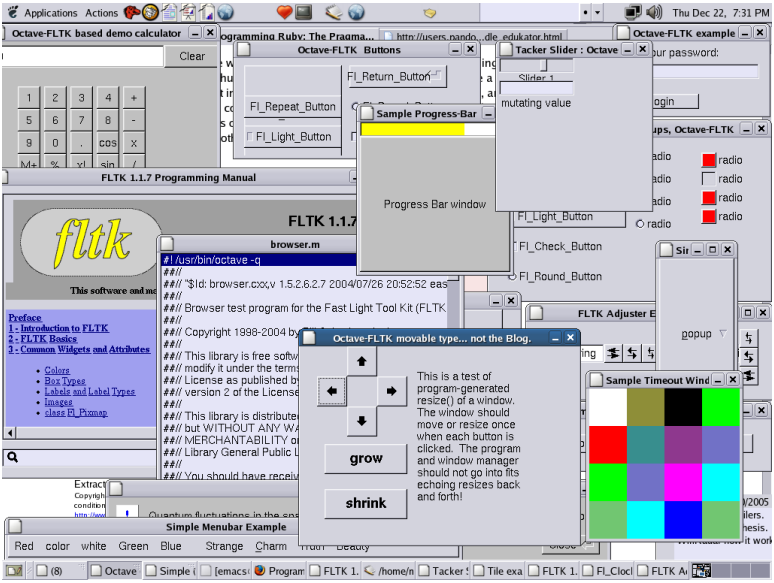


Рис. 21. Интерфейс GNU Octave

Написанный с учётом совместимости с MATLAB, Octave реализует многие его возможности:

- матрицы в качестве основных типов данных;
- встроенная поддержка комплексных чисел;
- мощные встроенные математические функции и большие библиотеки функций;
- расширяемость, благодаря возможности создания пользовательских функций.

Система математического моделирования Scilab

Scilab – пакет прикладных математических программ, предоставляющий мощное открытое окружение для инженерных, технических и научных расчётов.

По возможностям пакет Scilab практически не уступает Mathcad, а по интерфейсу близок к Matlab (рис. 22). В Scilab реализованы численные методы решения задач, среди которых можно выделить следующие:

- задачи линейной алгебры;
- нелинейные уравнения и систем;
- задачи оптимизации;
- дифференцирование и интегрирование;
- обработка экспериментальных данных (интерполяция и метод наименьших квадратов);
- обыкновенные дифференциальные уравнения и системы.

Графические возможности Scilab не уступают проприетарным математическим пакетам. Доступный функционал системы:

- 2D и 3D графики, анимация;
- линейная алгебра, разреженные матрицы;
- полиномиальные и рациональные функции;
- интерполяция, аппроксимация;
- симуляция.

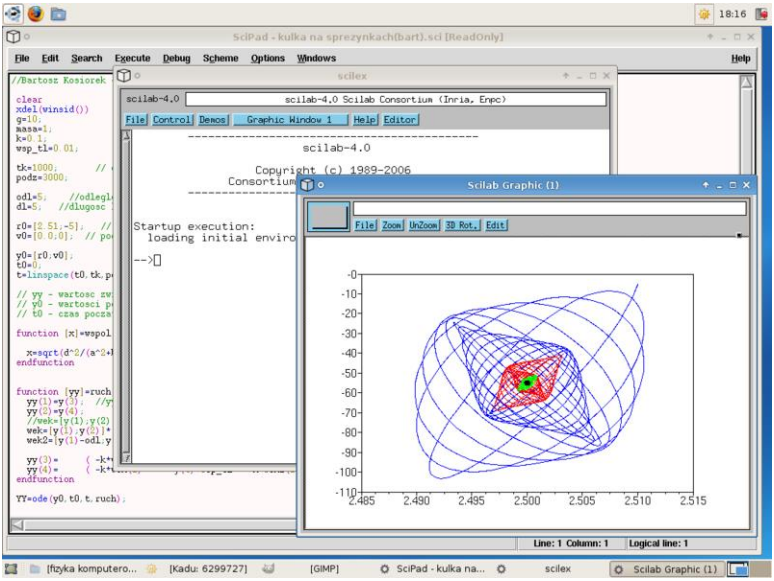


Рис. 22. Интерфейс Scilab

Scilab имеет схожий с MATLAB язык программирования. В состав пакета входит утилита, позволяющая конвертировать документы Matlab в Scilab. Scilab позволяет работать с элементарными и большим числом специальных функций, имеет мощные средства работы с матрицами, полиномами (в т. ч. и символьно), производить численные вычисления (например, численное интегрирование) и решение задач линейной алгебры, оптимизации и симуляции, мощные статистические функции, а также средство для построения и работы с графиками. В состав пакета также входит Scicos – гибрид системы моделирования динамических систем и симуляции, реализующий инструментарий редактирования блочных диаграмм.

Система математического моделирования Maxima

Maxima – математическая система символьных и численных вычислений. Программа работает в консольном режиме и виде оконного приложения (рис. 23). При проведении вычислений, Maxima использует точные дроби, целые числа и числа с плавающей точкой произвольной точности, что позволяет проводить вычисления с очень высокой точностью.

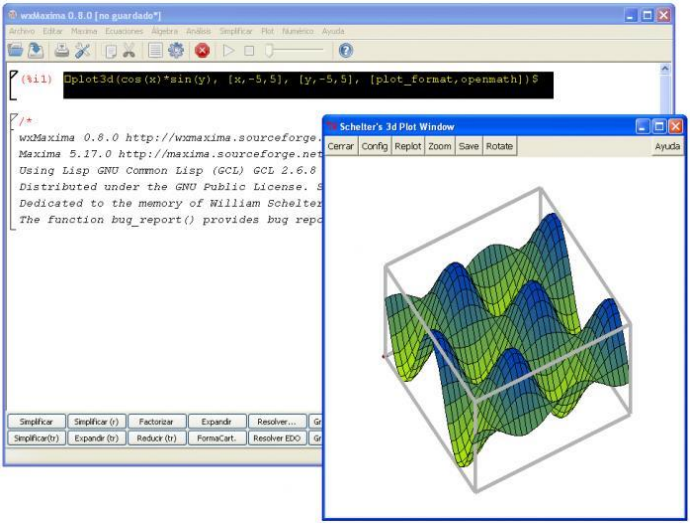


Рис. 23. Интерфейс Maxima

С ее помощью можно проводить операции:

- с векторами, матрицами и тензорами;
- дифференцирования, интегрирования, вычисления пределов;
- разложения в ряд, преобразования Лапласа;
- решать обыкновенные дифференциальные уравнения, задачи обработки экспериментальных данных, нелинейные уравнений и системы.

Maxima может быть использована при проведении аналитических расчетов и построении двух и трехмерных графиков.

Система моделирования динамических систем Simulink MatLab

Программа Simulink является приложением к пакету MATLAB. При моделировании с использованием Simulink реализуется принцип визуального программирования, в соответствии с которым, пользователь на экране из библиотеки стандартных блоков создает модель устройства и осуществляет расчеты. При моделировании пользователь может выбирать метод решения дифференциальных уравнений, а также способ изменения модельного времени (с фиксированным или переменным шагом). В ходе моделирования имеется возможность следить за процессами, происходящими в системе. Для этого используются специальные устройства наблюдения, входящие в состав библиотеки Simulink. Результаты моделирования могут быть представлены в виде графиков или таблиц.

Интерактивный пакет гибридного моделирования Stateflow

Stateflow является интерактивным инструментом разработки в области моделирования сложных, управляемых событиями систем. Он тесно интегрирован с MATLAB и Simulink. Stateflow предлагает элегантное решение для проектирования встроенных систем с контролирующей логикой. Новые усовершенствования включают:

- всестороннюю поддержку данных и операций с фиксированной точкой;
- выполнение функций отмены (undo) и повтора (redo) d Stateflow Editor;

- программируемый доступ к Stateflow с помощью полностью документированного API;
- поддержку двумерных матриц для передачи данных в и из Simulink;
- отладчик Stateflow может определять переполнение данных;
- упрощение повторного использования кодов с помощью экспорта графических функций из библиотечных таблиц.

Система компьютерного моделирования Autodesk 3DS Max

Autodesk 3ds Max – полнофункциональная профессиональная программная система для создания и редактирования трёхмерной графики и анимации. Autodesk 3ds Max – это комплексное решение для 3D-моделирования, анимации, рендеринга и композитинга, предназначенное для реализации инновационных проектов предприятий строийиндустрии, визуальных эффектов и графики. Мощные возможности 3D-моделирования заключаются в использовании средств для полигонального моделирования и наложения текстур. Ускоренный рендеринг – быстрое создание стилизованных и высокореалистичных изображений благодаря неограниченным возможностям пакетного рендеринга при помощи интерактивного графического процессора с поддержкой технологии NVIDIA.3ds Max располагает обширными средствами для создания разнообразных по форме и сложности трёхмерных компьютерных моделей реальных объектов с использованием разнообразных техник и механизмов, включающих:

- полигональное моделирование, в которое входят Editable mesh (редактируемая поверхность) и Editable poly (редактируемый полигон) – это самый распространённый метод моделирования, используется для создания сложных моделей;
- моделирование на основе неоднородных рациональных B-сплайнов
- моделирование на основе т. н. “сеток кусков” или поверхностей Безье ;
- моделирование с использованием встроенных библиотек стандартных параметрических объектов (примитивов) и модификаторов.

Моделирование на основе стандартных объектов, как правило, является основным методом моделирования и служит отправной точкой для создания объектов сложной структуры, что связано с использованием примитивов в сочетании друг с другом как элементарных частей составных объектов.

Визуализация является заключительным этапом работы над моделируемым объектом. Только после визуализации становятся видны все свойства материалов объектов и проявляются эффекты внешней среды, применённые в составе модели. Возможности 3ds Max:

- моделирование и расчет освещенности производственного цеха. Технология расчета освещенности позволяет моделировать естественное и искусственное освещение;
- моделирование и расчет акустического фона в производственном цехе;
- моделирование и расчет санитарно-защитной зоны предприятия сборного железобетона.

3ds Max обладает довольно обширной базой стандартных средств, облегчающих моделирование всевозможных спецэффектов. Помимо стандартной базы существует масса дополнительных средств (плагинов), позволяющих не только создавать значительно более реалистичные эффекты внешних климатических, антропогенных и прочих факторов, но содержащие дополнительные инструменты моделирования.

Система проектирования CATIA

CATIA (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application) – комплексная система автоматизированного проектирования (CAD), технологической подготовки производства (CAM) и инженерного анализа (CAE), включающая в себя передовой инструментарий трёхмерного моделирования, подсистемы программной имитации сложных технологических процессов, развитые средства анализа и единую базу данных текстовой и графической информации.

CATIA является центром компетенции по эргономическому моделированию процессов в различных производствах. Система позволяет эффективно решать все задачи технической подготовки производства – от концептуального проектирования

предприятия по выпуску строительной продукции до выпуска чертежей, спецификаций, монтажных схем и управляющих программ для технологического оборудования.

Новое программное обеспечение CATIA позволяет выполнять несколько операций одновременно, таких как проектирование, в трех измерениях, создание чертежной документации, анализ деталей, сборок, с отображением их в виде тонированных изображений и тем самым, ускоряет процесс производства (рис. 24).

CATIA-CADAM AEC Plant Solutions (проектирование предприятий) – следующее поколение систем объектно-ориентированного моделирования промышленных предприятий предоставляющее технические возможности, которые разительно упрощают процесс проектирования, строительства и эксплуатации предприятия.

CATIA поддерживает программы моделирования для всех инженерных дисциплин и коллективные бизнес-процессы на протяжении жизненного цикла изделия. Новая концепция получила название "PLM 2.0 на платформе V6". Суть концепции – трёхмерное моделирование и коллективная работа в реальном времени. PLM 2.0 – общее название второго поколения средств управления жизненным циклом изделия. По аналогии с известным термином Web 2.0, используемым для обобщенного названия нового поколения Интернет-сервисов, отличительной особенностью которых является создание контента непосредственно самими пользователями, PLM 2.0 позиционируется как "объединяющая коллективная интеллектуальная обстановка", где универсальным языком общения служит 3D, а основной целью определена поддержка всего пути от идеи будущего продукта до его внедрения и утилизации.

Линейка программных продуктов CATIA предназначена для семи основных отраслей промышленности, включая строительство заводов. Домены объединяют в себе программные продукты, характерные для решения конкретной совокупности задач в процессе жизненного цикла изделия.

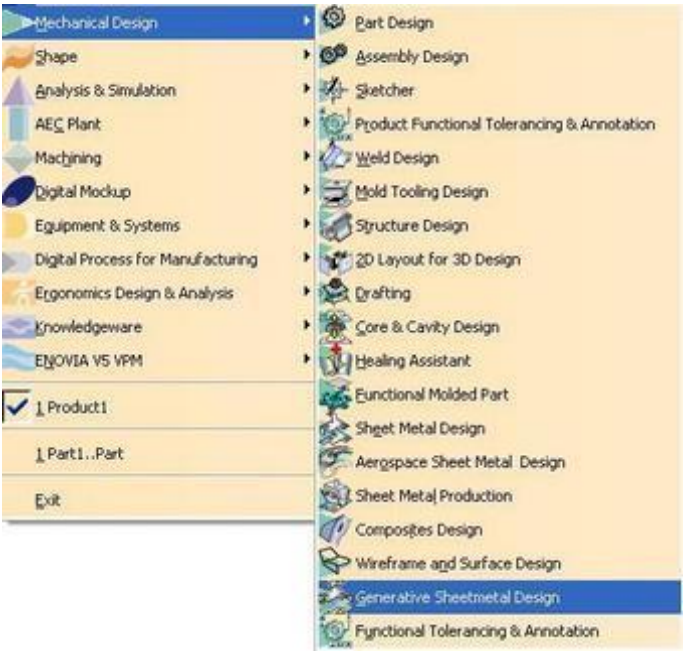


Рис. 24. Внешний вид интерфейса CATIA

Выделяются следующие семь областей применимости:

- строительное проектирование;
- разработка дизайна изделий;
- системный синтез промышленных изделий;
- проектирование систем и коммуникаций;
- инженерный анализ;
- программирование технологии обработки;
- управление проектированием и обменом данными.

Портфель продуктов CATIA включает более 300 функциональных модулей:

- инфраструктура и администрирование;
- проектирование конструкций;
- поверхностное моделирование и дизайн;
- прочностной анализ конструкций;
- проектирование заводской инфраструктуры;
- инструменты для создания управляющих программ;

- работа с электронно-цифровыми макетами изделий;
- средства проектирования оборудования и систем;
- управление информационными процессами на производстве;
- создание макетов, эргономический анализ статики и динамики;
- средства работы с базами знаний.

Ключевые преимущества CATIA:

- расчёт (в т. ч. прочностной) методом конечных элементов;
- реализация функции работы с поверхностями;
- продвинутая трассировка инженерных систем;
- система отображения структуры комплектации;
- подготовка к стадии быстрого прототипирования, поддержка конвертации;
- система проектирования металлоконструкций;
- возможность кинематического анализа оборудования;
- возможность эргономического анализа.

2. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Под математическим планированием эксперимента (МПЭ) понимают постановку опытов по заранее составленной схеме, обладающей оптимальными свойствами с точки зрения объема экспериментальных работ и статистических требований. В основу теории планирования эксперимента положены вероятностно-статистические методы, позволяющие теоретически обоснованно установить минимально необходимое число и состав экспериментов, а также порядок их проведения для получения количественных зависимостей между изучаемым параметром и влияющими на него факторами.

Планирование эксперимента позволяет значительно сократить объем экспериментальных работ при изучении и управлении многофакторными зависимостями, например, для регулирования составов бетона при изменении тех или иных факторов (Ц/В, активности цемента, модуля крупности песка и т. д.); для оптимизации составов бетона с целью обеспечения заданных выходных параметров (подвижности и жесткости бетонной смеси, прочности, морозостойкости, водонепроницаемости бетона и др.); для оптимизации состава многокомпонентных добавок-регуляторов свойств бетонной смеси и параметров технологического режима (приготовления и формования бетона); при технико-экономическом анализе для оценки эффективности технологических решений; при разработке математических моделей показателей свойств новых видов бетона, а также для получения количественных зависимостей.

Планирование эксперимента предполагает выбор наиболее существенных факторов и диапазона их варьирования для определения выходных параметров, а также проведение опытов по определенному статистически оптимальному плану (матрице планирования), вид которого определяется характером предполагаемой зависимости (модели).

Методы МПЭ позволяют, одновременно варьируя несколькими значениями независимых переменных

по специальным таблицам (матрицам), в которых даны кодированные значения факторов, а также на основании опытных и расчетных данных получить математическую модель исследуемых зависимостей.

Истинный характер исследуемой зависимости может быть не всегда известен, но для решения практических задач достаточно найти ее приближенное выражение. Наиболее удобной формой записи количественной зависимости является уравнение в виде полинома. При постановке простейшей задачи или на первой стадии исследования задаются уравнениями первой степени или неполными квадратичными. Решение большинства оптимизационных задач связано с использованием полиномов второго порядка. Зависимости третьего порядка в практике исследований технологии бетона и железобетона практически не применяются.

Математическая модель может быть использована для изучения и управления свойствами бетона (прочностные характеристики, морозостойкость, водонепроницаемость и т. д.), а также для решения задач оптимизации технологического процесса, т. е. для выбора оптимальных значений факторов в пределах области варьирования, что позволяет получить наилучшее значение критерия эффективности (расход цемента, приведенные затраты и т. п.) и обеспечить выходные параметры (прочность, морозостойкость и др.).

При планировании эксперимента весьма важным этапом является выбор основных факторов, существенно влияющих на выходной параметр, и уровней их варьирования. Значения факторов, которые не вошли в план эксперимента, принимаются постоянными. Так, для определения степени влияния крупности песка на свойства бетонной смеси и бетона пробные замесы готовят на песке с различным модулем крупности при использовании цемента одного завода и одной и той же активности, а также щебня постоянного качества.

Важным требованием, предъявляемым к факторам, является их некоррелируемость. Это не означает, что между факторами не должно быть никакой связи. Необходимо и достаточно, чтобы связь не была прямой. Например,

при исследовании бетонной смеси нельзя одновременно планировать осадку конуса и расход воды, т. к. при прочих равных условиях для каждого значения осадка конуса расход воды – величина постоянная.

При выборе факторов следует учитывать степень их управляемости и возможность сохранения заданного уровня варьирования. Предпочтительнее, чтобы исследуемые факторы имели количественную оценку. Однако факторы можно планировать и по их качественным показателям.

При любом сочетании факторов уровни варьирования должны обеспечивать возможность проведения эксперимента и измерения выходного параметра. Например, если выходным параметром является подвижность бетонной смеси, то доля песка в смеси заполнителей, содержание воды, количество добавки должны обеспечить получение однородной бетонной смеси. В противном случае необходимо сузить интервал варьирования или решать задачу по частям.

После выбора факторов необходимо установить уровни их варьирования. Совокупность всех значений, которые может принимать фактор в пределах эксперимента, называют областью его варьирования. В матрице планирования факторы даются в кодированном виде. При этом за основной уровень варьирования принимают центральную, так называемую нулевую точку и обозначают ее X_{io}, а интервал варьирования ΔX_i. Путем прибавления или вычитания значения интервала варьирования из значения фактора, находящегося на основном уровне, получают соответственно верхний, обозначаемый (+*I*) или (+), или нижний, обозначаемый (–*I*) или (–-), уровень фактора.

Взаимосвязь между натуральными X_i и кодированными значениями факторов x_i определяют по формуле:

$$x_i = \frac{X_i - X_{io}}{\delta X_i}.$$

Выбор интервалов варьирования зависит от целей и возможностей исследования, а также от конкретных условий

производства. Интервалы варьирования для линейных и неполных квадратичных зависимостей принимают, как правило, меньше, чем для полных квадратичных; чем шире диапазон изучаемого фактора, тем менее вероятен линейный характер зависимости от него выходного параметра. Ориентировочные интервалы варьирования для линейных и квадратичных уравнений приведены в табл. 5.

Таблица 5

Ориентировочные интервалы варьирования факторов

фактор	Рекомендуемый интервал варьирования, %	
	для линейных и неполных квадратичных зависимостей	для квадратичных зависимостей
Цементно-водное отношение, Ц/В	15–20	25–40
Активность вяжущего вещества, $R_ц$	15–25	15–25
Расход добавки, *Д*	20–50	20–100
Доля мелкого заполнителя, *r*	5–10	5–15
Модуль крупности песка, $M_к$	20–25	30–50
Максимальная крупность щебня (гравия) D_{max}	20–40	20–80
Продолжительность ТВО	20–30	20–50
Время предварительной выдержки	30–50	30–100
Время изотермической обработки	20–40	20–100
Температура изотермической обработки	8–10	8–25
Скорость подъема температуры	20–30	20–50
Расход воды, В	5–8	5–20

Условия планирования эксперимента рекомендуется представлять в табличной форме, примером построения которой может служить табл. 6.

Таблица 6

Условия планирования эксперимента

Факторы		Уровни варьирования			Интервал варьирования
натуральный вид	кодированный вид	-1	0	+1	
Ц/В	X_1	1,4	2	2,6	0,6
Расход С-3, %	X_2	0	0,2	0,4	0.2
Расход ННК	X_3	0	2	4	2

Для построения линейной зависимости применяются двухуровневые, а для квадратичных – трехуровневые планы и планы с большим числом уровней.

Во избежание систематических ошибок и для равномерного распределения или устранения неуправляемых воздействий на весь эксперимент (колебания влажности и температуры воздуха, усталость экспериментатора, незначительные изменения зернового состава заполнителя) опыты проводят не по порядку, указанному в матрице, а в рандомизированной последовательности.

2.1. Планирование эксперимента для получения линейных и неполных квадратичных зависимостей

При изучении линейных и неполных квадратичных зависимостей чаще всего применяют полный факторный эксперимент (ПФЭ) и дробные реплики.

При проведении ПФЭ планирование осуществляют на двух уровнях –верхнем (+1) и нижнем (–1). Этот план позволяет реализовать все неповторяющиеся варианты опытов на указанных уровнях для различного числа факторов. При этом число опытов N_1 зависит от числа факторов k и равно 2^k: например, для двух факторов $2^2 = 4$, для трех – $2^3 = 8$, для четырех – $2^4 = 16$, для пяти – $2^5 = 32$ и т. д.

Допустим, что требуется определить степень влияний факторов x_1 и x_2 на некое свойство бетона y. В этом случае матрица планирования примет вид табл. 7.

Таблица 7

Матрица планирования

Точки плана U	Факторы		Взаимодействия	Выходной параметр
	X_1	X_2	X_1X_2	Y
1	+1	+1	+1	Y_1
2	+1	-1	-1	Y_2
3	-1	+1	-1	Y_3
4	-1	-1	+1	Y_4

В первом столбце матрицы приведен порядковый номер опыта в соответствии с точками плаца, во втором и третьем – кодированные значения факторов x_1 и x_2, в четвертом – результат взаимодействия факторов x_1x_2, в пятом – выходной параметр y. Для проведения опыта в первой строке оба фактора принимаются на одном уровне – верхнем, а во втором – на разных: первый – на верхнем, второй – на нижнем уровне и т. д.

Схема достраивания матриц ПФЭ при числе факторов k от 2 до 5 приведена в Приложении Б.

Результаты опытов обрабатывают с помощью методов математической статистики, получая, таким образом, зависимость между выходными параметрами и влияющими на них факторами в виде линейных или неполных квадратичных уравнений регрессии:

в общем виде для "k" факторов:

$$\widehat{Y}_i = b_o + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j$$

для двухфакторного эксперимента:

$$\widehat{Y}_i = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

для трехфакторного эксперимента:

$$\hat{Y}_i = b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3$$

для четырехфакторного эксперимента:

$$\hat{Y}_i = b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \\ + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4$$

для пятифакторного эксперимента

$$\hat{Y}_i = b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \\ + b_{14}x_1x_4 + b_{15}x_1x_5 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{25}x_2x_5 + b_{34}x_3x_4 + \\ + b_{35}x_3x_5 + b_{45}x_4x_5$$

При проведении ПФЭ с увеличением числа факторов резко возрастает и число опытов. В некоторых случаях, например, на первой стадии исследования, т. е. при предварительной оценке степени влияния факторов, точностью конечной информации можно несколько поступиться, что позволит значительно сократить число опытов. Для этого используются дробные реплики (1/2, 1/4, 1/8 и т. д.), которые получают делением числа опытов ПФЭ соответственно на 2, 4, 8. Матрицы дробных реплик при проведении ПФЭ получают заменой, прежде всего, взаимодействий высшего порядка (начиная с тройных – $x_1\ x_2\ x_3$ и т. д.) новыми переменными. Эти взаимодействия, как правило, незначимы. Число опытов в дробных репликах соответствует 2^{k-p}, где p – дробность реплики. Так, например, ПФЭ для семи факторов включает $2^7 = 128$, а 1/2 реплики $2^{7-1} = 64$, 1/4 реплики $2^{7-2} = 32$, 1/8 реплики $2^{7-3} = 16$ опытов и т. д. Допустим, требуется изучить влияние пяти факторов: $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$. Для составления полуреплики 2^{5-1} можно взять ПФЭ 2^4, а взаимодействие факторов $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ заменить на фактор x_5 (табл. 5). В этом случае число опытов уменьшается в два раза по сравнению с ПФЭ 2^5 (Приложение Б).

Свободный член уравнения b_0 определяют по формуле:

$$b_o = \frac{\sum_{1}^{N_1} y_u}{N_1} \quad \text{или} \quad b_o = \frac{\sum_{1}^{N_1} \bar{y}_u}{N_1}$$

где N, – число точек плана;

y_U – экспериментальное значение выходного параметра в точках $u_1 \ldots u_n$ плана;

y_U – среднее значение выходного параметра в точке u для случая, если $\bar{y}_U = \frac{\sum_{1}^{r} y_{Ui}}{r}$, т. е. при повторении опытов;

r – число дублируемых опытов по строкам матрицы.

Коэффициенты для линейных членов уравнений определяют по формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_{iu} y_u}{N_1} \quad \text{или} \quad b_i = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_{iu} \bar{y}_u}{N_1}$$

где x_{iU} – значение i-го фактора в строке матрицы в u-ом опыте.

Коэффициенты парных взаимодействий определяют по формуле

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{N_1} x_{iu} y_{ju} y_u}{N_1} \text{ или } b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{N_1} x_{iu} y_{ju} \bar{y}_u}{N_1}$$

где x_{ju} – значение j-го фактора в u-ом опыте.

2.2. Планирование эксперимента при исследовании полных квадратичных зависимостей

При изучении нелинейных зависимостей в широком диапазоне изменения факторов следует применять планы второго порядка. В этом случае получают полные квадратичные уравнения регрессии:

в общем виде для k факторов:

$$\widehat{Y}_i = b_o + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j$$

для двухфакторного эксперимента:

$$\widehat{Y}_i = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2$$

для трехфакторного эксперимента:

$$\widehat{Y}_i = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{12} x_1 x_2 + \\ + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3$$

для четырехфакторного эксперимента:

$$\widehat{Y}_i = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + \\ + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4$$

для пятифакторного эксперимента:

$$\widehat{Y}_i = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + \\ + b_{44} x_4^2 + b_{55} x_5^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{15} x_1 x_5 + b_{23} x_2 x_3 + \\ + b_{24} x_2 x_4 + b_{25} x_2 x_5 + b_{34} x_3 x_4 + b_{35} x_3 x_5 + b_{45} x_4 x_5$$

Для планов второго порядка каждый фактор необходимо планировать не менее чем на трех уровнях: верхнем (+1), среднем (0) и нижнем (–1). Планы полных квадратичных зависимостей получают путем добавления к ядру (т. е. к ПФЭ к дробной реплике) дополнительных так называемых "звездных точек", а в некоторых случаях и нулевых, с соответствующим интервалом (плечом) варьирования, обозначаемым Y.

В практике исследований технологии бетона и железобетона наиболее часто применяют ротатабельные) планы, планы Бокса-Бенкина, а также двух-, трех-;четырех (B_4)- и пятифакторное (B_5 Ha_5) планы, близкие по свойствам к Д-оптимальным (Приложение Б)

Основные характеристики ротатабельных планов приведены в табл. 8.

Таблица 8

Основные характеристики ротатабельных планов

Число факторов k	Ядро плана N_1	Число звездных точек N_α	Число нулевых точек n_o	Плечо звездной точки α
2	2^2	4	5	1,414
3	2^3	6	6	1,682
4	2^4	8	7	2
5	2^{5-1}	10	8	2
6	2^{6-1}	12	9	2,378
7	2^{7-1}	14	14	2,828

Коэффициенты уравнений регрессии для ротатабельных планов определяют следующим образом:

$$b_0 = T_1(O_y) - T_2\sum_{i=1}^{k}(iiy)$$

$$b_i = T_3(iy)$$

$$b_{ii} = T_4(iiy) + T_5\sum_{i=1}^{k}(iiy) - T_6(O_y)$$

$$b_{ij} = T_6(ijy)$$

В формулах

$$(O_y) = \sum_{u=1}^{N} y_u$$

$$(iy) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u$$

$$(ijy) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} y_u$$

$$(iiy) = \sum_{u=1}^{N} (x_{iu})^2 y_u$$

$T_1 – T_6$ – параметры для расчета коэффициентов уравнений регрессии (табл. 9).

Таблица 9

Параметры для расчета коэффициентов уравнения регресии

Число факторов k	Ядро плана N_1	Число нулевых точек n_o	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	2^2	5	0,2	0,1	0,125	0,125	0,0187	0,25
3	2^3	6	0,1663	0,0568	0,0732	0,0625	0,0069	0,125
4	2^4	7	0,1428	0,0357	0,0417	0,0312	0,0037	0,0625
5	2^{5-1}	8	0,1591	0,0341	0,0417	0,0312	0,0028	0,0625

При исследовании двух факторов и при необходимости более полного изучения одного из них применяют так называемые ротатабельные планы на шестиугольнике, особенность которых состоит в том, что первый фактор варьируется на пяти уровнях, а второй – на трех (табл. 10).

Таблица 10

Ротатабельный план эксперимента

Точки плана	Матрица планирования		Квадраты переменных		Взаимодействия	Выходной параметр
u	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	Y_i
1	-1	0	+1	0	0	Y_1
2	+1	0	+1	0	0	Y_2
3	0.5	0.865	0.25	0.75	0.43	Y_3
4	0.5	-0.865	0.25	0.75	-0.43	Y_4
5	-0.5	0.865	0.25	0.75	-0.43	Y_5
6	-0.5	-0.865	0.25	0.75	0.43	Y_6
7	0	0	0	0	0	Y_7

Соответствующие коэффициенты определяют по формулам:

$$b_0 = (O_y) - \sum_{u=1}^{k} (iiy)$$

$$b_i = 0{,}333(iy)$$

$$b_{ii} = 0{,}667(iiy) + 0{,}833\sum_{i=1}^{k}(iiy) - (O_y)$$

$$b_{ij} = 1{,}333(ijy)$$

Близкими к ротатабельным являются трехуровневые планы Бокса-Бенкина. Соответствующие коэффициенты уравнений регрессии определяют по формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} y_0}{n_0}$$

$$b_i = T_3(iy)$$

$$b_{ii} = T_4(iiy) + T_5\sum_{i=1}^{k}(iiy) - T_6(O_y)$$

$$b_{ij} = T_6(ijy)$$

Расчетные значения параметров $T_2 - T_6$ приведены в табл. 11.

Таблица 11

Расчетные значения параметров

Число факторов k	Общее число точек N	Число нулевых точек n_o	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
3	15	3	0.1667	0.125	0.25	0.625	0.25
4	27	3	0.5	0.0833	0.125	0.0208	0.25
5	46	6	0.5	0.0625	0.0833	0.0104	0.625

Для двух- и трехфакторных экспериментов применяются трехуровневые планы. Коэффициенты b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij}, уравнений регрессии рассчитывают по формулам соответственно. Расчетные значения параметров $T_1 – T_6$ приведены в табл. 12.

Таблица 12

Расчетные значения параметров

Число факторов k	Тип плана	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	Двухфакторный	0,2632	0,1579	0,1667	0,5	-0,1053	0,25
3	Трехфакторный	0,1832	0,0704	0,1	0,5	-0,1268	0,125

Для четырех- и пятифакторных экспериментов предпочтительнее близкие по свойствам к Д-оптимальным трехуровневые композиционные планы (см. Приложение Б) типа B_4 и B_5, которые образуют путем прибавления к ПФЭ или к дробной реплике "звездных" точек при $\gamma = \pm 1$. Для получения плана Ha_5 добавляют еще одну нулевую точку.

Уравнения регрессии, полученные по Д-оптимальным планам, обеспечивают одинаковую точность прогнозирования выходного параметра в области, описываемой радиусом, равным 1 (считая от нулевой точки). Коэффициенты уравнений регрессии такого типа также рассчитывают по формулам соответственно. Расчетные значения параметров $T_1 – T_6$ приведены в табл. 13.

Таблица 13

Расчетные значения параметров

Число факторов k	Тип плана	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
4	B4	0,2292	0,0625	0,0556	0,5	-0,1042	0,0625
5	B5	0,1588	0,0332	0,0294	0,5	-0,0918	0,0312
6	Ha_5	0,138	0,0303	0,0556	0,5	-0,0909	0,0625

Выбор плана зависит от характера поставленной задачи и возможностей варьирования факторов на принятых уровнях. Для задач, в которых имеется хотя бы один трудно управляемый фактор, т. е. фактор, для которого обеспечение натурального значения на всех уровнях варьирования вызывает затруднения (активность цемента, нормальная густота цементного теста и т. д.), рекомендуется применять планы с минимальным числом уровней варьирования: двух- и трехфакторные на трех уровнях, а также планы типа B_4, B_5 и Ha_5. При свободном варьировании факторов (расход добавок, модуль крупности песка и т. д.) можно применять и ротатабельные планы.

Применение ротатабельного плана наиболее целесообразно в тех случаях, когда желательно получить значения выходных параметров за пределами +1...-1. При проведении экспериментов с применением трехуровневых планов особое внимание следует обратить на тщательность проведения опытов в звездных точках.

Если квадратичные зависимости неадекватно описывают процесс, добиться их адекватности можно путем замены значения одного или нескольких факторов на их логарифм, обратную функцию, выражение в виде степени.

Для прямых расчетов и при построении графиков и номограмм полученные уравнения регрессии целесообразно преобразовать в полиномы с натуральными значениями факторов.

2.3. Статистический анализ уравнений регрессии

Проведение эксперимента неизбежно связано с ошибками вследствие того, что исследуемые зависимости и процессы носят вероятностный характер, а полученные уравнения не являются их точной копией, а лишь отражают их с определенной степенью вероятности. Поэтому обязательным этапом при проведении исследований является статистический анализ, основной целью которого является оценка значимости коэффициентов уравнений и проверка адекватности уравнений.

Статистический анализ уравнений регрессии производят:

- при дублировании опытов по строкам матрицы – по средним значениям выходных параметров;

➢ без дублирования – по дополнительным опытам на основном уровне.

В ротатабельных планах, планах Бокса-Бенкина, двух- и трехфакторных трехуровневых планах нулевые точки входят в матрицу. Для планов ПФЭ, дробных реплик, планов B_4, B_5 и Ha_5 число нулевых точек рекомендуется принимать не менее 4–-5.

А. Оценка значимости коэффициентов уравнений регрессии

Среднеарифметическое значение выходного параметра y_U определяют:

а) при дублировании опытов по строкам матрицы – по формуле:

$$\overline{y_u} = \frac{\sum_{i=1}^{r} y_{ui}}{r} = \frac{y_{u1} + y_{u2} + \ldots + y_{ur}}{r}$$

где r – число повторных опытов в строке матрицы;

б) при проведении опытов в нулевых точках по формуле:

$$\overline{y_o} = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}}{n_0}$$

где n_0 – число нулевых точек.

Дисперсию воспроизводимости выходного параметра $S^2_{\{y\}}$ находят:

а) при дублировании опытов по строкам матрицы – по формуле:

$$S^2_{\{yu\}} = \frac{\sum_{u=1}^{N}\sum_{i=1}^{r}\left(y_{ui} - \overline{y_u}\right)^2}{N(r-1)}$$

где $\sum_{i=1}^{r}$ – сумма по строкам матрицы;

$\sum_{U=1}^{N}$ – сумма по столбцам;

N – общее число точек плана;

N_1 – число точек ядра плана;

N_γ – число звездных точек. Для линейных уравнений $N = N_1$; для квадратичных – $N = N_1 + N_\gamma$;

б) при проведении опытов в нулевых точках – по формуле:

$$S^2_{\{\overline{y_o}\}} = \frac{\sum_{u=1}^{n_o}\left(y_{ou} - \overline{y_o}\right)}{\left(n_o - 1\right)}$$

При равномерном дублировании опытов однородность ряда дисперсий проверяют с помощью G-критерия Кохрена, представляющего собой отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий

$$G_P = \frac{S^2_{MAX}}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_N^2} = \frac{S^2_{MAX}}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}$$

Дисперсии однородны, если расчетное значение G_p – критерия не превышает табличного значения G_m – критерия. Уровень значимости α, принимаемый обычно равным 5 % называется уровнем риска или доверительным интервалом вероятности (Приложение В).

Среднеквадратическое отклонение выходного параметра вычисляют:

а) при дублировании опытов – по формуле:

$$S_{\{yu\}} = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{N}\sum_{i=1}^{r}\left(y_{ui} - \overline{y_u}\right)^2}{N\left(r-1\right)}},$$

б) при проведении опытов в нулевых точках – по формуле

$$S_{\{yo\}} = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{n_o}\left(y_{ou} - \overline{y_o}\right)^2}{\left(n_o - 1\right)}}.$$

Среднеквадратическую ошибку при определении коэффициентов находят:

а) для линейных и неполных квадратичных уравнений при дублировании опытов по формуле:

$$S_{\{b_o\}} = S_{\{b_i\}} = S_{\{b_{ij}\}} = \frac{S_{\{yu\}}}{\sqrt{N_1}}$$

При проведении опытов в нулевых точках в формулу вместо $S_{\{yu\}}$ подставляют $S_{\{yo\}}$;

б) для полных квадратичных уравнений при дублировании опытов по строкам матрицы по формулам:

$$S_{\{b_o\}} = T_7 S_{\{y_u\}}$$

$$S_{\{b_i\}} = T_8 S_{\{y_u\}}$$

$$S_{\{b_{ii}\}} = T_9 S_{\{y_u\}}$$

$$S_{\{b_{ij}\}} = T_{10} S_{\{y_u\}}$$

Значения $T_7 - T_{10}$ принимают по табл. 14.

При проведении опытов в нулевых точках в формулы вместо $S_{\{yu\}}$ подставляют $S_{\{yo\}}$.

Расчетное значение t – критерия Стьюдента – tp – для каждого коэффициента уравнений регрессии находят:

Таблица 14

Расчетные параметры для определения среднеквадратических ошибок и коэффициентов уравнений регрессии второго порядка

Тип плана	Число факторов k	Общее число точек N	Число нулевых точек n_0	T_7	T_8	T_9	T_{10}
Ротатабельный	2	13	5	0,4472	0,3536	0,3792	0,5
	4	31	7	0,378	0,2041	0,187	0,25
	5	32	6	0,3989	0,2041	0,1846	0,25
На шестиугольнике	2	7	1	1	0,5774	1,2247	1,1547
Бокса-Бенкина	3	15	3	0,5774	0,3536	0,5204	0,5
	4	27	3	0,5774	0,2887	0,433	0,5
	5	46	6	0,4082	0.25	0,3385	0,5
Двухфакторный Трехуровневый	2	11	3	0,513	0,4083	0,6282	0,5
Трехфакторный Трехуровневый	3	17	3	0,4279	0,3162	0,6109	0,3536
B_4	4	24	0	0,4787	0,2357	0,6212	0,25
B_5	5	42	0	0,3985	0,1715	0,639	0,1768
Ha_5	5	27	1	0,3716	0,2357	0,6396	0,25

а) для линейных и неполных квадратичных – по формулам:

$$t_{p\{b_o\}} = \frac{|b_o|}{S_{\{b_o\}}}$$

$$t_{p\{b_i\}} = \frac{|b_i|}{S_{\{b_i\}}}$$

$$t_{p\{b_{ij}\}} = \frac{|b_{ij}|}{S_{\{b_{ij}\}}}$$

б) для полных квадратичных – значения t_P для коэффициентов b_0, b_i и b_{ij} – по формулам соответственно (30) – (32), а для коэффициентов b_{ii} – по формуле:

$$t_{p\{b_{ii}\}} = \frac{|b_{ii}|}{S_{\{b_{ii}\}}}$$

Определение t_P следует начинать с наименьших по абсолютному значению коэффициентов.

Коэффициенты считаются значимыми, если расчетное значение t –критерия Стьюдента t_P окажется больше табличного t_T, устанавливаемого по Приложению В по таблице в зависимости от заданного уровня значимости и числа степеней свободы $f_{\{y\}}$. В технологических исследованиях уровень значимости принимают обычно равным 0,05 или 0,1, а число степеней свободы определяют:

- при повторении опытов по строкам матрицы - из условия $f_{\{y\}} = N\,(r-1)$;
- при проведении опытов в нулевой точке – из условия $f_{\{y\}} = n_0 - 1$.

Если коэффициент незначим, то он может быть отброшен без пересчета остальных. В планах второго порядка коэффициенты квадратичных членов оставляют в уравнении даже, если они незначимы.

Б. Проверка адекватности полученных уравнений регрессии

Оценив значимость коэффициентов, производят проверку адекватности уравнений в указанной ниже последовательности.

Дисперсию адекватности S^2_{ad} определяют:

а) для линейных и неполных квадратичных уравнений по формуле

$$S^2_{ad} = \frac{\sum_{u=1}^{N_1}\left(\hat{y} - y_u\right)^2}{N_1 - m},$$

при дублировании опытов по строкам матрицы по формуле

$$S_{ad}^2 = \frac{r}{N_1 - m}\sum_{u=1}^{N_1}\left(\hat{y}_u - \overline{y_u}\right)^2,$$

б) для полных квадратичных уравнений по формулам

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N_1}\left(\hat{y} - y_u\right)^2}{N - m - \left(n_{ou} - 1\right)},$$

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N_1}\left(\hat{y}_u - y_u\right)^2}{N - m},$$

при дублировании опытов по строкам матрицы по формуле

$$S_{ad}^2 = \frac{r}{N - m - \left(n_{ou} - 1\right)}\sum_{u=1}^{N}\left(\hat{y}_u - \overline{y_u}\right)^2,$$

$$S_{ad}^2 = \frac{r}{N - m}\sum_{u=1}^{N}\left(\hat{y}_u - \overline{y_u}\right)^2.$$

В формулах m – число значимых коэффициентов, в т. ч. коэффициентов b_0;

n_{OU} – число нулевых точек матрицы;

y_U – расчетное значение выходного параметра в u-ой строке матрицы.

Для оценки однородности дисперсий использую F-критерий Фишера, расчетное значение F_P которого определяют

$$S_{ad}^2 \succ S_{\{y\}}^2 \Rightarrow F_p = \frac{S_{ad}^2}{S_{\{y\}}^2},$$

$$S_{ad}^2 \prec S_{\{y\}}^2 \Rightarrow F_p = \frac{S_{\{y\}}^2}{S_{ad}^2}.$$

В формулах $S^2_{\{y\}}$ – дисперсия воспроизводимости выходного параметра.

Табличное значение F – критерия Фишера – F_T – находят в зависимости от принятой доверительной вероятности (уровня значимости) и числа степеней свободы по Приложению В. В технологии бетона доверительную вероятность принимают равной 95 % (90 %). Число степеней свободы дисперсии адекватности $f_{\text{ог}}$ определяют:

а) для линейных и неполных квадратичных уравнений по формуле

$$f_{ад} = N_1 - m,$$

б) для полных квадратичных уравнений при отсутствии или наличии нулевых точек в плане по формулам соответственно:

$$f_{ад} = N - m,$$

$$f_{ад} = N - m - (n_0 - 1).$$

Уравнение считается адекватным для принятого уровня доверительной вероятности, если $F_P < F_T$. Если оказалось, что данное уравнение неадекватно, следовательно, при проведении опытов были допущены грубые ошибки или выбранный полином недостаточно полно отражает исследуемую зависимость. В этих случаях необходимо либо повторить опыты, либо изменить интервалы варьирования, либо применить другой план и т. д.

2.4. Анализ математических моделей

Наиболее легко поддаются анализу линейные модели. Знак при коэффициенте показывает характер влияния соответствующего фактора: знак (+) свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора величина соответствующего выходного параметра увеличивается, а знак (–) – о том, что она убывает. Чем больше значение коэффициента, тем сильнее влияние фактора. Если необходимо получить максимальное знание выходного параметра, значения всех

факторов, коэффициенты b_i которых имеют знак (+) следует принимать максимальными, а значения факторов, коэффициенты b_i, которых имеют знак (–) – минимальными. Абсолютные значения коэффициентов уравнений регрессии увеличиваются с увеличением интервалов варьирования.

В неполных квадратичных уравнениях регрессии знак перед коэффициентом линейного члена соответствует направлению изменения выходного параметра при условии, что другие факторы приняты на основном уровне. Знак (+) перед коэффициентом взаимодействия свидетельствует о том, что увеличение выходного параметра возможно только, если взаимодействующие факторы находятся одновременно на верхнем или нижнем уровне, а знак (–) – о том, что один фактор находится на верхнем, а другой – на нижнем уровне.

В квадратичных уравнениях, приняв значения всех факторов (за исключением одного) на основном уровне, уравнение регрессии можно преобразовать в параболу следующего вида:

$$\overleftrightarrow{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_1 x_1^2$$

с экстремумом (максимумом или минимумом) в точке $x_{ext} = -b_1 : 2b_{11}$. Абсолютное значение коэффициента b_1 соответствует скорости изменения исследуемого фактора x_1.

С помощью уравнений регрессии можно решать интерполяционные, экстраполяционные, аналитико-геометрические и оптимизационные задачи, а также задачи управления при заданных значениях выходных параметров, задачи управления при одном или нескольких переменных факторах, задачи минимизации ресурсов при фиксированных значениях выходных параметров и провести оценку роли факторов.

Решение интерполяционных задач позволяет найти значение выходного параметра в пределах области варьирования факторов от +1 до –1. Подставляя в полученное уравнение регрессии кодированные значения каждого фактора (например, 0,25; 0,5; 0,75; –0,3; –0,6; –0,75), получаем значение выходного параметра при любых промежуточных сочетаниях факторов.

Решение экстраполяционных задач позволяет прогнозировать значения выходного параметра за пределами области варьирования факторов, например, при x_i = 1,1; 1,2; 1,3. Однако необходимо иметь в виду, что экстраполяция связана с определенными ошибками в предсказании, и эта ошибка тем выше, чем дальше выход за пределы области варьирования. Экстраполяция возможна, если у исследователя нет сомнений, что за пределами области варьирования факторов характер функции остается без изменений.

Решение аналитико-геометрических задач позволяет на основе уравнений регрессии построить графики и номограммы для выходного параметра в пределах области варьирования факторов, что, в свою очередь, позволяют оперативно установить значение выходного параметра при изменении каждого фактора.

Оптимизационные задачи состоят в нахождении такого сочетания факторов, которое обеспечивает максимальное (минимальное) значение выходного параметра – критерия эффективности при заданных ограничениях. В этом случае экстремум находят путем дифференцирования уравнения последовательно по $x_1, x_2, \ldots x_i$. Полученная система линейных уравнений приравнивается к нулю. Путем ее решения находят значения x_i, обеспечивающие экстремальное значения y. Подставляя найденные значения x_i в исходное уравнение, определяют экстремальное значение выходного параметра. Например, для определения сочетания факторов, обеспечивающих экстремальное значение y, уравнение регрессии дифференцируем поочередно по x_1, x_2, x_3:

$$\widehat{Y}_i = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 +$$

$$+ b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 .$$

Получаем

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1 + 2b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 = 0 ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = b_2 + 2b_{22}x_2 + b_{12}x_1 + b_{23}x_3 = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = b_3 + 2b_{33}x_3 + b_{13}x_1 + b_{23}x_2 = 0.$$

Путем соответствующих преобразований получаем систему трех линейных уравнений, которые можно решить способом подстановки или другими методами.

Задачи управления заключаются в определении такого сочетания факторов, которое обеспечивает заданные показатели выходных параметров. Для этого из полученного уравнения регрессии (например, прочности бетона) выбирают наиболее значимый фактор (обычно Ц/В). Решая уравнения регрессии относительно этого фактора, определяют его значение, обеспечивающее при изменении других принятых факторов значение выходного параметра.

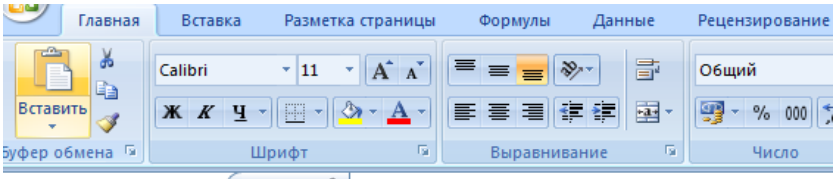
Задачи минимизации состоят в определении такого соотношения принятых факторов, которое позволяет получить заданные значения выходных параметров при минимальном значении одного из факторов, например, расхода цемента Ц.

В производстве бетона и железобетона часто возникают комплексные задачи, предполагающие одновременное проведение, например, интерполяции, а также технологического и технико-экономического анализов. Такие комплексные задачи включают построение математических моделей и выбор сочетания факторов, обеспечивающих показатели качества не ниже заданных при минимальных затратах с учетом ограничений по ресурсам отдельных факторов.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ БЕТОНА

3.1. Пример оптимизационного моделирования

Пример. В городе имеется 2 бетонных завода. Первый выпускает в сутки 400 т бетона, второй – 560 т. Бетон с этих заводов отправляется на 4 стройплощадки. На первую стройплощадку поступает 220 т, на вторую – 200 т, на третью 180 т, на четвертую – 360 т. Требуется организовать перевозку бетона с заводов на стройплощадки таким образом, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальна.



	A	B	C	D	E	F
1	заводы	строительные площадки				Производительность заводов
2		П1	П2	П3	П4	
3	31					400
4	32					560
5	потребность стройплощадок	220	200	180	360	
6						
7						
8		**матрица стоимости перевозки**				
9		строительные площадки				
10	заводы	П1	П2	П3	П4	
11	31	2	1	3	2	
12	32	2	3	3	1	

Рис. 25. Исходные данные к задаче оптимизации

Составить математическую модель объекта оптимизации, значит определить переменные модели, составить целевую

функцию, установить систему ограничений, которые накладываются на переменные. Таким образом, построение математической модели поставленной задачи осуществляется в три этапа.

1. Определение переменных математической модели. Примем следующие обозначения (табл. 15).

Таблица 15

Обозначения

Номер завода ($i=1,2$)
Номер строительной площадки ($j=1,2,\ldots,n$)
Количество бетона, имеющегося на i-ом заводе
Количество бетона, необходимое для j-й стройплощадки
Стоимость перевозки единицы бетона с i-го завода на j-ую стройплощадку

Так как требуется определить план перевозок бетона, то переменными модели будут x_{ij} – количество бетона, планируемого к перевозке от i – того завода до j – стройплощадки, где $i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$.

2. Формирование целевой функции. Так как затраты на транспортировку бетона по всем маршрутам известны, то общие затраты по всем направлениям составляют:

$$f=2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+2x_{14}+2x_{21}+3x_{22}+3x_{23}+x_{24}.$$

Это и есть целевая функция, минимум которой необходимо найти.

Можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить значения переменных x_{ij}, $i=1, 2, j=1, 2, 3, 4,$ минимизирующих целевую функцию f.

3. Формирование системы ограничений. Проверим, выполняется ли условие баланса: мощность заводов равна

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 400+560=960 ,$$

а общая потребность стройплощадок в бетоне составляет

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = 220+200+180+360=960 .$$

Следовательно, условие баланса выполняется $\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{i=1}^{4} b_i$

При решении оптимизационной задачи должны быть учтены следующие ограничения на аргументы целевой функции (табл. 16).

Таблица 16

Ограничения

а) условие полного удовлетворения	б) условие полного распределения	в) условие неотрицательности
$x_{11}+x_{21} \leq 220,$ $x_{12}+x_{22} \leq 200,$ $x_{13}+x_{23} \leq 180,$ $x_{14}+x_{24} \leq 60;$	$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 400$ $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 560$	$x_{ij} \geq 0$

Задача относится к условной задаче линейного программирования на определение минимума целевой функции. Решение оптимизационной задачи реализуется в среде MS Excel

1. Составим на рабочем листе MS Excel две таблицы (рис. 25).

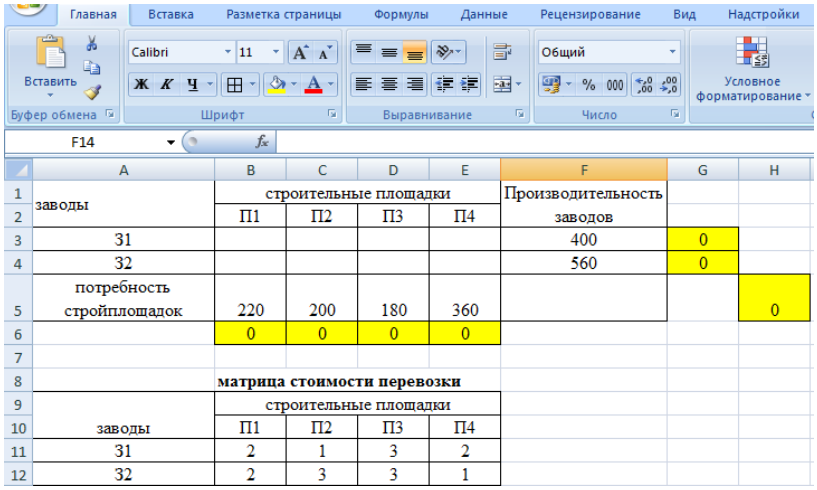
2. Заполним формулами, необходимыми для создания ограничений на запасы, ячейки G3:G4 столбца «Использовано запасов». Для этого в ячейку G3 вводим формулу =СУММ(B3:E3). Копируем эту формулу до ячейки G4.

3. Заполним формулами, необходимыми для создания ограничений на потребности, ячейки B6:E6.

Для этого в ячейку B6 вводим аналогично формулу =СУММ(B3:B4), которую копируем до ячейки E6.

4. Запишем формулу для целевой функции. В ячейку H5 с помощью Мастера функций вводим формулу: =СУММПРОИЗВ(B3:E4;B11:E13) из категории Математические, где B3:E4 – массив 1, B11:E13 – массив 2. Полученная формула дает сумму из 8 попарных произведений

указанных ячеек двух таблиц, которая и является целевой функцией. В ячейки H5, G3:G4, B6:E6 пока запишутся нулевые значения (рис. 26).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	заводы	строительные площадки				Производительность		
2		П1	П2	П3	П4	заводов		
3	31					400	0	
4	32					560	0	
5	потребность стройплощадок	220	200	180	360			0
6		0	0	0	0			
7								
8		**матрица стоимости перевозки**						
9		строительные площадки						
10	заводы	П1	П2	П3	П4			
11	31	2	1	3	2			
12	32	2	3	3	1			

Рис. 26. Электронная таблица в режиме формул

5. Укажем необходимые ссылки на ячейки и ограничения для целевой функции. Для этого во вкладке Данные выберем Поиск решения, после чего появится диалоговое окно Поиск решения (рис. 27).

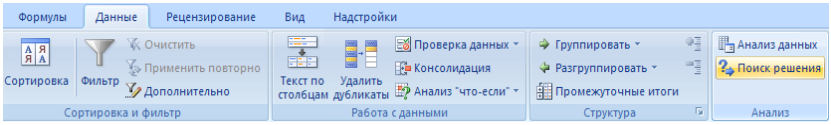


Рис. 27. Выбор надстройки Поиск решения

6. Заполним поля диалогового окна Поиск решения.

В поле Установить целевую ячейку указываем ячейку H5, для этого надо щелкнуть на этой ячейке, если она видна из-под диалогового окна, в противном случае следует щелкнуть на указателе перехода , чтобы свернуть окно (для возврата в диалоговое окно надо снова щелкнуть на указателе перехода). Результат – абсолютная ссылка $H$5.

Установим значение минимальному значению переключателя Равной, щелкнув на соответствующем кружке.

В поле Изменяя ячейки укажем диапазон ячеек $B$3:$E$4 либо прямым выделением этого диапазона с помощью мыши, либо с использованием указателя перехода .

В поле Ограничения создаем список всех ограничений задачи после нажатия на кнопку Добавить (табл.17).

Таблица 17

Ввод ограничений в MS Excel

Ограничение	Смысловое значение
$B$3:$E$4>=0	число перевозок не может быть отрицательным
$B$6:$E$6<=$B$5:$E$5	все потребности должны быть удовлетворены
$G$3:$G$4=$F$3:$F$4	все запасы производителей должны быть использованы

Каждое новое ограничение добавляется в этом же окне щелчком на кнопке Добавить. Заканчивается ввод по щелчку на кнопке ОК, при этом возвращается диалоговое окно Поиск решения, которое примет вид, показанный на рис. 28.

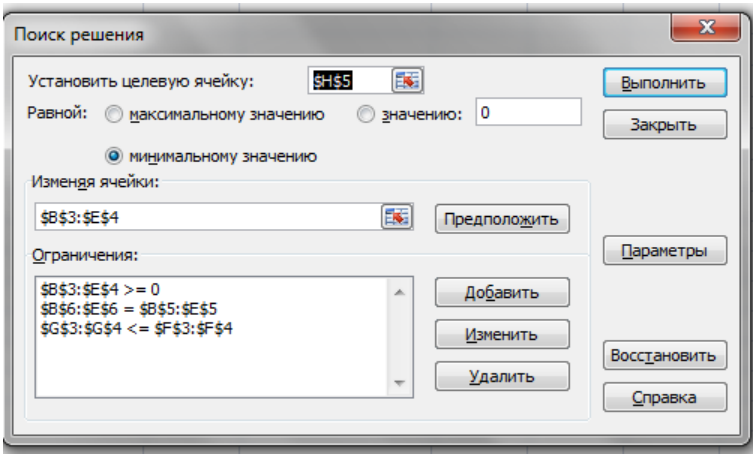


Рис. 28. Ввод данных в надстройку Поиск решения

7. Запускаем поиск оптимального решения кнопкой Выполнить. Диалоговое окно Результаты поиска решения сообщит об успехе поиска (рис. 29).

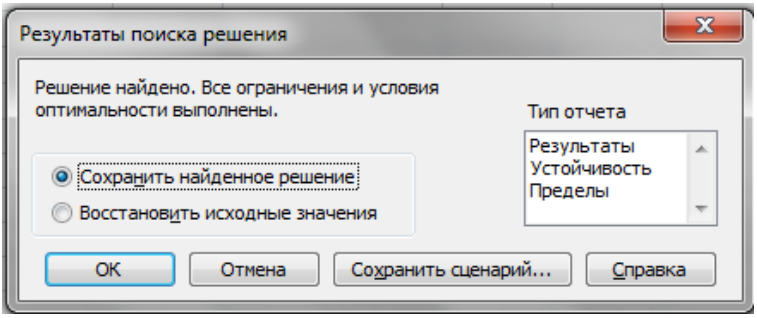
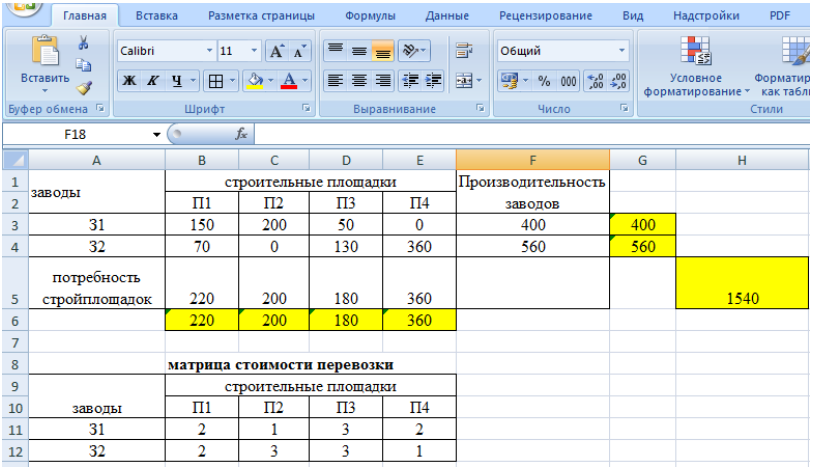


Рис. 29. Результат поиска решения

8. Сохраним найденное решение (рис. 30).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	заводы	строительные площадки				Производительность		
2		П1	П2	П3	П4	заводов		
3	31	150	200	50	0	400	400	
4	32	70	0	130	360	560	560	
5	потребность стройплощадок	220	200	180	360			1540
6		220	200	180	360			
7								
8		**матрица стоимости перевозки**						
9		строительные площадки						
10	заводы	П1	П2	П3	П4			
11	31	2	1	3	2			
12	32	2	3	3	1			

Рис. 30. Результат решения

При решении задачи в MS Excel найдено минимальное значение транспортных расходов на перевозку. При этом производственные мощности заводов, а потребности стройплощадок удовлетворены. Полученное решение оптимально.

Осуществим анализ модели на чувствительность. Для этого сделаем отчеты по устойчивости, результатам и пределам.

Отчет по устойчивости (рис. 31) содержит информацию о том, насколько целевая ячейка чувствительна к изменениям ограничений и переменных. Этот отчет имеет два раздела: один для изменяемых ячеек, а второй для ограничений. Правый столбец в каждом разделе содержит информацию о чувствительности. Раздел для изменяемых ячеек содержит значение нормированного градиента, которое показывает, как целая ячейка реагирует на увеличение значения в соответствующей изменяемой ячейке на единицу. Множитель Лагранжа в разделе для ограничений показывает, как целевая ячейка реагирует на увеличение соответствующего значения ограничения на одну единицу.

6	Изменяемые ячейки			
7			Результ.	Нормир.
8	Ячейка	Имя	значение	градиент
9	$B$3	31 П1	150	0
10	$C$3	31 П2	200	0
11	$D$3	31 П3	50	0
12	$E$3	31 П4	0	1
13	$B$4	32 П1	70	0
14	$C$4	32 П2	0	2
15	$D$4	32 П3	130	0
16	$E$4	32 П4	360	0
17				
18	Ограничения			
19			Результ.	Лагранжа
20	Ячейка	Имя	значение	Множитель
21	$G$3	31	400	0
22	$G$4	32	560	0
23	$B$6	П1	220	2
24	$C$6	П2	200	1
25	$D$6	П3	180	3
26	$E$6	П4	360	1

Рис. 31.Отчет по устойчивости

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	потребность стройплощадок	1540	1540

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	З1 П1	150	150
$C$3	З1 П2	200	200
$D$3	З1 П3	50	50
$E$3	З1 П4	0	0
$B$4	З2 П1	70	70
$C$4	З2 П2	0	0
$D$4	З2 П3	130	130
$E$4	З2 П4	360	360

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$3	З1	400	$G$3<=$F$3	связанное	0
$G$4	З2	560	$G$4<=$F$4	связанное	0
$B$6	П1	220	$B$6=$B$5	не связан.	0
$C$6	П2	200	$C$6=$C$5	не связан.	0
$D$6	П3	180	$D$6=$D$5	не связан.	0
$E$6	П4	360	$E$6=$E$5	не связан.	0
$B$3	З1 П1	150	$B$3>=0	не связан.	150
$C$3	З1 П2	200	$C$3>=0	не связан.	200
$D$3	З1 П3	50	$D$3>=0	не связан.	50
$E$3	З1 П4	0	$E$3>=0	связанное	0
$B$4	З2 П1	70	$B$4>=0	не связан.	70
$C$4	З2 П2	0	$C$4>=0	связанное	0
$D$4	З2 П3	130	$D$4>=0	не связан.	130
$E$4	З2 П4	360	$E$4>=0	не связан.	360

Рис. 32. Отчет по результатам

Отчет по результатам (рис. 32) содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления, во второй – значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи, в третьей – результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограничения, как статус и разница. Статус может принимать три состояния: связанное, несвязанное или невыполненное.

Значение разницы – это разность между значением, выводимым в ячейке ограничения при получении решения, и числом, заданным в правой части формулы ограничения.

Связанное ограничение – это ограничение, для которого значение разницы равно нулю. Несвязанное ограничение – это ограничение, которое было выполнено с ненулевым значением разницы.

Отчет по пределам (рис. 33) содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены (уменьшены) без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки показано оптимальное и наименьшее значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.

	Целевое		
Ячейка	Имя	Значение	
$H$5	потребность стройплощадок	1540	

			Нижний	Целевой	Верхний	Целевой
	Изменяемое		предел	результат	предел	результат
Ячейка	Имя	Значение				
$B$3	31 П1	150	150	1540	150	1540
$C$3	31 П2	200	200	1540	200	1540
$D$3	31 П3	50	50	1540	50	1540
$E$3	31 П4	0	0	1540	0	1540
$B$4	32 П1	70	70	1540	70	1540
$C$4	32 П2	0	0	1540	0	1540
$D$4	32 П3	130	130	1540	130	1540
$E$4	32 П4	360	360	1540	360	1540

Рис. 33. Отчет по пределам

Пример. Необходимо подобрать состав добавки к бетону, включающую следующие соединения SiO_2, CaO, Al_2O_3. В состав добавки должно входить не менее 6 единиц SiO_2, не менее 8 единиц CaO и не менее 12 единиц Al_2O_3. Имеются три вида отходов содержащих данные соединения в следующих пропорциях (табл. 18).

Таблица 18

Исходные данные к задаче оптимизации

Отход	Соединение		
	SiO_2	CaO	Al_2O_3
Отход 1	2	1	3
Отход 2	1	2	4
Отход 3	3	1,5	2

Стоимость одной весовой единицы первого отхода 2 у.е, второго – 3 у.е., третьего – 2,5 у.е. Разработать математическую модель.

На рабочем листе MS Excel сформируем исходные данные (рис. 34). В ячейку N17 введем выражение целевой функции. Обозначим через X_1, X_2, X_3 соответственно количество оксидов, входящих в состав добавки. Стоимость добавки выражается функцией

$$f=2X_1+3X_2+2{,}5X_3 \qquad min \Longrightarrow$$

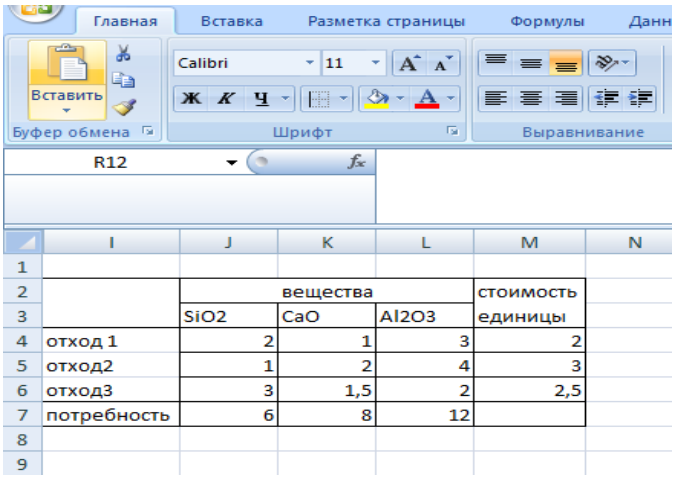
Система ограничений имеет вид

$$2X_1+X_2+3X_3>6,$$

$$X_1+2X_2+1{,}5X_3>8,$$

$$3X_1+4X_2+2X_3>12.$$

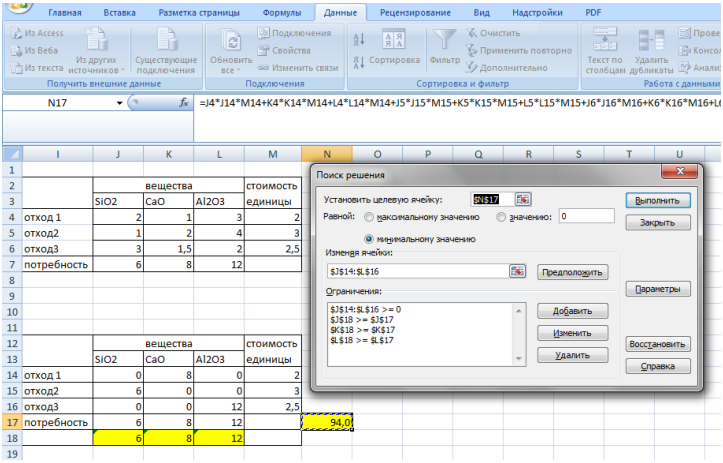
Математически задача формулируется следующим образом: найти минимум функции при условии, что ее аргументы удовлетворяют системе неравенств



	I	J	K	L	M	N
1						
2		вещества			стоимость	
3		SiO2	CaO	Al2O3	единицы	
4	отход 1	2	1	3	2	
5	отход2	1	2	4	3	
6	отход3	3	1,5	2	2,5	
7	потребность	6	8	12		
8						
9						

Рис. 34. Исходные данные к оптимизационной задаче

При решении задачи найдено минимальное значение стоимости комплексной добавки к бетону (рис. 35). При этом требуемое содержание SiO_2 обеспечивается отходом № 2, CaO – отходом № 1, а содержание Al_2O_3 за счет отхода № 3. Полученное решение является оптимальным.



	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1													
2		вещества			стоимость								
3		SiO2	CaO	Al2O3	единицы								
4	отход 1	2	1	3	2								
5	отход2	1	2	4	3								
6	отход3	3	1,5	2	2,5								
7	потребность	6	8	12									
8													
9													
10													
11													
12		вещества			стоимость								
13		SiO2	CaO	Al2O3	единицы								
14	отход 1	0	8	0	2								
15	отход2	6	0	0	3								
16	отход3	0	0	12	2,5								
17	потребность	6	8	12		94,0							
18		6	8	12									
19													

Рис. 35. Решение оптимизационной задачи

3.2. Пример корреляционно-регрессионного анализа

Найти наилучшую модель для прогнозирования прочности дисперсно-армированного мелкозернистого бетона (X_5), если известны значения формуемости бетонной смеси (X_1),температуры ТВО (X_2), продолжительности ТВО (X_3), длины армирующих волокон (X_4), представленные в табл. 19.

На основе полученной матрицы формулируют выводы о связях между независимыми переменными и о ранге их связей с зависимой переменной.

- Среди независимых переменных имеется пара X_1, X_3 с сильной обратной связью (коэффициент корреляции $R(X_1, X_3)$= –0,826407471). Следовательно, одновременное участие $X1$ и $X3$ в модели нецелесообразно.
- Аналогично оценивается пара независимых переменных X_2 и X_4 с весьма сильной обратной связью $(R(X_2, X_4)$= –0,972954999) .

➢ Зависимые переменных X_1, X_2, X_4 имеют с независимой переменной X_5 связь одного типа (сильная). Поэтому X_1, X_2, X_4 являются кандидатами на участие в модели, но X_2 и X_4 не могут одновременно быть представлены в модели.

➢ Зависимая переменная X_3 имеет с независимой переменной X_5 менее выраженную связь, наименьшую по модулю из всех независимых. Поэтому X_3 – кандидат на исключение из четырехфакторной модели. Другой аргумент к исключению X_3 – сильная связь с X_1.

➢ Поиск наилучшей модели выполняется методом исключения, планируя получить и исследовать уравнения:

1) с факторами X_1, X_2, X_3, X_4;
2) с факторами X_1, X_2, X_4 или X_1, X_2, X_3;
3) с факторами X_1, X_2;
4) с факторами X_1, X_4.

Таблица19

Исходные данные

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	7	26	6	60	78,5
2	1	29	15	52	74,3
3	11	56	8	20	104,3
4	11	31	8	47	87,6
5	7	52	6	33	95,9
6	11	55	9	22	109,2
7	3	71	17	6	102,7
8	1	31	21	44	72,5
9	2	54	18	22	93,1
10	21	47	4	26	115,9
11	1	40	23	34	83,8
12	11	66	9	12	113,3
13	10	68	8	12	109,4

Результаты корреляции представлены в табл. 20.

Таблица 20

Корреляционная матрица

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1				
X_2	0,22857947	1			
X_3	-826407471	-0,127454877	1		
X_4	-0,245445107	-0,972954999	0,01903653	1	
X_5	0,730717472	0,81625257	-0,525376875	-0,821305037	1

Два последних поисковых вычисления обусловлены наличием связи одинаковой категории между X_2, X_5 и между X_4, X_5. Из-за наличия весьма сильной связи между X_2 и X_4 трехфакторное уравнение не может быть наилучшим.

Для определения регрессионного уравнения применим метод исключения. Результаты расчета параметров четырехфакторного уравнения с полным набором независимых переменных приведены на рис. 36.

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика

Множественный *R*	0,991466094
R-квадрат	0,983005015 >0,8
Нормированный *R*-квадрат	0,974507523
Стандартная ошибка	2,401935455
Наблюдения	13

Дисперсионный анализ 15,35142

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	4	2669,608725	667,4021814	115,6818	4,11E-07
Остаток	8	46,15435145	5,769293931		
Итого	12	2715,763077			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*
Y-пересечение	33,05446735	70,30128098	0,470183002	0,650776	-129,061
X_1	1,870777021	0,755911718	2,474861782	0,038418	0,12764
X_2	0,806209572	0,721189182	1,117889164	0,296058	-0,85686
X_3	0,436864438	0,778154705	0,561410778	0,589894	-1,35756
X_4	0,149322992	0,710560833	0,210148075	0,838806	-1,48923
			2,306005626		

Рис. 36. Результат регрессионного анализа четырехфакторной модели

Уравнение в целом значимо, т. к.

$$R^2 = 0{,}983005015 > 0{,}8$$

$$4 * F_к\,(4;8;\ 0{,}95) = 4 * 3{,}84 = 15{,}36 < F_р\ (\ F_р = 115{,}681778)$$

Для расчета $F_к$ используют статистическую функцию FРАСПОБР

$F_к$ = FРАСПОБР(1–0,95; *Df* регрессия; *Df* остаток) = FРАСПОБР(0,05;4;8)=3,837854479

t-статистика выявляет незначимость некоторых факторов. Для расчета применяют статистическую функцию СТЬЮДРАСПОБР.

$T_к$ = СТЬЮДРАСПОБР(1–0,95;*Df* остаток) = СТЬЮДРАСПОБР(0,05; 8) = 2,306005626

В силу того, что *t*-статистика X_4 наименьшая, т. е. 0,210148075< $T_к$, на следующем шаге X_4 подлежит исключению.

Рассчитываем параметры трехфакторного уравнения. Результаты представлены на рис. 37.

Регрессионная статистика	
Множественный *R*	0,991418781
R-квадрат	0,982911198 >0,8
Нормированный *R*-квадрат	0,977214931
Стандартная ошибка	2,270808379
Наблюдения	13

Дисперсионный анализ				15,45	
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	3	2669,353941	889,7846469	172,55	3E-08
Остаток	9	46,40913624	5,156570693		
Итого	12	2715,763077			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*
Y-пересечение	47,80324515	3,857263505	12,39304628	6E-07	39,078
X_1	1,718461602	0,202914617	8,468890132	1E-05	1,2594
X_2	0,654962481	0,043546585	15,04050148	1E-07	0,5565
X_3	0,278687661	0,186653951	1,493071321	0,1696	-0,1436
			2,262158887		

Рис. 37.Результат регрессионного анализа трехфакторной модели

Уравнение в целом значимо, т. к.

$$R^2 = 0{,}982911198 > 0{,}8$$

$$4*\text{FРАСПОБР}\ (0{,}05;3;9)=4*3{,}86=15{,}45< 172{,}5535632$$

В силу того, что *t*-статистика X_3 наименьшая, т. е.

$$1{,}493071321< T_к= \text{СТЬЮДРАСПОБР}\ (0{,}05;9)=2{,}262158887$$

на следующем шаге *X3* подлежит исключению.

Рассчитываем параметры двухфакторного уравнения. Результаты представлены на рис. 38.

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика

Множественный *R*	0,989281747
R-квадрат	0,978678375 >0,8
Нормированный *R*-квадрат	0,974414049
Стандартная ошибка	2,406335039
Наблюдения	13

Дисперсионный анализ				16,41126	
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	2	2657,858594	1328,929297	229,5037	4,41E-09
Остаток	10	57,90448318	5,790448318		
Итого	12	2715,763077			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*
Y-пересечение	52,57734888	2,286174335	22,99796131	5,46E-10	47,48343
X_1	1,468305742	0,121300924	12,10465426	2,69E-07	1,19803
X_2	0,662250491	0,045854721	14,4423621	5,03E-08	0,56008

2,228139238

Рис. 38. Результат регрессионного анализа двухфакторной модели

Рассчитываем параметры двухфакторного уравнения с набором независимых переменных X_1 и X_2. Уравнение значимо, т. к.

$$R^2 = 0{,}978678375 > 0{,}8$$

$$4*\text{FРАСПОБР}(0{,}05;2;10) = 4*4{,}1 = 16{,}4 < 229{,}5036971$$

t-статистика *X1* и *X2* выше критического

$$\text{СТЬЮДРАСПОБР}\ (0{,}05;10) = 2{,}228139238 < 14{,}4423621$$
$$\text{СТЬЮДРАСПОБР}\ (0{,}05;10) = 2{,}228139238 < 12{,}10465426.$$

Таким образом, модель, значимая на уровне 95 % имеет вид

$$Y = 52{,}58 + 1{,}47X_1 + 0{,}66X_2$$

В табл. 21 и на рис. 39 представлены экспериментальные и расчетные значения *X5*, полученные по регрессионной модели.

Таблица 21

Расчетные параметры, полученные по регрессионной модели

X_1	X_2	X_5	$X_{5расч}$
7	26	78,5	80,07
1	29	74,3	73,25
11	56	104,3	105,81
11	31	87,6	89,26
7	52	95,9	97,29
11	55	109,2	105,15
3	71	102,7	104,00
1	31	72,5	74,58
2	54	93,1	91,28
21	47	115,9	114,54
1	40	83,8	80,54
11	66	113,3	112,44
10	68	109,4	112,29
Ср.знач =7,462	Ср.знач=48,15	Ср.знач=95,423	

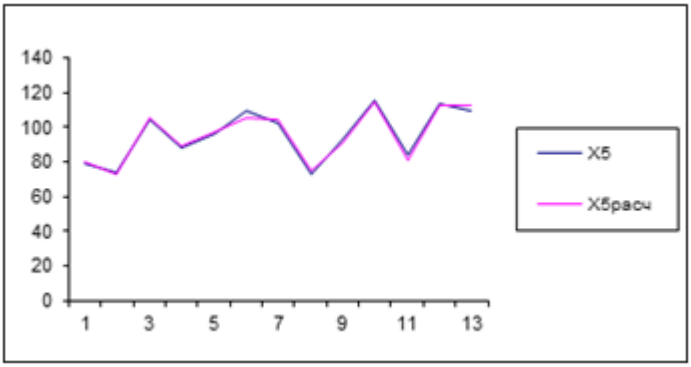


Рис. 39. Сравнение расчетных и экспериментальных значений *X5*

При интерпретации уравнения регрессии применяют частные коэффициенты эластичности, иллюстрирующие на сколько процентов изменяется значение результирующего признака при изменении значения соответствующего факторного признака на 1 %. Коэффициент эластичности рассчитывается по формуле

$$Э_{X_i} = a_i \frac{\overline{x_i}}{\overline{y}},$$

где $\overline{x_i}$ – среднее значение соответствующего факторного признака;

$\overline{y}$ – среднее значение результативного признака;

a_i – коэффициент регрессии при соответствующем факторном признаке.

Рассчитываем эластичность фактора *X1*

$$Э\ (X_1)=1{,}468305742*7{,}462/95{,}423=0{,}114813.$$

Рассчитываем эластичность фактора *X2*

$$Э(X_2)=0{,}662250491*48{,}15/95{,}423=0{,}33419.$$

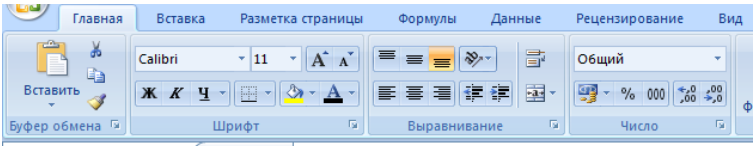
Вывод: значение фактора X_2 в 3 раза превосходит фактор X_1.

3.3. Пример линейного моделирования

Построить математическую модель прочности на сжатие бетона в возрасте 28 сут с целью корректировки Ц/В (x_1) бетона марок М200–400 с осадкой конуса ОК = 3–5 см в зависимости от активности цемента $R_Ц$ (x_2), модуля крупности песка $M_{КР}$ (x_3) и содержания отмучиваемых частиц $Q_{ОТМ}$ (x_4) в заполнителе.

В качестве исходных материалов приняты: портландцемент с минеральными добавками, кварцевый песок и гранитный щебень фракции 5–20 мм (рис. 40).

Выполнение экспериментов осуществляем в соответствии с планом полного факторного эксперимента 2^4 (рис. 41).



	A	B	C	D	E	F
1	условия планирования эксперимента					
2	факторы		уровни варьирования			
3	натуральный вид	кодированый вид	-1	0	1	интервал варьирования
4	Ц/В	X1	1,4	2	2,6	0,6
5	Rц,Мпа	X2	38,8	45,3	51,8	6,5
6	Мкр	X3	1,4	2,2	3	0,8
7	Qотм,%	X4	1	3	5	2

Рис. 40. Условия планирования эксперимента

1. Коэффициенты уравнений регрессии определяем соответственно по формулам:

$$b_0 = \frac{436{,}1}{16} = 27{,}3,$$

$$b_1 = \frac{177{,}8}{16} = 11{,}1,$$

$$b_2 = \frac{83}{16} = 5{,}2,$$

где соответственно 436,1; 177,8 и 83 – данные из матрицы планирования;

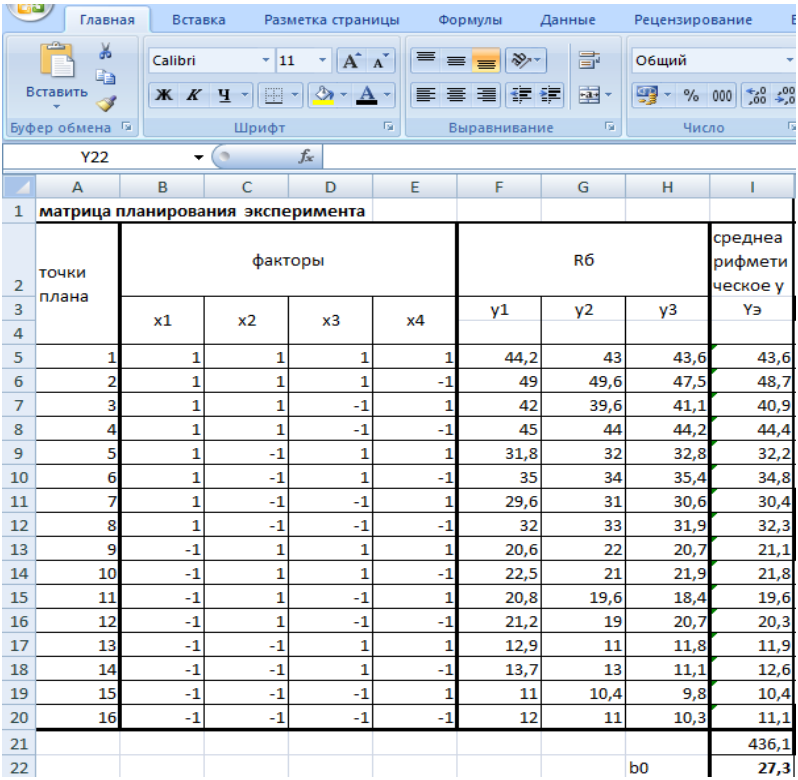
16 – число опытов по строкам матрицы.

Точно так же определяем значения остальных коэффициентов уравнений регрессии (рис. 42).

2. Определяем статистические характеристики:

а) дисперсию воспроизводимости $S^2_{\{y\}}$

$$S^2_{\{\bar{y}\}} = \frac{30{,}16}{16(3-1)} = 0{,}943,$$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	матрица планирования эксперимента								
2	точки плана	факторы				Rб			среднеарифметическое y
3		x1	x2	x3	x4	y1	y2	y3	Yэ
4									
5	1	1	1	1	1	44,2	43	43,6	43,6
6	2	1	1	1	-1	49	49,6	47,5	48,7
7	3	1	1	-1	1	42	39,6	41,1	40,9
8	4	1	1	-1	-1	45	44	44,2	44,4
9	5	1	-1	1	1	31,8	32	32,8	32,2
10	6	1	-1	1	-1	35	34	35,4	34,8
11	7	1	-1	-1	1	29,6	31	30,6	30,4
12	8	1	-1	-1	-1	32	33	31,9	32,3
13	9	-1	1	1	1	20,6	22	20,7	21,1
14	10	-1	1	1	-1	22,5	21	21,9	21,8
15	11	-1	1	-1	1	20,8	19,6	18,4	19,6
16	12	-1	1	-1	-1	21,2	19	20,7	20,3
17	13	-1	-1	1	1	12,9	11	11,8	11,9
18	14	-1	-1	1	-1	13,7	13	11,1	12,6
19	15	-1	-1	-1	1	11	10,4	9,8	10,4
20	16	-1	-1	-1	-1	12	11	10,3	11,1
21									436,1
22								b0	**27,3**

Рис. 41. Матрица планирования, экспериментальные и расчетные данные

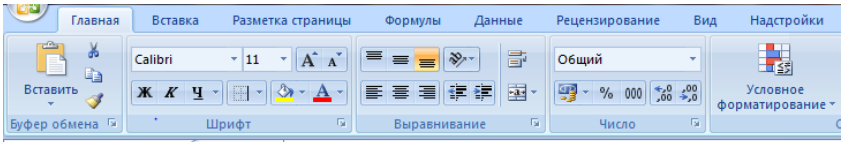
б) среднеквадратическое отклонение $S_{\{y\}}$:

$$S_{\{y\}} = \sqrt{0{,}943} = 0{,}97,$$

в) среднеквадратическую ошибку $S_{\{b\}}$ при определении коэффициентов уравнений регрессии:

$$S_{\{b_0\}} = S_{\{b_i\}} = S_{\{b_{ij}\}} = \frac{0{,}97}{\sqrt{16}} = 0{,}24,$$

г) t-критерий Стьюдента табличное значение – t_T – по Приложению В (при α = 0,05); для данного примера при $f_{\{y\}}$ $N\,(r-1) = 16(3-1) = 32$ получим t_T = 2,04;



	A	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
2	точки плана	расчетные параметры для определения коэффициентов при									
3		линейных членах				взаимодействиях					
4		yx1	yx2	yx3	yx4	yx1x2	yx1x3	yx1x4	yx2x3	yx2x4	yx3x4
5	1	43,70	43,70	43,70	43,70	43,70	43,70	43,70	43,70	43,70	43,70
6	2	48,37	48,37	48,37	-48,37	48,37	48,37	-48,37	48,37	-48,37	-48,37
7	3	40,83	40,83	-40,83	40,83	40,83	-40,83	40,83	-40,83	40,83	-40,83
8	4	44,53	44,53	-44,53	-44,53	44,53	-44,53	-44,53	-44,53	-44,53	44,53
9	5	32,60	-32,60	32,60	32,60	-32,60	32,60	32,60	-32,60	-32,60	32,60
10	6	34,90	-34,90	34,90	-34,90	-34,90	34,90	-34,90	-34,90	34,90	-34,90
11	7	30,40	-30,40	-30,40	30,40	-30,40	-30,40	30,40	30,40	-30,40	-30,40
12	8	32,53	-32,53	-32,53	-32,53	-32,53	-32,53	-32,53	32,53	32,53	32,53
13	9	-21,20	21,20	21,20	21,20	-21,20	-21,20	-21,20	21,20	21,20	21,20
14	10	-21,93	21,93	21,93	-21,93	-21,93	-21,93	21,93	21,93	-21,93	-21,93
15	11	-19,50	19,50	-19,50	19,50	-19,50	19,50	-19,50	-19,50	19,50	-19,50
16	12	-20,40	20,40	-20,40	-20,40	-20,40	20,40	20,40	-20,40	-20,40	20,40
17	13	-11,97	-11,97	11,97	11,97	11,97	-11,97	-11,97	-11,97	-11,97	11,97
18	14	-12,97	-12,97	12,97	-12,97	12,97	-12,97	12,97	-12,97	12,97	-12,97
19	15	-10,50	-10,50	-10,50	10,50	10,50	10,50	-10,50	10,50	-10,50	-10,50
20	16	-11,60	-11,60	-11,60	-11,60	11,60	11,60	11,60	11,60	11,60	11,60
21		177,80	83,00	17,33	-16,53	11,00	5,20	-9,07	2,53	-3,47	-0,87
22		**11,1**	**5,2**	**1,1**	**-1,0**	**0,7**	**0,3**	**-0,6**	**0,2**	**-0,2**	**-0,1**

Рис. 42. Расчет коэффициентов уравнения регрессии

расчетные значения – t_P

$$t_{34} = -\frac{0{,}1}{0{,}24} = 0{,}42,$$

$$t_{23} = \frac{0,2}{0,24} = 0,83,$$

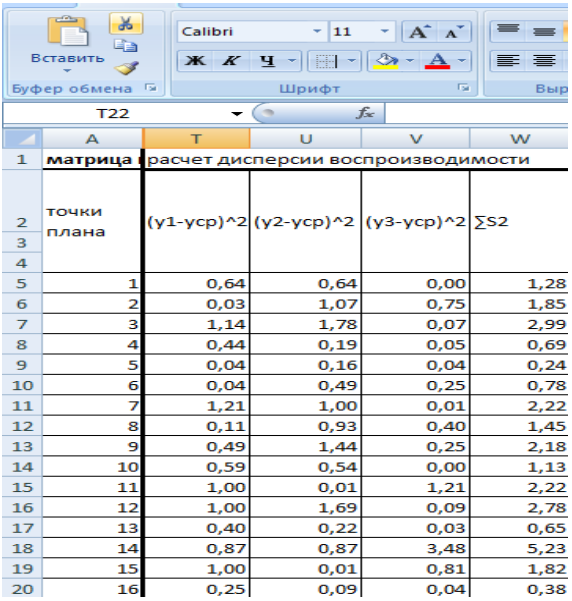
$$t_{24} = -\frac{0,2}{2,4} = -0,83,$$

$$t_{13} = \frac{0,3}{0,24} = 1,25,$$

$$t_{14} = -\frac{0,6}{0,24} = 2,5.$$

Поскольку t_{23}, t_{24}, t_{13}, $t_{34} < t_T$ коэффициенты b_{23}, b_{24},b_{13}, b_{34} незначимы. С учетом значимости коэффициентов математическая модель прочности бетона имеет следующий вид:

$$Y=27,3+11,1X_1+5,2X_2+1,1X_3–X_4+0,7X_1X_2–0,6X_1X_4.$$



	A	T	U	V	W
1	матрица	расчет дисперсии воспроизводимости			
2	точки плана	(y1-yср)^2	(y2-yср)^2	(y3-yср)^2	∑S2
3					
4					
5	1	0,64	0,64	0,00	1,28
6	2	0,03	1,07	0,75	1,85
7	3	1,14	1,78	0,07	2,99
8	4	0,44	0,19	0,05	0,69
9	5	0,04	0,16	0,04	0,24
10	6	0,04	0,49	0,25	0,78
11	7	1,21	1,00	0,01	2,22
12	8	0,11	0,93	0,40	1,45
13	9	0,49	1,44	0,25	2,18
14	10	0,59	0,54	0,00	1,13
15	11	1,00	0,01	1,21	2,22
16	12	1,00	1,69	0,09	2,78
17	13	0,40	0,22	0,03	0,65
18	14	0,87	0,87	3,48	5,23
19	15	1,00	0,01	0,81	1,82
20	16	0,25	0,09	0,04	0,38

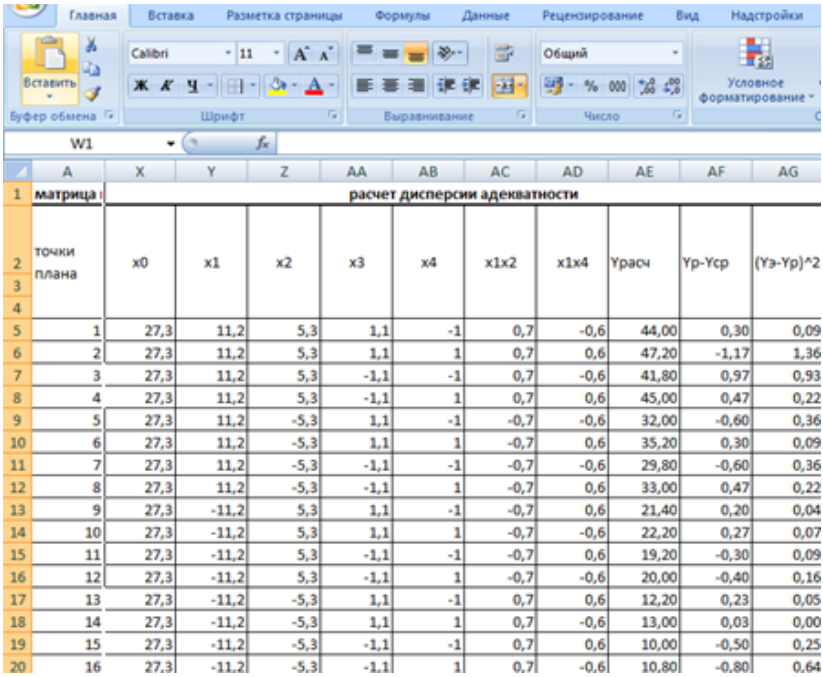
Рис. 43. К расчету дисперсии воспроизводимости

3. Проверяем адекватность полученного уравнения регрессии

а) по уравнению регрессии определяем расчетное значение *y* в каждой строке матрицы. Для первой строки:

$$Y=27,3+11,1(+1)+5,2(+1)+1,1(+1)–(+1)+0,7(+1)\ (+1)–$$
$$-0,6(+1)\ (+1)=44\ \text{МПа}.$$

Для всех остальных строк вычисление проводим аналогичным образом, результаты вносим в таблицу и находим сумму квадратов отклонений расчетных данных.



	A	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
1	матрица	расчет дисперсии адекватности									
2	точки плана	x0	x1	x2	x3	x4	x1x2	x1x4	Yрасч	Yр-Yср	(Yэ-Yр)^2
3											
4											
5	1	27,3	11,2	5,3	1,1	-1	0,7	-0,6	44,00	0,30	0,09
6	2	27,3	11,2	5,3	1,1	1	0,7	0,6	47,20	-1,17	1,36
7	3	27,3	11,2	5,3	-1,1	-1	0,7	-0,6	41,80	0,97	0,93
8	4	27,3	11,2	5,3	-1,1	1	0,7	0,6	45,00	0,47	0,22
9	5	27,3	11,2	-5,3	1,1	-1	-0,7	-0,6	32,00	-0,60	0,36
10	6	27,3	11,2	-5,3	1,1	1	-0,7	0,6	35,20	0,30	0,09
11	7	27,3	11,2	-5,3	-1,1	-1	-0,7	-0,6	29,80	-0,60	0,36
12	8	27,3	11,2	-5,3	-1,1	1	-0,7	0,6	33,00	0,47	0,22
13	9	27,3	-11,2	5,3	1,1	-1	-0,7	0,6	21,40	0,20	0,04
14	10	27,3	-11,2	5,3	1,1	1	-0,7	-0,6	22,20	0,27	0,07
15	11	27,3	-11,2	5,3	-1,1	-1	-0,7	0,6	19,20	-0,30	0,09
16	12	27,3	-11,2	5,3	-1,1	1	-0,7	-0,6	20,00	-0,40	0,16
17	13	27,3	-11,2	-5,3	1,1	-1	0,7	0,6	12,20	0,23	0,05
18	14	27,3	-11,2	-5,3	1,1	1	0,7	-0,6	13,00	0,03	0,00
19	15	27,3	-11,2	-5,3	-1,1	-1	0,7	0,6	10,00	-0,50	0,25
20	16	27,3	-11,2	-5,3	-1,1	1	0,7	-0,6	10,80	-0,80	0,64

Рис. 44. К расчету дисперсии адекватности

б) определяем дисперсию адекватности $S^2_{ад}$:

$$S^2_{ад}=\frac{4,94*3}{16-7}=1,65$$

4,94 – сумма из расчета дисперсии адекватности;

3 – число опытов по строкам матрицы;

7 – число принятых значимых коэффициентов;

в) находим значение критерия Фишера:

расчетное – F_P:

$$F_P = \frac{1,65}{0,943} = 1,74$$

где 0,943 – численное значение дисперсии воспроизводимости;

табличное – F_T – по интерполяции из Приложения В при f_y =16(3 – 1) = 32 и $f_{ад}$ = 16 – 7 =9.

$$F_T = 2,24.$$

Поскольку $F_P < F_T$ данное уравнение регрессии является адекватным.

4. Построение номограммы.

При построении номограмм с целью корректировки составов бетона определяем расчетные значения Ц/В при различных значениях исследуемых факторов. Уравнение регрессии решаем относительно x_1:

$$Y=27,3+11,1X_1+5,2X_2+1,1X_3–X_4+0,7X_1X_2–0,6X_1X_4,$$

$$X_1 = \frac{27,3 + 5,2X_2 - 1,1X_3 - X_4 - Y}{0,6X_4 - 0,7X_2 - 11,1}.$$

Прежде, чем производить вычисления необходимо найти кодированные значения варьируемых факторов. Так, например, при $R_Ц$ = 50 МПа, $M_{КР}$ = 1,8 и $Q_{ОПТ}$ = 2 % получим:

$$X_2 = \frac{R_Ц - 45,3}{6,5} = 0,72;$$

$$X_3 = \frac{M_{КР} - 2,2}{0,8} = –0,5;$$

$$X_4 = \frac{Q_{ОТМ} - 3}{2} = –0,5.$$

где 6,5; 0,8 и 2 – соответственно интервалы варьирования.

Тогда для бетона марки М400

$$X_1 = \frac{27{,}3 - 5{,}2 * 0{,}72 - 1{,}1 * (-0{,}5) - (-0{,}5) - 40}{0{,}6(-0{,}5) - 0{,}7 * 0{,}72 - 11{,}1} = 0{,}67 .$$

Натуральное значение Ц/В находим из отношения

$$X_1 = \frac{\frac{Ц}{B} - 2}{0{,}6} .$$

Получаем, что Ц/В = $0{,}6x_1$ + 2 = 0,6 * 0,67 + 2 = 2,4 (где 2 и 0,6 –соответственно основной уровень и интервал варьирования).

Точно также определяем Ц/В для других значений $R_Ц$, $M_{КР}$, $Q_{ОПТ}$. На основании полученных данных строим номограмму (рис. 45).

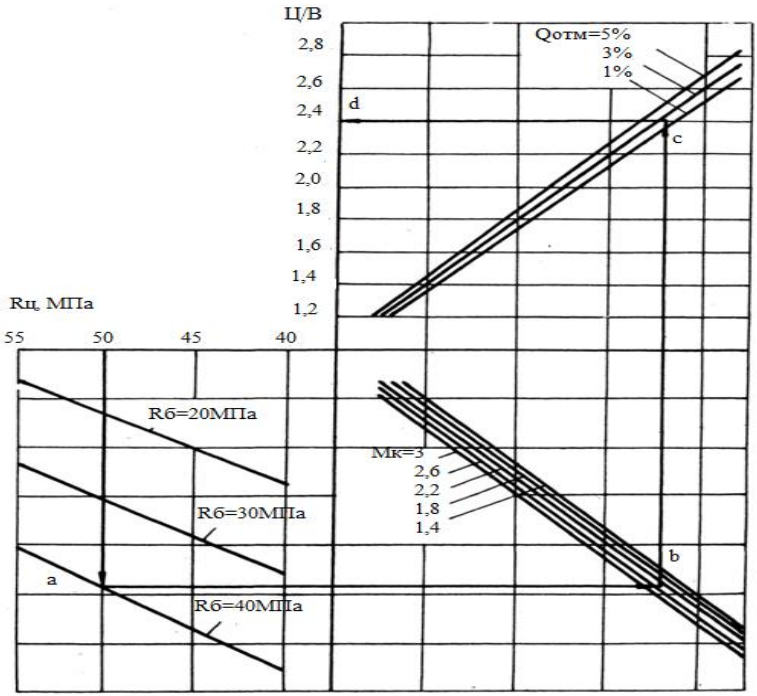


Рис. 45. Номограмма для определения Ц/В различных марок бетона в зависимости от исследуемых факторов

В производственных условиях при изменении активности цемента и качества заполнителей по номограмме уточняют значение Ц/В и производят корректировку состава бетона. Например, для бетона марки М400 при $R_Ц$ = 50 МПа (точка а), $M_{КР}$ = 1,8 (точка 6) и $Q_{ОПТ}$ =2 % (точка с) – Ц/В = 2,4 (точка *d*).

3.4. Пример нелинейного моделирования

Требуется подобрать состав бетона марок М300 и М400 с прочностью 60–70 % марочной в возрасте 3 суток нормального твердения при введении в состав бетона добавки – ускорителя твердения Na_2SO_4 в количестве 3 % массы цемента и с жесткостью смеси не более 30 с по техническому вискозиметру.

В качестве переменных выбраны:

$X_1 - B/Ц$ смеси;

X_2 – доля песка в смеси заполнителей, r;

X_3 – водосодержание смеси B, л/м^3.

Интервалы варьирования переменных назначены в табл. 22.

Таблица 22

Интервалы варьирования переменных

Код	Значения кода	Значения факторов		
		X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0	0,4	0,4	180
Интервал варьирования	δX	0,05	0,05	10
Верхний уровень	+	0,45	0,45	190
Нижний уровень	–	0,35	0,35	170

Поскольку ставится задача определения прочностных характеристик в сравнительно узком диапазоне изменения переменных, принимаются для реализации трехфакторный линейный план, а для определения жесткости – трехфакторный трехуровневый нелинейный план.

План эксперимента и результаты определений искомых величин приведены на рис. 46.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	№	План						Прочность		
2	опыта	эксперимента			Взаимодействие			бетона, кГс/см^2		R_3/R_{28},
3		x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	R_3	R_{28}	%
4	1	+	+	+	+	+	+	166	302	55
5	2	–	+	+	–	–	+	280	391	72
6	3	+	–	+	–	+	–	166	353	47
7	4	–	–	+	+	–	–	311	425	73
8	5	+	+	–	+	–	–	151	281	54
9	6	–	+	–	–	+	–	279	472	59
10	7	+	–	–	–	–	+	225	340	66
11	8	–	–	–	+	+	+	269	447	60
12	9	0	0	0	0	0	0	223	363	62
13	10	0	0	0	0	0	0	235	375	63
14	11	0	0	0	0	0	0	228	381	60
15										

Рис. 46. Планирование эксперимента

Расчет коэффициентов уравнения представлен на рис. 47

	K	L	M	N	O	P
1						
2	$R_{28} \cdot x$					
3	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3
4	302	302	302	302	302	302
5	–391	391	391	–391	–391	391
6	353	–353	353	–353	353	–353
7	–425	–425	425	425	–425	–425
8	281	281	–281	281	–281	–281
9	–472	472	– 472	–472	472	–472
10	340	–340	–340	–340	–340	340
11	–447	–447	–447	447	447	447
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15						

Рис. 47. Расчет коэффициентов уравнения

Расчет коэффициента уравнения регрессии по формулам:

$$b_0 = \frac{302+391+353+425+281+472+340+447}{8} = \frac{3011}{8} = 376,$$

$$b_1 = \frac{302-391+352-425+281-472+340-447}{8} = -\frac{459}{8} = -57,$$

$$b_2 = \frac{302+391-353-425+281+472-340-447}{8} = -\frac{119}{8} = -14{,}9,$$

$$b_3 = \frac{302+391+353+425-281-472-340-447}{8} = -\frac{69}{8} = -8{,}6,$$

$$b_{12} = \frac{302-391-353+425+281-472-340+447}{8} = -\frac{101}{8} = -12{,}5,$$

$$b_{13} = \frac{302-391+353-425-281+472-340+447}{8} = \frac{137}{8} = 17{,}1,$$

$$b_{23} = \frac{302+391-353-425-281-472+340+447}{8} = -\frac{51}{8} = -6{,}4.$$

Для статистической проверки значимости коэффициентов и пригодности полученного уравнения для описания исследуемой зависимости нулевой точке (основной) определяют:

среднеарифметическое значение параметра – y_0;

$$\bar{y}_0 = \frac{363+375+381}{3} = 373;$$

дисперсию в нулевой точке $S_0 = S_{y0}$;

$$S_0 = \frac{(373-363)^2+(373-375)^2+(373-381)^2}{(3-1)} = \frac{100+4+64}{2} = 84;$$

среднее квадратическое отклонение $\sigma_0 = \sigma_{y0}$

$$\sigma_0 = \sqrt{S_0} = \sqrt{84} = 9{,}16;$$

среднюю квадратичную ошибку в определении коэффициентов $m(b_i)$

$$m(b_i) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9{,}16}{\sqrt{8}} = \frac{9{,}16}{2{,}83} = 3{,}24.$$

После определения расчетного значения *t*-критерия Стьюдента и устанавливается значимость коэффициентов уравнений для определения R_{28}. Проверку производится с самого малого коэффициента

$t_p(b_{23}) = \frac{|-6{,}4|}{3{,}24} = 1{,}975$ сравниваем с t_T при $f_y = n_0 - 1 = 24$ (t_T =4,303);

$t_p(b_{23}) < t_T$ – коэффициент незначим.

Далее $t_p(b_3) = \frac{|-8{,}6|}{3{,}24} = 2{,}62$ – коэффициент незначим;

$t_p(b_{12}) = \frac{|-12{,}5|}{3{,}24} = 3{,}858$ – коэффициент незначим;

$t_p(b_2) = \frac{|-15|}{3{,}24} = 4{,}63$ – коэффициент значим.

Полученное уравнение прочности имеет вид

$$Y_{28} = 376 - 57\,x_1 - 15\,x_2 + 17{,}1\,x_1\,x_3.$$

С целью проверки пригодности уточненных уравнений определяется

$$\Delta = Y - y_0, \quad \text{а} \quad \Delta^2 = (Y - y_0)^2.$$

Дисперсия адекватности при этом составит

$$S_{ад} = \frac{\sum \Delta^2}{f_{ад}} = \frac{2759}{4} = 689{,}75.$$

В примере N_1 = 8, n_0 = 3, $к$ = 4, $f_{ад} = N - k$ = 8 – 4 = 4 и $f_y = n_0 - 1 = 3 - 1 = 2$

Расчетное значение коэффициента Фишера F_p составляет

$$F_p = \frac{689{,}75}{84} = 8{,}21.$$

Сопоставление его с табличным, определенным при $f_{ад} = 4$ и $f_{ад} = 2$ и равным 19,3 $F_p < F_T$, подтверждает пригодность уравнения прочности для описания исходной зависимости в исследованных пределах изменения факторов.

Уравнение жесткости бетонной смеси второго порядка при трехфакторном эксперименте имеет вид

$$Y = b_o + b_1\ x_1 + b_2\ x_2 + b_3\ x_3 + b_{11}\ x_1^2 + b_{22}\ x_2^2 +$$
$$+ b_{33}\ x_3^2 + b_{12}\ x_1\ x_2 + b_{13}\ x_1\ x_3 + b_{23}\ x_2\ x_3,$$

Количество экспериментов, необходимых для определения коэффициентов уравнения, увеличивается. Результаты вычислений представлены на рисунке. Расчеты коэффициентов b_i производятся с использованием следующих формул:

$$b_o = 0{,}1831[\sigma_y] - 0{,}0704\sum_1^к [iiy];$$

$$b_i = 0{,}1[iy];$$

$$b_{ii} = -0{,}0704[\sigma_y] + 0{,}5[iiy] - 0{,}1268\sum_i^k [iiy];$$

$$b_{ij} = 0{,}125[ijy].$$

Имея табличные данные:

$$[\sigma_y] = \sum^N y_u = 534; \qquad [1y] = \sum_1^N x_{1u} y_u = -46;$$

$$[2y]=\sum_1^N x_{2u}y_u=4; \qquad [3y]=\sum_1^N x_{3u}y_u=-150;$$

$$[11y]=\sum_1^N x_{1u}^2y_u=360; \qquad [22y]=\sum_1^N x_{2u}^2y_u=354;$$

$$[33y]=\sum_1^N x_{3u}^2y_u=352; \quad \sum[i_iy]=[11y]+[22y]+[33y]=1066;$$

$$[12y]=\sum_1^N x_{1u}x_{2u}y_u=-12; \qquad [13y]=\sum_1^N x_{1u}x_{3u}y_u=-10;$$

$$[23y]=\sum_1^N x_{2u}x_{3u}y_u=8.$$

Коэффициенты уравнения регрессии имеют значения

$$b_0=0{,}1831\cdot 534-0{,}0704\cdot 1066=97{,}8-75=22{,}8\approx 23;$$
$$b_1=0{,}1(-46)=-4{,}6;$$
$$b_2=0{,}1\times 4=0{,}4;$$
$$b_3=0{,}1(-150)=-15;$$
$$b_{11}=-0{,}0704\cdot 534+0{,}5\cdot 360-0{,}1268\cdot 1066=-37{,}6+177-135=7{,}4;$$
$$b_{22}=-0{,}0704\cdot 534+0{,}5\cdot 354-0{,}1268\cdot 1066=-37{,}6+177-135=4{,}4;$$
$$b_{33}=-0{,}0704\cdot 534+0{,}5\cdot 352-0{,}1268\cdot 1066=-37{,}6+176-135=3{,}4;$$
$$b_{12}=0{,}125(-12)=-1{,}5;$$
$$b_{13}=0{,}125(-10)=-1{,}25;$$
$$b_{23}=0{,}125\cdot(8)=1.$$

Для статистической проверки значимости коэффициентов и пригодности полученного уравнения для описания жесткости бетонной смеси определяются следующие оценки:

$$\bar{y}_0=\frac{27+23+32}{3}=24;$$

$$S_0=\frac{(27-24)^2+(23-24)^2+(22-24)^2}{(3-1)}=\frac{9+1+4}{2}=7;$$

$$\sigma_0=\sqrt{7}=2{,}646.$$

Расчет ошибки в определении коэффициентов уравнения:

$$\sigma\{b_0\} = 0{,}4279 \cdot 2{,}646 = 1{,}134;$$

$$\sigma\{b_i\} = 0{,}3162 \cdot 2{,}646 = 0{,}838;$$

$$\sigma\{b_{ii}\} = 0{,}6109 \cdot 2{,}646 = 1{,}618;$$

$$\sigma\{b_{ij}\} = 0{,}3536 \cdot 2{,}646 = 0{,}937.$$

Определяется значимость коэффициентов в сравнении t_p с $t_T = 2{,}12$ при $f = 17$,

для b_0 $t_p = \frac{|22{,}8|}{1{,}134} = 20{,}1 > t_T$ – коэффициент значим;

для b_2 $t_p = \frac{|-0{,}4|}{0{,}838} = 0{,}477 < t_T$ – коэффициент незначим;

для b_1 $t_T = \frac{|-4{,}6|}{0{,}838} = 5{,}49 > t_T$ – коэффициент значим;

следовательно, значим и коэффициент $b_3 = -15$;

для b_{33} $t_p = \frac{|3{,}4|}{1{,}618} = 2{,}10 < t_T$ – коэффициент незначим;

для b_{22} $t_p = \frac{|4{,}4|}{1{,}618} = 2{,}72 > t_T$ – коэффициент значим;

следовательно, значим и коэффициент $b_{11} = 7{,}4$;

для b_{12} $t_p = \frac{|-1{,}5|}{0{,}937} = 1{,}6 < 2{,}12$ – коэффициент незначим,

следовательно, незначимы все парные взаимодействия.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	матрица планирования									Y_u
2	x_1	x_2	x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	Ж, с
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	18
4	–	+	+	+	+	+	–	–	+	30
5	+	–	+	+	+	+	–	+	–	16
6	–	–	+	+	+	+	+	–	–	26
7	+	+	–	+	+	+	+	–	–	47
8	–	+	–	+	+	+	–	+	–	58
9	+	–	–	+	+	+	–	–	+	53
10	–	–	–	+	+	+	+	+	+	54
11	+	0	0	+	0	0	0	0	0	23
12	–	0	0	+	0	0	0	0	0	35
13	0	+	0	0	+	0	0	0	0	26
14	0	–	0	0	+	0	0	0	0	26
15	0	0	+	0	0	+	0	0	0	11
16	0	0	–	0	0	+	0	0	0	39
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	23
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22

Рис. 48. Матрица планирования эксперимента

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
2	Ж, с	Ж, с	y_u-y_p	$(y_u-y_p)^2$	x_1y_u	x_2y_u	x_3y_u	$x_1^2y_u$	$x_2^2y_u$	$x_3^2y_u$	$x_1x_2y_u$	$x_1x_3y_u$	$x_2x_3y_u$
3	18	16,5	1,5	2,25	18	18	18	18	18	18	18	18	18
4	30	28,5	1,5	2,25	–30	30	30	30	30	30	– 30	–30	30
5	16	19,5	3,5	12,25	16	–16	16	16	16	16	– 16	16	– 16
6	26	25,5	0,5	0,25	–26	–26	26	26	26	26	26	–26	–26
7	47	46,5	0,5	0,25	47	47	–47	47	47	47	47	–47	–47
8	58	58,5	0,5	0,25	–58	58	–58	58	58	58	–58	58	–58
9	53	49,5	3,5	12,25	53	–53	–53	53	53	53	–53	–53	53
10	54	55,5	1,5	2,25	–54	–54	–54	54	54	54	54	54	54
11	23	23	0	0	23	0	0	23	0	0	0	0	0
12	35	32	3	9	–35	0	0	35	0	0	0	0	0
13	26	24,5	1,5	2,25	0	26	0	0	26	0	0	0	0
14	26	24,5	1,5	2,25	0	–26	0	0	26	0	0	0	0
15	11	8,5	2,5	6,25	0	0	11	0	0	11	0	0	0
16	39	38,5	0,5	0,25	0	0	–39	0	0	39	0	0	0
17	27	19	8	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	23	19	4	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	22	19	3	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	Σ =534	508	37	141	–46	4	–150	360	354	352	–12	–10	8

Рис. 49. Расчет адекватности модели

Уравнение жесткости принимает вид

$$Y_{ж} = 23 - 4{,}5\,x_1 - 15\,x_3 + 7{,}4\,x_1^2 + 4{,}4\,x_2^2 + 3{,}4\,x_3^2 - 1{,}5\,x_1\,x_2\,.$$

Для проверки пригодности уточненного уравнения по аналогии с проверкой уравнения прочности при $f_{ад} = 8$ и $f_{ад} = 2$ производится определение:

$$S_{ад} = \frac{\sum \Delta^2}{f_{ад}} = \frac{141}{17-7-(3-1)} = \frac{141}{8} = 17{,}63;$$

$$F_p = \frac{17{,}63}{7} = 2{,}52 < 19{,}3.$$

Из анализа уравнения жесткости следует, что при прочих равных условиях минимальной жесткостью будет обладать смесь, в которой доля песка примерно равна 0,4 ($x_2 \approx 0$). Принимаем $x_2 = 0$ и подставляем это значение в уравнение. Получим

$$Ж = 23 - 4{,}5\,x_1 - 15\,x_3 + 7{,}4\,x_1^2 + 3{,}4\,x_3^2.$$

Определение предельных значений факторов x_1 и x_3, обеспечивающих значение жесткости смеси не более 30 с

а) при $x_1 = -1\,(В/Ц) = 0{,}35$

$$Ж = 23 + 4{,}5 + 7{,}4 - 15\,x_3 + 3{,}4\,x_3^2 = 35 - 15\,x_3 + 3{,}4\,x_3^2.$$

Подставляя заданное значение $Ж$ = 30 с, получаем квадратное уравнение $Ж = 30 = 35 - 15\,x_3 + 3{,}4\,x_3^2$ или

$3{,}4\,x_3^2 - 15\,x_3 + 5 = 0$;

$$x_3 = \frac{15 \pm \sqrt{225-68}}{6{,}8} = \frac{15 \pm 12{,}53}{6{,}8} = 0{,}364 \text{ и } 4{,}05;$$

$x_3 \geq 0{,}364$ второе значение $x_3 = 4{,}05$ лежит за пределами эксперимента.

Следовательно, из условия получения жесткости не более 30 с x_3 должно лежать в интервале 0,364 – 1 или в натуральных значениях:

$$B_1 = x_o + x_3\Delta X = 180 + 0{,}364 \cdot 10 = 184 \text{ л/м}^3;$$

$$B_2 = x_o + x_3\Delta X = 180 + 1 \cdot 10 = 190 \text{ л/м}^3,$$

т. е. в пределах 184–190 л/м^3.

Все последующие значения $B/Ц (x_1 = -0{,}5; 0; +0{,}5; +1)$ дают близкие значения x_3, т. е. близкие расходы воды;

б) при x_1 = –0,5 (*В/Ц* = 0,375)

$x_3 \geq -0{,}177$; B = 178÷190 л/м^3;

в) при x_1 = 0 (*В/Ц* = 0,4)

$x_3 \geq -0{,}427$; B = 176÷190 л/м^3;

г) при x_1 = +0,5 (*В/Ц* = 0,425)

$x_3 \geq -0{,}456$; B = 175,4÷190 л/м^3;

д) при x_1= +1 (*В/Ц* = 0,45)

x_3 = –0,25 B = 178÷190 л/м^3.

Для рассмотренных случаев определяются условия получения максимальной ранней прочности бетона $(R_3 / R_{28})_{\text{макс}}$:

а) для x_1= –1 и x_2= 0 (*В/Ц* = 0,35 и r = 0,4)

$$R_3 / R_{28} \cdot 100 = 61 + 5 + 5{,}5\, x_{13} = 66 + 5{,}5\, x_{13} \text{ и}$$

$(R_3 / R_{28})_{\text{макс}}$ достигается при x_{13}= +1 (71,5 %), при этом

$$Ж = 23 + 4{,}5 - 15 + 7{,}4 + 3{,}4 = 23{,}3 \text{ с} < 30 \text{ с},$$

$$R_{28} = 376 + 57 - 17 = 416 \text{ кГс/см}^2 \approx 41{,}6 \text{ МПа};$$

б) для $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ ($B/Ц = 0{,}4$ и $r = 0{,}4$)

$R_3 / R_{28} \cdot 100 = 61\%$ и $Ж < 30$ с достигается при значении

$x_3 \geq -0{,}427$ и $\text{В} = 176$ л/м^3, при этом

$R_{28} = 376$ кГс/см^2, $\approx 37{,}6$ МПа;

в) для $x_1 = +1$ и $x_2 = +0$ ($B/Ц = 0{,}45$, $r = 0{,}4$)

$$R_3 / R_{28} \cdot 100 = 61 - 5 - 5{,}5\, x_{13} = 56 - 5{,}5\, x_{13},$$

при $x_3 = -0{,}41$ $R_3 / R_{28} \cdot 100 = 58{,}25$ %

$$R_{28} = 376 - 57 - 7 = 312 \text{ кГс/см}^2 \approx 31{,}2 \text{ МПа}.$$

Таким образом:
для бетона марки М400 с ранней прочностью, составляющей 70 % марочной

$x_1 = -1$; $B/Ц = 0{,}35$; $x_2 = 0$; $r = 0{,}4$; $x_3 = +1$; $B = 190$ л/м^3; Ж$\leq$ 30 с;

для бетона марки М300 с ранней прочностью, составляющей 60 % марочной:

$x_1 = +1$; $B/Ц = 0{,}45$; $x_2 = 0$; $r = 0{,}4$; $x_3 = -0{,}4$; $B = 176$ л/м^3; $Ж \leq 30$ с.

Принятый состав бетона проверяется опытным замесом и корректируется для производственного применения с учетом влажности заполнителей.

3.5. Пример ротатабельного моделирования

Рассмотрим влияние параметров дисперсного армирования на свойства фибропенотуфобетона. На основе предварительных экспериментов получен фибропенотуфобетон со следующими характеристиками: средняя плотность в сухом состоянии $r = 500$ кг/м^3; временное сопротивление сжатию R=1,16 МПа; временное сопротивление растяжению при изгибе $R_{tf} = 0{,}2$ МПа. При этом расход компонентов на 1 м^3 составил: портландцемент марки М 400 – 227 кг; туфовый песок с наибольшим диаметром зерен 1, 25 мм – 227 кг; вода – 195 кг ($B/T = 0{,}43$); пенообразователь «Неопор 400» – 1,25 кг.

В результате предварительных расчетов процент армирования фибро-пенотуфобетона составил $m_v = 0{,}378$ % при

использовании капроновых волокон со следующими характеристиками: длина волокон l = 20 мм; диаметр волокон d = 0,02 мм; плотность r = 1,14г/см^3.

Для изучения влияния параметров дисперсного армирования на свойства фибропенотуфобетона был использован ротатабельный план второго порядка типа правильного шестиугольника. Геометрическая интерпретация такого плана, относящегося к классу симплексносуммируемых, представлена на рис. 50.

В качестве исследуемых факторов были приняты основные параметры дисперсного армирования:

- X_1 – процент армирования по объему μ_v;
- X_2 – отношение длины волокон к их диаметру l/d (варьировалось путем изменения длины волокон).

В качестве параметров оптимизации рассматривались:

- Y_1 – временное сопротивление сжатию R, МПа;
- Y_2 – временное сопротивление растяжению при изгибе R_{tf}, МПа.

Как показывает рис. 50, план требует для фактора X_1 пяти уровней, а для фактора X_2 – трех уровней варьирования переменных.

Для получения функции отклика $Y=f(X1; X2)$, описываемой полиномом второго порядка

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i \neq j}^{n} b_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2$$

необходимо провести эксперимент в 7 точках

Исходя из свойств шестиугольника соответствующие уровни кодированных переменных будут:

для X_1 – (–1; –0,5; 0; +0,5; +1);

для X_2 – (–0,87; 0; +0.87).

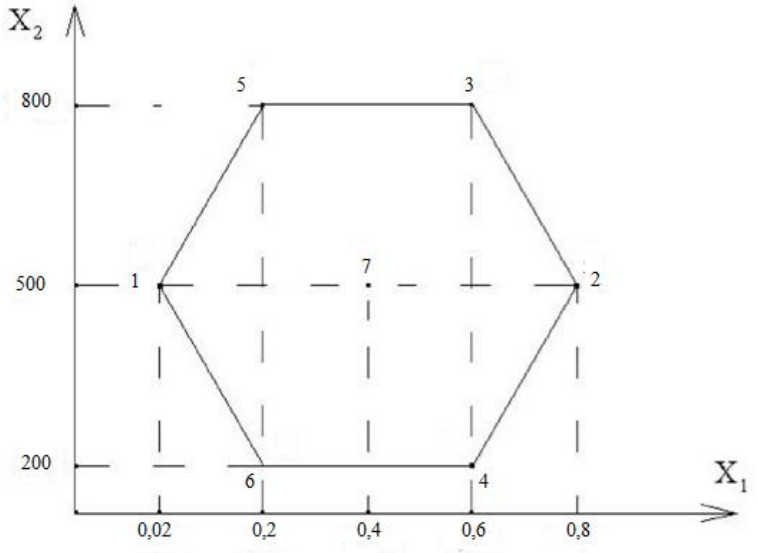


Рис. 50. План типа правильного шестиугольника

План эксперимента и матрица планирования приведены на рис. 41 и 42. За основные уровни для факторов приняты значения этих величин, полученных в результате предварительных расчетов и экспериментов.

	A	B	C	D
1	точки	натуральные		
2	плана	X1	X2	
3	1	0,02	500	
4	2	0,8	500	
5	3	0,6	800	
6	4	0,6	200	
7	5	0,2	800	
8	6	0,2	200	
9	7	0,4	500	
10				
11				

Рис. 51. План эксперимента

	A	B	C	D	E	F
1						
2	точки плана	матрица эксперимента				
3		X1	X2	X1^2	X2^2	X1X2
4	1	-1	0	1	0	0
5	2	1	0	1	0	0
6	3	0,5	0,87	0,25	0,7569	0,435
7	4	0,5	-0,87	0,25	0,7569	-0,435
8	5	-0,5	0,87	0,25	0,7569	-0,435
9	6	-0,5	-0,87	0,25	0,7569	0,435
10	7	0	0	0	0	0

Рис. 52. Матрица эксперимента

В соответствии с планом изготовлено 7 серий образцов различных составов из фибропенотуфобетона. Результаты испытаний на сжатие и изгиб приведены в рис. 43 и 44.

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	значения параллельных измерений функции отклика Y1					
2		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
3	1	1,45	1,46	1,25	1,10	1,16	1,44
4	2	0,63	0,78	1,02	0,83	0,90	0,67
5	3	0,66	0,82	0,50	0,50	0,62	0,52
6	4	1,16	1,64	1,22	1,82	1,36	1,78
7	5	1,28	1,58	1,58	1,06	1,40	1,14
8	6	1,72	1,57	1,16	1,12	1,59	1,22
9	7	1,70	1,58	1,30	1,42	1,02	1,16

Рис. 53. Результаты испытания на сжатие

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	значения параллельных измерений функции отклика Y2					
2		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
3	1	0,41	0,46	0,39	0,42	0,48	0,41
4	2	0,82	0,76	0,57	0,48	0,71	0,50
5	3	0,58	0,64	0,71	0,72	0,59	0,61
6	4	0,70	0,75	1,02	0,89	1,00	0,79
7	5	0,60	0,88	0,91	0,70	0,61	0,68
8	6	0,37	0,41	0,50	0,44	0,45	0,40
9	7	0,68	0,82	0,79	0,53	0,56	0,77

Рис. 54. Результаты испытания на изгиб

Средние значения функций отклика вычисляются по формуле:

$$Y_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_{ji}$$

где j – номер серии опытов (j = 1, 2, …, 7);
i – номер опыта в серии (i = 1, 2, …, 6);
k – число параллельных опытов в серии (k = 6).

Статистическая обработка полученных данных производилась по стандартной методике. Результаты анализа представлены в табл. 23.

Таблица 23

Статистический анализ результатов испытания

Параметр оптимизации	Дисперсия воспроизводимости опытов S_y^2	Дисперсия среднего значения S_y^2	Значение Кохрена	
			расчетное	теоретическое
Временное сопротивление сжатию	0,0472	0,0079	0,259	0,66
Временное сопротивление растяжению при изгибе	0,0111	0,0018	0,263	0,48

Расчетное значение критерия Кохрена (G_p) для всех параметров оптимизации меньше табличного (G_m), следовательно, опыты воспроизводимы. Расчетные матрицы и результаты расчета коэффициентов регрессии представлены на рис. 55 и 56.

	A	G	H	I	J	K	L
1							
2	точки плана	выходной параметр	расчетная матрица				
3		Yi	X1	X2	X1^2	X2^2	x1x2
4	1	1,31	-1,31	0,00	1,31	0,00	0,00
5	2	0,81	0,81	0,00	0,81	0,00	0,00
6	3	0,60	0,30	0,52	0,15	0,45	0,26
7	4	1,50	0,75	-1,31	0,38	1,14	-0,65
8	5	1,34	-0,67	1,17	0,34	1,01	-0,58
9	6	1,40	-0,70	-1,22	0,35	1,06	0,61
10	7	1,36	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

(0*y*)	(l*y*)	(2*y*)	(ll*y*)	(22*y*)	(12*y*)
8,31	-0,82	-0,83	3,37	3,63	-0,37

$$\sum(iiy) = 7{,}00$$

Коэффициент регрессии	b_0	b_1	b_2	b_{11}	b_{22}	b_{12}
	1,31	-0,27	-0,28	-0,23	0,06	-0,49

Рис. 55. Расчетная матрица для сжатия

	A	G	H	I	J	K	L
1	точки плана	выходной параметр	расчетная матрица				
2		Yi	X1	X2	X1^2	X2^2	x1x2
3	1	0,43	-0,43	0,00	0,43	0,00	0,00
4	2	0,64	0,64	0,00	0,64	0,00	0,00
5	3	0,64	0,32	0,56	0,16	0,48	0,28
6	4	0,86	0,43	-0,75	0,22	0,65	-0,37
7	5	0,73	-0,37	0,64	0,18	0,55	-0,32
8	6	0,43	-0,22	-0,37	0,11	0,33	0,19
9	7	0,69	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

(0y)	(ly)	(2y)	(lly)	(22y)	(12y)
4,42	0,37	0,07	1,74	2,00	-0,22

$$\sum(iiy) = 3{,}74$$

Коэффициент регрессии	b_0	b_1	b_2	b_{11}	b_{22}	b_{12}
	0,68	0,12	0,02	-0,14	0,03	0,3

Рис. 56. Расчетная матрица на изгиб

Расчет коэффициентов уравнения регрессии реализуется по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{4}[(0y) - \sum(iiy)],$$

$$b_i = \frac{1}{3}(iy),$$

$$b_{ii} = \frac{2}{3}(iiy) + \frac{1}{12}\sum(iiy) - \frac{1}{4}(0y),$$

$$b_{ij} = \frac{4}{3}(ijy),$$

где j – номер опыта, *i* – номер фактора.

Для оценки значимости коэффициентов регрессии определяется дисперсия по формуле

$$S_b = \sqrt{\frac{S_Y^2}{N}},$$

и умножалась на критерий Стьюдента t = 2,03 при числе степеней свободы $f = N(k-1) = 7(6-1) = 35$ и уровне значимости 0,05. Коэффициент уравнения признается незначимым, если

$$|b| \le S_b t.$$

После проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии математическая модель влияния параметров дисперсного армирования на свойства фибропенотуфобетона принимает вид

$$Y_1 = 1{,}33 - 0{,}27X_1 - 0{,}28X_2 - 0{,}27X_1^2 - 0{,}49X_1X_2,$$

$$Y_2 = 0{,}67 + 0{,}125X_1 - 0{,}14X_1^2 - 0{,}3X_1X_2.$$

Результаты статистического анализа адекватности математических моделей представлены в табл. 24.

Таблица 24

Проверка гипотезы адекватности моделей

Параметры оптимизации	Дисперсия адекватности $Sa\partial^2$	Значение Фишера	
		Расчетное	Теоретическое
Временное сопротивление осевому сжатию Y_1	0,0073	1,08	2,5
Временное сопротивление растяжению при изгибе Y_2	0,0021	1,17	2,9

3.6. Пример полного факторного эксперимента

Рассмотрим на примере задачи оптимизации процесса тепловой обработки бетона. В качестве оптимизируемой величины принята прочность бетона в 28-суточном возрасте *Rсж (Y).*

Варьируемыми факторами являются:

X_1– температура предварительного прогрева бетонной смеси $T_{пр}$, ºС;

X_2 – температура изотермического прогрева $T_{из}$, ºС;

X_3 – время изотермического прогрева t, ч

Таблица 25

Исходные данные

Исходные данные планированного эксперимента	x_1	x_2	x_3
Центр эксперимента X_{0i}	35	85	5,0
Интервал варьирования ΔX_i	2,5	5	0,5
Верхний уровень (x_i = + 1)	37,5	90	5,5
Нижний уровень (x_i = –1)	32,5	80	4,5
Звездная точка + α = + 1,215	38,0	91	5,6
Звездная точка – α = – 1,215	32,0	79	4,4

Центр эксперимента X_0, интервал варьирования ΔX_i и кодовые переменные представлены на рис. 57.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X1	X2	X3	X1^2-X1''^2	X2^2-X2''^2	X3^2-X3''^2	X1X2	X1X3	X2X3	X1X2X3	Y
2	–1	–1	1	0,27	0,27	0,27	1	–1	–1	1	500
3	1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	–1	–1	1	1	498
4	–1	1	–1	0,27	0,27	0,27	–1	1	–1	1	497
5	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	1	505
6	–1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	–1	496
7	1	–1	1	0,27	0,27	0,27	–1	1	–1	–1	504
8	–1	1	1	0,27	0,27	0,27	–1	–1	1	–1	503
9	1	1	–1	0,27	0,27	0,27	1	–1	–1	–1	501
10	–1,215	0	0	0,74	–0,73	–0,73	0	0	0	0	493
11	1,215	0	0	0,74	–0,73	–0,73	0	0	0	0	501
12	0	–1,215	0	–0,73	0,74	–0,73	0	0	0	0	490
13	0	1,215	0	–0,73	0,74	–0,73	0	0	0	0	497
14	0	0	–1,215	–0,73	–0,73	0,74	0	0	0	0	500
15	0	0	1,215	–0,73	–0,73	0,74	0	0	0	0	503
16	0	0	0	–0,73	–0,73	–0,73	0	0	0	0	505
17											

Рис. 57. Планирование эксперимента

Для описания процесса полиномом второго порядка выбран ортогональный план полного факторного эксперимента 2^3.

Кроме этого, в план вводится фиктивная переменная $x_0 = 1$. Общее число опытов согласно плану $N = 15$. После выполнения всех 15 экспериментов (каждый опыт имел 6 параллельных определений) получены средние значения прочности Y.

Для получения ортогонального планирования второго порядка произведено преобразование квадратичных переменных:

$$x_i' = x_i^2 - \frac{\sum_{l=1}^{N=15} x_{il}^2}{N} = x_i^2 - (x_i'')^2 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Величина интервала для звездных точек – для случая трех переменных $\alpha = 1{,}215$. Тогда

$$(x_i'')^2 = (8 + 1{,}215^2 \cdot 2)/15 = 10{,}95/15 = 0{,}73,$$

и для основного планирования

$$x_i^2 - (x_i'')^2 = 1^2 - 0{,}73 = 0{,}27,$$

а для звездных точек

$$x_i^2 - (x_i'')^2 = 1{,}215^2 - 0{,}73 = 0{,}74,$$

$$x_i^2 - (x_i'')^2 = 0 - 0{,}73 = -0{,}73.$$

Преобразования необходимы для смещения при определении свободного члена полинома, а также при расчете коэффициентов квадратичных членов

$$a_0 = a_0' - a_{11}(x_1'')^2 - a_{22}(x_2'')^2 - a_{33}(x_3'')^2.$$

Уравнение, которым описывается процесс, до преобразования имеет вид

$$y^{\wedge} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_{11}[x_1^2 - (x_1'')^2] + a_{22}[x_2^2 - (x_2'')^2] +$$
$$+ a_{33}[x_3^2 - (x_3'')^2] + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

После преобразований

$$y^{\wedge} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 +$$
$$+ a_{12} x_1 x_2 + a_{13} + x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Все коэффициенты этого полинома при ортогональном планировании определяются и оцениваются независимо друг от друга. Это означает, что если тот или иной коэффициент окажется незначим, его можно отбросить, не пересчитывая все остальные.

Коэффициенты полинома определяются по формуле

$$a_i = \frac{\sum_{l=1}^{N=15} x_{il}\, y_i}{\sum_{l=1}^{N=15} x_{il}^2},$$

а для определения свободного члена уравнения используют выражение

$$a' = \frac{\sum\limits_{l=1}^{N=15} x_{0l}\, y_l}{\sum\limits_{l=1}^{N=15} x_{0l}^2}\ .$$

Коэффициенты уравнений имеют следующие значения:

$$a_0' = (500 + 498 + 497 + 505 + 496 + 504 + 503 + 501 + 493 + $$
$$+ 501 + 490 + 497 + 500 + 503 + 505) : 15 = 499{,}53$$

Знаменатель формулы для определения коэффициентов a_1, a_2, a_3

$$\sum_{l=1}^{N=15} x_{il}^2 = 8 + 2 \cdot 1{,}215 = 10{,}94\,, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$a_1 = (-500 + 498 - 497 + 505 - 496 + 504 - 503 + 501 -$$
$$- 1{,}215 \cdot 493 + 1{,}215 \cdot 501) : 10{,}94 = 1{,}98\,,$$

$$a_2 = (-500 - 498 + 497 + 505 - 496 - 504 + 503 + 501 -$$
$$- 1{,}215 \cdot 490 + 1{,}215 \cdot 497) : 10{,}94 = 1{,}51\,,$$

$$a_3 = (500 - 498 - 497 + 505 - 496 + 504 + 503 - 501 -$$
$$- 1{,}215 \cdot 500 + 1{,}215 \cdot 503) : 10{,}94 = 2{,}16.$$

Знаменатель формулы для определения коэффициента $a_{11} = a_4$; $a_{22} = a_5$; $a_{33} = a_6$; имеет вид

$$\sum_{l=1}^{N=15} x_{il}^2 = 0{,}27^2 \cdot 8 + 0{,}74^2 \cdot 2 + 0{,}73^2 \cdot 5 = 4{,}344; \quad i = 4, 5, 6;$$

$$a_{11} = a_4 = -\,[0{,}27(500 + 498 + 497 + 505 + 496 + 504 + 503 + 501) +$$
$$+ 0{,}74(493 + 501) - 0{,}73(490 + 497 + 500 + 503 + 505)] \,/\, 4{,}344 = -1{,}08,$$

$$a_{22} = a_5 = [1081{,}08 + 0{,}74(490 + 497) - 0{,}73(493 + 501 + 500 +$$
$$+ 503 + 505)] / 4{,}344 = -3{,}45$$

$$a_{33} = a_6 = [1081{,}08 + 0{,}74(500 + 503) - 0{,}73(493 + 501 + 490 + 497 + + 505)] / 4{,}344 = 1{,}96$$

Знаменатель формулы для определения коэффициентов $a_{12} = a_7$, $a_{13} = a_8$, $a_{23} = a_9$, $a_{123} = a_{10}$ имеет вид

$$\sum_{l=1}^{N=15} x_{il}^2 = 8 \qquad i = 7, 8, 9, 10$$

$$a_{12} = a_7 = \frac{(500 - 498 - 497 + 505 + 496 - 504 - 503 + 501)}{8} = 0$$

$$a_{13} = a_8 = \frac{(-500 - 498 + 497 + 505 + 496 + 504 - 503 - 501)}{8} = 0$$

$$a_{23} = a_9 = \frac{(-500 + 498 - 497 + 505 + 496 - 504 + 503 - 501)}{8} = 0$$

$$a_{123} = a_{10} = \frac{(500 + 498 + 497 + 505 - 496 - 504 - 503 - 501)}{8} = -0{,}5$$

$$a_0 = 499{,}53 + 1{,}08 \cdot 0{,}73 + 3{,}45 \cdot 0{,}73 - 1{,}96 \cdot 0{,}73 = 501{,}4 .$$

После подстановки значений коэффициентов уравнение примет вид

$$y^{\wedge} = 501{,}4 + 1{,}98 x_1 + 1{,}51 x_2 + 2{,}16 x_3 - 1{,}08 x_1^2 - 3{,}45 x_2^2 + 1{,}96 x_3^2 - 0{,}5 x_1 x_2 x_3 .$$

Значимость коэффициентов уравнения определяется по *t*-критерию: $t_i = \left| \frac{a}{\sigma\{a\}} \right|$,

где $\sigma\{a\}$ – среднее квадратичное отклонение для коэффициентов.

Дисперсию $\sigma\{a\}$ для коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ определяется по

$$\sigma^2\{a\} = \frac{\sigma^2\{y\}}{\sum_{l=1}^{N=15} x_{il}^2} \cdot$$

Дисперсию воспроизводимости $\sigma^2\{y\}$ и среднюю дисперсию воспроизводимости $\sigma_0^2\{y\}$ определяют из формулы:

$$\sigma^2\{y\} = \frac{\sum_{l=1}^{N=15}\sum_{i=1}^{n=6}(y_i - yil)^2}{N(n-1)},$$

$$\sigma_0^2\{y\} = \frac{\sigma^2\{y\}}{n} = 7{,}208 \cdot$$

Числитель формулы определяется из выражения

$$\sum_{i=1}^{n=6}(y_1 - y_{1i})^2 = (y_1 - y_{11})^2 + (y_1 - y_{12})^2 + (y_1 - y_{13})^2 + (y_1 - y_{14})^2 +$$

$$+ (y_1 - y_{15})^2 + (y_1 - y_{16})^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n=6}(y_2 - y_{2i})^2 = (y_2 - y_{21})^2 + (y_2 - y_{22})^2 + (y_2 - y_{23})^2 + (y_2 - y_{24})^2 +$$

$$+ (y_2 - y_{25})^2 + (y_2 - y_{26})^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n=6}(y_{15} - y_{15i})^2 = [(y_{15} - y_{151})^2 + (y_{15} - y_{152})^2 + (y_{15} - y_{153})^2 +$$

$$+ (y_{15} - y_{154})^2 + (y_{15} - y_{155})^2 + (y_{15} - y_{156})^2] \Big/ \sum_{l=1}^{N=15}\sum_{i=1}^{n=6}(y_i - y_{il})^2.$$

Знаменатель $\sigma^2\{y\}$ – это число степеней свободы f_2, с которым определяется дисперсия воспроизводимости

$$f_2 = N(n-1) = 15(6-1) = 75.$$

Дисперсия для a_0' определяется по формуле:

$$\sigma^2\{a_0'\} = \frac{[\sigma^2\{y\}]}{15} = \frac{(7{,}208)}{15} = 0{,}481.$$

Дисперсии для $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ с учетом выражений:

$\sum_{i=1}^{N=15} x_{il}^2 = 10{,}94$ $\quad i$ = 1, 2, 3,

$\sum_{i=1}^{N=15} x_{il}^2 = 4{,}344$ $\quad i$ = 4, 5, 6,

$\sum_{i=1}^{N=15} x_{il}^2 = 8$ $\quad i$ = 7, 8, 9, 10

определяется следующим образом:

$$\sigma^2\{a_1\} = \sigma^2\{a_2\} = \sigma^2\{a_3\} = 7{,}208 : 10{,}94 = 0{,}658;$$

$$\sigma^2\{a_4\} = \sigma^2\{a_5\} = \sigma^2\{a_6\} = 7{,}208 : 4{,}344 = 1{,}653;$$

$$\sigma^2\{a_{10}\} = 7{,}208 : 8 = 0{,}901.$$

Дисперсию свободного члена представим как

$$\sigma^2\{a_0\} = \sigma^2\{a_0'\} + (x_i'')^2(\sigma^2\{a_{11}\} + \sigma^2\{a_{22}\} + \sigma^2\{a_{33}\});$$

$$\sigma^2\{a_0\} = 0{,}481 + 0{,}73^2 \cdot 1{,}653 \cdot 3 = 3{,}127.$$

Определение t_i:

$t_0 = 501{,}4/\sqrt{3{,}127} = 284{,}0;$ $\quad t_{12} = t_4 = 1{,}08/\sqrt{1{,}653} = 0{,}84;$

$t_1 = 1{,}98/\sqrt{0{,}658} = 2{,}45;$ $\quad t_{13} = t_5 = 3{,}45/\sqrt{1{,}653} = 2{,}68;$

$t_2 = 1{,}51/\sqrt{0{,}658} = 1{,}86;$ $\quad t_{23} = t_6 = 1{,}96/\sqrt{1{,}653} = 1{,}53;$

$t_3 = 2{,}16/\sqrt{0{,}658} = 2{,}67;$ $\quad t_{123} = t_{10} = 0{,}5/\sqrt{0{,}901} = 0{,}53.$

Условие значимости коэффициентов уравнения имеет вид $t_i > t_p$. Табличное значение при f = 75 $t_{0,05}$ = 2,0, поэтому коэффициенты при x_1^2 и $x_1x_2x_3$ оказались незначимыми.

Адекватность (тождественность) описания процесса термообработки проверим полиномом второй степени, используя *F*-критерий

$$F = \frac{\sigma_R^2}{\sigma^2\{y\}}.$$

Дисперсия воспроизводимости определена ранее и равна $\sigma^2\{y\} = 7{,}208$.

Остаточная дисперсия:

$$\sigma_R^2 = \frac{\sigma_R^{2*}}{f_1}.$$

Число степеней свободы

$$f_1 = N - (\kappa + 1) = 15 - (10 + 1) = 4,$$

где K – количество коэффициентов полинома.

Степень свободы f_2 = 75.

Расчет дисперсии производится по формуле:

$$\sigma_R^{2*} = \sum_{l=1}^{N=15} y_i^2 - \sum_{i=0}^{N=15} a_i \sum_{l=1}^{N=15} x_{il}\, yl,$$

$$\sum_{l=1}^{N=15} y_l^2 = 500^2 + 498^2 + 497^2 + 505^2 + 496^2 + 504^2 + 503^2 + 501^2 +$$

$$493^3 + 501^2 + 490^2 + 497^2 + 500^2 + 503^2 + 505^2 = 3743273;$$

$$\sum_{i=0}^{\kappa=10} a_i \sum_{l=1}^{N=15} x_{il} y_l = 499{,}534 \cdot 7493 + 1{,}985 \cdot 21{,}72 + 1{,}509 \cdot 16{,}505 +$$

$$+ 2{,}161 \cdot 23{,}645 + 1{,}084 \cdot 4{,}71 + 3{,}453 \cdot 15 + 1{,}961 \cdot 8{,}52 + 0{,}5 \cdot 4 = 3743203;$$

$$\sigma_R^{2*} = 3743273 - 3743203 = 70;$$

$$\sigma_R^2 = 70 / 4 = 17{,}5.$$

Расчет *F*-отношение :

$$F_i = 17{,}5 / 7{,}208 = 2{,}43.$$

Для 5 % уровня значимости при f_1 = 4 и f_2 = 75 *F*= 2,5. Поскольку $F_i < F_p$, можно считать, что полином адекватно описывает исследуемый процесс x_3.

Наиболее значимым фактором является время изотермического прогрева $t(x_3)$, т. к. коэффициенты при x_3(+ 2.16) и x_3^2(+ 1,96) оказались наибольшими по абсолютной величине. С увеличением $(x_3)t$ прочность возрастает и за пределами исследуемой области, но незначительно. Поэтому по технологическим и экономическим соображениям время следует ограничить, т. е. принять t = 5 часов.

Второй по значимости оказалась температура предварительного подогрева бетонной смеси $T_{np}(x_1)$. Для увеличения прочности изделий температуру T_{np} необходимо увеличить. Оптимальной будет температура около 37 ºС.

Менее всего значима температура изотермического прогрева, так как центр эксперимента выбран в области оптимума, о чем свидетельствуют коэффициенты при x_2 (+1,51) и x_2^2 (–-3,45). Температуру изотермического прогрева следует принять в пределах от 86 до 87 ºС.

3.7. Пример графического моделирования

Рассмотрим влияние домола и добавки СДБ на основные свойства мелкозернистого бетона. В качестве исходных материалов используется цемент активностью 32 МПа и сухая СДБ. В качестве заполнителя применяется крупный песок $M_{кр}$ = 3. Выбран двухфакторный трехуровневый план. Варьирование времени домола – 0; 3; 6 часов и количество пластифицирующей добавки – 0; 0,2; и 0,4 % массы цемента. *В/Ц* изменяется от 0,48 до 0,55, для обеспечения одинаковой подвижности бетонных смесей. В смеси вводится СДБ в виде 10 %-ных растворов с водой затворения, а подвижность смесей определяется по расплыву конуса на встряхивающем столике при получении равноподвижных смесей с РК = 170÷180 мм.

План эксперимента и значения функций отклика приведены на рис. 58.

Полученные фактические значения (функции отклика) статистически обработаны на компьютере для определения коэффициентов уравнений вида

$$Y = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2,$$

где a – коэффициенты уравнения; x_1 – кодированное значение времени домола; x_2 – кодированное значение дозировки СДБ.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Номер	Входные факторы											
2	сост.	натуральн.		кодиров.		*в/ц*	РК,	Выходные фактические факторы					
3			СДБ,				мм	$R_{сж}$,	$R_{из}$,	$R_{рр}$,	A,	$K_{тр}\times$	$W_м$,
4		t,ч	%	x_1	x_2			МПа	МПа	МПа	кгм/м^2	103	%
5	1	0	0	–	–	0,55	180	22,5	4,6	1,57	47946	204	12,7
6	2	6	0	+	–	0,55	170	33,7	7	2,55	99711	208	10,4
7	3	0	0,4	–	+	0,48	180	31,2	7,5	2,03	75525	240	9,5
8	4	6	0,4	+	+	0,5	170	42,4	9,1	2,89	106075	215	8,7
9	5	0	0,2	–	0	0,5	180	29,1	6,7	1,94	73404	230	9,8
10	6	6	0,2	+	0	0,53	170	40	8,8	2,8	101832	220	9,3
11	7	3	0	0	–	0,55	175	30,3	6,3	2,04	77647	209	10,3
12	8	3	0,4	0	+	0,5	175	34,8	8,1	2,72	93346	233	9,7
13	9	3	0,2	0	0	0,53	175	32,8	7,9	2,21	89101	241	10

Рис. 58. Значения функций отклика

Получены математические модели для прочности МЗБ при сжатии, коэффициента трещиностойкости ($K_{тр} = R_{и}/R_{сж}$), водопоглощения, прочности на растяжение при раскалывании и ударной прочности *а*:

$$a = N\frac{mh^2}{V},$$

где N – количество ударов копра;

m – масса падающего груза 3 кг;

h – высота падения груза – 50 см;

V – объем образца, м^3.

Фактические значения отклика имеют вид:

$$Y_1(R_{сж}) = 366 + 55{,}6\,x_1 + 36{,}6\,x_2 + 6{,}2\,x_1^2 - 13{,}8\,x_2^2,$$

$$Y_2(R_{изг}) = 79 + 10{,}2\,x_1 + 11{,}4\,x_2 - 2\,x_1\,x_2 - 1{,}3\,x_1^2 - 6{,}8\,x_2^2,$$

$$Y_3(R_{рр}) = 23 + 4{,}5\,x_1 + 2{,}5\,x_2 - 0{,}3\,x_1\,x_2 - 0{,}2\,x_1^2 - 0{,}1\,x_2^2,$$

$$Y_4(K_{тр}10^3) = 236 - 5{,}2\,x_1 + 11{,}2\,x_2 - 7{,}3\,x_1\,x_2 - 7{,}5\,x_1^2 - 11{,}5\,x_2^2,$$

$$Y_5(a) = 89856 + 18494\,x_1 + 8290\,x_2 - 5304\,x_1\,x_2 - 2362\,x_1^2 - 4483\,x_2^2,$$

$$Y_6(W_m) = 9{,}7 - 0{,}6\,x_1 - 0{,}9\,x_2 + 0{,}4\,x_1\,x_2 + 0{,}1\,x_1^2 + 0{,}5\,x_2^2.$$

По этим уравнениям определены расчетные значения исследуемых функций и построены их графические модели, которые наглядно показывают, как меняются свойства МЗБ в зависимости от домола цемента и добавки СДБ (рис. 59).

Для проверки воспроизводимости результатов в точке факторного пространства с координатами «0,0» были дополнительно поставлены два опыта. Проверка полученных математических моделей по критерию Фишера подтвердила их адекватность фактическим значениям свойств МЗБ при значимости p = 0,05.

Анализ фактических значений исследуемых свойств, их математических и графических моделей позволяет констатировать следующее:

1. Подвижность смесей на исходном цементе (без домола) поддерживалась на уровне РК = 180 мм за счет уменьшения расхода воды при введении СДБ с водой затворения: с *В/Ц* = 0,55 у контрольного состава до 0,48 (на 13 %) при дозировке 0,4 % СДБ. Смеси на цементе, домалываемом 3 и 6 часов, характеризовались чуть большей вязкостью: РК = 175 и 170 мм соответственно при меньшей эффективности сухой СДБ, введенной при помоле, так как при ее максимальной дозировке 0,4 % удалось снизить *В/Ц* лишь до 0,5 (на 9 %), что, впрочем, соответствует литературным данным.

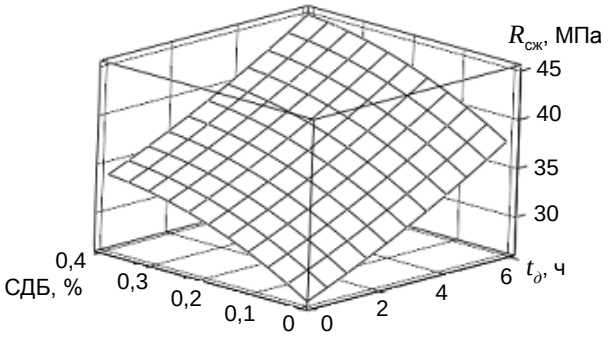


Рис. 59. Зависимость прочности МЗБ при сжатии от времени домола и количества добавки СДБ

Эту же зависимость графически можно представить и горизонтальной проекцией (рис. 60).

Как видно из графической модели (рис. 59), $R_{сж}$ повышается как при увеличении времени домола, так и количества добавки СДБ. Однако влияние первого фактора оказалось примерно в 1,5 раза сильнее второго. Так, введение 0,2 и 0,4 % СДБ с водой затворения в смесь на исходном цементе повысило прочность при сжатии соответственно на 29 и 39 %, а 3 и 6-часовой домол цемента без СДБ – на 35 и 50 %.

2. Максимальная же прочность отмечена при взаимодействии варьируемых факторов на верхних уровнях при

6-часовом домоле и 0,4 % СДБ. Она составила 42,4 МПа, превысив $R_{сж}$ контрольного состава на 88 % (рис. 60).

3. Аналогичная зависимость получена и для $R_и$ (рис. 61). Но в этом случае эффективность домола чуть ниже, чем увеличение расхода СДБ. Суммарный упрочняющий эффект этих факторов также проявляется на их верхних уровнях и соответствует максимальному росту $R_и$ на 98 % относительно контрольного состава.

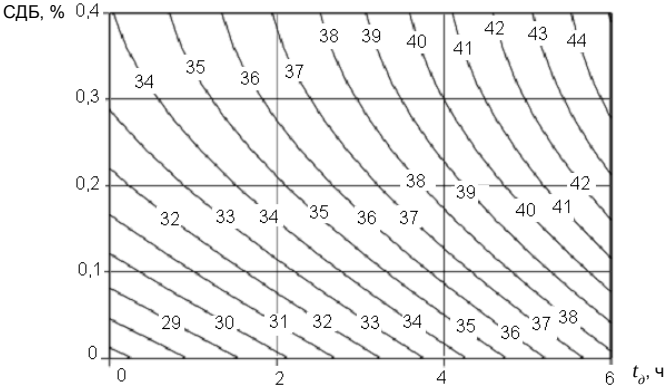
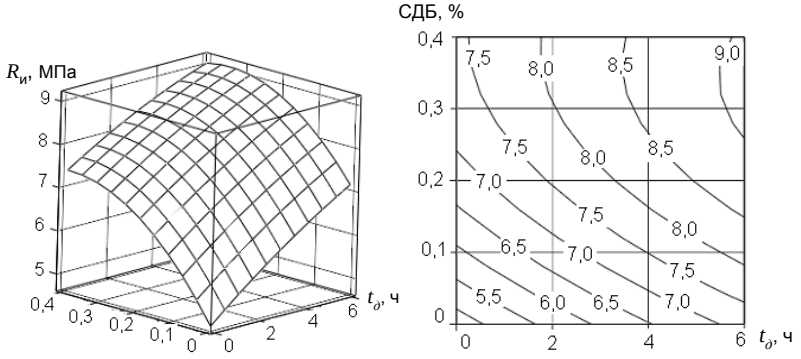


Рис. 60. Зависимость прочности МЗБ при сжатии от количества добавки СДБ и времени домола



СДБ, %

Рис. 61. Зависимость прочности МЗБ на растяжение при раскалывании от количества добавки СДБ и времени домола

4. Математическая и графическая модели (рис. 62) отражают противоречивый характер влияния тонкости помола цемента и дозировки СДБ на этот расчетный показатель ($K_{тр}$= $R_и/R_{сж}$). Первый фактор влияет отрицательно, второй – положительно и вдвое сильнее. Очевидно, это связано с тем, что при введении добавки $R_и$ растет интенсивнее, чем $R_{сж}$. В отличие от других свойств, именно для $K_{тр}$ удалось «поймать» оптимальную точку внутри выбранного пространства – максимума $K_{тр}$, превышающую на 19 % контрольный, который можно достигнуть при домоле цемента около 1 часа с 0,34 % СДБ.

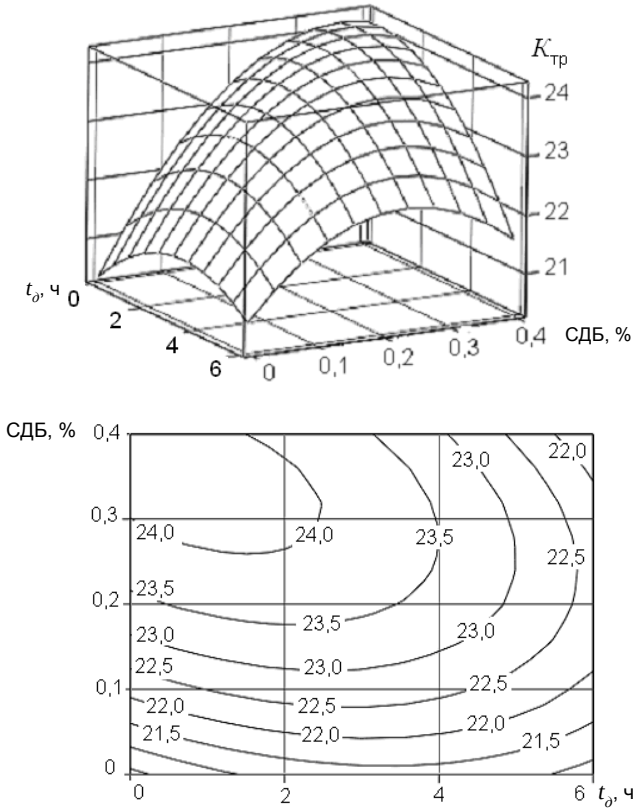


Рис. 62. Зависимость $K_{тр}$ МЗБ от количества добавки СДБ и тонкости помола цемента

5. Полученная модель и рисунок показывает, что время домола и расход СДБ на $R_{рр}$ МЗБ действуют в одном направлении (повышая ее при увеличении обоих факторов), но первый из них примерно вдвое сильнее. В отсутствие добавки шестичасовой домол дает прирост $R_{рр}$ до 62 %, а 0,4 % СДБ на исходном цементе – всего 29 %. Максимальный рост $R_{рр}$ на 84 % обеспечен именно при наибольшей тонкости помола и дозировке пластифицирующей добавки.

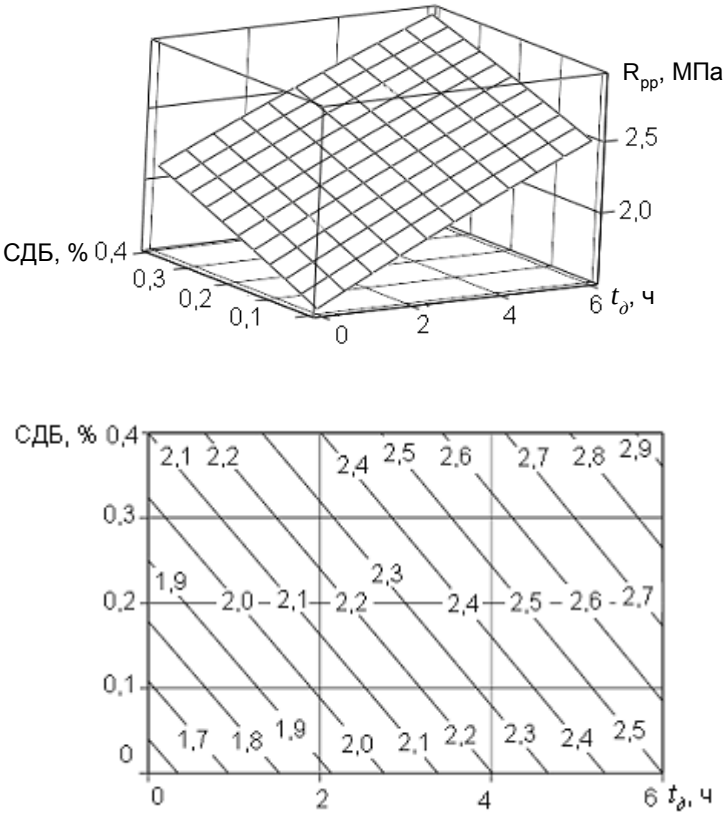


Рис. 63. Зависимость прочности МЗБ на растяжение при раскалывании в зависимости от времени домола и количества добавки СДБ

6. Анализируя графическую модель и математическую зависимость от времени домола и количества добавки СДБ, можно заключить, что это свойство в наибольшей степени удается повысить при увеличении тонкости помола пластифицированного цемента. При этом, оптимальной дозировкой добавки СДБ можно считать 0,3 %; 6-тичасовой домол такого состава приводит к росту удельной ударной вязкости МЗБ более чем в 2 раза.

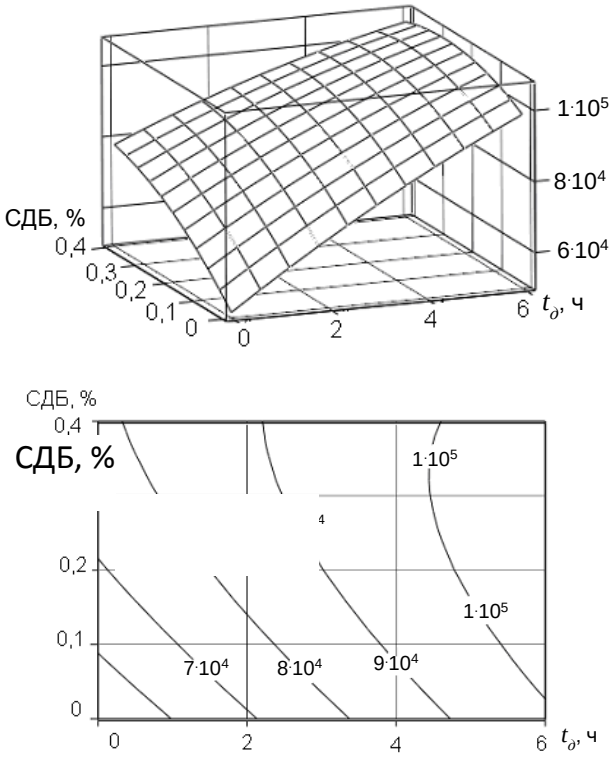


Рис. 64. Зависимость удельной ударной вязкости МЗБ от времени домола и количества добавки СДБ

7. Водопоглощение бетона характеризует его открытую пористость, доступную воде при атмосферном давлении, которая заполняет капиллярные и часть наиболее крупных

гелевых пор. Поэтому величина водопоглощения обычно тесно коррелирует с капиллярной пористостью бетона и, естественно, с его важнейшими свойствами. Повышение тонкости помола цемента, несмотря на некоторое увеличение водопотребности, снижает W_m МЗБ (почти на 20 % без добавки). В еще большей степени (до 25 %) этому способствует введение пластификатора в повышенных дозировках. Минимальным же водопоглощением, судя по графической модели, будет обладать бетон на наиболее тонкомолотом цементе при оптимальном расходе СДБ, равном 0,3 %. Это соотносится с ранее выявленными максимумами прочностных характеристик МЗБ в данной области факторного пространства.

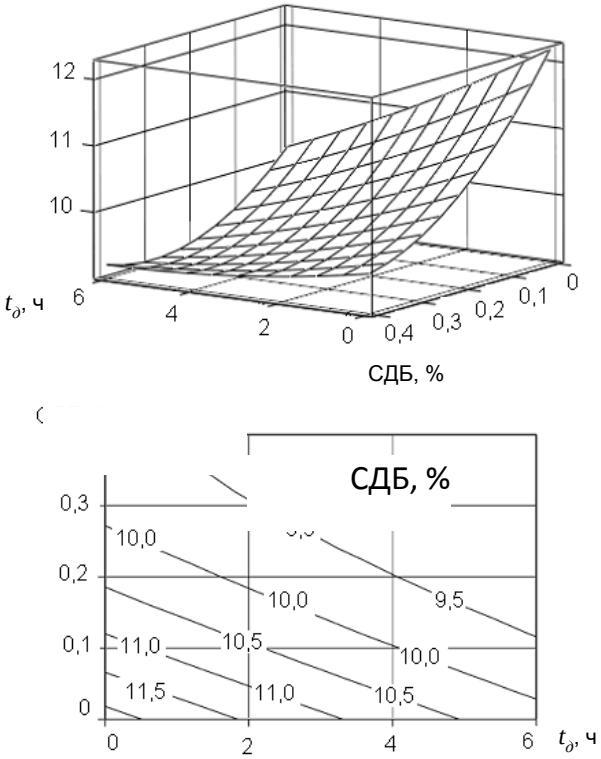


Рис. 65. Зависимость водопоглощения МЗБ от времени домола и количества добавки СДБ

Технологический анализ модели удобнее проводить, имея графическую интерпретацию процесса. Для этой цели можно использовать и «упрощенное» плоскостное изображение в горизонталях.

В тех случаях, когда в ходе испытаний появляется необходимость исследовать влияние многих факторов на оптимизируемую величину (в связи с этим число опытов резко возрастает), переходят к организации эксперимента с помощью дробных реплик. При использовании 1/8 реплики типа 2^{7-3} реализация такого плана позволяет поставить 16 опытов вместо 64, которые потребовались бы при традиционном подходе для достижения той же величины дисперсии.

3.8. Пример структурно-имитационного моделирования

Принципиальная схема методологии структурно-имитационного моделирования, отображающая общие подходы к моделированию свойств цементных композиций, представлена на рис. 66.

На первом этапе, основываясь на известных теоретических данных о структуре цементных композиций, устанавливаются характерные структурные уровни, связанные со строением материала. Определяются физико-механические параметры компонентов отдельных структурных уровней. При необходимости проводятся эксперименты по установлению параметров структуры или связи технологических факторов со строением материала и свойствами компонентов. Далее формируются плоские геометрические модели структуры различного масштабного приближения с учетом вероятностного характера взаиморасположения компонентов.

Следующим шагом создания численных моделей является реализация процедур МКЭ, позволяющих представить модель как единую систему, состоящую из компонентов, обладающими различными физико-механическими параметрами (модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотностью и др.). Для каждой модели определяются интегральные характеристики упругости, которые используются в качестве параметров матрицы в модели

последующего масштабного приближения. Создание численной модели материала наиболее крупного масштабного приближения соответствует завершению первого этапа моделирования.



Рис. 66. Принципиальная схема структурно-имитационного моделирования

Второй этап моделирования связан с разработкой алгоритмов воспроизведения свойств материала. Эти алгоритмы связаны с определением внешних или внутренних нагрузок, действующих в моделях различных уровней, оценкой результатов действия этих нагрузок и, при необходимости, преобразованием исходных моделей. В качестве конечного результата рассматривается интегральный отклик на воздействие, соответствующее исследуемому свойству.

Первым этапом реализации структурно-имитационного моделирования является разработка модели субмикроуровня бетона. В возрасте 28 суток влияние различных технологических факторов (В/Ц, условий твердения, химических добавок) проявляется, в основном, через степень гидратации цемента, а точнее через относительный объем новообразований. На рисунке показано, что объем пор радиусом менее 1,0 нм имеет тесную корреляционную связь со степенью гидратации.

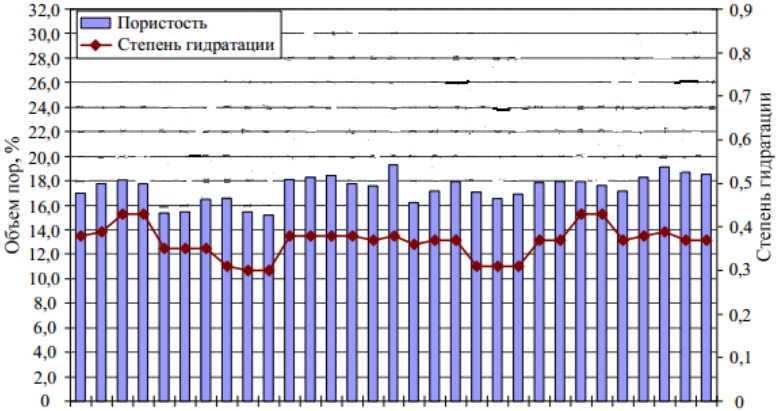


Рис. 67. Зависимость между объемом пор радиусом менее 1,0 нм и степенью гидратации портландцемента

С позиции имитационного моделирования структура цементного геля остается неизменной, а наибольший объем представлен порами радиусом 0,85 нм (рис. 68). Эти поры составляют порядка 80 % от объема гелевой пористости и 60 % от общего объема пор в цементном камне при принятых значениях В/Ц.

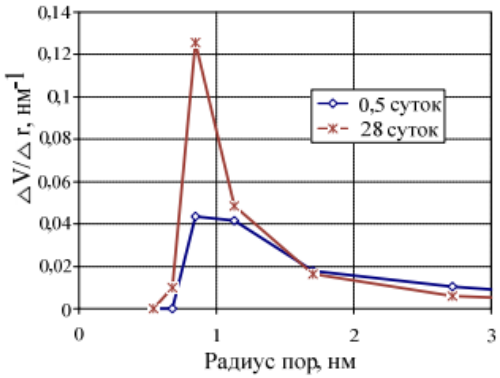


Рис. 68. Дифференциальное распределение пор в различном возрасте

В качестве обобщенного современного представления о структуре фазы гидросиликатов кальция в цементном камне можно привести модель, предложенную Национальным институтом стандартов США (рис. 69). Реализация известных представлений о существовании двух типов C-S-H, отличающихся величиной плотности, достигалась путем двухуровневого моделирования структуры геля (рис. 69, *б*). При этом полагается, что гель высокой плотности (C-S-$H_{ВП}$) представляет модель первого масштабного приближения, а гель низкой плотности(C-S-$H_{НП}$) – второго.

В модели первого уровня отдельными структурными элементами являются сферические частицы диаметром 4,4 нм, представляющие собой агрегаты субмикрокристаллов C-S-H (рис. 69, *б*). Модель второго уровня составляет совокупность частиц диаметром ~40 нм, внутреннее строение которых, в свою очередь, представляет систему первого уровня. Общая пористость модели первого уровня, обусловленная диаметром частиц твердой фазы геля, их удельной поверхностью и плотностью системы, принята равной 24 % (рис. 69, *а*). Пористость модели второго уровня составляет ~15 %; с учетом модели первого уровня общая пористость достигает 36 % (рис. 69, *б*). Таким образом, двухуровневая модель структуры реализует представление о коллоидном строении цементного геля с учетом фрактальности его структуры.

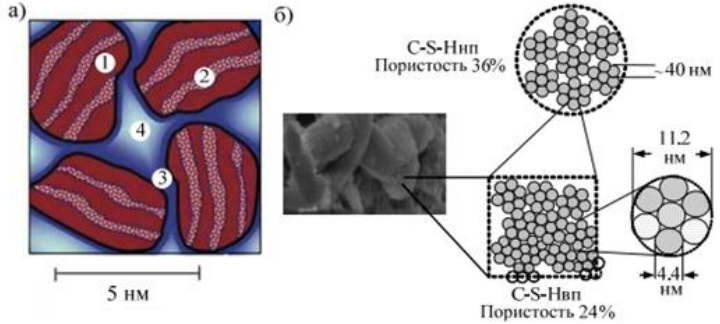


Рис. 69. Схематическое представление структуры цементного геля:
а) единичные элементы структуры геля; б) два типа структуры C-S-H
1 – твердая фаза C-S-H; 2 – физически связанная вода между слоями;
3 – адсорбированная вода; 4 – свободная вода в порах

Дальнейшими этапами процедуры создания расчетной модели являются представление структуры в виде совокупности конечных элементов, присвоение физических свойств каждому структурному элементу, задание условий закрепления краев пластинки, приложение нагрузки, т. е. реализация алгоритма МКЭ. При формировании моделей цементного камня в качестве наиболее представительной кристаллической фазы, играющей важную роль в формировании механических свойств материала, можно выделить негидратированный клинкер, портландит и эттрингит, а в позднем возрасте и карбонат кальция.

В табл. 26 представлены значения свойств некоторых компонентов структуры цементных систем, используемые в расчетах после преобразования к двухмерному представлению согласно следующим зависимостям:

$$E_2 = \frac{E_3}{1-\mu_3^2},$$

$$\mu_2 = \frac{\mu_3}{1-\mu_3^2},$$

где индексы 2 и 3 обозначают двухмерную и трехмерную размерность.

Таблица 26

Свойства компонентов цементных систем

Наименование компонента	Модуль упругости, E, ГПа	Коэффициент Пуассона,μ	Плотность, кг/м^3
Портландит	42,3	0,324	2240
Эттрингит	25,0	0,25	1700
Клинкерные минералы	117,6	0,314	3230
Цементный гель CSH	23,0	0,25	1650
Твердая фаза цементного геля	65,9	0,30	2650
Кремнезем	72.8	0,167	2600
Гранит	50,0	0,21	2450

Сходимость расчетных величин с экспериментальными значениями свидетельствует об адекватности математической модели субмикроструктуры бетона, рекомендуемой в качестве базовой (ввиду независимости строения C-S-H от технологических приемов) при дальнейшем моделировании микроструктуры цементных систем.

В целях учета вероятностного характера свойств цементных композиций, реализуется алгоритм стохастического формирования моделей структуры на микро-, мезо- и макроуровнях. Данный алгоритм основан на методе Монте-Карло и позволяет сгенерировать геометрическую модель, в которой структурные компоненты (как круглой, так и произвольной формы) размещаются случайным образом. Количество и размеры компонентов соответствует заданному распределению. Основой построения структурных моделей цементного камня являются результаты экспериментальных исследований определения параметров структуры конкретных составов в зависимости от технологических факторов для последующего их отражения в моделях. Составы и свойства цементного камня в возрасте 28 суток приведены в табл. 27 .

Таблица 27

Составы и свойства цементного камня

Серия	В/Ц	С-З	Условия твердения	Плотность, кг/м^3	Пористость, %	Предел прочности при сжатии, МПа	Модуль упругости, ГПа
цк1	0,28	-	нву	1916	29,91	71,1	20,26
цк2	0,30	-	нву	1840	30,86	65,4	18,91
цк3	0,28	-	тво	1953	24,22	102,5	22,43
цк4	0,30	-	тво	1891	25,66	81,9	20,93
цк5	0,24	0,5	нву	1933	25,96	94,9	24,27

Компонентный состав цементного камня в отношении наиболее представительных по объему структурообразующих фаз (портландита, эттрингита и негидратированного клинкера) представлен в табл. 28 .

Таблица 28

Доля основных кристаллических компонентов в составе цементного камня

Серия	Степень гидратации	Доля компонентов, % от объема цементного камня		
		портландит	эттрингит	клинкер
цк1	0,6	17,5	8,0	8,0
цк2	0,61	17,0	7,0	7,5
цк3	0,62	35,0	3,0	7,5
цк4	0,63	30,0	2,0	7,0
цк5	0,55	16,0	2,0	12,0

Модель цементного камня в трех масштабных приближениях, имитирующих основные структурные параметры реальных составов представлены на рис. 70.

Компонентами структуры, явно учитываемыми в моделях, являются:

- матрица, представляющая собой цементный гель;
- гексагональные пластинки портландита (0,5–20 мкм);

- игловидные кристаллы эттрингита (0,5–30 мкм);
- поры в диапазоне радиусов от 25 нм до 1,0 мкм,
- зерна негидратированного клинкера в виде окружностей диаметром от 5 до 20 мкм.

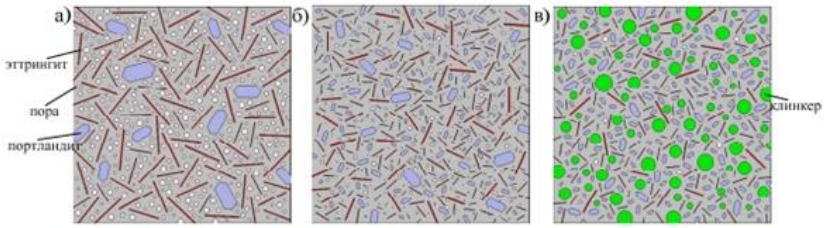


Рис. 70. Трехуровневая геометрическая модель структуры цементного камня с размерами уровней:
а) 5х5 мкм; б) 50х50 мкм; в)250х250 мкм

Пористость моделей полностью соответствует пористости имитируемых составов. Сопоставление результатов расчета модуля упругости для обобщающей модели цементного камня (рис. 71), с экспериментальными данными свидетельствует об их очень близком соответствии (рис. 71), что подтверждает адекватность использования имитационных моделей для описания деформационных свойств цементного камня.

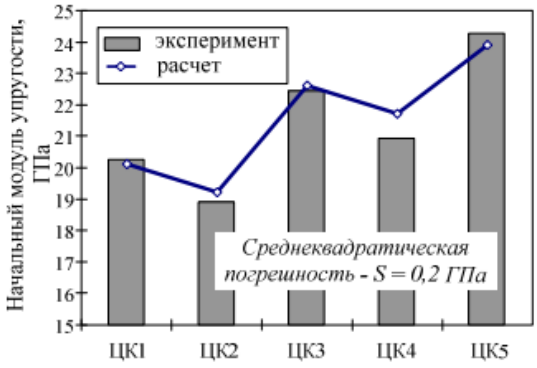


Рис. 71. Сопоставление расчетных и экспериментальных величин начального модуля упругости

Для моделирования мезоуровня рассматриваются составы, представленные в табл. 29.

Таблица 29

Составы цементно-песчаных смесей

Группа	Ц:П	Серия	Содержание песка, %	В/Ц	С-З, %	Расплыв конуса, мм	Условия твердения
I	1:2	Р1	48,3	0,50	-	175	нву
		Р2	49,9	0,45	-	169	нву
		Р3	53,4	0,35	0,5	165	нву
		Р4	49,9	0,45		170	тво
II	1:2,5	Р5	53,8	0,50		167	нву
		Р6	56,0	0,45	0,5	169	нву
		Р7	56,7	0,40	0,5	165	нву
III	1:3	Р8	55,4	0,60		167	нву
		Р9	58,2	0,50	0,5	169	нву
IV	1:4	Р10	65,1	0,51	0,5	164	нву

Имитация мезоуровня цементных систем приводит к созданию трех-уровневого приближения (рис. 72).

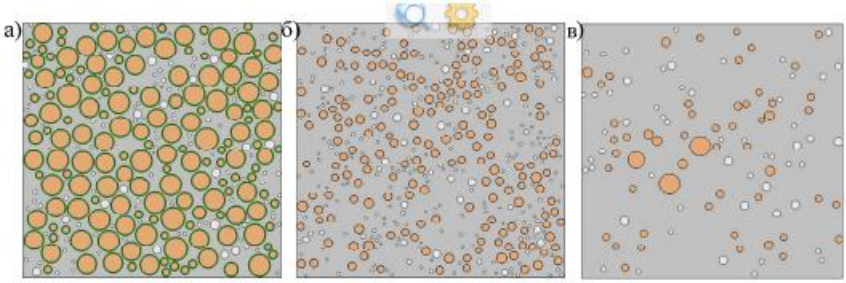


Рис. 72. Геометрическая модель структуры цементно-песчаной композиции в трех масштабных приближениях:
а) 5х5 мкм; б) 50х50 мкм; в) 250х250 мкм

Первый уровень включает зерна песка фракции менее 0,16 мм и 0,16–0,5 мм, поры размером 10–200 мкм; второй уровень – песок фракций 0,5–1,0 мм, поры размером 200–500 мкм; третий уровень – песок фракций 1,0–5,0 мм, поры размером 0,8–1,7 мм. Форма пор и зерен песка принята в виде окружностей. Контактная зона толщиной 20 мкм сымитирована в виде оболочки вокруг каждого зерна песка. Упругие свойства матрицы назначены в соответствии с результатами, полученными для модели цементного камня соответствующего состава и условий твердения.

Для разработки структурных моделей крупнозернистого бетона, отражающих основные параметры структуры реальных составов, в качестве структурных неоднородностей, учитываемых в модели, приняты: матрица, представляющая цементно-песчаную композицию; зерна щебня (5–25 мм); поры в диапазоне размеров от 1,7 до 5,0 мм, а также контактная зона между зернами крупного заполнителя и матрицей толщиной 50 мкм. Свойства матрицы назначены в соответствии с результатами, полученными для модели цементно-песчаной композиции соответствующего состава и условий твердения. Достаточно узкий диапазон размеров учитываемых компонентов структуры позволяет отразить их в одной модели, размер которой принят равным 200×200 мм (рис. 74).

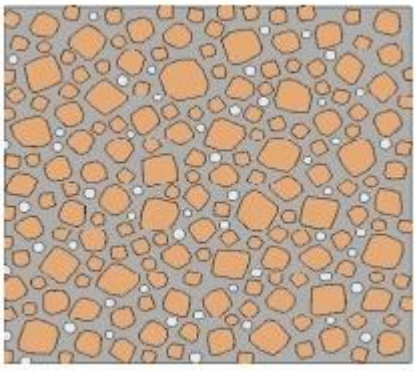


Рис. 74. Геометрическая модель крупнозернистого бетона

Таким образом, на основе структурно-имитационного моделирования разработана адекватная модель крупнозернистого цементного бетона, представляющая собой дискретные представления структуры материала на девяти масштабных уровнях– от нанометра до миллиметра.

Многоуровневая модель структуры цементной композиции позволяет реализовать моделирование процесса влажностной усадки бетона в возрасте 28 суток. Принято, что усадочные деформации обусловлены капиллярным давлением и изменением свободной поверхностной энергии, которые тесно связаны с параметрами порового пространства структуры материала. Для математического описания связи между структурой композиционного материала и усадочными деформациями в наибольшей степени подходит метод моделирования, позволяющий воспроизвести действующие нагрузки, как по величине, так и характеру их приложения.

Расчет величин капиллярного давления, а также деформаций системы в зависимости от изменения свободной поверхностной энергии во взаимосвязи с влажностью среды реализуется с позиции термодинамического подхода согласно алгоритму (рис. 75).

Расчет собственных деформаций начинается с модели первого уровня. Вначале определяется максимальный радиус пор, заполненных водой, и капиллярное давление в них при соответствующей относительной влажности среды. Полученные значения капиллярного давления, реализуются в модели в виде внешней нагрузки, прикладываемой к граням конечных элементов, лежащих по поверхностям пор. Далее вычисляются величины изменения поверхностной энергии и деформации, обусловленные ее действием. Расчеты производятся по известной величине удельной поверхности осушенных пор. Аналогичный расчет проводится для модели второго и последующих уровней. Отличием является то, что к деформациям при каждом расчетном уровне влажности, определенным для данной модели, добавляются деформации модели предыдущего уровня. Результаты расчета в графическом виде представлены на рис. 76.

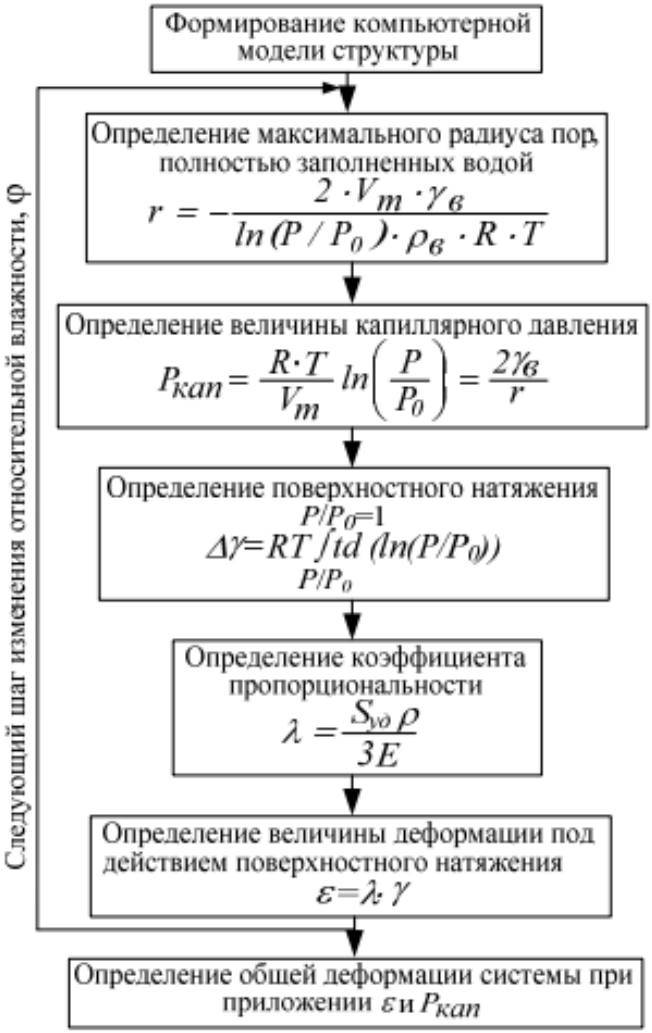


Рис. 75. Алгоритм расчета деформаций влажностной усадки:
R – универсальная газовая постоянная; T – температура;
V_m – молекулярная масса воды; $\gamma_в$ – поверхностное натяжение воды;
t – толщина адсорбированного слоя; $S_{уд}$ – удельная площадь поверхности пор; ρ – плотность материала;
E – модуль Юнга

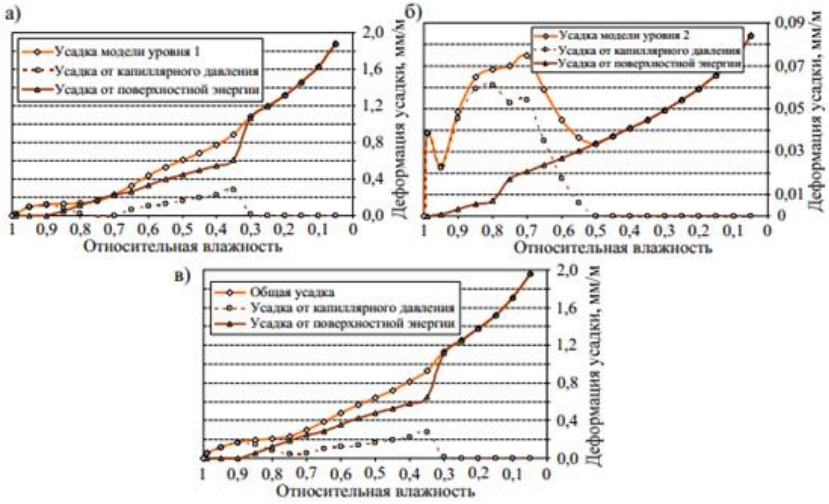


Рис. 76. Деформации влажностной усадки цементного геля:
а) усадка модели первого уровня;
б) усадка модели второго уровня;
в) общие деформации влажностной усадки

Численное моделирование не только отражает суммарный эффект капиллярных явлений и поверхностных напряжений, но и дает возможность количественно разделить общую деформацию на две составляющие – капиллярную усадку и усадку за счет изменения поверхностной энергии. Максимальная расчетная величина влажностной усадки геля составляет около 2 мм/м (α= 0,05), причем 85 % этой величины обусловлено высокой удельной поверхностью модели геля первого масштабного приближения. Общая капиллярная усадка не превышает 0,30 мм/м и не может рассматриваться, как определяющая деструкцию структуры. Результаты расчета и экспериментальные данные по определению усадки цементного камня представлены на рис. 77.

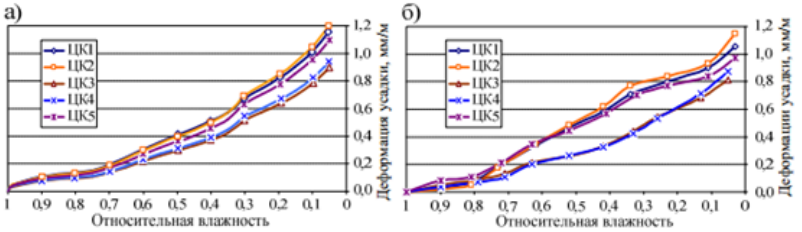


Рис. 77. Деформации влажностной усадки цементного камня:
а) расчетные данные; б) экспериментальные данные

Сравнение результатов позволяет заключить, что экспериментальные данные хорошо согласуются с расчетными величинами усадки: расхождения составляют ±0,07 мм/м (Δ=6 %). Дополнительным аргументом в подтверждение адекватности самого алгоритма моделирования механизма влажностной усадки, служит качественное сопоставление экспериментальных и расчетных данных, представляющих зависимость деформаций от относительной влажности в дифференцированном виде (рис. 78).

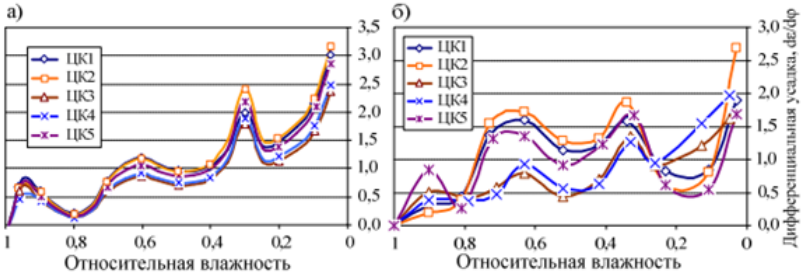


Рис. 78. Зависимость усадки от влажности в дифференцированном виде:
а) расчетные данные; б) экспериментальные данные

Для всех составов характерно наличие трех основных пиков. Первый пик соответствует влажности~0,9, второй– 0,6÷0,7; а третий– ~0,3. Появление первого пика вызвано, прежде всего, капиллярным давлением в порах диаметром до 20 нм. Второй и третий экстремумы обусловлены наличием

пор размером 3–4 нм и 1,7 нм соответственно, на стенках которых проявляется действие изменение свободной поверхностной энергии. Сравнение с графиком дифференциальной усадки, полученным по расчетным данным (рисунок 78а), доказывают наличие явных признаков, подтверждающих адекватность модели. Результаты численных экспериментов по определению деформаций усадки цементно-песчаных композиций и расчетные данные для обобщающей модели представлены на рис. 79 .

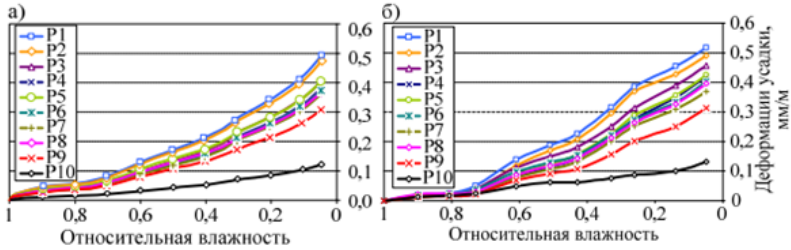


Рис. 79. Деформации влажностной усадки цементно-песчаных систем:
а) расчетные данные; б) экспериментальные данные

Сравнение экспериментальных и расчетных данных величин усадки позволяет сделать вывод о сохранении тенденции, характерной для уровня цементного геля и камня. На дифференциальных зависимостях наблюдается пропорциональное снижение характерных пиков без значительных качественных изменений. Расчет усадки на масштабном уровне крупнозернистого бетона при сохранении общего алгоритма моделирования подтверждает удовлетворительную сходимость результатов с экспериментальными данными.

Таким образом, сходимость результатов численных и натурных экспериментов свидетельствует об адекватности метода структурно-имитационного моделирования, что позволяет использовать его как инструмент прогнозирования поведения цементных систем в условиях изменения относительной влажности. В отличие от других методов исследования, он позволяет оценить влияние каждой фазы структуры на свойства материала в целом.

3.9. Пример имитационного моделирования бизнес-процессов

Имитационное моделирование (simulation) является одним из мощнейших методов анализа технических систем. В общем случае, под имитацией понимают процесс проведения на ЭВМ экспериментов с математическими моделями сложных систем реального мира. Цели проведения подобных экспериментов могут быть самыми различными – от выявления свойств и закономерностей исследуемой системы, до решения конкретных практических задач.

Как следует из определения, имитация – это компьютерный эксперимент. Единственное отличие подобного эксперимента от реального состоит в том, что он проводится с моделью системы, а не с самой системой. Однако проведение реальных экспериментов с экономическими системами, по крайней мере, неразумно, требует значительных затрат и вряд ли осуществимо на практике. Таким образом, имитация является единственным способом исследования систем без осуществления реальных экспериментов.

Часто практически невыполним или требует значительных затрат сбор необходимой информации для принятия решений. Например, при оценке риска инвестиционных проектов, как правило, используют прогнозные данные об объемах продаж, затратах, ценах и т. д. Однако, чтобы адекватно оценить риск необходимо иметь достаточное количество информации для формулировки правдоподобных гипотез о вероятностных распределениях ключевых параметров проекта. В подобных случаях отсутствующие фактические данные заменяются величинами, полученными в процессе имитационного эксперимента (т. е. сгенерированными компьютером).

При решении многих задач финансового анализа используются модели, содержащие случайные величины, поведение которых не поддается управлению со стороны лиц, принимающих решения. Такие модели называют стохастическими. Применение имитации позволяет сделать выводы о возможных результатах, основанные на

вероятностных распределениях случайных факторов (величин). Стохастическую имитацию часто называют методом Монте-Карло.

Ниже рассмотрим технологию применения имитационного моделирования в среде Excel на примере задачи анализа рисков инвестиционных проектов.

Имитационное моделирование представляет собой серию численных экспериментов призванных получить эмпирические оценки степени влияния различных факторов (исходных величин) на некоторые зависящие от них результаты (показатели).

В общем случае, проведение имитационного эксперимента можно разбить на следующие этапы:

1. Установить взаимосвязи между исходными и выходными показателями в виде математического уравнения или неравенства;
2. Задать законы распределения вероятностей для ключевых параметров модели;
3. Провести компьютерную имитацию значений ключевых параметров модели;
4. Рассчитать основные характеристики распределений исходных и выходных показателей;
5. Провести анализ полученных результатов и принять решение.

Результаты имитационного эксперимента могут быть дополнены статистическим анализом, а также использоваться для построения прогнозных моделей и сценариев.

Рассмотрим следующий пример использования имитационного моделирования для решения задачи анализа рисков инвестиционного проекта.

Фирма рассматривает инвестиционный проект по производству нового продукта. В процессе предварительного анализа экспертами были выявлены три ключевых параметра проекта и определены возможные границы их изменений (табл. 30). Прочие параметры проекта считаются постоянными величинами (табл. 31).

Таблица 30

Ключевые параметры проекта по производству бетонных изделий

сценарий	Показатели		
	наихудший	наилучший	вероятный
Объем выпуска- *Q*, тыс,м^3	150	300	200
Цена реализации –*P*, у.е.	40	55	50
Переменные затраты – *V*	35	25	30

Первым этапом анализа согласно сформулированному выше алгоритму является определение зависимости результирующего показателя от исходных. При этом в качестве результирующего показателя выступает один из критериев эффективности: *NPV, IRR, PI.*

Предположим, что используемым критерием является чистая современная стоимость проекта *NPV*:

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^2} - I_0 ,$$

где NCF_t – величина чистого потока платежей в периоде *t*.

По условиям примера, значения нормы дисконта *r* и первоначального объема инвестиций 1_0 известны и считаются постоянными в течение срока реализации проекта (таблица).

Таблица 31

Неизменяемы параметры проекта по производству бетона

Показатели	Наиболее вероятное значение
Постоянные затраты – *F*	500
Амортизация – *A*	100
Налог на прибыль – *T*	60 %
Норма дисконта – *R*	10 %
Срок проекта – *n*	5
Начальные инвестиции – *Io*	2000

По условиям примера ключевыми варьируемыми параметрами являются: переменные расходы *V*, объем выпуска *Q* и цена *P*. Диапазоны возможных изменений варьируемых показателей приведены в таблице. При этом будем исходить из предположения, что все ключевые переменные имеют равномерное распределение вероятностей.

Проведение имитационных экспериментов в среде Excel можно осуществить двумя способами – с помощью встроенных функций и путем использования инструмента "Генератор случайных чисел" дополнения "Анализ данных" (Analysis ToolPack). Для сравнения ниже рассматриваются оба способа. При этом основное внимание уделено технологии проведения имитационных экспериментов и последующего анализа результатов с использованием инструмента "Генератор случайных чисел". Рассмотрим первый способ.

Следует отметить, что применение встроенных функций целесообразно лишь в том случае, когда вероятности реализации всех значений случайной величины считаются одинаковыми. Тогда для имитации значений требуемой переменной можно воспользоваться математическими функциями СЛЧИС() или СЛУЧМЕЖДУ(). Форматы функций приведены в табл. 32.

Функция СЛЧИС() возвращает равномерно распределенное случайное число *E*, большее, либо равное 0 и меньшее I, т. е.: $0 \leq E < 1$. Вместе с тем, путем несложных преобразований, с ее помощью можно получить любое случайное вещественное число. Например, чтобы получить случайное число между а и Ь, достаточно задать в любой ячейке электронной таблицы (ЭТ) следующую формулу: = СЛЧИС()*(Ь-а)+а

Таблица 32

Математические функции для генерации случайных чисел

Наименование функции		Формат функции
Оригинальная версия	Локализованная версия	
RAND	СЛЧИС	СЛЧИС() – не имеет аргументов
RANDBETWEEN	СЛУЧМЕЖДУ	СЛУЧМЕЖДУ(нижн_ граница; верхн_ граница)

Эта функция не имеет аргументов. Если в ЭТ установлен режим автоматических вычислений, принятый по умолчанию, то возвращаемый функцией результат будет изменяться всякий раз, когда происходит ввод или корректировка данных. В режиме ручных вычислений пересчет всей ЭТ осуществляется только после нажатия клавиши [F9].

Настройка режима управления вычислениями производится установкой соответствующего флажка в подпункте "Вычисления" пункта "Параметры" темы "Сервис" главного меню.

В целом применение функции СЛЧИС0 при решении задач финансового анализа ограничено рядом специфических приложений. Однако ее удобно использовать в некоторых случаях для генерации значений вероятности событий, а также вещественных чисел.

Функция СЛУЧМЕЖДУ (нижн_граница; верхн граница). Как следует из названия этой функции, она позволяет получить случайное число из заданного интервала. При этом тип возвращаемого числа (т. е. вещественное или целое) зависит от типа заданных аргументов. Если задать аналогичные формулы для переменных *P* и *V*, а также формулу для вычисления *NPV* и скопировать их требуемое число раз, можно получить генеральную совокупность, содержащую различные значения исходных показателей и полученных результатов.

Продемонстрируем изложенный подход на решении примера. Перед тем, как приступить к разработке шаблона, целесообразно установить в ЭТ режим ручных вычислений. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. Выбрать в главном меню тему "Сервис";
2. Выбрать пункт "Параметры" подпункт "Вычисления";
3. Установить флажок "Вручную" и нажать кнопку "ОК".

Приступаем к разработке шаблона. С целью упрощения и повышения наглядности анализа выделим для его проведения в рабочей книге Excel два листа. Первый лист – "Имитация", предназначен для построения генеральной совокупности (рисунок). Определенные в данном листе формулы и собственные имена ячеек приведены в таблицах.

Первая часть листа (блок ячеек A1..E7) предназначена для ввода диапазонов изменений ключевых переменных, значения которых будут генерироваться в процессе проведения эксперимента. В ячейке B7 задается общее число имитаций (экспериментов). Формула, заданная в ячейке E7, вычисляет номер последней строки выходного блока, в который будут помещены полученные значения. Смысл этой формулы будет раскрыт позже.

Вторая часть листа (блок ячеек A9..E11) предназначена для проведения имитации. Формулы в ячейках A10..C11 генерируют значения для соответствующих переменных с учетом заданных в ячейках B3..C5 диапазонов их изменений.

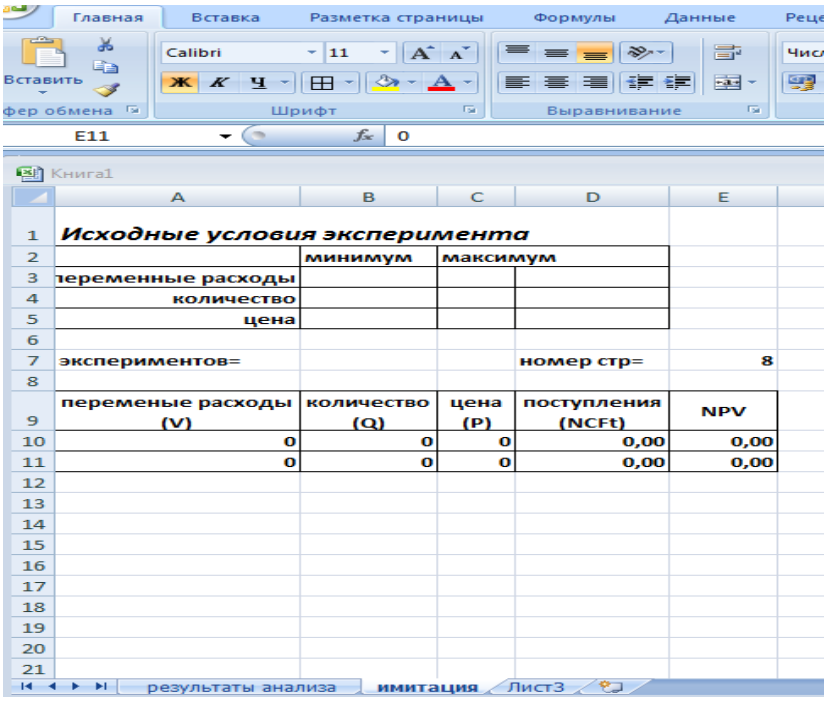
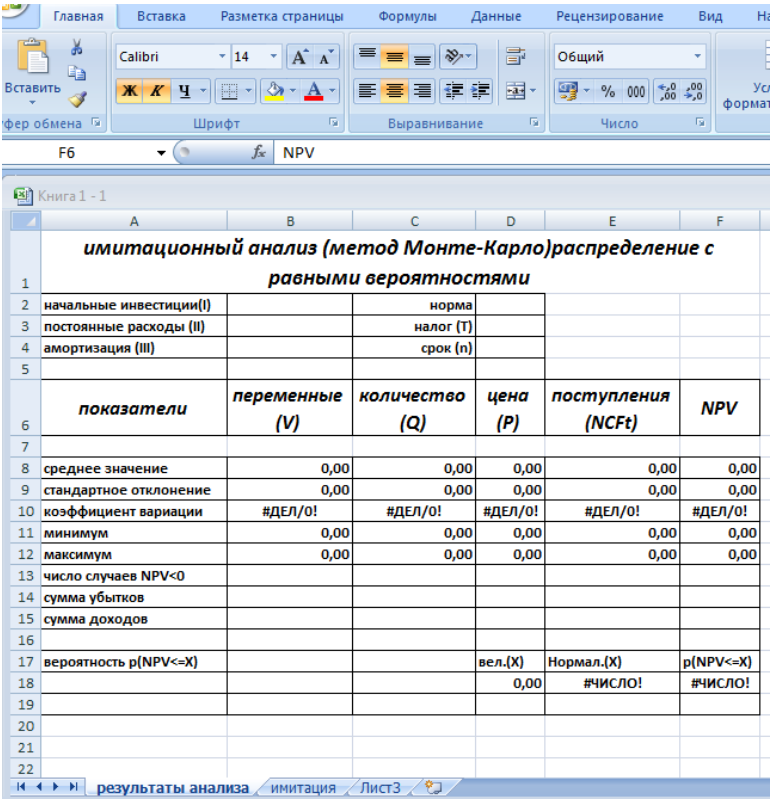


Рис. 80. Лист «Имитация»

Формулы в ячейках D10..E11 вычисляют величину потока платежей и его чистую современную стоимость соответственно. При этом значения постоянных переменных берутся из следующего листа шаблона – "Результаты анализа".

Лист "Результаты анализа" кроме значений постоянных переменных содержит также функции, вычисляющие параметры распределения изменяемых (*Q, V, P*) и результатных (*NCF*, *NPV*) переменных и вероятности различных событий. Определенные для данного листа формулы и собственные имена ячеек приведены в табл. 33, 34.

Общий вид листа показан на рис. 81.



	A	B	C	D	E	F
1	*имитационный анализ (метод Монте-Карло)распределение с равными вероятностями*					
2	начальные инвестиции(I)		норма			
3	постоянные расходы (II)		налог (T)			
4	амортизация (III)		срок (n)			
5						
6	*показатели*	*переменные (V)*	*количество (Q)*	*цена (P)*	*поступления (NCFt)*	*NPV*
7						
8	среднее значение	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	стандартное отклонение	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	коэффициент вариации	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
11	минимум	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	максимум	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	число случаев NPV<0					
14	сумма убытков					
15	сумма доходов					
16						
17	вероятность p(NPV<=X)			вел.(X)	Нормал.(X)	p(NPV<=X)
18				0,00	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
19						
20						
21						
22						

Рис. 81. Лист «Результаты анализа»

Таблица 33

Формулы листа «Имитация»

Ячейка	Формула
E7	=B7+10-2
A10	=СЛУЧМЕЖДУ($B$3;$C$3)
A11	=СЛУЧМЕЖДУ($B$3 ;$C$3)
BI0	=СЛУЧМЕЖДУ($B$4;$C$4)
B11	=СЛУЧМЕЖДУ($B$4;$C$4)
CI0	=СЛУЧМЕЖДУ($B$5 ;$C$5)
C11	=СЛУЧМЕЖДУ($B$5;$C$5)
D10	=(B 10*(C 10-A10)-Пост_расх-Аморт)*(1 - налог)+Аморт
D11	=(B 11 *(C11-A11)-Пост_расх-Аморт)*(1-Налог)+Аморт
E10	=ПЗ(Норма;Срок;-O10)-Нач инвест
E11	=ПЗ(Норма;Срок;-011)-Нач_инвест

Поскольку формулы листа содержат ряд новых функций, приведем необходимые пояснения. Функции МИН() и МАКС() вычисляют минимальное и максимальное значение для массива данных из блока ячеек, указанного в качестве их аргумента. Имена и диапазоны этих блоков приведены в табл. 34. Функция СЧЕТЕСЛИ) осуществляет подсчет количества ячеек в указанном блоке, значения которых удовлетворяют заданному условию. В данном случае, заданная в ячейке F13, эта функция осуществляет подсчет количества отрицательных значений NPV, содержащихся в блоке ячеек ЧСС (табл. 34). Механизм действия функции СУММЕСЛИ() аналогичен функции СЧЕТЕСЛИ(). Отличие заключается лишь в том, что эта функция суммирует значения ячеек в указанном блоке, если они удовлетворяют заданному условию.

Таблица 34

Формулы листа "Результаты анализа"

Ячейка	Формула
B8	=СРЗНАЧ(Перем расх)
B9	=СТАНДОТКЛОНП(Перем расх)
B10	=B9/B8
B11	=МИН(Перем_расх)
B12	=МАКС(Перем расх)
C8	=СРЗНАЧ(Количество)
C9	=СТАНДОТКЛОНП(Количество)
C10	=C9/C8
C11	=МИН(Количество)
C12	=МАКС(Количество)
D8	=СРЗНАЧ(Цена)
D9	=СТАНДОТКЛОНП(Цена)
D10	=Б9/Б8
D11	=МИН(Цена)
D12	=МАКС(Цена)
E8	=СРЗНАЧ(Поступления)
E9	=СТАНДОТКЛОНП(Поступления)
E10	=E9/E8
E11	=МИН(Поступления)
E12	=МАКС(Поступления)
F8	=СРЗНАЧ(ЧСС)
F9	=СТАНДОТКЛОНП(ЧСС)
F10	=F9/F8
F11	=МИН(ЧСС)
F12	=МАКС(ЧСС)
F13	=СЧЕТЕСЛИ(ЧСС;"<0")
F14	=СУММЕСЛИ(ЧСС;"<0")
F15	=СУММЕСЛИ(ЧСС;">0")
E18	=НОРМАЛИЗАЦИЯ(Б18;$F$8;$F$9)
F18	=НОРМСТРАСП(E18)

Таблица 35

Имена ячеек листа «Результаты анализа»

Адрес ячейки	Имя	Комментарии
B2	Нач_инвест	Начальные инвестиции
B3	Пост_расх	Постоянные расходы
B4	Аморт	Амортизация
D2	Норма	Норма дисконта
D3	Налог	Ставка налога на прибыль
D4	Срок	Срок реализации проекта

В данном случае, заданные в ячейках F14..F15, функции осуществляет подсчет суммы отрицательных (ячейка F14) и положительных (ячейка F14) значений *NPV*, содержащихся в блоке ЧСС.

Две последние формулы (ячейки E18 и F18) предназначены для проведения вероятностного анализа распределения *NPV* и требуют небольшого теоретического отступления.

В рассматриваемом примере мы исходим из предположения о независимости и равномерном распределении ключевых переменных *Q, V, P.* Однако какое распределение при этом будет иметь результатная величина – показатель *NPV*, заранее определить нельзя.

Одно из возможных решений этой проблемы – попытаться аппроксимировать неизвестное распределение каким-либо известным. При этом в качестве приближения удобнее всего использовать нормальное распределение. Это связано с тем, что в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей при выполнении определенных условий сумма большого числа случайных величин имеет распределение, приблизительно соответствующее нормальному.

В прикладном анализе для целей аппроксимации широко применяется частный случай нормального распределения – т. н. стандартное нормальное распределение. Математическое ожидание стандартно распределенной случайной величины *E* равно 0: *M(E)* = 0. График этого распределения симметричен относительно оси ординат, и оно характеризуется всего одним параметром - стандартным отклонением *s*, равным 1.

Приведение случайной переменной E к стандартно распределенной величине Z осуществляется с помощью т. н. нормализации – вычитания средней и последующего деления на стандартное отклонение. Как следует из формулы, величина Z выражается в количестве стандартных отклонений. Для вычисления вероятностей по значению нормализованной величины Z используются специальные статистические таблицы.

$$Z = \frac{E - M(E)}{\sigma(E)}.$$

В Excel подобные вычисления осуществляются с помощью статистических функций НОРМАЛИЗАЦИЯ() и НОРМСТРАСП(). Функция НОРМАЛИЗАЦИЯ (*x*; среднее; стандоткл) возвращает нормализованное значение *Z* величины *x,* на основании которого затем вычисляется искомая вероятность *p(E<x).* Она реализует соотношение (3.2). Функция требует задания трех аргументов: *x* – нормализуемое значение; среднее – математическое ожидание случайной величины *E*; станд. откл. – стандартное отклонение. Полученное значение *Z* является аргументом для следующей функции – НОРМСТРАСП().

Функция НОРМСТРАСП(Z) возвращает стандартное нормальное распределение, т. е. вероятность того, что случайная нормализованная величина *E* будет меньше или равна x. Она имеет всего один аргумент – *Z*, вычисляемый функцией НОРМАЛИЗАЦИЯ().

Нетрудно заметить, что эти функции следует использовать в тандеме. При этом наиболее эффективным и компактным способом их задания является указание функции НОРМАЛИЗАЦИЯ() в качестве аргумента функции – НОРМСТРАСП(), т. е.: =НОРМСТРАСП(НОРМАЛИЗАЦИЯ (x; среднее; станд_откл)).

С целью повышения наглядности, в проектируемом шаблоне функции заданы раздельно (ячейки E18 и F18).

Сформируйте данный шаблон и сохраните его на магнитном диске под именем SIMUL1.XLT. Для проведения имитационного эксперимента необходимо выполнить следующие шаги.

1. Ввести значения постоянных переменных (таблица) в ячейки B2..B4 и D2..D4 листа "Результаты анализа".
2. Ввести значения диапазонов изменений ключевых переменных в ячейки B3..C5 листа "Имитация".
3. Задать в ячейке B7 требуемое число экспериментов.
4. Установить курсор в ячейку A11 и вставить необходимое число строк в шаблон (номер последней строки будет вычислен в E7).
5. Скопировать формулы блока A10..E10 требуемое количество раз.
6. Перейти к листу "Результаты анализа" и проанализировать полученные результаты.

Рассмотрим реализацию выделенных шагов более подробно. Выполнение первых трех пунктов не должно вызвать особых затруднений. Введите значения постоянных переменных в ячейки B2.B4 листа "Результаты анализа". Введите значения диапазонов изменений ключевых переменных в ячейки B3..C5 листа "Имитация". Укажите в ячейке B7 число проводимых экспериментов, например - 500. Установите табличный курсор в ячейку AH.

На следующем шаге необходимо вставить в шаблон нужное количество строк (498). Однако выделение такого количества строк при помощи указателя мыши – достаточно трудоемкая операция. MS EXCEL предоставляет более эффективные процедуры для выполнения подобных операций. В частности, в данном случае можно воспользоваться операцией перехода, которую также удобно применять и для выделения больших диапазонов ячеек.

Нажмите функциональную клавишу [F5]. На экране появится окно диалога "Переход". Для перехода к нужному участку электронной таблицы достаточно указать в поле "Ссылка" адрес или имя соответствующей ячейки (блока). В данном случае, таким адресом будет любая ячейка последней вставляемой строки, номер которой вычислен в ячейке E7 (508). Например, в качестве адреса перехода может быть указана ячейка A508.

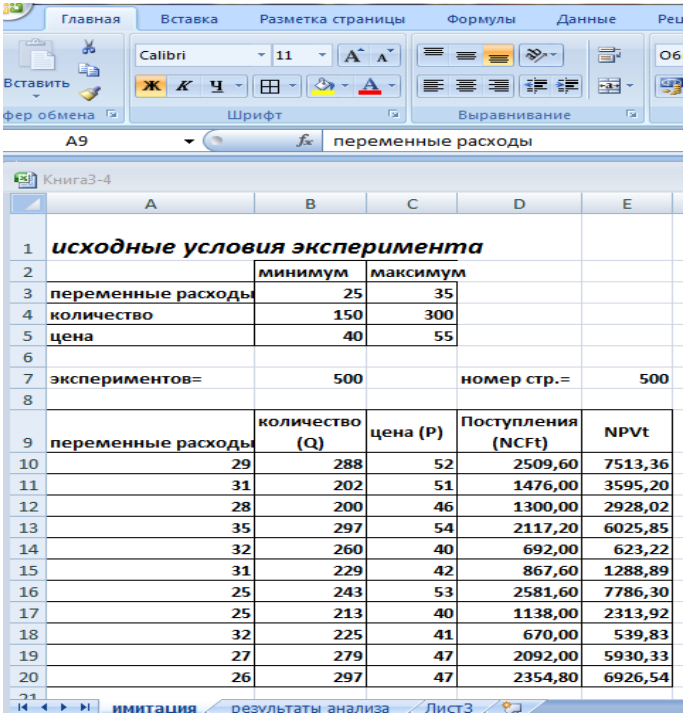
Введите в поле "Ссылка" адрес: A508 и нажмите комбинацию клавиш [SHIFT] + [ENTER]. Результатом выполнения этих действий будет выделение блока A11.A508.

После чего осуществите вставку строк любым из известных вам способов.

Теперь необходимо заполнить вставленные строки формулами блока ячеек A10.E10. Для этого выполните следующие действия:

1. Выделите и скопируйте в буфер блок ячеек A10.E10;
2. Нажмите комбинацию клавиш [CTRL] + [SHIFT] + [+];
3. Нажмите клавишу [ENTER];
4. Нажмите клавишу [F9].

Результатом выполнения этих действий будет заполнение блока A10..E509 случайными значениями ключевых переменных *V, Q, P* и результатами вычислений величин *NCF* и *NPV*. Фрагмент результатов имитации приведен на рис. 82. Соответствующие проведенному эксперименту результаты анализа приведены на рис. 83.

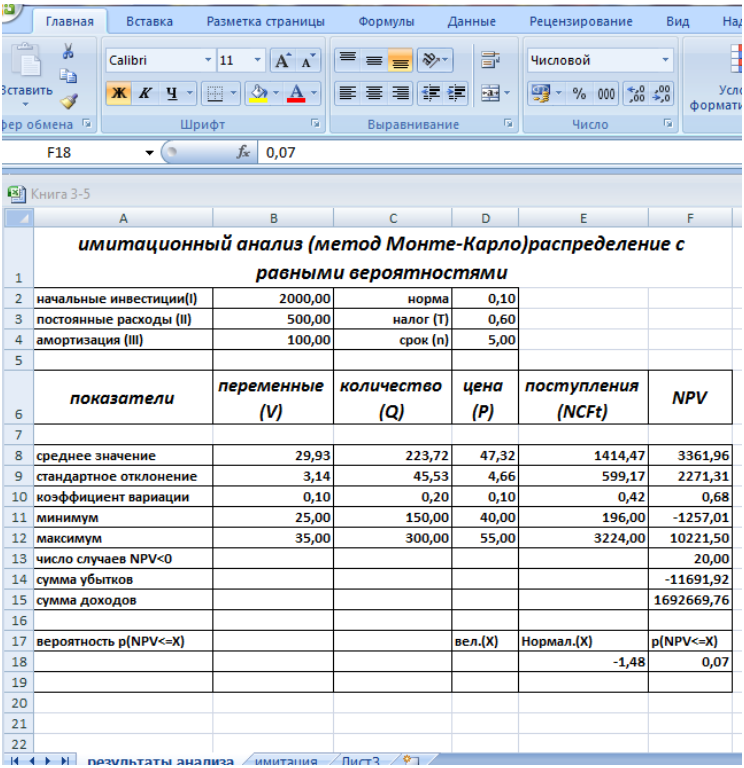


	A	B	C	D	E
1	***исходные условия эксперимента***				
2		**минимум**	**максимум**		
3	**переменные расходы**	**25**	**35**		
4	**количество**	**150**	**300**		
5	**цена**	**40**	**55**		
6					
7	**экспериментов=**	**500**		**номер стр.=**	**500**
8					
9	**переменные расходы**	**количество (Q)**	**цена (P)**	**Поступления (NCFt)**	**NPVt**
10	**29**	**288**	**52**	**2509,60**	**7513,36**
11	**31**	**202**	**51**	**1476,00**	**3595,20**
12	**28**	**200**	**46**	**1300,00**	**2928,02**
13	**35**	**297**	**54**	**2117,20**	**6025,85**
14	**32**	**260**	**40**	**692,00**	**623,22**
15	**31**	**229**	**42**	**867,60**	**1288,89**
16	**25**	**243**	**53**	**2581,60**	**7786,30**
17	**25**	**213**	**40**	**1138,00**	**2313,92**
18	**32**	**225**	**41**	**670,00**	**539,83**
19	**27**	**279**	**47**	**2092,00**	**5930,33**
20	**26**	**297**	**47**	**2354,80**	**6926,54**

Рис. 82. Результаты имитации

Сумма всех отрицательных значений NPV в полученной генеральной совокупности (ячейка F14) может быть интерпретирована как чистая стоимость неопределенности для инвестора в случае принятия проекта. Аналогично сумма всех положительных значений *NPV* (ячейка F15) может трактоваться как чистая стоимость неопределенности для инвестора в случае отклонения проекта. Несмотря на всю условность этих показателей, в целом они представляют собой индикаторы целесообразности проведения дальнейшего анализа.

В данном случае они наглядно демонстрируют несоизмеримость суммы возможных убытков по отношению к общей сумме доходов (–11691,92 и 1692669,76 соответственно).



Книга 3-5

	A	B	C	D	E	F
1	***имитационный анализ (метод Монте-Карло)распределение с равными вероятностями***					
2	начальные инвестиции(I)	2000,00	норма	0,10		
3	постоянные расходы (II)	500,00	налог (T)	0,60		
4	амортизация (III)	100,00	срок (n)	5,00		
5						
6	***показатели***	***переменные (V)***	***количество (Q)***	***цена (P)***	***поступления (NCFt)***	***NPV***
7						
8	среднее значение	29,93	223,72	47,32	1414,47	3361,96
9	стандартное отклонение	3,14	45,53	4,66	599,17	2271,31
10	коэффициент вариации	0,10	0,20	0,10	0,42	0,68
11	минимум	25,00	150,00	40,00	196,00	-1257,01
12	максимум	35,00	300,00	55,00	3224,00	10221,50
13	число случаев NPV<0					20,00
14	сумма убытков					-11691,92
15	сумма доходов					1692669,76
16						
17	вероятность p(NPV<=X)			вел.(X)	Нормал.(X)	p(NPV<=X)
18					-1,48	0,07
19						
20						
21						
22						

Рис. 83. Результаты анализа

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс «Математическое моделирование в технологии строительных материалов» ставит своей целью формирование профессиональной компетенции, позволяющей реализовывать материаловедческие и технологические задачи в математических терминах, обосновывать решения строительно-технологических задач и извлекать из результатов математического моделирования соответствующую инженерную информацию.

В производстве строительных материалов и конструкций как и во всех сегментах строительного кластера происходит процесс усложнения программных технических задач, научно-технических условий их решений, научно-технических подходов к созданию и исследованию новых материалов и технологий, средств реализации оптимальных инженерных решений, обеспечивающих эффективность труда, ресурсо-энергосбережение, гарантированное качество строительной продукции .

Усложнение основных объектов (материалов как конечной продукции, собственно технологических процессов и реализующих их аппаратов, технологических линий и комплексов, процессов создания новой техники и т. п.) приводит к прогрессирующему росту потерь от ошибочных или ненадежных решений по развитию и функционированию этих объектов. Для уменьшения вероятности таких ошибок необходимо, с одной стороны, основывать решения на рекомендациях фундаментальных и прикладных наук при системном подходе к объектам, с другой – использовать возможности вычислительной техники для всестороннего анализа объекта и выбора путей оптимизации его структуры, свойств, стоимостных и прочих характеристик. Диалектическая связь между этими сторонами процесса принятия инженерных решений обеспечивается математическими моделями исследуемого объекта и программным обеспечением.

В ходе поиска и анализа возможных решений по разработке конкурентоспособной строительной продукции, формированию оптимальной структуры материала, гарантирующие исключительно высокие эксплуатационные параметры готовых изделий и конструкций, организации предприятия стройиндустрии, целеполагающим является требование оптимальности

инвестиционного проекта. Выбор оптимальных решений особенно в сложных вероятностных динамических системах, к которым относятся строительные системы, немыслим без широкого применения математических методов решения экстремальных задач и средств вычислительной техники.

Математические методы не заменяют собой традиционные в технологии материалов физические, химические и другие методы познания, а дополняют и развивают их, обеспечивая качественно новый уровень технологических и материаловедческих знаний. Математизация строительного материаловедения представляет собой объективную закономерность развития и вызвана как потребностями практики (необходимость оптимального управления качеством строительных материалов в условиях непрерывного усложнения технологических ситуаций), так и внутренней логикой развития науки (стремлению к углубленному познанию и количественному описанию явлений).

Наличие в производственной, проектной или научной системе ЭВМ само по себе не решает проблемы компьютеризации. Для функционирования автоматизированных систем управления технологическими процессами, систем автоматизированного проектирования или автоматизированных систем научных исследований, необходимо их методическое и программное обеспечение, ориентированное на решение отраслевых инженерных задач строительного материаловедения и технологии. При этом определяющую роль в формировании надежных и полезных для научно-технической практики результатов играет этап математического моделирования объектов управления, проектирования, исследования. Эти математические модели могут быть разработаны исключительно при непосредственном участии инженеров-технологов по производству строительных материалов, изделий и конструкций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Адлер Ю. П., Маркова Е. В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. –М.: Наука, 1976.

2. *Алоян Р. М., Федосов С. В., Мизонов В. Е.* Теоретические основы математического моделирования механических и тепловых процессов в производстве строительных материалов. – Иваново, Ивановский ГАСУ, 2011.

3. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров. – М: Высш. шк., 1994.

4. *Андреева Е. А.* Математическое моделирование. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 2004.

5. *Баженов Ю. М.* Перспективы применения математических методов в технологии сборного железобетона. –М.: Стройиздат, 1974.

6. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. –М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006.

7. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. –М., Наука, 1994.

8. *Вабищевич П. Н.* Численное моделирование. – М.: МГУ, 1993.

9. *Варапаев В. Н.* Вычислительная аэро- и гидромеханика (основы конечно-разностных методов для численного решения задач аэро- и гидромеханики и теплообмена). –М.: МГСУ, 2011.

10. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.* Линейное программирование – М.: Факториал-Пресс, 2003.

11. *Ватутин В. А.* Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. –М.: Дрофа, 2003

12. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения –М.: Высш. шк., 2000.

13. *Вержбицкий В. М.* Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 2001.

14. *Вознесенский В. А.* Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. –М.: Финансы и статистика, 1981.

15. *Вознесенский В. А.* Численные методы: решения строительно-технологических задач на ЭВМ. –Киев: Вища шк., 1989.

16. *Воробьев В. А.* Применение физико-математических методов в исследовании свойств бетона. –М.: Высш. шк., 1977.

17. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшее образование, 2008.

18. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: Высш. шк., 2008.

19. *Горев, В. В.* Математическое моделирование при расчетах и исследованиях строительных конструкций-М.: Высш. школа, 2002

20. ГОСТ Р 50779.10-2000 (ИСО 3534.1-93). Вероятность и основы статистики. Статистические методы. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 2001

21. *Гранов, Г. С.* Экономико-математическое моделирование в решении организационно-управленческих задач в строительстве - М.: АСВ, 2004

22. *Гультяев А.* Визуальное моделирование в среде MATLAB: учебный курс – СПб: Питер, 2000.

23. *Джонсон, Н.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: - М.: Мир, 1981

24. *Ермаков, С.М.* Математическая теория оптимального эксперимента. –М.: Наука, 1987.

25. *Зарубин В. С.* Математическое моделирование в технике. –М.: МГТУ им. Баумана, 2001.

26. *Золотов А. Б., Акимов П. А., Сидоров В. Н., Мозгалёва М. Л.* Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: АСВ, 2010.

27. *Золотов А. Б., Акимов П. А., Сидоров В. Н., Мозгалёва М. Л.* Информатика в строительстве (с основами численного моделирования). – М.: «Архитектура-С», 2010.

28. *Золотов А. Б., Акимов П. А., Сидоров В. Н., Мозгалёва М. Л.* Математические методы в строительной механике. –М.: АСВ, 2008.

29. *Измаилов А. Ф.* Численные методы оптимизации. –М.: Физматлит, 2003.

30. *Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М.* Численные методы решения задач строительной механики. – М.: АСВ, 2005.

31. *Карпов В. В.* Математические модели задач строительного профиля и численные методы их исследования. – М.: АСВ, 1999.

32. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. –М: Мир, 1998.

33. *Киреев В. И., Пантелеев А. В.* Численные методы в примерах и задачах. – М: МАИ, 2000.

34. *Костомаров Д. П., Корухова Л. С., Мажелей С. Г.* Программирование и численные методы. –М.: МГУ, 2001.

35. *Краснощеков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. – М.: МГУ, 1983.

36. *Кух Х., Швабе И-Х., Пальцер У.* Производство бетонных изделий и сборных бетонных конструкций – способы и оборудование. – Дюссельдорф:, Bau-Technik, 2009.

37. *Лапчик М. П.* Численные методы. –М.: Академия, 2004.

38. Математическое моделирование и оптимизация химико-технологических процессов. /*Под ред. В. А. Холоднова*. –СПб.: Профессионал, 2003.

39. *Зиновьев А.А., Бороздин О.П., Алексеев А.В.* Математическое моделирование в строительно-технологических задачах. –Братск: ГОУВПО «БрГТУ», 2003.

40. Математическое моделирование. /*Под ред. Дж. Эндрюса, Р.Мак-Лоуна*. – М., Мир, 1979.

41. *Махинин Б. В.* Исследование свойств МЗБ на тонкомолотом пластифицированном портландцементе// Молодежь и научно-технический прогресс: Мат. конф. – Ч. 2., Владивосток, 1998.

42. *Мышкис А. Д.* Элементы теории математических моделей. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009.

43. *Пальцер У.* Новые возможности моделирования процессов обработки путем объединения моделирования частиц и потоков //16-ый Межд. Симпозиум IFF Веймар, 18–19.12.2009.

44. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: 2002.

45. *Перельмутер А. В., Сливкер В. И.* Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – Киев: Сталь, 2002.

46. *Плохотников К. Э.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Методология и практика. – М.: УРСС, 2003.

47. *Рохваргер А. Е.* Математическое планирование научно-технических исследований. –М.: Наука, 1975.

48. Руководство по подбору составов тяжелого бетона / НИИ бетона и Госстроя СССР. – М.: Стройиздат, 1979.

49. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование – Москва, Физматлит, 2008.

50. *Секулович М.* Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993.

51. *Сидоров В. Н., Ахметов В. К.* Математическое моделирование в строительстве. – М.: АСВ, 2007.

52. *Сливкер В. И.* Строительная механика. Вариационные основы. –М.: АСВ, 2005.

53. *Советов Б. Я., Яковлев С. А.* Моделирование систем. –М.: Высш. шк., 2001.

54. *Солдатенко Л. В.* Введение в математическое моделирование строительно-технологических задач. –Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009

55. *Турчак Л. И., Плотников П. В.* Основы численных методов. –М.: Физматлит, 2003.

56. *Харитонов А. М.* Модификация структуры и регулирование свойств цементных бетонов на основе использования отходов и попутных продуктов промышленности Дальнего Востока. – С-Пб.: ПГУПС, 2002.

57. *Хартман К. и др.* Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. –М.: Мир, 1977.

58. *Швабе И-Х.* Создание модели и моделирование процесса при конструировании производственного оборудования//16-ый Междун. Симпозиум IFF Веймар, 18–19.12.2009.

59. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. –М.: Ком-Книга, 2006.

60. *Яковис Л. М.* Многокомпонентные смеси для строительства: Расчетные методы оптимизации состава. –С-Пб.: Стройиздат, 1988.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ГЛОССАРИЙ

Абстрагирование – одна из основных мыслительных операций, позволяющая мысленно вычленить и превратить в самостоятельный объект рассмотрения отдельные стороны, свойства или состояния объекта в чистом виде.

Адекватность модели – требование к модели, состоящее в её способности воспроизводить свойства, состояние и поведение исследуемого объекта с достаточной для поставленных целей точностью и в достаточно широком диапазоне изменения её состояния и состояния её среды. Достаточным условием адекватности модели является её гомоморфизм исследуемому объекту.

Адекватность математической модели – соответствие (тождественность) уравнения регрессии реальным зависимостям исследуемого объекта (свойства).

Алгоритм – набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения результата решения задачи за конечное число действий. В старой трактовке вместо слова "порядок" использовалось слово "последовательность", но по мере развития параллельности в работе компьютеров слово "последовательность" стали заменять более общим словом "порядок". Это связано с тем, что работа каких-то инструкций алгоритма может быть зависима от других инструкций или результатов их работы. Таким образом, некоторые инструкции должны выполняться строго после завершения работы инструкций, от которых они зависят. Независимые инструкции или инструкции, ставшие независимыми из-за завершения работы инструкций, от которых они зависят, могут выполняться в произвольном порядке, параллельно или одновременно, если это позволяют используемые процессор и операционная система.

Алгоритмическое моделирование – разновидность имитационного моделирования с использованием универсального языка программирования (Паскаль, Бейсик или др.) и специальных алгоритмов. Более трудоемко по сравнению с применением моделирующих систем и технологий.

Аналитические модели – численно-математические модели, разрабатываемые для исследования структуры моделируемой системы. В математическом моделировании, как правило, имеют целью выявление резервов повышения эффективности функционирования моделируемой системы либо факторов, влияющих на исследуемые показатели, а также формы и степени их влияния.

Антимодальное распределение – многоугольник, обладающий посередине минимумом.

Апостериорное решение – в стохастических двухэтапных моделях – вектор оптимальных значений переменных, характеризующих задания, выполняемые после поступления информации о наступлении определённого случайного события, влияющего на результаты. Для каждого варианта (исхода) случайных событий предусматривается отдельное апостериорное решение.

Априорное решение – в стохастических двухэтапных моделях – вектор оптимальных значений переменных, характеризующих задания, требующие выполнения до поступления информации о случайных событиях, влияющих на ожидаемые результаты.

Баланс в математическом моделировании – уравнение или неравенство, устанавливающее соответствие между источниками ресурса и направлениями его использования. Уравнения используются, если имеющиеся источники ресурса должны быть использованы без остатка либо если наличие остатка влияет на ожидаемый эффект (требует затрат на утилизацию либо может быть с выгодой реализован). В противном случае балансы записываются в форме неравенств, согласно которым совокупное использование ресурса не превышает размера имеющихся его источников.

Векторное программирование – формализм, используемый для представления знаний о структуре моделируемых объектов в форме задачи векторного программирования.

Величина (физическая величина) – признак явления материала или вещества, который можно различить качественно и определить количественно

Вероятность – действительное число в интервале от 0 до 1, относящееся к случайному событию.

Взаимность в математическом моделировании – свойство задач, состоящее в инвариантности оптимального решения и инвариантности с точностью до масштаба множителей Лагранжа к замене целевой функции любым эффективным ограничением при дополнительном условии, что значение прежней целевой функции останется равным оптимальному.

Выбросы – наблюдения в выборке, отличающиеся от остальных по величине настолько, что возникает предположение, что они принадлежат другой совокупности или получены в результате ошибки измерения

Входные параметры – факторы, влияющие на исследуемые параметры.

Выборка – одна или несколько выборочных единиц, взятых из генеральной совокупности и предназначенных для получения информации о ней.

Выборочная дисперсия – одна из мер рассеяния, представляющая собой сумму квадратов отклонений наблюдений от их среднего арифметического, деленная на число наблюдений минус единица.

Для серии из n наблюдений $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ со средним арифметическим

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

выборочная дисперсия

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 .$$

Выборочная дисперсия – это несмещенная оценка дисперсии совокупности.

Выборочный коэффициент вариации – отношение выборочного стандартного отклонения к среднему арифметическому для неотрицательных признаков.

Выборочный коэффициент корреляции – частное от деления выборочной ковариации двух показателей на произведение
их выборочных стандартных отклонений

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Выборочное стандартное отклонение – положительный квадратный корень из выборочной дисперсии

Выходные параметры – параметры, получаемые в результате исследований, например, свойств бетонной смеси или бетона.

Дисперсия (случайной величины) – характеристика рассеивания (разбросанности) значения случайной величины около ее математического ожидания; математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины $S = \sigma^2$.

Доверительная вероятность – уровень доверия; величина $(1-\alpha)$ вероятность, связанная с доверительным интервалом или со статически накрываемым интервалом

Генеральная совокупность – множество всех рассматриваемых единиц.

Гистограмма – графическое представление распределения частот для количественного признака, образуемое соприкасающимися прямоугольниками, основаниями которых служат интервалы классов, а площади пропорциональны частотам этих классов

Гомоморфизм – одностороннее отношение подобия структур двух систем. Система называется гомоморфной другой системе, если можно указать отношение, отображающее любой допустимый вектор её переменных на вектор некоторых выбранных переменных другой системы, компоненты которого являются компонентами некоторого допустимого вектора её состояния. Обязательное требование к модели – её гомоморфизм моделируемому объекту.

Граф модели – объект имитационной модели, представляющий направленный граф, объединяющий все процессы имитационной модели независимо от количества уровней структурного анализа, генерируемый при структурном анализе процесса. Может иметь трехмерное "многослойное" изображение.

Двойственная оценка ограничения – величина, характеризующая прирост значения целевой функции задачи математического программирования при малом изменении величины свободного члена данного ограничения; частная производная оптимального значения целевой функции, рассматриваемого в качестве функции свободных членов ограничений задачи математического программирования, по величине свободного члена данного ограничения. Измеряется в единицах измерения целевой функции в расчёте на единицу измерения ограничения.

Действительное значение (величины) – значение величины, которое для данной цели можно рассматривать как истинное

Дескриптивные модели – модели, целью которых является формализованное представление знания о структуре моделируемого объекта.

Дисперсия адекватности – сумма квадратов отклонения экспериментальных данных от расчетных, деленная на число степеней свободы.

Дисперсия воспроизводимости – сумма квадратов отклонений результатов, полученных в опыте относительно среднего значения, деленная на число степеней свободы.

Динамическая модель – модель, в которой состояние объекта явно или неявно зависит от времени. Даже если на эту модель не воздействовать извне, то при движении времени в ней все равно будут изменяться выходные характеристики.

Доверительная вероятность – вероятность того, что исследуемая зависимость находится в пределах определенных границ.

Достоверное событие – событие, которое в результате опыта непременно должно произойти.

Дробная реплика – полуреплика (1/2), одна четвертая (1/4) реплики, одна восьмая (1/8) реплики и т. д., получаемая делением числа опытов ПФЭ соответственно на 2, 4, 8 и т. д.

Закон распределения – всякое соотношение, устанавливающее связь между всевозможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

"Звездные" точки – точки в планах второго порядка, дополняющие ядро.

Значимость коэффициента уравнения регрессии – условие, при котором найденные значения больше величины, характеризующей дисперсию воспроизводимости.

Значимый результат (на выбранном уровне значимости α) – результат статистической проверки, который приводит к отбрасыванию нулевой гипотезы, в противном случае – результат незначим.

Имитационная модель – специальный программный комплекс, позволяющий имитировать поведение сложного объекта. Он запускает в компьютере параллельные взаимодействующие вычислительные процессы, которые являются по своим временным параметрам (с точностью до масштабов времени и пространства) аналогами исследуемых процессов.

Имитационное моделирование – распространенная разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих посредством процессов-аналогов провести целенаправленное исследование структуры и функций реального сложного процесса в памяти компьютера в режиме "имитации", выполнить оптимизацию некоторых его параметров.

Интервал варьирования фактора – разность между наименьшими и наибольшими значениями фактора в эксперименте.

Истинное значение (величины) – значение, которое идеальным образом определяет величину при тех условиях, при которых эту величину рассматривают.

Квантиль (случайной величины) – значение случайной величины x_p, для которого функция распределения принимает значение p $(0 \le p \le 1)$.

Квартиль – квантиль порядка $p = 0{,}25$ или $p = 0{,}75$.

Корреляция – взаимозависимость двух или нескольких случайных величин в распределении двух или нескольких случайных величин.

Корреляционная зависимость – зависимость, когда одной независимой величине соответствует несколько переменных величин, варьирующих около своей средней величины.

Коэффициент вариации (случайной величины) – отношение стандартного отклонения к абсолютному значению математического ожидания случайной величины.

Коэффициент корреляции – величина, отражающая прямолинейную зависимость между двумя свойствами.

Кривая регрессии (*Y* по *X*) – для двух случайных величин *X* и *Y* кривая, отображающая зависимость условного математического ожидания случайной величины *Y* при условии $X = x$ для каждой переменной.

Кодированный фактор – условное обозначение фактора при проведении эксперимента.

Критерий Стьюдента (t-критерий) – параметр для оценки значимости коэффициентов в уравнении регрессии.

Критерий Фишера (F-критерий) – параметр для оценки адекватности уравнения.

Критерий эффективности – параметр, характеризующий эффективность технологического решения.

Линейное программирование – формализм, используемый для представления знаний о структуре моделируемых объектов в форме задачи отыскания экстремума линейной функции на множестве допустимых значений переменных, заданном системой линейных уравнений и (или) неравенств.

Линейный эффект – степень влияния данного фактора на выходной параметр, выражаемая коэффициентом регрессии при соответствующем факторе

Масштаб времени – число, которое задает длительность моделирования одной единицы модельного времени, пересчитанной в секунды, в секундах астрономического реального времени при выполнении модели.

Математическая модель – совокупность математических зависимостей, гомоморфная исследуемой системе, представляющая математическое описание объекта исследования в виде уравнения регрессии, используемого для суждения об его свойствах и поведении.

Математическая модель первого порядка – уравнение регрессии первой степени.

Математическая модель второго порядка – уравнение регрессии второй степени.

Математическое моделирование – метод исследования реальных объектов при помощи постановки экспериментов на их математических моделях, представляющее концентрированное выражение наиболее существенных взаимосвязей и закономерностей поведения исследуемой системы в математической форме

Математическое ожидание (случайной величины):

а) для дискретной величины X, принимающей значение x_i с вероятностями p_i, математическое ожидание определяют по формуле $\mu = M(X) = \sum px$;

б) для непрерывной случайной величины X, имеющей плотность $f(x)$, математическое ожидание определяют по формуле $\mu = M(X) = \int xf(x)dx$.

Математическое программирование – формализм, используемый для представления знаний о структуре моделируемых объектов в форме задачи отыскания экстремума на заданном множестве допустимых значений переменных.

Матрица планирования эксперимента – принятая упорядоченная форма записи условий проведения эксперимента с использованием различных сочетаний кодированных значений факторов (при замене кодированных значений натуральными такая матрица планирования называется рабочей).

Медиана геометрическая – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Медиана – квантиль порядка $p = 0{,}05$ или значение случайной непрерывной величины, для которого

$$P(X < Me) = P(X > Me)$$

Мода – наиболее вероятное значение случайной величины или значение случайной величины, при котором плотность распределения имеет максимум.

Модель – мысленно представимая или реально существующая система, которая на некотором этапе исследований замещает реальный объект и сохраняет одно или несколько наиболее важных свойств объекта, упрощённое подобие реального объекта, используемое для его исследования.

Наблюдаемое значение – значение данного признака, полученное в результате единичного наблюдения

Невозможное событие – противоположное достоверному событие, которое в данном опыте не может произойти.

Независимые события – такие события, когда появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Неограниченность целевой функции – ситуация, при которой множество допустимых значений переменных задачи математического программирования содержит значения, доставляющие сколь угодно большое значение целевой функции. Если имеет место неограниченность целевой функции, оптимального решения задачи не существует.

Несовместность системы ограничений – ситуация, при которой множество допустимых значений переменных задачи математического программирования пусто вследствие наличия взаимоисключающих уравнений или неравенств, определяющих это множество. Вследствие отсутствия допустимых значений при несовместности системы ограничений оптимального решения задачи не существует.

Несовместные события – события, которые в данном опыте не могут появиться вместе.

Неуправляемые факторы – входные параметры, которые в процессе исследования лишь фиксируются, но не могут быть целенаправленно изменены.

Объективно обусловленная оценка ресурса – величина прироста эффекта, обусловленного малым изменением доступного объёма ресурса или величины задания по выпуску продукции. При использовании математического моделирования численно равна двойственной оценке соответствующего ограничения. Измеряется в единицах измерения эффекта в расчёте на единицу ресурса.

Объем выборки – число выборочных единиц в выборке.

Оптимальный план – план, доставляющий максимум целевой функции, отражающей выбранный критерий эффективности функционирования объекта моделирования при соблюдении требований, заданных в форме системы уравнений и неравенств. Оптимальный план не обязательно является наилучшим планом, поскольку учитывает только те условия, которые прописаны в математической форме. Во многих случаях процесс планирования эксперимента требует использования информации, содержащейся во множестве разнообразных оптимальных планов.

Оптимизационная модель – математическая модель, имеющая форму задачи математического программирования с целью нахождения некоторого оптимума.

Отбор выборки – процесс извлечения или составления выборки

Относительная частота – частота, деленная на общее число событий или наблюдений.

Отсеивающие эксперименты – предварительные эксперименты, в результате которых для упрощения многофакторных зависимостей отбрасываются малозначимые факторы.

Ошибка результата (проверки) – результат проверки минус принятое нормальное значение величины

Параметр – величина, используемая в описании распределения вероятностей некоторой случайной величины

Плотность распределения (вероятностей) – первая производная, если она существует, функции распределения непрерывной случайной величины

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Поверхность регрессии (*Z* по *X* и *Y*) – для трех случайных величин X, Y, Z поверхность, отображающая зависимость условного математического ожидания случайной величины Z при условии $X = x$ и $Y = y$ для каждой пары переменных (x, y). *Полимодальное распределение* – многоугольник распределения, имеющий более одного максимума.

Полная группа событий – несколько событий в данном опыте образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из событий.

Полный факторный эксперимент – эксперимент, позволяющий выполнить все неповторяющиеся варианты опытов для различного числа факторов на двух уровнях варьирования.

Практически достоверное событие – событие, достоверность которого близка к единице.

Практически невозможное событие – событие, вероятность которого близка к нулю.

Признак – свойство, которое помогает идентифицировать или различать единицы данной генеральной совокупности.

Произведение нескольких событий – событие, происходящее в совместном появлении всех этих событий.

Противоположное событие – два несовместных события, образующих полную группу.

Равновозможные события – события, по условиям симметрии ни одно из которых не является объективно более возможным, чем другое.

Равномерное распределение (прямоугольное распределение) – распределение вероятностей непрерывной случайной величины, плотность распределения вероятности которой постоянна на конечном интервале $[ab]$ и равна нулю вне его.

Размах выборки – разность между наибольшим и наименьшим наблюденными значениями количественного признака в выборке.

Распределение – функция, определяющая вероятность того, что случайная величина примет какое-либо заданное значение или будет принадлежать заданному множеству значений.

Распределение частот – эмпирическое отношение между значениями признака и его частотами или его относительными частотами.

Результат проверки – значение некоторого признака, полученное применением определенного метода проверки.

Ротатабельный план – план, в котором экспериментальные точки лежат не менее чем на двух сферах, а значения выходного параметра в области исследования от (–1) до (+1) имеют минимальную дисперсию».

Середина размаха (выборки) – среднее арифметическое между наибольшим и наименьшим наблюденными значениями количественного признака.

Синтетические модели – математические модели, разрабатываемые для проектирования новых, отличающихся от известных, систем с заданными свойствами. К числу синтетических математических моделей относятся, например, модели формирования инвестиционных программ.

Систематическая ошибка результата (проверки) – компонент ошибки результата, который остается постоянным или закономерно изменяется в ходе получения результатов проверки для одного признака.

Системный анализ – метод научного познания, являющийся необходимой предпосылкой метода математического моделирования, нацеленный на установление структуры исследуемой системы

Случайная ошибка результата (проверки) – компонент ошибки, который изменяется непредвиденным образом в ходе получения результатов проверки одного признака.

Смещение (результата проверки) – разность между математическим ожиданием результатов проверки и принятым нормальным значением

Событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Совместные события – события, которые в результате опыта могут появиться вместе.

Средний размах (выборок) – среднее арифметическое отклонение от начала координат, когда все отклонения имеют положительный знак.

Среднеквадратическое отклонение – корень квадратный из дисперсии.

Стандартное отклонение (случайной величины) – положительный корень из значения дисперсии $\sigma = \sqrt{S}$.

Степень свободы – в общем случае число слагаемых минус число ограничений, налагаемых на них

Столбиковая диаграмма – графическое представление распределения частот или дискретной случайной величины, образуемое набором столбцов равной ширины, высоты которых пропорциональны частотам

Стохастические двухэтапные модели – математические модели, содержащие переменные, описывающие план, реализуемый до поступления информации о случайных условиях (априорное решение) и варианты планов, зависящих от поступившей информации о случайных условиях (апостериорное решение).

Сумма нескольких событий – событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий

Теоретическая модель – математическая модель, описывающая структуру исследуемого объекта в общем виде, без спецификации конкретных числовых значений параметров.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях (событиях).

Точность (результата проверки) – близость результата проверки к принятому нормальному значению величины

Управляемые факторы – входные параметры, которые в процессе исследования могут быть целенаправленно изменены в заданных пределах.

Уровни варьирования – уровни изменения факторов

Уровень значимости (критерия) – заданное значение верхнего предела вероятности ошибки первого рода.

Устойчивость оптимального плана – свойство математических моделей, имеющих форму задачи линейного программирования, состоящее в неизменности двойственных оценок ограничений при изменениях свободных членов ограничений в определённых пределах и в неизменности значений переменных при изменениях параметров целевой функции в определённых пределах.

Факторный эксперимент – эксперимент, в котором по определенным правилам могут одновременно изменяться все факторы

Формализм – (1) знаковая система, используемая для представления знаний; (2) совокупность языковых и процедурных (вычислительных) средств представления знаний.

Форма представления систем – класс символьных представлений знаний о системе, выделяемый по признаку применимости для решения определённого круга исследовательских или прикладных задач.

Функциональная зависимость – зависимость, когда каждой отдельной величине соответствует строго определенная другая величина.

Функция распределения – функция, задающая для любого значения x вероятность того, что случайная величина X меньше или равна x

$$F(x) = P[X \le x].$$

Целевая функция – математическое выражение, отражающее выбранный критерий эффективности функционирования исследуемой системы в её математической модели.

Центрированная случайная величина – случайная величина, математическое ожидание которой равно 0

Центр эксперимента – условия проведения эксперимента при нулевых значениях кодированных факторов.

Частота – число наступлений события данного типа или число наблюдений, попавших в данный класс

Эконометрические модели – математические модели, целью которых является установление значений параметров исследуемой системы, не поддающихся непосредственному наблюдению. Как правило, представляют собой эмпирическую спецификацию теоретической модели исследуемой системы, содержащей требуемый параметр, которую оценивают на основе имеющихся эмпирических данных с помощью того или иного статистического метода (например, метода наименьших

квадратов, метода оболочки данных, метода максимальной энтропии и т. п.).

Эмпирическая модель – математическая модель, содержащая числовые параметры, значения которых обоснованы данными опыта или наблюдения.

Эффект взаимодействия – член уравнения регрессии, характеризующий одновременное влияние двух или более факторов.

Ядро плана – ПФЭ или дробная реплика в планах второго порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1

Пример достраивания матриц ПФЭ для k=2–5

Точки плана *u*	факторы				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	+1	+1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1	+1	+1
3	-1	+1	+1	+1	+1
4	-1	-1	+1	+1	+1
5	+1	+1	-1	+1	+1
6	+1	-1	-1	+1	+1
7	-1	+1	-1	+1	+1
8	-1	-1	-1	+1	+1
9	+1	+1	+1	-1	+1
10	+1	-1	+1	-1	+1
11	-1	+1	+1	-1	+1
12	-1	-1	+1	-1	+1
13	+1	+1	-1	-1	+1
14	+1	-1	-1	-1	+1
15	-1	+1	-1	-1	+1
16	-1	-1	-1	-1	+1
17	+1	+1	+1	+1	-1
18	+1	-1	+1	+1	-1
19	-1	+1	+1	+1	-1
20	-1	-1	+1	+1	-1
21	+1	+1	-1	+1	-1
22	+1	-1	-1	+1	-1
23	-1	+1	-1	+1	-1
24	-1	-1	-1	+1	-1
25	+1	+1	+1	-1	-1
26	+1	-1	+1	-1	-1
27	-1	+1	+1	-1	-1
28	-1	-1	+1	-1	-1
29	+1	+1	-1	-1	-1
30	+1	-1	-1	-1	-1
31	-1	+1	-1	-1	-1
32	-1	-1	-1	-1	-1

Таблица Б.2

Матрица дробного плана 2^{5-1}

Точки плана u	Факторы						Парные взаимодействия									Выходной параметр y_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_1x_5	x_2x_3	x_2x_4	x_2x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
2	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_2
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_3
4	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_4
5	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_5
6	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_6
7	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_7
8	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8
9	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_9
10	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{10}
11	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{11}
12	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	1	+1	Y_{12}
13	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_{13}
14	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{14}
15	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{15}
16	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{16}

Таблица Б.3

Матрица ротатабельного плана для k = 3

Точки плана u		Матрица планирования			Квадраты переменных			Взаимодействие факторов			Выходной параметр
		X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	Yi
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	Y_2
	3	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	Y_3
	4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	Y_4
	5	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	Y_5
	6	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	Y_6
	7	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	Y_7
	8	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8
N_α	9	+1,682	0	0	+2,828	0	0	0	0	0	Y_9
	10	-1,682	0	0	+2,828	0	0	0	0	0	Y_{10}
	11	0	+1,682	0	0	+2,828	0	0	0	0	Y_{11}
	12	0	-1,682	0	0	+2,828	0	0	0	0	Y_{12}
	13	0	0	+1,682	0	0	+2,828	0	0	0	Y_{13}
	14	0	0	-1,682	0	0	+2,828	0	0	0	Y_{14}
n_o	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{15}
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{16}
	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{17}
	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{18}
	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{19}
	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{20}

Таблица Б.4

Матрица ротатабельного плана для $k = 4$

Точки плана u		Матрица планирования				Квадраты переменных				Взаимодействие факторов						Выходной параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4	
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_2
	3	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_3
	4	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_4
	5	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
	6	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_6
	7	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	Y_7
	8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	Y_8
	9	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_9
	10	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{10}
	11	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{11}
	12	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{12}
	13	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_{13}
	14	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{14}
	15	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{15}
	16	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{16}
N_α	17	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{17}
	18	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{18}
	19	0	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{19}
	20	0	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{20}
	21	0	0	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	Y_{21}
	22	0	0	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	Y_{22}
	23	0	0	0	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	Y_{23}
	24	0	0	0	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	Y_{24}
n_o	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{25}
	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{26}
	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{27}
	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{28}
	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{29}
	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{30}
	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$Y3_1$

Таблица Б.5

Матрица ротатабельного плана для $k = 5$

Точки плана u		Матрица планирования				Квадраты переменных				Взаимодействие факторов						Выходной параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_1 X_4$	$X_2 X_3$	$X_2 X_4$	$X_3 X_4$	
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_2
	3	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_3
	4	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_4
	5	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
	6	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_6
	7	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	Y_7
	8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	Y_8
	9	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_9
	10	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{10}
	11	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{11}
	12	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{12}
	13	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_{13}
	14	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{14}
	15	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{15}
	16	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{16}
N_α	17	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{17}
	18	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{18}
	19	0	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{19}
	20	0	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{20}
	21	0	0	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	Y_{21}
	22	0	0	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	Y_{22}
	23	0	0	0	+2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	Y_{23}
	24	0	0	0	-2	0	0	0	+4	0	0	0	0	0	0	Y_{24}
n_o	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{25}
	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{26}
	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{27}
	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{28}
	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{29}
	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{30}
	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$Y3_1$

Таблица Б. 6

Матрица плана Бокса-Бенкина для $k = 3$

Точки плана u		Матрица планирования			Квадраты переменных			Взаимодействие факторов			Выходной параметр
		X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	Yi
	1	+1	+1	0	+1	+1	0	+1	0	0	Y_1
	2	+1	-1	0	+1	+1	0	-1	0	0	Y_2
	3	-1	+1	0	+1	+1	0	-1	0	0	Y_3
	4	-1	-1	0	+1	+1	0	+1	0	0	Y_4
	5	+1	0	+1	+1	0	+1	0	+1	0	Y_5
	6	+1	0	-1	+1	0	+1	0	-1	0	Y_6
	7	-1	0	+1	+1	0	+1	0	-1	0	Y_7
	8	-1	0	-1	+1	0	+1	0	+1	0	Y_8
	9	0	+1	+1	0	+1	+1	0	0	+1	Y_9
	10	0	+1	-1	0	+1	+1	0	0	-1	Y_{10}
	11	0	-1	+1	0	+1	+1	0	0	-1	Y_{11}
	12	0	-1	-1	0	+1	+1	0	0	+1	Y_{12}
n_o	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{13}
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{14}
	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{15}

Таблица Б.7

Матрица плана Бокса-Бенкина для $k = 4$

Точки плана u		Матрица планирования				Квадраты переменных				Взаимодействие факторов						Выходной параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4	
N_1	1	+1	+1	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	Y_1
	2	+1	-1	0	0	+1	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	Y_2
	3	-1	+1	0	0	+1	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	Y_3
	4	-1	-1	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	Y_4
	5	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	Y_5
	6	+1	0	-1	0	+1	0	+1	0	0	-1	0	0	0	0	Y_6
	7	-1	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	-1	0	0	0	0	Y_7
	8	-1	0	-1	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	Y_8
	9	0	+1	+1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	+1	0	0	Y_9
	10	0	+1	-1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	0	0	Y_{10}
	11	0	-1	+1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	0	0	Y_{11}
	12	0	-1	-1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	+1	0	0	Y_{12}
	13	0	0	+1	+1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	+1	Y_{13}
	14	0	0	+1	-1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	-1	Y_{14}
	15	0	0	-1	+1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	-1	Y_{15}
	16	0	0	-1	-1	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	+1	Y_{16}
	17	+1	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	Y_{17}
	18	+1	0	0	-1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	Y_{18}
	19	-1	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	Y_{19}
	20	-1	0	0	-1	+1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0	Y_{20}
	21	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	-1	0	+1	0	Y_{21}
	22	0	+1	0	-1	0	+1	0	+1	0	0	-1	0	-1	0	Y_{22}
	23	0	-1	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	-1	0	Y_{23}
	24	0	-1	0	-1	0	+1	0	+1	0	0	0	0	+1	0	Y_{24}
n_o	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{25}
	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{26}
	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{27}

Таблица Б 8

Матрица плана Бокса-Бенкина для k = 5

Точки плана u		Матрица планирования					Квадраты переменных					Взаимодействие факторов										Выходной Параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_1X_5	X_2X_3	X_2X_4	X_2X_5	X_3X_4	X_3X_5	X_4X_5	
N_1	1	+1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_1
	2	+1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_2
	3	-1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_3
	4	-1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_4
	5	+1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_5
	6	+1	0	-1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_6
	7	-1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_7
	8	-1	0	-1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_8
	9	0	+1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	Y_9
	10	0	+1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	Y_{10}
	11	0	-1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	Y_{11}
	12	0	-1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	Y_{12}
	13	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	Y_{13}
	14	0	0	+1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	Y_{14}
	15	0	0	-1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	Y_{15}
	16	0	0	-1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	Y_{16}
N_α	17	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	Y_{17}
	18	+1	0	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	Y_{18}
	19	-1	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	Y_{19}
	20	-1	0	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	Y_{20}
	21	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	Y_{21}
	22	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	Y_{22}
	23	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	Y_{23}
	24	0	-1	0	-1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	Y_{24}
	25	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	Y_{25}
	26	0	+1	0	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	Y_{26}
n_o	27	0	-1	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	Y_{27}
	28	0	-1	0	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	Y_{28}
	29	0	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	Y_{29}
	30	0	0	0	+1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	Y_{30}
	31	0	0	0	-1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	Y_{31}
	32	0	0	0	-1	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	Y_{32}
	33	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	Y_{33}
	34	0	0	+1	0	-1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	Y_{34}

Продолжение таблица Б 8

Точки лана u		Матрица планирования					Квадраты переменных					Взаимодействие факторов										Выходной Параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_1X_5	X_2X_3	X_2X_4	X_2X_5	X_3X_4	X_3X_5	X_4X_5	
	35	0	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	Y_{35}
	36	0	0	-1	0	-1	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	Y_{36}
	37	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	Y_{37}
	38	+1	0	0	0	-1	+1	0	0	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	Y_{38}
	39	-1	0	0	0	+1	+1	0	0	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	Y_{39}
	40	-1	0	0	0	-1	+1	0	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	Y_{40}
	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{41}
	42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{42}
	43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{43}
	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{44}
	45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{45}
	46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{46}

Таблица Б.9

Матрица трехуровневого плана для $k = 2$

Точки плана u		Матрица планирования		Квадраты переменных		Взаимодействие факторов	Выход-ной параметр
		X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	Yi
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	+1	-1	+1	+1	-1	Y_2
	3	-1	+1	+1	+1	-1	Y_3
	4	-1	-1	+1	+1	+1	Y_4
$N\alpha$	5	+1	0	+1	0	0	Y_5
	6	-1	0	+1	0	0	Y_6
	7	0	+1	0	+1	0	Y_7
	8	0	-1	0	+1	0	Y_8
n_o	9	0	0	0	0	0	Y_9
	10	0	0	0	0	0	Y_{10}
	11	0	0	0	0	0	Y_{11}

Таблица Б.10

Матрица трехуровневого плана для $k = 3$

Точки плана u		Матрица планирования			Квадраты переменных			Взаимодействие факторов			Выходной параметр
		X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	Yi
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	Y_2
	3	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	Y_3
	4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_4
	5	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
	6	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	Y_6
	7	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	Y_7
	8	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	Y_8
$N\alpha$	9	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	Y_9
	10	-1	0	0	+1	0	0	0	0	0	Y_{10}
	11	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	Y_{11}
	12	0	-1	0	0	+1	0	0	0	0	Y_{12}
	13	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0	Y_{13}
	14	0	0	-1	0	0	+1	0	0	0	Y_{14}
n_o	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{15}
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{16}
	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{17}

Таблица Б.11

Матрица плана B_4 для $k = 4$

Точки плана u		Матрица планирования				Квадраты переменных				Взаимодействие факторов						Выходной параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4	
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_2
	3	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_3
	4	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_4
	5	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
	6	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_6
	7	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_7
	8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_8
	9	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_9
	10	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{10}
	11	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{11}
	12	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{12}
	13	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	Y_{13}
	14	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	Y_{14}
	15	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{15}
	16	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{16}
$N\alpha$	17	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{17}
	18	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{18}
	19	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{19}
	20	0	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{20}
	21	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	Y_{21}
	22	0	0	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	Y_{22}
	23	0	0	0	+1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	Y_{23}
	24	0	0	0	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	Y_{24}

Таблица Б.12

Матрица плана B_5 для $k = 5$

Точки плана u		Матрица планирования					Квадраты переменных					Взаимодействие факторов										Выходной параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_1X_5	X_2X_3	X_2X_4	X_2X_5	X_3X_4	X_3X_5	X_4X_5	
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_2
	3	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_3
	4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_4
	5	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
	6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_6
	7	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_7
	8	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_8
	9	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_9
	10	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{10}
	11	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{11}
	12	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{12}
	13	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_{13}
	14	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{14}
	15	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{15}
	16	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{16}
	17	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{17}
	18	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{18}
	19	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{19}
	20	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_{20}
	21	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{21}
	22	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{22}
	23	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{23}
	24	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_{24}
	25	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_{25}
	26	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{26}
	27	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{27}
	28	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_{28}
	29	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_{29}
	30	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{30}
	31	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{31}
	32	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{32}

Продолжение табл.Б.12

N_α	33	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{33}
	34	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{34}
	35	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{35}
	36	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{36}
	37	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{37}
	38	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{38}
	39	0	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{39}
	40	0	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{40}
	41	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{41}
	42	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{42}

Таблица Б.13

Матрица плана H5, близкого к D-оптимальному для $k = 5$

Точки плана	u	Матрица планирования					Квадраты переменных					Взаимодействие факторов										Выходной Параметр Yi
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_1X_5	X_2X_3	X_2X_4	X_2X_5	X_3X_4	X_3X_5	X_4X_5	
N_1	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_1
	2	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_2
	3	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	Y_3
	4	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_4
	5	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
	6	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_6
	7	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	Y_7
	8	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_8
	9	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_9
	10	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{10}
	11	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	Y_{11}
	12	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_{12}
	13	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{13}
	14	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{14}
	15	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_{15}
	16	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	Y_{16}
N_α	17	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{17}
	18	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{18}
	19	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{19}
	20	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{20}
	21	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{21}
	22	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{22}
	23	0	0	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{23}
	24	0	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{24}
	25	0	0	0	0	+1	0	0	0		+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{25}
	26	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{26}
n_o	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{27}

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица В.1

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы $к$	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,00
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,93
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,6	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица В.2

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы κ	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область					
	0,10/0,9	0,05/0,95	0,02/0,98	0,01/0,99	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,2	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,83	3,53	3,82
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,52	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,60
28	170	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,60
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	2,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица В.3

Критические точки распределения F-Фишера-Снедекора
(κ_1 – число степеней свободы большей дисперсии,
κ_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

Степень свободы κ_2	Степень свободы κ_1								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
Уровень значимости p = 0,05									
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,9	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,7
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,5
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,4
11	4,9	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,3
12	4,,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,2
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,1
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,0
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Таблица В. 4

Значение критерия Кохрена *G* для различных уровней значимости

Число выборок *к*	Число степеней свободы f_1													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
Уровень значимости p = 0,05														
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4784	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,430	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	O,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111

Продолжение таблицы В. 4

Число выборок κ	Число степеней свободы f_1													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
Уровень значимости p = 0,05														
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,552	0,0520	0,0487	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0532	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,008
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Продолжение таблицы В. 4

число выборок κ	Число степеней свободы f_1													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
	Уровень значимости p = 0,01													
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8998	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,9933	0,9423	0,8831	0,8335	0,7933	0,7606	0,7335	0,7107	0,6912	0,6743	0,6059	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,9676	0,8643	0,7814	0,7212	0,6761	0,6410	0,6129	0,5897	0,5702	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,8828	0,7218	0,6258	0,5635	0,5195	0,4866	0,4608	0,4401	0,4229	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,8376	0,6644	0,5685	0,5080	0,4659	0,4347	0,4105	0,3911	0,3751	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704	0,3552	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,7544	0,5727	0,4810	0,4251	0,3870	0,3592	0,3378	0,3207	0,3067	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,7175	0,5358	0,4469	0,3934	0,3572	0,3308	0,3106	0,2945	0,2813	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000

Продолжение таблицы В. 4

число выборок k	Число степеней свободы f_1													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
	Уровень значимости p = 0,01													
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	0,5747	0,4069	0,3317	0,2882	0,2593	0,2386	0,2228	0,2104	0,2002	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,4799	0,3297	0,2654	0,2288	0,2048	0,1877	0,1748	0,1646	0,1567	0,1501	0,1248	0,0760	0,0709	0,0500
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495	0,1406	0,1338	0,1283	0,1960	0,0810	0,0595	0,0417
30	0,3632	0,2412	0,1913	0,1635	0,1454	0,1327	0,1232	0,1157	0,1100	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,1225	0,0759	0,0585	0,0489	0,0429	0,0387	0,0357	0,0334	0,0316	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица В.5

Отношение дисперсии по F – критерию Фишера

Степень Свободы κ_2	Степень свободы κ_1												
	1	2	3	4	5	6	8	10	12	20	24	50	∞
Уровень значимости p = 0,05													
1	161	200	216	225	230	234	239	224	245	248	250	252	254
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,37	19,39	19,4	19,45	19,5	19,47	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,84	8,78	8,7	8,66	8,6	8,58	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,04	5,96	5,9	5,8	5,8	5,7	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,82	4,74	4,7	4,56	4,5	4,44	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,15	4,06	4,0	3,87	3,8	3,75	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3.75	3.66	3,6	3.47	3,4	3.35	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,44	3,35	3,3	3,15	3,1	3,03	2,7
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3.24	3.15	3,1	2.95	2,9	2.83	2,5
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,07	2,98	2,9	2,77	2,7	2,64	2,4
11	4,9	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2.97	2.88	2,8	2.67	2,6	2.54	2,3
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2.87	2.78	2,7	2.57	2,5	2.44	2,2
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2.77	2.68	2,6	2.47	2,4	2.34	2,1
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2.77	2.63	2,5	2.37	2,3	2.24	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,64	2,54	2,5	2,33	2,3	2,18	2,0
16	4,5	3,64	3,25	3,0	2,86	2,75	2,63	2,51	2,4	2,29	2,2	2,14	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2.6	2.5	2,4	2.27	2,2	2.14	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2.57	2.43	2,3	2.17	2,1	2.04	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2.5	2.4	2,3	2.17	2,1	2.04	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,45	2,4	2,3	2,16	2,1	1,96	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2.45	2.36	2,2	2.06	2,0	1.9	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2.38	2.27	2,2	2.06	2,0	1.85	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2.38	2.27	2,2	2.06	2,0	1.85	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2.35	2.3	2,1	2.06	1,9	1.8	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2.35	2.3	2,1	2.06	1,9	1.75	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,25	2.2	2,0	1,84	1,8	1,66	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	2.23	2.16	1,9	1.77	1,7	1.55	1,4
100	3,94	3,1	2,7	2,46	2,3	2,2	2,03	1,92	1.87	1,68	1.65	1,48	1,28
120	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,91	1,83	1,8	1,57	1,5	1,35	1,0

Содержание

	Введение ……..…	3
1.	Теоретические основы математического моделирования в технологии бетона ……..…	7
1.1.	Понятие модели и моделирования ……	7
1.2.	Оптимизационное моделирование в технологии бетона ……...	13
1.3.	Корреляционно-регрессионный анализ ……	18
1.4.	Компьютерное моделирование в технологии бетона ……	25
1.5.	Имитационное моделирование в технологии бетона ……..……..	33
1.6.	Инструменты математического моделирования	42
2.	Планирование эксперимента ……..	66
2.1.	Планирование эксперимента для получения линейных и неполных квадратичных зависимостей ……	70
2.2.	Планирование эксперимента при исследовании полных квадратичных зависимостей …….	73
2.3.	Статистический анализ уравнений регрессии …	79
2.4.	Анализ математических моделей ……	86
3.	Практические приложения математического моделирования в технологии бетона ……...	90
3.1.	Пример оптимизационного моделирования ….	90
3.2.	Пример корреляционно-регрессионного анализа …….	100
3.3.	Пример линейного моделирования ……	107
3.4.	Пример нелинейного моделирования ……	114
3.5.	Пример ротатабельного моделирования …….	124
3.6.	Пример полного факторного эксперимента …..	131
3.7.	Пример графического моделирования ……..	140
3.8.	Пример структурно-имитационного моделирования …….	148
3.9.	Пример имитационного моделирования бизнес-процессов ……..	163
	Заключение ……...	177
	Библиографический список ……	179

Приложение А …… 183
Приложение Б …… 198
Приложение В …… 212
Содержание …… 220

Учебное издание

Клара Кажахметовна Абдрахманова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕХНОЛОГИИ БЕТОНА

Учебное пособие

Нач. ОППНП РУ ДСО *З. А. Губайдулина*
Редактор *Г. М. Дюсенбаева*
Компьютерная верстка *А. С. Сайбулатова*

Подписано в печать 24.05.2017 г.
Тираж 300 экз. Формат 60x84x 1/16. Бумага типогр. № 1.
Уч.-изд.л. 13.8. Усл. п.л. 12,9. Заказ № 821. Цена договорная.

Издание Казахского национального исследовательского технического университета имени К. И. Сатпаева
Департамент по связям с общественностью КазНИТУ
Издательское управление
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-323-072-6

