НАО «КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени К.И. САТПАЕВА»

Достанова С.Х., Токпанова К.Е.

Строительная механика I
Учебно-методическое пособие
(лекции для бакалавров строительных специальностей)

АЛМАТЫ, 2022

НАО «КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени К.И. САТПАЕВА»

УДК 624.078 (072)
ББК
Д

Рецензенты:
Квашнин М.Я. -профессор АЛиТ
Жунисбеков С. - профессор КазНИИТУ

Рекомендовано к изданию Методическим советом института архитектуры и строительства им. Т.Басенова

Достанова С.Х.: Строительная механика I. Учебное методическое пособие (лекции для бакалавров строительных специальностей). – Алматы: КазНИИТУ, 2022. – 149 с.; библиогр. 33

В данном пособии даны краткие сведения по кинематике, динамике точки, статике. Т.к. стержни являются самыми распространенными элементами любой конструкции, поэтому представлены основные виды деформаций, внутренних усилий и напряжений для простого стержня. Даны примеры расчетов геометрических характеристик плоских сечений, построение эпюр внутренних усилий, напряжений и перемещений для простого стержня и подбор сечений. Рассмотрены некоторые виды сложных деформаций и устойчивость сжатого стержня.

Учебно-методическое пособие рекомендовано бакалаврам, инженерам и техническим работникам в области строительных конструкций.

УДК
ББК

ISBN

© Казахский научно-исследовательский технический университет им. К.Сатпаева, 2022г

СОДЕРЖАНИЕ

Введение…….4
Лекция 1. Кинематика. Основные понятия и законы. Кинематика точки. Кинематика твердого тела. Поступательное и вращательное движения. ……..…….……..7
Лекция 2. Основы динамики точки. Основные понятия и законы динамики Аксиомы классической механики. Дифференциальные уравнения движения точки. Основные задачи динамики. Основные виды прямолинейного движения точки……..13
Лекция 3. Статика. Виды деформаций. Внутренние усилия. Напряжение в точке. Уравнения равновесия……... 21
Лекция 4. Растяжение- сжатие. Метод сечений. Нормальные напряжения и деформации. Закон Гука. Диаграмма растяжения-сжатия…….33
Лекция 5. Статически неопределимые системы при растяжении – сжатии……48
Лекция 6. Статически неопределимые стержневые системы. Температурные и монтажные усилия…….……60
Лекция 7. Геометрические характеристики сечений. Осевые и центробежные моменты инерций плоских сечений…….….64
Лекция 8. Параллельный перенос и поворот осей. Главные центральные оси инерции сечений. Эллипс инерции……....67
Лекция 9. Кручение. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Потенциальная энергия при кручении. Касательные напряжения и углы поворота сечений. Подбор сечений……..…...74
Лекция 10. Изгиб. Внутренние усилия. Метод сечений. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Нормальные напряжения ……...84
Лекция 11. Касательные напряжения. Подбор сечений……....98
Лекция 12. Определение перемещений при изгибе……105
Лекция 13. Сложное сопротивление. Косой изгиб. Нулевая линия. Расчет на прочность……120
Лекция 14. Внецентренное сжатие или растяжение Нулевая линия. Ядро сечения при внецентренном сжатии……129
Лекция 15. Устойчивость сжатого стержня. Формула Ясинского……..…….140
Литература……. .148

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика I является одной из основных технических дисциплин, формирующих мышление будущего инженера, поэтому дисциплина «Строительная механика I» является базовой дисциплиной для бакалавров высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Строительная инженерия». Эта дисциплина состоит из основ теоретической механики и сопротивления материалов. В разделе теоретической механики рассматриваются две части: в кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел, а в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил. В сопротивлении материалов рассматривается расчет простейших элементов конструкций при внешних воздействиях.

Роль и значение теоретической механики состоит не только в том, что она является научной базой многих областей современной техники, но и в том, что ее законы и методы позволяют научить и объяснить целый ряд важных явлений и способствует дальнейшему росту и развитию различных направлений инженерных наук. Целью сопротивления материалов является изучение прочности и надежности элементов конструкций, разработка моделей и методов расчета на прочность. Сопротивление материалов связывает теоретические науки с конкретными инженерными решениями.

Строительная механика является одной из древнейших наук, возникновение и развитие которой обусловлены потребностями строительной практики. Начиная с эпохи Возрождения (XIV - XVI), создаются основы динамики, заложенные знаменитыми учеными, такими, как Г.Галилей и И.Ньютон. XVIII век характеризовался разработкой общих принципов классической механики и важнейшими исследованиями по механике твердого тела, гидромеханике, небесной механике. Появление железной дороги способствовало бурному развитию инженерных прикладных наук, в частности, строительной науки. Многие выдающиеся ученые – Л.Эйлер, Ж.Даламбер, Ж.Лагранж, М.В.Остроградский, А.М.Ляпунов, С.П.Тимошенко, Н.М.Беляев, В.И. Феодосьев и многие другие посвятили свой труд созданию курсов инженерной механики, которые являются научной основой важнейших областей строительной отрасли. Реальным подтверждением все возрастающего значения строительной механики являются выдающиеся достижения во многих областях техники, особенно в создании космических кораблей, спутников, современных зданий и сооружений. Велики и ответственны задачи механики, которые были и остаются научной основой развития современной строительной науки. Изучение в лекционном курсе

теоретических основ механики и современных прогрессивных методов расчета дают возможности для создания современных эффективных конструкций. Необходимо отметить большой вклад казахстанских ученых в развитие инженерной механики. Проблемы строительной механики, а именно совершенствование теории и методов расчета конструкций при статических и динамических воздействиях рассматривались в трудах Т.Ж.Жунусова, Ш.М.Айталиева, Т.Д.Абаканова, А.А.Кусаинова, А.Ш. Боженова, К.А.Турсунова, Н.Я.Тер-Эммануильян, З.М.Рахимбековой и многих других ученых.

Методическая направленность дисциплины предполагает**:**

- системное изучение основ теоретической механики, сопротивления материалов;
- обучение теоретическим и практическим основам решения инженерных задач при расчете элементов строительных и транспортных конструкций.

Целью преподавания дисциплины является:

получение студентами теоретических знаний о свойствах движения тел без учета их инертности и действующих на них сил, законы движения материальных тел с учетом инертности под действием сил, изучение деформации упругих тел под действием внешних сил и элементарных расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и сооружений.

Для практической деятельности инженеру необходимо выработать навыки создания простых и ясных моделей явлений и реальных объектов, отбрасывая второстепенные факторы. Методы теоретической механики (механики абсолютно твердого тела) дают возможность использовать основные законы механики и математический аппарат для исследования поведения системы при внешних воздействиях. Современный этап развития технических наук можно характеризовать, как переход от расчета к модели. Создаются математические модели элементов конструкций, отражающие их функциональное назначение, работоспособность, условия прочности. Знание основ теоретической механики, закладывает основу для выбора расчетной схемы и соответствующих аналитических зависимостей, что называется построением физико-математической модели работы элемента или части конструкции. Правильно и грамотно построенные расчетные схемы позволяют ответить на многие важные инженерные вопросы: дать оценку прочности существующей конструкции, подобрать необходимые размеры элементов конструкции, обеспечивающие их прочность и экономичность, выбрать оптимальную конструкцию.

Задачей изучения дисциплины является применение теоретических знаний для решения практических задач, возникающих при проектировании элементов конструкций и сооружений. Все разделы данной книги тесно связаны между собой и играют чрезвычайно большую роль в формировании мышления современного инженера.

Данный курс строительной механики I рассчитан на изучение основ теоретической механики: кинематика точки, простые движения твердого тела и основы динамики точек, основы динамики твердого тела, а также основ сопротивления материалов: расчет статически определимых и неопределимых стержневых систем при растяжении-сжатии; геометрические характеристики сложных плоских сечений; кручение; сложное сопротивление: косой изгиб; внецентренное сжатие (изгиб с растяжением) и расчет на устойчивость.

Основным содержанием сопротивления материалов является разработка моделей прочностной надежности элементов конструкций. С помощью таких моделей инженер может выбрать материал и необходимые размеры элементов конструкций, оценить сопротивление конструкционных материалов внешним воздействиям.

Любое инженерное сооружение – здание, мост, тоннель, дорожные конструкции и др. – помимо элементов, обеспечивающих функциональное назначение данного объекта, обязательно имеет несущие элементы конструкции, составляющие «силовой каркас» и предназначенные для восприятия нагрузок и различных силовых воздействий на конструкцию. Несущие элементы конструкции должны проектироваться и создаваться так, чтобы они были прочными, т.е. могли воспринимать все силовые воздействия, не разрушаясь в течение длительного времени, тем самым сохранять безопасность для определенного периода эксплуатации.

Решающее влияние на инженерную механику оказывает быстрое развитие и совершенствование технических средств, а именно использование современных персональных компьютеров. Расчет элементов конструкций предполагает применение компьютерных программ и алгоритмов, которые в основном используют матричные методы, поэтому в данном лекционном материале представлены простейшие матричные действия и основные сведения из алгебры матриц. В связи с этим более полно изложен расчет статически определимых рам, где использована матричная форма при определении перемещений.

В книге приведены примеры и даны контрольные вопросы для более полного усвоения тем. Данной книгой могут пользоваться студенты строительных и других технических специальностей, в зависимости от конкретной программы можно использовать те лекции или те темы, которые могут оказаться им полезными.

Автор надеется, что книга окажется полезной для студентов строительных специальностей, инженерам и магистрантам технических специальностей при изучении проблем прочности и надежности элементов конструкций.

Автор выражает благодарность рецензентам за ценные замечания и ответственному редактору за помощь при подготовке рукописи к печати.

Лекция 1

Кинематика точки. Кинематика твердого тела. Поступательное и вращательное движения.

Большой вклад в развитие основ кинематики внесли такие ученые, как Ж. Даламбер (1717-1783), А Ампер (1775-1836), Ж. Понселе (1788-1867), М. Шаль (1793-1880), Л. Эйлер (1707-1783), А. Резаль (1828-1896) и др. Как самостоятельная наука кинематика оформилась лишь в половине XIX века.

Кинематика изучает движения материальных точек, не останавливаясь на причинах, вызывающих эти движения. Под движением понимаем изменение с течением времени положения данного тела по отношению к другим телам, поэтому всякое движение материального тела или состояние его покоя можно представить лишь по отношению к другим телам. Таким образом, движение имеет относительный характер. Для определения положения движущегося тела (точки) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают систему координат, которая называется системой отсчета. Характер движения материальной точки зависит от выбора системы отсчета. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время постоянными, то тело по отношению к этой системе отсчета находится в покое. Если координаты каких–нибудь точек тела с течением времени изменяются, то тело по отношению к данной системе отсчета (а, следовательно, и по отношению к телу, с которым эта система связана) находится в движении. Движение тел происходит во времени, геометрическое пространство, по отношению к которому изучается движение материальной тел, определяется системой декартовых координат.

Итак, кинематикой называется та часть механики, в которой изучаются зависимости между величинами, характеризующими состояние систем, но не рассматриваются причины вызывающие изменение состояние движения. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения данного тела (или точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения и т.п.). Для решения этой задачи необходимо, чтобы непосредственно был задан закон движения данного тела, или же закон движения какого-нибудь другого тела, кинематически связанного с данным.

Кинематика точки. Декартовы координаты.

С неподвижной системой отсчёта связываем декартовую ортогональную систему координат (правую, рисунок 1.1). Рассмотрим движение материальной точки $M(x,y,z)$ по отношению к системе ортогональных осей Oxyz (координатный способ задания движения) [1-3]. Геометрическое место последовательных положений материальной точки в этом пространстве называется траекторией точки. Положение точки в пространстве можно задать ее координатами x,y,z, которые при движении точки меняются со временем, т.е.

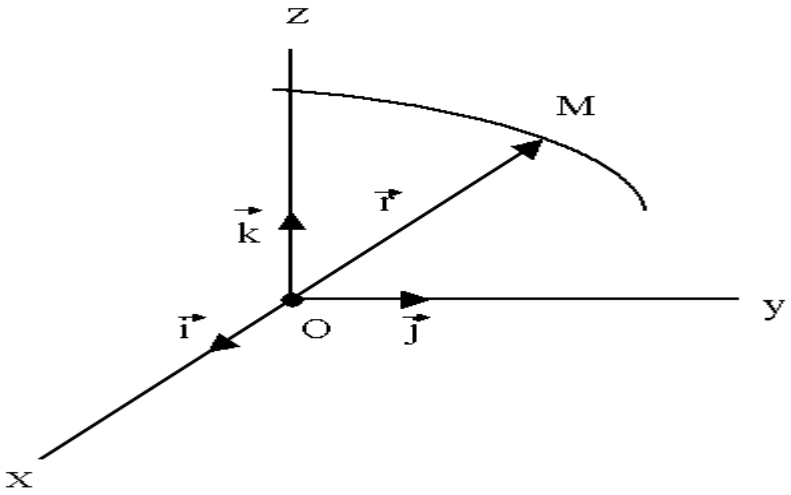


Рисунок 1.1

Параметрические уравнения траектории

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$$
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы (орты), эти уравнения определяют закон движения материальной точки и представляют собой параметрические уравнения траектории точки. В непрерывном движении материальной точки функции f_i непрерывные вместе с производными первого и второго порядка, т.е. $f_i(t)$ - непрерывны и 2 раза дифференцируемы; 2-е производные – непрерывны.

Непрерывная последовательность точек среды (пространства), занимаемая точкой М, представляет траекторию точки М (рисунок 1.2). Если траекторией является прямая линия, то движение точки называется прямолинейным, а если кривая, то криволинейным. Чтобы знать положение точки на траектории, в любой момент времени надо знать зависимость

s=f (t)

Это уравнение выражает закон движения точки М вдоль траектории. Чтобы задать движение точки естественным способом, надо задать:

1. Траекторию точки;
2. Начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета;

3. Закон движения точки вдоль траектории в виде s=f (t).

Исключая время:

$$y = F_1(x); z = F_2(x)$$

или:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0; \Phi_2(x, y, z) = 0$$

Кинематика твердого тела. Поступательное и вращательное движения.

Абсолютно твердым телом называют такую систему материальных точек, расстояние между любыми двумя точками которой остаются неизменными. Абсолютно твердое тело либо заполняет некоторую область пространства, либо состоит из нескольких отдельных точек. Перемещения абсолютно твердого тела в пространстве могут быть либо свободными, либо стесненными некоторыми условиями, например, перемещения твердого тела будут стеснены, если закрепить одну точку. Если закрепить две точки твердого тела, то возможными движениями такого тела будут лишь вращения вокруг неподвижной прямой, проходящей через закрепленные точки. Эту прямую называют осью вращения. Если закрепить еще одну точку, не лежащую на оси вращения, то тело будет неподвижным. Следовательно, три точки, не лежащие на одной прямой, полностью определяют положение твердого тела, и для определения движения твердого тела достаточно знать закон движения трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой.

Твердое тело испытывает перемещение, когда оно переходит из одного положения в другое. Вектор, соединяющий два различных положения твердого тела, характеризует ее перемещение. Этот вектор называется вектором перемещения твердого тела. В общем случае перемещения различных точек твердого тела отличаются друг от друга, как по величине, так и по направлению.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1. задание движения и изучение кинематических характеристик движения всего тела в целом;
2. изучение движения каждой точки в отдельности.

Частными видами движения абсолютно твёрдого тела являются поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

Поступательное движение

Может оказаться, что векторы перемещений различных точек твердого тела равны по величине и параллельны. В таком случае твердое тело совершает поступательное перемещение. Движение, состоящее из последовательности поступательных перемещений твердого тела, называется поступательным движением, т.е. поступательным движением абсолютно твёрдого тела будем называть такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющей две любые точки тела, остаётся параллельным неподвижной прямой (рисунок 2.1). Если с твердым телом жестко связать систему прямоугольных осей, то при поступательном перемещении эти оси будут оставаться параллельными своему первоначальному положению [2].

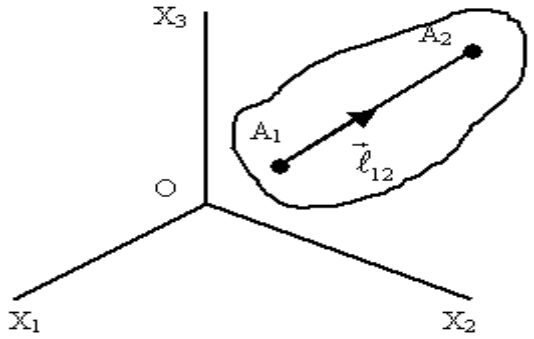


Рисунок 2.1. Поступательное движение

В поступательном движении все точки тела в каждый момент времени имеет одну и ту же скорость и одно и то же ускорение.

Пусть:

$\overrightarrow{OA_1} = \vec{R}_1$

$\overrightarrow{OA_2} = \vec{R}_2$

Тогда:

$\vec{R}_1 + \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{R}_2$

Положим:

$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\ell}_{12}\rho_{12}.$

Так как $\overrightarrow{A_1A_2}$ перемещается параллельно первоначальному направлению, то:

$$\frac{d\vec{\ell}_{12}}{dt} = 0$$

Тогда:

$$\frac{d\vec{R}_1}{dt} + \rho_{12}\frac{d\ell_{12}}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

(Аналогично из формулы Эйлера при $\vec{\omega} = 0: \vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$)

Очевидно и наоборот, если скорости всех точек равны между собой в каждый момент времени, то тело движется поступательно. Беря от обоих частей производные по времени, получаем, что ускорения точек A и A_1 тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и по направлению, т.е. $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$.

Пусть:

$$\frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 + \vec{C}_1,$$

где $\vec{C}_1$- вектор постоянной длины и неизвестного направления относительно неподвижной системы, т.е. при $\vec{C}_1$ = const тело движется поступательно. Отсюда следует, что поступательное движение тела определяется движением какой-нибудь одной его точки, следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки.

Примерами поступательного движения являются кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги, кабина лифта, кабины колеса обозрения и т.д.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными. Проходящая через неподвижные точки прямая называется осью вращения.

Рассмотрим твердое тело, у которого неподвижно закреплены две точки (рисунок 2.2). Пусть две точки A_1 и A_2 неподвижны. Очевидно, что все точки прямой A_1A_2 неподвижны. Такое твердое тело может только вращаться вокруг неподвижной оси, причем всякая его точка описывает окружность в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Радиус окружности равен расстоянию точки от оси вращения. Положение точки можно определить углом θ (двугранный угол) между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых неподвижна и проходит через ось вращения, а вторая вращается вместе с точкой. Введем неподвижную систему X_1, X_2, X_3: X_3 по A_1A_2 [1]. Положение тела определяется точками A_1, A_2, P, а из трех

координат точки Р только одна независимая, так как имеются два уравнения связи. Можно взять угол θ (рисунок 2.2).

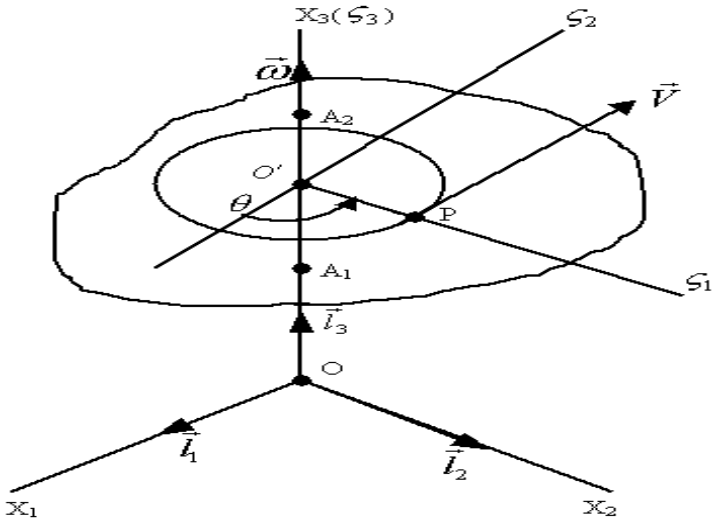


Рисунок 2.2. Вращательное движение

Поясним: введём подвижную систему $O'\varsigma_3$ по Ox_3. Обозначим угол между осями через θ, т.е.

$$(Ox_1, \hat{} O\varsigma_1) = \theta.$$

Тогда таблица косинусов:

	ς_1	ς_2	ς_3
x1	$\cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$	0
x2	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\cos\theta$	0
x3	0	0	1

Контрольные вопросы:

1. Какое движение твёрдого тела называется поступательным?
2. Сколькими параметрами определяется положение тела при вращении вокруг неподвижной оси?
3. Напишите формулы компонент ускорения во вращательном движении тела.
4. Дайте определение угловой скорости вращения.

5. Как определяется линейная скорость точки вращающегося твердого тела.

Лекция 2

Основы динамики точки.
Основные понятия и законы динамики

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил, этим она отличается от кинематики, которая изучает движение независимо от причин, его вызывающих.

Древние ученые имели смутное представление о законах движения. Аристотель (384-322 гг. до н.э.) не знал еще законов инерции, считая, что с прекращением действия силы тела прекращают двигаться. Только после долгих наблюдений над происходящими в природе движениями один из законов динамики был раскрыт Галилеем, установившем, что всякое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока внешние силы не выведут его из этого состояния. Закон инерции Галилея является обобщением опытных фактов, накопленных человечеством, поэтому основоположником динамики считается великий ученый Г.Галилей (1564-1642). Он впервые ввел в механику понятие скорости и ускорения движущейся точки при неравномерном прямолинейном движении и установил законы падения тел в пустоте. Начатая Галилеем работа по созданию динамики была завершена великим английским ученым Ньютоном (1643-1727), который сформулировал основные законы классической механики и на основе этих законов дал систематическое изложение динамики. На основе законов Галилея-Ньютона в дальнейшем доказывались теоремы и устанавливались принципы механики, составляющие содержание классической механики (применение законов классической механики ограничено, т.к. эти законы не согласуются с опытом при изучении тел, скорость которых одного порядка со скоростью света). Академик М.В.Остроградский (1801-1862) обобщил принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) и применил его к решению многих задач механики. В XIX и XX столетиях большое значение для развития динамики внесли труды известных ученых, таких как А.М.Ляпунов, Н.Е.Жуковский, С.А.Чаплыгин, К.Э.Циолковский, А.Н.Крылов и др.В динамике, в отличие от кинематики, при изучении движения тел принимают во внимание и действующие силы, и инертность самих материальных тел. Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил. Если, например, при действии одинаковых сил изменение скорости первого тела происходит медленнее, чем второго, то говорят, что первое тело является более инертным и наоборот. Большая или

меньшая степень инертности данного тела зависит от количества заключенного в нем вещества (материи). Величина, зависящая от количества вещества данного тела и определяющая меру его инертности, называется массой тела.

Всякое движение происходит только во времени. Моменты времени, к которым относятся координаты и расстояния, а также промежутки времени, становятся определенными, лишь, когда выбрана определенная система отсчета. В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном и названные им аксиомами, или законами движения [5].

Первый закон Ньютона: изолированная от внешних воздействий материальная точка (тело) сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Под телом подразумевается материальная точка, а сила определяется как причина, изменяющая равномерное и прямолинейное движение материальной точки.

Второй закон устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой-нибудь силы. Он гласит: произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

Математически этот закон можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F,$$

где v – скорость движущейся точки, m – ее масса, mv – количество движения. Считая массу материальной точки постоянной величиной, второму закону Ньютона можно придать и другую математическую формулировку:

$$m\frac{dv}{dt} = F \text{, или}$$

$$\boldsymbol{m\bar{a} = \bar{F}}, \qquad (3.1)$$

где $\bar{a}$ - ускорение, которое получает точка. Масса является характеристикой инертного свойства материальной точки, т.е. способности ее под действием заданной силы получать определенное ускорение. Уравнение (3.1) является основным законом движения материальной точки.

Третий закон устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: две материальные точки действуют друг от друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка.

Материальная точка это модель материального тела любой формы, размерами которого можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Более сложные материальные объекты – **механические системы** и **твердые тела**, состоят из набора материальных точек.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

Законы Ньютона можно представить в виде следующих аксиом классической механики [5].

Аксиомы классической механики

Первая аксиома или закон инерции. Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.

Материальная точка, на которую действует равновесная система сил, называется **изолированной материальной точкой**.

Равномерное и прямолинейное движение точки называется **движением по инерции**.

Вторая аксиома или основной закон динамики. Ускорение материальной точки относительно инерционной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе, т.е. $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ (Рис. 3.1).

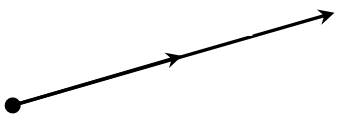


Рисунок 3.1. Инерционная сила

Положительный коэффициент пропорциональности ***m***, характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки.

Масса не зависит от характеристик движения точки и от природы сил. Масса считается постоянной величиной и зависит только от самой материальной точки. В отличие от классической механики доказано, что масса тела увеличивается с возрастанием скорости его движения, т.е. масса и энергия взаимно связаны.

Сила, приложенная к материальной точке, всегда имеет материальный источник в виде других материальных тел, которые действуют на точку путем контакта при непосредственном соприкосновении с ней или на расстоянии через посредство силовых полей.

Третья аксиома или закон о равенстве сил действия и противодействия. Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению. $\overline{F_1} = -\overline{F_2}$ (Рис. 3.2).

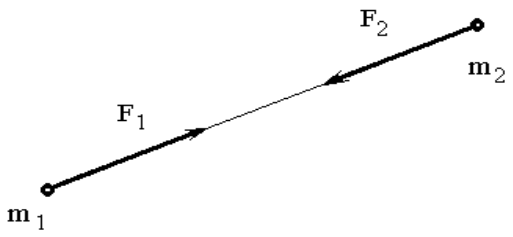


Рисунок 3.2. Действие и противодействие

Четвертая аксиома или закон независимого действия сил. При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

$$m \cdot \overline{a_i} = \overline{F_i} \qquad \overline{a} = \sum_i \overline{a_i}$$

Аксиомы классической механики хорошо согласуются с результатами опытов.

Системы единиц

	СГС	*Си*	Техническая
[L]- длины	см	м	м
[M]- массы	г	кг	Т.е.м.

[T]-время	сек	сек	сек
[F]-силы	дина	Н	кГ
[v]-скорости	см/сек	м/сек	м/сек
[a]-ускорения	см/сек^2	м/сек^2	м/сек^2

1 кГ = 9.8 Н, 36 км/час = 10 м/сек, 1 Т.е.м. = 9.8 кг

Дифференциальные уравнения движения точки.

Дифференциальные уравнения криволинейного движения точки в проекциях на оси прямоугольной системы координат:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z \tag{3.2}$$

Используя вектор ускорения, основное уравнение динамики $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ можно записать так $m \cdot \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}$ или так $m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$

Проецируя уравнение $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ на оси координат, получаем

$$m \cdot a_x = F_x \qquad m \cdot a_y = F_y \qquad m \cdot a_z = F_z,$$

так как $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, то

$$m \cdot \ddot{x} = F_x \qquad m \cdot \ddot{y} = F_y \qquad m \cdot \ddot{z} = F_z$$

Частные случаи:

А) Точка движется в плоскости. Выбираем в плоскости координаты *xOy* и получаем $m \cdot \ddot{x} = F_x \qquad m \cdot \ddot{y} = F_y \qquad F_z \equiv 0$

Б) Точка движется по прямой. Выбираем на прямой координату *Ox* и получаем $m \cdot \ddot{x} = F_x \qquad F_y \equiv 0 \qquad F_z \equiv 0$

Основное уравнение динамики $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ можно спроецировать на естественные подвижные оси.

$$m \cdot a_\tau = F_\tau \qquad m \cdot a_n = F_n \qquad m \cdot a_b = F_b$$

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_b \equiv 0$$

Эта форма уравнений удобна для исследования некоторых случаев полета снарядов и ракет.

Основные задачи динамики

Первая или прямая задача.

Известна масса точки и закон ее движения, необходимо найти действующую на точку силу.

m – масса, $x = f_1(t)$ $y = f_2(t)$ $z = f_3(t)$

Вычисляем вторые производные по времени от координат точки, умножаем их на массу и получаем проекции силы на оси координат

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = m \cdot f_1''(t) \qquad F_y = m \cdot \ddot{y} = m \cdot f_2''(t) \qquad F_z = m \cdot \ddot{z} = m \cdot f_3''(t)$$

Зная проекции силы на оси координат, определяем модуль силы и ее направляющие косинусы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad \cos\alpha = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

Пример 1: Движение точки в плоскости *xOy* определяется уравнениями (Рис. 3.3):

$x(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$; $y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t)$; $a, b, \omega - const$; t – время.

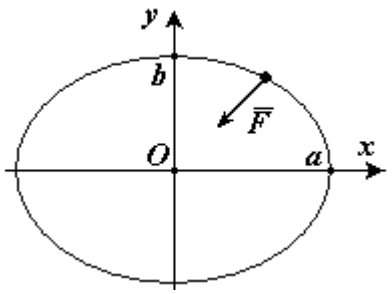


Рисунок 3.3. Движение точки в плоскости

Решение:

$$F_x = m \cdot \dot{x} = -m \cdot a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t);$$

$$F_y = m \cdot \dot{y} = -m \cdot \omega^2 \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t);$$

$$F_x = -m \cdot \omega^2 \cdot x; \qquad F_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y.$$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ - Уравнение траектории в координатной форме (эллипс).

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \overline{r}; \qquad \cos(\overline{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\overline{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}$$

Пример 2: Точка, имеющая массу m, движется из состояния покоя по окружности радиуса R с постоянным касательным ускорением a_τ. Определить действующую на точку силу в момент, когда она пройдет по траектории расстояние $s_1 = R\sqrt{2}$ (Рис. 3.4).

Решение: Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

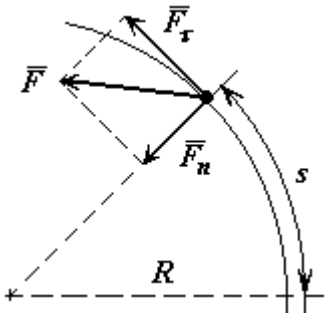


Рисунок 3.4. Движение по окружности

$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \qquad F_n = m \cdot \frac{v^2}{R}; \qquad F_b = 0;$$

Так как $a_\tau = const$, то $v_\tau = a_\tau \cdot t$, $s = \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}$

$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \qquad F_n = m \cdot \frac{(a_\tau \cdot t)^2}{R}; \; F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}}$$

$$s_1 = \frac{a_\tau \cdot t_1^2}{2} = R\sqrt{2}; \quad \text{следовательно} \quad t_1^2 = \frac{2R\sqrt{2}}{a_\tau};$$

$$\frac{a_\tau^2 \cdot t_1^4}{R^2} = a_\tau^2 \cdot \frac{8 \cdot R^2}{a_\tau^2 \cdot R^2} = 8; \qquad \text{следовательно } F(t_1) = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1+8} = 3 \cdot m \cdot a_\tau$$

$$F(t_1) = 3 \cdot m \cdot a_\tau$$

Вторая или обратная задача:

Известна масса точки и действующая на точку сила, необходимо определить закон движение этой точки.

Рассмотрим решение этой задачи в декартовой системе координат. Сила зависит от времени, координат точки, ее скорости и других причин.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \qquad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$

Каждая из координат x, y, z движущейся точки после интегрирования системы уравнений зависит от времени и всех шести произвольных постоянных, т.е.

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

В каждой конкретной задаче эти произвольные постоянные определяются из начальных условий, т.е.к этим уравнениям необходимо добавить начальные условия (в начальный момент t_0 начальное положение и начальная скорость):

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad z(t_0) = z_0$$

$$\dot{x}(t_0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0} \quad \dot{z}(t_0) = v_{z0}$$

Используя эти начальные условия можно получить шесть алгебраических уравнений для определения шести произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Основные виды прямолинейного движения точки

Одним их простейших видов движения материальной точки является прямолинейное движение. Рассмотрим материальную точку M (x,y,z) с массой m, на которую действует сила F, определенная в неподвижной системе осей Oxyz. Предположим, что в каждый момент времени проекции силы на неподвижные оси координат $F_y(t,y,\dot{y})=0$, $F_z(t,z,\dot{z})=0$, т.е. точка находится на оси x и ее скорость направлена вдоль этой оси. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Ox имеет вид:

$m \cdot \ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x})$, Начальные условия $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_{x0}$.

Наиболее важные случаи.

1. Сила постоянна. $F_x = const$ $m \cdot \ddot{x} = const$ $\ddot{x} = const$

Имеем равнопеременное движение (движение с постоянным ускорением)

2. Сила зависит от времени. $F_x = F_x(t)$ $m \cdot \ddot{x} = F_x(t)$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F_x(t)dt \qquad \ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t (\int_0^t F_x(t)dt)dt$$

3. Сила зависит от координаты или скорости.

Силу, зависящую от координаты x $F_x(x)$, создают упругие тела при их деформации (например, сжатая или растянутая пружина). $F_x = F_x(t)$

Сила, зависящая от скорости движения $F_x(\dot{x})$, это сила сопротивления (воздуха, воды и т.д.). В этих случаях решение задачи упрощается.

Контрольные вопросы:

1. Какие уравнения динамики называются естественными уравнениями движения материальной точки?

2.Какие основные задачи динамики точки?

3.Из каких условий определяются постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?

4. Какую систему отсчета называют инерциальной?

5. К какому телу приложена сила инерции материальной точки и каковы ее модуль и направление?

6. При каком движении материальной точки равна нулю ее касательная сила инерции и при каком нормальная?

Лекция 3. Статика. Виды деформаций. Внутренние усилия. Напряжение в точке. Уравнения равновесия

Статикой называется раздел механики, изучающий условия равновесия тел. Равновесием называют такое состояние тела или системы тел, в котором оно не движется в данной системе отсчета.

При всем разнообразии видов элементов конструкций, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. К ним относятся стержни, оболочки, пластины и массивные тела. Стержень, брус – тела, один размер которых (длина) значительно больше двух других (поперечных) размеров; пластина- тело у которого толщина h меньше двух других размеров в направлении осей x,y; массивное- тело у которого все 3 размера в направлении осей x,y, z соизмеримы. Самым простым и распространенным элементом конструкции является стержень (брус, балка, вал). Стержни могут быть

прямолинейными или криволинейными, постоянного или переменного сечения (Рис. 3.1)

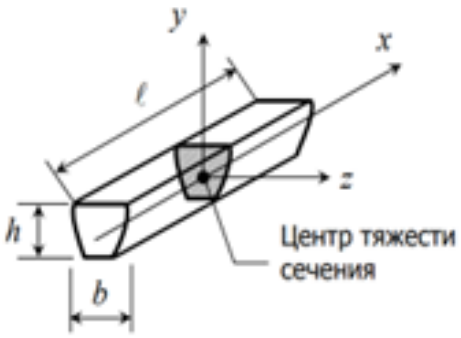


Рис. 3.1. Прямолинейный стержень

В дальнейшем будем рассматривать методы расчета простейших элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость (Рис. 3.2).

Прочность – это способность материала конструкции, не разрушаясь, сопротивляться внешнему воздействию.

Жесткость – это способность конструкции сопротивляться деформациям.

Устойчивость – это способность конструкции под воздействием нагрузок сохранять первоначальную форму равновесия.

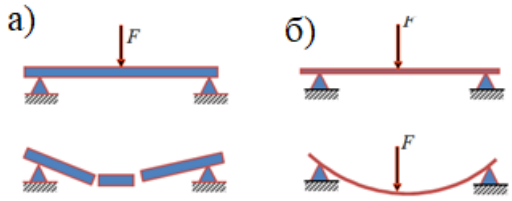


Рис. 3.2.Методы расчета: а- разрушение; б-изгиб

Пластинка – тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами. Массив – тело, у которого все три размера одного порядка.

Расчет любого сооружения, конструкции или отдельного конструктивного элемента начинается с выбора расчетной схемы. Она представляет собой упрощенную идеализированную схему, которая отражает

наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение под нагрузкой.

Классификация нагрузок

Сила – мера воздействия тел друг на друга. В строительной механике следует различать внешние и внутренние силы (нагрузки). Внешние силы – это силы, приложенные к телу со стороны других тел или окружающей среды. Они классифицируются по следующим признакам:

1. По способу приложения:

а) сосредоточенные силы F , приложенные к малой площадке, практически в точке. Их размерность – Н, кН, МН (Рис. 3.3а) ;

б) распределенные силы q , действующие на часть или на всю поверхность тела. Нагрузка, приходящаяся на единицу длины Н/м или на единицу площади Н/м2 , называется интенсивностью нагрузки q . В практических расчетах часто встречается нагрузка, распределенная по длине элемента конструкции. Если интенсивность постоянна по длине, то нагрузка называется равномерно распределенной (Рис. 3.4);

в) объемные силы, действующие на каждую частицу тела (силы тяжести, инерции). Их размерность – Н/м 3 .

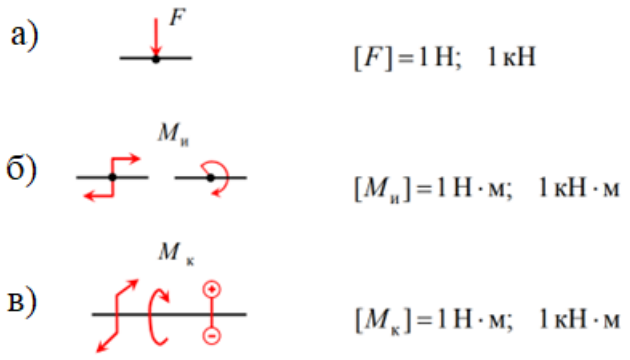


Рис. 3.3. Внешние силы: а- сосредоточенная сила; б-сосредоточенный изгибающий момент; в- сосредоточенный крутящий момент

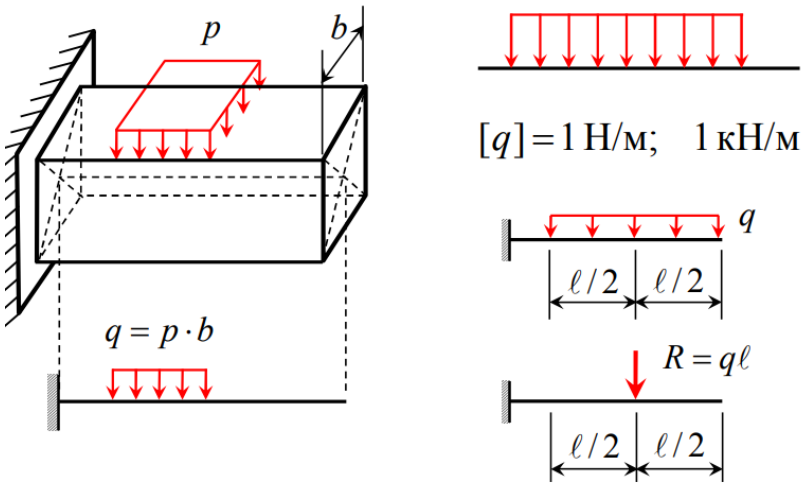


Рис. 3.4. Распределенная нагрузка по части тела и результирующая сосредоточенная сила

По аналогии распределенные моменты и силы, приложенные к части плоскости (Рис. 3.5).

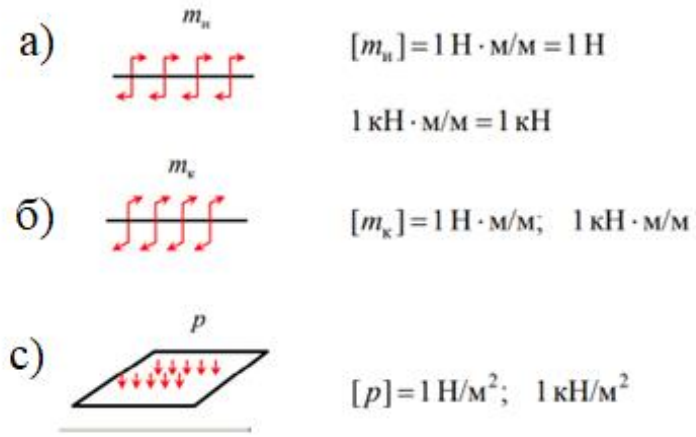


Рис. 3.5 Внешние нагрузки: а- распределнные изгибающие моменты; б- распределенные крутящие моменты; в- распределнная нагрузка по части плоскости

2. По характеру воздействия:

а) статические – не меняющиеся со временем или меняющиеся настолько медленно, что вызываемые ими ускорения и силы инерции элементов конструкции пренебрежимо малы;

б) динамические – меняющие свое значение, положение и направление в короткие промежутки времени; вызывают большие ускорения и силы инерции;
в) повторно-переменные – многократно изменяющие со временем значение или значение и знак.

3. По продолжительности действия:

а) постоянные – нагрузки, действующие в течение всего времени существования конструкции или сооружения;

б) временные – нагрузки, действующие на протяжении отдельных периодов эксплуатации.

К внешним силам также относятся реакции связей.

Элементы конструкции связаны между собой и с землей с помощью опор и шарнирами. Шарниры препятствуют линейным перемещениям, но они не пряпятствуют угловым перемещениям. Опорные связи в плоскости бывают 3 видов (Рис. 3.6):

1. Шарнирно подвижная опора, в которой присутствует одна связь;

2. Шарнирно неподвижная опора, в которой присутствуют две связи;

3. Заделка, в котрой присутствют три связи, препятствующие линейным и угловым перемещениям.

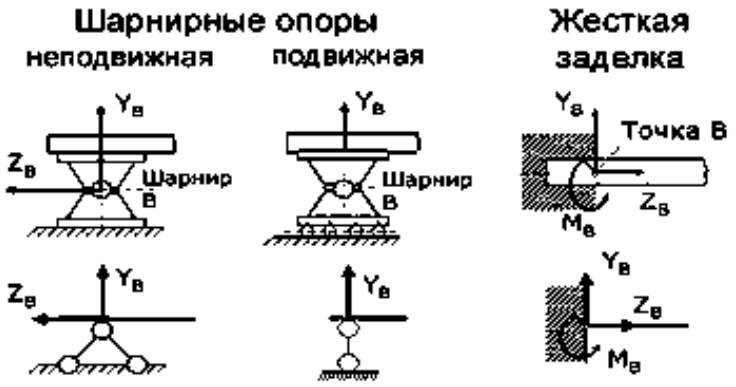


Рис. 3.6. Классификация опор и опорные связи

Современные конструкции представляют собой сложные системы, состоящие из множеств элементов. Эти элементы делятся на главные (несущие) и дополнительные. К несущим элементам относятся только те, которые воспринимают нагрузку и передают ее на другие (колонны, ригеля, несущие стены, плиты, покрытия и т.д.). К дополнительным относятся только те элементы, которые не передают нагрузки (двери, окна, перегородки и др.). Расчетная схема конструкции представляет собой упрощенную модель реального сооружения, которая состоит из несущих элементов. Например расчетная схема одноэтажного каркасного здания представляет собой раму.

Внутренние усилия

В недеформированном состоянии, т.е. при отсутствии внешних воздействий, целостность тела обусловлена силами взаимодействия атомов – внутренними силами. Внутренние силы противодействуют всякой попытке изменить взаимное расположение частиц, т.е. деформировать тело. Следовательно, величина внутренних сил в нагруженном и ненагруженном теле будет различной. В строительной механике не рассматривают и не принимают во внимание внутренние силы, действующие в теле, которое находится в ненагруженном состоянии, а изучают только те дополнительные внутренние силы, которые появляются в результате нагружения тела. Внутренние силы часто называются усилиями. Таким образом, под внутренними силами в строительной механике понимают силы взаимодействия между отдельными частями элемента или между отдельными элементами конструкции, которые возникают под действием внешних сил (Рис. 3.7). Внутренние усилия вызывают деформации и обозначаются латинскими буквами: M_x , M_y – изгибающие моменты (изгиб); M_z – крутящий момент (кручение); Q_x , Q_y - поперечные силы (сдвиг); N_z – продольная сила (растяжение-сжатие).



Рис. 3.7. Внутренние силовые факторы

. Для определения внутренних усилий в строительной механике применяют метод сечений.

Метод сечений

Алгоритм метода сечений заключается в следующем (Рис. 3.8):

1. Рассекаем брус плоскостью, перпендикулярной к оси бруса на две части.

2. Отбрасываем одну из частей и заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями, которые уравнвешивают внешние силы, действующие на отсеченную часть.
3. Составляем уравнения равновесия для оставшейся части в виде статических уравнений (3.1.).

На рис. 3.8 представлен метод сечений для определения внутренних сил. Рассмотрим стержень, на который действует система взаимно уравновешенных внешних сил F1 , F2 , F3…Fn (рис. 3.8а) и определим внутренние усилия в произвольно выбранном сечении. Стержень с приложенными к нему силами в исследуемом сечении мысленно рассечем стержень некоторой плоскостью на две части I и II (рис. 3.8, а) и рассмотрим равновесие одной из них, например, левой (рис. 3.8, б). Кроме внешних сил в каждой точке поперечного сечения будут действовать внутренние усилия, заменяющие действие отброшенной части II, уравновешивая рассматриваемую часть I. Как всякую систему сил, эти внутренние усилия можно привести к одной точке – центру приведения (обычно к центру тяжести сечения). В результате в поперечном сечении получим главный вектор R и главный момент M (рис. 3.8, в). Каждый из этих двух статических эквивалентов внутренних сил можно представить в виде трех составляющих по осям выбранных координат x, y, z. Направляя ось z по нормали к сечению и рассматривая оси x и y в его плоскости (рис. 3.8г), получаем шесть составляющих – шесть внутренних силовых факторов, где N – продольная (нормальная) сила; Qx и Qy – поперечные силы; Mz (Мкр) – крутящий момент; Mx и My – изгибающие моменты относительно x и y.

Компоненты внутренних усилий определяются из условия равновесия всех сил, действующих на левую часть (3.1). Аналогично составляются уравнения равновесия для отсеченной правой части. Из уравнений равновесия определяются значения внутренних усилий и их истинное направление. Если полученные значения со знаком плюс, то выбранные первоначально направления сохраняются, если со знаком минус, то необхлдимо поменять направления векторов на противоположное.

$$\sum Y=0;\ \sum X=0;\ \sum Z=0;\sum M_y=0;\ \sum M_x=0;\ \sum M_z=0. \qquad (3.1)$$

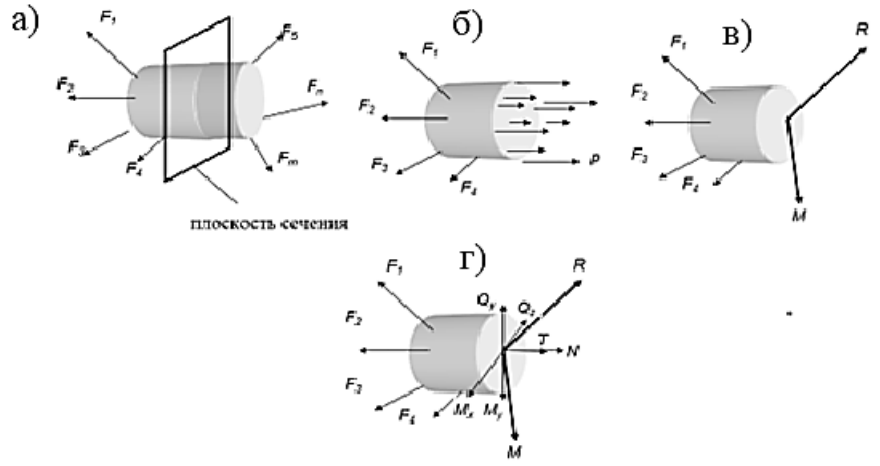


Рис. 3.8. Метод сечений для определения внутренних усилий: а- внешняя нагрузка, действующая на тело; б- отсеченная левая часть с распределенными внутренними усилиями; в- результирующие вектора внутренних усилий (сила и момент); г- компоненты вектора внутренних уилий

Уравнения 3.1 можно записать в виде 3.2, где в правой части первые слагаемые представляют компоненты неизвестных значений внутренних сил, а вторые – сумму всех внешних нагрузок, включая реакции опорных связей

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = N + \sum_I F_x^{\theta} = 0; \quad \sum M_x = M_k + \sum_I M_x\left(F^{\theta}\right) = 0; \\ \sum F_y = Q_y + \sum_I F_y^{\theta} = 0; \quad \sum M_y = M_y + \sum_I M_y\left(F^{\theta}\right) = 0; \\ \sum F_z = Q_z + \sum_I F_z^{\theta} = 0; \quad \sum M_z = M_z + \sum_I M_z\left(F^{\theta}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Например, при растяжении сжатии внешняя нагрухка направлена вдоль оси бруса, на рисунке 3.9 показан метод сечений для определения неизвестной продольной силы N_z.

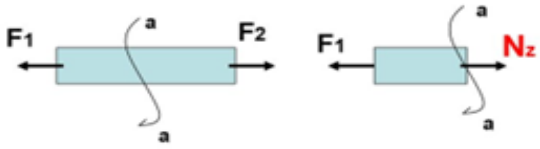


Рис. 3.9. Метод сечений при растяжении-сжатии

Составляя уравнение равновесия для левой части, получаем что $N_z=F_1$. Т.к. в правой части знак плюс, то направление продольной силы сохраняется, т.е. стержень растягивается.

Напряжение

Интенсивность внутренних сил называется напряжением. В дальнейшем под точкой понимаем малую площадку, размеры которой стягиваются в точку. Напряжения бывают нормальными, т.е. направленные по нормали к площадке, и касательные, которые лежат в плоскости рассматриваемой площадки. Эти напряжения обозначаются греческими буквами сигма и тау. На рис. 3.10 показаны нормальное σ, касательное τ напряжения и полные вектор напряжения p, являющийся результирующим вектором. Эти напряжения могут быть постоянными во всех точках или переменными, т.е. изменяться в зависимости от координат рассматриваемой точки.

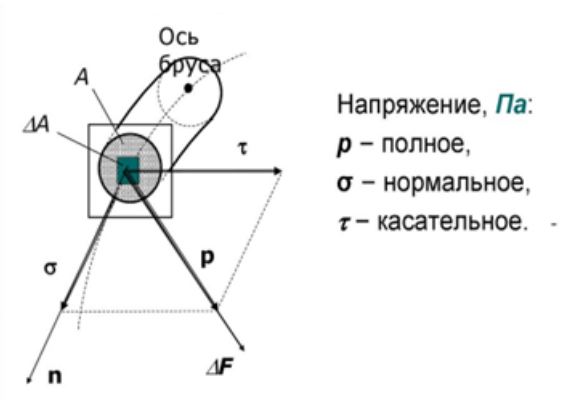


Рис. 3.10. Напряжения в точке сечения

Для определения напряжений выделим вокруг произвольной точки К (рис. 3.11, а) поперечного сечения оставленной части стержня бесконечно малый элемент площади dA. На этой площадке возникает внутренняя сила ΔR . В пределе при стремлении dA к нулю получим полное напряжение в данной точке рассматриваемого сечения, равное пределу отношения, т.е. lim dR/dA, когда dA стремится к 0. В силу малости элемента dA (рис. 3.11, б) можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, равны

по величине и одинаковы по направлению. Тогда равнодействующая этих усилий будет проходить через центр тяжести элемента dA . Следовательно, приводя эти усилия к центру тяжести элемента dA (точка К), получим главный вектор dR, а главный момент dM. Проекциями dR на оси x, y, z будут dN, dQx, dQy. Поскольку усилия на элементе можно считать распределенными равномерно, то, разделив их на площадь dA, получим: dQx/ dA; dQy/ dA; dN /dA . На рис. 3.11 показаны формулы для полного, нормального и касательных напряжений, которые представляют собой предел отношений результирующей, нормальной и сдвигающей сил (R,N,Q) к площади dA, когда площадь dA стягивается в точку. Величины σ, τ_y , τ_x называются напряжениями в точке К исследуемого сечения: σ – нормальные напряжения; τ– касательные. Размерность – Н/м^2 = Па; МН/м^2 = МПа. Таким образом, напряжение – это интенсивность внутренних усилий (т.е. внутренние усилия, приходящиеся на единицу площади). Через заданную точку сечения можно провести бесчисленное множество различно ориентированных сечений (площадок). В общем случае возникающие на них напряжения различны. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через данную точку тела, называется напряженным состоянием точки.

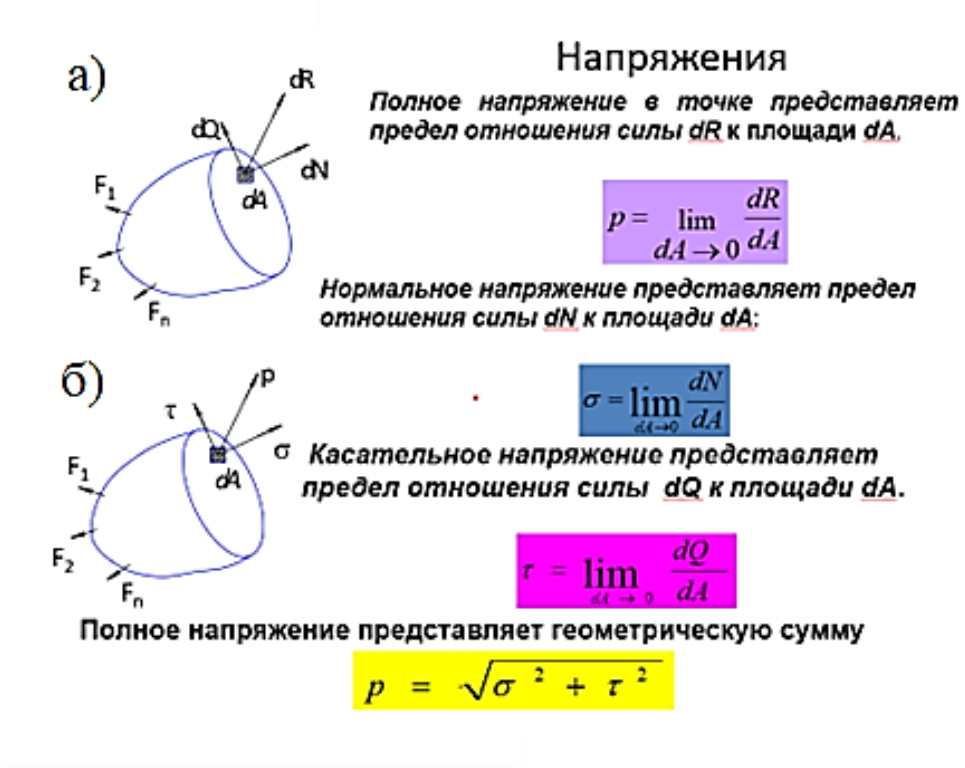


Рис. 3.11. Формулы для определения напряжений

Соответственно, зная напряжения, можно определить компоненты внутренних сил, которые представляют собой результирующие всех напряжений. Они определяются из интегральных зависимостей, указанных на рис. 3.12. Интегрирование ведется по площади сечения. Момент представляет собой пару сил, поэтому под интегралом стоит произведение напряжения на расстояние до соответствующей координатной оси.

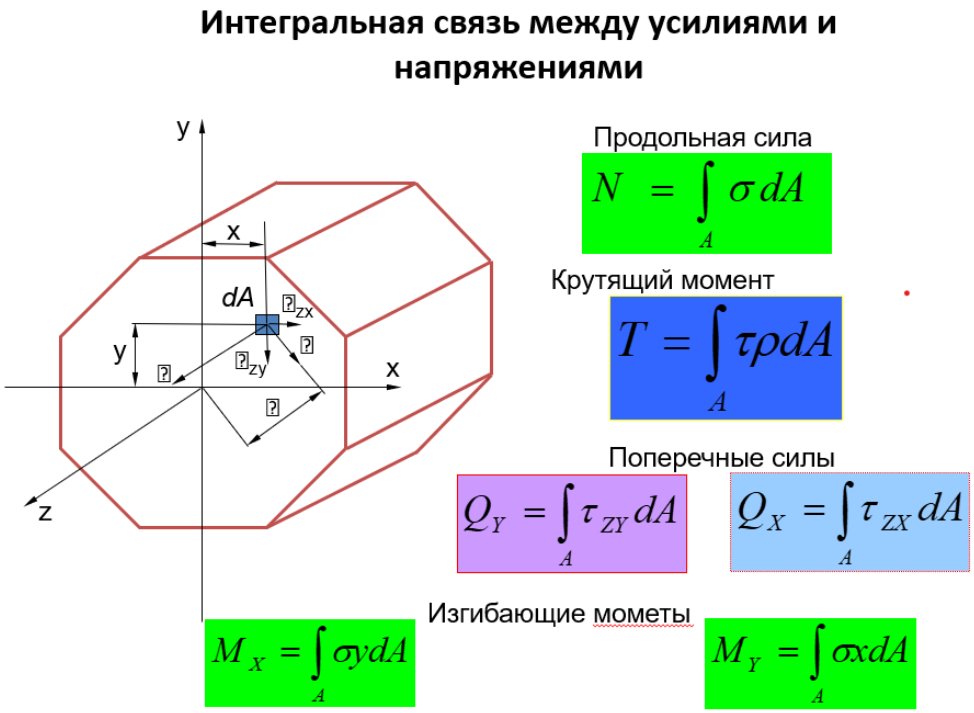
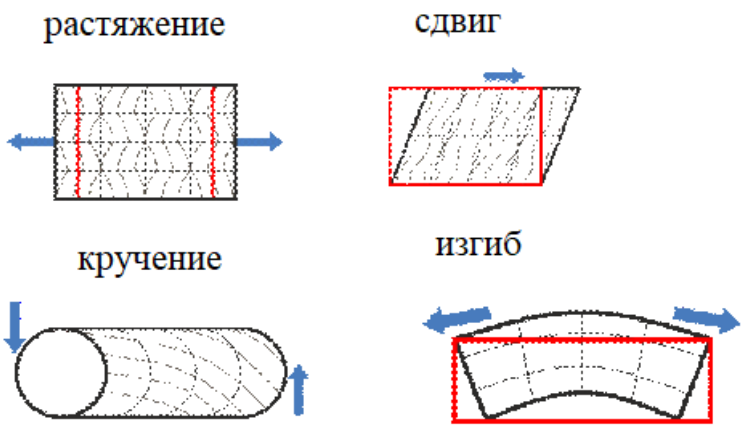


Рис. 3.12. Формулы для определения внутренних усилий

Деформации

Как элементы конструкции, так и конструкция в целом при действии внешних сил в большей или меньшей степени изменяют свои размеры и форму. Это изменение носит общее название – деформация. Деформация – это способность тел изменять свою форму и размеры под действием внешних сил.

На рис. 3.13 показаны 4 вида простейших деформаций: растяжение, сдвиг, кручение, изгиб.



Ри. 3.13. Простейшие виды деформаций

Деформации классифицируют по нескольким признакам:

1. По физическим признакам: а) упругие – исчезающие после снятия нагрузки; б) пластические (остаточные) – не исчезающие после снятия нагрузки.

2. По геометрическим признакам: а) линейные – изменяются линейные размеры тела); б) угловые – изменяется форма тела – углы в) объемные – изменяется объем тела.

3. По характеру приложения внешних нагрузок:

а) растяжение – сжатие (работа тросов, тяг и т.д.);

б) сдвиг (работа болтов, заклепок); в) кручение (работа валов, торсионов);

г) поперечный или продольный изгиб (работа балок, перекрытий, стоек, телебашен и т.д.).

В сопротивлении материалов принято допущение о малости деформаций. Это допущение заключается в том, что перемещения точек тела, вызываемые его упругими деформациями, малы по сравнению с размерами самого тела.

Лекция 4

Растяжение-сжатие. Метод сечений. Нормальные напряжения и деформации. Закон Гука. Диаграмма растяжений-сжатия

Под растяжением (сжатием) понимают такой вид дефомации, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только продольные силы N, а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Это самый простой и часто встречающийся вид деформации. Обычно он наблюдается когда внешняя нагрузка действует вдоль продольной оси стержня. Продольной осью стержня называется линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

Обычно растяжение стержня вызвано силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 4.1.

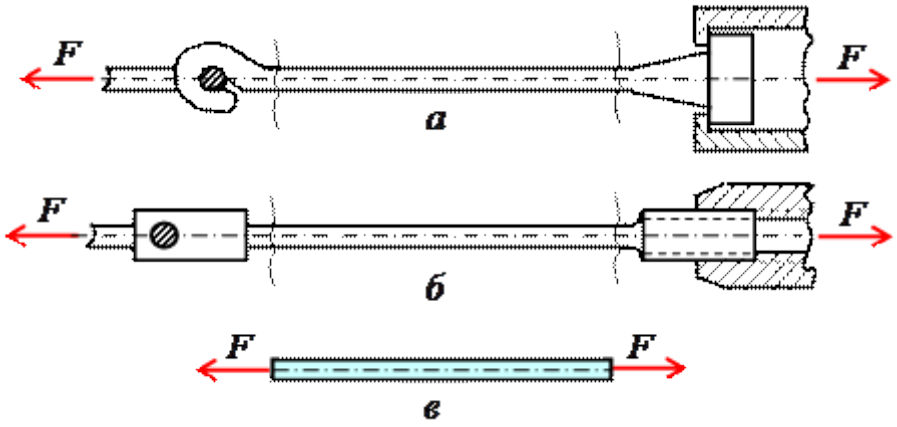


Рис. 4.1. Растяжение стержня

Во всех указанных случаях система внешних сил образует равнодействующую F, направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис.4.1, *а, б*) оказывается единой (рис. 4.1, *в*) согласно принципу Сен – Венана.

Если воспользоваться методом сечений (рис. 4.2), то становится очевидным, что во всех поперечных сечениях стержня возникают нормальные силы N_z, равные силе F (рис. 4.2, *б*).

Сжатие отличается от растяжения, формально говоря, только знаком силы N_z. При растяжении нормальная сила N_z направлена от сечения (рис. 4.2, *б*), а при сжатии – к сечению.

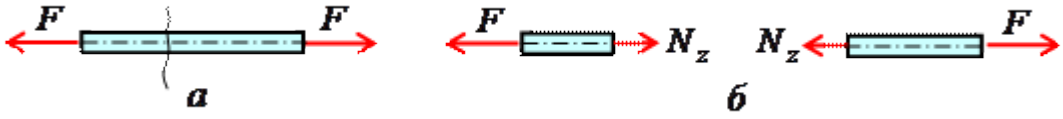


Рис. 4.2. Метод сечений для определения продольной силы

Растягивающие продольные силы принято считать положительными (рис. 4.3, а), а сжимающие – отрицательными (рис. 4.3, б).

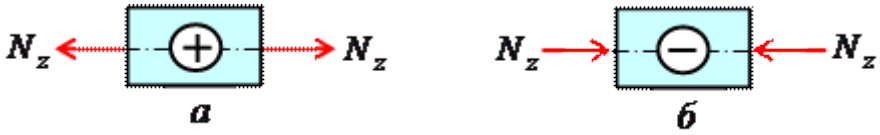


Рис. 4.3. Правило знаков при растяжении-сжатии

При расчете стержней, испытывающий деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от N_z), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Продольные силы (N_z), возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений.

График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется эпюрой продольных сил (эп. N_z). Он дает наглядное представление о законе изменения продольной силы.

Осью абсцисс служит ось стержня. Каждая ордината графика – продольная сила (в масштабе сил) в данном сечении стержня.

Эпюра позволяет определить, в каком сечении действует максимальное внутреннее усилие (например, найти N_{max} при растяжении-сжатии). Сечение, где действует максимальное усилие будем называть опасным.

Перед построением эпюр необходимо освободить брус, в котором будем строить эпюры от опорных связей (выделить объект равновесия) и приложить к нему все действующие внешние силы (активные и реактивные). Затем необходимо установить границы участков, в пределах которых закон изменения внутренних сил постоянный. Границами таких участков являются сечения, где приложены сосредоточенные силы или начинается и кончается распределенная нагрузка, а также сечения, где имеется перелом стержня.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков изложенные выше, получаем уравнения изменения внутренних сил в пределах длины каждого участка бруса. Затем, используя, полученные зависимости строим графики (эпюры) этих усилий. Ординаты эпюр в определенном масштабе откладываем от базисной линии, которую проводим параллельно оси бруса.

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, жестко защемленный правым концевым сечением и нагруженный заданной внешней сосредоточенной нагрузкой F и распределенной q (рис. 4.4, *а*).

Прежде всего определим опорную реакцию R_1, задавшись ее направлением вдоль оси z.

$$\Sigma F_z=0, \quad -R_1 - 22 + 24\cdot 0{,}6 = 0, \quad R_1 = -7{,}6 \text{ кН}.$$

Знак минус говорит о том, что действительное направление опорной реакции R_1 противоположно показанному на рис. 4.4, *а*. Исправляем его и в дальнейших расчетах знак минус у опорной реакции R_1 не учитываем (рис. 4.4, *в, г*).

Под участком будем понимать часть стержня, на которой N_z представляется некоторым аналитическим выражением. На другом участке N_z будет определяться другой функцией.

Границами участка являются начало и конец стержня, сечения, где приложены сосредоточенные нагрузки, начинается и заканчивается распределенная нагрузка.

В нашем случае стержень разбивается на два участка. В пределах первого участка мысленно рассечем стержень на две части нормальным сечением (рис. 4.4, *б, в*).

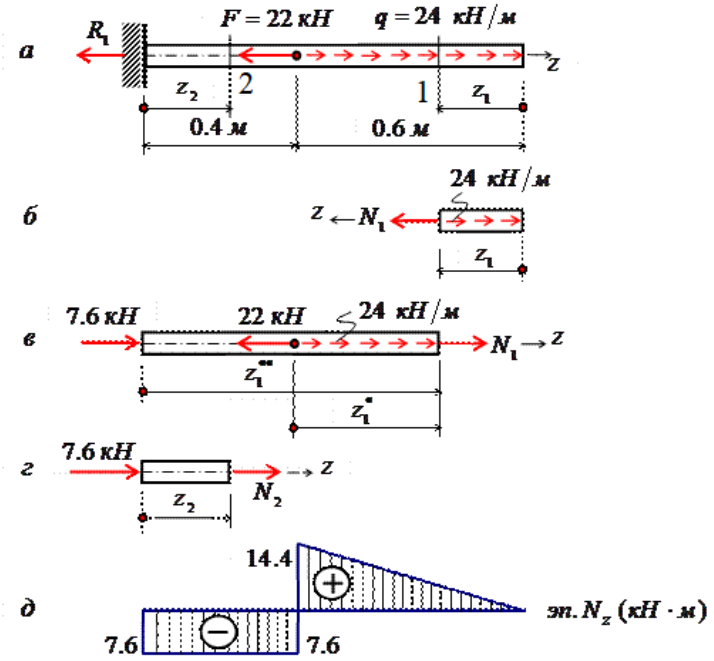


Рис. 4.4. Метод сечений: а- расчетная схема с действующей нагрузкой; б-левая часть сечения 1; в- правая часть сечения 1; г-правая часть сечения 2; д-эпюра продольных сил

Направления продольных сил (рис. 4.4, *б – г*) приняты в предположении, что они являются растягивающими (т. е. положительными). Если в результате расчета значение N_i получится со знаком «минус», то это будет означать, что в действительности стержень в этом сечении сжат.

Поскольку обе части стержня являются равноправными, то N_1 на первом участке в сечении, определяемом координатой z_1, можно определить рассматривая равновесие его правой (рис. 4.4, *б*) либо левой (рис. 4.4, *в*) частей.

В нашем случае для определения N_1 предпочтительнее рассмотреть равновесие правой части – к ней приложено меньше сил (рис. 4.4, *б*). Начало координат совмещаем с правым концевым сечением первого участка. Ось z направляем налево. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси $0 \le z_1 \le 0{,}6$ м. Спроектируем все силы, действующие на правую часть, на продольную ось.

$$\Sigma F_z = 0, \quad N_1 - 24 \cdot z_1 = 0, \quad N_1 = 24 \cdot z_1, \quad N_1(0) = 0, \quad N_1(0{,}6) = 14{,}4 \text{ кН}.$$

Поскольку функция $N_1 = 24 \cdot z_1$ получилась линейная, то для построении графика ее изменения вдоль продольной оси (эп. N_z) достаточно вычислить значения продольной силы на границах первого участка, отложить их перпендикулярно продольной оси вверх (стержень растянут) и провести через них прямую линию (рис. 4.4, *д*).

Таким образом, в пределах первого участка стержень растянут и нормальная сила изменяется по линейному закону.

Этот же результат можно получить, рассматривая равновесие левой части стержня.

Здесь при выборе системы координат рассмотрим два варианта. При первом варианте начало координат совмещаем с левым концевым сечением второго участка. Ось *z* направляем направо. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси 0,4 м$\le z_1^{\bullet\bullet} \le$1,0 м. Спроектируем все силы, действующие на левую часть, на продольную ось.

$$\Sigma F_z = 0, \quad N_1 + 7{,}6 - 22 + 24 \cdot (z_1^{\bullet\bullet} - 0{,}4) = 0, \quad N_1 = 24 - 24 \cdot z_1^{\bullet\bullet}, \quad N_1(0{,}4) = 14{,}4 \text{ кН}, \quad N_1(1{,}0) = 0.$$

Во втором варианте введем скользящую систему координатных осей. Начало координат совмещаем с левым концевым сечением первого участка. Ось *z* направляем направо. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси $0 \le z_1^{\bullet} \le 0{,}6$ м. Имеем

$$\Sigma F_z = 0, \quad N_1 + 7{,}6 - 22 + 24 \cdot z_1^{\bullet} = 0, \quad N_1 = 14{,}4 - 24 \cdot z_1^{\bullet}, \quad N_1(0) = 14{,}4 \text{ кН}, \quad N_1(0{,}6) = 0.$$

Заметим, что при выборе скользящей системы координат, функция $N_1=f(z, q)$ меняется от нуля, что делает последующие расчеты менее трудоемкими.

Сравнивая все три варианта определения N_1, приходим к выводу, что когда мы оставляем ту часть стержня, к которой приложено меньше внешних нагрузок, то расчеты оказываются более простыми.

При некотором навыке можно сразу составить выражение для N_1, не изображая отдельные части бруса, на которые он расчленяется поперечными сечениями (рис. 4.4, *б, в*). Например,

при $0 \le z_1 \le 0{,}6$ м, $N_1 = 24 \cdot z_1$;
при $0{,}4 \text{ м} \le z_1'' \le 1{,}0$ м, $N_1 = 7{,}6 + 22 - 24 \cdot (z_1'' - 0{,}4)$;
при $0 \le z_1' \le 0{,}6$ м, $N_1 = -7{,}6 + 22 - 24 \cdot z_1'$.

Таким образом, на основании метода сечений продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения, на его продольную ось.

Причем проекция внешней силы берется со знаком плюс, если сила растягивает часть стержня от точки ее приложения до рассматриваемого сечения и, наоборот, со знаком минус – если сжимает.

Осталось определить значение продольной силы N_2 в произвольном сечении, определяемом координатой z_2, на втором участке (рис. 4.4, *г*). Так как продольная сила N_2 численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к стержню слева от сечения (рассматриваем равновесие левой части стержня), то $N_2 = -7{,}6$ кН (реакция $R_1=7{,}6$ кН сжимает часть стержня длиной z_2). Здесь принимаем скользящую систему координат, с началом в левом концевом сечении второго участка. Ось z направляем направо.

Эпюра N_z на втором участке представлена на рис 4.4, *д* в виде прямоугольника со знаком минус, поскольку $N_2 = -7{,}6$ кН =const. Таким образом, в пределах второго участка стержень претерпевает сжатие постоянной нормальной силой.

Каждая ордината эп. N_z (рис. 4.4, *д*) в принятом масштабе равна величине продольной силы, действующего в том поперечном сечении стержня, которому соответствует эта ордината.

Видно, что на участке между точками приложения сосредоточенных сил R_1 и F продольная сила имеет постоянное значение, а на участке, где приложена распределенная внешняя нагрузка, меняется по линейному закону (рис. 4.4, *д*).

Характерно, что скачки на эп. N_z обусловлены наличием в соответствующих сечениях сосредоточенных сил R_1 и F.

Напряжение в поперечных сечениях стержня

Нормальная сила N приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении и, в соответствии с этим, определяется следующим образом:

$$N = \int_A \sigma dA. \tag{4.1}$$

Но из этой формулы нельзя найти закон распределения нормальных σ напряжений в поперечных сечениях стержня. Для этого обратимся к анализу характера его деформирования.

Если на боковую поверхность этого стержня нанести прямоугольную сетку (рис. 4.2, *б*), то после нагружения поперечные линии *a-a, b-b* и т.д. переместятся параллельно самим себе, откуда следует, что все поверхностные продольные волокна удлинятся одинаково. Если предположить также, что и внутренние волокна работают таким же образом, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует гипотезе плоских сечений (гипотезе Бернулли).

Значит, все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N}{A}, \tag{4.2}$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

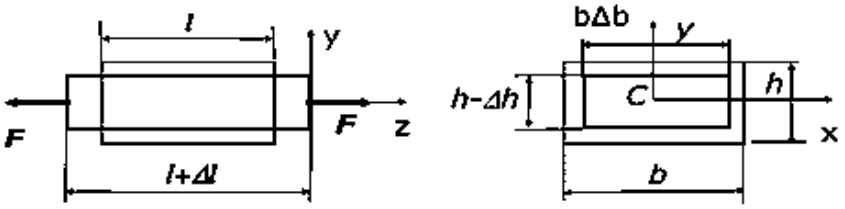
В инженерных сооружениях встречаются растянутые или сжатые элементы, имеющие отверстия. В сечениях с отверстием определяют осредненные нормальные напряжения по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A_{нт}}, \tag{4.3}$$

где $A_{нт} = A - A_{осл}$ - площадь поперечного сечения нетто; A - площадь поперечного сечения брутто; $A_{осл}$ - площадь его ослабления.

Деформации и перемещения. Закон Гука

Рассмотрим однородный стержень с одним концом, жестко заделанным, и другим - свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 4.5). До нагружения стержня его длина равнялась l, после нагружения она стала равной $l + \Delta l$ (рис. 4.5). Величину Δl называют абсолютной продольной деформацией (абсолютным удлинением) стержня. В большинстве случаев оно мало по сравнению с его первоначальной длиной l ($\Delta l << l$).



$\varepsilon = \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}$ - относительная продольная деформация

$\varepsilon_x = -\frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_y = -\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon'$ - относительная поперечная деформации

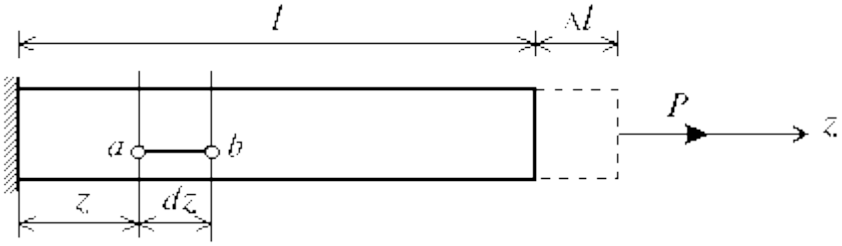


Рис. 4.5. Деформации при растяжении-сжатии

Если в нагруженном стержне напряженное состояние является однородным, т.е. все участки стержня находятся в одинаковых условиях, деформация ε остается одной и той же по длине стержня и равной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (4.4)$$

Величина ε называется ***относительной продольной деформацией.***

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной *dz* (рис. 4.5). При растяжении он увеличит свою длину на величину Δdz и его деформация составит:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \tag{4.5}$$

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии закон Гука записывается в следующем виде (***нормальные напряжения в поперечном сечении прямо пропорциональны относительной линейной деформации*** ε**):**

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{4.6}$$

Величина *E* представляет собой коэффициент пропорциональности, называемый ***модулем упругости материала первого рода*** (***модуль продольной упругости***). Его величина постоянна для каждого материала. Он характеризует жесткость материала, т.е. способность сопротивляться деформированию под действием внешней нагрузки.

Из совместного рассмотрения уравнений (4.5) и (4.6) получим:

$$\Delta dz = \sigma \frac{dz}{E},$$

откуда с учетом того, что

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \quad \text{и} \quad \Delta l = \int_0^l \Delta dz,$$

окончательно получим:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA}. \tag{4.7}$$

Если стержень изготовлен из однородного изотропного материала с $E = const$, имеет постоянное поперечное сечение $A = const$ и нагружен по концам силой *P*, то из (4.7) получим

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}. \tag{4.8}$$

Зависимость (4.8) также выражает закон Гука. Знаменатель *EA* называется ***жесткостью при растяжении - сжатии*** или ***продольной жесткостью.***

При решении многих практических задач возникает необходимость, наряду с удлинениями, обусловленными действием механических нагрузок, учитывать также удлинения, вызванные температурным воздействием. В этом случае пользуются принципом независимости действия сил, и полные деформации рассматривают как сумму силовой и температурной деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t, \tag{4.9}$$

где α - коэффициент температурного расширения материала; t -перепад температуры тела. Для однородного стержня, нагруженного по концам продольными силами P и равномерно нагретого по длине, получим:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} + l\alpha t. \tag{4.10}$$

На рис. 4.6 представлен график зависимости между внешней растягивающей силой и удлиненением образца, полученный при лабораторном испытании стального образца.

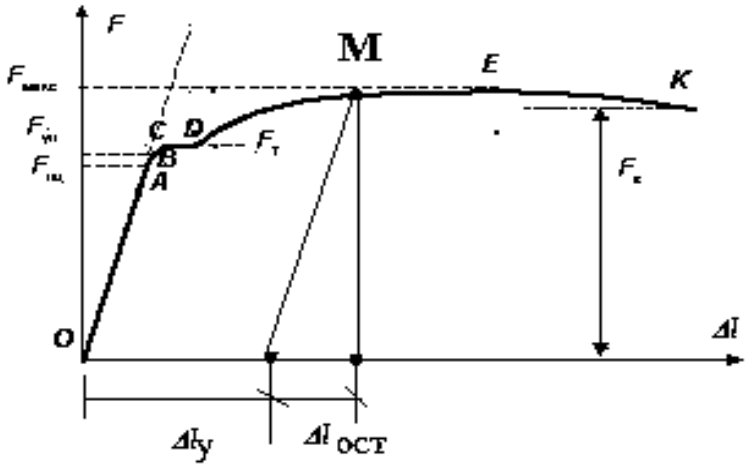


Рис. 4.6. График зависимости между силой и удлинением, полученный при испытании стального образца на растяжение

Из графика видны характерные точки и участки, характеризующие различные состояние стального образца: упругое (ОА), нелинейно-упругое (АВ), пластическое (СД), упрочнение (ДМ), образование шейки (МК), в точке К происходит разрушение. Соответственно на участке ОА упругие

деформации – исчезающие после снятия нагрузки; начиная с точки В появляются остаточнные деформации– не исчезающие после снятия нагрузки. Например в точке М при разгрузке остаточные деформации равны $\Delta l_{ост}$. Используя формулы 4.3 и 4.4 можно перейти к диаграмме растяжения, представляющей зависимость между напряжениями и деформациями при испытании стального образца (Рис. 4.7).



Рис. 4.7. Диаграмма растяжения стального образца

По аналогии с графиком (Рис. 4.6) в диаграмме (4.7) указаны характерные точки и участки, характеризующие различые состояние образца. Граница упругого состояния обозначена - $\sigma_{пр}$ (предел пропорциональности); напряжение при текучести - $\sigma_т$ (предел текучести); максимальное напряжение – $\sigma_в$ (временное сопротивление); напряжение в момент разрыва - $\sigma_р$. Остаточные деформации бозначены $\varepsilon_{ост}$.

На рис. 4.8 показаны результаты испытаний образца на сжатие пластичных и хрупких материалов. Пластичные материалы характеризуются площадкой текучести, для хрупких метриалов площадка текучести отсутствует. На рис. 4.9 показаны диаграммы растяжения-сжатия для пластичного и хрупкого материалов.

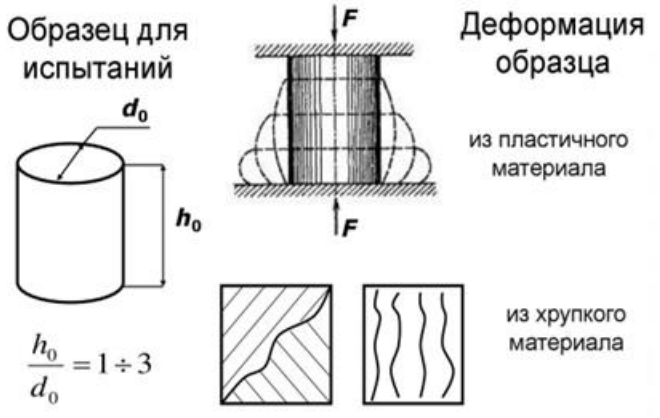


Рис. 4.8. Испытание на сжатие пластичного и хрупкого материалов

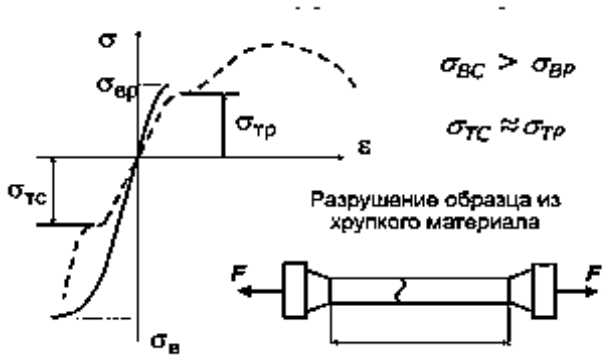


Рис. 4.9. Диаграммы растяжения-сжатия: пунктирная кривая- для пластичного: жирная- для хрупкого материалов

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение ее безопасной эксплуатации. Важнейшим условием, обеспечивающим безопасную эксплуатацию конструкции, является условие прочности. Существуют различные методы обеспечения прочности конструкций. Расчеты на прочность при растяжении-сжатии бывают 3 видов: проверочный расчет; проектый расчет и определение допускаемой нагрузки (грузоподъемность). На рис. 4.10 представлены формулы и соответствующие условия для 3 видов расчета.

$$\sigma_{max} = \max\left(\frac{N_z}{A}\right) \le [\sigma] \quad \bullet \text{ проверочный расчет}$$

$$A \ge \frac{\max N_z}{[\sigma]} \quad \bullet \text{ проектный расчет}$$

$$[N_z] = A[\sigma] \quad \bullet \text{ определение допускаемой нагрузки} \qquad (4.11)$$

Рис. 4.10. Расчеты на прочность

На рис. 4.11 представлены формулы для допускаемых напряжений и коэффициентов запаса прочности для хрупких и пластичных материалов.

$[\sigma]=\frac{\sigma_{\lim}}{[n]}$ - допускаемое напряжение

$\sigma_{\lim}$ - предельное (опасное) напряжение

$\sigma_{\lim}=\sigma_T$ - для пластических материалов

$\sigma_{\lim}=\sigma_B$ - для хрупких материалов

$[n]$ - коэффициент запаса прочности

$[n]=[n_T]=1{,}2\div 2{,}5$ - для пластических материал

$[n]=[n_B]=2\div 5$ - для хрупких материалов

(4.12)

Рис. 4.10. Формулы для допускаемых напряжений и коэффициента запаса прочности

Потенциальная энергия деформации

Внешние силы, приложенные к упругому телу и вызывающие изменение геометрии тела, совершают работу W на соответствующих перемещениях. Одновременно с этим в упругом теле накапливается потенциальная энергия его деформирования U. При действии динамических внешних нагрузок часть работы внешних сил превращается в кинетическую энергию движения частиц тела K. Приняв энергетическое состояние системы до момента действия данных сил равным нулю, и в условиях отсутствия рассеивания энергии, уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$W = U + K. \qquad (4.13)$$

При действии статических нагрузок $K = 0$, следовательно,

$$W = U. \qquad (4.14)$$

Это означает, что при статическом нагружении работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации. При разгрузке тела производится работа за счет потенциальной энергии деформации, накопленной телом. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии. Это свойство упругого тела широко используется в технике, например, в заводных пружинах часовых механизмов, в амортизирующих рессорах и др. В случае простого растяжения (сжатия) для вывода необходимых расчетных зависимостей потенциальной энергии деформации рассмотрим решение следующей задачи.

На рис. 4.11, *а* изображен растягиваемый силой P стержень, удлинение которого соответствует отрезку Δl, ниже показан график изменения величины

удлинения стержня Δl в зависимости от силы P (рис. 4.11, *б*). В соответствии с законом Гука этот график носит линейный характер.

Пусть некоторому значению силы P соответствует удлинение стержня Δl. Дадим некоторое приращение силе ΔP - соответствующее приращение удлинения составит $d(\Delta l)$. Тогда элементарная работа на этом приращении удлинения составит:

$$dW = (P + dP) \cdot d(\Delta l) = P \cdot d(\Delta l) + dP \cdot d(\Delta l), \tag{4.15}$$

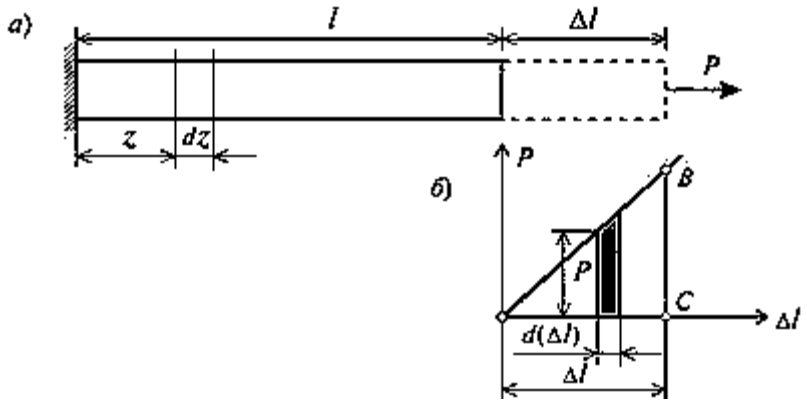


Рис.4.11. Зависимость между внешней нагрузкой и удлинением стержня

В 4.15 вторым слагаемым, в силу его малости, можно пренебречь, и тогда

$$dW = P \cdot d(\Delta l). \tag{4.16}$$

Полная работа равна сумме элементарных работ, тогда, при линейной зависимости “нагрузка - перемещение”, работа внешней силы P на перемещении Δl будет равна площади треугольника OCB (рис. 4.11), т.е.

$$W = 0{,}5P \cdot \Delta l. \tag{4.17}$$

В свою очередь, когда напряжения σ и деформации ε распределены по объему тела V равномерно (как в рассматриваемом случае) потенциальную энергию деформирования стержня можно записать в виде:

$$U = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon, \tag{4.18}$$

Поскольку, в данном случае имеем, что $V = Al, P = \sigma A, \sigma = E\varepsilon$, то

$$U = Al\int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = 0{,}5AlE\,\varepsilon^2 = 0{,}5\sigma A\Delta l = 0{,}5P\Delta l, \tag{4.19}$$

т.е. подтверждена справедливость (4.17).

С учетом (4.8) для однородного стержня с постоянным поперечным сечением и при *P = const* из (4.19) получим:

$$U = \frac{P^2 l}{2EA}. \tag{4.20}$$

Единицей измерения потенциальной энергии деформации является 1Нм = 1Дж.

Расчеты статически определимых стержней

Статически определимый стержень – это стержень, который можно рассчитать, используя только уравнения равновесия (уравнения статики).

В любой науке, которая называется «точной» и в которой используются аналитические методы описания состояний и явлений, не обойтись без моделей. В нашем случае при решении различных задач мы каждый раз будем выбирать для рассматриваемого объекта расчетную схему.

Расчетная схема – это упрощенная схема конструкции или ее элементов, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей. При этом расчетная схема должна отражать все наиболее существенное для характера работы данной конструкции и не содержать второстепенных факторов, мало влияющих на результаты ее расчета. Построение и обоснование расчетной схемы – ответственный этап проектирования и расчета конструкции.

Деформации при действии собственного веса

При определении влияния собственного веса на деформацию при растяжении и сжатии стержней придется учесть, что относительное удлинение различных участков стержня будет переменным, как и напряжение $\sigma(x)$. Для вычисления полного удлинения стержня постоянного сечения определим сначала удлинение бесконечно малого участка стержня длиной dx, находящегося на расстоянии x от конца стержня (рис.4.12).

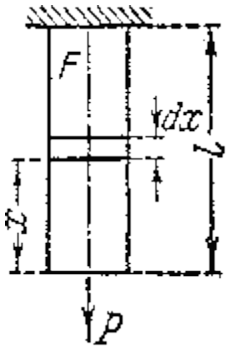


Рис.4.12. Учет собственного веса

Абсолютное удлинение этого участка равна

$$\Delta dx = \frac{(P + \gamma x F)dx}{EF} = \frac{dx}{E}\left[\frac{P}{F} + \gamma x\right].$$

Полное удлинение стержня Δl равно:

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{dx}{E}\left[\frac{P}{F} + \gamma x\right] = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{\left[P + \frac{\gamma Fl}{2}\right]}{EF}.$$

Величина γFl представляет собой полный вес стержня. Таким образом, для вычисления удлинения от действия груза и собственного веса можно воспользоваться прежней формулой:

$$\Delta l = \frac{Sl}{EF}$$

подразумевая под S внешнюю силу и половину собственного веса стержня.

Что же касается деформаций стержней равного сопротивления, то, так как нормальные напряжения во всех сечениях одинаковы и равны допускаемым $[\sigma]$, относительное удлинение по всей длине стержня одинаково и равно

$$\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}$$

Абсолютное же удлинение при длине стержня l равно:

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]l}{E} = \frac{Pl}{EF_0}$$

Деформацию ступенчатых стержней следует определять по частям, выполняя подсчеты по отдельным призматическим участкам. При определении деформации каждого участка учитывается не только его собственный вес, но и вес тех участков, которые влияют на его деформацию, добавляясь к внешней силе. Полная деформация получится суммированием деформаций отдельных участков.

Лекция 5

Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии

Если при рассмотрении заданной системы, находящейся в равновесном состоянии от действия заданных внешних нагрузок, все реакции в связях закрепления можно определить с помощью уравнений равновесия, без использования дополнительных условий, то такая система называется ***статически определимой.***

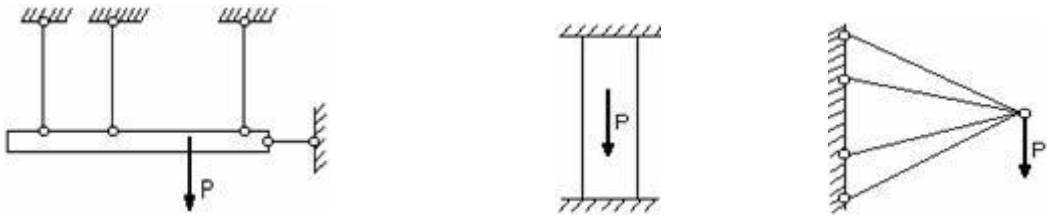
Системы, в которых количество наложенных связей больше, чем число независимых уравнений равновесия, называются ***статически неопределимыми.***

Конструкции, состоящие из стержней, соединенных шарнирами, называются ***шарнирно-стержневыми***. В этих конструкциях есть стержни, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость конструкции и при удалении которых система превращается в механизм. Такие стержни будем называть ***необходимыми***. Если же при удалении некоторых стержней геометрическая неизменяемость конструкции не нарушается, то такие стержни назовем ***лишними***. Лишними такие связи называются только потому, что они не являются необходимыми для обеспечения равновесия конструкции и ее геометрической неизменяемости, хотя постановка их диктуется условиями эксплуатации. По условиям прочности и жесткости конструкции лишние связи могут оказаться необходимыми.

В статически определимой системе есть только необходимые стержни, в статически неопределимой – число лишних стержней равно степени статической неопределимости.

На рис.5.1приведены схемы 3-х плоских систем с «лишними» связями: *а* – стержневой подвески; *б* – стержня, закрепленного обоими концами; *в* – стержневого кронштейна. В схеме, показанной на рис. 5.1, *в*, вся система состоит из упругих звеньев. Подсчет числа наложенных связей производится в этом случае следующим образом. Каждый стержень связан с опорной поверхностью двумя связями. Всего таких связей 8. Шарнир, соединяющий концы стержней, снимает связи, ограничивающие относительный или взаимный их поворот. При соединении двух стержней одним шарниром снимается одна связь, трех стержней – две связи, четырех – три и т.д. В данном случае снимаются три связи. Следовательно, всех связей,

наложенных на эту систему оказывается пять, две из которых могут считаться «лишними».



а) **б)**

Рис. 5.1. Статически неопределимые системы: *а* – стержневой подвески; *б* – стержня, закрепленного обоими концами; *в* – стержневого кронштейна

Статически неопределимые конструкции характеризуются рядом особенностей, по сравнению со статически определимыми системами. Заключаются они в том, что в элементах статически неопределимых систем напряжения возникают не только от действия внешних сил, но и в результате изменения температуры, неточности изготовления деталей, неточностей их сборки, смещения мест опорных креплений и ряда других причин. Объясняется это тем, что деформация одного из элементов в статически неопределимой системе приводит к деформации и других ее элементов.

Например, если один из стержней системы (рис. 5.1, *в*) изготовлен по длине неточно, то соединение концов стержней одним шарниром возможно только путем деформации всех стержней.

Сила, возникающая при деформации одного из стержней, вызывает усилия в других стержнях, находящихся с ним в шарнирном соединении. Смонтированная система приходит в равновесие, следовательно, совокупность сил системы обеспечивает ее равновесие. Эти силы вызывают соответствующие, называемые начальными, напряжения в стержнях.

В статически неопределимых конструкциях при изменении температуры ее элементов по сравнению с температурой, при которой осуществлялась сборка, возникают дополнительные усилия и напряжения, которые принято называть температурными.

Распределение усилий между элементами системы зависит от их жесткости. Если увеличить жесткость какого- либо элемента, то он примет на себя большее усилие. Изменяя соотношение жесткостей элементов конструкций, можно менять распределение усилий между ними.

Эти особенности статически неопределимых конструкций должны учитываться при проектировании или применении таких систем.

Статически неопределимые системы обладают повышенной «живучестью». Разрушение одного или нескольких элементов (в зависимости от числа дополнительных связей) не вызывает потерю несущей способности

конструкции в целом. Так разрушение даже двух стержней в системе, показанной на рис. 5.1, *в* не приводит к потере способности воспринимать силу P оставшимися двумя стержнями, конечно, при условии их достаточной прочности.

Для определения внутренних усилий необходимо помимо уравнений статики еще дополнительные уравнения. Число дополнительных уравнений характеризует степень статической неопределимости. Степень статической неопределимости характеризует количество лишних связей для равновесия системы и равна разности между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики. Реальные системы имеют высокую степень статической неопределимости, т.е. в них количество лишних связей доходит до бесконечности, тем самым они обладают большой прочностью и жесткостью. Для практических расчетов расчетную схему берут с конечным числом степени свободы. Для составления дополнительных уравнений необходимо учитывать характер деформации системы (геометрические уравнения перемещений). Эти уравнения имеют кинематический характер и называются уравнениями совместности деформаций. Рассматривая деформации системы, всегда можно найти столько дополнительных уравнений, сколько нужно, чтобы полное число уравнений вместе с условиями статики равнялось числу неизвестных. Всякая конструкция деформируется так, что не происходит разрывов стержней, разъединения их друг от друга, или не предусмотренных схемой сооружения перемещений одной части конструкции относительно другой. В этом заключается совместность деформаций элементов системы.

Усилия в элементах статически определимой системы возникают только от действия внешней нагрузки. В элементах статически неопределимой системы усилия могут возникать и при отсутствии внешней нагрузки, причиной могут быть – изменение температуры, смещение опорных закреплений, неточности изготовления отдельных элементов конструкций.

Статически неопределимые системы обладают следующими особенностями:

1. недостающие для определения усилий уравнения могут быть получены только при помощи изучения совместности деформаций данной системы;
2. распределение усилий между элементами статически неопределимой системы зависит от соотношения между площадями, модулями упругости и длинами этих элементов;
3. чем больше жесткость данного элемента, т.е. меньше его длина и больше площадь, и модуль упругости, тем сравнительно большую долю усилия он воспринимает на себя.

Дополнительные уравнения составляются на основании одного общего принципа – условие совместности деформаций. Общий метод расчета статически неопределимых систем состоит из следующего:

1. Определение степени статической неопределимости. Указать неизвестные усилия.

2. Записать уравнения статики для них.
3. Составить дополнительные уравнения (уравнения совместности деформаций).
4. Решать совместно эту систему уравнений. Определив неизвестные усилия, сделать необходимый расчет на прочность или жесткость.

Степень статической неопределимости обозначается «n». Для плоской стержневой системы величину n можно определить по следующей формуле:

$$n = 2Ш + C_0 - 3C \quad (5.1)$$

где С - количество стержней, из которых состоит система;
Ш – количество простых шарниров, соединяющие стержни;
C_0 – количество опорных связей.

В заделке количество опорных связей равно 3, в шарнирно неподвижной опоре – 2, в шарнирно подвижной опоре – 1.

Для фермы, где соединение в узлах представляют собой идеальные шарниры, степень статической неопределимости можно определить по следующей формуле:

$$n = C + C_0 - 2У \quad (5.2)$$

где С - количество стержней, из которых состоит ферма;
У – количество узлов (под узлом понимаем точку, где соединяются стержни);
C_0 – количество опорных связей.

На рисунке 5.2 представлен жесткий брус AF, поддерживаемый в равновесии стержнями и шарнирно неподвижной опорой в точке А. Определим степень статической неопределимости, используя формулу (5.1). Для равновесия бруса необходимо наличие шарнира в точке А и одного из стержней, поэтому на рисунке 5.2a) – один раз статически неопределимая система (n=1); на рисунке 5.2 b) – дважды статически неопределимая система (n=2); на рисунке 5.2 c) – три раза статически неопределимая система (n=3). Пунктирными линиями показаны положения жесткого бруса в результате деформаций стержней, т.е. под действием внешней нагрузки Р жесткий брус может только поворачиваться относительно шарнира А, при этом стержни растягиваются или сжимаются в зависимости от принятой схемы деформации. На рисунке 5.2 показано, что жесткий брус, как твердое тело, может только поворачиваться относительно шарнира А (выбрано по часовой стрелке). Для зарисовки возможной схемы перемещений необходимо учитывать только те перемещения, которые не противоречат наложенным связям. На рисунке 5.2a) – два стержня растягиваются; на рисунке 5.2 b) – три стержня сжимаются; на рисунке 5.2 c) – верхний стержень – растягивается, три нижних сжимаются. Если в результате решения усилия получатся со знаком плюс, то выбранные

направления усилий верны, если со знаком минус, то необходимо поменять направления усилий на противоположные.

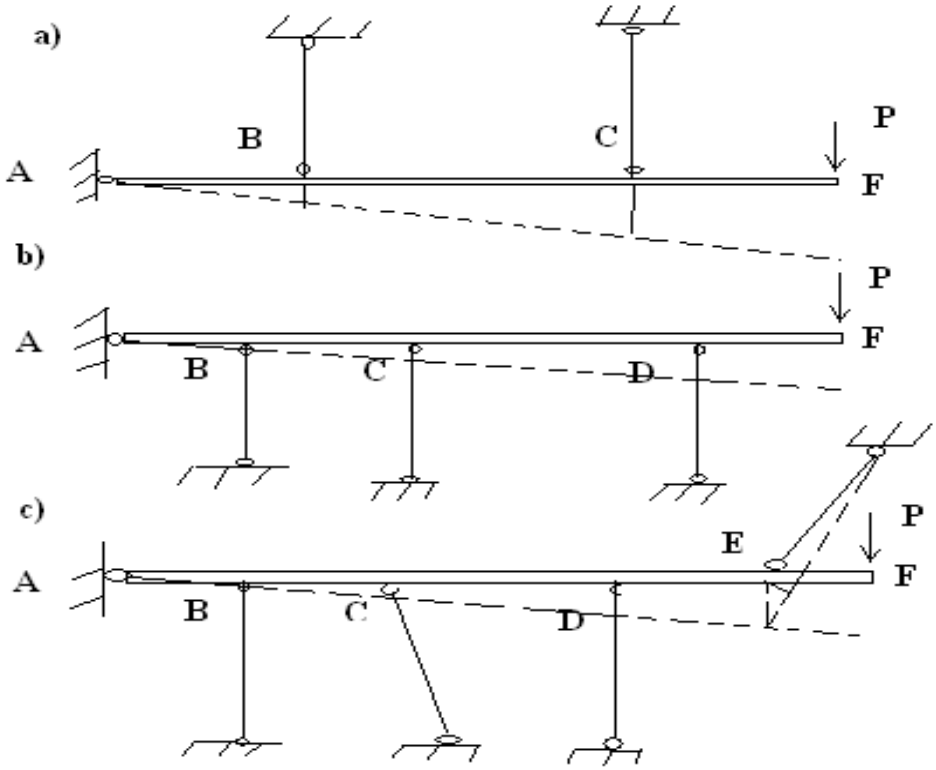


Рисунок 5.2. Статически неопределимые сиержневые системы

Рассмотрим в качестве примера стержень, защемленный обоими концами и нагруженный силой P (рисунок 5.3a). Эта система - один раз статически неопределима (n=1), т.к. для равновесия достаточна одна заделка, например B, заделка A – лишняя для равновесия стержня [16-22]. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Под действием силы P в заделках A,B возникают неизвестные реакции R1, R2. Неизвестные усилия вызывают деформации растяжение или сжатие, поэтому направлены вдоль оси стержня, выберем их направления, как указано на рисунке 5.3b.

Согласно выбранным направлениям неизвестных реакций и заданному направлению внешней силы P уравнения равновесия записываем в виде суммы проекций всех сил на вертикальное направление, т.е. в виде:

$$R1+R2-P=0$$

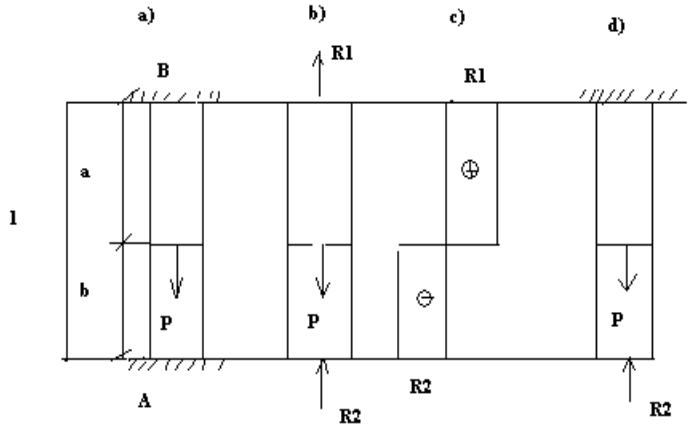


Рисунок 5.3. Стержень, защемленный двумя концами

Это уравнение содержит два неизвестных, поэтому необходимо составить еще одно дополнительное уравнение нестатического характера. Это дополнительное уравнение имеет кинематический смысл, т.е. составляется на основании того, что перемещение в заделке равно нулю, например в заделке А. Отбросим нижнюю заделку и заменим ее влияние на стержень реакцией R_2 (рисунок 5.3b). Используем принцип независимости действия сил, т.е. рассмотрим действие каждой силы в отдельности, и полное перемещение представим в виде суммы деформаций от каждой силы в отдельности.

На рисунке 5.3c показана эпюра продольных сил, на нижнем участке при сжатии продольные силы – отрицательные, на верхнем – положительные. Рассмотрим действие каждой силы в отдельности. Под действием силы P деформируется только верхний участок длиной a, в результате сечение, где приложена нагрузка, перемещается вниз на величину Pa/EA , где EA – жесткость при растяжении или сжатии. Нижний участок стержня длиной b при этом не деформируется, а перемещается вниз, как жесткое тело на такую же величину, на какую перемещается сечение, где приложена сила P. На эту же величину перемещается вниз и нижний конец стержня A.

По аналогии рассмотрим действие только силы R_2, а сила P отсутствует. Под действием силы R_2, (рисунок 5.3d) деформируется весь стержень, в результате нижний конец стержня перемещается вверх на величину $- R_2 l /EA$, где l – длина стержня. Знак минус означает, что происходит деформация сжатия. Итак полное перемещение нижнего конца стержня складывается из двух слагаемых и приравнивается нулю, так как в сечении A заделка. Это уравнение имеет следующий вид:

$$Pa/EA- R_2 l /EA=0$$

Отсюда определяется неизвестная реакция R_2, т.е. получаем

$R_2 = Pa/l$

Подставляя это значение в уравнение статики, получаем значение реакции верхнего конца стержня:

$R_1 = Pb/l$

После определения реакций R_1, R_2 можно указать ординаты эпюры продольной силы. Дальнейший расчет ничем не отличается от расчета статически определимой системы, т.е. можно сделать проверочные или проектные расчеты.

Необходимо отметить, что при расчете статически неопределимых систем (так же, как и статически определимых систем) направление неизвестных реакций можно принять произвольно. Если решение получится со знаком плюс, то принятое направление неизвестного верное; если решение получится со знаком минус, то истинное направление неизвестного будет противоположно выбранному. В данном примере обе неизвестные реакции получились положительные, что означает: реакции R_1 , R_2 действительно направлены вверх.

Рассмотрим следующий пример. Плоская статически неопределимая стержневая система нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой (рис.5.4). Стержни изготовлены из разных материалов, нормативные коэффициенты и механические характеристики которых приведены в таблице 1.

Заданная система – один раз статически неопределима (n=1). Отбросим 3 связи, заменив их действие неизвестными значениями продольных сил в стержнях системы (рисунок 5.4). Выбранные направления неизвестных продольных сил положительны, т.к. вызывают в стержнях растяжение. Составим для них уравнения статики в виде суммы проекций всех сил на направление осей x, y. Уравнения статики содержат три неизвестных, поэтому для решения задачи необходимо составить одно дополнительное уравнение, исходя из рассмотрения деформаций системы (Рис. 5.5). Пусть точка, соединяющая стержни, т.е.узел А сместится и займет новое положение $A^{/}$. Деформации стержней Δl_1 , Δl_2 , $\Delta\ l_3$ связаны между собой геометрическими зависимостями (Рис. 5.5).

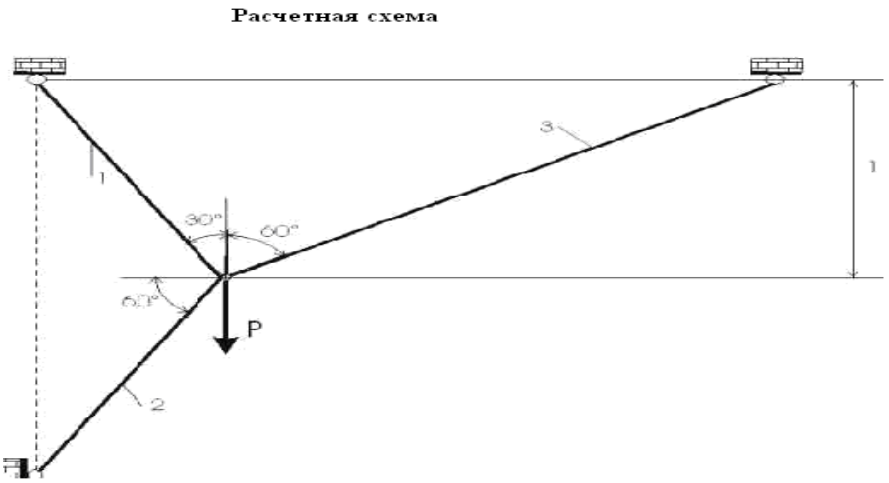


Рисунок 5.4. Расчетная схема

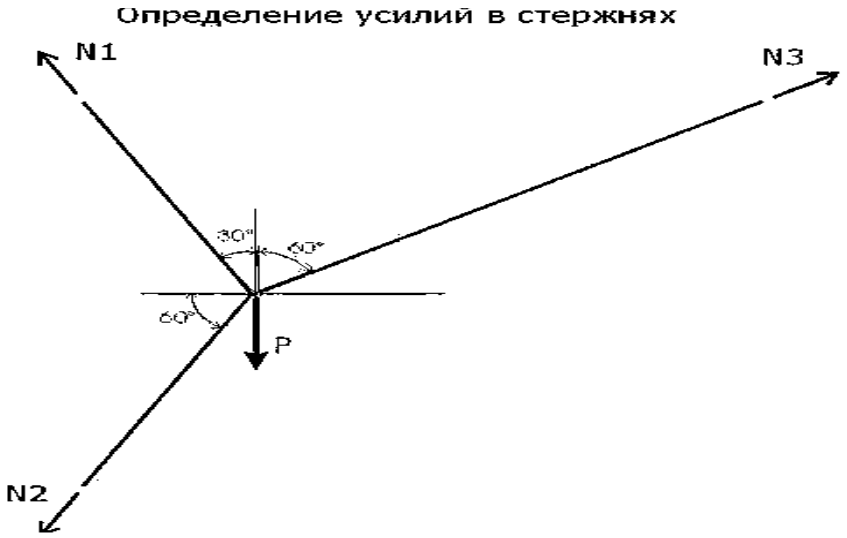


Рисунок 5.5. Усилия в стержнях расчетной схемы

$$\sum x : -(N1 + N2)\cos 60° + N3\cos 30° = 0$$
$$\sum y : N1\cos 30° - N2\cos 30° + N3\cos 60° - P = 0$$

Систему (рис.5.4) следует дополнить одним уравнением совместности деформаций. Для этого найдем удлинение всех стержней после деформации.

Т.к. в нашем случае $\alpha + \beta = 90°$, то для упрощения вывода уравнения совместности оси x, y направлены вдоль ортогональных стержней 1 и 3. Обозначим через $\Delta x, \Delta y$ проекции вектора перемещения узла AA’ на оси x, y. Тогда из рис.5.5 получаем:

$\Delta l1 = \Delta y$

$\Delta l3 = \Delta x$

$-\Delta l2 = \Delta x \cos 30° + \Delta y \cos 60°$

Выразим удлинения Δl_i через усилия в стержнях $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$.

Заданы соотношения площадей, т.е. принимаем: А1=А; А2=2А; А3=3А, здесь А – неизвестная пока площадь.

В таблице 1представлены механические характеристики для различных материалов стержней. Соотношения модулей упругости для трех стержней возьмем равными: Е1=2.0Е; Е2=Е; Е3=0.7Е, где $E=1.0 \cdot 10^5$ МПа. Длины стержней определяются из рис.5.3 : $l1 = l2 = \frac{l}{\cos 30°} \approx 1.16$ м; $l3 = \frac{l}{\cos 60°} \approx 2$ м.

Сила Р=40кН.

После соответствующих преобразований, имеем

$$-\frac{N2}{2\cos 30°} = \frac{N3\cos 30°}{0.7 \cdot 3\cos 60°} + \frac{N1\cos 60°}{2\cos 30°}$$

Таблица 1. Механические характеристики стержней

Номер стержня	Материал стержня	Модуль упругости $E \cdot 10^5$	Предел прочности σ_b	Нормативный коэффициент запаса прочности $[n_b]$
		МПа		
1	Сталь 3	2,0	400	3,7
2	Сплав Л68	1,0	320	4,0
3	Сплав Д16Т	0,7	450	3,8
4	Текстолит ПТК	0,1	200	5,0

Обозначим номера стержней соответственно:

N1 := 1

N2 := 2 N3 := 3

Решение системы уравнений

$$N1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + N3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - N2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 40 =$$

$$\frac{-N2}{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{N3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{0.7\cdot3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{N1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Решаем совместно уравнения статики и уравнение совместности деформации. В результате получаем значения продольных сил в трех стержнях.

N1=25,41кН , N2= -18,45кН , N3=4.02кН

Определение площадей поперечных сечений стержней

$$A_i = \frac{N_i}{[\sigma_i]}; [\sigma_i] = \frac{\sigma_{bi}}{[n_{bi}]}; (i = 1,2,3)$$

$$[\sigma_1] = \frac{400}{3.7} = 108.1 \text{ МПа}$$

$$[\sigma_2] = \frac{320}{4} = 80 \text{ МПа}$$

$$[\sigma_3] = \frac{450}{3.8} = 118.4 \text{ МПа}$$

$$A1=A \geq \frac{25.415\cdot10^3}{108.1\cdot10^6} = 0.2351\cdot10^{-3} \text{ м}^2$$

$$A2=2A \geq \frac{18.451\cdot10^3}{80\cdot10^6} = 0.2306\cdot10^{-3} \text{ м}^2 \Rightarrow A \geq 0.1153\cdot10^{-3} \text{ м}^2$$

$$A3=3A \geq \frac{4.021\cdot10^3}{118.4\cdot10^6} = 0.034\cdot10^{-3} \text{ м}^2 \Rightarrow A \geq 0.0113\cdot10^{-3} \text{ м}^2$$

За допускаемое значение А принимаем максимальное из всех полученных $A = 0.2351\cdot10^{-3}$ м^2.

В стержне №1 напряжение равно допускаемому.

Нахождение действительных площадей стержней

$A1 = A = 0.2351\cdot10^{-3}$ м^2; $A2 = 2A = 0.4702\cdot10^{-3}$ м^2; $A3 = 3A = 0.7053\cdot10^{-3}$ м^2.

Определение коэффициентов запаса прочности стержней

$$n_i = \frac{\sigma_{bi} \cdot F_i}{N_i}$$

$$n1 = \frac{400 \cdot 10^6 \cdot 0.2351 \cdot 10^{-3}}{25.415 \cdot 10^3} = 3.7 = [n_{b1}]$$

$$n2 = \frac{320 \cdot 10^6 \cdot 0.4702 \cdot 10^{-3}}{18.451 \cdot 10^3} = 8.2 > [n_{b2}] = 4.0$$

$$n3 = \frac{450 \cdot 10^6 \cdot 0.7053 \cdot 10^{-3}}{4.021 \cdot 10^3} = 78.9 > [n_{b3}] = 3.8$$

Вычисление удлинения стержней

$$\Delta l1 := \frac{25.415 \cdot 10^3 \cdot 1.16}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0.2351 \cdot 10^{-3}} \qquad \Delta l1 = 6.27 \times 10^{-4}$$

$$\Delta l2 := \frac{-18.451 \cdot 10^3 \cdot 1.16}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0.4702 \cdot 10^{-3}} \qquad \Delta l2 = -4.552 \times 10^{-4}$$

$$\Delta l3 := \frac{4.021 \cdot 10^3 \cdot 2}{0.7 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0.7053 \cdot 10^{-3}} \qquad \Delta l3 = 1.629 \times 10^{-4}$$

До сих пор мы рассматривали условие прочности по допускаемым напряжениям. Это условие, бесспорно, обеспечивало прочность, но не исчерпывало всех возможностей конструкции. В зависимости от геометрических характеристик конструкции только некоторые стержни оказывались напряженными до величины допускаемого напряжения и следовательно имели условленный запас прочности. Остальные стержни оставались недонапряженными и имели излишний запас прочности. В статически неопределимых стержневых системах при увеличении внешней нагрузки напряжения во всех стержнях сначала увеличиваются пропорционально нагрузке. Так как напряжения неравномерно распределены по стержням, то в одном из стержней после достижения условия $\sigma > [\sigma]$ возникает текучесть и тогда напряжение в этом стержне $\sigma = \sigma_т$, где $\sigma_т$ - предел текучести . При этом напряжения в других стержнях меньше $\sigma_т$. В процессе дальнейшего увеличения нагрузки напряжения в стержнях, где $\sigma < \sigma_т$ увеличиваются до значения $\sigma_т$, а напряжения в стержне, где $\sigma = \sigma_т$ сохраняется постоянным. Состояние, когда во всех стержнях $\sigma = \sigma_т$ называется предельным, соответствующим исчерпанию ее грузоподъемности или исчерпанию несущей

способности. Соответствующую нагрузку называют предельной нагрузкой. Для ее определения составляется одно уравнение статики, где все неизвестные усилия в стержнях выражаются через предел текучести $\sigma_т$. Разделив эту величину предельной нагрузки на нормативный коэффициент запаса несущей способности [n] получают допускаемую нагрузку по несущей способности [P] = $P_{пр}$ / [n], где [n]>1.

Рассмотрим расчет по предельному состоянию на примере, расчетная схема которого представлена на рисунке 5.3. Полагаем, что под действием силы P=$P_{пр}$ возникает предельное состояние, т.е. во всех стержнях напряжения равны пределу текучести $\sigma_т$. Предельные усилия в стержнях определяются по следующим формулам:

$$N_1 = (\sigma_т)1 \cdot A1;\ N_2 = (\sigma_т)_2 \cdot A2;\ \ N_3 = (\sigma_т)_3 \cdot A3$$

Подставляя эти усилия во второе уравнение равновесия, для предельной нагрузки получаем:

$$P_{пр} = (\sigma_т)1 \cdot A1 \cdot \cos 30^o - (\sigma_т)_2 \cdot A2 \cdot \cos 30^o + (\sigma_т)_3 \cdot A3 \cdot \cos 60^o$$

Контрольные вопросы:

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Как определяется степень статической неопределимости?
3. Что означают уравнения совместности деформаций? Каков их смысл?
4. Влияет ли температура на усилия в статически неопределимой системе?
5. Влияет ли жесткость стержней на усилия в статически неопределимой системе?
6. Какое состояние системы называется предельным?
7. В чем заключается расчет на прочность?
8. В чем заключается расчет на жесткость?
9. Когда используется принцип независимости действия сил?
10. Как определяется допускаемая нагрузка и допускаемое напряжение?
11. Из какого уравнения определяется предельная нагрузка?
12. Чему равны напряжения в стержнях системы в состоянии предельного равновесия?

Лекция 6

Статически неопределимые стержневые системы. Температурные и монтажные усилия

В статически неопределимой системе усилия возникают от действия только температуры, т.е. при отсутствии внешних сил. Довольно значительные напряжения этого типа образуются в рельсах, сваренных в одну непрерывную линию. При изменении температуры рельсов по отношению к той, при которой была произведена сварка, в них возникают растягивающие, либо сжимающие напряжения. Эту задачу можно схематизировать в виде стержня, защемленного двумя концами [8].

Рассмотрим пример определения напряжений, возникающих в результате изменения температуры элементов сооружения. Пусть стержень при некоторой температуре t^0_1 заделан обоими концами в неподатливые стены (Рисунок 6.1). Затем температура повысилась до t^0_2 градусов, так что изменение температуры составило интервал $\Delta t^0 = t^0_2 - t^0_1$. Если бы один конец стержня был свободен, то в результате нагрева длина стержня увеличилась бы и напряжения в ней не возникали. Но так как стены неподатливы, то стержень, стремясь удлиниться, и, не имея этой возможности, будет испытывать сжатие. В результате в стержне возникают продольные силы и напряжения. Удлинение стержня должно быть равно нулю. Именно, отсутствие удлинения является причиной возникновения напряжений.

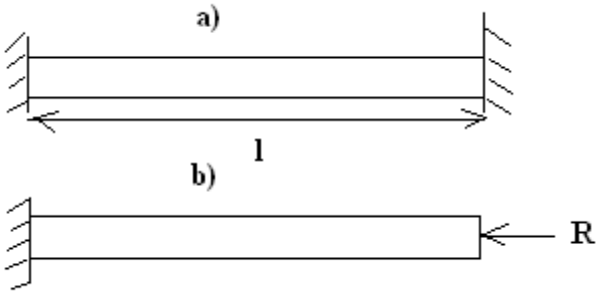


Рисунок 6.1. Действие температуры

Отбросив одну заделку, например правую, заменим ее действие неизвестной силой R (рисунок 6.1 b). Если бы этой силы не было, то согласно закону линейного расширения стержень удлинился бы на величину

$\Delta l_t = \alpha l \Delta t^0$, где α - коэффициент линейного расширения материала стержня. В действительности стержень не удлиняется. Следовательно, сила R , сжимая стержень, уменьшает его длину на величину Δl_R, равную величине Δl_t. Таким образом,

$\Delta l_R = \Delta l_t$

Это и будет условием совместности деформации, оно указывает на то, что и после повышения или понижения температуры длина стержня не изменилась, т.е. он не оторвался от неподвижных опор.

По закону Гука

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EA}$$

Следовательно, на основании равенства перемещений, можно записать

$$\alpha l \Delta t^0 = \frac{Rl}{EA}$$

Откуда

$$R = EA\alpha\Delta t^0$$

Возникающие в поперечных сечениях стержня нормальные сжимающие напряжения определяются из выражения

$$\sigma = \frac{R}{A} = E\alpha\Delta t^0$$

Если бы помимо температуры на стержень действовали и внешние силы, то согласно принципу независимости действия сил необходимо в равенстве перемещений учесть слагаемые, соответствующие перемещениям от каждой внешней силы в отдельности.

Рассмотрим другой случай, когда элементы статически неопределимой системы могут быть изготовлены с неточностями (Рисунок 6.2) . При сборке систем это приводит к перераспределению усилий (иногда нежелательному). Например, рассмотрим следующий пример. Пусть нагрузка P передается через жесткую балку на три железобетонные колонны с одинаковым поперечным сечением площадью A. При сборке системы было обнаружено, что средняя колонна изготовлена короче крайних на величину Δ. Определить усилия и напряжения в колоннах.

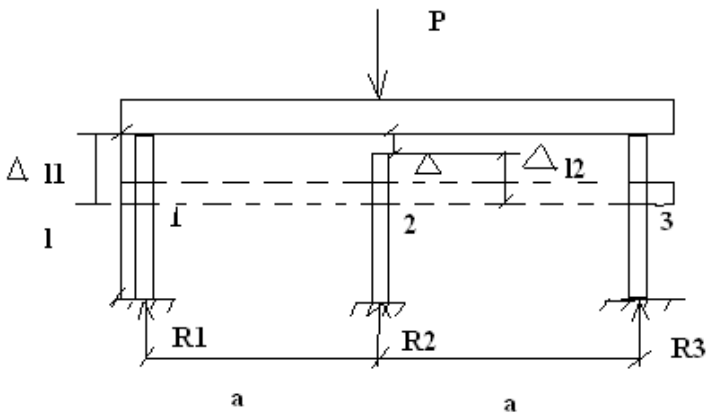


Рисунок 6.2. Учет неточности изготовления

Вначале необходимо проверить, устраняется ли зазор после приложения нагрузки. На крайние колонны передается нагрузка P/2, продольная сила в них равна N = P/2, при этом колонны укоротятся на длину $\delta = \frac{Nl}{EA}$. Если Δ<δ, то зазор при нагружении будет перекрыт и внешняя нагрузка будет восприниматься тремя колоннами. Обозначим усилия в них соответственно N_1 , N_2 , N_3 (Рисунок 6.2). Для данной системы можно составить два независимых статических уравнений равновесия, где неизвестными являются три усилия в колоннах. Поэтому система является один раз статически неопределимой.

Составим два уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальное направление и сумму моментов всех сил относительно точки, совпадающей со второй заделкой. Эти уравнения имеют вид:

$$\sum Y = N_1 + N_2 + N_3 - P = 0$$

$$\sum M = N_1 a - N_3 a = 0,$$

отсюда следует, что $N_1 = N_3$, из первого уравнения следует, что $P = 2N_1 + N_2$

Составим теперь дополнительное уравнение, рассматривая деформированное состояние системы. При нагружении сначала будут деформироваться крайние колонны, после исчезновения зазора будут деформироваться три колонны, поэтому уравнение совместности деформации записывается в виде:

$$\Delta = \Delta l_1 - \Delta l_2,$$

Используя закон Гука, это уравнение можно записать

$$\Delta = \frac{N_1 l}{EA} - \frac{N_2 l}{EA} \qquad \text{или } N_1 - N_2 = \Delta EA/l$$

Решая это уравнение совместно с уравнением статики, определяем неизвестные продольные усилия в трех колоннах. После этого определяются нормальные напряжения в сечениях колонн.

Иногда в статически неопределимых конструкциях приходится одновременно учитывать влияние температуры и неточности изготовления. Решение таких задач возможно двумя путями: первый путь – это одновременный учет всех факторов. В этом случае в уравнение совместности деформаций должны быть включены члены, отражающие влияние всех факторов (нагрузки, температуры, неточности изготовления). Полученные в результате усилия и напряжения будут окончательными.

Второй путь расчета заключается в раздельном учете усилий и напряжений, вызванных нагрузкой, температурой и неточностью изготовления. Решается несколько отдельных задач, в каждой из которых учитывается только один фактор. Окончательные усилия и напряжения определяются путем алгебраического суммирования этих величин. Это возможно только при малых деформациях, при больших деформациях это не действительно.

Для последнего примера помимо неточности изготовления рассмотрим также температурное влияние. Пусть температура стержней во время эксплуатации повысилась на Δt . Уравнения равновесия сохранят свой вид. В уравнении совместности деформаций с учетом влияния температуры деформации каждого стержня будут состоять из следующих слагаемых:

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l}{EA} + \alpha_1 \cdot l \cdot \Delta t, \qquad \Delta l_2 = -\frac{N_2 l}{EA} + \alpha_2 \cdot l \cdot \Delta t,$$

где α_1, α_2 – коэффициенты линейного расширения первого и второго стержня. Знак минус в первом слагаемом справа означает деформацию сжатия, т.е. укорочение.

Контрольные вопросы:

1. Влияют ли неточности изготовления при сборке систем, температура на усилия в статически определимой системе?
2. В каких системах возникают температурные усилия?
3. Как влияет жесткость отдельных элементов в статически неопределимой системе на перераспределение усилий?
4. Какие гипотезы и законы используются при определении перемещений?
5. Какие уравнения используются при расчете статически неопределимых систем?

Лекция 7
Геометрические характеристики сечений. Осевые и центробежные моменты инерции сечений

Статический сосент инерции сечения

Статическим моментом S_x сечения относительно какой-либо оси x (рис.7. 1) называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$S_x = \int_A y dA, \qquad (7.1)$$

где *y* – расстояние от элементарной площади dA до оси Ox.

Статические моменты выражаются в см^3, м^3 и т. д. Статический момент может быть положительным, отрицательным и, в частности, равным нулю.

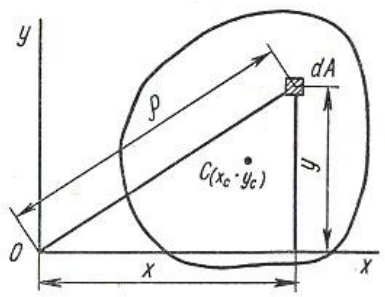


Рис. 7.1. Осевой статический момент сечения

Если отождествить площадь с силой, действующей перпендикулярно плоскости чертежа, то интеграл (7.1) можно рассматривать как сумму моментов сил относительно оси Ox. По теореме о моменте равнодействующей можно написать

$$S_x = \int_A y dA = A y_c \ , \qquad (7.2)$$

где *A*– площадь всей фигуры (равнодействующая); y_C – расстояние от центра тяжести фигуры до *Ox.*

Из формулы (7.2) следует формула определения ординаты центра тяжести

$$y_C = S_x / A \ . \qquad (7.3)$$

Аналогично определяется статический момент относительно оси y:

$$S_y = \int_A x dA = A x_c, \tag{7.4}$$

откуда

$$x_C = S_y / A \, . \tag{7.5}$$

Центр тяжести обладает тем свойством, что если тело опереть в этой точке, то оно будет находиться в равновесии.

Из формул (7.2) и (7.4) следует, что если оси *x* и *y* проходят через центр тяжести фигуры, то статический момент относительно этих осей равен нулю. Такие оси называются центральными осями. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения (т. е. относительно любой центральной оси), статический момент равен нулю.

Если фигуру можно представить в виде отдельных простых фигур (квадратов, треугольников и т. д.), для которых известны положения центров тяжести, то в этом случае статический момент всей фигуры можно получить как сумму статических моментов этих простых фигур. Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла.

Если фигура имеет ось симметрии, то последняя всегда проходит через центр тяжести фигуры, а потому статический момент фигуры относительно оси симметрии всегда равен нулю.

Во многих случаях вместо простых интегралов вида (7.1) и (7.4) удобнее иметь дело с двойными интегралами вида:

$$S_x = \int_A y dA = \iint_D y dx dy \, ;$$

$$S_y = \int_A x dA = \iint_D x dx dy \, .$$

Здесь D – область интегрирования.

Моменты инерции сечения

Осевым или экваториальным моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, численно равная интегралу:

относительно оси *x*

$$I_x = \int_A y^2 dA = \iint_D y^2 dx dy \, ; \tag{7.6}$$

относительно оси *y*

$$I_y = \int_A x^2 dA = \iint_D x^2 dxdy \ , \qquad (7.7)$$

где *y* — расстояние от элементарной площадки dA до оси *x* (см. рис. 7.1); *x*— расстояние от элементарной площадки до оси *y;* D — область интегрирования.

Полярным моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$I_p = I_0 = \int_A \rho^2 dA = \iint_D \rho^2 dxdy \ , \qquad (7.8)$$

где ρ — расстояние от площадки dA до точки (полюса) (см. рис. 7.1), относительно которой вычисляется полярный момент инерции. Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны.

Действительно, независимо от знака координаты произвольной площадки соответствующее слагаемое положительно, так как в него входит квадрат этой координаты.

Центробежным моментом инерции I_{xy} сечения называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$I_{xy} = \int_A xydA = \iint_D xydxdy \ , \qquad (7.9)$$

где *x, y* — расстояния от площадки *dA* до осей *x* и *y.*

Единицей момента инерции является единица длины в четвертой степени (по СИ — м^4, хотя для прокатных профилей по ГОСТу—см^4).

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю.

Если взаимно перпендикулярные оси *x* и *y* или одна из них являются осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю. Действительно, для симметричной фигуры всегда можно выделить два элемента ее площади (рис.7.2), которые имеют одинаковые ординаты *y* и равные, но противоположные по знаку абсциссы *x.* Составляя сумму произведений *xydA* для таких элементов, т. е. вычисляя интеграл (8), получают в результате нуль.

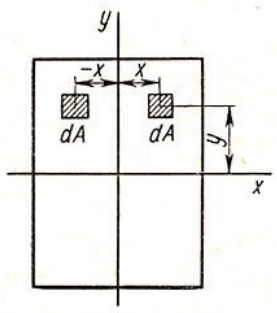


Рис. 7. 2. Симметричная фигура

Легко доказать, что полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Действительно, из рис. 7.1 видно, что $\rho^2=x^2+y^2$. Подставив это значение ρ^2 в выражение (7.9), получим

$$I_p=\int_A \rho^2 dA=\int_A (x^2+y^2)dA=\int_A x^2 dA+\int_A y^2 dA \ .$$

Следовательно,

$$I_p=I_x+I_y \ . \qquad (7.9)$$

Лекция 8. Параллельный перенос и поворот осей. Главные центральные оси инерции сечений. Эллипс инерции

Определим момент инерции фигуры относительно какой-либо оси x_1 , (рис. 8.1.).

Пусть x_0 — центральная ось и момент инерции I_{x0} известен. Из чертежа видно, что $y_1=a+y$. Следовательно,

$$I_{x_1}=\int_A (a+y)^2 dA=a^2\int_A dA+2a\int_A y dA+\int_A y^2 dA \qquad (8.1)$$

Первый интеграл дает площадь сечения. Второй интеграл, представляющий статический момент относительно центральной оси x_0 и равен нулю.

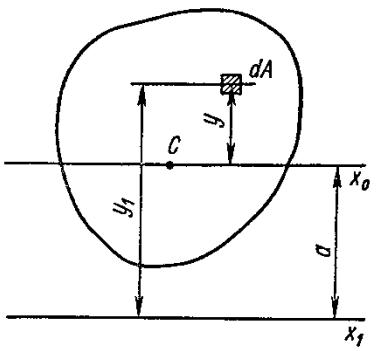


Рис. 8.1. Момент инерции при параллельном переносе осей

Третий интеграл представляет собой момент инерции I_{x0} фигуры

относительно оси x_0. Таким образом,

$$I_{x_1} = I_{x_0} + Aa^2 \ . \qquad (8.2)$$

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Из формулы (8.2) видно, что момент инерции относительно центральной оси меньше, чем момент инерции относительно любой нецентральной оси, параллельной центральной.

Момент инерции относительно центральной оси называется центральным моментом инерции.

Моменты инерции сложных фигур

Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее составных частей:

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 + I_x^3 + \ldots \ . \qquad (8.3)$$

Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла

$$\int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \ldots \ ,$$

где $A=A_1+A_2+A_3+ \ . \ . \ .$

Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур и затем просуммировать эти моменты инерции.

Указанная теорема справедлива также и для центробежного момента инерции.

Моменты инерции прокатных сечений (двутавров, швеллеров, уголков и т. д.) приводятся в таблицах сортамента.

Момент инерции при повороте осей

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей *x, y* и моментами инерции относительно осей x_1, y_1, повернутых на угол α, (рис. 8.2.). Пусть $I_x>I_y$ и положительный угол α, отсчитывается от оси *x* против часовой стрелки.

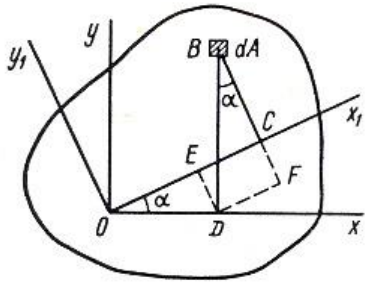


Рис.8.2. Поворот осей

Для решения поставленной задачи найдем зависимость между координатами площадки *dA* в исходных и повернутых осях. Из чертежа следует:

$$x_1=OC=OE+EC=OE+DF=ODcos\alpha+DBsin\alpha=xcos\alpha+ysin\alpha, \qquad (8.4)$$

$$y_1=BC=BF-DE=ycos\alpha-xsin\alpha.$$

Теперь определим моменты инерции относительно осей x_1 и y_1

$$I_{x_1}=\int_A y_1^2 dA = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \ ; \qquad (8.5)$$

аналогично,

$$I_{y_1}=\int_A x_1^2 dA = I_y\cos^2\alpha + I_x\sin^2\alpha + 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \ , \qquad (8.6)$$

$$I_{x_1,y_1}=\int_A x_1y_1dA=\int_A (x\cos\alpha+y\sin\alpha)(y\sin\alpha-x\sin\alpha)dA= \\ =I_x\sin 2\alpha/2 - I_y\sin 2\alpha/2 + I_{xy}\cos 2\alpha \qquad (8.7)$$

Складывая **(**8.5**)** и (8.6), получаем

$$I_{x1}+I_{y1}=I_x+I_y=I_p \qquad (8.8)$$

Вычитая (8.5) из (8.6), получаем

$$I_{x1}-I_{y1}=(I_x-I_y)\cos2\alpha-2I_{xy}\sin2\alpha \ . \qquad (8.9)$$

Формула, (8.8) показывает, что сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей не меняется при их повороте.

Формула (8.9) может быть использована для вычисления центробежного момента инерции относительно осей *x, y* по известным осевым моментам инерции относительно осей *x, y* и x_1, y_1.

Главные оси инерции. Главные моменты инерции

При изменении угла α I_{x1} , I_{y1} и I_{x1y1} изменяются. Найдем значение угла, при котором I_{x1}**,** и I_{y1} имеют экстремальные значения. Для этого возьмем от I_{x1} или I_{y1} первую производную по α и приравняем ее нулю:

$$dI_{x1}/d\alpha = -2I_x \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2I_y \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

или

$$(I_y - I_x) \sin 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

откуда

$$tg2\alpha_0 = 2I_{xy} / (I_y - I_x) \quad . \tag{8.10}$$

Эта формула определяет положение двух осей, относительно одной из которых осевой момент инерции максимален, а относительно другой — минимален,

Такие оси называют главными. Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции**.**

Значения главных моментов инерции найдем из формул (8.5) и (8.6), подставив в них α_0 формулы (8.10), при этом используем известные формулы тригонометрии для функций двойных углов.

После преобразований получим следующую формулу для определения главных моментов инерции:

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \tag{8.11}$$

Исследуя вторую производную $d^2I_{x1}/d\alpha^2$ можно установить, что для данного случая ($I_x > I_y$) максимальный момент инерции I_{max} имеет место относительно главной оси, повернутой на угол α_0 по отношению к оси *x,* а минимальный момент инерции — относительно другой, перпендикулярной оси. В большинстве случаев в этом исследовании нет надобности, так как по конфигурации сечений видно, какая из главных осей соответствует максимуму момента инерции.

Кроме формулы (8.9) для определения главных моментов инерции можно пользоваться также формулами (8.5) и (8.6), При этом сам собой

решается вопрос: относительно какой главной оси получается максимальный момент инерции и относительно какой оси — минимальный?

Покажем теперь, что относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю.

Действительно, приравнивая I_{x1y1} по формуле (8.7) нулю, получаем

$$[(I_x - I_y)/2]\sin 2\alpha_0 + I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда для $tg2\alpha_0$ вновь получается формула (8.10).

Таким образом, главными осями называют оси, обладающие следующими свойствами:

1. Центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю.
2. Моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значении (относительно одной—максимум, относительно другой — минимум).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

Во многих случаях удается сразу определить положение главных центральных осей. Если фигура имеет ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей, вторая проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно первой. Сказанное следует из того обстоятельства, что относительно оси симметрии и любой оси ей перпендикулярной, центробежный момент инерции равен нулю.

Используя формулы (8.5) — (8.7), можно показать, что если два главных центральных момента инерции сечения равны между собой, то у этого сечения любая центральная ось является главной и все главные центральные моменты инерции одинаковы (круг, квадрат, шестиугольник, равносторонний треугольник).

Действительно, предположим, что для какого-то сечения оси x и у — главные центральные оси и, кроме того, $I_x = I_y$. Тогда из формул (8.5) и (8.6) получим, что $I_x = I_y = I_{x1} = I_{y1}$, а из формулы (8.7) убедимся, что $I_{x1y1} = 0$, т. е. любые оси x_1 и y_1 являются главными центральными осями инерции такой фигуры.

Зависимость между центробежными моментами инерции относительно двух параллельных осей

Пусть оси x_0y_0 —центральные оси (рис. 8.3) и момент инерции I_{x0y0} известен. Найдем центробежный момент инерции относительно осей x_1 и y_1.

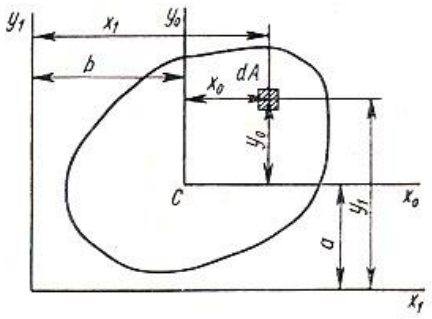


Рисунок 8.3. Паралелльные оси

Из рисунка видно, что

$$x_1=x_0+b,\ y_1=y_0+a.$$

Следовательно

$$I_{x_1y_1}=\int_A x_1y_1dA=\int_A x_0y_0dA+b\int_A y_0dA+a\int_A x_0dA+\int_A abdA\ , \qquad (8.12)$$

или

$$I_{x1y1}=I_{x0y0}+Aab.$$

Второй и третий интегралы в правой части равенства (8.12), представляющие статические моменты относительно центральных осей, равны нулю. Итак, центробежный момент инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести относительно новых осей.

Если оси x_0 и y_0 являются центральными главными осями, то относительно этих осей $I_{x0y0}=0$ и формула (8.12) упрощается:

$$I_{x1y1}=Aab\ . \qquad (8.13)$$

Для сложной фигуры, состоящей из n простых фигур,

$$I_{x_1y_1}=\sum_{i=1}^{n}A_ia_ib_i\ . \qquad (8.14)$$

(при условии, что собственные центральные оси каждой фигуры являются главными осями).

Алгоритм определения геометрических характеристик сложного сечения

1. Деление сечение на простые фигуры
2. Определение центра тяжести сечения

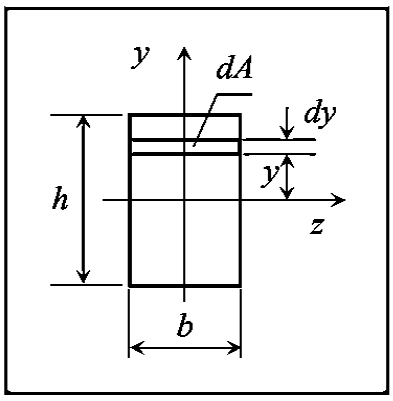
3. Определение осевых и центробежных осей инерции относительно первоначальных осей x,y
4. Определение осевых и центробежных осей инерции относительно центральных осей x,y
5. Определение главных центральных осей инерции сечения
6. Определение положения главных осей инерции сечений

На рис. 8.4 представлены формулы для определения осевых моментов инерции относительно центральных осей для прямоугольного сечения.



Рис. 8.4. Формулы для осевых моментов инерции для прямоугольного сечения

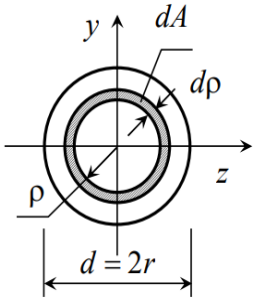
На рис. 8.5 представлена формула для определения момента сопротивления для прямоугольного сечения.



$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{J_z}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}\frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

Рис. 8.5. Момент сопротивления для прямоугольного сечения

На рис. 8.6 представлена формула для полярного момента инерции для круглого сечения.



$$dA = 2\pi\rho d\rho; \qquad J_\rho = \int_A \rho^2 dA;$$

$$J_\rho = \int_o^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{2\pi\rho^4}{4}\Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2}$$

Рис. 8.6. Поярный момент инерции для круглого сечения

Эллипс инерции

Радиус инерции сечения — геометрическая характеристика сечения, определяемая по следующим формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Эллипс, построенный в главных осях, с полуосями, равными главным радиусам инерции называется эллипсом инерции

$$i_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{A}}; \qquad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

Лекция 9. Кручение. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Потенциальная энергия при кручении. Касательные напряжения и углы поворота сечений. Подбор сечений

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор — крутящий момент M_z. Крутящий момент по определению равен сумме моментов внутренних сил относительно продольной оси стержня Oz. Нормальные силы, параллельные оси Oz, вклада в крутящий момент не вносят. С силами, лежащими в плоскости поперечного сечения стержня (интенсивности этих сил — касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz}) M_z связывает вытекающее из его определения уравнение равновесия статики (Рис. 9.1)

$$M_x = \int_F \left(\tau_{yz} x - \tau_{xz} y\right) dF$$

Условимся считать M_z положительным, если со стороны отброшенной части стержня видим его направленным против часовой стрелки (Рисунок 9.2) . Это правило проиллюстрировано на рисунке 9.1, где крутящий момент M_z принят положительным. Используя метод сечений, численно крутящий момент равен сумме моментов внешних сил, приложенных к отсеченной части стержня, относительно оси Oz.

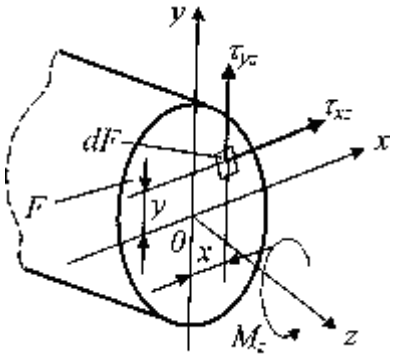


Рис. 9. 1. Связь крутящего момента с касательными напряжениями

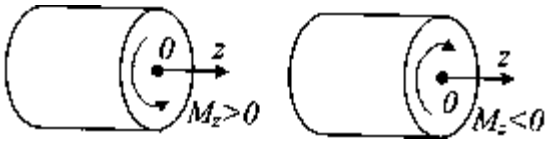


Рис. 9.2. Иллюстрация положительного и отрицательного крутящего момента

Рассмотрим кручение призматических стержней кругового поперечного сечения. Исследование деформаций упругого стержня с нанесенной на его поверхности ортогональной сеткой рисок (Рисунок 9.3) позволяет сформулировать следующие предпосылки теории кручения этого стержня:

1. поперечные сечения остаются плоскими (выполняется гипотеза Бернулли);
2. расстояния между поперечными сечениями не изменяются, следовательно $\varepsilon_z = 0$;
3. контуры поперечных сечений и их радиусы не деформируются. Это означает, что поперечные сечения ведут себя как жесткие круговые пластинки, поворачивающиеся при деформировании относительно оси

стержня Oz. Отсюда следует, что любые деформации в плоскости пластинки равны нулю, в том числе и $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$;

4. материал стержня подчиняется закону Гука. Учитывая, что $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, из обобщенного закона Гука в форме получаем, что нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Это означает, что в поперечных сечениях, стержня возникают лишь касательные напряжения τ, а вследствие закона парности касательных напряжений, равные им напряжения действуют и в сопряженных продольных сечениях. Следовательно, напряженное состояние стержня — чистый сдвиг.

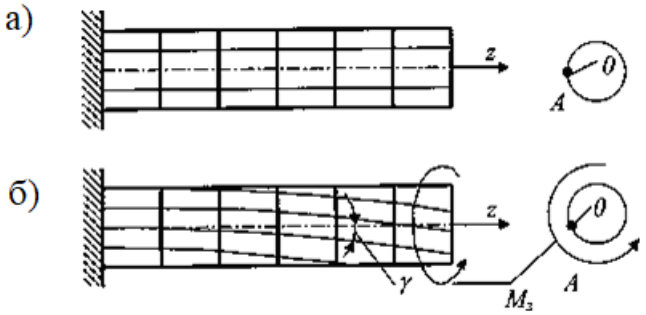


Рис.9.3**.** Иллюстрация кручения: а) исходное и б) деформированное состояния

Выведем формулу для касательных напряжений при кручении призматического стержня кругового поперечного сечения. Как видно, поворот правого торцевого сечения относительно неподвижного левого на угол φ (назовем его углом закручивания стержня) вызывает поворот продольных волокон на угол γ (угол сдвига), поскольку на величину γ искажаются углы ортогональной сетки продольных и поперечных рисок модели.

Двумя смежными сечениями вырежем элемент стержня длиной dz и, поскольку нас интересуют деформации элемента, левое сечение его будем считать неподвижным (Рисунок 9.4). При повороте правого сечения на угол $d\varphi$ в соответствии с гипотезой о недеформируемости радиусов, правый конец волокна AB (отстоящий от оси элемента на величину полярного радиуса ρ) будет перемещаться по дуге BB_1, вызывая поворот волокна на угол сдвига

$$\gamma = BB_1 / AB = \frac{\rho d\varphi}{dz} .$$

Обратим внимание на то, что в соответствии с рисунком 9.4 и рисунком 9.5, сдвиг γ и связанное с ним касательное напряжение τ перпендикулярны

радиусу ρ. Определим касательное напряжение τ, воспользовавшись законом Гука для чистого сдвига:

$$\tau = G\gamma = G\rho\frac{d\varphi}{dz} \quad . \tag{9.1}$$

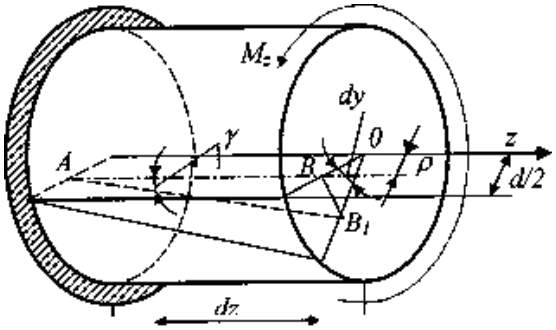
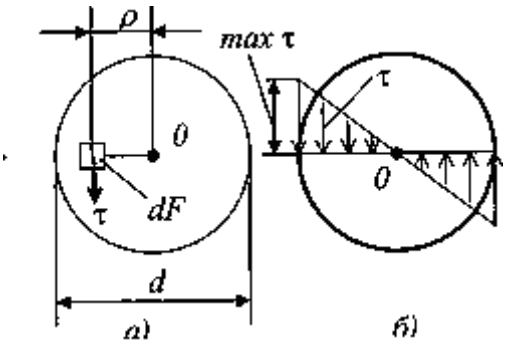


Рис.9.4. Расчетная модель определения касательных напряжений



а)

Рис. 9.5**.** Распределение касательных напряжений при кручении:

В (9.1) $d\varphi/dz$ — погонный угол закручивания стержня, который остается пока неизвестным. Для его нахождения обратимся к условию статики, записав его в более удобной для данного случая форме (Рисунок 9.5, а)

$$M_x = \int_F \int \tau\rho dF \quad . \tag{9.2}$$

Подставляя (9.1) в (9.2) и учитывая, что

$$\int_F \rho^2 dF = J_p$$

где J_p—; полярный момент инерции поперечного сечения (для круга с диаметром d $I_p = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0{,}1d^4$), получаем

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \qquad (9.3$$

На рис. 9.6 и 9.7 показано распределение касательных напряжений для кольцевого сечения и Распределение исходных касательных и главных напряжений для дерева и чугуна.

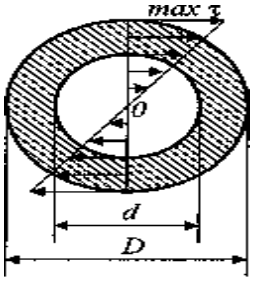


Рис.9.6. Распределение напряжений для кольцевого сечения

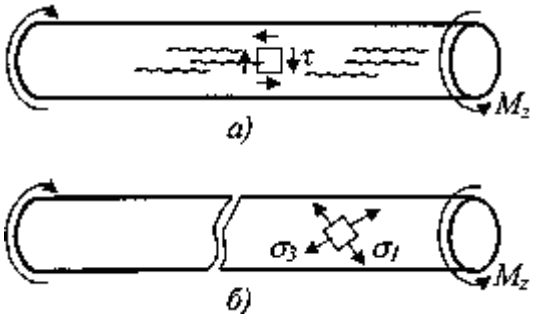


Рис. 9.7. Распределение исходных касательных и главных напряжений: а) разрушение дерева, б) разрушение чугуна

Подставляя выражение (9.3) в (9.1), получаем формулу для касательных напряжений при кручении призматического стержня кругового поперечного сечения

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \quad \rho \qquad (9.4)$$

Как видно из (9.4), сдвиги и касательные напряжения пропорциональны расстояний от оси стержня. Обратим внимание на структурные аналогии

формул для нормальных напряжений чистого изгиба и касательных напряжений кручения.

Мерой деформации стержня при кручении является погонный угол закручивания стержня, определяемый по (9.3). Поскольку величина DJ_p стоит в знаменателе формулы и при заданной нагрузке (M_z через нее выражается) $d\varphi/dz$ тем меньше, чем больше DJ_p, последнюю называют жесткостью поперечного сечения при кручении.

Пользуясь (9.3) для определения угла закручивания элемента длиной dz

$$d\varphi=\frac{M_z}{GJp}\,dz \quad ,$$

найдем полный угол закручивания стержня длиной l

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_p} \tag{9.5}$$

В случае, если по длине стержня M_z и DJ_p постоянны, получаем

$$\varphi=\frac{M_z l}{GJ_p} \quad ,$$

когда эти величины кусочно-постоянны, то:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_{zk} l_k}{(GJ_p)_k} \tag{9.6}$$

Отметим, что полученные формулы по структуре аналогичны формулам для деформаций при растяжении стержня.

Наибольшие касательные напряжения возникают у внешней поверхности стержня, т. е. при $\rho_{\max} = d/2$

$$\max\,\tau=\frac{M_z}{J_p}\,\rho_{\max}=\frac{M_z}{2J_{p/d}}=\frac{M_z}{W_p} \quad ,$$

где W_p — момент сопротивления при кручении или полярный момент сопротивления

$$W_p=\pi d^3/16$$

Полярный момент сопротивления, стоящий в знаменателе для максимальных касательных напряжений, очевидно, является геометрической характеристикой сечения, а условие прочности стержня при кручении принимает вид

$$\max\ \tau = \frac{\max\ M_z}{W_p} \le |\tau| \ , \qquad (9.7)$$

где $[\tau]$— допускаемое напряжение на кручение.

Как показали эксперименты и точное решение этой задачи в теории упругости, все гипотезы, сформулированные ранее для стержня со сплошным круговым сечением, остаются справедливыми и для стержня кольцевого поперечного сечения (Рисунок 9.7). Поэтому все выведенные ранее формулы пригодны для расчета стержня кольцевого сечения с той лишь разницей, что полярный момент инерции определяется как разность моментов инерции кругов с диаметрами D и d

$$J_p = \pi D^4/32 - \pi d^4/32 = \frac{\pi D^4}{32}(1-\beta^4) \ ,$$

где $\beta = d/D$, а момент сопротивления определяется по формуле

$$W_p = J_p/\rho_{\max} = J_p/0{,}5D = \frac{\pi D^3}{16}(1-\beta^4) \ .$$

Учитывая линейный характер изменения касательных напряжений по радиусу (Рисунок 7.7) и связанное с этим лучшее использование материала, кольцевое сечение следует признать наиболее рациональным при кручении стержня. Коэффициент использования материала тем выше, чем меньше относительная толщина трубы.

Как отмечено ранее, напряженное состояние при кручении стержня — чистый сдвиг, являющийся частным случаем плоского напряженного состояния. На площадках, совпадающих с плоскостью поперечного сечения и на парных им площадках продольных сечений возникают экстремальные касательные напряжения max - min τ, а главные напряжения $\sigma_{1,3} = \pm\tau$ действуют на площадках, наклоненных.к оси стержня под углами $\pm 45^0$; главное напряжение $\sigma_2 = 0$.

Особенности напряженного состояния при кручении нашли отражение в характере разрушения стержней. Так, разрушение стержня из дерева, плохо работающего на скалывание вдоль волокон, происходит от продольных трещин (Рисунок 9.7, а). Разрушение стержня из хрупкого металла (например, чугуна) происходит по винтовой линии, наклоненной к образующим под углом 45°, т. е. по траектории главного напряжения σ_3(Рисунок 9.7 б).

Потенциальная энергия при кручении

При кручении внешние моменты совершают работу вследствие поворота сечений, к которым они приложены. Эта работа расходуется на создание запаса потенциальной энергии деформации, численно равной работе внутренних сил.

Аналогично тому, как это было сделано при растяжении, можно доказать, что работа статически приложенного внешнего скручивающего момента равна половине произведения конечного значения момента на окончательный угол закручивания**:**

$$W = -M\varphi/2. \qquad (9.8)$$

Работа внутренних сил, отрицательная по знаку, и численно равная ей потенциальная энергия при кручении вычисляются аналогично тому, как вычислялась работа внутренних сил при растяжении (сжатии).Элементарная работа внутренних сил

$$dW_i = -Md\varphi/2, \qquad (9.9)$$

где T — крутящий момент; $d\varphi$— угол закручивания элемента длиной dz**.**
По формуле (9.5)

$$d\varphi = Mdz/(GI_p).$$

Следовательно,

$$dW_i = -M^2dz/(2GI_p). \qquad (9.10)$$

Полную работу внутренних сил получим, интегрируя выражение для элементарной работы по всей длине l стержня:

$$W_i = -\frac{1}{2}\int \frac{M^2 dz}{GI_\rho} \qquad (911)$$

Для вычисления потенциальной энергии, равной по значению работе внутренних сил и обратной по знаку, имеем

$$U = -W_i = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dz}{GI_\rho} \qquad (9.12)$$

Если крутящий момент и жесткость стержня не меняются по длине, то

$$U = M^2 l/(2GI_p). \qquad (9.13)$$

Статически неопределимые задачи при кручении

При расчете статически неопределимых задач при кручении для определения опорных реакций и внутренних сил необходимо помимо уравнений равновесия записать дополнительные уравнения нестатического характера, так называемые уравнения совместности деформаций.

Рассмотрим вал круглого поперечного сечения с защемлениями на обоих концах (Рис. 9.8). Расчетная схема представляет ось вала с сосредоточенными внешними крутящими моментами.

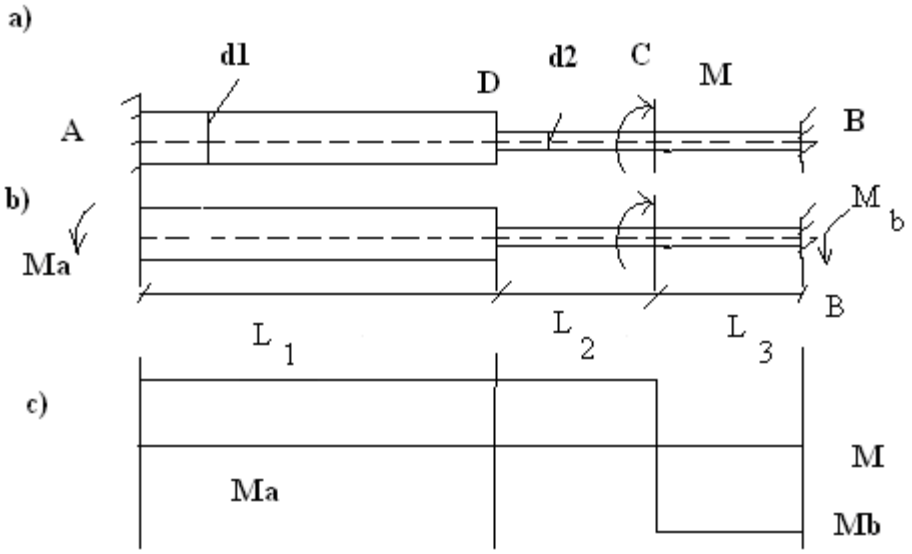


Рисунок 9.8. Стержень, защемленный двумя концами

Данная задача статически неопределима, т.к. две неизвестные реакции в заделках А, В нельзя определить из одного уравнения равновесия. Для решения задачи необходимо составить дополнительное уравнение нестатического характера. Отбросим левую заделку, заменив ее влияние неизвестной реакцией – моментом M_a (рисунок 9.8 б). Рассматривая систему как статически определимую, можно построить эпюру крутящих моментов (рисунок 7.8 с). На участке от сечения А до сечения С ординаты эпюры крутящих моментов равны значению M_a, а на участке от сечения С до В ординаты эпюры крутящих моментов равны значению M_b.

Уравнение статики записывается в виде суммы всех крутящих моментов и имеет вид:

$$\sum M = M - M_a - M_b = 0$$

Отсюда можно записать:

$$M_a = M - M_b \text{ или } M_b = M - M_a$$

Дополнительное уравнение составляется из условия, что угол поворота в левой заделке равен нулю. Углы поворота на участках AD, DC, CB определяются по формуле

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p},$$

где M_z - крутящий момент на участке.

Полный угол поворота сечения А определяется как сумма углов поворотов от каждого момента M_a и М в отдельности, т.е.:

$$\varphi_a = \varphi_{AD} + \varphi_{DC} + \varphi_{CB} = 0$$

$$\varphi_{AD} = \frac{M_A L_1}{(GI_p)_1}, \quad \varphi_{DC} = \frac{M_A L_2}{(GI_p)_2}, \quad \varphi_{CB} = -\frac{M_B L_3}{(GI_p)_3},$$

$$(GI_p)_1 = \frac{G \cdot \pi d_1^{\,4}}{32}, \quad (GI_p)_1 = \frac{G \cdot \pi d_2^{\,4}}{32}, \quad (GI_p)_1 = \frac{G \cdot \pi d_3^{\,4}}{32}$$

Решая совместно уравнение статики и уравнение совместности деформации, определяем неизвестные значения моментов в заделках.

$$M_A = \frac{M\ L_3}{(GI_p)_3 K}, \quad M_B = M - M_A,$$

$$K = \frac{L_1}{(GI_p)_1} + \frac{L_2}{(GI_p)_2} + \frac{L_3}{(GI_p)_3}$$

Контрольные вопросы?

1. Какие напряжения возникают при чистом кручении?
2. Как распределяются касательные напряжения в сечении при кручении?
3. От чего зависит момент сопротивления сечения при кручении?
4. В чем заключается расчет на жесткость при кручении?
5. Смысл уравнений совместности деформаций при расчете статически неопределимых систем при кручении?
6. Выражение потенциальной энергии деформации при кручении? Влияние жесткости и внешней нагрузки?
7. Как определяются углы поворота при кручении?
8. Какой метод используется при построении эпюры крутящих моментов?

Лекция 10

Изгиб.Внутренние усилия. Метод сечений. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Нормальные напряжения

Весьма часто стержни подвергаются действию поперечной нагрузки или внешних пар (рис. 10.1).

При этом в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты, т.е. внутренние моменты, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости поперечного сечения стержня.

При действии такой нагрузки ось стержня искривляется.

Указанный вид нагружения называют изгибом, а стержни, работающие в основном на изгиб – балками.

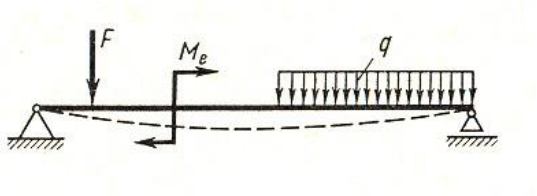


Рис. 10.1 Изгиб балки

Изгиб называют чистым, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении стержня.

Чаще, однако, в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Такой изгиб называют поперечным.

Если плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения стержня, изгиб носит название простого или плоского (прямой изгиб) (Рис. 10.2).

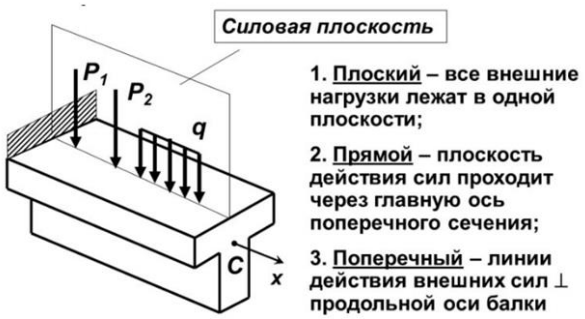


Рис. 10.2. Прямой поперечный изгиб

Если плоскость действия изгибающего момента в сечении не совпадает ни с одной из главных осей сечения, изгиб называют косым.

При плоском изгибе ось балки и после деформации остается в плоскости внешних сил — силовой плоскости. При косом изгибе плоскость деформации не совпадает с силовой плоскостью.

Изучение деформации изгиба начнем со случая чистого простого изгиба; в дальнейшем рассмотрим более общий случай изгиба — поперечный изгиб.

Типы опорных связей

Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают трех основных типов.

1. Подвижная шарнирная опора (рис. 10.3, а). Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникать только одна реакция, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через центр катка.

Схематическое изображение подвижной шарнирной опоры дано на рис.10.3, б.

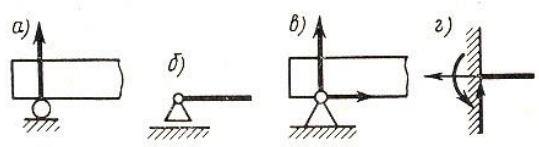


Рис. 10. 3. Опорные связи в плоскости

Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину при изменении температуры и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

2. Неподвижная шарнирная опора (рис. 10.3, в). Такая опора допускает вращение конца балки, но устраняет поступательное перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на две составляющие — горизонтальную и вертикальную.

3. Жесткая заделка, или защемление (рис. 10.3,г). Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникать реакция, которую обычно раскладывают на две составляющие (вертикальную и горизонтальную) и момент защемления (реактивный момент),

Балка с одним заделанным концом называется консольной балкой или просто консолью.

Если опорные реакции могут быть найдены из одних уравнений статики, то балки называют статически определимыми**.** Если же число неизвестных опорных реакций больше, чем число уравнений статики, возможных для

данной задачи, то балки называют статически неопределимыми**.** Для определения реакций в таких балках приходится составлять дополнительные уравнения – уравнения перемещений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Как уже было сказано, при плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия (внутренних силовых фактора) — изгибающий момент M и поперечная сила Q. Для их определения применим метод сечений. В интересующем нас месте сделаем мысленный разрез балки, например на расстоянии z от левой опоры (рис. 10.4, а). Отбросим одну из частей балки, например правую, и рассмотрим равновесие левой части.

Взаимодействие частей балки заменим внутренними усилиями: изгибающим моментом M и поперечной силой Q (рис. 10.4, б).

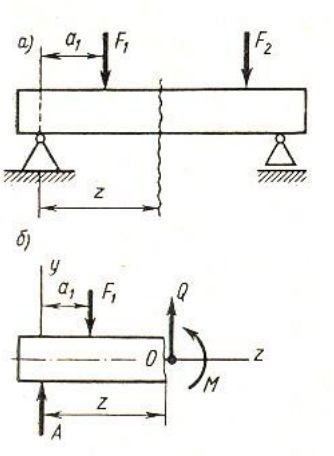


Рис. 10.4. Метод сечений

Для определения M и Q используем два уравнения равновесия:

$$1.\ \sum Y = 0; \qquad A - F_1 + Q = 0;$$

$$Q = F_1 - A, \qquad Q = \sum \left(F_i\right)_y$$

$$2.\ \sum M_0 = 0; \qquad A \cdot z - F_1 \cdot \left(z - a_1\right) - M = 0;$$

$$M = A \cdot z - F_1 \cdot \left(z - a_1\right); \qquad M = \sum m_0\left(F_i\right).$$

Таким образом,

1) поперечная сила Q в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения;

2) изгибающий момент M в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов (вычисленных относительно центра тяжести сечения) внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.

ПРАВИЛО ЗНАКОВ ДЛЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

Поперечная сила в сечении балки $m-n$ (рис. 10.5, а) считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа — сверху вниз, и отрицательной—в противоположном случае (рис. 10.,б).

Изгибающий момент в сечении балки, например в сечении $m-n$ (рис. 10.6 а), считается положительным, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа — против часовой стрелки, и отрицательным — в противоположном случае (рис. 10.6, *б).* Моменты, изображенные на рис. 5, *а,* изгибают балку выпуклостью вниз, а моменты, изображенные на рис. 5, б, изгибают балку выпуклостью вверх. Это можно легко проверить, изгибая тонкую линейку.

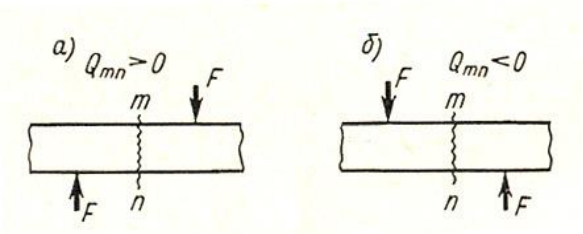


Рис. 10.5. Правило знаков для поперечных сил

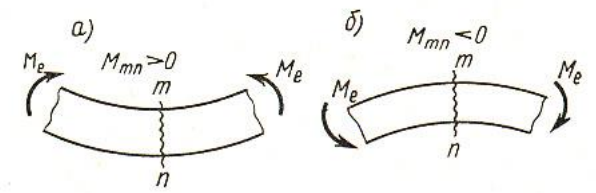


Рис. 10.6. Правило знаков для изгибающих моментов

Отсюда следует другое, более удобное для запоминания правило знаков для изгибающего момента. Изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз.

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов будем придерживаться следующих правил:

1. Положительное значение поперечной силы Q будем откладывать, согласно направлению оси Y, от базисной горизонтальной линии вверх, а отрицательное – вниз.

2. Эпюру M строить со стороны растянутых волокон, т.е. положительные значения M откладывать вниз, так как эти моменты, согласно принятому правилу знаков, вызывают растяжение нижних волокон, а отрицательные значения – вверх.

Заметим, что используют и обратное правило: эпюру M строят со стороны сжатых волокон, т.е. положительные ординаты эпюры M откладывать вверх от базисной линии, а отрицательные - вниз. Это правило обычно применяют в учебных пособиях, предназначенных для студентов машиностроительных специальностей.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки легко установить определенную зависимость.

Рассмотрим балку, нагруженную произвольной нагрузкой **(**рис. 10.7). Определим поперечную силу в сечении, отстоящем от левой опоры на расстоянии z. Проецируя на вертикаль силы, расположенные левее сечения, получаем

$$Q = A - F_1 + q \cdot z$$

Аналогично вычислим поперечную силу в смежном сечении, расположенном на расстоянии $z + dz$ от левой опоры:

$$Q + dQ = A - F_1 + q \cdot (z + dz)$$

Вычитая первое уравнение из второго**,** получаем $dQ = qdz$, откуда

$$q = \frac{dQ}{dz} \qquad (10.1)$$

т. е. производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

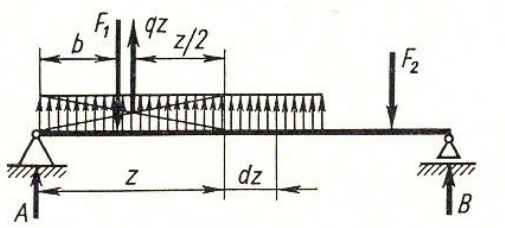


Рис. 10.7. Действие распределенной нагрузки

Вычислим теперь изгибающий момент в сечении с абсциссой z, взяв сумму моментов сил, приложенных слева от сечения. Для этого распределенную нагрузку на участке длиной z заменяем ее равнодействующей, равной qz, и приложенной в середине участка, на расстоянии $\frac{z}{2}$ от сечения:

$$M = A \cdot z - F_1 \cdot (z - b) + q \cdot z \cdot \left(\frac{z}{2}\right). \qquad \text{(а)}$$

Аналогично вычислим изгибающий момент в смежном сечении, отстоящем от левой опоры на расстоянии $z + dz$:

$$M + dM = A \cdot (z + dz) - F_1 \cdot (z + dz - b) + \frac{q \cdot (z + dz)^2}{2} \qquad \text{(б)}$$

Вычитая (а) из (б), получаем приращение изгибающего момента

$$dM = A \cdot dz - F_1 \cdot dz + q \cdot z \cdot dz = dz \cdot (A - F_1 + q \cdot z).$$

Выражение в скобках представляет собой поперечную силу Q. Следовательно,

$$dM = Qdz,$$

откуда

$$Q = \frac{dM}{dz}, \qquad (10.2)$$

т.е. производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе (теорема Журавского). Взяв вторую производную, получаем:

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2} = q, \qquad (10.3)$$

т. е. вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Полученные зависимости используются главным образом при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

На основании полученных дифференциальных зависимостей, можно сформулировать ряд основных положений, оказывающих помощь при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов и позволяющих их контролировать.

1. На участке, где нет распределенной нагрузки ($q = 0$), поперечная сила постоянна, изгибающий момент изменяется по линейной зависимости, причем тангенс угла наклона α эпюры M равен силе Q.

В частном случае одновременно может быть $q = 0$ и $Q = 0$, тогда изгибающий момент постоянен.

2. На участке, где имеется равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейной зависимости (тангенс угла наклона β эпюры Q равен q), а изгибающий момент – по квадратичной зависимости, у которой выпуклость обращена в сторону действия распределенной нагрузки q.

Если на этом участке поперечная сила в одном из сечений равна нулю, $\left(Q = \frac{dM}{dz} = 0\right)$, то изгибающий момент в этом сечении принимает экстремальное значение $M_{экстр}$ – максимум или минимум (здесь касательная к эпюре горизонтальна).

3. На участке, где имеется распределенная нагрузка, изменяющаяся линейным образом (например, треугольная нагрузка), поперечная сила изменяется по квадратичной зависимости, а изгибающий момент – по кубической. Выпуклость эпюры Q устанавливается в зависимости от характера нагружения распределенной нагрузки с использованием дифференциальной зависимости или по ряду вычисленных значений Q. Выпуклость эпюры M обращена в сторону действия распределенной нагрузки.

4. В сечении, где приложена сосредоточенная сила F, на эпюре Q будет скачок, равный значению этой силы и направленный в ту же сторону (при построении эпюры слева направо), а эпюра M будет иметь перелом, направленный в сторону действия силы F.

5. В сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент на эпюре M, будет скачок, равный значению момента M; на эпюре Q изменений не будет. При этом если сосредоточенный момент действует по ходу часовой стрелки, скачок будет вниз (при построении эпюры слева направо); и вверх, если сосредоточенный момент действует против хода часовой стрелки.

При чистом плоском (простом) изгибе в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты в плоскости, проходящей через одну из главных осей поперечного сечения балки (Рис. 10.8).

Если в поперечном сечении помимо изгибающего момента возникает поперечная сила, то этот вид деформации называется прямой поперечный изгиб (Рис. 10.9).

Изгибающий момент представляет собой равнодействующий момент внутренних нормальных сил, распределенных по сечению.

Поперечная сила представляет равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по сечению и обозначается Q.

Чтобы установить закон распределения и значения внутренних сил, возникающих в поперечном сечении балки, уравнений статики недостаточно. Необходимо использовать условия деформации балки.

Если подвергнуть чистому плоскому изгибу балку (образец) с нанесенной на ее поверхности сеткой, то обнаружится следующее (рис.10.8):

1) линии – 1–1 и 2–2 на поверхности балки после деформации повернутся на некоторый угол $d\vartheta$, оставаясь прямыми. Можно полагать, что и поперечные сечения балки, плоские до деформации, останутся плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений). Расчеты, основанные на таком предположении, согласуются с опытом. Поскольку прямоугольная сетка остается прямоугольной и после деформации, можно принять, что касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю;

2) волокно ab на выпуклой стороне балки удлиняется, что свидетельствует о растяжении этого волокна, а волокно ef укорачивается, что свидетельствует о его сжатии. Длина же волокна cd останется без изменения, что свидетельствует о том, что это волокно не испытывает ни растяжения, ни сжатия.

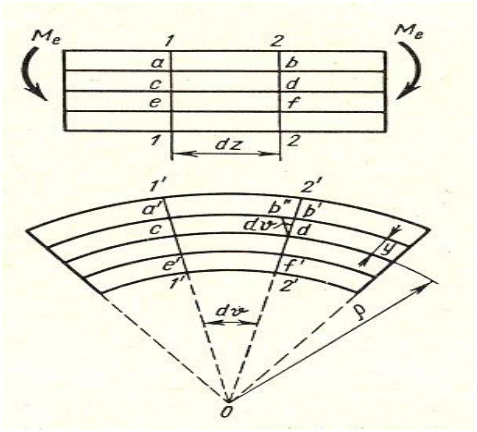


Рис. 10. 8. Чистый изгиб

Слой балки (на уровне волокна cd), не испытывающий при изгибе ни растяжения, ни сжатия, называется нейтральным слоем. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки (рис.10.9) называется нейтральной осью (линией). Пересечение силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения называется силовой линией.

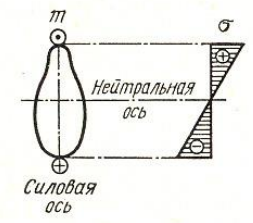


Рис. 10.9. Нейтральный слой

Из рассмотренных результатов опытов следует, что волокна балки деформируются различно: большие деформации испытывают волокна, более удаленные от нейтрального слоя. Покажем, что по высоте сечения балки деформации изменяются по линейному закону.

Действительно, отрезок $b'b''$, представляет полное удлинение волокна ab, длина которого до деформации равна длине волокна cd, принадлежащего нейтральному слою (см. рис. 10.8). Относительное удлинение этого волокна

$$\varepsilon = \frac{b'b''}{ab} = \frac{b'b''}{cd} = \frac{y \cdot d\vartheta}{\rho \cdot d\vartheta} = \frac{y}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя балки (значение ρ пока неизвестно); y – расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна.

Прежде чем переходить к определению напряжений, введем еще одну гипотезу, а именно: предположим, что волокна балки не оказывают давления друг на друга, т. е. напряжения в направлении, перпендикулярном оси балки, равны нулю. Следовательно, каждое волокно испытывает одноосное растяжение или сжатие. Формула, получаемая на основании этой гипотезы, дает результаты, хорошо согласующиеся с данными опытов. Тогда, по закону Гука, для одноосного напряженного состояния получим

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \cdot y}{\rho}, \qquad (10.4)$$

т. е. нормальные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения балки пропорционально расстоянию от нейтральной оси.

Наибольшие напряжения будут у верхнего и нижнего краев сечения.

Эпюра σ показана на рис. 10.9**.** Растягивающие напряжения считаем положительными.

Следует подчеркнуть, что векторы нормальных напряжений перпендикулярны плоскости поперечного сечения балки, а отрезки, изображающие их на эпюре, условно совмещены с плоскостью сечения.

Установив закон распределения напряжений, можно определить и их значение из уравнений равновесия. Рассмотрим равновесие части балки, находящейся под действием внешнего момента M и внутренних сил, возникающих в проведенном поперечном сечении (рис. 10.10

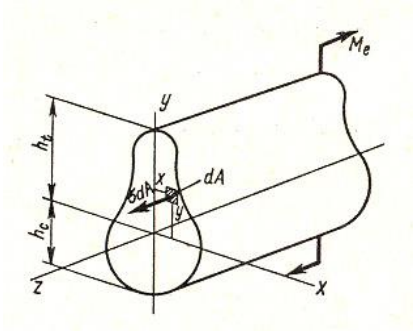


Рисунок 10.10. Нормальное напряжение в точке

При равновесии этой части балки должны соблюдаться шесть уравнений равновесия: равенство нулю суммы проекции действующих сил на три оси координат и равенство нулю трех сумм моментов относительно осей $x,\ y,\ z$:

1.Приравниваем нулю сумму проекций на ось y:

$$\sum Y = 0.$$

2. То же самое – на ось x:

$$\sum X = 0.$$

$\sum Y = 0$ и $\sum X = 0$ обращаются в тождества, так как внутренние силы $\sigma \cdot dA$ перпендикулярны этим осям.

3.Приравниваем нулю сумму проекций на ось z:

$$\sum Z = 0 \quad \text{или} \quad \int_A \sigma \cdot dA = 0.$$

Используя формулу (10.4), получаем:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0.$$

Но $\frac{E}{\rho} \neq 0,$ так как $\rho \neq \infty,$ ибо рассматривается изогнутая балка.

Следовательно, $\int_A y \cdot dA = 0.$

Этот интеграл представляет собой статический момент площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси. Он равен нулю, и,

следовательно, нейтральная ось при изгибе проходит через центр тяжести сечения.

4. Уравнение $\sum M_z$ обращается в тождество, так как внутренние усилия $\sigma \cdot dA$ параллельны оси z.

5. Уравнение $\sum M_y = 0$ дает $\int_A \sigma \cdot x \cdot dA = 0$. Используя формулу (10.4), получаем

$$\frac{E}{\rho}\int_A x \cdot y \cdot dA = 0.$$

Но $\frac{E}{\rho} \neq 0$, следовательно, $\int_A x \cdot y \cdot dA = 0$. Интеграл $I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA$ представляет собой центробежный момент инерции сечения относительно осей x и y. Так как он равен нулю, то оси x и y должны быть главными осями сечения и момент M должен лежать в плоскости, проходящей через одну из главных осей, что и выполняется при плоском изгибе. Из этого условия следует также, что силовая линия и нейтральная ось (нулевая линия) взаимно перпендикулярны.

6. Приравниваем нулю суммы моментов сил относительно оси x:

$$\sum M_x = 0; \qquad -M + \int_A y \cdot \sigma \cdot \cdot dA = 0.$$

Используя формулу (10.4), получаем

$$M = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 \cdot dA..$$

Интеграл $I_x = \int_A y^2 \cdot dA$ представляет собой момент инерции сечения относительно нейтральной оси x.

На отсеченную часть балки может действовать не одна внешняя пара, а несколько, а также любая другая нагрузка.

В этом случае уравнение равновесия $\sum M_x = 0$ содержит алгебраическую сумму моментов от всех этих сил, равную изгибающему моменту в поперечном сечении — M.

Имея в виду сказанное, последнее соотношение представим в виде

$$M = \frac{E \cdot I_x}{\rho}, \qquad (10.5)$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_x}. \qquad (10.6)$$

Величина $K = \frac{1}{\rho}$ представляет собой кривизну нейтрального слоя балки.

Ранее было показано, что нейтральная линия поперечного сечения проходит через его центр тяжести. Следовательно, ось (продольная ось) балки, являющаяся геометрическим местом центров тяжести ее поперечных сечений, расположена в нейтральном слое. Таким образом, получаем, что выражение (3) определяет кривизну оси балки.

Итак, кривизна оси балки при изгибе пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна величине $E \cdot I_x$, *называемой* жесткостью балки.

Подставляя найденное значение $\frac{1}{\rho}$ в (10.4), получим важную формулу, позволяющую определить нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки по известным изгибающему моменту M и моменту инерции сечения.

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}, \qquad (10.7)$$

Формула (10.7) вычислена для чистого изгиба. При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают и нормальные, и касательные напряжения.

Возникновение касательных напряжений сопровождается появлением деформаций сдвига, в результате чего поперечные сечения балки перестают быть плоскими (гипотеза Бернулли теряет силу). Кроме того, при поперечном изгибе возникают напряжения в продольных сечениях балки, т.е. имеет место надавливание волокон друг на друга.

Более детальные исследования показывают, что, несмотря на это, формула (10.7) дает вполне надежные результаты и при поперечном изгибе.

УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения при изгибе в опасном сечении, т. е. в сечении, где М имеет наибольшее значение, не превосходили соответствующих допускаемых напряжений (рассматриваются только балки с постоянным по всей длине поперечным сечением).

Обозначим (рис. 10.10) h_t – расстояние до наиболее удаленного от нейтральной оси растянутого волокна, h_c — расстояние до наиболее сжатого волокна. Тогда наибольшее растягивающее напряжение при изгибе

$$\sigma_t^{\max} = \frac{M \cdot h_t}{I_x}; \tag{10.8}$$

наибольшее сжимающее напряжение (взятое по абсолютному значению)

$$\sigma_c^{\max} = \frac{M \cdot h_c}{I_x}. \tag{10.9}$$

Для хрупких материалов (например, чугуна) допускаемые напряжения на растяжение и сжатие различны: $[\sigma_c]$ в 3—5 раз больше $[\sigma_t]$, поэтому для балок из таких материалов обычно применяют сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. При этом сечение располагают таким образом, чтобы $h_t < h_c$, т. е. чтобы обеспечивалось неравенство $\sigma_t^{\max} \prec \sigma_c^{\max}$. В указанных случаях надо составлять два условия прочности:
по наибольшим растягивающим напряжениям

$$\sigma_t^{\max} = \frac{M \cdot h_t}{I_x} = \frac{M}{W_{xt}} \le [\sigma_t]; \tag{10.10}$$

по наибольшим сжимающим напряжениям

$$\sigma_c^{\max} = \frac{M \cdot h_c}{I_x} = \frac{M}{W_{xc}} \le [\sigma_c] \tag{10.11}$$

где W_{xt} и W_{xc} — моменты сопротивления растянутого и сжатого волокон.

В формулы (10.10), (10.11) надо подставлять наибольшее (по абсолютному значению) значение M.

Если сечение балки симметрично относительно нейтральной оси (такие сечения целесообразно применять для балок из пластичных материалов), т. е. $h_t = h_c = \frac{h}{2}$, то вместо двух формул (10.10) и (10.11) получим одну

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot \frac{h}{2}. \tag{10.12}$$

Обозначив, $W_x = \frac{2 \cdot I_x}{h}$, получим при одинаковых допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие $[\sigma]$, следующее условие прочности:

$$\sigma = \frac{M}{W_x} \le [\sigma] \qquad (10.13)$$

Величина W_x называется осевым моментом сопротивления или моментом сопротивления при изгибе. Момент сопротивления является геометрической характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее прочность при изгибе.

Значения W_x для простейших сечений следующие:

для прямоугольника

$$W_x = \frac{2 \cdot I_x}{h} = \frac{b \cdot h^3}{(12h/2)} = \frac{b \cdot h^3}{6};$$

для круга

$$W_x = \frac{2I_x}{d} = \frac{\pi \cdot d^4}{(64 \cdot d/2)} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0{,}1d^3;$$

для кольца

$$W_x = \frac{2I_x}{D} = \frac{2}{D}\left(\frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{\pi \cdot d^4}{64}\right) = \frac{\pi \cdot D^4(1-c^4)}{(64D/2)} = \frac{\pi \cdot D^3(1-c^4)}{32} \approx 0{,}1D^3(1-c^4),$$

где $c = \frac{d}{D}$;

для прокатных сечений (двутавры, швеллеры и т. п.) значения W_x указаны в таблицах сортамента. Для подбора сечения балки из уравнения (10.13) получим зависимость

$$W_x \ge \frac{M}{[\sigma]}. \qquad (10.14)$$

Допускаемый изгибающий момент определяется по формуле

$$[M] \le W_x \cdot [\sigma] \qquad (10.15)$$

Найдя по этой формуле допускаемый изгибающий момент и, зная связь между M и нагрузкой (по построенной эпюре M), можно определить допускаемую нагрузку.

Лекция 11. Касательные напряжения при изгибе. Подбор сечений

В общем случае изгиба (при поперечном изгибе) в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Наличие изгибающего момента связано с возникновением в поперечных сечениях балки нормальных напряжений, для определения которых можно пользоваться формулой (10.7).

Наличие поперечной силы связано с возникновением касательных напряжений в поперечных сечениях балки, а по закону парности касательных напряжений – и в ее продольных сечениях (рис. 11.1).

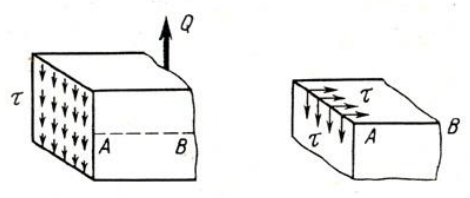


Рис. 11.1. Касательные напряжения

Для определения касательных напряжений рассмотрим вначале балку прямоугольного сечения небольшой ширины (рис.11.2).

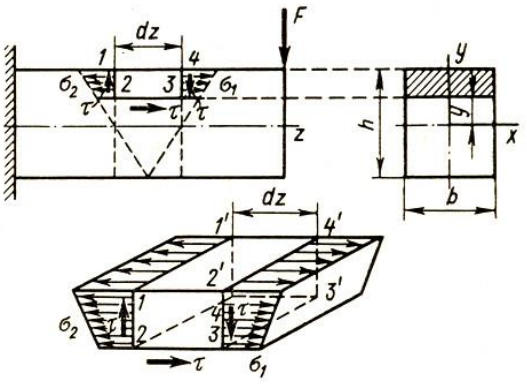


Рис. 11.2. Касательные напряжения в произвольном сечении

Вырежем из балки элемент длиной dz и шириной, равной ширине b балки. На этот элемент действуют следующие силы: по грани $344'3'$ действуют нормальные напряжения, которые согласно формуле (10.4) равны

$$\sigma_1 = \frac{M_1 \cdot y}{I_x}, \qquad (11.1)$$

где M_1 – изгибающий момент в сечении *344'3'*.

Кроме того, в указанном сечении действуют неизвестные пока касательные напряжения τ, которые ввиду незначительной ширины сечения балки можно считать равномерно распределенными по ширине сечения (гипотеза Журавского);

по грани *122'1'* действуют нормальные напряжения

$$\sigma_2 = \frac{M_2 \cdot y}{I_x} \qquad (11.2)$$

и касательные напряжения τ;

по грани *322'3'* действуют только касательные напряжения, по закону парности равные касательным напряжениям, действующим по вертикальным граням.

Составим уравнение равновесия отсеченного элемента балки. Спроецируем силы, действующие на элемент, на горизонтальную ось. Очевидно, касательные усилия, действующие по вертикальным граням, в указанное уравнение не войдут.

Касательное усилие по грани *233'2'* спроецируется в истинную величину *τbdz*. Нормальные усилия, действующие по грани *344'3'*, имеют равнодействующую

$$N_1 = \int_{A^{omc}} \sigma_1 \cdot dA$$

Нормальные усилия, действующие по грани *122'1'*, имеют равнодействующую

$$N_2 = \int_{A^{omc}} \sigma_2 \cdot dA$$

Интегралы должны быть взяты по площади отсеченной части, т. е. по площади граней *122'1'* и *344'3'*.

Используя, уравнение равновесия $\sum Z = 0,$ получаем

$$-N_2 + N_1 + \tau \cdot b \cdot dz = 0$$

или

$$-\int_{A^{omc}} \sigma_2 \cdot dA + \int_{A^{omc}} \sigma_1 \cdot dA + \tau \cdot b \cdot dz = 0$$

Используя выражения (а) и (б), имеем

$$-\frac{M_2}{I_x}\int_{A^{omc}} y \cdot dA + \frac{M_1}{I_x}\int_{A^{omc}} y \cdot dA + \tau \cdot b \cdot dz = 0$$

Выражение $\int y \cdot dA = S_x^{omc}$ представляет собой статический момент

площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси. Следовательно,

$$\frac{S_x^{omc}}{I_x} \cdot \left(M_2 - M_1\right) = \tau \cdot b \cdot dz..$$

Но $M_2 - M_1 = dM_z$ – приращение изгибающего момента на длине dz. Так что предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\frac{S_x^{omc} \cdot dM_z}{I_x} = \tau \cdot b \cdot dz$$

откуда

$$\tau = \frac{S_x^{omc} \cdot dM_z}{I_x \cdot b \cdot dz}. \qquad (11.3)$$

Используя дифференциальную зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой, получаем следующую формулу:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b} \qquad (11.4)$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом поперечном сечении балки,

S_x^{omc} – статический момент (относительно нейтральной оси) отсеченной части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от уровня, на котором определяются касательные напряжения,

I_x – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси,

b – ширина поперечного сечения балки на том уровне, на котором определяются касательные напряжения τ.

Можно произвести сопоставление абсолютных величин максимальных нормальных и максимальных касательных напряжений, возникающих в поперечных сечениях стержня. Например, для консоли прямоугольного сечения (рис. 11.3) имеем

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_X} = \frac{6Pl}{bh^2}, \quad \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh},$$

откуда

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{h}{4l}.$$

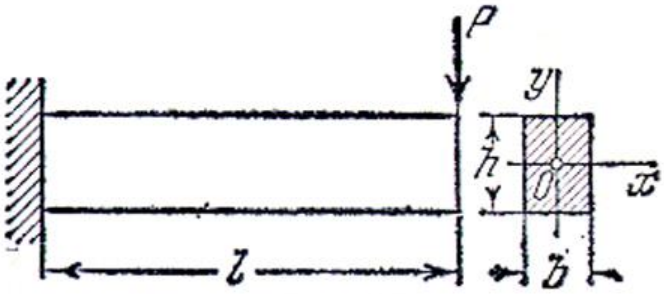


Рис. 11. 3. Изгиб консольного стержня

Это значит, что максимальные касательные напряжения в поперечном сечении относятся к максимальным нормальным напряжениям примерно как высота сечения к длине стержня, т. е. касательные напряжения существенно меньше нормальных. Указанная оценка, с немногочисленными исключениями, сохраняется для всех не тонкостенных стержней. Что же касается тонкостенных стержней, то это вопрос особый. В связи с малостью величины τ_{max} расчет на прочность при поперечном изгибе производится только по нормальным напряжениям, как и при чистом изгибе. Касательные напряжения во внимание не принимаются. Это тем более естественно, что в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, т. е. в наиболее опасных, касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю.

Условие прочности по касателбным напряжениям имеют вид:

$$\tau_{max} \le [\tau] \qquad (11.5)$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение, определяемое с использованием теорий прочности.

Для деревянных балок расчет на прочность по максимальным касательным напряжениям может иметь решающее значение, так как дерево плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон, а потому даже сравнительно небольшие касательные напряжения, возникающие в нейтральном слое деревянных балок (значительно меньшие нормальных напряжений в поперечных сечениях), могут вызвать их разрушение.

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b и h (рис. 11.4, а) имеем:

$$S_x^{omc} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \qquad J_x = \frac{bh^3}{12}, \qquad b = b$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \tag{11.6}$$

и эпюра касательных напряжений по высоте сечения изображается квадратной параболой. Наибольшее напряжение имеет место при $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}. \tag{11.7}$$

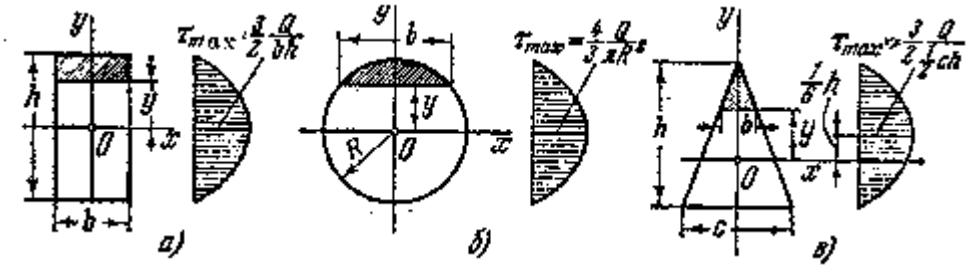


Рис. 11.4. Распределение касательных напряжений по высоте сечений.

Для стержня круглого сечения (рис. 11.4, б) путем несложной операции интегрирования можно найти

$$S_x^{omc} = \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{3/2}.$$

Кроме того,

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}, \qquad b = 2\sqrt{R^2 - y^2},$$

откуда

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4}\left(R^2 - y^2\right)$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3\pi R^2}$$

Для стержня, имеющего сечение в форме треугольника с основанием c и высотой h (рис. 11.4, в), имеем:

$$S_x^{omc} = \frac{1}{3}b\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right), \qquad J_x = \frac{ch^3}{36}$$

$$\tau = \frac{12Q}{ch^3}\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right). \tag{11.8}$$

Максимальное напряжение имеет место на расстоянии $y = \frac{h}{6}$ от нейтральной оси:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{ch}$$

В двутавровых балках касательные напряжения в точках поперечного сечения стенки в месте примыкания ее к полке могут быть значительными, так как статический момент полки относительно нейтральной оси велик, а толщина стенки даже в очень высоких балках невелика (10...20 мм); это следует из формулы Журавского. В то же время нормальные напряжения в этих точках поперечного сечения лишь немного меньше максимальных (рис.11.5).

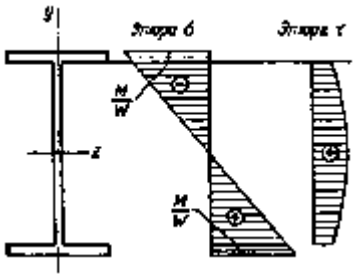


Рис. 11.5. Эпюры напряжений для двутавра

Проверка прочности в подобных случаях расчета двутавровых балок производится с использованием теорий прочности:

Определение главных напряжений при плоском изгибе:

$$\sigma_{гл} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right); \tag{11.9}$$

$$tg2\alpha_{гл} = -\frac{2\tau}{\sigma} \tag{11.10}$$

Расчетные (эквивалентные) напряжения для полной проверки прочности балок при плоском поперечном изгибе рассчитываются по четырем теориям прочности

$$\sigma_{экв}^{I} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) \le [\sigma]; \tag{11.11}$$

$$\sigma_{экв}^{II} = 0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma] \tag{11.12}$$

$$\sigma_{экв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{11.13}$$

$$\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]; \tag{11.14}$$

Следует заметить, что необходимость в такой дополнительной проверке прочности определяется не только формой поперечного сечения, но и видом эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Лекция 12
Определение перемещений при изгибе

Рассмотрим балку постоянного сечения. Под действием внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей прямой балки, ее ось искривляется в той же плоскости; при этом точки оси перемещаются.

Изогнутая ось балки называется упругой линией, а перемещения точек оси балки по нормали к ее недеформированной оси называются прогибами балки (прогибами оси балки или прогибами сечений балки). Обозначим прогибы балки через y (Рис. 12.1). При изгибе сечения балки поворачиваются перпендикулярно изогнутой оси стержня (Рис. 12.2).

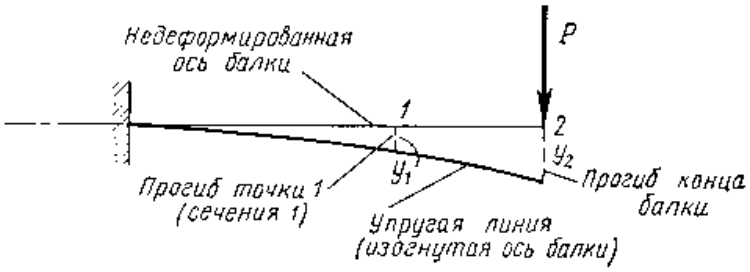


Рис. 12.1. Упругая линия балки

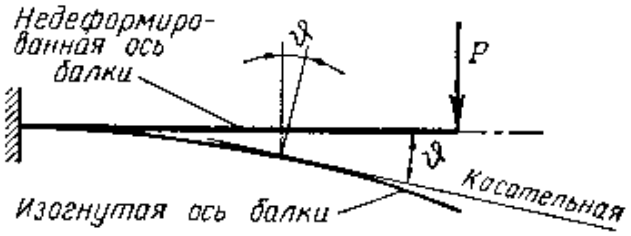


Рис. 12.2. Повороты сечений

Прогибы y_1 и y_2 точек 1 и 2 оси балки в действительности весьма малы по сравнению с длиной балки, а потому их принято изображать в более крупном масштабе, чем длину оси.

Длина оси балки при изгибе остается неизменной, так как ось расположена в нейтральном слое, а нормальные напряжения в поперечных сечениях балки в уровне этого слоя равны нулю.

Искривление оси балки вызывает не только прогибы, но и смещения точек оси по горизонтали. Эти смещения, как правило, весьма малы по сравнению не только с длиной балки, но и с прогибами ее оси, поэтому ими при расчетах пренебрегают.

При деформации балки ее поперечные сечения не только поступательно смещаются, но и поворачиваются. Пренебрегая деформациями сдвига, можно считать угол θ поворота поперечного сечения балки равным углу между касательной проведенной к изогнутой оси балки в этом сечении, и недеформированной осью балки (рис. 12.3), т. е. углу поворота оси балки.

Выберем прямоугольную систему координат ху с началом О на левом конце оси балки. Ось х направим вправо (вдоль недеформированной оси балки), а ось у—вверх (рис. 12.3).

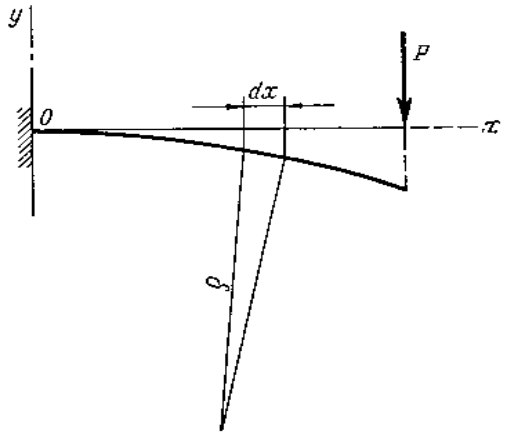


Рис. 12.3. Радиус кривизны при изгибе

Прогибы балки (прогибы оси) будем считать положительными, если точки ее оси смещаются при деформации вверх. Углы поворота θ положительны, если поперечные сечения при деформации поворачиваются против хода часовой стрелки. Прогибы и углы поворота, показанные на рис. 1...3, отрицательны. Прогибы оси балки выражаются в мерах длины (см, мм и т. д.), а углы θ поворота поперечных сечений—в радианах.

Плоскости двух смежных поперечных сечений деформированной балки, отстоящих друг от друга на расстоянии dx, пересекаются в центре кривизны участка dx оси балки. Расстояние ρ от центра кривизны оси балки, называется радиусом кривизны оси (рис. 12.3). Связь между радиусом кривизны оси балки, изгибающим моментом в поперечном сечении балки и жесткостью поперечного сечения при изгибе:

$$1/\rho = M/(EJ)\,. \qquad (12.1)$$

Отношение 1/ρ представляет собой кривизну оси балки.

Из курса высшей математики известна зависимость между радиусом кривизны плоской кривой и координатами x и y ее точек:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \ . \qquad (12.2)$$

Подставим в выражение (2) значение 1/ρ по формуле (1):

$$\frac{M}{EJ} = \pm \frac{d^2ydx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \qquad (12.3)$$

Первая производная dy/dx, входящая в знаменатель формулы (3), представляет собой тангенс угла θ между осью x и касательной к упругой линии. Практически углы θ весьма малы: они, как правило, менее 0,01 рад. Поэтому выражение $1+(dy/dx)^2$ в формуле (3) не превышает 1,0001, т. е. практически не отличается от единицы, в связи с чем величиной $(dy/dx)^2$ можно пренебречь. Тогда уравнение (3) примет вид

$$M/EJ = \pm d^2y/dx^2 \ .$$

Так как dy/dx = tg θ, а углы θ весьма малы, то можно принимать

$$dy/dx = tg\ \theta, \qquad (12.4)$$

На рис. 12.4 показан участок dx изогнутой оси балки. Первая производная $dy/dx = \theta_x$, на этом участке возрастает с увеличением абсциссы x. Следовательно, вторая производная d^2y/dx^2 на этом участке положительна. Чтобы могла возникать такая деформация участка их, необходимо, чтобы изгибающий момент M в сечениях этого участка балки был положителен. Следовательно, при положительном значении M величина d^2y/dx^2 также положительна, а потому перед правой частью формулы $M/EJ = \pm d^2y/dx^2$ будет знак плюс, т. е.

$$d^2y/dx^2 = M/EJ \ . \qquad (12.5)$$

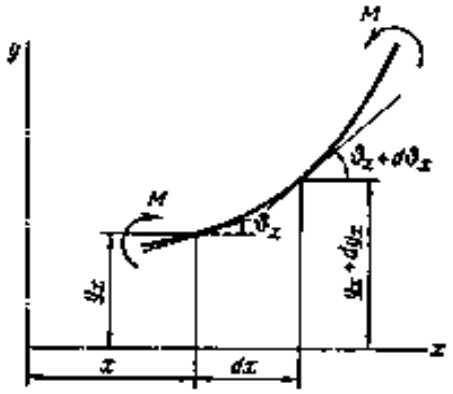


Рис. 12.4. Участок dx изогнутой оси балки

Уравнение (12.5) называется основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки. Оно является приближенным, так как при его выводе точное выражение кривизны оси заменено приближенным. Кроме того, не учтены деформации сдвига, связанные с наличием поперечных сил. Определение прогибов к углов поворота поперечных сечений балок, выполненное с учетом влияния поперечных сил, показывает что в подавляющем большинстве случаев это влияние несущественно и им можно пренебречь. Порядок определения перемещений поперечных сечений балок с помощью уравнения (12.5) рассмотрим на примере балки. изображенной на рис. 12.5. Балка имеет два участка.

Изгибающие моменты в сечениях участка I (при $0 \le x \le a$) и в сечениях

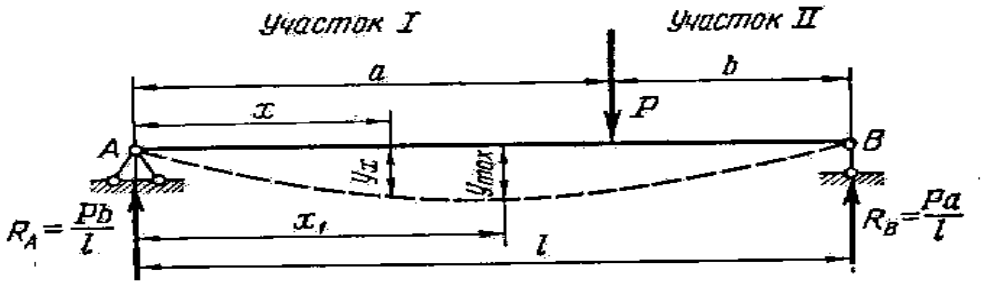


Рис. 12.5. Определение перемещений на участках

участка II (при $a \le x \le l$) равны

$$M^I = R_A x = \frac{pb}{l} x;$$

$$M^{II} = R_A x - P(x-a) = \frac{Pb}{l} x - P(x-a).$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (12.5), находим:

$$\theta^I = \frac{dy^I}{dx} = \int \frac{M^I}{EJ} dx = \int \frac{Pb}{EJl} x dx = \frac{Pb}{2lEJ} x^2 + C_1;$$

$$\theta^{II} = \frac{dy^{II}}{dx} = \int \frac{M^{II}}{EJ} dx = \int \frac{Pb}{EJ}\left[\frac{b}{l} x - (x-a)\right] dx =$$

$$= \frac{P}{EJ}\left[\frac{b}{2l} x^2 - \frac{(x-a)^2}{2}\right] + C_2;$$

$$y^I = \int \theta^I dx = \int \left(\frac{Pb}{2lEJ} x^2 + C_1\right) dx =$$

$$= \frac{Pb}{6lEJ} x^3 + C_1 x + D_1;$$

$$y^{II} = \int \theta^{II} dx = \int \left\{\frac{P}{EJ}\left(\frac{b}{2l} x^2 - \frac{(x-a)^2}{2}\right) + C_2\right\} dx =$$

$$= \frac{P}{EJ}\left(\frac{b}{6l} x^3 - \frac{(x-a)^3}{6}\right) + C_2 x + D_2.$$

При интегрировании был применен так называемый прием Клебша, состоящий в следующем: при интегрировании выражение P(x-a) dx заменяется выражением P(x - a) d(x - a), так как d(x-a) = dx, и интегрирование ведется без раскрытия скобок. Таким образом,

$$\int P(x-a)dx = \int P(x-a)d(x-a) = \frac{P(x-a)^2}{2} + C.$$

В полученные уравнения для углов поворота и прогибов балки входят четыре постоянные. При их определении используем условия для концов балки и для сечения на границе участков I и II. На левой опоре (при x=0) и на правой опоре (при x=*l*) прогибы равны нулю; в конце участка I (при x=a) прогиб и угол поворота сечения равны соответственно прогибу и углу поворота сечения в начале участка II (при x=a) (рис. 12.5):

$$y_0^I = 0; \quad y_l^{II} = 0; \quad y_a^I = y_a^{II}; \quad \theta_a^I = \theta_a^{II}.$$

Подставляем соответствующие значения x в уравнения прогибов и углов поворота (учитываем при этом, что $l - a = b$):

$$y_0^I = D_1 = 0; \qquad \text{(а)}$$

$$y_l^{II} = \frac{P}{EJ}\left[\frac{bl^3}{6l} - \frac{(l-a)^3}{6}\right] + C_2 l + D_2 =$$

$$= \frac{Pb}{6EJ}(l^2 - b^2) + C_2 l + D_2 = 0; \qquad (б)$$

$$y_a^I = \frac{Pba^3}{6EJl} + C_1 a + D_1 = y_a^{II} = \frac{Pba^3}{6EJl} + C_2 a + D_2; \qquad (в)$$

$$\theta_a^I = \frac{Pba^2}{2EJl} + C_1 = \theta_a^{II} = \frac{Pba^2}{2EJl} + C_2. \qquad (г)$$

Из равенств (а), (в) и (г)

$$C_1 = C_2 \quad \text{и} \quad D_1 = D_2 = 0.$$

Постоянные C_1 и C_2, а также D_1 и D_2 равны друг другу в результате применения приема Клебша при интегрировании дифференциального уравнения упругой линии.

Из равенства (б) находим

$$C_1 = C_2 = -\frac{Pb}{6EJl}(l^2 - b^2).$$

Подставим найденные значения постоянных в уравнения прогибов и углов поворота сечений балки:

$$\theta^I = \frac{Pbx^2}{2EJl} - \frac{Pb}{6EJl}(l^2 - b^2) = \frac{Pb}{2EJl}\left(x^2 + \frac{b^2}{3} - \frac{l^2}{3}\right);$$

$$y^I = \frac{Pbx^3}{6EJl} - \frac{Pb}{6EJl}(l^2 - b^2)x = \frac{Pbx}{6EJl}\left(x^2 + b^2 - l^2\right);$$

$$\theta^{II} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{P}{2}\frac{bx^2}{l} - \frac{P(x-a)^2}{2}\right] - \frac{Pb}{6EJl}\left(l^2 - b^2\right) =$$

$$= \frac{Pb}{2EJl}\left(x^2 + \frac{b^2}{3} - \frac{l^2}{3}\right) - \frac{P(x-a)^2}{2EJ};$$

$$y^{II} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{P}{6}\frac{bx^3}{l} - \frac{P(x-a)^3}{6}\right] - \frac{Pb}{6EJl}\left(l^2 - b^2\right)x =$$

$$= \frac{Pbx}{6EJl}\left(x^2 + b^2 - l^2\right) - \frac{P(x-a)^3}{6EJ}.$$

Рассмотрим случай, когда сила P приложена посередине пролета. Упругая линия в этом случае симметрична относительно середины пролета. Подставим в уравнение для θ^I и θ^{II} значения *a=b=l/2:*

$$\theta^I = \frac{P(l/2)}{2EJl}\left[x^2 + \frac{(l/2)^2}{3} - \frac{l^2}{3}\right] = \frac{P}{4EJ}\left(x^2 - \frac{l^2}{4}\right);$$

$$y^I = \frac{P(l/2)x}{6EJl}\left[x^2 + (l/2)^2 - l^2\right] = \frac{Px}{12EJ}\left(x^2 - \frac{3l^2}{4}\right).$$

Посередине пролета (при $x=l/2$)

$$y_{\max} = y_{l/2} = \frac{P(l/2)}{12EJ}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{3l^2}{4}\right] = -\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Угол поворота на левой опоре (при $x=0$)

$$\theta_0 = -Pl^2/(16EJ).$$

Определение перемещений в балках постоянного сечения методом начальных параметров

Рассмотрим определение линейных и угловых перемещений при изгибе балки постоянного сечения методом начальных параметров. Этот метод не требует составления выражений изгибающих моментов и интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Число постоянных, подлежащих определению, не превышает двух, независимо от числа участков балки.

Рассмотрим балку длиной l, находящуюся в равновесии под действием приложенных к ней нагрузок и опорных реакций. Левая часть балки длиной l_1 изображена на рис. 12.6. Условимся считать направление нагрузок P, q, M, показанные на этом рисунке, положительными. Совместим с левым концом балки начало O прямоугольной системы координат yx и направим ось x вправо, а ось y - вверх.

Составим выражения для поперечной силы Q и изгибающего момента

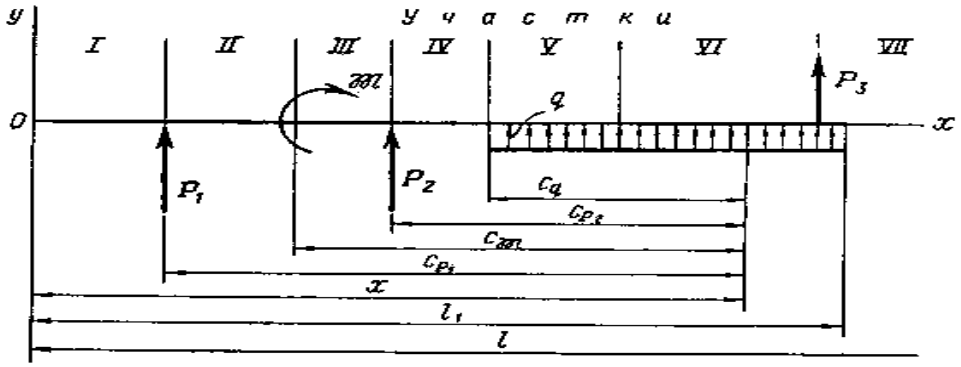


Рис. 12.6. Деление на участки

M, возникающих в поперечном сечении участка VI балки с абсциссой x (рис. 12.6):

$$Q = P_1 + P_2 + qc_q;$$

$$M = \mathsf{M} + P_1 c_{p1} + P_2 c_{p2} + q c_q^2 / 2 . \qquad (12.6)$$

В эти уравнения входят все нагрузки, приложенные к балке левее рассматриваемого сечения (с абсциссой x). Сила P_3 не входит в них, так как она приложена правее этого сечения. Составленные уравнения действительны для всех сечений в пределах одного лишь участка VI. Для других участков балки выражения Q и M отличаются от приведенных выражений. Например, в выражения Q и M для участка II не войдут нагрузки M, P_2 и q, приложенные правее него, а в выражения Q и M для участка VII дополнительно войдет нагрузка P_3.

Первом из уравнений (12.6) заменим сумму $P_1 + P_2$ выражением ΣP, а во втором $P_1 c_{p1} + P_2 c_{p2}$ - выражением ΣPc. Тогда эти выражения будут действительны при любом числе сосредоточенных сил P, приложенных левее рассматриваемого сечения. Аналогично представим и остальные члены выражения (6); индексов при *c* указывать не будем:

$$Q = \sum P + \sum qc ;$$
$$M = \sum \mathsf{M} + \sum Pc + \sum qc^2 / 2 . \qquad (12.7)$$

Здесь каждая величина *c* означает расстояние от сечения, в котором приложена соответствующая сосредоточенная нагрузка или начинается действие распределенной нагрузки, до сечения, для которого определяется значение Q и M. Так, например, выражение ΣPc следует понимать как сумму $P_1 c_{p1} + P_2 c_{p2} + \ldots,$ т.е. параметр *c* принимает последовательно значения $c_{p1,} c_{p2}$ и т.д.

Выражения (12.7) можно использовать для определения значений Q и M на любом участке балки, подставляя в них только нагрузки, приложенные к балке левее рассматриваемого сечения с абсциссой *x*.

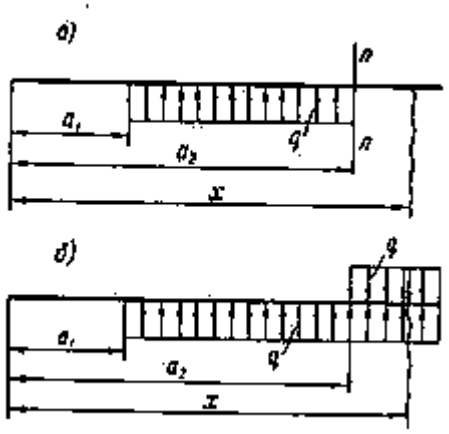


Рис. 12.7. Дейсвие распределенной нагрузки

Если распределенная нагрузка обрывается в сечении n-n , расположенном левее сечения с абсциссой *x* (рис. 12.7, *а*), то ее следует продолжить до правого конца балки и одновременно с этим приложить на участке от сечения n-n до правого конца балки нагрузку той же величины, но обратного знака (рис. 12.7, *б*).

В случае, например, показанном на рис.12.7, *а*, выражения Q и M при x>a будут тогда иметь вид:

$$Q = q(x-a_1) - q(x-a_2);$$

$$M = \frac{q(x-a_1)^2}{2} - q\frac{(x-a_2)^2}{2}.$$

Второе из выражений (12.7) можно представить в следующем виде:

$$M = \sum \mathrm{M} + \sum \frac{Pc}{1!} + \sum \frac{qc^2}{2!}.$$

Подставим выражение изгибающего момента по второй из формул (12.7) в основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (12.5):

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M = \sum \mathrm{M} + \sum \frac{Pc}{1!} + \sum \frac{qc^2}{2!}.$$

Проинтегрируем дважды полученное уравнение, учтя при этом, что dx = dc :

$$EJ\frac{dy}{dx} = EJ\theta = \sum \frac{Mc}{1!} + \sum \frac{Pc^2}{2!} + \sum \frac{qc^3}{3!} + C_m;$$

$$EJy = \sum \frac{Mc^2}{2!} + \sum \frac{Pc^3}{3!} + \sum \frac{qc^4}{4!} + C_m x + D_m. \qquad (12.8)$$

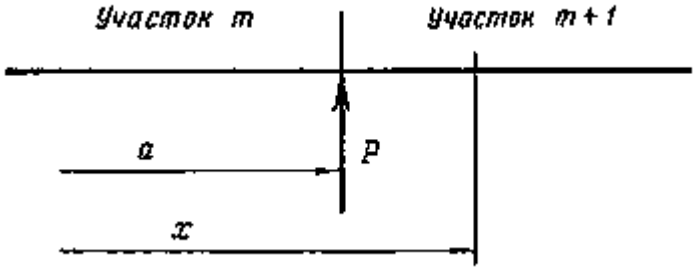


Рис. 12.8. Смежные участки

Постоянные интегрирования C_m и D_m относятся к участку *m* балки. Для их определения рассмотрим два соседних участка *m* и *m+1* балки (рис. 12.8), на границе которых приложена сосредоточенная сила P (или приложен сосредоточенный момент, или начинается действие распределенной нагрузки).

Представим уравнения (12.8) для участка *m* этой балки в виде

$$EJ\theta_m = A_x + C_m; \quad EJy_m = B_x + C_m x + D_m,$$

где A_x и B_x - правые части уравнений (12.8) без членов, содержащих постоянные интегрирования.

Для участка *m+1* балки уравнения (12.8) примут вид

$$EJ\theta_{m+1} = A_x + \frac{P(x-a)^2}{2!} + C_{m+1};$$

$$EJy_{m+1} = B_x + \frac{P(x-a)^3}{3!} + C_{m+1}x + D_{m+1}.$$

Но на границе участков *m* и *m+1*, т.е. при *x=a*,

$$EJ\theta_m = EJ\theta_{m+1} \quad \text{и} \quad EJy_m = EJy_{m+1}.$$

Следовательно,

$$A_a + C_m = A_a + C_{m+1}$$

и

$$B_a + C_m a + D_m = B_a + C_{m+1}a + D_{m+1},$$

откуда

$$C_m = C_{m+1} \quad \text{и} \quad D_m = D_{m+1}.$$

Рассматривая аналогично соседние участки *m+1* и *m+2,* получим

$$C_m = C_{m+1} \quad \text{и} \quad D_m = D_{m+1}.$$

Следовательно,

$$C_m = C_{m+1} = C_{m+2} = \ldots = C;$$
$$D_m = D_{m+1} = D_{m+2} = \ldots = D.$$

Таким образом, постоянные интегрирования C (также и D), входящие в выражения (12.8), одинаковы для всех участков балки от первого до последнего, а потому индексы при этих постоянных в выражениях (12.8) не нужны. Для определения C и D составим по формулам (8) выражения θ_0 и y_0 (для сечения на левом конце балки, т.е. при x = 0). Для этого сечения все расстояния *c* равны нулю. Следовательно,

$$EJ\theta_0 = C; \quad EJy_0 = D.$$

Подставим найденные значения C и D в уравнения (12.8):

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + \sum\frac{M\,c}{1!} + \sum\frac{Pc^2}{2!} + \sum\frac{qc^2}{3!};$$

$$EJy = EJy_0 + \frac{EJ\theta_0 x}{1!} + \sum\frac{M\,c^2}{2!} + \sum\frac{Pc^3}{3!} + \sum\frac{qc^4}{4!}, \qquad (12.9)$$

Полученные выражения прогибов и углов поворота действительны при условии, что начальное сечение балки (с координатой x=0) расположено у ее левого конца, а положительным для оси *x* является направление слева направо. В правых частях этих выражений *c* - расстояния от сечений, в которых к балке приложена соответствующая сосредоточенная нагрузка (или начинается

действие распределенной нагрузки), до сечения, для которого определяются значения θ и *y*.

Нагрузки $P = Q_0$ и $M = M_0$ приложенные к левому концу (начальному сечению) балки, а также переменные θ_0 и y_0 этого конца называются *начальными параметрами.* По значениям этих параметров (а также нагрузок, приложенных к балке по ее длине) с помощью уравнений (12.9) можно определить углы поворота θ и прогибы *y* любых сечений балки. Поэтому уравнения (12.9) называются уравнениями метода начальных параметров.

Для статически определимой балки начальные параметры Q_0 и M_0 можно легко определить при помощи уравнений равновесия. Начальные же параметры θ_0 и y_0 могут быть как известными, так и неизвестными в зависимости от способа закрепления левого конца балки. Если левый конец защемлен, то известны оба этих начальных параметра ($\theta_0 = 0$ и $y_0 = 0$); если левый конец шарнирно оперт, то известен только один из них ($y_0 = 0$); если же левый конец балки свободен, то оба параметра θ_0 и y_0 неизвестны.

Неизвестные начальные параметры θ_0 и y_0 можно определить из условий, составленных для сечений балки, перемещения которых известны. Так, например, для балки с шарнирно опертыми концами неизвестный параметр θ_0 определяется из того условия, что прогиб на правой опоре равен нулю.

ИНТЕГРАЛ МОРА

Интегралы Мора основаны на теоремах о взаимности работ и взаимности перемещений. Если необходимо определить перемещение в точке, где не приложены внешние силы, мы сами прикладываем в этой точке внешнюю силу Ф в интересующем нас направлении. Далее, составляем выражение потенциальной энергии системы с учетом силы Ф. Дифференцируя его по Ф, находим перемещение рассматриваемой точки по направлению приложенной силы Ф. Теперь остается «вспомнить», что на самом деле силы Ф нет, и положить ее равной нулю. Таким образом, определяется искомое перемещение. Определим перемещение точки *A* в направлении оси x_1 для стержневой системы, показанной на рис. 12.9.

Приложим в точке *A* по направлению x_1 силу Ф. Внутренние силовые факторы в каждом поперечном сечении при этом, вообще говоря, изменятся на величины, зависящие от силы Ф. Так, например, крутящий момент в некотором поперечном сечении будет иметь вид

$$M_{kP} + M_{k\Phi},$$

где первое слагаемое представляет собой момент, который возникает под действием заданной системы внешних сил, а второе слагаемое — дополнительный момент, который появляется в результате приложения силы Ф. Понятно, что и M_{kP} и $M_{k\Phi}$ являются функциями *z*, т. е. изменяются по длине

стержня. Аналогично появляются дополнительные слагаемые и у остальных внутренних силовых факторов:

$$M_x = M_{xP} + M_{x\Phi}, \qquad M_y = M_{yP} + M_{y\Phi} \quad \text{и т.д.}$$

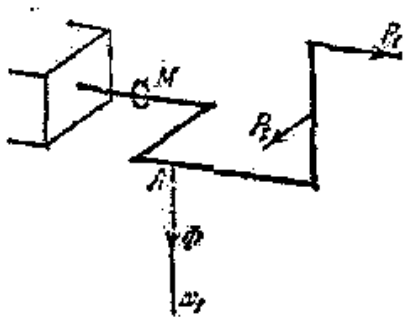


Рис. 12.9. Определение перемещения в точкае А

Совершенно очевидно, что дополнительные силовые факторы $M_{k\Phi}$, $M_{x\Phi}$, ... пропорциональны силе Ф. Если силу Ф, например, удвоить, удвоятся соответственно и дополнительные силовые факторы. Следовательно,

$$\begin{gathered} M_y = M_{yP} + M_{y1}\Phi \\ M_k = M_{kP} + M_{k1}\Phi, M_x = M_{xP} + M_{x1}\Phi, , \\ N = N_P + N_1\Phi, \quad Q_x = Q_{xP} + Q_{x1}\Phi, \quad Q_y = Q_{yP} + Q_{y1}\Phi. \end{gathered} \tag{12.10}$$

где M_{k1}, M_{x1}, ...— некоторые коэффициенты пропорциональности, зависящие от положения рассматриваемого сечения, т. е. переменные по длине стержня. Если снять систему внешних сил и заменить силу Ф единичной силой, то

$$M_k = M_{k1}, \qquad M_{x1} = M_{x1} \qquad \text{и т.д.}$$

Следовательно, M_{k1}, M_{x1}, M_{y1}, N_1, Q_{x1} и Q_{y1} суть не что иное, как внутренние силовые факторы, возникающие в поперечном сечении под действием единичной силы, приложенной в рассматриваемой точке в заданном направлении.

Вернемся к выражению энергии (12.3) и заменим в нем внутренние силовые факторы их значениями (12.10). Тогда

$$U = \int_l \frac{(M_{kP} + M_{k1}\Phi)^2 dz}{2GJ_k} + \int_l \frac{(M_{xP} + M_{x1}\Phi)^2 dz}{2EJ_x} + \int_l \frac{(M_{yP} + M_{y1}\Phi)^2 dz}{2EJ_y} +$$

$$+ \int_l \frac{(N_P + N_1\Phi)^2 dz}{2EA} + \int_l \frac{(Q_{xP} + Q_{x1}\Phi)^2 dz}{2GA} + \int_l \frac{(Q_{yP} + Q_{y1}\Phi)^2 dz}{2GA}. \tag{12.11}$$

Дифференцируем это выражение по Ф и, полагая после этого Ф=0, находим перемещение точки А:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial \Phi}\Big|_{\Phi=0} = \int_l \frac{M_{kP}M_{k1}dz}{GJ_k} + \int_l \frac{M_{xP}M_{x1}dz}{EJ_x} + \int_l \frac{M_{yP}M_{y1}dz}{EJ_y} +$$

$$+ \int_l \frac{N_P N_1 dz}{EA} + \int_l \frac{Q_{xP}Q_{x1}dz}{GA} + \int_l \frac{Q_{yP}Q_{y1}dz}{GA} \qquad (12.12)$$

Полученные интегралы носят название интегралов Мора.

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия малого элемента стержня длиной dz имеет вид:

$$dU = \frac{M_k^2 dz}{2GJ_k} + \frac{M_x^2 dx}{2EJ_x} + \frac{M_y^2 dz}{2EJ_y} + \frac{N^2 dz}{2EA} + k_x \frac{Q_x dz}{2GA} + k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA} \qquad (12.13)$$

Чтобы получить потенциальную энергию всего стержня, это выражение следует проинтегрировать по длине:

$$U = \int_L \frac{M_k^2 dz}{2GJ_k} + \int_L \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} + \int_L \frac{M_y^2 dz}{2EJ_y} + \int_L \frac{N^2 dz}{2E} + \int_L \frac{k_x Q_x^2 dz}{2GF} + \int_L \frac{k_y Q_y^2 dz}{2GF} \qquad (12.14)$$

Если конструкция сложная и состоит из нескольких элементов, имеющих форму стержня, то после интегрирования в пределах каждого стержня должно быть произведено суммирование энергии по числу составляющих элементов.

В выражении (12.14) не всегда все слагаемые являются равноценными, Для подавляющего большинства встречающихся на практике систем, где составляющие элементы работают на изгиб или кручение, три последних слагаемых в выражении (12.14) оказываются существенно меньшими трех первых. Иначе говоря, энергия растяжения и сдвига, как правило, существенно меньше энергии изгиба и кручения.

СПОСОБ ВЕРЕЩАГИНА

Основным недостатком определения перемещений при помощи интеграла Мора является необходимость составления аналитического выражения подынтегральных функций. Это особенно неудобно при определении перемещений в стержне, имеющем большое количество участков. Однако, если он состоит из прямых участков с постоянной в пределах каждого участка жесткостью, операцию интегрирования можно упростить. Это упрощение

основано на том, что эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными.

Положим, на участке длиной l нужно взять интеграл от произведения двух функций $f_1(z)\cdot f_2(z)$

$$J = \int_0^l f_1(z)\cdot f_2(z)dz \qquad (12.15)$$

при условии, что по крайней мере одна из этих функций - линейная. Пусть $f_2(z)=b+kz$. Тогда выражение (12.15) примет вид

$$J = b\int_0^l f_1(z)dz + k\int_0^l zf_1(z)dz\,.$$

Первый из написанных интегралов представляет собой площадь, ограниченную кривой $f_1(z)$, или, короче говоря, площадь, эпюры $f_1(z)$:

$$\int_0^l f_1(z)dz = \Omega_1\,,$$

Второй интеграл представляет собой статический момент этой площади относительно оси ординат, т.е.

$$\int_0^l zf_1(z)dz = \Omega_1 z_{ц.т.}\,,$$

где $z_{ц.т.}$ - координата центра тяжести первой эпюры. Теперь получаем

$$J = \Omega_1(b + kz_{ц.т.})\,.$$

Но $b + kz_{ц.т.} = f_2(z_{ц.т.})$. Следовательно,

$$J = \Omega_1 f_2(z_{ц.т.})\,.$$

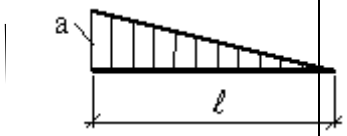
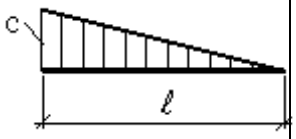
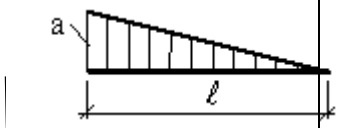
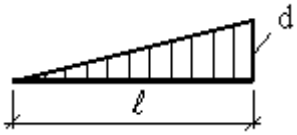
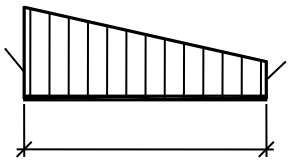
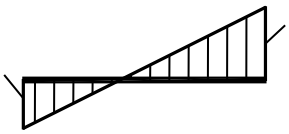
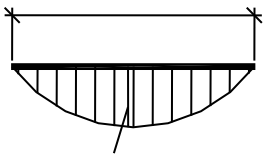
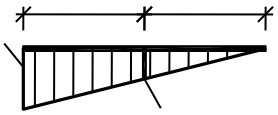
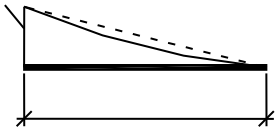
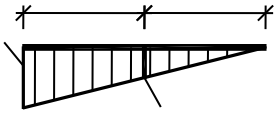
Таким образом, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади первой эпюры на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой.

В случае, если обе функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ линейные, операция перемножения обладает свойством коммутативности. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй эпюры на ординату первой.

В таблице 12.1 приведены готовые формулы для определения перемещений с помощью интеграла Мора при изгибе. В интегралах Мора учтено действие изгибающих моментов, т.е. пренебрегается влияние поперечной и продольной сил.

Таблица 12.1. Формулы для определения перемещений с помощью интеграла Мора

Эпюры от	Перемещения

нагрузки	единичных сил	
1	2	3
		$\Delta_{ik} = \frac{ac\ell}{3EJ}$
		$\Delta_{ik} = \frac{ad\ell}{6EJ}$
		$\Delta_{ik} = \frac{l}{6EJ}(-2ac + 2bd - bc + ad)$
 квадратная		$\Delta_{ik} = \frac{2\ell fc}{3EJ}$
 квадратная		$\Delta_{ik} = -\frac{\ell fc}{4EJ}$

Лекция 13

Сложное сопротивление. Косой изгиб. Нулевая линия. Расчет на прочность

Ранее мы рассматривали простые виды деформации. В действительности элементы конструкций одновременно подвергаются нескольким видам деформаций. Вид деформации является сложным, когда в поперечном сечении стержня возникают два и более силовых факторов. Сложный вид деформации можно рассматривать как сумму простых видов, изученных ранее (растяжение, изгиб, кручение), если применим принцип независимости действия сил (частный случай принципа суперпозиции или наложения, применяемый в механике деформируемого твердого тела). Напомним формулировку принципа независимости действия сил: напряжение (деформация) от группы сил равно сумме напряжений (деформаций) от каждой силы в отдельности. Он справедлив, если функция и аргумент связаны линейной зависимостью. В задачах механики материалов и конструкций он становится неприменимым, если: 1. напряжения в какой-либо части конструкции от одной из сил или группы сил превышают предел пропорциональности $\sigma_{пц}$;2. деформации или перемещения становятся настолько большими, что нарушается линейная зависимость между ними и нагрузкой. Например, дифференциальное уравнение изгиба стержня является нелинейным и вытекающая из него зависимость прогиба f от нагрузки P для консольной балки, изображенной на рис. 13.1, *а*, также является нелинейной (рис. 13.1, *б*). Однако, если прогибы балки невелики ($f<<l$) настолько, что $(dv/dz)^2<<1$ (так как $dv/dz \sim f/l$), то дифференциальное уравнение изгиба становится линейным (как видно из рис. 13.1, *б*, начальный участок зависимости P от f, описываемый этим уравнением, также является линейным).

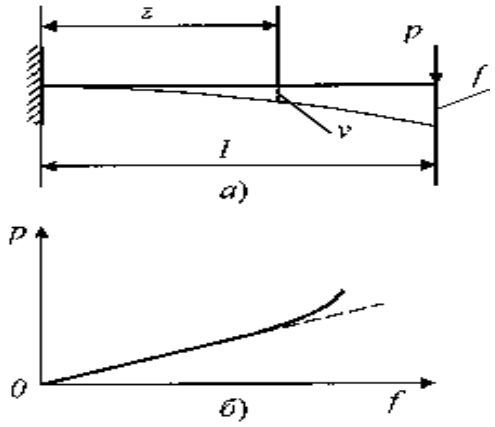


Рис.13.1. Модели изгиба балки: а) расчетная схема б) линейное и нелинейное сопротивления

Известно, что косой изгиб имеет место, когда силы, его вызывающие, не лежат в одной из главных плоскостей инерции. Однако, если разложить внешние силы по главным осям инерции *Ox* и *Oy,* то получим две системы сил P_{1x}, P_{2x}, …, P_{nx} и P_{1y}, P_{2y},..., P_{ny}, каждая из которых вызывает прямой изгиб с изгибающими моментами соответственно M_y и M_x (рис. 13.2). Применяя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения σ (рис. 13.3) определим как алгебраическую сумму напряжений от M_x и M_y:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{My} = \pm\frac{M_x}{J_x}y \pm \frac{M_y}{J_y}x \quad . \tag{13.1}$$

Чтобы не связывать себя формальными правилами знаков, слагаемые будем определять по модулю, а знаки ставить по смыслу. Прогибы балки определим как геометрическую сумму прогибов от прямых изгибов (рис. 13.2)

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad . \tag{13.2}$$

Таким образом, расчет на косой изгиб с применением принципа независимости действия сил сводится к расчету на два прямых изгиба с последующим алгебраическим суммированием напряжений и геометрическим суммированием прогибов.

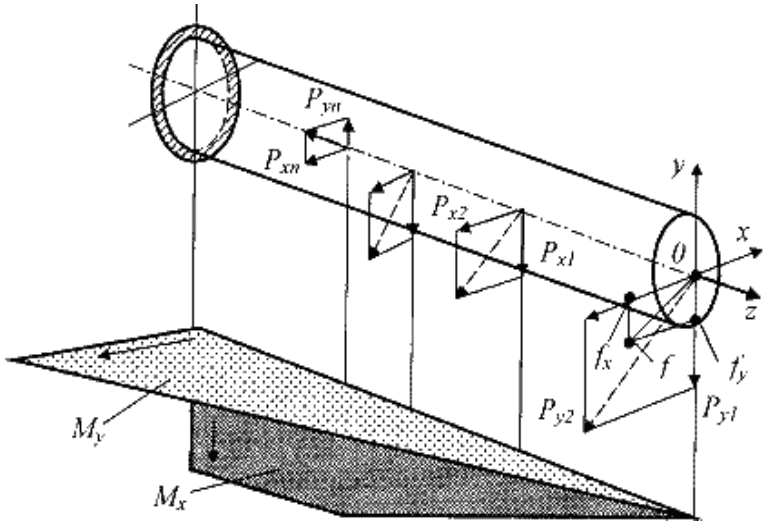


Рис. 13.2. Расчетная модель косого изгиба бруса

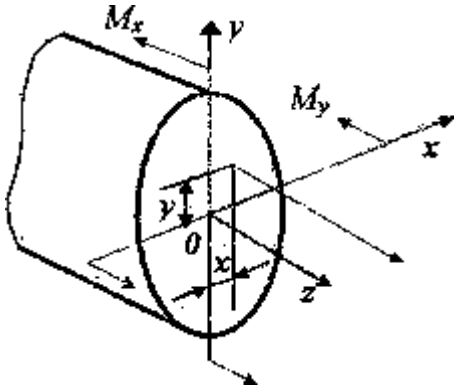


Рис. 13.3. Связь нормального напряжения с внутренними изгибающими моментами

В случае поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки (рис. 13.4) с равными по модулю и максимальными одноименными координатами $|x_A| = x_B = x_C = |x_D| = x_{\max}$ и $|y_A| = y_B = y_C = |y_D| = y_{\max}$ напряжения в этих точках будут равны

$$\sigma_{A,B,C,D} = \pm\frac{M_x}{J_x} y_{\max} \pm\frac{M_y}{J_y} x_{\max} = \pm\frac{M_x}{W_x} \pm\frac{M_y}{W_y} . \qquad (13.3)$$

Слагаемые в этом выражении рекомендуется определять по модулю, а знаки ставить по смыслу. Например, на рис. 13.5 верхний ряд знаков «+» и «—» соответствует напряжениям от M_x, а нижний ряд — от M_y, и напряжения в этих точках будут равны

$$\sigma_A = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} , \quad \sigma_B = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} ,$$
$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} , \quad \sigma_D = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} , \qquad (13.4)$$

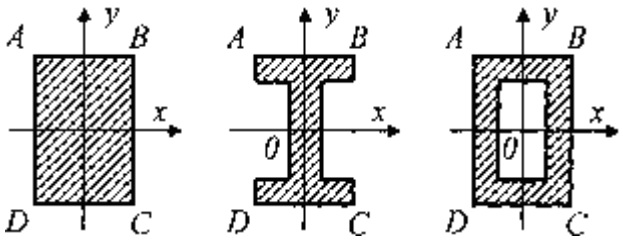


Рис. 13.4. Симметричные варианты сечений

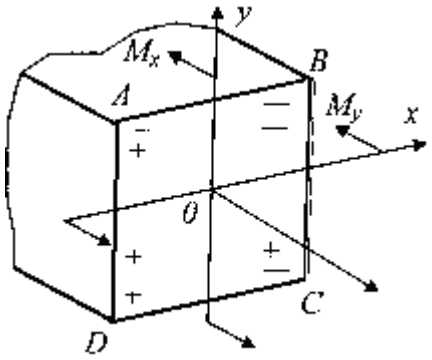


Рис. 13.5. Расстановка знаков от действия моментов

Условие прочности для балок из пластичного материала с указанным типом сечений запишется в виде

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad . \tag{13.5}$$

В правой части (13.5) в знаменателе стоят моменты сопротивления сечения относительно осей x,y. В остальных случаях для определения max σ (или min σ и max $|\sigma_c|$ для хрупкого материала) необходимо по общей формуле проверить напряжения во всех опасных точках.

Есть и другой путь: положив $\sigma = 0$, получим уравнение нейтральной линии. Так как напряжения в точках поперечного сечения будут пропорциональными расстояниям от нейтральной линии, то *max* σ будут возникать в наиболее удаленных от нее точках.

Нулевая линия. Расчет на прочность.

Как было ранее сказано, косой изгиб возникает в том случае, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения (рис. 13.6). В этом случае возникающий в поперечном сечении изгибающий момент можно разложить на два изгибающих момента, действующих в плоскостях, проходящих через главные оси сечения. Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях.

При косом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения будут равны алгебраической сумме напряжений от изгиба в обеих плоскостях.

Рассмотрим, например, точку *C* опорного сечения (Рис.13.6), имеющую координаты *x* и *y,* относительно главных осей. В этом сечении:

а) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в вертикальной плоскости с нейтральной осью *x,*

$$M_x = F_v l = Fl\sin\varphi; \tag{13.6}$$

б) изгибающий момент, возникающий при изгибе стержня в горизонтальной плоскости с нейтральной осью *y,*

$$M_y = F_h l = Fl\cos\varphi. \tag{13.7}$$

Здесь F_v и F_h – вертикальная и горизонтальная составляющие силы F; l – длина балки; φ – угол наклона силовой плоскости относительно оси x.

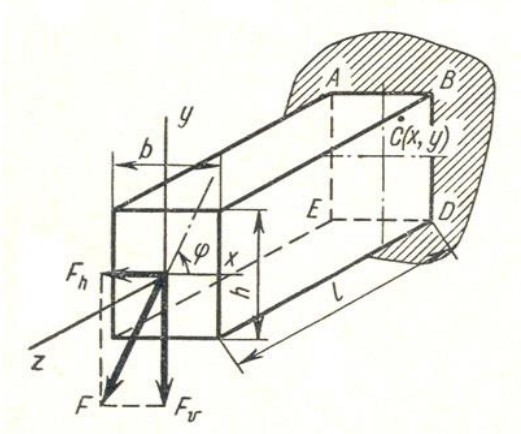


Рис. 13.6. Косой изгиб

При изгибе в вертикальной плоскости в верхней половине балки (в том числе и в точке *C*) возникают растягивающие напряжения, в нижней половине балки – сжимающие, так как выпуклая сторона балки будет наверху.

Напряжения в точке *C* определяем последующей формуле, уже известной из теории плоского изгиба:

$$\sigma_1 = M_x\, y/I_x \tag{13.8}$$

где y — расстояние от нейтральной оси x до точки C; I_x — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси x.

Вследствие изгиба в горизонтальной плоскости в правой половине балки, а следовательно, и в точке *C* возникают растягивающие напряжения, а в левой половине балки – сжимающие, так как выпуклая сторона балки при изгибе в горизонтальной плоскости будет справа. В этом легко убедиться, изогнув гибкую линейку в горизонтальной плоскости.

Напряжения в точке *C* при этом будут определяться по аналогичной формуле (13.8):

$$\sigma_2 = M_y\, x / I_y$$

где x – расстояние от оси y (нейтральной оси при изгибе в горизонтальной плоскости) до точки *C;* I_y – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси *y.* Суммарное напряжение в точке С

$$\sigma = M_x\, y / I_x + M_y\, x / I_y \qquad (13.9)$$

Эта формула справедлива и при любой другой форме сечения балки.

Если, сечение имеет выступающие угловые точки, для которых x_{max} и y_{max} достигаются одновременно (прямоугольник, двутавр), то наибольшие по значению напряжения возникают в этих точках:

$$\sigma = \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y \qquad (13.10)$$

где $W_x = 2I_x/h$ – момент сопротивления сечения относительно оси x; $W_y = 2I_y / b$ – момент сопротивления сечения относительно оси y.

Очевидно, что опасными будут те угловые точки сечения, где суммируются напряжения одного знака.

Для случая, изображенного на рис. 13.7, такими точками будут точки *B* и *E,* при этом точка *B* находится в растянутой зоне, а точка *E* — в сжатой. Поэтому напряжения в точках *B* и *E* равны:

$$\sigma_B = M_x / W_x + M_y / W_y; \quad \sigma_E = -M_x / W_x - M_y / W_y. \qquad (13.11)$$

Для сечения произвольного очертания, не имеющего выступающих угловых точек, необходимо предварительно найти «опасные» точки, т. е. те точки сечения, в которых будут действовать наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения (рис. 13.7).

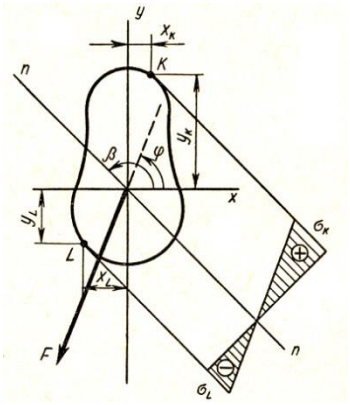


Рис. 13.7. Положение нулевой линии при косом изгибе

Это производится следующим образом. Вначале определяется положение нулевой линии при косом изгибе, т. е. определяется геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю. Другими словами, определяется линия, разделяющая растянутую и сжатую части сечения. Пусть это будет линия *nn.*

При изгибе напряжения возрастают по мере удаления от нулевой линии.

Это видно из того, что уравнение (13.11) представляет собой уравнение плоскости, проходящей через нулевую линию. Ордината, замеренная по нормали от поперечного сечения до этой плоскости, численно равна напряжению в данной точке. Она будет наибольшей для той точки, которая дальше всех отстоит от нулевой линии.

Учитывая это, заключаем, что точками, в которых следует проверять напряжения, будут точки, наиболее удаленные от нулевой линии, т. е. точки *K* и *L*. При материале, одинаково работающем на растяжение и сжатие, опасной является та из указанных точек, в которой возникает большее (по модулю) напряжение.

Уравнение нулевой линии получим, приравняв правую часть формулы (13.11) нулю:

$$M_x y_0 / I_x + M_y x_0 / I_y = 0$$

Или

$$M_x(y_0 / I_x + K x_0 / I_y) = 0 \qquad (13.12)$$

где в соответствии с формулой (13.12)

$$K = M_y / M_x = ctg\varphi, \qquad (13.13)$$

а x_0 *и* y_0 – текущие координаты точек нулевой линии.

Так как $M_x \neq 0$, то

$$y_0 / I_x + K x_0 / I_y = 0 \qquad (13.14)$$

Это и есть уравнение нулевой линии.

Как видим, это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат. Разделив обе части уравнения на x_0, получим

$$y_0 / (x_0 I_x) + K / I_y = 0. \qquad (13.15)$$

Но отношение $y_0 / x_0 = tg\beta$ – тангенс угла наклона нулевой линии к оси x, т.е. ее угловой коэффициент. Следовательно, $tg\beta / I_x + K / I_y = 0$ или

$$k = tg\beta = -K I_x / I_y = -I_x / (I_y\, ctg\beta). \qquad (13.16)$$

Как видно из этого уравнения, при $I_x \neq I_y$ угол β не равен углу φ, т. е. нулевая линия не перпендикулярна силовой линии, как это имело место при плоском (простом) изгибе. Только в частном случае, когда $I_x = I_y$ (круг, квадрат и т. п.), имеем

$$tg\beta = -ctg\varphi = -tg\,(90° - \varphi) = tg(\varphi - 90°), \text{ т.е. } \beta = \varphi - 90°.$$

Следовательно, в этом частном случае ($I_x = I_y$) нулевая линия перпендикулярна силовой линии, т. е. имеет место плоский изгиб.

Следует отметить, что нулевая и силовая линии размещаются в смежных квадрантах.

Если, например, силовая линия проходит через I и III квадранты ($0 < \varphi < 90°$), то в соответствии с формулой (13.9) получим для β значение меньше 90° и притом со знаком минус. Это означает, что угол β следует отложить от оси x по часовой стрелке, т. е. нулевая линия пройдет через IV и II квадранты.

Определив положение нулевой линии, и найдя наиболее удаленные от нулевой линии точки поперечного сечения (опасные точки), можно произвести проверку прочности сечения.

Если материал балки по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности следует производить для обеих точек, наиболее удаленных от нулевой линии (точки K и L на рис. 13.7).

В указанном случае, считая, что стержень представляет консоль, как на рис. 13.6, условия прочности запишутся в виде

$$\sigma_K = + M_x y_K / I_x + M_y x_K / I_y \leq [\sigma_p] \quad (13.17)$$

$$\sigma_L = - M_x y_L / I_x - M_y x_L / I_y \leq [\sigma_c] \quad (13.18)$$

При равенстве $[\sigma_p] = [\sigma_c]$, т.е. для пластичных материалов, расчет, как уже указывалось, выполняется для одной точки, например в случае, представленном на рис. 9.3, для, точки *К,* так как $\sigma_K > \sigma_L$.
Для сечений типа прямоугольника, двутавра и т. п. условие прочности получим на основании формулы (9.2):

$$\sigma = M_x / W_x + M_y / W_y \leq [\sigma] \quad (13.19)$$

В случае хрупкого материала, например чугуна, в формулу (13.19) следует подставить допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_p]$.

Определение требуемых размеров поперечного сечения выполняют, используя (в зависимости от формы сечения) формулы (13.17), (13.18) или (13.19), при этом обычно расчет приходится выполнять способом повторных попыток.

Приняв какие-либо размеры сечения, проверяют, удовлетворяются ли условия прочности: формулы (13.17), (13.18) или (13.19). Если расхождение между рабочими и допускаемыми напряжениями значительно, принимают другие размеры сечения и повторяют расчет. Указанные попытки производят до тех пор, пока расхождение между σ_{max} и $[\sigma]$ не будет превышать 5–10 %. При подборе сечений прокатных балок используют таблицы сортамента.

Подбор круглого сечения производится по формуле простого (плоского) изгиба по суммарному изгибающему моменту

$$M_{\text{сум}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\,, \quad (13.20)$$

поскольку для круга нулевая линия перпендикулярна линии действия $M_{сум}$.

Представляет определенный практический интерес задача о выборе такой формы поперечного сечения, при которой расход материала при косом изгибе будет минимальным. Нетрудно показать, что для прямоугольного сечения минимальный расход материала (минимальная площадь сечения) получится при условии $h/b = M_x / M_y$.

Однако прямоугольное сечение не является наивыгоднейшим при косом изгибе. Наиболее выгодными являются коробчатые, тонкостенные сечения.

Контрольные вопросы:

Контрольные вопросы:

1. Что такое главные центральные оси сечения и главные плоскости изгиба?
2. Чем различается изгиб в главной и неглавной плоскостях?
3. Какая геометрическая характеристика сечения определяет прочность по нормальным напряжениям при изгибе?
4. Как находятся опасные точки при косом изгибе?
5. Как определяется положение нулевой линии при косом изгибе?
6. Как определяется момент сопротивления сечения?
7. Условия прочности при косом изгибе?
8. Как определяется полный изгибающий момент при косом изгибе?
9. Дать определение сложной деформации?
10. Где используется принцип независимости действия сил при сложной деформации, когда он применим?
11. Как определяется положение нулевой линии?
12. Как определить положение опасных точек при косом изгибе?

Лекция 14

Внецентренное сжатие или растяжение. Нулевая линия. Ядро сечения при внецентренном сжатии

Для инженерной практики очень важным видом деформации является совместное действие изгиба и сжатия или растяжения. Например, если на балку одновременно действуют поперечные и продольные силы, первые вызывают поперечный изгиб, а вторые – растяжение или сжатие. Вторым важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид деформации получается при действии на стержень двух равных и прямопротивоположных сил P, направленных по прямой AA, параллельной оси стержня (Рис.141 а). Расстояние точки A от центра тяжести сечения $OA=e$ называется эксцентриситетом. Рассмотрим сначала случай внецентренного сжатия, как имеющий большее практическое значение.

Дальнейшей задачей явится нахождение наибольших напряжений в материале стержня и проверка прочности. Для решения этой задачи приложим в точках O по две равные и противоположные силы P (Рис. 14.1 б). Это не нарушит равновесия стержня в целом и не изменит напряжений в его

сечениях. Силы *P*, зачеркнутые один раз, вызовут осевое сжатие, а пары сил *P*, зачеркнутые дважды, вызовут чистый изгиб моментами $M_0 = Pe$. Расчетная схема стержня показана на Рис.14.1 в. Так как плоскость действия изгибающих пар *OA* может не совпадать ни с одной из главных плоскостей инерции стержня, то в общем случае имеет место комбинация продольного сжатия и чистого косого изгиба. Так как при осевом сжатии и чистом изгибе напряжения во всех сечениях одинаковы, то проверку прочности можно произвести для любого сечения, хотя бы С—С (Рис.14.1 б, в). Отбросим верхнюю часть стержня и оставим нижнюю (Рис.14.1 г). Пусть оси *Oy* и *Oz* будут главными осями инерции сечения.

Координаты точки *A*, — точки пересечения линии действия сил *P* с плоскостью сечения, — пусть будут y_P и z_P. Условимся выбирать положительные направления осей *Oy* и *Oz* таким образом, чтобы точка *A* оказалась в первом квадранте. Тогда y_P и z_P будут положительны.

Для того чтобы отыскать наиболее опасную точку в выбранном сечении, найдем нормальное напряжение σ в любой точке *B* с координатами *z* и *y*.

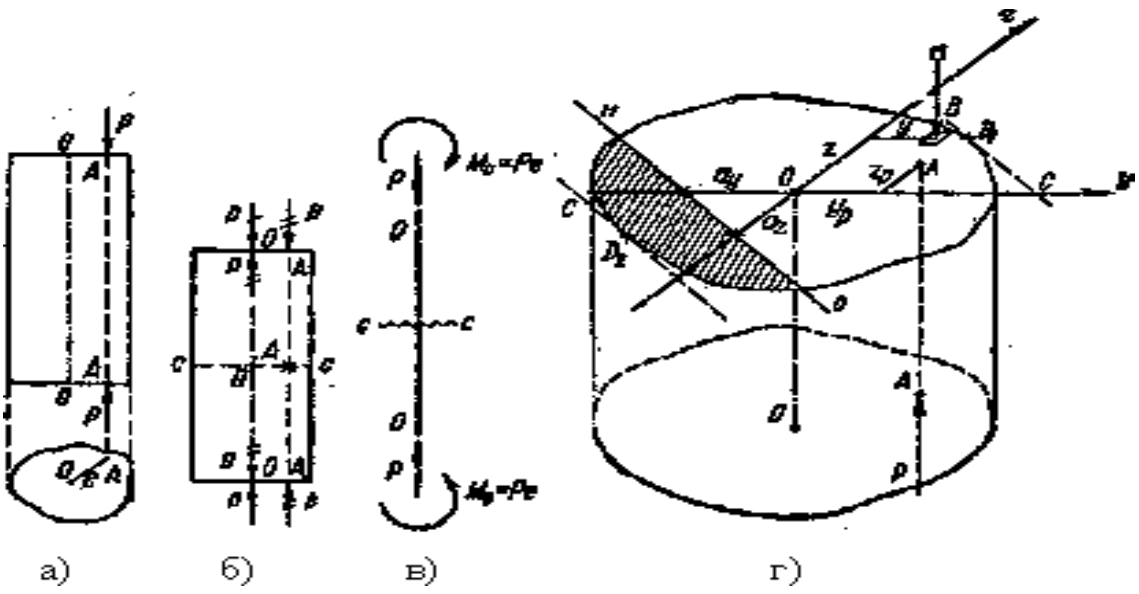


Рис.14.1.Внецентренное сжатие: а) расчетная схема б) преобразование нагрузок в) приведенная расчетная схема г) механизм исследования напряжений

Напряжения в сечении С — С будут складываться из напряжений осевого сжатия силой *P* и напряжений от чистого косого изгиба парами с моментом *Pe*, где $e = OA$. Сжимающие напряжения от осевых сил *P* в любой точке равны P/A, где A— площадь поперечного сечения стержня; что касается косого изгиба, то заменим его действием изгибающих моментов в главных плоскостях. Изгиб в плоскости *x Oy* вокруг нейтральной оси *Oz* будет

вызываться моментом Py_P и даст в точке B нормальное сжимающее напряжение

$$\frac{Py_p \cdot y}{J_z}$$

Точно так же нормальное напряжение в точке B от изгиба в главной плоскости $x\,Oz$, вызванное моментом Pz_P, будет сжимающим и выразится формулой $\frac{Pz_p \cdot z}{J_y}$.

Суммируя напряжения от осевого сжатия и двух плоских изгибов и считая сжимающие напряжения отрицательными, получаем следующую формулу для напряжения в точке B:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Py_p y}{J_z} - \frac{Pz_p z}{J_y} = -P\left(\frac{1}{A} + \frac{y_p y}{J_z} + \frac{z_p z}{J_y}\right) \qquad (14.1)$$

Эта формула годится для вычисления напряжений в любой точке любого сечения стержня, стоит только вместо y и z подставить координаты точки относительно главных осей с их знаками. В случае внецентренного растяжения знаки всех составляющих нормального напряжения в точке B изменятся на обратные. Поэтому для того, чтобы получать правильный знак напряжений как при внецентренном сжатии, так и при внецентренном растяжении, нужно, кроме знаков координат y и z, учитывать также и знак силы P; при растяжении перед выражением

$$P\left(\frac{1}{A} + \frac{y_p y}{J_z} + \frac{z_p z}{J_y}\right)$$

должен стоять знак плюс, при сжатии — минус. Полученной формуле можно придать несколько иной вид; вынесем за скобку множитель $\frac{P}{A}$; получим:

$$\sigma = -\frac{P}{A}\left[1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2}\right] \qquad (14.2)$$

Здесь i_z и i_y — радиусы инерции сечения относительно главных осей , где

$$J_z = i_z^2 A \quad , \quad J_y = i_y^2 A$$

Нулевая линия

Для отыскания точек с наибольшими напряжениями следует так выбирать *y* и *z*, чтобы σ достигло наибольшей величины. Переменными в формулах (14.1) и (14.2) являются два последних слагаемых, отражающих влияние изгиба. А так как при изгибе наибольшие напряжения получаются в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (нулевой линии), то здесь, как и при косом изгибе, надо отыскать положение нейтральной оси. Обозначим координаты точек этой линии через y_0 и z_0; так как в точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю, то после подстановки в формулу (14.2) значений y_0 и z_0 получаем:

$$0 = -\frac{P}{A}\left[1 + \frac{y_P y_0}{i_z^2} + \frac{z_P z_0}{i_y^2}\right],$$

или

$$1 + \frac{y_P y_0}{i_z^2} + \frac{z_P z_0}{i_y^2} = 0 \qquad (14.3)$$

Это и будет уравнение нейтральной (нулевой линии) оси. Очевидно, мы получили уравнение прямой, не проходящей через центр тяжести сечения. Чтобы построить эту прямую, проще всего вычислить отрезки, отсекаемые ею на осях координат. Обозначим эти отрезки a_y и a_z. Чтобы найти отрезок a_y, отсекаемый на оси *Oy*, надо в уравнении (14.3) положить

$$z_0 = 0; \; y_0 = a_y;$$

тогда мы получаем:

$$1 + \frac{y_P a_y}{i_z^2} = 0 \quad \text{и} \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_P}; \qquad (14.4)$$

подобным же образом, полагая

$$y_0 = 0;\ z_0 = a_z,$$

получаем:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} \tag{14.5}$$

Если величины y_p и z_p положительны, то отрезки a_y и a_z будут отрицательны, т. е. нейтральная ось будет расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка *A* (Рис.14.1 г). Нейтральная ось делит сечение на две части — сжатую и растянутую; на Рис.14.1 г растянутая часть сечения заштрихована. Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной оси, получаем две точки D_1 и D_2, в которых будут наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения. Измеряя координаты *y* и *z* этих точек и подставляя их значения в формулу (14.2), вычисляем величины наибольших напряжений в точках D_1 и D_2:

$$\sigma_{(1,2)} = -P\left[\frac{1}{A} + \frac{y_p y_{(1,2)}}{J_z} + \frac{z_p z_{(1,2)}}{J_y}\right]$$

Расчет на прочность

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{max}| = P\left[\frac{1}{A} + \frac{y_p y_1}{J_z} + \frac{z_p z_1}{J_y}\right] \le [\sigma]$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.) $y_1 = y_{max}$ и $z_1 = z_{max}$, поэтому формула упрощается, и мы имеем:

$$|\sigma_{max}| = P\left[\frac{1}{A} + \frac{y_p}{W_z} + \frac{z_p}{W_y}\right] \le [\sigma]$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня, как в растянутой, так и в сжатой зонах. Однако может случиться, что и для таких материалов будет достаточно одной проверки прочности. Из формул (14.1) и (14.2) видно, что положение точки *A* приложения силы и положение нейтральной оси связаны: чем ближе подходит точка *A* к центру сечения, тем меньше величины y_p и z_p и тем больше отрезки a_y и a_z. Таким образом, с приближением точки *A* к центру тяжести сечения нейтральная ось удаляется от него, и наоборот. Поэтому при некоторых положениях точки *A* нейтральная ось будет проходить *вне* сечения и все сечение будет работать на напряжения одного знака. Очевидно в этом случае всегда достаточно проверить прочность материала в точке D_1. Разберем практически важный случай, когда к стержню прямоугольного сечения (Рис. 14.2) приложена внецентренная сила *P* в точке *A*, лежащей на главной оси сечения *Oy*. Эксцентриситет *OA* равен *e*, размеры сечения *b* и *d*. Применяя полученные выше формулы, имеем:

$$y_p = +e;\ z_p = 0$$

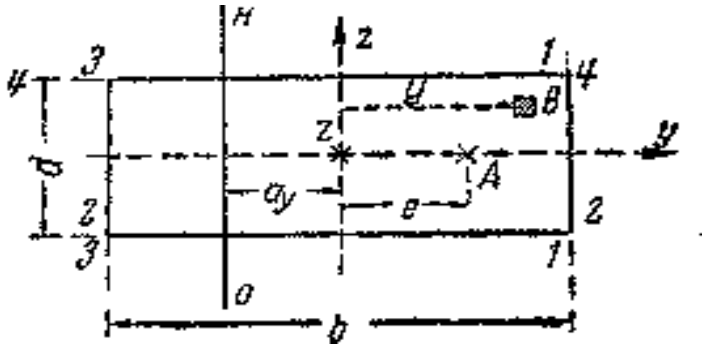


Рис.14.2. Расчетная схема бруса прямоугольного сечения.

Напряжение в любой точке *B* равно

$$\sigma = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{y_p y F}{J_z}\right) = \frac{P}{bd}\left(1 + \frac{12ey}{b^2}\right),$$

так как

$$\frac{A}{J_z} = \frac{12bd}{b^3 d} = \frac{12}{b^2}$$

Напряжения во всех точках линии, параллельной оси *Oz*, одинаковы. Положение нейтральной оси определяется отрезками

$$a_y = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{b^2}{12e};\ a_z = \infty$$

Нейтральная ось параллельна оси *Oz*; точки с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями расположены на сторонах 1—1 и 3—3.

Значения σ_{max} и σ_{min} получатся, если подставить вместо *y* его значения $\pm\frac{b}{2}$. Тогда

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{P}{bd}\left[1 \pm \frac{6e}{b}\right]$$

Ядро сечения при внецентренном сжатии

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон), весьма желательно добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы *P* слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом ядре сечения. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P, не вызывая в сечении напряжений разного знака. Пока точка *A* располагается внутри ядра, нейтральная ось не пересекает контура сечения, все оно лежит по *одну* сторону от нейтральной оси и, стало быть, работает лишь на сжатие. При удалении точки *A* от центра тяжести сечения нейтральная ось будет приближаться к контуру; граница ядра определится тем, что при расположении точки *A* на этой границе нейтральная ось подойдет вплотную к сечению, коснется его (рисунок 14.3).

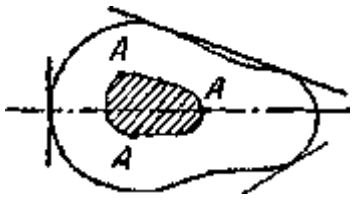


Рис.14.3. Комбинации положения сжимающей силы и нейтральной линии

Таким образом, если мы будем перемещать точку *A* так, чтобы нейтральная ось катилась по контуру сечения, не пересекая его, то точка А обойдет по границе ядра сечения. Если контур сечения имеет «впадины», то

нейтральная ось будет катиться по огибающей контура. Чтобы получить очертание ядра, необходимо дать нейтральной оси несколько положений, касательных к контуру сечения, определить для этих положений отрезки a_y и a_z и вычислить координаты y_P и z_P точки приложения силы по формулам, вытекающим из известных зависимостей:

$$y_P = -\frac{i_z^2}{a_y};\ z_P = -\frac{i_y^2}{a_z}$$

это и будут координаты точек контура ядра $y_я$ и $z_я$.

При многоугольной форме контура сечения (Рис.14.4), совмещая последовательно нейтральную ось с каждой из сторон многоугольника, мы по отрезкам a_y и a_z определим координаты $y_я$ и $z_я$ точек границы ядра, соответствующих этим сторонам. При переходе от одной стороны контура сечения к другой нейтральная ось будет вращаться вокруг вершины, разделяющей эти стороны; точка приложения силы будет перемещаться по границе ядра между полученными уже точками. Установим, как должна перемещаться сила *P*, чтобы нейтральная ось проходила все время через одну и ту же точку *B* (y_B,z_B) — вращалась бы около нее. Подставляя координаты этой точки нейтральной оси в известное уравнение нейтральной оси (линии), получим:

$$1+\frac{y_P y_B}{i_z^2}+\frac{z_P z_B}{i_y^2}=0$$

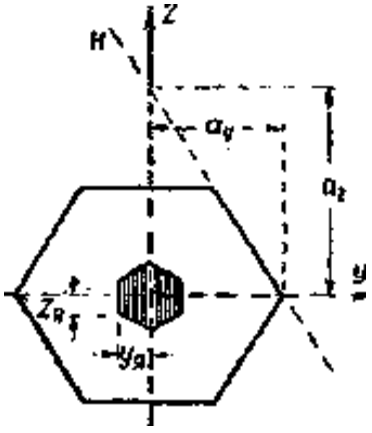


Рис. 14.4. Ядро сечения для многоугольной формы поперечного сечения

Таким образом координаты y_P и z_P точки A приложения силы *P* связаны линейно. При вращении нейтральной оси около постоянной точки В точка А приложения силы движется по прямой. Обратно, перемещение силы *P* по

прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки. На Рис.14.5 изображены три положения точки приложения силы на этой прямой и соответственно три положения нейтральной оси. Таким образом, при многоугольной форме контура сечения очертание ядра между точками, соответствующими сторонам многоугольника, будет состоять из отрезков прямых линий.

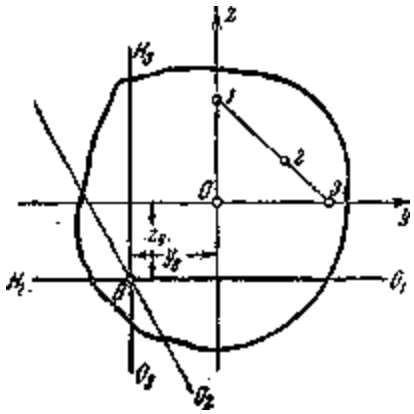


Рис. 14.5. Динамика построения ядра сечения

Если контур сечения целиком или частично ограничен кривыми линиями, то построение границы ядра можно вести по точкам. Рассмотрим несколько простых примеров построения ядра сечения. При выполнении этого построения для прямоугольного поперечного сечения воспользуемся полученными формулами. Для определения границ ядра сечения при движении точки A по оси Oy найдем то значение $e = e_0$, при котором нейтральная ось займет положение H_1O_1 (Рисунок 14.6). Имеем:

$$a_y = -\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{12e_0},$$

откуда

$$e_0 = \frac{b}{6}$$

Таким образом, границы ядра по оси Oy будут отстоять от центра сечения на 1/6 величины b (Рис.14.6, точки 1 и 3); по оси Oz границы ядра определятся расстояниями $\frac{d}{6}$ (точки 2 и 4).

Для получения очертания ядра целиком изобразим положения нейтральной оси H_1O_1 и H_2O_2, соответствующие граничным точкам 1 и 2. При перемещении силы из точки 1 в точку 2 по границе ядра нейтральная ось должна перейти из положения H_1O_1 в положение H_2O_2, все время касаясь сечения, т. е. поворачиваясь вокруг точки *D*.

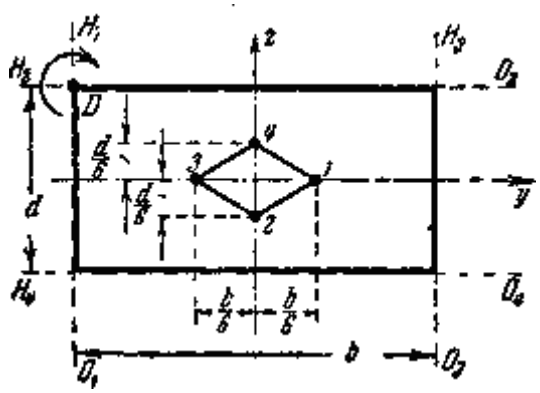


Рис. 14.6. Построение ядра для прямоугольного сечения.

Для этого сила должна двигаться по прямой 1 — 2. Точно так же можно доказать, что остальными границами ядра будут линии 2—3, 3—4 и 4—1. Таким образом, для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

Эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при эксцентриситете, равном нулю, меньшем, равном и большем одной шестой ширины сечения, изображены на Рис.14.7

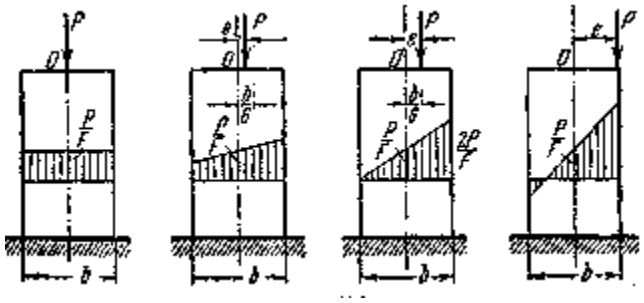


Рис. 14.7. Динамика изменения напряжений при изменении эксцентриситета.

Отметим, что при всех положениях силы *P* напряжение в центре тяжести сечения (точка *O*) одинаково и равно P/A и что сила *P* не имеет

эксцентриситета по второй главной оси. Для круглого сечения радиуса *r* очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса r_0. Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось *Oy* расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда:

$$a_y = r; \quad a_z = \infty;$$

$$z_g = r_0 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2 \cdot r} = -\frac{r}{4}$$

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения. Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура *ABCD,* описанного около двутавра (Рис.14.8а). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами. Для швеллера, как и для двутавра, точки 1, 2, 3, 4 контура ядра (Рис.14.8 б) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника *ABCD*.

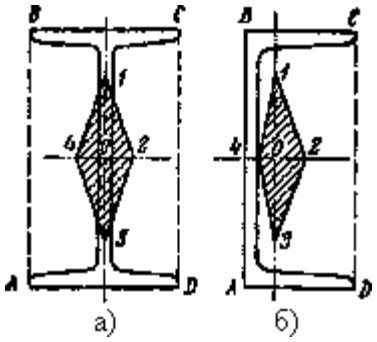


Рис. 14.8. Ядро сечения для двутавра — а) и швеллера — б)

Контрольные вопросы:

1. Как находятся опасные точки при внецентренном растяжении (сжатии)?
2. Как влияет эксцентриситет приложенной нагрузки на нормальные напряжения?
3. Как строится нулевая линия при внецентренном растяжении?
4. Как определяется положение нулевой линии при внецентренном сжатии?
5. Условие прочности при внецентренном растяжении?

6. Какие геометрические характеристики сечения влияют на нормальные напряжения при внецентренном растяжении?
7. Каким свойством обладают точки, принадлежащие ядру сечения, и как оно строится?
8. Влияет ли эксцентриситет приложенной нагрузки на форму ядра сечения?
9. Зависит ли форма ядра сечения от размеров сечения?
10. Форма ядра сечения для прямоугольного сечения?
11. Как определяется форма ядра сечения для двутавра?
12. Построение ядра сечения для швеллера?
13. Как определяется ядро сечения для сечения произвольной формы?
14. Форма ядра сечения для круглого сечения?

Лекция 15

Усточивость сжатого стержня. Формула Ясинского

Равновесие называется устойчивым, если система, будучи выведенной из этого состояния каким-либо воздействием, вновь возвращается в исходное состояние после удаления воздействия.

Равновесие называется неустойчивым, если система, не возвращается в исходное состояние после удаления воздействия.

Критической силой Fкр называется наименьшее значение продольной силы, при котором исходная прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой.

Продольным изгибом называется изгиб стержня под действием продольной силы. При продольной силе возникают поперечные деформации.

Рассмотрим устойчивость сжатого упругого стержня (рис. 15.1). При решении задач устойчивости для системы с бесконечно большим числом степеней свободы статическим методом необходимо рассматриваемой системе придать деформированное состояние, соответствующее состоянию, качественно отличному от того, которое характерно при нагрузках, меньших критических. Например, рассматривая устойчивость сжатого стержня, надо исследовать изгиб. При исследовании деформированного состояния, характеризуемого бесконечно малыми перемещениями, величины которых намного меньше длин элементов системы, дифференциальные уравнения равновесия получаются линейными. Рассмотрение граничных условий позволяет получить соответствующее число однородных уравнений. Т.к. нетривиальное решение системы однородных уравнений возможно лишь при равном нулю определителе, составленном из коэффициентов при неизвестных, то это условие позволяет получить уравнение устойчивости, корни которого определяют значения критических нагрузок.

Рассмотрим произвольный упругий стержень АВ, находящийся под действием сжимающей силы N (рис. 15.1, а). В результате потери устойчивости стержень изогнется и займет новое положение (рис. 15.1, б), где y_A, y_B – нормальные смещения концов стержня АВ.

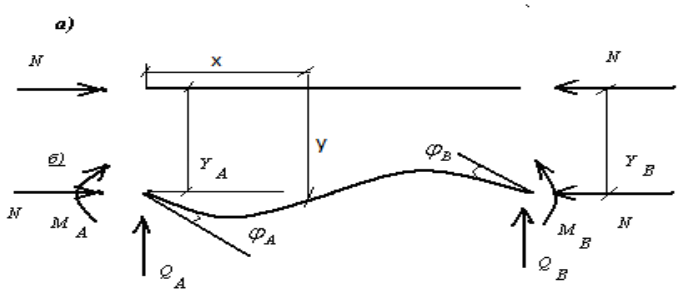


Рис.15.1. Потеря устойчивости сжатого стержня.

Обозначим углы поворота сечений в точках А и В через φ_A, φ_B. Приращением сжимающей силы N пренебрегаем, т.е. полагаем ΔN=0. При изгибе по концам возникают реактивные изгибающие моменты и поперечные силы (рис. 15.1, б). Используя метод сечений, изгибающий момент в произвольном сечении на расстоянии x от точки А определяется следующим выражением:

$$M_x = N(y - y_A) + M_A + Q_A x. \qquad (15.1)$$

Из условия равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось получаем выражение для поперечных сил:

$$Q_A = -Q_B = -\frac{[M_A + M_B + N(y - y_B)]}{l}. \qquad (15.2)$$

Дифференциальное уравнение изгиба и его решение с учетом поперечных и продольных сил имеют вид:

$$EIy'' = -M,$$
$$y'' + \frac{N}{EI}y = -\frac{1}{EI}[M_A + Q_A x - Ny_A], \quad n^2 = \frac{N}{EI}, \qquad (15.3)$$
$$y = C_1 Cosnx + C_2 Sinnx + y_A - \frac{1}{n^2 EI}(M_A + Q_A x).$$

Первые два слагаемых в решении уравнения (15.3) представляют собой решение однородного уравнения, где C_1, C_2 – неизвестные постоянные; следующие два слагаемых – частное решение неоднородного уравнения. Используя граничные условия, можно определить постоянные C_1, C_2.

Граничные условия можно выразить через начальные параметры:

$$\textit{При} \quad x=0 \qquad y=y_A, \quad \varphi=\frac{dy}{dx}=\varphi_A, \quad Q=Q_A, \quad M=M_A. \tag{15.4}$$

Формулы для определения деформаций и усилий для сжатоизогнутых стержней

Решение дифференциального уравнения (15.3) можно записать через начальные параметры, тогда прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном сечении на расстоянии «x» от левого края записываются в виде:

$$\begin{aligned}
y &= y_A+\frac{Sinnx}{n}\varphi_A+\frac{Cosnx-1}{n^2EI}M_A+\frac{Sinnx-nx}{n^3EI}Q_A,\\
\varphi &= \frac{dy}{dx}=Cosnx\cdot\varphi_A-\frac{Sinnx}{nEI}M_A+\frac{Cosnx-1}{n^2EI}Q_A,\\
M &= -EI\frac{d^2y}{dx^2}=nEISinnx\cdot\varphi_A+Cosnx\cdot M_A+\frac{Sinnx}{n}Q_A,\\
Q &= \frac{dM}{dx}=n^2Cosnx\cdot\varphi_A-nSinnx\cdot M_A+Cosnx\cdot Q_A,\\
n &= \sqrt{\frac{F}{EI}}.
\end{aligned} \tag{15.5}$$

В 15.5 начальные параметры: y_A, φ_A, M_A, Q_A соответственно представляют прогиб, угол поворота, изгибающий момент, поперечная сила в начале координат. Они определяются из граничных условий для каждого стержня.

Пример для определения критических нагрузок для сжатых стержней

Пример 1 (Задача Эйлера)

Рассмотрим стержень, шарнирно опертый по двум концам, тогда граничные условия можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&x=0 \qquad y_A=M_A=0,\\
&x=l \qquad y_B=M_B=0.
\end{aligned} \tag{15.6}$$

Полагая два начальных параметров равными нулю (y_A=M_A=0) и записывая два других граничных условий в точке B, используя формулы (15.6),

получаем систему двух линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных начальных параметров φ_A и Q_A. Полагаем определитель при неизвестных равным нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{Sinnl}{n} & \frac{Sinnl - nl}{n^3 EI} \\ nEISinnl & \frac{Sinnl}{n} \end{vmatrix} = 0,$$

$$n = \sqrt{\frac{F}{EI}},$$

отсюда *получаем* $\frac{l}{n} \cdot Sinnl = 0,$

$$Sinnl = 0, \quad nl = k\pi, \quad \sqrt{\frac{F}{EI}} l = k\pi,$$

$$F = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad k = 1,2...$$

На рисунке 15.2 представлены формы потери устойчивости, соответствующие различным значениям параметра k=1,2,3. Наиболее опасной является 1 форма потери устойчивости (рис.15.2а), т.к. ей соответствует минимальная критическая нагрузка и максимальные перемещения. 2 форма соответствует двум полуволнам (рис.15.2б), 3 форма – 3 полуволнам (рис.15.2в).

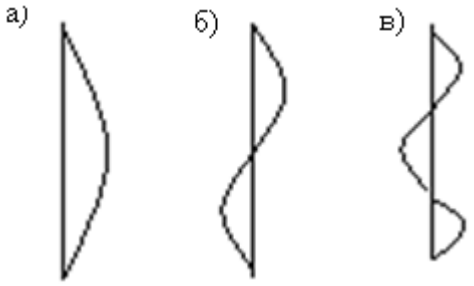


Рисунок 15.2. Формы потери устойчивости сжатого стержня: а – 1-ая форма потери устойчивости; б – 2-ая форма потери устойчивости; в – 3-я форма потери устойчивости.

Полагая k=1 (одна полуволна синусоиды), получаем формулу Эйлера:

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \qquad (15.7)$$

В зависимости от условий закрепления сжатого стержня при определении критической нагрузки вводят коэффициент μ. При шарнирном закреплении двумя концами μ=1; для консольного стержня μ=2; для защемленного двумя концами μ=0,5; при защемленном одним концом и шарниро опертым другим концом μ=0, 75. Критическое напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E J_{MIN}}{(\mu l)^2 A} \tag{15.8}$$

которую приводят к виду

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \ , \tag{15.9}$$

и называют формулой Эйлера для определения критических напряжений. В (15.9)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{MIN}} \text{ - гибкость стержня,} \tag{15.10}$$

$$i_{MIN} = \sqrt{\frac{J_{MIN}}{A}} \tag{15.11}$$

Лева часть 15.11 представляет наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня.

График зависимости $\sigma_K = \sigma_K(\lambda)$ называют графиком критических напряжений. В системе координат (λ, σ) графиком уравнения (15.9) будет гипербола Эйлера (рис. 15.3).

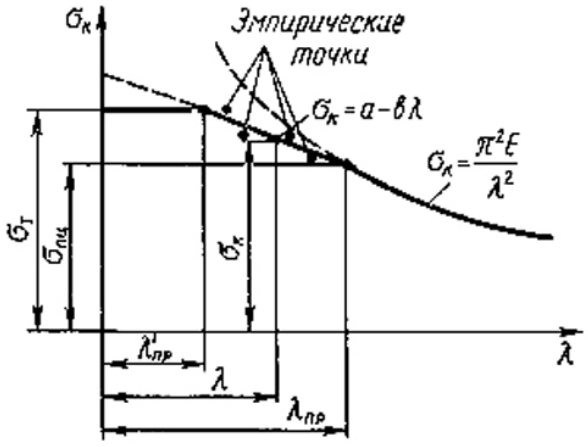


Рис. 15.3. Зависимость критического напряжения от гибкости

Формулой (15.8) можно пользоваться при условии, что

$$\sigma_K \le \sigma_{ПЦ}\,, \qquad (15.12)$$

так как в основу ее вывода был положен закон Гука, который нарушается, если $\sigma_K > \sigma_{ПЦ}$. В соответствии с этим рабочая часть гиперболы Эйлера, показанная на рис. 15.3 сплошной линией, ограничивается слева прямой с уравнением

$$\lambda = \lambda_{ПР}\,,$$

где $\lambda_{ПР}$— предельная гибкость, которую можно найти, приравняв σ_K из (15.12) $\sigma_{ПЦ}$:

$$\sigma_{ПЦ} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{ПР}^2}\,,$$

откуда

$$\lambda_{ПР} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{ПЦ}}}\,. \qquad (15.13)$$

Следовательно, формула (15.9) применима только к стержням с

$$\lambda \ge \lambda_{ПР}$$

Для стержней $\lambda < \lambda_{ПР}$ критические напряжения можно определять по эмпирическим формулам. Эмпирические формулы получают на ***основании*** испытаний серии шарнирно опертых стержней, имеющих различные $\lambda < \lambda_{ПР}$, которые доводят до потери устойчивости. В результате для каждого из них находят критическое напряжение $\sigma_{кi}$, соответствующее его гибкости λ_i. Опытные точки с координатами (λ_i, $\sigma_{кi}$) наносят на плоскость (λ, $\sigma_к$) и строят по ним аппроксимирующую линию, уравнение которой будет эмпирической формулой.

Если $\lambda < \lambda_{ПР}$, то зависимость $\sigma_к = \sigma_к(\lambda)$ с достаточной для практических целей точностью для пластичных материалов аппроксимируется прямой линией (рис. 15.3) с уравнением

$$\sigma_к = a - b\,\lambda\,. \qquad (15.14)$$

Это уравнение называют эмпирической формулой Ясинского, а входящие в нее величины a и b — коэффициентами Ясинского. Для хрупких материалов эмпирическими формулами будут

$$\sigma_K = \sigma_B - \frac{\sigma_B - \sigma_{ПЦ}}{\lambda_{ПР}} \lambda_{ПР} , \qquad (15.15)$$

или

$$\sigma_K = \sigma_B - c\lambda - d\lambda^2 . \qquad (15.16)$$

Величины a, b, c и d, входящие в формулы (15.15) и (15.16), имеют размерности напряжений.

Расчет на устойчивость с применением коэффициента продольного изгиба

Для сжатых стержней кроме условия прочности должно быть удовлетворено также условие устойчивости, которое можно выразить неравенством

$$\sigma = F/A_{\text{брутто}} \le [\sigma]_y , \qquad (15.17)$$

где $[\sigma]_y$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость.

Допускаемое напряжение $[\sigma]_y$ при расчетах на устойчивость назначается с запасом против критического напряжения, т.е. выражается формулой

$$[\sigma]_y = \sigma_{кр} / [n]_y , \qquad (15.18)$$

где $[n]_y$ – необходимый коэффициент запаса устойчивости, значения которого принимаются различными для различных материалов и зависят от гибкости стержня.

Коэффициент запаса устойчивости $[n]_y$ принимается более высоким, чем коэффициент запаса прочности. Это вызывается рядом обстоятельств, практически не поддающихся учету (начальная кривизна стержня, нецентральное действие нагрузки и др.), которые уменьшают критическую нагрузку, но почти не влияют на прочность конструкции.

Выразим допускаемое напряжение $[\sigma]_y$ через допускаемое напряжение $[\sigma]$, принимаемое при расчетах на прочность:

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma] , \qquad (15.19)$$

где φ- коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней (коэффициент продольного изгиба).

Значения коэффициента φ приведены в таблице. Они зависят от материала стержня и его гибкости.

Условие устойчивости (15.17) после замены $[\sigma]_y$ на $[\sigma]$ с помощью формулы (15.19) принимает вид

$$\sigma = F/A_{\text{брутто}} \leq \varphi[\sigma], \qquad (15.20)$$

Таблица 15.1. Значения коэффициента φ

Гибкость $\lambda = \mu l / i$	Коэффициент φ				
	Сталь Ст2,3,4 ОС	Сталь СТ5	Сталь СПК	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Кроме условия устойчивости сжатые стержни должны удовлетворять и условию прочности:

$$\sigma = P/A_{\text{нетто}} \leq [\sigma]. \qquad (15/21)$$

Контрольные вопросы:

1. Понятие устойчивое равновесие
2. Понятие критическая нагрузка
3. Формула Эйлера.
4. Условие применимости формулы Эйлера.
5. Формула Ясинского.
6. Гибкость стержня.
7. Условие прочности для сжатого стержня

Литература

1.Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. Москва, «Высшая школа», 1998, 478с.
2. Березкин Е.Н. Лекции по теоретической механике. Москва, Изд. МГУ, 1977, 314с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под редакцией А.А.Яблонского. Москва, «Высшая школа», 1978,530 с.
4. Веселовский И.Н. Сборник задач по теоретической механике. Москва, изд. Гостехлит., 1975, 500 с.
5. Яблонский А.А. Теоретическая механика. Москва, «Высшая школа», 1978, с.586.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Москва, «Наука», 1986 ,247с.
7. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин В.П.. Сопротивление материалов. Москва, «Высшая школа», 2004, 560с.
8. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. Москва, «Высшая школа», 1989, 654 с.
9.Кисилев В.А. Строительная механика. Москва, Стройиздат, 1986, 520с.
10. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. Москва, Высшая школа, 2001, 368 с.
11. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. Москва, Высшая школа, 2001, 286 с.
12. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Москва, изд. МГТУ, им. Н.Э.Баумана, 1999, 592 с.
13. Шалашилин В.И., Горшков А.В., Трошин В.Н. Сопротивление материалов. Москва, изд. МАИ, 2000, 616 с.
14. Сопротивление материалов. Под. ред. Г.С.Писаренко. Киев, Виша школа, 1986, 775 с.
15. Васильев В.З. Краткий курс сопротивление материалов с основами теории упругости. Санкт – Петербург, издание «Иван Феодоров», 2001, 286 с.

16. Сборник задач по сопротивлению материалов. Ч.1-3, под ред. Ю.П. Каптелина. Москва, изд.. «ЛИИЖТ» 1984, 145 с.
17. Лихарев К.К.,.Сухова Н.А. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов», Москва, «Машиностроение» 1980, 224с.
18. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, «Наукова думка», 1975, 480с.
19. Любощиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов. Минск, «Высшая школа», 1969, 360с.
20. Афанасьев А.М., Марьин В.А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. Москва, «Наука», 1975, 287с.
21. Достанова С.Х., Исаханов Е.А., Токпанова К.Е. Руководство к решению задач по инженерной механике. Алматы, КазАТК, 2006, 228с.
22. Достанова С.Х. Строительная механика (лекции для студентов спец. «Строительство»), Алматы, КазАТК, 2005, 110с.
23. Биттибаев С.М., Шегенова Ж.Б., Достанова С.Х. Методические указания к самостоятельным работам по курсу сопротивление материалов. Алматы, издание «АлИИТ», 1988, 82с.
24. Шегенова Ж.Б. Методические указания по выполнению контрольных работ по сопротивлению материалов. Алматы, 1988, 23с.
25. Лившиц Я.В., Семенов П.И. Сборник упражнений по строительной механике. Киев, Гослитиздат, Строительство, 1962, 335с.
26. Алгоритмизация и программирование. Под ред. Савельева А.Е. Москва, Высшая школа, т.3, 1987, 128 с.
27. Минин Л.С., Хроматов В.Е., Самсонов Ю.П. Расчетные и тестовые задания по сопротивлению материалов. Москва, Высшая школа, 2003, 224с.
28.Беляев Н.М. Сопротивление материалов, «Наука», М., 1976г. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов, «Высшая школа», М., 1975г.
29.Васильев В.З. Краткий курс сопротивления материалов с основами теории упругости, издание «Иван Феодоров», Санкт-Петербург, 2001г.
30.Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов, «Высшая школа» М., 1975г.
31Феодсьев В.И. Сопротивление материалов, «Наука», М., 1975г.
32.Таран В.И. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач, издание «Демеу»Алматы, 1992г, 204стр.
33. Качурин В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов, «Наука», М., 1972г, 430стр.

НАО «КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени К.И. САТПАЕВА»

Достанова С.Х.
Токпанова К.Е.

Строительная механика I
Учебно-методическое пособие
(лекции для бакалавров строительных специальностей)