

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университеті

Е. Ә. Қасымов
Б. Ж. Сағындықов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

2-бөлім

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2015

ЖОК 510 (075.8)

ББК 22.1я73

Қ 45

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің
2015 жылғы жоспары бойынша басылды

Пікір жазғандар:

Ә. Сақабеков, физ.-матем. ғыл. док., проф., ҚБТУ;

Қ. К. Коксалов, физ.-матем. ғыл. док., проф., Абай атындағы
ҚазҰПУ;

Е. Ж. Айдос, физ.-матем. ғыл. канд., проф., ҚазҰТУ

Қ 45 Қасымов Е. Ә., Сағындықов Б. Ж. Жоғары математика. 2-бөлім:
Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2015. – 189 б.

Сурет 19. Әдебиеттер тізімі – 33 атау.

ISBN 978-601-228-729-5

*Оқу құралында математика курсының санды қатар, функциялық
тізбектер мен қатарлар, Фурье қатары, көп айнымалы мен айқын емес
функциялар тақырыптары толық қамтылған.*

*Математика курсының негізгі ұғымдары мен теориялары жан-
жақты талқыланып, соңында мысалдар қарастырылып, олардың шешу
жолдары мен әдістері және осы тақырыпқа қатысты сұрақтар мен
өзіндік тапсырмалар ұсынылған.*

*Оқу құралы техникалық және экономикалық жоғары оқу
орындарының барлық мамандықтары студенттеріне арналған.*

ЖОК 510 (075.8)

ББК 22.1я73

ISBN 978-601-228-729-5

© Қасымов Е. Ә.

Сағындықов Б. Ж., 2015

© ҚазҰТУ, 2015

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз.....	5
11. Санды және функциялық қатарлар.	
Фурье қатары.....	6
11.1. Санды қатар және оның жинақтылығы.....	6
11.2. Санды қатардың қасиеттері.....	9
11.3. Оң сандар қатары.....	13
11.4. Қатардың абсолютті және шартты жинақтылығы.....	21
11.5. Абель және Дирихле белгілері.....	24
11.6. Функциялық тізбек пен қатардың негізгі ұғымдары.....	29
11.7. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақтылығы.....	32
11.8. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақты болу критерийі мен белгілері.....	39
11.9. Функциялық қатар мен тізбекті мүшелеп шекке көшу және шектік функцияның үзіліссіздігі.....	46
11.10. Функциялық қатар мен тізбекті мүшелеп интегралдау және дифференциалдау.....	48
11.11. Дәрежелі қатар.....	51
11.12. Периодты функциялар.....	56
11.13. Тригонометриялық және Фурье қатарлары.....	58
11.14. Периоды 2π -ге тең функцияны Фурье қатарына жіктеу.....	62
11.15. Периоды $2l$ -ге тең функцияны Фурье қатарына жіктеу.....	65
12. Көп айнымалы функция.....	70
12.1. Көп өлшемді евклид кеңістігіндегі негізгі ұғымдар.....	70
12.2. Көп айнымалы функция.....	73
12.3. Көп айнымалы функцияның шегі.....	77
12.4. Көп айнымалы функцияның үзіліссіздігі.....	86
12.5. Көп айнымалы функция үзіліссіздігінің қасиеттері. Бірқалыпты үзіліссіздік.....	93
12.6. Көп айнымалы функцияның дербес туындылары. Функцияның дифференциалдану белгісі.....	99
12.7. Екі айнымалы функцияның дербес туындыларының геометриялық мағынасы.....	106
12.8. Көп айнымалы функцияның дифференциалдануының жеткілікті белгісі.....	108
12.9. Көп айнымалы функцияның дифференциалы.....	116
12.10. Бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығы.....	119
12.11. Функцияның бағыт бойынша туындысы.....	121

12.12.	Жоғарғы ретті дербес туындылар.....	127
12.13.	Жоғарғы ретті дифференциалдар.....	132
12.14.	Тейлор формуласы.....	141
12.15.	Функцияның локальды экстремумының қажетті белгісі..	145
12.16.	Функцияның локальды экстремумының жеткілікті белгісі.....	147
12.17.	Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері.....	152
13.	Айқындалмаған функция.....	156
13.1.	Айқындалмаған функцияның бар болуы және оның дифференциалдануы.....	156
13.2.	Айқындалмаған функцияның дербес туындылары.....	158
13.3.	Беттің және жазық қисық сызықтың ерекше нүктелері	162
13.4.	Функциялық теңдеулер жүйесінің шешімі туралы теорема.....	163
13.5.	Тәуелді функциялар және функциялардың тәуелсіздігінің жеткілікті белгісі. Функциялық матрица..	166
13.6.	Функцияның шартты экстремумы.....	169
13.7.	Лагранждың белгісіз көбейткіштер әдісі.....	174
13.8.	Шартты экстремумның жеткілікті белгісі.....	177
	Библиографиялық тізім.....	187

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқырмандар, сіздердің назарларыңызға ұсынылып отырған «Жоғары математика» оқу құралы 3 бөлімнен тұрады. 1-бөлімі 2004 ж. Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-дың баспасынан жарық көрді. Сіздерге ұсынылып отырған 2-бөлімде жоғары математика курсының санды қатарлар, функциялық тізбектер мен қатарлар және Фурье қатарлары, көп айнымалы мен айқын емес функциялар тақырыптары толық қамтылған, ал 3-бөлім дайындалып баспаға ұсынылды.

Техникалық жоғары оқу орындарында жоғары математика курсын оқу ерекшелігі мен пәнге бөлінген сағат көлемдеріне байланысты курсты студенттерге мейлінше қарапайым, әрі теорияны мысалдармен ұштастырып баяндаған тиімді. Сондықтан, әрбір тақырып соңында теорияны меңгеру үшін егжей-тегжейлі талданған мысалдар келтіріліп, мүмкіндігінше теорияның геометриялық мағынасы мен сызбалары, ескертулері, түсіндірмелері толық беріліп, мысалдармен қамтылған.

2004–2006, 2011 жж. Е. Ә. Қасымовтың техникалық оқу орындарына арналған «Жоғары математика» (1-б) мен «Математиканың арнайы курстары» атты оқулықтары ҚазҰТУ-дың баспасынан жарық көрді.

1994–1997 жж. «Санат» баспасынан жарық көрген ағайынды Қасымовтардың «Жоғары математика курсы»: Аналитикалық геометрия (I т) мен Сызықты алгебра (II т) оқулықтары назарларыңызға ұсынылды. Осы курстың III томы «Математикалық анализ» пәніне арналған және 2 бөлімнен тұрады. 1-бөлім 2006 ж. әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-нің «Қазақ университеті» баспасынан жарық көрді. Осы оқулықтар оқыту үдерісінде кездесетін көптеген олқылықтардың орнын толтырар деп сенеміз.

Авторлар

11. САНДЫ ЖӘНЕ ФУНКЦИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАР ФУРЬЕ ҚАТАРЫ

11.1. Санды қатар және оның жинақтылығы

Біз $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ немесе $\{a_n\}$ санды тізбегін қарастырайық, мұндағы санды тізбектің мүшелері нақты сандар. Осы санды тізбектің мүшелерінен анықталған

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (11.1)$$

қосынды **санды қатар** деп аталады, мұндағы a_i – нақты сандар қатардың i -мүшесі (i -элементі, $i=1,2,\dots$), ал a_n – қатардың n -мүшесі немесе **жалпы мүшесі** деп аталады. Төмендегі қосындылар:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

(11.1) санды қатардың **дербес қосындылары**, ал

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

қосынды санды қатардың n -**дербес қосындысы** немесе санды қатардың **алғашқы n мүшелерінің қосындысы** деп аталады, ал $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ **қатардың қалдық қатары** деп аталады. (11.1) қатардың мүшелерінен анықталған $\{S_n\}$ дербес қосынды тізбегін қарастырайық:

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots = \{S_n\}. \quad (11.2)$$

Анықтама. Егер (11.2) тізбектің

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty \quad (11.3)$$

шектелген (шенелген) шегі бар болса, онда S саны (11.1) **қатардың қосындысы** деп аталады:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S < \infty.$$

Бұл жағдайда (11.1) **қатар жинақты** деп аталады, ал егер (11.3) шек жоқ немесе $\pm \infty$ -ке тең болса, онда **қатар жинақсыз** деп аталады.

Демек, қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы туралы сөз қозғағанда, бұл сұрақ (11.3) шектің бар немесе жоқ болуымен парпар, басқаша айтқанда қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы

осы қатардың дербес қосындыларынан анықталған $\{S_n\}$ тізбегінің жинақтылығы мен жинақсыздығына тәуелді болады.

Бізге мектеп бағдарламасынан таныс шексіз геометриялық прогрессияның мүшелерінен анықталған қатар санды қатарға мысал бола алады:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^n, \quad a \neq 0. \quad (11.4)$$

Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысын табайық:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^{n+1}}{1 - q}.$$

Егер $|q| < 1$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} < \infty$. Демек, $|q| < 1$ болғанда геометриялық прогрессия қатары жинақты, бұл жағдайда

$$\frac{a}{1 - q} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

Егер $|q| > 1$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, яғни қатар жинақсыз. Егер $q = 1$ және $q = -1$ болса, онда сәйкес

$$a + a + \dots + a + \dots; \quad a - a - \dots + (-1)^{n+1} a + \dots$$

Бірінші қатар жинақсыз, себебі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a = \infty$, ал екінші қатардың шегі жоқ, себебі

$$S_n = \begin{cases} a, & n - \text{так}, \\ 0, & n - \text{жуп}. \end{cases}$$

Сондықтан екінші қатар да жинақсыз. Сонымен, геометриялық прогрессияның еселігі $|q| < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын q еселігі үшін геометриялық прогрессия – қатар жинақты, ал $|q| \geq 1$ үшін қатар жинақсыз болады.

1-мысал. Санды қатардың анықтамасын пайдаланып, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ қатарының қосындысын табайық.

Шешуі. Ол үшін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып, қатардың $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ жалпы мүшесін жай бөлшектерге жіктейік:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A_1}{n+1} + \frac{A_2}{n+2} = \frac{A_1(n+2) + A_2(n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Бірінші мен соңғы бөлшектердің алымдарын теңестіріп, A_1 мен A_2 белгісіз коэффициенттерді табайық: $1 = A_1(n+2) + A_2(n+1)$, $A_1 = 1$, $A_2 = -1$. Сонда $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Осыдан

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \dots, \quad a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Осы мүшелерді қосып, берілген қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысын табамыз:

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Анықтама бойынша S_n -нен шекке көшіп, қатардың қосындысын анықтаймыз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} = S < \infty.$$

Демек, берілген қатар жинақты.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатар **гармоникалық қатар** деп аталады және ол жинақсыз болады.

Сұрақтар.

1. Санды қатардың дербес қосындысы.
2. Санды қатардың қосындысы дегеніміз не?
3. Қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы.
4. Геометрикалық қатар және оның жинақтылығы мен жинақсыздығы.
5. Гармоникалық қатар және оның жинақтылығы мен жинақсыздығы.

Тапсырма. Қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығының анықтамасын пайдаланып, төмендегі қатарларды зерттендер:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}. \quad 2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+2)}. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$$

11.2. Санды қатардың қасиеттері

1-қасиет. Егер $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ санды қатар жинақты және оның қосындысы S -ке тең болса, онда

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

санды қатар да жинақты және оның қосындысы $c \cdot S$ -ке тең болады, мұндағы $c = \text{const}$.

Дәлелдеу. Алдымен $\overline{S_n} = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n$ дербес қосындыны қарастырайық: $\overline{S_n} = c \cdot S_n$, мұндағы $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Осыдан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cS.$$

Демек, жинақты қатарды тұрақты c санына көбейтуге болады және $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ қатары да жинақты болады.

2-қасиет. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мен $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты қатарларын мүшелеп қосуға және алуға болады, егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \bar{S}$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ қатарлары да жинақты және $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S \pm \bar{S}$ теңдігі орындалады.

3-қасиет. Егер қатардың саны санаулы мүшелерін алып тастасақ не қатарға қоссақ, онда қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы өзгермейді.

4-қасиет (қатардың жинақтылығының қажетті белгісі). Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жинақты болса, онда $n \rightarrow \infty$ -да оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Дәлелдеу. Қатардың жалпы мүшесін $a_n = S_n - S_{n-1}$ түрге өрнектеуге болады. Қасиеттің шарты бойынша, қатар жинақты, яғни, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S < \infty$. Сондықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$.

Осы қасиеттен, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ шарт қатардың жинақты болуы үшін

қажетті ғана шарт, жеткілікті шарт емес. Мысалы, гармоникалық қатардың $a_n = \frac{1}{n}$ жалпы мүшесі үшін, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ шарт орындалғанмен де гармоникалық қатар жинақсыз.

5-қасиет (қатардың жинақсыздығының жеткілікті белгісі).

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмаса $n \rightarrow \infty$ -да, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, онда қатар жинақсыз.

Дәлелдеу. Қарсы жорық, яғни қатар жинақты болсын, онда 4-қасиет бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ болады. Ал бұл 5-қасиеттің $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ шартына қайшы келеді.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Ол үшін 5-қасиеттің жеткілікті белгісін тексерейік:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Демек, қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды, олай болса, қатар жинақсыз.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатарды зерттейік, $\alpha - const$.

Шешуі. Егер $\alpha = 1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармоникалық қатар. Демек, $\alpha = 1$ болғанда берілген қатар жинақсыз.

Егер $\alpha > 1$ және $k \geq 2$ болса, онда

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \sum_{n=2}^k \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{n-1}^n dx < 1 + \sum_{n=2}^k \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^{\alpha}} = 1 + \int_1^k \frac{dx}{x^{\alpha}} = \\ &= 1 + \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^k < 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Осыдан $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k < \infty$. Демек, $\alpha > 1$ болса, онда қатар жинақты.

Егер $\alpha < 1$ және $k \geq 2$ болса, онда $(n^{\alpha} < n)$:

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha} > \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} > \ln|1+k|.$$

Осыдан $R = +\infty$. Демек, $\alpha < 1$ болса, онда қатар жинақсыз болады.

6-қасиет (Коши критерийі). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болуы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және бүтін $p \geq 0$ үшін

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad (11.5)$$

теңсіздіктің орындалуы қажет әрі жеткілікті, мұндағы $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n$, S_{n+p} мен S_n берілген қатардың дербес қосындылары.

Коши критерийін дәлелдеусіз қабыл алып, осы қасиеттен және тәжірибеде жиі қолданылатын төмендегі Коши критерийінің салдарын келтірейік.

Салдар. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болуы үшін, осы қатардың мүшелерінен анықталған $\{a_n\}$ тізбегі шексіз аз шама болуы қажет, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Сонымен, берілген қатарды жинақтылыққа зерттегенде, алдымен ол қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылатынын тексеру қажет. Егер қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмаса, онда ол қатар жинақсыз болады.

Негізінде келтірілген салдар мен 4-қасиет әртүрлі тұжырымдалғанмен де, екеуі де қатардың жинақтылығының қажетті шарты болып табылады.

Коши критерийін пайдаланып, төмендегі қатарлардың жинақты және жинақсыздығын дәлелдейік.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ қатардың жинақты болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Кез келген ε санын тағайындайық, $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай және $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын N нөмірін табайық, p – кез келген натурал сан. Сонда

$$\begin{aligned}
 |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} \right| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n+3)x}{n+2} + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{n+p} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - \right. \\
 &\quad \left. \dots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \leq \frac{1}{n+1} + \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} < \frac{2}{n}.
 \end{aligned}$$

Осыдан, егер N нөмірін $\frac{2}{\varepsilon}$ -ге тең деп алсақ, онда $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Демек, Коши критерийі бойынша қатар жинақты.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ қатары жинақсыз болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Коши критерийіндегі $\varepsilon = \frac{1}{4}$ болсын, онда кез келген n үшін:

$$\begin{aligned}
 |S_{2n} - S_n| &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \dots + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

теңсіздігі орындалады. Олай болса, Коши критерийі орындалмайды, демек берілген қатар жинақсыз.

Сұрақтар.

1. Қатардың қасиеттері.
2. Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі.
3. Қатардың жинақсыздығының жеткілікті белгісі.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы.

Тапсырма. Қажетті белгіні пайдаланып төмендегі қатарларды зертте:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+3}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{12n-7}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{6n+4}.$$

11.3. Оң сандар қатары

Біз осы тақырыпта қатарлардың барлық мүшелері оң болатын қатарларды қарастыратын боламыз, мұндай қатар **оң сандар қатары** деп аталады немесе мүшелері **теріс емес қатар** деп аталады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (11.6)$$

мұндағы $a_n \geq 0$. Оң сандар қатарының дербес қосындыларына $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$ теңсіздіктер орындалады. Демек, оң сандар қатарының мүшелерінен анықталған $\{S_n\}$ дербес сандар тізбегі өспелі тізбек болады, онда мына тұжырымдарды аламыз:

1) егер оң сандар қатарының S_n дербес қосындысы жоғарыдан шектелсе (шенелсе), онда қатар жинақты;

2) егер дербес қосынды жоғарыдан шектелмесе (шенелмесе), онда қатар жинақсыз.

11.1-теорема. (11.6) оң сандар қатары жинақты болуы үшін, қатардың $\{S_n\}$ дербес тізбегі шектелген (шенелген) болуы қажет әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Берілген қатар жинақты болсын, онда 1.2-теорема ([1]) бойынша қатардың $\{S_n\}$ дербес тізбегі шектелген (шенелген).

Жеткіліктігі. Қатардың $\{S_n\}$ дербес тізбегі жоғарыдан шектелсін, онда 1.5-теорема ([11]) бойынша санды қатардың шегі бар. Дәлелденді.

11.2-теорема (салыстыру белгі). Оң сандар қатарларын қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (11.6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \quad (11.7)$$

мұндағы $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ болсын. Егер (11.6) мен (11.7) қатарларының барлық мүшелеріне (немесе белгілі бір нөмірден бастап, мысалы $n \geq N$) $a_n \leq b_n$ теңсіздігі орындалса, онда:

1) (11.7) қатардың жинақтылығынан (11.6) қатардың жинақтылығы шығады;

2) (11.6) қатардың жинақсыздығынан (11.7) қатардың жинақсыздығы шығады.

Демек, егер (11.7) жинақты болса, онда (11.6) жинақты; егер (11.6) жинақсыз болса, онда (11.7) жинақсыз.

Тәжірибеде жиі қолданылатын осы теореманың екі салдарын келтірейік.

1-салдар. (11.6) мен (11.7) оң сандар қатарларының жалпы мүшелеріне мына теңдік орындалсын: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, $0 \leq c \leq +\infty$, $b_n \neq 0$.

Егер: 1) (11.7) қатар жинақты, $c < +\infty$ болса, онда (11.6) қатар да жинақты; 2) (11.6) қатар жинақсыз және $c > 0$ болса, онда (11.7) қатар да жинақсыз болады.

Осы салдардан мына тұжырымға келеміз: егер $0 < c < +\infty$ болса, онда (11.6) мен (11.7) қатарлардың екеуі де жинақты немесе жинақсыз.

Ескерту. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k(n)}{P_m(n)}$ қатарын зерттеу үшін берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ қатарымен салыстырған тиімді, мұндағы $P_k(n)$ n -ге тәуелді k дәрежелі, ал $P_m(n)$ n -ге тәуелді m дәрежелі көпмүшеліктер, $\alpha = m - k$.

2-салдар. (11.6) мен (11.7) оң сандар қатарларының жалпы мүшелеріне

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

теңсіздігі орындалсын. Егер: 1) (11.7) қатар жинақты болса, онда (11.6) қатар да жинақты; 2) (11.6) қатар жинақсыз болса, онда (11.7) қатар да жинақсыз болады.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Берілген қатардың $a_n = \frac{1}{2+5^n}$ жалпы мүшесі. Қатарды зерттеу үшін қатардың салыстыру белгісін пайдаланған тиімді. Берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ қатармен салыстырайық, $b_n = \frac{1}{5^n}$ және $\frac{1}{2+5^n} \leq \frac{1}{5^n}$ теңсіздігі барлық n үшін орындалады. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ қатары геометриялық прогрессия және еселігі $q = \frac{1}{5} < 1$. Сондықтан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ қатары жинақты, олай болса, салыстыру белгісі бойынша берілген қатар да жинақты.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{3^n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұндағы $a_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{3^n}$ қатардың жалпы мүшесі. Оның жалпы мүшесіне $0 \leq \frac{\sin^2 n\alpha}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан, берілген қатарды жалпы мүшесі $b_n = \frac{1}{3^n}$ болатын $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ қатармен салыстырайық, ал бұл еселігі $q = \frac{1}{3}$ -ке тең геометриялық прогрессия қатарын құрайды, демек ол жинақты. Онда салыстыру белгісі бойынша берілген қатар да жинақты болады.

3-мысал. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұндағы $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ қатардың жалпы мүшесі. Қарапайым $\sqrt{n}-1 < \sqrt{n}$ теңсіздікті ескеріп, осыдан $\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$ теңсіздігін аламыз. Берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатарымен салыстырайық және бұл қатар жинақсыз $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ (11.2-тақырып, мысал). Онда салыстыру белгісі бойынша берілген қатар да жинақсыз болады.

4-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n^2}$ қатарын зерттейік, $a_n = \frac{5n+2}{n^2}$ жалпы мүше.

Шешуі. 1-салдарды және ескертуді пайдаланайық. Сонда $\alpha = 2 - 1 = 1$, сондықтан берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоникалық қатарымен салыстырайық, мұндағы $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 2}{n^2} : \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{n}}{1} = 5 = c > 0.$$

Сонымен, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатары жинақсыз болғандықтан, салыстыру белгі бойынша берілген қатар да жинақсыз.

Даламбер белгісі. (11.6) оң сандар қатары берілсін.

1) Егер $0 < q < 1$ және m нөмірі табылып, $n \geq m$ үшін

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

теңсіздігі орындалса, онда (11.6) қатар жинақты болады;

2) егер m нөмірі табылып, $n > m$ үшін $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ теңсіздігі орындалса, онда (11.6) қатар жинақсыз болады.

Дәлелдеу. 1) $0 < q < 1$ болсын және $n \geq m$ сандары табылып, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ теңсіздігі орындалсын. Осыдан $a_{n+1} \leq qa_n$. Онда

$$\begin{aligned} a_{m+1} &\leq a_m q, \\ a_{m+2} &\leq a_{m+1} q, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m+p} &\leq a_{m+p-1} q \leq a_{m+p-2} q^2 \leq \dots \leq a_m q^p \end{aligned}$$

теңсіздіктері орындалады және $a_m q + a_m q^2 + \dots + a_m q^p + \dots$ қатары кемімелі геометриялық прогрессия, еселігі $0 < q < 1$. Сондықтан бұл қатар жинақты, демек, салыстыру белгі бойынша және санды қатардың 3-қасиеті бойынша мына қатар:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+p} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i}$$

жинақты, онда (11.6) қатар да жинақты болады.

Енді тәжірибеде есептерде жиі қолданылатын Даламбер белгісінің салдарын қарастырайық.

Салдар. (11.6) оң сандар қатары үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

шек бар болсын. 1) Егер $0 < \rho < 1$ болса, онда (11.6) қатар жинақты болады; 2) егер $\rho > 1$ болса, онда (11.6) қатар жинақсыз болады.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұнда $a_n = \frac{3^n}{n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$. Даламбер белгісін пайдаланайық:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{n+1} : \frac{3^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n}{3^n (n+1)} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 3 > 1. \end{aligned}$$

Сонымен, $\rho = 3 > 1$. Сондықтан берілген қатар жинақсыз.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұнда $a_n = \frac{n}{3^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Даламбер белгісі бойынша:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1} n} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Демек, $\rho = \frac{1}{3} < 1$, сондықтан қатар жинақты.

3-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұндағы $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)! n^n}{3^n n! (n+1)^{n+1}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\
 &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{3}{e} > 1.
 \end{aligned}$$

Берілген қатар жинақсыз.

Кошидің радикал белгісі. (11.6) оң сандар қатары берілсін.

1) Егер $0 < q < 1$ және m нөмірі табылып, $n \geq m$ үшін $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ теңсіздігі орындалса, онда (11.6) қатар жинақты болады;

2) егер m нөмірі табылып, $n \geq m$ үшін $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ теңсіздігі орындалса, онда (11.6) қатар жинақсыз болады.

Дәлелдеу. 2) m нөмірі табылып, $n \geq m$ үшін $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ немесе $a_n \geq 1$ теңсіздігі орындалсын. Онда берілген қатарға қатардың жинақтылығының қажетті $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ шарты орындалмайды. Олай болса, (11.6) қатар жинақсыз. Дәлелденді.

Енді Кошидің радикал белгісінің салдарын қарастырайық.

Салдар. (11.6) қатар үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

шек бар болсын.

1) Егер $\rho < 1$ болса, онда (11.6) санды қатар жинақты болады;

2) Егер $\rho > 1$ болса, онда (11.6) санды қатар жинақсыз болады.

Ескерту. Даламбер мен Кошидің радикал белгілеріндегі $\rho = 1$ болса, онда қатардың жинақты, жинақсыздығы туралы ештеңе айтуға болмайды, яғни қосымша зерттеу қажет. Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатарлары үшін, Даламбер белгісі бойынша $\rho = 1$ болады, бірақ бірінші қатар жинақсыз, ал екінші қатар жинақты ($\alpha = 2 > 1$, 11.2-тақырып).

Кошидің интегралдық белгісі. (11.6) оң сандар қатарының мүшелері кемімелі болсын:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots,$$

$[1; +\infty)$ интервалында анықталған $f(x)$ функциясына $\cos nx$ – теңдігі орындалсын.

1) Егер $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ бірінші түрдегі (текті) меншіксіз интеграл жинақты болса, онда (11.6) қатар да жинақты;

2) егер $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ бірінші түрдегі (текті) меншіксіз интеграл жинақсыз болса, онда (11.6) қатар да жинақсыз.

Дәлелдеу. Дәлелдеу үшін $m \leq x \leq m+1$ болсын, онда (11.6) қатардың мүшелері кемімелі болғандықтан, $f(x)$ функция $f(m) \geq f(x) \geq f(m+1)$, $m = 1, 2, \dots$ теңсіздігін қанағаттандырады (11.1-сурет). Соңғы теңсіздікті $[m; m+1]$ сегментте интегралдайық:

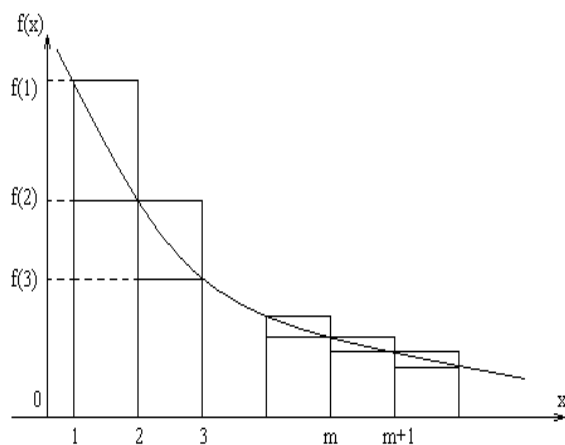
$$f(m) \geq \int_m^{m+1} f(x)dx \geq f(m+1).$$

Осы теңсіздіктен m бойынша 1-ден n -ге дейін қосынды алайық:

$$\sum_{m=1}^n f(m) \geq \sum_{m=1}^n \int_m^{m+1} f(x)dx \geq \sum_{m=1}^n f(m+1) \text{ және } S_n = \sum_{m=1}^n f(m) \text{ болсын.}$$

Онда

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq S_{n+1} - a_1 \text{ немесе } S_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)dx + a_1.$$



11.1-сурет

1) Егер $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ жинақты болса, онда $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx$ теңсіздігінен

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos x dx$$

теңсіздігі орындалады. Демек, (11.6) қатардың S_{n+1} дербес қосындысы жоғарыдан шектелген, кез келген n үшін. Онда 11.3-тақырыптағы тұжырым бойынша S_{n+1} қосындының шегі бар, яғни (11.6) қатар жинақты. Дәлелденді.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Бұл қатардың жинақты мен жинақсыздығына Даламбер мен Кошидің радикал белгілері жауап бере алмайды, себебі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^{\alpha} = \alpha.$$

Ал Кошидің интеграл белгісі көмегімен жауап алуға болады, мұнда $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Бұл функция Кошидің интеграл белгісінің барлық

шарттарын қанағаттандырады. Онда: $\alpha > 1$ болғанда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ интегралы

жинақты, олай болса (11.6) қатар да жинақты; $\alpha \leq 1$ болса $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ интегралы жинақсыз, олай болса (11.6) қатар да жинақсыз.

Сұрақтар.

1. Даламбер белгісі және оның салдары.
2. Кошидің радикал белгісі және оның салдары.
3. Кошидің интеграл белгісі.
4. Оң сандар қатарының жинақты болуының қажет әрі жеткілікті белгісі.
5. Салыстыру белгісі және оның салдарлары.

Тапсырмалар.

1. Салыстыру белгісін пайдаланып зерттендер: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n+3}}$.
2. Даламбар белгісін пайдаланып зерттендер: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n 7^{n+1}}$.
3. Кошидің радикал белгісін пайдаланып зерттендер: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^n}$;

$$21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)};$$

4. Кошидің интеграл белгісін пайдаланып зерттеңдер: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 6}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+2}}.$$

11.4. Қатардың абсолютті және шартты жинақтылығы

Біз өткен тақырыпта, қатардың барлық мүшелерінің таңбасы не оң не теріс болсын деп қарастырдық. Ал енді осы тақырыпта, қатардың мүшелерінің таңбалары кез келген болып келген қатарларды қарастыратын боламыз және олар **таңбалары айнымалы қатарлар** деп аталады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \quad (11.8)$$

мысалы, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ таңбалары айнымалы қатарға мысал бола алады.

Егер (11.8) қатардың мүшелерінің таңбалары кезектесіп ауысып отыратын болса, онда ол **таңбалары ауыспалы қатар** деп аталады, мысалы, қатардың бірінші мүшесінің таңбасы оң болса, онда таңбалары ауыспалы (11.8) қатарды мына түрде жазуға болады:

$$a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad (11.9)$$

мұндағы $a_i > 0$, осы сияқты егер қатардың бірінші мүшесі теріс болса, онда

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Анықтама. (11.8) қатар **абсолютті жинақты** деп аталады, егер осы қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан анықталған мына қатар:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (11.10)$$

жинақты болса.

Бұл жағдайда, (11.10) қатар оң сандар қатары болады, демек (11.10) қатарға Даламбер, салыстыру, Кошидің белгілері және олардың салдарын да пайдалануға болады.

11.3-теорема. Егер (11.10) қатар жинақты болса, онда (11.8) қатар да жинақты болады.

Дәлелдеу. Теореманың шарты бойынша (11.12) қатар жинақты, яғни Коши критерийі бойынша (11.2-тақырып) алдын ала берілген $\varepsilon > 0$ сан үшін N нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және натурал p сандары үшін

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \varepsilon \quad (11.11)$$

теңсіздігі орындалады. (7.11) теңсіздіктен, кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \varepsilon$$

теңсіздігі орындалды. Дәлелденді.

Анықтама. (11.8) қатар шартты жинақты деп аталады, егер (11.8) қатар жинақты, ал (11.10) қатар жинақсыз болса.

Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots$ қатары абсолютті жинақты, себебі $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ – қатар жинақты, $\alpha > 1$.

Негізінде таңбалары ауыспалы қатарға жиі қолданылатын Лейбниц теоремасын келтірейік. Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандыратын қатар **Лейбниц қатары** деп аталады.

Лейбниц белгісі. Егер таңбалары ауыспалы (11.9) қатардың мүшелерінің абсолют шамасы кемімелі болса және оның жалпы мүшесі $n \rightarrow +\infty$ да нөлге ұмтылса, яғни

$$|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_n| \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

онда (11.9) қатар жинақты.

Дәлелдеу. (11.9) қатардың S_{2n} дербес қосындысын қарастырайық:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + \\ &+ a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned}$$

Лейбниц белгісінің шарты бойынша жақша ішіндегі өрнектер үшін $(a_{i-1} - a_i) > 0$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $\{S_{2n}\}$ тізбегі кез-келген n үшін өспелі және S_{2n} дербес қосындыны мына түрде жазуға болады:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}].$$

Мұндағы квадрат жақша ішіндегі өрнектер оң, онда кез келген n үшін $S_{2n} \leq a_1$ теңсіздігі орындалады. Демек, $\{S_{2n}\}$ тізбегі барлық n үшін өспелі және жоғарыдан шектелген. Онда: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$.

Лейбниц белгісін толық дәлелдеу үшін $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$ теңдігін дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 0$ теңдіктерді еске алсақ жеткілікті. Сонымен, (11.9) қатар жинақты. Дәлелденді.

1-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+1)}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Берілген қатар Лейбниц белгісінің барлық шарттарын қанағаттандырады: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{3n}{n(n+1)} \right| = \frac{4}{2} + \frac{7}{6} + \frac{10}{12} + \frac{13}{20} + \dots + \frac{3n+1}{n(n+1)} + \dots$,

$$\frac{4}{2} > \frac{7}{6} > \frac{10}{12} > \frac{13}{20} > \dots > \frac{3n+1}{n(n+1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n(n+1)} = 0.$$

Сонымен, берілген қатар Лейбниц қатары болады, яғни ол жинақты.

Енді берілген қатардың абсолют шамасынан анықталған $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)}$ қатарға салыстыру белгісін қолданайық:

$$\frac{3n+1}{n(n+1)} > \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{2n}{n(n+1)} > \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

Сонда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)}$ мен $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатарларының жалпы мүшелеріне

$$\frac{1}{n} < \frac{3n+1}{n(n+1)}$$

теңсіздігі орындалады. Кез келген n үшін $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоникалық қатар жинақсыз болғандықтан, салыстыру белгі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)}$ қатар да жинақсыз. Олай болса, берілген қатар шартты жинақты.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Қатарды зерттеу үшін Даламбер белгісін пайдаланайық:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1)!}}{(-1)^{n+1} \frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Демек берілген қатар абсолютті жинақты.

Сұрақтар.

1. Таңбалары ауыспалы мен айнымалы қатарлар.
2. Абсолютті жинақты қатар.
3. Шартты жинақты қатар.
4. Лейбниц белгісі. Лейбниц қатары.
5. Абсолют шамамен алынған оң сандар қатарының жинақтылығы қай қатардың жинақтылығына кепілдік береді?

Тапсырмалар.

1. Мына қатарлар Лейбниц белгісін қанағаттандыра ма?

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Лейбниц белгісін пайдаланып мына қатарларды зерттеңдер:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3n+2}.$$

3. Шартты мен абсолюттік жинақтылыққа зерттеңдер:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{3^n}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+2}.$$

11.5. Абель мен Дирихле белгілері

Көп жағдайда мүшелері екі элементтердің көбейтіндісінен анықталған қосындыны қарастыруға тура келеді:

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

Алдымен, мына қосындыларды қарастырайық:

$$B_1 = \beta_1, B_2 = \beta_1 + \beta_2, \dots, B_m = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m.$$

Енді β_i элементтерін B_i элементтері арқылы өрнектейік:

$$\beta_1 = B_1, \beta_2 = B_2 - B_1, \dots, \beta_m = B_m - B_{m-1}.$$

Онда S қосындыны мына түрге түрлендіруге болады:

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \beta_i = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \dots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}).$$

Соңғы теңдіктегі жақшаларды ашып, B_i элементтерін топастырайық:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \beta_i = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) \times \\ &\times B_2 + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \cdot B_{m-1} + \alpha_m \times \\ &\times B_m = \alpha_m \cdot B_m + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \cdot B_i. \end{aligned} \quad (11.12)$$

(11.12) формула **Абель*** түрлендіруі деп аталады.

7.1 лемма. Егер α_i көбейткіш кемімелі (өспелі), ал B_i қосындысының абсолют шамасы барлық i үшін шектелсе, яғни $|B_i| \leq M$, $i = \overline{1, m}$, онда $|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \beta_i \right| \leq M(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|)$ теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу: (11.12)-Абель түрлендіруіндегі $\alpha_i - \alpha_{i+1}$ айырымдарының таңбалары бірдей, сондықтан

$$\begin{aligned} |S| &= \left| \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot |B_i| + |\alpha_m| \cdot |B_m| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot M + |\alpha_m| \cdot M = \\ &= M(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \leq M(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|). \end{aligned}$$

* Н. Абель (1802-1829) – Норвег математигі

Егер лемманың шартындағы α_i көбейткіш кемімелі әрі оң сан болса, онда $|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq M \alpha_1$ теңсіздігі орындалады.

Бізге таңбалары кез келген

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (11.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots \quad (11.14)$$

қатарлары берілсін, мұндағы a_i мен b_i нақты сандар.

Абель белгісі. Егер (11.13) қатар жинақты, ал a_n нақты сандары монотонды және барлық n үшін шектелсе, яғни $|a_n| \leq M$, $n = 1, 2, \dots$, онда (11.14) қатар жинақты болады.

Дирихле* белгісі. Егер (11.13) қатардың дербес қосындысы барлық n үшін шектелсе, яғни

$$|B_n| = |b_1 + b_1 + \dots + b_n| < N, n = 1, 2, \dots,$$

ал $\{a_n\}$ монотонды тізбек және $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ болса, онда (7.16) қатар жинақты.

1-мысал. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Алдымен $\cos \frac{\pi n^2}{n+1}$ өрнекті түрлендірейік:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} &= (-1)^n \cos \left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n \right) = \\ &= (-1)^n \cos \pi \left(\frac{n^2}{n+1} - n \right) = (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Сонда берілген қатарды зерттеу үшін

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi}{n+1}$$

* Л. Дирихле (1805–1859) – неміс математигі

қатарын зерттесек жеткілікті. Мұндағы $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ қатары Лейбниц белгісінің барлық шарттарын қанағаттандырады:

$$\frac{1}{\ln^2 2} > \frac{1}{\ln^2 3} > \dots > \frac{1}{\ln^2 n} > \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^2 n} = 0.$$

Сондықтан $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ қатары жинақты. Ал $\left\{ \cos \frac{\pi}{n+1} \right\}$ тізбегі монотонды және барлық $n \geq 2$ үшін шектелген. Олай болса, Абель белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

2-мысал. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Қатарды зерттеу үшін екі жағдайды қарастырайық: $p > 0$, $p \leq 0$. Алдымен $p \leq 0$ болсын. Онда берілген қатар мына түрге түрленеді:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^p \sin \frac{n\pi}{4}}{1 + n^p \sin \frac{n\pi}{4}},$$

ал бұл қатардың жалпы мүшесі $n \rightarrow \infty$ -да нөлге ұмтылмайды. Олай болса, $p \leq 0$ болғанда берілген қатар 5-қасиет бойынша (11.2-тақырып) жинақсыз.

Енді $p > 0$ болсын. Қатардың жалпы мүшесін өрнектейік:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} &= \sin \frac{n\pi}{4} \left(n^p + \sin \frac{n\pi}{4} \right)^{-1} = \sin \frac{n\pi}{4} \times \\ &\times \frac{n^{-p}}{n^{-p}} \left(n^p + \sin \frac{n\pi}{4} \right)^{-1} = \sin \frac{n\pi}{4} \cdot n^{-p} \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы $\left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right)^{-1}$ өрнекті Маклорен

формуласы бойынша түрлендірейік, сонда

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \cdot \left(1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right) \right) = \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Сонымен, $p > 0$ болғанда берілген қатарды зерттеу үшін мына қатарлар айырымын зерттесек жеткілікті:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

Алдымен соңғы қатардың бірінші қатарын зерттейік, мұнда

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{4} \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0. \quad \text{Онда } p > 0 \text{ болған жағдайда } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$$

қатары Дирихле бойынша жинақты. Енді екінші қатарды зерттейік. Алдымен оның жалпы мүшесін өрнектейік:

$$\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} = \frac{1}{n^{2p}} \cdot \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2n^{2p}} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^{2p}}.$$

Сонда екінші қатар екі қатардың айырымына жіктелінеді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^{2p}}.$$

Мұндағы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}}$ қатар $p > \frac{1}{2}$ болғанда жинақты ($p > 0$), ал

екінші қатар үшін Дирихле белгісіндегі $B_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ шектелген,

$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2n^{2p}} \right\}$ монотонды және $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2p}} = 0$. Сондықтан

Дирихле белгісі бойынша, $p > 0$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^{2p}}$ қатар жинақты.

Олай болса, берілген қатар $p > \frac{1}{2}$ болғанда жинақты болады.

3-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Дирихле белгісін пайдаланып зерттейік, сонда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^n \sin m \cdot \sin m^2 \right| &= \frac{1}{2} \left| \sum_{m=1}^n [\cos m(m-1) - \cos m(m+1)] \right| = \\ &= \frac{1}{2} |1 - \cos 2 + \cos 2 - \cos 6 + \cos 6 - \cos 12 + \dots + \\ &+ \cos(n-1)(n-2) - \cos(n-1)n + \cos n(n-1) - \cos n(n+1)| = \\ &= \frac{1}{2} |1 - \cos n(n+1)| \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

Сонымен, Дирихле белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

Сұрақтар.

1. Абель белгісі.
2. Дирихле белгісі.

Тапсырма. Абель мен Дирихле белгілерін пайдаланып зерттендер:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}.$$

11.6. Функциялық тізбек пен қатардың негізгі ұғымдары

Біз X жиынында анықталған $f_i(x)$ ($i=1,2,\dots$) функцияларын қарастырайық:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \quad x \in X, \quad (11.15)$$

мұндағы $f_i(x)$ функциялар кез келген $x \in X$ үшін нақты мәндерді қабылдасын.

Анықтама. Егер X жиынындағы x -ке және кез келген n ($n=1,2,\dots$) натурал санына белгілі бір ереже немесе заңдылық бойынша $f_n(x)$ функцияны сәйкес қойса, онда бізге X жиынында анықталған (11.15) функциялық тізбек берілді дейміз және ол

қысқаша $\{f_n(x)\}$ таңбасымен белгіленеді, бұл жағдайда $f_i(x)$ **функциялық тізбектің мүшелері** немесе **элементтері**, ал X жиыны **функциялық тізбектің анықталу облысы** деп аталады. Осылайша, $\{u_n(x)\}$ функциялық тізбегінің мүшелерінен анықталған, яғни

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (11.16)$$

шексіз қосынды **функциялық қатар** деп аталады, бұл жағдайда да (11.16) функциялық қатардың барлық мүшелері X жиынында анықталған және ол **функциялық қатардың анықталу облысы** деп аталады. Функциялық қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = S_n(x)$$

осы қатардың **дербес қосындысы** деп аталады. Бұл жағдайда,

$$S_1(x) = u_1(x), S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \dots, S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), \dots$$

Онда

$$u_1(x) = S_1(x), u_2(x) = S_2(x) - S_1(x), \dots, u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x), \dots$$

Демек, берілген (11.16) функциялық қатарына әр мүшесі осы функциялық қатардың мүшелерінен анықталған

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots, \text{ немесе } \{S_n(x)\} \quad (11.17)$$

дербес функциялық тізбек сәйкес келеді және керісінше, яғни (11.17) дербес функциялық тізбегіне әр мүшесі (11.17) функциялық тізбектің мүшелерінен анықталған (11.16) функциялық қатар сәйкес келеді әрі бұл сәйкестік бір мәнді анықталады.

Анықтама. (11.15) функциялық тізбек X жиынында **шектелген (шенелген)** деп аталады, егер барлық n ($n=1,2,\dots$) және кез келген $x \in X$ үшін $M > 0$ саны табылып, $|f_n(x)| \leq M$ теңсіздігі орындалса.

Егер кез келген n және $x \in X$ үшін

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad (f_n(x) \geq f_{n+1}(x))$$

теңсіздігі орындалса, онда (7.17) функциялық тізбек **өспелі (кемімелі)** деп аталады.

Анықтама. (11.15) функциялық тізбек $x_0 \in X$ **нүктеде жинақты** деп аталады, егер $\{f_n(x_0)\}$ санды тізбек жинақты болса, ал егер

$\{f_n(x_0)\}$ – жинақсыз болса, онда (11.15) функциялық тізбекте x_0 **нүктеде жинақсыз** деп аталады.

Егер (11.15) функциялық тізбек X жиынының әрбір нүктелерінде жинақты болса, онда ол X **жиынында жинақты** немесе X **жиынында нүктелі жинақты** деп аталады.

Жоғарыдағы анықтамаларды (11.16) функциялық қатар үшін де келтіруге болады.

Анықтама. (11.16) функциялық қатар $x_0 \in X$ **нүктеде жинақты** деп аталады, егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ санды қатары жинақты болса, ал кері жағдайда, яғни $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ қатар жинақсыз болса, онда (11.16) функциялық қатар x_0 **нүктеде жинақсыз** деп аталады.

Егер (11.16) функциялық қатар X жиынының әрбір нүктелерінде жинақты болса, онда функциялық қатар X **жиынында жинақты** немесе X **жиынында нүктелі жинақты** деп аталады.

Жинақты болатын нүктелердің жиыны осы функциялық тізбектің немесе қатардың **жинақты облысы** деп аталады және олардың жинақты облысы олардың анықталу облысымен беттесуі немесе оның бір бөлігі немесе бос жиын болуы да мүмкін.

Анықтама. (11.16) функциялық қатар X жиынында **абсолютті жинақты** деп аталады, егер осы жиында $|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)|$ қатары жинақты болса. Егер (11.15) функциялық тізбек үшін мына шек:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X \quad (11.18)$$

бар болса, онда функциялық тізбек барлық $x \in X$ үшін $f(x)$ функцияға жинақты және $f(x)$ функция (11.15) функциялық тізбектің **шектік функциясы** деп аталады.

Функциялық тізбекке келтірілген шектік функцияның анықтамасын функциялық қатарға да келтіруге болады: егер X жиыны (11.16) функциялық қатардың жинақты облысы болса, онда осы функциялық қатардың (11.17) дербес функциялық тізбегінің шегі, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in X.$$

(11.16) функциялық қатардың қосындысы болады:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X \quad (11.19)$$

әрі ол функциялық қатардың **шектік функциясы** деп аталады.

Осы анықтамалардағы функциялық тізбек пен қатардың сәйкес $f(x)$ пен $S(x)$ шектік функциялары олардың жинақты облыстарында анықталған.

Біз функциялық тізбек пен қатардың тек жинақтылығын ғана зерттеп қоймаймыз, сонымен қатар олардың шектік функцияларының үзіліссіз немесе үзілісті болатынына ерекше көңіл бөлеміз. Анығырақ айтқанда, егер X жиынында функциялық тізбектің (қатардың) барлық мүшелері үзіліссіз болса, онда осы үзіліссіздік шарттан шектік функцияның да үзіліссіздігі шыға ма? Егер осы сұраққа оң жауап болмаған жағдайда, қандай шарт орындалғанда шектік функция үзіліссіз болады деген сұраққа жауап беруге тура келеді. Бірінші сұраққа оң жауап болмайтынын қарапайым мысалдардан көруге болады, ал екінші сұраққа жауапты алдағы тақырыптарда қарастыратын боламыз.

Сұрақтар.

1. Функциялық тізбек пен қатардың анықтамасы.
2. Функциялық тізбек пен қатардың нүктедегі жинақтылығы мен жинақсыздығы.
3. Функциялық тізбек пен қатар X жиынында шектелген (шенелген).
4. Функциялық тізбек пен қатардың шектік функциясы.
5. Функциялық қатар X жиынында абсолютті жинақты.
6. Функциялық тізбек өспелі (кемімелі).

11.7. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақтылығы

Біз X жиынында анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекті қарастырайық және барлық $x \in X$ үшін (11.18) теңдік орындалсын. Онда функция шегінің анықтамасы бойынша (11.3-тақырып): X жиыннан алынып тағайындалған x үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына N нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (11.20)$$

теңсіздігі орындалады, мұнда алдын ала тағайындалған X жиынындағы x туралы сөз қозғалып отыр. Ал егер X жиынынан басқа x -ті алсақ, онда басқа $\{f_n(x)\}$ санды тізбекті аламыз және де (11.20) теңсіздіктегі ε үшін N нөмірі жарамсыз болып қалуы да мүмкін, сондықтан N -нен өзге үлкен нөмірді табуға тура келеді. Демек, X жиынында шексіз көп жинақты санды тізбектердің әрқайсысының өзіне тән N нөмірі бар. Олай болса, алдын ала берілген $\varepsilon > 0$ саны үшін осы шексіз көп санды тізбектердің бәріне ортақ N нөмірі табыла ма деген сұрақ туады. Кейбір жағдайларда ондай N нөмірі табылатынын, ал кейде табылмайтынын төмендегі мысалдардан көруге болады.

1-мысал. $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{x}{1+x^2n^2} \right\}$, $x \in X = [0,1]$ функциялық тізбекті

қарастырайық.

Шешуі. Мұнда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$, $(1-nx)^2 \geq 0$,

$2nx \leq 1+n^2x^2$, $\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq 1$, $0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$ теңсіздіктері орындалады. Демек, тағайындалған x -ке $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ теңсіздігі

орындалуы үшін кез келген $x \in [0,1]$ үшін $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын n натурал саны табылады, яғни $\frac{1}{2\varepsilon} < n$. Демек, іздестіріп

отырған N саны ретінде $E(\frac{1}{2\varepsilon}) = [\frac{1}{2\varepsilon}]$ санын алуға болады, яғни

$n > N = E(\frac{1}{2\varepsilon})$ нөмірі барлық $x \in [0,1]$ үшін ортақ.

2-мысал. $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+x^2n^2} \right\}$, $x \in [0,1]$ функциялық тізбекті

қарастырайық.

Шешуі. Бұл мысалда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2nx^2} = 0$ және тағайындалған x үшін

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{nx} \cdot \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{nx} \left(1 - \frac{1}{1+n^2x^2} \right) < \frac{1}{nx} \end{aligned}$$

теңсіздік орындалады. Демек, тағайындалған x -ке $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалуы үшін $\varepsilon > \frac{1}{nx}$ теңсіздік орындалуы қажет, осыдан $n > \frac{1}{\varepsilon x}$. Онда N нөмірі ретінде $E\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right)$ санын алуға болады, яғни $n > N = E\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right)$ және бұл N нөмірі x -ке тәуелді. Ал n натурал санын қаншалықты үлкен етіп алғанмен $f_n(x)$ функция үшін $[0,1]$ сегменттен $x = \frac{1}{n}$ нүкте табылып, $f_n(x)$ функцияның осы нүктедегі мәні $\frac{1}{2}$ -ге тең болады, яғни $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Демек, n санын қаншалықты үлкен етіп алғанмен $f_n(x) < \frac{1}{2} = \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай барлық x -ке ортақ N нөмірі табылмайды, яғни $0 < \frac{1}{2} = \varepsilon$ және барлық $x \in [0,1]$ үшін N нөмірі жоқ.

Анықтама. (11.15) функциялық тізбек X жиынында $f(x)$ функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ табылып, $n > N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын n және барлық $x \in X$ үшін

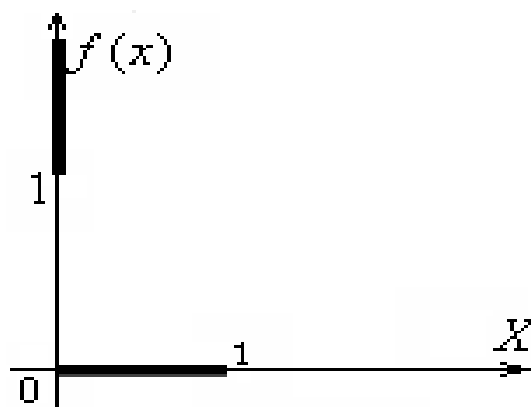
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (11.21)$$

теңсіздігі орындалатын болса.

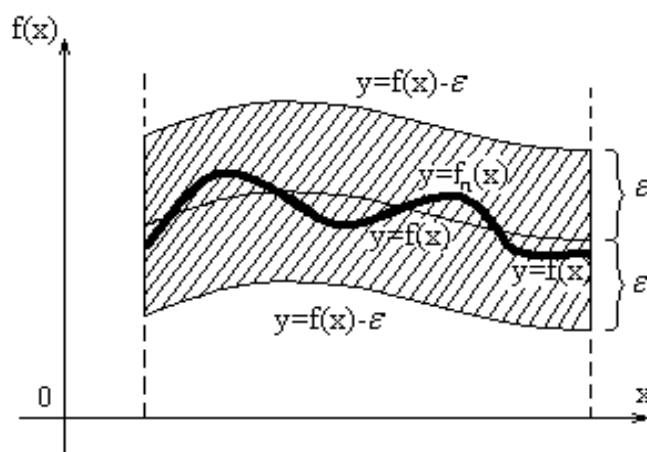
Бұл анықтамадағы $N(\varepsilon)$ нөмірі тек ε -ге тәуелді, ал x -ке тәуелді емес. Сондықтан, кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін бәріне ортақ $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, осы нөмірден бастап, (11.21) теңсіздік барлық $x \in X$ үшін орындалады. Егер анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек X жиынында жинақты болса, онда ол осы жиында бірқалыпты жинақты болады деп тұжырымдауға болмайды. Мысалы, $X = [0,1]$ жиынында анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекті қарастырайық:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Бұл функциялық тізбек барлық $x \in [0,1]$ үшін жинақты. Шынында да, барлық n үшін $f_n(0)=1$ болады, демек $x=0$ нүктеде $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)=1$, яғни, егер $x=0$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 1$. Енді $(0;1]$ жиынынан кез келген x -ті тағайындайық, онда белгілі бір нөмірден бастап $f_n(x)$ функцияның бәрі де нөлге тең болады. Демек, барлық $x \in [0,1]$ үшін $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек 0-ге жинақталады, яғни



11.2-сурет



11.3-сурет

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Сонымен, $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $x \in [0,1]$ жиынында $f(x)$ функцияға жинақты: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x=0, \\ 0, & x \in (0,1], \end{cases}$ және $f(x)$ шектік функция $[0,1]$ жиынының $x=0$ нүктесінде үзілісті (11.2-сурет).

Енді $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[0,1]$ жиынында бірқалыпты жинақты болмайтынын көрсетейік. Ол үшін $[0,1]$ жиынына тиісті

$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2n} \right\}$ санды тізбегін қарастырайық, онда кез келген n және

$x_n = \frac{1}{2n}$ үшін $f_n(x_n) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ және $f(x_n) = 0$ болады. Демек, кез

келген n нөмірі үшін $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$ болады, яғни $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ болғанда

барлық $x \in [0,1]$ үшін (11.21) теңсіздік ешқандай да n нөмірі үшін орындалмайды. Сондықтан, $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[0,1]$ жиынында $f(x)$ функцияға жинақты, ал ол осы жиында бірқалыпты жинақты емес.

Енді жоғарыдағы анықтамаға эквивалентті анықтаманы келтірейік.

Анықтама: (11.15) функциялық тізбек X жиынында $f(x)$ шектік функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (11.22)$$

Бұл екі анықтама эквивалентті, шынында да, егер (11.22) теңдік орындалса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын n үшін $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

теңсіздік орындалады, онда функцияның жоғарғы шекарасының анықтамасы бойынша: $|f_n(x) - f(x)| < \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$, $x \in X$. Онда

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $x \in X$, демек (11.22) теңдік орындалса, онда (11.21) теңдік те орындалады. Керісінше, егер (11.21) теңсіздік орындалса, онда (11.22) шектің орындалатынын оңай дәлелдеуге болады.

Бірқалыпты жинақтылықтың геометриялық мағынасын қарастырайық. X жиынындағы $y = f_n(x)$ пен $y = f(x)$ функциялар айырымының ең жоғарғы шекарасы $n \rightarrow +\infty$ -да нөлге ұмтылады, яғни, $y = f(x)$ функциясының сызбасын $y = f(x) + \varepsilon$ мен $y = f(x) - \varepsilon$ функцияларының сызбасымен X жиынында ε жазықтықпен қоршайық (11.3-сурет): $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$, $x \in X$. Онда $y = f_n(x)$ функцияларының сызбалары x -ке тәуелсіз белгілі бір үлкен n нөмірден бастап, $\varepsilon > 0$ жазықтығында жатады және де $y = f(x)$ шекті функцияның сызбасын қоршап, соған “жақындайды”. Сонымен,

$\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекке X жиынында бірқалыпты жинақтылық орындалғанда, жеткілікті үлкен n нөмір үшін $y = f_n(x)$ функцияның мәні шектік $f(x)$ функцияның мәніне “жақындайды” барлық X жиынында.

Жоғарыда функциялық тізбекке келтірілген анықтамаларды функциялық қатарға келтірейік.

11.6-тақырыпта қарастырылған (11.16) функциялық қатарға (11.19) формуладағы теңдік орындалсын.

Анықтама: (11.16) функциялық қатар X жиынында $S(x)$ шектік функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер осы қатардың $\{S_n(x)\}$ дербес тізбегі X жиынында $S(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса.

Бірқалыпты жинақты (11.16) функциялық қатардың **қалдық қатары** деп аталатын $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ функциялық қатарын қарастырайық. Онда $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, $x \in X$, осыдан $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ болғандықтан, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ теңдігі орындалады. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ болады. Сондықтан, функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығының анықтамасын мына түрде де беруге болады: егер осы қатардың $r_n(x)$ қалдық қатары X жиынында нөлге бірқалыпты жинақты болса, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, онда (11.16) функциялық қатар X жиынында $S(x)$ -ке **бірқалыпты жинақты** деп аталады.

Анықтама: (11.16) функциялық қатар X жиынында $S(x)$ шектік функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін және $x \in X$ үшін

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, басқаша айтқанда, егер

$$\sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

орындалса, онда (11.16) функциялық қатар бірқалыпты жинақты болады.

Сонымен, біз функциялық қатар мен тізбектің жинақты және бірқалыпты жинақты болатынын көрдік. Енді алдағы тақырыптарда, жинақты болатын функциялық қатар мен тізбек бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін, ал бірқалыпты жинақты функциялық қатар мен тізбек жинақты болатынын көреміз.

Жоғарыдағы функциялық тізбек пен қатардың анықтамаларынан төмендегі екі тұжырымды аламыз:

1) Саны санаулы бірқалыпты жинақты тізбектердің (қатарлардың) қосындысы да бірқалыпты жинақты тізбек болады.

2) Бірқалыпты жинақты тізбектің барлық мүшелерін шектелген $\varphi(x)$ функциясына көбейткеннен анықталған жаңа тізбектің бірқалыпты жинақтылығы өзгермейді.

Екінші тұжырымды дәлелдейік. Тұжырымның шарты бойынша мына теңсіздік орындалады: $|\varphi(x)| < c$, $x \in X$, $c = \text{const}$ және $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$, $x \in X$, онда барлық $x \in X$ үшін $\{f_n(x)\varphi(x)\}$ функциялық тізбек $\varphi(x)f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты. Осы сияқты бірінші тұжырымды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot u_n(x)$$

функциялық қатар үшін де дәлелдеуге болады.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ функциялық қатарды $[-1,1]$ сегментінде қарастырайық. Бірқалыпты жинақтылыққа зерттеу үшін анықтаманы пайдаланайық:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Мұнда $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$, егер $n \rightarrow \infty$. Сондықтан функциялық қатар $[-1,1]$ жиынында бірқалыпты жинақты.

Сұрақтар.

1. Функциялық тізбек X жиынында $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты.

2. Функциялық қатар X жиынында $S(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты.

Тапсырма. Төмендегі тізбектер бірқалыпты жинақты бола ма?

$$\{f_n(x)\} = x^n, x \in [0,1]; \{f_n(x)\} = x^n, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

11.8. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақты болу критерийі мен белгілері

Біз $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекті қарастырайық.

Коши критерийі. X жиынында анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек шектік функцияға бірқалыпты жинақты болуы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмірі, барлық натурал $p \geq 0$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) және барлық үшін $x \in X$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (11.23)$$

теңсіздігінің орындалуы қажет әрі жеткілікті.

Біз X жиынында анықталған

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X \quad (11.24)$$

функциялық қатарды қарастырайық.

Коши критерийі. (11.24) функциялық қатар X жиынында шектік функцияға бірқалыпты жинақты болуы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмір мен натурал $n, p \geq 0$ сандар және кез келген $x \in X$ үшін

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \quad (11.25)$$

теңсіздігінің орындалуы қажет әрі жеткілікті.

Функциялық қатарды бірқалыпты жинақтылыққа зерттеу үшін көп жағдайда жеткілікті белгілерді пайдаланған тиімді. Ол үшін оң сандар қатарын қарастырайық:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0. \quad (11.26)$$

Вейерштрасс белгісі. Егер X жиынында (11.24) функциялық қатардың барлық мүшелеріне

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.27)$$

теңсіздігі орындалса және (11.26) санды қатары жинақты болса, онда (11.24) функциялық қатар X жиында абсолютті және бірқалыпты жинақты болады.

Бұл жағдайда, (11.24) функциялық қатар (11.26) санды қатармен можарантталады немесе (11.26) санды қатар (11.24) функциялық қатардың **можарантты қатары** деп аталады.

Дәлелдеу. Теореманың (белгінің) шарты бойынша (11.26) қатар жинақты, онда Коши критерийі бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмір мен натурал $n, p \geq 0$ сандар және $x \in X$ үшін

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Теңсіздігі орындалады. Онда $n, p \geq 0$ сандар мен барлық $x \in X$ үшін және (11.27) теңсіздіктен мына теңсіздікті аламыз:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Енді осы тақырыптағы Коши критерийін және функциялық қатардың абсолют жинақтылығының анықтамасынан (11.6-тақырып) (11.24) функциялық қатар бірқалыпты әрі абсолют жинақты болады. Дәлелденді.

Мысал. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right), \quad |x| < a$ функциялық қатарды

Вейерштрасс белгісін пайдаланып зерттейік:

$$0 < \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \leq \ln \frac{x^2}{n \ln^2 n} \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n^3}.$$

Сонда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n^3}$ санды қатар жинақты (11.2-тақырып, мысал) әрі ол

берілген функциялық қатардың можарантты қатары. Онда Вейерштрастың белгісі бойынша берілген қатар бірқалыпты әрі абсолютті жинақты.

Егер (11.24) функциялық қатар бірқалыпты жинақты болса, онда ол абсолютті жинақты болмауы мүмкін, мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2 + n}$, $x \in (-\infty, +\infty) = X$ функциялық қатарына кез келген тағайындалған $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін Лейбниц белгісі орындалады (11.4-тақырып):

$$\frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{x^2 + 2} > \dots \frac{1}{x^2 + n} > \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0.$$

Онда берілген қатар кез келген $x \in (-\infty, +\infty)$ үшін жинақты. Онда кез келген қатардың қалдық қатары өзінің бірінші мүшесі арқылы бағаланады (11.4-тақырып):

$$r_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2 + n + 1} + \dots, |r_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n + 1}.$$

Осыдан $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, яғни берілген қатар X жиынында бірқалыпты жинақты.

Енді осы қатардың мүшелерінен абсолют шамамен алынған

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n}$$

қатарын зерттейік. Сандар осіндегі x -ке натурал n_x санын $x^2 \leq n_x$ теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап алайық. Онда $n \geq n_x$ теңсіздігін қанағаттандыратын n үшін $x^2 \leq n_x$ ($x^2 + n \leq 2n$) теңсіздігі орындалады, яғни

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{x^2 + n}$$

теңсіздігі де орындалады, мұндағы $\frac{1}{2n}$ гармоникалық қатардың жалпы мүшесі, ал гармоникалық қатар жинақсыз (11.1-тақырып, 2-мысал). Санды қатардың салыстыру белгісі бойынша (11.3-тақырып, 11.2-теорема) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n}$ қатары да жинақсыз. Олай болса, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2 + n}$ қатары абсолютті жинақты емес. Сонымен, бірқалыпты жинақты (11.24) функциялық қатар абсолютті жинақты болмауы да мүмкін.

Егер X жиында (11.24) функциялық қатар бірқалыпты және абсолютті жинақты болса, онда осы жиында $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ қатар

бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін (осы тұжырымның дәлелдеуін 2-мысалдан қара). Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in (-\infty, \infty)$ функциялық қатарын қарастырайық:

$$\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Қатардың қалдық қатарын бағалайық:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+p+1}} = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + (-1)^{n+2} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+3}} + \dots, \\ |r_n(x)| &< \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{x^2}{1+(n+1)x^2 + \dots} < \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Онда $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, яғни қарастырып отырған функциялық қатар бірқалыпты жинақты. Енді осы қатардың абсолют шамасымен алынған қатарын қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots, x \neq 0.$$

Бұл қатардың еселігі $q = \frac{1}{1+x^2}$ -қа тең геометриялық прогрессия және $0 < q < 1$. Сондықтан абсолют шамамен алынған қатар жинақты (11.1-тақырып). Енді осы абсолют шамамен алынған n мүшесінің қосындысын табайық ($x \neq 0$):

$$S_n(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1 + x^2 = S(x)$. Сонда

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

Енді абсолют шамамен алынған қатардың қалдық қатарын қарастырайық ($x \neq 0$):

$$\bar{r}_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \dots = \frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Онда тағайындалған кез келген n үшін $\lim_{x \rightarrow 0} \bar{r}(x) = 1$.

Сонымен, абсолют шамамен алынған қатар бірқалыпты жинақты емес.

Әрқайсысы X жиынында анықталған төмендегі функциялық қатар мен тізбекті қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x) = u_1(x) \cdot v_1(x) + \dots + u_n(x) \cdot v_n(x) + \dots \quad (11.28)$$

$$v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots \quad (11.29)$$

Абель белгісі. Егер 1) (11.24) функциялық қатар X жиында бірқалыпты жинақты болса; 2) (11.29) функциялық тізбек X жиында шектелсін, яғни $|v_n(x)| \leq M$, $x \in X$ және ол осы жиынның әрбір x үшін не кемімелі, не өспелі болсын, онда (11.28) функциялық қатар X жиында бірқалыпты жинақты болады.

Дирихле белгісі. Егер 1) (11.29) функциялық тізбек X жиынының әрбір x үшін монотонды және бірқалыпты нөлге ұмтылсын;

2) (11.28) функциялық қатардың $S_n(x)$ дербес қосындыларынан анықталған тізбек X жиында шектелсе, онда (11.28) функциялық қатар осы жиында бірқалыпты жинақты болады.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $x \in [0, +\infty)$ функциялық қатарды зерттейік.

Ол үшін берілген қатарды $\sum_{i=1}^{\infty} \sin x \cdot \sin nx$ қатар мен $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right\}$

тізбектің сәйкес мүшелерінің көбейтіндісі деп қарастырайық.

$\sum_{i=1}^{\infty} \sin x \cdot \sin nx$ функциялық қатарының дербес қосындылары шектелген.

Шынында да:

$$\begin{aligned}
 |S_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n \sin x \cdot \sin kx \right| = \left| \sin x \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \\
 &= \left| \sin x \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| = \\
 &= \left| 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2} \right| = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \cdot \\
 &\quad \left| \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2} \right| \leq 2.
 \end{aligned}$$

Алдымен $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right\}$ функциялық тізбектің монотонды тізбек болатынын дәлелдейік:

$$\begin{aligned}
 v_n(x) - v_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} = \frac{\sqrt{n+1+x} - \sqrt{n+x}}{\sqrt{n+x} \cdot \sqrt{n+1+x}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{n+1+x} - \sqrt{n+x})(\sqrt{n+1+x} + \sqrt{n+x})}{\sqrt{n+x} \cdot \sqrt{n+1+x}(\sqrt{n+1+x} + \sqrt{n+x})} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n+x} \cdot \sqrt{n+1+x}(\sqrt{n+1+x} + \sqrt{n+x})} > 0.
 \end{aligned}$$

Функциялық тізбектің жалпы мүшесіне мына теңсіздік орындалады:

$$v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

мұндағы $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Сондықтан $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right\}$ функциялық тізбек бірқалыпты жинақты. Демек, қарастырып отырған функциялық қатар $x \in [0, +\infty)$ жиында Дирихле белгісінің барлық шарттарын қанағаттандырады, олай болса ол бірқалыпты жинақты барлық $x \in [0, +\infty)$ үшін.

2-мысал. Егер (11.24) функциялық қатар X жиында абсолютті әрі бірқалыпты жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ функциялық қатар осы жиында бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін. Осы тұжырымды дәлелдейік. Ол үшін

$$u_n(x) = (-1)^n \varphi_n(x)$$

болсын, мұндағы $\varphi_n(x)$ теріс емес $\{\varphi_n(x)\}$ функциялық тізбектің мүшелері, ал тізбек x бойынша бірқалыпты жинақты, n бойынша монотонды нөлге жинақты және $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ функциялық қатар жинақты.

Онда Дирихле белгісі бойынша (11.24) қатар, яғни $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x)$ қатары бірқалыпты жинақты және ол абсолютті жинақты, себебі $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ қатары жинақты. Енді $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ қатардың жинақтылығынан $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|$ қатарының бірқалыпты жинақты болуы мүмкін емес.

Осы тұжырымға мысал келтірейік: $\{\varphi_n(x)\} = \{(1-x)x^n\}$, $x \in [0,1]$ болсын. Тізбектің нөлге бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. Тізбектің жалпы мүшесі үшін $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x)x^n = 0$, $x \in [0,1]$ және

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) &= x^n - x^{n+1} - x^{n+1} + x^{n+2} = x^n (x^2 - 2x + \\ &+ 1) = x^n (x-1)^2 > 0, \quad \varphi_n(x) > \varphi_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Демек, $\{\varphi_n(x)\}$ тізбек нөлге бірқалыпты жинақты және монотонды. Онда Дирихле белгісі бойынша $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ функциялық қатар бірқалыпты жинақты $x \in [0,1]$. Осы қатардың абсолют шамасымен алынған дебес қосындысын табайық:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (1-x)x^k = \frac{(1-x)x^n x - 1 + x}{x-1} = 1 - x^{n+1}.$$

Осыдан

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Онда $\sup_{x \in [0,1]} |S_n(x) - S(x)| = 1$, яғни функциялық қатар жинақты, бірақ бірқалыпты жинақты емес.

Сұрақтар.

1. Функциялық тізбек пен қатар үшін Коши критерийі.
2. Функциялық қатар үшін Вейерштрасс белгісі.
3. Функциялық қатар үшін Абель белгісі.
4. Функциялық тізбек үшін Дирихле белгісі.

Тапсырма. Төмендегі тізбектер бірқалыпты жинақты бола ма?

$$\{\varphi_n(x)\} = x^n, x \in [0,1]; \quad \{\varphi_n(x)\} = x^n, b_n.$$

11.9. Функциялық қатар мен тізбекті мүшелеп шекке көшу және шектік функцияның үзіліссіздігі

Біз өткен тақырыптарда жинақты функциялық қатардың мүшелері үзіліссіз болса да, оның қосындысы үзіліссіз немесе үзілісті болатынын көрдік. Енді осы қосындының үзіліссіз болатынын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарын қарастыратын боламыз. Ол үшін сандар осінен кез келген x_0 нүкте алайық және ол X сандар жиынында жатуы да, жатпауы да мүмкін, бірақ осы нүктенің кез келген ε маңайында X жиынның нүктелері жатсын, яғни бұл жағдайда x_0 нүкте X жиынның шектік нүктесі деп аталады.

11.4-теорема (функциялық қатарды мүшелеп шекке көшу).

- 1) (11.24) функциялық қатар X сандар жиынында шекті $S(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса;
- 2) функциялық қатардың әр мүшесінің x_0 нүктеде шектік мәні бар болсын:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Онда x_0 нүктеде $S(x)$ шектік функцияның мәні бар және мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad (11.30)$$

яғни функциялық қатарға бірқалыпты жинақтылық орындалғанда $\lim$ шек пен $\sum$ қосынды таңбаларын орын алмастыруға болады, басқаша айтқанда, функциялық қатардың әр мүшесінен жеке-жеке шекке көшуге болады.

Жоғарыдағы 11.4-теореманы $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек үшін келтірейік.

11.5-теорема (тізбекті мүшелеп шекке көшу). 1) Егер $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек X жиында $f(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты болса;

2) функциялық тізбектің әрбір мүшесінің x_0 нүктеде шектік мәні бар болса, яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

онда x_0 нүктеде $f(x)$ шектік функцияның да шектік мәні бар және мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)).$$

Демек, бұл жағдайда шекке көшкенде $\lim_{x \rightarrow x_0}$ мен $\lim_{n \rightarrow \infty}$ таңбаларының орнын алмастыруға болады.

Ескерту. Егер 11.4-теоремадағы x_0 нүкте X жиынның элементі және функциялық қатардың барлық $u_k(x)$ мүшелері осы нүктеде үзіліссіз болса, онда функциялық қатардың $S(x)$ шектік функциясы да $x = x_0$ нүктеде үзіліссіз болады.

Шынында да, егер $x_0 \in X$ болса, онда $c_k = u_k(x_0)$ және (11.30) теңдіктен

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = S(x_0).$$

Бұл теңдік $S(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктеде үзіліссіз болатын айқындайды.

Сонымен, осы тақырыптағы негізгі теореманы $[a, b]$ сегментте мына түрде тұжырымдауға болады.

11.6-теорема (шектік функцияның үзіліссіздігі). Егер функциялық қатардың (функциялық тізбектің) барлық мүшелері $[a, b]$ сегментте үзіліссіз және осы қатар (тізбек) $[a, b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болса, онда қатардың (тізбектің) шектік функциясы да $[a, b]$ сегментте үзіліссіз болады.

Осы теоремадан соң, функциялық қатарды бірқалыпты жинақтылыққа зерттегенде мына жағдайды еске сақтаған тиімді: егер функциялық қатардың (тізбектің) әрбір мүшесі X жиында үзіліссіз және осы жиында үзілісті функцияға жинақты болса, онда функциялық қатар (тізбек) бірқалыпты жинақты болмайды.

Сұрақтар.

1. Функциялық қатарды мүшелеп шекке көшу.
2. Функциялық тізбекті мүшелеп шекке көшу.
3. Функциялық қатардың шектік функциясының үзіліссіздігі.
4. Функциялық тізбектің шектік функциясының үзіліссіздігі.

Тапсырма. Төмендегі тізбектің шектік функциясы үзіліссіз бола ма?

$$\{f_n(x)\} = x^n, x \in [0,1]; \{f_n(x)\} = x^n, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

11.10. Функциялық қатар мен тізбекті мүшелеп интегралдау және дифференциалдау

11.7-теорема (тізбекті мүшелеп интегралдау). Егер 1) $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[a,b]$ сегментте $f(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты болса; 2) функциялық тізбектің әрбір мүшесі $[a,b]$ сегментте интегралданса, онда функциялық тізбектің $f(x)$ функциясы да осы сегментте интегралданады және функциялық тізбектің әрбір мүшесін немесе мүшелеп осы сегментте интегралдауға болады, яғни мына шек бар:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad n=1,2,\dots$$

11.7-теореманы функциялық қатар үшін орындалатын тұжырымды келтірейік.

11.8-теорема (қатарды мүшелеп интегралдау). Егер 1) (11.24) функциялық қатар $[a,b]$ сегментте өзінің $S(x)$ шектік функциясына бірқалыпты жинақты болса;

2) (11.24) функцияның қатардың барлық $u_k(x)$ мүшелері $[a,b]$ сегментте интегралданса, онда $S(x)$ функцияда $[a,b]$ сегментте интегралданады, яғни

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

қосынды жинақты және ол $\int_a^b S(x) dx$ – ке тең.

11.9-теорема (тізбекті мүшелеп дифференциалдау). Егер

1) $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбектің әрбір мүшесінің $[a, b]$ сегментте $f'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) туындысы бар болса;

2) $\{f'_n(x)\}$ тізбегі $[a, b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болса;

3) $\{f_n(x)\}$ тізбегі $[a, b]$ сегменттің кем дегенде бір $x_0 \in [a, b]$ нүктесінде жинақты болса, онда $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[a, b]$ сегментте $f(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты және оны осы сегментте мүшелеп дифференциалдауға болады, яғни $f(x)$ функцияның $f'(x)$ туындысы $\{f'_n(x)\}$ функциялық тізбектің шектік функциясы болады.

Енді 11.9-теореманың функциялық қатар үшін орындалатын тұжырымын келтірейік.

11.10-теорема (қатарды мүшелеп дифференциалдау). Егер

1) (11.24) функциялық қатардың әрбір $u_k(x)$ мүшесінің $[a, b]$ сегменттегі туындысы бар болса;

2) туынды арқылы анықталған $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ функциялық қатар $[a, b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болса;

3) (11.24) қатар $[a, b]$ сегменттің кем дегенде бір x_0 нүктесінде жинақты болса, онда (11.24) функциялық қатар $[a, b]$ сегментте $S(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты және оны осы сегментте мүшелеп дифференциалдауға болады, яғни функциялық қатардың $[a, b]$ сегменттегі $S(x)$ шектік функциясының туындысы туынды арқылы анықталған $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ функциялық тізбектің шектік функциясы болады.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдауға бола ма?

Шешуі. $u_n(x) = \arctg \frac{x}{n^2}$ ($n=1,2,\dots$) функция барлық $x \in (-\infty; \infty)$ үшін дифференциалданады, үзіліссіз және

$$\arctg \frac{x}{n^2} \sim \frac{x}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Сондықтан, барлық $x \in (-\infty; +\infty)$ кез келген тағайындалған $x \in (-\infty; +\infty)$ үшін $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ қатар берілген қатардың мажорантты қатары болады және $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{n^2} \right|$ қатар жинақты. Олай болса, берілген қатар бірқалыпты жинақты. Енді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

қатарды қарастырайық:

$$\frac{n^2}{n^4 + x^2} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}.$$

Мұндағы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ санды қатар жинақты, олай болса Вейерштрасс белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)'$ қатары бірқалыпты жинақты. Онда 11.10-теорема бойынша, берілген қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^x}$ функциялық қатардың $x \rightarrow +0$ -дағы шегін табайық.

Шешуі. Берілген қатар үшін 11.4-теореманың барлық шарттары орындалатынын дәлелдейік. Алдымен қатардың бірқалыпты жинақты болатынын көрсетейік. Қатардың жалпы мүшесіне кез келген $x \in [0; +\infty)$ үшін мына теңсіздік орындалады: $\frac{1}{2^n n^x} < \frac{1}{2^n}$. Онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ геометриалық прогрессия берілген қатардың мажорантты қатары және Вейерштрасс белгісі бойынша берілген қатар бірқалыпты жинақты. Кез келген $x_0 \in [0; +\infty)$ үшін

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2^n \cdot n^x} = \frac{1}{2^n \cdot n^{x_0}}, \quad \frac{1}{2^n \cdot n^{x_0}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^{x_0}}$ жинақты. Олай болса, 11.4-теорема бойынша берілген қатардан мүшелеп шекке көшуге болады. Енді қатардың шегін табайық:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Сұрақтар.

1. $[a, b]$ сегментте функциялық тізбекті мүшелеп интегралдау.
2. $[a, b]$ сегментте функциялық қатарды мүшелеп интегралдау.
3. Функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау.

11.11. Дәрежелі қатар

Анықтама. Дәрежелі қатар деп мына функциялық қатарды айтамыз:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (11.31)$$

мұндағы a_i – нақты сандар және олар дәрежелі қатардың коэффициенттері деп аталады.

Дәрежелі қатардың жалпы түрі мына түрде беріледі:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Біз дәрежелі қатарды қарастырғанда дәрежелі қатардың (11.31) түрін қарастыратын боламыз, себебі дәрежелі қатардың жалпы мүшесіне $t = x - x_0$ алмастыруын пайдаланып, дәрежелі қатардың жалпы түрін (11.31) түрге келтіруге болады.

Берілген функцияны (11.31) дәрежелі қатар түріне келтіруді **функцияны жіктеу** деп атайды және ол арқылы функцияның интегралдық жуық мәнін есептеу, дифференциал теңдеуді шешу үшін қолданылады. Дәрежелі қатардың жинақты облысын табайық және оның жинақты облысы OX осінің сегменті, жарты сегменті, интервалы болады. Кез келген дәрежелі қатар $x = 0$ нүктеде жинақты.

Егер (11.31) дәрежелі қатардың жинақты облысы $x = 0$ нүкте болса және барлық сандар осі болмаса, онда $(-R, R)$ интервалы табылады. Бұл интервалдың ішкі нүктелерінде дәрежелі қатар

абсолютті жинақты болады, осы интервал дәрежелі қатардың **жинақты облысы**, ал R саны дәрежелі қатардың **жинақты радиусы** деп аталады. Осы интервалдың шеткі $x = \pm R$ нүктелерінде дәрежелі қатар жинақты болуы да, болмауы да мүмкін. Сондықтан интервалдың шеткі нүктелерінде дәрежелі қатардың жинақты, жинақсыздығын зерттеу үшін әрбір мысалды жеке-жеке қарастыру қажет.

Кейбір дәрежелі қатарлар тек $x = 0$ нүктеде ғана жинақты болады, мысалы $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, ал $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ дәрежелі қатар барлық сандар осінде жинақты болады. Енді $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ мысалды қарастырсақ, бұл қатар еселігі x -ке тең геометриялық прогрессия, олай болса, ол $|x| < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін жинақты, ал $|x| \geq 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x үшін жинақсыз. Олай болса, $-1 < x < 1$ интервалы дәрежелі қатардың жинақты облысы болады, мұнда $R = 1$.

Дәрежелі қатардың жинақты облысы $x = 0$ нүкте және барлық сандар осі болмаса, онда оның жинақты облысы мына интервалдың бірі болады $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$, $[-R, R]$. Егер дәрежелі қатар $x = 0$ нүктеде ғана жинақты болса, онда $R = 1$ болады және керісінше. Егер дәрежелі қатар сандар осінің барлық нүктелерінде жинақты болса, онда $R = +\infty$ және керісінше.

11.11-теорема. Егер (11.31) дәрежелі қатар $x = x_0 \neq 0$ нүктеде жинақты болса, онда $|x| < |x_0|$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x үшін дәрежелі қатар абсолютті жинақты болады.

Енді дәрежелі қатардың жинақты радиусын анықтайтын теоремаларды қарастырайық.

11.12-теорема. Егер мына шек бар болса

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \quad 0 \leq \rho < \infty,$$

онда (11.31) дәрежелі қатардың жинақты радиусы $R = \frac{1}{\rho}$ ға тең болады.

Бұл жағдайда, $R = 0$ болады, егер $\rho = \infty$; $R = \infty$, егер $\rho = 0$ болса.

Дәлелдеу. Даламбер белгісін қолданайық:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \rho.$$

Егер $\rho = 0$ болса, онда $|x| \cdot \rho = 0$ болады және барлық x үшін дәрежелі қатар абсолютті жинақты, яғни $R = \infty$. Егер $\rho = \infty$ және $x \neq 0$ болса, онда $|x| \cdot \rho = \infty$ болады және дәрежелі қатар жинақсыз болады.

Сонымен $|x| < \frac{1}{\rho}$ болса, қатар абсолютті жинақты, ал $|x| > \frac{1}{\rho}$ болғанда дәрежелі қатар жинақсыз болады, сондықтан $\frac{1}{\rho} = R$ болады. Дәлелденді.

Осы сияқты Кошидің радикал белгісін қолданып, дәрежелі қатардың жинақты радиусын табу үшін мына теореманы дәлелдеуге болады.

11.13-теорема (Коши-Адамар^{*}). Кез келген дәрежелі қатардың жинақты радиусы **Коши-Адамар формуласы** деп аталатын мына формуладан анықталады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, R = \frac{1}{\rho}.$$

Сонымен, дәрежелі қатар жинақты интервалдардың ішкі нүктелерінде абсолютті жинақты болады, ал енді осы қатардың бірқалыпты жинақтылығын қарастырайық.

11.14-теорема. (11.31) дәрежелі қатар өзінің жинақты интервалына тиісті кез келген сегментте бірқалыпты жинақты болады.

Осы сияқты: егер дәрежелі қатар $X = -R$ немесе $X = R$, $X = -R$ нүктеде жинақты болса, онда дәрежелі қатар $[-R; 0]$ немесе $[-R; R]$ сегменттерде жинақты болады.

11.15-теорема (дәрежелі қатардың үзіліссіздігі). (11.31) дәрежелі қатардың $S(x)$ қосындысы жинақты интервалдың ішкі нүктелерінде үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. Дәрежелі қатар үшін x нүкте $(-R; R)$ жинақты интервалының ішкі нүктесі болсын. Осы нүктені $[\alpha; \beta]$ сегментінің ішкі нүктесі және $[\alpha; \beta] \subset (-R; R)$ енгізуі орындалатындай $[\alpha; \beta]$ сегментті таңдап алуға болады. Онда $[\alpha; \beta]$ сегментте (11.31) дәрежелі қатар бірқалыпты және оның әрбір мүшелері үзіліссіз. Олай болса, қатардың мүшелерінің қосындысында $[\alpha; \beta]$ сегментте үзіліссіз, демек x нүктедеде үзіліссіз. Дәлелденді.

* Жан Адамар (1865-1903) – француз математигі

Осы сияқты егер дәрежелі қатар $x = -R(x = R)$ нүктеде жинақты болса, онда қатардың қосындысы да $x = -R(x = R)$ нүктеде үзіліссіз болады.

11.16-теорема (дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау).
(11.31) дәрежелі қатарды өзінің жинақты интервалының ішкі нүктелері үшін мүшелеп дифференциалдауға болады, яғни

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (11.32)$$

және (11.32) дәрежелі қатардың жинақты интервалы (11.31) дәрежелі қатардың жинақты интервалымен бірдей болады.

11.17-теорема (дәрежелі қатарды мүшелеп интегралдау).
(11.31) дәрежелі қатарды өзінің жинақты интервалында мүшелеп интегралдауға болады, яғни

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (11.33)$$

және (11.33) пен (11.31) дәрежелі қатарлардың жинақты интервалдары бірдей.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$ дәрежелі қатардың жинақты интервалын табайық.

Шешуі. 11.12-теоремадан:

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2 (2n)!}{[2(n+1)]! (n!)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)2(n+1)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Онда $R = \frac{1}{\rho} = 4$. Сондықтан дәрежелі қатар $|x| < 4$ теңсіздігін қанағаттандыратын x үшін жинақты, яғни $-4 < x < 4$. Енді жинақты интервалдың шеткі $x = -4, x = 4$ нүктелерінде қатардың жинақты, жинақсыз болатынын тексерейік:

$$x = 4, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}, a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}, a_{n+1} = \frac{[(n+1)!]^2 4^{n+1}}{[2(n+1)]!},$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \left[1 - \frac{(n+1)^2 4}{2(n+1)(2n+1)} \right] = -\frac{1}{2n+1} < 0, \quad a_n < a_{n+1}.$$

Демек, $x = 4$ болғанда санды тізбек өспелі ($a_n < a_{n+1}$). Олай болса, $n \rightarrow \infty$ -да оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды, яғни санды тізбек жинақсыз. Осы сияқты $x = -4$ нүктеде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ санды тізбек жинақсыз. Сонымен берілген дәрежелі қатардың жинақты интервалы $(-4; 4)$ болады.

2-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{a^{n^2}}$, $a > 1$ дәрежелі қатардың жинақты радиусын табайық.

Шешуі. 11.12-теоремадан:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n^2} (n+1)!}{a^{(n+1)^2} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a^{2n+1}} = 0, \quad (a > 1).$$

Онда $R = \frac{1}{\rho}$, осыдан $R = \infty$. Демек, берілген дәрежелі қатар барлық сандар осінде жинақты болады.

Сұрақтар.

1. Дәрежелі қатардың жинақты радиусы.
2. Дәрежелі қатар абсолютті жинақтылығы туралы теорема.
3. Дәрежелі қатардың жинақты радиусын табу формулалары.
4. Дәрежелі қатардың бірқалыпты жинақтылығы туралы теорема.
5. Дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау және интегралдау.

Тапсырма. Дәрежелі қатарлардың жинақты радиусын есептеңдер:

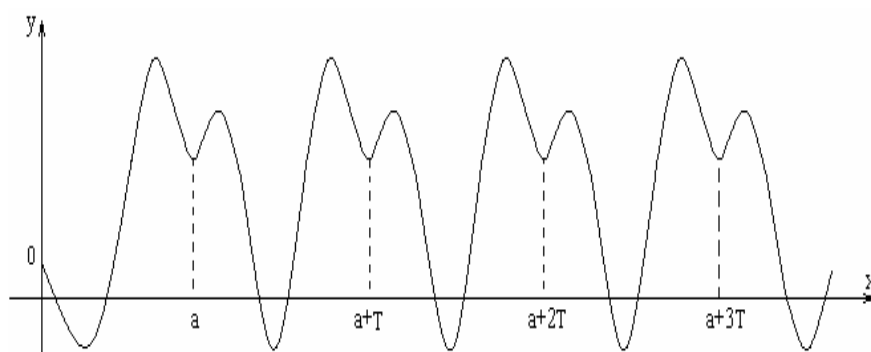
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 4^n}; \quad \sum_{i=n}^{\infty} \frac{6^n (x-3)^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n+1} \right)^n x^n;$$

$$\sum_{i=n}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

11.12. Периодты функциялар

Сандар осінде анықталған $f(x)$ функцияны қарастырайық.

Анықтама: $f(x)$ функциясы **периодты** деп аталады, егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x үшін $T > 0$ саны табылып, $f(x+T) = f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ теңдік орындалса. Бұл жағдайда T саны $f(x)$ **функцияның периоды** деп аталады. Мектеп бағдарламасынан бізге таныс $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ және $\operatorname{ctg} x$ тригонометриялық функциялар периодты функцияларға мысал болады. Егер $+T$ саны функцияның периоды болса, онда $-T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ... сандары да осы функцияның периоды болады (11.4-сурет).



11.4-сурет

Егер T_1 мен T_2 сандары $f(x)$ функциясының периоды болса, онда $T_1 \pm T_2$ сандары да $f(x)$ функцияның периоды болады. Демек, егер функцияның периоды бар болса, онда ол тек біреу ғана емес.

Көп жағдайда функцияның периоды ретінде оның ең кіші периодын қарастырамыз. Жоғарыда айтылғандардан мынадай тұжырымдарды оңай дәлелдеуге болады:

1) периоды T -ға тең функциялардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және бөліндісі де периоды T -ға тең периодты функция болады;

2) егер $f(x)$ функцияның периоды T болса, онда $f(ax)$ функциясының периоды $\frac{T}{a}$ болады. Шынында да,

$$f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f(ax + T) = f(ax).$$

3) егер $f(x)$ функциясы ұзындығы T -ға тең кесіндіде интегралданса, онда ол ұзындығы T -ға тең басқа кесінділерде де интегралданады және ол интегралдар өзара тең, яғни кез келген a мен b ($a \neq b$) нүктелер үшін мына теңдік орындалады:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx. \quad (11.34)$$

Шынында да, (11.34) теңсіздікті дәлелдеу үшін, анықталған интегралдың геометриялық мағынасына сүйеніп оңай дәлелдеуге болады. Онда

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)dx.$$

Енді $\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx$ интегралын өрнектейік, ол үшін $x = t + T$ алмастыруын қолданайық, $dx = dt$, $t = x - T$, $t_{жс} = a$, $t_m = b$:

$$\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx = \int_b^a f(t+T)dt = \int_b^a f(t)dt = \int_b^a f(x)dx.$$

Осыдан дәлелдеу керек (11.34) теңсіздікті аламыз.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_{b+T}^a f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx.$$

Тәжірибеде жиі қолданатын қарапайым периодты функция деп мына функцияны айтамыз

$$y = A \sin(\omega x + \varphi), \quad x \in (-\infty; \infty) \quad (11.35)$$

және ол қарапайым гармоника, қысқаша **гармоникалық функция** деп аталады, мұндағы $|A|$ гармоникалық функцияның **амплитудасы**, ω – **жиілігі**, φ – алғашқы (бастапқы) **фазасы** деп аталады.

Гармоникалық функцияның периоды $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -ға тең:

$$\begin{aligned} y &= A \sin \left[\omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right] = A \sin(\omega x + \varphi + 2\pi) = \\ &= A \sin(\omega x + \varphi). \end{aligned}$$

Тригонометриядағы белгілі формулалардан:

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) = A(\sin \omega x \cdot \cos \varphi + \cos \omega x \cdot \sin \varphi) = \\ = a \cos \omega x + b \sin \omega x,$$

мұндағы $a = A \sin \varphi$, $b = A \cos \varphi$, яғни гармоникалық функцияны мына түрге түрлендіруге болады:

$$y = a \cos \omega x + b \sin \omega x, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad (11.36)$$

мұндағы $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin \varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,
 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$.

Біз төмендегі тақырыптарда гармоникалық функцияның (11.36) түріндегі гармониканы қарастыратын боламыз.

Сұрақтар.

1. Гармоникалық функция.
2. Гармоникалық функцияның амплитудасы, ω – жиілігі, φ – алғашқы (бастапқы) фазасы.
3. Функцияның периоды.

11.13. Тригонометриялық және Фурье қатарлары

Анықтама: Мына қатар

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin x) \quad (11.37)$$

тригонометриялық қатар деп аталады, мұндағы a_0, a_n және b_n тригонометриялық қатардың коэффициенттері ($n = 1, 2, \dots$).

Периоды 2π -ге тең $f(x)$ функцияны (11.37) тригонометриялық қатарға жіктеуге бола ма, анық айтқанда, егер мүмкін болса a_0, a_n және b_n ($n = 1, 2, \dots$) коэффициенттерінің қандай мәндерінде (11.37) тригонометриялық қатар жинақты және ол периоды 2π -ге тең берілген $f(x)$ функцияға тең болады:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \\ + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots?$$

Бұл сұраққа жауап беру үшін, алдымен $[-\pi, \pi]$ сегментте анықталған интегралдарды есептейік, кез келген бүтін $n \neq 0$ үшін:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad (11.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi, \end{aligned} \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx = 0, \quad (11.40) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx = 0. \end{aligned}$$

Анықтама: $[a, b]$ сегментте анықталған $y = \varphi(x)$ пен $y = \psi(x)$ функциялар үшін $\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = 0$ теңдігі орындалса, онда ол функциялар осы сегментте **ортогональ** деп аталады.

Мысалы, $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$, функциялары $[-\pi, \pi]$ сегментте қос-қостан ортогональды функциялар болады және 11.13-тақырыптағы 3-тұжырым бойынша, (11.38)–(11.40) формулалар $[a, a + 2\pi]$ сегментте де орындалады. Демек, ұзындығы 2π -ге тең кез келген сегменттерде $\cos nx, \cos mx, \sin nx, \sin mx, \sin nx, \cos mx$ функциялар да қос-қостан ортогональ болады.

Енді периоды 2π -ге тең $f(x)$ функция тригонометриялық қатарға жіктелсін деп ұйғарайық, яғни

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (11.41)$$

теңдік орындалсын және $[-\pi, \pi]$ сегментте (11.41) тригонометриялық қатарды мүшелеп интегралдауға болатын болсын. Онда (11.41) теңдіктің екі жағын да $[-\pi, \pi]$ сегментте интегралдауға болады:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos kx + b_k \sin kx) dx.$$

Осы теңдікке, 11.8-теореманы және (7.58) формуланы пайдаланып, a_0 – коэффициентті табамыз:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \pi a_0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Енді (11.41) теңдікті $\cos nx$ – ке көбейтіп, $[-\pi, \pi]$ сегментте мүшелеп интегралдайық:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nxdx).$$

Соңғы теңдікке, тригонометриялық функциялардың қос-қостан ортогональ болатынын ескеріп, a_n коэффициентті табамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = a_n \pi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.43)$$

Осы сияқты (11.41) теңдікті $\sin nx$ – ке көбейтіп, $[-\pi, \pi]$ сегментте мүшелеп интегралдап, b_n коэффициентті табамыз:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.44)$$

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментте интегралданса, (11.41) теңдік орындалса, (11.41) қатарды мүшелеп интегралдауға және оны $\cos nx$ пен $\sin nx$ функцияларына көбейткен соң, анықталған қатарларды да $[-\pi, \pi]$ сегментте мүшелеп интегралдауға болатын болса, онда (11.41) тригонометриялық қатардың a_0 , a_n , b_n коэффициенттері (11.42) – (11.44) формулалардан анықталады.

Бізге $[-\pi, \pi]$ сегментте $f(x)$ функциясы берілсін. Осы функция үшін (11.42)–(11.44) формулалардан a_0, a_n, b_n коэффициенттерді тауып, (11.37) тригонометриялық қатарға қояйық. Сонда, осылайша анықталған тригонометриялық қатар $[-\pi, \pi]$ сегментте жинақты бола

ма және ол қатар берілген $f(x)$ функцияға тең бола ма деген сұраққа жауап іздеуге тура келеді. Осы сұрақтарға оң болған жағдайда ғана (11.41) теңдігі орындалады, ал бұл сұрақтарға жауап бермей тұрып $\Leftrightarrow$ белгісінің орнына $\approx$ белгісін қоямыз, яғни

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Анықтама. (11.37) тригонометриялық қатардың коэффициенттері (11.42)–(11.44) формулалардан анықталса, онда a_0, a_n және b_n коэффициенттері **Фурье коэффициенттері** деп аталады.

Егер (11.37) тригонометриялық қатардың коэффициенттері Фурье коэффициенттері болса, онда (11.37) қатар $f(x)$ функцияның **Фурье қатары** деп аталады.

Енді тәжірибеде жиі қолданылатын тұжырымды қарастырайық: периоды 2π -ге тең $f(x)$ функциясына $[-\pi, \pi]$ сегментте (11.41) теңдік орындалсын және ол бірқалыпты жинақты болсын, онда (11.41) формула $[-\pi, \pi]$ сегментте $f(x)$ функцияның Фурье қатары болады.

Шынында да, бірқалыпты жинақты (11.37) тригонометриялық қатарға (11.41) теңдік орындалсын. Онда 11.8-теорема бойынша, $f(x)$ функциясы үзіліссіз және тригонометриялық қатарды мүшелеп интегралдауға болады. Демек, (11.42) теңдік орындалады.

Мына теңдікті қарастырайық:

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \quad (11.45)$$

және $\varepsilon > 0$, $S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ болсын.

Енді (11.45) формуланың оң жағындағы қатардың бірқалыпты жинақты болатынын көрсетейік. (11.37) тригонометриялық қатар бірқалыпты жинақты болғандықтан N нөмір табылып, $k \geq N$ теңсіздігін қанағаттандыратын k үшін

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Осыдан

$$|f(x) \cos mx - S_k(x) \cos mx| = |f(x) - S_k(x)| \cdot |\cos mx| \leq \varepsilon.$$

Соңғы теңсіздік (11.45) қатардың бірқалыпты жинақты болатынын анықтайды. Олай болса, (11.45) қатарды $[-\pi, \pi]$ сегментте мүшелеп интегралдауға болады, яғни бұл жағдайда (11.43) теңдік орындалады. Осылайша, (11.45) теңдікті дәлелдеуге болады. Сонымен, (11.41) қатар $f(x)$ функциясының Фурье қатары болады. Дәлелденді.

Сұрақтар.

1. Тригонометриялық қатар.
2. Ортогональ функциялар.
3. Фурье коэффициенттері.

Тапсырма.

1. $[-\pi, \pi]$ сегментте $f(x) = x$ функцияны Фурье қатарына жікте.
2. $[0, \pi]$ сегментте $f(x) = \pi - 2x$ функцияны синус бойынша Фурье қатарына жікте.
3. $(0, \pi)$ сегментте $f(x) = x$ функцияны косинус бойынша Фурье қатарына жікте.
4. $[-1, 1]$ сегментте периоды $2l = 2$ -ге тең $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жікте:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0). \\ x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

11.14. Периоды 2π -ге тең функцияны Фурье қатарына жіктеу

Анықтама. $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментте **тегіс** деп аталады, егер функцияның осы сегменттегі туындысы үзіліссіз болса.

$y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментте **бөлікті-тегіс** деп аталады, егер функцияның өзі және оның туындысы осы сегментте не үзіліссіз, не санаулы нүктелерде бірінші түрдегі (текті) үзілісті болса.

Дәлелдеусіз Дирихле теоремасын қабылдайық:

Периоды 2π -ге тең бөлікті-тегіс (не үзісізсіз, не үзілісті) $f(x)$ функцияның Фурье қатары барлық x үшін жинақты және оның барлық үзіліссіз нүктелеріндегі қосындысы $f(x)$ -ке тең, ал үзілісті нүктелердегі қосындысы $\frac{f(x_0) + f(x_0 - 0)}{2}$ -ге тең болады.

Енді тақ және жұп функцияларға орындалатын қасиеттерді қарастырайық.

1-қасиет. Егер $f(x)$ функция $[-l, l]$ сегментте интегралданса және ол жұп болса, онда $\int_{-l}^l f(x)dx = 2 \int_0^l f(x)dx$, ал егер ол тақ болса, онда $\int_{-l}^l f(x)dx = 0$ теңдіктері орындалады.

2-қасиет. Екі тақ немесе екі жұп функциялардың көбейтіндісі жұп функция болады.

3-қасиет. Тақ және жұп функциялардың көбейтіндісі тақ функция. Шынында да, $\varphi(x)$ – жұп, ал $\psi(x)$ – тақ болсын, онда

$$F(-x) = -\varphi(x) \cdot \psi(x) = -F(x).$$

Енді $[-\pi, \pi]$ сегментте берілген $f(x)$ жұп функциясын Фурье қатарына жіктейік. Ол үшін жоғарыдағы қасиеттерді ескерсек, яғни $\cos nx$ – жұп функция, ал $f(x) \cdot \cos x$ – жұп функция болады, ал $\sin nx$ – тақ функция, онда (11.42)–(11.44) формулалардан және 1-қасиеттен Фурье қатарының коэффициенттерін жұп $f(x)$ функция үшін анықтаймыз:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad (11.46)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сонымен, $[-\pi, \pi]$ сегменттері жұп $f(x)$ функция үшін Фурье қатары тек косинус арқылы жіктелінеді:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (11.47)$$

мұндағы a_0 мен a_n коэффициенттері (11.46) формуладан анықталады.

Енді $[-\pi, \pi]$ сегментте $f(x)$ функциясы тақ болсын, онда

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx. \quad (11.48)$$

Демек, $f(x)$ функциясы тақ болғанда Фурье қатары тек синус арқылы жіктелінеді:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (11.49)$$

мұндағы b_n коэффициент (11.48) формуладан анықталады.

Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментте бөлікті үзіліссіз болса, онда сегментті саны санаулы $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$ сегменттерге бөлуге болады және $f(x)$ функция $[a_n, a_{n+1}]$ сегменттің барлық ішкі нүктелерінде үзіліссіз әрі мына шектер бар ($a_0 = a, b = a_n$):

$$f(a_k + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x > a_k}} f(x), \quad f(a_k - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x < a_k}} f(x).$$

Сонымен, егер $f(x)$ функцияның периоды ұзындығы осы периодқа тең сегментте бөлікті үзіліссіз болса, онда функция **бөлікті үзіліссіз** деп аталады.

Енді $f_k(x)$ функция ретінде мына функция қарастырайық:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a_k, a_{k+1}), \\ f(a_k + 0), & x = a_k, \\ f(a_k - 0), & x = a_{k+1}. \end{cases}$$

Онда барлық $f_k(x)$ функциялар, сәйкес $[a_k, a_{k+1}]$ сегментте үзіліссіз болады, яғни $[a, b]$ сегментте бөлікті үзіліссіз $f(x)$ функция осы сегментте интегралданады және мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x) dx.$$

Сұрақтар.

1. $[-l, l]$ сегментте интегралданатын тақ, жұп функциялардың интегралдары.
2. Тақ функцияны синус арқылы Фурье қатарына жіктеу формуласы.
3. Жұп функцияны косинус арқылы Фурье қатарына жіктеу формуласы.
4. Бөлікті үзіліссіз функцияның анықтамасы.

Тапсырма.

1. Төмендегі функцияларды $(-\pi, \pi)$ интервалда Фурье қатарына жіктеңдер: $f(x) = -\frac{x}{2}$; $f(x) = \frac{x + \pi}{2}$; $f(x) = x$;
2. Төмендегі функция-

ларды $(0, \pi)$ интервалда Фурье қатарына жіктеңдер: $f(x) = x^2$ синус бойынша; $f(x) = \pi - 2x$ синус бойынша; $f(x) = 2 \cos 2x$ синус бойынша; $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1/2, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$ косинус бойынша.

11.15. Периоды $2l$ -ге тең функцияны Фурье қатарына жіктеу

Енді периоды $2l$ -ге тең $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жіктейік. Ол үшін $x = \frac{lt}{\pi}$ болсын, онда $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ функцияның периоды 2π -ге тең. Бұл жағдайда $\varphi(t)$ функцияның Фурье қатарын (11.42)-(11.44) формулаларды пайдаланып табамыз:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

мұндағы

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ntdt, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin ntdt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Енді t айнымалыдан x айнымалыға көшіп, іздестіріп отырған Фурье қатарын құраймыз, $t = \frac{lx}{\pi}$, $dt = \frac{l}{\pi} dx$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (11.50)$$

мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (11.51)$$

Егер $f(x)$ жұп болса, онда Фурье қатары косинус бойынша жіктелінеді ($b_n = 0$):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

мұндағы

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1,2,\dots, \quad (11.52)$$

ал егер $f(x)$ тақ болса, онда Фурье қатары синус бойынша жіктелінеді ($a_0 = 0; a_n = 0$):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

мұндағы

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1,2,\dots \quad (11.53)$$

1-мысал. $f(x) = x^2$ функцияның $[0, 2\pi]$ сегменттері Фурье қатарының коэффициенттерін есептейік.

Ол үшін (11.42)–(11.44) формулаларын пайдаланайық

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} - \frac{2 \sin nx}{n^3} + \frac{2x \cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2 \cos nx}{n^3} + \frac{2x \sin nx}{n^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}.$$

Онда Фурье қатары мына түрде жазылады:

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right).$$

2-мысал. Периоды 2π -ге тең $f(x) = x^2$ функцияны $[-\pi, \pi]$ интервалда Фурье қатарына жіктейік.

Берілген функция жұп: $(-x^2) = x^2$, ал $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$ теңдігі функцияның периодтылығынан орындалады. Сондықтан, берілген функцияны Фурье қатарына жіктеу үшін (11.52) формулаларды пайдаланамыз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

мұндағы $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$. Сонда

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

3-мысал. Периоды 2π -ге тең $f(x) = x$ функцияны $[-\pi, \pi]$ интервалда Фурье қатарына жіктейік.

Берілген функция тақ: $f(-x) = -x = -f(x)$. Сондықтан берілген функцияға (11.48)–(11.49) формулаларын пайдаланамыз:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n},$$

$$\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n.$$

Сонда

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx. \quad (11.54)$$

Егер (11.54) формуладағы $x = \pi$ болса, онда қосынды нөлге айналады. Ал $f(x)$ функция π нүктеде үзілісті, онда Фурье қатарының қосындысы, Дирихле теоремасы бойынша $\frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2}$ өрнегіне тең, мұндағы

$$f(\pi-0) := \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = \pi, \quad f(\pi+0) = f(-\pi+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x > \pi}} f(x) = -\pi.$$

Онда мына теңдік орындалады:

$$\frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0.$$

4-мысал. Периоды 2π -ге тең $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жіктейік:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x \in (-\pi, 0), \\ \frac{\pi}{4}, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

мұндағы функция $x = n\pi$ нүктелерде нөлге тең (n – бүтін сандар).

Шешуі. Берілген $f(x)$ функция тақ, сондықтан (11.48)-(11.49) формуланы пайдаланамыз. Сонда

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{2n} \Big|_0^{\pi} = \frac{\cos 0 - \cos n\pi}{2n} = \frac{1 - (-1)^n}{2n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n - \text{тақ}, \\ 0, & n - \text{жұп}. \end{cases}$$

Сонымен, осыдан $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = 0, \dots$ Онда берілген функция функциялық қатарға мына түрде жіктелінеді:

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots$$

Осы жіктелінуден, $x = \frac{\pi}{2}$ нүктеде техникада жиі кездесетін мына теңдікті аламыз:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

5-мысал. Периоды 2π -ге тең $f(x) = |x|$ функцияны $[-\pi, \pi]$ сегментте Фурье қатарына жіктейік.

Шешуі. Берілген $f(x) = |x|$ функция жұп. Сондықтан (11.52) формуланы пайдаланайық:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \\ &= \left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\pi - \cos 0}{n^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n - \text{тақ}, \\ 0, & n - \text{жұп}. \end{cases} \end{aligned}$$

Осыдан

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{4}{9\pi}, a_4 = 0, \dots$$

Сонда іздестіріп отырған жіктеліну мына түрде анықталады:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right).$$

Осыдан $x = 0$ нүктеде мына теңдікті аламыз:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right).$$

12. КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯ

12.1. Көп өлшемді евклид кеңістігіндегі негізгі ұғымдар

Біз осы курстың III томында (Математикалық анализ, 1-б) бір айнымалы $y = f(x)$ функцияны қарастырдық, мұндағы x **тәуелсіз айнымалы шама**, ал y **айнымалы шама** x -ке тәуелді, яғни x функцияның **аргументі**, y **функция** деп аталды.

Көп жағдайда функция екі, үш, т.с.с. бірнеше тәуелсіз айнымалы шамаларға тәуелді болады, мысалы, тікбұрышты параллелепипедтің $V = abc$, көлемі оның табанының a мен b ұзындықтары мен c биіктігіне тәуелді, демек, көлем үш a, b, c тәуелсіз айнымалы шамаларға тәуелді болады. Осы сияқты физикалық дененің t уақыттағы құбылысын қарастырғанда, онда ол дененің физикалық сипаттамасын төрт айнымалы шама арқылы анықтауға болады, мұнда x, y, z дененің координат жүйедегі координаты, ал t уақыт. Осы курстың II томында евклид кеңістігі туралы (IV тарау) толық мағлұмат берілген. Сондықтан сызықты евклид кеңістігінің анықтамасына және оның қасиеттеріне элементтеріне орындалатын амалдарға, скаляр көбейтіндіге, нормаға, базиске осы курстың I томында координат жазықтығы және үш өлшемді координат кеңістігі туралы толық айтылған. Ол себепті біз оларға тоқталмаймыз.

Анықтама. m өлшемді координат кеңістігі деп m нақты $x_1, x_2, \dots, x_m$ сандарынан әртүрлі реттілікпен құрылған жиындарды айтамыз және ол R^m немесе R таңбаларымен белгіленеді.

Әртүрлі реттілікпен алынған $x_1, x_2, \dots, x_n$ сандардың жиыны m өлшемді координат кеңістігіндегі A **нүктенің координаты** деп аталады және ол нүкте $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таңбамен белгіленеді.

Анықтамадағы “реттілік” деген ұғымды $x_1, x_2, \dots, x_n$ нақты сандарының қайсысы бірінші, қайсысы екінші, т.с.с. ретпен орналасатынын білдіреді.

Анықтама. m өлшемді R^m координат кеңістігі m өлшемді **евклид кеңістік** деп аталады, егер R^m кеңістігіндегі кез келген екі $A''(x_1'', x_2'', \dots, x_m'')$ пен $A'(x_1', x_2', \dots, x_m')$ нүктелердің арақашықтығы анықталса және ол мына формуламен анықталады:

$$\rho(A'', A') = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + \dots + (x_m' - x_m'')^2}$$

және m өлшемді евклид кеңістік (қысқаша, евклид кеңістік) E^m немесе E таңбамен белгіленеді. E^1 евклид кеңістігі нақты сандар осі болады. Осы сияқты E^2, E^3 евклид кеңістіктері сәйкес евклид жазықтық және үш өлшемді евклид кеңістік болып табылады.

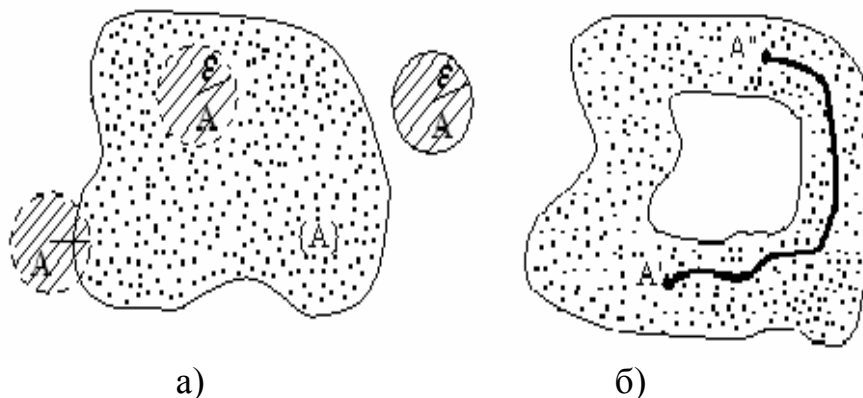
Алдын ала тағайындалған $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеден E кеңістігіндегі кез келген A нүктеге дейінгі арақашықтығы $\rho(A, A_0) < R$ теңсіздігін қанағаттандыра алатын $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктелердің жиынын m өлшемді ашық шар дейміз.

Егер осы анықтамадағы, A нүктелердің жиыны $\rho(A, A_0) \leq R$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда $\{A\}$ жиын m өлшемді тұйық шар деп аталады, яғни $\{A\} = \{A : \rho(A, A_0) \leq R\}$, ал егер $\rho(A, A_0) = R$ теңсіздігін қанағаттандыратын A нүктелердің $\{A\}$ жиыны центрі $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүкте, радиусы R -ге тең **сфера** деп аталады, яғни $\{A\} = \{A : \rho(A, A_0) = R\}$.

Егер $m = 2$ болса (E^2 – евклид жазықтығы), онда жоғарыда қарастырылған $\{A\}$ жиындар, центрі $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүкте, радиусы R -ге тең сәйкес ашық дөңгелек, дөңгелек және шеңбер болады.

Центрі $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүкте, радиусы ε -ге ($\varepsilon > 0$) тең ашық шар $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ **нүктенің ε маңайы** деп аталады және ол $U_\varepsilon(A_0)$ таңбамен белгіленеді, яғни $U_\varepsilon(A_0) = \{A : \rho(A, A_0) < \varepsilon\}$.

E кеңістігінің нүктелерінен анықталған $\{A\}$ жиынындағы A нүкте осы жиынның **ішкі нүктесі** деп аталады, егер A нүктенің кейбір ε маңайы бар болып әрі ол маңайдың барлық нүктелері $\{A\}$ жиынына тиісті болса, яғни $U_\varepsilon(A) \subset \{A\}$ (12.1, а-сурет).



12.1-сурет

Демек, A нүктенің ε маңайының барлық нүктелері $\{A\}$ жиынына тиісті. $\{A\}$ жиын E кеңістігінің нүктелер жиыны болсын.

E кеңістігіндегі A нүкте $\{A\}$ жиынның **сыртқы нүктесі** деп аталады, егер A нүктенің кейбір ε маңайы табылып әрі ол маңайдың барлық нүктелері $\{A\}$ жиынына тиісті болмаса, яғни $U_\varepsilon(A) \cap \{A\} = \emptyset$ (12.1, а-сурет).

E кеңістігіндегі A нүкте $\{A\}$ жиынының **шекаралық (шекара) нүктесі** деп аталады, егер A нүкте $\{A\}$ жиынының не сыртқы, не ішкі нүктесі болмаса (12.1, а-сурет). Демек, A нүктенің кез келген ε маңайында $\{A\}$ жиынға тиісті әрі тиісті емес нүктелер бар және $\{A\}$ жиынының A шекара нүктесі осы жиынның өзіне тиісті болуы да, тиісті болмауы да мүмкін. Олай болса, A нүкте $\{A\}$ жиынының **шекара нүктесі болу үшін A нүктенің кез келген ε маңайында $\{A\}$ жиынға тиісті және де тиісті емес нүктелер бар болуы қажет әрі жеткілікті**. Шынында да, егер A нүктенің ε маңайында $\{A\}$ жиынға тиісті (тиісті емес) нүктелер табылмаса, онда A нүкте $\{A\}$ жиынының сыртқы (ішкі) нүктесі болады және де бұл нүкте осы жиынның шекара нүктесі де бола алмайды.

E кеңістігінің $\{A\}$ жиыны **ашық жиын немесе облыс** деп аталады, егер $\{A\}$ жиынындағы кез келген нүкте, оның ішкі нүктесі болса, яғни жиындағы кез келген A нүктенің ε маңайы осы жиынға тиісті болады.

$\{A\}$ жиынның әрбір шекаралық нүктелері осы жиынның нүктелері болса, онда $\{A\}$ жиын **тұйық** деп аталады. Мысалы, сфера тұйық жиын болады. $\{A\}$ жиынның барлық шекаралық нүктелерінен анықталған жиынды $\{\bar{A}\}$ таңбамен белгілейік. $\{A\}$ мен $\{\bar{A}\}$ жиындарының қосындысы **тұйық облыс** деп аталады.

Егер $\{A\}$ облыстың барлық нүктелері кейбір шардың ішінде жатса, онда **облыс шектелген (шенелген)** деп аталады. **Нүктенің маңайы** деп осы нүкте тиісті кез келген ашық жиынды айтамыз.

E кеңістігіндегі $\{A\}$ жиынның нүктелері **байланысты** деп аталады, егер оның кез келген екі нүктесін үзіліссіз қисық сызықпен қосуға әрі қисық сызықтың барлық нүктелері осы жиынға тиісті болса, қысқаша, $\{A\}$ **жиыны байланысты** деп аталады (12.1 б-сурет).

Осы анықтамадан соң, жоғарыда келтірілген кейбір анықтамаларға эквивалентті анықтамаларды келтірейік.

A нүктенің маңайы деп A нүкте тиісті болатын кез келген ашық байланысты жиынды айтамыз. Ашық байланысты жиын **облыс** деп аталады, ал облыс пен шекаралық нүктелер жиынының қосындысы **тұйық облыс** деп аталады.

E кеңістігіндегі A нүкте $\{A\}$ жиынның шектік нүктесі деп аталады, егер A нүктенің кез келген ε маңайында A нүктеден өзге жиынның кем дегенде бір нүктесі бар болса. Жиынның шектік нүктесін былай түсіндіруге болады: A нүкте $\{A\}$ жиынның шектік нүктесі деп аталады, егер “біз A нүктені баспай, $\{A\}$ жиынның нүктелерін басып, A нүктеге мейлінше өте аз жеткілікті қашықтыққа дейін жақындай алсақ”. Осы анықтамадан соң, тұйық жиын туралы мынадай қорытындыға келеміз: $\{A\}$ жиын тұйық болу үшін оның барлық шектік нүктелері осы жиынға тиісті болуы қажет әрі жеткілікті. Енді тұйық жиынның алғашқыда берілген анықтамасына эквивалентті анықтаманы келтірейік: $\{A\}$ жиын тұйық деп аталады, егер оның барлық шектік нүктелері осы жиынға тиісті болса. Демек, жиынның шектік нүктесі осы жиынның өзіне тиісті болуы да, болмауы да мүмкін.

Сұрақтар.

1. m өлшемді координат кеңістігі.
2. m өлшемді евклид кеңістігі.
3. m өлшемді тұйық шардың анықтамасы.
4. m өлшемді ашық шардың анықтамасы.
5. Жиынның сыртқы, ішкі, шекара нүктелері.
6. Тұйық облыс.
7. Байланысты жиын.

12.2. Көп айнымалы функция

Осы тақырыпта m айнымалы функцияның анықтамасын келтіреміз. $\{A\}$ жиын E евклид кеңістігінің нүктелер жиыны болсын. Алдымен, осы курстың III томында келтірілген бір айнымалы функцияның анықтамасын еске түсірейік.

Анықтама. E евклид түзуінің ($m = 1$) нүктелерінен анықталған $\{A\}$ жиынның әрбір A нүктесіне белгілі бір заңдылық немесе ереже бойынша u саны сәйкес келсе, онда бізге $\{A\}$ жиынында $u = f(A)$ функция берілді дейміз.

Бұл жағдайда, біз бір айнымалы функцияны $y = f(x)$ таңбамен белгіледік. Енді екі айнымалы функцияның анықтамасын берейік.

Анықтама. E евклид жазықтығының $(m = 2)$ нүктелерінен анықталған $\{A\}$ жиынның әрбір A нүктесіне белгілі бір заңдылық немесе ереже бойынша u саны сәйкес келсе, онда бізге $\{A\}$ жиынында $u = f(A)$ функция берілді дейміз.

Екі айнымалы функция $u = f(x, y)$ таңбамен белгіленеді, мұндағы қосарланған (x, y) тәуелсіз айнымалы шамалар евклид жазықтығындағы нүкте, яғни евклид жазықтығындағы A нүктенің координаттары және x пен y **функцияның аргументтері** деп аталады, u тәуелді айнымалы шама немесе **функция** деп аталады.

Осы сияқты, үш айнымалы функцияның анықтамасын келтіруге болады және ол $u = f(x, y, z)$ таңбамен белгіленеді, бұл жағдайда x, y, z тәуелсіз айнымалы шамалар немесе функцияның аргументтері әрі олар евклид кеңістігіндегі A нүктенің координаттары.

Сонымен, егер $u = f(A)$ функция $\{A\}$ жиынында берілсе, онда $\{A\}$ жиыны **функцияның анықталу жиыны**, ал u саны $\{A\}$ жиынындағы A нүктеге сәйкес келетін сан. $\{A\}$ жиынындағы A нүктелерге сәйкес келетін u сандарының жиыны $u = f(A)$ функцияның **қабылдай алатын мәндер жиыны** деп аталады.

Енді m айнымалы функцияның анықтамасына тоқталайық.

Анықтама. m өлшемді E евклид кеңістігінің элементтерінен анықталған $\{A\}$ жиынның әрбір A нүктесіне белгілі бір заңдылық немесе ереже бойынша u саны сәйкес келсе, онда бізге m **айнымалы** $u = f(A)$ **функция берілді** дейміз.

Анықтамадағы $\{A\}$ жиын $u = f(A)$ **функцияның анықталу жиыны**, ал анықталу жиынның әрбір нүктесіне сәйкес келетін u сандар жиыны **функцияның қабылдай алатын мәндер жиыны** деп аталады. A нүктенің координаттары реттелген $x_1, x_2, \dots, x_m$ нақты сандармен анықталғандықтан, m айнымалы функция $u = f(A)$, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ немесе $u = f(x)$ таңбаларының бірімен белгіленеді, мұндағы $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

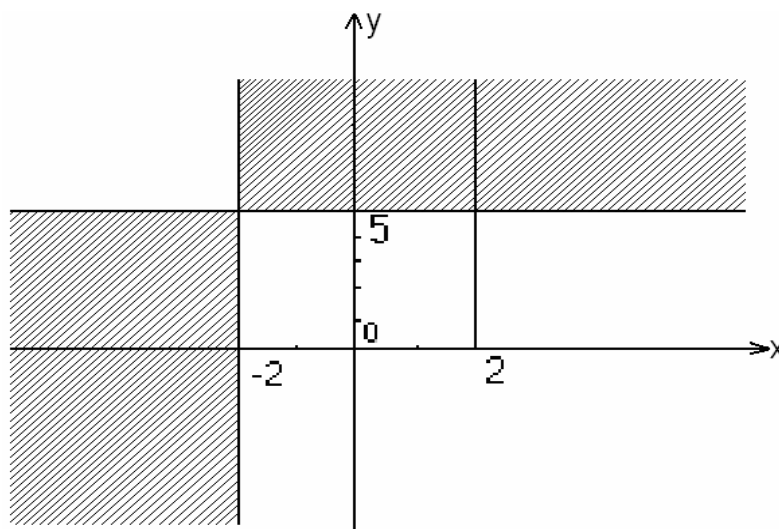
Енді көп айнымалы функцияға мысалдар қарастырайық.

Төмендегі функциялардың анықталу жиындарын анықтаңдар.

1-мысал. $u = \sqrt{(2+x)(y-5)}$ болсын. Функцияның анықталу жиыны XOY жазықтықтағы қосарланған x, y нақты сандарының жиыны болып табылады. Олай болса, u функция анықталу үшін квадрат түбір астындағы өрнек $(2+x)(y-5) \geq 0$ теңсіздікті қанағаттандыруы керек. Осыдан

$$\begin{cases} 2+x \geq 0, \\ y-5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} 2+x \leq 0, \\ y-5 \leq 0 \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесін аламыз. Онда (12.2-сурет).



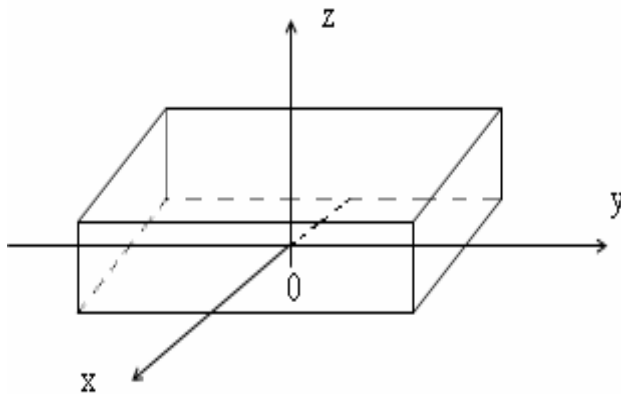
12.2-сурет

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ y \geq 5 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} x \leq -2, \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Сонымен, берілген функцияның x пен y аргументтері не $x > -2$, $y \geq 5$ не $x \leq -2$, $y \leq 5$ теңсіздігін қанағаттандыратын қосарланған $(x; y)$ сандарға (жазықтықтағы нүктелерге) u функцияның мәндері сәйкес келеді. Қосарланған нүктелердің жиыны XOY координат жазықтығында түзулермен белгіленген (штрихталған), ал белгіленбеген нүктелерде функция анықталмаған.

2-мысал. $u(x, y) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{z(1-z)}} - 2 \ln(16-y^2)$ функция үш x, y, z

тәуелсіз



12.3-сурет

айнымалы шамалар арқылы берілген, сондықтан функцияның анықталу жиыны XYZ кеңістігіндегі үштік $(x; y; z)$ сандармен анықталатын нүктелердің жиыны болып табылады. Осы үштік сандар мына теңсіздіктерді қанағаттандыруы керек:

$$9 - x^2 \geq 0, \quad z(1 - z) > 0, \quad 16 - y^2 > 0.$$

Осыдан $-3 \leq x \leq 3$, $0 < z < 1$, $-4 < y < 4$. Сонымен берілген функцияның анықталу жиыны параллелепипед болады, ал осы параллелепипедке тиісті емес нүктелерде функция анықталмаған (12.3-сурет).

Берілген функцияның анықталу жиыны координат жазықтығының барлық нүктелері болады.

Сұрақтар мен тапсырмалар.

1. m айнымалы функцияның анықтамасы.
2. Функцияның жиындағы анықтамасы.
3. Функцияның анықталу жиыны.
4. Функцияның қабылдай алатын мәндер жиыны.
5. Төмендегі функциялардың анықталу облысын табыңдар:

$$u = x + y + z; \quad z = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad z = \frac{1}{3x - y}; \quad z = \frac{1}{x^2 - y^2};$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad z = \ln(25 - x^2 - y^2), \quad u = \begin{cases} 0, & x = 0, y = 0, \\ \frac{x^2 + xy}{2x^2 + y^4}, & x \neq 0, y \neq 0. \end{cases}$$

12.3. Көп айнымалы функцияның шегі

Біз m өлшемді E евклид кеңістігінің $\{A\}$ жиынында анықталған $u = f(A)$ функцияны және A_0 нүктені қарастырайық, мұндағы A_0 нүкте E жиынындағы нүкте әрі A_0 нүкте $\{A\}$ жиынына тиісті, тиісті емес болуы да мүмкін, бірақ та осы нүктенің ε маңайында A_0 нүктеден өзге кем дегенде бір нүкте бар болсын, демек A_0 нүкте $\{A\}$ жиынының шектік нүктесі болады.

Функция шегінің Коши мен Гейне ұсынған анықтамаларын келтірейік.

Анықтама (Коши). b саны $u = f(A)$ функцияның A_0 нүктедегі шегі деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $0 < \rho(A, A_0) < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын функцияның анықталу жиынындағы кез келген A нүкте үшін

$$|f(A) - b| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса.

Анықтама (Гейне). Егер $u = f(A)$ функцияның анықталу $\{A\}$ жиынындағы A_0 -ге тең емес $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі A_0 нүктеге жинақты болса және осы нүктелер тізбегіне сәйкес келетін функция мәндерінің $\{f(A_n)\}$ тізбегі b -ға жинақты болса, онда b саны $u = f(A)$ функцияның A_0 нүктедегі шегі деп аталады. A_0 нүктедегі немесе $A \rightarrow A_0$ болғандағы $u = f(A)$ функцияның шегі

$$\lim_{A \rightarrow A_0} f(A) = b \text{ немесе } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \dots \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

немесе $A \rightarrow A_0, f(x) \rightarrow A$ таңбаларының бірімен белгіленеді, мұндағы $a_1, a_2, \dots, a_m$ сандары A_0 нүктенің координаттары. Анықтамадағы шек m **еселі шек** деп те аталады. Егер $m = 2$ болса, онда ол шек екі еселі шек, ал $m = 3$ болса, онда ол үш еселі шек деп аталады, т.с.с.

Жоғарыдағы Коши мен Гейне анықтамалары эквивалентті анықтамалар. Олардың эквиваленттілігін осы курстың бір айнымалы функцияға дәлелдегендей дәлелдеуге болады ([1], 2.3-тақырып).

Енді $A \rightarrow \infty$ болғандағы $u = f(A)$ функция шегінің анықтамасына тоқталайық. Ол үшін, $u = f(A)$ функциясы $\{A\}$ жиынында

анықталсын және кез келген $\delta > 0$ саны үшін $\{A\}$ жиынының кем дегенде бір A элементі центрі $O(0,0,...,0)$ нүкте, радиусы δ болатын шардың сыртында жатсын.

Анықтама. b саны $A \rightarrow \infty$ болғандағы $u = f(A)$ функцияның шегі деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, функцияның анықталу облысында $\rho(O, A) > \delta$ теңсіздікті қанағаттандырып, барлық нүктелер үшін $|f(A) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса және ол мына таңбамен белгіленеді:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} f(A) = b.$$

Функция шегінің анықтамасындағы $A \rightarrow A_0$ белгіні бір айнымалы функциядағы $A \rightarrow A_0 + 0$, $A \rightarrow A_0 - 0$, $A \rightarrow +\infty$, $A \rightarrow -\infty$ белгілерінің бірі деп қарастыруға болады. Бір айнымалы функцияда орындалатын қасиеттер, яғни арифметикалық амалдар көп айнымалы функция үшін де орындалады.

12.1-теорема. $u = f(A)$ мен $v = \varphi(A)$ функциялары $\{A\}$ жиынында анықталсын және олардың A_0 нүктедегі шектері бар болсын, яғни $\lim_{A \rightarrow A_0} f(A) = b$, $\lim_{A \rightarrow A_0} \varphi(A) = c$, онда $f(A) \pm \varphi(A)$, $f(A) \cdot \varphi(A)$ және $\frac{f(A)}{\varphi(A)}$ функцияларының да A_0 нүктедегі шектері бар және мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{A \rightarrow A_0} (f(A) \pm \varphi(A)) = b \pm c, \quad \lim_{A \rightarrow A_0} (f(A) \cdot \varphi(A)) = b \cdot c,$$

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A)}{\varphi(A)} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0.$$

Бір айнымалы функциядағы шексіз аз функцияға орындалатын тұжырымдар көп айнымалы шексіз аз функцияға орындалады, сондықтан біз оларды дәлелдеусіз қабыл алайық (бұл қасиет $A \rightarrow \infty$ болғанда орындалады).

Анықтама. $u = f(A)$ функция A_0 нүктеде шексіз аз функция деп аталады, егер $\lim_{A \rightarrow A_0} f(A) = 0$ теңдігі орындалса.

Біз осы тақырыпта, функцияның нүктедегі шегі бар болсын деп қабылдадық, ал осы шектің бар болуын қамтамасыз ететін шартты

қарастырғамыз жоқ. Енді осы шектің бар болуын қамтамасыз ететін теореманы қарастырайық.

Анықтама. $u = f(A)$ функция $A = A_0$ нүктеде ($A \rightarrow \infty$ болғанда да) **Коши шартын қанағаттандырады** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $0 < \rho(A', A_0) < \delta$, $0 < \rho(A'', A_0) < \delta$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын функцияның анықталу $\{A\}$ жиындағы барлық A' және A'' нүктелерге $|f(A') - f(A'')| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

12.2-теорема (Коши критерийі). $u = f(A)$ функцияның $A = A_0$ нүктеде шектеулі шегі бар болу үшін функция осы нүктеде Коши шартын қанағаттандыруы қажет әрі жеткілікті.

Теореманың дәлелденуі III томның 1-бөліміндегі 2.3-тақырыптағы Коши критерийін дәлелдеу жолымен бірдей, тек x айнымалыны A нүктеге, a нүктені A_0 нүктеге, ал $|x - a|$ модулін $\rho(A, A_0)$ арақашықтығына алмастырсақ жеткілікті.

Тақырыптың соңында, көп айнымалы функцияның шегін есептеумен шектелейік. Ол үшін $u = f(x, y)$ екі айнымалы функцияны қарастырайық. A_0 нүктенің маңайында $u = f(x, y)$ функциясы берілсін, осы нүктенің өзінде функция анықталмауы да мүмкін. A_0 нүктенің маңайы $|x - x_0| < d_1, |y - y_0| < d_2$ тіктөртбұрыш болсын. Алдын ала тағайындалған y үшін $u = f(x, y)$ функцияның (x -ке тәуелді айнымалы функция) $x = x_0$ нүктедегі шегі бар болсын

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = \text{const}}} f(x, y) = \varphi(y)$ және де $\varphi(y)$ функцияның да $y = y_0$ нүктеде шегі

бар болсын: $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = b_1$. Онда бұл жағдайда $u = f(x, y)$ функцияның A_0 нүктедегі шегі b_1 санына тең дейміз және ол былай белгіленеді:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b_1. \quad (12.1)$$

Осылайша, алдымен x -ті тағайындап, y бойынша шекке көшіп, содан соң x бойынша шекке көшкендегі шектерді былай белгілейміз:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow x_0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = b_2. \quad (12.2)$$

Демек, екі айнымалы функцияның шегі **қайталанған шек** деп аталатын шек арқылы есептелінеді.

Жоғарыдағы (12.1) пен (12.2) қайталанған шектердің теңдігін қамтамасыз ететін жеткілікті белгіге тоқталайық.

12.3-теорема. $u = f(A)$ функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында анықталып, осы нүктедегі шегі b санына тең және A_0 нүктенің маңайы $|x - x_0| < d_1, |y - y_0| < d_2$ тіктөртбұрыш болсын. Егер тағайындалған кез келген $x, 0 < |x - x_0| < d_1$ үшін $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \psi(x)$ шек бар болса және кез келген $y, 0 < |y - y_0| < d_2$ үшін

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$$

шек бар болса, онда (12.1) пен (12.2) қайталанған шектер бар әрі олар b санына тең ($b_1 = b_2 = b$), яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b.$$

1-ескерту. Егер төмендегі қайталанған

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b_1, \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = b_2$$

шектер бар болса, онда жалпы жағдайда $b_1 \neq b_2$ теңсіздігі орындалуы да мүмкін (4-мысал).

2-ескерту. 12.3-теореманың кері теоремасы орындалмайды (4-мысал).

3-ескерту. Қарастырып отырған нүктеде функция шегінің бар болуынан қайталанған шектің осы нүктедегі шегі бар болуы шықпайды және керісінше. Бұл жағдайларды төмендегі мысалдардан көруге болады.

Егер қайталанған шектер бар болып және олар тең болса, онда қарастырып отырған нүктеде функцияның шегі бар деп айтуға болмайды (мысалдарды қара).

1-мысал. $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ функцияның

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$ теңдіктері орындалатынын;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ шек жоқ болатынын дәлелдейік.

Шешуі: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} \right) = +1$. $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{-y}{y} \right) = -1$.

в) алдымен $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатын $\{x_n; y_n\} = \left\{ \frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right\}$ және $\{x'_n; y'_n\} = \left\{ \frac{2}{n}; \frac{1}{n} \right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық. Осы нүктелер тізбегіне сәйкес функция мәндер тізбегінің шектерін есептейік $n \rightarrow \infty$ болғанда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Демек, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ шегі жоқ (егер шек бар болса, онда ол тек біреу ғана).

2-мысал. $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ функция үшін

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ теңдіктері орындалатынын;

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ шегі жоқ болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Алдымен мына шектерді есептейік:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = 0,$$

яғни қайталанған шектердің теңдігі орындалады.

б) Мына нүктелер тізбегін қарастырайық:

$$\{x_n, y_n\} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\}, \quad \{x'_n, y'_n\} = \left\{ \frac{1}{n}; -\frac{1}{n} \right\}.$$

Егер $n \rightarrow \infty$ болғанда, олар $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатынын оңай көз жеткізуге болады, ал осы нүктелердегі функция мәндерінің шегі әртүрлі шекке ұмтылады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = 0.$$

Демек, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ шек жоқ.

3-мысал. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ функцияның

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ және $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ шектері жоқ;

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ шегі бар болатынын көрсетейік.

Шешуі. а) Егер $y \neq \frac{1}{n\pi}$ болса, онда $y \sin \frac{1}{y} \neq 0$, мұндағы $n = 1, 2, \dots$

Демек, $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$ және $\{x'_n\} = \left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$ тізбектері $n \rightarrow \infty$

болғанда 0-ге ұмтылады, ал олардың сәйкес функция мәндерінің $\{f(x_n, y)\} = \{0\}$, $\{f'(x_n, y)\} = \left\{y \sin \frac{1}{y}\right\}$ тізбектері әртүрлі шектерге ұмтылады. Сондықтан $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ шек жоқ. Олай болса, қайталанған

екі шекте жоқ.

б) Кез келген $x \neq 0$, $y \neq 0$ үшін мына теңсіздіктер орындалады:

$$0 \leq \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Онда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0.$$

4- мысал. Мына шек бар ма? $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

Шешуі. Алдымен төмендегі нүктелер тізбектерін қарастырайық:
 $\{x_n; y_n\} = \left\{\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right\}, \quad \{x'_n; y'_n\} = \left\{\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}\right\}$. Олар $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге жинақталады және оларға сәйкес функция мәндерінің тізбектері әртүрлі шекке ұмтылады, $n \rightarrow \infty$ болғанда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 0.$$

Сонымен, берілген функцияның $O(0,0)$ нүктедегі шегі жоқ.

5-мысал. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$ шекті есептейік.

Шешуі. Кез келген $x \neq 0, y \neq 0$ үшін мына теңсіздіктер орындалады:

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \left| \frac{x+y}{xy} \right| < \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}.$$

Осыдан

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) = 0.$$

6-мысал. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$ шегін есептейік.

Шешуі. $x^2 + y^2 \geq 2xy$ теңсіздігінен $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$. Онда

$$0 < \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} < \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}. \text{ Осыдан } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0. \text{ Демек } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

7-мысал. $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$ және $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$ шектерді есептейік, мұндағы

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, \quad a = +\infty, b = +0;$$

$$б) f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}, \quad a=0, b=+\infty.$$

Шешуі. а) Егер $x = \text{const}$, онда барлық $y > 0$ үшін x^y функциясы үзіліссіз, сондықтан: $\lim_{y \rightarrow +0} x^y = 1$; ал егер $y > 0$ тұрақты болса, онда барлық $x > 0$ үшін x^y функциясы үзіліссіз, сондықтан: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^y = +\infty$. Осы шектерді пайдаланып, іздестіріп отырған шектерді есептейік:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{y \rightarrow +0} \frac{x^y}{1+x^y} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \\ \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) &= \lim_{y \rightarrow +0} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{1+x^y} \right) = \lim_{y \rightarrow +0} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{x^y \left(\frac{1}{x^y} + 1 \right)} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^y} + 1} \right) = \lim_{y \rightarrow +0} (1) = 1. \end{aligned}$$

Егер $x \neq 0$ болса, онда

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{xy}{1+xy} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{xy}{xy \left(\frac{1}{yx} + 1 \right)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{yx} + 1} = 1.$$

Осыдан және тангенс функцияның үзіліссіздігінен

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} = 0$$

теңдігі орындалады. Енді $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{1}{\cos \alpha} = 1$ теңдігін пайдаланып, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ шекті есептейік:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}} = 1.$$

Жоғарыдағы теңдіктерді пайдаланып, іздестіріп отырған шектерді табайық.

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} (1) = 1.$$

8-мысал. Егер $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ болғанда мына шек

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}}$$

φ -дің қандай мәндерінде бар болады?

Шешуі. Алдымен тікелей есептеуге көшейік:

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}} =: \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{\cos \varphi}{\rho}} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \rho > 0}} e^{\frac{\cos \varphi}{\rho}}.$$

Соңғы шек бар болады, егер $\cos \varphi \leq 0$, яғни $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$.

Сұрақтар.

1. Функцияның нүктедегі шегі (Коши анықтамасы).
2. Функцияның нүктедегі шегі (Гейне анықтамасы).
3. Коши шарты.
4. Шексіз аз функцияның анықтамасы.
5. Функцияның қайталанған шегі.
6. 12.3-теореманың кері теоремасы орындала ма?

Тапсырмалар.

1. Мына шектерді табыңдар:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\operatorname{tg} xy}{x}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{\sin xy}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

2. Функцияның үзілісті нүктелерін табыңдар:

$$z = \frac{x^2 + 5y}{y^2 - x^2}; \quad z = \frac{4x - y}{x + y^2}; \quad z = \frac{1}{4 - x^2 - y^2}; \quad z = \ln(x^2 + y^2); \quad z = \frac{x + 3y}{2y - x};$$

$$z = \frac{5x + 2y^2}{\sqrt{xy}}.$$

12.4. Көп айнымалы функцияның үзіліссіздігі

Евклид E кеңістіктегі $\{A\}$ жиынында анықталған m айнымалы $u = f(A)$ функцияны қарастырайық. A_0 нүкте E кеңістігіндегі $\{A\}$ жиынның нүктесі және оның ε маңайында A_0 нүктеден өзге $\{A\}$ жиынның нүктелері ғана тиісті болсын, яғни A_0 нүкте $\{A\}$ жиынның шектік нүктесі болады.

Анықтама. m айнымалы $u = f(A)$ функция A_0 нүктеде **үзіліссіз** деп аталады, егер функцияның A_0 нүктедегі шегі бар болса әрі ол функцияның $f(A_0)$ сандық мәніне тең болса.

A_0 нүкте $\{A\}$ жиынның шектік нүктесі болғандықтан, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0$ теңдік орындалатындықтан, функцияның A_0 нүктедегі үзіліссіздігін мына түрде белгілеуге болады:

$$\lim_{A \rightarrow A_0} f(A) = f(\lim_{A \rightarrow A_0} A) = f(A_0), \quad (12.3)$$

мұндағы A нүкте $\{A\}$ жиынның кез келген нүктесі. (12.3) теңдік орындалмайтын E кеңістігінің нүктелері **функцияның үзілісті нүктелері** деп аталады.

Анықтама (Коши). $u = f(A)$ функция A_0 нүктеде **үзіліссіз** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $\rho(A, A_0) < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын функцияның анықталу $\{A\}$ жиынындағы барлық A нүктелер үшін $|f(A) - f(A_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Анықтама (Гейне). $u = f(A)$ функция A_0 нүктеде **үзіліссіз** деп аталады, егер функцияның анықталу $\{A\}$ жиынындағы A_0 нүктеге жинақты $\{A_n\}$ нүктелер тізбегіне сәйкес функция мәндерінің $\{f(A_n)\}$ тізбегі $f(A)$ мәніне жинақты болса.

Функция шегінің Коши анықтамасы функция үзіліссіздігінің Коши анықтамасынан айырмашылығы, соңғы анықтамада $\rho(A, A_0) > 0$ шарт қойылмаған, яғни $A \neq A_0$. $u = f(A)$ функция A нүктеде анықталған және $A = A_0$ болса, онда $|f(A) - f(A_0)| \leq \varepsilon$ теңсіздігі кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін орындалады.

Осы сияқты функция шегінің Гейне анықтамасы функция үзіліссіздігінің Гейне анықтамасынан айырмашылығы, соңғы анықтама-

дағы $A \neq A_0$ шарт қойылмаған. Бұл шартқа жетуге болады, себебі, функция A_0 нүктеде анықталған және де $f(A)$ мәнге жинақты $\{f(A)\}$ тізбекке кез келген мөлшерде жаңа $f(A)$ мәнді қосқаннан пайда болған тізбектің $f(A)$ -ға жинақтылығы өзгермейді.

Егер $f(A)$ функциясы $\{A\}$ жиынының барлық нүктелерінде үзіліссіз болса, онда функция $\{A\}$ жиынында үзіліссіз болады.

$u = f(A)$ функция $\{A\}$ жиынында шектелген (шенелген) деп аталады, егер C_1 мен C_2 сандары табылып, барлық $A \in \{A\}$ үшін $C_1 \leq f(A) \leq C_2$ теңсіздік орындалса.

Анықтама. A_0 нүктедегі $u = f(A)$ функцияның толық өсімшесі деп $f(A) - f(A_0)$ айырымын айтамыз және ол

$$\Delta u = f(A) - f(A_0) \quad (12.4)$$

таңбамен белгіленеді.

$a_1, a_2, \dots, a_m$ және $x_1, x_2, \dots, x_m$ сандары сәйкес A_0 мен A нүктелердің координаттары, ал

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1, \Delta x_2 = x_2 - a_2, \dots, \Delta x_m = x_m - a_m$$

болсын. Онда $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері сәйкес $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ өсімше алғанда (12.4) функцияның толық өсімшесін мына түрде жазуға болады

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (12.5)$$

Мына тұжырымға оңай көз жеткізуге болады: $u = f(A)$ функция A_0 нүктеде үзіліссіз болу үшін функцияның Δu өсімшесі осы нүктеде шексіз аз шама болуы қажет әрі жеткілікті, яғни функция аргументінің шексіз аз өсімшесіне функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе:

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \Delta u = \lim_{A \rightarrow A_0} (f(A) - f(A_0)) = 0 \text{ немесе } \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \dots \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta u = 0. \quad (12.6)$$

Сонымен, функцияның A_0 нүктедегі үзіліссіздігінің

$$\lim_{A \rightarrow A_0} f(A) = f(A_0)$$

шарты (12.6) шартпен эквивалентті.

Көп айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның аргументтерінің бірін айнымалы деп қабылдап, ал қалған айнымаларды тағайындап, осы функцияның нүктедегі үзіліссіздігі туралы түсінік берейік. Ол үшін $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі **дербес өсімшесі** деп аталатын өсімшені қарастырайық, мұндағы A нүкте функцияның анықталу жиынындағы нүкте болсын. Алдымен, функцияның x_1 аргументі Δx_1 өсімше алсын, ал қалған аргументтерін тағайындайық, бірақ координаттары $x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_m$ болатын нүкте функцияның анықталу жиынына тиісті болатындай Δx_1 өсімшені аламыз. Осылайша анықталған өсімше **функцияның x_1 аргументі бойынша алынған дербес өсімше** деп аталады және ол $\Delta_{x_1} u$ таңбамен белгіленеді:

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (12.7)$$

Бұл жағдайда $\Delta_{x_1} u$ өсімше x_1 -ге тәуелді бір айнымалы функция. Енді x_2 аргумент бойынша алынған дербес өсімшені анықтайық (x_2 – айнымалы, ал қалған аргументтерді тағайындаймыз):

$$\Delta_{x_2} u = f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Осылайша, қалған аргументтер бойынша дербес өсімшелерді анықтаймыз:

$$\begin{cases} \Delta_{x_2} u = f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{x_m} u = f(x_1, x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{cases} \quad (12.8)$$

Енді көп айнымалы функцияның әрбір аргументі бойынша функция үзіліссіздігінің анықтамасынан берейік.

Анықтама. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциясы $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде x_k **айнымалы бойынша үзіліссіз** деп аталады, егер функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі $\Delta_{x_k} u$ дербес өсімшесі Δx_k өсімшеге тәуелді шексіз аз функция болса, яғни

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_{x_k} u = 0. \quad (12.9)$$

Анықтамадағы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция x_k айнымалыға ғана тәуелді, ал қалған айнымалар тағайындалған сан болса, онда бұл функцияның x_k айнымалы бойынша үзіліссіздігі туралы ұғым бір айнымалы функцияның үзіліссіздігі туралы ұғыммен бірдей. Сондықтан соңғы анықтамаға эквивалентті мына анықтаманы келтірейік: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияны $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде x_k **айныма бойынша үзіліссіз** деп аталады, егер бір айнымалы $f(a_1, a_2, \dots, x_k, \dots, a_m)$ функция $x_k = a_k$ нүктеде үзіліссіз болса, мұндағы $f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m)$ функция x_k аргументке ғана тәуелді бір айнымалы функция.

Ескерту. Көп айнымалы функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамаларынан мынадай тұжырымға келеміз: **егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде үзіліссіз болса, онда функция осы нүктеде $x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымаларының әрқайсысы бойынша үзіліссіз болады;** ал егер функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде $x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымаларының әрқайсысы бойынша үзіліссіз болса, онда функция осы нүктеде үзіліссіз болады деп тұжырымдауға болмайды (2-мысал).

Екі айнымалы функцияны үзіліссіздікке зерттегенде тәжірибеде жиі қолданылатын түзу бойындағы нүктедегі функция үзіліссіздігінің анықтамасын келтірейік.

Анықтама. Түзу бойында жатқан A нүктеден өтетін $u = f(x, y) = f(A)$ **функция үзіліссіз** деп аталады, егер A нүктеге ұмтылатын осы түзудің бойында жатқан $\{A_n\}$ нүктелер тізбегіне сәйкес функция мәндер $\{f(A_n)\}$ тізбегінің шегі бар болып, ол шек A нүктедегі функцияның $f(A)$ мәніне тең болса.

$u = f(x, y)$ функция түзудің бойында бір айнымалы функция болады, демек, түзу бойындағы функцияның үзіліссіздігі туралы ұғым, жоғарыда айтылған бір айнымалы функцияның үзіліссіздігі туралы ұғыммен бірдей. Онда A нүктедегі функцияның x және y айнымаларының әрқайсысы бойынша үзіліссіздігі, A нүкте арқылы өтетін және координат осьтеріне параллель болатын түзулердің бойындағы функция үзіліссіздігі болып табылады (1-мысал).

$$\mathbf{1\text{-мысал.}} \ u = \begin{cases} \frac{x^3 y}{2x^4 + y^4}, & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0. \end{cases} \text{ функция үзіліссіз бола ма?}$$

Шешуі. Функцияның анықталу жиыны бүкіл жазықтық. Берілген функция жазықтықтың $O(0,0)$ нүктесінен өзге нүктелерде үзіліссіз болатынын дәлелдейік. Ол үшін $O(0,0)$ нүктеден өзге жазықтықтың кез келген $A_0(x_0, y_0)$ нүктесін алайық және жазықтықтағы $A(x, y)$ нүкте $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге ұмтылсын, онда

$$\lim_{A \rightarrow A_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^3 y}{2x^4 + y^4} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)^3 \lim_{y \rightarrow y_0} y}{2\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)^4 + \left(\lim_{y \rightarrow y_0} y\right)^4} = \frac{x_0^3 y_0}{2x_0^4 + y_0^4} = f(x_0, y_0) = f(A_0).$$

Демек, $u = f(x, y)$ функция жазықтықтың $O(0,0)$ нүктеден өзге барлық нүктелерінде үзіліссіз. Енді функцияның $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік. Ол үшін $A(x, y)$ нүктенің $O(0,0)$ нүктеге ұмтылғандағы функцияның шегін есептейік, яғни $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ болғандағы функцияның шегінен $\frac{0}{0}$ анықталмағандығы шығады. Сондықтан, функция шегінің тізбек тіліндегі Гейне анықтамасын пайдаланған тиімді. Ол үшін $\left\{A_n\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық және тізбек $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады. Қарастырып отырған нүктелер тізбегіне сәйкес келетін $f(x, y)$ функция мәндерінің тізбегін қарастырайық:

$$\{f(A_n)\} = \left\{f\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{n^2} \cdot 0}{\frac{2}{n^4} + 0}\right\} = \{0\},$$

яғни $\{f(A)\}$ тізбегінің барлық элементтері нөлге тең, олай болса оның шегі де нөлге тең.

Енді $O(0,0)$ нүктеге жинақты болатын $\left\{A_n\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$ тізбектен өзге

$\left\{A'_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық, онда

$$\{f(A'_n)\} = \left\{f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^4}}\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{3}{n^4}}\right\} = \left\{\frac{1}{3}\right\},$$

$\{f(A'_n)\}$ тізбегінің барлық элементтері $\frac{1}{3}$ -ке тең, олай болса, $\{f(A'_n)\}$ тізбектің де шегі $\frac{1}{3}$ -ке тең. Сонымен, $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатын әртүрлі $\left\{A_n\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$ мен $\left\{A'_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбектеріне сәйкес келетін $\{f(A)\}$ мен $\{f(A'_n)\}$ функция мәндер тізбектерінің шектері бар әрі олар әртүрлі (тең емес). Бірінші тізбек үшін Ox осі бойымен, ал екінші тізбек үшін бірінші шектегі биссектриса ($y = x, x > 0$) бойымен $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады. Сондықтан $\lim_{A \rightarrow A_0} f(A) = f(A_0)$ теңдігі орындалмайды, себебі теңдіктің сол жағындағы шек жоқ. Демек, қарастырып отырған функция $O(0,0)$ нүктеден өзге жазықтықтың барлық нүктелерінде үзіліссіз, ал $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болады.

2-мысал. $u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$ функциясы $O(0,0)$ нүктеде x

және y айнымаларының әрқайсысы бойынша үзіліссіз, ал осы нүктеде функция үзілісті болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі x аргументі бойынша алынған дербес өсімшесін қарастырайық, яғни x аргумент Δx өсімше қабылдасын:

$$\Delta_x u = f(\Delta x, 0) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0. \text{ Олай болса, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x u = 0, \text{ яғни}$$

$f(x, y)$ функция x аргументі бойынша $O(0,0)$ нүктеде үзіліссіз. Осы сияқты $\Delta_y u = f(0, \Delta y) - f(0, 0) = 0$. Сонымен, функция $O(0,0)$ нүктеде x және y аргументтерінің әрқайсысы бойынша үзіліссіз болады.

Енді функцияның $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік. Ол үшін 12.3-тақырыптағы 4-мысалды ескерсек, функцияның $O(0,0)$

нүктедегі $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ шегі жоқ. Олай болса, функция $O(0,0)$ нүктеде үзілісті.

3-мысал. $u = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0 \end{cases}$ функция $O(0,0)$ нүктеде

өтетін $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, $t \in [0, +\infty)$ сәуленің әрқайсысының бойында үзіліссіз, яғни $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0,0)$, бірақ $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік.

Шешуі. $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ мәндерінде $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) \equiv 0$ болады, сондықтан α -ның осы мәндерінде ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos^2 \alpha \cdot t \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = 0 = f(0,0). \end{aligned}$$

Егер $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, онда $t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha > 0$ және $\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha > 0$.

Олай болса,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = 0 = f(0,0).$$

Сонымен, $u = f(x, y)$ функциясы $O(0,0)$ нүктеден өтетін сәуленің әрқайсысының бойында үзіліссіз болады.

Енді функцияның $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік, ол үшін $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге жинақталатын $\{A_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right\}$ тізбекті қарастырайық. Сонда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Олай болса, функция $O(0,0)$ нүктеде үзілісті.

Сұрақтар.

1. Функция нүктедегі үзіліссіздігі.
2. Функцияның үзілісті нүктелері.

3. Функцияның толық өсімшесі.
4. Функцияның x_k аргументі бойынша алынған дербес өсімшесі.
5. Функция айнымалыларының әрқайсысы бойынша үзіліссіздігі.

Тапсырма. Функцияларды үзіліссіздікке зертте:

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad z = \frac{x+1}{x^2 + y^2}; \quad z = \frac{y+1}{x^2 + y^2}; \quad z = \frac{x+1}{x^2 + y^2}; \quad z = \frac{y+x+1}{x^2 + y^2};$$

$$z = \frac{x^2 + 2y + 1}{y^2 - 2x}; \quad z = \frac{1}{(x-y)^2}.$$

12.5. Көп айнымалы функция үзіліссіздігінің қасиеттері.

Бірқалыпты үзіліссіздік

Біз бұл тақырыпта, осы оқулықтың III томының 1-бөлімінде ([1]) қарастырылған бір айнымалы функцияның үзіліссіздігінің қасиеттерін көп айнымалы функция үшін қарастырамыз. Ол қасиеттер көп айнымалы функцияға да орындалады. $\{A\}$ жиынында анықталған үзіліссіз функцияларға орындалатын арифметикалық амалдарды қарастырайық.

12.4-теорема. Егер $f(A)$ мен $\varphi(A)$ функциялары $A_0(a_1, a_2, \dots, a)$ нүктеде үзіліссіз болса, онда

$$f(A) \pm \varphi(A), \quad f(A) \cdot \varphi(A), \quad \frac{f(A)}{\varphi(A)} \quad (\varphi(A) \neq 0)$$

функциялары да осы нүктеде үзіліссіз болады.

Күрделі функция үзіліссіздігінің теоремасын келтірейік. Алдымен көп айнымалы күрделі функцияның ұғымын келтірейік. Бізге

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{cases} \quad (12.10)$$

функциялары евклид E^k кеңістігінің $\{N\}$ жиынында берілсін, мұндағы $t_1, t_2, \dots, t_k$ кеңістіктегі нүктенің координаттары. Онда $\{N\}$ жиынындағы әрбір $N(t_1, t_2, \dots, t_k)$ нүктеге (12.10) формула арқылы евклид E кеңістігінен $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүкте сәйкес қойылады, осындай

нүктелердің жиынын $\{A\}$ деп белгілейік. Бұл жағдайда, E^k евклид кеңістігінің $\{N\}$ жиынында анықталған

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, t_2, \dots, t_k))$$

күрделі функция берілді дейміз, мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымалары $t_1, t_2, \dots, t_k$ айнымаларына тәуелді функция және де олар (12.10) формула арқылы анықталады.

12.5-теорема. Егер (12.12) функциялары $A_0(a_1, a_2, \dots, a_k)$ нүктеде үзіліссіз, ал $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $B(b_1, b_2, \dots, b_m)$ нүктеде үзіліссіз болса, мұндағы $b_i = \varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_k)$ $i = \overline{1, m}$, онда күрделі $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция да $A_0(a_1, a_2, \dots, a_k)$ нүктеде үзіліссіз болады, мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_m$ (12.10) формуладан анықталған $t_1, t_2, \dots, t_k$ айнымаларға тәуелді функция.

12.6-теорема (үзіліссіз функция таңбасының тұрақтылығы туралы). Егер евклид E кеңістігінің A_0 нүктесінде $u = f(A)$ функция үзіліссіз және $f(A_0) \neq 0$ болса, онда A_0 нүктесінің δ аймағы табылып, осы аймақта $f(A)$ нөлге тең емес әрі оның таңбасы $f(A)$ -ның таңбасымен бірдей болады.

12.7-теорема (үзіліссіз функцияның аралық мәндері туралы). Евклид E кеңістігіндегі байланысты $\{A\}$ жиынының барлық нүктелерінде $u = f(A)$ функция үзіліссіз және $\{A\}$ жиынындағы A_0 -мен B_0 нүктелеріндегі мәні $f(A_0)$, $f(B_0)$ болсын. Егер C саны $f(A_0)$ мен $f(B_0)$ сандарының арасындағы кез келген сан болса, онда A_0 мен B_0 нүктелерді қосатын әрі $\{A\}$ жиынында толық жататын үзіліссіз L қисық сызығының бойынан N нүкте табылып, $f(N) = C$ теңдігі орындалады.

12.8-теорема (Вейерштрастың бірінші теоремасы). Егер шектелген (шенелген) және тұйық $\{A\}$ жиынында $u = f(A)$ функциясы үзіліссіз болса, онда функция осы жиында шектелген (шенелген).

Анықтама. $\{A\}$ жиынындағы $u = f(A)$ функцияның **ең жоғарғы (ең төменгі) шекарасы** деп мына шарттарды қанағаттандыратын $\bar{u}$ ($\underline{u}$) санын айтамыз:

1) $\{A\}$ жиынының кез келген A нүктесі үшін $f(A) \leq \bar{u}$ ($f(A) \geq \underline{u}$) теңсіздігі орындалса;

2) Кез келген ε саны үшін $\{A\}$ жиынынан кем дегенде бір A нүкте табылып,

$$f(A) > \bar{u} - \varepsilon \quad (f(A) < \underline{u} + \varepsilon)$$

теңсіздігі орындалса және ол

$$\bar{u} = \sup_{\{A\}} f(A) \quad (\underline{u} = \inf_{\{A\}} f(A))$$

таңбамен белгіленеді.

12.9-теорема (Вейерштрастың екінші теоремасы). Егер шектелген тұйық $\{A\}$ жиынында $u = f(A)$ функциясы үзіліссіз болса, онда функция осы жиында өзінің ең жоғарғы және ең төменгі шекара мәндерін қабылдайды.

Енді көп айнымалы функцияның бірқалыпты үзіліссіздігін қарастырайық. $u = f(A)$ функциясы $\{A\}$ жиынында анықталсын және $\{A\}$ жиынының кез келген нүктесі оның шектік нүктесі болсын.

Анықтама. Евклид E кеңістігінің $\{A\}$ жиынындағы $u = f(A)$ функция **бірқалыпты үзіліссіз** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta(\varepsilon)$ саны табылып, $\rho(A', A'') < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\{A\}$ жиынындағы кез келген A' пен A'' нүктелер үшін $|f(A'') - f(A')| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

12.10-теорема (Кантор). Егер $u = f(A)$ функциясы тұйық және шектелген $\{A\}$ жиынында үзіліссіз болса, онда ол осы жиында бірқалыпты үзіліссіз болады.

1-ескерту. Бірқалыпты үзіліссіз функция үзіліссіз болады, ал үзіліссіз функция бірқалыпты үзіліссіз болмауы мүмкін. Демек, егер функция бірқалыпты үзіліссіз болса, онда функция аргументінің аз өсімшесіне сәйкес функцияның аз өсімшесі сәйкес келеді, ал егер функция үзіліссіз болса, онда жиындағы нүктеден нүктеге (осы жиындағы) көшкенде функция аз өсімше қабылдамауы мүмкін.

2-ескерту. Вейерштрастың екі және Кантор теоремалары тұйық және шектелген жиындардағы функция үшін орындалады. Демек, көп өлшемді жағдайда сегмент тұйық әрі шектелген жиын болады.

3-ескерту. $u = f(A)$ функциясының жазықтықтың барлық нүктелерінде бірқалыпты үзіліссіз болатынын Кантор теоремасын пайдаланып дәлелдеуге болмайды. Себебі, жазықтық шектелмеген жиын, олай болса, шектелмеген жиынға Кантор теоремасын қолдануға болмайды.

Анықтама. Шектелген $\{A\}$ жиынның **диаметрі** деп $\rho(A', A'')$ сандарының ең жоғарғы шекарасын айтамыз, мұндағы A' пен A'' нүктелер $\{A\}$ жиынындағы мүмкін болатын барлық нүктелер.

1-мысал. $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ функциясы $\{A\} = \{x, y : |x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ жазықтығында бірқалыпты үзіліссіз болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Берілген жазықтықтың кез келген $A_1(x_1, y_1)$ мен $A_2(x_1, y_2)$ нүктелері үшін

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |2x_1 - 3y_1 + 5 - 2x_2 + 3y_2 - 5| = |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)| \leq 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|$$

теңсіздігі орындалады. Енді $\varepsilon > 0$ санын таңдап алайық, онда

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta, \quad |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$$

теңсіздіктері үшін мына теңсіздік орындалады

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = 2\frac{\varepsilon}{6} + 3\frac{\varepsilon}{6} < \varepsilon.$$

Осыдан және бірқалыпты үзіліссіздіктің анықтамасынан $u = f(x, y)$ функция $\{A\}$ жазықтықта бірқалыпты үзіліссіз болады.

2-мысал. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функция $\{A\} = \{x, y : |x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ жазықтығында бірқалыпты үзіліссіз болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін, $\{A\}$ жазықтықтың кез келген $A_1(x_1, y_1)$ мен $A_2(x_1, y_2)$ нүктелер үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &= \left| \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right| \leq \\ &= \frac{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2})(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2})}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \\ &= \frac{|x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{|(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \\ &= \frac{|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leq \\ &\leq \frac{|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{|y_1 - y_2| \cdot |y_1 + y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leq \\ &\leq |x_1 - x_2| \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} + |y_1 - y_2| \frac{|y_1| + |y_2|}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Енді кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$

болсын, онда $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Осыдан және бірқалыпты үзіліссіздіктің анықтамасынан, $\{A\}$ жазықтығында берілген функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі шығады.

3-мысал. $f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$ функциясы $x^2 + y^2 < 1$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

Шешуі. Функция аргументінің бөліміндегі $1 - x^2 - y^2$ көпмүшелік $x^2 + y^2 < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын жиынындағы барлық x пен y -тің мәндерінде үзіліссіз. Енді $x^2 + y^2 < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын екі нүктелер тізбегін алайық:

$$\{A_n(x_n, y_n)\} = \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos \alpha; \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin \alpha \right\},$$

$$\{A'_n(x'_n, y'_n)\} = \left\{ \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \cos \alpha; \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \sin \alpha \right\},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

$$\text{Онда } \rho(A_n, A'_n) = \sqrt{(x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \cos \alpha \right)^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin \alpha - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \sin \alpha \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \cos \alpha \right)^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin \alpha - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \sin \alpha \right)^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \right)^2 + \sin^2 \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \right)^2} = \left| \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Осыдан } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \right| = 0, \text{ ал барлық } n \text{ үшін}$$

$$\begin{aligned}
 |f(A_n) - f(A'_n)| &= \left| \sin \frac{\pi}{1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \cos^2 \alpha - \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sin^2 \alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - \sin \frac{\pi}{1 - \left(1 - \frac{2}{1+4n}\right) \cos^2 \alpha - \left(1 - \frac{2}{1+4n}\right) \sin^2 \alpha} \right| = \\
 &= \left| \sin 2n\pi - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right| = |\sin 2n\pi - \cos 2n\pi| = 1.
 \end{aligned}$$

Сондықтан, $\varepsilon \in (0,1)$ санына бірқалыпты үзіліссіздіктің анықтамасындағы δ саны табылмайды, демек берілген функция бірқалыпты үзіліссіз бола алмайды.

4-мысал. $u = f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ функциясы өзінің анықталу $\{A\}$ жиынында үзіліссіз бола ма? Функция $\{A\}$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

Шешуі. Функцияның анықталу жиыны $|x| \leq |y|$, $y \neq 0$ теңсіздіктерді қанағаттандырады және ол осы жиында үзіліссіз. Бірақ берілген функция бірқалыпты үзіліссіз бола алмайды. Шынында да, функцияның анықталу жиынынан $\left\{A_n\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)\right\}$, $\left\{A'_n\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)\right\}$, нүктелер тізбегін қарастырайық $n = 1, 2, \dots$

Онда

$$\rho(A_n, A'_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{n}.$$

Осыдан $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A'_n) = 0$. Осы нүктелердегі функциялардың мәндерінің арақашықтығын есептейік:

$$\begin{aligned}
 |f(A_n) - f(A'_n)| &= \left| \arcsin \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) - \arcsin \left(\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} \right) \right| = \\
 &= |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| = 2 \arcsin 1 = \pi,
 \end{aligned}$$

яғни ол арақашықтық π -ден кіші болуы мүмкін емес. Сонымен, функция бірқалыпты үзіліссіз бола алмайды.

Сұрақтар.

1. Вейерштрастың бірінші теоремасы.
2. Вейерштрастың екінші теоремасы.
3. Функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі.
4. Шектелген жиынның диаметрі.

Тапсырма. Функцияларды үзіліссіздікке зерттеңдер:

$$z = \frac{x+y+2}{x^2+y^2}; \quad z = \frac{1}{x^2+y^2}; \quad z = \frac{x^2+2y+4}{y^2-2x}.$$

12.6. Көп айнымалы функцияның дербес туындылары. Функцияның дифференциалдану белгісі

$A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүкте $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның анықталу жиынының ішкі нүктесі болсын және функцияның x_k аргументіне Δx_k өсімше берейік, сонда $A(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ нүкте функцияның анықталу жиынына тиісті болсын. Функция аргументінің Δx_k өсімшесі мен осы өсімшеге сәйкес келетін функцияның $\Delta x_k u$ өсімшесі арасындағы мына қатынасты қарастырайық:

$$\frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\Delta x_k} \quad (12.11)$$

Анықтама. Егер (12.11) қатынастың $\Delta x_k \rightarrow 0$ болғандағы шегі бар болса, онда ол шек $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциядан x_k айнымалы бойынша алынған $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі **бірінші ретті (қысқаша, бірінші) дербес туынды** деп аталады және ол мына таңбалардың бірімен белгіленеді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k}(A) &= \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_k}, u'_{x_k}, f'_{x_k}, \\ \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k} &= \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(A). \end{aligned} \quad (12.12)$$

$\frac{\partial u}{\partial x_k}(A)$ дербес туындының физикалық мағынасы Ox_k осінің бағыты бойындағы A нүктедегі функцияның өзгеру жылдамдығы болады.

Екі айнымалы $u = f(x, y)$ функцияның $A(x, y)$ нүктедегі дербес туындылары мына түрде белгіленеді:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның дербес туындысын табу үшін, бізге белгілі бір айнымалы функциядағыдай туынды табу ережелерін пайдалану керек, мысалы, x_k айныма бойынша дербес туынды табу үшін x_k айнымалыдан өзге айнымалыларды тұрақты сан деп қарастырамыз, сонда $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция x_k -ға тәуелді бір айнымалы функция болады, енді осы функциядан бізге белгілі ережелерді пайдаланып, x_k айныма бойынша туынды тапсақ жеткілікті.

Егер $u = f(x, y)$ функция өзінің x, y аргументтері бойынша бойынша дифференциалданса, ал x, y аргументтер n аргумент бойынша бойынша дифференциалданса, онда $u = f(x(t), y(t))$ күрделі функцияда дифференциалданады және оның дербес туындысы қарапайым туындыға айналады (дифференциалы), мына формуладан анықталады:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Егер $z = f(x, y)$ функцияның x, y аргументтерінің өздері u мен v аргументтерге тәуелді функция болса, яғни $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, онда $z = f(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v)$ күрделі функцияның дербес туындылары мына формулалардан анықталады:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Осы сияқты, егер $u = f(x, y, z)$ функцияның x, y, z аргументтерінің өздері t мен s аргументтерге тәуелді функция болса, онда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}.$$

1-ескерту. Жоғарыда келтірілген дербес туындының анықтамасын функцияның анықталу жиынындағы ішкі нүкте үшін ғана пайдалануға болады, ал бұл анықтаманы анықталу жиынының шекаралық нүктесі үшін қолдануға болмайды, себебі, жалпы жағдайда шекаралық нүктедегі функция өсімшесін есептей алмаймыз. Сондықтан функцияның дербес туындысын шекарадағы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде табу үшін функцияның анықталу жиынындағы $A(x, y)$ нүктеден дербес туынды тауып, осы туындыдан $A \rightarrow A_0$ болғандағы шекті тапсақ жеткілікті.

2-ескерту. Бізге x айнымалыға тәуелді y функция айқын емес түрде берілсін, яғни $F(x, y) = 0$ және $F(x, y)$ функция x пен y айнымалылар бойынша дифференциалдансын, $F'_y(x, y) \neq 0$ болсын. Онда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Егер бізге x, y айнымалыларға тәуелді z функция айқын емес түрде берілсін, яғни $F(x, y, z) = 0$ және $F(x, y, z)$ функция x, y, z айнымалылар бойынша дифференциалдансын, $F'_z(x, y, z) \neq 0$ болсын. Онда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Анықтама. $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ аргумент өсімшелеріне сәйкес келетін $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ **функцияның толық өсімшесі** деп мына өрнекті айтамыз:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (12.13)$$

Екі айнымалы $u = f(x, y)$ функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі толық өсімшесі мына түрде анықталады:

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Функцияның x пен y пен айнымалылары сәйкес $\Delta x, \Delta y$ өсімше алғанда $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге $A_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүкте сәйкес келеді. Сонда функцияның толық өсімшесі $\Delta u = A_1' - A_1''$ кесіндіге тең.

Анықтама. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде дифференциалданады деп аталады, егер оның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі (12.13) толық өсімшесі мына түрге өрнектелсе:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (12.14)$$

мұндағы A_i сандары Δx_i -ге тәуелсіз, α_i шексіз аз функциялар $\Delta x_i \rightarrow 0$ болғанда және $\alpha_i = 0$, егер $\Delta x_i = 0$ болса, $i = \overline{1, m}$ (функцияның (12.14) толық өсімшесіндегі $\Delta x_i \rightarrow 0$ болғанда, $\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ бөлігі $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$ бөлігіне қарағанда “тезірек” нөлге ұмтылса, онда ол дифференциалданатын функция деп аталады). (12.14) формула функцияның дифференциалдану белгісі деп аталады. Дифференциалдану белгіні басқа түрде жазуға да болады. Ол үшін функцияның барлық $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтеріне сәйкес $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ өсімше берейік, сонда $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m + \Delta x_m$ сандары $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ өсімшеге сәйкес келетін нүктенің координаттары. Онда осы екі нүктенің $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$ арақашықтығы шексіз аз функция болады, егер $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ болса, және $\rho = 0$, егер барлық $\Delta x_i = 0$ болса, $i = \overline{1, m}$. Енді (12.14) формуланың оң жағындағы өрнекті $\rho = 0$ функциямен салыстырғанда ол өрнек жоғарғы ретті шексіз аз функция болатынын дәлелдейік, демек (12.14) өрнегі $O(\rho)$ функция болады ([1].9.6-тақырып). Егер $\rho \neq 0$ болса, онда $\frac{|\Delta x_i|}{\rho} \leq 1, i = \overline{1, m}$. Осыдан

$$\begin{aligned} & |\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \leq \\ & \leq \left(|\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + |\alpha_2| \frac{|\Delta x_2|}{\rho} + \dots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho} \right) \rho \leq \\ & \leq (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|) \rho = O(\rho) \end{aligned}$$

теңсіздік орындалады. Сонымен, функцияның (1.16) дифференциалдану белгісін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + O(\rho) \quad (12.15)$$

немесе

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m) \rho$$

және егер $\rho = 0$ болса, онда $\Delta u = 0$.

Егер функцияның (12.15) дифференциалдану белгісін A_i сандарының кем дегенде біреуі нөлге тең болмаса, онда $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \dots + A_m\Delta x_m$ қосынды **функция өсімшесінің негізгі бөлігі** деп аталады және ол Δx_i өсімшелеріне қатысты сызықты функция. Функцияның дифференциалдану анықтамасы бойынша A_i сандары Δx_i өсімшелерге тәуелсіз кез келген сандар. Сондықтан $A_i = 0$ болғанда (12.14) немесе (12.15) теңдіктері орындалса, онда функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүкте дифференциалданады.

12.11-теорема (дифференциалданудың қажетті белгісі). Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде дифференциалдана, онда осы нүктеде функцияның барлық аргументтері бойынша алынған дербес туындылары бар және

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(A) = A_i, \quad i = \overline{1, m},$$

мұндағы A_i жоғарыдағы (12.14) немесе (12.15) дифференциалдану белгіден анықталады.

Ескерту. 12.15-теоремаға кері теорема орындалмайды, яғни дербес туындылардың бар болуы функцияның дифференциалдануына жеткілікті шарт бола алмайды. Осы теоремадан мына салдарды аламыз.

1-салдар. Функцияның (12.11) дифференциалдану белгісін мына түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + \\ + \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m) \rho. \end{aligned} \quad (12.16)$$

2-салдар. Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциясы $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде дифференциалдана, онда оның Δu толық өсімшесінің (12.14) немесе (12.15) түрде жазылуы тек біреу ғана.

Шынында да, A_i сандары 12.11-теорема бойынша $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дербес туындыларға тең, олай болса, Δu функция өсімшесінің жазылуы тек біреу ғана.

12.12-теорема. Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде дифференциалданса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. Функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде дифференциалданып болғандықтан, функцияның осы нүктедегі (12.14) дифференциалдану белгісі бойынша

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \dots \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta u = 0$$

теңдік орындалады. Ал бұл шек функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде үзіліссіз болатынын айқындайды (12.5-тақырып).

Ескерту. 12.12-теоремаға кері теорема орындалмайды, яғни функцияның үзіліссіздігі тек қажетті ғана шарт, ал жеткілікті шарт бола алмайды. Мысалы, $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциясының дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

Анықталған дербес туындылардың $O(0,0)$ нүктеде мағынасы жоқ. Осы нүктеде функцияның дербес туындылары жоқ болатынына көз жеткізейік. Шынында да, $u(x,0,0) = \sqrt{x^2} = |x|$. Бұл функцияның (x -ке тәуелді) $x=0$ нүктеде туындысы жоқ. Олай болса, $O(0,0)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x}$ дербес туынды да жоқ. Осы сияқты, $O(0,0)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ дербес туындылары да жоқ.

1-мысал. $u = \sqrt[3]{xy}$ функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалдана ма?

Шешуі. Алдымен функцияның $O(0,0)$ нүктедегі дербес туындыларын (12.12) формула бойынша есептейік:

$$u'_x(0,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$u'_y(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Демек, берілген функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар. Енді функцияның $O(0,0)$ нүктедегі өсімшесін (12.15) формула

түрінде өрнектеуге болатынын тексерейік (егер функцияның өсімшесі (12.15) түрінде өрнектелмесе, онда функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды). Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі толық өсімшесін есептейік:

$$\Delta u = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rho.$$

Осыдан берілген функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалдану үшін $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ болғанда $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ шексіз аз функция болуы керек. Шексіз аз функция болатынын, не болмайтынын тексеру үшін 0-ге ұмтылатын тізбек алайық:

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad \Delta y = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

яғни $n \rightarrow \infty$ болғанда $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ болады. Сонда $\left\{ A_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ нүктелер тізбегі $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады, ал осы нүктеге сәйкес келетін функция өсімшесінің мәні $+\infty$ -ке ұмтылады, $n \rightarrow \infty$ болғанда:

$$\varepsilon \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}}.$$

Осыдан $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}} = +\infty$. Сонымен, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$

болғанда $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ функциясы шексіз аз функция болмайды, яғни $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \neq O(\rho)$, $\rho > 0$. Олай болса, берілген функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды.

2-мысал. $u = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, $x^2 + y^2 > 0$ және $u(0,0) = 0$ функцияның $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданатынын зерттейік.

Шешуі. Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі дербес туындыларын есептейік:

$$u'_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

$$u'_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta y)^2}}}{\Delta y} = 0,$$

Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі дербес туындылары бар. Енді функцияның өсімшесін есептейік:

$$\Delta u(0,0) = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rho,$$

мұндағы $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ шексіз аз функция болса $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, онда $O(0,0)$ нүктеде функция дифференциалданады:

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho^2}}.$$

Егер $\rho \rightarrow 0$ болса ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$), онда $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ болады. Демек, $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ шексіз аз болғандықтан, берілген функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданады.

Сұрақтар.

1. Функцияның бірінші ретті дербес туындысы.
2. Функция өсімшесінің негізгі бөлігі.
3. Функцияның дифференциалдану белгісі.
4. Дифференциалданудың қажетті белгісі.
5. Функцияның толық өсімшесі.

12.7. Екі айнымалы функцияның дербес туындыларының геометриялық мағынасы

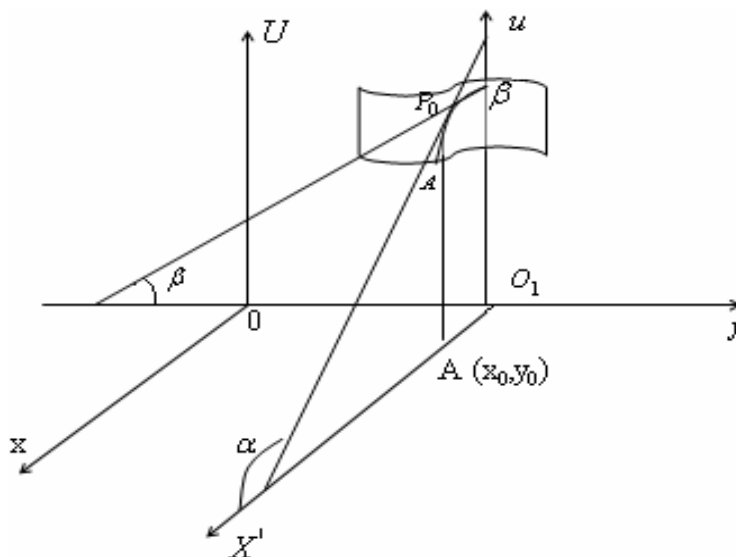
Бізге S бет $u = f(x, y)$ функциямен анықталсын және анықталу жиынында оның дербес туындылары бар болсын. Анықтық үшін $\frac{\partial u}{\partial x}$ дербес туындының геометриялық мағынасын қарастырайық. y айнымалыны тұрақты сан деп алып, S бетке $y_0 - const$ қима жүргізейік

(12.4-сурет). Қима S бетті AB қисық сызық бойымен қияды. Тағайындалған $y_0 - const$ үшін функцияның анықталу жиынынан (XOY жазықтығында) $A_0(x_0, y_0)$ нүктені қарастырайық, ал $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге S беттегі AB қисық сызығына тиісті $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте сәйкес келеді, мұндағы $u_0 = f(x_0, y_0)$. Онда AP_0B қисық сызығы толығымен S бетте жатады. AP_0B қисық сызығы $X'O_1U$ **координат жазықтығының қисық сызығы** деп қарастыруға болады және AP_0B қисық сызығының сызбасы бір айнымалы $u = f(x, y_0)$ функцияның сызбасы болады. Онда бір айнымалы функция туындысының геометриялық мағынасы бойынша:

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x, y_0)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

мұндағы α бұрыш AP_0B қисық сызықтың $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама мен O_1X осінің арасындағы бұрыш және

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$



12.4-сурет

теңдігі орындалады. Сондықтан $\frac{\partial u}{\partial x}(P_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Сонымен, $u = f(x, y)$ функциядан $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде x бойынша (y тұрақты) алынған $\frac{\partial u}{\partial x}$ дербес туынды, $u = f(x, y)$ бетті $y = y_0$ жазықтықпен қиғандағы

қисық сызықтың $P_0(x_0, y_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама мен OX осінің арасындағы бұрыштың тангенсіне тең болады. Осы сияқты $x - const$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(P_0) = \operatorname{tg} \beta,$$

мұндағы β бұрыш P нүктеге жүргізілген жанама мен OY осі арасындағы бұрыш.

12.8. Көп айнымалы функцияның дифференциалдануының жеткілікті белгісі

Біз 12.7-тақырыптан мынадай қорытындыға келеміз: функцияның дербес туындыларының бар болуы, осы функцияның дифференциалдануына ешқандай кепілдік бере алмайды. Енді осы тақырыпта, функцияның дифференциалдануына кепілдік бере алатын жеткілікті шартты қарастыратын боламыз.

Бір айнымалы $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі туындысы бар болуы үшін, оның осы нүктеде дифференциалдануы қажет әрі жеткілікті. Ал көп айнымалы функция үшін функцияның дербес туындысының бар болуы мен оның дифференциалдану ұғымдары эквивалентті бола алмайды.

12.13-теорема (дифференциалданудың жеткілікті белгісі).

Егер $A_0(x_1^0, A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0))$ нүктенің белгілі бір маңайында $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның барлық $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері бойынша алынған $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m}$ дербес туындылары бар әрі олар осы нүктенің өзінде үзіліссіз болса, онда функция осы нүктеде дифференциалданады, демек функцияның толық өсімшесін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m) \rho,$$

мұндағы $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$, $\varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m)$ шексіз аз функция $\rho \rightarrow 0$ (немесе $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i = \overline{1, m}$) болғанда.

Осы теоремадан мына салдарды аламыз.

Салдар. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ нүктенің кейбір маңайында $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m}$ дербес туындылары бар болса әрі олар $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ нүктенің өзінде үзіліссіз болса, онда функцияның өзі осы нүктеде үзіліссіз болады. Салдардың дәлелдеуі 12.12-теоремадан шығады, яғни функцияның A_0 нүктеде дифференциалдануынан, оның осы нүктедегі үзіліссіздігін аламыз.

Анықтама. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда функция осы нүктеде **үзіліссіз дифференциалданады** деп аталады.

Енді осы тақырыптағы функцияның нүктеде **үзіліссіз дифференциалдану** анықтамасын [1] 12.7-тақырыптағы функцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасымен салыстырайық. Егер функция нүктеде дифференциалданса, онда оның осы нүктеде дифференциалы бар әрі ол (12.14), (12.15), (12.16) формулалардың бірімен анықталады; ал функция нүктеде үзіліссіз дифференциалданса, онда функцияның дербес туындылары осы нүктеде үзіліссіз болады. Демек, функцияның нүктедегі дифференциалдану ұғымы осы функцияның дифференциалы ұғымымен тікелей байланысты; ал функцияның үзіліссіз дифференциалдану ұғымы осы функцияның дербес туындылар ұғымымен тікелей байланысты. Сонымен, функцияның нүктедегі үзіліссіз дифференциалдануынан осы функцияның сол нүктедегі дифференциалдануын аламыз. Демек, функцияның нүктеде үзіліссіз дифференциалдану ұғымы, осы функцияның сол нүктеде дифференциалдану ұғымына қарағанда “кең” ұғым.

Ескерту. Функцияның дербес туындыларының үзіліссіздігі оның дифференциалдануы үшін жеткілікті ғана шарт, ал ол қажетті шарт бола алмайды (3-мысал).

1-мысал. $u = \sqrt{|xy|}$ функция $O(0,0)$ нүктеде үзіліссіз, дербес туындылары бар болатынын және дифференциалданбайтынын дәлелдейік.

Шешуі. Алдымен функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар болатынын дәлелдейік. Ол үшін дербес туындының анықтамасын пайдаланайық:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x \cdot 0}}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta y \cdot 0}}{\Delta y} = 0.$$

Демек, функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар, олар нөлге тең. Енді функцияның дифференциалданбайтынын дәлелдейік. Ол үшін функцияның $O(0,0)$ нүктедегі функция өсімшесін есептейік:

$$\Delta u(0,0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rho,$$

$$\text{мұндағы } \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Функцияның дифференциалданбайтынын дәлелдеу үшін, $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ функциясы шексіз аз функция болмайтынын айқындасақ болғаны, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ болғанда. Ол үшін $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатын $\left\{ A_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық, $n \rightarrow \infty$ болғанда, мұнда $\Delta x = \frac{1}{n}$, $\Delta y = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Егер $n \rightarrow \infty$ болса, онда $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ болады, демек $\left\{ A_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ нүктелер тізбегі $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады. Осы нүктелер тізбегіне сәйкес келетін $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ функцияның шегін есептейік:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} \neq 0.$$

Сонымен, функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды. Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі үзіліссіздігін тексерейік. Ол үшін 12.4-тақырыптағы анықтаманы пайдаланайық:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0 \quad \text{және} \quad f(0,0) = 0.$$

Демек, функция $O(0,0)$ нүктеде үзіліссіз болады.

Енді функцияның дербес туындыларын $O(0,0)$ нүктеде зерттейік. Егер $x \neq 0$ болғанда туынды табу ережесі бойынша: $u'_x(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \operatorname{sign} x$ болады. $O(0,0)$ нүктеге $\left\{ A'_n \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ нүктелер

тізбегін алайық және осы нүктеге сәйкес келетін $u'_x(x, y)$ функциясының шегін табайық $n \rightarrow \infty$ болғанда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u'_x\left(\frac{1}{n^2}; \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Сонымен, функцияның $u'_x(x, y)$ дербес туындысы $O(0,0)$ нүктенің маңайында шектелмеген. Осы тұжырымды $u'_y(x, y)$ дербес туындыға да айтуға болады. Функцияның дербес туындылары $O(0,0)$ нүктеде үзілісті, себебі олар $O(0,0)$ нүктеде анықталмаған.

2-мысал. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$ функция $O(0,0)$ нүктенің

маңайында үзіліссіз, ал $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ дербес туындылары бар, бірақ олар осы нүктеде дифференциалданбайтынын дәлелдейік.

Шешуі. $x^2 + y^2 \neq 0$ теңсіздікті қанағаттандыратын жиында функция үзіліссіз және $|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$, онда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{2} = 0$.

Осыдан $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0,0)$. Сонымен, $O(0,0)$ нүктеде функция

үзіліссіз. Функцияның $x^2 + y^2 \neq 0$ жиынында дербес туындыларын туындының ережесін пайдаланып табайық, ал олардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндерін туындының анықтамасы бойынша есептейік:

$$f'_x(x, y) = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\sqrt{(\Delta x)^2}} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\sqrt{(\Delta y)^2}} = 0.$$

Осылардан және $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < \frac{1}{2}$ теңсіздіктен мына теңсіздікті аламыз:

$$\begin{aligned} |f'_x(x, y)| &= \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \\ &\leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Осылайша, $|f'_y(x, y)| \leq \frac{3}{2}$ теңсіздікті де дәлелдейміз. Сонымен, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ дербес туындылар $x^2 + y^2 \neq 0$ жиынында шектелген. Енді $f(x, y)$ функцияның $O(0, 0)$ нүктедегі өсімшесін мына түрде жазайық:

$$\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rho,$$

мұндағы $\frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

$\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ функциясы $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ болғанда шексіз аз функция бола алмайды, олай болса, функция $O(0, 0)$ нүктеде дифференциалданбайды.

3-мысал. $O(0, 0)$ нүктенің маңайында

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

функцияның $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ дербес туындылары бар әрі олар осы нүктеде үзілісті және $O(0, 0)$ нүктенің кез келген маңайында шектелмеген, бірақ та функция $O(0, 0)$ нүктеде дифференциалданатынын дәлелдейік.

Шешуі. Функцияның $x^2 + y^2 \neq 0$ анықталу жиынында оның дербес туындыларын туындының ережелерін, ал олардың $O(0, 0)$ нүктедегі мәнін туындының анықтамасын пайдаланып есептейік:

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

Енді $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ дербес туындылар $O(0, 0)$ нүктеде үзілісті, ал осы нүктенің кез келген маңайында шектелмейтін функция болатынына көз жеткізейік. Ол үшін $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0, 0)$ нүктеге жинақталатын $\{A_n(x_n, y_n)\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық және $\cos \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 1$ теңдігі орындалсын, яғни

$$\frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots),$$

мысалы, x_n мен y_n үшін

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}$$

болсын. $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ болғандықтан $\{A_n(x_n, y_n)\}$ нүктелер тізбегі $O(0, 0)$ нүктенің кез келген маңайына тиісті болады және де x_n мен y_n -ге сәйкес $f'_x(x, y)$ дербес туындының мәні:

$$f'_x(x_n, y_n) = f'_x\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right) = -\sqrt{2n\pi}.$$

Онда $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_x(x_n, y_n) = -\infty$ болады. Олай болса, $f'_x(x, y)$ функция $O(0, 0)$ нүктеде үзілісті және осы нүктенің кез келген маңайында шектелмеген. Осы сияқты $f'_y(x, y)$ функциясы да $O(0, 0)$ нүктеде үзілісті және осы нүктенің кез келген маңайында шектелмеген.

Дербес $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ туындылардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндері нөлге тең, ал осы нүктедегі функцияның өсімшесін мына формуладан анықтайық:

$$\Delta f(0,0) = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho \varepsilon(\rho),$$

мұндағы $\varepsilon(\rho) = \rho \sin \frac{1}{\rho^2} \rightarrow 0$, егер $\rho \rightarrow 0$ болса, онда $u = x^3 y^5$ функциясы $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданады.

4-мысал. $O(0,0)$ нүктеде

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

функцияның дербес туындылары бар және осы нүктеде функция дифференциалданбайтынын дәлелдейік.

Шешуі. $y = 0$ болғанда

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x, 0) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

яғни $f(x, 0) = x$ болғанда $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \frac{d}{dx} f(x, 0)|_{x=0} = 1$.

Осы сияқты $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$. Демек, $f(x, y)$ функциясының $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар.

Енді $f(x, y)$ функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар болғанмен де, оның осы нүктеде дифференциалданбайтынын дәлелдейік. Дәлелдеу үшін кері жориық, яғни функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалдансын. Онда функцияның $O(0,0)$ нүктедегі

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

өсімшесін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + O(\rho),$$

мұндағы $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі x және y бойынша алынған дербес туындылары 1-ге тең болғандықтан, функцияның дифференциалдану белгісінен мына өрнекті аламыз:

$$\frac{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x + \Delta y + O(\rho)$$

немесе

$$-\frac{(\Delta x)^2 \Delta y + (\Delta y)^2 \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = O\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).$$

Онда (егер бұл шек бар болса)

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y + (\Delta y)^2 \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0.$$

Енді осы шектің бар болмайтынын көрсетейік. Ол үшін $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ болсын, яғни $\Delta y = k\Delta x$, $k \neq 0$. Онда

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^3(k^2 + k)}{(\Delta x)^3(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k^2 + k}{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Мұндағы $\frac{k^2 + k}{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$ мәні k -ның әртүрлі мәндерінде әртүрлі мәндерді қабылдайды, олай болса, бұл шектің шегі жоқ. Сондықтан біздің кері жоруымыз дұрыс емес, яғни функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды.

Сұрақтар.

1. Функцияның дифференциалданудың жеткілікті белгісі.
2. Функцияның нүктеде үзіліссіз дифференциалдануы.

Тапсырма. $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ функция $2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ теңдікті қанағаттандыратынын тексер.

12.9. Көп айнымалы функцияның дифференциалы

Анықтама. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі **толық дифференциалы (қысқаша, дифференциалы)** деп осы нүктедегі функцияның толық өсімшесінің аргументтеріне қатысты негізгі сызықты бөлігін айтамыз.

Егер (12.14) формуладағы барлық A_i коэффициенттері нөлге тең болса, онда $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі функцияның дифференциалы нөлге тең дейді және толық дифференциал du таңбамен белгіленеді, яғни

$$du = A_1 \Delta x + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m,$$

немесе

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m.$$

Енді тәуелсіз x_i айнымалының dx_i дифференциалы туралы ұғымды енгізейік: **тәуелсіз x_i айнымалының dx_i дифференциалы** деп $x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымаларға тәуелді емес кез келген санды айтамыз. Осы жаңа ұғымдағы кез келген сан тәуелсіз x_i айнымалының Δx_i өсімшесіне тең болсын деп қабылдайық. Онда осы келісім бойынша $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде функцияның дифференциалын мына түрде өрнектеуге болады:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m, \quad (12.17)$$

мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_m$ тәуелсіз айнымалы шамалар.

Енді күрделі функцияның дифференциалын есептейік. Бізге $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ күрделі функциясы берілсін, мұндағы

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k). \end{cases} \quad (12.18)$$

Күрделі функция белгілі шартты қанағаттандырғанда, онда ол $t_1, t_2, \dots, t_k$ аргументтері бойынша дифференциалданатынын дәлелдейік. Функция дифференциалданса, онда күрделі функцияның $t_1, t_2, \dots, t_k$

аргументтері бойынша алынған дербес туындылар $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның және (12.18) функциялардың дербес туындылары арқылы анықталады, яғни

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{cases} \quad (12.19)$$

12.14-теорема. Егер (12.18) функциялар $A(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктеде, ал $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциясы $N(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде дифференциалданса, мұндағы $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$, $i = \overline{1, m}$, онда (12.18) формуладан анықталатын күрделі $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктеде дифференциалданады.

Бұл жағдайда, күрделі функцияның $A(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктедегі дербес туындылары (12.19) формуладан анықталады, мұндағы барлық $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m}$ дербес туындылар $N(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде, ал (12.18) функциялардың $t_1, t_2, \dots, t_k$ аргументтері бойынша алынған барлық $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ дербес туындылары $A(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктеде алынады.

Егер (12.18) функциялар тек бір ғана t аргументіне тәуелді болса, онда бір t аргументке тәуелді $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияны аламыз, мұндағы $x_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1, m}$. Бір аргументке тәуелді күрделі функцияның $\frac{du}{dt}$ туындысы мына формуладан анықталады:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt}. \quad (12.20)$$

(12.17) формула үш аргументті $u = f(x, y, z)$ функция үшін мына түрде жазуға болады:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

ал (12.20) формуланы мына түрде:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Төмендегі функциялардың дифференциалдарын табайық.

1-мысал. $u = x^3 - 2y^2 - 4xy^3$.

Шешуі. Алдымен дербес туындыларды табайық

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 4y^3, \frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 12xy^2.$$

Сонда $du = (3x^2 - 4y^3)dx + (-4y - 12xy^2)dy$.

2-мысал. $u = x^{y^2}$

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln x, du = y^2 x^{y^2-1} dx + 2yx^{y^2} \ln x.$

3-мысал. $u = x^2 + xy^2 + y^3$, мұндағы $x = t^2 + 1, y = 3t^2 + t$ күрделі функцияның дифференциалдарын табайық.

Шешуі. Екі айнымалы күрделі функцияның дифференциалын мына формуладан анықтаймыз:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Сонда $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 3y^2, \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 6t + 1$. Осыдан

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (2x + y^2)2t + (2xy + 3y^2)(6t + 1) = [2t^2 + 2 + (3t^2 + t)]2t + \\ &+ [2(t^2 + 1)(3t^2 + t) + 3(3t^2 + t)^2](6t + 1). \end{aligned}$$

Сұрақтар.

1. Функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі толық дифференциалының формуласын жаз.

2. Бір аргументке тәуелді күрделі функцияның $\frac{du}{dt}$ туындысын жаз.

3. $u = f(x, y, z)$ функцияның толық дифференциалын жаз.

4. Күрделі функцияның дифференциалын жаз.

Тапсырмалар.

1. $u = \sqrt{xy} - 2\frac{x}{y} + xy$ функцияның толық өсімшесін табыңдар;

2. $u = \frac{x}{y} + x + y^2 + \sin x$, мұндағы $x = t + 2$, $y = 3t^2 + 1$ күрделі функцияның дифференциалдарын табыңдар.

12.10. Бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығы

Көп айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның бірінші ретті дифференциалы (толық дифференциалы):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m,$$

$x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымалылары тәуелсіз айнымалы немесе басқа аргументке тәуелді функция болса да ол өзінің түрін (пішінін) сақтайды.

Бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығы деп аталатын мына қасиетті қарастырайық: функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері $t_1, t_2, \dots, t_k$ тәуелсіз айнымалыларға тәуелді дифференциалданатын функция болғанда да бірінші ретті дифференциалдың түрі сақталады.

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері $A(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктеде дифференциалданатын $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функция болсын, ал $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның өзі $B_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде дифференциалдансын, мұндағы $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), i = \overline{1, m}$. Бұл жағдайда $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $t_1, t_2, \dots, t_k$ тәуелсіз айнымалыларға тәуелді күрделі функция болады, онда $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нүктеде дифференциалданады. Олай болса, du бірінші ретті дифференциал мына түрде анықталады:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k, \quad (12.21)$$

мұндағы $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ дербес туындылар (12.19) формуладан анықталады. Осы

дербес туындыларды (12.21) формулаға қояйық және $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ туындылардың коэффициенттері бойынша жинақтайық:

$$\begin{aligned}
 du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right) dt_1 + \\
 &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right) dt_2 + \\
 &\dots \dots \dots \\
 &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right) dt_k = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k \right) + \\
 &\dots \dots \dots \\
 &+ \frac{\partial u}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right).
 \end{aligned}$$

Осы теңдіктегі жақша ішіндегі өрнектер $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функциның dx_i дифференциалына тең. Сонымен, бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығы сақталады.

Бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығын пайдаланып, төмендегі дифференциалдау ережелерін дәлелдеуге болады:

$$d(cu) = cd(u), \quad c - const; \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(u \cdot v) = u dv + v du; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

мұндағы u мен v дифференциалданатын функциялар.

Сұрақтар.

1. Дифференциалдау ережелерін жазыңдар.
2. Көп айнымалы $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның бірінші ретті дифференциалын (толық дифференциалын) жазыңдар.

Тапсырмалар.

1. Төмендегі функциялардың толық дифференциалын табыңдар:

$$z = \cos(xy), \quad z = \frac{x^2 y^2 - 3x}{x - 3xy}, \quad z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad u = \ln(x^3 - y^3 + 2z^3).$$

2. Функцияның толық дифференциалының мәнін берілген нүкте мен аргумент өсімшелері мәндерін пайдаланып есептеңдер:

$$z = \frac{x}{y}, A(1,2), \quad dx = 0,2, \quad dy = 0,1; \quad z = \frac{y}{y-x}, B(1,2), \quad dx = 0,01, \quad dy = 0,1;$$

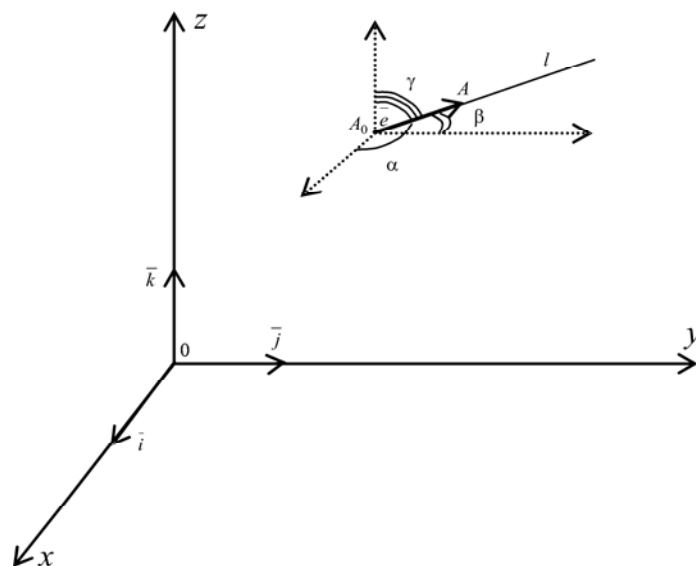
$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, C(3,4), \quad dx = -0,1, \quad dy = 0,3, \quad dz = 0,2.$$

12.11. Функцияның бағыт бойынша туындысы

Біз тәуелсіз үш айнымалы $u = f(x, y, z)$ функцияны қарастырайық және ол үш өлшемді E кеңістігіндегі $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің маңайында анықталсын әрі осы нүктеде дифференциалдансын.

$A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің барлық сәулелерін қарастырайық. Әрбір сәуле координаттары $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ болатын бірлік $\bar{e}$ векторы арқылы анықталады, яғни $\bar{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, мұндағы α, β, γ бұрыштар $\bar{e}$ векторының сәйкес OX, OY, OZ осьтерімен түзейтін бұрыштар, ал $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ сандары $\bar{e}$ векторының **бағыттауыш косинустары** деп аталады.

([1], 2.11-тақырып). A_0 нүктеден шығатын бір сәулені алайық және $\bar{e}$ векторы сол сәулені анықтасын. Бірлік $\bar{e}$ вектормен беттескен жоғарыдағы сәуленің бойынан A_0 нүктеден өзге A нүкте алайық (12.5-сурет).



12.5-сурет

$\overrightarrow{A_0 A}$ векторын $\bar{l}$ деп белгілейік және $|A_0 A| = |\bar{l}| = l$ болсын. Сонда

$$\overrightarrow{A_0 A} = \{l \cos \alpha; l \cos \beta; l \cos \gamma\}.$$

Егер A нүктенің координаттары x, y, z болса, онда $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ сандары $\overrightarrow{A_0A}$ векторының координаттары болады: $\overrightarrow{A_0A} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Тең векторлардың координаттарын теңестіріп, A нүкте мен $\overrightarrow{A_0A}$ кесіндінің арасындағы байланысты табамыз:

$$x = x_0 + l \cos \alpha, y = y_0 + l \cos \beta, z = z_0 + l \cos \gamma. \quad (12.22)$$

Осы теңдіктерді $u = f(x, y, z)$ функцияның аргументтеріне қояйық:

$$u = f(x_0 + l \cos \alpha; y_0 + l \cos \beta; z_0 + l \cos \gamma). \quad (12.23)$$

Осыдан $\bar{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ бірлік векторы анықталған және $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтетін түзуде $u = f(x, y, z)$ функция $\bar{l}$ -ге тәуелді бір айнымалы күрделі функция болатынын көреміз.

Анықтама. $u = f(x, y, z)$ функциясының $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі $\bar{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ бірлік векторы арқылы анықталған $\bar{l}$ **бағыт бойынша туындысы** деп (12.23) күрделі функциядан $l = 0$ нүктеде l айныма бойынша алынған туындыны айтамыз және ол $\frac{\partial u}{\partial l}(A_0)$ таңбамен белгіленеді:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(A_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(A_0) \cos \gamma. \quad (12.24)$$

Сонымен, $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде дифференциалданатын $u = f(x, y, z)$ функциясының осы нүктеде кез келген бағыт бойынша туындысы бар және ол туынды біріншіден, (12.24) формуладан анықталады, ал екіншіден, $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте мен $\overrightarrow{A_0A}$ векторы арқылы анықталады.

Анықтама. $u = f(x, y, z)$ функциясының $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі **градиенті** деп координаттары $\frac{\partial u}{\partial x}(A_0), \frac{\partial u}{\partial y}(A_0), \frac{\partial u}{\partial z}(A_0)$ сандар болатын векторды айтамыз және ол $\text{gradu}(A_0)$ (қысқаша gradu таңбамен белгіленеді:

$$\begin{aligned} \operatorname{gradu}(A_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(A_0); \frac{\partial u}{\partial x}(A_0); \frac{\partial u}{\partial z}(A_0) \right\} = \frac{\partial u}{\partial x}(A_0) \bar{i} + \\ + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(A_0) \bar{k}, \end{aligned} \quad (12.25)$$

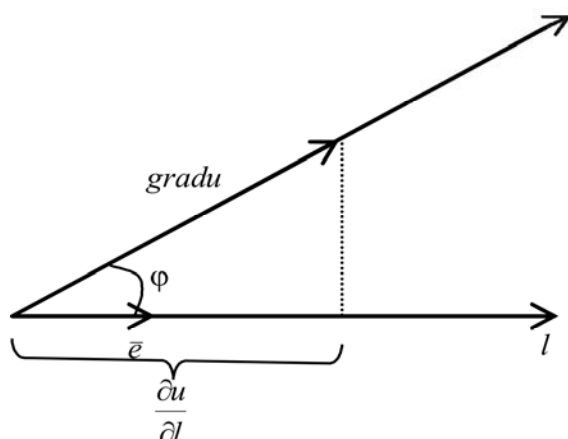
мұнда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координат осьтері бойындағы бірлік векторлар.

Берілген облыста дифференциалданатын $u(M), v(M)$ функцияларға мына қасиеттер орындалады:

1. $\operatorname{grad}(u(M) \pm v(M)) = \operatorname{grad} u(M) \pm \operatorname{grad} v(M)$;
2. $\operatorname{grad}(u(M) \cdot v(M)) = v(M) \operatorname{grad} u(M) + u(M) \operatorname{grad} v(M)$;
3. $\operatorname{grad}\left(\frac{u(M)}{v(M)}\right) = \frac{v(M) \operatorname{grad} u(M) - u(M) \operatorname{grad} v(M)}{v^2(M)}, v(M) \neq 0$;

$$4. \operatorname{grad}(c_1 u(M) \pm c_2 v(M)) = c_1 \operatorname{grad} u(M) \pm c_2 \operatorname{grad} v(M), c_1, c_2 - \text{const};$$

5. $\operatorname{grad} F(u(M)) = F'(u) \cdot \operatorname{grad} u(M)$, мұндағы $F(u(M))$ – дифференциалданатын функция.



12.6-сурет

Аналитикалық геометриядан екі вектордың скаляр көбейтіндісі олардың сәйкес координаттары көбейтінділерінің қосындысына тең болатыны бізге белгілі ([1], 2.17-тақырып). Сондықтан $u = f(x, y, z)$ бағыт бойынша алынған туынды бірлік $\bar{e}$ вектор мен (12.25) вектордың скаляр көбейтіндісіне тең (12.6-сурет): яғни $\frac{\partial u}{\partial l} = (\bar{e}; \operatorname{gradu})$,

$$(12.26) \quad \text{мұндағы} \quad (\bar{e}; \operatorname{gradu}) = |\bar{e}| |\operatorname{gradu}| \cos \varphi, \quad |\bar{e}| = 1. \quad \text{Осыдан}$$

$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{gradu}| \cos \varphi$. Соңғы теңдіктің сол жағындағы өрнек $A(x, y, z)$ нүктеде максимум мәнді қабылдайды, егер $\cos \varphi = 1$ болса, яғни gradu

векторы $\vec{l}$ бағытпен беттессе, бұл жағдайда $A(x, y, z)$ нүктедегі $\frac{\partial u}{\partial l}$ өрнегі $gradu$ векторының модуліне тең:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |gradu(A)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}(A)\right)^2}. \quad (12.27)$$

Сонымен, $A(x, y, z)$ нүктедегі $u = f(x, y, z)$ функцияның градинетіне мына қасиеттер орындалады:

$$1) |gradu(A)| = \max \frac{\partial u}{\partial l}(A);$$

2) егер $gradu(A) \neq 0$ болса, онда $gradu(A) \neq 0$ векторы бағытымен бағыттас болады.

Анықтама. Егер беттің барлық нүктелерінде функцияның бір мәні сақталса, яғни $f(x, y, z) = C$, онда бұл бет **беттік деңгей** деп аталады, $C - const$, яғни $f(x, y, z) = C$ тендеуін қанағаттандыратын нүктелердің жиыны беттік деңгейді анықтайды.

Егер анықтамадағы C тұрақты санның орнына басқа санды алсақ, онда біз басқа беттік деңгейді анықтаймыз, осындай беттер **беттік деңгейлер** деп аталады $f(x, y, z) = C$ беттік деңгейдің әрбір $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіне жанама жазықтық жүргізсек, онда жанама жазықтықтың нормаль векторы $gradu$ векторы болады. Олай болса, $f(x, y, z) = C$ беттік деңгейдің әрбір $A(x, y, z)$ нүктесіндегі $gradu(A) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(A), \frac{\partial u}{\partial y}(A), \frac{\partial u}{\partial z}(A) \right\}$ вектор осы бетке ортогональ болады.

1-мысал. $A_0(2; -1; 1)$ нүктеде $u = xz + y + 3$ функцияның $u_{min}(1, 1) = -2$ векторы бағыт бойынша алынған туындыны табайық.

$$\textbf{Шешуі.} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(A_0) = z(A_0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A_0) = x(A_0) = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) = 1,$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}, \quad \cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = -\frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Осылардан

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}(A_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(A_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(A_0)\cos\gamma = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} - 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}.\end{aligned}$$

2-мысал. $u = 2x^2y - 3y^2 + z$ функциясының $A_0(1;2;0)$ нүктеден $A(2;3;1)$ нүктеге бағытталған бағыт бойынша A_0 нүктедегі туындысын есептейік.

Шешуі. A_0 нүктедегі функцияның дербес туындыларының мәндерін есептейік:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A_0) = 4xy(A_0) = 8, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) = (2x^2 - 6y)(A_0) = -10,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(A_0) = 1, \quad \vec{l} = \overrightarrow{A_0A} = \{1;1;1\}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{3}, \quad \cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сонда

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}(A_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(A_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(A_0)\cos\gamma = \\ &= 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

3-мысал. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$ функцияның $A_0(1;2;1)$ нүктедегі градиентін, градиенттің модулін және градиент қай нүктеде OX осіне перпендикуляр, қай нүктеде нөлге тең болатынын есептейік.

Шешуі. A_0 нүктедегі дербес туындылардың мәндерін есептейік:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = 2x - 3yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A) = 2y - 3xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A) = 2z - 3xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A_0) = -4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A_0) = -4.$$

(12.25) формуладан:

$$\operatorname{gradu}(A_0) = -4\bar{i} + 1\bar{j} - 4\bar{k} = \{-4; 1; -4\},$$

$$|\operatorname{gradu}(A_0)| = \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}.$$

ОХ осіне перпендикуляр вектордың бірінші координаты нөлге тең, яғни gradu .

Сонымен, $x = \frac{3}{2}yz$ бетіне тиісті кез келген $A(x, y, z)$ нүктедегі $\operatorname{gradu}(A)$ векторы ОХ осіне перпендикуляр болады.

Енді $\operatorname{gradu}(A_0) = 0$ теңдеуін шешейік, яғни $2x - 3yz = 0$, $2y - 3xz = 0$, $2y - 3xy = 0$, теңдеулер жүйесін шешу керек. Жүйенің шешімдері мына нүктелер:

$$A_1(0, 0, 0), A_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), A_3\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$A_4\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), A_5\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

болады. Осы нүктелердің координаттары $\operatorname{gradu} = 0$ теңдеуін қанағаттандырады.

4-мысал. $u = \frac{8}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$ функция $A(x, y, z)$ нүктеден

$A_0(1; -2; 1)$ нүктеге өткенде қандай ең үлкен жылдамдықпен өседі?

Шешуі. Ең үлкен жылдамдықпен өсетінін табу үшін (12.27) формуланы пайдаланамыз, кез келген $A(x, y, z)$ нүктедегі

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-16y}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-16x}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-16z}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)},$$

$A(x, y, z)$ нүктедегі функцияның градиентін (12.25) формуладан анықтаймыз:

$$\operatorname{gradu} = \frac{-16}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)} \{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\}.$$

$$\text{Осыдан } \operatorname{gradu}(A_0) = -\frac{16}{81}\bar{i} + \frac{32}{81}\bar{j} - \left(\frac{16}{81}\bar{k}\right).$$

$A(x, y, z)$ нүктеден $A_0(1; -2; 1)$ нүктеге өткенде функцияның ең үлкен жылдамдықпен өтетін жылдамдығын (12.27) формуладан есептейміз:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u(A_0)| = \frac{16\sqrt{6}}{81}, \quad \vec{l} = \vec{A_0A}.$$

Сұрақтар.

1. Вектордың бағыттауыш косинустары.
2. Бірлік вектордың l бағыт бойынша туындысының анықтамасы.
3. Функцияның нүктедегі градиентінің анықтамасы.
4. Дифференциалданатын $u(M), v(M)$ функцияларға орындалатын градиент қасиеттерін жаз.
5. $u = f(x, y, z)$ функцияның градиентінің модулі неге тең?

Тапсырмалар.

1. $u = \frac{2}{x + y^2 + z + 1}$ функция $A(x, y, z)$ нүктеден $A_0(1; -2; 1)$ нүктеге өткенде қандай ең үлкен жылдамдықпен өседі?
2. $u = x + y + z + 2zxy$ функцияның $A_0(1; -2; 1)$ нүктедегі градиентін, градиенттің модулін және градиент қай нүктеде OX осіне перпендикуляр, қай нүктеде нөлге тең болатынын есепте.

12.12. Жоғарғы ретті дербес туындылар

Бізге $\{A\}$ жиынында анықталған $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциясы берілсін және $\{A\}$ нүктенің маңайындағы барлық нүктелерде функцияның x_i аргументі бойынша алынған $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дербес туындысы (бірінші ретті дербес туындысы деп те аталады) бар болсын. Бірінші ретті $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дербес туындының өзі $x_1, x_2, \dots, x_m$ тәуелсіз айнымаларға тәуелді функция болады. Егер $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функцияның x_k аргумент бойынша дербес туындысы бар болса, онда ол туынды $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциядан A нүктеде x_i және x_k аргументтер бойынша алынған **екінші ретті дербес туынды** деп аталады әрі ол мына таңбалардың бірімен белгіленеді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(A), u_{x_k x_i}^{(2)}(A), \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(A), f_{x_k x_i}^{(2)}(A)$$

және былай анықталады: $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (A) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(A)$, мұнда функциядан x_i аргумент бойынша, содан соң x_k аргумент бойынша туынды алынады. Егер мұндағы $i \neq k$ болса, онда жоғарыдағы екінші ретті дербес туынды **екінші ретті аралас дербес туынды** деп аталады. Егер $i = k$ болса, онда ол **екінші ретті дербес туынды** деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(A), u_{x_i x_i}^{(2)}(A), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(A), f_{x_i x_i}^{(2)}(A).$$

Осы сияқты, екінші ретті дербес туындыдан алынған туынды **үшінші ретті дербес туынды** деп аталады, т.с.с. Егер A нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ аргументтері бойынша алынған $n-1$ ретті дербес туындысы бар болсын. Осы $n-1$ ретті дербес туындыдан A нүктеде x_{i_n} аргумент бойынша алынған туынды бар болса, онда ол туынды **n ретті дербес туынды** деп аталады және ол $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}$ таңбамен белгіленеді әрі ол былай анықталады:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right) = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Егер $i_1, i_2, \dots, i_n$ индекстерінің бәрі тең болмаса, онда ол **n -ретті аралас дербес туынды** деп аталады, ал егер индекстердің бәрі тең болса, яғни $i_1 = i_2 = \dots = i_n$ онда **n -ретті дербес туынды** былай белгіленеді:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1^{n-1}} \right) = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}^n}.$$

Егер $i_1 = i_2 = \dots = i_m, i_{m+1} = \dots = i_n$ болса, онда **n -ретті дербес туынды** былай белгіленеді:

$$\frac{\partial^{m+l} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_{m+1}}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}^m \partial x_{i_{m+1}}^l}, \quad m+l=n.$$

Анықтама. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $n-1$ ретті барлық дербес туындылары дифференциалданса, онда функция осы нүктеде **n рет дифференциалданады** деп аталады.

Осы анықтамадан, егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция A_0 нүктеде n рет дифференциалданса, онда $1 < n$ болғанда функцияның A_0 нүктедегі кез келген бірінші ретті дербес туындылары $n-1$ рет дифференциалданады, ал егер $2 < n$ болғанда, онда оның кез келген екінші ретті дербес туындысы осы нүктеде $x_1, x_2, \dots, x_m$ рет дифференциалданады.

Жоғарыдағы анықтамадан функцияның n -рет дифференциалдануының жеткілікті белгісін келтірейік.

12.15-теорема. $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция n -рет дифференциалдануы үшін, функцияның барлық n ретті дербес туындылары осы нүктеде үзіліссіз болуы жеткілікті.

12.16-теорема. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде $u = f(x, y)$ функция екі рет дифференциалданса, онда осы нүктеде $f_{xy}^{(2)}$ және $f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылары тең, яғни $f_{xy}^{(2)}(A_0) = f_{yx}^{(2)}(A_0)$.

12.17-теорема. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің кейбір маңайында $u = f(x, y)$ функцияның $f'_x, f'_y, f_{xy}^{(2)}, f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылары бар болса және $f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылары осы нүктеде үзіліссіз болса, онда $f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) = f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0)$ теңдігі орындалады.

Енді функцияның кез келген дербес туындысы, оны айнымалы бойынша дифференциалдау кезегіне тәуелсіздігін тұжырымдайтын теореманы келтірейік.

12.18-теорема. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция нүктеде n -рет дифференциалданса, онда осы нүктеде функцияның барлық n ретті аралас туындылары функцияны дифференциалдау кезегіне тәуелсіз.

1-мысал. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0. \end{cases}$ функцияның $O(0,0)$ нүктеде

$f_{xy}^{(2)}$ дербес туындысы бар ма?

Шешуі. $x^2 + y^2 \neq 0$ теңсіздікті қанағаттандыратын жиында f_x дербес туындыны табайық:

$$f'_x = \frac{2y(x^2 + y^2) - 4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Енді дербес туындының анықтамасын пайдаланып, $O(0,0)$ нүктеде $f'_x(0,0)$ туындыны есептейік:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_{yx}^{(2)}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{2(\Delta y)^3}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = 2 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta y)^2}.$$

Соңғы шек жоқ, сондықтан $O(0,0)$ нүктеде $u = f(x, y)$ функцияның $f_{xy}^{(2)}$ дербес туындысы да жоқ.

2-мысал. $f_{xy}^{(2)}(0,0) = f_{yx}^{(2)}(0,0)$ теңдігі орындала ма, егер

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0. \end{cases}$$

Шешуі. $x^2 + y^2 \neq 0$ жиынында функцияның бірінші дербес туындыларын табайық:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) + 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f'_y(x, y) &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Енді $x = 0, y = 0$ нүктеде $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ дербес туындылардың мәндерін туындының анықтамасын пайдаланып есептейік:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Дербес туындылардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндерін ескеріп, осы нүктедегі аралас туындыларды есептейік:

$$f_{yx}^{(2)}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-(\Delta y)^3}{(\Delta y)^3} = -1,$$

$$f_{xy}^{(2)}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(0, \Delta y) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3} = 1.$$

Сонымен, $O(0,0)$ нүктеде $f_{xy}^{(2)}(0,0) \neq f_{yx}^{(2)}(0,0)$ теңсіздік орындалады. Бұл мысалда, екінші ретті аралас туынды $O(0,0)$ нүктеде үзілісті, яғни осы нүктеде функцияның дифференциалдануының жеткілікті шарты орындалмайды. Шынында да, $x^2 + y^2 \neq 0$ жиынында

$$f_{xy}^{(2)}(x, y) = f_{yx}^{(2)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Енді $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатын $\left\{ A_n \left(\frac{a}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$

нүктелер тізбегін қарастырайық:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{xy}^{(2)}(A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{yx}^{(2)}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \left(1 + \frac{\frac{8a^2}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{a^2}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \left(1 + \frac{8a^2}{a^2 + 1} \right) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \left(1 + \frac{8a^2}{a^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Демек, $O(0,0)$ нүктеде аралас туынды үзілісті.

3-мысал. $u = x^{y^2}$ функция үшін $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ дербес (аралас)

туындыларды табыңдар.

Шешуі. Біріншіден, берілген функциядан x бойынша туынды алайық, яғни онда $y - const$: $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$. Екіншіден, $\frac{\partial u}{\partial x}$ функциядан y : бойынша туынды алайық, яғни $x - const$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2yx^{y^2-1} + y^2 x^{y^2-1} \ln x \cdot 2y = 2yx^{y^2-1} + 2y^3 x^{y^2-1} \ln x.$$

Енді берілген функциядан y бойынша туынды алайық ($x - const$):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln x \cdot 2y.$$

Соңғы $\frac{\partial u}{\partial y}$ функциядан x бойынша туынды алайық ($y - const$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2y \left(y^2 x^{y^2-1} \ln x + x^{y^2} \frac{1}{x} \right) = 2y^3 x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2-1}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2y \left(y^2 x^{y^2-1} \ln x + x^{y^2} \frac{1}{x} \right) = 2y^3 x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2-1}. \end{aligned}$$

Сұрақтар.

1. Екінші ретті дербес туындылар.
2. Аралас екінші ретті дербес туындылар.
3. n ретті аралас дербес туындылар.
4. $f_{xy}^{(2)}$ және $f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылардың теңдігінің шарттары.

12.13. Жоғарғы ретті дифференциалдар

Біз жоғарыда функцияның дифференциалын (**бірінші ретті дифференциалы** деп те аталады) du таңбамен белгіледік, енді қолайлы болу үшін оны δu таңбамен де белгілейтін боламыз, мысалы, $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ дифференциалын $\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z$ таңбамен белгілейміз және оны да функцияның бірінші ретті дифференциалы (толық дифференциалы немесе дифференциалы) дейміз.

Бізге $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі дифференциалы берілсін, ескі белгілеу бойынша:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m = \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k. \quad (12.28)$$

(12.28) формуланың оң жағындағы өрнек $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтерге тәуелді және $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде дифференциалданатын функция болсын. Бұл ұйғарым орындалуы үшін, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалдануы жеткілікті, ал $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтер: не тәуелсіз айнымалы, не $t_1, t_2, \dots, t_k$ тәуелсіз айнымалар бойынша екі рет дифференциалданатын функциялар болуы керек. Онда екі айнымалы $u = f(x, y)$ функция үшін (12.28) формуладан мына өрнекті қарастырайық:

$$\begin{aligned} \delta(du) &= \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \delta y\right) dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta y\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (dy \delta x + dx \delta y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \delta y. \end{aligned}$$

Демек, $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ дербес туындылар үзіліссіз болғандықтан (12.17-теорема) $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияда осы нүктеде үзіліссіз болады. Сондықтан $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде функцияның бірінші du дифференциалы бар, ал функция осы нүктеде екі рет дифференциалданатын болғандықтан $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ дербес туындылар осы нүктеде дифференциалданады. Олай болса, du дифференциалы $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтер бойынша дифференциалданады.

Анықтама. $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, \dots, \delta x_m = dx_m$ орындалғанда (12.28) бірінші дифференциалдан алынған $\delta(du)$ дифференциалдың $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі мәні функцияның осы нүктедегі **екінші ретті дифференциалы** деп аталады және ол d^2u таңбамен белгіленеді.

Анықтама. $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, \dots, \delta x_m = dx_m$ орындалғанда $d^{n-1}u$ дифференциалдан алынған $\delta(d^{n-1}u)$ дифференциалдың $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі мәні функцияның осы нүктедегі n **ретті дифференциалы** (қысқаша, n **дифференциалы**) деп аталады және ол $d^n u$ таңбамен белгіленеді.

Функцияның бірінші дифференциалынан екінші дифференциалын, ал екінші дифференциалынан үшінші дифференциалын, т.с.с. табамыз. Функцияның дифференциалдарын есептеу үшін алдымен негізгі екі жағдайды ажыратып алу керек:

1) функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері тәуелсіз;

2) функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері $t_1, t_2, \dots, t_k$ тәуелсіз айнымалары бойынша сәйкесінше ретті дифференциалданатын функциялар.

Алдымен 1) жағдайды қарастырайық, яғни $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері тәуелсіз айнымалылар болсын, онда $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ дифференциалдары $x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымаларға тәуелсіз болады.

Кез келген $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі әрбір dx_k дифференциалды бір Δx_k өсімшеге ғана тең деп алуға болады, онда

$$\delta(dx_k) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(dx_k)}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (d(dx_i) = 0), \quad i = \overline{1, m}$$

теңдігі орындалады. Осы теңдіктен және дифференциалдау ережелерінен $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция үшін төмендегі теңдіктер орындалады:

$$d^2 u = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k. \quad (12.29)$$

Сонымен, егер функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері тәуелсіз айнымалылар болса, онда $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция үшін (12.29) теңдігі орындалады, мұнда біз екі рет дифференциалданатын функцияның аралас екінші туындысы дифференциалдау кезегіне тәуелсіз болатындығын ескердік.

Демек, егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері тәуелсіз айнымалылар болса, ал $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде

функция екі рет дифференциалданса, онда A нүктеде екінші дифференциал $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ айнымаларға тәуелді симметриялы квадрат пішін арқылы анықталады, ал оның коэффициенттері сәйкес A нүктедегі екінші ретті дербес туындыларға тең.

(12.30), (12.29) формулалар символды түрде былай белгіленеді:

$$d = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

$$d^2 = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2.$$

Онда (12.29) формуланы мына түрде жазуға болады:

$$d^2 u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 u. \quad (12.30)$$

Екі айнымалы функция үшін жоғарыдағы анықтаманы мына түрде келтіруге болады. $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі функцияның **екінші ретті дифференциалы** (қысқаша, **екінші дифференциал**) деп осы нүктеде du дифференциалдан алынған дифференциалды айтамыз және оны есептегенде ол мына шарттарды қанағаттандыруы керек:

а) du дифференциалын тәуелсіз x, y айнымалыларға тәуелді функция деп қарастырамыз, яғни du дифференциалын есептегенде dx пен dy -ті тұрақты көбейткіш ретінде қарастырамыз:

б) $\frac{\partial u}{\partial x} A(x, y)$ пен $\frac{\partial u}{\partial y} A(x, y)$ функциялардан дифференциал табу үшін тәуелсіз x пен y айнымалардың өсімшелерін du дифференциалды есептегендегі өсімшелерге тең етіп аламыз, яғни ол өсімшелер dx пен dy -ке тең.

Осы анықтамадан функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі екінші дифференциалы мына түрде анықталады:

$$d^2 u|_{A_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (A_0) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (A_0) dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (A_0) dy^2,$$

мұндағы $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Математикалық индукция әдісін пайдаланып, $A_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде n рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның

$x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері тәуелсіз болса, онда оның n дифференциалын мына формуладан анықтаймыз:

$$d^n u = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_n},$$

ал оның символдық түрі былай жазылады:

$$d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u. \quad (12.31)$$

Енді 2-жағдайды қарастырайық, яғни $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері $t_1, t_2, \dots, t_k$ тәуелсіз айнымалылар бойынша $A_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалдансын. Бұл жағдайда функцияның екінші дифференциалының жазылуы бірінші жағдайдағыдай емес басқаша болады. Шынында да, 1-жағдайдағы (12.29) формуланы осы жағдай үшін жазайық. Сонда функцияның екінші дифференциалы мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} d^2 u &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} d^2 x_k = \\ &= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 u + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2 x_m \right). \end{aligned} \quad (12.32)$$

Енді функцияның (12.28) бірінші дифференциалын (12.32) екінші дифференциалымен салыстырсақ, онда екінші дифференциал инвариантты бола алмайтынын көреміз. Сондықтан, функцияның басқа дифференциалдары инвариантты бола алмайды.

Дегенмен, кейбір жағдайларда (2-жағдай үшін) функцияның n -дифференциалының (12.31) символдық түрі сақталады:

егер $A_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция n -рет дифференциалданса, ал оның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері $t_1, t_2, \dots, t_k$ тәуелсіз айнымалылар арқылы сызықты тәуелсіз болса, яғни $x_i = a_{i0} + a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \dots + a_{ik}t_k$, $k = \overline{1, m}$, онда функцияның осы нүктедегі n -дифференциалы үшін (12.31) символдық түрі сақталады. Бұл

жағдайда x_i функцияның n -дифференциалын мына формуладан анықтаймыз:

$$d^2 x_i = \left(dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + dt_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + dt_k \frac{\partial}{\partial t_k} \right)^n x_i.$$

Екі айнымалы $u = f(x, y)$ функция үшін математикалық индукция әдісін пайдаланып төмендегі теңдіктерді дәлелдеуге болады:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2 y = \\ &= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2 y \right), \\ d^n u &= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} d^n x + \frac{\partial u}{\partial y} d^n y \right). \end{aligned}$$

Сұрақтар.

1. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның екінші ретті дифференциалы және оның символикалық түрде жазылуы.

2. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның n -ретті дифференциалы және оның символикалық түрде жазылуы.

Мысал. Төмендегі функциялардың бірінші және екінші дифференциалдарын табайық:

- 1) $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$;
- 2) $u = f(\xi, \eta)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$;
- 3) $u = f(x, y, z)$, $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Шешуі. 1) $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ функцияны күрделі функция деп дифференциалдайық:

$$\begin{aligned} du &= f' d(\sqrt{x^2 + y^2}) = f' \left(\frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} dx + \frac{\partial(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} dy \right) = \\ &= f' \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right) = f' \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d^2u &= d(du) = d(f') \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f' d\left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \\
 d(f') &= f'' d(\sqrt{x^2 + y^2}) = f'' \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\
 d\left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) &= \left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)'_x dx + \left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)'_y dy = \\
 &= \frac{dx\sqrt{x^2 + y^2} - (xdx + ydy)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} dx + \frac{dy\sqrt{x^2 + y^2} - (xdx + ydy)\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} dy = \\
 &= \frac{(x^2 + y^2)dx - x^2dx - xydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx + \frac{(x^2 + y^2)dy - y^2dy - xydx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dy = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} (y^2dx^2 - 2xydx dy + x^2dy^2) = \frac{(ydx - xdy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}
 \end{aligned}$$

d^2u өрнектің оң жағына қояйық, сонда

$$d^2u = f'' \frac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f' \frac{(ydx - xdy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

2) $u = f(\xi, \eta)$ функцияның аргументтері x пен y -ке тәуелді сызықты функция болғандықтан, оның екінші дифференциалының символ түрі сақталады. Сондықтан оның екінші дифференциалын мына формуладан есептейміз:

$$\begin{aligned}
 du &= f'_x d\xi + f'_y d\eta, \quad d^2u = f''_{xx} d\xi^2 + 2f''_{xy} d\xi d\eta + f''_{yy} d\eta^2, \\
 d\xi &= d(x + y) = (x + y)'_x dx + (x + y)'_y dy = dx + dy, \\
 d\eta &= d(x - y) = (x - y)'_x dx + (x - y)'_y dy = dx - dy.
 \end{aligned}$$

Сонда

$$d^2u = f''_{xx} (dx + dy)^2 + 2f''_{xy} (dx^2 + dy^2) + f''_{yy} (dx - dy)^2.$$

3) Бірінші және екінші дифференциалдарын мына формуладан анықтаймыз:

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz,$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y + \frac{\partial f}{\partial z} d^2z,$$

мұндағы $dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt$, $dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt$, $dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt$.

Сонда $du = f'_x dt + f'_y 2tdt + f'_z 3t^2 dt$,

$$d^2u = f_{xx}^{(2)} dt^2 + 4f_{yy}^{(2)} t dt^2 + 6f_{xz}^{(2)} t^2 dt^2 + \\ 12f_{yz}^{(2)} t^3 dt^2 + 4f_{yy}^{(2)} t^2 dt^2 + 9f_{zz}^{(2)} t^4 dt^2.$$

2-мысал. $f_{xy}^{(2)}(0,0) = f_{yx}^{(2)}(0,0)$ теңдігі орындала ма, егер

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0. \end{cases}$$

Шешуі. $x^2 + y^2 \neq 0$ жиынында функцияның бірінші дербес туындыларын табайық:

$$f'_x(x,y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) + 2x(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f'_y(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^3 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Енді $x = 0, y = 0$ нүктеде $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ дербес туындылардың мәндерін туындының анықтамасын пайдаланып есептейік:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0, \\ f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Дербес туындылардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндерін ескеріп, осы нүктедегі аралас туындыларды есептейік:

$$f_{yx}^{(2)}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-(\Delta y)^3}{(\Delta y)^3} = -1,$$

$$f_{xy}^{(2)}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(0, \Delta x) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3} = 1.$$

Сонымен, $O(0,0)$ нүктеде $f_{xy}^{(2)}(0,0) \neq f_{yx}^{(2)}(0,0)$ теңсіздік орындалады. Бұл мысалда, екінші ретті аралас туынды $O(0,0)$ нүктеде үзілісті, яғни осы нүктеде функцияның дифференциалдануының жеткілікті шарты орындалмайды. Шынында да, $x^2 + y^2 \neq 0$ жиынында

$$f_{xy}^{(2)}(x, y) = f_{yx}^{(2)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Енді $n \rightarrow \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатын $\left\{ A_n \left(\frac{a}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{xy}^{(2)}(A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{yx}^{(2)}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \left(1 + \frac{\frac{8a^2}{n^2} \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{a^2}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \left(1 + \frac{8a^2}{a^2 + 1} \right) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \left(1 + \frac{8a^2}{a^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Демек, $O(0,0)$ нүктеде аралас туынды үзілісті.

3-мысал. $u = x^{y^2}$ функция үшін $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ теңдігі

орындалатынын тексер.

Шешуі. Біріншіден, функциядан x бойынша туынды алайық, яғни онда $y - const$: $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$. Екіншіден, $\frac{\partial u}{\partial x}$ функциядан y : бойынша туынды алайық, яғни $x - const$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2yx^{y^2-1} + y^2 x^{y^2-1} \ln x \cdot 2y = 2yx^{y^2-1} + 2y^3 x^{y^2-1} \ln x.$$

Енді функциядан y бойынша туынды алайық ($x - const$):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2} \ln x 2y = 2yx^{y^2}.$$

Соңғы $\frac{\partial u}{\partial y}$ функциядан x бойынша туынды алайық ($y - const$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \left(y^2 x^{y^2-1} \ln x + x^{y^2} \frac{1}{x} \right) = 2y^3 x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2-1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \left(y^2 x^{y^2-1} \ln x + x^{y^2} \frac{1}{x} \right) = 2y^3 x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2-1}.$$

Демек, аралас туындылар өздерінің анықталу жиынында $x \in (0, \infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$ өзара тең.

Сұрақтар.

1. Екінші ретті дербес туындылар.
2. Аралас екінші ретті дербес туындылар.
3. n ретті аралас дербес туындылар.
4. $f_{xy}^{(2)}$ және $f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылардың теңдігінің шарттары.

12.14. Тейлор формуласы

Нүктенің маңайында көп айнымалы функцияның $n+1$ ретке дейінгі барлық дербес туындылары үзіліссіз болса, онда функцияны бір айнымалы функция сияқты көпмүшелікке жіктеуге болады. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $A_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі n -дифференциалын $d^n u|_{A_1}$ таңбамен белгілейік.

12.19-теорема. Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктенің кейбір ε маңайында анықталса және ол осы маңайда $n+1$ ($n \geq 0$) рет дифференциалданса, онда функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктедегі $\Delta u = f(A) - f(A_0)$ толық өсімшесін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta u = du|_{A_0} + \frac{1}{2!} d^2 u|_{A_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u|_{A_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u|_N, \quad (12.33)$$

мұндағы N нүкте A_0 нүктенің ε маңайындағы нүкте, ал dx_i өрнек x_i айнымалының дифференциалы және ол $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ өсімшеге тең,

$d^k u|_{A_0}$, $d^{k+1} u|_N$ өрнектері dx_i дифференциалдары арқылы өрнектеледі. (8.45) формула $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның A_0 нүктедегі **Лагранж ұсынған қалдық мүше түріндегі Тейлор** (қысқаша, **Лагранж түрдегі Тейлор**) **формуласы** деп аталады, ал $\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u|_N = r(\Delta x, \Delta y)$ мүше **Лагранж ұсынған қалдық мүше** деп аталады. $u = f(x, y)$ екі айнымалы үшін (12.33) Тейлор формуласы мына түрде жазылады (жіктеледі):

$$\begin{aligned} \Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \end{aligned}$$

мұндағы $\theta \in (0; 1)$, $x_0 = x_1^0$, $y_0 = y_2^0$.

Біз жоғарыда Лагранж түрдегі Тейлор формуласымен таныстық, осы сияқты Пеано ұсынған және интеграл түрдегі Тейлор формулалары бар. Енді осы формулаларды атап өтейік.

12.20-теорема. Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктенің ε маңайында анықталса және осы маңайда $n+1$ ($n \geq 1$) рет дифференциалданса, ал $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктенің өзінде n -рет дифференциалданса, онда ε маңайдың кез келген $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүктесінде мына теңдік орындалады:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[(x - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^k f + O(\rho^n), \end{aligned} \quad 12.34$$

мұндағы $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$, $O(\rho^n)$ шексіз аз функция, егер $\rho \rightarrow 0$ (немесе $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i = \overline{1, m}$).

(12.34) формула **Пеано ұсынған қалдық мүше түріндегі Тейлор формуласы** деп аталады, ал $O(\rho^n)$ **Пеано ұсынған қалдық мүше** деп аталады.

12.21-теорема. Егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция 12.23-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырса және де $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктенің ε маңайында функцияның барлық $n+1$ ретті туындылары үзіліссіз болса, онда (12.33) пен (12.34) Тейлор формулаларындағы қалдық мүшені мына түрде жазуға болады.

$$r_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left[\sum (x_i - x_i^0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^{n+1} \cdot f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_m^0 + t(x_m - x_m^0)) dt.$$

Бұл қалдық **интеграл түрдегі қалдық мүше** деп аталады.

Мысал. $A_0(1;1;1)$ нүктеде $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ функцияны Тейлор формуласы бойынша жіктейік.

Шешуі. Функцияның дербес туындыларын табайық:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 6z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -3z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -3y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -3x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x} = -3, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = -3, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = 0. \end{aligned}$$

Функцияның қалған дербес туындылары ($n > 3$) нөлге тең, сондықтан берілген функция үшін Тейлор формуланы мына түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= f(A_0) + \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) f(A_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(A_0) + \frac{1}{3!} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^3 f(A_0), \end{aligned}$$

мұндағы $dx = x - 1, \quad dy = y - 1, \quad dz = z - 1, \quad u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$
 $f(A_0) = f(1;1;1) = 0,$

$$df(A_0) = \left[(3x^2 - 3yz) + (3y^2 - 3xz) + (3z^2 - 3xy) \right]_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} = 0,$$

$$d^2 f(x_0, y_0) = 6[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)],$$

$$\begin{aligned} d^3 f(A_0) &= \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial y^3} dy^3 + \\ &+ \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial z^3} dz^3 + 3 \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \\ &+ 3 \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x^2 \partial z} dx^2 dz + 3 \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial y^2 \partial x} dy^2 dx + \\ &+ 3 \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial y^2 \partial z} dy^2 dz + 3 \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial z^2 \partial x} dz^2 dx + \\ &+ 3 \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial z^2 \partial y} dz^2 dy + 6 \frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz = \\ &= 6(x-1)^3 + 6(y-1)^3 + 6(z-1)^3 - 18(x-1)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

Сонда іздестіріп отырған Тейлор формула мына түрде анықталады:

$$\begin{aligned} u &= 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - \\ &- (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + \\ &+ (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

Сұрақтар.

1. Лагранж ұсынған қалдық мүше түріндегі Тейлор формуласы.
2. Пеано ұсынған қалдық мүше түріндегі Тейлор формуласы.
3. Интеграл түріндегі қалдық мүшенің формуласы.

Тапсырма. $A_0(-1; 1; -1)$ нүктеде $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$ функцияны Тейлор формуласы бойынша жіктендер.

12.15. Функцияның локальды экстремумының қажетті белгісі

E кеңістігіндегі $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктенің кейбір маңайында анықталған $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияны қарастырайық.

Анықтама. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктенің ε маңайындағы кез келген $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нүкте үшін

$$f(A) < f(A_0)$$

теңсіздігі орындалса, онда $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның **локальды максимумы бар** деп аталады; ал егер

$$f(A_0) < f(A)$$

теңсіздігі орындалса, онда $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде функцияның **локальды минимумы бар** деп аталады.

Демек, A_0 нүктеде функцияның локальды максимумы (минимумы) бар болса, онда A_0 нүктенің ε маңайында $f(A) - f(A_0) < 0$ ($f(A) - f(A_0) > 0$) теңсіздігі орындалады. Егер A_0 нүктенің ε маңайында функцияның локальды максимумы (минимумы) бар болса, онда A_0 нүкте функцияның **максимум (минимум) нүктесі** деп аталады.

Анықтама. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде не локальды максимумы, не локальды минимумы бар болса, онда A_0 нүктеде функцияның **локальды экстремумы бар** деп аталады, ал бұл жағдайда A_0 нүкте **функцияның экстремум нүктесі** деп аталады.

12.22-теорема (қажетті белгісі). Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның барлық $x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымалары бойынша алынған бірінші ретті дербес туындылары және осы нүктеде оның локальды экстремумы бар болса, онда функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктедегі барлық бірінші ретті дербес туындылары нөлге тең, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(A_0) = \dots = \frac{\partial u}{\partial x_m}(A_0) = 0. \quad (12.35)$$

Жоғарыдағы функцияның локальды экстремумының қажетті белгісін мына түрде тұжырымдауға болады: егер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция A_0 нүктеде дифференциалданса әрі осы нүктеде оның локальды экстремумы бар болса, онда A_0 нүктеде $du|_{A_0}$ дифференциалы нөлге тең.

Ескерту. (12.35) формуладағы теңдіктер $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның A_0 нүктеде локальды экстремумының тек қажетті белгісі ғана, ол функцияның жеткілікті белгісі бола алмайды (мысалды қара).

Анықтама. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері бойынша алынған барлық бірінші ретті дербес туындылары $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде нөлге тең болса, онда A_0 нүкте **функцияның стационар нүктесі** деп аталады.

Жоғарыда айтылғандардан, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция дифференциалданатын $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүкте стационар нүкте болу үшін (12.35) формуладағы теңдіктер осы нүктеде орындалуы керек.

Демек, $u = f(A)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ экстремум нүктеде дифференциалданса, онда $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүкте функцияның стационар нүктесі болады, бірақ осы тұжырымның кері тұжырымы орындалмайды, яғни функция дифференциалданатын стационар A_0 нүкте осы функцияның экстремум нүктесі болуы да, болмауы да мүмкін. Мысалы, $u(x, y) = xy$ функцияның $O(0, 0)$ нүктеде дербес туындылары бар, бірақ осы нүктеде экстремумы жоқ. Шынында да, функцияның $O(0, 0)$ нүктенің өзіндегі мәні нөлге тең, ал осы нүктенің маңайындағы нүктелерде функция әрі оң, әрі теріс мәндерді қабылдайды, ал

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0) = 0.$$

Функцияның бірінші дифференциалын нөлге айналдыратын нүктелер, осы функцияның **локальды экстремумы бар болуы мүмкін нүктелер** деп аталады. Локальды экстремумы бар болуы мүмкін нүктелерді табу үшін, төмендегі m белгісізі m теңдіктер жүйені шешсек жеткілікті:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_m} = 0. \end{cases}$$

Сұрақтар.

1. Функцияның локальды максимумының анықтамасы.
2. Функцияның локальды минимумының анықтамасы.
3. Функцияның экстремум нүктесінің анықтамасы.
4. Функцияның стационар нүктесінің анықтамасы.

Тапсырмалар. Төмендегі функциялардың стационар нүктелерін табыңдар:

$$z = x^2 + y^2 - 8x - 2; \quad z = x^3 + xy^2 + 6xy; \quad z = 3x^2 - y^2 + 4y + 5;$$

$$z = x^3 + 8y^3 + 6xy - 1.$$

12.16. Функцияның локальды экстремумының жеткілікті белгісі

Бізге 12.15-тақырыптан (1-жағдай) екі рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументтері не тәуелсіз айнымалы, не басқа айнымалыға тәуелді сызықты функция болса, онда функцияның екінші дифференциалын $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ аргументтерге тәуелді квадрат форма арқылы өрнектеп жазуға болатыны белгілі:

$$d^2u \Big|_{A_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} (A_0) dx_i dx_k, \quad (12.36)$$

мұндағы $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} (A_0) = a_{ik}, \quad dx_i = t_i, \quad dx_k = t_k.$

Функцияның локальды экстремумының жеткілікті белгісін екі айнымалы $u = f(x, y)$ функция үшін тұжырымдайық.

12.23-теорема (экстремумның жеткілікті белгісі). $u = f(x, y)$ функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында бір рет дифференциалдан-

сын, ал осы нүктенің өзінде екі рет дифференциалдансын және $A_0(x_0, y_0)$ стационар нүкте болсын, яғни $f'_x(A_0) = f'_y(A_0) = 0$

1. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}^{(2)}(A_0)f_{yy}^{(2)}(A_0) - \left(f_{xy}^{(2)}(A_0)\right)^2 > 0$$

болса, онда $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде функцияның экстремумы бар:

1а) егер $f_{xx}^{(2)}(A_0) < 0$ болса, онда функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде максимум мәнін қабылдайды.

1ә) егер $f_{xx}^{(2)}(A_0) > 0$ болса, онда функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде минимум мәнін қабылдайды.

2. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}^{(2)}(A_0)f_{yy}^{(2)}(A_0) - \left(f_{xy}^{(2)}(A_0)\right)^2 < 0$$

болса, онда функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде локальды экстремумы жоқ.

3. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}^{(2)}(A_0)f_{yy}^{(2)}(A_0) - \left(f_{xy}^{(2)}(A_0)\right)^2 = 0$$

болса, онда функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде локальды экстремумы бар болуы да, болмауы да мүмкін.

1-мысал. $u = (x + y)^2$ функцияның $O(0,0)$ нүктедегі экстремумын табайық:

Шешуі. Стационар нүктелерді табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x + y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x + y) = 0.$$

Осыдан $y = -x$, яғни $y = -x$ түзудің бойында орналасқан барлық нүктелер функцияның стационар нүктелері болады. Онда $O(0,0)$ нүкте де стационар нүкте болады. $O(0,0)$ нүктедегі екінші ретті дербес туындыларды есептейік:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2.$$

Сонда

$$\Delta(0,0) = f_{xx}^{(2)}(0,0) f_{yy}^{(2)}(0,0) - \left(f_{xy}^{(2)}(0,0) \right)^2 = 0.$$

Сонымен, кез келген x пен y үшін $z \geq 0$ және де $y = -x$ түзудің бойында жатқан барлық нүктелерде $z = 0$ болады. Демек, $O(0,0)$ нүкте функцияның экстремум нүктесі әрі ол нөлге тең (қатаң емес).

2-мысал. $u = x^3 y^5$ функцияның $O(0,0)$ нүктедегі локальды экстремумын табайық.

Шешуі. Стационар нүктелерді табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^5 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 5x^3 y^4 = 0,$$

яғни $O(0,0)$ нүкте стационар нүкте болады. Екінші ретті дербес туындылардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндерін есептейік:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 6xy^5, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 20x^3 y^3, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 15x^2 y^4.$$

Онда $\Delta(0,0) = f_{xx}^{(2)}(0,0) f_{yy}^{(2)}(0,0) - \left(f_{xy}^{(2)}(0,0) \right)^2 = 0$ теңдігі орындалады. Бірақ та, $O(0,0)$ нүктенің кез келген маңайында функцияның таңбасы әртүрлі, сондықтан $O(0,0)$ нүкте функцияның экстремум нүктесі бола алмайды.

3-мысал. $u = x^4 + y^4 - 2xy - y^2$ функцияның экстремумын табайық.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y.$

Осыдан $\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$ Онда $A_1(-1,-1), A_2(1,1), A_3(0,0)$ стационар

нүктелер болады. Функцияның екінші ретті дербес туындыларының мәндерін есептейік:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=-1 \\ y=-1}} = 10, \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=-1 \\ y=-1}} = 10, \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=-1 \\ y=-1}} = -2,$$

$$\Delta(x, y) = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4.$$

Сонда $\Delta_1(-1, -1) = 96 > 0$, яғни функция $A_1(-1, -1)$ нүктеде минимум мәнді қабылдайды және ол $u_{\min}(-1, -1) = -2$.

Осы сияқты $\Delta_2(1, 1) > 0$, $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=-1 \\ y=-1}} = 10$, яғни функция $A_2(1, 1)$,

нүктеде де функция минимум мәнді қабылдайды $u_{\min}(1, 1) = -2$.

Енді $O(0, 0)$ нүктеде функция экстремумының бар болуын зерттейік. Бұл нүктеде $\Delta(0, 0) = 0$ болады. Сондықтан функцияның $O(0, 0)$ нүктедегі экстремумының бар болуын зерттеу үшін, осы нүктедегі функцияның өсімшесін қарастырайық: $\Delta u(0, 0) = u(l, p) - u(0, 0)$.

Егер $p = l$ болса, онда

$$\Delta u(0, 0) = u(l; l) - u(0, 0) = l^4 + l^4 - l^2 - 2l^2 - l^2 = 2l^2(l^2 - 2)$$

мұндағы $l \in (0, \sqrt{2})$. Егер $p = -l$ болса, онда $\Delta u(0, 0) = 2l^4$.

Сонымен, егер $p = l$ болса, онда $\Delta u(0, 0) = 2l^2(l^2 - 2) < 0$, $l \in (0; \sqrt{2})$; егер $p = -l$ болса, онда $\Delta u(0, 0) = 2l^4 > 0$. Демек, $\Delta u(0, 0)$ өсімшесінің таңбасы $O(0, 0)$ нүктенің маңайында әртүрлі, олай болса $O(0, 0)$ нүктеде функцияның экстремумы жоқ.

4-мысал. $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ функцияның экстремумын табайық.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындыларды табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Функцияның дербес туындылары жоқ және $O(0, 0)$ нүктеде функцияның бі-рінші ретті дербес туындылары да жоқ, себебі

$$u'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$u'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}.$$

шектер жоқ. Сондықтан $O(0,0)$ нүкте функцияның экстремум нүктесі болып қалуы да мүмкін, ал $u(x,y) - u(0,0) = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Онда функцияның $O(0,0)$ нүктеде максимумы бар және ол $u_{\max}(0,0) = 1$.

5-мысал. $u = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ функцияның экстремумын табайық.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындыларды нөлге теңестіріп, стационар нүктелерді табайық:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)} - 2(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}y = 0. \end{cases}$$

Осыдан

$$\begin{cases} x(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ y(1 - x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

Онда $x = 0$, $y = 0$ және $x^2 + y^2 = 1$. Сонымен, берілген функцияның стационар нүктелері радиусы 1-ге тең, центрі координат жүйенің бас нүктесі болатын шеңбердің бойындағы нүктелер мен координат жүйенің бас нүктесі болады.

Екінші ретті дербес туындыларды табайық:

$$u_{xx}^{(2)}(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}(2x - 2x^3 - 2xy^2) + e^{-(x^2+y^2)}(2 - 6x^2 - 2y^2),$$

$$u_{yy}^{(2)}(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}(2y - 2y^3 - 2yx^2) + e^{-(x^2+y^2)}(2 - 2x^2 - 6y^2),$$

$$u_{xy}^{(2)}(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}(2x - 2x^3 - 2xy^2) - 4xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Сонда $u_{xx}^{(2)}(0,0) = 2 > 0$, $u_{yy}^{(2)}(0,0) = 2 > 0$, $u_{xy}^{(2)}(0,0) = 0$. Онда $\Delta(0,0) = 4 > 0$, яғни $O(0,0)$ нүкте функцияның минимум нүктесі болады, $u_{\min}(0,0) = 0$.

Енді функцияға жеткілікті белгінің $x^2 + y^2 = 1$ шеңберінің бойындағы нүктелер үшін орындалатынын тексерейік. Ол үшін $u(x,y)$ функцияны t айнымалыға тәуелді функция деп қарастырайық, яғни $u(t) = te^{-t}$, мұндағы $t = x^2 + y^2$.

Бір айнымалы $u(t)$ функцияның стационар (кризистік) нүктесін анықтайық:

$$u' = e^{-t} - te^{-t} = 0.$$

Онда $t = 1$ нүкте бір айнымалы функцияның стационар нүктесі болады және осы нүкте функцияның максимум нүктесі

$$u_{\max}(x, y) = 16, \text{ егер } x, y \in \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}.$$

Сұрақтар.

1. Экстремумның жеткілікті белгісі.

Тапсырма. Төмендегі функциялардың локальды экстремумдарын табындар:

$$z = x^2 + y^2 - 8x - 2; \quad z = x^3 + xy^2 + 6xy;$$

$$z = 3x^2 - y^2 + 4y + 5; \quad z = x^3 + 8y^3 + 6xy - 1;$$

$$z = x^4 + xy + 2y^2 - x + y; \quad z = -x^2 - 4y^2 + 5x - 8y + 3;$$

12.17. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Бізге тұйық әрі шектелген $\{A\}$ жиынында үзіліссіз және дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциясы берілсін. Демек, функция $\{A\}$ жиынында шектелген әрі осы жиында өзінің максимум, минимум мәндерін қабылдайды және бірқалыпты үзіліссіз. Вейерштрастың екінші теоремасы бойынша функция өзінің ең жоғарғы және ең төменгі шекара мәндерін қабылдайды. Бұл нүктелер $\{A\}$ жиынының ішкі және шекара нүктелері болады. Егер де $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ішкі нүкте болса, онда $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияның бұл нүктеде локальды экстремумы бар. Олай болса, 12.15-теорема бойынша $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктедегі функцияның бірінші дербес туындылары нөлге тең:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(A_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_m}(A_0) = 0.$$

Ал, бұл теңдеулерді қанағаттандыратын нүктелер функцияның стационар нүктелері болады. Сонымен, функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін мына ережені пайдаланған тиімді:

1. Функцияның $\{A\}$ жиынындағы барлық стационар нүктелерін табу керек;

2. Стационар нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек;
3. Функцияның шекарадағы мәндерін есептеу керек;
4. Соңғы екі пункттегі функцияның мәндерін салыстырып, функцияның тұйық $\{A\}$ жиынындағы ең үлкен, ең кіші мәндерін табамыз.

Егер функцияның стационар нүктесі жоқ болса, онда функцияның ең үлкен, ең кіші мәндерін табу үшін жоғарыдағы 3 және 4-пункттерді орындау керек.

1-мысал. $u = xy(1 - x - y)$ функцияның $x = 0$, $y + x = 2$, $y = 0$ түзулермен шектелген жиындағы ең үлкен, ең кіші мәндерін табайық (12.7-сурет).

Шешуі. 1. Стационар нүктелерді табайық:

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0, \\ x(1 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

Осыдан $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{3}$; $x_3 = 0, y_3 = 1$; $x_4 = 1, y_4 = 0$ стационар нүктелер;

2. Стационар нүктелердегі функцияның мәндерін есептейік:

$$u(0,0) = 0, u\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}; u(0,1) = 0, u(1,0) = 0.$$

3. Функцияның шекарадағы мәндерін есептейік (шекаралық нүктелер үш түзудің бойындағы нүктелердің жиындары). Үшбұрыштың $A(0,2)$, $B(2,0)$, $O(0,0)$ төбелеріндегі мәндері:

$$u(0,2) = 0, u(2,0) = 0, u(0,0) = 0 \text{ болады;}$$

OA кесіндінің бойында, яғни $x = 0$:

$$u(y) = 0, 0 \leq y \leq 2.$$

Демек, $y \in [0,2]$ сегментте $u(y) = 0$ функцияның стационар нүктесі жоқ және $u(0) = 0$, $u(2) = 0$. Олай болса, $u(2,0) = 0$, $u(0,0) = 0$;

OB кесіндінің бойында, яғни $y = 0$:

$$u(x) = 0, 0 \leq x \leq 2.$$

Демек, $x \in [0,2]$ сегментте $u(x) = 0$ функцияның стационар нүктесі жоқ және $u(0) = 0$, $u(2) = 0$. Олай болса,

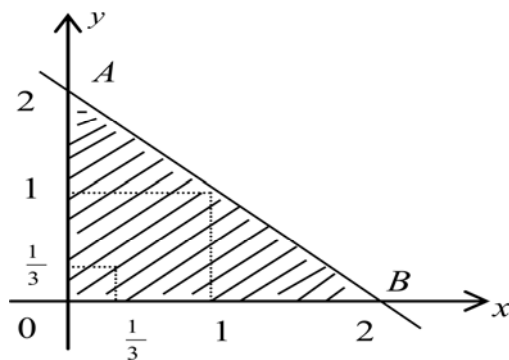
$$u(0,0) = 0, u(2,0) = 0;$$

AB кесіндінің бойында, яғни $x + y = 2$. Осыдан $y = 2 - x$. Онда $u(x) = x(x - 2)$, $x \in [0,2]$. Бір айнымалы функцияның $[0,2]$ сегменттегі ең үлкен, ең кіші мәндерін табайық:

$u'_x = 2x - 2 = 0$, $x = 1$ стационар нүкте. Онда $u(0) = 0$, $u(0,2) = 0$, ал $u(2) = 0$, яғни $u(2,0) = 0$, $u(1) = -1$, яғни $u(1,1) = -1$,

4. $u(x,y)$ функцияның барлық мәндерін салыстырсақ, онда функция өзінің ең үлкен мәнін үшбұрыштың ішкі $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ нүктеде, ал ең кіші мәнін шекара $(1,1)$ нүктеде қабылдайды, яғни

$$u\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}, u(1,1) = -1.$$



12.7-сурет

2-мысал. $u = x^2 - 4x - y^2$ функцияның $x^2 + y^2 = 9$ дөңгелектегі ең үлкен ең кіші мәндерін табайық.

Шешуі. Функцияның дербес туындыларын анықтайық: $u'_x = 2x - 4$, $u'_y = -2y$. Дербес туындыларды нөлге теңестіріп кризистік нүктелерді табамыз:

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ -2y = 0. \end{cases}$$

Сонда D дөңгелек облысқа тиісті тек бір ғана нүкте бар, ол $(2;0) \in D$. Бұл нүктедегі функцияның мәні: $u(2,0) = -4$. Енді $x^2 + y^2 = 9$ шеңбердің бойындағы (шекарадағы) кризистік нүктелерді табайық. Ол үшін шеңбердің теңдеуінен y^2 -ты тауып, u функцияға қойып, x -ке тәуелді бір айнымалы функция аламыз:

$$u = x^2 - 4x - y^2 = x^2 - 4x - (9 - x^2) = 2x^2 - 4x - 9.$$

Сонымен, біз берілген есепті бір айнымалы $u = 2x^2 - 4x - 9$ функцияның $x \in [-3, 3]$ сегменттегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу есебіне келтірдік. Олай болса: $u'_x = 4x - 4 = 0$, $x = 1$. Сонда $u(1) = 2 - 4 - 9 = -11$, $u(-3) = 21$, $u(3) = -3$. Сонымен, D дөңгелек облыстағы $u = x^2 - 4x - y^2$ функцияның $\min_D = -11$, $\max_D = 21$ болады.

Сұрақтар.

1. Жиынның ішкі нүктелері.
2. Жиынның шекара нүктелері.
3. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу ережесі.

Тапсырмалар.

1. $u = x^2 - y^2$ функцияның $x^2 + y^2 \leq 1$ дөңгелектегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табындар. **2.** $u = x^3 + y^3 - 3xy$ функцияның $1 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$ квадраттағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табындар.

13. АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯ

13.1. Айқындалмаған функцияның бар болуы және оның дифференциалдануы

Алдымен айқындалмаған функция туралы түсінік берейік. Бізге функциялық теңдеу берілсін

$$F(x, y) = 0 \quad (13.1)$$

және X жиынындағы кез келген x элементке (13.1) теңдеудің y шешімі бар болсын. Онда X жиынындағы әрбір x -ке (13.1) теңдеудің анықталған y шешімі сәйкес келеді. (13.1) теңдеудің бірнеше шешімі болуы да мүмкін, біз олардың біреуін ғана таңдап аламыз, яғни X жиынында $y = f(x)$ функция анықталған. Бұл жағдайда, әрбір x -ке y мәнді сәйкес қоятын f заңдылық немесе ереже айқын түрде көрсетілмеген, ал ол (13.1) функциялық теңдеумен берілген. Осылайша, $y = f(x)$ функцияның берілу тәсілі **айқындалмаған** деп аталады, ал $y = f(x)$ функцияның өзін **айқындалмаған функция** дейміз. Демек, $y = f(x)$ айқындалмаған функция (13.1) функциялық теңдеудің y айнымалы бойынша шешімі болады, яғни кез келген $x \in X$ үшін $F(x, f(x)) \equiv 0$ тепе-теңдігі орындалады. Сонымен, қандай шарт орындалғанда (13.1) функциялық теңдеудің y бойынша тек бір ғана шешімі бар болады әрі ол үзіліссіз және дифференциалдана ма деген сұрақтарға жауап іздестірейік.

(13.1) функциялық теңдеудің орнына көп айнымалы функциялық

$$F(z, x_1, x_2, \dots) = 0 \quad (13.1)'$$

теңдеуді қарастыруға және жоғарыда $y = f(x)$ айқындалмаған функцияға айтылған түсініктерді $z = \varphi(x_1, x_2, \dots)$ функция үшін келтіруге болады.

Біз алдағы тақырыптарда $(z, x_1, x_2, \dots)$ айнымалы кеңістікті R таңбамен, ал $(x_1, x_2, \dots)$ айнымалы кеңістікті R' таңбамен белгілейтін боламыз және біз төменде қысқаша жазылу әрі геометриялық түсініктеме келтіру үшін x, y екі айнымалыға тәуелді функцияны қарастырамыз.

13.1-теорема. R кеңістігіндегі $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің кейбір маңайында $F(x, y, z)$ функция дифференциалдансын әрі оның $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туындысы осы нүктеде үзіліссіз болсын.

Егер $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде $F(x, y, z)$ функция нөлге тең, ал $\frac{\partial F}{\partial z}$ нөлге тең болмаса, онда жеткіліктігінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін R' кеңістігіндегі $A'_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайдың барлық нүктелері үшін $|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын тек бір ғана $z = \varphi(x, y)$ функция табылады әрі ол

$$F(x, y, z) = 0 \quad (13.2)$$

теңдеудің шешімі болады және ол шешім жоғарыда айтылған $A'_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында үзіліссіз әрі дифференциалданады.

1-ескерту. Жеткіліктігінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін $A'_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайынан $|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздікті және (13.2) теңсіздікті қанағаттандыратын тек бір ғана $z = \varphi(x, y)$ функция табылады.

2-ескерту. $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ маңайдың кез келген $A'(x, y)$ нүктесінде $z = \varphi(x, y)$ функция үзіліссіз болады, егер жеткілігінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын кез келген x пен y үшін

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, мұндағы $z = \varphi(x, y)$, $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$.

3-ескерту. $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ маңайдың кез келген $A'(x, y)$ нүктесінде $z = \varphi(x, y)$ функция дифференциалданады.

4-ескерту. $z = \varphi(x, y)$ функция $A'_0(x_0, y_0)$ нүктенің өзінде де дифференциалданады.

5-ескерту. Теореманың шартындағы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туындыға қойылған **үзіліссіздік шартты** қоймауға болады, бірақ онда дербес туынды мына шартты қанағаттандыруы керек: $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туынды $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің өзінде әрі оның кейбір маңайында нөлге тең емес болуы және осы маңайда оның таңбасы сақталынуы қажет.

Сұрақтар.

1. Функцияның берілу тәсілі **айқындалмаған** деп нені айтамыз?
 2. $y = f(x)$ **айқындалмаған функция** деп қандай функцияны айтамыз?

3. 13.1-теоремадағы $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туындыға қойылған үзіліссіздік шартты қоймауға бола ма ?

4. Егер 3-сұрақтағы $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туындыға қойылған үзіліссіздік шартты қоймауға болса, онда теореманың тұжырымы орындалуы үшін үзіліссіздік шарттың орнына қандай шарт қою керек?

13.2. Айқындалмаған функцияның дербес туындылары

Айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табу үшін 13.1-теорема

$$F(x, y, z) = 0$$

функциялық теңдеу үшін орындалсын. Онда $z = \varphi(x, y)$ функцияның дербес туындылары мына формуладан анықталады:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (13.3)$$

Осы сияқты, егер айқындалмаған функция $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументке тәуелді болса, онда оның дербес туындылары мына формуладан анықталады:

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (13.4)$$

Егер де айқындалмаған функцияның нүктедегі екінші ретті дербес туындысы бар болуын қамтамасыз ету үшін 13.1-теоремада $F(x, y, z)$ функцияға қойылатын шартты толықтыруымыз (күшейтуіміз) керек, яғни функция, қарастырылып отырған нүктеде, екі рет дифференциалдануы керек. Осы толықтырған шарт

орындалсын деп ұйғарып, екінші ретті дербес туындыларды табайық. Ол үшін дифференциалданатын үш аргументті $\Phi(x, y, z)$ функцияны қарастырайық және де мұндағы z айнымалының өзі x, y аргументтері бойынша дифференциалданатын функция болсын. Онда $\Phi(x, y, z)$ функцияны x пен y екі аргументті күрделі функция ретінде қарастыруға болады. Осы күрделі функциядан x пен y бойынша алынған дербес туындылар $\Phi(x, y, z)$ **функцияның толық дербес туындылары** деп аталады және ол $\frac{D\Phi}{Dx}$ және $\frac{D\Phi}{Dy}$ таңбаларымен белгіленеді. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша $\Phi(x, y, z)$ функцияның толық дербес туындыларын мына формуладан табамыз:

$$\begin{aligned}\frac{D\Phi}{Dx} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ \frac{D\Phi}{Dy} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}.\end{aligned}$$

Енді айқындалмаған функцияның екінші ретті дербес туындыларын есептейік. Анықтық үшін $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ дербес туындыны есептейік, ол үшін (13.3) формуладағы $\frac{\partial z}{\partial x}$ бірінші дербес туындыны y бойынша дифференциалдайық әрі ондағы $\frac{\partial F}{\partial x}$ пен $\frac{\partial F}{\partial y}$ дербес туындылардың әрқайсысы да x, y, z аргументтерге тәуелді, ал z айнымалы x, y аргументтерге тәуелді функция болсын, онда

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{D \left[-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right]}{Dy} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial z} \frac{D \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]}{Dy} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{D \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]}{Dy}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2} = \\ &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2}.\end{aligned}$$

Осы екінші ретті туындыдағы $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындының орнына (13.3) формуладағы екінші дербес туындыны қояйық, сонда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^3}. \quad (13.5)$$

Осы сияқты, қалған дербес туындыларды табуға болады.

1-ескерту. $F(x, y)$ функция үшін (13.3) формула мына түрде анықталады ($y = f(x) = \varphi(x) = z$):

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \Big|_{y=f(x)} = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Бұл жағдайда, мысалы $F'_x(x, f(x))$ дербес туындыны есептеу үшін, алдымен $F(x, y)$ функциядан x бойыша туынды аламыз, содан соң y -тің орнына $y = f(x)$ функцияны қоямыз, кері орындауға болмайды. Ал екінші туындыны табу үшін, осы функциядан тағы да бір рет туынды аламыз:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(- \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \right).$$

2-ескерту. Егер $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ теңсіздігі орындалмаса, яғни $F'_y(x_0, y_0) = 0$ теңдігі орындалса, онда A_0 нүктенің маңайында $F(x, y) = 0$ теңдеуінің y бойынша бірнеше шешімі болуы мүмкін. Мысалы, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ теңдеуіне $F(1, 0) = 0$, $F'_y(1, 0) = 0$ теңдіктері орындалады. $A_0(1, 0)$ нүктенің маңайында $x > 1$ үшін, $F(x, y) = 0$ теңдеуінің y бойынша нақты шешімі жоқ, ал $x < 1$ үшін теңдеудің үзіліссіз екі шешімі бар, олар $y = +\sqrt{1-x^2}$, $y = -\sqrt{1-x^2}$. $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$, $F(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0$ теңдеуінің y бойынша $x \neq 0$ үшін шешімі жоқ. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ шарт $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында тек бір ғана $y = f(x)$ функцияның бар болуы үшін

жеткілікті, бірақ та ол қажетті шарт емес. Мысалы, $F(x, y) = x^3 - y^3 = 0$ теңдеуі үшін $O(0,0)$ нүктеде $F(0,0) = F'_y(0,0) = 0$ теңдіктері орындалады, бірақ дегенмен де бұл теңдеу $O(0,0)$ нүктенің маңайнда тек бір ғана $y = x$ ($y = f(x)$) функцияны анықтайды.

Мысал. $z^2 + x^3 + y^4 - 3 = 0$ функцияның $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ дербес туындысын есептейік.

Шешуі. (13.3) формуладан: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2}{2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y^3}{z}$. Осыдан және

(13.5) формуланы пайдаланып $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ дербес туындыны табамыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{D\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{Dy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{3x^2}{2z} \right) \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x^2 y^3}{z^3}.$$

Сұрақтар.

1. Айқындалмаған функцияның дербес туындылары.
2. $\Phi(x, y, z)$ функцияның толық дербес туындыларының анықтамасы.

Тапсырмалар.

1. Егер $z^3 - 4xyz = 7$, онда $z = \varphi(x, y)$ функцияның бірінші ретті дербес туындыларын табыңдар.
2. Егер $z^3 + y^3 + x^3 - 3xyz = 0$, онда $z = \varphi(x, y)$ функцияның бірінші ретті дербес туындыларын табыңдар.
3. Егер $z + y + x = 2^z$, онда $z = \varphi(x, y)$ функцияның бірінші ретті дербес туындыларын табыңдар.
4. Егер $x^y = y^x = 7$, онда $\frac{dy}{dx}$ функцияның бірінші ретті дифференциалын табыңдар.

13.3. Беттің және жазық қисық сызықтың ерекше нүктелері

Декарт координат жүйесінде $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$) теңдеумен берілген S бетті (L жазық қисық сызықты) қарастырайық, мұндағы функция $F(x, y, z)$ ($F(x, y)$) өзінің барлық аргументтері бойынша S беттің (L қисық сызықтың) кез келген нүктесінің белгілі бір маңайының барлық нүктелерінде бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. S беттің (L қисық сызықтың) осы нүктесі **ерекше нүкте** деп аталады, егер $F(x, y, z)$ ($F(x, y)$) функцияның осы нүктедегі бірінші ретті туындылары нөлге тең болса. Ерекше нүктенің маңайында $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$) теңдеуге 13.1-теореманы қолдануға болмайды, яғни $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$) теңдеуі $x, y, z(x, y)$ айнымаларының кем дегенде біреуі бойынша шешіледі деп тұжырымдаған дұрыс емес. Сондықтан S беттегі (L қисық сызықтағы) ерекше нүктеге жапсарлас (мейлінше жақын) орналасқан беттің бөлігі координат жазықтықтардың (қисық сызықтардың бөлігі координат осьтер) біреуінде бір мәнді проекцияланбауы мүмкін. S беттегі (L қисық сызықтағы) ерекше нүктенің маңайындағы бет (қисық сызық) бөлігінің құрылысы күрделі болады, сондықтан оны қосымша зерттеуге тура келеді.

S беттегі (L қисық сызықтағы) ерекше емес нүктелер **қарапайым (жай) нүктелер** деп аталады. Қарапайым нүктелердің маңайына 13.1-теореманы қолдануға болады, сондықтан қарапайым нүктеге жапсарлас орналасқан S беттің (L қисық сызықтың) бөлігін кем дегенде бір координат жазықтығына (координат осіне) бір мәнді проекциялауға болады, демек, беттің бұл бөлігін зерттеу оңайланады. Енді 13.1-теореманы пайдаланып, $y = f(x)$ функцияның кері функциясы бар болуын қамтамасыз ететін белгіге тоқталайық. $y = f(x)$ функцияны функциялық $F(x, y) = f(x) - y = 0$ теңдеу түрінде қарастырамыз. Онда кері функцияның бар болуы жайындағы сұрақ, жоғарыда айтылған функциялық теңдеудің x бойынша шешілуі туралы сұрақпен бірдей. Олай болса, 13.1-теореманы және осы теоремаға келтірілген ескертуді ескеріп, мынадай қорытындыға келеміз: егер x_0 нүктенің кейбір маңайында $y = f(x)$ функцияның туындысы нөлге тең болмаса әрі оның таңбасы сақталса, онда x_0 нүктенің маңайында, $y = f(x)$ функцияның, y_0 нүктенің маңайында анықталатын және дифференциалданатын $x = f^{-1}(y)$ кері функциясы

бар және кері функцияның y_0 нүктедегі туындысы (13.3) формуланың екінші формуласы бойынша $[f'(x_0)]^{-1}$ -ге тең болады.

Сұрақтар.

1. Беттің ерекше нүктесінің анықтамасы.
2. Беттің қарапайым (жай) нүктелерінің анықтамасы.

13.4. Функциялық теңдеулер жүйесінің шешімі туралы теорема

Өткен тақырыпта, бір ғана теңдеумен берілген функциялық теңдеу арқылы анықталған айқындалмаған функцияның бар болуын және оның дифференциалданатынын қарастырдық. Ал енді осы тақырыпта саны m айқындалмаған функциядан құралған функциялық теңдеулер жүйесін қарастырамыз:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \end{cases} \quad (13.6)$$

мұндағы m, n – натурал сандар.

Функциялық теңдеулер жүйенің шешімін

[illegible]

түрінде іздестірейік. Өткен тақырыпта қойылған негізгі сұраққа (13.6) функциялық теңдеулер жүйесіне қояйық, яғни (13.6) жүйенің $z_1, z_2, \dots, z_m$ бойынша өрнектелген (13.7) формула түріндегі шешімін іздестіру.

Анықтама. Егер (13.7.9.16) формуладағы $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциялардың әрқайсысы өзінің $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымаларының өзгеру облысында үзіліссіз әрі дифференциалдана, онда бұл шешім D облыста **үзіліссіз әрі дифференциалданады** деп аталады.

Енді мына белгілеулерді енгізейік: $x_1, x_2, \dots, x_n$, $z_1, z_2, \dots, z_m$ айнымалардан анықталған $n + m$ кеңістікті R таңбамен, ал $x_1, x_2, \dots, x_n$

айнымалардан анықталған n кеңістікті R' таңбамен белгілейік. (13.6.9.15) жүйедегі $F_1, F_2, \dots, F_m$ функцияларды және олардың бірінші ретті дербес туындыларынан анықталған **Якоби анықтауышы (якобиан анықтауышы)** деп аталатын мына анықтауышты қарастырайық және ол былай бегіленеді $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(z_1, z_2, \dots, z_m)}$:

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(z_1, z_2, \dots, z_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial z_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \frac{\partial F_m}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix} = J(z_1, z_2, \dots, z_m). \quad (13.8)$$

13.2-теорема (теореманың жалпыламасы) R кеңістігіндегі $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$ нүктенің кейбір маңайында m функция

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \end{cases} \quad (13.9)$$

дифференциалдансын әрі олардан $z_1, z_2, \dots, z_m$ айнымалары бойынша алынған дербес туындылары A_0 нүктеде үзіліссіз болсын. Егер (13.9) функциялар A_0 нүктеде нөлге тең, ал $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(z_1, z_2, \dots, z_m)}$ якобиан анықтауышы нөлге тең болмаса, онда жеткіліктігінше аз $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \dots, \varepsilon > 0$ сандары үшін R' кеңістігіндегі $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайды

$$|z_1 - z_1^0| < \varepsilon_1, |z_2 - z_2^0| < \varepsilon_2, \dots, |z_m - z_m^0| < \varepsilon_m$$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын тек бір ғана (13.7) функциялар табылады әрі олар (13.6) жүйенің шешімі болады және ол шешім жоғарыда айтылған A_0' нүктенің маңайында үзіліссіз әрі дифференциалданады. Енді (13.6) функциялық теңдеулер жүйенің дербес туындыларын есептейік. Бұл жағдайда, 13.2-теорема

орындалсын деп ұйғарайық. Онда (13.7) функциялар (13.6) жүйенің шешімі. Осы шешімді (13.6) жүйеге қойып, тепе-теңдікті x_l бойынша дифференциалдайық, сонда

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_l} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_1}{\partial x_l} = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_l} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_2}{\partial x_l} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_l} + \frac{\partial F_m}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_m}{\partial x_l} = 0, \end{cases}$$

мұндағы $l = \overline{1, m}$. Соңғы жүйе $\frac{\partial z_1}{\partial x_l}, \frac{\partial z_2}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial z_m}{\partial x_l}$ m белгісізі бар сызықты

теңдеулер жүйе және бұл жүйенің анықтаушы якобиан анықтаушы әрі ол A_0 нүктеде нөлге тең емес. Олай болса, Крамер теоремасы бойынша ([12], 3.2-теорема), соңғы жүйенің тек бір ғана шешімі бар және ол мына формуладан анықталады:

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_l} = \frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, x_l, z_{k+1}, \dots, z_m)}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(z_1, z_2, \dots, z_m)}}$$

функциялық теңдеулер жүйенің екінші, үшінші, т.с.с. дербес туындыларын табу үшін (13.8) функцияларға қосымша шарт талап етеміз, мысалы, екінші ретті дербес туындыны табу үшін (13.8) функциялар қарастырылып отырған нүктеде екі рет дифференциалдануы жеткілікті.

1-мысал. $y + \frac{1}{2} \sin y - x = 0$ функцияның тек бір ғана $y = \varphi(x)$ түрдегі шешімі бар болатынын көрсетейік, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Шешуі. $F(x, y) = y + \frac{1}{2} \sin y - x$ болсын. Онда $F'_y = 1 + \frac{1}{2} \cos y > 0$ болады. Демек, тағайындалған x -тің мәні үшін $F(x, y)$ функциясы y аргумент бойынша өспелі және кез келген тағайындалған x -тің мәні мен қажеттілігінше үлкен $|y|$ мәндері үшін мына теңсіздіктер орындалады:

$$F(x, y) < 0, y < 0, F(x, y) > 0, y > 0.$$

$F(x, y)$ үзіліссіз болғандықтан кез келген x үшін тек бір ғана y -табылып, осы мәндер үшін $F(x, y) = 0$ теңдігі орындалады, яғни кез келген y үшін $y + \frac{1}{2} \sin y - x = 0$ теңдеуі тек бір ғана $y = \varphi(x)$ функцияны анықтайды.

2-мысал. $z^2 - xyz + y^2 = 16$ функциясы $A_0(1; 4; 2)$ нүктенің кейбір маңайында тек бір ғана $z = \varphi(x, y)$ функцияны анықтайды.

Шешуі. $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$ функциясы $A_0(1; 4; 2)$ нүктенің кез келген маңайында дифференциалданады, ал $F'_z = 3z^2 - xy$ дербес туынды A_0 нүктеде үзіліссіз және $F(1; 4; 2) = 0$, $F'_z(1; 4; 2) = 8 \neq 0$, яғни $F(x, y, z)$ функциясы 13.1.9.1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан A_0 нүктенің кейбір маңайында $z^3 - xyz + y^2 = 16$ теңдеуінің тек бір ғана $z = \varphi(x, y)$ шешімі бар және де $\varphi(1; 4) = 2$. $F(x, y, z)$ функциясы A_0 нүктенің маңайында екі рет дифференциалданатын болғандықтан, $z = \varphi(x, y)$ функциясы $A'_0(1; 4)$ нүктенің маңайында екі рет дифференциалданады.

Сұрақтар.

1. Функциялық теңдеулер жүйесінің шешімі туралы теорема.
2. Якоби анықтауышы (якобиан анықтауышы) деп қандай анықтауышты айтамыз?

13.5. Тәуелді функциялар және функциялардың тәуелсіздігінің жеткілікті белгісі. Функциялық матрица

Біз m өлшемді ашық D облысында анықталған және дифференциалданатын бірдей n аргументті m функцияны қарастырайық:

$$\begin{cases} z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \\ z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ z_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \end{cases} \quad (13.10)$$

мұндағы $n \geq m$.

Анықтама. (13.10) функциялардың біреуі, мысалы z_k қалған функцияларға D облысында тәуелді деп аталады, егер D облысының барлық $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нүктелеріне

$$z_k = \Phi(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n) \quad (13.11)$$

теңдігі орындалса, мұндағы $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$ функция өзінің аргументтерінің өзгеру облысында анықталған және дифференциалданатын функция.

(13.10) функциялар D облысында тәуелді деп аталады, егер осы функциялардың біреуі қалғандарына тәуелді болса.

Егер дифференциалданатын $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$ функция жоқ болып, D облысының барлық нүктелері үшін (13.11) теңдік орындалса, онда $z_1, z_2, \dots, z_m$ функциялар D облысында тәуелсіз деп аталады. Басқаша айтқанда, егер (13.10) функциялардың кез келген біреуі қалғандарына тәуелді болмаса, онда (13.10) функциялар D облысында тәуелсіз деп аталады.

13.3-теорема. Егер (13.10) функциялар $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ нүктенің маңайында анықталса әрі дифференциалданса және осы функциялардың якобиан анықтауышы A_0 нүктеде m айнымалардың біреуі бойынша нөлге тең болмаса, онда (13.10) функциялар A_0 нүктенің маңайында тәуелсіз болады.

1-мысал. $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 \cdot x_2$ функциялары $O(0,0)$ нүктенің кез келген маңайында тәуелсіз болатынын дәлелдейік.

Шешуі. y_1 мен y_2 функциялар үшін x_1 мен x_2 айнымалары бойынша якобиан анықтауышын құрайық:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

Осыдан якобиан анықтауышы $O(0,0)$ нүктеде нөлге тең. Бірақ та, $O(0,0)$ нүктенің кез келген маңайында $x_1 \neq x_2$ теңсіздігі орындалатын $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүкте табылады, яғни

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}(A_0) \neq 0.$$

$O(0,0)$ нүктенің $U(0)$ маңайы $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүктенің маңайы болады, онда $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүктенің $U(0)$ маңайы үшін 13.3-

теореманың шарттары орындалады, олай болса, y_1 мен y_2 функциялары $U(0)$ маңайында үзіліссіз.

2-мысал. Егер

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ (x+1)^2, & x \leq -1 \end{cases}$$

Функциялары берілсе, онда сандар осінің кез келген нүктенің кейбір маңайында y_1 функциясы y_2 функциясына тәуелді болатынын, ал бүкіл сандар осінде y_1 функциясы y_2 функциясына тәуелді болмайтынын дәлелдейік.

Шешуі. $x > -1$ теңсіздікті қанағаттандыратын сандар осіндегі кез келген x нүктеге y_1 мен y_2 функциялардың арасындағы тәуелділікті $y_1 = \Phi_1(y_1) \equiv y_2$ формуласымен өрнектейтін маңайды табуға болады, ал $x \leq -1$ үшін $y_1 = \Phi_2(y_2) = 0$ формуламен өрнектейтін маңайды табуға болады. Сондықтан, y_1 функциясы y_2 функциясына x нүктенің кейбір маңайында тәуелді болады. Енді y_1 функциясы барлық сандар осінде y_2 функциясына тәуелсіз болатынын көрсетейік. Ол үшін кері жориық, яғни бүкіл сандар осінде y_1 функциясы y_2 функциясына тәуелді болсын. Онда барлық x үшін дифференциалданатын $\Phi(y_2)$ функциясы табылып, $y_1 = \Phi(y_2)$ теңдік орындалады, яғни $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ функцияларды $y_1 = \Phi(y_2)$ теңдікке қойғанда, бұл теңдік x айнымалы бойынша тепе-теңдікке айналады: $y_1(x) \equiv \Phi(y_2(x))$. Осы тепе-теңдіктегі $x = -2$ болсын делік және $y_1(-2) = 0$, $y_2(-2) = 1$ теңдіктерді ескеріп, $\Phi(1) = 0$ теңдігін аламыз. Енді $x = 1$ болсын және $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 1$ теңдіктерін ескеріп, $\Phi(1) = 1$ теңдігін аламыз. Сонымен, $\Phi(1) = 0$ және $\Phi(1) = 1$ теңдіктері бір-біріне қарама-қайшы келеді. Демек, бүкіл сандар осінде $y_1(x)$ функциясы $y_2(x)$ функциясына тәуелді емес.

3-мысал. $y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$, $y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2$ функцияларын сызықты тәуелділікке зерттейік.

Шешуі. y_1, y_2, y_3 функциялардың функционалды матрицасын құрайық

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1 + x_2) & 2(x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) \end{pmatrix}$$

Бұл матрицаның нөлге тең емес екінші ретті миноры бар, мысалы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

ал үшінші ретті барлық минорлар нөлге тең. Онда y_1 мен y_2 функциялары $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ нүктенің маңайының әрбір нүктесінде тәуелсіз, яғни E^4 кеңістігінде олар тәуелсіз, ал y_3 функция $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ функцияларына A нүктенің кейбір маңайының әрбір нүктесінде тәуелді. Дегенмен де, осыдан y_3 функция y_1 мен y_2 функцияларға бүкіл E^4 кеңістігінде тәуелді деп айтуға болмайды (2-мысал). Бірақ та y_1, y_2, y_3 функциялары $y_3 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ өрнекпен түрленетінін оңай көз жеткізуге болады, яғни y_3 функция бүкіл E^4 кеңістікте y_1 мен y_2 функцияларына тәуелді. Сонымен, y_1, y_2, y_3 функциялары E^4 кеңістікте тәуелді болады.

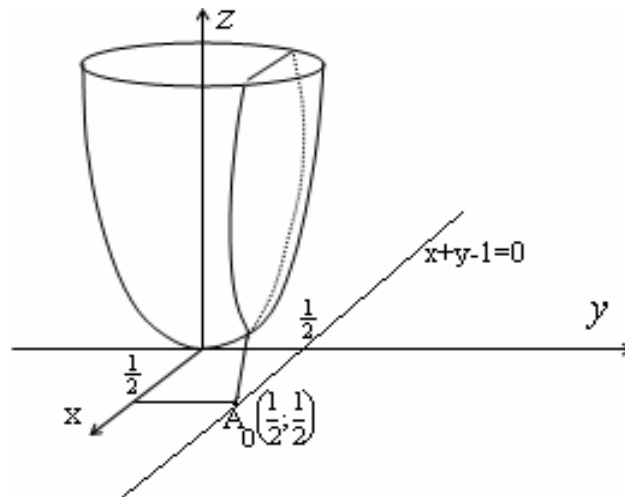
Сұрақтар.

1. D облысында функциялардың тәуелділігінің анықтамасы.
2. D облысында функциялардың тәуелсіздігінің анықтамасы.

13.6. Функцияның шартты экстремумы

Біз өткен тақырыпта, функцияның локальды экстремумын қарастырдық, мұнда функцияның аргументтері ешқандай қосымша шартқа байланыссыз болды. Математикада функцияның экстремумын іздестіргенде оның аргументтері қосымша шартқа байланысты болады. Осындай функцияның экстремумы шартты **экстремум** деп аталады. Мысалы, $z = x^2 + y^2$ функцияның аргументтері $x + y - 1 = 0$ теңдеуге байланысты болатын $z(x, y) = x^2 + y^2$ функцияның экстремумын табу керек болсын, яғни $z(x, y)$ функцияның экстремумын бүкіл XOY жазықтығында емес

$x + y - 1 = 0$ түзуінің бойында ғана іздестіру керек. Ол үшін $z = x^2 + y^2$ функциядағы y айнымалының орнына $x + y - 1 = 0$ түзуден y -ті тауып қоямыз: $z(x) = 2x^2 - 2x + 1$.



13.1-сурет

Енді бір айнымалы $z(x) = 2x^2 - 2x + 1$ функцияның экстремумын табайық (13.1-сурет):

$$z' = 4x - 2, \quad z'' = 4, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Онда $z(x)$ функциясының $x = \frac{1}{2}$ нүктеде $z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ минимумы бар.

Сонымен, $x + y - 1 = 0$ түзумен байланысты $z(x, y) = x^2 + y^2$ функциясының $A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ нүктедегі шартты минимумы $u_{min} = \frac{1}{2}$ -ге тең болады. Ал $z(x, y) = x^2 + y^2$ функцияның шартсыз минимумы $O(0, 0)$ нүктеде қабылдайды және ол $z(0, 0) = 0$ -ге тең. 13.1-суреттен $z(x, y) = x^2 + y^2$ функцияның XOY жазықтықтағы минимумы, осы функцияның $x + y - 1 = 0$ түзуі бойындағы минимумымен бірдей емес екенін байқауға болады.

Енді $n + m$ айнымалы

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (13.12)$$

функцияның аргументтері **байланыс шарттар (тендеулер)** деп аталатын

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (13.13)$$

m теңдеумен байланысқан (13.12) функцияның шартты экстремумын табайық және $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ нүктенің координаттары (13.13) байланыс теңдеулерді қанағаттандырсын.

Анықтама. (13.13) теңдігі орындалғанда (13.13) функцияның A_0 нүктеде **шартты максимумы (минимумы) бар** деп аталады, егер A_0 нүктенің маңайы табылып, координаттары (13.13) теңдікті қанағаттандыратын осы маңайдың кез келген $A(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ ($A \neq A_0$) нүктесі үшін $f(A) > f(A_0)$ ($f(A) < f(A_0)$) теңсіздігі орындалса.

Демек, координаттары (13.13) байланыс шарттарды қанағаттандыратын A_0 нүктедегі **функцияның шартты максимумы (минимумы)** дегеніміз, A_0 нүктенің кейбір маңайындағы барлық нүктелерге қатысы жоқ, тек координаттары (13.13) теңдіктерді қанағаттандыратын A_0 нүктенің маңайындағы нүктелердегі (13.12) функция мәндерінің ең үлкен (ең кіші) мәні.

Байланыс (13.13) шарттары бар (13.12) функцияның шартты экстремумын табу үшін (13.13) теңдеулердегі $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ функциялар A_0 нүктенің кейбір маңайында дифференциалдансын және A_0 нүктенің өзінде $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ функциядан $y_1, y_2, \dots, y_m$ айнымалары бойынша алынған дербес туындылары үзіліссіз, ол якобиан анықтаушы

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0, \quad i \neq \overline{1, m} \quad (13.14)$$

болсын деп ұйғарайық. Онда, 13.2-теорема бойынша жеткілікті аз $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ оң сандары үшін $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ айнымалы кеңістігіндегі $A'_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайдың барлық нүктелерінде

$$|y_1 - y_1^0| < \varepsilon_1, |y_2 - y_2^0| < \varepsilon_2, \dots, |y_m - y_m^0| < \varepsilon_m$$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (13.15)$$

функциялары анықталады әрі олар тек біреу ғана және (13.13) жүйенің дифференциалданатын шешімі болады. Табылған (13.15) функцияларды (13.12) формулаға қойып, (13.13) байланыс теңдеулері бар (13.12) функцияның A_0 нүктедегі шартты экстремумының бар болуын табу есебінен, $x_1, x_2, \dots, x_n$ аргументті күрделі

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (13.16)$$

функцияның $A'_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нүктедегі шартсыз экстремумының бар болуын табу есебіне келеміз.

Енді шартты экстремумды іздестіргенде (13.13) байланыс теңдеулерді шешпей-ақ, A_0 нүктедегі функцияның шартты экстремумы бар болуының ең болмағанда қажетті белгісін табу жолын қарастырайық. Ол үшін (13.12) функция A_0 нүктеде дифференциалдансын әрі осы нүктеде (13.13) байланыс шарттары бар (13.12) функцияның **шартты экстремумы бар болсын** (немесе (13.16) функцияның A'_0 нүктеде шартсыз экстремумы бар болсын). $z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция экстремумының A'_0 нүктедегі қажетті белгісі бойынша, осы функцияның A_0 нүктедегі бірінші ретті дифференциалы кез келген $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ бойынша нөлге тепе-тең:

$$dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(A'_0)dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(A'_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(A'_0)dx_m = 0. \quad (13.17)$$

Бірінші дифференциалдың инварианттылық қасиеті бойынша және (13.16) формуланы пайдаланып, (13.17) формуланы мына түрде жазайық:

$$\begin{aligned} dz = & \frac{\partial f}{\partial x_1}(A_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A_0)dx_n + \\ & + \frac{\partial f}{\partial y_1}(A_0)dy_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(A_0)dy_m = 0, \end{aligned} \quad (13.18)$$

мұндағы $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ дифференциалдар (13.16) функциялардың дифференциалдары. Олай болса, (13.18) теңдік $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ бойынша нөлге тепе-тең емес. Енді (13.13) жүйенің шешімі болатын (13.16) функцияларды (13.13) байланыс шарттарға қойдық деп есептейік. Бұл жағдайда, (13.13) байланыс шарттар тепе-теңдіктерге айналады және оларды дифференциалдайық:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0, \end{cases} \quad (13.19)$$

мұндағы дербес туындылар $A_0(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ нүктеде алынған.

Ұйғаруымыз бойынша, (13.14) якобиан анықтаушы A_0 нүктеде нөлге тең емес, олай болса, (13.19) сызықты теңдеулер жүйедегі $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ дифференциалдарын $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ дифференциалдар арқылы сызықты функция ретінде өрнектеуге болады. Осы $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ өрнектерді тауып, (13.18) теңдікке қояйық және оларды $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ өрнектері бойынша жинақтап мына теңдікті аламыз:

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n = 0,$$

мұндағы $A_1, A_2, \dots, A_n$ таңбалары арқылы A_0 нүктедегі $f, F_1, F_2, \dots, F_m$ функциялардың дербес туындылары белгіленген.

Соңғы теңдеуде тек қана тәуелсіз айнымалардың дифференциалдары ғана бар, олай болса бұл теңдіктен

$$A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_n = 0 \quad (13.20)$$

теңдіктерін аламыз. (13.20) теңдіктермен) (13.13) байланыс шарттарды біріктіріп, (13.13) байланыс шарттары бар (13.12) **функция экстремумы бар болуының қажетті белгісін** табамыз:

$$\begin{aligned} A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_n = 0, \\ F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_m = 0. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Сонымен, функцияның шартты экстремумы бар болуы мүмкін болатын $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ нүктені табу үшін $n + m$ белгісізі бар $n + m$ теңдеулер жүйесін шешу қажет:

$$\begin{cases} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, & i = \overline{1, m}, \\ A_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, & i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Осы жүйені $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ белгісіздері арқылы шешіп, A нүктенің координатын табамыз.

Енді функцияның шартты экстремумын табу үшін A_0 нүктедегі $d^2\Phi$ екінші ретті дифференциалдың (квадрат пішін) таңбасын есептеу керек, яғни егер $d^2\Phi|_{A_0} > 0$ ($d^2\Phi|_{A_0} < 0$) болса, онда (13.12), (13.13) функцияның A_0 нүктеде шартты минимумы (максимумы) бар.

Біз жоғарыда функцияның шартты экстремумын **айнымаларды айыру әдісі** деп аталатын әдіспен анықтадық.

Енді функцияның шартты экстремумын табу үшін **Лагранж әдісі** деп аталатын әдісті қарастарайық.

Сұрақтар.

1. Функцияның A_0 нүктедегі шартты максимумы.
2. Функцияның A_0 нүктедегі шартты минимумы.
3. Функцияның A_0 нүктедегі шартты экстремумы.
4. Айнымаларды айыру әдісі.
5. Функцияның экстремумы бар болуының қажетті белгісі.
6. Функцияның шартты максимумы мен минимумы.

13.7. Лагранждың белгісіз көбейткіштер әдісі

1. Біз жоғарыдағы тақырыпта $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымаларды тәуелсіз, ал $y_1, y_2, \dots, y_m$ айнымаларды $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалыларға тәуелді функция ретінде қарастырдық. Көп жағдайда, осы айтылған есепті күрделендіре түседі. Сондықтан Лагранж ұсынған әдіспен танысайық. Ол үшін (13.19) жүйені, әзірше белгісіз $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ тұрақты көбейткіштерге көбейтейік:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеге (13.18) теңдікті мүшелеп қосайық және $dx_1, dx_2, \dots, dx_m, dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ дифференциалдары арқылы жинақтап жазайық:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_1 + \dots + \\ & + \left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) dx_n + \\ & + \left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \right) dy_1 + \dots + \\ & + \left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} + \frac{\partial f}{\partial y_m} \right) dy_m = 0. \end{aligned}$$

Осыдан

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m + f)}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \\ & + \frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m + f)}{\partial y_m} dy_m + \\ & \frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m + f)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \\ & + \frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m + f)}{\partial x_n} dx_n = 0, \end{aligned}$$

мұндағы $f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m$ функцияны $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ әрпімен белгілейік, онда

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n = 0, \quad (13.22)$$

мұндағы функция

$$\psi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m$$

Лагранж функциясы деп аталады. Өткен тақырыпта $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = F_i$ функцияға қойылған шарттар орындалсын деп ұйғарайық және белгісіз $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ тұрақты көбейткіштерді

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0 \quad (13.23)$$

теңдіктері орындалатындай етіп таңдап алайық. (13.23) теңдіктері орындалатындай λ_i ($i = \overline{1, m}$) көбейткіштерді таңдап алуға болады, себебі (13.23) теңдіктері мына сызықты жүйеге өрнектелінеді:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_2} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0 \end{cases}$$

және ұйғаруымыз бойынша, осы жүйенің якобианы нөлге тең емес. Енді (13.22) теңдікке (13.23) теңдіктерді пайдаланып, мына теңдікке келеміз:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (13.24)$$

Жоғарыда айтылғандай, $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылары тәуелсіз болғандықтан, (13.24) теңдіктен мына теңдіктерді аламыз:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \quad (13.25)$$

Енді (13.23) пен (13.25) теңдіктерге (13.9) функцияның (13.13) байланыс шарттарын біріктіріп, $n + 2m$ теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0, \\ F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_m = 0. \end{cases} \quad (13.26)$$

Бұл жүйеден функцияның шартты экстремумы бола алатын нүктенің $n + m$ $((x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m))$ координатын және саны m -ге тең $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ көбейткіштерді анықтаймыз.

Осы айтылғандарды қорыта келе мына тұжырымға келеміз (**шартты экстремумның қажетті белгісі**): егер

1) $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ нүктеде дифференциалданса әрі осы нүктеде функцияның (13.13) байланыс шарттары бойынша шартты экстремумы бар болсын;

2) (13.13) байланыс шарттарына A_0 нүктенің кейбір маңайында 13.2.9.2-теореманың барлық шарттары (13.15) функцияларға орындалсын. Онда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ сандары табылып, Лагранж функцияның барлық бірінші ретті дербес туындылары A_0 нүктеде нөлге тең, яғни (13.26) теңдіктер орындалады.

Сұрақтар.

1. Лагранж функциясы.
2. Шартты экстремумның қажетті белгісі.

13.8. Шартты экстремумның жеткілікті белгісі

Функцияның шартты экстремумының A_0 нүктедегі (13.26) қажетті белгісі орындалсын деп ұйғарайық әрі осыған қосымша (13.12) функциялардың екінші ретті дифференциалы A_0 нүктенің маңайында бар болсын және барлық екінші ретті дербес туындылары A_0 нүктенің өзінде үзіліссіз болсын. Енді (13.12) функцияның $A(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ мен $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ нүктелердегі айырымын қарастырайық:

$$\begin{aligned} f(A) - f(A_0) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) - \\ &- f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) \end{aligned} \quad (13.27)$$

Осы сияқты Лагранж функцияның осы нүктелердегі айырымын қарастырайық:

$$\begin{aligned}\psi(A) - \psi(A_0) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) + \\ &+ \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) + \dots + \\ &+ \lambda_m F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) - \\ &- f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) - \\ &- \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) - \dots - \\ &- \lambda_m F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m).\end{aligned}$$

Осыдан (13.13) теңдіктерді ескеріп

$$\begin{aligned}\psi(A) - \psi(A_0) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) + \\ &+ \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)\end{aligned}\quad (13.28)$$

теңдікті аламыз. (13.27) бен (13.28) салыстырсақ, онда (13.12.9.33) функция мен Лагранж функцияның экстремумдары бірдей. Олай болса, (13.13) байланыс шарттары бар (13.12) функцияның A_0 нүктедегі шартты экстремумының жеткілікті белгісін табу үшін, (13.26) теңдеулерге қосымша Лагранж функцияның A_0 нүктедегі екінші ретті дифференциалының таңбасын анықтау керек. Онда (13.13) байланыс шарттары бар (13.12) функцияның A_0 нүктедегі минимумы (максимумы) бар, егер

$$d^2\psi|_{A_0} > 0 \quad (d^2\psi|_{A_0} < 0)$$

теңсіздігі орындалса.

Функцияның экстремумы бар болуы мүмкін $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ нүктедегі Лагранж функцияның осы нүктедегі екінші ретті дифференциалын $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ айнымалылардың барлығы тәуелсіз деп қарастырғанда да есептей аламыз. Шынында да, жалпы жағдайда $d^2\psi$ дифференциалы инвариантты емес және егер $y_1, y_2, \dots, y_m$ айнымалылары $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалыларына тәуелді болса, онда

$$d^2\psi = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + dy_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + dy_m \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} dy_2^2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_m} dy_m^2.$$

Функцияның экстремумы бар болуы мүмкін A_0 нүктеде

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0$$

теңдіктері орындалады. Сондықтан, m $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_m$ айнымалары тәуелсіз болғанда да екінші ретті дифференциалды (13.23) формуладан табамыз, яғни

$$d^2\psi = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + dy_m \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^2 \psi \quad (13.29)$$

мұндағы $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ тәуелсіз айнымалардың дифференциалы, ал $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ дифференциалдар (13.15) функциялардың $A_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нүктедегі дифференциалдары.

1-мысал. Лагранж әдісін пайдаланып, $z - x = 1$, $y - xz = 1$ байланыс шарттары бар $f(x, y, z) = x + y + z^2$ функцияның шартты экстремумын табайық.

Шешуі. Лагранж функциясын құрайық

$$(\psi = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m):$$

$$\psi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1).$$

(13.30) теңдеулер жүйені құрайық (5-теңдеу: 3 айнымалы, екі байланыс шарт):

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - z\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйенің $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ белгісіздерін табамыз (жүйенің тек бір ғана шешімі бар): $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Демек, f

функцияның шартты экстремумы бар болуы мүмкін нүкте тек $A_0(-1;1;0)$ нүкте ғана, $A_0(-1;1;0)$ нүктенің маңайында

$$\begin{cases} F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0 \end{cases}$$

жүйенің тек бір ғана $y(x), z(x)$ шешімі бар болатынын атап өтейік, бізге ол шешім әзірше қажет емес және ол шешімді айқын түрде табуға болады. Енді

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1 \end{cases}$$

жүйеге $y(x), z(x)$ шешімдерді қойдық деп ұйғарып, осыдан алынған тепе-теңдікті дифференциалдайық:

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - zdx - xdz = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x + z)dx. \end{cases}$$

Енді Лагранж функцияның екінші дифференциалын есептейік:

$$d^2\psi = 2(dz)^2 + 2\lambda_2 dx dz.$$

Осы өрнекке $\lambda_2 = -1$, $dz = dx$ -ті қойып, оң анықталған dx бір айнымалы квадрат форманы аламыз:

$$d^2\psi = 2(dx)^2 + 29(dx)^2 = 4(dx)^2 > 0.$$

Осыдан $z - x - 1 = 0$, $y - xz - 1 = 0$ байланыс шарттары бар $f = x + y + z^2$ функцияның $A_0(-1;1;0)$ нүктеде минимумы бар, $0 < f_{\min}(-1;1;0) = 0$ -ге тең.

Осы мысалды, **айнымаларды ажырату (айыру) әдісі** деп аталатын әдіспен функцияның экстремумын табайық. Ол үшін байланыс шарттарды бір жүйеге келтіріп, жүйені y пен z айнымалары бойынша шешейік: $y = x^2 + x + 1$, $z = x + 1$. Анықталған y пен z өрнектерді f функцияға қойсақ, онда біз бір айнымалы $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ функцияны аламыз. Осыдан $f'(x) = 4x + 4 = 0$, $x = -1$. Онда $f(x)$ функцияның экстремумы бар бола алатын тек бір ғана нүкте бар, ол $x = -1$ нүкте. Енді $f''(x) = 4 > 0$, яғни $f''(-1) > 0$. Сонымен, $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ функцияның $x = -1$ нүктеде минимумы

бар, ол $f_{\min}(-1) = 2 - 4 + 2 = 0$ -ге тең. Бір айнымалы функцияның $x_{\min} = -1$ нүктесіне сәйкес келетін $f(x, y, z)$ функцияның минимум нүктесін байланыс шарттардан табамыз, яғни $y = 1, z = 0$. Сонымен, байланыс шарттары бар $f(x, y, z)$ функцияның $A_0(-1; 1; 0)$ нүктеде минимумы бар, ол $f(-1; 1; 0) = 0$ -ге тең.

2-мысал. Айнымаларды айыру әдісімен

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

байланыс шарттары бар $f(x, y, z) = x + y - z$ функцияның шартты экстремумын табамыз.

Шешуі. Байланыс шарттар $y(x)$ және $z(x)$ айнымалары бойынша шешілді және оларды осы жүйеге қойып тепе-теңдік алдық деп есептейік те, оның екі жағында дифференциалдайық:

$$\begin{cases} (12x^2 + 12)dx + (12y^2 + 12)dy + (12z^2 + 12)dz = 0, \\ dx + dy = 0. \end{cases}$$

Осыдан

$$\begin{cases} dy = -dx, \\ dz = \frac{1 - 2x}{z^2 + 1} dx. \end{cases}$$

Енді $f(x, y, z)$ функцияны дифференциалдайық: $df = dx + dy - dz$, осы дифференциалдағы dx пен dy -ке жоғарыдағы өрнектерді қойып, dx бойынша жинақтайық, сонда

$$df = \frac{2x - 1}{z^2 + 1} dx \equiv A dx,$$

мұндағы $A = \frac{2x - 1}{z^2 + 1}$. Байланыс шарттар мен $A = 0$ теңдікті біріктіріп, жүйе құрайық және одан x, y, z белгісіздерді табайық:

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13, \\ x + y = 1, \\ \frac{2x - 1}{z^2 + 1} = 0. \end{cases}$$

Осыдан, $x = \frac{1}{2}$, $y = x$, $z = 0$, яғни $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$. Демек, соңғы жүйенің тек бір ғана шешімі бар. $A_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ нүкте f функцияның экстремумы бар болу мүмкін нүктесі. Енді $df = \frac{2x-1}{z^2+1}dx$ теңдікті бір рет дифференциалдайық:

$$d^2f = \frac{2(z^2+1)dx + (2x-1)2zdz}{(z^2+1)^2}dx,$$

мұндағы $dz = \frac{1-2x}{z^2+1}dx$ -ті қойып, d^2f екінші дифференциалдың $A_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ нүктедегі таңбасын анықтаймыз: $d^2f = 2(dx)^2 > 0$. Сонымен, $f(x, y, z)$ функцияның A_0 нүктеде шартты минимумы бар және ол $f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) = 1$ -ге тең.

3-мысал. $u = xyz$ функцияның $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ беттегі шартты экстремумын Лагранж әдісін пайдаланып есептейік.

Шешуі. Ол үшін Лагранж функциясын құрайық:

$$\psi = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

және оның x, y, z айнымалары бойынша дербес туындыларын анықтайық:

$$\psi'_x = yz - 2\lambda x, \quad \psi'_y = xz - 2\lambda y, \quad \psi'_z = xy - 2\lambda z.$$

Енді λ -ны және экстремум мүмкін болатын нүктенің координатын табу үшін мына жүйені шешейік:

$$\begin{cases} yz - 2\lambda x = 0, \\ xz - 2\lambda y = 0, \\ xy - 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйені x, y, z, λ белгісіздері бойынша шешіп, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ -ге сәйкес келетін төрт $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(1; -1; -1)$, $M_3(-1; 1; -1)$,

$M_4(-1; -1; 1)$, ал $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ -ге сәйкес келетін төрт $M_5(-1; -1; -1)$, $M_6(-1; 1; 1)$, $M_7(1; -1; 1)$, $M_8(1; 1; -1)$ нүктелерді табамыз.

Лагранж функцияның екінші ретті дифференциалын анықтайық:

$$d^2\psi = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(zdxdy + ydxdz + xdydz).$$

Алдымен, $M_1(1; 1; 1)$ нүктедегі $d^2\psi$ функцияның (квадрат пішіннің) таңбасын есептейік. Сонда

$$d^2\psi(M_1, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2(dxdy + dxdz + dydz) = -(dx - dy)^2 - dz^2 + 2(dx + dy)dz.$$

Функцияның байланыс шартынан M_1 нүктедегі dz -ті есептейік:

$$2zdz|_{M_1} = (-2xdx - 2ydy)|_{M_1} dz = -dx - dy = -(dx + dy).$$

dz -тің мәнін $d^2\psi(M_1, \lambda_1)$ -ге қояйық, сонда $d^2\psi(M_1, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dx + dy)^2 < 0$.

Сонымен, M_1 нүктеде функцияның максимумы бар: $u_{\max}(M_1) = 1$.
Енді $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $M_2(1; -1; -1)$ нүкте үшін $d^2\psi(M_2, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz$. Байланыс шарттан: $dx = dy + dz$, онда $d^2\psi(M_2, \lambda_1) = (dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dy + dz)^2 < 0$.

Демек, M_2 нүктеде u функцияның максимумы бар

$$u_{\max}(M_2) = 1.$$

Осылайша, M_3, M_4 нүктелерде $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ болғанда функцияның максимумы бар және олар 1-ге тең, яғни

$$u_{\max}(M_1) = u_{\max}(M_2) = u_{\max}(M_3) = u_{\max}(M_4) = 1.$$

Енді $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $M_5(-1; -1; -1)$ нүктедегі $d^2\psi$ функцияның таңбасын анықтайық:

$$d^2\psi(\lambda_2, M_5) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz,$$

мұндағы $dx + dy + dz = 0$.

Онда

$$d^2\psi(M_5, \lambda_2) = (dx - dy)^2 + dz^2 + 2(dx + dy)^2 > 0.$$

Демек, u функцияның M_5 нүктеде минимумы бар: $u_{\min}(M_5) = -1$. Осы сияқты M_6, M_7, M_8 нүктелерде де функцияның шартты минимумы -1-ге тең, яғни

$$u_{\min}(M_5) = u_{\min}(M_6) = u_{\min}(M_7) = u_{\min}(M_8) = -1.$$

4-мысал. $A_0(0; 0; 3)$ нүктеден $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ эллипсоидқа тиісті нүктеге дейінгі ең үлкен арақашықтықты анықтайық.

Шешуі: Эллипсоидтың кез келген $A(x, y, z)$ нүктесінен $A_0(0; 0; 3)$ нүктеге дейінгі ең үлкен арақашықтықты $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2}$ формуладан табамыз. Ең үлкен арақашықтықты табу үшін $f = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z - 3)^2$ функцияның $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0$ байланыс шарты бойынша анықталған экстремумын тапсақ жеткілікті. Ол үшін Лагранж функциясын табайық:

$$\psi = x^2 + y^2 + (z - 3)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + (z - 3)^2)$$

және

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2z - 6 + 8\lambda z, \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

жүйені қарастырайық. Эллипсоидтың осі OX осімен беттескен, олай болса, $x \neq 0$. Сондықтан, $2x + 2\lambda x = 0$ теңдеуден $\lambda = -1$ -ге тең болады. Жүйенің екінші және үшінші теңдеулерінен $y = 0, z = -1$.

Онда жүйенің ең соңғы теңдеуінен $x = \pm 2$ болады. Сонымен, $f(x, y, z)$ функцияның экстремумы бар болуы мүмкін нүктесі екеу: $A_1(2; 0; -1)$ және $A_2(-2; 0; -1)$. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ теңдеуге $z = z(x, y)$ шешімі қойылды деп есептеп, тепе-теңдікті дифференциалдайық:

$$x dx + 2y dy + 4z dz = 0.$$

Осыдан $dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy$. Енді Лагранж функцияның екінші дифференциалын табайық:

$$d^2\psi = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 2(1+2\lambda)(dy)^2 + 2(1+8\lambda)(dz)^2.$$

Соңғы теңдікке $\lambda = -1$, A_1 немесе A_2 нүктенің координаттарын және $dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy$ өрнекті қояйық, сонда осы екі жағдайда да dx пен dy арқылы өрнектелген теріс анықталған квадрат формаға келеміз:

$$-2(dy)^2 - 3,5(dx)^2 < 0.$$

Демек, $f(x, y, z)$ функцияның $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ байланыс шарттары бойынша, A_1 мен A_2 нүктелерде шартты максимумы бар, яғни эллипсоидта A_1 мен A_2 екі нүкте бар, ол нүктелер $A_0(0;0;3)$ нүктеден ең үлкен арақашықтықта орналасқан, ол қашықтық $\rho = 2\sqrt{5}$ -ге тең.

5-мысал. $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ функцияның $x^2 + y^2 \leq 25$ облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін есептейік.

Шешуі. Берілген функция $x^2 + y^2 \leq 25$ тұйық шектелген облыста үзіліссіз. Сондықтан Вейерштрастың екінші теоремасы бойынша функция осы облыста өзінің ең жоғарғы мен ең төменгі мәндерін қабылдайды. Бұл жағдайда функцияның ең үлкен (ең кіші) мәні функцияның $x^2 + y^2 \leq 25$ жиынындағы $\sup u$ ($\inf u$) -на тең. Енді функцияның x және y айнымалары бойынша дербес туындысын анықтайық:

$$u'_x = 2x - 12, \quad u'_y = 2y + 16.$$

Осы дербес туындыларды нөлге теңестістіріп шешейік:

$$\begin{cases} 2x - 12 = 0, \\ 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

Осыдан $x = 6, y = 8$. Бұл нүкте $x^2 + y^2 \leq 25$ жиынға тиісті емес ($36 + 64 > 25$). Сондықтан функция $\sup u$, $\inf u$ мәндерін $x^2 + y^2 = 25$ шеңбердің бойында қабылдайды.

Енді Лагранж функциясын құрайық:

$$\psi = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(25 - x^2 - y^2).$$

Лагранж функцияның дербес туындыларын табайық:

$$\psi'_x = 2x - 12 - 2\lambda x, \quad \psi'_y = 2y + 16 - 2\lambda y.$$

Осы дербес туындыларды нөлге теңестіріп және оны шеңбердің теңдеуімен біріктіріп, жүйені x, y, λ белгісіздері арқылы шешейік:

$$\begin{cases} x - \lambda x = 6, \\ y - \lambda y = -8, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Сонда біз шартты экстремумның мүмкін болатын нүктенің координатын табамыз $x_1 = 3, y_1 = -4$ және $x_2 = -3, y_2 = 4$. Осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептейік:

$$u(M_1) = -75, \quad u(M_2) = 125.$$

Сонда $\sup u = 125, \inf u = -75$.

Сұрақтар.

1. Байланыс шарттар деп қандай шарттарды айтамыз?
2. Шартты максимумның жеткілікті белгісі.
3. Шартты минимумның қажетті белгісі.

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. Қасымов Қ. Ә., Қасымов Е. Ә. Жоғары математика курсы. Математикалық анализ. III т., 1-б. Алматы: Қазақ университеті, 2006.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. II. М.: Высшая школа, 1981.
6. Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Высшая школа, 1984.
7. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Математический анализ. М.: Наука, 1984.
8. Темиргалиев Н. Математикалық анализ. I–III т. Алматы: Мектеп, 1987.
9. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М.: Наука, 1977.
10. Демидович Б. П. Сборник упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.
11. Қасымов Қ. Ә., Қасымов Е. Ә. Жоғары математика курсы. Аналитикалық геометрия. Алматы: Санат, 1994.
12. Қасымов Қ. Ә., Қасымов Е. Ә. Жоғары математика курсы. Сызықты алгебра. Алматы: Санат, 1997.
13. Қасымов Е. Ә. Векторлық алгебра. Алматы: МНО РК РУМК, 1991.
14. Қасымов Е. Ә., Баймулдина С. А., Мустафина К. Қ. Санды тізбектер. Бір айнымалы функциялар. Алматы: МНО РК РУМК, 1991.
15. Қасымов Е. Ә. Аналитикалық геометрия. Алматы: МНО РК РУМК, 1992.
16. Қасымов Е. Ә. Анықталмаған және анықталған интегралдарды құрылыста қолдану. Алматы: МНО РК РУМК, 1994.
17. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. I. М.: Наука, 1982.
18. Қасымов Е. Ә. Математиканың арнайы курстары анализ. Алматы: ҚазҰТУ, 2005.
19. Қасымов Е. Ә. Жоғары математика. 1-б. Алматы: ҚазҰТУ. 2003.

20. *Сүлеймен Ж.* Дифференциалдық теңдеулер курсы. Алматы: Қазақ университеті, 2009.
21. *Бектаев Қ.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: Рауан, 1991.
22. *Сүлейменов Ж., Қасымов Е. Ә.* Тұрақты коэффициентті біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табудың жаңа алгоритмі // Қазақстан жоғары мектебі. №2(1). 2010. 5–8 б.
23. *Жаңбырбаев Б. С.* Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы: Мектеп, 1988.
24. *Қасымов Е. Ә., Баймолдина С. А., Алиынбаева Е. Қ., Мустафина К. Қ.* Жоғары математикадан дәріс курсы. 4-б. Алматы: МНО РК РУМК, 1998.
25. *Қасымов Е. Ә., Қасымов Ә. Ә.* Дифференциал теңдеуді құрылыста қолдану. Алматы: МНО РК РУМК, 1999.
26. *Хасеинов К. А.* Каноны математика. Алматы: Атамұра, 2002.
27. *Хасеинов К. А.* Математика канондары. Алматы: Атамұра, 2003.
28. *Хасеинов К. А.* Задачи и упражнения по инженерной математики. Ч. 1. Алматы: Полиграфкомбинат, 2008.
29. *Хасеинов К. А.* Задачи и упражнения по инженерной математики. Ч. 2. Алматы: Полиграфкомбинат, 2009.
30. *Khasseinov K.* Canons of mathematics. Moscow «Nauka», 2007.
31. *Айдос Е. Ж.* Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, 2003.
32. *Айдос Е. Ж.* Студенттердің өзіндік тапсырмалары. 1–4 б. Алматы, 2008.
33. *Әубәкір С. Б.* Жоғары математика. 1, 2 б. Алматы, 2000.

Оқулық басылым

Еділ Әбдіхалықұлы Қасымов
Бимұрат Жұмабекұлы Сағындықов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА

2-бөлім

Оқу құралы

РБ бастығы

З. А. Ғұбайдулина

Редакторы

Т. С. Жақсыбаева

Компьютерлік беттеу

Д. Ш. Тажиева

Басуға қол қойылды 27.02.2014 ж.

Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84 1/16. №1 баспаханалық қағаз.

Көлемі 11,7 е-б.т. 10,9 ш.-б.т.

Тапсырыс № 291. Бағасы келісімді.

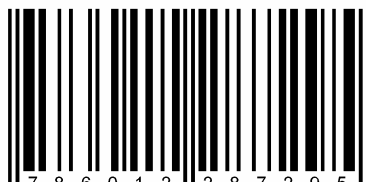
Қ. И. Сәтбаев атындағы

Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы,

Оқу-баспа орталығы.

Алматы, Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-228-729-5



9

7 8 6 0 1 2 2 8 7 2 9 5