

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К.И. Сатпаева

М.Д. Адамбаев

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ТЕХНИЧЕСКОГО
ЭКСПЕРИМЕНТА В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ**

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан в качестве учебника

Алматы 2013

УДК 001.891.57:621.311.(075)

ББК 30. 2 я 73

А 281

А 281 Адамбаев М.Д. Теория и практика технического эксперимента в электроэнергетике. Учебник. – Алматы: КазНТУ, 2013 – 237 с.

Ил. 67. Табл. 21. Библиогр. – 30 назв.

ISBN 978–601–228–412–6

Учебник содержит систематизированное изложение основных вопросов, связанных с теорией и практикой технического эксперимента, позволяющих получить адекватные математические модели промышленных объектов управления. Значительное место уделено методам идентификации объектов на основе использования результатов как активного, так и пассивного экспериментов. Алгоритмы решения рассмотренных методов доведены до получения количественных результатов. При изложении материала широко использованы примеры из области электроэнергетики.

Учебник предназначен для магистрантов вузов специальности 6М071800 «Электроэнергетика».

Рецензенты:

Цеховой А.Ф. – 1-й вице-Президент и Генеральный директор

МАИН, д-р техн. наук, проф.;

Сагитов П.И. – зав. каф. ЭАПУ АУЭС, д-р техн. наук, проф.;

Биттеев Ш.Б. – академик МАИН, д-р техн. наук, проф. каф. АУ КазАТК;

Столповских И.Н. – акад. НАЕН РК, д-р . техн. наук, проф. каф.

ГММиО КазНТУ им. К.И. Сатпаева.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2013 г.

ISBN 978–601–228–412–6

© Адамбаев М.Д., 2013

© КазНТУ, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Получение моделей на основе наблюдений и исследование их свойств является по существу основным содержанием науки. Эти модели могут быть более или менее формализованными, но все они обладают той главной особенностью, что связывают наблюдения в некоторую общую картину. Решение задачи получения адекватных математических моделей динамических систем по данным наблюдений за их поведением является предметом теории идентификации. Окружающий нас мир сплошь состоит из динамических систем, поэтому знание методов идентификации имеет решающее значение.

В настоящее время с предъявлением все более высоких требований к процессам управления в различных областях техники и технологии вопросы идентификации становятся исключительно важными, т.к. нельзя обеспечить высококачественное управление системой, если ее математическая модель не известна с достаточной точностью.

Определение характеристик системы является дуальной к задачам управления системой, т.к. нельзя управлять системой, если неизвестны ее характеристики. Знание математической модели до начала процесса управления существенно влияет на эффективность его реализации.

Целью данного учебника является краткое и систематизированное рассмотрение принципов и основанных на них методов получения математических моделей объектов и процессов, состоящих из последовательности различных операций.

Методы определения математических моделей по результатам экспериментальных исследований являются основным вопросом идентификации. В зависимости от объема априорной информации о системе различают задачи идентификации в ши-

роком и узком смысле. При решении задач в широком смысле априорная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует. Система представляется в виде «черного ящика», и для определения математической модели необходимо решение ряда дополнительных задач связанных с выбором класса моделей, оценкой стационарности, линейности и др. В настоящее время это направление не получила достаточного прикладного применения, т. к. она еще находится в стадии становления.

При решении подобных задач в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится. Априорная информация о системе достаточно обширна. Такая постановка задачи наиболее соответствует реальным условиям проектирования и поэтому широко используется в инженерной практике. Теории и методам исследований объектов посвящены многие работы [1–5].

В современной литературе в основном рассмотрены экспериментальные методы получения динамических моделей.

При подготовке данного учебника автор стремился рассмотреть наиболее современные методы, которые с одной стороны являются наиболее целесообразными в практике создания автоматических систем управления в электроэнергетике и технологическими процессами в промышленности, а с другой – достаточно доступными для студентов.

При изложении материала широко использованы примеры по определению математических моделей процессов в электроэнергетике и других отраслях промышленности, которые поясняют изучаемые методы. Многие из примеров доведены до получения количественных результатов.

1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Основные положения

Исследование динамических свойств объектов должно отвечать на основной вопрос детерминизма – предсказывать по известным воздействиям и известным в начальный момент координатам (начальное состояние) изменение координат (изменение состояния) в последующее время (принцип Гюйгенса - Адамара). Чтобы произвести анализ и синтез систем, необходимо знать уравнения взаимосвязи переменных объектов управления.

Уравнения статики и динамики объектов количественно характеризуют причинно-следственные зависимости между входными (регулирующими, управляющими) воздействиями и выходными (регулируемыми, управляемыми) их координатами. Уравнения статики являются частным случаем уравнений динамики.

Основой для составления уравнений являются законы физики и химии: сохранения вещества, сохранения энергии, гидроаэродинамики, электростатики и т. д. Целенаправленное применение этих законов к описанию технологических объектов должно давать общие уравнения: материального потока и запаса, массопереноса при перемешивании вещества, массопереноса при разделении вещества, при фазовых и химических превращениях вещества, теплопереноса и др. В свою очередь из этих уравнений вытекают конкретные уравнения статики и динамики конкретных объектов.

Не следует стремиться к необоснованной громоздкости математического описания, т. к. предела точности не существует, да и он не нужен. Неверный член уравнения – ошибка, лишний – половина ошибки. Необходимо научиться отыскивать факторы основные и пренебрегать второстепенными. Неучтенные факторы далее могут быть приняты случайными помехами, пренебрежение которыми оправдываются приспособляемостью автоматических систем. Например, запасы устойчивости, предусматриваемые в стабилизирующих автоматических системах, предполагают появление отклонений коэффициентов уравнений объектов от принятых в расчетах номиналов.

При расчете автоматических систем объекты оценивают целым рядом специальных характеристик: передаточной функцией, ступенчатой переходной функцией, импульсной переходной функцией, амплитудными и фазовыми частотными характеристиками, логарифмическими частотными характеристиками, расширенными частотными характеристиками и др. Все они могут быть получены из уравнений динамики.

Чтобы составлять уравнения объектов автоматизации, для начала следует знать основные черты технологии, устройство аппаратов, требования к автоматизации, которые в свою очередь определяются необходимостью оптимального ведения процесса. Это позволит представить структурные контуры автоматических систем и вместе с тем определить, какие факторы считать входными управляющими воздействиями в объекте, какие – выходными координатами и какие отнести к возмущающим воздействиям.

Любой технологический процесс состоит из ряда операций, выполняемых в отдельных типовых аппаратах. Поэтому анализ динамики целесообразно начать с изучения аппаратов, общих для различных технологических процессов, а уже затем рассмотреть специфические случаи.

Основные обозначения:

$x, x_{вых}, y$ – выход объекта;

$x_0, x_{вх}$ – вход объекта;

t – время;

M – запас материала в сборнике, т;

Q – поток материала, т/ч;

C – концентрация вещества в смеси;

γ – концентрация единичной фракции в смеси;

θ – температура, °C;

H – поток тепла, Мкал/ч;

K – коэффициенты диффузии, м²/с;

$W(j\omega)$ – комплексный коэффициент передачи.

1.1. Основы динамики процессов и аппаратов, являющихся общими для различных производств

Наиболее часто в различных технологических процессах встречаются такие агрегаты, как сборники, транспортные линии, смесители, теплообменники.

Под сборником понимают любые сборники, способные запасать (аккумулировать, удерживать) материал. В сборнике-смесителе происходит контактирование различных подводимых материалов. Перемешивание в нем может быть мгновенным (идеальным) или диффузионным, наконец, перемешивание может отсутствовать. Сборник достаточно охарактеризовать подводимыми и отводимыми потоками и запасом материала в нем (координаты состояния), для смесителя требуется еще знание концентраций отдельных компонентов. В сборнике-теплообменнике на первый план выступает температура материала и поток тепла. В аппаратах разделения (сборниках, в которых происходит разделение материальной смеси, например, классифицирующие устройства – грохоты и сепараторы, флотационное разделение концентратов и хвостов) координатами состояния являются потоки готовых продуктов и концентрации компонентов в них. Во всех этих аппаратах необходимо исследовать динамику.

1.1.1. Динамика материального потока и запаса

Рассмотрим методику составления в общем виде уравнения сборника материала, к которым можно отнести резервуар для жидкости или пульпы, бункер для сыпучих материалов и др. (рис. 1).

Состояние сборника характеризуется тремя переменными: подводимым потоком Q_1 , отводимым потоком Q_2 и запасом материала в сборнике M . Приращение количества материала, запасенной в сборнике, работающем без потерь, равно разности количеств материала, принесенного потоком Q_1 и унесенного потоком Q_2 за время Δt т. е.

$$\Delta M = Q_1 \cdot \Delta t - Q_2 \cdot \Delta t. \quad (1.1)$$

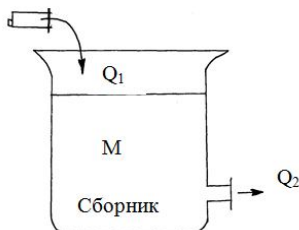


Рис. 1.1. К определению динамики сборника

Поделив обе части уравнения на Δt и перейдя к пределам, получим

$$\frac{dM}{dt} = Q_1 - Q_2. \quad (1.2)$$

Полученное уравнение, называемое уравнением материального баланса и будет уравнением динамики сборника.

Составим уравнение системы из двух сборников для случая, когда поток из первого сборника поступает во второй, а транспортировка материала между ними осуществляется конвейером или насосом (рис. 1.2).

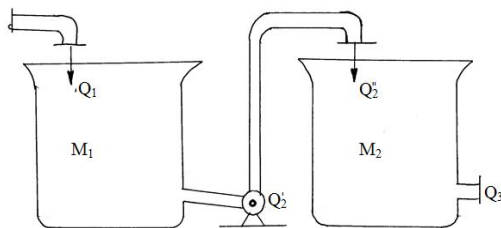


Рис. 1.2. К определению динамики системы из двух сборников

Состояние каждого из сборников описывается уравнением, определенным выше, т. е.

$$\frac{dM_1}{dt} = Q_1 - Q_2', \quad (1.2)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = Q_2'' - Q_3. \quad (1.3)$$

Для того, чтобы выяснить связь этих уравнений, необходимо получить уравнение связывающее потоки Q_2' и Q_2'' .

Если транспортировка осуществляется конвейером или насосом постоянной производительности, то весь поток Q_2' , выходящий из первого сборника попадает во второй с запаздыванием. Время запаздывания τ определяется расстоянием между сборниками и скоростью движения материала по трубопроводу или ленте конвейера. Величина Q_2'' в момент времени t равна величине потока Q_2' в момент времени $t - \tau$, т. е.

$$Q_2''(t) = Q_2'(t - \tau) \quad (1.4)$$

С учетом этого уравнения системы сборников принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_1(t)}{dt} &= Q_1(t) - Q_2'(t), \\ \frac{dM_2(t)}{dt} &= Q_2'(t - \tau) - Q_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Пример. Составить в численном виде уравнение системы бункер – конвейер (рис. 1.3), если конвейер, осуществляющий разгрузку бункера, имеет длину $l = 50$ м и скорость ленты $g = 1 \text{ м/с} = 3600 \text{ м/ч}$. Поток $Q_1 = 100 \text{ м/ч} = \text{const}$.

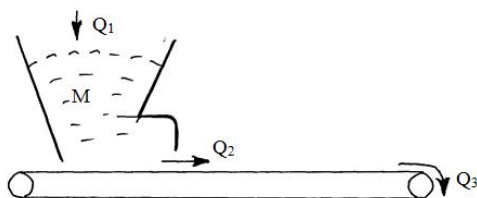


Рис. 1.3. К определению динамики системы бункер-конвейер

Решение. Уравнение бункера

$$\frac{dM}{dt} = 100 - Q_2(t),$$

уравнение конвейера

$$Q_3(t) = Q_2(t - \tau) = Q_2\left(t - \frac{50}{3600}\right) \text{ или } Q_2(t) = Q_3\left(t + \frac{50}{3600}\right).$$

Исключив промежуточную величину Q_2 , получим искомое уравнение

$$\frac{dM}{dt} = 100 - Q_3\left(t + \frac{50}{3600}\right),$$

где $[M] = m; [Q] = m / \text{ч}; [t] = \text{ч}$.

Рассмотренные выше случаи являются наиболее простыми, но в действительности все обстоит гораздо сложнее. Например, в процессе работы сборника (рис. 1.1) величины получают малые приращения относительно своих средних значений и при этом приращения отводимого материала не являются произвольными, а зависят от приращений запаса:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= Q_1 - Q_{cp}; \Delta Q_2 = Q_2 - Q_{cp}; \Delta M = M - M_{cp}, \\ \Delta Q_2 &= k \cdot \Delta M, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Другими словами, чем больше приращения запаса, тем больше ответные приращения отводимого потока, т. е. объект обладает эффектом линейного самовыравнивания.

Составим уравнение сборника для случая, когда входной величиной является ΔQ_1 , а выходной ΔM , и для случая, когда входная величина есть ΔQ_1 , а выходная – ΔQ_2 . Для обоих случаев определить постоянные времени и коэффициенты передачи.

Для объектов с линейным самовыравниванием приращения, как и абсолютные значения величин, связаны уравнением баланса

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \Delta Q_1 - \Delta Q_2.$$

В первом случае нужно из уравнения материального баланса исключить ΔQ_2 . С учетом (1.6) получим

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \Delta Q_1 - \kappa \Delta M \quad \text{или} \quad \frac{d\Delta M}{dt} + \kappa \Delta M = \Delta Q_1.$$

Число κ называется коэффициентом самовыравнивания. Чаще подобное уравнение записывается в виде

$$\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\Delta M}{dt} + \Delta M = \frac{1}{\kappa} \Delta Q_1. \quad (1.7)$$

Коэффициент $\frac{1}{\kappa} = T$, стоящий перед производной $\frac{d\Delta M}{dt}$, имеет размерность времени и является постоянной времени сборника. Для линейного сборника соотношение $\Delta Q_2 = \kappa \cdot \Delta M$ справедливо не только для приращений, но и для абсолютных значений величин: $Q_2 = \kappa \cdot M$, откуда

$$T = \frac{1}{\kappa} = \frac{M}{Q_2} \left[\frac{m}{m/\kappa} = \kappa \right]. \quad (1.8)$$

Постоянная времени линейного сборника равна отношению запаса материала в нем к отводимому потоку. Коэффициент $\frac{1}{\kappa} = K_n$, стоящий перед входной величиной ΔQ_1 , есть коэффициент передачи. Для данного частного случая он оказался равным T .

Для второго случая из уравнения баланса нужно исключить величину ΔM :

$$\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \Delta Q_2 = \Delta Q_1, \quad (1.9)$$

откуда видно, что здесь по-прежнему постоянная времени $T = \frac{1}{\kappa} = \frac{M_{cp}}{Q_{cp}}$, но коэффициент передачи равен единице.

Перейдем к сборникам с нелинейными уравнениями, содержащими нелинейные функции переменных или их производных по времени.

Например, составим уравнение резервуара истечения, если входом считать поток Q_1 , выходом – либо запас M , либо поток Q_2 . Схема резервуара аналогична схеме сборника (рис. 1.1).

Баланс материала дает $\frac{dM}{dt} = Q_1 - Q_2$, но Q_2 не является независимой переменной, а есть функция M . Из гидродинамики известно, что истечение из отверстия подчиняется закону $Q_2 = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2qH}$, где μ – коэффициент расхода; ω – площадь сечения насадки; q – ускорение свободного падения; H – уровень в резервуаре.

Учитывая, что уровень в резервуаре пропорционален запасу: $H = \kappa_1^2 \cdot M$, получим $Q_2 = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \sqrt{M}$, где $\kappa_2 = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}$. Подставляя Q_2 в исходное уравнение, получаем

$$\frac{dM}{dt} + \kappa_1 \cdot \kappa_2 \sqrt{M} = Q_1$$

– нелинейное уравнение резервуара.

Если в исходное уравнение подставить $M = \left(\frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} \right)^2 \cdot Q_2^2$, то получим второе искомое уравнение тоже нелинейное.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{\kappa_1 \cdot \kappa_2} \right)^2 \cdot Q_2 \cdot \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_1,$$

Если известна форма насадки (например, цилиндрическая) и ее площадь ($\omega = 1 \text{ см}^2$), а также площадь сечения резервуара $S = 1 \text{ м}^2$, то можно получить уравнение резервуара истечения в численном виде. Решение сводится к определению численных значений констант K_1 и K_2 . При истечении воды через цилиндрическую насадку коэффициент расхода $\mu = 0,82$. Поэтому

$$\kappa_2 = 0,82 \cdot 1 \text{ см}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 981 \text{ см} / \text{с}^2} \approx 35,5 \text{ см}^{2,5} / \text{с},$$

причем, если $[H] = \text{см}^2$, то $[Q] = \text{см}^3 / \text{с}$.

Далее из $H=k_1^2 M$ и $M=S \cdot H=1 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{Н}$ получим

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{S}} = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^4}} = 0,01 \text{ л/см}, \text{ где } [M] = \text{см}^3.$$

Подставив численное значение k_1 и k_2 в общие уравнения резервуара, найдем для заданного частного резервуара:

$$\frac{dM}{dt} + 0,357\sqrt{M} = Q_1; \quad 2 \cdot \left(\frac{1}{0,357} \right)^2 \cdot Q_2 \cdot \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_1.$$

Что изменится, если дополнительно к силе тяжести, выталкивающей жидкость из резервуара, учесть и внешнее давление P в герметическом резервуаре?

В этом случае исходным соотношением взамен

$$Q_2 = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH} \quad \text{будет} \quad Q_2(t) = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH + \frac{2Pg}{\rho}},$$

где ρ – плотность жидкости.

Под радикалом появляется новый член, обусловленный внешним давлением P . В остальном схема выкладок для герметического резервуара аналогична рассмотренной выше для открытого резервуара.

Составим уравнения каскада из двух резервуаров (рис. 1.4).

В этом случае, наряду с балансными соотношениями

$$\frac{dM_1}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad (1.10)$$

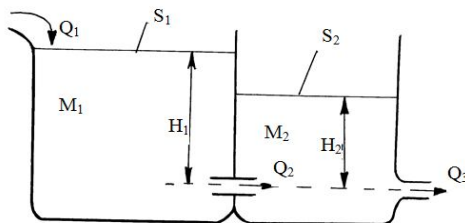


Рис. 1.4. Каскад резервуаров

$$\frac{dM_2}{dt} = Q_2 - Q_3, \quad (1.11)$$

имеют место следующие дополнительные зависимости:

$$Q_3 = \mu_1 \cdot \omega_1 \sqrt{2gH_2} = k_1 \cdot \sqrt{H_2}, \quad (1.12)$$

$$Q_2 = \mu_2 \cdot \omega_2 \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = k_1' \cdot \sqrt{H_1 - H_2}, \quad (1.13)$$

$$M_1 = \rho \cdot S_1 \cdot H_1, \quad (1.14)$$

$$M_2 = \rho \cdot S_2 \cdot H_2, \quad (1.15)$$

где M_1 и M_2 – запасы; Q_1 , Q_2 , Q_3 – потоки; S_1 и S_2 – площади сечения резервуаров; ω_1 , ω_2 – площади сечения отверстий истечения; μ_1 , μ_2 – коэффициенты расхода; H_1 , H_2 – уровни материала; ρ – плотность материала.

По сути, написанные равенства и есть совокупные уравнения каскада и строго говоря, задача решена. Однако часто возникает необходимость нахождения зависимости только между двумя какими-либо переменными, поэтому нужно уметь исключить другие переменные.

Пусть требуется найти зависимость между выходом Q_3 и входом Q_1 . Для этого нужно исключить переменные Q_2 , M_1 , M_2 , H_1 , H_2 и оставить в совокупных уравнениях Q_1 и Q_3 .

Из уравнений (1.12) и (1.15) имеем

$$M_2 = \rho \cdot S_2 \cdot \left(\frac{Q_3}{k_1} \right)^2, \quad (1.16)$$

тогда из уравнений (1.13), (1.15), (1.16) получим

$$M_1 = \rho \cdot S_1 \cdot \left[\left(\frac{Q_2}{k_1'} \right)^2 + \left(\frac{Q_3}{k_1} \right)^2 \right], \quad (1.17)$$

а из уравнения (1.11) с учетом (1.16)

$$\frac{d \left[\rho \cdot S_2 \cdot \left(\frac{Q_3}{k_1} \right)^2 \right]}{dt} = Q_2 - Q_3$$

или

$$Q_2 = Q_3 + \frac{\rho \cdot S_2}{k_1^2} \cdot 2Q_3 \frac{dQ_3}{dt} . \quad (1.18)$$

Подставив в (1.10) значения M_1 и Q_2 из (1.17) и (1.18) соответственно, получим

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho \cdot S_1 \cdot \left[\frac{1}{k_1^2} \left(Q_3 + \frac{\rho \cdot S_2}{k_1^2} \cdot 2Q_3 \frac{dQ_3}{dt} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2} \cdot Q_3^2 \right] \right\} + \frac{\rho \cdot S_2}{k_1^2} \cdot 2 \cdot Q_3 \frac{dQ_3}{dt} + Q_3 = Q_1 .$$

Это нелинейное уравнение второго порядка, Q_1 и Q_3 – функции времени, остальные – константы. Порядок уравнения равен числу сборников в каскаде.

1.1.2. Динамика перемешивания материальных потоков

Составим уравнение смесителя с идеальным перемешиванием (рис. 1.5).

В смеситель поступают два потока различных материалов. Расходы подводимых материалов $Q_{1П}$ и $Q_{2П}$. Полный подводимый поток постоянен:

$$Q_{П} = Q_{1П} + Q_{2П} = const .$$

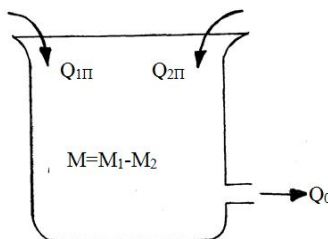


Рис. 1.5. К динамике перемешивания

Запас материала $M = M_1 + M_2$ в системе также постоянен. Отводимый поток из сборника равен: $Q_0 = Q_{10} + Q_{20}$. Входной величиной считать $Q_{1п}$, выходной – концентрацию C_1 первого материала в отводимом потоке.

Данную задачу можно решить двумя методами.

Первый метод. При идеальном перемешивании подводимый к смесителю материал мгновенно перемешивается с тем, который там имеется и потому в любой части объема смесителя в данный момент времени концентрация одна и та же. Обозначим ее для одного из материалов через $C_1'(t)$ – для первого материала. Очевидно, концентрация материала в отводимом потоке имеет то же самое значение, т. е. $C_1(t) = C_1'(t)$.

Материальный баланс по первому материалу:

$$\frac{dM_1}{dt} = Q_{1п} - Q_{10}.$$

Перепишем это равенство в виде $\frac{M}{Q} \cdot \frac{d\left(\frac{M_1}{M}\right)}{dt} = \frac{Q_{1п}}{Q} - \frac{Q_{10}}{Q}$, считая, что в среднем $Q_{1п} = Q_0 = Q = const$.

Поскольку $\frac{M_1}{M} = C_1'(t) = C_1(t)$ и $\frac{Q_{10}}{Q} = C_1(t)$, то

$$\frac{M}{Q} = \frac{dC_1(t)}{dt} + C_1(t) = \frac{Q_{1п}}{Q} = C_{1п}(t), \quad (1.19)$$

где $C_{1п}$ – концентрация первого компонента в подводимом потоке $Q_{1п}$. (1.19) является искомым уравнением. Величина $T = \frac{M}{Q}$ является постоянной времени смесителя, а $K = \frac{1}{Q}$ – коэффициентом передачи смесителя. Если же входной величиной считать $C_{1п}$, то $K = I$.

Второй метод. Этот метод, основывается, на применении теории вероятностей [6]. Вероятность того, что после отбора (с возвратом) n шаров из урны, содержащий m шаров, в ней останется невынутым некоторый шар.

$$P_n = \left(\frac{m}{m+1} \right)^n.$$

Количество новых частиц первого материала, поступивших в смеситель за интервал времени Δt , равно $\Delta M = \Delta Q_{In} \cdot \Delta t$, где ΔQ_{In} – ступенчатое изменение потока.

Время t разбиваем на $n = \frac{t}{\Delta t}$ интервалов Δt . Здесь M отождествляется с числом шаров m , отбору одного шара соответствует приращение ΔM , а числу отборов n – величина $\frac{t}{\Delta t}$.

С учетом этого получим

$$p = \left(\frac{M}{M + \Delta M} \right)^{\frac{t}{\Delta t}}.$$

В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta M \rightarrow 0$, $-\ln p = \frac{dM}{dt} \cdot \frac{t}{M}$, а поскольку $\frac{dM}{dt} = Q$, имеем $-\ln p = \frac{Q}{M} \cdot t$ или $p = y = e^{-\frac{t}{T}}$,

где y – доля материала, время пребывания которого в смесителе превышает t , а доля материала, проходящего через смеситель за время t , равна $1 - e^{-\frac{t}{T}}$.

Величина $T = \frac{M}{Q}$ равна среднему времени пребывания частицы в смесителе.

Таким образом, ступенчатое изменение потока Q_{In} вызывает изменение числа частиц в смесителе по экспоненциальному закону, соответствующее дифференциальному уравнению первого порядка.

Составим уравнения каскада из двух идеальных смесителей, если входной величиной считать концентрацию C_1 реагента в потоке, подводимом к каскаду, а выходной – концентрацию C_3 в отводимом из каскада потоке, концентрация в промежуточном потоке – C_2 .

В соответствии с решением предыдущей задачи имеем уравнения:

для первого смесителя $T_1 \frac{dC_2}{dt} + C_2 = C_1$;

для второго смесителя $T_2 \frac{dC_3}{dt} + C_3 = C_2$.

Выходная величина C_2 первого смесителя является входной для второго, поэтому, исключая C_2 и $\frac{dC_2}{dt}$ из системы уравнений

$\frac{dC_2}{dt} = T_2 \frac{d^2 C_3}{dt^2} + \frac{dC_3}{dt}$, получим

$$T_1 \cdot T_2 \frac{d^2 C_3}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dC_3}{dt} + C_3 = C_1. \quad (1.20)$$

Составим уравнение сборника, в котором перемешивание отсутствует (смеситель вытеснения).

Поток Q_1 материала, обладающего качеством, например концентрацией какого-либо компонента $C_1(t)$, проходит через сборник сверху вниз, соприкасаясь с находящимся там материалом, имеющим качество $C_2(t)$. Отводится поток $Q_2 = Q_1$, имеющий качество $C_2(t)$. Входной величиной надо считать $C_1(t)$, выходной $C_2(t)$. Сборник характеризуется запасом M (рис. 1.6).

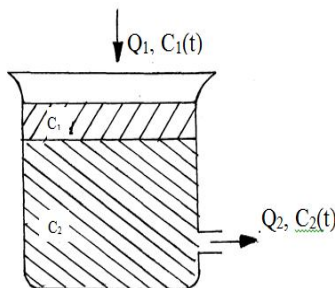


Рис. 1.6. К динамике смесителя вытеснения

В данном случае изменения $C_2(t)$ запаздывают по отношению к изменению $C_1(t)$ на время $\tau = \frac{M}{Q}$ и тогда искомое уравнение будет иметь вид

$$C_2(t) = C_1(t - \tau) = C_1\left(t - \frac{M}{Q}\right).$$

1.1.3. Динамика теплообмена

Рассмотрим задачу, когда в теплообменник с интенсивным перемешиванием поступает поток Q_1 , $\text{м}^3/\text{ч}$, жидкого материала, имеющего температуру θ_1 (рис. 1.7). Средний объем материала, удерживаемого в теплообменнике, равен V (м^3). Из теплообменника отводится поток Q_2 , $\text{м}^3/\text{ч}$, с температурой θ_2 .

Запас материала в теплообменнике стабилизирован: либо теплообменник герметически закрыт; либо отвод материала осуществляется переливом через открытый верхний край; либо, если материал отводится из нижней части под естественным напором, уровень в нем стабилизирован отдельной автоматической системой. Так как $V = \text{const}$, то $Q_1 \approx Q_2 = Q_{cp}$.

Перемешивание материала настолько интенсивно, что температура в объеме θ и в отводимом потоке θ_2 равны, т. е. $\theta = \theta_2$.

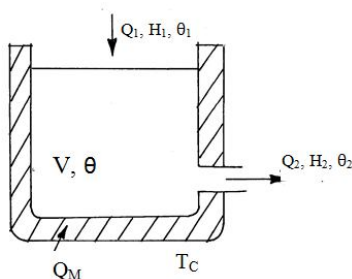


Рис. 1.7. Теплообменник

Составим уравнения в которых входной величиной является подводимый поток тепла H_1 , а выходной – температура отводимого потока $\theta_2 = \theta$. Изменение входной величины H_1 может быть обязано как изменению потока Q_1 , так и изменению его температуры. В связи с этим рассмотрим постепенно усложняющиеся случаи:

а) перенос тепла во внешнюю среду отсутствует, т. е. теплообменник имеет идеальную теплоизоляцию. Известны численные значения: $V = 10 \text{ м}^3$; $Q_{cp} = 20 \text{ М}^3 / \text{ч}$; $\rho = 2,7 \text{ т} / \text{м}^3$; $C = 0,22 \text{ Мкал} / (\text{т} \cdot \text{град})$ (материал – алюминий);

б) имеется перенос тепла во внешнюю среду по закону $H_3 = h \cdot S(\theta - \theta_c)$, где h – коэффициент теплопередачи, $\text{Мкал} / (\text{ч} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{град})$ ¹; S – площадь поверхности теплообмена, м^2 ; θ_c – температура внешней среды, $^\circ\text{C}$.

Для численного примера дополнительно к «а» известно: $S = 28 \text{ м}^2$; $\theta_c = 40^\circ\text{C}$; $h = 0,3 \text{ Мкал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град})$;

в) стенки теплообменника массивны и нужно учесть их теплоемкость. Тепловой поток из объема V в стенку $H_3^1 = h_m \cdot S(\theta - \theta_m)$, где h_m – коэффициент теплопередачи от жидкого материала к стенке; θ_m – температура стенки.

Тепловой поток от стенки во внешнюю среду $H_4 = h_c \cdot S(\theta_m - \theta_c)$, где h_c – коэффициент теплопередачи от стенки во внешнюю среду. Для численного примера теплоемкость материала стенки $C_m = 0,3 \text{ Мкал} / (\text{т} \cdot \text{град})$; плотность материала стенки $\rho_m = 2,5 \text{ т} / \text{м}^3$; толщина стенки $d = 0,2 \text{ м}$; объем стенки $V_m = S \cdot d = 28 \cdot 0,2 = 5,6 \text{ м}^3$; $h_m = 0,2 \text{ Мкал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град})$; $h_c = 0,05 \text{ Мкал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град})$.

Решение. а) В условиях интенсивного перемешивания объект можно считать сосредоточенной емкостью и исходить из следующего уравнения теплового баланса:

$$\rho \cdot c \cdot V \frac{d\theta}{dt} = \sum H_i = H_1 - H_2,$$

где ρ – плотность материала, $\text{т} / \text{м}^3$; c – теплоемкость материала, $\text{Мкал} / (\text{т} \cdot \text{град})$; H_i – количество тепла, подводимого к теп-

¹ Коэффициент теплопередачи от материала к стенке определяется формой поверхности, ее шероховатостью, интенсивностью перемешивания и т. д. Для воды, жидких металлов, пульпы и растворов $h = 100 - 6\,000 \text{ ккал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}) = 0,1 - 6,0 \text{ Мкал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град})$. Для газов $h = 5 - 100 \text{ ккал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град})$. Величина h растет с увеличением скорости движения материала относительно стенки.

лоообменнику (берется со знаком плюс) или отводимого от него (берется со знаком минус) в единицу времени.

Поступление потока Q_1 соответствует притоку тепла в теплообменник $H_1 = \rho \cdot c \cdot \theta_1 \cdot Q_1, \text{ Мкал} / \text{ч}$. С потоком Q_2 отводится количество тепла $H_2 = \rho \cdot c \cdot \theta_2 \cdot Q_2$. Подставляя H_1 и H_2 в уравнение теплового баланса, получим

$$\rho \cdot c \cdot V \frac{d\theta}{dt} = \rho \cdot c \cdot \theta_1 \cdot Q_1 - \rho \cdot c \cdot \theta_2 \cdot Q_2 \quad \text{или} \quad V \frac{d\theta}{dt} + Q_2 \theta_2 = Q_1 \theta_1 = \frac{1}{\rho c} H_1.$$

Учитывая, что $\theta = \theta_2$, окончательно получим

$$\frac{V}{Q_{cp}} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} + \theta_2 = \frac{1}{\rho c \theta_{cp}} \cdot H_1 \quad \text{или} \quad T \frac{d\theta_2}{dt} + \theta_2 = K_{\Pi} \cdot H_1, \quad (1.21)$$

где $T = \frac{V}{Q_{cp}}$ – постоянная времени, ч;

$K_{\Pi} = \frac{1}{\rho \cdot c \cdot Q_{cp}}$ – коэффициент передачи, $(\text{град} \cdot \text{ч}) / \text{Мкал}$.

Для численного примера с жидким алюминием получим

$$T = \frac{V}{Q_{cp}} = \frac{10 \text{ м}^3}{20 \text{ м}^3 / \text{ч}} = 0,5 \text{ ч};$$

$$K_{\Pi} = \frac{1}{\rho \cdot c \cdot Q_{cp}} = \frac{1}{2,7 \text{ т} / \text{м}^3 \cdot 0,22 \text{ Мкал} / \text{т} \cdot \text{град} \cdot 20 \text{ м}^2 / \text{ч}} = 0,084 \text{ град} \cdot \text{ч} / \text{Мкал}.$$

б) В этом случае тепловой баланс выражается уравнением

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt} = H_1 - H_2 - H_3 = \rho \cdot c \cdot \theta_1 \cdot Q_1 - \rho \cdot c \cdot \theta_2 \cdot Q_2 - h \cdot S \cdot (\theta - \theta_c),$$

после преобразований

$$\frac{V}{Q_{cp} \cdot \left(1 + \frac{hS}{\rho \cdot c \cdot Q_{cp}}\right)} \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{1}{\rho \cdot c \cdot Q_{cp} + h \cdot S} (H_1 + h \cdot S \cdot \theta_c) \quad \text{или} \\ T \frac{d\theta}{dt} + \theta = K_n \cdot (H_1 + h \cdot S \cdot \theta_c) \quad (1.22)$$

Постоянная времени T по отношению к случаю «а» уменьшилась, т. к. член $\frac{h \cdot S}{\rho \cdot c \cdot Q_{cp}}$ всегда положителен. Если тем-

пература внешней среды постоянна, то член $h \cdot S \cdot Q_c$ из первой части можно исключить, передвинув начало отсчета температур на величину θ_c , в противном случае θ_c следует рассматривать как внешнее возмущение.

Для численного примера с переносом отсчета температуры в точку $\theta_c = 40^\circ \text{C}$ получим

$$T = \frac{V}{Q_{cp} \left(1 + \frac{h \cdot S}{\rho c Q_{cp}} \right)} = \frac{10 \text{ м}^2}{20 \text{ м}^3 / \text{ч} \cdot \left(1 + \frac{0,3 \text{ Мкка} / \text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град} \cdot 28 \text{ м}^2}{2,7 \text{ т} / \text{м}^3 \cdot 0,22 \text{ Мкал} / \text{т} \cdot \text{град} \cdot 20 \text{ м}^3 / \text{ч}} \right)} = 0,3 \text{ ч};$$

$$K_n = \frac{1}{\rho \cdot c \cdot Q_{cp} + h \cdot S} = \frac{1}{2,7 \text{ т} / \text{м}^3 \cdot 0,22 \text{ Мкал} / \text{т} \cdot \text{град} \cdot 20 \text{ м}^3 / \text{ч} + 0,3 \text{ Мкал} / \text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град} \cdot 28 \text{ м}^2} =$$

$$= 0,049 \text{ град} \cdot \text{ч} / \text{Мкал},$$

откуда уравнение теплообменника будет

$$0,3 \frac{d(\theta - 40)}{dt} + (\theta - 40) = 0,049 H_1.$$

в) В случае, когда стенки теплообменника обладают теплоемкостью, исходными являются два уравнения теплового баланса – материала и стенок:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt} &= H_1 - H_2 - H_2^1 = H_1 - \rho \cdot c \cdot \theta_2 Q_2 - h_M \cdot S \cdot (\theta - \theta_M), \\ \rho_M \cdot c_M \cdot V_M \cdot \frac{d\theta_M}{dt} &= H_3 - H_4 = h_M \cdot S \cdot (\theta - \theta_M) - h_c \cdot S \cdot (\theta_M - \theta_c). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Исключив промежуточную переменную θ_M , для чего из первого уравнения подставим с учетом $\theta = \theta_2$, $Q_2 = Q_{cp}$ величину

$$\theta_M = \frac{1}{h_M \cdot S} \cdot \left(\rho \cdot c \cdot V \frac{d\theta}{dt} + \rho \cdot c \cdot \theta \cdot Q_{cp} - H_1 + h_M \cdot S \cdot \theta \right)$$

во второе уравнение:

$$\begin{aligned} & \rho_i \cdot C_i \cdot V_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho \cdot c \cdot V}{h_i \cdot S} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\rho \cdot c \cdot Q_{cp}}{h_i \cdot S} \cdot \theta - \frac{1}{h_i \cdot S} H_1 + \theta \right) = \\ & = h_i \cdot S \cdot \theta - h_i \cdot S \cdot \left(\frac{\rho \cdot c \cdot V}{h_i \cdot S} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\rho \cdot c \cdot Q_{cp}}{h_i \cdot S} \cdot \theta - \frac{1}{h_i \cdot S} H_1 + \theta \right) + h_c \cdot S \cdot \theta_c - \\ & - h_c \cdot S \cdot \left(\frac{\rho \cdot c \cdot V}{h_m \cdot S} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\rho \cdot c \cdot Q_{cp}}{h_m \cdot S} \cdot \theta - \frac{1}{h_m \cdot S} H_1 + \theta \right). \end{aligned}$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_m \cdot c_m \cdot V_m \cdot \rho \cdot c \cdot V}{h_m \cdot S} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\rho_m \cdot c_m \cdot V_m \cdot \rho \cdot c \cdot Q_{cp}}{h_m \cdot S} + \rho_m \cdot c_m \cdot V_m + \rho \cdot c \cdot V + \frac{h_c \cdot \rho \cdot c \cdot V}{h_m} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} + \\ & + \left(\rho \cdot c \cdot Q_{cp} + \frac{h_c \cdot \rho \cdot c \cdot Q_{cp}}{h_m} + h_c \cdot S \right) \theta = \frac{\rho_m \cdot c_m \cdot V_m}{h_m \cdot S} \cdot \frac{dH_1}{dt} + \left(1 + \frac{h_c}{h_m} \right) \cdot H_1 + h_c S \theta_c. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Выходной переменной является θ , входными — H_1 и θ_c . Если $\theta_c = const$, то при переносе начала отсчета температур в точку θ_c член с θ_c можно исключить, тогда останутся переменные θ и H_1 и уравнение (1.24) можно записать в виде

$$a_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta}{dt} + a_2 \theta = b_0 \frac{dH_1}{dt} + b_1 H_1 + h_c S \cdot \theta_c.$$

Получили уравнение второго порядка, потому что в объекте имеются две сосредоточенные емкости: пространство теплообменника V и пространство стенки V_m .

Для заданных численных условий: $V_m = 10 \text{ м}^3$; $Q_{cp} = 20 \text{ м}^3 / \text{ч}$;
 $\rho = 2,7 \text{ т} / \text{м}^3$; $c = 0,22 \text{ Мкал} / (\text{т} \cdot \text{град})$; $S = 28 \text{ м}^2$; $\theta_c = 40^\circ \text{C}$;
 $c_m = 0,3 \text{ Мкал} / (\text{т} \cdot \text{град})$; $\rho_m = 2,5 \text{ т} / \text{м}^3$; $V_m = 5,6 \text{ м}^3$;
 $h_m = 0,2 \text{ Мкал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град})$; $h_c = 0,05 \text{ Мкал} / (\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град})$ получим:

$$a_0 = \frac{\rho_m \cdot c_m \cdot V_m \cdot \rho \cdot c \cdot V}{h_m \cdot S} = \frac{2,5 \cdot 0,3 \cdot 5,6 \cdot 2,7 \cdot 0,22 \cdot 10,0}{0,2 \cdot 28} = 4,46 \cdot \text{ч} \cdot \text{Мкал} / \text{град};$$

$$a_1 \frac{\rho_m \cdot c_m \cdot V_m \cdot \rho \cdot c \cdot Q_{cp}}{h_m \cdot S} + \rho_m \cdot c_m \cdot V_m + \rho \cdot c \cdot V + \frac{h_c \cdot \rho \cdot c \cdot V}{h_m} =$$

$$= \frac{2,5 \cdot 0,3 \cdot 5,6 \cdot 2,7 \cdot 0,22 \cdot 20,0}{0,2 \cdot 28} + 2,5 \cdot 0,3 \cdot 5,6 + 2,7 \cdot 0,22 \cdot 10,0 + \frac{0,05 \cdot 2,7 \cdot 0,22 \cdot 10,0}{0,2} =$$

$$= 20,55 \text{ Мкал / град};$$

$$a_2 = \rho \cdot c \cdot Q_{cp} + \frac{h_c \cdot \rho \cdot c \cdot Q_{cp}}{h_m} + h_c \cdot S = 2,7 \cdot 0,22 \cdot 20,0 + \frac{0,05 \cdot 2,7 \cdot 0,22 \cdot 20,0}{0,2} +$$

$$+ 0,05 \cdot 28,0 = 16,25 \text{ Мкал / (ч \cdot град)};$$

$$b_0 = \frac{\rho_m \cdot c_m \cdot V_m}{h_m \cdot S_m} = \frac{2,5 \cdot 0,3 \cdot 5,6}{0,2 \cdot 28,0} = 0,75 \text{ ч}; \quad b_1 = 1 + \frac{h_c}{h_m} = 1 + \frac{0,05}{0,2} = 1,25;$$

$$h_c \cdot S = 0,05 \cdot 28,0 = 1,4 \text{ Мкал / (ч \cdot град)}.$$

Тогда уравнение запишется в виде

$$4,46 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 20,55 \frac{d\theta}{dt} + 16,25 \theta = 0,75 \frac{dH_1}{dt} + 1,25 H_1 + 1,4 \theta_c. \quad (1.25)$$

При переносе начала отсчета координат в точку $\theta = \theta_c = 40^\circ \text{ C}$ получим

$$4,46 \frac{d^2 (\theta - 40)}{dt^2} + 20,55 \frac{d(\theta - 40)}{dt} + 16,25 (\theta - 40) = 0,75 \frac{dH_1}{dt} + 1,25 H_1, \quad (1.26)$$

где $[\theta] = ^\circ \text{ C}$; $[H] = \text{Мкал / ч}$; $[t] = \text{ч}$.

Требующиеся для численных уравнений константы ориентировочно можно брать из соответствующих справочников, но для конкретных случаев необходимо их уточнение на объекте. При необходимости дополнительных сведений можно использовать [6].

Таким образом, допуская сосредоточенность параметров (емкостей) можно заключить, что для идеального перемешивания, когда имеем одинаковую концентрацию компонента в любой точке объема, а для идеального теплообменника – температуру в любой точке объема, число сосредоточенных емкостей (способных удерживать материал, тепло) в объекте определяет порядок дифференциального уравнения. Например, один сбор-

ник (смеситель, теплообменник) имеет уравнение первого порядка, а каскад из двух – второго порядка и т. д. Это правило позволяет по структуре объекта определять заранее порядок его уравнения, а тем самым и общий (буквенный) вид уравнения, тем более, если уравнение линейно.

Предположение сосредоточенности параметров смесителей и теплообменников является упрощением, которое не всегда приемлемо. Рассмотрим случаи объекта с распределенными параметрами. Диффузионное перешивание является промежуточным видом между мгновенным перемешиванием и его отсутствием.

Составим уравнение, характеризующее диффузионный массоперенос вещества в пространстве смесителя.

Через любую площадку dS в направлении внешней нормали n к ней за время dt переносится вещество в количестве (в соответствии с законом Фика)

$$- dt \cdot K \cdot \text{grad}_n \cdot C \cdot dS, \quad (1.27)$$

где K – коэффициент диффузии, имеющий размерность (длина)²/время. Через замкнутую вокруг объема dV поверхность S это дает

$$- dt \cdot K \cdot \oint_S \text{grad}_n \cdot C \cdot dS. \quad (1.28)$$

Перенос вещества через S компенсируется изменением концентрации в его объеме dV , которое равно $dC \cdot dV$. Поэтому можно записать

$$dC \cdot dV - dt \cdot K \cdot \oint_S \text{grad}_n \cdot C \cdot dS = 0. \quad (1.29)$$

Из теории векторного поля известно

$$\frac{1}{dV} \oint_S \text{grad}_n \cdot C \cdot dS = \nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (1.30)$$

и искомое уравнение получается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (1.31)$$

В этом случае $C(t, x, y, z)$ является не только функцией времени t , как в случае сосредоточенных параметров, но также и функцией координат x, y, z пространства смесителя.

Применение уравнения диффузии (1.31) возможно не только к описанию изменения концентрации молекул реагентов, растворенных в жидкости и пульпе, но также и к описанию массопереноса крупных макрочастиц в перемешиваемой сыпучей смеси (например, в процессах шихтовки руды). Это уравнение применимо и к теплопереносу, которое в математике известно как уравнение теплопроводности Фурье. При таком теплопереносе температура $\theta(t, x, y, z)$ также является функцией координат пространства теплообменника. В [7] показано, как использовать уравнение (1.31) для описания динамических характеристик конкретных объектов.

1.2. Математическое описание процессов дробления, измельчения и классификации

Вводные замечания.

В этих процессах, которые нашли широкое применение для приготовления угольной пыли на тепловых электростанциях, наиболее характерной чертой является динамика материального потока и отчасти перемешивание. Качественно новым будет введение функциональных зависимостей между запасом материала в сборнике – агрегате и косвенно оценивающими его величинами. Например, шум мельницы оценивает запас материала в барабане мельницы и др. Введение таких функциональных зависимостей позволяет из элементарной динамики запаса, потока и перемешивания получать приближенную оценку динамики процессов, физически много более сложных.

Прежде чем составлять уравнения конкретных объектов, надо знать, какие величины являются входными, а какие – выходными. Это определяется способами автоматического регулирования и управления. Таких способов известно много [7].

Одним из способов управления процессом дробления является поддержание постоянства подводимого потока материала. Помимо стабилизации подводимого потока при автоматизации дроб-

ления применяют стабилизацию запаса материала в дробилках. В щековых дробилках запас материала может быть измерен непосредственно по уровню материала в пасти (выход объекта) и, если он отклоняется от заданного уровня, регулятор изменяет производительность дозатора (вход). В конусных дробилках запас измеряется косвенно по току (мощности) приводного двигателя дробилки (выход объекта). Режим работы грохота обычно не регулируется, но если грохот расположен между дозатором и дробилкой, запас в которой стабилизируется, то уравнение грохота входит составной частью в уравнение объекта грохот-дробилка. В таких случаях динамика грохота должна также учитываться.

При автоматизации процессов измельчения стабилизируют запас материала (выход) в мельнице (агрегате) изменением подводимого потока (вход). Измерение запаса осуществляется косвенно: по интенсивности или средней (райсовой) частоте спектра шума мельницы, по току (мощности) двигателя классификатора, по разности температур материала в загрузке и разгрузке мельницы. При гидравлической классификации (гидроциклоны, механические классификаторы) обычно стабилизируют плотность слива (выход) изменением расхода свежей воды в классификатор (вход). Более подробно способы управления этими процессами даны в [7, 8].

1.2.1. Уравнение динамики дробилок

Составим уравнение щековой дробилки (рис. 1.8, а), если считать входной величиной подводимый поток Q_1 , выходной либо запас материала M в пасти, либо отводимый поток Q_2 .

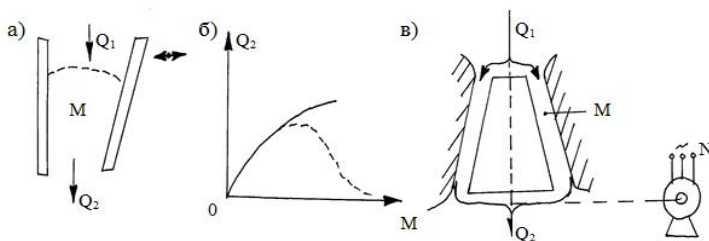


Рис. 1.8. Щековая дробилка (а), статическая характеристика (б), конусная дробилка (в)

Текущая производительность дробилки по готовому продукту Q_2 зависит от запаса M в пасти:

$$Q_2 = Q_2(M) \quad (1.32)$$

Вид графика $Q_2 = Q_2(M)$ показан на рис. 1.8, б. Исключив из соотношения баланса $\frac{dM}{dt} = Q_1 - Q_2$ величину Q_2 посредством введенной зависимости, получим

$$\frac{dM}{dt} + Q_2(M) = Q_1 \quad (1.33)$$

Это уравнение вместе с экспериментальной кривой $Q_2(M)$ определяет поведение запаса M при изменении потока Q_1 .

Из соотношения (1.32) найдем обратную функцию $M = M(Q_2)$ и подставим ее взамен M в балансное соотношение

$$\frac{d[M(Q_2)]}{dt} + Q_2 = Q_1 \quad \text{или} \quad \frac{\partial M(Q_2)}{\partial Q_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_1 \quad (1.34)$$

Это уравнение совместно с численным графиком $Q_2 = Q_2(M)$ показывает, как изменяется Q_2 при изменении Q_1 . К численным графикам приходится прибегать потому, что пока нет аналитического выражения для зависимости (1.32).

По полученным общим уравнениям щековой дробилки можно получить уравнения в численном виде, аппроксимируя зависимость $M = M(Q_2)$ параболой $M = k \cdot Q_2^2$, если известна одна экспериментальная точка: $M = 0,1m$; $Q_2 = 100m/ч$. Здесь k – неизвестный коэффициент.

Из уравнения параболы $M = k \cdot Q_2^2$ найдем $k = \frac{M}{Q_2^2} = \frac{0,1}{100^2} = 1 \cdot 10^{-5} ч^2/m$

Тогда $M = M(Q_2) = 1 \cdot 10^{-5} \cdot Q_2^2$ или $Q_2 = Q_2(M) = \sqrt{10^5 \cdot M}$.

Поставим последнее соотношение в уравнение (1.33) получим

$$\frac{dM}{dt} + 3,15 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{M} = Q_1$$

Аналогично из уравнения (1.34) имеем

$$\frac{\partial(1 \cdot 10^{-5} \cdot Q_2^2)}{\partial Q_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_1 \text{ или } 2 \cdot 10^{-5} \cdot Q_2 \cdot \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_1.$$

Составим уравнение конусной дробилки (рис. 1.8, в) для случая, когда входом является подводимый поток Q_1 , а выходом – мощность N , потребляемая двигателем дробилки.

В этом случае имеем соотношения

$$\frac{dM}{dt} = Q_1 - Q_2; \quad Q_2 = Q_2(M).$$

Дополнительно введем существующую реальную зависимость $N = N(M)$, аналитическое выражение которой может быть неизвестен. Из нее можно найти обратную зависимость $M = M(N)$. Исключив промежуточные переменные M и Q_2 , получим

$$\frac{d[M(N)]}{dt} + Q_2[M(N)] = Q_1 \quad (1.35)$$

или

$$f_1(N) \frac{dN}{dt} + f_2(N) = Q_1. \quad (1.36)$$

Это уравнение в численном виде может быть определено экспериментом.

1.2.2. Уравнения технологических аппаратов процесса классификации

Составим в общем виде уравнения грохота (рис. 19, а), если принять за входную величину подводимый поток Q_1 , а выходными – запас M , отводимые потоки Q_B и Q_H .

Дополнительно к балансному соотношению

$$\frac{dM}{dt} = Q_1 - Q_H - Q_B \quad (1.37)$$

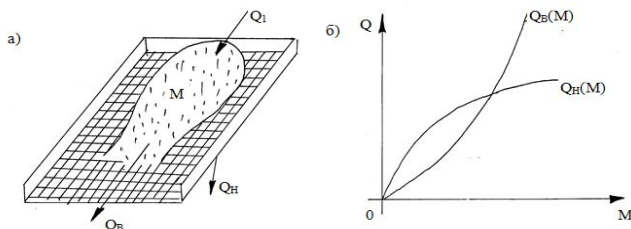


Рис. 1.9. Грохот односитный (а), статические характеристики грохота (б)

существуют зависимости:

$$Q_H = Q_H(M) \text{ и } Q_B = Q_B(M), \quad (1.38)$$

графики которых показаны на рис. 1.9, б. Это статические характеристики грохота, которые могут быть найдены экспериментально. Если это так, то полученные совокупные равенства и есть искомое решение.

Эту задачу можно конкретизировать (применительно к задачам управления этим процессом), например, найти зависимость выходной величины запаса M от входной – подводимого потока Q_1 , исключив промежуточные величины Q_B и Q_H .

Из (1.37) и (1.38) имеем

$$\frac{dM}{dt} + Q_H(M) + Q_B(M) = Q_1 \quad \text{или} \quad \frac{dM}{dt} + f(M) = Q_1.$$

Рассмотрим численный пример. Если для грохота экспериментально определены, а затем аналитически аппроксимированы статические характеристики в виде

$$Q_H = Q_H(M) = k_1 \cdot (1 - e^{-k_2 \cdot M}) = 80 \cdot (1 - e^{-5M}), \quad (1.39)$$

$$Q_B = Q_B(M) = k_3 \cdot M^2 = 1,1 \cdot 10^3 \cdot M^2, \quad (1.40)$$

где $[Q] = m/ч$; $[M] = m$.

Необходимо составить в численном виде уравнение, в котором входной величиной является подводимый поток Q_1 , а выходными являются:

- 1) запас на грохоте M ;
- 2) подрешеточный продукт Q_H ;
- 3) надрешеточный продукт Q_B .

Решение. При составлении требуемых уравнений нужно исключить промежуточные переменные из совокупных уравнений (1.37) и (1.38).

1. Исключив Q_B и Q_H , получим

$$\frac{dM}{dt} + [80 \cdot (1 - e^{-5M}) + 1,1 \cdot 10^3 \cdot M^2] = Q_1 . \quad (1.41)$$

2. Из равенства (1.39) имеем $M = -\frac{1}{5} \cdot \ln \frac{80 - Q_H}{80}$, тогда

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{80}{80 - Q_H} \cdot \frac{1}{80} \cdot \left(-\frac{dQ_H}{dt} \right) = \frac{1}{5 \cdot (80 - Q_H)} \cdot \frac{dQ_H}{dt} .$$

Из равенства (1.40) найдем

$$Q_B = 1,1 \cdot 10^3 \cdot M^2 = 1,1 \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{5} \cdot \ln \frac{80 - Q_H}{80} \right)^2 .$$

Подставив $\frac{dM}{dt}$ и Q_B , выражение через Q_H , в балансное соотношение (1.37), получим

$$\frac{1}{5 \cdot (80 - Q_H)} \cdot \frac{dQ_H}{dt} + 1,1 \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{5} \cdot \ln \frac{80 - Q_H}{80} \right)^2 + Q_H = Q_1 . \quad (1.42)$$

Это нелинейное уравнение вида

$$f_1(Q_H) \cdot \frac{dQ_H}{dt} + f_2(Q_H) = Q_1 .$$

3. Из (1.40) найдем $M = \sqrt{\frac{Q_B}{1,1 \cdot 10^3}} = 0,03 \cdot \sqrt{Q_B}$, откуда

$$\frac{dM}{dt} = 0,03 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Q_B}} \cdot \frac{dQ_B}{dt} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{Q_B}} \cdot \frac{dQ_B}{dt} .$$

Из равенства (1.39) находим

$$Q_H = 80 \cdot [1 - \exp(-5 \cdot 0,03 \cdot \sqrt{Q_B})] .$$

Подставим $\frac{dM}{dt}$ и Q_H в балансное соотношение, получим

$$\frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{Q_B}} \cdot \frac{dQ_B}{dt} + 80 \cdot \left(1 - e^{-0,15 \cdot \sqrt{Q_B}}\right) + Q_B = Q_1. \quad (1.43)$$

Это тоже нелинейное уравнение вида

$$f_1(Q_B) \cdot \frac{dQ_B}{dt} + f_2(Q_B) = Q_1.$$

1.2.3. Общие уравнения измельчительных агрегатов

Составим уравнение мельницы (стержневой, шаровой), работающей в открытом цикле. Входной величиной считать подводимый поток Q_1 , выходной – интенсивность звукового излучения мельницы S на выходе измерительного прибора (рис. 1.10, а).

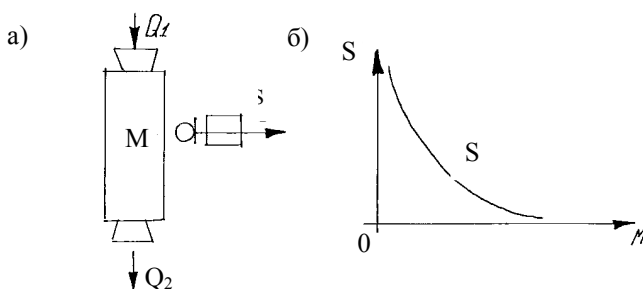


Рис. 1.10. Измерение шума мельницы(а);зависимость интенсивности шума мельницы от запаса материала (б)

Интенсивность звукового излучения S зависит от запаса M материала в мельнице

$$S = S(M). \quad (1.44)$$

Типичный график этой зависимости показан на рис. 1.10, б.

Помимо указанной существует еще дополнительная зависимость отводимого потока Q_2 от запаса M :

$$Q_2 = Q_2(M). \quad (1.45)$$

Общий ее вид показан на рис. 1.8, б, т. е. такой же, как для дробилки. Вместе с уравнением баланса

$$\frac{dM}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad (1.46)$$

эти зависимости составляют совокупные уравнения. Исключив из них промежуточные переменные Q_2 и M , получим решение задачи.

Из зависимости (1.44) находим обратную функцию $M = M(S)$ и далее

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial M(S)}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt},$$

из зависимости (1.45) найдем $Q_2 = Q_2[M(S)]$ и, подставив $\frac{dM}{dt}$ и Q_2 в (1.46), получим искомое уравнение

$$\frac{\partial[M(S)]}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt} + Q_2[M(S)] = Q_1.$$

Это есть уравнение вида

$$f_1(S) \cdot \frac{dS}{dt} + f_2(S) = Q_1.$$

Составим уравнения динамики измельчительного агрегата с замкнутым циклом, в котором поток исходного материала $Q_1, m/ч$ поступает в мельницу, разгрузка мельницы – в классификатор. Мелкий продукт из классификатора уходит потоком $Q_2, m/ч$, в сливе, а более крупный образует поток песков, поступающий в мельницу вместе с исходным материалом. В мельнице и классификаторе находится запас материала M, m .

Получим уравнение, связывающее выходную величину M с входной Q_1 , допуская стабильность плотности слива классификатора, тонкости помола, гранулометрического состава исходного материала и других факторов.

Прежде всего, можно написать уравнение баланса $\frac{dM}{dt} = Q_1 - Q_2$. Поток готового продукта Q_2 зависит непосредственно только от запаса M . Для равновесных режимов эта зависимость есть статическая характеристика $Q_2 = Q_2(M)$, общий вид которой показан штриховой линией на рис. 1.8, б и объясняется следующими рассуждениями. Если в агрегате совсем нет материала ($M=0$), то производительность по готовому продукту $Q_2 = 0$, т. к. нечего измельчать. С увеличением M величина Q_2 возрастает.

Однако если в агрегате слишком много материала и мельница заполнена им, например, полностью, образование вновь измельченного продукта почти прекращается; классификатор же позволяет уходить в слив только измельченному продукту, и поэтому поток Q_2 стремится к нулевому значению. Очевидно, что между этими крайними состояниями по запасу должно быть состояние, при котором агрегат развивает максимальную производительность, т. е. характеристика $Q_2 = Q_2(M)$ экстремальная.

Соотношение $Q_2 = Q_2(M)$ справедливо для установившихся режимов, а в переходных процессах может быть $Q_2 \neq Q_2(M)$. Оценим насколько быстро принимает установившееся значение Q_2 , будучи выведенный из этого состояния, т. е. представим, что точка, характеризующая состояние агрегата, не лежит на статической характеристике, а несколько отклонена от нее, и установим, как быстро она приблизится к характеристике и сольется с ней.

В теории устойчивости движения используют понятия: движение возмущенное, движение невозмущенное. Примем состояние равновесия $Q_{2cm} = Q_2(M)$ невозмущенным движением, а отклонения от него отнесем к движениям возмущенным и найдем уравнение возмущенного движения. Обозначим отклонение величины Q_2 от значения, соответствующего зависимости $Q_2 = Q_2(M)$, через $\Delta Q_2 = Q_2 - Q_2(M)$. Примем, что скорость изменения величины ΔQ_2 в возмущенном состоянии, т. е. в движении, при котором $\Delta Q_2 \rightarrow 0$ и $Q_2 \rightarrow Q_2(M)$, тем больше, чем больше, во-первых, само отклонение ΔQ_2 и, во-вторых – ско-

рость циркуляции материала в агрегате (т. е. чем быстрее вращаются спирали классификатора)

$$\frac{d\Delta Q_2}{dt} = -\omega \cdot \Delta Q_2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \Delta Q_2 = 0. \quad (1.47)$$

Число ω характеризует скорость циркуляции, быстроту процессов внутри агрегата. По замкнутому циклу агрегата циркулирует поток Π , общее количество материала M . Циркулируя, материал периодически пробегает зону, где его измельчают шары, причем пробегает тем чаще, чем больше Π и меньше M . Число $\omega = \Pi / M, \text{ пер/ч}$ характеризует частоту циркуляции. Его всегда можно оценить численно, зная циркулирующий поток Π и запас M . Число $T = \frac{1}{\omega}$ есть постоянная времени уравнения (1.47) возмущенного движения, характеризующая быстроту протекания переходных процессов $Q_2(t) \rightarrow Q_2[M(t)]$. На практике промышленные агрегаты обычно имеют $\omega = \Pi / M = (10 \div 15), \text{ пер/ч.}$, т. е. постоянная времени в рассмотренном возмущенном движении имеет порядок 4–6 мин.

Суммируя уравнение статики и возмущенного движения, получаем

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \Delta Q_2 + Q_{2CT} = Q_2(M). \quad (1.48)$$

Так как $Q_{2cm} + \Delta Q_2 = Q_2$ и $\frac{d\Delta Q_2}{dt} \approx \frac{d(Q_{2CT} + \Delta Q_2)}{dt} = \frac{dQ_2}{dt}$, то $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_2(M)$. Подставив сюда $Q_2 = Q_1 - \frac{dM}{dt}$ из уравнения баланса, получим

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\left(Q_1 - \frac{dM}{dt}\right)}{dt} + Q_1 - \frac{dM}{dt} = Q_2(M)$$

или

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d^2 M}{dt^2} + \frac{dM}{dt} + Q_2(M) = Q_1 + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dQ_1}{dt}, \quad (1.49)$$

которое является искомым уравнением.

Вследствие малости возмущенного движения им обычно пренебрегают. Тогда уравнение примет более простой для расчетов вид

$$\frac{dM}{dt} + Q_2(M) = Q_1.$$

Уравнение может быть получено и другим способом: можно выделить в агрегате две сосредоточенные емкости, удерживающие материал – мельницу и классификатор, и составить для них в отдельности буквенные уравнения подобно тому, как это делалось для каскада резервуаров.

Пример. Требуется составить уравнение конкретного измельчительного агрегата в численном виде, т. е. найти $Q_2(M)$ и ω . Известно, что максимальная производительность агрегата $Q_{\max}$ достигает 42 м/ч, соответствующий циркулирующий поток $\Pi_{\text{кр}} = 250$ м/ч. Агрегат состоит из мельницы типа МШЦ-27-36 (диаметр барабана 2700 мм, длина барабана 3600 мм, рабочий объем $V=18,5$ м³) и двухспирального классификатора с диаметром спирали $D = 2000$ мм и рабочей длиной корыта $L=9000$ мм (скорость спирали $n = 4$ об/мин, шаг спирали $S = 1250$ мм). Насыпной вес измельченного материала $\gamma = 2 \text{ т} / \text{м}^3$.

Решение. Аппроксимируем искомую функцию $Q_2(M)$ параболой:

$$Q_2(M) \approx Q_{2\max} - k \cdot (M - M_{\text{кр}})^2, \quad (1.50)$$

где k – неизвестный коэффициент формы параболы; $M_{\text{кр}}$ – известная абсцисса вершины параболы.

Величину $M_{\text{кр}}$ определяем по известной $\Pi_{\text{кр}}$. Для этого предварительно найдем зависимость между M и Π . Рассматривая классификатор как транспортирующую машину, имеем [9]

$$\Pi = 3600 \cdot m \cdot \psi \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \varphi \cdot \frac{S \cdot n}{60} \cdot \gamma, \quad (1.51)$$

где $m = 2$ – число спиралей; $\psi = 0,6$ – коэффициент заполнения поперечного сечения спирали материалом; $\varphi = 0,6$ – коэффици-

ент перехода от скорости движения спирали к скорости движения материала.

Вес материала, движущегося по корыту классификатора

$$M_{кл} = m \cdot \psi \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L \cdot \gamma \cdot \text{Из двух последних соотношений находим}$$

$$M_{кл} = \frac{\Pi \cdot L}{60 \cdot \varphi \cdot S \cdot n} \cdot \quad (1.52)$$

Определим теперь запас материала в мельнице. Шары заполняют мельницу обычно на 40 %. Отношение объема шаров к объему пространства, занимаемому ими при неподвижном барабане, примем равным $\pi/6$. Оптимальным запасом в мельнице считают случай, когда материал заполняет пространство между шарами, т. е.

$$M_M = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) \cdot V \cdot \gamma \cdot \quad (1.53)$$

Допустим, что при нормальном сопряжении мельницы с классификатором материал, находящийся в сопряженных желобах, составляет 10 % от $M_{кл} + M_M$.

Для случая, когда режимы работы агрегата недалеко отклоняются от вершины статической характеристики, можно записать

$$M = 1,1 \cdot (M_{кл} + M_M) = 1,1 \cdot \left[\frac{\Pi \cdot L}{60 \cdot \varphi \cdot S \cdot n} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) \cdot V \cdot \gamma \right] =$$

$$= 1,1 \cdot \left[\frac{\pi \cdot 9,0}{60 \cdot 0,6 \cdot 1,25 \cdot 4,0} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) \cdot 18,5 \cdot 2,0 \right] = 0,055 \cdot \Pi + 9,6, \quad (1.54)$$

где $[M] = m$; $[\Pi] = m/\psi$.

Неизвестная константа $M_{кр}$ определится теперь из выражения

$$M_{кр} = 0,055 \Pi_{кр} + 9,6 = 0,055 \cdot 250 + 9,6 = 23,5 m.$$

Теперь определим коэффициент К. Известно, что при измельчении увеличение циркулирующей нагрузки от $\Pi = 100 \%$

до $\Pi_{кр}$ повышает производительность в среднем в $2 \ln 2 = 1,38$ раза [10].

В нашем случае максимальная производительность $Q_{\max} = 42 \text{ м/ч}$ в 1,38 раза больше производительности в точке $\Pi = 100 \%$, поэтому при $\Pi = 100 \%$ имеем $Q_2(\Pi) = 42/1,38 = 30 \text{ м/ч}$. В абсолютных размерностях $\Pi = 100 \%$ теперь соответствует $\Pi = 30 \text{ т/ч}$. Поэтому запас в этой точке $M = 0,055 \cdot 30 + 9,6 = 11,3 \text{ т}$.

Получили, помимо уже известных координат вершины параболы $Q_{\max} = 42 \text{ м/ч}$ и $M_{кр} = 23,5 \text{ т}$, координаты еще одной точки: $Q_2 = 30 \text{ м/ч}$; $M = 11,3 \text{ т}$. По ним определим $K: 30 = 42 - K(11,3 - 23,5)^2$, откуда $K = 0,08 \frac{1}{\text{т} \cdot \text{ч}}$.

Тогда уравнение искомой параболы в численном виде

$$Q_2(M) \approx 42 - 0,08 \cdot (M - 23,5)^2.$$

Далее вычислим частоту циркуляции для режимов, близких к точке экстремума:

$$\omega = \frac{\Pi_{кр}}{M_{кр}} = \frac{250}{23,5} = 10,6 \text{ пер/ч}. \quad (1.55)$$

Теперь можно получить численную оценку динамических и статических свойств агрегата в виде уравнения

$$\frac{1}{10,6} \cdot \frac{d^2 M}{dt^2} + \frac{dM}{dt} + 42 - 0,08 \cdot (M - 23,5)^2 = Q_1 + \frac{1}{10,6} \cdot \frac{dQ_1}{dt} \quad (1.56)$$

или приближенно

$$\frac{dM}{dt} + 42 - 0,08 \cdot (M - 23,5)^2 = Q_1, \quad (1.57)$$

где $[M] = \text{т}$, $[Q_1] = \text{т/ч}$.

1.2.4. Уравнение гидравлического классификатора

Входной величиной является расход воды Q_B , подаваемой в классификатор, выходной — концентрация воды C_B в сливе

классификатора, либо плотность пульпы ρ , либо крупность частиц в сливе $\bar{\ell}$. Из классификатора в слив отводится смесь воды и твердого материала (рис. 1.11).

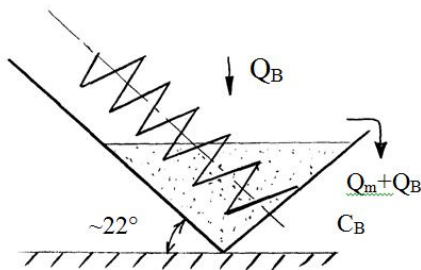


Рис. 1.11. Классификатор

Концентрация твердого в потоке пульпы, отводимом из классификатора,

$$C_T = \frac{Q_T}{Q_{BO} + Q_T} = \frac{Q_T}{Q_{СЛ}}; \quad (1.58)$$

концентрация воды

$$C_B = \frac{Q_{BO}}{Q_T + Q_{BO}} = \frac{Q_{BO}}{Q_{СЛ}}, \quad (1.59)$$

где Q_T – поток твердого, м³/ч; Q_{BO} – поток воды в сливе, м³/ч, $Q_{СЛ}$ – расход слива.

В рабочем объеме V классификатора находится M_B, m , воды и M_T, m , материала. Баланс воды дает $\frac{dM_B}{dt} = Q_B - Q_{BO}$ или, учитывая, что $M_T + M_B = V = const$,

$$\frac{M_T + M_B}{Q_T + Q_B} \cdot \frac{d\left(\frac{M_B}{M_T + M_B}\right)}{dt} = \frac{Q_B}{Q_T + Q_B} - \frac{Q_{BO}}{Q_T + Q_B}. \quad (1.60)$$

Количество $\frac{M_B}{M_T + M_B}$ и $\frac{Q_{BO}}{Q_T + Q_B}$, равные друг другу при идеальном перемешивании, есть C_B .

Обозначая $k_{II} = \frac{1}{Q_T + Q_B}$, получим

$$T \frac{dC_B}{dt} + C_B = k_{II} \cdot Q_B. \quad (1.61)$$

Постоянная времени T и коэффициент передачи K_{II} находятся расчетом.

От C_B можно перейти к плотности ρ пульпы на сливе классификатора. Уравнение для ρ получается аналогичным уравнению (1.61):

$$T \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho = -k_{\rho} \cdot q_B.$$

Приближенно уравнение динамики для частиц средней крупности $\bar{\ell}$ в сливе (либо для содержания β какого-либо класса) можно получить из предыдущего введением функциональной зависимости

$$\bar{\ell} = \ell(C_B); \quad \beta = \beta(C_B), \quad (1.62)$$

посредством которой $\bar{\ell}$ либо β вводится в уравнение (1.61) взамен C_B . Физически зависимость (1.62) объясняется тем, что при более плотных пульпах в слив уходят более крупные частицы, а при менее плотных – мелкие частицы.

1.3. Преобразование уравнений

Вводные замечания

Прежде чем переходить к изучению более сложных аппаратов и процессов, целесообразно рассмотреть некоторые приемы упрощения и преобразования уравнений. Это облегчит получение математического описания сложных объектов и систем.

Основной целью получения уравнений динамики является определение динамических свойств системы управления. Для этого тем или иным способом получают точное или приближенное решение уравнения. Наиболее просто решаются линейные дифференциальные уравнения. Но, как мы убедились выше, поведение объектов не всегда можно описать такими уравнениями. В то же время любую кривую на том или ином промежутке изменения аргумента с достаточной степенью точности можно аппроксимировать прямой линией. Другими словами, в определенном диапазоне изменения входных величин нелинейные уравнения могут быть заменены линейными, т. е. линеаризованы, и поэтому надо уметь производить линеаризацию. Вопрос о возможности такой замены решается с учетом условий работы проектируемой системы.

Линейные объекты удобно характеризовать передаточной функцией – отношением изображения по Лапласу выходной величины к изображению входной: $W(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)}$.

Это позволяет значительно упростить процедуру получения математического описания и исследования сложных систем.

1.3.1. Линеаризация уравнений

В качестве примера линеаризуем два нелинейных уравнения резервуара, рассмотренных выше:

$$\frac{dM}{dt} + 0,357 \cdot \sqrt{M} = Q_1; \quad 2 \cdot \left(\frac{1}{0,357} \right)^2 \cdot Q_2 \cdot \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_1,$$

где M – запас воды, см^3 ; Q_1 – подводимый поток, $\text{см}^3/\text{с}$; Q_2 – отводимый поток, $\text{см}^3/\text{с}$.

Линеаризацию произведем в окрестности рабочей точки:

а) $M_0 = 6 \cdot 10^5 \text{ см}^3$; б) $M_0 = 12 \cdot 10^5 \text{ см}^3$;

Линеаризация произвольной функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 производится следующим образом. Представляют $f(x)$ рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots,$$

отбрасывают все члены, начиная с третьего:

$$y = f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)$$

и переносят начало отсчета x и y в рабочую точку с координатами x_0 и $y_0 = f(x_0)$. Подставив новые координаты $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0 = y - f(x_0)$, получают $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x = k \cdot \Delta x$.

Геометрически это равносильно замене графика кривой $y = f(x)$ касательной к нему в рабочей точке с последующим переносом начало координат в точку касания.

Но при линеаризации уравнения не все функции уравнения нужно линеаризовать. В уравнении, например, вида $f_1(x) \cdot \frac{dx}{dt} + f_2(x) = x_0$ линеаризация обеих f_1 и f_2 не дает линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Нужно линеаризовать статическую характеристику $f_2(x)$, а взамен $f_1(x)$ следует просто подставить $f_2(x_0)$, т. е. в функциях, стоящих множителями перед производными, удерживается только первый член ряда Тейлора.

Для первого из заданных уравнений статическая характеристика определяется функцией $Q_1 = 0,357 \cdot \sqrt{M}$. Линеаризуя ее, получим

$$Q_1 = 0,357 \cdot \sqrt{M} \approx 0,357 \cdot \sqrt{M_0} + \frac{1}{1!} \cdot 0,357 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{M_0}} \right) \cdot (M - M_0)$$

или после переноса начала отсчета в рабочую точку $M_0 = 6 \cdot 10^5 \text{ см}^3$.

$$\Delta Q_1 = Q_1 - 0,357 \cdot \sqrt{M_0} = \frac{1}{1!} \cdot 0,357 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{M_0}} \right) \cdot (M - M_0) = 0,357 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{6 \cdot 10^5}} \right) \cdot \Delta M = 2,3 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta M$$

Производная

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(M_0 + \Delta M)}{dt} = \frac{d\Delta M}{dt},$$

следовательно, линеаризованное уравнение $\frac{d\Delta M}{dt} + 2,3 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta M = \Delta Q_1$,

где $\Delta M = M - 6 \cdot 10^5, \text{ см}^3$; $\Delta Q_1 = Q_1 - 0,357 \sqrt{M_0} = Q_1 - 2,76 \cdot 10^2, \text{ см}^3 / \text{с}$.

Линеаризуя это же уравнение в точке $M_0 = 12 \cdot 10^5 \text{ см}^3$, получим тем же путем для случая «б»:

$$6,1 \cdot 10^3 \frac{d\Delta M}{dt} + \Delta M = 6,1 \cdot 10^3 \cdot \Delta Q_1.$$

Для второго из заданных уравнений статическая характеристика линейна, поэтому лишь нужно множитель, стоящий перед производной $\frac{dQ_2}{dt}$, превратить в константу, которая определяется следующим образом. Заданной рабочей точке M_0 соответствуют потоки

$$Q_{10} = Q_{20} = 0,357 \cdot \sqrt{M_0}.$$

Значение Q_{20} нужно подставить в множитель при производной.

Для случая «а» получим $Q_{10} = Q_{20} = 2,76 \cdot 10^2 \text{ см}^3 / \text{с}$, затем

$$\frac{2}{(0,357)^2} \cdot 2,76 \cdot 10^2 \cdot \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \Delta Q_2 = \Delta Q_1, \text{ или } 4,34 \cdot 10^3 \cdot \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \Delta Q_2 = \Delta Q_1.$$

Постоянная времени $T_a = 4,34 \cdot 10^3 \text{ с}$ получилась равной постоянной времени для первого из заданных уравнений. Это всегда бывает для уравнений одного и того же объекта, если координаты уравнений участвуют в тех же самых переходных процессах, т. к. масштаб времени для них одинаков. Здесь такими координатами являются M и Q_2 .

Для случая «б» тем же путем получим

$$6,1 \cdot 10^3 \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \Delta Q_2 = \Delta Q_1,$$

где по-прежнему $\Delta Q_1 = Q_1 - 2,76 \cdot 10^2 \text{ см}^3 / \text{с}$; $\Delta Q_2 = Q_2 - 2,76 \cdot 10^2 \text{ см}^3 / \text{с}$.

Аналогично можно линеаризовать уравнения каскада из двух сборников.

1.3.2. Преобразование линейного дифференциального уравнения в операторную форму и наоборот

Прежде чем переходить к изучению более сложных аппаратов и процессов, целесообразно рассмотреть некоторые методы упрощения и преобразования уравнений. Это значительно облегчит получение математического описания сложных систем.

Линейные объекты наиболее удобно описывать передаточной функцией – отношением изображения по Лапласу выходной величины к изображению входной:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}.$$

Это позволяет значительно упростить процедуру получения математического описания и исследования сложных систем.

Для этого необходимо уметь преобразовать линейное дифференциальное уравнение в операторную форму и наоборот. Как это делается показано ниже.

Дано линейное уравнение в дифференциальной форме

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = b_0 x_0^{(m)} + b_1 x_0^{(m-1)} + \dots + b_m x_0, \quad (1.63)$$

где a_i и b_i – константы (коэффициенты), $x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ – выходной сигнал и его производные по времени; $x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(m)}$ – входной сигнал и его производные по времени.

Запишем (1.63) в операторной форме. Изображение любой функции времени $x(t)$ по Лапласу [11] (или Карсону – Хевисайду) есть

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad \text{или} \quad p \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt. \quad (1.64)$$

Для производной n -го порядка $x^{(n)}(t)$ изображение равно

$$p^n \cdot X(p). \quad (1.65)$$

Применив преобразование (1.64) к уравнению (1.63), получим

$$\int_0^{\infty} (a_0 x^{(n)} + \dots + a_n x) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} (b_0 x_0^{(m)} + \dots + b_m x_0) \cdot e^{-pt} \cdot dt \cdot$$

Раскрытие последнего с учетом (1.65) дает

$$a_0 \cdot p^n \cdot X(p) + a_1 \cdot p^{n-1} \cdot X(p) + \dots + a_n \cdot X(p) = b_0 \cdot p^m \cdot X_0(p) + b_1 \cdot p^{m-1} \cdot X_0(p) + \dots + b_m \cdot X_0(p)$$

или

$$X(p) \cdot [a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n] = X_0(p) \cdot [b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m]$$

Тогда окончательно имеем

$$W(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (1.66)$$

Таким образом, правило преобразования линейного дифференциального уравнения (1.63) в операторную форму (1.66), очень простое: производные заменяются степенями p . Переменная p – аргумент пространства Лапласа – имеет размерность частоты (1/с).

Для обратного преобразования уравнения системы известной в операторной форме в дифференциальную необходимо произвести выкладки в обратном порядке. Например, из

$$W(p) = \frac{0,5p + 2}{0,1p^3 + 4p^2 + 2p + 1,2} \text{ получается}$$

$$0,1 \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} + 4 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dx}{dt} + 1,2x = 0,5 \cdot \frac{dx_0}{dt} + 2x_0 \cdot$$

Выражение (1.66) справедливо только при нулевых начальных условиях.

Следует отметить, что технологические схемы сложных объектов имеют структурные схемы, представляющие собой соединения элементарных динамических звеньев. Многие технологические схемы имеют структурные схемы с перекрестными связями, для их преобразования необходимо использовать специальные правила преобразования структурных схем с перекрестными связями [12].

Контрольные вопросы и упражнения¹

1. Какими специальными характеристиками оцениваются объекты управления?
2. В чем заключается сущность методики составления уравнения сборника в общем виде?
3. Какие объекты обладают свойствами линейного самовыравнивания и их уравнение баланса?
4. Почему уравнение резервуара истечения является нелинейным?
5. Что изменится, если дополнительно к силе тяжести, выталкивающей жидкость из резервуара, учесть и внешнее давление в герметическом резервуаре?
6. Составьте уравнения смесителя с идеальным перемешиванием (двумя методами).
7. Составьте уравнение смесителя вытеснения.
8. Составьте уравнение теплообменника с интенсивным перемешиванием для случая, когда:
 - переноса тепла во внешнюю среду нет;
 - имеется перенос тепла во внешнюю среду;
 - стенки теплообменника массивны и нужно учитывать их теплоемкость.
9. Составьте уравнения динамики и дробилок, классификатора и измельчительного агрегата.
10. Линеаризуйте нелинейные уравнения резервуаров.
11. Преобразуйте линейное дифференциальное уравнение вида

$$0.01 \frac{dx^3}{dt^3} + 0.03 \frac{dx^2}{dt^2} + 1.2 \frac{dx}{dt} + 2.3 = 0.24 \frac{dX_0}{dt} + 1.8$$

в операторную форму и наоборот.

¹ Аппарат усвоения знаний (основные вопросы по главам курса, тесты, а также задания (по вариантам) к четырем обязательным самостоятельным работам по узловым разделам курса с методическими указаниями по их выполнению) полно освещены в УМК этой дисциплины и прилагаемых к нему методических разработках.

2 . ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

2.1. Идентификация статических характеристик промышленных объектов

Для конкретных расчетов при проектировании буквенные уравнения, как правило, ценности не представляют. Необходимо иметь не общее буквенное уравнение, а численное, соответствующее конкретному объекту. Получение численных уравнений из теоретических данных не всегда возможно. В подобных случаях прибегают к эксперименту, который заключается в измерении и регистрации одного или нескольких переменных или переходных процессов исследуемого объекта. Эти процессы соответствуют частным решениям искомого дифференциального уравнения.

Для получения статических характеристик промышленных объектов используют методы активного эксперимента, в основном, метод прямоугольной волны, если объект позволяет провести активные воздействия. Помимо этих детерминистских методов применяют методы статистической динамики – без искусственных воздействий на объект.

Сказанное относится к объектам линейным. Для нелинейных объектов тоже применяют детерминистский и вероятностный подходы. Но методы здесь значительно сложнее и пока практически приемлемы только для объектов первого порядка. Все технологические процессы рассмотреть невозможно, да и не нужно, поскольку методы носят общий для определенных групп динамических систем характер, и применимость их не зависит от физической природы объектов. Значение общих уравнений динамики, полученных в первом разделе, сводится здесь к тому, что они позволяют отнести объект к той или иной динамической группе (классу) и затем выбрать целесообразный метод экспериментального определения уравнения.

Следует иметь в виду, что исходный экспериментальный материал содержит погрешность измерений, поскольку является их результатом. Поэтому аккуратность и точность эксперимен-

та имеют большое значение. Погрешности измерений, способы их уменьшения, планирование самого эксперимента с целью повышения точности экспериментальных данных подробно рассмотрены в литературе, например, в [12]. Поэтому более подробно остановимся на методах обработки экспериментальных данных.

2.1.1. Определение функциональных зависимостей линейных объектов методом наименьших квадратов

При экспериментальном определении уравнений имеются погрешности измерений. Помимо борьбы с ними в процессе самих измерений [12], погрешности можно и нужно исключать, по возможности, при обработке результатов измерений. Одним из приемов является метод наименьших квадратов. Этот метод дает вероятнейший результат, если погрешности подчинены нормальному распределению и статистически независимы (некоррелированы). Предпосылкой метода является избыточность числа экспериментальных измерений. Если измеряется одно неизвестное количество, то принципиально необходим только один эксперимент. Однако экспериментов проводят больше и результаты усредняют. В данном случае усреднение выполняется по методу наименьших квадратов, который дает минимум суммы квадратов отклонений отдельных измерений от усредненной величины.

Пусть для определения неизвестного количества x произведено n измерений с результатами $y_1, y_2, \dots, y_n$. Составим разности $y_1 - x, y_2 - x, \dots, y_n - x$ и квадраты их $(y_1 - x)^2, (y_2 - x)^2, \dots, (y_n - x)^2$. Величину x надо выбрать такой, чтобы сумма квадратов была минимальной:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x)^2 \rightarrow \min \quad (2.1)$$

Этому отвечает условие

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - x)^2}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x) = 0.$$

Откуда получаем

$$x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i . \quad (2.2)$$

Если отдельные измерения неравноточны, то минимизировать надо величину

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot (y_i - x)^2 \rightarrow \min , \quad (2.3)$$

где σ_i^2 – дисперсия погрешности отдельного измерения. При $\sigma_i^2 = \text{const}$ получаем выражение (2.1).

При измерении функциональных зависимостей между несколькими количествами этот метод требует более сложных вычислений, которые рассмотрим на примерах.

Пример 2.1

В табл. 2.1 и на рис. 2.1, а, приведены результаты экспериментального определения статической характеристики линейной динамической системы.

Требуется методом наименьших квадратов найти статическую зависимость между входной x и выходной y величинами объекта.

Решение. Запишем искомую зависимость в виде

$$y + Ax + B = 0 \quad (2.4)$$

Достаточно взять две пары значений x_i и y_i , чтобы из двух полученных уравнений найти A и B . Но подстановка других экспериментальных величин x_i и y_i не удовлетворит уравнение и будет получаться

$$y_i + Ax_i + B = \delta_i \neq 0 . \quad (2.5)$$

Невязки δ_i с геометрической точки зрения равны расстояниям соответствующих точек (x_i, y_i) до выбранной прямой $y + Ax + B = 0$. Эту прямую, т. е. ее параметры A и B , нужно выбрать так, чтобы в среднем невязки были минималь-

ными. Метод наименьших квадратов Гаусса проводит прямую так, чтобы сумма квадратов невязок была минимальной: $\sum \delta_i^2 = \min$.

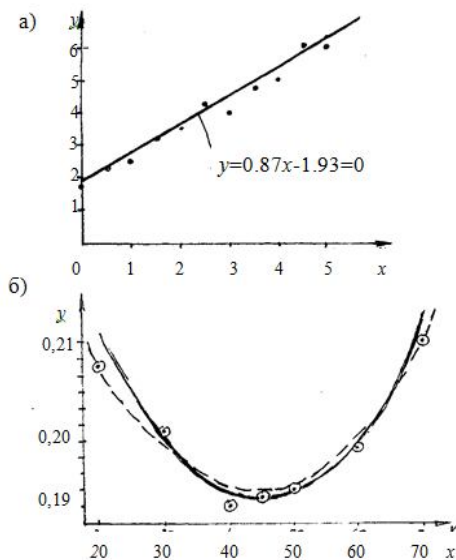


Рис. 2.1. Выравнивание линейной (а) и нелинейной зависимости (б)

При использовании метода предполагают нормальность закона распределения δ_i как случайной величины. Пусть при измерениях величин x_i и y_i в одних и тех же условиях, одними и теми же приборами получены для (2.4) следующие невязки $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$.

Вероятность совместного появления этих n взаимно независимых невязок, равная произведению отдельных вероятностей, пропорционально величине

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\delta_1^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\delta_2^2}{2\sigma^2}} \dots \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\delta_n^2}{2\sigma^2}} = \\ & = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Значения констант A и B будут вероятнейшими, если эта величина будет наибольшей, что обеспечивается при

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \min. \quad (2.7)$$

Минимум $\sum_{i=1}^n \delta_i^2$ дает также минимум среднеквадратичной

невязки

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}}.$$

Как выбрать A и B , чтобы получить минимум $\sum_{i=1}^n \delta_i^2$? Ключевыми являются равенства, определяемые необходимым условием существования экстремума

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \delta_i^2}{\partial A} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^n \delta_i^2}{\partial B} = 0. \quad (2.8)$$

Чтобы их развернуть, составляют из результатов эксперимента так называемую условную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_1 + Ax_1 + B &= \delta_1; \\ y_2 + Ax_2 + B &= \delta_2; \\ &\dots\dots\dots \\ y_n + Ax_n + B &= \delta_n. \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

Каждое условное уравнение возводят в квадрат:

$$\left. \begin{aligned} y_1^2 + A^2 x_1^2 + B^2 + 2Ax_1 y_1 + 2By_1 + 2ABx_1 &= \delta_1^2, \\ y_2^2 + A^2 x_2^2 + B^2 + 2Ax_2 y_2 + 2By_2 + 2ABx_2 &= \delta_2^2, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n^2 + A^2 x_n^2 + B^2 + 2Ax_n y_n + 2By_n + 2ABx_n &= \delta_n^2. \end{aligned} \right\}. \quad (2.10)$$

Таблица 2.1

Результаты расчета

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n=11
x_i	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	$\Sigma x_i=27,50$
y_i	1,75	2,3	2,5	3,2	3,5	4,25	4,0	4,7	5,0	6,0	6,0	$\Sigma y_i=43,20$
x_i^2	0,0	0,25	1,0	2,25	4,0	6,25	9,0	12,25	16,0	20,25	25	$\Sigma x_i^2=96,25$
$x_i y_i$	0,0	1,15	2,5	4,8	7,0	10,625	12,0	16,45	20,0	27,0	30,0	$\Sigma x_i y_i=131,45$

Все их суммируют:

$$\sum y_i^2 + A^2 \sum x_i^2 + nB^2 + 2A \sum x_i y_i + 2B \sum y_i + 2AB \sum x_i = \sum \delta_i^2, \quad (2.11)$$

находят два так называемых нормальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sum \delta_i^2}{\partial A} &= 2A \sum x_i^2 + 2 \sum x_i y_i + 2B \sum x_i = 0 \\ \frac{\partial \sum \delta_i^2}{\partial B} &= 2nB + 2 \sum y_i + 2A \sum x_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

или

$$\begin{aligned} A \sum x_i^2 + B \sum x_i &= - \sum x_i y_i, \\ A \sum x_i^2 + B \cdot n &= - \sum y_i, \end{aligned}$$

откуда вычисляют вероятнейшие значения A и B .

Для рассматриваемого численного примера числа $n=11$; $\sum x_i = 27,5$; $\sum y_i = 43,20$; $\sum x_i^2 = 96,25$; $\sum x_i y_i = 131,45$ подсчитаны в табл. 2.1.

Нормальные уравнения для заданного примера приобретают вид

$$\begin{aligned} 96,25A + 27,5B &= -131,45, \\ 27,5A + 11B &= -43,20, \end{aligned}$$

откуда

$$A = -\frac{131,45 \cdot 11 - 43,2 \cdot 27,5}{96,25 \cdot 11 - 27,5 \cdot 27,5} = -0,87;$$
$$B = \frac{96,25 \cdot 43,2 - 27,5 \cdot 131,45}{96,25 \cdot 11 - 27,5 \cdot 27,5} = -1,93.$$

Искомое усредненное уравнение получилось в виде

$$y - 0,87x - 1,93 = 0$$

На рис. 2.1, *а*, показана соответствующая линия.

При отыскании зависимости между x и y в виде $y + Ax + B = 0$ предполагаем, что экспериментальные измерения входной величины x производятся много точнее, чем выходной величины y . Так обычно и бывает на практике. Если же имеет место обратное явление, то зависимость ищут в виде

$$x + A_1 y + B_1 = 0. \quad (2.13)$$

Константы A_1 и B_1 находят из уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cdot \sum y_i^2 + B_1 \cdot \sum y_i &= -\sum x_i \cdot y_i \\ A_1 \cdot \sum y_i + B_1 \cdot n &= -\sum x_i \end{aligned} \right\}. \quad (2.14)$$

Применение метода наименьших квадратов к уравнению в форме (2.4) и уравнению (2.13) дает не совсем одинаковые результаты (линии на графике не сливаются, рис. 2.1.б). Об этих деталях подробно рассмотрено в [7].

2.1.2. Определение функциональной зависимости нелинейного объекта

Пример 2.2

В табл. 2.2. и на рис. 2.1, б, приведены результаты экспериментального определения статической характеристики нелинейного объекта (влияние уровня загрузки мельницы углем на амплитуду шума).

Таблица 2.2

Данные эксперимента

i – номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x – вход	20	30	40	45	50	60	70
y – выход	0,207	0,199	0,19	0,191	0,192	0,197	0,21

Требуется по методу наименьших квадратов найти аналитическую зависимость между входной x и выходной y величинами объекта.

Решение

Прежде всего необходимо задать вид аналитической зависимости. По экспериментальным данным (рис.2.1, б) можно принять выравнивание полученных точек параболой

$$y = A + Bx + Cx^2. \quad (2.15)$$

Тогда задача сводится к определению вероятнейших значений констант A , B и C . Первым шагом определяются приближенные значения A^1 , B^1 и C^1 .

Для этого можно взять три произвольные экспериментальные точки и трижды подставить их координаты в искомое уравнение, что дает три уравнения, из которых определяются приближенные значения A^1 , B^1 и C^1 . Наиболее целесообразно выбрать точки, равномерно распределенные в заданном промежутке изменения входа. Найдя A^1 , B^1 и C^1 , можно методом наименьших квадратов отыскать поправки к ним.

Для определения A^1 , B^1 и C^1 возьмем, например, 1, 4 и 7 точки из табл. 2.2 как наиболее точно вырисовывающие контур искомой параболы. Получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 0,207 &= A' + B' \cdot 20 + C' \cdot 20^2 \\ 0,131 &= A' + B' \cdot 45 + C' \cdot 45^2 \\ 0,21 &= A' + B' \cdot 70 + C' \cdot 70^2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.16)$$

Из (2.16) вычисляем $A' = 0,245; B' = -0,246 \cdot 10^{-2}; C' = 0,28 \cdot 10^{-4}$.

Теперь нужно вычислить поправки:

$$\left. \begin{aligned} A &= A' + \Delta A = 0,245 + \Delta A \\ B &= B' + \Delta B = -0,246 \cdot 10^{-2} + \Delta B \\ C &= C' + \Delta C = 0,28 \cdot 10^{-4} + \Delta C \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Найдем отклонения ординат экспериментальных точек от приближенной параболы $y' = A' + B' \cdot x + C' \cdot x^2$. Для этого в уравнении параболы подставим значения $x_1 = 20, x_2 = 30, \dots, x_7 = 70$, соответствующие экспериментальным данным x_i :

$$y'_1 = A' + B' \cdot x_1 + C' \cdot x_1^2 = 0,245 - 0,246 \cdot 10^{-2} \cdot 20 + 0,28 \cdot 10^{-4} \cdot 20^2 = 0,207;$$

$$y'_2 = A' + B' \cdot x_2 + C' \cdot x_2^2 = 0,245 - 0,246 \cdot 10^{-2} \cdot 30 + 0,28 \cdot 10^{-4} \cdot 30^2 = 0,1964;$$

по аналогии получим y'_3, y'_4, y'_5, y'_6 и y'_7 , которые равны:

$$y'_3 = 0,1914; y'_4 = 0,1912; y'_5 = 0,1920; y'_6 = 0,1980; y'_7 = 0,2100.$$

Вычитая эти количества из соответствующих экспериментальных величин y_i , получаем

$$\Delta y_1 = 0,207 - 0,207 = 0,00;$$

$$\Delta y_2 = 0,1990 - 0,1964 = 0,26 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta y_3 = 0,1900 - 0,1914 = -0,14 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta y_4 = 0,1910 - 0,1912 = -0,02 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta y_5 = 0,1920 - 0,1920 = 0,00;$$

$$\Delta y_6 = 0,1970 - 0,1980 = -0,1 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta y_7 = 0,2100 - 0,210 = 0,00.$$

Поправки $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ определяем следующим образом. Подставив $A' + \Delta A, B' + \Delta B, C' + \Delta C$ в уравнение

$$y_i = (A' + \Delta A) + (B' + \Delta B) \cdot x_i + (C' + \Delta C) \cdot x_i^2$$

и вычтя из него

$$y_i^1 = A' + B' \cdot x_i + C' \cdot x_i^2,$$

получим уравнения для вычисления поправок:

$y_i - y_i^1 = \Delta y_i = \Delta A + \Delta B \cdot x_i + \Delta C \cdot x_i^2$ или в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A + \Delta B \cdot 20 + \Delta C \cdot 20^2 &= 0,00; \\ \Delta A + \Delta B \cdot 30 + \Delta C \cdot 30^2 &= 0,26 \cdot 10^{-2}; \\ \Delta A + \Delta B \cdot 40 + \Delta C \cdot 40^2 &= -0,14 \cdot 10^{-2}; \\ \Delta A + \Delta B \cdot 45 + \Delta C \cdot 45^2 &= -0,02 \cdot 10^{-2}; \\ \Delta A + \Delta B \cdot 50 + \Delta C \cdot 50^2 &= 0,00; \\ \Delta A + \Delta B \cdot 60 + \Delta C \cdot 60^2 &= -0,1 \cdot 10^{-2}; \\ \Delta A + \Delta B \cdot 70 + \Delta C \cdot 70^2 &= 0,00. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Полученная условная система содержит уравнений больше, чем неизвестных. Для вычисления вероятнейших значений $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ следует применить метод наименьших квадратов. Для этого нужно возвести в квадрат все уравнения, сложить их, а затем из условия развернуть в три нормальные уравнения для вычисления $\Delta A, \Delta B, \Delta C$.

$$\frac{\partial \sum \Delta y_i^2}{\partial \Delta A} = 0; \quad \frac{\partial \sum \Delta y_i^2}{\partial \Delta B} = 0; \quad \frac{\partial \sum \Delta y_i^2}{\partial \Delta C} = 0 \quad (2.19)$$

Быстрее условную систему можно преобразовать в нормальную по следующему правилу:

— для составления первого нормального уравнения надо каждое из условных уравнений умножить на коэффициент при первой неизвестной, в нем стоящий, и все полученные таким образом уравнения сложить;

— для составления второго нормального уравнения надо каждое условное уравнение умножить на коэффициент при второй неизвестной, в этом уравнении стоящий и все полученные таким образом уравнения сложить и т. д. Очевидно, будет получено столько нормальных уравнений, сколько неизвестных. Это правило можно было применить и для предыдущей задачи. Так как во всех уравнениях (2.18) коэффициент при первой неизвестной

ΔA равен единице, то достаточно уравнения просто сложить, чтобы получить первое нормальное уравнение

$$\Delta A \cdot 7 + \Delta B \cdot 315 + \Delta C \cdot 15925 = 0,00.$$

Для нахождения второго нормального уравнения нужно сложить

$$\Delta A \cdot 20 + \Delta B \cdot 20 \cdot 20 + \Delta C \cdot 20^2 \cdot 20 = 0,00 \cdot 20;$$

$$\Delta A \cdot 30 + \Delta B \cdot 30 \cdot 30 + \Delta C \cdot 30^2 \cdot 30 = 0,26 \cdot 10^{-2} \cdot 30;$$

$$\Delta A \cdot 40 + \Delta B \cdot 40 \cdot 40 + \Delta C \cdot 40^2 \cdot 40 = -0,14 \cdot 10^{-2} \cdot 40;$$

$$\Delta A \cdot 45 + \Delta B \cdot 45 \cdot 45 + \Delta C \cdot 45^2 \cdot 45 = -0,02 \cdot 10^{-2} \cdot 45;$$

$$\Delta A \cdot 50 + \Delta B \cdot 50 \cdot 50 + \Delta C \cdot 50^2 \cdot 50 = 0,00 \cdot 50;$$

$$\Delta A \cdot 60 + \Delta B \cdot 60 \cdot 60 + \Delta C \cdot 60^2 \cdot 60 = -0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 60;$$

$$\Delta A \cdot 70 + \Delta B \cdot 70 \cdot 70 + \Delta C \cdot 70^2 \cdot 70 = 0,00 \cdot 70.$$

Получим

$$\Delta A \cdot 315 + \Delta B \cdot 15925 + \Delta C \cdot 874125 = -4,7 \cdot 10^{-2}.$$

Для нахождения третьего нормального уравнения нужно сложить

$$\Delta A \cdot 20^2 + \Delta B \cdot 20 \cdot 20^2 + \Delta C \cdot 20^2 \cdot 20^2 = 0,00 \cdot 20^2;$$

$$\Delta A \cdot 30^2 + \Delta B \cdot 30 \cdot 30^2 + \Delta C \cdot 30^2 \cdot 30^2 = 0,26 \cdot 10^{-2} \cdot 30^2;$$

$$\Delta A \cdot 40^2 + \Delta B \cdot 40 \cdot 40^2 + \Delta C \cdot 40^2 \cdot 40^2 = -0,14 \cdot 10^{-2} \cdot 40^2;$$

$$\Delta A \cdot 45^2 + \Delta B \cdot 45 \cdot 45^2 + \Delta C \cdot 45^2 \cdot 45^2 = -0,02 \cdot 10^{-2} \cdot 45^2;$$

$$\Delta A \cdot 50^2 + \Delta B \cdot 50 \cdot 50^2 + \Delta C \cdot 50^2 \cdot 50^2 = 0,00 \cdot 50^2;$$

$$\Delta A \cdot 60^2 + \Delta B \cdot 60 \cdot 60^2 + \Delta C \cdot 60^2 \cdot 60^2 = -0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 60^2;$$

$$\Delta A \cdot 70^2 + \Delta B \cdot 70 \cdot 70^2 + \Delta C \cdot 70^2 \cdot 70^2 = 0,00 \cdot 70^2.$$

Получим

$$\Delta A \cdot 15925 + \Delta B \cdot 874125 + \Delta C \cdot 50850625 = -3,905.$$

Из полученных трех нормальных уравнений:

$$\Delta A \cdot 7 + \Delta B \cdot 315 + \Delta C \cdot 15925 = 0,00;$$

$$\Delta A \cdot 315 + \Delta B \cdot 15925 + \Delta C \cdot 874125 = -4,7 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta A \cdot 15925 + \Delta B \cdot 874125 + \Delta C \cdot 50850625 = -3,905$$

вычисляются поправки:

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{0,0581}{7} = 0,0083; \\ \Delta B &= \frac{1,7216125}{7809,375} = -0,0221 \cdot 10^{-2}; \\ \Delta C &= \frac{0,0056875}{7809,375} = 0,0073 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Введя поправки в ранее приближенно вычисленные параметры параболы (2.17), получим

$$\begin{aligned}A &= A' + \Delta A = 0,245 + 0,0083 = 0,2533; \\ B &= B' + \Delta B = -0,246 \cdot 10^{-2} - 0,0221 \cdot 10^{-2} = -0,2681 \cdot 10^{-2}; \\ C &= C' + \Delta C = 0,28 \cdot 10^{-4} + 0,0073 \cdot 10^{-4} = 0,2873 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Тогда уравнение усредненной параболы получается в виде

$$y = 0,2583 - 0,2681 \cdot 10^{-2} \cdot x + 0,2873 \cdot 10^{-4} \cdot x^2. \quad (2.20)$$

На рис. 2.1,б, нанесены экспериментальные точки, приближенная (штриховая) и усредненная параболы.

Уточненные коэффициенты используются при технико-экономических расчетах работы системы управления объектом.

2.2. Определение уравнений объектов по кривым разгона

Для получения уравнений объектов прибегают к эксперименту, который заключается в измерении и регистрации одного или нескольких переходных процессов. Эти процессы соответствуют частным решениям искомого дифференциального уравнения.

Наибольшее применение в автоматизации получили два вида экспериментов: снятие кривых разгона и снятие частотных характеристик. В первом случае регистрируемым частным решением искомого уравнения является реакция объекта на стандартное ступенчатое изменение входной величины, по которой и определяют уравнение объекта.

Во втором случае регистрируется не одно частное решение, а несколько. Решениями этими являются установившиеся колебания выходной величины объекта, вынуждаемые искусственными периодическими колебаниями входной величины на различных фиксированных частотах. Эти частные решения – частотные характеристики объекта – представляют исходный материал для последующего нахождения уравнения.

Если на объекте невозможно применить активный эксперимент, то применяют методы статистической динамики без использования искусственных воздействий на объект.

Для линейного дифференциального уравнения вида

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + x = b_0 \cdot x_0^m + b_1 \cdot x_0^{m-1} + \dots + b_m \cdot x_0, \quad (2.21)$$

$n > m$; x, x_0 – выход и вход объекта) решение при нулевых начальных условиях и скачкообразном изменении входа X_0 можно записать аналитически в виде функции времени и коэффициентов:

$$x = x_{cm} \cdot (t, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m). \quad (2.22)$$

и обратно, если известен порядок уравнения объекта (2.21) и экспериментально получена реакция $x_{cm}(t)$ на ступенчатое изменение входа, то можно вычислить $n + m + 1$ коэффициентов a_i, b_i уравнения (2.21). Для этого приравниваются аналитическое решение $x(t)$ (2.22), в котором фигурируют коэффициенты a_i, b_i и реакция $x_{cm}^1(t)$ при различных значениях времени $t = t_i (i = 1, 2, \dots, m + n + 1)$. В результате получается система из $m + n + 1$ уравнений с неизвестными коэффициентами a_i, b_i :

$$x_{cm}(t_i, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m) = x_{cm}^1(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, m + n + 1, \quad (2.23)$$

из которой вычисляются искомые коэффициенты. Таким образом, $n + m + 1$ дискретных ординат $x_{cm}^1(t)$ кривой разгона позволяют получить $m + n + 1$ неизвестных коэффициентов. Возможны различные вариации этой идеи, вплоть до примене-

ния других видов реакции. Можно взять и избыточное число ординат и применять метод наименьших квадратов.

Здесь существенно знание порядка уравнения объекта (2.21). Аналитический вид решений (2.22) различен для уравнений разного порядка и, если принятый априорно порядок n меньше, имеющего места на деле, то этот прием приравнивания ординат аналитического решения и «экспериментального решения» дает неверные a_i и b_i . Если n взято большим, то это не страшно, т. к. лишние коэффициенты обратятся в нуль. Априорно порядок уравнения объекта определяется по числу сосредоточенных емкостей в объекте (см. гл.1).

2.2.1. Определение уравнения объекта первого порядка по кривой разгона экспоненциальной формы

На рис. 2.2 показана кривая разгона $y(t)$ одноемкостного линейного объекта. В момент времени $t_0 = 0$ входную величину x изменили скачком на a единиц.

Необходимо написать в численном виде уравнение объекта. Искомое уравнение имеет вид

$$T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x \quad \text{или} \quad \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp + 1} \quad (2.24)$$

и нужно определить константы T и K .

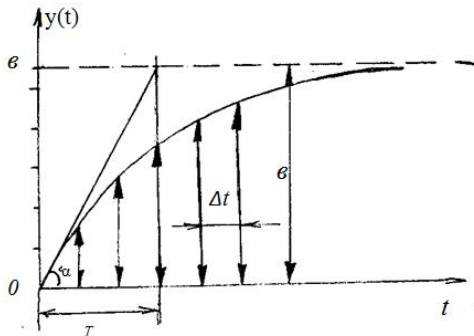


Рис. 2.2. К определению уравнения объекта первого порядка по кривой разгона

Вначале найдем аналитическое выражение решения уравнения при данных условиях. Это решение будет содержать константы T и K . Полученная кривая разгона есть графическое решение, тогда, сравнив график с его аналитическим выражением, найдем константы этого аналитического выражения. Общий вид решения для условий $y = 0$ при $t = 0$ и $x = a$ при $t > 0$ имеет вид [13]

$$y(t) = K \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (2.25)$$

Принципиально достаточно взять пару любых точек из графика, подставить их координаты в решение и затем из полученных двух уравнений вычислить T и K . Но уравнения эти трансцендентные:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= K \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \right) \\ y_2(t) &= K \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_2}{T}} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (2.26)$$

и вычислить корни их K и T затруднительно. Поэтому можно применить следующий прием. При $t \rightarrow \infty$ имеем $y(t) = k \cdot a$, следовательно, ордината асимптоты, к которой стремится y , дает возможность определить k простым делением на a , т. е.

$$K = \frac{b}{a}. \quad (2.27)$$

Для вычисления T продифференцируем решение

$$\frac{dy(t)}{dt} = K \cdot a \cdot \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

и устремим t к нулю

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = K \cdot a \cdot \frac{1}{T} = \frac{b}{T} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.28)$$

где α – угол наклона касательной, проведенной к графику $y(t)$ при $t = 0$. Поэтому

$$T = \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} . \quad (2.29)$$

Итак, T численно равна длине подкасательной в пределах от начала координат до точки пересечения ее с упомянутой асимптотой.

Такое решение самое простое, но не точное, т. к. трудно точно провести касательную и указать ординату асимптоты b . При таком решении используется только начало и конец графика, а все промежуточные его точки из рассмотрения выпадают.

Рассмотрим более точный прием. Разобьем график равноотстоящими на интервал Δt ординатами y_0, y_1, y_2 и т. д. Для этих точек, согласно решению уравнения, можно записать

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= K \cdot a \cdot (1 - e^{\frac{0}{T}}); \\ y_1 &= K \cdot a \cdot (1 - e^{\frac{-\Delta t}{T}}); \\ y_2 &= K \cdot a \cdot (1 - e^{\frac{-2\Delta t}{T}}); \\ y_3 &= K \cdot a \cdot (1 - e^{\frac{-3\Delta t}{T}}) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

и т. д.

Вычтем попарно из последующих уравнений предыдущие:

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y_0 &= K \cdot a - K \cdot a \cdot e^{\frac{-\Delta t}{T}}; \\ y_2 - y_1 &= K \cdot a \cdot e^{\frac{-\Delta t}{T}} - K \cdot a \cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T}}; \\ y_3 - y_2 &= K \cdot a \cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T}} - K \cdot a \cdot e^{\frac{-3\Delta t}{T}} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

и т. д.

Обозначим для краткости $e^{\frac{\Delta t}{T}} = q$, тогда

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y_0 &= k \cdot a \cdot (1 - q); \\ y_2 - y_1 &= k \cdot a \cdot q \cdot (1 - q); \\ y_3 - y_2 &= k \cdot a \cdot q^2 \cdot (1 - q); \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

и т. д.

Разделив каждое последующее из этих равенств на предыдущее, получим ряд значений q :

$$q_1 = \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}; q_2 = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}; q_3 = \frac{y_4 - y_3}{y_3 - y_2}; \quad (2.33)$$

и т. д., число, отличающееся одно от другого из-за погрешностей экспериментального измерения и регистрации $y(t)$.

Более точное усредненное значение дает среднеарифметическое $\bar{q}$ из вычисленных рассмотренным путем отдельных q_i . Затем уточненная постоянная времени $\bar{T}$ определяется из выражения

$$\bar{T} = -\frac{\Delta t}{\ln q} \quad (2.34)$$

Аналогично по известным q_i определяются отдельные K_i :

$$K_1 = \frac{y_1 - y_0}{a \cdot (1 - q)}; K_2 = \frac{y_2 - y_1}{a \cdot q_2 \cdot (1 - q_2)}; K_3 = \frac{y_3 - y_1}{a \cdot q_2^2 \cdot (1 - q_3)}; \quad (2.35)$$

и т. д.

Затем находится среднеарифметическое $\bar{K}$ из K_1, K_2, K_3 и т. д.

Для самостоятельной работы студентов предлагается задаться масштабами по оси графика на рис. 2.2, величиной a , величиной Δt и, взяв 7–8 ординат $y_0, y_1, \dots, y_8$, вычислить $\bar{K}$ и $\bar{T}$ сравнить их с полученными значениями K и T , полученных графически.

2.2.2. Определение уравнения объекта второго порядка с монотонной кривой разгона S-образной формы

На рис. 2.3 дана кривая разгона объекта, описываемая уравнением второго порядка

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x; \quad (2.36)$$

Ступенчатое воздействие входа $x = a$. Вычислить константы T_1, T_2 и k , если известно, что возмещение входа было единичным $x = a = 1$ при $t > 0$.

Так же, как и в предыдущем случае (п.2.2.1), вначале следует написать в общем виде решение уравнения.

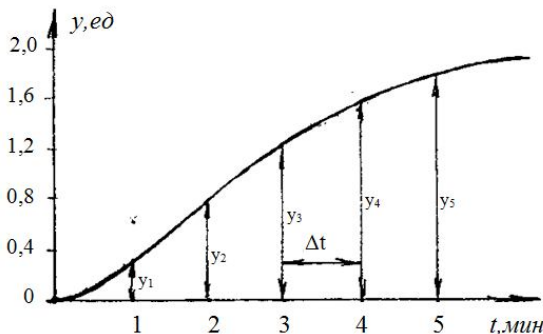


Рис. 2.3. К определению уравнения объекта второго порядка с S-образной кривой разгона

Запишем его в общем виде

$$y_{общ}(t) = C_1 \cdot e^{\frac{-t}{T_1}} + C_2 \cdot e^{\frac{-t}{T_2}} + K \cdot a, \quad (2.37)$$

затем из начальных условий $y = 0$; $\frac{dy}{dt} = 0$ при $t=0$ определяют произвольные постоянные

$$\left. \begin{aligned} y_{i\ddot{u}}(0) &= C_1 \cdot e^{\frac{-0}{T_1}} + C_2 \cdot e^{\frac{-0}{T_2}} + k \cdot a = 0; \\ y'_{i\ddot{u}}(0) &= -C_1 \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{\frac{-0}{T_1}} - C_2 \cdot \frac{1}{T_2} \cdot e^{\frac{-0}{T_2}} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.38)$$

откуда

$$C_1 = \frac{k \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1}; \quad C_2 = \frac{k \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2}. \quad (2.39)$$

Искомое частное решение получается в виде

$$y(t) = K \cdot a \cdot \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{\frac{-t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{\frac{-t}{T_2}} \right). \quad (2.40)$$

Теперь принципиально достаточно взять координаты y_i , t_i трех произвольных точек из заданного графика, подставить их трижды в решение и из полученных этим путем трех уравнений найти корни K , T_1 , T_2 . Но эти уравнения трансцендентны, и вычислять корни сложно, поэтому проще и удобнее использовать метод А.Н. Крылова.

Для этого разобьем график $y(t)$ равноотстоящими с интервалом Δt ординатами y_0 , y_1 , y_2 и т. д. и запишем

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= K \cdot a + \frac{K \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1} + \frac{K \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2}; \\ y_1 &= K \cdot a \cdot \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{\frac{-\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{\frac{-\Delta t}{T_2}} \right); \\ y_2 &= K \cdot a \cdot \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T_2}} \right); \\ y_3 &= K \cdot a \cdot \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{\frac{-3\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{\frac{-3\Delta t}{T_2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

и т. д.

$$\text{Обозначив } A_1 = k \cdot a; \quad A_2 = \frac{K \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1}; \quad A_3 = \frac{K \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2}; \quad p = e^{\frac{-\Delta t}{T_1}};$$

$$q = e^{\frac{-\Delta t}{T_2}}, \text{ перепишем их в виде}$$

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= A_1 + A_2 + A_3; \\ y_1 &= A_1 + A_2 \cdot p + A_3 \cdot q; \\ y_2 &= A_1 + A_2 \cdot p^2 + A_3 \cdot q^2; \\ y_3 &= A_1 + A_2 \cdot p^3 + A_3 \cdot q^3; \\ y_4 &= A_1 + A_2 \cdot p^4 + A_3 \cdot q^4; \\ y_5 &= A_1 + A_2 \cdot p^5 + A_3 \cdot q^5. \end{aligned} \right\}. \quad (2.42)$$

Будем считать числа 1 , p и q корнями кубического уравнения

$$\lambda^3 + B_1 \cdot \lambda^2 + B_2 \cdot \lambda + B_3 = 0. \quad (2.43)$$

Умножим первую строку на B_3 , вторую на $-B_2$, третью на $-B_1$, четвертую на -1 и сложим их, тогда правые части дадут в сумме нуль, поэтому получим

$$y_0 \cdot B_3 + y_1 \cdot B_2 + y_2 \cdot B_1 + y_3 = 0. \quad (2.44)$$

Проведем ту же операцию со следующими четырьмя строками:

$$y_1 \cdot B_3 + y_2 \cdot B_2 + y_3 \cdot B_1 + y_4 = 0. \quad (2.45)$$

Следующие четыре строки дадут

$$y_2 \cdot B_3 + y_3 \cdot B_2 + y_4 \cdot B_1 + y_5 = 0. \quad (2.46)$$

В этих трех равенствах ординаты y_i известны из кривой разгона, а константы B_1 , B_2 , B_3 – искомые. Найдя их, далее следует вычислить корни кубического уравнения

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = p = e^{\frac{-\Delta t}{T_1}}; \lambda_3 = q = e^{\frac{-\Delta t}{T_2}}, \quad (2.47)$$

затем

$$T_1 = -\frac{\Delta t}{\ln p} \quad \text{и} \quad T_2 = -\frac{\Delta t}{\ln q}. \quad (2.48)$$

Из любого уравнения системы (2.42), кроме первого, нужно вычислить K .

Для повышения точности можно брать не шесть исходных ординат, а больше затем усреднить результаты.

По существу этот способ является аппроксимацией заданного графика суммой экспоненциальных членов.

Перейдем к численному примеру. Взяв $\Delta t = 1$ мин, измерим на кривой разгона (рис. 2.3) шесть ординат (табл. 2.3).

Таблица 2.3
Результаты эксперимента

t , мин	0	1	2	3	4	5
$y(t)$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0,31$	$y_2 = 0,80$	$y_3 = 1,21$	$y_4 = 1,5$	$y_5 = 1,7$

Из уравнений

$$0 \cdot B_3 + 0,31 \cdot B_2 + 0,8 \cdot B_1 + 1,21 = 0;$$

$$0,31 \cdot B_3 + 0,8 \cdot B_2 + 1,21 \cdot B_1 + 1,5 = 0;$$

$$0,8 \cdot B_3 + 1,21 \cdot B_2 + 1,5 \cdot B_1 + 1,7 = 0;$$

вычислим $B_1 = -1,97$; $B_2 = 1,19$; $B_3 = -0,222$.

Находим корни кубического уравнения: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = p = 0,37$; $\lambda_3 = q = 0,61$. Это сравнительно легко сделать, так как один корень заранее известен ($\lambda = 1$). Затем находим

$$T_1 = \frac{-\Delta t}{\ln p} = \frac{-1}{\ln 0,37} \approx 1,97 \text{ мин}; \quad T_2 = \frac{-\Delta t}{\ln q} = \frac{-1}{\ln 0,61} \approx 2,22 \text{ мин}.$$

Для вычисления k возьмем одну из строк, кроме первой, системы (2.42), например, вторую:

$$y_1 = A_1 + A_2 \cdot p + A_3 \cdot q = K \cdot a + \frac{K \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1} \cdot p + \frac{K \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2} \cdot q,$$

или после подстановки численных значений

$$0,31 = K \cdot (1 + \frac{1}{2-1} \cdot 0,37 + \frac{2}{1-2} \cdot 0,61),$$

откуда $K = 2,07$; $[K] = \frac{e\partial.y}{e\partial.x}$.

2.2.3. Определение уравнения объекта второго порядка с колебательной кривой разгона

Ленточная агломерационная машина применяется для получения путем спекания прочного крупнокускового материала для доменных процессов. Подготовленная шихта (железная руда, кокс, известняк) поступает на движущиеся колосники агломашины. Под колосниками эксгаутер создает вакуум и атмосферный воздух просасывается сквозь движущиеся слой шихты. В начале движения топливо, находящиеся в шихте, поджигается горном, далее процесс горения поддерживается за счет просасывания воздуха.

Определим уравнение этого объекта по реакции выхода $\Delta\theta(t)$ (рис 2.4) на скачкообразное изменение входной величины v до значения $\vartheta = a$, м/мин; $\Delta\theta(t)$ – разность температур в последних отсасывающих камерах, ϑ – скорость движения ленты.

Кривая разгона имеет колебательную форму и можно предположить, что искомое уравнение – уравнение второго порядка с комплексными корнями [13]:

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \frac{d\theta}{dt} + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \Delta\theta = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot k \cdot v \quad (2.49)$$

Необходимо вычислить константы γ_1 , γ_2 , k .

Уравнение это такое же, как в п. 2.2.2, изменено лишь обозначение констант: $\gamma_1 = -\frac{1}{T_1}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{T_2}$, т. к. постоянное времени здесь в случае колебательной системы не имеет физического

смысла. Уравнение колебательной системы обычно записывается в виде

$$\frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} + 2 \cdot \varepsilon \cdot \omega_0 \cdot \frac{d \Delta \theta}{dt} + \omega_0^2 \cdot \Delta \theta = K \cdot \omega_0^2 \cdot v; \quad (2.50)$$

где ε – коэффициент демпфирования; ω_0 – собственная частота системы.

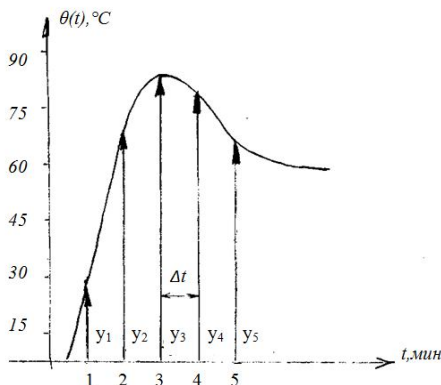


Рис. 2.4. К определению уравнения объекта второго порядка с колебательной кривой разгона

Отсюда видна связь между физическими константами ε , ω_0 и числами γ_1 , γ_2 . Последние введены для удобства вычислений

Используя результаты п. 2.2.2, сразу напишем решение уравнения в таком виде:

$$\Delta \theta(t) = K \cdot a + \frac{K \cdot a \cdot \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \cdot e^{\gamma_1 \cdot t} + \frac{K \cdot a \cdot \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \cdot e^{\gamma_2 \cdot t}.$$

Так как объект управления имеет колебательные свойства, то прием вычисления констант, примененный в предыдущей задаче, даст в результате не действительные числа γ_1 и γ_2 , а комплексные, т. е.

$$\gamma_1 = \alpha + j\beta; \quad \gamma_2 = \alpha - j\beta \quad (2.51)$$

Переходя к действительным количествам, форму записи решения нужно соответственно преобразовать по формуле Эйлера ($e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi$) [13]:

$$\begin{aligned} \Delta\theta(t) &= K \cdot a \cdot \left[1 + \frac{\alpha - j\beta}{2j\beta} \cdot e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{\alpha + j\beta}{-2j\beta} \cdot e^{(\alpha-j\beta)t} \right] = \\ &= K \cdot a \cdot \left\{ 1 + e^{\alpha t} \cdot \left[\frac{j\alpha + \beta}{-2\beta} \cdot (\cos \beta t + j \sin \beta t) + \frac{j\alpha - \beta}{2\beta} \cdot (\cos \beta t - j \sin \beta t) \right] \right\} = \quad (2.52) \\ &= K \cdot a \cdot \left[1 + e^{\alpha t} \cdot \left(-\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin \beta t \right) \right] = \\ &= K \cdot a \cdot \left[1 + e^{\alpha t} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2} \cdot \sin \left(\beta t - \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

(2.52) соответствует сложению двух гармоник.

Принципиально можно было бы взять координаты трех произвольных точек их графика $\Delta\theta(t)$, поставив их в решение, вычислить из трех уравнений действительные корни α , β и k . Но так как уравнения получаются трансцендентными, то решить их весьма сложно, и поэтому целесообразнее применить прием, рассмотренный в предыдущей задаче.

Для этого возьмем из кривой разгона шесть равноотстоящих на интервал $\Delta t = 5 \text{ мин}$, ординат:

$$\Delta\theta_0 = 0,0; \quad \Delta\theta_1 = 29,3; \quad \Delta\theta_2 = 69,0; \quad \Delta\theta_3 = 84,3; \quad \Delta\theta_4 = 79,8; \\ \Delta\theta_5 = 71,1.$$

Составим систему уравнений для определения коэффициентов промежуточного кубического уравнения (2.43)

$$\begin{aligned} 0,0 \cdot B_3 + 29,3 \cdot B_2 + 69,0 \cdot B_1 + 84,3 &= 0; \\ 29,3 \cdot B_3 + 69,0 \cdot B_2 + 84,3 \cdot B_1 + 79,8 &= 0; \\ 69,0 \cdot B_3 + 84,3 \cdot B_2 + 79,8 \cdot B_1 + 71,1 &= 0. \end{aligned}$$

Из нее вычислим $B_1 = -1,654$; $B_2 = 1,12$; $B_3 = -0,366$ и получим следующее кубическое уравнение: $\lambda^3 - 1,654 \cdot \lambda^2 + 1,12 \cdot \lambda - 0,366 = 0$.

Вычислим его корни (один корень $\lambda_3 = 1$ заранее известен):

$$\lambda_1 = 0,327 + j \cdot 0,509; \quad \lambda_2 = 0,327 - j \cdot 0,509; \quad \lambda_3 = 1.$$

Комплексные корни λ_1 и λ_2 представим в показательной форме:

$$\lambda_1 = e^{-0,5+j \cdot 1,0}; \quad \lambda_2 = e^{-0,5-j \cdot 1,0}.$$

Далее найдем константы γ_1 и γ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{T_1} = \frac{\ln \lambda_1}{\Delta t} = \frac{-0,5+j \cdot 1,0}{5} = -0,1+j \cdot 0,2; \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{T_2} = \frac{\ln \lambda_2}{\Delta t} = \frac{-0,5-j \cdot 1,0}{5} = -0,1-j \cdot 0,2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.53)$$

$$(\alpha = -0,1; \beta = 0,2).$$

Остается вычислить статический коэффициент передачи k . Это легко сделать, подставив в решение дифференциального уравнения координаты произвольной точки кривой разгона и вычисленные константы α и β . Возьмем, например, точку $t = \Delta t = 5 \text{ мин}$, $\Delta \theta(\Delta t) = \Delta \theta_1 = 29,3$:

$$\Delta \theta = K \cdot 1 \cdot \left[1 + e^{\alpha t} \cdot \left(-\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right]$$

$$\text{или } 29,3 = K \cdot 1 \cdot \left[1 + e^{-0,1 \cdot 5} \cdot \left(-\cos 0,2 \cdot 5 + \frac{-0,1}{0,2} \cdot \sin 0,2 \cdot 5 \right) \right],$$

$$\text{откуда найдем } K = 70 \frac{\text{град}}{\text{м/час}}.$$

Искомое численное уравнение колебательного объекта будет иметь вид

$$\frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} + 0,2 \cdot \frac{d \Delta \theta}{dt} + 0,05 \cdot \Delta \theta = 0,05 \cdot 70 \cdot v, \quad (2.54)$$

где $[v] = \text{м/час}$; $[\Delta\theta] = ^\circ\text{C}$; $[t] = \text{мин}$.

Собственная частота объекта

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma_1 \cdot \gamma_2} = 0,224 \text{ рад/мин.} \quad (2.55)$$

Коэффициент демпфирования

$$\varepsilon = \frac{-\lambda_1 - \lambda_2}{2 \cdot \omega_0} = \frac{0,2}{2 \cdot 0,224} = 0,45. \quad (2.56)$$

При распространении этого приема на системы более высокого порядка общая схема метода остается аналогичной

2.2.4. Определение численной передаточной функции объекта по кривой разгона

Этот вопрос рассмотрим применительно к конкретному объекту. Например, в печь вдувают обогащенный кислородом воздух, который предварительно нагревают до $1000\text{--}1200^\circ\text{C}$. Упрощенная схема нагрева показана на рис. 2.5, а.

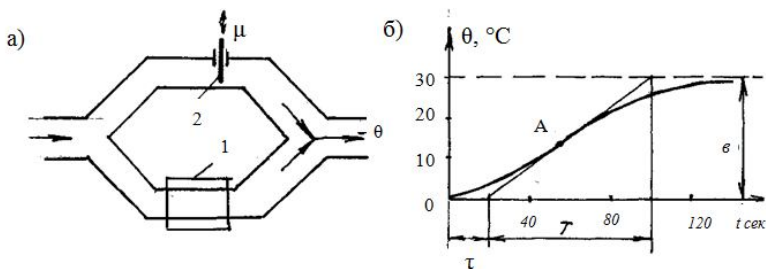


Рис. 2.5. Схема нагрева дутья в печь (а), кривая разгона при нагреве дутья (б)

Исходный поток холодного дутья делится на две части: одна проходит воздухонагреватель 1, другая – регулирующий дроссель 2, не нагреваясь. Затем обе части перед поступлением в печь объединяются, и температура их усредняется. Для стабилизации этой температуры θ регулирующая часть автоматической системы передвигает в ту или иную сторону дроссель 2.

Таким образом, входной величиной объекта является положение μ дросселя, выходной – температура горячего дутья θ . На рис. 2.5,б приведена экспериментальная кривая разгона объекта, соответствующая изменению входа $\Delta\mu = 5\%$.

Определим численную передаточную функцию объекта

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\mu(p)}.$$

На практике объекты с такой кривой разгона часто аппроксимируют инерционным звеном с запаздыванием, т. е.

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\mu(p)} = \frac{k_{об}}{Tp + 1} \cdot e^{-\tau \cdot p}. \quad (2.57)$$

Если ценить не только точность, но и простоту, то эту аппроксимацию можно считать одной из самых удобных.

В точке наибольшего наклона кривой разгона A приводит касательную до пересечения с осью времени и асимптотой, к которой стремится кривая разгона. Затем измеряют τ , T и $K_{об}$ как показано на рис. 2.5, а. Для заданного частного случая $\tau = 20$ с; $T = 80$ сек; $K_{об} = \frac{b}{\Delta\mu} = \frac{30^\circ C}{5\%_{хода}} = 6^\circ C / \%_{хода}$.

Передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\mu(p)} = \frac{6}{80p + 1} \cdot e^{-20 \cdot p} \quad (2.58)$$

где $[\theta] = ^\circ C$; $[\mu] = \%_{хода}$; $[T] = c$.

Для ускорения определения постоянных и сокращения объема вычислительных работ известны различные графоаналитические методы.

На рис. 2.6, а приведена номограмма, позволяющая быстро определить две постоянные времени двухмассового объекта на его кривой разгона следующим образом [14]. На кривой разгона (рис. 2.6, б) находится точка перегиба A , а затем отрезки T' и

T . По обеим осям номограммы откладываются отрезки T'/T , концы их соединяют прямой. Координаты точек пересечения прямой с графиком номограммы обозначим через a и b . Из за симметрии безразлично, какую из точек пересечения принять во внимание.

Затем искомые постоянные времени находятся из соотношений:

$$T_1 = a \cdot T; \quad T_2 = b \cdot T. \quad (2.59)$$

При $T'/T = 0,73$ прямая касается кривой номограммы и $T_1 = T_2 = 0,365 \cdot T$.

Если $T'/T < 0,73$, то прямая не пересечет график номограммы, что говорит о том, что система не может быть аппроксимирована двумя звеньями первого порядка.

В этом случае объект аппроксимируют двумя инерционными звеньями с постоянными времени T_1 , T_2 и звеном запаздывания τ и берут

$$T_1 = T_2 = 0,365 \cdot T; \quad \tau = T_{II} - 0,365 \cdot T. \quad (2.60)$$

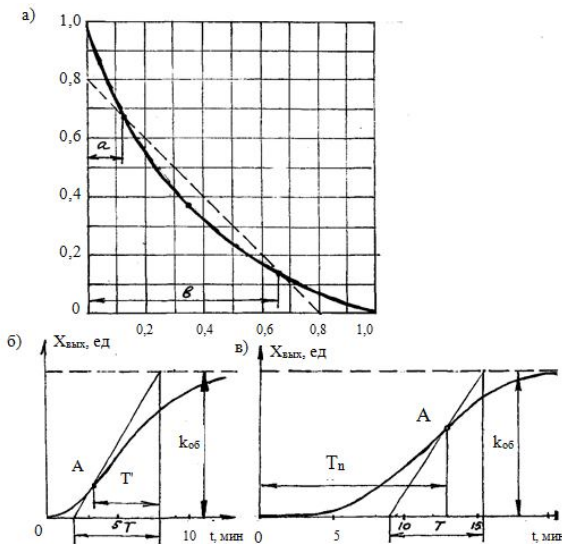


Рис. 2.6. Определение постоянных времени двухемкостного звена по номограмме

Рассмотрим применение графоаналитического метода для определения передаточных функции объектов по их кривым разгона, на рис. 2.6, б и в.

Для рис. 2.6, б имеем $T = 6 \text{ мин}$, $T' = 4,8 \text{ мин}$, $T'/T = 0,8$. Откладываем отрезок 0,8 по осям номограммы (рис. 2.6, а). Концы отрезков соединяем прямой штриховой линией. Координаты точек пересечения (любой): $a = 0,67$; $b = 0,16$. Постоянные времени аппроксимируемых звеньев: $T_1 = T \cdot a = 6 \cdot 0,67 = 3,84 \text{ мин}$; $T_2 = T \cdot b = 6 \cdot 0,16 = 0,96 \text{ мин}$.

Передаточная функция объекта

$$\frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{K_{\text{об}}}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)} = \frac{K_{\text{об}}}{(3,84 \cdot p + 1) \cdot (0,96 \cdot p + 1)}.$$

По кривой разгона (рис. 2.6, в) имеем $T = 6,6 \text{ мин}$; $T_{\text{п}} = 13 \text{ мин}$; $T_1 = T_2 = 0,365 \cdot T = 0,365 \cdot 6,6 = 2,4 \text{ мин}$; $\tau = T_{\text{п}} - 0,365 \cdot T = 13 - 2,4 = 10,6 \text{ мин}$.

Передаточная функция объекта получается в виде

$$\frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{K_{\text{об}} \cdot e^{-p\tau}}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)} = \frac{K_{\text{об}} \cdot e^{-10,6p}}{(2,4 \cdot p + 1)^2},$$

где $[t] = \text{мин}$.

2.2.5. Определение порядка уравнения объекта по кривой разгона

При рассмотрении предыдущих задач мы исходили из предположения, что порядок уравнения, описывающего поведение системы, известен. Для точного определения порядка уравнения по переходной функции воспользуемся следующим положением: если график кривой есть сумма n экспонент и разбит равноотстоящими ординатами, то каждая из них есть одна и та же линейная комбинация из n предыдущих ординат. Другими словами, любая ордината получается из n предыдущих по линейной рекуррентной формуле с постоянной шкалой. Одно из доказательств этого вытекает из эквивалентирования разност-

ных и дифференциальных уравнений [7]. Кривая разгона объекта n -го порядка содержит n экспонент. Можно, не зная самих этих экспонент, число их определить следующим образом. Из графика кривой разгона необходимо предварительно вычесть установившуюся составляющую x'_{cm} , а затем взять равноотстоящие на произвольный интервал последовательные ординаты $x_1, x_2, \dots$. Допустим, что число n известно, тогда справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} \tilde{o}_{n+1} &= A_1 \cdot x_n + A_2 \cdot x_{n-1} + \dots + A_n \cdot x_1, \\ x_{n+2} &= A_1 \cdot x_{n+1} + A_2 \cdot x_n + \dots + A_n \cdot x_n, \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

и т. д.

Любые n из них составляют систему из n линейных уравнений с неизвестными $A_1, \dots, A_n$. Определитель этой системы не равен нулю:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ x_{n+1} & x_n & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2n-1} & x_{2n-2} & \dots & x_n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.62)$$

Представим теперь, что истинный порядок уравнения равен n , но мы ошибочно взяли его равным $n+1$. Определитель из $n+1$ уравнений равен нулю, т. к. между его столбцами существует линейная зависимость: первый столбец, например, получается как линейная комбинация остальных по формуле (2.61).

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x_{n+1} & x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ x_{n+2} & x_{n+1} & x_n & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2n+1} & x_{2n} & x_{2n-1} & \dots & x_{n+1} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.63)$$

Все последующие определители Δ_{n+2} , Δ_{n+3} равны нулю по той же причине. Предыдущие определители быть равными нулю не могут.

Из изложенного выше вытекает правило (критерий) для определения неизвестного числа n : по равноотстоящим ординатам кривой разгона последовательно вычисляются определителем Δ ($i = 1, 2, 3, \dots$), первый обращающийся в нуль определитель указывает число n , которое на единицу меньше порядка этого определителя.

2.3. Определение уравнений объектов частотными методами

2.3.1. Нахождение передаточной функции объекта по его экспериментальным частотным характеристикам

Экспериментально частотные характеристики получают путем подачи на вход объекта гармонических колебаний $X_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \cdot \sin \omega_i t$ на различных пробных частотах ω_i и регистрации ответных установившихся колебаний на выходе объекта $X_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}} \cdot \sin(\omega_i t + \varphi)$.

По результатам эксперимента определяют амплитудную $A(\omega_i) = \frac{A_{\text{вых}}(\omega_i)}{A_{\text{вх}}(\omega_i)}$ и фазовую частотные характеристики объекта [15].

Частотные характеристики широко используются для анализа и синтеза систем регулирования, но они также позволяют получить уравнения объектов. В литературе известен ряд таких методов. Рассмотрим один из них.

Для нахождения передаточной функции некоторой цепи технологических аппаратов определили экспериментально частотные характеристики цепи – амплитудную $A(\omega_i)$ и фазовую $\varphi(\omega_i)$.

Таблица 2. 4

Экспериментальные данные

ω_i , рад/мин	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	и т.д.
$P(\omega_i)$ Погрешность, %	0,45 0,5	0,261 0,5	0,1 0,0	0,37 1,6	0,5 0,0	0,47 0,7	0,39 0,2	0,317 0,5	и т.д.
$Q(\omega_i)$ Погрешность, %	-0,136 0,5	-0,2 0,5	0,0 0,0	0,17 1,7	0,0 0,0	-0,15 1,3	-0,224 0,6	-0,256 0,5	и т.д.

Входная величина объекта $x_0(t)$, а выходная $x(t)$. Результаты эксперимента приведены в табл. 2.4. В нем записаны не $A(\omega_i)$ и $\varphi(\omega_i)$, а действительная $P(\omega_i)$ и мнимая $Q(\omega_i)$ частотные характеристики вычислены по формулам

$$\begin{aligned} P(\omega_i) &= A(\omega_i) \cdot \cos \varphi(\omega_i); \\ Q(\omega_i) &= A(\omega_i) \cdot \sin \varphi(\omega_i) \end{aligned} \quad (2.64)$$

из известных $A(\omega_i)$ и $\varphi(\omega_i)$.

По этим данным необходимо вычислить передаточную функцию объекта.

Предположим, что исследуемая технологическая линия является динамической системой третьего порядка. Тогда передаточная функция системы третьего порядка имеет вид

$$W(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{b_1 \cdot p^2 + b_2 \cdot p + b_3}{p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3}. \quad (2.65)$$

Задача сводится к вычислению коэффициентов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Заменой $p \rightarrow j\omega$ преобразуем $W(p)$ в $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$:

$$W(j\omega) = \frac{-b_1 \cdot \omega^2 + jb_2 \cdot \omega + b_3}{-j\omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + ja_2 \cdot \omega + a_3} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.66)$$

откуда

$$-b_1 \cdot \omega^2 + jb_2 \cdot \omega + b_3 = (-j \cdot \omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + ja_2 \cdot \omega + a_3) \cdot [P(\omega) + jQ(\omega)] \quad (2.67)$$

Так как в отдельности должны быть равны действительные и мнимые количества, то последнее равенство распадается на следующие два:

$$-\omega^2 \cdot b_1 + b_3 + P(\omega) \cdot \omega^2 \cdot a_1 + Q(\omega) \cdot \omega \cdot a_2 - P(\omega) \cdot a_3 = Q(\omega) \cdot \omega^3; \quad (2.68)$$

$$\omega \cdot b_2 + Q(\omega) \cdot \omega^2 \cdot a_1 - P(\omega) \cdot \omega \cdot a_2 - Q(\omega) \cdot a_3 = -P(\omega) \cdot \omega^3. \quad (2.69)$$

Эти равенства справедливы при любых значениях частоты ω_i .

Подставляя в равенство (2.69) численные значения из табл. 2.4 при частотах $\omega_i = 1,0; 2,0; 3,0; 4,0$, получаем систему уравнений, линейных относительно неизвестных констант (коэффициентов):

$$\left. \begin{aligned} 1,0 \cdot b_2 + 0,0 \cdot a_1 - 0,1 \cdot 1,0 \cdot a_2 + 0,0 \cdot a_3 &= -0,1 \cdot 1,0; \\ 2,0 \cdot b_2 + 0,17 \cdot 4,0 \cdot a_1 - 0,37 \cdot 2,0 \cdot a_2 - 0,17 \cdot a_3 &= -0,37 \cdot 8,0; \\ 3,0 \cdot b_2 + 0,0 \cdot a_1 - 0,5 \cdot 3,0 \cdot a_2 + 0,0 \cdot a_3 &= -0,5 \cdot 27,0; \\ 4,0 \cdot b_2 - 0,15 \cdot 16,0 \cdot a_1 - 0,47 \cdot 4,0 \cdot a_2 + 0,15 \cdot a_3 &= -0,47 \cdot 64,0; \end{aligned} \right\}, \quad (2.70)$$

откуда вычисляем: $b_2 = 1,0$; $a_1 = 5,89$; $a_2 = 11,0$; $a_3 = 4,85$.

Для вычисления оставшихся коэффициентов b_1 и b_3 в равенство (2.68) подставим числа из табл. 2.4 при $\omega_i = 1,0; 2,0$ и вычисленные уже значения a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{aligned} -b_1 + b_3 &= 0,0 \cdot 1^3 - 0,1 \cdot 1,0 \cdot 5,89 - 0,0 \cdot 1 \cdot 11,0 + 0,1 \cdot 4,85; \\ -4,0 \cdot b_1 + b_3 &= 0,17 \cdot 8,0 - 0,37 \cdot 4,0 \cdot 5,89 - 0,17 \cdot 2,0 \cdot 11,0 + 0,37 \cdot 4,85, \end{aligned} \quad (2.71)$$

откуда находим $b_1 = 3,07$; $b_3 = 2,96$.

Для определения шести коэффициентов передаточной функции потребовалось четыре пробные частоты. Так как зна-

чения $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$ в таблице заданы не точно, то вычисленные коэффициенты отличаются от истинных.

Для их уточнения повторим вычисления при других частотах $\omega_i=0,2; 0,5; 5,0; 6,0$:

$$\left. \begin{aligned} 0,2 \cdot b_2 - 0,136 \cdot 0,04 \cdot a_1 - 0,45 \cdot 0,2 \cdot a_2 + 0,136 \cdot a_3 &= 0,45 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \\ 0,5 \cdot b_2 - 0,2 \cdot 0,25 \cdot a_1 - 0,261 \cdot 0,5 \cdot a_2 + 0,2 \cdot a_3 &= -0,261 \cdot 125 \cdot 10^{-3} \\ 5,0 \cdot b_2 - 0,224 \cdot 25 \cdot a_1 - 0,39 \cdot 5,0 \cdot a_2 + 0,224 \cdot a_3 &= -0,39 \cdot 125,0 \\ 6,0 \cdot b_2 - 0,256 \cdot 36 \cdot a_1 - 0,317 \cdot 6,0 \cdot a_2 + 0,256 \cdot a_3 &= -0,317 \cdot 216,0 \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Откуда находим $b_2=0,985$; $a_1=5,93$; $a_2=11,2$; $a_3=6,18$.

При определении b_1 и b_3 для частот $\omega_i=0,5; 5,0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} -0,25 \cdot b_1 + b_3 &= -0,20 \cdot 0,125 - 0,261 \cdot 0,25 \cdot 5,93 + 0,20 \cdot 0,5 \cdot 11,2 + 0,261 \cdot 6,18 \\ -25,0 \cdot b_1 + b_3 &= -0,224 \cdot 125,0 - 0,39 \cdot 25,0 \cdot 5,93 + 0,224 \cdot 5,0 \cdot 11,2 + 0,39 \cdot 6,18 \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

Из них получим $b_1=2,96$; $b_3=3,06$.

Усредненные значения коэффициентов по результатам двух расчетов равны:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5,89 + 5,93}{2} = 5,91; \quad a_2 = \frac{11,0 + 11,2}{2} = 11,1; \\ a_3 &= \frac{4,85 + 6,18}{2} = 5,515; \quad b_1 = \frac{3,07 + 2,96}{2} = 3,015; \\ b_2 &= \frac{1,0 + 0,985}{2} = 0,9925; \quad b_3 = \frac{2,96 + 3,06}{2} = 3,01. \end{aligned}$$

Усредненный результат по первому и повторному расчетам получается в виде

$$W(p) = \frac{3,015p^2 + 0,9925p + 3,01}{p^3 + 5,91p^2 + 11,1p + 5,515}. \quad (2.74)$$

Влияние случайных погрешностей экспериментального определения частотных характеристик можно уменьшить повтор-

ными вычислениями с привлечением большего числа пробных частот с последующими усреднениями.

Если бы в начале вычислений порядок объекта был завышен относительно заранее неизвестного истинного, то лишние коэффициенты при вычислениях получились бы равными (или почти равными) нулю, если занижен, то повторные вычисления при других пробных частотах дали бы значительно отличающиеся результаты.

Пусть, например, для тех же табличных данных ошибочно предположено, что объект имеет второй порядок

$$W(j\omega) = \frac{j b_1 \cdot \omega + b_2}{-\omega^2 + j a_1 \cdot \omega + a_2} = P(\omega) + j Q(\omega). \quad (2.75)$$

Для него искомые равенства запишутся в виде

$$b_2 + Q(\omega) \cdot \omega \cdot a_1 - P(\omega) \cdot a_2 = -P(\omega) \cdot \omega^2, \quad (2.76)$$

$$\omega \cdot b_1 - P(\omega) \cdot \omega \cdot a_1 - Q(\omega) \cdot a_2 = -Q(\omega) \cdot \omega^2. \quad (2.77)$$

Подставив в (2.77) табличные значения для трех частот $\omega_i = 0,2; 0,5; 1$, получим

$$\left. \begin{aligned} 0,2 \cdot b_1 - 0,45 \cdot 0,2 \cdot a_1 + 0,136 \cdot a_2 &= 0,136 \cdot 0,04; \\ 0,5 \cdot b_1 - 0,261 \cdot 0,5 \cdot a_1 + 0,2 \cdot a_2 &= 0,20 \cdot 0,25; \\ 1,0 \cdot b_1 - 0,1 \cdot 1,0 \cdot a_1 + 0,0 \cdot a_2 &= 0,0, \end{aligned} \right\}, \quad (2.78)$$

откуда вычислим $b_1 = 0,1875; a_1 = 1,875; a_2 = 1,004$.

Подставляя одну из пробных частот $\omega_i = 1,0$ и вычисленные числа a_1 , и a_2 в (2.76), получим

$$b_2 - 0,1 \cdot 1,004 = -0,1 \cdot 1,0 \text{ или } b_2 = 0,0004. \quad (2.79)$$

Повторные вычисления для других пробных частот $\omega_i = 2,0; 3,0; 4,0$ дают

$$b_1 = 2,59; a_1 = 5,18; a_2 = 9,62; b_2 = 0,10.$$

Такая весьма значительная разница в численных значениях коэффициентов, полученных при различных пробных частотах, говорит о занижении порядка объекта, и ее нельзя отнести за счет погрешностей эксперимента. Поэтому следует, как это и сделано, предположить в начале вычислений более высокий порядок объекта. В этом условном примере экспериментальные значения $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$ в табл. 2.4 взяты преднамеренно с ошибками $\approx 1\%$ – против точных значений, соответствующих контрольной передаточной функции.

$$W(p) = \frac{3p^2 + p + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}.$$

В общем случае для определения порядка объекта n можно составлять определители Δ_i из коэффициентов системы уравнений (2.70) при различных $n = i = 1, 2, \dots$; при $i \leq n_{\text{ист}}$ имеет место $\Delta_i \neq 0$, при $i > n_{\text{ист}}$ получается $\Delta_i = 0$.

При применении метода наименьших квадратов в систему (2.70) надо вводить больше уравнений, используя дополнительные пробные частоты. Получаемая при этом условная система преобразуется в нормальную, из которой определяются вероятнейшие значения коэффициентов. Аналогично надо поступать с системой (2.71).

2.3.2. Получение расширенных частотных характеристик по кривой разгона

Для получения расширенных частотных характеристик по кривой разгона используем экспериментальную переходную характеристику (рис. 2.7, а), по которой вычислим амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) объекта, а также расширенную АФЧХ при декременте затухания $2 \cdot \pi \cdot m = 2 \cdot \pi \cdot 0,22$.

Обычные частотные характеристики получаются при подаче на вход объекта гармонических колебаний постоянной амплитуды, а в случае расширенных амплитуда затухает по экспоненциальному закону

$$x_{\text{ex}} = A_{\text{ex}} \cdot e^{-m \cdot \omega t} \cdot \sin \omega t \rightarrow A_{\text{ex}} \cdot e^{-m \cdot \omega t} \cdot e^{j \cdot \omega t} \quad (2.80)$$

Вызванные этим колебания выходной величины имеет ту же частоту и тот же декремент затухания $2 \cdot \pi \cdot m$, но будут отличаться по амплитуде и фазе, т. е.

$$x_{\text{вх}} = A_{\text{вх}} \cdot e^{-m \cdot \omega t} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.81)$$

Отношение

$$W(m, j\omega) = \frac{x_{\text{вх}}}{x_{\text{ex}}} = \frac{A_{\text{вх}}}{A_{\text{ex}}} \cdot e^{j\varphi} \quad (2.82)$$

называют расширенной АФЧХ; при $m = 0$ расширенная АФЧХ превращается в обычную. Здесь мы встречаемся со случаем перестроения кривой разгона объекта в его частотные характеристики.

Известен ряд таких методов, которые подробно рассмотрены в [16].

Сущность одного из приближенных методов заключается в следующем.

Кривую разгона разбивают равноотстоящими ординатами и затем для объектов с самовыравниванием вычисления производят по формуле

$$W(m, j\omega) = B \cdot e^{j\alpha} \times \left[\sum_{k=0}^n e^{m \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} \cdot \Delta_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t) - j \sum_{k=0}^n e^{m \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} \cdot \Delta_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right], \quad (2.83)$$

где $K = 0, 1, 2, \dots$ – номер ординаты; Δt – интервал между ординатами; $\Delta_k = x_{\text{вх}K+1} - x_{\text{вх}K}$ – приращение ординаты в K -ом интервале; параметры B и α определяют из табл. 2.5.

При наличии чистого запаздывания τ формула дополняется:

$$W(m, j\omega) = W(m, j\omega) \cdot e^{m \cdot \omega \cdot \tau} \cdot e^{-j\omega \cdot \tau}, \quad (2.84)$$

где $W(m, j\omega)$ берется из формулы (2.83).

На рис. 2.7, а интервал между ординатами равен $\Delta t = 30$ секунд. По графику определяем время чистого запаздывания $\tau = 30$ секунд. Измерим приращения ординат: $\Delta_0 = 0,03$; $\Delta_1 = 0,12$; $\Delta_2 = 0,18$; $\Delta_3 = 0,17$; $\Delta_4 = 0,15$; $\Delta_5 = 0,11$; $\Delta_6 = 0,08$; $\Delta_7 = 0,07$; $\Delta_8 = 0,04$; $\Delta_9 = 0,03$; $\Delta_{10} = 0,01$.

Теперь следует приступить к вычислениям по формуле (2.84). Для вычисления обычной амплитудно-частотной характеристики нужно в формуле (2.84) принять $m = 0$ и, варьируя частоту $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$, вычислить $W(j\omega_1)$, $W(j\omega_2)$ и т. д.

Для вычисления расширенных частотных характеристик в формуле (2.84) нужно варьировать m и ω . Учитывая, что по условию задачи нужно построить только одну характеристику для $m = 0,22$ и далее, варьируя $\omega_i = \omega_2, \dots$, найдем $W(0,22; j\omega_1)$; $W(0,22; j\omega_2)$ и т. д. Пусть, например, $\omega_1 = 0,027 \text{ рад/с}$.

Таблица 2.5
Результаты расчета

$\frac{\omega \cdot \Delta t}{\pi}$	m	B	α	$\frac{\omega \cdot \Delta t}{\pi}$	m	B	α
0,031	0,0	1,0	2° 48'	0,500	0,00	1,115	-45° 00'
	0,22	0,97	-1° 50'		0,22	1,312	-42° 20'
	0,37	0,95	-2° 10'		0,37	1,46	-40° 30'
0,125	0,00	1,01	-11° 15'	0,750	0,00	1,275	-67° 30'
	0,22	1,06	-12° 36'		0,22	1,538	-63° 00'
	0,37	1,09	-12° 36'		0,37	1,79	-58° 20'
0,25	0,00	0,02	-22° 30'	0,875	0,00	1,384	-78° 45'
	0,22	1,13	-22° 00'		0,22	1,86	-70° 00'
	0,37	1,18	-20° 54'		0,37	2,185	-64° 00'
0,375	0,00	1,07	-33° 45'	1,00	0,00	1,57	-90° 00'
	0,22	1,204	-32° 20'		0,22	2,145	-77° 40'
	0,37	1,29	-31° 20'		0,37	2,545	-69° 00'

Из табл. 2.5 вначале определим B и α . Параметр $\frac{\omega_1 \cdot \Delta t}{\pi} = \frac{0,027 \cdot 30}{3,14} = 0,25$; из третьей строки табл. 2.5 при

$m = 0,22$ находим $B = 1,13$; $\alpha = -22^\circ$. Далее нужно вычислить суммы $\sum_{k=0}^n$, стоящие в квадратных скобках выражения для $W(m, j\omega)$. Эти вычисления сведены в табл. 2.6. Они дают для точки при $m = 0,22$; $\omega = 0,027$.

$$\sum_{k=0}^{10} e^{m \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} \Delta_k \cdot \cos k \cdot \omega \cdot \Delta t = -0,200 ;$$

$$\sum_{k=0}^{10} e^{m \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} \Delta_k \cdot \sin k \cdot \omega \cdot \Delta t = 0,169 .$$

Таблица 2.6

Результаты расчета

K	ΔK	$a = e^{0,22 \cdot k \cdot 0,027 \cdot 30} \times 0,027 \cdot 30$	$b = \cos k \times 0,027 \cdot 30$	$c = \sin k \times 0,027 \cdot 30$	$a \cdot \Delta_k \cdot b$	$a \cdot \Delta_k \cdot c$
0	0,03	1,00	1,00	0,00	0,035	0,000
1	0,12	1,19	0,71	0,71	0,102	0,102
2	0,18	1,42	0,00	1,00	0,000	0,251
3	0,17	1,69	-0,71	0,71	-0,206	0,206
4	0,15	2,00	-1,00	0,00	-0,297	0,000
5	0,11	2,39	-0,71	-0,71	-0,191	-0,191
6	0,08	2,84	0,00	-1,00	0,000	-0,230
7	0,07	3,37	0,71	-0,71	0,131	-0,131
8	0,04	4,02	1,00	0,00	0,147	-,000
9	0,03	4,76	0,71	0,71	0,079	0,079
10	0,01	5,70	0,00	1,00	0,000	0,083
					$\sum_{k=0}^{10} = -0,200$	$\sum_{k=0}^{10} = 0,169$

Получаем

$$W(0,22; j0,027) = 1,13 \cdot e^{-j22^\circ} \cdot (-0,200 - j0,169).$$

Теперь необходимо учесть чистое запаздывание. Для следующей подстановки в формулу (2.84) вычислим

$$e^{m \cdot \omega_1 \tau} \cdot e^{-j \cdot \omega_1 \cdot \tau} = e^{0,22 \cdot 0,027 \cdot 30} \cdot e^{-j \cdot 0,027 \cdot 30} = 2,00 \cdot e^{-j \cdot 0,81 \text{ рад}} = 2,00 \cdot e^{-j \cdot 46^\circ}$$

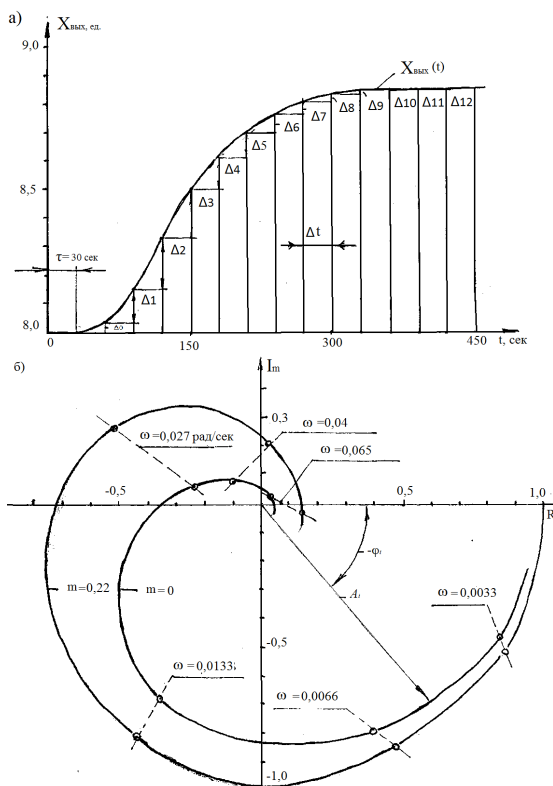


Рис. 2.7. Построение расширенной АФЧХ по кривой разгона

В результате для $\omega_1 = 0,027 \text{ рад/с}$, $m = 0,22$ получаем с учетом запаздывания

$$W_{\text{зан}} = (0,22; j0,027) = 1,13 \cdot e^{-j22^\circ} \cdot (-0,200 - j0,169) \cdot 2,00 \cdot e^{-j46^\circ} =$$

$$= 2,26 \cdot e^{-j68^\circ} \cdot (-0,200 - j0,169) = 2,26 \cdot e^{-j68^\circ} \cdot \sqrt{(0,20)^2 + (0,169)^2} \cdot e^{j \arctg \frac{0,169}{0,200}} = 0,59 \cdot e^{-j207^\circ},$$

где $A(m, \omega) = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} = 0,59$; $\varphi(m, \omega) = -207$ (при $m = 0,22$; $\omega = 0,027$).

Аналогично вычисляются значения частотных характеристик при других частотах. Результаты вычислений по заданной кривой разгона приведены в табл. 2.7. Размерность A равна отношению размерностей выхода и входа объекта. На рис. 2.7, б даны графические изображения искомых АФЧХ (обычной и расширенной). φ

Таблица 2.7

Результаты расчета

ω , рад/с	0,0033		0,0066		0,0133		0,027		0,04		0,065	
m	0,0	0,22	0,0	0,22	0,0	0,22	0,0	0,22	0,0	0,22	0,0	0,22
$A(m, \omega)$	0,96	1,0	0,88	0,97	0,77	0,94	0,24	0,59	0,12	0,2	0,12	0,15
$\varphi(m, \omega)$, град	331	329	296	298	242	236	166	153	144	84	37	351

2.4. Определение математической модели объекта методами статистической динамики

При нормальном стационарном режиме работы входная величина объекта не остается неизменной во времени, а получает приращения случайного характера $x_1(t)$. Выходная величина также получает приращения случайного характера $x_2(t)$. Можно допустить, что ответные приращения выходной величины обусловлены приращениями входной. Тогда между теми и другими существует статистическая связь, определяемая уравнением Винера-Хопфа [17,18].

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot R_1(\tau - t) \cdot dt \cdot \quad (2.85)$$

Здесь $h(t)$ есть импульсная переходная функция объекта – реакция на импульсное изменение входа. Величины

$$\left. \begin{aligned} R_1(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T x_1(t) \cdot x_1(t + \tau) \cdot dt; \\ R_{21}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) \cdot dt \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

являются автокорреляционной функцией входного $x_1(t)$ и взаимно-корреляционной функцией выходного $x_2(t)$ и входного $x_1(t)$ случайных процессов. Зная R_1 и R_{21} , можно вычислить динамическую характеристику объекта $h(t)$. Определение R_1 и R_{21} проводится по результатам экспериментальных наблюдений над объектом, для чего регистрируются и затем обрабатываются процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Пример вычисления автокорреляционной функции (АКФ) $R_1(t)$ и взаимокорреляционной функции (ВКФ) R_{21} рассмотрен ниже. Отличие в вычислении R_{21} заключается в следующем. В таблицу вычислений (см. табл. 2.8) взамен одного столбца $x_1(t)$ вносят два столбца: $x_1(t)$ и $x_2(t)$. И если при вычислении АКФ столбец $x(t)$ сдвигался относительно самого себя, то в случае ВКФ столбец $x_2(t)$ сдвигается относительно столбца $x_1(t)$. Остальные вычисления проводятся аналогично по (2.86). Определение АКФ и ВКФ позволяют определить динамическую характеристику объекта (импульсную переходную функцию, спектральные плотности).

2.4.1. Вычисление автокорреляционной функции

Для оценки погрешностей измерения температуры с помощью исследуемого прибора произвели регистрацию в течение

2,5 ч температуры в термостате. Если величина последней поддерживалась строго постоянной и была заранее известна, тогда отклонения показания прибора от этого контрольного уровня, обозначаемые через $n(t)$, °С, записаны в таблице с интервалом времени $\Delta = 3$ мин (третий столбец табл. 2.8). Необходимо, рассматривая погрешность $n(t)$ как стационарный случайный процесс, вычислить значения АКФ $R_n(\tau)$ для трех значений аргумента $\tau = 0, \tau = 3, \tau = 30$ мин. Следует отметить, что в этом примере случайные отклонения $n(t)$ от среднего значения $\bar{n}(t)$ подобраны так, что все они в совокупности удовлетворяют гауссову нормальному распределению вероятностей.

АКФ процесса $n(t)$ определяется интегралом

$$R_n(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} n(t) \cdot n(t + \tau) \cdot dt. \quad (2.87)$$

В практических расчетах промежутки интегрирования берут не бесконечным

$$R_n(\tau) \approx \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T n(t) \cdot n(t + \tau) \cdot dt \quad (2.88)$$

и само вычисление интеграла осуществляют приближенно. О выборе величины T и других моментах обработки и подготовки экспериментальных данных подробно рассмотрено в [19].

Промежуток интегрирования разбивается на N малых интервалов Δ . Для рассматриваемой задачи выбрано $\Delta = 3$ мин, а $N = 50$. Придают t и τ дискретные значения, кратные Δ :

$$\tau = k \cdot \Delta, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

$$t = k_1 \Delta, \quad k_1 = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда интеграл заменяется суммой

$$R_n(\tau) = R_n(k \cdot \Delta) \approx \frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{k_1 = -N}^N n(k_1 \Delta) \cdot n[(k_1 + k) \cdot \Delta]. \quad (2.89)$$

Рассматривая только положительный промежуток T и учитывая, что при $k_1 > N - k \cdot n \cdot [(k_1 + k) \cdot \Delta] = 0$, имеем

$$R(k \cdot \Delta) \approx \frac{1}{N - k} \cdot \sum_{k_1=1}^{N-K} n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n[(k_1 + k) \cdot \Delta].$$

В табл. 2.8 по этой формуле вычислены значения нецензированной корреляционной функции $R_H(0)$, $R_H(3)$ и $R_H(30)$.

При $\tau = 0$ имеем $k = 0$ и

$$R_H(0) = \frac{1}{50} \cdot \sum_{k_1=1}^{50} n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n(k_1 \cdot \Delta) = \frac{1}{50} \sum_{k_1=1}^{50} n^2(k_1 \cdot \Delta),$$

т. е. нужно вычислить квадраты чисел, стоящих в третьем столбце и сложить их и сумму $\Sigma = 125654$ разделить на 50. Это сделано в четвертом столбце, получилось $R_H(0) = 2513, \binom{0}{C}^2$.

В пятый столбец внесены значения $n(t+3)$ для этого третий столбец передвинуть вверх на один шаг Δ . В шестом столбце вычислены произведения $n(t) \cdot n(t+3) = n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n(k_1 \cdot \Delta + 3)$ при $k_1 = 1, 2, 3, \dots, N-1$ и найдена их сумма $\Sigma = 123005$, которая при делении на $N-1=49$ дает искомое число $R_H(3) = 2510, \binom{0}{C}^2$. В седьмом столбце записаны значения $n(t+30) = n(t+10\Delta)$; для этого третий столбец сдвинут вверх на 10 шагов Δ . Далее вычислены произведения $n(t) \cdot n(t+30) = n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n(k_1 \cdot \Delta + 30)$ при $k_1 = 1, 2, 3, \dots, N-10$ и их сумма $\Sigma = 100151$, которая при делении на $N-10 = 40$ дает $R_H(30) = 2504, \binom{0}{C}^2$.

Итак, получено $R_H(0) = 2513$; $R_H(3) = 2510$; $R_H(30) = 2504, \binom{0}{C}^2$ для которых исходным материалом для вычислений служил сигнал $n(t)$ в третьем столбце.

Таблица 2.8

Результаты расчета АКФ

κ_L	$t, \text{ мин}$	$n(t) = n(k_1 \cdot \Delta), \text{ } ^\circ\text{C}$	$n^2(t)$	$n(t + \Delta) = n(t + 3)$	$n(t) \cdot n(t + 3)$	$n(t + 10\Delta) = n(t + 30)$	$n(t) \cdot n(t + 30)$
1	0,0	51,0	2601	50,0	51,0 · 50,0 = 2546	38,0	51,0 · 38,0 = 1935
2	3,0	50,0	2500	54,0	50,0 · 54,0 = 2700	46,0	50,0 · 46,0 = 2300
3	6,0	54,0	2916	52,0	54,0 · 52,0 = 2802	47,5	54,0 · 47,5 = 2562
4	9,0	52,0	2704	49,0	52,0 · 49,0 = 2545	50,4	52,0 · 50,4 = 2620
5	12,0	49,0	2401	49,0	49,0 · 49,0 = 2400	49,5	29,0 · 49,5 = 2424
6	15,0	49,0	2401	51,5	49,0 · 51,5 = 2520	53,0	49,0 · 53,0 = 2594
7	18,0	51,5	2652	47,0	51,5 · 47,0 = 2417	58,0	51,5 · 58,0 = 2983
8	21,0	47,0	2209	45,0	47,0 · 45,0 = 2112	56,5	47,0 · 56,5 = 2655
9	24,0	45,0	2025	43,0	45,0 · 43,0 = 1932	55,0	45,0 · 55,0 = 2473
10	27,0	43,0	1849	38,0	43,0 · 38,0 = 1633	52,0	43,0 · 52,0 = 2234
11	30,0	38,0	1444	46,0	38,0 · 46,0 = 1745	48,0	38,0 · 48,0 = 1823
12	33,0	46,0	2116	47,5	46,0 · 47,5 = 2182	49,5	46,0 · 49,5 = 2275
13	36,0	47,5	2256	50,4	47,5 · 50,4 = 2390	53,5	47,5 · 53,5 = 2540
14	39,0	50,4	2540	49,5	50,4 · 49,5 = 3490	57,0	50,4 · 57,0 = 2870
15	42,0	49,5	2450	53,0	49,5 · 53,0 = 2620	61,0	49,5 · 61,0 = 3002
16	45,0	53,0	2809	58,0	53,0 · 58,0 = 3070	54,5	53,0 · 54,5 = 2883
17	48,0	58,0	3364	56,5	58,0 · 56,5 = 3277	53,2	58,0 · 53,2 = 3082
18	51,0	56,5	3192	55,0	56,5 · 55,0 = 3103	50,5	56,5 · 50,5 = 2850
19	53,0	55,0	3025	52,0	55,0 · 52,0 = 2860	51,0	55,0 · 51,0 = 2810
20	57,0	52,0	2704	48,0	52,0 · 48,0 = 2492	48,5	52,0 · 48,5 = 2520
21	60,0	48,0	2304	49,5	48,0 · 49,5 = 2375	47,0	48,0 · 47,0 = 2255
22	63,0	49,5	2450	53,5	49,5 · 53,5 = 2646	52,0	49,5 · 52,0 = 2570
23	66,0	53,5	2862	57,0	53,5 · 57,0 = 3048	46,5	53,5 · 46,5 = 2483
24	69,0	57,0	3249	61,0	57,0 · 61,0 = 3475	39,5	57,0 · 39,5 = 2250
25	72,0	61,0	3721	54,5	61,0 · 54,5 = 3320	42,0	61,0 · 42,0 = 2560
26	75,0	54,5	2970	53,2	54,5 · 53,2 = 2895	47,5	54,5 · 47,5 = 2587
27	78,0	51,2	2630	50,5	53,2 · 50,5 = 2682	43,0	53,2 · 43,0 = 2286
28	81,0	50,5	2550	51,0	50,5 · 51,0 = 2575	49,0	50,5 · 49,0 = 2473

Продолжение табл. 2.8

κ_I	$t, \text{ мин}$	$n(t) \Rightarrow n(k_I \cdot \Delta), \text{ } ^\circ\text{C}$	$n^2(t)$	$n(t+\Delta) \Rightarrow n(t+\Delta)$	$n(t) \cdot n(t+\Delta)$	$n(t+10\Delta) \Rightarrow n(t+30\Delta)$	$n(t) \cdot n(t+30\Delta)$
29	84,0	51,0	2601	48,5	51,0 · 48,5 = 2470	54,0	51,0 · 54,0 = 2750
30	87,0	48,5	2352	47,0	48,5 · 47,0 = 2280	62,0	48,5 · 62,0 = 3000
31	90,0	47,0	2209	52,0	47,0 · 52,0 = 2440	52,0	47,0 · 52,0 = 2440
32	93,0	52,0	2704	46,5	52,0 · 46,5 = 2420	50,0	52,0 · 50,0 = 2600
33	96,0	46,5	2162	39,5	46,5 · 39,5 = 1835	46,0	46,5 · 46,0 = 2140
34	99,0	39,5	1560	42,0	39,5 · 42,0 = 1660	42,0	39,5 · 42,0 = 1658
35	102,0	42,0	1764	47,5	42,0 · 47,5 = 1994	51,0	42,0 · 51,0 = 2140
36	105,0	47,5	2256	43,0	47,5 · 43,0 = 2040	55,0	47,5 · 55,0 = 2650
37	108,0	43,0	1849	49,0	43,0 · 49,0 = 2105	49,6	43,0 · 49,6 = 2130
38	111,0	49,0	2401	54,0	49,0 · 54,0 = 2642	43,0	49,0 · 43,0 = 2104
39	114,0	54,0	2916	63,0	54,0 · 62,0 = 3346	46,0	54,0 · 46,0 = 2480
40	117,0	68,0	3844	58,0	62,0 · 52,0 = 3220	51,0	62,0 · 51,0 = 3160
41	120,0	52,0	2704	50,0	52,0 · 50,0 = 2596		52,0 · 0,00 = 0,00
42	123,0	50,0	2500	46,0	50,0 · 46,0 = 2300		50,0 · 0,00 = 0,00
43	126,0	46,0	2116	42,0	46,0 · 42,0 = 1930		46,0 · 0,00 = 0,00
44	129,0	42,0	1764	51,0	42,0 · 51,0 = 2140		42,0 · 0,00 = 0,00
45	132,0	51,0	2601	55,0	51,0 · 55,0 = 2803		51,0 · 0,00 = 0,00
46	135,0	55,0	3025	49,6	55,0 · 49,6 = 2722		55,0 · 0,00 = 0,00
47	138,0	49,6	2460	43,0	49,6 · 43,0 = 2115		49,6 · 0,00 = 0,00
48	141,0	43,0	1849	46,0	43,0 · 46,0 = 1975		43,0 · 0,00 = 0,00
49	144,0	46,0	2116	51,0	46,0 · 51,0 = 2340		46,0 · 0,00 = 0,00
50	147,0	51,0	2601	0,00	51,0 · 0,00 = 0,000		51,0 · 0,00 = 0,00
		$\sum = 125654$		$\sum = 123005$		$\sum = 100151$	
		$R_{ef}(0) = \frac{1}{50} \sum = 2513$		$R_{\#}(3) = \frac{1}{49} \sum = 2510$		$R_{\#}(30) = \frac{1}{40} \sum = 2504$	

2.4.2. Вычисление математического ожидания, центрированной АКФ, среднеквадратичного отклонения и эквивалентной спектральной плотности случайного сигнала

Для АКФ, найденной выше $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_H(\tau) = 2500, ({}^0C)^2$, определим математическое ожидание $\bar{n}$ случайного процесса $n(t)$, центрированную АКФ $R_{\text{ц}}(\tau)$ при $\tau = 0$ и $\tau = 3$ мин процесса $n(t) - \bar{n}$ и среднеквадратичное отклонение σ_n для центрированной величины $n_{\text{ц}}(t) = n(t) - \bar{n}$.

Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} R_H(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T [\bar{n} + n_{\text{ц}}(t)] \cdot [\bar{n} + n_{\text{ц}}(t + \tau)] \cdot dt = \\ &= \bar{n}^2 + \bar{n} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T [n_{\text{ц}}(t) + n_{\text{ц}}(t + \tau)] \cdot dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T n_{\text{ц}}(t) \cdot n_{\text{ц}}(t + \tau) dt. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю, а третье есть центрированная АКФ $R_{\text{ц}}(\tau)$, поэтому получим равенство

$$R_H(\tau) = \bar{n}^2 + R_{\text{ц}}(\tau). \quad (2.90)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ АКФ центрированных случайных процессов стремятся к нулю, т. е. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_H(\tau) = \bar{n}^2 + 0$. Так как по условию данной задачи $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_H(\tau) = 2500, ({}^0C)^2$, следовательно, $\bar{n} = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_H(\tau)} = \sqrt{2500} = +50^0 C$.

Знак плюс берется потому, что в табл. 2.8 преобладают исключительно положительные отклонения $n(t)$. Затем по известной величине $\bar{n}^2 = 2500$ и известным (см. выше) $R_H(0) = 2513$; $R_H(3) = 2510$ определим

$$R_{\text{ц}}(0) = R_{\text{н}}(0) - \overline{n^2} = 2513 - 2500 = 13 \text{ } (^{\circ}C)^2;$$

$$R_{\text{ц}}(3) = R_{\text{н}}(3) - \overline{n^2} = 2510 - 2500 = 10 \text{ } (^{\circ}C)^2.$$

Величина $R_{\text{ц}}(0) = 13$ есть дисперсия центрированной случайной величины $n_y(t)$, среднеквадратичное отклонение ее $\sigma_n = \sqrt{R_{\text{ц}}(0)} = \sqrt{13} = 3,6^{\circ}C$.

Итак, можно считать, что случайная величина $n(t)$ содержит постоянную $\overline{n} = +50^{\circ}C$ и случайную с $\sigma_n = 3,6^{\circ}C$ составляющие.

Считая, что аналитическое выражение для $R_{\text{ц}}(\tau)$ относится к виду $\sigma_n^2 \cdot e^{-\beta^2 \cdot \tau^2}$, получим численные выражения для $R_{\text{ц}}(\tau)$.

Для определения констант σ_n^2 и β^2 используем следующие равенства

$$R_y(0) = \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta^2 \cdot 0} = 13; \quad R_y(0) = \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta^2 \cdot 3^2} = 10.$$

Откуда $\sigma_n^2 = 13$ и $\beta^2 = -\frac{1}{3^2} \ln \frac{10}{13} = 0,029$ или $\sigma_n = 3,6^{\circ}C$ и $\beta = 0,17$ рад/мин. Тогда искомое аналитическое выражение для $R_{\text{ц}}(\tau)$ имеет вид $R_{\text{ц}}(\tau) = 13 \cdot e^{-0,029 \cdot \tau^2}$; $[R_y(\tau)] = (C^0)^2$; $[\tau] = \text{мин}$.

Перейдем к нахождению спектральной плотности.

Для однократных измерений случайная величина n оценивается математическим ожиданием $\overline{n}$, m_n и распределением вероятностей $f(n)$. При многократных, а также непрерывных измерениях случайный стационарный $n(t)$ процесс характеризуется или функцией корреляции

$$R_n(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T n(t) \cdot n(t + \tau) \cdot dt,$$

или эквивалентной спектральной плотностью $S_n(\omega)$, являющейся преобразованием Фурье от функции корреляции:

$$S_{\Pi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\Pi}(\tau) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\tau \quad (2.91)$$

Для рассматриваемого примера

$$S_{\Pi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta^2 \cdot \tau^2} \cdot \cos \omega \tau \cdot d\tau = \frac{\sigma_n^2 \cdot \sqrt{\pi}}{\beta} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} = \frac{13\sqrt{\pi}}{0,17} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4 \cdot 0,029}} = 136 \cdot e^{-8,64\omega^2};$$

$$[S_{\Pi}(\omega)] = (C)^2 \cdot \text{мин}; \quad [\omega] = \text{рад/мин}.$$

Физический смысл спектральной плотности объясняется теоремой Рэлея и легко выясняется при рассмотрении электрических сигналов $n(t)$ – напряжения или тока. Величина

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) \cdot d\omega = 2 \cdot \int_0^{\infty} S_n(\omega) \cdot d\omega$$

есть полная электрическая мощность, выделяющаяся на сопротивлении в 1 Ом. Величина

$$2 \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_n(\omega) \cdot d\omega$$

есть мощность сигнала $n(t)$ в полосе частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Другими словами, спектральная плотность характеризует плотность распределения мощности по частотам гармонических составляющих сигнала $n(t)$. Это положение формально распространяется на любые, не только электрические, сигналы, однако эквивалент с физической мощностью имеет место не всегда. Если график $S(\omega)$ деформируется от горизонтальной прямой до импульса в начале координат, то соответствующий график $R(\tau)$, наоборот изменяется от импульса до горизонтальной прямой.

2.4.3. Вычисление импульсной переходной функции

На исследуемом объекте в течение некоторого промежутка времени регистрировали в стационарном режиме его работы отклонения от среднего значения входной $x_1(t)$ и выходной $x_2(t)$ величин.

Далее вычислим АКФ и ВКФ (см. 2.4.1), значения которых даны в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Значения АКФ и ВКФ

τ , мин	0	1	2	3	4	5	6	∞
$R_1(\tau)$	1,0	0,37	0,16	0,05	0,02	0,01	0,005	0,00
$R_{21}(\tau)$	0,20	0,47	0,39	0,26	0,14	0,06	0,03	0,00

Вычислим импульсную переходную функцию (ИПФ) объекта $h(t)$.

Для решения этой задачи воспользуемся интегральным уравнением Винера-Хопфа (2.85)

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot R_1(\tau - t) \cdot dt.$$

Ограничиваясь конечными пределами интегрирования и учитывая, что $h(t)=0$ при $t < 0$, уравнение приближенно запишется в виде

$$R_{21}(\tau) \approx \int_0^{\tau} h(t) \cdot R_1(\tau - t) \cdot dt. \quad (2.92)$$

Вычисление $h(t)$ по этому уравнению можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для этого предварительно интеграл необходимо заменить суммой

$$R_{21}(\tau) \approx \sum_{n=0}^N h(n \cdot \Delta) \cdot R_1(\tau - n \cdot \Delta) \cdot \Delta, \quad (2.93)$$

где Δ – малые интервалы, на которые разбит промежуток интегрирования от 0 до T ; $n \cdot \Delta$ – дискретное время; N – общее число малых интервалов.

Последнее равенство должно удовлетворяться при любых значениях τ , в т. ч. при $\tau = \Delta, 2\Delta, \dots, N \cdot \Delta$. Подставляя в него эти N значений τ , получим систему из N равенств, являющихся линейными алгебраическими уравнениями относительно неизвестных значений ИПФ $h(n \cdot \Delta)$ в дискретные моменты времени $t = \Delta, 2 \cdot \Delta, 3 \cdot \Delta, \dots, N \cdot \Delta$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$).

При $\tau = 0$ получим

$$\frac{1}{\Delta} R_{21}(0) = R_1(0)h(0) + R_1(-\Delta)h(\Delta) + R_1(-2\Delta)h(2\Delta) + \dots + R_1(-N\Delta)h(N\Delta); \quad (2.94)$$

при $\tau = \Delta$ получим

$$\frac{1}{\Delta} R_{21}(\Delta) = R_1(\Delta)h(0) + R_1(0)h(\Delta) + R_1(-\Delta)h(2\Delta) + \dots + R_1[(-N+1)\Delta] \cdot h(N\Delta). \quad (2.95)$$

Аналогично фиксированием τ и варьированием t получают остальные строки системы линейных уравнений.

Учитывая, что $R_1(\tau) = R_1(-\tau)$, можно ограничиться рассмотрением $\tau > 0$.

В реальных объектах всегда $h(0) = 0$, и первые члены правых частей строк можно отбросить. Для сохранения диагональной симметрии определителя системы при этом иногда передвигают на один шаг $R_{21}(\tau)$, т. е. берут $R_{21}(\Delta)$ вместо $R_{21}(0)$, $R_{21}(2\Delta)$ - взамен $R_{21}(\Delta)$ и т.д., либо уравнения начинают составлять не с первой, а со второй строки. При малых шагах Δ это вносит незначительные погрешности. Ниже, в численном примере, эти сдвиги для простоты пояснения самого процесса составления уравнений не делаются.

Используя данные табл. 2.9, составим по ней систему уравнений. Интервал взят $\Delta = 1$ мин. Так как при $\tau > 5$ мин

корреляционные функции быстро уменьшаются, ограничимся интервалом интегрирования от 0 до 5 мин. Составим первую строку системы при $\tau = 0$ по уравнению (2.94)

$$\frac{1}{1} \cdot 0,20 = 1 \cdot h(0) + 0,37h(\Delta) + 0,16h(2\Delta) + 0,05h(3\Delta) + 0,02h(4\Delta) + 0,01h(5\Delta),$$

где $R_{21}(0)=0,20$; $R_1(0)=1$; $R_1(-\Delta)=R_1(1)=0,37$;
 $R_1(-2\Delta)=R_1(2)=0,16$; $R_1(-3\Delta)=R_1(3)=0,05$;
 $R_1(-4\Delta)=R_1(4)=0,02$; $R_1(-5\Delta)=R_1(5)=0,01$.

Составим вторую строку системы при $\tau = \Delta = 1$ мин по уравнению (2.95):

$$\frac{1}{1} \cdot 0,47 = 0,37h(0) + 1h(\Delta) + 0,37h(2\Delta) + 0,16h(3\Delta) + 0,05h(4\Delta) + 0,02h(5\Delta),$$

где $R_{21}(\Delta)=0,47$; $R_1(\Delta)=R_1(1)=0,37$; $R(0)=1,0$; $R_1(-\Delta)=R_1(1)=0,37$;
 $R_1(-2\Delta)=R_1(2)=0,16$; $R_1(-3\Delta)=R_1(3)=0,05$; $R_1(-4\Delta)=R_1(4)=0,02$.

Аналогично составим строки при $\tau = 2\Delta = 2$ мин;
 $\tau = 3\Delta = 3$ мин; $\tau = 4\Delta = 4$ мин :

$$0,39 = 0,16h(0) + 0,37h(\Delta) + 1,0h(2\Delta) + 0,37h(3\Delta) + 0,16h(4\Delta) + 0,05h(5\Delta);$$

$$0,26 = 0,05h(0) + 0,16h(\Delta) + 0,37h(2\Delta) + 1,0h(3\Delta) + 0,37h(4\Delta) + 0,16h(5\Delta);$$

$$0,14 = 0,02h(0) + 0,05h(\Delta) + 0,16h(2\Delta) + 0,37h(3\Delta) + 1,0h(4\Delta) + 0,37h(5\Delta).$$

Так как $h(0)=0$, тогда полученные строки перепишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} 0,37 \cdot h_1 + 0,16 \cdot h_2 + 0,05 \cdot h_3 + 0,02 \cdot h_4 + 0,01 \cdot h_5 &= 0,20; \\ 1,00 \cdot h_1 + 0,37 \cdot h_2 + 0,16 \cdot h_3 + 0,05 \cdot h_4 + 0,02 \cdot h_5 &= 0,47; \\ 0,37 \cdot h_1 + 1,00 \cdot h_2 + 0,37 \cdot h_3 + 0,16 \cdot h_4 + 0,05 \cdot h_5 &= 0,39; \\ 0,16 \cdot h_1 + 0,37 \cdot h_2 + 1,00 \cdot h_3 + 0,37 \cdot h_4 + 0,16 \cdot h_5 &= 0,26; \\ 0,05 \cdot h_1 + 0,16 \cdot h_2 + 0,37 \cdot h_3 + 1,00 \cdot h_4 + 0,37 \cdot h_5 &= 0,14, \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

где $h_n = h(n\Delta)$.

Решение задачи теперь сводится к вычислению корней системы линейных уравнений. Именно эта часть задачи содержит наиболее трудоемкие вычислительные операции, т. к. число уравнений может быть большим. Вычисления следует производить не с помощью определителей по правилам Крамера, а одним из практических методов, например, хорошо известным методом последовательного исключения неизвестных Гаусса. Решение можно уточнять итерационными методами [20].

Применение итерационных методов оправдывается еще и тем, что обычно при исследовании объекта можно по априорным знаниям грубо (с ошибкой 30–50 %) оценить вид переходной функции, а тем самым и задать первоначальные грубые значения искомых корней (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5), а затем уточнять их итерационными вычислениями.

Для полученной системы вычислены корни:

$$h_1 = h(\Delta) = h(1) \approx 0,38; \quad h_2 = h(2\Delta) = h(2) \approx 0,20;$$

$$h_3 = h(3\Delta) = h(3) \approx 0,10; \quad h_4 = h(4\Delta) = h(4) \approx 0,05; \quad (2.97)$$

$$h_5 = h(5\Delta) = h(5) \approx 0,02.$$

При подстановке в исходную систему получаются невязки:

0,20-0,1787 = 0,0213 – для первого уравнения;

0,47-0,4729 = - 0,0029 – для второго уравнения;

0,39-0,3865 = 0,0035 – для третьего уравнения;

0,26-0,2565 = 0,0035 – для четвертого уравнения;

0,14-0,1454 = - 0,0054 – для пятого уравнения.

График искомой ИПФ построен на рис. 2.8.

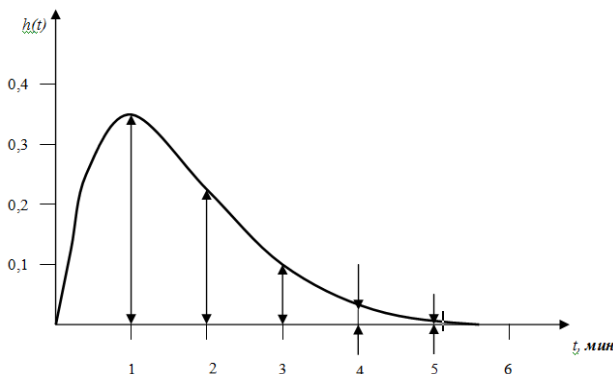


Рис. 2.8. Импульсная переходная функция полученная решением уравнения Винера-Хопфа

2.4.4. Вычисление спектральной плотности случайного сигнала

Рассмотрим вычисление спектральной плотности случайного процесса, данные эксперимента которого приведены в табл. 2.10. С интервалом $\Delta t = 1 \text{ мин}$ проведена регистрация отклонения от среднего значения величины $x(t)$. В первом столбце табл. 2.10 дано время измерения, а во втором столбце – измеренные значения отклонений $x(t)$, $[x] = \epsilon \delta$.

Один из возможных приемов решения этой задачи заключается в аппроксимации $x(t)$ на промежутке от 0 до T гармоническим рядом Фурье. Задача сводится к вычислению коэффициентов ряда a_i , b_i . Если коэффициенты вычислены, то искомая спектральная плотность определяется в дискретных точках по простой формуле

$$S(\omega_i) \approx \frac{1}{T} (a_i^2 + b_i^2). \quad (2.98)$$

Частота ω_i соответствует i-й гармонике ряда Фурье для $x(t)$.

Другой рассмотренный метод связан с разложением $x(t)$ в ряд по специальным функциям Лаггера, предложенном Н. Винером [21]. Этот метод удобен тем, что дает возможность сразу получить аналитическое выражение для спектральной плотности, в то время как разложение по Фурье дает значения $S(\omega_i)$ в отдельных точках и требуются дополнительные вычисления по аппроксимации самой $S(\omega_i)$ аналитическим выражением.

Суть метода сводится к следующему. Сигнал представляют рядом, ограничиваясь несколькими его членами:

$$x(t) = C_0 \ell_0(t) + C_1 \ell_1(t) + C_2 \ell_2(t) + \dots, \quad (2.99)$$

где C_0, C_1, C_2 – коэффициенты, которые нужно вычислить;
 $\ell_0(t), \ell_1(t), \ell_2(t), \dots$ – функции Лаггера.

По аналитическим выражениям для функции Лаггера [21]

$$\ell_n(t) = e^{-t} \left[\frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{n!} t^n - \frac{2^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{2} (-1)^n \right] \quad (2.100)$$

вычислены таблицы, т. е. эти функции нам в задаче известны. Вычисление коэффициентов $C_0, C_1, C_2, \dots$ производят по формулам

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \int_0^T x(t) \cdot \ell_0(t) \cdot dt \approx \sum_{i=0}^N x(t_i) \cdot \ell_0(t_i) \cdot \Delta t, \\ C_1 &= \int_0^T x(t) \cdot \ell_1(t) \cdot dt \approx \sum_{i=0}^N x(t_i) \cdot \ell_1(t_i) \cdot \Delta t, \\ C_2 &= \int_0^T x(t) \cdot \ell_2(t) \cdot dt \approx \sum_{i=0}^N x(t_i) \cdot \ell_2(t_i) \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

и т. д. почти таким же, как и в случае вычисления коэффициентов Фурье, только теперь функции $\sin$ и $\cos$ заменены на $\ell_0, \ell_1 \dots$. Это объясняется тем, что $\sin$ и $\cos$ – функции, как и ℓ_n -функции, составляют полную ортогональную систему функций [12].

В табл. 2.10 произведено приближенное вычисление первых шести коэффициентов $C_0, C_1, C_2, \dots, C_5$. Для этого в 3-, 4-, 5-, 6-, 7- и 8-м столбцах записаны табличные значения функций Лаггера для соответствующих (в направлении строк) моментов времени t_i . Например, $\ell_4(7) = 0,392$. В последующих шести столбцах вычислены произведения $x(t_i) \cdot \ell_0(t_i); x(t_i) \cdot \ell_1(t_i)$ и т. д. и их суммы:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &\approx \sum_{i=0}^{24} x(t_i) \cdot \ell_0(t_i) \cdot 1 = 2,705; \\ C_1 &\approx \sum_{i=0}^{24} x(t_i) \cdot \ell_1(t_i) \cdot 1 = 1,146; \\ C_2 &\approx \sum_{i=0}^{24} x(t_i) \cdot \ell_2(t_i) \cdot 1 = 1,855; \\ C_3 &\approx \sum_{i=0}^{24} x(t_i) \cdot \ell_3(t_i) \cdot 1 = -7,513; \\ C_4 &\approx \sum_{i=0}^{24} x(t_i) \cdot \ell_4(t_i) \cdot 1 = -5,475; \\ C_5 &\approx \sum_{i=0}^{24} x(t_i) \cdot \ell_5(t_i) \cdot 1 = -9,489. \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

Так получена аппроксимация анализируемого сигнала суммой кратных функции Лаггера:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx 2,705 \cdot \ell_0(t) + 1,146 \cdot \ell_1(t) + 1,855 \cdot \ell_2(t) - 7,513 \cdot \ell_3(t) - \\ &- 5,475 \cdot \ell_4(t) - 9,489 \cdot \ell_5(t). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Известно, что между сигналом $x(t)$ и его спектральной плотностью существует зависимость [18, с. 414]:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) \cdot \ell^{-j\omega t} \cdot dt \right|^2 \approx \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) \cdot \ell^{-j\omega t} \cdot dt \right|^2, \quad (2.104)$$

содержащая преобразование Фурье исходного сигнала. Кроме того, доказано, что преобразование Фурье для функции Лаггера имеет вид

$$L_n(j\omega) = \int_0^T \ell_n(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \sqrt{2} \cdot \frac{(1-j\omega)^n}{(1-j\omega)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 5). \quad (2.105)$$

Поэтому, учитывая, что сигнал $x(t)$ есть сумма кратных функций Лаггера, можно записать

$$\begin{aligned} S(\omega) \approx \frac{1}{T} & \left| 2,705 \cdot L_0(j\omega) + 1,146 \cdot L_1(j\omega) + 1,855 \cdot L_2(j\omega) - 7,513 L_3(j\omega) - \right. \\ & \left. - 5,475 \cdot L_4(j\omega) - 9,489 \cdot L_5(j\omega) \right|^2 = \frac{1}{25} \left| \frac{2,705 \cdot \sqrt{2} \cdot (1-j\omega)^0}{(1+j\omega)} + \right. \\ & + \frac{1,146 \cdot \sqrt{2} \cdot (1-j\omega)}{(1+j\omega)^2} + \frac{1,855 \cdot \sqrt{2} \cdot (1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^3} - \frac{7,513 \cdot \sqrt{2} \cdot (1-j\omega)^3}{(1+j\omega)^4} - \\ & \left. - \frac{5,475 \cdot \sqrt{2} \cdot (1-j\omega)^4}{(1+j\omega)^5} - \frac{9,489 \cdot \sqrt{2} \cdot (1-j\omega)^5}{(1+j\omega)^6} \right|^2, \end{aligned} \quad (2.106)$$

где $T=25$ мин взято из табл. 2.10.

Если ограничиться не шестью, а двумя членами ряда 2.103, то искомая спектральная плотность, хотя и грубее, оценится выражением

$$S(\omega) \approx \frac{1}{25} \left| \frac{3,82}{1+j\omega} + \frac{1,62(1-j\omega)}{(1+j\omega)^2} \right|^2, \quad (2.107)$$

которым, лишь для большей наглядности, воспользуемся дальше. Преобразование (2.107) достаточно просто, что позволит понять преобразование более сложного выражения (2.106).

Дальнейшие вычисления сводятся к тождественным преобразованиям для приведения $S(\omega)$ к удобной форме записи, к полному освобождению от мнимых количеств.

Таблица 2.10.

Результаты расчёта

t_i, min	$x(t_i), \text{ед}$	$I_d(t_i)$	$I_2(t_i)$	$I_3(t_i)$	$I_4(t_i)$	$I_5(t_i)$	$x(t_i) I_d(t_i)$	$x(t_i) I_2(t_i)$	$x(t_i) I_3(t_i)$	$x(t_i) I_4(t_i)$	$x(t_i) I_5(t_i)$															
0	1,20	1,414	1,414	-1,414	1,414	-1,414	1,700	-1,700	-1,700	1,700	-1,700															
1	0,20	0,520	0,520	-0,173	0,173	-0,381	0,104	-0,104	0,035	0,035	0,076															
2	4,00	0,191	0,191	-0,447	0,191	0,166	0,764	2,296	-1,788	0,764	0,664															
3	2,80	0,070	0,493	-0,070	-0,352	0,267	0,196	0,982	-0,070	-0,920	0,748															
4	-1,80	0,026	0,443	0,319	-0,250	-0,205	-0,047	-0,326	-0,575	0,450	0,370															
5	-1,60	0,009	0,295	0,435	0,105	-0,327	-0,014	-0,138	-0,696	-0,168	0,524															
6	1,50	0,003	0,172	0,375	0,340	-0,086	0,005	0,059	0,563	0,510	-0,129															
7	-3,20	0,001	0,092	0,263	0,392	0,182	-0,003	-0,055	-0,843	-1,250	-0,583															
8	-5,70	0,000	0,046	0,168	0,334	0,347	0,000	-0,040	-0,600	-1,900	-1,973															
9	-7,90	0,003	0,022	0,094	0,242	0,360	0,000	-0,024	-0,743	-1,910	-2,840															
10	-12,00	0,001	0,010	0,051	0,158	0,310	0,000	-0,012	-0,612	-1,894	-3,722															
11	-4,002	0,000	0,005	0,026	0,095	0,226	0,000	-0,020	-0,104	-0,380	-0,904															
12	-2,50	0,000	0,002	0,013	0,054	0,152	0,000	-0,005	-0,032	-0,135	-0,380															
13	0,40	0,000	0,001	0,006	0,030	0,095	$x(t_i) y_i(t_i) = 0$	0,000	0,002	0,012	0,038															
14	-0,50	0,000	0,003	0,003	0,016	0,057		-0,002	-0,008	0,029	-0,029															
15	3,60	0,000	0,001	0,001	0,008	0,032		0,004	0,004	0,029	0,115															
16	8,20	0,000	0,001	0,001	0,004	0,018		0,008	0,008	0,033	0,147															
17	6,50	$I_d(t_i)=0$	0,000	0,000	0,002	0,009	$x(t_i) y_i(t_i) = 0$	0,000	0,000	0,013	0,059															
18	5,60		$I_2(t_i)=0$	0,001	0,001	0,005		0,006	0,006	0,028																
19	2,90			$I_4(t_i)=0$	0,000	0,000		0,002	0,000	0,006																
20	-2,90				$I_2(t_i)=0$	0,000		0,001	$x(t_i) y_i(t_i) = 0$	$x(t_i) y_i(t_i) = 0$	0,003															
21	-0,50	$I_4(t_i)=0$	0,001			$I_2(t_i)=0$		$I_4(t_i)=0$				$I_2(t_i)=0$	$I_4(t_i)=0$	$I_5(t_i)=0$												
22	3,50		$I_2(t_i)=0$												$I_4(t_i)=0$	$I_2(t_i)=0$	$I_4(t_i)=0$	$I_5(t_i)=0$								
23	7,00																		$I_2(t_i)=0$	$I_4(t_i)=0$	$I_2(t_i)=0$	$I_4(t_i)=0$	$I_5(t_i)=0$			
24	11,00			$I_2(t_i)=0$																				$I_4(t_i)=0$	$I_2(t_i)=0$	$I_4(t_i)=0$
Σ							2,705		1,146	1,855	-5,475															

Нужно найти квадрат модуля комплексной функции от ω , фигурирующей в (2.107). Освобождаясь от мнимых количеств в знаменателе, выделяя мнимую и действительную части, находя затем модуль и возведя его в квадрат, последовательно получим

$$\begin{aligned} S(\omega) &\approx \frac{1}{25} \left| \frac{3,82(1-j\omega)}{1+\omega^2} + \frac{1,62(1-j\omega)^3}{(1+\omega^2)^2} \right|^2 = \frac{0,04}{(1+\omega^2)^4} \cdot |3,82(1-j\omega)(1+\omega^2) + \\ &+ 1,62(1-j\omega)^3|^2 = \frac{0,04}{(1+\omega^2)^4} \cdot |3,82(1+\omega^2) - 3,82j\omega(1+\omega)^2 + \\ &+ 1,62(1-3j\omega-3\omega^2-j\omega^3)|^2 = \frac{0,04}{(1+\omega^2)^4} \cdot |(5,44-1,04\omega^2) - j(8,68\omega+5,44\omega^3)|^2 = \\ &= \frac{0,04}{(1+\omega^2)^4} \cdot [(5,44-1,04\omega^2)^2 + (8,68\omega+5,44\omega^3)^2]. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Здесь использовано известное соотношение

$$|A(\omega) + jB(\omega)|^2 = [\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}]^2 = A^2(\omega) + B^2(\omega).$$

Найденная спектральная плотность является четной функцией от ω , график ее симметричен относительно оси ординат. Спектральные плотности случайных сигналов содержат ту же информацию, что и корреляционные функции, и могут быть применены к оценке динамических свойств объектов. Весьма полезна, например, формула

$$|W(j\omega)| = \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)}, \quad (2.109)$$

оценивающая модуль комплексного коэффициента передачи объекта по спектральным плотностям выходного $S_2(\omega_i)$ и входного $S_1(\omega)$ сигналов [5].

В обычных, рассматриваемых здесь, методах статистической динамики процедура вычислений сложна, т. к. в сущности

надо решать интегральное уравнение Винера – Хопфа, что дает импульсную переходную функцию $h(t)$, а затем еще из $h(t)$ находить передаточную функцию объекта [4]. Спрашивается, можно ли и как упростить эту процедуру и, в частности, избежать промежуточного вычисления $h(t)$?

Возможен следующий путь. Для объекта с уравнением вида

$$a_0 x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x_2^{(1)} + x_2 = b_0 x_1 + b_1 x_1^{(1)} + \dots + b_m x_1^{(m)}$$

справедливы равенства:

$$a_0 \cdot R_{21}^{(n)}(\tau_i) + a_1 R_{21}^{(n-1)}(\tau_i) + \dots + a_n \cdot R_{21}(\tau_i) = b_0 R_1(\tau_i) + b_1 R_1^{(1)}(\tau_i) + \dots + b_m \cdot R_1^{(m)}(\tau_i)$$

либо

$$a_0 R_2^{(n)}(\tau_i) + a_1 R_2^{(n-1)}(\tau_i) + \dots + a_n R_2(\tau_i) = b_0 R_{12}(\tau_i) + b_1 R_{12}^{(1)}(\tau_i) + \dots + b_m \cdot R_{12}^{(m)}(\tau_i)$$

(в последней строке сигнал проходит в обратном направлении). Эти равенства дают правило: взаимокорреляционная функция есть выход линейного уравнения, если корреляционная функция есть его вход. Их можно использовать для определения искомых коэффициентов уравнения объекта следующим образом.

Экспериментально определяют $R_2(\tau)$ и $R_{12}(\tau)$ (либо R_1 и R_{21}) и затем значения R_2 и R_{12} при разных τ_i подставляют в одно из равенств столько раз, сколько неизвестных коэффициентов. Это дает систему линейных алгебраических уравнений, определяющую коэффициенты a_i, b_j .

В равенствах надо брать, по крайней мере, столько точек τ_i , сколько неизвестных коэффициентов. Для повышения точности можно привлекать большее число τ_i , используя метод наименьших квадратов. Можно даже привлечь не дискретные точки, а непрерывные отрезки корреляционных функций на интервале $\tau_{\min} < \tau < \tau_{\max}$, заменяя операцию суммирования в методе наименьших квадратов операцией интегрирования.

2.4.5. Вычисление комплексного коэффициента усиления (передаточной функции) объекта с использованием спектральных плотностей

В стационарном режиме работы объекта были зарегистрированы в течение некоторого промежутка времени отклонения от среднего значения входного $x_1(t)$ и выходного $x_2(t)$ сигналов и определены спектральная плотность $S_1(\omega)$ входного сигнала (четная действительная функция от ω) и взаимная спектральная плотность $S_{21}(j\omega)$ выходного и входного сигналов (комплексная функция от ω); $S_{21}(j\omega) = K(\omega) + jM(\omega)$

Графики $S_1(\omega)$, $K(\omega)$ и $M(\omega)$ показаны на рис. 2.9, а, б, по которым требуется вычислить комплексный коэффициент усиления объекта $W(j\omega)$ (передаточную функцию). Вычисление $S_1(\omega)$ см. 2.4.2.

Комплексный коэффициент усиления представим действительной и мнимой частотными характеристиками [13]:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Вычисления можно осуществить по формулам

$$P(\omega) = \frac{K(\omega)}{S_1(\omega)}; \quad Q(\omega) = \frac{M(S)}{S_1(\omega)}. \quad (2.110)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.11, в первой строке которой написаны частоты ω_i , при которых из графиков рис. 2.9, а, б отчитывались ординаты $K(\omega_i)$, $M(\omega_i)$ и $S_1(\omega_i)$. Последние вписаны во вторую, третью и четвертую строки. В двух последних строках, помещены результаты вычислений $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$, графики которых показаны на рис. 2.9, в.

Зная $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$, легко можно получить передаточную функцию объекта.

Таблица 2.11

Результаты расчета

$\omega_l, \text{ рад/мин}$	0,00	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$K(\omega_l)$	7,3	7,1	6,2	4,3	2,5	1,0	0,2	-0,1	-0,2	-0,25	-0,3	-0,2	-0,0	0,1	0,2
$M(\omega_l)$	0,0	-1,1	-2,3	-3,3	-3,8	-3,8	-3,3	-2,3	-1,4	-0,8	-0,3	-0,26	-0,24	-0,22	-0,2
$S_l(\omega_l)$	3,5	3,7	3,0	2,6	2,2	1,8	1,5	1,25	1,0	0,8	0,65	0,6	0,56	0,53	0,5
$F(\omega) = \frac{K(\omega)}{S(\omega)}$	2,08	2,07	2,06	1,65	1,14	0,556	0,13	-0,08	-0,20	-0,34	-0,46	-0,33	0,0	0,05	0,4
$Q(\omega) = \frac{M(\omega)}{S(\omega)}$	0,0	-	-0,77	-1,27	-1,73	-2,11	-2,2	-1,84	-1,4	-1,0	-0,46	-0,44	-0,42	-0,41	-0,4

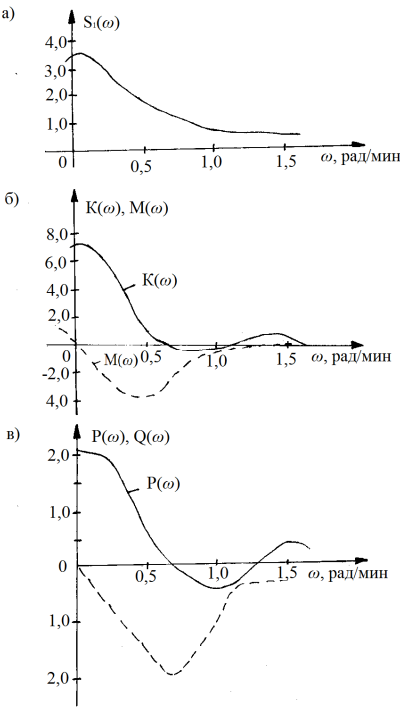


Рис. 2.9. К расчету частотных характеристик статистическими методами

3. ИНЖЕНЕРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

3.1. Объекты управления и виды их математических моделей

Процессы промышленного производства определяются большим и разнообразным числом факторов, влияющих на эти процессы.

Сложность анализа этих процессов как объектов управления делает естественным и необходимым при его исследовании соблюдение определенной иерархической структуры. Особенностью такой структуры является последовательное расчленение технической системы на подсистемы, между которыми устанавливают отношения подчиненности. Иерархическую структуру промышленных предприятий с позиции задач управления можно представить в виде трех ступеней:

- нижняя ступень – так называемые типовые процессы, например, горной технологии (бурение, взрывание, доставка, дробление, измельчение, сепарация и др.);

- средняя ступень – группа процессов или аппаратов, выполняющих самостоятельную технологическую задачу по добыче или переработке полезного ископаемого;

- верхняя ступень – технологическая линия добычи и переработки сырья, рассматриваемая в целом.

Для каждой ступени промышленной технологии характерны свои задачи управления, которым соответствуют свои целевые функции, что и определяет вид математической модели, описывающей процесс функционирования данного объекта.

В общем случае математическую модель каждой ступени можно рассматривать как сложный объект и представить как некоторую функцию переменных, приведенных на рис. 3.1.

Здесь на входы объекта поступают три типа воздействий:

1) входные неуправляемые (но контролируемые) переменные $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_r\}$, представляют собой вектор возмуще-

ний и они, как правило, характеризуют качественные показатели исходного сырья;

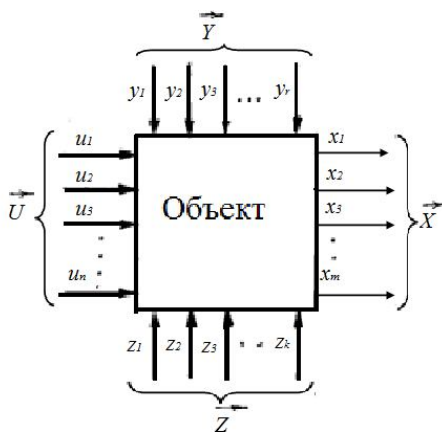


Рис. 3.1. Структура сложного объекта управления

2) входные управляемые переменные $\vec{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ представляют собой вектор управления и характеризуют, как правило, количественные показатели материальных и энергетических потоков;

3) неконтролируемые факторы $\vec{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ представляют собой вектор помех. По существу это вектор возмущений, о котором исследователю известно очень мало или ничего неизвестно.

Существо любого технологического процесса состоит в преобразовании входных воздействий $\vec{Y}, \vec{U}$ в выходные $\vec{X}$. Вектор $\vec{X}$ называется вектором состояния и характеризует качественно-количественные признаки выходных продуктов.

Объекты промышленной технологии удобнее представлять в виде моделей, описывающих типовые процессы. Всего можно выделить четыре типовые операции: простую, смешивательную, разделительную и сложную.

Характерной особенностью простой операции является переработка одного входного продукта y в выходной продукт x . Эта операция описывается зависимостью

$$X = f(y, \vec{U}). \quad (3.1)$$

Например, процесс дробления руды можно отнести к простой операции, где входной переменной является поток крупнокускового материала в загрузке дробилки. Выходной переменной – дробленый материал с контролируемым размером кусков x , а управляющими воздействиями могут быть ширина разгрузочной щели $h(\text{мм})$, производительность потока Q (т/ч) на входе дробилки, крупность кусков в загрузке d (мм), т. е. $\vec{U} = \{h, Q, d\}$.

Смесительная операция характеризуется наличием n технологических потоков $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ на входе объекта и одним выходным потоком x . Уравнение этой операции имеет вид

$$X = f(\vec{Y}, \vec{U}). \quad (3.2)$$

Разделительная операция характеризуется одним входным технологическим потоком y и m выходными технологическими потоками $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и описывается уравнением

$$\vec{X} = f(y, \vec{U}). \quad (3.3)$$

Например, сепаратор разделяет поток измельченной руды на входе на два потока по крупности (подрешеточный продукт x_1 и надрешеточный продукт x_2). Управляющими воздействиями могут служить напор, создаваемый вентилятором H , угол установки лопаток φ , частота вращения привода вентилятора n , т. е. $U = \{H, \varphi, n\}$.

Сложная операция характеризуется наличием n входных технологических потоков и m выходных (см. рис. 3.1). Уравнение сложной операции имеет вид

$$x_i = f_i(\vec{U}, \vec{Y}) ; i = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Обычно сложная операция соответствует технологической схеме, включающей несколько операций, например, последовательное соединение смесительной и разделительной операций (шаровая мельница и классификатор).

В технологических схемах типовые операции, как правило, агрегируют последовательным и параллельным их соединением (рис. 3.2).

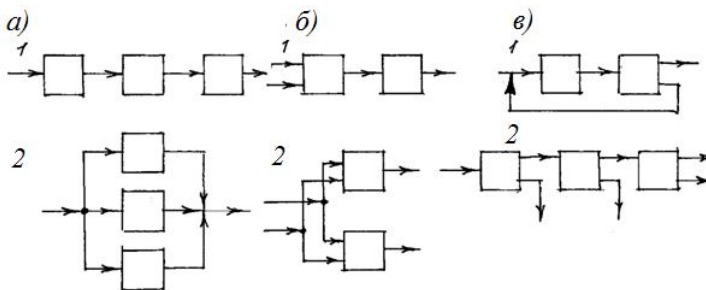


Рис. 3.2. Виды типовых операций:

а – простые операции (1 – последовательное; 2 – параллельное соединения); б – смесительные операции (1 – последовательное соединение с простой операцией; 2 – параллельное соединение); в – разделительные операции (1 – схема с рециклом; 2 – последовательное соединение)

В установившемся режиме работы агрегата зависимости (3.1)–(3.4) представляют собой математические модели статических режимов работы или статические характеристики объектов (рис. 3.3).

В общем случае статические характеристики являются нелинейными зависимостями выходных переменных $\vec{X}$ от управляемых и неуправляемых входных переменных $\vec{U}, \vec{Y}$.

Статические характеристики на основе экспериментально-го материала наиболее часто представляются в виде степенных полиномов вида

$$x_k = a_0 + \sum_{i=1}^{n+r} a_i \cdot u_i + \sum_{i \neq j}^{n+r} a_{ij} \cdot u_i \cdot u_j + \sum_{i=1}^{n+r} a_{ii} \cdot u_i^2 \quad (3.5)$$

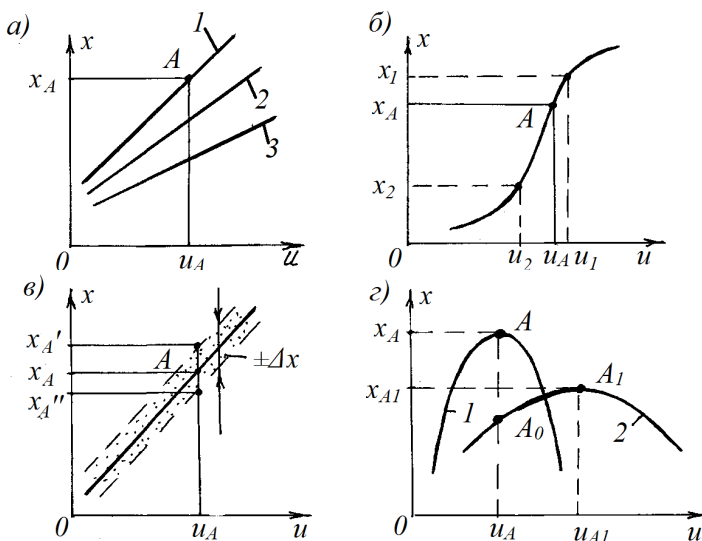


Рис. 3.3. Статические характеристики промышленных объектов

где $\dot{a}_i$ – свободный член $\dot{a}_i$, $\dot{a}_{ij}$ и $\dot{a}_{ii}$ – коэффициенты, характеризующие влияние параметров, взаимодействий параметров и их квадратов на выходную величину $\hat{O}_e$.

В выражении (3.5) входные переменные $\vec{U}$ и $\vec{Y}$ (см. рис. 3.1) обозначены одной буквой u_i , поэтому верхним пределом знака суммирования является сумма индексов n и r . Например, статическую характеристику простой операции,

имеющей два управляющих воздействия u_1, u_2 ($n=2$), можно представить выражением

$$x_k = a_0 + a_1 y + a_2 u_1 + a_3 u_2 + a_{12} y u_1 + a_{13} y u_2 + a_{23} u_1 u_2 + a_{22} u_1^2 + a_{33} u_2^2 + a_{11} y^2. \quad (3.6)$$

Согласно выражению (3.4), для разделительной операции всегда имеет место система статических характеристик. Например, для случая, когда $m = 2, n = 1, r = 1$, имеем

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_0 + a_1 y + a_2 u + a_{12} y u + a_{11} y^2 + a_{22} u^2 \\ x_2 &= b_0 + b_1 y + b_2 u + b_{12} y u + b_{11} y^2 + b_{22} u^2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.7)$$

В частных случаях статические характеристики могут быть линейными. Тогда коэффициенты a_{ij} и b_{ii} в уравнении (3.5) равны нулю. Это значит, что статическая характеристика, например, простой операции (3.6), преобразуется к виду

$$x_k = c_0 + c_1 y + c_2 u + c_3 u_2, \quad (3.8)$$

причем в общем случае коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 нелинейной статической характеристики (3.6) не равны коэффициентам c_0, c_1, c_2, c_3 .

В задачах автоматического управления статические характеристики используют для выбора рабочей точки A , определяющей режим работы установки, стабилизацию которого, как правило, и осуществляет система автоматического регулирования. Поэтому существенный интерес представляют локальные линейные статические характеристики, устанавливающие зависимость выходных показателей $\vec{X}$ от управляющих воздействий $\vec{u}$ вблизи выбранной рабочей точки A .

На практике часто бывают случаи, когда непосредственно количественно определить влияние переменной y на выходную величину X невозможно по техническим причинам. То-

гда статическую характеристику обычно представляют в виде набора зависимостей вида

$$\tilde{O} = \varphi_0 + \varphi_{1f} u \quad (3.9)$$

для различных фиксированных значений u , как показано линиями 1, 2, 3 на рис. 3.3, а.

В тех случаях, когда переменная u изменяется в достаточно узких пределах, а ее влияние на переменную X непосредственно учесть невозможно, статическую характеристику $\tilde{O} = f(u)$ простой операции можно представить в виде

$$X \pm \Delta X = a_0 + a_1 \cdot u, \quad (3.10)$$

где $\Delta \tilde{O} = t_p \cdot \sigma_{ocm}$ – доверительный интервал выходной переменной (см. рис. 3.3, в);

$$\sigma_{ocm} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q (x_i - x_i^*)^2}{q-1}},$$

где σ_{ocm} – остаточное среднее квадратичное отклонение истинных значений $\tilde{O}_i$ от расчетных $\tilde{O}_i^*$ (линия ВС); q – число экспериментальных данных; t_p – коэффициент Стьюдента, взятый для заданной доверительной вероятности p при числе степеней свободы $(q-1)$. Методика расчета $\Delta \tilde{O}$, коэффициентов a_0 , a_1 в выражении (3.10) известна из курса математической статистики.

Промышленные объекты характеризуются большим разнообразием своих статических характеристик, которые, как правило, носят нелинейный характер. Некоторые виды плавных нелинейных характеристик могут быть с определенными допущениями заменены линейными зависимостями. Например, в окрестностях точки A при изменении переменной $\dot{e}$ от $\dot{e}_2$ до $\dot{e}_1$ нелинейную зависимость на рис. 3.3, б можно заменить прямой линией, являющейся касательной в точке A , при этом

$$x_1 - x_2 = k(u_1 - u_2) \quad \text{или} \quad \Delta x = k \cdot \Delta u \quad (3.11)$$

Коэффициент пропорциональности k называют коэффициентом передачи (коэффициентом усиления), который справедлив только для окрестности т. A . При перемещении рабочей точки по статической характеристике (при изменении режима работы технологического агрегата) значение коэффициента k также изменяется.

Если статическая характеристика объекта задана аналитически, то линеаризация в окрестности т. A заключается в разложении зависимости $x = f(y, u)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки и отбрасывании членов второго и выше порядков малости.

Отдельные виды статических характеристик не поддаются линеаризации. На рис. 3.3, z приведены так называемые экстремальные статические характеристики для различных значений входной переменной y (кривые 1 и 2). Характеристики указанного вида типичны для ряда объектов (процесс бурения, измельчения и др.). В этих установках наиболее выгодным режимом является такой, когда рабочая точка A находится в области экстремальных значений выходных переменной X . При изменении входной переменной y смещается и статическая характеристика $x = f(u)$ на плоскости $x_0 u$ (см. рис. 3.3, z). Если рабочая точка находилась в точке A статической характеристики 1 при одном значении y_1 , то при другом значении y_2 статическая характеристика $x = f(u)$ займет положение 2. В этом случае при управляющем воздействии u_A рабочая точка будет в положении A_0 . Задачей экстремального управления является перевод рабочей точки из A_0 в точку A_1 , соответствующую экстремуму кривой 2. В этом случае управляющее воздействие δ должно соответствовать величине u_{A_1} .

При непрерывном изменении неконтролируемого воздействия Z кривая 1 на рис. 3.3, z будет медленно смещаться. Это значит, что коэффициенты a_0, a_1, a_2 в уравнении $x = f(u)$ бу-

дет также изменяться во времени, а уравнение экстремальной статической характеристики будет иметь вид

$$x = \dot{a}_0(t) + \dot{a}_1(t) \cdot \dot{e} + \dot{a}_2(t) \cdot \dot{e}^2. \quad (3.12)$$

Технологические объекты, математические модели которых содержат коэффициенты a_i как функции времени, называются *нестационарными объектами*. Нестационарность проявляется также при постоянном износе, деформации, изменении свойств отдельных элементов технологических элементов.

Часто статические характеристики не удается представить в явном виде, т. е. решить относительно выходной переменной x ; тогда они представляются в неявном виде, как, например, статическая характеристика простой операции

$$\varphi(x, y, \vec{U}) = 0. \quad (3.13)$$

Динамические характеристики типовых технологических операций

Под воздействием управляющих входных переменных $\vec{U}$ объекта рабочая точка на его статической характеристике перемещается, например, из точки a в точку b (рис. 3.4, *а*). В точке b возможен новый установившийся режим работы объекта. При изменении входного воздействия скачком, например на величину $\Delta u = u_\delta - u_\alpha$, в момент времени t_0 (рис. 3.4, *б*) выходная величина x достигает практически установившегося значения x_δ (на 97 %) не мгновенно, а через некоторое время $T_1 = t_1 - t_0$ (рис. 3.4, *в*), которое является временем переходного процесса, т. е. временем изменения переменной $x(t)$ от нуля (в точке 1) до величины $\Delta x(t) = x_\delta - x_\alpha$ (в точке 2). T_1 характеризует динамические свойства объекта. Если $T_1 = 0$ объект является безынерционным и, наоборот,

чем больше время переходного процесса T_1 , тем инерционнее объект.

В первом приближении указанное изменение переменной $x(t)$ на интервале от точки a до точки b статической характеристики при подаче на вход объекта скачкообразного управления $\Delta u(t)$ можно описать дифференциальным уравнением инерционного звена первого порядка:

$$T \frac{d(\Delta x)}{dt} + \Delta x = \kappa \cdot \Delta U, \quad (3.14)$$

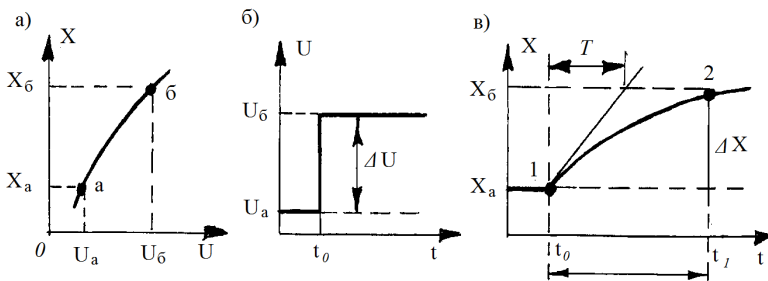


Рис. 3.4. Статическая (а) и динамическая (в) характеристики объекта при ступенчатом входном воздействии (б)

где T – постоянная времени, равная временному отрезку от момента t_0 до пересечения касательной 1–3 (см. рис. 3.4, в) линии нового установившегося значения переменной x в точке 3

$$\kappa = \frac{\Delta x}{\Delta U} = \frac{\Delta x(\infty) - \Delta x(0)}{\Delta U} \text{ – коэффициент передачи.}$$

В установившемся режиме работы объекта (когда $\frac{d\Delta x}{dt} = 0$) выражение (3.14) преобразуется в линеаризованную статическую характеристику $\Delta x = \kappa \cdot \Delta U$ на интервале от точки a до точки b (см. рис. 3.4, а).

Дифференциальное уравнение (3.14) можно представить и в так называемой нормальной форме (форме Коши):

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{1}{T}(\kappa \cdot \Delta u - \Delta x) . \quad (3.15)$$

В общем случае постоянная времени характеризует способность объекта накапливать и рассеивать вещество или энергию.

Другим параметром, характеризующим инерционные свойства объекта является чистое или транспортное запаздывание τ . На рис. 3.5, а, б, в показаны характерные типы переходных функций технологических объектов при наличии транспортного запаздывания и подаче на вход скачкообразного воздействия (рис. 3.5, г). Здесь переменные представлены в относительном виде, где

$$\bar{x}(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(\infty)} \quad \text{и} \quad \bar{u}(t) = \frac{\Delta u(t)}{\Delta u(\infty)} .$$

Дифференциальное уравнение инерционного звена первого порядка с запаздыванием (см. рис. 3.5, а) имеет вид

$$T \frac{d\bar{x}(t)}{dt} + \bar{x}(t) = \kappa \cdot \bar{u}(t - \tau) . \quad (3.16)$$

Некоторые объекты являются многоемкостными, т. е. описываются дифференциальными уравнениями более высокого порядка, которые в качестве коэффициентов содержат комбинации из нескольких постоянных времени. Динамика таких объектов при наличии чистого транспортного запаздывания описывается линейными дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = \\ = \varepsilon_m \frac{d^m u(t - \tau)}{dt^m} + \varepsilon_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t - \tau)}{dt^{m-1}} + \dots + \varepsilon_1 \frac{du(t - \tau)}{dt} + \varepsilon_0 u(t - \tau), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где всегда $n \geq m$.

Дифференциальным уравнением вида (3.17) соответствуют

S-образные кривые переходных процессов статических объектов (рис. 3.5, б).

При описании динамических свойств астатических объектов используются тоже дифференциальные уравнения, но не содержащие в левой части члена $\dot{a}_0 \delta(t)$, а в правой статического коэффициента передачи, т. к. известно, что астатические объекты не имеют статической характеристики (см. рис. 3.5, в).

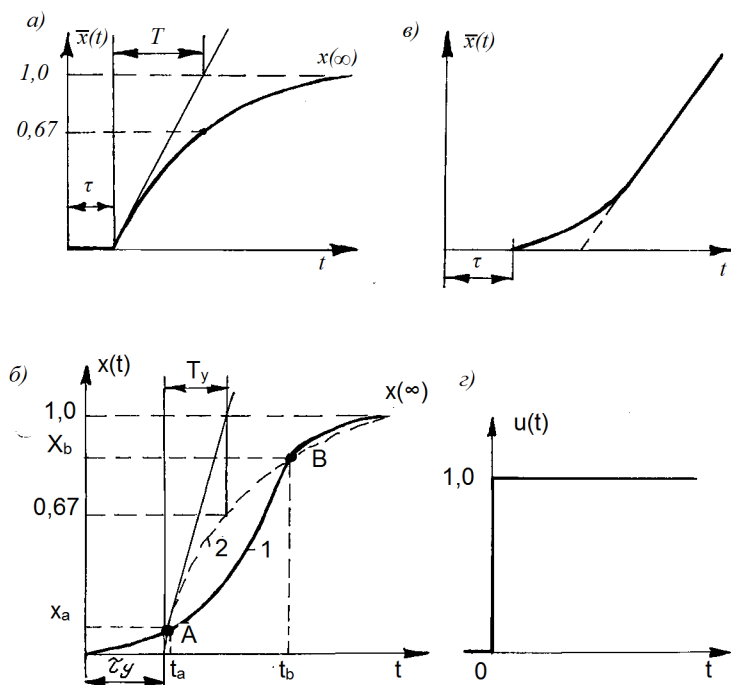


Рис. 3.5. Характерные типы переходных функций технологических объектов

Опыт практической оценки динамических характеристик различных объектов промышленного производства показал, то

большинство из них может быть представлено дифференциальными уравнениями одного из видов:

$$\begin{aligned}
 a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) &= \varepsilon_0 \cdot u(t); \\
 a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) &= \varepsilon_0 u(t - \tau); \\
 a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) &= \varepsilon_0 \cdot u(t - \tau); \\
 a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) &= \varepsilon_1 \frac{du(t - \tau)}{dt} + \varepsilon_0 \cdot u(t - \tau); \\
 a_3 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t) &= \varepsilon_0 \cdot u(t - \tau); \\
 a_3 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t) &= \varepsilon_1 \frac{du(t - \tau)}{dt} + \varepsilon_0 \cdot u(t - \tau).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Если же статическую характеристику объекта в окрестности рабочей точки невозможно линеаризовать, то ее следует выразить некоторой нелинейной функцией переменных $x = \Delta x$ и $u = \Delta u$ вида $f(x, u)$. В этом случае дифференциальное уравнение типа (3.16), записанное в форме Коши, имеет вид

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, \bar{u}). \tag{3.19}$$

Динамика многомерных объектов может быть записана в некоторой локальной области следующей системой дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_m); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_m); \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_m(t)}{dt} &= f_m(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_m). \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Таким образом, математические модели, характеризующие статический режим технологических операций, будем преимущественно определять в классе алгебраических уравнений вида (3.5), а динамические модели этих операций в классе дифференциальных уравнений вида (3.18) или в нормальной форме (3.20). Такое представление математических моделей технологических объектов достаточно для выполнения синтеза систем автоматического управления.

3.2. Методы получения моделей промышленных объектов управления

Под объектом горной технологии понимается технологический аппарат или их совокупность, где осуществляется одно из типовых операций или их определенная последовательность. Если для объекта создается система управления, то его называют объектом управления. В этом случае, как правило, к объектам относят чувствительные элементы (датчики), контролирующие состояние вектора выходных управляемых переменных $\vec{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$, а также регулирующие органы, изменяющие состояние вектора входных управляемых переменных $\vec{U} = \{u_1, \dots, u_m\}$ (см. рис. 3.1).

Контуры объекта управления, как правило, зависят главным образом от цели, которую ставит перед собой разработчик системы управления.

Создание системы управления технологическими процессами неразрывно связано с моделями объектов управления. При

создании локальных (простых) систем управления технологическими процессами в качестве моделей объектов управления выступают статические и динамические характеристики. При управлении всей технологической линией необходимо использовать более сложные модели, включающие совокупность моделей объектов управления, связи между объектами.

Следовательно, каждая конкретная модель объекта управления является таким отображением физики процесса, происходящих в объекте, которые позволяют выделить его наиболее существенные для поставленной задачи свойства.

Модели объектов управления условно можно подразделить на два класса: физические и математические. В физических моделях должны происходить явления, идентичные объекту управления.

Как правило, модель отличается от объекта геометрическими размерами и диапазоном изменения переменных $\vec{X}, \vec{U}, \vec{Y}$. Создание таких моделей требует преодоления определенных трудностей, связанных с оценкой степени аналогии процессов, происходящих в объекте и модели. Эта оценка базируется на теоремах теории подобия.

Другой группой физических моделей являются модели, которые имеют иную физическую природу, чем физическая природа объекта. Здесь пользуются не принципом подобия, а принципом эквивалентности.

В этом случае уравнения модели совпадают с уравнениями объекта при выполнении условия эквивалентности. Такие модели называют аналоговыми.

Под математической моделью объекта управления понимается система уравнений в виде алгебраических или дифференциальных уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т. д., отражающих сущность явлений, протекающих в объекте, которые с помощью определенного алгоритма позволяют прогнозировать поведение вектора состояния объекта $\vec{X}$ при изменении входных неуправляемых $\vec{Y}$ и управляющих $\vec{U}$ переменных. Как следует из этого определения, важнейшим свойством математической модели является ее содержатель-

ность, т. е. способность отражать наиболее существенные стороны изучаемого объекта.

При математическом моделировании объектов управления составляют математическую модель, находят ее решения и проверяют адекватность модели изучаемому процессу. Размещают три основных метода.

Аналитический метод получения моделей основан на качественной и количественной оценках процессов, происходящих в моделируемом объекте. Этот метод дает возможность изучить физико-механическую (или другую) сущность процесса; формально представить процесс в виде математической модели как совокупности математических уравнений, отражающих функциональные связи между всеми параметрами и переменными процесса; установить степень соответствия (адекватности) математической модели. Такие модели обладают достаточно большой общностью, они дают представление не об одном конкретном объекте, а о целом классе подобных объектов, что особенно ценно на стадии проектирования систем управления.

Аналитический метод получения математических моделей сложных технологий не всегда приемлем на практике, т. к. процессы в них промышленности, как правило, нестационарны, существенно нелинейны, многомерны. В большинстве случаев отсутствует априорная информация о форме связи между входными и выходными переменными как в статических, так и в динамических режимах работы объекта. Все это затрудняет получение адекватных моделей этим методом.

Экспериментальные методы определения математических моделей делятся на активные и пассивные. При проведении активного эксперимента на вход исследуемого объекта подаются управляющие сигналы *и* определенного вида, а затем фиксируются изменения выходных переменных (рис. 3.6). Такими сигналами могут быть планируемые воздействия (ПВ), подаваемые на вход объекта вручную или при помощи технических устройств. Входные сигналы *и* делятся на регулярные и случайные. К регулярным относятся апериодические (ступенчатая функция 2 и импульсное воздействие 3) и периодические (синусоидальное воздействие 4 или прямоугольная волна 1). Указанные ПВ

используют для определения динамических характеристик объектов, а воздействие 1 – статических характеристик. Случайные входные воздействия u создаются специальными генераторами шума (ГШ), применение которых упрощает методику определения динамических характеристик объектов.

В результате проведения активного эксперимента на входе объекта, на его выходе получают экспериментальные данные $\tilde{O}$, которые затем аппроксимируют аналитически (как правило, формальными) математическими методами.

При проведении пассивного эксперимента регулярно фиксируют случайные воздействия СВ входной переменной u и выходной переменной объекта x . Обработка экспериментальных данных u и x сводится к определению статических характеристик случайных сигналов входа и выхода, к вычислению по ним статических и динамических характеристик исследуемого объекта.

Экспериментально-аналитический метод получения моделей характерен тем, что вначале составляют аналитическую модель, а затем проводят экспериментальные исследования на конкретном объекте для уточнения коэффициентов, входящих в математическую модель.

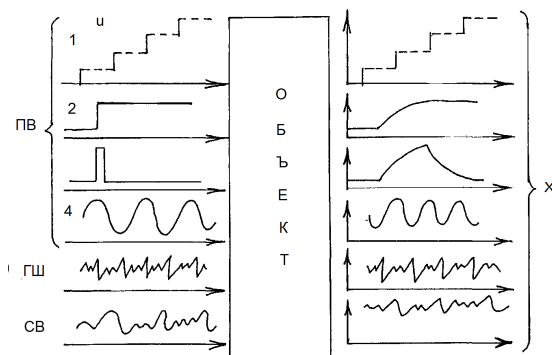


Рис. 3.6. Схема получения математических моделей объектов экспериментальным методом при помощи активного и пассивного экспериментов

3.2.1. Аналитический метод получения математических моделей

Аналитический метод составления математических моделей базируется на известных законах материального мира. При составлении таких моделей естественна определенная идеализация технологического процесса, она, как правило, заключается в разложении его на элементарные составляющие, относительно которых существует гипотеза математического описания и исследования.

Методика аналитического моделирования объектов состоит из следующих этапов:

- 1) изучения процесса;
- 2) допустимой его идеализации;
- 3) составления уравнений материального и энергетического балансов, уравнений массопереноса, уравнений кинетики процесса, гидравлики и др.;
- 4) определения адекватности теоретической модели и процесса.

Для определения статических характеристик объектов часто используют уравнения материального и энергетического балансов:

$$\sum_j Q_j - \sum_i Q_i = 0; \quad \sum_j P_j - \sum_i P_i = 0, \quad (3.21)$$

где Q_i, Q_j и P_i, P_j – подводимые к объекту и отводимые от нее, соответственно, расходы веществ и потоки энергии. Уравнения (3.21) затем преобразуются к виду (3,5) или (3.13).

Для получения дифференциальных уравнений объектов используют выражения характеризующие процесс накопления вещества или энергии в неустановившемся режиме работы.

$$\frac{dG_B}{dt} = \sum_j Q_j - \sum_i Q_i; \quad \frac{dG}{dt} = \sum_j P_j - \sum_i P_i, \quad (3.22)$$

Это значит, что если расход Q_j к объекту изменился, в объекте начинается процесс накопления вещества G_B и, как следст-

вие, происходит изменение выходных координат, например Q_i . Уравнение (3.22) приводят к виду (3.17) или (3.20).

На рис. 3.7 приведена система автоматической стабилизации расхода жидкости, протекающей по трубопроводу 1. Объектом автоматизации является участок трубопровода 1 длиной L . Определим статическую и динамическую характеристики этого объекта аналитическим методом.

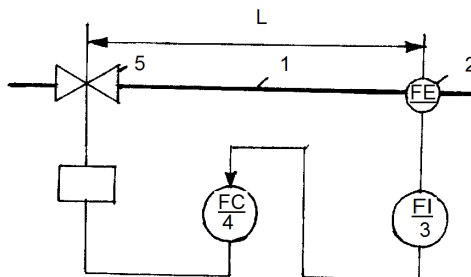


Рис. 3.7. Система стабилизации расхода воды:
1 – трубопровод; 2 – измерительное устройство;
3 – вторичный прибор; 4 – регулятор; 5 – регулирующий орган

Известна зависимость, устанавливающая связь между скоростью жидкости в трубопроводе g и перепадом давления Δp

$$g = k_p \cdot \sqrt{2g \cdot \frac{\Delta p}{\gamma}}, \quad (3.23)$$

где g – ускорение свободного падения; γ – плотность жидкости; k_p – коэффициент расхода.

С учетом того, что скорость g прямопропорциональна расходу Q жидкости через трубопровод с коэффициентом, равным обратной величине площади сечения S , уравнение баланса сил напора $\Delta p \cdot S$ и гидродинамического сопротивления имеет вид

$$\Delta p \cdot S = \frac{Q^2 \gamma}{2g \cdot S \cdot K_p^2}. \quad (3.24)$$

Выражение (3.24) – статическая характеристика трубопровода, так как устанавливает зависимость между выходной переменной Q , входной Δp , характеристиками жидкости трубопровода - γ , S , k_p .

Если приложенная сила $\Delta p \cdot S$ превышает гидродинамическое сопротивление трубопровода, то поток начнет двигаться с ускорением. Следовательно, уравнение сил в неустановившемся режиме работы запишется

$$\Delta p \cdot S = \frac{Q^2 \gamma}{2gS \cdot k_p^2} + m \frac{dQ}{dt}, \quad (3.25)$$

где $m = \frac{L \cdot S \cdot \gamma}{g}$ – масса жидкости в трубопроводе, кг.

Подставив вместо Q расход жидкости Q , после преобразования получим

$$T \frac{dQ}{dt} + Q = k \cdot \Delta p, \quad (3.26)$$

где $T = \frac{2 \cdot L \cdot S \cdot k_p^2}{Q}$ – постоянная времени;

$k = \frac{2g \cdot S^2 \cdot k_p^2}{Q \cdot \gamma}$ – коэффициент передачи.

Из (3.26) видно, что в динамическом отношении участок трубопровода является нелинейным инерционным звеном первого порядка, нелинейность которого обусловлена зависимостью T и k от расхода жидкости Q .

Если использовать значение k_p , полученное из (3.24), то постоянную времени T из (3.26) можно записать в виде

$$T = \frac{L \cdot \gamma \cdot Q}{g \cdot S \cdot \Delta p}. \quad (3.27)$$

Формула (3.27) позволяет вычислить T трубопровода при номинальном расходе. При других расходах ее можно оценить лишь качественно, т. к. она зависит от расхода Q и перепада

давления Δp , которые связаны между собой квадратичной зависимостью (3.24).

3.2.2. Инженерная идентификация динамических характеристик линейных объектов по кривой разгона

Упрощенный расчет. Наиболее часто для идентификации динамических характеристик объектов осуществляют ступенчатое возмущение 2 (рис. 3.6) входной переменной $u(t)$. Реакция объекта на такое возмущение, получившая название кривой разгона, представляет собой приращение $\Delta x(t)$ выходной величины $x(t)$, обусловленное мгновенным изменением $u(t)$ от значения $u(t) = u_0$ до величины $u_0 = B$ в момент времени $t = 0$, где B – постоянная величина (рис. 3.5).

Для упрощения методики определения динамических коэффициентов объекта кривые разгона (см. рис. 3.5) целесообразно представлять в безразмерной форме, используя для этого зависимость

$$\bar{x}(t_i) = \frac{x(t_i) - x(0)}{x(\infty) - x(0)}, \quad (3.37)$$

где $\bar{x}(t_i)$ – текущее безразмерное значение выходной величины в момент времени t_i ; $x(t_i)$ – экспериментальное значение этой величины в тот же момент времени.

Так как реакции объекта на ступенчатое возмущение представляет собой решение некоторого дифференциального уравнения при известных начальных условиях и входном воздействии, то по их виду можно определить и само дифференциальное уравнение, которое отыскивается в классе уравнений (3.18).

Если кривая разгона имеет вид, показанный на рис. 3.5 *a*, то динамические параметры объекта T, τ определяют непосредственно из графика, как показано на рисунке, а коэффициент передачи вычисляют по формуле

$$k = \frac{x(\infty) - x(0)}{u(\infty) - u(0)} = \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{\Delta x}{B}. \quad (3.38)$$

При этом исходное дифференциальное уравнение будет соответствовать второму уравнению (3.18), и его можно записать в виде

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t - \tau), \quad (3.39)$$

где $T = \frac{a_1}{a_0}$, с; $K = \frac{b_0}{a_0}$.

Если кривая разгона имеет S -образную форму (см. рис. 3.5, б), то дифференциальное уравнение также можно представить уравнением (3.39). Такое приближенное описание производят следующим образом. На нормированной кривой выбирают две точки A и B с координатами $\bar{x}_A, \bar{t}_A$ и $\bar{x}_B, \bar{t}_B$. Точка A , как правило, задается в районе перегиба кривой, а ордината $\bar{x}_B$ точка B принимаются равной $0,8 \div 0,9$. Эти точки рассматриваются как интерполяционные узлы упрощенной кривой разгона, которая представлена на рис. 3.5, б штриховой линией. Условное чистое запаздывание τ_y и постоянная времени T_y определяют на основании выбранных координат A и B по формулам.

$$\tau_y = \frac{t_A \cdot \ln(1 - \bar{x}_A) - t_B \cdot \ln(1 - \bar{x}_B)}{\ln(1 - \bar{x}_A) - \ln(1 - \bar{x}_B)}, \quad (3.40)$$

$$T_y = \frac{t_A - \tau_y}{\ln(1 - \bar{x}_A)}. \quad (3.41)$$

Таким образом, передаточную функцию объекта, имеющего S -образную кривую разгона, приближенно можно представить в виде

$$W(p) = \frac{ke^{-\tau_y p}}{T_y p + 1}, \quad (3.42)$$

где k – коэффициент передачи согласно (3.38).

Метод площадей. Для расчета параметров, характеризующих дифференциальные уравнения (3.18), порядок которых выше первого, применяют метод площадей. Коэффициенты a_i , b_i , входящие в уравнения (3.18), определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= F_1 + b_1; \\ a_2 &= F_2 + b_2 + b_1 F_1; \\ a_3 &= F_3 + b_3 + b_2 F_1 + b_1 F_2, \end{aligned} \right\}, \quad (43)$$

где величины F_1 , F_2 , F_3 связаны с кривой разгона интегральными соотношениями

$$F_1 = \int_0^{\infty} (1 - \bar{x}) dt; \quad (3.44)$$

$$F_2 = F_1^2 \int_0^{\infty} (1 - \bar{x})(1 - \theta) d\theta; \quad (3.45)$$

$$F_3 = F_1^3 \int_0^{\infty} (1 - \bar{x}) \left(1 - 2\theta + \frac{\theta^2}{2} \right) d\theta. \quad (3.46)$$

Здесь $\theta = \frac{t}{F_1}$ — относительное время.

В реальных условиях эти интегралы определяются по приближенным формулам:

$$F_1 \approx \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^n (1 - \bar{x}_i) - 0,5 \cdot [1 - \bar{x}(0)] \right\}; \quad (3.47)$$

$$F_2 \approx F_1^2 \Delta \theta \left\{ \sum_{i=0}^n (1 - \bar{x}_i) \cdot (1 - \theta_i) - 0,5 \cdot [1 - \bar{x}(0)] \right\}; \quad (3.48)$$

$$F_3 \approx F_1^3 \Delta \theta \left\{ \sum_{i=0}^n (1 - \bar{x}_i) \cdot \left(1 - 2\theta_i + \frac{\theta_i^2}{2} \right) - 0,5 \cdot [1 - \bar{x}(0)] \right\}. \quad (3.49)$$

В процессе расчетов может оказаться, что одна из величин является отрицательной, например $F_3 < 0$. Это значит, что в

дифференциальном уравнении, соответствующем S -образной безразмерной кривой разгона

$$a_3 \frac{d^3 \bar{x}(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \bar{x}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d \bar{x}(t)}{dt} + \bar{x}(t) = u(t), \quad (3.50)$$

коэффициент a_3 отрицателен, т. е. объект неустойчив. Такой вывод противоречит действительности, т. к. снятая экспериментальная кривая свидетельствует об устойчивости объекта. Следовательно, необходимо признать, что сделанное априори предположение о степени левой части дифференциального уравнения неверно. В рассмотренном случае нужно уменьшить на единицу порядок левой части уравнения (3.50), а правой – увеличить на единицу, т. е. прибавить

$$b_1 \frac{du(t)}{dt}.$$

Коэффициенты a_1, a_2, b_1 определяют из системы уравнений (3.49), если положить, что $a_3 = b_2 = b_3 = 0$.

Если $F_2 \rangle F_3 \rangle 0$, то порядок левой части дифференциального уравнения необходимо также уменьшать на единицу, не прибавляя производную в правой части.

Алгоритм вычисления площадей $F_1, F_2, \dots, F_5$ представлен на рис. 3.8. Он может быть реализован на ЭЦВМ.

В качестве примера рассмотрены результаты расчета на ЭВМ параметров флотомашины по каналу $Q_e - \alpha$. Кривая разгона объекта по этому каналу дана на рис. 3.9, а, из которой определим $\tau_3 = 5$ с. Ноль оси времени переносим соответственно в точку, отстоящую на 5 с от исходного начала координат, кривую разгона нормируем (рис. 3.9, б).

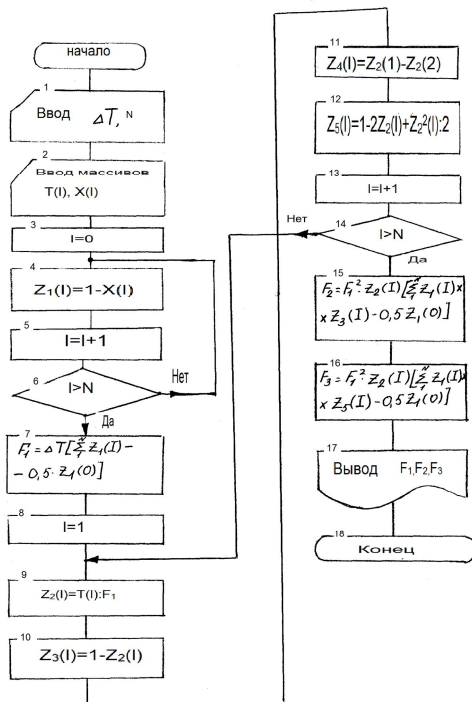


Рис. 3.8. Блок схема алгоритма вычисления площадей F_1, F_2, F_3

При интервале дискретизации $\Delta T = 3$ с исходные массивы для расчета

$$T = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\};$$

$$X = \{0; 0,04; 0,09; 0,17; 0,31; 0,47; 0,64; 0,8; 0,9; 0,97; 0,99; 1\},$$

при этом $N = 12$.

$$\text{В результате вычисления имеем } F_1 = 15,3; F_2 = 97,2;$$

$$F_3 = 295,0; F_4 = 32,8.$$

Так как $0 < F_4 < F_3$ порядок левой части дифференциального уравнения объекта $n=3$, а правая часть не содержит производных, причем $a_3 = F_3$, $a_2 = F_2$, $a_1 = F_1$.

Коэффициент передачи объекта (см. рис. 3.9, а)

$$\kappa = \frac{0,15}{1} = 0,15 \quad \% \cdot \text{мин}/\text{м}^3.$$

С учетом полученных расчетных результатов дифференциальное уравнение флотомшины имеет вид в соответствии с (3.50)

$$295 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 97,2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 15,3 \frac{d(t)}{dt} + x(t) = 0,15 \cdot u(t - 5),$$

где $x(t) = \Delta \alpha(t)$; $u(t) = \Delta Q_B$.

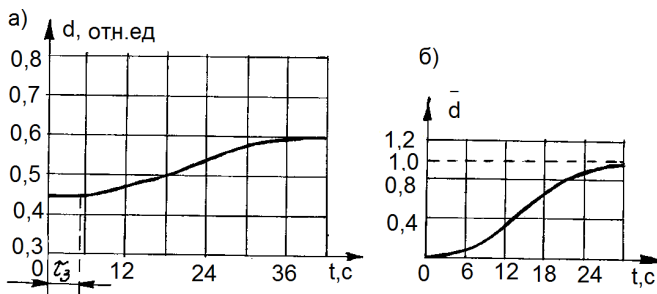


Рис. 3.9. Кривая разгона (а) и нормированная кривая разгона (б) флотомшины по каналу изменение расхода воздуха Q_B на входе аэратора ($\Delta Q_B = 1 \text{ м}^3/\text{ч}$) – изменение степени аэрации угольной пульпы α при расходе пульпы, поступающей на флотацию $Q_{\Pi} = 6,75 \text{ м}^3/\text{мин}$

3.2.3. Применение статистических методов для идентификации динамических характеристик промышленных процессов

Эти методы базируются на применении интегрального уравнения Винера – Хопфа

$$R_{ux}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - t) \cdot W(t) dt, \quad (3.52)$$

где $R_{ux}(\tau)$ – взаимокорреляционная функция между входными и выходными переменными объекта; $R_{uu}(\tau)$ – автокорреляционная функция входной переменной; $W(t)$ – импульсная переходная (весовая) функция объекта по исследуемому каналу.

Уравнение (3.52) решают в три этапа:

1) на интервале времени T записывают случайные процессы $u(t)$, $x(t)$ на входе и выходе объекта;

2) по полученным экспериментальным данным вычисляют $R_{uu}(\tau)$; $R_{ux}(\tau)$;

3) уравнение (3.52) решают или в частотной области относительно $W(j\omega)$ – АФЧХ, или во временной области относительно $W(t)$ для данного канала управления, или с применением операционных усилителей (ОУ).

При этом считают, что объект по данному каналу управления линеен, а случайные процессы $u(t)$, $x(t)$ стационарны и эргодичны.

Взаимокорреляционная функция двух стационарных случайных процессов $u(t)$ и $x(t)$ на входе и выходе объекта.

$$R_{ux}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [u(t) - \bar{u}] \cdot [x(t + \tau) - \bar{x}] dt, \quad (3.53)$$

а если обратить процесс корреляции функции $u(t)$ [либо функции $x(t)$] на саму себя, то получим автокорреляционную функцию.

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \cdot \int_0^{T-\tau} [u(t) - \bar{u}] \cdot [u(t + \tau) - \bar{u}] d\tau, \quad (3.54)$$

где $\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot dt$; $\bar{x} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt$.

При практическом использовании (3.53) и (3.54) интегралы заменяют суммами, для чего осуществляют дискретизацию интервала реализации случайной функции $T = \Delta N$, где N – число фиксируемых ординат с постоянным интервалом Δ (рис. 3.10)

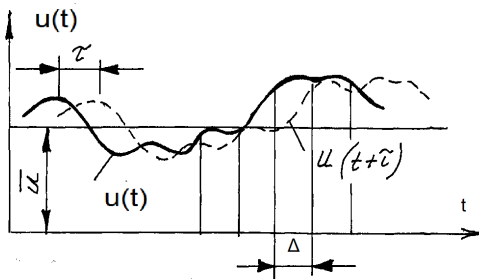


Рис. 3.10. Определение автокорреляционной функции $R_{uu}(\tau)$

Текущее время t и τ также представляют в дискретном виде $t = v \cdot \Delta$, где $v = 1, 2, 3, \dots$;

$\tau = \mu \cdot \Delta$, где $\mu = 0, 1, 2, \dots$

С учетом этих обозначений в дискретной форме выражение (3.54) можно записать так:

$$R_{uu}(\mu) \approx \frac{1}{N - \mu} \cdot \sum_{v=1}^{N-\mu} u_v \cdot u_{v+\mu}, \quad (3.55)$$

$$R_{uu}(\mu \cdot \Delta) = R_{uu}(\mu); \quad u(v\Delta) = u_v;$$

$$u[(v + \mu) \cdot \Delta] = u_{v+\mu}.$$

Взаимокорреляционную функцию вычисляют по аналогичному выражению

$$R_{ux}(\mu) \approx \frac{1}{N - \mu} \cdot \sum_{v=1}^{N-\mu} u_v \cdot x_{v+\mu}. \quad (3.56)$$

Формулы (3.55) и (3.56) позволяют рассчитать функции $R_{uu}(\tau)$, $R_{xu}(\tau)$, по одной реализации процесса $u(t)$ и процесса

$x(t)$ длиной T при помощи измерения ординат этих реализации через промежутки времени Δ . Для построения одной из указанных функций, например, $R_{uu}(\tau)$, необходимо образовать функции $u(t + \tau) - \bar{u}$, сдвинув $u(t) - \bar{u}$ на интервал τ (см. рис. 3.10) и перемножить на всем исследуемом интервале $0 \div (T - \tau)$ ординаты u_v и $u_{v+\mu}$. Затем полученные произведения суммируют и находят среднее значение суммы делением на $N - \mu$.

В результате таких вычислений получают одну точку кривой автокорреляционной функции, соответствующую сдвигу $\tau = \mu \cdot \Delta$. Последовательно изменяя величину μ и производя указанные операции, находим все точки $R_{uu}(\tau)$.

Точность вычислений корреляционных функций зависит от продолжительности реализации T . При выборе величины T по полуэмпирической зависимости $T \geq 10\tau_{\max}$ погрешность не превышает 2 %. Здесь $\tau_{\max}$ – интервал времени τ , после которого выполняется неравенство $|R_{uu}(\tau)| \leq 0,05 \cdot R_{uu}(0)$. С другой стороны, если известна минимальная (нижняя) частота ω_n спектра случайного процесса $u(t)$, то можно принять

$$\tau_{\max} \geq \frac{2\pi}{\omega_n}.$$

Интервал дискретизации Δ выбирают также по полуэмпирической формуле

$$\Delta = \frac{\pi}{10 \cdot \omega_B},$$

где ω_B – максимальная (верхняя) частота спектра случайного процесса $u(t)$. Чаще интервал Δ выбирают таким образом, чтобы функция $u(t)$ мало изменялась в этом промежутке. Такие вычисления, как правило, производят на ЭВМ.

Решение в частотной области. Для этого умножим обе части (3.52) на $e^{-j\omega\tau}$ и проинтегрируем по τ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{ux}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{uu}(\tau - t) d\tau. \quad (3.57)$$

Обозначим

$$S_{ux}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{ux}(\tau) d\tau; \quad (3.58)$$

$$S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{uu}(\tau) d\tau. \quad (3.59)$$

Выражения (3.58) и (3.59) – преобразования Фурье от корреляционных функций $R_{ux}(\tau)$ и $R_{uu}(\tau)$ и представляют собой спектральные плотности соответствующих случайных процессов.

Из теории автоматического управления известно, что передаточная функция $W(p)$ и импульсная характеристика $W(t)$ объекта взаимнооднозначно связаны прямым и обратным преобразованием Лапласа:

$$W(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot W(t) dt; \quad (3.60)$$

$$W(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{-j\infty}^{+j\infty} W(p) \cdot e^{pt} dp, \quad t > 0. \quad (3.61)$$

Тогда на основании (3.57)–(3.60) с учетом $P=j\omega$ имеем

$$S_{ux}(\omega) = W(j\omega) \cdot S_{uu}(\omega), \quad (3.62)$$

где $W(j\omega)$ – амплитудно-фазовая характеристика объекта. Следовательно, для определения $W(j\omega)$ важно точно установить

соотношение между спектральными плотностями $S_{ix}(\omega)$ и $S_{iu}(\omega)$ входного и выходного случайных сигналов.

С другой стороны, известно, что спектральные плотности выходного $S_{xx}(\omega)$ и входного $S_{uu}(\omega)$ сигналов связаны квадратом модуля АФЧХ, т. е.

$$S_{xx}(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot S_{uu}(\omega) \quad (3.63)$$

или

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{\frac{S_{xx}(\omega)}{S_{uu}(\omega)}}.$$

Так как автоспектральные плотности $S_{xx}(\omega)$, $S_{uu}(\omega)$ вычисляются проще, чем взаимоспектральная плотность $S_{ix}(\omega)$, то с практической точки зрения уравнение (3.63) более удобно, чем (3.62).

Автоспектральные плотности можно вычислить по приближенной формуле

$$S(\nu \cdot \Delta\omega) = 0,54 \cdot \Phi_\nu + 0,23 \cdot (\Phi_{\nu-1} + \Phi_{\nu+1}), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (3.64)$$

где $\Delta\omega = \frac{2\pi}{(2m+1) \cdot \Delta}$;

$$\Phi_\nu = \left[R(0) + 2 \sum_{\mu=1}^m R(\mu \cdot \Delta) \cdot \cos \frac{2\pi}{2m+1} \cdot \nu\mu \right] \cdot \Delta.$$

Пример. Определить динамическую модель грохота по каналу изменение расхода исходного материала Q_1 и изменение расхода подрешеточного продукта Q_2 .

Известны $\omega_H = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_B = 0,5 \text{ с}^{-1}$.

Тогда

$$\tau_{\max} \geq \frac{2\pi}{\omega_u} = \frac{2\pi}{0,1} \approx 63 \text{ с},$$

интервал времени наблюдения $T \geq 10 \tau_{max} = 10 \cdot 63 = 630$ с и интервал дискретизации

$$\Delta = \frac{\pi}{10 \cdot \omega_B} = \frac{\pi}{10 \cdot 0,5} = 0,63 \text{ с.}$$

По формуле (3.55) используя реализации сигналов весоизмерителей при $T > 630$ с, вычислены автокорреляционные функции $R_{Q_1 Q_1}(\tau)$, $R_{Q_2 Q_2}(\tau)$ (рис.3.11, а), а затем по формуле (3.64) получены спектральные плотности $S_{Q_1 Q_1}(\omega)$, $S_{Q_2 Q_2}(\omega)$ (рис. 3.11, б).

Модуль передаточной функции $|W_{Q_1 Q_2}(j\omega)|$ по каналу управления Q_1 - Q_2 определен по формуле (3.63) и представлен на рис. 3.11, в.

На основании модуля передаточной функции найдена логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.11, з)

$$A_{Q_1 Q_2}(\omega) = 20 \lg |W_{Q_1 Q_2}(j\omega)|. \quad (3.65)$$

Кривую 1 удобно аппроксимировать тремя отрезками: горизонтальным и двумя наклонными с наклоном -20 и -40 (дБ) на декаду. Тогда передаточная функция грохота будет иметь вид

$$W_{Q_1 Q_2}(p) = \frac{k_{Q_1 Q_2} \cdot e^{-\tau_3 p}}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}. \quad (3.66)$$

Значения T_1 и T_2 определяют по сопряженным частотам $\omega_1 = 0,0833 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 0,25 \text{ с}^{-1}$ (см. рис. 3.11, г), тогда $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 12,5 \text{ с}$; $T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 4,2 \text{ с}$.

Для вычисления $k_{Q_1 Q_2}$ и τ_3 необходимо помимо автокорреляционной функции $R_{Q_1 Q_1}(\tau)$ определить взаимокорреляционную функцию $R_{Q_1 Q_2}(\tau)$ по тем же формулам (3.55), (3.56), а затем произвести их нормировку по формулам:

$$\rho_{Q_1 Q_2}(\tau) = \frac{R_{Q_1 Q_2}(\tau)}{R_{Q_1 Q_2}(0)} ; \quad (3.67)$$

$$\rho_{Q_1 Q_2}(\tau) = \frac{R_{Q_1 Q_2}(\tau)}{\sqrt{R_{Q_1 Q_1}(0) \cdot R_{Q_2 Q_2}(0)}} . \quad (3.68)$$

На рис. 3.11, б приведены графики нормированы авто- и взаимокорреляционных функций $\rho_{Q_1 Q_1}(\tau)$ и $\rho_{Q_1 Q_2}(\tau)$.

Коэффициент усиления объекта определяют как отношение площадей под кривыми $\rho_{Q_1 Q_1}(\tau)$ и $\rho_{Q_1 Q_2}(\tau)$, т. е.

$$k_{Q_1 Q_2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{Q_1 Q_2}(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{Q_1 Q_1}(\tau) d\tau} , \quad (3.69)$$

а запаздывание – как разность между моментами времени, при которых функция $\rho_{Q_1 Q_1}(\tau)$ и $\rho_{Q_1 Q_2}(\tau)$ становятся отличными от нуля

$$\tau_3 = \tau_{cn Q_1 Q_1} - \tau_{n Q_1 Q_2} \quad (3.70)$$

где $\tau_{cn Q_1 Q_1}$ – время спада автокорреляционной функции;

$\tau_{n Q_1 Q_2}$ – интервал времени от начала взаимокорреляционной функции до начала координат.

Имеем $K_{Q_1 Q_2} = 0,78$; $\tau_3 = 27$ с.

Таким образом, искомая передаточная функция грохота принимают вид

$$W(p) = \frac{0,78}{(12,5p + 1) \cdot (4,2p + 1)} e^{-27p} .$$

Иногда запаздывание принимают τ_3' , называемые эквивалентным, т. к. оно частично учитывает инерционные свойства объекта (см. рис. 3.11, б).

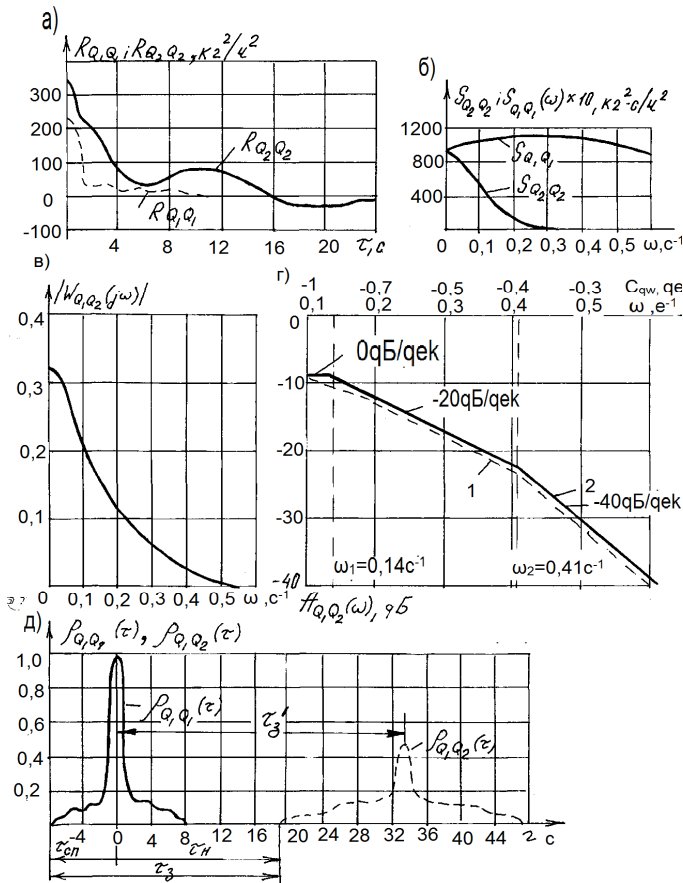


Рис. 3.11. Графики для определения передаточной функции
грухота статистическим методом:

а – автокорреляционные функции расхода исходного материала Q_1 и
надрешеточного продукта Q_2 ; б – спектральные плотности;

в – графики изменения модуля передаточной функции (3.63);

г – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика объ-
екта: 1 - $W_{Q_1 Q_2}(j\omega) = 20 \lg |W_{Q_1 Q_2}(j\omega)|$; 2 - $W_{Q_1 Q_2}(j\omega) = \frac{k_{Q_1 Q_2}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$;

д) графики нормированных авто- и взаимокорреляционной функций

Решение в области изображений по Лапласу.

Для этой цели применимо преобразование Лапласа к правой части (3.52), в результате чего получим уравнение передаточной функции, аналогичное (3.66), т. е.

$$W(p) = \frac{R_{ux}^*(p)}{R_{uu}^*(p)} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-p\tau} \cdot R_{ux}^*(\tau) \cdot d\tau}{\int_0^{\infty} e^{-p\tau} \cdot R_{uu}^*(\tau) \cdot d\tau}, \quad (3.71)$$

где $R_{ux}^*(p)$ и $R_{uu}^*(p)$ – изображения корреляционных функций.

Если аппроксимировать экспериментальные корреляционные функции $R_{uu}(\tau)$ и $R_{ux}(\tau)$ известными временными функциями, а затем получить их изображения по Лапласу и найти отношение изображений (3.71), то получим передаточную функцию по каналу управления.

С достаточной точностью $R_{uu}(\tau)$ могут быть аппроксимированы экспонентой

$$R_{uu}^*(\tau) = A_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \tau} \quad (3.72)$$

или затухающей периодической функции

$$R_{uu}^*(\tau) = A_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \tau} \cdot \left(\cos \omega \tau + \frac{\alpha_2}{\omega} \cdot \sin \omega \tau \right), \quad (3.73)$$

где $\alpha_1 = \frac{3}{\tau_k}$; $\alpha_2 = \omega \cdot \operatorname{tg} \gamma$;

$$\omega = \frac{\pi}{\tau_2 - \tau_1};$$

Исходные данные для вычисления коэффициентов указанных функций определяют по графикам (рис. 3.12, а, б).

Взаимокорреляционные функции достаточно точно аппроксимируются выражениями

$$R_{ux}^*(\tau) = A_3 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \tau} - A_4 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot \tau}, \quad (3.75)$$

$$R_{ux}^*(\tau) = A_3 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \tau} \cdot \left(\cos \omega \tau + \frac{\alpha_1}{\omega} \cdot \sin \omega \tau \right) - A_4 \cdot e^{-\alpha_2 \tau}, \quad \tau > 0. \quad (3.76)$$

$$\gamma = \arctg \frac{\alpha_2}{\omega} = \frac{\pi \cdot (3\tau_1 - \tau_2)}{2 \cdot (\tau_2 - \tau_1)}. \quad (3.74)$$

Если экспериментальная взаимокорреляционная функция $R_{ux}(\tau)$ с ростом τ затухает без колебания, то ее удобно аппроксимировать алгебраической суммой экспонент 1 и 2 (рис. 3.12, в) согласно выражению (3.75). Если $R_{ux}(\tau)$ с ростом τ представляет затухающий процесс, то ее удобно аппроксимировать (3.76), состоящим из затухающей периодической функции 1 и экспоненты 2 (рис. 3.12, г). Коэффициенты A_3 , A_4 , α_1 , α_2 , ω входящие в (3.75), (3.76) рассчитывают методом наименьших квадратов.

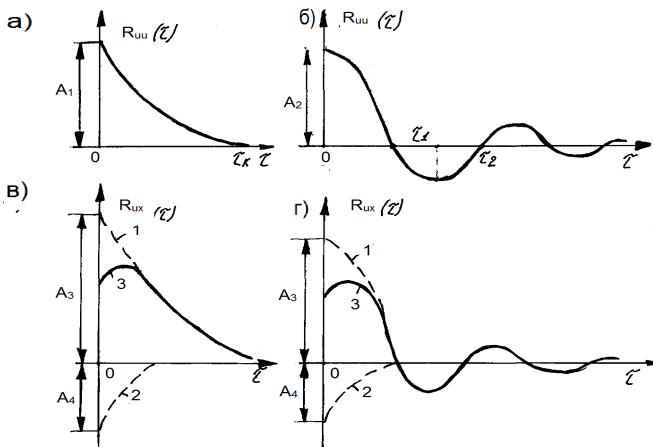


Рис. 3.12. Аппроксимация автокорреляционных функций $R_{uu}(\tau)$ (а, б) и взаимокорреляционных функций $R_{ux}(\tau)$ (в, г)

Безразмерный коэффициент передачи объекта k их исследуемому каналу управления можно определить как передаточ-

ную функцию объекта $W(0)$ в установившемся режиме, приняв $p = 0$.

Решение на базе операционных усилителей (ОУ). Если априори известна динамическая структура объекта

$$T \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t - \tau) \quad (3.77)$$

и известны корреляционные функции $R_{ux}(\tau)$ и $R_{uu}(\tau)$, полученные на базе статистической обработки стационарных случайных процессов $u(t)$, $x(t)$ на входе и выходе объекта, то справедлива зависимость

$$T \cdot \frac{dR_{ux}(t)}{dt} + R_{ux}(t) = k \cdot R_{ux}(t - \tau). \quad (3.78)$$

Это значит, что если на вход системы, состоящей из инерционного звена первого порядка и звена запаздывания, подать известный сигнал системы в виде автокорреляционной функции $R_{uu}(t)$, то выходной сигнал системы будет представлять собой взаимокорреляционную функцию $R_{ux}(t)$.

Процесс идентификации динамических характеристик объекта на ОУ осуществляют следующим образом:

– регистрируют случайные сигналы $u(t)$, $x(t)$ на входе и выходе объекта и определяют авто- и взаимокорреляционные функции $R_{uu}(t)$, $R_{ux}(t)$;

– составляют динамическую модель системы (3.78) и набирают ее на ОУ так, чтобы было можно изменять коэффициенты T , τ , k (рис. 3.13, а). Первоначально эти коэффициенты устанавливают из априорных данных об исследуемом объекте;

– на вход аппроксимируемой модели подается сигнал, соответствующий автокорреляционной функции $R_{uu}(t)$, при этом получаемый на выходе сигнал зависит от установленных

значений коэффициентов T , τ , k . Значения функции $R'_{ux}(t)$, полученные после перерасчета с выходного сигнала модели, сравнивают со значениями ранее рассчитанной функции $R_{ux}(t)$;

– варьируют коэффициенты T , τ , k так, чтобы функции $R'_{ux}(t)$ и $R_{ux}(t)$ максимально сблизились качественно. Для оценки сближения кривых используют, как правило, критерий среднего квадратичного отклонения $R'_{ux}(t)$ и $R_{ux}(t)$, т. е.

$$\left(\varepsilon\right)^2 = \frac{1}{T_k} \cdot \int_0^k [R'_{ux}(t) - R_{ux}(t)]^2 \cdot dt, \quad (3.79)$$

где T_k – время корреляции, определяемое по $R_{ux}(t)$.

Полностью схема моделирования приведена на рис. 3.13, б. Величина запаздывания τ меняется с помощью блока переменного запаздывания БПЗ, входящего в комплект ОУ. Коэффициент T можно менять емкостью конденсатора C (с помощью магазина емкостей), при постоянном R_2 , т. к. $T = R_2 \cdot C$. Коэффициент k можно менять изменением величины коэффициента α или дискретным изменением величины сопротивления R_1 (при $R_2 = 1 \text{ МОм}$, $k = \frac{\alpha}{R_1}$).

Функции $R_{uu}(\tau)$ и $R_{ux}(\tau)$ набирают на блоках нелинейности соответственно БН1 и БН2. Усилитель У1 формирует линейное напряжение, пропорциональное времени. Суммирующий усилитель У3 совместно с блоком нелинейности БНЗ (квадратор) и интегрирующим усилителем У4 реализует схему среднего квадратичного отклонения по формуле (3.79). Индикатор И4 предназначен для качественного сравнения кривых $R'_{ux}(t)$ и $R_{ux}(t)$.

Необходимо отметить, что, как правило, диапазон изменения коэффициентов T и k велик, поэтому для более целена-

3.3. Идентификация динамики существенно нелинейных объектов

Большинство объектов промышленной технологии инерционны и имеют существенно нелинейные статические характеристики. Их структурная схема может быть представлена цепью последовательно соединенных линейного инерционного с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{z(p)}{u(p)}$$

и нелинейного безынерционного со статической характеристикой $x = f(z)$ звеньев (рис. 3.14, а)

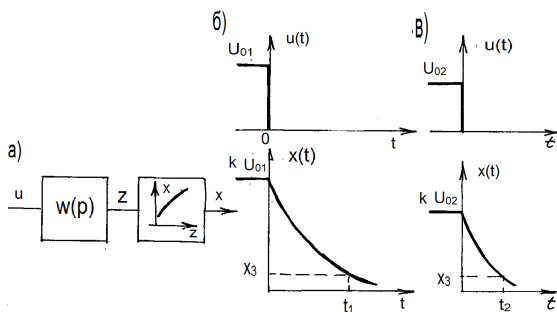


Рис. 3.14. Структура динамических нелинейных объектов (а) и изменение выходной переменной таких объектов во времени при двух значениях ступенчатых возмущений на входе u_{01} (б) и u_{02} (в)

Примером существенно нелинейного инерционного объекта может служить барабанная мельница, для которой $u \rightarrow Q$ (т/ч) – производительность, $z \rightarrow \varphi_p$ (%) – степень заполнения барабана измельчаемым материалом, $x \rightarrow P_d$ (кВт) – активная мощность приводного двигателя мельницы. Подобную динамическую структуру имеют также дробилки, сушильные бараба-

ны, отсадочные машины, парогенераторы и много других аппаратов.

Приближенно линейное инерционное звено можно представить как апериодическое звено первого порядка, тогда его передаточная функция при подаче на вход ступенчатого возмущения, вызывающего уменьшение переменной z до нуля, выражается в виде

$$z(t) = k \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \quad (3.81)$$

где T и k – соответственно постоянная времени и коэффициент усиления звена; u_0 – начальное значение входной переменной до подачи ступенчатого возмущения.

Для большинства технологических аппаратов нелинейное звено может быть описано уравнением параболы

$$x = az^2 + bz + c. \quad (3.82)$$

Тогда переходная функция объекта определяется подстановкой значения z из (3.81) в (3.82).

$$x = a \cdot k^2 \cdot u_0^2 \cdot e^{-\frac{2t}{T}} + b \cdot k \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + c, \quad (3.83)$$

а производная x по z

$$\frac{dx}{dz} = 2 \cdot a \cdot z + b = 2 \cdot a \cdot k \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + b. \quad (3.84)$$

Из уравнений (3.82) и (3.84) следует, что каждому значению x соответствует одно определенное значение dt/dz . Поэтому для значения переменной $x = x_3$ (рис. 3.14, б, в), которое наступает в различные моменты времени t_1 и t_2 при подаче на вход объекта различных степеней воздействия u_{0_1} и u_{0_2} , можно написать равенство

$$u_{0_1} \cdot e^{\frac{t_1}{T}} = u_{0_2} \cdot e^{\frac{t_2}{T}}. \quad (3.85)$$

Решив (3.85) относительно T , окончательно получим

$$T = \frac{t_1 - t_2}{\ln u_{0_1} - \ln u_{0_2}}. \quad (3.86)$$

Формула (3.86) пригодна для расчета T и при наличии в объекте постоянного транспортного запаздывания τ , т. к. в этом случае $t_1 = t'_1 - \tau$; $t_2 = t'_2 - \tau$.

Числитель формулы (3.86) выражается равенством

$$t_1 - t_2 = t'_1 - t'_2,$$

из которого следует, что необходимости в специальном учете транспортного запаздывания нет.

Таким образом, последовательность определения постоянной времени T сводится к следующему:

- устанавливают определенный уровень u_{0_1} входной переменной;
- подают в некоторый момент времени ступенчатое возмущение в направлении уменьшения x и измеряют время t_1 , в течение которого достигается заданный уровень выходной переменной x_3 ;
- устанавливают новый уровень u_{0_2} и повторяют п. 2, в результате определяют время t_2 ;

Рассчитывают T , используя (3.86) и значения t_1 , t_2 , u_{0_1} , u_{0_2} .

Если в результате отключения питателей мельницы мокрого самоизмельчения, на которых предварительно устанавливались два уровня производительности ($Q_{01} = 85 \text{ м/ч}$ и $Q_{02} = 65 \text{ м/ч}$), время достижения мощностью P_d заданного

значения $P_{д.з}=1250$ кВт соответствует $t_1 = 12,5$ мин и $t = 9$ мин, то постоянная времени мельницы $T = 12,9$ мин.

Чистое запаздывание τ можно определить непосредственно из осциллограмм переходных процессов.

Таким образом удастся существенно нелинейный инерционный объект в определенном диапазоне изменения входной переменной $u_{0_1} - u_{0_2}$ представить приближенно как линейный, т. е. описать дифференциальным уравнением вида

$$T \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t - \tau). \quad (3.87)$$

3.4. Представление математических моделей объектов управления в нормальной форме

Любое дифференциальное уравнение можно представить эквивалентной записью относительно фазового пространства. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$T \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t) \quad (3.88)$$

в нормальной форме имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{k \cdot u(t) - x(t)}{T} \quad \text{или} \quad \dot{x} = -x \cdot \frac{1}{T} + \frac{k}{T} \cdot u. \quad (3.89)$$

Дифференциальному уравнению инерционного звена второго порядка

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t)$$

соответствует система уравнений в нормальной форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot x_2 - \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \cdot x_1 + \frac{k}{T_1 \cdot T_2} \cdot u, \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

где $x = x_1$.

Для дифференциального уравнения n -го порядка, записанного в обычном виде

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t) = b_0 \cdot u(t), \quad (3.91)$$

имеем следующую систему нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n; \\ \dot{x}_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x_n - \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot x_{n-1} + \dots + \left(-\frac{a_1}{a_n} \right) \cdot x_2 - \frac{a_0}{a_n} \cdot x_1 + \frac{b_0}{a_n} \cdot u. \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

Составление системы нормальных уравнений усложняется, если дифференциальное уравнение объекта имеет производные от u , т. е.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_n \cdot \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot x(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot u(t) \quad (3.93)$$

В этом случае систему нормальных уравнений ищут в виде

$$\left. \begin{aligned} \bullet \\ x_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + c_1 \cdot u; \\ \bullet \\ x_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n + c_2 \cdot u; \\ &\dots\dots\dots \\ \bullet \\ x_n &= a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n + c_n \cdot u \end{aligned} \right\}, \quad (3.94)$$

где a_{ij} и C_i – искомые коэффициенты, которые определяют так, чтобы решения исходного уравнения (3.93) и системы (3.94) были бы эквивалентны. Для вычисления a_{ij} составляют характеристический определитель системы (3.94)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \alpha \end{vmatrix}. \quad (3.95)$$

Раскрывая определитель (3.95) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α полученного характеристического полинома соответствующим коэффициентом характеристического полинома из левой части (3.93), определяют a_{ij} . При вычислении указанных коэффициентов имеется свобода произвольного выбора, т. к. число неизвестных равно n^2 , а число известных коэффициентов a_k в (3.93) равно n . Для определения коэффициентов C_i составляют присоединенный определитель Δ_1 , отличающийся от Δ тем, что элементы первого столбца a_{ij} заменяются элементами C_i :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -c_2 & a_{22} - \alpha & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \alpha \end{vmatrix}. \quad (3.96)$$

Раскрывая (3.96), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в (3.96) и в левой части (3.93), считая, что a_{ij} известны.

Дифференциальные уравнения (3.93) характерны для объектов промышленной технологии, обладающих транспортным запаздыванием. Действительно передаточную функцию звена чистого запаздывания можно разложить в степенной ряд Пада:

$$e^{-\tau_3 p} = \frac{1 - \frac{\tau_3}{2} \cdot p + \frac{\tau_3^2}{8} \cdot p^2 - \frac{\tau_3^3}{48} \cdot p^3 + \dots}{1 + \frac{\tau_3}{2} \cdot p + \frac{\tau_3^2}{8} \cdot p^2 + \frac{\tau_3^3}{48} \cdot p^3 + \dots} = \frac{1 - \kappa_1 p + \kappa_2 p^2 - \kappa_3 p^3 + \dots}{1 + \kappa_1 p + \kappa_2 p^2 + \kappa_3 p^3 + \dots}, \quad (3.97)$$

что и приведет к образованию производных в правой части дифференциального уравнения. В практических случаях обычно оставляют два или один член разложения (3.97).

В качестве примера представим в нормальной форме дифференциальное уравнение мельницы мокрого самоизмельчения по каналу изменение производительности на входе Q (т/ч) – изменение мощности приводного двигателя P_a (кВт), если $T = 12,5$ мин, $\tau_3 = 10$ мин, $k = 8,5$ кВт/м/ч.

Разложив e^{-10p} в ряд Пада с оставлением одного члена, получим передаточную функцию мельницы в виде

$$W(p) = \frac{P_a(p)}{Q(p)} = \frac{8,5}{(12,5p+1)} \cdot e^{-10p} = \frac{8,5 \cdot (1-5p)}{(12,5p+1) \cdot (5p+1)} = \frac{-42,5p+8,5}{62,5p^2+17,5p+1}. \quad (3.98)$$

Тогда ее дифференциальное уравнение

$$\ddot{P}_a + 0,28 \cdot \dot{P}_a + 0,016 \cdot P_a = -0,68 \cdot \dot{Q} + 0,136 \cdot Q, \quad (3.99)$$

или в общем виде

$$\ddot{x} + a_2 \cdot \dot{x} + a_1 \cdot x = b_1 \cdot \dot{u} + b_2 \cdot u. \quad (3.100)$$

Искомая система нормальных уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + c_1 \cdot u; \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + c_2 \cdot u \end{aligned} \right\}. \quad (3.101)$$

Для определения a_{ij} составим характеристический определитель

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha \end{vmatrix} = (a_{11} - \alpha) \cdot (a_{22} - \alpha) - a_{21} \cdot a_{12} = \\ &= \alpha^2 - \alpha \cdot (a_{22} + a_{11}) - a_{22} \cdot a_{12} + a_{11} \cdot a_{22}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Приравниваем коэффициенты характеристического уравнения (3.102) и коэффициенты левой части (3.100):

$$a_2 = -(a_{11} + a_{22}); \quad a_1 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \quad (3.103)$$

Два коэффициента можно выбрать произвольно, т. е. $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$, тогда $a_{22} = -a_2$, $a_{12} = -a_1$.

Присоединенный определитель находят по (3.96).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -c_1 & a_{12} \\ -c_2 & a_{22} - \alpha \end{vmatrix} = c_1 \cdot a_{22} + c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot a_{12}. \quad (3.104)$$

Сравнивая правую часть (3.100) и выражение (3.104) записываем

$$c_1 = b_1; \quad c_2 = \frac{b_2 \cdot a_2 - b_1}{a_1} \quad (3.105)$$

Подставляя известные значения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 из (3.99) в выражения для c_1, c_2, a_{12}, a_{22} , окончательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0,016 \cdot x_2 - 0,68 \cdot u; \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 0,281 \cdot x_2 + 44,34 \cdot u \end{aligned} \right\}. \quad (3.106)$$

Если на входе объекта действует несколько переменных $u_1, u_2, \dots, u_k$ вместе со своими производными, тогда присоединенный определитель запишется в виде

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -(c_{11} \cdot u_1 + \dots + c_{1k} \cdot u_k) \cdot a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -(c_{21} \cdot u_1 + \dots + c_{2k} \cdot u_k) \cdot a_{22} - \alpha & \dots & a_{2n} \\ -(c_{n1} \cdot u_1 + \dots + c_{nk} \cdot u_k) \cdot a_{n2} & \dots & a_{nn} - \alpha \end{vmatrix}. \quad (3.107)$$

Представим в форме Коши дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока

$$\left(p^2 + \frac{1}{T} \cdot p + \frac{1}{T \cdot T_M} \right) \cdot x_1 = \frac{1}{T \cdot T_M} \cdot u_1 - \left(\frac{1}{T_M} \cdot p + \frac{1}{T \cdot T_M} \right) \cdot u_2, \quad (3.108)$$

где $x_1 = C \cdot \omega$ – э.д.с. якоря двигателя, пропорциональная угловой скорости ω ; C – коэффициент пропорциональности между моментом и током двигателя или между э.д.с. и его угловой скоростью; u_1 – напряжение на якоре двигателя; $u_2 = I_c \cdot R_d$ – падение напряжения на якоре двигателя; I_c – ток якоря двигателя, обусловленный моментом статической нагрузки на его валу; R_d – сопротивление якоря двигателя; T_M – электро механическая постоянная времени двигателя; T – электро магнитная постоянная времени якоря двигателя; L_d – индуктивность якоря двигателя; J – момент инерции.

Входными воздействиями двигателя постоянного тока являются переменные u_1 , u_2 а выходной координатой – угловая скорость ω (или x_1).

Для данного примера главные и присоединенные определители системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + c_{11} \cdot u_1 + c_{12} \cdot u_2; \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + c_{21} \cdot u_1 + c_{22} \cdot u_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.109)$$

будут иметь вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \alpha + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -c_{11} \cdot u_1 - c_{12} \cdot u_2 & a_{12} \\ -c_{21} \cdot u_1 - c_{22} \cdot u_2 & a_{22} - \alpha \end{vmatrix} = \\ &= (-c_{11} \cdot a_{22} + c_{21} \cdot a_{12}) \cdot u_1 + (-c_{12} \cdot a_{22} + c_{22} \cdot a_{12}) \cdot u_2 + (c_{11} \cdot u_1 + c_{12} \cdot u_2) \cdot \alpha. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Приравнявая коэффициенты (3.110) коэффициентам левой части уравнения (3.108), находим

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \frac{1}{T \cdot T_M}; \quad -(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{T}. \quad (3.112)$$

Здесь два коэффициента выбираются произвольно, т. е. $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$, тогда

$$a_{22} = -\frac{1}{T}; \quad a_{21} = \frac{1}{T \cdot T_M}. \quad (3.113)$$

Приравнявая теперь коэффициенты при одинаковых степенях α , p в выражении (3.111) и правой части (3.108) с учетом (3.113) найдем

$$c_{11} = 0; \quad c_{12} = -\frac{1}{T_M}; \quad c_{21} = \frac{1}{T \cdot T_M}; \quad c_{22} = 0.$$

Тогда окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \frac{1}{T_M} \cdot u_1; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T \cdot T_M} \cdot x_1 - \frac{1}{T} \cdot x_2 + \frac{1}{T \cdot T_M} \cdot u_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.114)$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Назовите и поясните основные виды математических моделей объектов управления.
2. Основные типовые процессы и их характеристика.
3. Как представляются статические характеристики на основе экспериментального материала.
4. Динамические характеристики типовых технологических операций.
5. Назовите шесть основных видов дифференциальных уравнений, которыми можно описать динамику производственных объектов.
6. Охарактеризуйте основные методы получения моделей промышленных объектов управления.
7. Сущность аналитического метода получения математических моделей.
8. Сущность упрощенного метода идентификации объекта по его кривой разгона.
9. Метод площадей.
10. Основные этапы решения уравнения Винера-Хопфа.
11. Метод решения уравнения Винера-Хопфа в частотной области.
12. Метод решения уравнения Винера-Хопфа во временной области и при помощи операционных усилителей.
13. Идентификация нелинейных объектов (алгоритм решения).
14. Алгоритм представления математических моделей в форме Коши.

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ИХ ТЕХНИЧЕСКИМ ДАННЫМ

4.1. Вводные замечания

Студенты, обучающиеся по специальности 050718 «Электроэнергетика» в соответствии с Государственным общеобразовательным стандартом образования этой специальности, при изучении специальных дисциплин в основном проходят подготовку по трем циклам дисциплин:

1. Электроэнергетика (электрические станции и подстанции, электрические сети и системы, электроснабжение);
2. Автоматизация технологических комплексов (по отраслям в соответствии с выбранной специализацией);
3. Автоматизированный электропривод промышленных агрегатов и установок.

При разработке систем автоматического управления технологическими комплексами наиболее ответственным является вопрос идентификации объекта управления. Путям решения этого вопроса посвящены предыдущие главы.

При учебном проектировании (курсовом, дипломном) по третьему циклу, состоящему из 7 дисциплин с выполнением 5 курсовых работ и проектов, студенты в основном выбирают элементы электропривода по справочным данным.

При анализе и синтезе системы управления электроприводом технологической установки по заданным техническим условиям проектирования необходимо знать структуру и параметры динамической модели выбранной системы электропривода, т. е. произвести идентификацию основных элементов этой системы.

Вопрос идентификации элементов автоматизированного электропривода по его техническим характеристикам (обмоточные данные, конструктивные особенности, статические характеристики и т. д.) в учебной литературе практически не освещен, а ряд источников ограничивается рассуждениями общего характера.

В связи с вышеизложенным вопросы идентификации основных элементов электропривода по их техническим характеристикам изложены в данной главе.

Уточнение динамических параметров эксплуатируемых систем электроприводов с целью повышения их технико-экономических показателей относится к области наладки и настройки автоматизированного электропривода.

4.2. Идентификация генератора постоянного тока

В системах автоматического регулирования, как правило, используются генераторы с независимым возбуждением (рис. 4.1). Принципиальная схема такого генератора, нагруженного на активно-индуктивную нагрузку $z_n = r_n + jx_n$, показана на рис. 4.1, а.

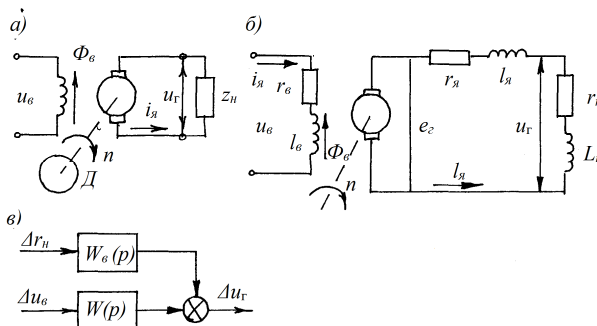


Рис. 4.1. Генератор постоянного тока с независимым возбуждением

Рассмотрим генератор в статическом режиме работы. В этом случае без учета реакции якоря напряжение на выходе генератора

$$u_\Gamma = e_\Gamma - r_{я.ц} \cdot i_\Gamma = c \cdot n \cdot \Phi_B - r_{я.ц} \cdot i_\Gamma, \quad (4.1)$$

где $e_\Gamma = c \cdot n \cdot \Phi_B$ – э.д.с. генератора, В; Φ_B – поток возбуждения генератора, Вб; $c = \frac{p \cdot N}{\alpha \cdot 60}$ – конструктивная постоянная [здесь p

– число пар полюсов; N – число активных проводников якоря (равно удвоенному числу витков обмотки якоря w); a – число пар параллельных ветвей обмотки якоря]; n – скорость вращения якоря, *об/мин*; $r_{я.ц}$ – сопротивление цепи якоря, *Ом*; $i_{я}$ – ток якоря, *А*. Конструктивная постоянная генератора может быть найдена по его номинальным данным:

$$c = \frac{e_{Г.НОМ}}{\Phi_{В.НОМ} \cdot n_{НОМ}} = \frac{U_{Г.НОМ} + I_{я.НОМ} \cdot r_{я.ц}}{\Phi_{В.НОМ} \cdot n_{НОМ}}. \quad (4.2)$$

Из уравнения (4.1) видно, что напряжение генератора падает при увеличении тока нагрузки. Уровнем напряжения генератора можно управлять с наименьшей затратой мощности путем изменения величины магнитного потока возбуждения $\Phi_{в}$, устанавливая соответствующие значения напряжения или тока возбуждения.

Поток возбуждения генератора $\Phi_{в}$ является нелинейной функцией от магнитодвижущей силы F (м. д. с.). В технических данных генератора эта зависимость обычно приводится в виде кривой намагничивания на один полюс:

$$\Phi_{в} = f(F) = f(aw_{B1}), \quad (4.3)$$

где $F = aw_{B1}$ — м. д. с. одного полюса, *А*.

На рис. 4.2, а показана кривая намагничивания без учета влияния гистерезиса.

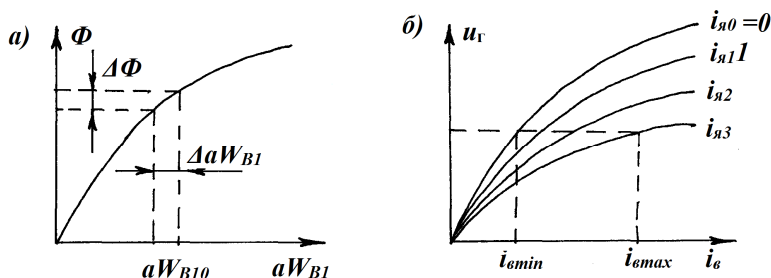


Рис. 4.2. Кривая намагничивания и нагрузочные характеристики генератора с независимым возбуждением Φ $\Delta\Phi$ ΔaW_{B1} ΔW_{B10} aW_{B1} $u_{Г}$ $i_{я0}$ $i_{я1}$ $i_{я2}$ $i_{я3}$ $i_{вmax}$

По уравнению (4.1), используя кривую намагничивания, можно построить нагрузочные характеристики генератора (рис. 4.2, б). Эти характеристики позволяют определить диапазон изменения тока возбуждения i_v , необходимый для поддержания заданного уровня напряжения генератора при изменении тока нагрузки. Найденные значения i_{vmin} и i_{vmax} служат исходными данными для расчета исполнительного элемента автоматической системы, в которой генератор является объектом управления.

Из рассмотренных характеристик, видно, что генератор является нелинейным звеном, а следовательно, его динамика описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

Составим приближенное линейное уравнение динамики генератора для случая $n = const$, полагая входной (управляющей) величиной напряжение возбуждения u_v , а выходной – напряжение на нагрузке u_n . Для упрощения задачи не будем учитывать влияние гистерезиса, вихревых токов и реакции якоря и предположим, что поток рассеяния изменяется по одному закону с потоком возбуждения Φ_v . При составлении уравнения генератора воспользуемся эквивалентной схемой (см. рис. 4.1, б).

Проведя линеаризацию нелинейной зависимости (4.3) в рабочей точке, получим

$$\Delta \dot{\Phi}_B = c_{\Gamma 1} \Delta a w_{B1} = c_{\Gamma 1} w_{B1} \Delta i_B$$

или в изображениях¹

$$\Phi_B(p) = c_{\Gamma 1} \cdot w_{B1} \cdot I_B(p), \quad (4.4)$$

где $c_{\Gamma 1} = \left[\frac{\partial f(a w_{B1})}{\partial (a w_{B1})} \right]_{a w_{B10}} \approx \left(\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta a w_{B1}} \right)_{a w_{B10}}$ – коэффициент, определяе-

мый по зависимости $\Phi_B = f(a w_{B1})$, заданной в аналитической или графической форме; w_{B1} – число витков обмотки возбуждения на полюс. Запишем уравнение в изображениях для цепи

¹ Значок Δ в последующих записях уравнений в изображениях опускается.

возбуждения (при последовательном соединении обмоток полюсов):

$$U_B(p) = r_B \cdot I_B(p) + 2p \cdot \sigma_{\Gamma} \cdot w_{B1} \cdot p \cdot \Phi_B(p) \quad (4.5)$$

или, учитывая (4.4),

$$U_B(p) = r_B \cdot I_B(p) + L_B \cdot p \cdot I_B(p), \quad (4.6)$$

где r_B – сопротивление цепи возбуждения, Ом;
 $L_B = 2p \cdot \sigma_{\Gamma} \cdot c_{\Gamma 1} \cdot w_{B1}^2$ – индуктивность цепи возбуждения, Гн;
 $\sigma = 1,15 - 1,2$ – коэффициент, учитывающий рассеяние магнитного потока генератора.

Используя зависимость (4.4), найдем изображение э. д. с. генератора:

$$E_{\Gamma}(p) = c \cdot n \cdot \Phi_B(p) = c_{\Gamma} \cdot c_{\Gamma 1} \cdot w_{B1} \cdot I_B(p), \quad (4.7)$$

где $c_{\Gamma} = c \cdot n = \frac{p \cdot N}{a \cdot 60} \cdot n$.

Для цепи якоря и нагрузки можно записать уравнения

$$E_{\Gamma}(p) = (r_{я.ц} + L_{я} \cdot p) \cdot I_{я}(p) + U_{\Gamma}(p), \quad (4.8)$$

$$U_{\Gamma}(p) = (r_n + L_p \cdot p) \cdot I_{я}(p), \quad (4.9)$$

в которых $I_{я}(p)$ – изображение приращения тока нагрузки в цепи якоря; $U_{\Gamma}(p)$ – изображение приращения напряжения генератора; $L_{я}^2$ – индуктивность обмотки якоря; r_n – сопротивление нагрузки; L_n – индуктивность нагрузки.

² Приближенно величину $L_{я}$ можно рассчитать по формуле [22]

$$L_{я} = \frac{30}{\pi} \beta \frac{U_{э.ном}}{pn_{ном} I_{я.ном}};$$

для генераторов с компенсационной (стабилизирующей) обмоткой $\beta = 0,25 \div 0,4$.

Решив совместно уравнения (4.6) ÷ (4.9), получим уравнение динамики генератора, записанное в изображениях:

$$(T_B p + 1) \cdot (T_Y p + 1) \cdot U_\Gamma(p) = \frac{r_H}{r_{я.ц} + r_H} \cdot k_\Gamma \cdot (T_H p + 1) \cdot U_B(p), \quad (4.10)$$

где $T_B = L_B / r_B$ – постоянная времени цепи возбуждения, с;
 $T_{я.ц} = (L_Y + L_H) / (r_{я.ц} + r_H)$ – постоянная времени цепи якоря, с;
 $T_H = L_H / r_H$ – постоянная времени цепи нагрузки, с;
 $k_\Gamma = c_\Gamma \cdot c_{\Gamma 1} \cdot w_{B1} / r_B$ – коэффициент передачи генератора.

При активной нагрузке $z_i = r_i$ значение $T_H = 0$. Часто при этом величина $T_{я.ц} = L_Y / (r_{я.ц} + r_H)$ мала, и ею можно пренебречь, после чего уравнение генератора в изображениях принимает следующий вид:

$$(T_B p + 1) \cdot U_\Gamma(p) = \frac{r_H}{r_{я.ц} + r_H} \cdot k_\Gamma \cdot U_B(p). \quad (4.11)$$

Составим уравнение генератора для случая активной нагрузки, предположив, что сопротивление нагрузки изменяется скачком на величину Δr_H . При этом для цепи нагрузки можно записать

$$u_{\Gamma 0} + \Delta u_\Gamma = (r_{H0} + \Delta r_H)(i_{я0} + \Delta i_я), \quad (4.12)$$

где $u_{\Gamma 0}$, r_{H0} – напряжение генератора и сопротивление нагрузки до возмущения при $t = 0 - |\varepsilon| (\varepsilon \rightarrow 0)$; $u_{\Gamma 0} = u_{\Gamma 0} / r_{H0}$ – ток нагрузки до возмущения при $t = 0 - |\varepsilon| (\varepsilon \rightarrow 0)$; $\Delta r_H = r_H - r_{H0}$ – приращение сопротивления нагрузки после возмущения при $t + |\varepsilon| (\varepsilon \rightarrow 0)$. Переходя к изображениям, для приращений величин получим

$$U_\Gamma(p) = r_H \cdot I_я(p) + \frac{u_{\Gamma 0}}{r_{H0}} \cdot R_H(p), \quad (4.13)$$

или

$$U_\Gamma(p) = E_\Gamma(p) - r_{я.ц} \cdot I_я(p). \quad (4.14)$$

Из (4.11) найдем уравнение для э. д. с. генератора, приняв $r_H = \infty$:

$$(T_B p + 1) \cdot E_{\Gamma}(p) = k_{\Gamma} \cdot U_B(p). \quad (4.15)$$

Решив совместно (4.13 ÷ 4.15) запишем уравнение для напряжения генератора с учетом воздействия со стороны нагрузки:

$$(T_B p + 1) \cdot U_{\Gamma}(p) = \frac{r_H}{r_{я.ц} + r_H} \cdot k_{\Gamma} \cdot U_B(p) + \frac{r_{я.ц}}{r_{я.ц} + r_H} \cdot \frac{u_{\Gamma 0}}{r_{H0}} \cdot (T_B p + 1) \cdot R_H(p). \quad (4.16)$$

Для генератора, используемого в качестве источника напряжения, передаточные функции по управляющему и возмущающему воздействиям определяются из соотношений:

$$W(p) = U_{\Gamma}(p) / U_B(p); \quad W_B(p) = U_{\Gamma}(p) / R_H(p). \quad (4.17)$$

На основании (4.16) и (4.17) генератор можно представить в виде структурной схемы (см. рис. 4.1, в).

Рассмотрим динамику генератора при использовании его в качестве источника тока, например, для питания электромагнита. В этом случае нагрузка характеризуется большой индуктивностью. Составим линейное уравнение динамики генератора, если выходной величиной является ток, а возмущающим воздействием – изменение активного сопротивления нагрузки.

Для возмущенного состояния цепи якоря генератора (см. рис. 4.1, б) можно записать

$$e_{r0} + \Delta e_r = (r_{я.ц} + r_{H0} + \Delta r_n)(i_{я0} + \Delta i_{я}) + (L_{я} + L_H) \frac{d\Delta i_{я}}{dt} \quad (4.18)$$

или, переходя к изображениям,

$$E_{\Gamma}(p) = i_{я0} \cdot R_H(p) + (r_{я.ц} + r_H + L_{я} p + L_H p) \cdot I_{я}(p). \quad (4.19)$$

Решив (4.19) совместно с (4.15), получим уравнение для тока генератора:

$$(T_B p + 1) \cdot (T_{я.н} p + 1) \cdot I_{я}(p) = \frac{k_{\Gamma}}{r_{я.ц} + r_H} \cdot U_B(p) - (T_B p + 1) \cdot \frac{i_{я0}}{r_{я.ц} + r_H} \cdot R_H(p), \quad (4.20)$$

где $i_{я0} = U_{\Gamma 0} / r_{н0}$ – ток нагрузки в цепи якоря генератора до возмущения при $t = 0 - \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0)$; $r_H = r_{н0} + \Delta r_H$ – активное сопротивление нагрузки после возмущения при $t = 0 + \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0)$; $T_{я.н} = (L_{я} + L_H) / (r_{я.ц} + r_H)$ – постоянная времени цепи якоря после возмущения.

Из уравнения (4.20) можно найти передаточные функции генератора по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W(p) = I_{я}(p) / U_B(p); \quad W_B(p) = I_{я}(p) / R_H(p). \quad (4.21)$$

Примеры составления уравнений генератора с учетом реакции якоря и влияния компенсационных обмоток рассмотрены в [23].

Технические данные некоторых типов генераторов постоянного тока серии П для $n_{ном} = 1450 \text{ об/мин}$ приведены в табл. 4.1 [24], где приняты следующие обозначения: $U_{ном}$, $i_{ном}$, $P_{ном}$ – номинальные данные генератора по напряжению, току и мощности; P_1 – потребляемая мощность на валу генератора в номинальном режиме; $r_{я}$, $r_{д.п}$ – сопротивления обмоток якоря и дополнительных полюсов; $r_{см}$ – сопротивление последовательной (стабилизирующей) обмотки; $w_{\phi 1}$ и r_{ϕ} – число витков (на полюс) и сопротивление (общее) обмотки возбуждения.

Сопротивления обмоток приведены для холодного состояния при температуре 15°C . В расчетах величины сопротивлений обмоток берутся для нагретого состояния [25]:

$$r_{нагр} = \alpha \cdot r, \quad (4.22)$$

где $\alpha = 1 + 0.004\tau$ (τ – перегрев обмотки по сравнению с температурой 15°C); в приближенных расчетах принимают $\alpha \approx 1,2$.

Обмотки дополнительных полюсов генератора исключают искрение между щетками и коллектором, а последователь-

ная обмотка уменьшает реакцию якоря. В расчетах по рассмотренной методике сопротивление этих обмоток учитывается при подсчете величины

$$r_{я.ц} = r_{я} + r_{д.п} + r_{см}. \quad (4.23)$$

Номинальный ток возбуждения генератора, если он не указан в справочных данных, определяется приближенно:

$$I_{в.ном} \approx 0,8 \cdot U_{Г.ном} / (\alpha \cdot r_{в}). \quad (4.24)$$

На рис 4.3 показана универсальная кривая намагничивания генераторов серии П, используемая для ориентировочных расчетов.

Таблица 4.1
Технические данные генераторов тока серии П

тип генератор	$U_{ном},$ В	$P_{ном},$ кВт	$I_{ном},$ А	$P_1,$ кВт	$2p$	$2a$	w_s	$r_{я} + r_{д.п}$ Ом	$r_{см},$ Ом	$W_{эл}$ (на полюс)	$r_{в},$ Ом
П-21	115 230	0,37 0,37	3,2 1,6	0,53 0,53	2	2	1080 2160	5,56 22,55	0,96 3,3	2500 4600	230 1160
П-22	115 23	0,6 0,6	5,2 2,6	0,8 0,8	2	2	630 1296	2,3 10,0	0,6 2,16	1600 3500	152 770
П-31	115 230	1,0 1,0	8,7 4,4	1,3 1,3	2	2	576 1152	1,56 6,9	0,34 1,32	2400 5400	188 980
П-32	115 230	1,5 1,5	13,1 6,5	1,8 1,8	2	2	360 720	0,76 3,17	0,17 0,58	1800 3400	122 480
П-41	115 230	2,7 2,7	23,4 11,7	3,6 3,6	4	2	351 702	0,558 2,23	0,136 0,488	900 1600	68,8 214
П-42	115 230	3,2 3,2	27,8 13,9	4,1 4,1	4	2	270 513	0,39 1,56	0,0534 0,3	750 1350	50 180
П-51	115 230	5,0 5,0	43,4 21,7	6,2 6,2	4	2	217 434	0,191 0,78	0,03 0,112	700 1300	32 120
П-52	115 230	6,5 6,5	56,4 28,2	7,9 7,9	4	2	186 341	0,15 0,6	0,0096 0,074	600 1250	28,3 152
П-61	115 230	9,0 9,0	78,0 39,1	10,7 10,7	4	2	186 341	0,111 0,35	0,0088 0,04	800 1500	35,0 120
П-62	115 230	11,5 11,5	100 50	13,6 13,6	4	2	124 248	0,061 0,222	0,009 0,028	650 1150	25 80
П-71	230	16	69,5	21,8	4	2	297	0,30	0,0115	950	43
П-72	230	21	91,0	25,4	4	2	210	0,1745	0,00725	950	50
П-81	230	27	117	32,0	4	2	222	0,1445	0,00475	1350	69,5
П-82	230	35	152	40,5	4	2	155	0,863	0,00308	1600*	27,2
П-91	230	50	217	57,5	4	2	145	0,0504	0,00304	870	35,8
П-92	230	70	304	78,5	4	2	105	0,0278	0,0018	1000	48,4
П-101	230	90	391	110	4	2	93	0,0187	0,00072	950*	37,8
П-101	230	110	478	123	4	4	138	0,0128	0,00061	840	32,5
П-111	230	150	653	167	4	4	126	0,00963	0,00077	850	28
П-112	230	190	826	208	4	4	100	0,00624	0,00045	750	24

* Обмотки главных полюсов соединены параллельно

На рис. 4.3 показана универсальная кривая намагничивания генераторов указанной серии, используемая для ориентировочных расчетов. Сведения о генераторах, выпускаемых промышленностью, приведены в справочнике [26].

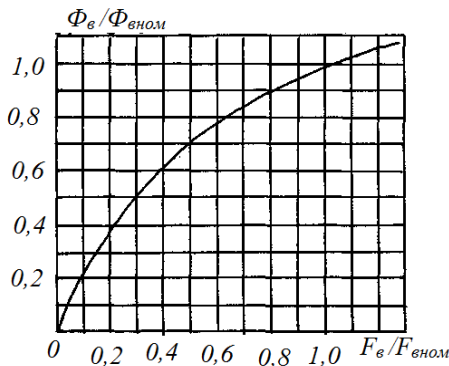


Рис. 4.3. Универсальная кривая намагничивания генераторов постоянного тока серии П $\Phi_B / \Phi_{Bном} F_B / F_{Bном}$

Пример.

Определим приближенную передаточную функцию генератора постоянного тока с независимым возбуждением типа П-32 ($U_{ном}=230$ В) при $n = n_{ном}$ по данным табл. 4.1. Нагрузку считаем активной, индуктивностью обмотки якоря пренебрегаем. Начальный поток возбуждения полагаем номинальным, внутреннего сопротивления источника возбуждения не учитываем.

Из таблицы имеем: $U_{ном} = U_{Г.ном} = 230$ В; $I_{ном} = I_{я.ном} = 6,5$ А; $n_{ном} = 1450$ об/мин $p=1$; $a=1$; $N = 2w_{я} = 1440$; $r_{я.ц} = 3,75$ Ом; $w_{В1} = 3400$; $r_{В} = 480$ Ом.

Находим конструктивную постоянную:

$$c = \frac{p \cdot N}{a \cdot 60} = \frac{1 \cdot 1440}{1 \cdot 60} = 24,$$

откуда

$$c_{Г} = c \cdot n_{ном} = 24 \cdot 1450 = 3,48 \cdot 10^4.$$

На основании (4.2) номинальный поток возбуждения

$$\Phi_{B.HOM} = \frac{U_{\Gamma.HOM} + I_{я.HOM} \cdot \alpha \cdot r_{я.ц}}{c \cdot n_{HOM}} = \frac{230 + 6,5 \cdot 1,2 \cdot 3,75}{3,48 \cdot 10^4} = 7,45 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Определяем номинальные ток возбуждения и м. д. с. на полюс:

$$I_{B.HOM} \approx \frac{0,8 \cdot U_{\Gamma.HOM}}{\alpha \cdot r_B} = \frac{0,8 \cdot 230}{1,2 \cdot 480} = 0,32 \text{ А};$$

$$F_{HOM} = a \cdot w_{B1.HOM} = I_{B.HOM} \cdot w_{B1} = 0,32 \cdot 3400 = 1080 \text{ А.}$$

По найденным значениям $\Phi_{B.HOM}$ и F_{HOM} получаем масштабные коэффициенты по осям универсальной кривой намагничивания (см. рис. 4.3):

$$m_\delta = 7,45 \cdot 10^{-3}; \quad m_F = 1080.$$

По кривой намагничивания при $\Phi_B = \Phi_{B.HOM}$ находим

$$c_{\Gamma 1} = \frac{m_\Phi}{m_F} \cdot \left(\frac{\Delta \bar{\Phi}_B}{\Delta a \cdot \bar{w}_{B1}} \right)_{aw_{B1.HOM}} \approx \frac{7,45 \cdot 10^{-3} \cdot 0,04}{1080 \cdot 0,1} = 2,7 \cdot 10^{-6}.$$

Принимая $\sigma_\Gamma = 1,2$, определяем

$$L_B = 2 \cdot p \cdot \sigma_\Gamma \cdot c_{\Gamma 1} \cdot w_{B1}^2 = 2 \cdot 1,2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3400^2 = 75 \text{ Гн};$$

$$T_B = \frac{L_B}{\alpha \cdot r_B} = \frac{75}{1,2 \cdot 480} = 0,13 \text{ сек.}$$

Коэффициент передачи генератора

$$k_\Gamma = \frac{c_\Gamma \cdot c_{\Gamma 1} \cdot w_{B1}}{\alpha \cdot r_B} = \frac{3,48 \cdot 10^4 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 3400}{1,2 \cdot 480} = 0,55.$$

На основании (4.11) и (4.17) передаточная функция генератора

$$W(p) = \frac{U_\Gamma(p)}{U_B(p)} = \frac{r_H}{\alpha \cdot r_{я.ц} + r_H} \cdot \frac{k_\Gamma}{T_B p + 1} = \frac{r_H}{\alpha \cdot r_{я.ц} + r_H} \cdot \frac{0,55}{0,13 p + 1}.$$

4.3. Идентификация двигателя постоянного тока

Наибольшее использование в системах автоматического управления, работающих на постоянном токе, имеют двигатели с независимым возбуждением. Такие двигатели, управляемые путем изменения напряжения на якоре, позволяют получить широкий диапазон регулирования скорости вращения, благодаря чему широко применяются в качестве исполнительных элементов в регулируемом приводе многих производственных механизмов и в силовых следящих системах.

Принципиальная схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением показана на рис. 4.4. Рассмотрим статический режим работы двигателя. В этом случае без учета реакции якоря для двигателя можно записать:

$$u_d = e_d + r_{я.ц} \cdot i_{я}; \quad (4.25)$$

$$e_d = c_e \cdot \Phi_B \cdot n; \quad (4.26)$$

$$M = c_m \cdot \Phi_B \cdot i_{я}. \quad (4.27)$$

В уравнениях (4.25)–(4.27) приняты следующие обозначения: u_d – напряжение на якоре двигателя, $В$; $i_{я}$ – ток якоря, $А$; $r_{я.ц}$ – сопротивление цепи якоря, $Ом$; e_d – э.д.с. вращения, $В$; Φ_B – поток возбуждения, $Вб$; n – скорость вращения двигателя, $об/мин$; M – момент, развиваемый двигателем, $Н \cdot М$; $c_e = \frac{p \cdot N}{\alpha \cdot 60}$; $c_m = \frac{p \cdot N}{2\pi \cdot a}$ – конструктивные постоянные [здесь p – число пар полюсов двигателя; N – число активных проводников якоря (равно удвоенному числу витков обмотки якоря w_a); a – число пар параллельных ветвей обмотки якоря].

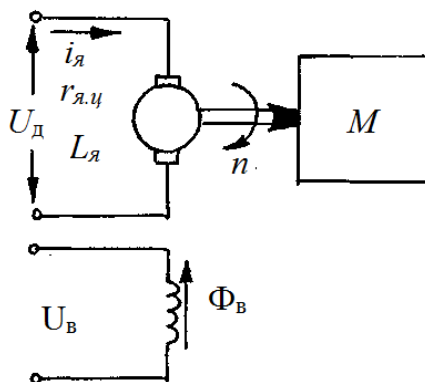


Рис. 4.4. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

В установившемся режиме момент двигателя уравнивается приведенным к валу статическим моментом сопротивления рабочего механизма M_c , т. е. в этом случае $M = M_c$.

Следует обратить внимание на соотношение

$$\frac{c_e}{c_M} = \frac{2\pi}{60} = 0,105, \quad (4.28)$$

которое может использоваться в расчетах.

Из (4.25)–(4.27) получаем уравнение механической характеристики двигателя в виде

$$n = \frac{u_D}{c_e \cdot \Phi_B} - \frac{r_{я.ц} \cdot i_я}{c_e \cdot \Phi_B}, \quad (4.29)$$

или

$$n = \frac{u_D}{c_e \cdot \Phi_B} - \frac{r_{я.ц} \cdot M}{c_e \cdot c_M \cdot \Phi_B^2}. \quad (4.30)$$

В формулах (4.29) и (4.30) в правой части первый член соответствует скорости вращения при идеальном холостом ходе

($M = 0$, $i_{я} = 0$), а второй – снижению скорости вращения двигателя под нагрузкой.

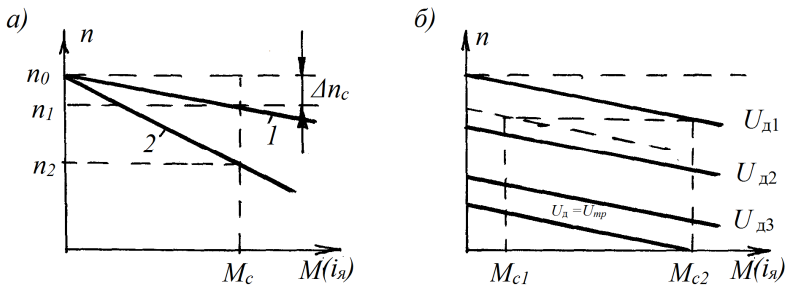


Рис. 4.5. Механические характеристики двигателя с независимым возбуждением

Механическая характеристика двигателя при $\Phi_{в} = \text{const}$ и $u_{д} = \text{const}$ выражается уравнением прямой (рис. 4.5, а, прямая 1). При увеличении сопротивления якорной цепи жесткость механической характеристики двигателя ухудшается (прямая 2).

Конструктивные постоянные двигателя можно определить по его номинальным данным. Из уравнения (4.29)

$$c_e = \frac{u_{д.ном} - r_{я.ц.} I_{я.ном}}{\Phi_{в.ном} n_{ном}}. \quad (4.31)$$

Для определения c_e можно воспользоваться также формулой

$$c_e = \frac{u_{д.ном}}{\Phi_{в.ном} n_0}, \quad (4.32)$$

где n_0 – скорость вращения при идеальном холостом ходе, определенная по механической характеристике при $u_{д} = u_{д.ном}$

Из уравнения (4.27)

$$c_m = \frac{M_{ном}}{\Phi_{в.ном} \cdot I_{я.ном}}. \quad (4.33)$$

Момент $M_{ном}$ можно определить по механической характеристике при $n=n_{ном}$ или по формуле

$$M_{ном} = 9,55 \cdot \frac{P_{ном}}{n_{ном}}, \quad (4.34)$$

где $P_{ном}$ – номинальная мощность на валу двигателя, Вт.

Формулы (4.31)–(4.32) используются для приближенного вычисления постоянных c_e и c_m , т. к. номинальные данные для двигателей представляют собой усредненные величины.

Рассмотрим регулирование скорости вращения двигателя путем изменения напряжения на якоре.

Механические характеристики двигателя, построенные по уравнению (4.30) при разных напряжениях на якоре, изображены на рис. 4.5, б. При уменьшении напряжения механическая характеристика смещается параллельно вниз пропорционально величине напряжения. Статические характеристики позволяют определить диапазон изменения напряжения на якоре двигателя, требуемый для поддержания заданной скорости вращения при заданных пределах изменения статического момента M_c . Соответствующие значения тока якоря можно найти используя соотношение (4.27). График, приведенный на рис. 4.5, б, позволяет также определить зону нечувствительности двигателя, определяемую напряжением трогания ($u_d = U_{д.тр}$). Это напряжение соответствует началу вращения двигателя и зависит от момента сопротивления на валу M_c . Величина $U_{д.тр}$ может быть найдена также из (4.20) или (4.30) при $n = 0$ и $M = M_c$.

Составим уравнение динамики двигателя в отклонениях при $\Phi_B = \text{const}$, не учитывая для упрощения реакцию якоря. За входную величину примем напряжение на якоре, а за выходную – скорость вращения.

Рассмотрим случай, когда момент сопротивления на валу двигателя не зависит от скорости вращения. При этом введем обозначения:

$$c_e \cdot \Phi_B = c_{eД}; \quad c_m \cdot \Phi_B = c_{мД}. \quad (4.35)$$

Для цепи якоря, учитывая, что $e_d = c_{ед}n$, при нулевых начальных условиях запишем

$$U_d(p) = c_{ед} \cdot n(p) + r_{я.ц} \cdot I_{я}(p) + L_{я} \cdot p \cdot I_{я}(p)^3. \quad (4.36)$$

Заменив в формуле для динамического момента двигателя $M_{дин} = J \cdot d\omega_d / dt$ угловую скорость ω_d (рад/сек) на n (об/мин), получим в изображениях уравнение равновесия моментов:

$$M(p) = \frac{1}{9,55} \cdot J \cdot p \cdot n(p) + M_c(p), \quad (4.37)$$

где $J = J_d + J_{H.нр}$ – момент инерции на валу двигателя, кг.м².
Здесь J_d – момент инерции якоря двигателя; $J_{H.нр} = k_p^2 \cdot J_H$ – момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя (k_p – коэффициент передачи редуктора, соединяющего вал двигателя с нагрузкой).

Используем зависимость

$$M(p) = c_{м.д} \cdot I_{я}(p). \quad (4.38)$$

После совместного решения (4.36)÷(4.38) запишем уравнение двигателя:

$$(T_{я} \cdot T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1) \cdot n(p) = k_d \cdot U_d(p) - (T_{я} p + 1) \cdot k_{д.в} \cdot M_c(p), \quad (4.39)$$

где $T_{я} = L_{я} / r_{я.ц}$ – постоянная времени цепи якоря, с.

$$T_{эм} = \frac{1}{9,55} \cdot J \cdot \frac{r_{я.ц}}{c_{ед} \cdot c_{мд}} - \text{электромеханическая постоянная}$$

времени, с;

³ Здесь и далее изображения уравнений записываются для малых приращений переменных.

$k_{Д} = 1/c_{e.Д}$ – коэффициент передачи двигателя по управляющему воздействию, об/(мин · В).

$k_{Д.В} = r_{я.ц} / (c_{e.Д} \cdot c_{М.Д})$ – коэффициент передачи двигателя по возмущающему воздействию, об/(H · М · мин).

Вычислить индуктивность якоря $L_{я}$ сложно, поэтому на практике ее определяют экспериментально. Приближенно [22] величина $L_{я}(Гн)$

$$L_{я} \approx \frac{30}{\pi} \cdot \beta \cdot \frac{U_{Д.НОМ}}{p \cdot n_{НОМ} \cdot I_{я.НОМ}}, \quad (4.40)$$

где $\beta = 0,25 \div 0,6$ (нижнее значение принимается для компенсированных машин, верхнее — для некомпенсированных).

Для определения $T_{эм}$ имеется также соотношение

$$T_{эм} = \frac{1}{9,55} \cdot J \cdot \frac{\Delta n_c}{M_{НОМ}}, \quad (4.41)$$

где $\Delta n_c = \frac{r_{я.ц} \cdot I_{я.НОМ}}{c_{eД}}$ – падение скорости двигателя в номинальном режиме.

Анализируя уравнение (4.38), можно установить, что при $T_{эм} \leq 4T_{я}$ двигатель обладает колебательными свойствами, которые являются нежелательными. Поэтому при конструировании двигателей стремятся выполнить соотношение $T_{эм} \geq 4T_{я}$. В этом случае уравнение динамики двигателя можно записать в виде

$$(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot n(p) = k_{Д} \cdot U_{Д}(p) - (T_{я} p + 1) \cdot \kappa_{Д.В} M_c(p), \quad (4.42)$$

$$\text{где } T_1 = \frac{T_{эм}}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_{я}}{T_{эм}}} \right); \quad T_2 = \frac{T_{эм}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{T_{я}}{T_{эм}}} \right).$$

В случае, когда $T_{эм} \gg T_{я}$, пренебрегая величиной $T_{я}$, уравнение двигателя можно свести к приближенному уравнению первого порядка.

Передаточные функции двигателя по управляющему и возмущающему воздействиям равны соответственно:

$$W(p) = n(p) / U_d(p) ; \quad W_B(p) = n(p) / M_c(p). \quad (4.43)$$

Часто за выходную величину двигателя принимается угол поворота вала α_d (обычно измеряемый в *радианах*). При этом, учитывая, что $\alpha_d(p) = \frac{1}{p} \omega_d(p)$, а $\omega_d = \left[\frac{pad}{сек} \right] = \frac{1}{9,55} \cdot n \left[\frac{об}{мин} \right]$, получаем вместо (4.43) другие передаточные функции двигателя:

$$\left. \begin{aligned} W_\alpha(p) &= \frac{\alpha_d(p)}{U_d(p)} = \frac{1}{9,55} \cdot \frac{1}{\delta} W(p); \\ W_{B\alpha}(p) &= \frac{\alpha_d(p)}{M_c(p)} = \frac{1}{9,55} \cdot \frac{1}{\delta} W_B(p). \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Составим уравнение динамики двигателя для случая, когда статический момент на валу зависит от скорости вращения. Линейная зависимость такого рода существует, например, если нагрузкой двигателя является генератор постоянного тока с независимым возбуждением, замкнутый на постоянное сопротивление. В механизмах с так называемым вентиляторным моментом статический момент на валу зависит от квадрата скорости вращения.

Для малых изменений скорости вращения в общем случае величина приращения статического момента

$$\Delta M_c(t, n) = \Delta M_{c0}(t) + k_c \cdot \Delta n(t), \quad (4.45)$$

где $\dot{I}_{\pi 0}$ – постоянная составляющая момента сопротивления;

$$k_c = \left[\frac{\partial M_c(t, n)}{\partial n} \right] \cdot \Delta n \quad - \text{коэффициент, получаемый при ли-}$$

неаризации зависимости $M_c(t, n)$ в заданной точке.

С учетом зависимости (4.45) уравнение двигателя (4.39) преобразуется к виду

$$\left(\frac{T_{\text{я}} \cdot T_{\text{эм}}}{1 + k_B k_c} p^2 + \frac{k_B k_c T_{\text{я}} + T_{\text{эм}}}{1 + k_B k_c} p + 1 \right) \cdot n(p) =$$

$$= \frac{k_D}{1 + k_B k_c} U_D(p) - \frac{k_B}{1 + k_B \cdot k_c} (T_{\text{я}} p + 1) \cdot M_{c0}(p) \quad (4.46)$$

Технические характеристики некоторых двигателей постоянного тока приведены в табл. 4.2–4.4.

В таблицах приняты следующие обозначения: $U_{\text{НОМ}}$, $I_{\text{НОМ}}$, $P_{\text{НОМ}}$, $\eta_{\text{НОМ}}$ – номинальные данные двигателя по напряжению, току, мощности и к. п.д. ($I_{\text{НОМ}} = I_{\text{я.НОМ}} + I_{\text{в.НОМ}}$); $r_{\text{я}}$ и $r_{\text{д.п}}$ – сопротивление обмоток якоря и дополнительных полюсов; $r_{\text{ст}}$ – сопротивление последовательной (стабилизирующей) обмотки; GD^2 – маховой момент двигателя; $M_{\text{п}}$ – пусковой момент.

Сопротивления обмоток указаны для холодного состояния. Увеличение сопротивления за счет нагрева можно учесть, пользуясь соотношением (1.31). Сопротивление цепи якоря двигателя подсчитывается по формуле (4.23).

Момент инерции якоря двигателя

$$J_{\text{д}} = m\rho^2 = mD^2 / 4, \quad (4.47)$$

где $J_{\text{д}}$ – момент инерции, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$; m – масса якоря, кг ; ρ и D – соответственно радиус и диаметр инерции, м .

Таблица 4.2
Технические данные двигателей постоянного тока серии П
 $n_{ном} = 1500 об / мин$

Тип двигателя	$U_{ном}, В$	$P_{ном}, кВт$	$I_{ном}, А$	$\eta_{ном}, \%$	$2p$	$2a$	W_A	$I_A + I_{дп} (при 15^{\circ}C), Ом$	$I_{г}, Ом$	$W_{в1} (на полюс)$	$I_{в, доп} (при 15^{\circ}C), Ом$	$G_D, кг \cdot м^2$
П-11	110 220	0,3	4,3 2,06	63,5 66,0	2	2	826 1652	5,14 22,6	0,236 0,88	2700 4000	300 670	0,012
П-12	110 220	0,45	5,2 2,88	78,5 71,0	2	2	574 1176	2,97 11,75	0,125 0,25	1850 4000	158 785	0,015
П-21	110 220	0,7	8,9 4,4	72,0 72,0	2	2	558 1188	1,52 6,59	0,003 0,24	2000 4800	107 600	0,045
П-22	110 220	1,0	11,7 5,9	77,0 77,0	2	2	414 864	0,96 4,17	0,062 0,25	2400 4800	175 712	0,055
П-31	110 220	1,5	17,4 8,6	78,0	2	2	342 756	0,594 2,455	0,026 0,212	2600 4600	130 470	0,085
П-32	110 220	2,2	24,5 12,2	80,5 81,5	2	2	234 468	0,285 1,35	0,02 0,092	1700 3600	78 358	0,105
П-41	110 220	3,2	36,1 18,0	80,5 80,5	4	2	243 540	0,2826 1,41	0,007 0,0328	1400 2700	118 470	0,15
П-42	110 220	4,5	50,6 25,3	81,0 81,0	4	2	162 351	0,153 0,65	0,0048 0,0392	760 1500	41,4 172	0,18
П-51	110 220	6,0	66 33	82,5 82,5	4	2	155 372	0,1026 0,565	0,0044 0,0073	900 1800	45,2 262	0,35
П-52	110 220	8,0	86 42,6	84,5 85,5	4	2	124 248	0,0656 0,298	0,0022 0,0068	800 1800	41,8 178	0,40
П-61	220	11	57,3	87,0	4	4	248	0,199	0,006	1950	178	0,56
П-62	220	14	73	86,0	4	4	186	0,1183	0,004	1700	146	0,65

Таблица 4.3
Технические данные двигателей постоянного тока с независимым возбуждением серии МИ

Тип двигателя	$U_{ном}, В$	$n_{ном}, об/мин$	$P_{ном}, кВт$	$I_{A, ном}, А$	$I_{B, ном}, А$	$\eta_{ном}, \%$	$I_{дп} (при 20^{\circ}C), Ом$	$I_{г} (при 20^{\circ}C), Ом$	$M_{ном} \times 9,81 \times 10^{-2}, Н \cdot м$	$M_{г} \times 9,81 \times 10^{-2}, Н \cdot м$	$G_D, кг \cdot м^2$
МИ-11	60	3000	0,12	2,86	0,27	62	0,46	223	3,9	1,0	0,006
	60	2000	0,1	2,27	0,27	—	0,94	223	—	1,0	0,006
	110	3000	0,12	1,53	0,17	62	1,48	642	3,9	1,0	0,006
	110	2000	0,1	1,22	0,17	—	3,0	642	—	1,0	0,006
МИ-12	60	3000	0,2	4,57	0,28	66	0,23	218	6,4	1,0	0,008
	60	2000	0,12	2,72	0,28	—	0,52	218	—	1,0	0,008
	110	3000	0,2	2,46	0,2	66	0,765	560	6,4	1,0	0,008
	110	2000	0,12	1,46	0,2	—	1,74	560	—	1,0	0,008

Продолжение таблицы 4.3

Тип двигателя	U _{ном} , В	P _{ном} , кВт/мин	P _{ном} , кВт	I _{аном} , А	I _{аном} , А	$\eta_{ном}$, %	I _{зд} (при 200°C), Ом	I _б (при 200°C), Ом	M _{ном} × 9,81 × 10 ⁻² , Н·М	M _г × 9,81 × 10 ⁻² , Н·М	GD, кг·м ²
МИ-21	60	3000	0,25	5,6	0,2	67	0,284	306	8,0	1,5	0,014
	60	2000	0,2	4,3	0,2	—	0,645	306	—	1,5	0,014
	110	3000	0,25	3,05	0,13	67	0,945	827	8,0	1,5	0,014
	110	2000	0,2	2,33	0,13	—	2,2	827	—	1,5	0,014
МИ-22	60	3000	0,37	8,2	0,23	71	0,195	264	11,9	1,5	0,016
	60	2000	0,25	5,5	0,23	—	0,36	264	—	1,5	0,016
	60	1000	0,12	2,6	0,23	64	1,44	264	11,6	1,5	0,16
	110	3000	0,37	4,4	0,14	—	0,546	934	—	1,5	0,016
	110	2000	0,25	2,9	0,14	69	1,29	790	12,0	1,5	0,016
	110	1000	0,12	1,4	0,14	—	4,58	790	—	1,5	0,016
МИ-31	60	3000	0,45	10,3	0,41	68	0,204	145	14,5	2,5	0,036
	60	2000	0,37	8,2	0,41	—	0,405	145	—	2,5	0,036
	60	1000	0,2	4,4	0,41	—	1,32	145	—	2,5	0,036
	110	3000	0,45	5,6	0,24	68	0,585	460	14,5	2,5	0,036
	110	2000	0,37	4,4	0,24	—	1,16	460	—	2,5	0,036
	110	1000	0,2	2,4	0,24	66	3,93	460	19,4	2,5	0,036
МИ-32	110	2500	0,76	8,2	0,43	80	0,391	258	29,5	2,5	0,053
	110	1500	0,45	5,0	0,43	—	0,975	258	—	2,5	0,053
	110	1000	0,37	4,2	0,43	72	2,21	258	35,9	2,5	0,053
	220	2500	0,76	4,1	0,23	—	1,36	950	—	2,5	0,053
	220	1500	0,45	2,5	0,23	75	3,81	950	29,1	2,5	0,053
	220	1000	0,37	2,1	0,23	—	8,57	950	—	2,5	0,053
МИ-41	110	2500	1,6	19,2	0,43	73	0,249	255	62,0	6,0	0,16
	110	1500	1,1	13,0	0,43	—	0,67	255	—	6,0	0,16
	110	1000	0,76	9,0	0,43	—	1,3	255	—	6,0	0,16
	220	2500	1,6	9,5	0,33	73	0,93	670	62,0	6,0	0,16
	220	1500	1,1	6,4	0,33	—	2,63	670	—	6,0	0,16
	220	1000	0,76	4,5	0,33	72	5,32	670	73,7	6,0	0,16
МИ-42	110	2500	3,2	36,3	0,62	78	0,1	178	121,0	6,0	0,26
	110	1500	1,6	18,2	0,62	—	0,32	178	—	6,0	0,26
	110	1000	1,1	12,6	0,62	75	0,75	178	106,7	6,0	0,26
	220	2500	3,2	18,0	0,31	—	0,376	715	—	6,0	0,26
	220	1500	1,6	9,1	0,31	—	1,28	715	—	6,0	0,26
	220	1000	1,1	6,3	0,31	75	2,95	715	106,7	6,0	0,26
МИ-51	220	2500	5,0	27,2	—	—	0,164	435	—	12,0	0,5
	220	1500	3,2	17,1	—	—	0,46	435	—	12,0	0,5
	220	1000	1,6	8,7	—	—	1,1	435	—	12,0	0,5
МИ-52	220	2500	7,0	37,0	—	—	0,088	312	—	12,0	0,6
	220	1500	4,5	23,3	—	—	0,26	312	—	12,0	0,6
	220	1000	2,5	13,1	—	—	0,569	312	—	12,0	0,6

В справочной литературе и каталогах момент инерции часто выражают через маховой момент GD², используя техническую систему единиц МКГСС. В этом случае момент инерции измеряется в кгГ·М·см²:

$$J_{д} = \frac{G}{g} \cdot \frac{D^2}{4} = \frac{GD^2}{4g},$$

где $\frac{G}{g} = m$ – масса якоря, $\kappa\Gamma \cdot \text{сек}^2/\text{М}$; g – ускорение силы тяжести, равное $9,81 \text{ м/с}^2$; $G=mg$ – вес якоря (сила тяжести), $\kappa\Gamma$ ($1 \kappa\Gamma = 9,81 \kappa\Gamma \cdot \text{М} / \text{с}^2$).

Таблица 4.4
Технические данные маломощных двигателей постоянного тока типа СЛ

Тип двигателя	U _{НОМ} , В	n _{НОМ} , об/мин	P _{НОМ} , Вт	I _{я, ном} , А	I _{я, экз} , А	I _{в, ном} , А	I _{а.ц} (при 20 ⁰ С) _{ОМ}	M _{НОМ} , M _ц , M _с			J _Д х9,81 x 10 ⁻⁵ , кг.м ²	L _я , мГн
								х9,81·10 ⁻⁴ , Н.М				
СЛ-121	110	4500	7,5	0,16	0,45	0,07	240	14	42	4	0,039	130
СЛ-161	110	4000	8,6	0,17	0,64	0,08	170	21	80	4	1,053	125
СЛ-221	110	3600	13	0,25	0,9	0,05	117	35	90	8	0,14	230
СЛ-221А	110	3600	13	0,25	—	0,05	117	35	90	8	0,14	230
СЛ-261	110	3600	24	0,41	1,74	0,08	51	65	200	8	0,2	140
СЛ-281	24	5200	26	2,16	16,0	0,24	1,15	50	125	8	0,2	0,5
СЛ-321	110	3000	38	0,58	3,3	0,11	25,8	125	310	13	0,6	130
СЛ-361	110	3000	50	0,75	4,35	0,1	20,5	160	400	13	0,7	115
СЛ-369	110	3600	55	0,8	5,85	0,1	15,2	150	450	13	0,7	90
СЛ-521	110	3000	77	1,07	10,0	0,13	8,5	250	650	35	1,7	58
СЛ-521К	110	1000	20	0,37	1,1	0,13	74	200	635	35	1,7	360
СЛ-569	110	3600	175	1,96	24,0	0,11	3,6	475	925	35	2,7	30
СЛ-569К	110	850	36	0,58	2,25	0,22	40	420	1020	35	2,7	290
СЛ-571К	24	2200	95	6,15	62,0	0,85	0,31	420	750	35	2,7	2
СЛ-621	110	2400	172	2,08	30,0	0,16	3,0	700	1250	38	6,75	35
СЛ-661	110	2400	230	2,66	54,0	0,18	1,73	925	1550	38	9,35	25

Для численного выражения момента инерции $J_{\text{Д}}$ в единицах СИ через маховой момент $GD^2 [\kappa\Gamma \cdot \text{м}^2]$ можно пользоваться соотношением

$$J_{\text{Д}} = GD^2 / 4. \quad (4.48)$$

Номинальный ток якоря двигателя

$$I_{\text{я, ном}} = I_{\text{НОМ}} - I_{\text{в, ном}} \approx I_{\text{НОМ}} - \frac{U_{\text{НОМ}}}{\alpha r_{\text{в}}}.$$

Пример

Определим для двигателя типа П-22 ($U_{ном} = 220В$, $n_{ном} = 1500 об/мин$) коэффициенты уравнения динамики при номинальном потоке возбуждения и $M_c = M_c(t)$, $J_{н.пр} = 0,014 кг \cdot м^2$.

Из табл.4.2. имеем следующие данные:

$$U_{д.ном} = 220 В; I_{я.ном} = I_{ном} - I_{в.ном} = 5,64 А; P=1;$$

$$r_{я.ц} = r_{я} + r_{д.п} + r_{ст} = 4,42 Ом; J_{д} = 0,0138 кг \cdot м^2.$$

Пользуясь соотношениями (4.35), (4.31), (4.28), определяем постоянные:

$$c_{ед} = \frac{u_{д.ном} - \alpha \cdot r_{я.ц} \cdot I_{я.ном}}{n_{ном}} = \frac{220 - 1,2 \cdot 4,42 \cdot 5,64}{1500} = 0,126;$$

$$c_{мд} = \frac{1}{0,105} \cdot c_{ед} = \frac{0,126}{0,105} = 1,2.$$

Учитывая, что двигатели серии П имеют легкую компенсационную (стабилизирующую) обмотку, по приближенной формуле (4.40), полагая $\beta = 0,3$, находим

$$L_{я} = \frac{30}{\pi} \cdot \beta \cdot \frac{u_{д.ном}}{p \cdot n_{ном} \cdot I_{я.ном}} = \frac{30}{\pi} \cdot 0,3 \cdot \frac{220}{1 \cdot 1500 \cdot 5,64} \approx 0,075 Гн.$$

Момент инерции на валу двигателя

$$J = J_{д} + J_{н.пр} = 0,0138 + 0,014 = 0,028 кг \cdot м^2.$$

Подставив численные значения параметров, получаем

$$k_{д} = \frac{1}{c_{ед}} = \frac{1}{0,126} \approx 8 об/мин \cdot В;$$

$$k_{в} = \frac{\alpha \cdot r_{яц}}{c_{ед} \cdot c_{м.д}} = \frac{1,2 \cdot 4,42}{0,126 \cdot 1,2} = 35 об/с \cdot м \cdot мин;$$

$$T_{я} = \frac{L_{я}}{\alpha \cdot r_{яц}} = \frac{0,075}{1,2 \cdot 4,42} = 0,014 \text{сек} ;$$

$$T_{эм} = \frac{1}{9,55} \cdot J \cdot \frac{\alpha \cdot r_{яц}}{c_{ед} \cdot c_{м.д}} = \frac{0,028}{9,55} \cdot \frac{1,2 \cdot 4,42}{0,126 \cdot 1,2} = 0,1 \text{с} .$$

4.4. Идентификация двухфазного асинхронного двигателя

Двухфазные асинхронные двигатели широко используются в автоматических системах. Наибольшее применение как исполнительные элементы они находят в маломощных следящих системах. Практическое достоинство этих двигателей заключается в том, что они не имеют коллектора и поэтому обладают высокой надежностью.

В основном выпускаются двухфазные асинхронные двигатели двух типов: с полым немагнитным ротором из материала с хорошей электропроводностью (обычно из алюминия) и с ферромагнитным ротором, имеющим короткозамкнутую обмотку в виде беличьей клетки. Имея меньший к.п.д., двигатели первого типа отличаются малой инерцией ротора и лучшими регулировочными свойствами. Мощность указанных типов двигателей не превышает 100 ÷ 200 Вт. Принципиальная схема двухфазного асинхронного двигателя показана на рис. 4.6. Обмотка управления ω_y и обмотка возбуждения ω_b расположены перпендикулярно друг к другу. Необходимый фазовый сдвиг между напряжениями на обмотках, равный 90° , обеспечивается с помощью конденсатора С, включенного в цепь обмотки возбуждения. Могут применяться и другие схемы включения обмоток [27].

Механические характеристики асинхронного двигателя нелинейны и зависят не только от собственных параметров, но и параметров выходного каскада усилителя и схемы включения обмоток.

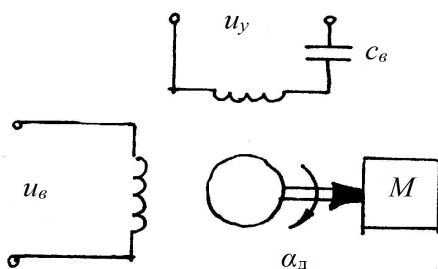


Рис. 4.6. Двухфазной асинхронный двигатель u_y , $u_в$, $C_в$, M , $\alpha_д$

Поэтому механические характеристики, используемые в расчетах, должны соответствовать реальным условиям работы двигателя. Как правило, такие характеристики определяются экспериментально. Обычно в справочниках приводятся технические данные двигателей для показанной на рис. 4.6 схемы включения обмоток при управлении от источника с большой мощностью и малым внутренним сопротивлением.

С помощью механических характеристик $n = f(U_д, M)$ (рис. 4.7, а) можно найти управляющее напряжение при заданном статическом моменте сопротивления на валу и напряжение трогания двигателя.

Составим линейное уравнение динамики двигателя в отклонениях, проведя линеаризацию его механических характеристик. За входную величину примем напряжение на управляющей обмотке, а за выходную – угол поворота вала, полагая момент сопротивления не зависящим от скорости вращения, что соответствует большинству применений двухфазных асинхронных двигателей.

Механические характеристики двигателя следует линеаризовать в точке или области рабочего режима путем построения касательных к действительным характеристикам. Если по форме механические характеристики близки к линейным, то их можно заменить приближенными линейными характеристиками в виде параллельных прямых (рис. 4.7, б) с наклоном, равным усредненному наклону прямых, соединяющих при заданных управляющих напряжениях точки пусковых моментов и холостого хода.

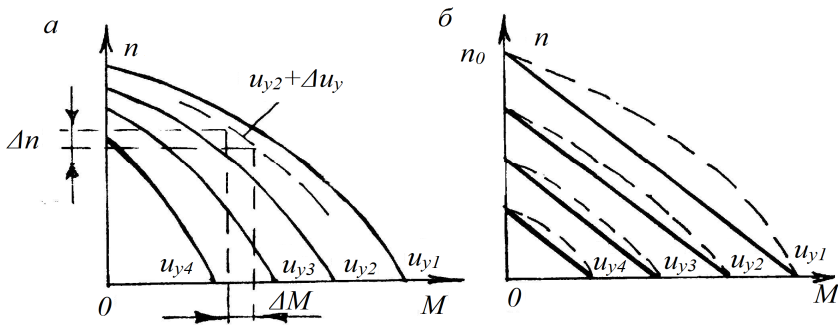


Рис. 4.7. Механические характеристики двухфазного асинхронного двигателя

Из дальнейшего рассмотрения исключим инерционность по цепи управления, т. к. эта величина практически очень мала. Проведя аналогию с двигателем постоянного тока при $L_{\text{я}} = 0$ на основании уравнения (4.30) для асинхронного двигателя при постоянной амплитуде напряжения возбуждения и малых отклонениях переменных можно записать

$$\frac{d\alpha_{\text{д}}}{dt} = \frac{1}{c_e} \cdot U_y - \frac{1}{c_e \cdot c_M} \cdot M, \quad (4.49)$$

где $d\alpha_{\text{д}}/dt$ – скорость вращения двигателя, рад/с ; $\alpha_{\text{д}}$ – угол поворота вала двигателя, рад ; U_y – действующее значение напряжения на обмотке управления, В ; M – момент двигателя, $\text{Н} \cdot \text{м}$; c_e, c_M – постоянные двигателя, определяемые в области рабочего режима, $\text{В} \cdot \text{сек} / \text{рад}$; $\text{Н} \cdot \text{м} / \text{В}$.

При этом уравнение равновесия моментов имеет вид

$$M = J \frac{d^2 \alpha_{\text{д}}}{dt^2} + M_c. \quad (4.50)$$

Решив совместно (4.49), (4.50) и перейдя к изображениям, получим уравнение двухфазного асинхронного двигателя

$$(T_{эм}p + 1) \cdot p \cdot \alpha_d(p) = k_d \cdot U_y(p) - k_{д.в} \cdot M_c(p), \quad (4.51)$$

где $k_d = 1/c_e$, $k_{д.в} = 1/c_e c_m$ – коэффициенты передачи двигателя соответственно по управляющему и возмущающему воздействиям; $T_{эм} = J/(c_e c_m)$ – электромеханическая постоянная времени, сек. Здесь $J = J_d + J_{н.пр}$ – момент инерции на валу двигателя, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$; J_d – момент инерции ротора двигателя, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Постоянные c_e и c_m могут быть найдены на основании (4.49) по механическим характеристикам.

При $\Delta M = 0$ ($M = \text{const}$) получаем

$$c_e = \Delta U_y / \Delta \omega_d. \quad (4.52)$$

Принимая $\omega_d = 0$ ($\omega_d = \text{const}$), находим

$$c_m = \Delta M / \Delta U_y. \quad (4.53)$$

В случае приведения механических характеристик двигателя (см. рис. 4.7, б)

$$c_e = U_y / \omega_{д0}; \quad c_m = M_{\Pi} / U_y, \quad (4.54)$$

где $\omega_{д0}$, M_{Π} – скорость при холостом ходе и пусковой момент двигателя при напряжении управления U_y .

При отсутствии механических характеристик постоянные двигателя можно определить приближенно по его номинальным данным. Если механическую характеристику двигателя на рабочем участке от номинальной скорости вращения $\omega_{д.ном}$ до $\omega_d = 0$ при номинальном напряжении управления $U_{y.ном}$ считать линейной, то

$$\left. \begin{aligned} c_e &= \frac{\Delta U_y}{\Delta \omega_d} = \frac{M_{\Pi} - M_{ном}}{M_{\Pi}} \cdot \frac{U_{y.ном}}{\omega_{д.ном}}; \\ c_m &= \Delta M / \Delta U_y = M_{\Pi} / U_{y.ном}, \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

где $\Delta U_y = U_{y.HOM} - U_{Tp.HOM}$ – (здесь $U_{Tp.HOM} = U_{y.HOM} \cdot M_{HOM} / M_{II}$ – напряжение трогания двигателя при номинальном моменте).

В последнем случае коэффициенты уравнения двигателя запишутся как

$$\left. \begin{aligned} k_D &= \frac{M_{II}}{M_{II} - M_{HOM}} \cdot \frac{\omega_{D.HOM}}{U_{y.HOM}}; \\ k_{D.B} &= \frac{\omega_{D.HOM}}{M_{II} - M_{HOM}}; \\ T_{эм} &= J \frac{\omega_{D.HOM}}{M_{II} - M_{HOM}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Так как в справочных сведениях скорость вращения двигателя дается в оборотах в минуту, следует учитывать соотношение

$$\omega_D = (\text{рад/сек}) = \frac{1}{9,55} n(\text{об/мин}).$$

Передаточные функции двигателя на основании (4.51) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} W_D(p) &= \frac{\alpha_D(p)}{U_D(p)} = \frac{\kappa_D}{p \cdot (T_{эм}p + 1)}; \\ W_{D.B}(p) &= \frac{\alpha_D(p)}{M_c(p)} = \frac{-\kappa_{D.B}}{p \cdot (T_{эм}p + 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Примеры составления передаточных функций двухфазных асинхронных двигателей при различной форме механических характеристик рассмотрены в литературе [27].

Технические данные некоторых типов двухфазных асинхронных двигателей с полым ротором приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5
Технические данные двухфазных асинхронных двигателей тип АДП

Тип двигателя	f, Гц	P ном, Вт	n ном, об/мин	n об, об/мин	Обмотка возбуждения						Обмотка управления						M mp · 10 ³ , Н·М	M mp · 10 ³ , Н·М	J mp · 10 ⁶ , кг·М ²
					U в, В	I ном в, А	P в, Вт	C в, мкФ	r в, Ом	U max, В	I yн, А	P y, Вт	r y, Ом	M ном · 10 ³ , Н·М	M mp · 10 ³ , Н·М	M mp · 10 ³ , Н·М			
АДП-120		2,4	4000	5000	110	0,3	28	0,25	-	110	0,18	-	8	-	5,9	9,8	0,29	-	
АДП-123	400	4,1	4000	5000	110	0,18	16	0,3	-	120	0,18	-	9	-	9,8	13,7	0,29	0,785	
АДП-123Б		8,9	6000	7000	110	0,27	26	0,5	-	110	0,22	-	12	-	14,2	16,7	0,29	0,785	
АДП-263		24	6000	8800	52	0,78	38	1,38	49±0,5	165	0,37	0,42	38	10±1,0	39	58	1,18	1,67	
АДП-263 А	500	27,8	6000	8600	36	1,38	42	3,9	3,5±0,35	270	0,51	0,56	42	28±2,0	44	64	1,18	1,86	
АДП-363		35	6000	8600	110	0,55	53	6,6	11,5±1,1	120	1,2	1,7	55	3±0,3	56	69	2,0	3,93	
АДП-363 А	500	46,4	6000	8600	36	2,0	65	6,6	1,22±0,12	240	0,65	0,92	68	11±1,0	73,5	83,4	2,0	4,83	
АДП-563 А		70,5	6000	8600	36	3,6	105	14,4	2,4±0,2	240	0,9	1,25	76	5±0,5	98	118	4,3	11,75	
АДП-262		9,5	1850	2650	110	0,23	23	2,5	190±15	125	0,58	0,6	26	38±3,5	49	88	0,8	1,67	
АДП-362	50	19	1950	2650	110	0,6	45	6,5	36±3,5	120	0,65	0,75	25	21±2,0	93	167	1,3	3,93	
АДП-562		41	2000	2650	110	0,88	88	11,0	17±1,5	160	0,73	1,15	35	13±1,3	196	343	2,2	12,75	

Пример. Определим для двигателя типа АДП-262 приближенную передаточную функцию по управляющему воздействию при $J_{н.пр} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$,

Из табл. 4.5 имеем следующие данные:

$$U_{у.ном} = 125 \text{ В}; \quad \omega_{д.ном} = \frac{1}{9,55} \cdot n_{ном} = 194 \text{ рад/сек};$$

$$M_{ном} = 49 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_{п} = 88 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$J = J_{д} + I_{н.пр} = 3,37 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Используя номинальные данные двигателя, определяем приближенные значения

$$k_{д} = 3,5 \frac{\text{рад}}{\text{В} \cdot \text{сек}}; T_{эм} = 0,017 \text{ с}.$$

Для найденных параметров получим

$$W_{д}(p) = \frac{3,5}{p \cdot (0,017p + 1)}.$$

4.5. Основные параметры и передаточная функция электромашиного усилителя

В автоматических системах электромашиные усилители (ЭМУ) до сих пор находят применение. Это объясняется тем, что они имеют высокие коэффициенты усиления по мощности и по напряжению, обладают сравнительно большим быстродействием и при наличии нескольких обмоток управления позволяют просто суммировать управляющие сигналы.

Промышленность выпускает ЭМУ продольного поля (с самовозбуждением) и поперечного поля. Двухступенчатые ЭМУ первого типа изготавливаются на большую мощность – до 200 кВт и более и используются в управляемом электроприводе. В системах автоматического управления и регулирования широко применяются ЭМУ с поперечным полем, изготавливаемые до 10 кВт.

Принципиальная электрическая схема ЭМУ поперечного поля (рис. 4.8) представляет схему двухкаскадного усилителя. Первый каскад усиления включает в себя обмотку управления ОУ и обмотку якоря с выходом на щетки поперечной оси 1–1. Магнитный поток Φ_y , создаваемый обмоткой управления, индуцирует в якоре э. д. с. поперечной оси $e_{к.з}$. За счет тока $i_{к.з}$ образуется поперечный поток реакции якоря $\Phi_{к.з}$ который используется для возбуждения второго каскада. Результирующая э. д. с. ЭМУ $e_{я.у}$ снимается со щеток продольной оси 2-2.

Для увеличения потока реакции якоря по поперечной оси воздушный зазор между якорем и статором делается равномерным, а дополнительные полюса по этой оси не ставятся. С этой же целью сопротивление якорной цепи по поперечной оси стремятся сделать минимальным, для чего щетки, расположенные на этой оси, обычно замыкают накоротко.

Для компенсации реакции якоря по продольной оси от тока якоря i_a на статоре по этой оси располагается распределенная обмотка компенсации ОК, намагничивающее действие которой регулируется с помощью шунтирующего сопротивления $R_{ш}$. Для уменьшения искрения между щетками и коллектором в цепи нагрузки по продольной оси машины располагаются также дополнительные полюса ДП.

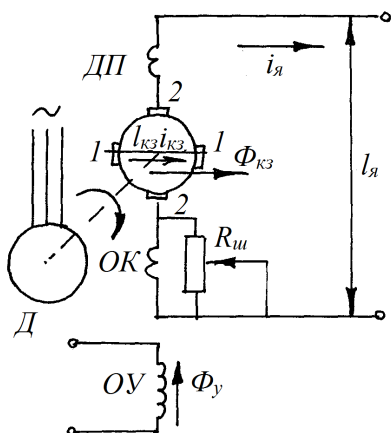


Рис. 4.8. Электромашинный усилитель с поперечным полем

В электромашинных усилителях серии ЭМУ–А, выпускаемых промышленностью, введены дополнительно специальные размагничивающие обмотки переменного тока и последовательная обмотка в поперечной цепи статора. Эти обмотки позволяют существенно уменьшить влияние гистерезиса магнитопровода и тока нагрузки на характеристики ЭМУ. Для примера на рис. 4.9 показаны характеристики холостого хода (а) и внешние характеристики (б) электромашинного усилителя типа ЭМУ–12А при управлении со стороны обмотки с числом витков $\omega_y - 2900$ [26].

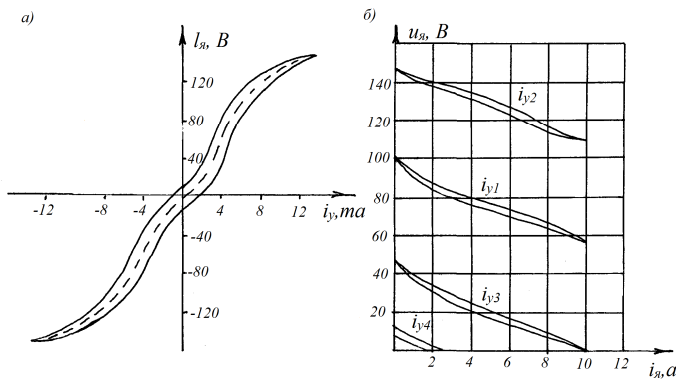


Рис. 4.9. Характеристики холостого хода и внешние характеристики электромашинного усилителя типа ЭМУ–12 А

В режиме холостого хода динамика ЭМУ при малых приращениях напряжения управления описывается передаточной функцией

$$W_{\text{эму}}(p) = \frac{E_{\text{я},y}(p)}{U_y(p)} = \frac{k_y}{(T_y p + 1) \cdot (T_{\text{к.з}} p + 1)}, \quad (4.58)$$

где k_y – коэффициент передачи ЭМУ по напряжению, определенный по характеристике х. х.; T_y и $T_{\text{к.з}}$ – постоянные времени, соответственно цепи управления и к. з. цепи, с.

При наличии нескольких обмоток управления постоянная времени цепи управления ЭМУ принимается равной сумме по-

стоянных времени всех обмоток, включенных на источники сигнала.

В общем случае подключение нагрузки к ЭМУ изменяет его характеристики за счет внутренних обратных связей. Однако, как показывает опыт, в нормально скомпенсированном ЭМУ, содержащем размагничивающие обмотки и последовательные стабилизирующие обмотки в поперечной цепи, изменения характеристик достаточно малы, что позволяет пренебречь влиянием внутренних обратных связей.

Наибольшее применение ЭМУ находят в системах управления двигателями постоянного тока, часто используются в качестве возбудителей генераторов. На рис. 4.10 показана идеализированная эквивалентная схема ЭМУ, нагруженного на якорную цепь двигателя постоянного тока. Уравнение для ЭМУ и двигателя, полученное из этой схемы, имеет вид

$$\begin{aligned} [(T_{\Sigma} \cdot p + 1) \cdot T'_{\text{эм}} p + 1] \cdot n_d(p) = \\ = \frac{\kappa_y \cdot \kappa_d}{(T_y p + 1) \cdot (T_{\kappa.3} p + 1)} \cdot U_y(p) - (T_{\Sigma} p + 1) \cdot \kappa'_s \cdot M_c(p), \end{aligned} \quad (4.59)$$

где $T_{\Sigma} = \frac{L_{\text{я.у}} + L_{\text{я.д}}}{r_{\text{я.у}} + r_{\text{я.д}}}$ – суммарная постоянная времени цепи

якоря ЭМУ и двигателя, с;

$$T'_{\text{эм}} = J \frac{r_{\text{я.у}} + r_{\text{я.д}}}{c_{\text{е.д}} + c_{\text{м.д}}} \quad \text{– электрохимическая постоянная}$$

времени двигателя при работе от ЭМУ, с;

$$\kappa'_B = \frac{r_{\text{я.у}} + r_{\text{я.д}}}{c_{\text{е.д}} + c_{\text{м.д}}} \quad \text{– коэффициент передачи двигателя по}$$

возмущающему воздействию при работе от ЭМУ, об/н · м · мин⁻¹.

Величину индуктивности цепи якоря ЭМУ $L_{\text{я.у}}$ можно найти по приближенной формуле (4.40), принимая $\beta \approx 0,25$.

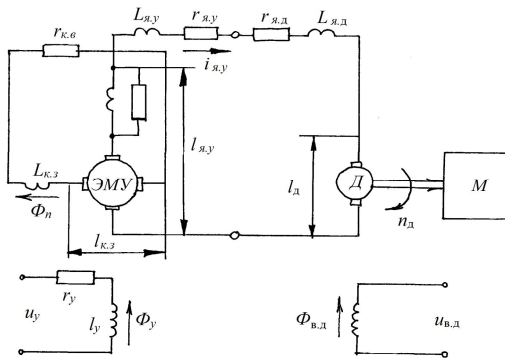


Рис. 4.10. Эквивалентная электрическая схема ЭМУ, нагруженного на двигатель постоянного тока

Если нагрузкой ЭМУ является цепь возбуждения генератора, то постоянная времени этой цепи достаточно точно определяется соотношением

$$T'_B \approx \frac{L_B}{r_B + r_{я.у}} = \frac{T_B}{1 + r_{я.у} / r_B} \quad (\text{где } T_B = L_B / r_B), \quad (4.60)$$

т. к. всегда $L_B \gg L_{я.у}$. При последовательном соединении ЭМУ и генератора постоянного тока передаточная функция

$$W(p) = \frac{E_{\Gamma}(p)}{U_y(p)} = \frac{\kappa_y \cdot k'_{\Gamma}}{(T_y p + 1) \cdot (T_{к.з} p + 1) \cdot (T'_B p + 1)} \quad (4.61)$$

где $k'_{\Gamma} = \frac{k_{\Gamma}}{1 + r_{я.у} / r_B}$, здесь k_r – коэффициент передачи генератора

при возбуждении от источника с нулевым сопротивлением.

В целях стабилизации параметров и уменьшения влияния нелинейностей и нагрузки электромашинный усилитель часто охватывают жесткой отрицательной обратной связью по напряжению, используя для этого одну из обмоток управления (рис. 4.11, а). Эквивалентная схема ЭМУ с жесткой обратной связью показана на рис. 4.11, б. Динамика такого ЭМУ описывается передаточной функцией

$$W'_{эм}(p) = \frac{\kappa'_{y1}}{T^2 p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot T p + 1}, \quad (4.62)$$

в которой $k'_{y1} = \frac{k_{y1}}{1 + k_{y1} \cdot k_{oc}}; \quad k_{oc} = \frac{w_{y2}}{w_{y1}} \cdot \frac{r_{y1}}{r_{y2} + R_{oc}};$

$$T = \sqrt{\frac{T_{y\Sigma} \cdot T_{\kappa 3}}{1 + \kappa_{y1} \cdot \kappa_{oc}}}; \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + \kappa_{y1} \cdot \kappa_{oc}}} \cdot \frac{T_{y\Sigma} + T_{\kappa 3}}{\sqrt{T_{y\Sigma} \cdot T_{\kappa 3}}}$$

$$T_{y\Sigma} = T_{y1} + T_{y2} = \left(1 + \frac{w_{y2}^2}{w_{y1}^2} \cdot \frac{r_{y1}}{r_{y2} + R_{oc}}\right) \cdot T_{y1}.$$

Применение в ЭМУ отрицательной обратной связи уменьшает его коэффициент усиления. Особенно сильное влияние обратная связь оказывает на величину коэффициента усиления по мощности:

$$k'_p = \frac{k_p}{(1 + k_{y1} \cdot k_{oc})^2}, \quad (4.63)$$

где k_p – коэффициент усиления по мощности при отсутствии обратной связи.

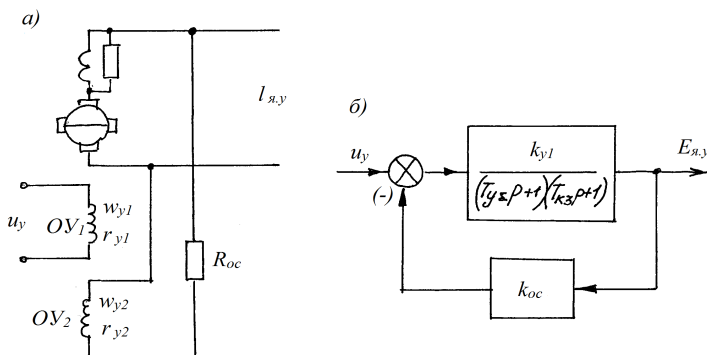


Рис. 4.11. Электромашинный усилитель с отрицательной обратной связью по напряжению

Технические данные (электромашиных усилителей серии ЭМУ–А приведены в табл. 4.6 [26, 28]. Параметры, характеризующие динамические свойства ЭМУ, являются ориентировочными. Эти параметры определены с помощью универсальных характеристик [28], которые связывают величины постоянной времени к. з. и удельной индуктивности обмоток управления с номинальной мощностью ЭМУ и скоростью вращения приводного двигателя.

Электромашиные усилители изготавливаются с различными комплектами обмоток управления (табл. 4.7). Высокоомные обмотки используются при управлении ЭМУ от электронных усилителей, а низкоомные – от полупроводниковых. Наличие в комплекте нескольких обмоток позволяет вводить на вход ЭМУ кроме управляющих также и корректирующие сигналы.

Благодаря стабилизирующей обмотке в поперечной цепи электромашиные усилители типа ЭМУ–А имеют смягченные внешние характеристики, достаточно близкие к линейным. Коэффициент передачи для этих усилителей в режиме холостого хода приближенно можно найти по номинальным данным:

$$k_y = \frac{e_{я.у}}{u_y} \approx \frac{m \cdot U_{вых.ном}}{\alpha \cdot r_y \cdot I_{y.ном}}, \quad (4.64)$$

где $\alpha=1,15$ – коэффициент, учитывающий нагрев обмотки управления; $m=1,35; 1,3; 1,25$ соответственно для усилителей 0,2–1,5 кВт; 2–5 кВт; 7–10 кВт.

Таблица 4.6
Технические данные электромагнитных усилителей серии ЭМУ-А

Тип усилителя	Номинальные данные на выходе			Обмотки управления		Т _{кз} , сек	Сопротивления обмоток (при 20°С), ом				Номинальные данные встроеного трехфазного приводного двигателя				
	U _{ввых} , В	P _{ввых} , кВт	I _{ввых} , А	W _γ	P _γ , Вт		$\frac{L_{\gamma}^2}{W_{\gamma}^2} \cdot 10^{-6}, \Gamma \mu$	Γ _к	Γ _{о.к}	Γ _{д.п}	R _{кз}	U, В	I, А	P, кВт	n, об/мин
ЭМУ-3А	115	0,2	1,75	от 2 до 3	0,5	2,8	7,4	6,2	2,17	2,67	127/220 220/380	2,75/1,6 1,6/0,92	0,47	3000	
ЭМУ-5А	115	0,5	4,35		0,5	4,5	1,65	1,3	0,43	0,43	2,3	127/220 220/380	5,5/3,2 3,2/1,85	0,94	3000
ЭМУ-12А	115	1,2	10,4	от 2 до 4	0,5	6,7	0,57	0,51	0,11	0,91	127/220 220/380	10,9/6,3 6,3/3,63	1,97	3000	
ЭМУ-25А	115	2,5	21,7		0,6	9,7	0,29	0,23	0,052	0,93	0,93	127/220 220/380	27/13,8 13,8/8,0	4,2	3000
ЭМУ-50А	230	2,5	10,8	от 2 до 4	0,6	9,7	1,16	0,92	0,21	3,35	127/220 220/380	24/13,8 13,8/8,0	4,2	3000	
	230	4,5	19,6		0,6	14	0,35	0,33	0,11	1,11	1,11	127/220 220/380	37/21,5 21,5/12,4	6,6	3000
ЭМУ-70А	230	7	30,5	от 2 до 4	0,6	17	0,26	0,24	0,047	1,07	127/220 220/380	55,5/32 32/18,5	10	3000	
ЭМУ-100А	230	10	43,5		0,6	19	0,14	0,12	0,026	0,52	0,52	127/220 220/380	74/43 43/24,7	13,5	3000

Данные комплектов обмоток управления электромашинных усилителей

Тип устройства	Номер комплекта	ОУ ₁				ОУ ₂				ОУ ₃				ОУ ₄			
		W _γ	Γ _γ , Ом	I _{γ,ном} , мА	I _{γ,ном} , мА	W _γ	Γ _γ , Ом	I _{γ,ном} , мА	I _{γ,ном} , мА	W _γ	Γ _γ , Ом	I _{γ,ном} , мА	I _{γ,ном} , мА	W _γ	Γ _γ , Ом	I _{γ,ном} , мА	I _{γ,ном} , мА
ЭМУ-3	—	2600	1000	20	120	2600	1000	20	120	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	3250	1000	20	120	3250	1000	20	120	—	—	—	—	—	—	—	—
ЭМУ-5	—	5300	3000	11,5	69	5300	3000	20	69	—	—	—	—	—	—	—	—
	12-2-А	2900	1030	22	190	2900	1030	22	190	—	—	—	—	—	—	—	—
ЭМУ-12	12-2-Б	4600	2200	14	130	4600	2200	14	130	—	—	—	—	—	—	—	—
	12-2-В	4800	2600	13	117	4800	2600	13	117	—	—	—	—	—	—	—	—
ЭМУ-12	12-3-Г	3000	1550	21	145	3000	1550	21	145	3000	1345	21	145	—	—	—	—
	12-3-Д	2350	1340	27	135	2350	1340	27	135	460	34,2	140	820	—	—	—	—
ЭМУ-12	12-3-Е	500	161	130	200	370	84	170	280	740	72	85	600	—	—	—	—
	12-3-Ж	900	155	70	350	900	155	70	350	1350	367	47	240	—	—	—	—
ЭМУ-25	12-4-З	675	184	94	240	900	155	70	350	675	184	94	240	900	155	70	350
	25-2-А	3400	985	22	200	3400	985	22	200	—	—	—	—	—	—	—	—
ЭМУ-25	25-2-Б	4360	1500	17	155	4360	1500	17	155	—	—	—	—	—	—	—	—
	25-2-В	6600	3310	11,5	105	6600	3310	11,5	105	—	—	—	—	—	—	—	—
ЭМУ-25	25-2-Г	8000	5000	9,5	85	8000	5000	9,5	85	—	—	—	—	—	—	—	—
	25-3-Д	2600	1065	18,5	150	2600	1065	28,5	150	2600	950	28,5	200	—	—	—	—
ЭМУ-25	24-4-Е	500	37,2	145	720	330	18,5	220	1100	330	15,6	220	1100	330	18,5	220	1100
	25-4-Ж	1300	340	56	225	330	18,5	220	1100	1300	340	56	225	1300	402	56	225
ЭМУ-25	25-4-З	3200	1820	23	115	330	18,5	220	1100	3200	1820	23	115	1200	792	61	120
	25-4-И	400	21,7	180	950	2800	1500	26	120	400	21,7	180	950	2800	1500	26	120
ЭМУ-25	25-4-К	5000	2920	14,5	85	500	131	145	300	5000	2920	14,5	85	1500	1000	49	115
	25-4-Л	1300	340	56	225	330	18,5	220	1100	330	15,6	220	1100	330	18,5	220	1100
ЭМУ-25	25-4-М	3600	1835	20	130	3600	2165	20	100	3600	1835	20	100	3600	2165	20	100
	25-4-Н	18	0,04	4000	2000	500	44,1	145	720	18	0,04	4000	20000	500	44,1	145	720

Продолжение таблицы 4.7

Тип усилителя	Номер компле-кта	ОУ ₁				ОУ ₂				ОУ ₃				ОУ ₄			
		W _у	R _г , Ом	I _{нагр} , мА	I _{доп} , мА	W _у	R _г , Ом	I _{нагр} , мА	I _{доп} , мА	W _у	R _г , Ом	I _{нагр} , мА	I _{доп} , мА	W _у	R _г , Ом	I _{нагр} , мА	I _{доп} , мА
ЭМУ-50	50-2-А	3420	1030	22	200	3420	1030	22	200	-	-	-	-	-	-	-	-
	50-2-Б	3720	1500	19,5	175	3720	1500	19,5	175	-	-	-	-	-	-	-	-
	50-2-В	6600	3920	11,5	105	6600	3920	11,5	105	-	-	-	-	-	-	-	-
	50-4-Г	380	24,8	190	950	220	9,15	330	1650	220	7,95	330	1650	220	9,15	330	1650
	50-4-Д	3200	2200	23	115	220	9,15	330	1000	3200	2200	23	115	1200	930	61	120
	50-4-Е	5000	3540	14,5	85	5000	3540	14,5	85	100	4,16	730	2000	500	44,7	145	720
	50-4-Ж	2800	1540	26	120	2800	1770	26	120	2800	1540	26	120	2800	1770	26	120
	50-4-З	1710	465	44	220	1710	535	44	220	1710	465	44	220	1710	535	44	220
	50-4-И	2750	1500	27	120	2300	1000	32	160	2750	1500	27	120	2300	1000	32	160
	50-4-К	2750	1500	27	120	1260	300	58	290	2750	1500	27	120	400	30	180	900
ЭМУ-70	50-4-Л	1300	410	56	225	330	21,6	220	1100	1300	410	56	225	1300	470	56	225
	50-4-М	380	24,8	190	950	15	0,04	4800	24000	15	0,04	4800	24000	15	0,04	4800	24000
	70-2-А	3600	1000	22	200	3600	1000	22	200	-	-	-	-	-	-	-	-
	70-2-Б	4000	1500	20	180	4000	1500	20	180	-	-	-	-	-	-	-	-
ЭМУ-100	70-4-Б	3600	1950	22	120	2000	800	40	180	3600	1950	22	120	330	24	240	960
	100-2-А	3200	1000	23	210	3200	1000	23	210	-	-	-	-	-	-	-	-
	100-4-Б	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800
	100-4-В	230	8,16	320	1600	3000	2100	25	120	230	8,16	320	1600	3000	2100	25	120
	100-4-Г	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800	460	32,6	160	800	460	37,2	160	800

Примечание. Сопротивления обмоток указаны при 20°C; длительно допустимый ток обозначен через $I_{до}$.

4.6. Основные параметры и передаточные функции магнитных усилителей

Магнитные усилители широко используются в системах автоматического управления. Достоинствами таких усилителей являются большое усиление по мощности, малая зависимость работы от изменений напряжения и частоты, простота суммирования сигналов на входе, возможность электрической изоляции рабочей цепи от цепи управления, высокая надежность.

К недостаткам магнитных усилителей следует отнести малое входное сопротивление и инерционность.

Целесообразно применять магнитные усилители при питании их от сети повышенной частоты (400–3000 Гц). В этом случае габариты и инерционность усилителей можно значительно уменьшить.

Качество магнитных усилителей оценивают по величине добротности

$$D = k_p / T_{\Sigma} , \quad (4.65)$$

где k_p – коэффициент усиления по мощности; T_{Σ} – постоянная времени магнитного усилителя со стороны цепи управления.

С целью увеличения добротности магнитные усилители, как правило, выполняют с положительной обратной связью по току нагрузки [29, 30].

На рис. 4.12 изображены электрические схемы одноконтурных магнитных усилителей с внешней (а) и внутренней (б) положительной обратной связью и выходом на переменном токе. В первой схеме обратная связь осуществляется с помощью специальной обмотки $w_{o,c}$ включенной в цепь нагрузки Z_H через выпрямительный мост. Обмотка w_{cm} служит для смещения характеристики усилителя, реагирующего на полярность управляющего сигнала u_y . Рабочие обмотки $w_{p,0}$ включены так, что наводимая э. д. с. в обмотке управления компенсируется.

Во второй схеме усилителя положительная обратная связь создается непосредственно рабочими обмотками $w_{p,0}$, в цепи которых включены диоды. При этом в отличие от первой схемы усилителя рабочие обмотки соединяются таким образом, что

они создают постоянную составляющую потока по отношению к обмотке управления. Магнитные усилители с внутренней обратной связью называются также *усилителями с самонасыщением* (см. рис. 4.12, б). Примем следующие обозначения: $w_y, w_{cm}, w_{o.c}, w_{p.o}$ – числа витков, соответственно обмоток управления, смещения, обратной связи и рабочей обмотки; $r_y, r_{cm}, r_{o.c}, r_{p.o}$ – сопротивления соответствующих обмоток, Ом; R_c – внутреннее сопротивление источника сигнала управления, Ом; R_{per} – подстроечное сопротивление для регулировки тока в обмотке смещения, Ом; R_ϕ – прямое сопротивление диода, Ом; $\eta = R_H / R_\Sigma$ – к. п. д. цепи нагрузки; R_Σ – суммарное сопротивление, учитывающее сопротивление обмоток и диодов, Ом; $U_\sim, u_y, U_{cm}$ – соответственно напряжение сети, управления и смещения, В; f – частота сети, Гц.

Приближенно передаточную функцию магнитного усилителя с положительной обратной связью при работе на активную нагрузку можно представить в виде [29, 30].

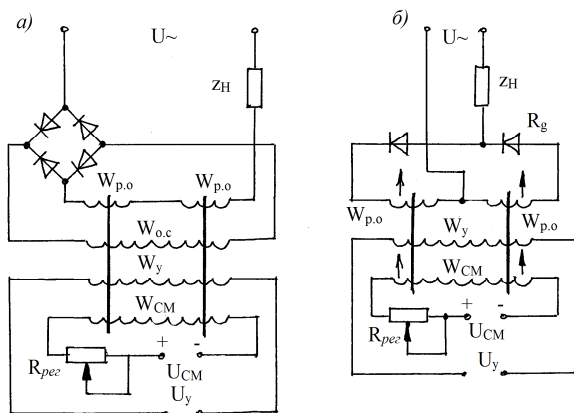


Рис. 4.12. Однотактные магнитные усилители с выходом на переменном токе

$$W_1(p) = \frac{I_{H.cp}(p)}{U_y(p)} = \frac{k_I}{r_y + R_c} \cdot \frac{e^{-pt_3}}{T_\Sigma p + 1}, \quad (4.66)$$

если за выходную величину принять ток нагрузки, или в виде

$$W_U(p) = \frac{U_{H.cp}(p)}{U_y(p)} = R_H \cdot W_1(p) = \frac{k_U}{r_y + R_c / r_y} \cdot \frac{e^{-pt_3}}{T_\Sigma p + 1}, \quad (4.67)$$

если за выходную величину взять напряжение на нагрузке.

В формулах (4.66, 4.67) использованы следующие обозначения:

$I_{H.cp}, U_{H.cp}$ – средние значения тока нагрузки (a) и напряжения (e);

$k_I = \frac{w_y}{w_{p.o}} \cdot \frac{1}{1 - k_{o.c}}$ – коэффициент усиления по току с учетом

обратной связи (где $k_{o.c}$ – коэффициент обратной связи; для усилителей с внешней обратной связью $k_{o.c} = w_{o.c} / w_{p.o}$, для усилителей с внутренней обратной связью $k_{o.c} = 0.95 \div 0.96$);

$k_U = k_I R_H / r_y$ – коэффициент усиления по напряжению;

t_3 – время запаздывания (для усилителей с внешней обратной связью $t_3 = 0$, для усилителей с внутренней обратной связью $t_3 = 1/(2f)$, сек).

Постоянная времени магнитного усилителя T_Σ равна сумме постоянных времени обмоток управления, смещения и обратной связи [29].

Для магнитного усилителя с внешней положительной обратной связью и несколькими обмотками управления

$$T_\Sigma = \frac{R_H}{4f \cdot \eta} \cdot \frac{1}{w_{p.o}^2 \cdot (1 - k_{o.c})} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\omega_{yi}^2}{r_{yi} + R_{ci}} + \frac{\omega_{cm}^2}{r_{cm} + R_{peg}} + \frac{\omega_{o.c}^2}{r_{o.c} + 2R_0 + 2r_{p.o} + R_H} \right). \quad (4.68)$$

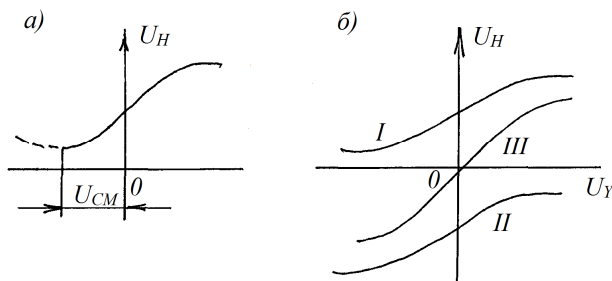


Рис. 4.13. Выходные характеристики магнитных усилителей

В магнитном усилителе с внутренней обратной связью обратная связь осуществляется через поток рабочих обмоток, работающих поочередно в каждый полупериод. Для такого усилителя постоянная времени

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2f \cdot \eta} \cdot \frac{R_H}{w_{p.o}^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{w_{yi}^2}{r_{yi} + R_{ci}} + \frac{w_{cm}^2}{r_{cm} + R_{pez}} \right). \quad (4.69)$$

Для магнитных усилителей с внутренней обратной связи характерно также чистое запаздывание $t_3 = 1/(2f)$, обусловленное тем, что процесс изменения индукции сердечника под действием сигнала управления происходит в один полупериод, а выдача сигнала в рабочей цепи (соответствующего уровню намагниченности сердечника) – в другой полупериод. При $t \ll T_{\Sigma}$ величиной t_3 пренебрегают.

Реверсивный выход получают с помощью двухтактных магнитных усилителей, которые составляют из двух однотактных усилителей.

Образование реверсивной выходной характеристики III при дифференциальном включении двух однотактных усилителей с характеристиками I и II показано на рис. 4.15, б. Примеры двухтактных магнитных усилителей, построенных по дифференциальной схеме с положительной обратной связью и выходом на переменном токе, приведены на рис. 4.14, а, б. Обратная связь в первом усилителе внешняя, а во втором – внутренняя. Расчет-

ные формулы (4.66) –(4.69) справедливы также и для двухтактных усилителей.

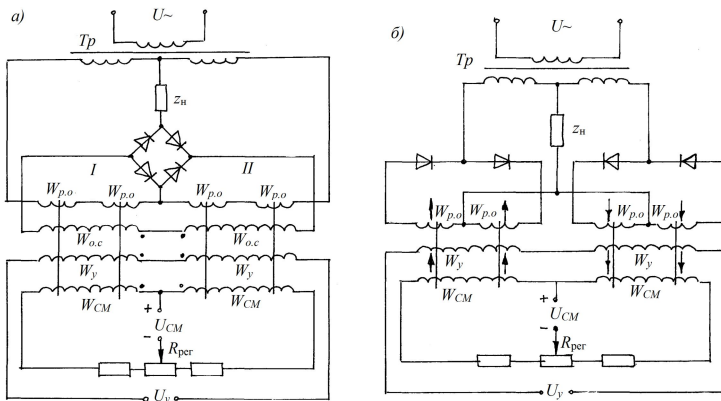


Рис. 4.14. Двухтактные магнитные усилители с выходом на переменном токе

Двухтактные магнитные усилители строят также по мостовой и трансформаторной схемам [29, 30]. Чтобы получить выход на постоянном токе, в выходную цепь следует ввести выпрямительные устройства. Магнитные усилители с двухтактным выходом на постоянном токе имеют низкий к. п. д. Для повышения его применяют специальные схемы усилителей. Однако без использования вспомогательных активных элементов, рассчитанных на работу при соответствующем токе нагрузки, к. п. д. таких усилителей практически не превышает 40–45 % [30].

Нагрузка магнитного усилителя может иметь индуктивный характер, например, при работе на асинхронный двигатель или на обмотку возбуждения генератора. В общем случае такая нагрузка приводит к изменению передаточной функции усилителя. В магнитном усилителе с выходом на переменном токе влияние индуктивной нагрузки практически исключается, если последнюю настроить в резонанс с частотой сети, подключив параллельно конденсатор. Такое включение магнитного усилителя используется при работе на асинхронный двигатель.

В случае выхода на постоянном токе при индуктивной нагрузке в магнитных усилителях с положительной обратной связью коэффициент обратной связи возрастает, что может привести к неустойчивой работе усилителя. Существуют способы устранения этого явления [30]. При использовании их передаточная функция магнитного усилителя с выходом на постоянном токе и индуктивной нагрузке

$$W_I(p) = \frac{I_{н.ср}(p)}{U_y(p)} = \frac{k_I}{(r_y + R_c) \cdot (T_{\Sigma} p + 1) \cdot (T_n p + 1)}, \quad (4.70)$$

где $T_n = L_H / R_{\Sigma}$ – постоянная времени цепи нагрузки, с (L_H – индуктивность нагрузки, Гн).

Наряду с рассмотренными усилителями, в системах автоматического управления применяются также малоинерционные магнитные усилители, называемые *быстродействующими*. Они основаны на использовании схемы с внутренней положительной обратной связью. [29, 30]. Такие усилители могут управляться как постоянным, так и переменным напряжением. Передаточная функция быстродействующего магнитного усилителя

$$W_U(p) = \frac{I_{н.ср}(p)}{U_n(p)} = k_U \cdot e^{-p\tau_3}, \quad (4.71)$$

где τ_3 – время запаздывания, составляющее половину периода

или один период напряжения питания; $k_U = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \frac{w_{p.o}}{w_y}$ – для

однополупериодной схемы; $k_U = \eta \cdot \frac{\omega_{p.o}}{\omega_y}$ – для двухполупери-

одной схемы.

Малое время реакции быстродействующих усилителей достигается в основном за счет уменьшения усиления по мощности и напряжению, что создает определенные ограничения в применении таких усилителей. Наиболее целесообразно использование быстродействующих магнитных усилителей в качестве

выходных каскадов усилительных устройств в сочетании с полупроводниковыми усилителями. Наиболее широко магнитные усилители применяются для управления асинхронными двигателями в маломощных следящих системах, работающих на переменном токе повышенной частоты (400–500 Гц).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Как составить линейное уравнение динамики генератора постоянного тока при $n = \text{const}$ по каналу: $U_b = U_r$?
2. Составьте уравнение генератора при работе на активную нагрузку.
3. Составьте уравнение генератора постоянного тока при работе на индуктивную нагрузку.
4. Составьте уравнение динамики двигателя постоянного тока (ДПТ) при $\Phi_b = \text{const}$ без учета реакции якоря по каналу $U_d - n$.
5. Уравнение динамики ДПТ при $M_c = f(n)$.
6. Составьте линейное уравнение двухфазного асинхронного двигателя о линеаризованной его механической характеристике по каналу: $U_y - \alpha_d$
7. Как определить постоянные двухфазного двигателя по его номинальным данным?
8. Напишите передаточную функцию ЭМУ при:
 - работе на обмотку генератора постоянного тока;
 - работе на якорную цепь двигателя постоянного тока.
9. Напишите передаточную функцию магнитного усилителя при работе на активную нагрузку по каналам $U_y - I_n$; $U_y - U_n$.
10. Передаточная функция магнитного усилителя при работе на индуктивную нагрузку (АД).

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Вводные замечания

Аналитические методы определения динамических характеристик регулируемых объектов не получили еще широкого распространения в силу их сложности. Методы экспериментального определения динамических характеристик объектов в настоящее время пока наиболее достоверные и легкодоступны для эксплуатационных работников промышленных предприятиях.

Так как экспериментальные методы относительно просты и позволяют сравнительно быстро получить математическое описание объекта, то они получили широкое распространение при исследовании свойств объектов, подлежащих автоматизации.

Теплоэнергетические объекты характеризуются непрерывными технологическими процессами и представляют собой устойчивые инерционные динамические системы. С точки зрения динамики их можно рассматривать как фильтры инфранизких частот с полосой пропускания от $\omega=0$ до $\omega=0,1\div 0,2 \text{ рад/с}$.

Указанные объекты, как правило, достаточно стационарны в интервале времени, значительно превышающем время проведения эксперимента.

Экспериментальное исследование статических и динамических свойств теплоэнергетических объектов делят на три этапа:

- планирование и подготовка эксперимента (изучение объекта, выбор и монтаж аппаратуры, определение методов исследования и порядок проведения опытов);
- проведение эксперимента;
- обработка результатов опытов (сглаживание и усреднение найденных характеристик) с целью подготовки надежных данных для последующего преобразования полученных графиков (табличных данных) к виду, удобному для дальнейшего расчета системы автоматического регулирования.

Экспериментальное исследование динамических свойств объектов может быть «активным», когда экспериментатор сам выбирает вид возмущающего воздействия и осуществляет его, и «пассивными», когда экспериментатор лишь регистрирует реакции объекта на случайные (независящие от экспериментатора) возмущения, а затем на основе статистической обработки получает необходимые данные о свойствах объекта.

«Активное» экспериментальное исследование свойств объекта проводится с помощью аperiodических воздействий (определение переходных функций) или периодических воздействий (определение частотных характеристик объекта).

В обоих случаях методика эксперимента имеет много общего, аппаратура за некоторым исключением одинакова, планирование и подготовка объекта для эксперимента идентичны.

Ниже кратко рассмотрены основы экспериментального определения характеристик регулируемых объектов.

5.2. Планирование и подготовка эксперимента

Подготовку к проведению эксперимента обычно начинают с изучения технологического процесса, особенностей объекта при его эксплуатации, наблюдения за действием эксплуатационного персонала (операторов), анализа режимных карт и т. д., выбора схемы экспериментальной установки.

Простейшая схема экспериментальной установки при аperiodических воздействиях на объект приведена на рис. 5.1, *а*.

С помощью регулирующего органа производят возмущающие воздействия. Для контроля регулируемой величины устанавливают соответствующий датчик, с помощью указывающего прибора отмечают отклонения регулируемой величины через определенные отрезки времени. По полученным данным строят временную характеристику.

Более совершенной является схема экспериментальной установки для снятия переходных процессов, изображенная на рис. 5.1, *б*. Здесь фиксация отклонений регулируемой величины осуществляется с помощью быстродействующего регистратора,

на ленте которого записываются также возмущающие воздействия, измеряемые специальным прибором.

Схема установки для снятия частотных характеристик приведена на рис. 5.2. Здесь предусмотрен специальный генератор синусоидальных колебаний, воздействующий через сервомотор непосредственно на регулирующий орган. На рис. 5.3, *а* приведена схема экспериментальной установки для определения частотных характеристик в замкнутой системе автоматического регулирования. Этот метод основан на генерации гармонических колебаний в системе автоматического регулирования, состоящей из исследуемого объекта и регулятора, и благодаря этому лишен дефектов, свойственных методам, которые основаны на возбуждении колебаний в объекте при отключенном регуляторе. При таком способе проведения эксперимента обеспечивается сохранение заданного среднего значения регулируемой величины.

Сущность излагаемого метода определения амплитудно-фазовых характеристик состоит в следующем. На вход регулятора, подключенного к исследуемому объекту, поступают синусоидальные колебания от специального возбудителя-генератора (рис.5.3, *а*). При проведении опыта регулятор следует настроить так, чтобы затухание переходных процессов в системе регулирования происходило достаточно интенсивно. Эта настройка подбирается опытным путем, т. к. к моменту начала эксперимента нет данных о динамических свойствах объекта. Таким образом, регулятор реагирует на отклонение регулируемой величины и на синусоидальный сигнал $\sigma_{\text{гарм}}$, от генератора. При отсутствии сигнала от генератора регулятор стремится поддерживать регулируемую величину около заданного постоянного значения. Функция генератора синусоидальных колебаний, подключенного к регулятору по существу сводится к периодическому изменению задания регулятору по закону синусоидальных колебаний. Таким образом, регулируемая величина «следит» за гармоническим сигналом $\sigma_{\text{гарм}}$.

Здесь важно заметить, что положение оси колебаний регулируемой величины не зависит от характеристики регулирующего органа.

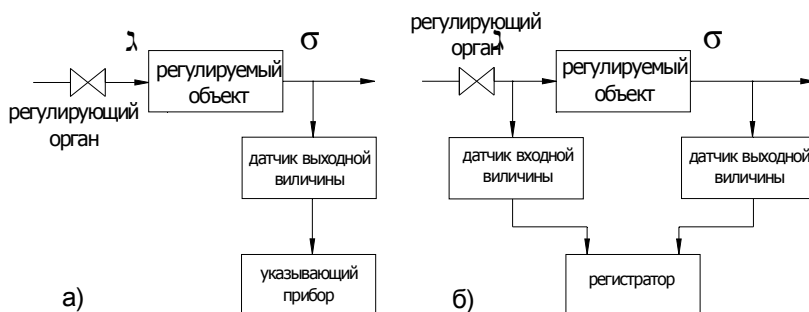


Рис. 5.1. Простейшие схемы экспериментальных установок для определения характеристик объектов

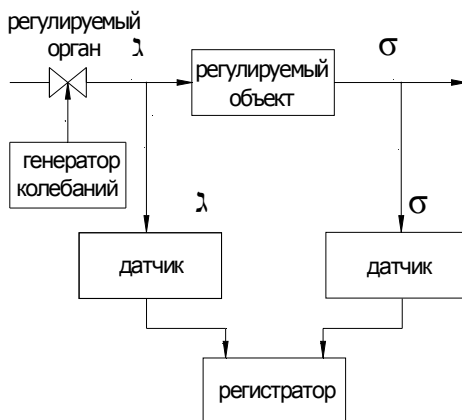


Рис. 5.2. Схема экспериментальной установки для определения динамических свойств объекта с использованием генератора колебаний

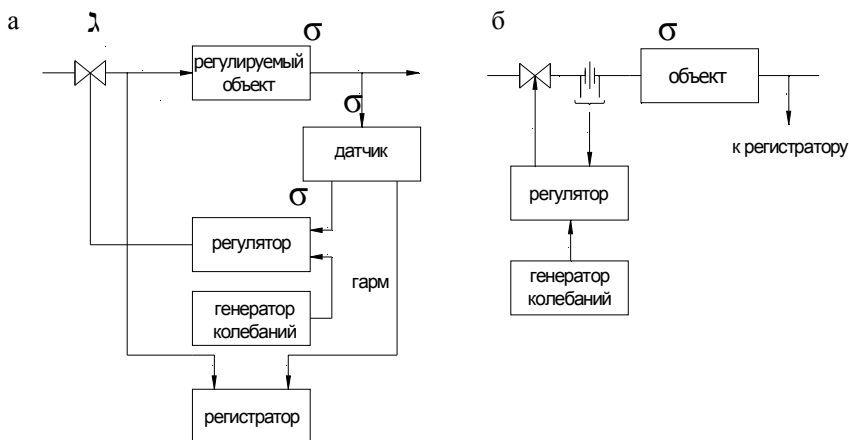


Рис. 5.3. Схемы экспериментальных установок для определения амплитудно-фазовых характеристик в замкнутой системе автоматического регулирования

Возбуждение синусоидальных входных колебаний в объекте может также производиться следующим образом. Регулятор воздействует на регулирующий орган объекта, получая сигналы по расходу вещества (или энергии) и от генератора синусоидальных колебаний (рис. 5.3, б). При этом также не существенна характеристика регулирующего органа. Требования к настройке регулятора аналогичны требованиям, предъявляемым при снятии характеристик по схеме рис. 5.3, а.

Экспериментальное определение частотных характеристик объекта требует дополнительной аппаратуры и большей затраты труда, чем снятие кривых разгона. Однако сведения о динамических свойствах объекта при этом получаются более достоверными.

На рис. 5.4 для иллюстрации приведена копия диаграммы регистрирующего водомера котла во время проведения одного из опытов. Колебания регулируемой величины имеют гармоническую (или близкую к ней) форму. Как показал опыт определения частотных характеристик котельных агрегатов,

предлагаемая методика позволяет получать данные о динамических свойствах объектов с высокой степенью точности.

Приборы для измерения отклонений регулируемых величин и возмущений должны соответствовать природе измеряемых физических величин. В принципе, измерительные приборы могут обладать динамическими характеристиками, которые должны быть, строго говоря, заранее известны, т. к., регистрируя выходную величину с помощью измерительного прибора, определяют характеристику не объекта, а системы: объект – измерительный прибор.

Это положение хорошо иллюстрируется кривыми разгона, полученными при измерении отклонения уровня воды в сосуде с помощью различных уровнемеров, например, сильфонного и ртутного. Первый является относительно малоинерционным, второй, наоборот, – инерционным. На рис. 5.5 представлены кривые отклонения уровня воды, зафиксированные непосредственно по водомерному стеклу (1), с помощью сильфонного (2) и ртутного (3) уровнемеров. В каждый данный момент показания уровнемеров отличаются друг от друга и от истинного состояния уровня. Эти различия в показаниях тем больше, чем большей инерционностью (большей постоянной времени) обладает прибор.

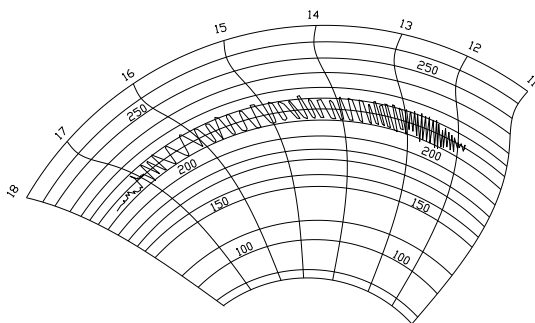


Рис. 5.4. Копия диаграммы водомера при определении частотных характеристик котла

Итак, с точки зрения оценки динамических свойств объекта, характеристика измерительного прибора не важна, но она должна быть известна. С точки же зрения автоматического регулирования, желательно иметь измерительный орган регулятора наименее инерционный.

При наличии на объекте установленного регулятора целесообразно снимать характеристику с помощью измерительного органа самого регулятора; тогда знание динамических свойств измерительного органа не является необходимым для расчета настройки регулятора. В этом случае принято измерительную систему относить не к регулятору, а к объекту, потому что ее свойства учитываются экспериментально снятой характеристикой объекта.

В настоящее время сведения о динамических свойствах серийных измерительных приборов являются, к сожалению, далеко не полными.

Большое значение при снятии динамических характеристик приобретают так называемые преобразователи – компенсационные приставки, предназначенные для преобразования сигналов датчиков в унифицированный сигнал: регистраторы, генераторы гармонических колебаний и вспомогательная аппаратура. В заключение необходимо обратить внимание на характеристики регулирующих органов, с помощью которых проводятся возмущающие воздействия.

Регулирующие органы являются весьма ответственной частью системы регулирования. Среда (жидкость, газ, пар и др.), протекающая через регулирующий орган (клапан, вентиль, задвижка, шибер, заслонка и др.), является тем регулирующим агентом, которым осуществляются воздействия на объект. Обычно регулирующий орган уже установлен на объекте и поэтому нет необходимости в его выборе и расчете, однако перед экспериментом следует проверить расходную характеристику регулирующего органа.

Снятие характеристики рекомендуется проводить следующим образом. Устанавливают регулирующий орган в положение «закрыто» и измеряют «начальный пропуск». Затем перемещают регулирующий орган на 10–15 % хода, отсчитывая по шкале ука-

зателя положение штока, и фиксируют показания соответствующего прибора, измеряющего расход среды через регулирующий орган. Таким образом, через каждые 10–15 % хода фиксируют расход и получают данные для расходной характеристики регулирующего органа. Затем непрерывным движением перемещают регулирующий орган обратно в положение «закрыто», одновременно замечая время сервомотора T_c (время, в течение которого регулирующий орган пройдет полный диапазон регулирования). Далее строят кривую изменения воздействия регулирующего органа в зависимости от его положения в процентах и от времени перемещения регулирующего органа (рис. 5.6).

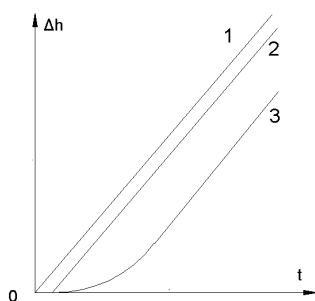


Рис. 5.5. Кривые разгона, зарегистрированные разными измерительными приборами

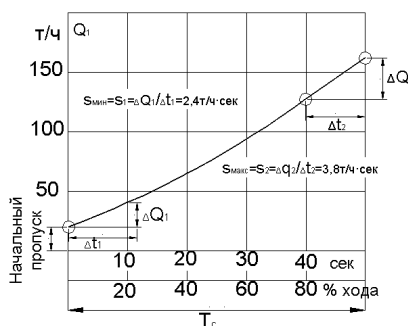


Рис. 5.6. Примерная характеристика питательного клапана

Характеристика регулирующего органа, как правило, должна быть ближе к прямолинейной. Желательно, чтобы в пределах диапазона регулирования скорость регулирования изменялась не более чем в два раза. Для пояснения сказанного на рис. 5.6 показано определение скорости регулирования на любом участке диапазона путем деления отрезков:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = s,$$

Если изменение скорости регулирования в пределах диапазона превышает двукратное, необходимо исправить характеристику профилированием регулирующего органа или изменением его сочленения с сервомотором.

Зная характеристику регулирующего органа, можно оценивать величины возмущения λ не по показаниям измерительного прибора (если он ранее не был установлен на объекте), а по показаниям хода регулирующего органа.

Перед возмущением объекта регулируемая величина должна быть по возможности стабилизирована относительно номинального значения. Снятие характеристики непосредственно после каких-либо эксплуатационных манипуляций приводит к неверным результатам. Если это условие не выполняется, то неизбежно искажение характеристики объекта. В самом деле, если перед возмущением регулируемая величина имела тенденцию к увеличению, то в результате созданного возмущения, которое, например, также должно вызвать увеличение регулируемой величины, последняя будет, очевидно, изменяться с большей скоростью и отклонится на большее значение.

Величина возмущения должна быть достаточно большой, чтобы полученная характеристика отличалась от случайных колебаний регулируемой величины в эксплуатационном режиме. Однако может оказаться, что при больших значениях возмущений отклонение регулируемой величины превысит допустимые технологическими условиями пределы, что может быть опасно с эксплуатационной точки зрения.

Для получения более полных данных о динамических свойствах объекта опыты следует проводить при нескольких значениях нагрузки объекта (например, при минимальной, номинальной и максимальной).

При определении настройки регулятора возмущение объекта должно проводиться тем регулирующим органом, на который будет воздействовать автоматический регулятор («основное» возмущение). Если же в дальнейшем потребуются выяснить характер переходных процессов в системе автоматического регулирования при других возмущениях, то следует снять также характеристики, полученные в результате этих возмущений (их называют «внешними» в отличие от «основного» возмущения).

5.3. Экспериментальное определение временных характеристик регулируемых объектов

5.3.1. Снятие кривой разгона и определение динамических параметров регулируемого объекта

Необходимо определить экспериментальным путем кривую разгона пароохладителя поверхностного типа (рис. 5.7) и найти динамические параметры объекта: постоянную времени T_a , коэффициент усиления k и время запаздывания τ для последующего их использования при расчете системы регулирования.

Перегретый пар поступает в охладитель 1, проходит по змеевику 2, частично погруженному в воду, и подается к потребителю. Охлаждающая вода подводится через регулирующий клапан 3 и выпаривается в охладителе, превращаясь во вторичный насыщенный пар.

Но м и н а л ь н ы е п а р а м е т р ы: паровая нагрузка $D_n = 100$ т/ч; температура уходящего пара (регулируемая величина) $t''_n = 400$ °С; расход охлаждающей воды $D_v = 5$ т/ч;

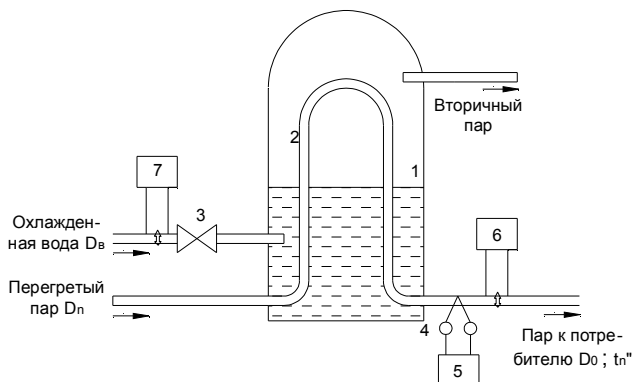


Рис. 5.7. Схема поверхностного пароохладителя

Регулируемая температура измеряется при помощи термопары 4 и милливольтметра 5. Для измерения расходов пара и

воды используются соответствующие контрольно-измерительные приборы: паромер 6 и водомер 7.

Снятие характеристик разгона производят при двух видах возмущений: охлаждающей водой и паровой нагрузкой. Поскольку воздействие регулятора предполагается осуществить на клапан, измеряющий подачу охлаждающей воды, первый вид воздействия будут основным, а второй – внешним.

При номинальном значении температуры пара резко изменяют подачу охлаждающей воды (в данном случае $\lambda = 2$ т/ч.). Проводят запись изменения показаний милливольтметра во времени. На основании полученных результатов строят кривую разгона при возмущении водой.

Аналогичный опыт производят, резко изменяя паровую нагрузку охладителя при неизменной подаче охлаждающей воды. Кривые разгона приведены на рис. 5.8. Обработывая их так, как это показано на графиках, определяют упрощенные динамические параметры регулируемого объекта. Результаты сводят в табл. 5.1.

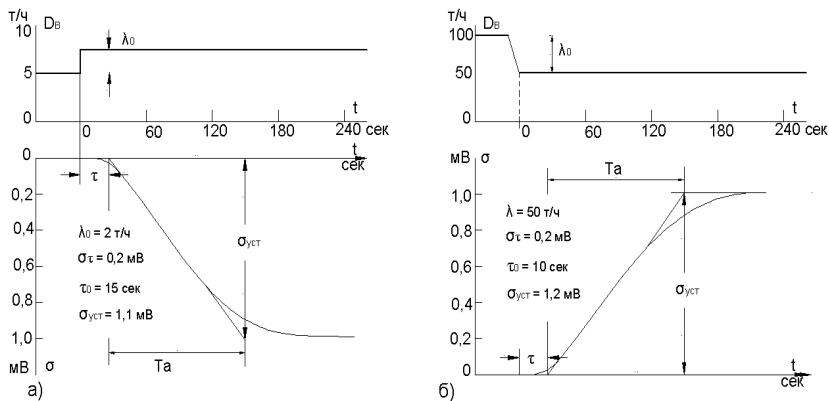


Рис. 5.8. Кривые разгона (а – при возмущении расходом охлаждающей воды; б – при возмущении расходом пара)

Таблица 5.1

Результаты эксперимента

Характер возмущения	Величина возмущения λ_0 м/ч	Запаздывание τ , с	Постоянная времени T_a , с	Коэффициент усиления	Отношение
				$k = \frac{a}{\lambda_0}$, $\frac{M_B}{m / \text{час}}$	$\frac{T}{T_{\Sigma}}$
Возмущения водой	2	1.5	71	0,475	0,21
Возмущение паровой нагрузкой	50	10	59	0,027	0,108

5.3.2. Снятие импульсной характеристики и определение динамических параметров объекта

Определим экспериментально импульсную характеристику и динамические параметры участка регулирования температуры прамоточного котла по экспериментально снятой импульсной характеристике (рис. 5.9). Регулируемой величиной σ является температура пара за котлом. Возмущения создается уменьшением и последующим увеличением через 40 с подачи воды в пароохладитель на 10 %, т. е. $\lambda_{\text{макс}}=10\%$ и $F_{\lambda}=10 \cdot 40 = 400\% \cdot \text{с}$. Регулируемая величина по окончании опыта не вернулась точно к своему первоначальному значению, поэтому определение $\tau, \sigma_{\text{макс.имп}}$ и F_{σ} по экспериментальной характеристике производят так, как это было рекомендовано в [3].

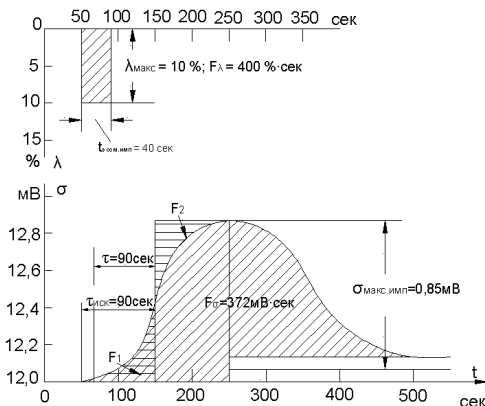


Рис. 5.9. К примеру определения импульсной характеристики

В результате получают:

$$\tau_{иск} = 110 \text{ с}; \quad \sigma_{\text{макс.имп}} = 0,85 \text{ мВ};$$

$$F_{\lambda} = 400 \text{ \%} \cdot \text{с}; \quad F_{\sigma} = 372 \text{ мВ} \cdot \text{с}.$$

Пользуясь вышеприведенными формулами, определяют:

5.4. Экспериментальное определение частотных характеристик регулируемых объектов

5.4.1. Определение амплитудно-фазовой характеристики объекта с помощью генератора колебаний, воздействующего непосредственно на регулирующий орган

Пусть надо определить амплитудно-фазовую характеристику объекта, схематически изображенного на рис. 5.10. Измерение отклонения уровня воды в резервуаре производится по водомерному стеклу. Источником возмущения служит дроссельный клапан, с которым связан генератор синусоидальных колебаний. Электродвигатель через редуктор 2 непрерывно вращает кривошип 3. Ползун 4, скользящий вдоль прорези траверсы 5,

шарнирно соединен с кривошипом 3 так, что при равномерном вращении последнего траверса 5 вместе с жестко соединенной с ней тягой 6 будет совершать синусоидальные колебания в плоскости чертежа:

$$\alpha = r \sin \alpha = r \sin \omega t ,$$

где r – длина кривошипа; α – угол между горизонталью и кривошипом.

Тяга 6 шарнирно связана со штоком 7 дроссельного клапана. Следовательно, регулирующий орган будет изменять приток воды в резервуар также по синусоидальному закону. Частота колебаний может быть изменена путем смены шестерен в редукторе, а амплитуда – изменением длины кривошипа 3.

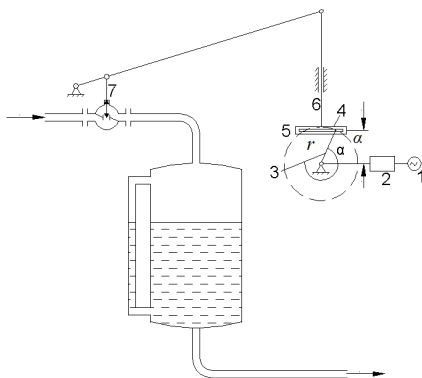


Рис. 5.10. Схема установки к примеру определения частотной характеристики объекта

Пусть объект находится в состоянии равновесия ($\sigma = 0$), когда поступление и расход воды составляют 20 т/ч. Длина кривошипа установлена так, чтобы при верхнем крайнем положении траверсы 5 регулирующий орган (клапан) пропускал 30 т/ч, а при нижнем 10 т/ч воды. Тогда $\lambda_0 = 10$ т/ч.

Опыты проведены при значениях частот $\omega_1 = 0,001$ 1/с; $\omega_2 = 0,002$ 1/с; $\omega_3 = 0,004$ 1/с; $\omega_4 = 0,008$ 1/с.

Результаты опытов представлены в виде кривых изменения во время возмущающего воздействия λ и регулируемой величины σ на рис. 5.11. Как видно из рис. 5.11, *a* при малой частоте (0,001 1/с) изменение уровня следует за изменением поступления с отставанием $\Delta t_1 = 460$ с или $\varphi_1 = 26^\circ$, что составляет всего 7 % периода колебаний $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 6\,280$ с.

Таблица 5.2

Данные эксперимента

№ опыта	Частота ω , 1/сек	$A(\omega) = \sigma_0 / \lambda$ 0, $\frac{см}{m/ч}$	Отставание $\Delta t, сек$	$\varphi(\omega) = \frac{360}{T} \cdot \Delta t$, град.
1	0,001	4,4	460	26
2	0,002	3,6	395	45
3	0,004	2,2	277	63
4	0,008	1,2	166	76

По мере увеличения частоты колебаний относительное отставание увеличивается (рис. 5.11, *б*, *в*) и при частоте $\omega_4 = 0,008$ 1/с (рис. 5.11, *г*) составляет 21 % периода колебаний. Иными словами, сдвиг фаз достигает почти четверти периода ($\varphi = 76^\circ$).

Одновременно с увеличением сдвига фаз по мере роста частоты уменьшаются амплитуды колебаний уровня, несмотря на постоянство амплитуды колебаний регулирующего органа. Если при частоте $\omega_1 = 0,001$ 1/с амплитуда регулируемой величины $(\sigma_0)_1 = 44$ см, то при частоте: $\omega_4 = 0,008$ 1/с $(\sigma_0)_4 = 12$ см.

Результаты опытов сведены в табл. 5.2.

Амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ представлена на рис. 5.12, *a*. Ее значение при $\omega = 0$, $A(\omega_0) = \sigma_{уст.} / \lambda_0 = k$ получено в результате снятия кривой разгона:

$$A(\omega_0) = \frac{\sigma_{уст.}}{\lambda_0} = \frac{50}{10} = 5 \text{ см} \cdot \text{м} / \text{ч}.$$

Из характера зависимости $A(\omega)$ на рис. 5.12, а видно, что $A(\omega)$ представляет собой монотонно убывающую функцию частоты, стремящуюся к нулю с ростом ω .

Фазо-частотная характеристика $\varphi(\omega)$, изображенная на рис. 5.12, б, иллюстрирует непрерывное увеличение угла отставания φ колебаний регулируемой величины σ от колебаний возмущающего воздействия λ с ростом ω .

На рис. 5.12, в представлена амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ рассмотренного объекта.

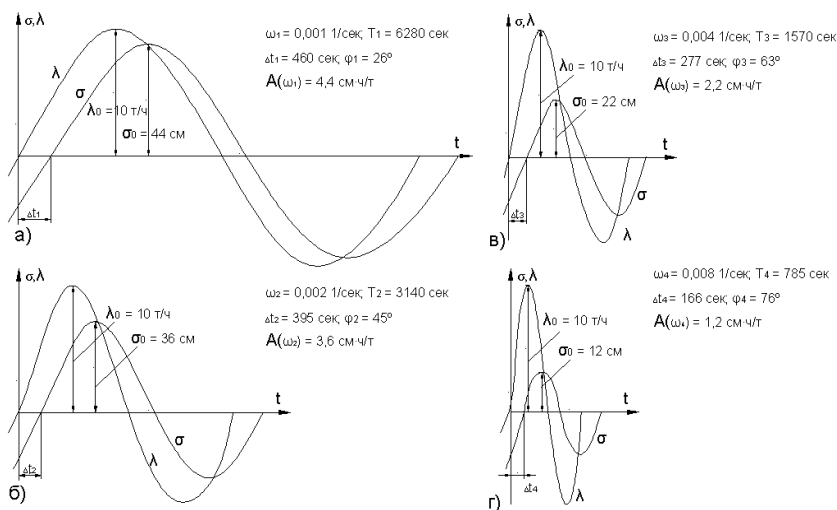


Рис. 5.11. Кривые изменения возмущающего воздействия и регулируемой величины при разных частотах колебаний

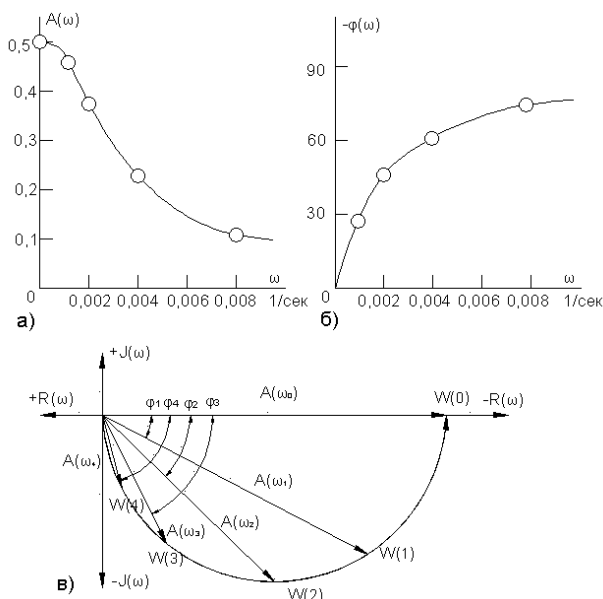


Рис. 5.12. Амплитудно-частотная (а), фазочастотная (б) и амплитудно-фазовая (в) характеристики объекта

5.4.2. Определение амплитудно-фазовой характеристики объекта с помощью генератора при возбуждении гармонических колебаний в замкнутой системе регулирования

Схема экспериментальной установки для определения динамических свойств пароперегревателя прямоточного котла высокого давления в замкнутой системе регулирования с использованием генератора синусоидальных колебаний приведена на рис. 5.13.

Пар из котла проходит через первую и вторую ступени пароперегревателя и далее поступает к турбинам.

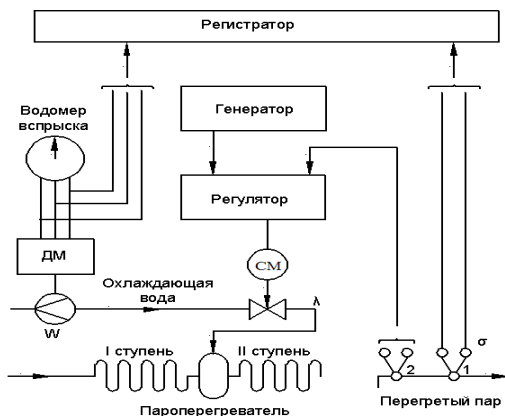


Рис. 5.13. Схема эксперимента при определении частотных характеристик пароперегревателя прямоточного котла

Для поддержания заданной температуры пара на выходе из второй ступени в рассечку перегревателя после первой ступени включен вспрыскивающий пароохладитель. Изменением количества охлаждающей воды поддерживают требуемую температуру перегретого пара, измерение которой проводится термопарой 2. Термо-э.д.с. термопары 1 поступает на электронный потенциометр для регистрации регулируемой величины. Термопара является датчиком регулятора, воздействующего через сервомотор CM на регулирующий клапан в линии охлаждающей воды.

Расход охлаждающей воды измеряется дифманометром ДМ, напряжение от которого через выпрямительную приставку также поступает на потенциометр. Генератор включен в электрическую цепь задатчика регулятора температуры.

Выбор амплитуды колебаний регулируемой величины надо проводить из следующих соображений. Если в условиях нормальной эксплуатации испытуемого объекта изменения регулируемой величины укладываются в некоторую зону $\Delta_{\text{эксpl}}$, а зона отклонений, допустимых по технологическим условиям, составляет $\Delta_{\text{доп}}$, то амплитуду колебаний регулируемой величины следует выбрать равной

$$\sigma_{\text{макс}} = (\Delta_{\text{доп}} - \Delta_{\text{эксpl}}) / 2.$$

При этом может быть гарантирован нормальный технологический режим при любой длительности эксперимента.

Во время проведения опыта следует добиваться установившихся колебаний возмущающего воздействия λ и регулируемой величины σ . Если на протяжении 2–3 периодов максимальные отклонения λ и σ , их форма и промежуток времени между максимумами одинаковы, то такие колебания можно считать установившимися. Результаты эксперимента в виде графиков амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик представлены на рис. 5.14, а, б.

При снятии амплитудно-фазовых характеристик в некоторых случаях не удастся получить точно синусоидальных колебаний входной или выходной величины. Искажение может происходить, в частности, из-за нелинейности характеристик регулирующего органа. Однако это искажение формы колебаний не нарушает повторяемости ее от периода к периоду. Деформация колебаний может быть также вызвана влиянием на регулируемую величину небольших посторонних возмущений, и тогда форма выходных колебаний повторяется не строго.

Во всех этих случаях следует выделить основную гармонику из выходных колебаний. В первом случае достаточно ограничиться обработкой одного установившегося периода колебаний.

Во втором случае (при наличии искажений от посторонних возмущений случайного характера) надо обработать несколько периодов колебаний данной частоты и по ним найти усредненные значения $A(\omega_n)$ и $\varphi(\omega_n)$.

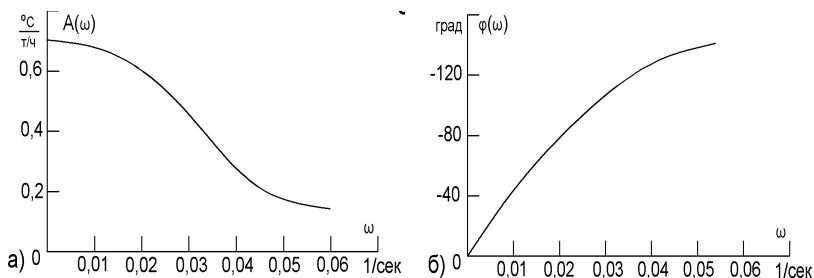


Рис. 5.14. Амплитудно- и фазочастотные характеристики пароперегревателя

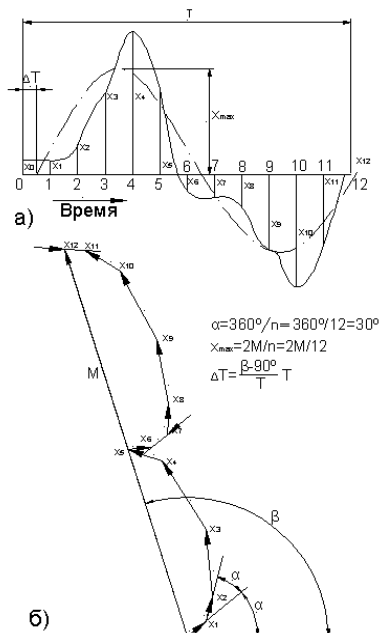


Рис. 5.15. Графический метод выделения первой гармоники

Выделение первой гармоники проводят следующим образом. Период T разбивают на четное число n равных частей (обычно 12) и измеряют ординаты разбиения $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, соответствующие точкам t_0, t_1, t_2 (рис. 5.15, а). Искомая гармоника определяется уравнением $x(t) = a_0 + a_1 \cos 2\pi t/T + b_1 \sin 2\pi t/T$,

где
$$a_0 = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{k=11} x_k;$$

$$a_1 = \frac{1}{6} [x_{11} - x_5 + 0,5(x_1 + x_9 - x_3 - x_7) + 0,866(x_0 + x_{10} - x_4 - x_6)];$$

$$b_1 = \frac{1}{6} [x_2 - x_8 + 0,5(x_0 + x_4 - x_6 - x_{10}) + 0,866(x_1 + x_3 + x_7 - x_9)];$$

Рекомендуется также следующий простой графический прием для выделения первой гармоники. Ординаты разбиения x_1, x_2, x_3 рассматривают как векторы с модулями x_1, x_2, x_3 и аргументами $a_1=360^\circ/n; a_2=2a; a_3=3a; \dots; a_n=na$. Затем ищут их векторную сумму. Для этого откладывают вначале отрезок x_1 рис. 5.15, б, повернув его против часовой стрелки на угол a по отношению к горизонтали. К нему пристраивают отрезок x_2 , повернутый по отношению к предыдущему отрезку против часовой стрелки на тот же угол a . Такое построение выполняют вплоть до отрезка x_n . При перемене знака ординаты угол изменяют на 180° . Замыкающий вектор $\overline{M}$ определяет амплитуду искомой гармоники. Амплитуда равна

$$x_{\text{макс.}} = \frac{2 \overline{M}}{n},$$

где $\overline{M}$ – модуль замыкающего вектора.

Сдвиг между началом отсчета времени и началом основной гармоники равен

$$\Delta T = \frac{\beta - 90}{360} T,$$

где β – угол между замыкающим вектором и горизонталью.

Если $\Delta T > 0$, то это означает, что начало основной гармоники расположено правее начала отсчета времени, а если $\Delta T < 0$, то влево начала отсчета времени.

5.4.3. Определение частотных характеристик объекта при периодических возмущениях трапецидальной формы

При экспериментальном определении частотных характеристик объекта и промышленных условиях не всегда имеется возможность создать возмущающие воздействия синусоидальной формы, т. к. для этого требуется возбудитель гармонических колебаний. Можно определить характеристики объекта, создавая возмущения прямоугольной или трапецидальной формы (рис. 5.16).

Этот метод не требует специальной профилировки регулирующих органов, т. к. характеристики последних почти не влияют на результаты эксперимента.

Возмущения прямоугольной формы (рис. 5.16, а) могут быть созданы достаточно быстрыми перемещениями регулирующего органа через равные промежутки времени поочередно в одну и другую сторону от положения равновесия на величину λ_0 . Для удобства рекомендуется установить на регулирующем органе специальные ограничители амплитуды, что облегчает проведение эксперимента.

Возмущения трапецеидальной формы (рис. 5.16, б) обычно создают с помощью системы дистанционного управления. В этом случае сервомотор перемещает регулирующий орган с заранее известной скоростью. Периодическую функцию типа равнобокой трапеции или прямоугольника можно разложить в ряд Фурье.

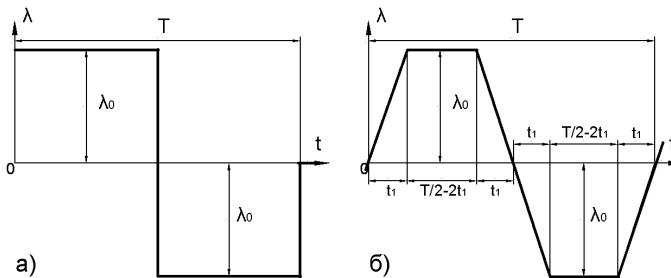


Рис. 5.16. Возмущения прямоугольной (а) и трапецеидальной (б) формы

Колебания в форме равнобоких трапеций разворачиваются в ряд [9]

$$\lambda = \frac{2 \lambda_0 T}{\pi^2 t_1} \left(\sin \frac{2 \pi}{T} t_1 \sin \omega t + \frac{1}{3^2} \sin 3 \frac{2 \pi}{T} t_1 \sin 3 \omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5 \frac{2 \pi}{T} t_1 \sin 5 \omega t + \dots \right),$$

а колебания в форме прямоугольника в ряд

$$\lambda = \frac{4\lambda_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

Обычно все гармонические составляющие этого ряда, кроме первой, интенсивно «подавляются» регулируемым объектом, вследствие чего колебания регулируемой величины в результате возмущений прямоугольной или трапецеидальной формы часто имеют синусоидальный характер.

Таким образом, в приведенных разложениях можно воспользоваться только первой гармоникой, т. е. для трапецеидальных колебаний

$$\lambda = \frac{2\lambda_0 T}{\pi^2 t_1} \sin \frac{2\pi}{T} t_1 \sin \omega t,$$

а для прямоугольных колебаний

$$\lambda = \frac{4\lambda_0}{\pi} \sin \omega t.$$

Последующие операции для определения частотных характеристик регулируемого объекта аналогичны операциям при синусоидальном характере возмущений.

Простейшая схема для снятия частотных характеристик регулируемого объекта при возмущении прямоугольной или трапецеидальной формы аналогична схеме, представленной на рис 5.1. Первый опыт рекомендуется проводить на частоте, соответствующей сдвигу фаз между входным и выходным колебаниями, примерно равному 180° . Для этого объект вводят в режим двухпозиционного регулирования: регулирующий орган перемещают, когда регулируемая величина проходит через свое среднее значение. Затем проводят опыты с частотами вдвое большей, вдвое меньшей и промежуточными между ними.

Рассмотрим экспериментальное определение частотных характеристик участка регулирования температуры перегретого пара котельного агрегата высокого давления.

Принципиальная схема регулируемого объекта изображена на рис 5.17. Насыщенный пар из барабана котла поступает в

первую ступень пароперегревателя и затем в пароохладитель смешивающего (впрыскивающего) типа, включенный в рассечку двух ступеней перегрева. Охлаждающая вода проходит через регулирующий орган – клапан с электроприводом и подается в пароохладитель. Из пароохладителя пар поступает во вторую ступень перегревателя и далее к турбине.

Измерение температуры пара проводится малоинерционной термопарой и милливольтметром. Частотная характеристика, определенная таким способом, является, строго говоря, характеристикой нерегулируемого объекта, а системы объект – термопара – указывающий прибор.

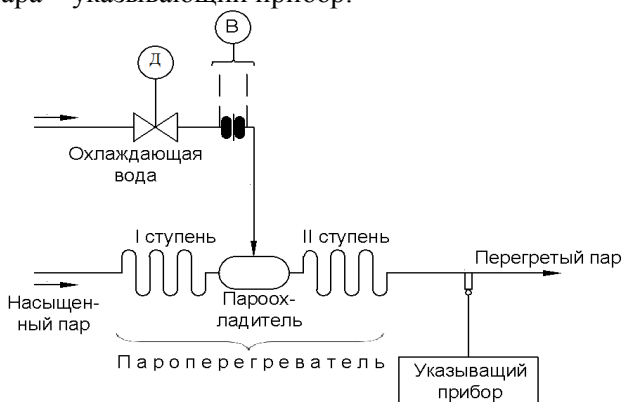


Рис. 5.17. Схема эксперимента при снятии частотных характеристик пароперегревателя прямоточного котла методом трапецидальных колебаний

Возмущения проводятся дистанционным включением электропривода клапана на линии охлаждающей воды, т. е. колебания возмущающего воздействия имеют трапецидальную форму. Расход воды фиксируется водомером В. Запись показаний и дальнейшая обработка результата эксперимента проводятся в следующих размерных единицах: расход воды λ , т/ч, а температура σ , мв.

Регулируемый объект воздействием на клапан «вводится в режим» двухпозиционного регулирования, осуществляемого вручную. Перемещения клапана подбираются так, чтобы коле-

бания температуры перегретого пара были практически симметричны. Этот опыт позволяет определить точку амплитудно-фазовой характеристики, соответствующую сдвигу фаз между входными и выходными колебаниями, примерно равному 180° . Результаты опыта приведены на рис. 5.18. Искомой точке амплитудно-фазовой характеристики соответствуют частота $\omega_2 = 0,0175$ 1/с, сдвиг фазы $\varphi(\omega_2) = 165^\circ$ и

$$A(\omega_2) = \frac{0,67 \text{ MB}}{3,18 \text{ м/ч}} = 0,21 \text{ MBч/м}$$

Определение этой частоты позволяет выбрать значения остальных частот, при которых необходимо вести последующие опыты. Рекомендуются в качестве таких частот следующие:

$$\omega = 0, \omega = 0,5\omega_2; \omega = 0,75\omega_2; \omega = 2\omega_2.$$

Методика проведения эксперимента на других частотах несколько отличается от опыта на частоте ω_2 . Если при проведении опыта на частоте ω_2 перестановка регулирующего органа определяется знаком регулируемой величины – температурой пара, то в опытах на других частотах экспериментатор переставляет регулирующий орган из одного положения в другое через равные промежутки времени, независимо от того, чему равна регулируемая величина в момент перестановки клапана. Опыты проводятся следующим образом.

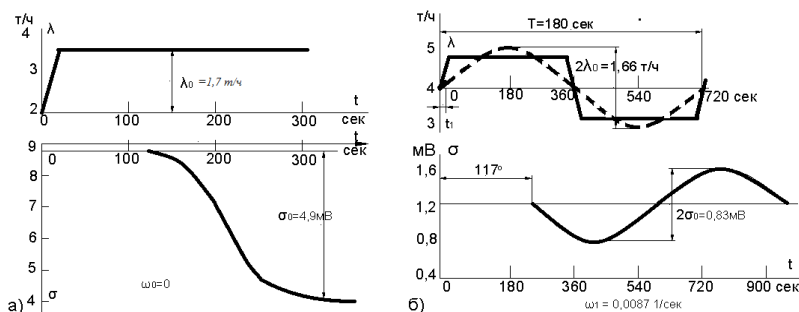


Рис. 5.18. Кривые изменения возмущающего воздействия и регулируемой величины при разных частотах колебаний

После стабилизации нагрузки и производительности котельного агрегата температура перегретого пара достигает установившегося значения. Положение регулирующего органа, соответствующее этому состоянию равновесия, принимается за ось его будущих колебаний. Затем регулирующий орган перемещается в обе стороны от оси колебаний на определенную величину (10–15% максимального хода клапана) и удерживается в этом положении в течение некоторого времени. После этого регулирующий орган перемещается в противоположную сторону на такую же величину и опять удерживается в этом положении столько же времени. Такие чередования положения регулирующего органа проводят до тех пор, пока колебания температуры пара не станут одинаковыми в течение двух–трех периодов, что свидетельствует о «вводе» регулирующего объекта в режим установившихся колебаний.

Опыты были проведены на четырех частотах: $\omega_0 = 0$; $\omega_1 = 0,0087$ 1/с; $\omega_2 = 0,0175$ 1/с; $\omega_3 = 0,035$ 1/с;

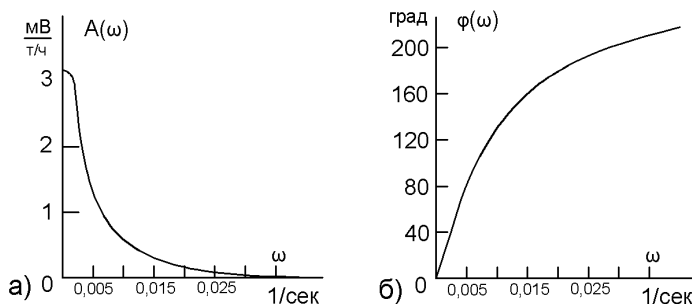


Рис. 5.19. Амплитудно-и фазочастотные характеристики объекта

В результате опытов установлено, что частота $\omega_3 = 0,035$ 1/с практически близка к частоте «среза» при данной амплитуде возмущения. Графики изменения возмущений и температуры изображены на рис. 5.18.

Обработка результата эксперимента проводилась в соответствии с рекомендациями, приведенными выше.

Путем сравнения первых гармоник колебаний расхода воды с колебаниями температуры пара были определены сдвиг фаз $\varphi(\omega)$ и отношение амплитуд колебаний $A(\omega)$.

Результаты опытов сведены в табл. 5.3 и в виде графиков представлены на рис. 5.19.

Таблица 5.3

Результаты эксперимента

№ опыта	частота ω , 1/с	Отношение амплитуды $A(\omega) = \frac{2\delta_0}{2\lambda_0}$	Отставание Δt , с	$\varphi(\omega) = \frac{360}{T} \Delta t$, град
1	0	2,94	0	0,0
2	0.0087	0,50	334	117
3	0.0175	0,21	165	165
4	0,0350	0,01	114	228

Контрольные вопросы и упражнения

1. Охарактеризуйте основные этапы экспериментального исследования промышленных объектов.

2. Поясните основные схемы экспериментальных установок при аperiodических воздействиях.

3. Разновидность установок для снятия частотных характеристик и их сравнительный анализ.

4. Методика снятия кривой разгона и определение по ней динамических параметров энергетического объекта управления.

5. Снятие импульсной характеристики и определение по ней динамических параметров объекта.

6. Определение АФЧХ объекта на базе генератора колебаний, воздействующего непосредственно на регулируемый орган.

7. Определение АФЧХ объекта на базе генератора, возбуждающего колебания в замкнутой системе управления.

8. Методика определения частотных характеристик объекта при возмущениях трапецидальной формы и прямоугольной формы. Специфика обработки результатов эксперимента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем (теория для пользователя). – М.: Наука, 1991.
2. *Грон Д.* Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979.
3. *Райбман Н.С., Чадеев В.М.* Построение моделей процессов производства. – М.: Энергия, 1975.
4. *Адамбаев М.Д.* Определение динамической структуры и параметров промышленных объектов управления: Научное издание. – Алматы: TST Company, 2010.
5. *Адамбаев М.Д.* Математические методы идентификации: Учебник. – Алматы: Комплекс, 2005.
6. *Кэмпбелл Д.* Динамика процессов химической технологии. – М.: Химия, 1962.
7. *Олейников В.А., Тихонов О.Н.* Автоматическое управление технологическими процессами в обогащательной промышленности. – Л.: Недра, 1966.
8. *Адамбаев М.Д.* Автоматическое управление процессами сухой рудоподготовки: Научное издание. – Алматы: Комплекс, 2004.
9. *Олевский В.Н.* Конструкции и расчет механических классификаторов и гидроциклонов. – М.: Госгортехиздат, 1960.
10. *Разумов К.А., Перов В.А.* Проектирование обогащательных фабрик. – М.: Недра, 1965.
11. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965.
12. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / *К.Хартман, Э.Лецкий, Б.Шефер и др.* / Под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1977.
13. *Васильев Д.В., Чуич В.Г.* Системы автоматического управления (примеры расчета). – М.: Высшая школа, 1967.
14. *Такер Г.К., Уиллс Д.М.* Упрощенные методы анализа систем автоматического регулирования. – М.: Госэнергоиздат, 1963.

15. *Вавилов А.А., Солодовников А.И.* Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем – М.: Госэнергоиздат, 1963.
16. *Стефани Е.П.* Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. – М.: Госэнергоиздат, 1960.
17. *Марюта А.Н., Качан Ю.Г., Бунько В.А.* Автоматическое управление технологическими процессами обогатительных фабрик. – М.: Недра, 1983.
18. *Траксел Дж.* Синтез систем автоматического регулирования. – М.: Машгиз, 1959.
19. *Солодовников В.В.* Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960.
20. *Демидович Ю.Р., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Физматгиз, 1963.
21. *Джеймс Х.* Теория следящих систем. – М.: ИЛ, 1951.
22. *Андреев В.П., Сабинин Ю.А.* Основы электропривода. – М.: Госэнергоиздат, 1963.
23. *Анисимов В.И., Вавилов А.А., Фатеев А.В.* Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования. – М.: Госэнергоиздат, 1959.
24. *Хализев Г.П., Серов В.И.* Расчет пусковых, тормозных и регулировочных устройств для электродвигателей. М.: Высшая школа, 1966.
25. *Башарин А.В.* Примеры расчетов автоматизированного электропривода. – М.: Энергия, 1964.
26. *Справочные данные по электрооборудованию. – Т.1. Электрические машины общего применения. – М.: Энергия, 1964.*
27. *Котченко Ф.Ф.* Следящие системы автоматических компенсаторов. – М.: Недра, 1965.
28. *Рудаков В.В.* Электромашинные усилители в системах автоматики. – М.: Госэнергоиздат, 1961.
29. *Миловзоров В.Б.* Электромагнитная техника. – М.: Высшая школа, 1966.
30. *Аранович Б.И., Шамрай Б.В.* Электромагнитные устройства автоматики. – М.: Энергия, 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ.....	5
Основные положения.....	5
1.1. Основы динамики процессов и аппаратов, являющихся общим для различных производств.....	7
1.1.1. Динамика материального потока и запаса	7
1.1.2. Динамика перемешивания материальных потоков	15
1.1.3. Динамика теплообмена	19
1.2. Математическое описание процессов дробления, из- мельчения и классификации	26
Вводные замечания.....	27
1.2.1. Уравнения динамики дробилок	27
1.2.2. Уравнения технологических аппаратов процесса клас- сификации.....	29
1.2.3. Общие уравнения измельчительных агрегатов	32
1.2.4. Уравнение гидравлического классификатора	38
1.3. Преобразование уравнений. Вводные замечания.....	40
1.3.1. Линеаризация уравнений	41
1.3.2. Преобразование линейного дифференциального урав- нения в операторную форму и наоборот	44
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ	47
2.1. Идентификация статических характеристик промыш- ленных объектов	47
2.1.1. Определение функциональных зависимостей линей- ных объектов методом наименьших квадратов	48
2.1.2. Определение функциональной зависимости нелиней- ного объекта	53
2.2. Определение уравнения объектов по кривым разгона	58
2.2.1. Определение уравнения объектов первого порядка по кривой разгона экспоненциальной формы.....	60
2.2.2. Определение уравнения объекта второго порядка с монотонной кривой разгона S-образной формы.....	63
2.2.3. Определение уравнения объекта второго порядка с колебательной кривой разгона	68

2.2.4. Определение передаточной функций объекта по кривой разгона.....	72
2.2.5. Определение порядка уравнения объекта по кривой разгона.....	75
2.3. Определение уравнения объектов частотными методами.....	77
2.3.1. Нахождение передаточной функции объекта по его экспериментальным частотным характеристикам	77
2.3.2. Получение расширенных частотных характеристик по кривой разгона	82
2.4. Определение математической модели объекта методами статистической динамики	87
2.4.1. Вычисление автокорреляционной функции (АКФ)	88
2.4.2. Вычисление математического ожидания, централизованной АКФ, среднеквадратичного отклонения и эквивалентной спектральной плотности случайного сигнала.....	93
2.4.3. Вычисление импульсной переходной функции	96
2.4.4. Вычисление спектральной плотности случайного сигнала	100
2.4.5. Вычисление комплексного коэффициента усиления (передаточной функции) объекта с использованием спектральных плотностей	107
3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ	109
3.1. Объекты управления и виды их математических моделей	109
3.2. Методы получения моделей промышленных объектов управления	122
3.2.1. Аналитический метод получения математических моделей	126
3.2.2. Инженерная идентификация динамических характеристик линейных объектов по кривой разгона.....	129
3.2.3. Применение статистических методов для идентификации динамических характеристик объектов промышленных процессов.....	134
3.3. Идентификация динамики существенно нелинейных объектов.....	148
3.4. Представление математических моделей объектов управления в нормальной форме.....	151

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ИХ ТЕХНИЧЕСКИМ ДАННЫМ.....	159
4.1. Вводные замечания	159
4.2. Идентификация генератора постоянного тока	160
4.3. Идентификация двигателя постоянного тока	170
4.4. Идентификация двухфазного асинхронного двигателя	182
4.5. Основные параметра и передаточная функция электро-машинного усилителя	188
4.6. Основные параметры и передаточные функции магнитных усилителей.....	198
5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ.....	205
5.1. Вводные замечания.....	205
5.2. Планирование и подготовка эксперимента	206
5.3. Примеры экспериментального определения временных характеристик регулируемых объектов.....	214
5.3.1. Снятие кривой разгона и определение динамических параметров регулируемого объекта.....	214
5.3.2. Снятие импульсной характеристики и определение динамических параметров объекта	216
5.4. Примеры экспериментального определения частотных характеристик регулируемых объектов.....	217
5.4.1. Определение амплитудно-фазовой характеристики объекта с помощью генератора колебаний, воздействующего непосредственно на регулирующий орган	217
5.4.2. Определение амплитудно-фазовой характеристики объекта с помощью генератора при возбуждении гармонических колебаний в замкнутой системе регулирования.....	221
5.4.3. Определение частотных характеристик объекта при периодических возмущениях трапецеидальной формы.....	225
Библиографический список.....	232

Учебное издание

Адамбаев Мурат Джамантаевич

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ТЕХНИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА
В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ**

Учебник

Нач. РО

З. Губайдулина

Редактор

З. Губайдулина

Компьютерная верстка

Д. Тажиева

Подписано в печать 30.07.2013 г.

Тираж 300 экз. Формат 60×84 1/16. Бумага типографская. № 1.

Уч.-изд.л. 14,8. Усл.п.л. 13,7. Заказ № 185. Цена договорная

Издание Казахского национального технического университета

имени К.И. Сатпаева

Информационно-издательский центр КазНТУ,

г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-228-412-6



9

7 8 6 0 1 2 2 8 4 1 2 6