МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени К.И. САТПАЕВА

М.Д. Адамбаев

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКЕ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Рекомендовано Республиканским учебно-методическим
объединением в качестве учебного пособия

Алматы 2015

УДК 621. 31. (075.8)
ББК 31.2 я 73
А 28

Адамбаев М.Д.
Автоматическое управление в электроэнергетике. (Прикладная математика и идентификация). Учебное пособие – Алматы: КазНТУ им. К.И. Сатпаева, 2015. – 220 с. Ил. 72. Табл. 29. Библиогр. 35 назв.

ISBN 978-601-228-792-9

Учебное пособие содержит систематизированное изложение вопросов, связанных с методами математического описания промышленных объектов и систем управления технологическими процессами в промышленности. Значительное место уделено методам идентификации объектов на основе использования результатов эксперимента на базе экспериментальных кривых разгона и частотных характеристик объекта с использованием уточненных инженерных методов.

Подробно рассмотрен метод статистической идентификации на основе решения интегрального уравнения Винера-Хопфа в частотной области которое применен к конкретному промышленному объекту управления с получением количественных результатов.

Учебное пособие предназначено для студентов ВУЗов специальности 5В071800–«Электроэнергетика» и будет полезна магистрантом и научным работником.

УДК 621.31 (075.8)
ББК 31.2 я 73

Рецензенты*: П.И. Сагитов, доктор. техн. наук, проф. АУЭС;*
А.М. Ауэзова, канд. техн. наук, доцент. АУЭС;
Е.М.Хайруллин, канд. техн. наук, проф. КазНТУ им К.И. Сатпаева;

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2014 г.

ISBN 978-601-228-792-9

©Адамбаев М.Д., 2015
© КазНТУ, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Современное производство развивается невиданно быстрыми темпами. Основная тенденция этого развития связана с укрупнением единичной мощности технологических машин и аппаратов и, как следствие этого, совершенствованием автоматических систем управления такими объектами. При этом совершенствование систем управления идет не только благодаря применению более современных и надежных средств управления, но также и за счет применения новых методов исследования систем управления.

Применение детерминистских методов анализа и синтеза систем управления, когда уравнения объектов и внешние воздействия полагаются известными, в настоящее время оправдано пожалуй лишь для простейших систем или для грубой предварительной оценки поведения системы и предварительного выбора ее параметров. В этом случае, когда внешние воздействия и характеристики объектов управления непрерывно изменяются и заранее не могут быть определены однозначно, возникает необходимость в использовании вероятностных методов анализа и синтеза систем управления. Выбор систем управления вероятностными методами с учетом реальных условий их работы позволяет получить лучшее качество управления.

В современных сложных системах управления не всегда имеется возможность заранее определить уравнения объектов и характеристики возмущений. В этом случае на первый план выдвигаются итеративные методы анализа и синтеза систем управления.

Из сказанного не следует делать вывод, что детерминистские методы решения поставленных задач надо забыть и всем инженерам нужно срочно переучиваться для использования более современных итеративных методов. Конечно, нет. Все зависит от конкретного вида решаемых задач. Детерминистские методы хороши тем, что они позволяют получить приближенное решение при минимальной затрате времени на вычисления. Результаты этих вычислений могут быть потом скорректированы на реальном объекте, если это возможно без существенного ухудшения технологического процесса.

Здесь же важно подчеркнуть следующую мысль. Инженер должен уметь правильно оценить сложившуюся ситуацию и уметь выбрать для решения поставленных задач тот или иной математический метод. Одной интуиции и практического опыта для этого недостаточно. Вот почему студент должен изучить дисциплину, содержащий самый минимальный объем математических сведений, необходимый инженеру.

Прокомментируем отдельные положения этой дисциплины. Приступая к изучению любой системы, инженер прежде всего должен определить математическую модель объекта управления. Эта задача может быть решена экспериментально и аналитически.

Очень часто аналитическая модель получается нелинейной. Для дальнейших расчетов ее необходимо линеаризовать, что осуществляется

разложением нелинейных функций в ряд Тейлора или Маклорена. Многие методы определения оптимальных параметров систем базируются на идеях D –разбиения, в основе которого лежит понятие конформных отображений. Аналитические методы оценки качества управления, связанные с построением переходного процесса в системе по ее передаточной функции, связаны с применением теоремы вычетов. Минимум математических сведений, необходимый в частности для решения указанных выше задач, приведен в 1.2.

Любую автоматическую систему можно исследовать как во временной, так и в частотной областях. Практика показывает, что расчеты в частотной области менее трудоемки, чем во временной. Поэтому частотные методы анализа и синтеза систем управления получили в теории автоматического управления чрезвычайно широкое применение. Примеров этому много: расчет оптимальных параметров настройки по расширенным частотным характеристикам или по максимуму амплитудно-частотной характеристики; построение переходных процессов методом трапецеидальных частотных характеристик; практически все вероятностные расчеты систем проводятся в частотной области и т.д. В основе частотных методов лежит математический аппарат, базирующийся на ряде и интеграле Фурье, необходимый минимум по которым дан в 1.5.

Современные сложные промышленные объекты, как правило, являются многосвязными объектами управления. Для анализа и синтеза систем управления такими объектами разработана специальная теория, получившая общее название теории автоматического управления многосвязными объектами. Эта теория базируется на векторном и матричном исчислениях, рассмотренных в 1.6 и 1.7.

Основы векторного и матричного исчисления, кроме того, широко используется в настоящее время при оптимальном планировании экспериментов, идентификации объектов управления, работающих в различных режимах, и т.д. Например, при идентификации сложных объектов, работающих в переменных режимах, надо так спланировать эксперимент, чтобы при минимальных затратах времени на постановку эксперимента и обработку его результатов получить наиболее вероятную математическую модель объекта.

Учет реальных характеристик эксплуатационных возмущений позволяет в целом ряде случаев наладить систему управления лучшим образом, например, в смысле точности управления. Несмотря на то, что вероятностные методы расчета систем управления требуют больших затрат времени, чем детерминистские, в последнее время они находят все большее применение. Прикладные аспекты теории вероятности даны в 1.3.

Применение операционного исчисления (основы которого изложены в 1.4) в теории автоматического управления получило настолько широкое распространение, что вряд ли нуждается в комментариях. Наиболее фундаментальное понятие теории автоматического управления – понятие передаточной функции – базируется на основах операционного исчисления, что говорит о его важности для специалиста с высшим образованием.

При подготовке данного учебного пособия автор стремился рассмотреть наиболее современные методы, которые с одной стороны являются наиболее целесообразными в практике создания автоматических систем управления технологическими процессами, а с другой – достаточно доступными для студентов.

При изложении материала широко использованы примеры по определению математических моделей технологических процессов в разных отраслях промышленности и систем управления электроприводами, которые поясняют изучаемые методы. Многие из примеров доведены до получения количественных результатов.

Исследование динамических свойств объектов должно отвечать на основной вопрос детерминизма – предсказывать по известным воздействиям и известным в начальный момент координатам (начальное состояние) изменение координат (изменение состояния) в последующее время (принцип Гюйгенса - Адамара). Чтобы произвести анализ и синтез систем, необходимо знать уравнения взаимосвязи переменных объектов управления.

Уравнения статики и динамики объектов количественно характеризует причинно-следственные зависимости между входными (регулирующими, управляющими) воздействиями и их выходными (регулируемыми, управляемыми) координатами. Уравнения статики являются частным случаем уравнений динамики.

Основой для составления уравнений являются законы физики и химии: сохранения вещества, сохранения энергии, гидроаэродинамики, электростатики и т.д. Целенаправленное применение этих законов к описанию технологических объектов должно давать общие уравнения: материального потока и запаса, массопереноса при перемешивании вещества, массопереноса при разделении вещества, при фазовых и химических превращениях вещества, теплопереноса и др. В свою очередь из этих уравнений вытекают конкретные уравнения статики и динамики конкретных объектов.

Не следует стремиться к необоснованной громоздкости математического описания, т.к. предела точности не существует, да и он не нужен. Неверный член уравнения – ошибка, лишний – половина ошибки. Необходимо научиться отыскивать факторы основные и пренебрегать второстепенными. Неучтенные факторы далее могут быть приняты случайными помехами, пренебрежение которыми оправдываются приспосабливаемостью автоматических систем. Например, запасы устойчивости, предусматриваемые в стабилизирующих автоматических системах, предполагают появление отклонений коэффициентов уравнений объектов от принятых в расчетах номиналов.

При расчете автоматических систем объекты оценивают целым рядом специальных характеристик: передаточной функцией, ступенчатой переходной функцией, импульсной переходной функцией, амплитудными и фазовыми частотными характеристиками, логарифмическими частотными характеристиками, расширенными частотными характеристиками и др. Все они могут быть получены из уравнений динамики.

Естественно, что приведенный в настоящем пособии объем математических сведений не является исчерпывающим, чтобы инженер мог свободно разобраться во всей специальной литературе. На наш взгляд – это лишь необходимый минимум математических знаний, которым должен владеть специалист.

Получение моделей на основе наблюдений и исследование их свойств является по существу основным содержанием науки. Эти модели могут быть более или менее формализованными, но все они обладают той главной особенностью, что связывают наблюдения в некоторую общую картину. Решение задачи получения адекватных математических моделей динамических систем по данным наблюдений за их поведением является предметом теории идентификации. Окружающий нас мир сплошь состоит из динамических систем, поэтому знание методов идентификации имеют решающее значение.

В настоящее время с предъявлением все более высоких требований к процессам управления в различных областях техники и технологии вопросы идентификации становятся исключительно важными, т.к. нельзя обеспечить высококачественное управление системой, если ее математическая модель не известна с достаточной точностью.

Определение характеристик системы является дуальной к задачам управления системой, т.к. нельзя управлять системой, если неизвестны ее характеристики. Знание математической модели до начала процесса управления существенно влияет на эффективность его реализации.

Целью данного пособия является краткое и систематизированное рассмотрение принципов и основанных на них методов получения математических моделей объектов и процессов, состоящих из последовательности различных операций.

Методы определения математических моделей по результатам экспериментальных исследований являются основным вопросом идентификации. В зависимости от объема априорной информации о системе различают задачи идентификации в широком и узком смысле. При решении задач в широком смысле априорная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует. Система представляется в виде «черного ящика» и для определения математической модели необходимо решение ряда дополнительных задач, связанных с выбором класса моделей, оценкой стационарности, линейности и др. В настоящее время это направление не получила достаточного прикладного применения, т.к. она еще находится в стадии становления.

При решении подобных задач в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится. Априорная информация о системе достаточно обширна. Такая постановка задачи наиболее соответствует реальным условиям проектирования и поэтому широко используется в инженерной практике. Теории и методам исследовании объектов посвящены многие работы.

В современной литературе в основном рассмотрены экспериментальные методы получения динамических моделей.

Чтобы составлять уравнения объектов автоматизации, для начала следует знать основные черты технологии, устройство аппаратов, требования к автоматизации, которые в свою очередь определяются необходимостью оптимального ведения процесса. Это позволит представить структурные контуры автоматических систем и вместе с тем определить, какие факторы считать входными управляющими воздействиями в объекте, какие – выходными координатами и какие отнести к возмущающим воздействиям.

1 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1 функции комплексного переменного
Комплексные числа

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + jy, \tag{1.1}$$

где x и y – вещественные числа; j – некоторый символ; Под символом j понимается $\sqrt{-1}$. Из этого следует, что $j^2 = -1,\quad j^3 = -j,\quad j^4 = 1$. В общем случае $j^{4m} = 1,\quad j^{4m+1} = j,\quad j^{4m+2} = -1,\quad j^{4m+3} = -j$, где m = 0,1,2,… Число x называется вещественной частью комплексного числа и обозначается $x = \mathrm{Re}\, z$; число y называется мнимой частью комплексного числа и обозначается $y = \mathrm{Im}\, z$. Чисто мнимым называется комплексное число, для которого $\mathrm{Re}\, z = 0$.

Сложение, деление и умножение комплексных чисел осуществляется по формулам

$$(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2); \tag{1.2}$$

$$(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1); \tag{1.3}$$

$$\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + j\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}\ . \tag{1.4}$$

Вычисления с комплексными числами можно производить, применяя обычные правила алгебры, если в расчетах принимать $j^2 = -1$. Таким образом, для комплексных чисел нет необходимости создавать специальную алгебру.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + jy_1$ и $z_2 = x_2 + jy_2$ считаются равными, если $x_1 = x_2;\ y_1 = y_2$.

Комплексные числа $z_1 = x + jy$ и $z_2 = x - jy$ называются *сопряженными*.

Комплексное число $z_1 = x_1 + jy_1$ можно изобразить как точку $M(x_1; y_1)$ на плоскости с координатами x и y (рис. 1.1). Число $z_1 = x_1 + jy_1$ называется *аффиксом* точки $M_1(x_1; y_1)$.

На рис.1.1 в качестве примера изображена точка $M_2(x_1; -y_1)$, соответствующая комплексному числу $z_2 = x_1 - jy_1$, сопряженному с комплексным числом $z_1 = x_1 + jy_1$. На данной плоскости можно изобразить бесконечное множество комплексных чисел. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

Комплексное число, например z_1, можно также изобразить вектором, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке M_1. При сложении комплексных чисел их векторы складываются по правилам параллелограмма.

Комплексные числа, кроме приведенной выше алгебраической формы, удобно записывать также в тригонометрической форме

$$z = x + jy = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi). \tag{1.5}$$

Выражение (1.5) для комплексного числа с учетом формулы Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \tag{1.6}$$

можно записать в показательной форме

$$z = \rho e^{j\varphi},$$

где $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа; $\varphi = \pm arctg\,\frac{y}{x}$ при $x \succ 0$ и $\varphi = \pi \pm arctg\,\frac{y}{x}$ при $x \prec 0$ - аргумент комплексного числа; $\varphi = \pi/2$ при $x = 0$, если $y \succ 0$, и $\varphi = -\pi/2$ при $x = 0$, если $y \prec 0$. Геометрический смысл ρ и φ понятен из рис.1.1.

Необходимо помнить, что все углы $\varphi + 2k\pi$ (где k может принимать все возможные целые значения: положительные, отрицательные и нуль) также будут представлять собой аргументы z.

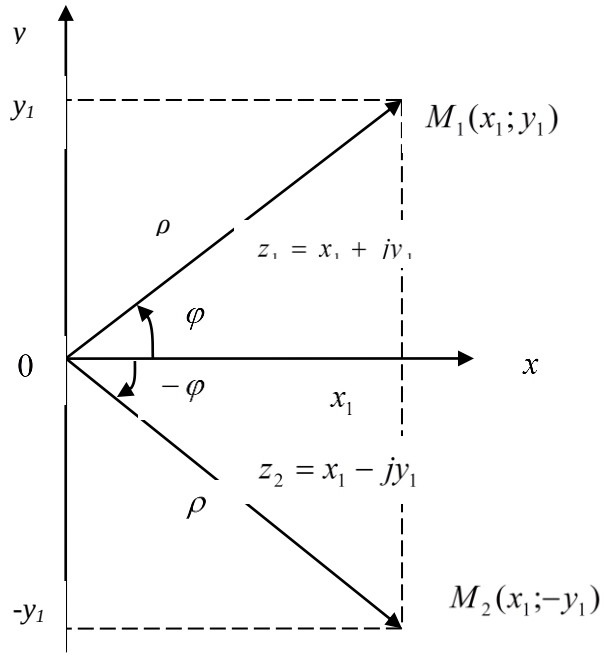


Рис. 1.1. Представление комплексного числа на плоскости.

Пример 1.1:

1. $z = 1 = \cos 2k\pi + j\sin 2k\pi = e^{j2k\pi}$;

2. $z = j = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$;

3. $z = 2 + 2j = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] = 2\sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$.

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел удобны при их умножении, делении, возведении в степень, логарифмировании и т.д. При умножении (делении) комплексных чисел их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитываются); при этом слагаемое $2k\pi$ в аргументе опускаются

$$z_1 z_2 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)\rho_2\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right) = \\ = \rho_1\rho_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] = \rho_1\rho_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \quad (1.7)$$

$$z^n = \rho^n\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + j\sin n\varphi\right) = \rho^n e^{jn\varphi}\ . \quad (1.8)$$

При извлечении корня из комплексного числа слагаемым $2k\pi$ в аргументе пренебрегать нельзя

$$\beta = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)} = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \quad (1.9)$$

Пример 1.2. Требуется извлечь кубический корень из числа

$$z = 8\left(\cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

Имеем

$$\beta = \sqrt[3]{z} = 2\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3} + j\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right);$$

при $k=0$ получим $\beta_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$k=1$ $\beta_1 = 2\left(\cos\frac{11}{12}\pi + j\sin\frac{11}{12}\pi\right)$;

$k=2$ $\beta_2 = 2\left(\cos\frac{19}{12}\pi + j\sin\frac{19}{12}\pi\right)$.

В теории автоматического управления комплексные числа широко используются при частотных методах анализа систем, что будет показано в последующих разделах.

Функции комплексного переменного

Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - функции вещественных переменных *x* и *y* , то комплексная величина $f(z) = P(x,y) + jQ(x,y)$ рассматривается как функция комплексного переменного $z = x + jy$.

Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для каждого сколь угодно малого положительного числа ε существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что выполняется неравенство

$$\left|f(z) - f(z_0)\right| \prec \varepsilon \quad (1.10)$$

для всех z, удовлетворяющих неравенству

$$\left|z - z_0\right| \prec \delta, \quad (1.11)$$

или, короче, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. (1.12)

Функция *f(z)* однозначна, если каждому значению z соответствует единственное значение *f(z).* Например, $f(z) = z^{1/n}$ - неоднозначная функция, так

как на основании формулы (1.9) для одного значения z получаем n значений *f(z).*

Производная однозначной функции по определению равна

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad (1.13)$$

Если предел (1.13) существует и не зависит от того, каким образом Δz стремится к нулю, то *f(z) – аналитическая функция.*

Условия, необходимые для аналогичности функции *f(z)* (условия Коши – Римана):

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\ . \qquad (1.14)$$

Эти условия будут достаточны, если дополнительно потребовать непрерывности частных производных функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Однозначная аналитическая функция называется *голоморфной.*

Пусть *C* – непрерывная кривая в плоскости комплексной переменной *f(z)*. Разделим эту кривую на n произвольных частей с помощью промежуточных точек $z_1, z_2, ..., z_n$; пусть R_m - точка, находящаяся между z_{m-1} и z_m; обозначим $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$. Предел суммы произведений вида $f(R_m)\Delta z_m$ называется *криволинейным интегралом функции f(z)* вдоль кривой *C*, т.е.

$$\lim_{\substack{n\to 0\\ m=1}}^{n}\sum f(R_m)\Delta z_m=\int_C f(z)dz\,. \qquad (1.15)$$

Вычисление интеграла (1.15) производится по выражению

$$\int_C f(z)dz=\int_C (Pdx-Qdy)+j\int_C (Pdy+Qdx) \qquad (1.16)$$

.

Если функция *f(z)* голоморфная внутри некоторой области, то криволинейный интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру, расположенному внутри области, равен нулю *(теорема Коши)*:

$$\oint_C f(z)dz=0, \qquad (1.17)$$

где *C* – замкнутый контур внутри области; *f(z)* – голоморфная функция.

Если *f(z)* – функция, голоморфная в замкнутой области, ограниченной контуром *C*, а z_0 - внутренняя точка области, то по формулам Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz; \qquad (1.18)$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi j}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}; \qquad (1.19)$$

здесь контур *C* обходится в положительном направлении.

Всякая функция *f(z),* голоморфная внутри некоторого круга с центром *a,* может быть во всех точках z внутри этого круга единственным образом представлена в виде степенного ряда

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+...+\frac{z-a}{n!}f^{n}(a)+..., \qquad (1.20)$$

где $f'(a)=\left[\frac{df(z)}{dz}\right]_{z=a}$,..., $f^n(a)=\left[\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right]_{z=a}$,

называемого *рядом Тейлора.* Если центр круга находится в начале координат $(a=0)$, то получается *ряд Маклорена*

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{1!}f'(0)+...+\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)+... \qquad (1.21)$$

Пример 1.3:

1. $f(z)=\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...;$
2. $f(z)=\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...;$
3. $f(x)=sh\ z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...;$
4. $f(z)=ch\ z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+...;$
5. $f(z)=e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+....$

Если *f(z)* – голоморфная функция в определенной области, за исключением ее некоторых точек, то такие точки называются *особыми.*

В окрестностях особых точек *f(z)* не может быть разложена в ряд Тейлора.

К особым точкам относятся:

полюсы – это изолированные особые точки, вблизи которых *f(z)* остается однозначной и которые являются не особыми точками для 1/ *f(z),* например $f(z)=1/(z^2-1)$ имеет простые полюсы $z_1=1$ и $z_2=-1$;

существенно особые точки – это изолированные особые точки, в окрестностях которых *f(z)* однозначна, но которые являются особыми и для функции 1/ *f(z),* например $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ имеет существенно особую точку в начале координат;

критические точки или точки разветвления – это особые точки, вблизи которых *f(z)* неоднозначна, например $f(z)=z^{1/n}$ имеет точку разветвления в начале координат.

Разложения функции *f(z)* в ряд вблизи полюса или существенно особой точки *a* осуществляется с помощью *ряда Лорана:*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n(z-a)^n, \qquad (1.22)$$

где

$$A_n=\frac{1}{2\pi j}\int_C f(z)(z-a)^{-n-1}dz. \qquad (1.23)$$

Здесь *C* – некоторый замкнутый контур, обходящий против часовой стрелки точку *a.*

Пример 1.4:

Функция $f(z)=1/z(z-1)$ имеет два простых полюса $z_1=0$ и $z_2=1$. Разложение *f(z)* в ряд Лорана вблизи полюса $z_1=0$ имеет вид

$$\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+...),$$

а вблизи полюса $z_2=1$.

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+...\right]$$

Коэффициент A_{-1} при члене $(z-a)^{-1}$ в ряде Лорана называется *вычетом* функции *f(z)* в точке $z=a.$ Он обозначается и определяется по формуле

$$A_{-1}=\operatorname{Re}s\left[f(z)\right]_{z-a}=\frac{1}{2\pi j}\int_C f(z)dz. \qquad (1.24)$$

Из выражения (1.24) получается *теорема вычетов,* дающая возможность вычислить интеграл по замкнутому контуру, охватывающему особые точки. Если функция *f(z)* имеет особые точки $a_1,a_2,....,a_k,$ охватываемые контуром *C*, то

$$\int_c f(z)dz=2\pi j\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Re}s\left[f(z)\right]_{z=ai}. \qquad (1.25)$$

Когда $f(z)=\varphi(z)/\psi(z),$ где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - функции, аналитические в точках $z=a,$ и *a* является простым корнем уравнения $\psi(z)=0,$ т.е. $\psi(a)=0,\ \psi'(a)\neq 0,$ то точка $z=a$ является простым полюсом или полюсом первого порядка функции *f(z)* и

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]_{z=a}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (1.26)$$

Если *a* является *m*-кратным корнем уравнения *ψ(z) = 0*, т.е. $\psi(a)=\psi'(a)=$ $=\psi''(a)=...=\psi^{(m-1)}(a)=0,\quad \psi^{(m)}(a)\neq 0,$ то точка $z=a$ является полюсом *m*-го порядка функции $f(z)$ и

$$\operatorname{Re}s\left[f(z)\right]_{z=a}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-a)^m\right]\ \Big|_{z=a}. \qquad (1.27)$$

С помощью теоремы вычетов можно находить некоторые определенные интегралы от функций вещественной переменной.

Рассмотрим один частный случай применения теоремы вычетов для вычисления определенных интегралов. Если *f(z)* – функция, голоморфная по всей верхней полуплоскости (включая и вещественную ось), за исключением конечного числа особых точек $a_1,a_2,....,a_k,$, лежащих выше вещественной оси, и число «нуль» является корнем уравнения $f(1/z)=0$ кратности $m\geq 2,$ то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi j\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Re}s\left[f(z)\right]_{z=a_i}. \qquad (1.28)$$

Пример 1.5: Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}.$

Функция

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3}=\frac{x^6}{\left(1+x^2\right)^3}=0$$

имеет шестикратный корень $x = 0$. В верхней полуплоскости функция $f(z)=\frac{1}{\left(1+z^2\right)^3}$ имеет единственную особую точку $z = j$, являющуюся полюсом третьего порядка. По формуле (1.27) находим:

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{1}{\left(1+z^2\right)^3}\right]_{z=i}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-j)^3}{\left(1+z^2\right)^3}\right]_{z=i}=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}(z+j)^{-3}\right]_{z=i}=\left[6(z+j)^{-5}\right]_{z=i}=-\frac{3}{16}j.$$

По формуле (1.28) имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}=2\pi j\left(-\frac{3}{16}j\right)=\frac{3}{8}\pi.$$

В теории автоматического управления теорема вычетов находит широкое применение, в частности она позволяет вычислить переходный процесс $x(t)$ по его изображению *X(p)* по Лапласу.

Конформные отображения

Если в плоскости комплексного переменного *z* точка *m* с аффиксом $z = x + jy$ описывает некоторую кривую *a* (рис.1.2, а), то в плоскости *f(z)* точка *M* с аффиксом $f(z)=P(x,y)+jQ(x,y)$ будет описывать кривую А (рис.1.2, б).

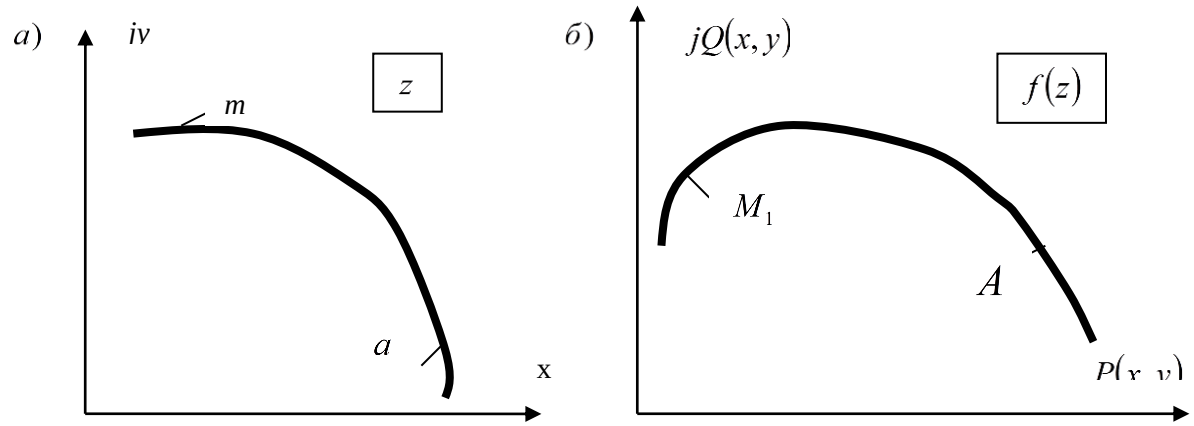


Рис. 1.2. Пример конформного отображения кривой *a* в плоскости $z = x + jy$ (а) в кривую *A* в плоскости $f(z)=P(x,y)+jQ(x,y)$ (б).

Это преобразование, осуществляемое аналитической функцией *f(z)*, обладает следующим важным свойством в окрестностях точки *z*, для которой $f'(z)\neq 0$: бесконечно малые векторы всех направлений, выходящие из этой точки, изменяются по всей длине в одно и то же число раз, равное $|f'(z)|$, и поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg f'(z)$. Таким образом, бесконечно малые элементы фигуры преобразуются в подобное (конформные),

сохраняя форму. Такое преобразование называется *конформным отображением.*

Поскольку при конформном отображении углы между двумя кривыми в бесконечно малой области сохраняются, то координатные линии $x = const$ и $y = const$ в конформном отображении преобразуется в два семейства взаимно ортогональных кривых. Таким образом, с помощью голоморфных функций можно получить множество прямоугольных систем криволинейных координат.

Пример 1.6: Пусть $f(z) = z^2$. Требуется отобразить координатную сетку плоскости *z* (рис. 1.3) на плоскость *f(z).*

Положив $z = x + jy$ и $f(z) = P + jQ,$ найдем, что $f(z) = x^2 - y^2 + j2xy = P + jQ,$ откуда

$$P = x^2 - y^2; \tag{1.29}$$

$$Q = 2xy. \tag{1.30}$$

Когда точка *z* движется по прямой $x = c$ (рис. 1.3, а), тогда P и Q функции только одного параметра y. Из выражения (1.30) для этого случая имеем:

$$y = Q / 2c. \tag{1.31}$$

Подставляя выражения (1.31) в (1.29), получаем:

или
$$\left.\begin{aligned} P &= c^2 - \frac{Q^2}{4c^2} \\ Q^2 &= 4c^2\left(c^2 - P\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

Это – уравнение параболы, причем ось OP служит осью симметрии параболы. Вершина этой параболы находится в точке $(c^2, 0)$, фокус же – в начале координат (рис. 1.3, б).

Если взять прямую $y = c$, то ее отображение в плоскости *f(z)* тоже будет параболой. Действительно, проделав аналогичные вычисления, получим для этого случая

$$Q^2 = 4c^2\left(c^2 + P\right). \tag{1.33}$$

Эта парабола имеет вершину в точке ($-c^2$, 0), фокус же – в начале координат (рис.1.3, б).

Рассмотрим параболу, соответствующую прямой $y=c$ при c >0. Для верхней дуги параболы мы имеем $Q \geq 0,$ следовательно, $x = Q / 2c \geq 0,$ поэтому верхней дуге параболы соответствует полупрямая $y=c$ от мнимой оси до бесконечности.

Найдем, что будет соответствовать вещественной полуоси *OP*.
Из уравнений (1.29) и (1.30) легко заключить, что в этом случае $y=0$, а $P = x^2$, отсюда ясно, что вещественной положительной полуоси плоскости *f(z)* будет соответствовать вещественная положительная полуось плоскости *z.* Теперь посмотрим, что будет соответствовать прямолинейному отрезку от вершины параболы до фокуса, т.е. когда $Q = 0$, а *P* изменяется от *0* до $-c^2$. Из формул (1.29) и (1.30) видим, что в этом случае $x = 0,$ а *y* изменяется от *0* до *c.*

Итак, заштрихованная область плоскости *z* (рис.1.3, а) отображается в заштрихованную область плоскости *f(z)* (рис.1.3, б). Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что область, заключенная между прямыми $x=0$ и $x=c$

плоскости z, отображается во внутреннюю область плоскости *f(z)*, заключенную между параболой, соответствующей прямой *x=c* на плоскости *z* и вещественной осью $Q = 0$. Области, ограниченные заштрихованными линиями, на плоскостях *z* и *f(z)* преобразуются друг в друга.

В теории управлении конформные отображения применяются, в частности, при исследовании устойчивости автоматических систем управления методом D – разбиения, когда необходимо отображать мнимую ось плоскости *z* в плоскость варьируемых коэффициентов дифференциального уравнения системы.

а) *б)*

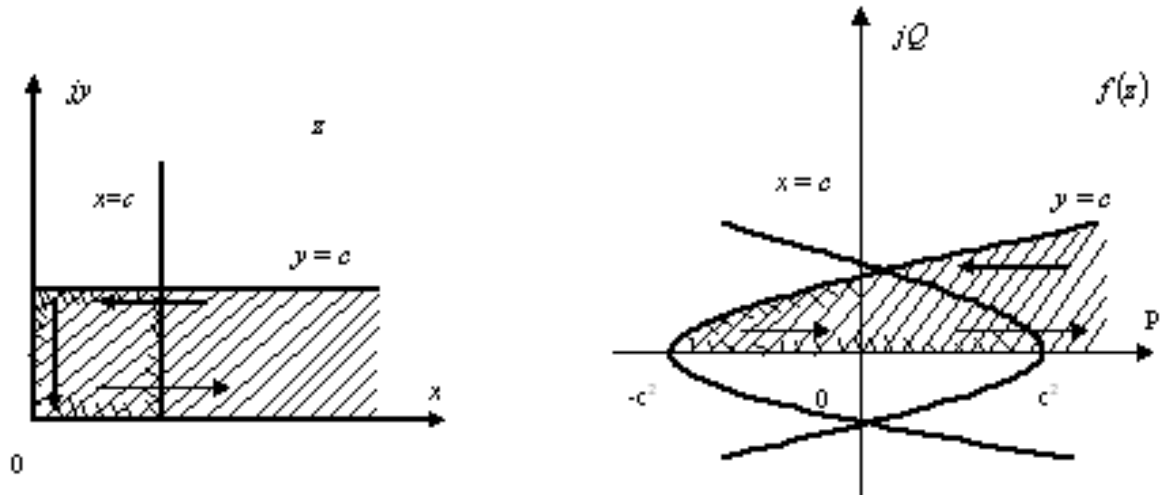


Рис. 1.3. Конформное отображение прямых *x=c* и *y=c* плоскости $z = x + jy$ (а) на плоскость $f(z) = z^2$ (б).

Контрольные вопросы:

1. Пути совершенствования схем управления.
2. Детерминистские методы исследования технических систем.
3. Для чего используют ряды Тейлора и Маклорена?
4. В чем важность изучения прикладных математических методов?
5. Комментарии основных разделов изучаемого курса.
6. Определение комплексного числа.
7. Сложение, умножение и деление комплексных чисел.
8. Сопряженные комплексные числа.
9. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
10. Показательная форма записи комплексного числа.
11. Особые точки голоморфной функции.
12. Голоморфные отображения.

1.2 Основные положения теории вероятностей

Случайные события

Всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти, называется *событием* или *случайным событием*. Случайное событие A характеризуется некоторым числом – *вероятностью* $p(A)$, которая является численной мерой степени объективной возможности этого события. Если в результате опыта событие A непременно должно произойти, то это событие называется *достоверным* событием и для него $p(A)=1$. Если же в результате опыта событие A не может произойти, то это событие называется *невозможным* и $p(A)=0$. Вероятность любого события $0 \le p(A) \le 1$. Если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, то такие события называются полной *группой событий.*

Если два или более события могут появляться вместе, то такие события называются *совместными.* Несколько событий в данном опыте считаются *несовместными,* если никакие два из них не могут появиться вместе. Если по условиям опыта нет оснований считать какое-либо событие более возможным, чем любое другое, то события в данном опыте называются *равновозможными.*

Если несколько событий несовместны, равновозможны и образуют полную группу, то они называются *случаями.* Если появление случая влечет за собой появление события, то случай называется *благоприятным событию.*

Если результаты опыта сводятся к схеме случая, то

$$p(A) = N_A / N, \qquad (1.34)$$

где N_A - число случаев, благоприятных событию A; N - общее число случаев.

Пример 1.7: Из партии в 100 деталей с целью контроля отбираем одну деталь. Если все 100 деталей доброкачественные, то факт отбора одной доброкачественной детали в данном случае будет достоверным событием с вероятностью, равной 1, факт же отбора недоброкачественной детали будет невозможным событием с вероятностью, равной нулю.

Пусть теперь из 100 деталей 50 оказались бракованными и мы наугад берем одну из деталей. Мы можем взять как доброкачественную, так и бракованную детали. Следовательно, событие A, отбор доброкачественной детали и событие B, отбор бракованной детали, являются равновозможным и несовместными, а группа событий A и B считаются полной группой событий. При этом вероятность $p(A)$ того, что мы возьмем доброкачественную деталь (вероятность события A), равна вероятности $p(B)$ того, что мы возьмем бракованную деталь (вероятность события B)

$$p(A) = p(B) = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

Допустим, что происходит серия испытаний, с которыми связано появление или не появление случайного события A с вероятностью $p(A)$, которую называют *безусловной вероятностью.* Пусть с этим же испытанием связано появление или не появление другого события B с безусловной

вероятностью $p(B)$. Отберем из всех N испытаний лишь их часть N_B, при которых появилось событие B. Пусть в этих N_B испытаниях в $N_{A/B}$ случаях появилось также событие A. При большом числе испытаний N_B отношение

$$p(A/B) = \frac{N_{A/B}}{N_B} \tag{1.35}$$

называется *условной вероятностью события A* (при условии, что событие B появилось).

Пользуясь понятием безусловной и условной вероятностей, рассмотрим сложение и умножение вероятностей.

В теории вероятностей под суммой нескольких событий понимается событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий, а под произведением событий понимается событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Если события A_i несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, т.е.

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i). \tag{1.36}$$

Для совместных событий A_i

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} p(A_i) - \sum_{i,j} p(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} p(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} p(A_1 A_2 \ldots A_n), \tag{1.37}$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов $i, j, k \ldots$, взятых по одному, по два, по три и т.д.

Если события A_i несовместны и образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1. \tag{1.38}$$

Если события A и B независимы, т.е. появление одного из них не меняет вероятности появления другого, то

$$p(A/B) = p(A); \quad p(B/A) = p(B). \tag{1.39}$$

Для нескольких независимых событий A_i

$$p\left(n\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i). \tag{1.40}$$

Для зависимых событий A_i теорема умножения вероятностей имеет вид:

$$p(A_1 A_2 \ldots A_n) = p(A_1) p(A_2/A_1) p(A_3/A_1 A_2) \ldots p(A_n/A_1 \ldots A_{n-1}). \tag{1.41}$$

Пример 1.8: Автоматическая система управления состоит из n последовательно соединенных элементов, надежность каждого из которых равна p (вероятность безотказной работы). Выход из строя хотя бы одного элемента влечет за собой выход из строя всей системы. С целью повышения надежности системы производится резервирование, для чего выделено еще n таких же элементов, автоматически подключающихся к схеме при неисправности ее элементов. Считаем надежность переключающего устройства полной.

Определить, какой способ резервирования дает большую надежность системы:

а) резервирование каждого элемента (рис. 1.4, *а*);

б) резервирование всей системы (рис. 1.4, *б*).

Выделим на рис. 1.4, а пару параллельно включенных элементов, резервирующих друг друга. Вероятность отказа каждого элемента равна $(1-p)$. Так как отказ каждого из элементов можно рассматривать как независимое событие, то по формуле (1.40) одновременный отказ обоих элементов равен $(1-p)^2$. Следовательно, надежность звена, состоящего из двух рассматриваемых элементов, равна $1-(1-p)^2$. Для цепочки из $2n$ элементов, попарно резервирующих друг друга (рис. 1.4, *а*)

$$p_a = \left[1-(1-p)^2\right]^n.$$

Рассуждая аналогичным образом, несложно показать, что надежность резервирования по схеме рис. 1.4, *б*

$$p_\sigma = 1-\left(1-p^n\right)^2.$$

Так как $\left[1-(1-p)^2\right]^n \succ 1-\left(1-p^n\right)^2$ при любом $n \succ 1$ и $0 \prec p \prec 1$, то резервирование по схеме рис, 1.4, *а* имеет большую надежность по сравнению со схемой рис. 1.4, *б.*

Допустим, что до некоторого испытания вероятности несовместных событий A_i (*априорные вероятности)* имели значения $p(A_i)$. Если в результате испытания появляется событие *B,* то после опыта, когда появилась новая информация, необходимо переопределить вероятности событий A_i. Эти новые вероятности теперь будут уже условными вероятностями $p(A_i/B)$, так называемыми *апостериорными вероятностными.*

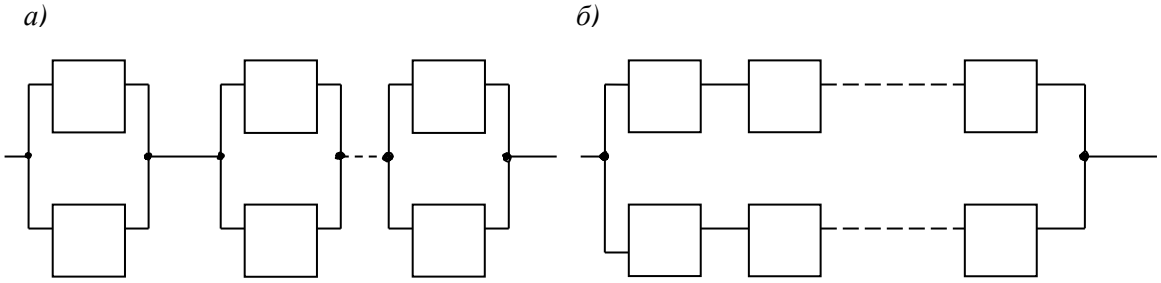


Рис.1.4. Структурные схемы автоматических систем управления при индивидуальном резервировании каждого элемента *(а),* при резервировании всей системы *(б)*.

Для их подсчета применяется *формула Байеса*

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{m} p(A_i)p(B/A_i)}. \qquad (1.42)$$

Случайные величины

Случайная величина представляет собой более сложное понятие, чем случайное событие. Это – величина, которая в результате опыта принимает одно и только одно заранее неизвестное значение из множества возможных значений. Поэтому, чтобы охарактеризовать случайную величину X , необходимо задать как множество ее возможных значений x, так и их вероятности.

Пусть возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X дискретны, тогда нужно задать n вероятностей вида $p_i = p(x_i)$, где p_i - вероятность случайного события, заключающегося в появлении значения x_i случайной величины X. Поскольку события $X = x_i$ для разных i несовместны и по определению случайной величины образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{1.43}$$

Если же случайная величина X непрерывна, т.е. может принимать любые значения в некотором интервале (такие случайные величины и будут рассматриваться в дальнейшем), то для задания ее вероятностной характеристики применяется *функция распределения* $F(x)$ - это вероятность случайного события $X \prec x$, заключающегося в том, что значение X оказалось меньше некоторого фиксированного значения x

$$F(x) = p \quad (X \prec x). \tag{1.44}$$

Функция $F(x)$ (или *интегральный закон распределения*) позволяет легко найти вероятность попадания X в интервал $a \le X \le b$

$$p(a \le X \le b) = F(b) - F(a). \tag{1.45}$$

Функция $F(x)$ есть монотонная неубывающая функция от x, причем $F(-\infty) = 0, \; F(+\infty) = 1$.

Функция

$$P(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{1.46}$$

называется *плотностью вероятности* или *дифференциальным законом распределения* случайной величины X.

Величина $P(x)dx$ представляет собой вероятность для случайной величины X находиться в бесконечно малом интервале $x \le X \le x + dx$. Вероятность величины X находиться в интервале $a \le X \le b$ определяется выражением

$$p(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b P(x)dx. \tag{1.47}$$

Из выражения (1.47) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1. \tag{1.48}$$

Важными характеристиками случайной величины, хотя и не вполне исчерпывающими, являются ее *моменты*. *Моментом порядка* k называется некоторое число, определяемое выражением

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(x)dx . \qquad (1.49)$$

Момент первого порядка α_1 называется *математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины X, обозначается m_x

$$\alpha_1 = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \qquad (1.50)$$

и характеризует среднее арифметическое $X_{ср.ар}$ значение случайной величины X в том смысле, что при достаточно большом числе испытаний $X_{ср.ар}$ мало отличается от m_x.

Центральным моментом k-го порядка μ_k называется момент k-го порядка разности $(X - m_x)$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k P(x)dx . \qquad (1.51)$$

Особое значение имеет центральный момент второго порядка, который называется *дисперсией* и обозначается D_x:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 P(x)dx . \qquad (1.52)$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины X вокруг ее среднего значения.

Величина

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad (1.53)$$

называется *среднеквадратичным отклонением.* Эту величину следует отличать от среднеквадратичного значения $X_{ср.кв}$, которое определяется по формуле

$$(X_{ср.кв})^2 = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x)dx , \qquad (1.54)$$

если $m_x = 0$, то $\sigma_x = X_{ср.кв.}$

Наиболее распространенным законом распределения для случайных величин является *нормальный,* или *гауссов, закон,* для которого

$$P(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x}} . \qquad (1.55)$$

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону в интервал $a \le X \le b$ выражается формулой,

$$p(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right), \qquad (1.56)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - табулированная функция.

Пример 1.9: Автоматическая браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 \succ d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика d есть нормально распределенная случайная величина с характеристиками

$$m_d = \frac{d_1 + d_2}{2} \text{ и } \sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{4}.$$

Определим вероятность p того, что шарик будет забракован. Используя формулу (1.56), получаем

$$p = 1 - p(d_1 \prec d \prec d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - m_d}{\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - m_d}{\sigma_d} \right) \right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma_d} \right) \right].$$

Поскольку $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, то

$$p = 1 - \left[2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) - 1 \right] = 2 - 2\Phi(2).$$

По таблицам функций $\Phi(x)$ находим $\Phi(2) = 0{,}9772$, тогда $p = 0{,}0456$.

Случайные векторы

Две случайные величины X и Y, рассматриваемые совместно, можно геометрически интерпретировать как случайную точку с координатами X и Y на плоскости $x0y$, или как случайный вектор, направленный из начала координат в точку (X ,Y). Систему n случайных величин X_1, X_2, … , X_n можно также изобразить случайной точкой или случайным вектором в n-мерном пространстве.

Функцией распределения $F(x, y)$ системы двух случайных величин X и Y называется вероятность совместного выполнения неравенств $X \prec x$, $Y \prec y$:

$$F(x, y) = p[(X \prec x)(Y \prec y)]. \qquad (1.57)$$

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X ,Y) в квадрат с вершиной (x, y), заштрихованной на рис.1.5. Вероятность попадания случайной точки (X ,Y) в прямоугольник R (рис.1.6) выражается через функцию распределения $F(x, y)$ формулой

$$p[(X, Y) \in R] = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma), \qquad (1.58)$$

где знак $\in$ означает, что точка (X ,Y) принадлежит области R.

Функция

$$P(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y) \qquad (1.59)$$

называется плотностью распределения двух случайных величин X и Y и физически представляет собой предел отношения вероятности попадания

случайной точки в элементарный участок плоскости, примыкающей к точке (x, y), к площади этого участка, когда его размеры стремятся к нулю.

Элементом вероятности для системы двух случайных величин называется величина $P(x,y) \cdot dx \cdot dy$, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами dx, dy, примыкающий к точке (x, y).

Функция распределения $F(x, y)$ выражается через плотность распределения:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} P(x,y)dxdy. \tag{1.60}$$

Плотность распределения отдельных величин выражается через плотность распределения $P(x,y)$ формулами

$$P_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)dy; \tag{1.61}$$

$$P_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,y)dx. \tag{1.62}$$

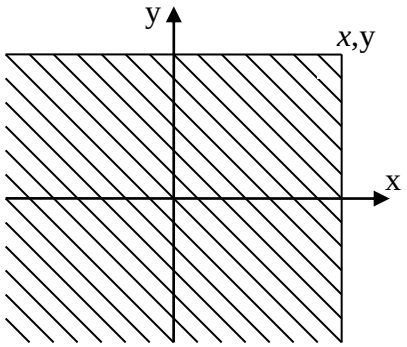


Рис. 1.5. Геометрическая интерпретация функции $F(x,y)$

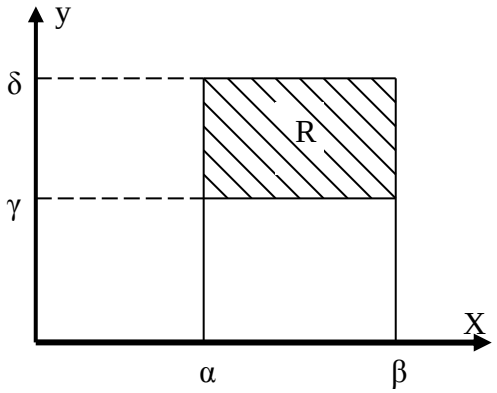


Рис. 1.6. К определению вероятности попадании точки (X,Y) в область R

В соответствии с понятиями, принятыми для случайных событий, для системы из двух случайных величин вводятся понятия *условных функций* распределения случайных величин X и Y (обозначаются $F_1(x/y)$, $F_2(y/x)$ и *условных плотностей распределения* $P_1(x/y)$, $P_2(y/x)$

$$P(x,y) = P_1(x)P_2(y/x) \text{ или } P(x,y) = P_2(y)P_1(x/y). \tag{1.63}$$

Если условный закон распределения одной из двух случайных величин X и Y не зависит от того, какое значение примет другая, то случайные величины X и Y называются *независимыми*:

$$P_1(x/y) = P_1(x) \text{ или } P_2(y/x) = P_2(y). \tag{1.64}$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от значений, которые принимает другая величина. В противном случае случайные величины X и Y называются *зависимыми*.

Плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в эту систему

$$P(x,y) = P_1(x)P_2(y). \tag{1.65}$$

Важными характеристиками системы двух случайных величин, хотя и не вполне исчерпывающими, являются *моменты системы*.

Начальным моментом порядка $k+s$ системы двух случайных чисел X и $У$ называется величина, определяемая формулой

$$\alpha_{k,S} = \int_{-\infty}^{\infty}\int x^k y^S P(x,y)dx\cdot dy. \tag{1.66}$$

Центральным моментом порядка $k+s$ системы двух случайных чисел X и $У$ называется величина, определяемой формулой

$$\mu_{k,s} = \iint_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k(y-m_y)^S P(x,y)dx\cdot dy. \tag{1.67}$$

Важной характеристикой системы двух случайных чисел является центральный момент порядка 1+1, т.е. $\mu_{1,1}$, который называется *корреляционным моментом* K_{xy} двух случайных величин,

$$K_{xy} = \mu_{1,1}. \tag{1.68}$$

Для независимых случайных величин $K_{xy} = 0$. Величина

$$r_{xy} = K_{xy}/\sigma_x\sigma_y\ , \tag{1.69}$$

где $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\mu_{2.0}}$ и $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\mu_{0.2}}$ называется *коэффициентом корреляции* двух случайных величин X и У; он характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами.

Если $r_{xy} = 0$, то случайные величины X и $У$ называются *некоррелированными*.

Если X и $У$ связаны линейной функциональной зависимостью вида $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \pm 1$, где знак плюс или минус берется в зависимости от знака a. Для любых двух случайных величин $|r_{xy}| \le 1$. Для двух случайных величин X и $У$ нормальный закон распределения имеет вид;

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\times \\ &\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x-m_x)\cdot(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_x^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Если две случайные величины не коррелированы ($r_{xy} = 0$) и при этом $m_x = m_y$, то нормальный закон принимает *канонический* вид:

$$P(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}\ . \tag{1.71}$$

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в прямоугольник R (рис.1.6)

$$p[(x,y)\in R]=\left[\Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{\delta-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{\gamma-m_y}{\sigma_y}\right)\right], \qquad (1.72)$$

где функции Ф табулированы.

Если для системы n случайных величин $(X_1, X_2,...,X_n)$ ввести понятие функции распределения как вероятности совместного выполнения n неравенств вида $X_i \prec x_i$

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=p[(X_1\prec x_1)(X_2\prec x_2)..(X_n\prec x_n)], \qquad (1.73)$$

то аналогично системе двух случайных величин можно ввести понятия плотности распределения, моментов и закона распределения для системы *n* случайных величин.

Случайные функции

Случайная функция $X(t)$ (*вероятностный* или *стохастический процесс)* – это функция, которая в каждый момент времени является случайной величиной. Тот конкретный вид, который принимает функция в результате опыта, называется *реализацией* случайной функции. Если зафиксировать время, например в момент t_1, то случайная функция $X(t)$ обращается в случайную величину $X(t_1)$, называемую *сечением* случайной функции. Закон распределения $F(x_1, t_1)$ сечения $X(t_1)$ случайной функции называется *одномерным законом распределения* случайной функции $X(t)$. Закон распределения системы двух ее сечений $X(t_1)$, $X(t_2)$, представляющий собой функцию четырех аргументов $F(x_1, t_1, x_2, t_2)$, называется *двумерным законом распределения* случайной функции $X(t)$.

Для одномерного закона распределения плотность вероятности обозначается $P(x, t)$; для двумерного $P(x_1, t_1, x_2, t_2)$.

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ есть неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом t представляет собой математическое ожидание соответствующего сечения случайной функции.

Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ есть неслучайная функция двух аргументов $K_x(t, t')$, которая при каждой паре значений t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции. При $t = t'$ корреляционная функция превращается в дисперсию случайной функции

$$K_x(t,\ t')=[\sigma_x(t)]^2. \qquad (1.74)$$

Если закон распределения системы любого числа n сечений случайной функции $X(t)$ представляет собой n – мерный нормальный закон, то случайная функция называется *нормальной;* характеристики $m_x(t)$ и $K_x(t, t')$ являются для нее исчерпывающими и определяют закон распределения любого числа сечений.

Функция

$$r_X(t,\ t')=\frac{K_X(t,\ t')}{\sigma_X(t)\cdot\sigma_X(t')}=\frac{K_X(t,\ t')}{\sqrt{D_X(t)D_y(t')}} \qquad (1.75)$$

называется *нормированной корреляционной функцией* случайной функции $X(t)$.

Функция

$$R_{xy}(t,\ t') = \int_{-\infty}^{\infty}\int [x(t) - m_x(t)][y(t') - m_y(t')]\cdot P(x,\ y,\ t,\ t')dx\ dy \qquad (1.76)$$

называется *взаимной корреляционной функцией* двух случайных функций *X(t)* и *Y(t)*.

Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций *X(t)* и *Y(t)* называется функция

$$r_{xy}(t,\ t') = \frac{R_{xy}(t,\ t')}{\sigma_x(t)\cdot\sigma_x(t')} = \frac{R_{xy}(t,\ t')}{\sqrt{D_x(t)D_y(t')}}. \qquad (1.77)$$

Если $R_{xy}(t,\ t') = 0$, то случайные функции *X(t)* и *Y(t)* называются *некоррелированными*.

Если

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \qquad (1.78)$$

то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t); \qquad (1.79)$$

$$K_z(t,\ t') = K_x(t,\ t') + K_y(t,\ t') + R_{xy}(t,\ t') + R_{yx}(t,\ t'). \qquad (1.80)$$

Если математическое ожидание случайной функции $X(t)$ $m_x(t) = m_x = const$, а корреляционная функция зависит только от разности между своими аргументами $\tau = t' - t$, т.е. $K_x(t,t') = K_x(\tau)$, то такой случайный процесс называется *стационарным*. Существует подкласс стационарных случайных процессов, называемых *эргодическими,* для которого среднее по множеству (т.е. математическое ожидание m_x) с вероятностью, равной единице, равно среднему по времени

$$\hat{X} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt\,. \qquad (1.81)$$

Среднее по времени квадрата функции *x(t)*

$$\hat{X}^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt \qquad (1.82)$$

равно дисперсии D_x, причем дисперсия стационарной случайной функции

$$D_x = K_x(t,\ t) = K_x(0) = const\,. \qquad (1.83)$$

Аналогичное равенство имеет место и для средних от произведения

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int x_1 x_2 P(x_1, x_2, \tau)dx_1 dx_2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt \qquad (1.84)$$

Фурье-изображение корреляционной функции $K_x(\tau)$ стационарного случайного процесса

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \qquad (1.85)$$

называется *спектральной плотностью* случайного процесса $X(t)$.

Фурье-изображение функции $R_{xy}(\tau)$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad (1.86)$$

называется *взаимной спектральной плотностью* стационарных случайных процессов *X(t)* и *Y(t).*

Случайный сигнал, у которого $S(\omega) = S_0 = const$, называется *белым шумом*. Этому Фурье-изображению отвечает оригинал

$$K_x(\tau) = S_0 \delta(\tau), \qquad (1.87)$$

где $\delta(\tau)$ - так называемая *единичная импульсная функция*, или функция Дирака, определяемая выражениями

$$\left.\begin{aligned} &\delta(\tau) = 0 \quad при \quad \neq 0; \\ &\delta(\tau) = \infty \quad при \quad \tau = 0; \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (1.88)$$

Если на вход стационарной линейной автоматической системы управления поступает стационарная случайная функция X*(t)*, то спустя некоторое время, достаточное для затухания переходных процессов, случайная функция *Y(t)* на выходе системы также будет стационарной. Спектральные плотности входного и выходного сигналов связаны соотношением

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\left|W(j\omega)\right|^2, \qquad (1.89)$$

где $W(j\omega)$ - амплитудно-фазовая частотная функция системы.

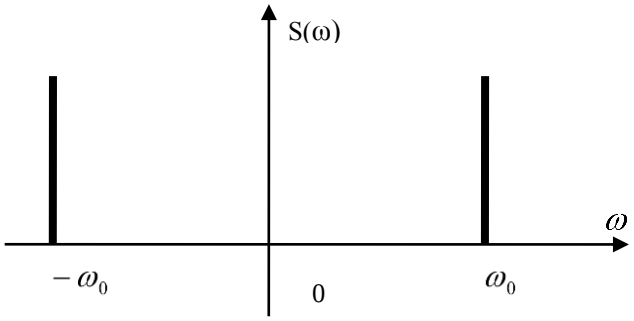


Рис.1.7. Спектральная плотность единичных импульсных функций $\delta(\omega - \omega_0)$ и $\delta(\omega + \omega_0)$

При рассмотрении ряда вопросов теории автоматического управления часто заменяют непрерывный случайный процесс $X(t)$ последовательностью связанных случайных величин $x(t_1)$, ..., $x(t_n)$, являющих его значениями в дискретные моменты времени t_1, …, t_n. Это можно сделать, если частотный спектр всех реализации случайного процесса ограничен частотой ω_c, а длительность – временем *T*. Обычно частоте ω_c соответствует начало «хвоста» частотного спектра с малой интенсивностью. Можно вместо функции *X(t)* без потери информации о ней рассматривать лишь ряд ее дискретных значений

$x(t_1)$, …, $x(t_n)$, разделенных расстоянием во времени не более чем $\Delta t = \pi / \omega_c$. Общее число дискретных значений $X(t)$ получается равным $T / \Delta t = \omega_c / \pi$.

Обозначив $x(t_i) = x_i$, можно ввести понятие случайного n-мерного вектора $\boldsymbol{x}$ с координатами (x_1, x_2, …, x_n), для которого будут справедливы все соотношения, приведенные выше.

Пример 1.10: Определим корреляционную функцию $K_x(\tau)$ и спектральную плотность $S_x(\omega)$, для сигнала, изменяющегося по закону $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Поскольку $x(t)$ является эргодическим процессом, то по формуле (1.84)

$$K_x(\tau) = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} A^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)\sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi)dt = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0 \tau$$

где $T_0 = 2\pi / \omega_0$.

Спектральную плотность вычисляем по формуле (1.85)

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \frac{\pi A^2}{2}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right],$$

где $\delta(\omega - \omega_0)$ и $\delta(\omega + \omega_0)$- единичные импульсные функции, спектральная плотность которых представлена на рис. 1.7.

Пример 1.11: В разомкнутом состоянии автоматическая система управления имеет передаточную функцию.

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}.$$

На входе системы действует помеха в виде белого шума со спектральной плотностью $S_0 = N$. Определим дисперсию выходного сигнала.

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k}{Tp^2 + p + k}.$$

Спектральная плотность на выходе системы определяется формулой (1.89)

$$S_y(\omega) = S_0 \left|W_3(j\omega)\right|^2 = \frac{k^2 N}{\left|T(j\omega)^2 + j\omega + k\right|^2}.$$

Дисперсию выходного сигнала определяем по формуле (1.83)

$$D_y = K_y(0)$$

Применив обратное преобразование Фурье к выражению (1.85), получим

$$D_y = K_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 N d\omega}{\left|T(j\omega)^2 + j\omega + k\right|^2} = \frac{kN}{2}.$$

Контрольные вопросы:

1. Случайное событие и его характеристики.
2. Безусловная и условная вероятность события.
3. Формула Байеса.

4. Апостериорные вероятности.
5. Функция распределения.
6. Плотность вероятности (дифференциальный закон распределения).
7. Момент – одна из характеристик случайной величины. Момент порядка *К*.
8. Математическое ожидание случайной величины.
9. Центральный момент К-го порядка.
10. Центральный момент второго порядка (дисперсия) случайной величины.
11. Среднеквадратичное отклонение.
12. Независимые и зависимые случайные величины.
13. Начальный момент системы двух случайных величины.
14. Центральный момент системы двух случайных величин.
15. Корреляционный момент двух случайных величин.
16. Коэффициент корреляции двух случайных величин.
17. Случайная функция.
18. Нормированная корреляционная функция.
19. Взаимокорреляционная функция.
20. Стационарный случайный процесс.
21. Эргодический стационарный случайный процесс.
22. Спектральный плотность случайного процесса.
23. Взаимная спектральная плотность двух случайных стационарных процессов.

1.3 Основы операционного исчисления

Исследование переходных процессов в автоматических системах управления обычно связано с решением различного рода дифференциальных уравнений. Решение дифференциальных уравнений значительно упрощается, если для этих целей использовать операционное исчисление.

Основные этапы решения дифференциальных уравнений движения систем автоматического управления обычно сводятся к следующему:

1) функция $\varphi(t)$ вещественной переменной t преобразуется в функцию $\varphi(p)$ комплексной переменной p;

2) находится решение для функции $\varphi(p)$;

3) найденное решение для $\varphi(p)$ преобразуется в $\varphi(t)$.

В основе операционных методов лежат так называемые прямое и обратное преобразования Лапласа, основные идеи которых рассмотрены ниже.

Пусть имеется некоторая функция $\varphi(t)$ независимой переменной t, удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной во всех точках $-\infty \le t \le \infty$, за исключением тех значений t, в которых $\varphi(t)$ и ее производная имеют разрывы первого рода;

2) имеется ограниченное число точек разрыва первого рода на каждом конечном интервале изменения t;

3) для функции $\varphi(t)$ можно указать такие независимые от t постоянные a и b, что при любом $t > 0$ выполняется неравенство:

$$|\varphi(t)| < ae^{bt}, \tag{1.90}$$

где число b называется *показателем роста* функции $\varphi(t)$.

Пусть задано также комплексное число $p = \sigma + j\omega$, тогда выражение

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-pt}dt \tag{1.91}$$

называется *двусторонним интегралом Лапласа*, а функция $\varphi(p)$ - *двусторонним изображением Лапласа* оригинала (функции) $\varphi(t)$. Если $\sigma = 0$, то двустороннее преобразование Лапласа сводится к преобразованию Фурье.

Двустороннее преобразование Лапласа возможно тогда, когда существует диапазон вещественных чисел m, в котором функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема в интервале $-\infty \le t \le \infty$, т.е. если в этом интервале интеграл

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|e^{-mt}dt \tag{1.92}$$

сходится.

Обычно в автоматических системах управления переходные процессы исследуют начиная с времени *t=0,* поэтому без ограничения общности можно считать, что все функции $\varphi(t)$, которые используются в теории автоматического управления, удовлетворяют условию $\varphi(t)$=0 при *t<0*. Для таких функций выражение

$$\varphi(p) = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)e^{-pt}dt \tag{1.93}$$

называется *односторонним интегралом Лапласа*, а функция $\varphi(p)$ - *односторонним изображением Лапласа* оригинала $\varphi(t)$. В дальнейшем мы будем рассматривать одностороннее изображение Лапласа, обозначая его сокращенно термином «изображение».

Может случиться так, что интеграл (1.93) не существует ни при каких значениях p, в этом случае преобразование невозможно. Возможность существования преобразования (1.93) определяется следующей теоремой: *если функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет вышеприведенным условиям, то ее изображение* $\varphi(p)$ *определено для всех комплексных значений* $p = \sigma + j\omega$, *вещественная часть которых* σ *превосходит показатель роста b функции* $\varphi(t)$.

Пример 1.12: В качестве примера найдем изображения нескольких функций

1) $\varphi(t) = 1$; $\varphi(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$;

2) $\varphi(t) = e^{\alpha t}$, $\varphi(p) = \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \frac{1}{(p-\alpha)}$;

3) $\varphi(t) = \sin \omega t$

$$\varphi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{1}{2j} \int_0^\infty (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Найденные в примере 1.12 изображения легко найти в табл. 1.1.

В практических расчетах обычно отыскание изображения по оригиналу производится с помощью предварительно вычисленных таблиц (табл.1.1) соответствия оригиналов и изображений.

Обратный переход от изображения к оригиналу для функций, удовлетворяющих вышеприведенным условиям, осуществляется по так называемой *формуле обращения*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \varphi(p) e^{pt} dp. \qquad (1.94)$$

Здесь интегрирование производится вдоль любой прямой, параллельной мнимой оси и расположенной на расстоянии от нее $\sigma_0 > b$, где b - показатель роста функции $\varphi(t)$.

Если функция $\varphi(t)$ имеет разрыв первого рода и ее значения справа и слева от точки разрыва соответственно равны $\varphi(t+0)$ и $\varphi(t-0)$, то

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \varphi(p) e^{pt} dt = \frac{1}{2} [\varphi(t+0) + \varphi(t-0)]. \qquad (1.95)$$

Таблица 1.1

Таблица преобразований Лапласа

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$x(t)$	$X(p)$	$\frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{(p+\alpha)p^2}$
$\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} X_i(p)$	$\frac{e^{\alpha t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\gamma)}$
$\alpha x(t)$	$\alpha X(p)$	$\frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$	$\frac{1}{p(p+\alpha)^2}$
$x(t-\alpha)$	$e^{-\alpha p} X(p)$	$\frac{1}{\alpha\gamma}\left(1 + \frac{\gamma e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\gamma t}}{\alpha - \gamma}\right)$	$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\gamma)}$
$e^{\alpha t} x(t)$	$X(p-\alpha)$	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^3 + \alpha^2}$
$\frac{x(t)}{-t}$	$\int_0^p X(p) dp$		$\frac{p\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$tx(t)$	$-\frac{d}{dp} X(p)$		$arctg \frac{\alpha}{p}$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{2}\alpha + \sin \alpha t$	$\frac{p^2 - \alpha_2}{(p^2+\alpha^2)^2}$

Продолжение табл.1.1

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{p}}{p^2}$	$t\cos\alpha t$	$\frac{1}{(p+\gamma)^2+\alpha^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-\gamma t}\sin\alpha t$	$\frac{p+\gamma}{(p+\gamma)^2+\alpha^2}$
$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p\mp\alpha}$	$\frac{e^{-\gamma t}}{\alpha}\sin\alpha t$	$\frac{1}{(p^2+\alpha^2)+p}$
$t^n e^{\pm\alpha t}$	$\frac{n!}{(p\mp\alpha)^{n+1}}$	$e^{-\gamma t}\cos\alpha t$	$\frac{(p+\gamma)^2-\alpha^2}{\left[(p+\gamma)^2+\alpha^2\right]^2}$
$\frac{1}{\alpha}(1-e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p+\alpha)p}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1-\cos\alpha t)$	$\frac{p}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\gamma^2)}$
$\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)$	$\frac{1}{(p-\alpha)p}$	$te^{-\gamma t}\cos\alpha t$	
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\frac{\cos\alpha t-\cos\gamma t}{\gamma^2-\alpha^2}$	

Рассмотрим основные свойства преобразования Лапласа. Для сокращения записи вместо формул (1.93) и (1.94) будем использовать символьную запись

$$\varphi(p)=L[\varphi(t)], \tag{1.96}$$

$$\varphi(t)=L^{-1}[\varphi(p)]. \tag{1.97}$$

1. Линейность преобразования. Если

$$\varphi_1(p)=L[\varphi_1(t)],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(p)=L[\varphi_n(t)],$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(p)=L\left[\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(t)\right], \tag{1.99}$$

где a_i - постоянные величины, не зависящие от t.

Аналогично, если

$$\varphi_1(t)=L^{-1}[\varphi_1(p)];$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(t)=L^{-1}[\varphi_n(p)],$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(t)=L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(p)\right] \tag{1.100}$$

где a_i - постоянные величины, не зависящие от p.

2. Правила дифференцирования. Пусть $\varphi(p)=L[\varphi(t)]$. Тогда, если существует n-я производная $\varphi(t)$, то

$$L\left[\varphi^{(n)}(t)\right] = p^n\left[\varphi(p) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(i)}(+0)}{p^{i+1}}\right], \qquad (1.101)$$

где $\varphi^{(i)}(+0)$ - значение функции $\varphi(t)$ и всех *n-1* производных при стремлении t к нулю справа.

В частном случае при нулевых начальных условиях, т.е. когда $\varphi(0) = \varphi'(0) = ... = \varphi^{n-1}(0) = 0$, получаем:

$$L\left[\varphi^{(n)}(t)\right] = p^n\varphi(p). \qquad (1.102)$$

В этом случае дифференцированию исходной функции соответствует умножение преобразованной функции на *p,* т.е. замена *d/dt* и *p*.

Пример 1.13:

$$\psi(t) = \frac{d^3\varphi(t)}{dt^3};\ \psi(p) = p^3\varphi(p)$$

при нулевых начальных условиях. Если же начальные условия не нулевые, то по формуле (1.101) имеем

$$\psi(p) = p^3\varphi(p) - p^2\varphi(0) - p\varphi'(0) - \varphi''(0).$$

Если $\varphi(t) = L^{-1}\left[\varphi(p)\right]$, то в области абсолютной сходимости $\varphi(t)$ дифференцирование изображений осуществляется по формуле

$$(-1)^{ntn}t^n\varphi(t) = L^{-1}\left[\varphi^{(n)}(p)\right], \qquad (1.102)$$

т.е. операции дифференцирования изображений соответствует алгебраическая операция умножения оригинала на независимую переменную t, взятую с отрицательным знаком.

Пример 1.14: Дано $\varphi(p) = 1/p$. Этому изображению соответствует оригинал $\varphi(t) = 1$. Найдем оригинал, соответствующий изображению $\psi(p) = 1/p^2$, т.к. $\psi(p) = \frac{1}{p^2} = -\varphi'(p)$, то

$$-L^{-1}\left[\varphi'(p)\right] = -(-1)^1 t\varphi(t) = t.$$

Следовательно,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = t.$$

3. Правила интегрирования. Если $\varphi(p) = L\left[\varphi(t)\right]$ и при $t \geq 0 \left|\varphi(t)\right| < ae^{bt}$, то

$$L\left[\int_0^1 \varphi(t)dt\right] = \frac{\varphi(p)}{p}. \qquad (1.103)$$

Таким образом, операции интегрирования оригинала соответствует операция деления изображения на *p*.

Если

$$\varphi(t) = L^{-1}\left[\varphi(p)\right] \text{ и } \int_\infty^p \varphi(p)dp$$

сходится, то

$$\frac{\varphi(t)}{-t} = L^{-1}\left[\int_\infty^p \varphi(p)dp\right], \qquad (1.104)$$

т.е. операции интегрирования изображения соответствует операция деления оригинала на переменную t с обратным знаком.

Пример 1.15: Дана функция

$$\psi(t)=\int_0^t \varphi(t)dt \text{, где } \varphi(t)=1,$$

для которой

$$L[\varphi(t)]=\varphi(p)=\frac{1}{p},$$

тогда $\psi(t)=t$. Найдем $L[\psi(t)]$, используя формулу (1.93):

$$L[\psi(t)]=L\left[\int_0^t \varphi(t)dt\right]=\frac{\varphi(p)}{p}=\frac{1}{p^2}.$$

Аналогичный результат был получен в предыдущем примере при использовании формулы (1.102).

Если в формуле (1.104) положить $\varphi(p)=1/p^2$, то $\varphi(t)=t$, тогда, если

$$\psi(p)=\int_\infty^p \varphi(p)dp=-1/p,$$

то

$$L^{-1}[\psi(p)]=L^{-1}\left[\int_\infty^p \varphi(p)dp\right]=L^{-1}\left[-\frac{1}{p}\right]=-\frac{\varphi(t)}{t}=-1,$$

т.е.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=1.$$

4. Изображение решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях. Найдем, используя правила дифференцирования в пространстве изображений. Пусть

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n y=b_0\frac{d^m x}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+b_m x, \quad (1.105)$$

где $x(t)$ - заданная, а $y(t)$ - искомая функции независимого переменного t. При нулевых начальных условиях можно заменить d/dt на p, $x(t)$ на $X(p)$, $y(t)$ на $Y(p)$, тогда искомое изображение

$$Y(p)=X(p)\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}. \quad (1.106)$$

5. Теорема смещения. Если $L[\varphi(t)]=\varphi(p)$, то при $\tau>0$

$$L[\varphi(t-\tau)]=e^{-p\tau}\varphi(p). \quad (1.107)$$

Формула (1.107) играет большую роль при исследовании процессов с запаздыванием в автоматических системах управления.

Для изображений теорема смещения имеет вид

$$L[e^{p_0t}\varphi(t)]=\varphi(p-p_0), \quad (1.108)$$

где p_0 – любое комплексное число.

6. Теорема свертывания. Сверткой двух функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ называется функция $\varphi(t)$, определяемая равенством

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau, \qquad (1.109)$$

для которой

$$\varphi(p) = \varphi_1(p)\varphi_2(p). \qquad (1.110)$$

Выражение (1.110) называется *теоремой свертывания изображения*. Для оригиналов теорема свертывания имеет вид

$$L[\varphi_1(t)\varphi_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c_1-j\infty}^{c_1+j\infty}\varphi_1(z)\varphi_2(p-z)dz, \qquad (1.111)$$

или

$$L[\varphi_1(t)\varphi_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c_2-j\infty}^{c_2+j\infty}\varphi_1(p-z)\varphi_2(z)dz. \qquad (1.112)$$

Формулы (1.111) и (1.112) справедливы, если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - оригиналы с показателями роста b_1 и b_2, а $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ - соответствующие им изображения в области, где вещественная часть комплексного аргумента $p = \sigma + j\omega$ удовлетворяет неравенству $\sigma > b_1 + b_2$ при $c_1 > b_1$ и $c_2 > b_2$.

Пример 1.16: Если функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют показатели роста $b_1 < 0$ и $b_2 < 0$, то можно в формулах (1.111) и (1.112) положить $c_1 = c_2 = 0$. Тогда выражение (1.112) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \varphi_1(t)\varphi_2(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\varphi_1(z)\varphi_2(p-z)dz. \qquad (1.113)$$

С учетом выражения (1.113) можно также записать

$$\int_0^\infty \varphi_1^2(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\varphi_1(z)\varphi_1(p-z)dz. \qquad (1.114)$$

Полагая в выражениях (1.113) и (1.114) $p=0$, что допустимо, т.к. при введенных предположениях о показателях роста точка $p=0$ лежит внутри области, определяемой неравенством $\sigma > b_1 + b_2$, получаем

$$\int_0^\infty \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\varphi_1(z)\varphi_2(-z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi_1(j\omega)\varphi_2(-j\omega)d\omega, \qquad (1.115)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\varphi_1(z)\varphi_1(-z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left|\varphi_1(j\omega)\right|^2 d\omega. \qquad (1.116)$$

Формулы (1.115) и (1.116) широко применяются в теории автоматического управления.

7. Теорема разложения. Обратный переход от изображения $\varphi(p)$ к оригиналу $\varphi(t)$ в общем случае по формуле (1.94) обычно связан с громоздкими вычислениями в области комплексных чисел. Поэтому в практике автоматического управления нашли применение иные математические формулы, охватывающие достаточно широкий класс практических задач теории автоматического управления.

Случай 1. Предположим, что $\varphi(p)$ может быть разложена в ряд по обратным степеням *p,* т.е.

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p}, \tag{1.117}$$

тогда

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i t^{i-1}}{(i-1)!}. \tag{1.118}$$

Эту формулу иногда называют *первой теоремой разложения Хевисайда*.

Случай 2. Пусть

$$\varphi(p) = \frac{U(p)}{V(p)}, \tag{1.119}$$

где

$$U(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m, \tag{1.120}$$

$$V(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{1.121}$$

причем $n > m$ и уравнение $V(p) = 0$ имеет только простые корни p_i, т.е. $V'(p_i) \neq 0$. Тогда

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{p_i t}, \tag{1.122}$$

где суммирование ведется по всем n корням уравнения $V(p) = 0$.

Если среди корней уравнения $V(p) = 0$ имеется один нулевой, т.е. $V(p) = pW(p) = 0$, то

$$\varphi(t) = \frac{U(0)}{W(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{U(p_i)}{p_i W'(p_i)} e^{p_i t}, \tag{1.123}$$

где суммирование ведется по всем корням n уравнения $W(p) = 0$. Формулу (1.123) иногда называют *второй теоремой разложения Хевисайда*.

Случай 3. Среди корней уравнения $V(p) = 0$ в формуле (1.119) имеются кратные, т.е.

$$V(p) = a_0 (p - p_1)^{m_1} (p - p_2)^{m_2} \ldots (p - p_n)^{m_n}, \tag{1.124}$$

то

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} H_{kj} t^{m_k - j} e^{p_k t}, \tag{1.126}$$

где

$$H_{kj} = \frac{1}{(j-1)!(m_k - j)!}\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}\left[\frac{(p-p_k)^{m_k}U(p)}{V(p)}\right]_{p=p_k}.$$

Пример 1.17. а, Автоматическая система управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$T\frac{dx_{вых}}{dt} + x_{вых} = kx_{вх}.$$

Определим реакцию системы на единичное воздействие при нулевых начальных условиях, т.е. найдем решение уравнения при

$$X_{вх}(t) = \begin{cases} 1 \ при \ t > 0; \\ 0 \ при \ t \le 0. \end{cases}$$

Преобразовав уравнение по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим:

$$X_{вых}(p) = X_{вх}(p)\frac{k}{Tp+1} = \frac{k}{p(Tp+1)}.$$

Для определения $x_{\text{вых}}(t)$ воспользуемся формулой (1.123), для чего предположим $U(p) = k$, $W(p) = Tp + 1$, откуда

$$n = 1, \ p_1 = -1/T, \ W'(p) = T,$$

$$X_{вых}(t) = k + \frac{k}{-\frac{1}{T}}e^{-\frac{t}{T}} = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Пример 1.17. б. Операторный метод построения переходного процесса.

По окончании расчета системы автоматического управления, в процессе которого из условия обеспечения устойчивости и заданных косвенных показателей качества (времени переходного процесса, величины перерегулирования и т.д.), оказываются выбранными структура и значения параметров системы, обычно производится приближенное построение кривой переходного процесса в системе при каком-либо типовом воздействии.

При использовании операторного метода, благодаря алгебраизации дифференциальных уравнений (при переходе к операторным изображениям величин), существенно упрощается процесс составления уравнений систем, передаточных функций отдельных звеньев и преобразованию структурных схем систем управления.

После определения передаточной функции замкнутой системы $\Phi(p)$ операторное изображение выходной величины на основании формулы может быть получено как

$$X_{вых}(p) = \Phi(p)X_{вх}(p).$$

В качестве типового входного воздействия $x_{вх}(t)$, являющегося оригиналом по отношению к изображению $X_{вх}(p)$, чаще всего применяется воздействие в виде единичной (скачкообразной) функции времени

$$x_{вх}(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 \ при \, t \ge 0, \\ 0 \ при \ t \prec 0, \end{cases}$$

операторное изображение которой по Лапласу

$x_{вх}(t)$

8. Дельта функция. В практике исследования автоматических систем управления встречаются случаи, когда изображение выходного сигнала $\varphi(p)$, определяемое по формуле (1.119), имеет степень числителя, большую или равную степени знаменателя. В этом случае формулы (1.109), (1.123) и (1.126) теряют силу.

Поскольку любая дробно-рациональная функция может быть представлена в виде суммы целой части и правильной дроби и для правильной дроби может быть найден оригинал, решение поставленного вопроса сводится к отысканию оригинала для изображения в виде целой функции p

$$\varphi(p) = \sum_i a_i p^i \tag{1.127}$$

Для отыскания оригинала выражения (1.127) вводится понятие *дельта-функции* δ(t) (эту функцию также называют *импульсной функцией* или *функцией Дирака*). Для дельта-функции имеем

$$L\left[\delta^{(i)}(t)\right] = p^i. \tag{1.128}$$

Чтобы выяснить физический смысл δ(t), рассмотрим функцию

$$\varphi(t,\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{t-\alpha}{\alpha^2}, \tag{1.129}$$

изображенную на рис. 1.8 для разных значений α. При $\alpha \to 0$

$$\varphi(t) = \lim_{\alpha\to 0} \varphi(t,\alpha) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ t \le 0; \\ 1 \ \ при \ \ t \succ 0. \end{cases} \tag{1.130}$$

получаем единичную ступенчатую функцию, широко применяемую в теории автоматического управления.

Дельта-функция математически определяется соотношением

$$\delta(t) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial\varphi(t,\alpha)}{\partial t} = \lim \frac{\alpha^2}{\pi\left[(t-\alpha)^2 + \alpha^4\right]} = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ t \ne 0; \\ \infty \ \ при \ \ t = 0. \end{cases} \tag{1.131}$$

Физически дельта-функция представляет собой импульс бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой длительности, причем для нее имеет силу соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \tag{1.132}$$

Производная i-го порядка от дельта функции определяется соотношением

$$\frac{d^i}{dt^i}\left[\left[\delta(t)\right] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial^{i+1}\varphi(t,\alpha)}{\partial t^{i+1}}\right]. \tag{1.133}$$

Пример 1.18: Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением вида при $x_{вых}(t) = k\left[T_0^2 \frac{d^2 x_{вх}(t)}{dt^2} + T_1 \frac{d\ x_{вх}(t)}{dt} + x_{вх}(t)\right]$.

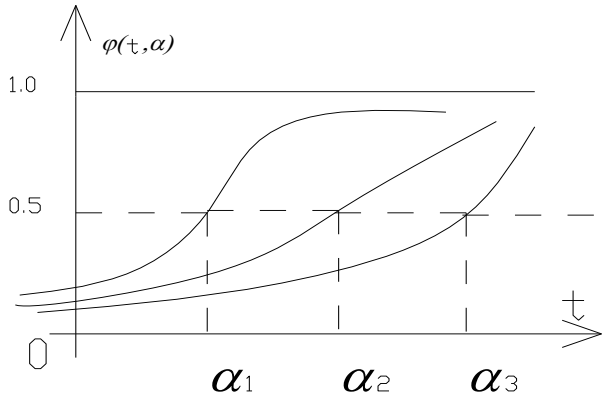


Рис. 1.8. Графики функции $\varphi(t,\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{t-\alpha}{\alpha^2}$ при $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$.

Определим реакцию системы на единичное воздействие при нулевых условиях, т.е. найдем решение уравнения $x_{вых}(t)$ при

$$x_{вх}(t)=\begin{cases}1 \ при \ t>0;\\ 0 \ при \ t\le 0.\end{cases}$$

Преобразовав дифференциальное уравнение по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим:

$$X_{вых}(p)=\frac{k(T_0^2p^2+T_1p+1)}{p},$$

откуда

$$x_{вых}(t)=k\left[T_0^2\delta'(t)+T_1\delta(t)+1\right].$$

9. Начальное и предельное значения оригинала. Если функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ являются оригиналами, а $\varphi(p)$ – изображение оригинала $\varphi(t)$, то при существовании предела $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)$ справедливы равенства

$$\lim_{p\to\infty}p\varphi(p)=\lim_{t\to 0}\varphi(t); \qquad (1.134)$$

$$\lim_{p\to 0}p\varphi(p)=\lim_{t\to\infty}\varphi(t). \qquad (1.135)$$

Контрольные вопросы:

1. Двухсторонний интеграл изображения Лапласа.
2. Односторонний интеграл изображения Лапласа.
3. Отыскание изображения по оригиналу.
4. Линейность преобразования Лапласа.
5. Правила дифференцирования.
6. Правила интегрирования.
7. Теорема смещения.
8. Теорема свертывания.
9. Первая теорема разложения Хевисайда.
10. Вторая теорема разложения Хевисайда.

11. Дельта функция. Импульсная функция.

1.4 Ряд и интеграл Фурье
Ряд Фурье

В ряде задач теории автоматического управления бывает необходимо заменить данную функцию $\varphi(t)$ в промежутке 0 – T точно или приближенно рядом

$$\psi_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \qquad (1.136)$$

где $n = 1,2,3...$ - выбирается в зависимости от желаемой точности приближения $\psi_n(t)$ к $\varphi(t)$.

При заданном n приближение $\psi_n(t)$ к $\varphi(t)$ является наилучшим, если коэффициенты a_0, a_k, b_k является *коэффициентами Фурье*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt; \qquad (1.137)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t)\cos k\omega t dt; \qquad (1.138)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t)\sin k\omega t dt, \qquad (1.139)$$

где $\omega = 2\pi/T.$

Если при $n \to \infty$ $\psi_n(t)$ стремится к определенному пределу $\psi(t)$, то получится сходящийся ряд Фурье данной функции

$$\psi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\right). \qquad (1.140)$$

Из формулы (1.140) следует, что при разложении в ряд Фурье периодическая функция $\varphi(t)$, имеющая период T, представляется как сумма к синусоидальной и синусоидальной функции углов, кратных углу ωt, где $\omega = 2\pi/T$. Постоянные коэффициенты нулевой гармоники a_0 и гармоник с частотой $k\omega$(коэффициенты разложения) a_k и b_k определяется формулами (1.137) – (1.139).

Если период функции $\varphi(t)$ предположить равным 2π, то в формулах (1.137) – (1.140) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, а пределы интегрирования будут от 0 до 2π. Иногда возникает необходимость представить периодическую функцию $\varphi(t)$ рядом Фурье в промежутке от $-T/2$ до $+T/2$. В этом случае вид формул (1.137) – (1.140) сохраняется, но пределы интегрирования будут от $-T/2$ до $+T/2$.

Ряд Фурье может быть также представлен в комплексной форме

$$\psi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}, \qquad (1.141)$$

где

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t) e^{-jk\omega t}\, dt. \qquad (1.142)$$

Рассмотрим *основные свойства ряда Фурье.*

1. Если функция $\varphi(t)$ в интервале 0 – *T* удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. она:

1) всюду однозначна, конечна и кусочно-непрерывна;

2) имеет ограниченное число максимумов и минимумов, то ряд Фурье для этой функции сходится и сумма его равна $\varphi(t)$ в точках непрерывности $\varphi(t)$, а в точках разрыва *a* она равна:

$$\frac{\varphi(a-0)+\varphi(a+0)}{2}, \qquad (1.143)$$

где

$$\varphi(a-0) = \lim_{\substack{t\to a \\ t\prec a}} \varphi(t); \quad \varphi(a+0) = \lim_{\substack{t\to a \\ t\succ a}} \varphi(t).$$

Пример 1.19: Разложим в ряд Фурье в промежутке $-\pi \prec t \prec \pi$ функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1 & при -\pi \prec t \prec 0; \\ +1 & при 0 \prec t \prec +\pi; \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1;$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} dt + \int_0^{\pi} dt \right] = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} \cos kt dt + \int_0^{\pi} \cos kt dt \right] = \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{1}{k}\sin kt\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{1}{k}\sin kt\right)\Big|_0^{\pi} \right] = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} \sin kt dt + \int_0^{\pi} \sin kt dt \right] = \frac{1}{\pi}\left[-\left(-\frac{1}{k}\cos kt\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \left(-\frac{1}{k}\cos kt\right)\Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right].$$

Таким образом, все коэффициенты b_k с четным и индексами равны нулю, а с нечетными индексами равны $4/k\pi$, отсюда получаемый ряд:

$$\psi(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} + \ldots \right).$$

Функция $\varphi(t)$ в промежутке $-\pi \prec t \prec \pi$ имеет точку разрыва при t = 0: $\psi(0) = 0.$ Для этой точки

$$\psi(0) = \frac{\varphi(-0)+\varphi(+0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

2. При приближенной замене функции $\varphi(t)$ рядом (1.136) среднеквадратичная ошибка

$$\delta^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\varphi(t) - \psi_n(t)]^2 dt \qquad (1.144)$$

будет наименьшей, если a_0, a_k, b_k определять как коэффициенты Фурье.

3. Если $\varphi(t)$ - четная функция (симметрия I рода), т.е. $\varphi(-t) = \varphi(t)$, то

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \varphi(t)\cos k\omega t dt; \qquad (1.145)$$

$$b_k = 0, \qquad (1.146)$$

где $k = 0,1,2...$

Пример 1.20: Разложим в ряд Фурье функцию $\varphi(t) = \cos \alpha t$ в интервале $-\pi \prec t \prec \pi$ (α – не целое число). Так как функция $\varphi(t)$ - четная, то $b_k = 0$, а

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos \alpha t \cos kt dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha - k)t}{2(\alpha - k)} + \frac{\sin(\alpha + k)t}{2(\alpha + k)}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\alpha \sin \alpha\pi \frac{\cos k\pi}{\alpha^2 - k^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^k \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\alpha^2 - k^2},$$

откуда получаем ряд

$$\cos \alpha t = \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos t}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{\cos 2t}{\alpha^2 - 2^2} - ...\right). \qquad (1.147)$$

4. Если $\varphi(t)$ - нечетная функция (симметрия II рода), т.е. $\varphi(-t) = -\varphi(t)$, то

$$a_k = 0; \qquad (1.148)$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \varphi(t)\sin k\omega t dt. \qquad (1.149)$$

Пример 1.21: Разложим в ряд Фурье функцию $\varphi(t) = t$ для $-\pi \prec t \prec \pi$. Функция нечетная, поэтому $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \sin kt dt = -\frac{2}{k\pi}[t\cos kt]_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} t\cos kt dt = -\frac{2}{k}\cos k\pi = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Получаем ряд

$$t = 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - ...\right).$$

5. Пусть для функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ известны их ряды Фурье $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно с коэффициентами a_k, b_k и A_k, B_k. Чтобы получить ряд Фурье $\psi(t)$ для суммы или разности функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ с коэффициентами a_k и β_k, достаточно произвести сложение или соответственно вычитание известных рядов

$$\alpha_k = a_k \pm A_k, \qquad (1.150)$$

$$\beta_k = b_k \pm B_k \qquad (1.151)$$

Ряд Фурье для функции $n\varphi(t)$ $(n - const)$ получается из ряда Фурье для $\varphi(t)$ умножением всех его членов на n.

5. Коэффициенты ряда Фурье α_k и β_k для функции $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ $\varphi_2(t)$ вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_0 = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k A_k + b_k B_k); \tag{1.152}$$

$$\alpha_k = a_0 A_k + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n (A_{n+k} + A_{n-k}) + b_n (B_{n+k} + B_{n-k})]; \tag{1.153}$$

$$\beta_k = a_0 B_k + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n (B_{n+k} - B_{n-k}) - b_n (A_{n+k} - A_{n-k})]. \tag{1.154}$$

В этих формулах следует считать $A_{-m} = A_m$, $B_{-m} = B_m$.

7. Иногда могут встретиться случаи, когда известен лишь ряд Фурье, но не сама функция. В связи с этим возникает задача, как зная ряд Фурье функции $\varphi(t)$, вычислить $\int_a^b \varphi(t)dt$.

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема: *если абсолютно интегрируемая функция $\varphi(t)$ задана своим рядом Фурье в форме (1.140), то искомый интеграл может быть найден почленным интегрированием ряда независимо от того, сходится последний или нет, т.е.*

$$\int_a^b \varphi(t)dt = a_0(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\sin k\omega b - \sin k\omega a) - b_k(\cos k\omega b - \cos k\omega a)}{k\omega}. \tag{1.155}$$

8. Дифференцирование рядов Фурье. Будем везде предполагать, что функция $\varphi(t)$ обладает абсолютной интегрируемой производной (которая может и не существовать в отдельных точках). Здесь возможны следующие случаи.

1. Случай непрерывной функции периода 2π (или *T*). Тогда ряд Фурье $\psi'(t)$ для $\varphi'(t)$ может быть получен из ряда Фурье функции $\varphi(t)$ почленным дифференцированием, т.е. для $0 \prec t \prec 2\pi$ имеем

$$\psi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt). \tag{1.156}$$

2. Случай функции, заданной на отрезке $(-\pi, \pi)$

$$\psi'(t) = \frac{c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \left[kb_k + (-1)^k c\right]\cos kt - ka_k \sin kt\right\}, \tag{1.157}$$

где

$$c = \frac{1}{\pi}[\varphi(\pi) - \varphi(-\pi)]. \tag{1.158}$$

3. Случай функции, заданной на отрезке $(0, \pi)$. В этом случае ряд по косинусам всегда можно почленно дифференцировать, а для ряда синусов это возможно только при φ(0) = φ(π) = 0.

Если $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $(0, \pi)$ и разложена в ряд Фурье по синусам, т.е.

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt, \tag{1.159}$$

то

$$\psi'(t) = \frac{c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[kb_k - d + (c+d)(-1)^k \right]\cos kt, \tag{1.160}$$

где

$$c = \frac{2}{\pi}[\varphi(\pi) - \varphi(0)]; \qquad d = \frac{2}{\pi}\varphi(0).$$

9. В практических вопросах теории автоматического управления часто функция, которую нужно разложить в ряд Фурье, задается не аналитически, а графически или таблично. В этом случае коэффициенты Фурье непосредственно с применением обычных формул не могут быть получены и ставится задача об их приближенном вычислении.

Один из способов приближенного вычисления коэффициентов Фурье (метод прямоугольников) заключается в следующем.

Отрезок $(0,2\pi)$ точками

$$0; \quad \frac{2\pi}{m}; \quad 2\frac{2\pi}{m}; \ldots; \quad (m-1)\frac{2\pi}{m}; \quad 2\pi$$

делят на m равных частей и определяют значения $\varphi(t)$ в этих точках: y_0; y_1; …, y_{m-1}; y_m.

Для $m = 12$ приближенные значения коэффициентов Фурье a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 определяется по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&12a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{11};\\
&6a_1 = (y_0 - y_6) + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7)0{,}866 + (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8)0{,}5;\\
&6a_2 = (y_0 + y_6) - (y_3 + y_9) + (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10})0{,}5;\\
&6a_3 = y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10};\\
&6b_1 = (y_1 + y_5 - y_7 + y_{11})0{,}5 + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10})0{,}866 + y_3 - y_9;\\
&6b_2 = [(y_1 + y_2 + y_7 + y_8) - (y_4 + y_5 + y_{10} + y_{11})]0{,}866;\\
&6b_3 = y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.161)$$

Для упрощения расчетов их можно производить по следующей схеме.

Выписывают в указанном ниже порядке ординаты y_0; y_1; … и производят их сложение и вычитание по схеме

Ординаты	y_0	y_1 y_{11}	y_2 y_{10}	y_3 y_9	y_4 y_8	y_5 y_7	y_6
Суммы	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Разности		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6

После этого над суммами и разностями производят аналогичные операции по схемам

Ординаты	u_0 u_6	u_1 u_5	u_2 u_4	u_3	Ординаты	v_1 v_5	v_2 v_4	v_3
Суммы	s_0	s_1	s_2	s_3	Суммы	σ_1	σ_2	σ_3
Разности	t_0	t_1	t_2		Разности	τ_1	τ_2	

Пользуясь полученными соотношениями, выражение (1.161) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&12a_0 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3;\\
&6a_1 = t_0 + 0{,}866t_1 + 0{,}5t_2;\\
&6a_2 = s_0 - s_3 + 0{,}5(s_1 - s_2);\\
&6a_3 = t_0 - t_2;\\
&6b_1 = 0{,}5\sigma_1 + 0{,}866\sigma_2 + \sigma_3;\\
&6b_2 = 0{,}866(\tau_1 + \tau_2);\\
&6b_3 = \sigma_1 - \sigma_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.162)$$

Для получения более точных результатов употребляются схемы с большим числом ординат, например схема с 24 ординатами.

Интеграл Фурье

Если при разложении функции в ряд Фурье дискретность изменения частоты гармонических составляющих будет стремиться к нулю, а их число – к бесконечности, то она запишется в виде

$$\psi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin \omega t\right).$$

Переходя к пределу, получим точное выражение исходной функции $\varphi(t)$ через бесчисленное множество непрерывно переходящих друг в друга гармоник

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty}\left[a(\omega)\cos \omega t + b(\omega)\sin \omega t\right] dt, \qquad (1.163)$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\cos \omega t \; dt; \qquad (1.164)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin \omega t \, dt. \qquad (1.165)$$

Интеграл в правой части выражения (1.163) называется *интегралом Фурье*. Подставим выражения для $a(\omega)$ и $b(\omega)$ в интеграле Фурье (1.163). При этом в качестве переменной интегрирования в формулах (1.164) и (1.165) возьмем переменную τ вместо t , чтобы было различие между переменной интегрирования в выражениях для $a(\omega)$ и $b(\omega)$ и аргументом t функцию $\varphi(t)$. Выражение (1.163) примет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau\right]\cos\omega t + \left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin \omega\tau \, d\tau\right]\sin \omega t\right\} d\omega$$

или

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\left(\cos\omega\tau \cos\omega t + \sin \omega\tau \sin \omega t\right) d\tau.$$

С учетом формулы для косинуса разности получим следующую форму записи интеграла Фурье:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1.166)$$

Из выражения (1.163) видно, что $\varphi(t)$ можно рассматривать как сумму бесконечного числа синусоидальных колебаний с амплитудами

$$A(\omega)=\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)} \qquad (1.167)$$

и фазами

$$\theta(\omega)=arctg\,\frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \qquad (1.168)$$

Соотношения (1.167) и (1.168) позволяют записать интеграл Фурье в более компактной форме:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\omega)\cos[\omega t-\theta(\omega)]d\omega. \qquad (1.169)$$

В теории управления чаще применяется комплексная форма интеграла Фурье

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \qquad (1.170)$$

или

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{j[\omega t-\theta(\omega)]}d\omega. \qquad (1.171)$$

Интеграл Фурье дает разложение функции в непрерывный спектр, причем частоте ω соответствует плотность спектра

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

С учетом этого интеграл Фурье в комплексной форме можно записать в виде

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty}g(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (1.172)$$

Так как спектральные плотности функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi(t)$ равны, то спектральная плотность $g(\omega)$ и функция $\varphi(t)$ связаны зависимостью

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (1.173)$$

Пример 1.22: Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & при \quad t\prec 0.\\ e^{-\beta t} & при \quad t\succ 0.\end{cases}$$

По формуле (1.173) определяем плотность спектра

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{1}{2\pi}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (1.172) получаем

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega\right]+j\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega\right].$$

В мнимой части полученного выражения под знаком интеграла находятся нечетные функции от ω. Поскольку при симметричных пределах интеграл от нечетной функции равен нулю, то

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega\right]. \qquad (1.174)$$

В теории автоматического управления исследование линейных систем часто производится при возмущающем воздействии, заданном виде единичной функции

$$\varphi(t)=[1]=\begin{cases}0 & при \quad t\le 0;\\ 1 & при \quad t\succ 0.\end{cases}$$

Рассмотрим, каким образом эту функцию можно разложить в интеграл Фурье. Воспользуемся для этого выражением (1.174).

Если в выражении $\varphi(t)=e^{-\beta t}$, $\beta\to 0$, то $\varphi(t)\to 1$, первое слагаемое в формуле (1.174) стремится к 1/2, а второе – к выражению $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega$.

Таким образом, разложение единичной функции в интеграл Фурье имеет вид:

$$[1]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega \qquad (1.175)$$

-это *интеграл Дирихле.*

Отметим два свойства интеграла Фурье, которые используются в теории автоматического управления.

1. Если $\varphi(t)$ - четная функция, т.е. $\varphi(-t)=\varphi(t)$, то

$$\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega t d\omega\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau. \qquad (1.176)$$

2. Если $\varphi(t)$ - нечетная функция, т.е. $\varphi(-t)=-\varphi(t)$, то

$$\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\omega t d\omega\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\sin\omega\tau\ d\tau. \qquad (1.177)$$

Преобразование Фурье

Сравнивая формулы (1.172) и (1.173), можно заметить взаимосвязь этих выражений. Формула (1.172) определяет $g(\omega)$, если известна функция $\varphi(t)$. Формула (1.173), наоборот, определяет $\varphi(t)$, если известна $g(\omega)$.

В теории автоматического управления для однозначного преобразования функции времени в функцию частоты и наоборот используют выражения

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}dt; \qquad (1.178)$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{-j\omega t}dt \qquad (1.179)$$

Выражения (1.178) и (1.179) отличаются от формул (1.172) и (1.173) множителем $1/2\pi$ и соответственно называются *прямым и обратным преобразованиями Фурье.*

С учетом формулы Эйлера выражение (1.178) запишется в виде

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t)\ dt,$$

или

$$F(j\omega)=F_1(\omega)-jF_2(\omega),$$

где

$$F_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\cos\omega t\ dt, \qquad F_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sin\omega t\ \ dt.$$

Если функция $\varphi(t)$ определенна только при $t\succ 0$, т.е. $\varphi(t)$ =0 при $t\prec 0$, то вводятся еще два других преобразования Фурье

$$F_1(j\omega)=\int_{0}^{\infty}\varphi(t)\cos\omega t\ \ dt,\ t\succ 0 \qquad (1.180)$$

- так называемое *косинус - преобразование Фурье для* $\varphi(t)$, и

$$F_2(j\omega)=\int_{0}^{\infty}\varphi(t)\sin\omega t\ \ dt, \quad t\succ 0 \qquad (1.181)$$

- *синус преобразование Фурье для* $\varphi(t)$.

Обратные преобразования имеют вид

$$\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_1(t)\cos\omega t\ \ d\omega; \qquad (1.182)$$

$$\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_2(t)\sin\omega t\ \ d\omega. \qquad (1.183)$$

Пример 1.23. Найти преобразование Фурье функции

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & при \quad t\prec 0.\\ e^{-\alpha t} & при \quad t\succ 0.\end{cases}$$

Имеем:

$$F\ (j\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}.$$

Взяв вещественную и мнимую части полученного выражения, мы непосредственно получаем косинус- и синус-преобразования Фурье для $\varphi(t)$:

$$F_1(\omega)=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}; \qquad F_2(\omega)=-\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Преобразование Фурье широко используется в теории автоматического управления, когда необходимо получить частотные характеристики системы по ее передаточной функции. Если передаточная функция системы не имеет полюсов справа от мнимой оси или на ней самой и $\varphi(t)$ равна нулю при $t \prec 0$, то достаточно заменить p в выражении для передаточной функции $W(p)$ (где p – символ преобразования Лапласа) на $j\omega$, чтобы получить амплитудно-фазовую частотную функцию системы.

Если же $\varphi(t)$ не равна нулю при $t \prec 0$, то

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(-t) e^{j\omega t} dt.$$

Если для $\varphi(t)$ и $\varphi(-t)$ преобразования Лапласа соответственно имеют вид $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ и, если обе эти функции не имеют полюсов справа от мнимой оси или на ней самой, то

$$F(j\omega) = \varphi_1(j\omega) + \varphi_2(j\omega),$$

где $\varphi_1(j\omega)$ и $\varphi_2(j\omega)$ получаются соответственно из $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ заменой p на $j\omega$.

Контрольные вопросы:

1. Замена функции рядом. Коэффициенты Фурье.
2. Представление ряда Фурье в комплексной форме.
3. Основные свойства ряда Фурье.
4. Дифференцирование рядов Фурье.
5. Интеграл Фурье.
6. Разложение единичной функции в интеграл Фурье (интеграл Дирихле).
7. Свойства интеграла Фурье при четной и нечетной функции.
8. Прямое и обратное преобразование Фурье
9. Косинус - преобразование Фурье для функции.
10. Синус - преобразование Фурье для функции.

1.5 Основы векторного исчисления

Основные понятия

Инженеру в практических расчетах приходиться иметь дело с величинами двух типов: один из них (например: угол, площадь, температура, масса и т.д.) полностью характеризуются одним только числом; другие (например, скорость, ускорение, сила и т.д.) характеризуются не только числом, но и направлением в пространстве.

Величина, полностью характеризующаяся после выбора единицы измерения одним числом, называется *скаляром.* Следует различать чистые скаляры и псевдоскаляры. *Чистые скаляры* (температура, масса, сопротивление и т.д.) полностью определяются числом, не зависящим от выбора направления осей координат. Псевдоскаляры также определяются с помощью числа, абсолютное значение которого не зависит от выбора осей координат, однако

знак этого числа зависит от выбора направлений на осях координат. Примерами псевдоскаляров являются угол, площадь, поверхность.

Вектор – это величина, которая характеризуется числом и направлением. Обычно векторы изображают отрезком прямой линии, длина которого (модуль) определяет числовое значение вектора, а стрелка указывает направление вектора.

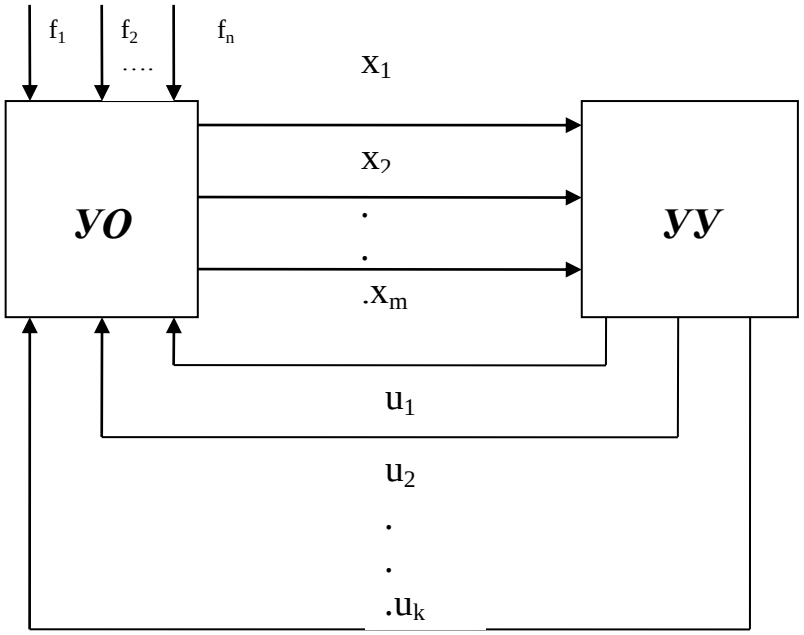


Рис. 1.9. Структурная схема автоматической системы управления.

Будем обозначать в дальнейшем скаляры латинскими буквами a, b…, векторы **a, b…,** модули векторов |**a**|, |**b**| **…** или просто a, b…

Различают следующие типы векторов:

связанный вектор, начало которого закреплено в определенной точке;

*скользящий (*или *свободный)* вектор, который определяется только направлением линии действия и модулем, начало его не закреплено.

Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными;* равные по длине коллинеарные векторы называются *эквиполетными.* Векторы, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными.* Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным вектором* или *ортом.* Орты, имеющие направление прямоугольных координатных осей *Ox, Oy, Oz* обозначаются ***i, j, k*** соответственно.

Два вектора **a** и ***b*** считаются равными, если равны их модули и направления совпадают.

В системе прямоугольных координат любой вектор **a** может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z, \qquad (1.184)$$

где $\mathbf{a}_x = \mathbf{i}a_x$; $\mathbf{a}_y = \mathbf{j}a_y$; $\mathbf{a}_z = \boldsymbol{k}a_z$; a_x, a_y, a_z - координаты вектора относительно соответствующих осей координат.

В прикладной математике векторные представления величин используется достаточно широко. Рассмотрим в качестве примера структурную схему автоматической системы управления, изображенную на рис. 1.9. В общем случае на управляемый объект *УО* действует *n* возмущающих воздействий *f* (условно считаем, что все они приложены к *УО*) и *k* управляющих воздействий *u* . Управляющее устройство *УУ* получает информацию об *УО* по *m* каналам, измеряя регулируемые параметры *x (*или их отклонения от заданного значения), и на основании этой информации вырабатывает сигналы управления *u*.

В ряде случаев поведение изображенной схемы управления может быть описано системой из *m* дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1\left(x_1,...,x_m;\quad u_1,..,u_k;\quad f_1,...,f_n\right);\\
&\frac{dx_2}{dt} = \varphi_2\left(x_1,...,x_m;\quad u_1,..,u_k;\quad f_1,...,f_n\right);\\
&.....\\
&\frac{dx_m}{dt} = \varphi_m\left(x_1,...,x_m;\quad u_1,..,u_k;\quad f_1,...,f_n\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.185)$$

Введем в рассмотрение m-мерный вектор ***x*** с координатами $x_1,..,x_m$; k-мерный вектор ***u*** координатами $u_1,...,u_k$; n-мерный вектор ***f*** с координатами $f_1,..., f_n$.

Тогда систему управлений (1.185) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1\boldsymbol{(x,\ u,\ f);}\\
&\frac{dx_2}{dt} = \varphi_2\boldsymbol{(x,u,f);}\\
&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots..\\
&\frac{dx_m}{dt} = \varphi_m\boldsymbol{(x,\ u,\ f).}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.186)$$

Теперь введем в рассмотрение m-мерный вектор *dx/dt* с координатами dx_1/dt;..; dx_m/dt и m-мерный вектор **φ** с координатами $\varphi_1,...,\varphi_m$. Тогда систему уравнений (1.186) можно переписать в более компактном виде:

$$\frac{dX}{dt} = \boldsymbol{\varphi(x,\ u,\ f).} \qquad (1.187)$$

Таким образом, применение понятий векторного исчисления придало уравнениям движения автоматической системы управления более компактный вид, позволяющий значительно упростить все последующие расчеты.

Операции над векторами

Суммой нескольких векторов **a, b, c, d** (рис. 1.10) является вектор **e**, представляющий собой замыкающую ломаной линии, составленной из слагаемых векторов.

Основные свойства суммы векторов:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a};\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c};$$
$$|\mathbf{a}+\boldsymbol{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|;\quad \mathbf{a}+0=\mathbf{a}, \qquad (1.188)$$

где **0** – нулевой вектор (или нуль-вектор).

Нулевой вектор – это математическое понятие вектора с нулевым модулем.

Разностью двух векторов **a – b** называется сумма векторов **a+(-b).**

Свойства разности векторов:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b});\ \mathbf{a}-\mathbf{a}=0;\\ |\mathbf{a}-\boldsymbol{b}|\ge|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|;\ \mathbf{a}-\mathbf{0}=\mathbf{a}.\end{array}\right\} \qquad (1.189)$$

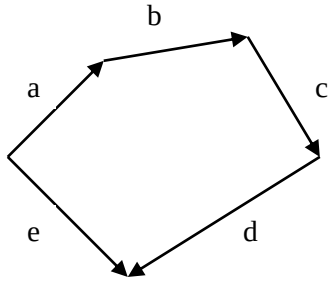


Рис. 1.10. Пример сложения векторов.

Произведение вектора ***a*** *на скаляр* k есть вектор, коллинеарный с вектором **a** длиной $k|\mathbf{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора **a** при $k \succ 0$ и противоположно ему при $k \prec 0$.

Свойства произведения вектора на скаляр:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{k}\mathbf{a}=\mathbf{a}\mathrm{k};\ (\mathrm{k}+\mathrm{e})\,\mathbf{a}=\mathrm{k}\mathbf{a}+\mathrm{e}\mathbf{a};\\ \mathrm{k}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathrm{k}\mathbf{a}+\mathrm{k}\mathbf{b};\ 1\mathbf{a}=\mathbf{a};\\ (-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a};\qquad 0\mathbf{a}=0.\end{array}\right\} \qquad (1.190)$$

При умножении векторов различают *скалярное* и *векторное* произведения.

Скалярное произведение векторов **a** и **b** [обозначается $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ или **(a, b)**] есть скаляр, определяемый равенством

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами **a** и **b ,** приведенными к общему началу (рис. 1.11, а).

Свойства скалярного произведения векторов:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a};\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c};\\ (\mathrm{k}\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathrm{k}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b});\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2\ge 0;\\ |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\ \le\ |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.\end{array}\right\} \qquad (1.191)$$

Если векторы **a** и **b** заданы прямоугольными декартовыми координатами

$\mathbf{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$ (1.192)

Векторное произведение векторов **a** и **b** (обозначается $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ или **[a, b]** есть вектор **c,** длина которого равна ab sin φ, т.е. равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** как на его сторонах (заштрихованная площадь на рис. 1.11, б); вектор **c** направлен перпендикулярно **a** и **b** в такую сторону,

чтобы три вектора **a, b** и **c** образовали правую тройку, т.е. чтобы после совмещения начал векторов **a** и **b** и **c** кратчайший поворот от **a** к **b** казался наблюдателю, смотрящему с конца вектора **c**, идущим против часовой стрелки.

Свойства векторного произведения векторов:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a};\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c};\\ (k\mathbf{a})\times\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\times\mathbf{b});\quad \mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0;\\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0\end{array}\right\} \qquad (1.193)$$

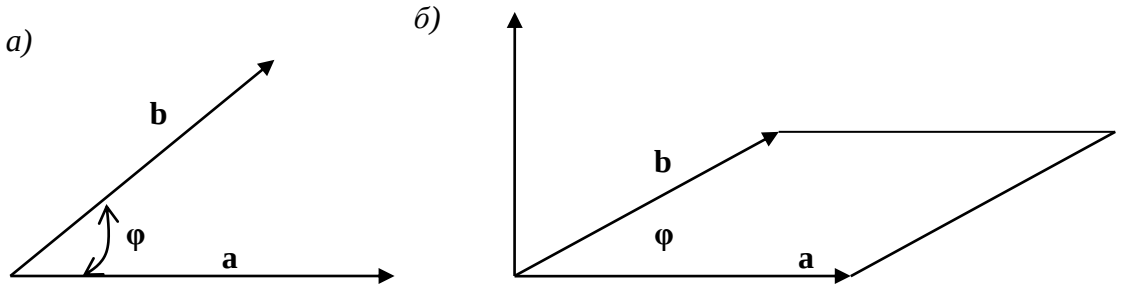


Рис.1.11. К понятию скалярного (*а*) и векторного (*б*) произведений векторов.

В прямоугольных декартовых координатах имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{I} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0;\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k};\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i};\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{I} = \boldsymbol{j};\\ \mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_z)\boldsymbol{k}.\end{array}\right\} \qquad (1.194)$$

Выражение для векторного произведения **a**×**b** из (1.193) можно также записать в виде определителя

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.195)$$

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов называются выражения

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}). \qquad (1.196)$$

В прямоугольных декартовых координатах

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (b_y c_z - b_z c_y)a_x + (b_z c_x - b_x c_z)a_y + (b_x c_y - b_y c_x)a_z \qquad (1.197)$$

или

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1.198)$$

Следует отметить, что одно векторное уравнение в общем случае даже при одном неизвестном векторе не является определенным.

В качестве примера рассмотрим два простейших уравнения со скалярным и векторным произведениями с одним неизвестным вектором $\boldsymbol{x}$ и неизвестными векторами **a** и **b** .

1. Уравнение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является неопределенным, т.к., если все векторы $\boldsymbol{x}$ удовлетворяющие этому уравнению, свести началами в одну точку, то их концы будут лежать в плоскости $\boldsymbol{P}$, перпендикулярной вектору **a.** Уравнение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ называется *векторным уравнением плоскости* $\boldsymbol{P}$. Этому уравнению удовлетворяют бесчисленное множество векторов $\boldsymbol{x}$, исходящих из одной точки и концы которых лежат в плоскости $\boldsymbol{P}$.

2. Уравнение $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ тоже неопределенное, так как этому уравнению будет удовлетворять бесконечное множество векторов $\boldsymbol{x}$, исходящих из одной точки и концы которых лежат на прямой, перпендикулярной вектору **a.** Уравнение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ называется *векторным уравнением этой прямой.*

Неопределенность векторного уравнения с одним неизвестным вектором объясняется тем, что вектор определяется двумя величинами: модулем и направлением. Для получения определенного решения относительно одного неизвестного вектора необходимо решать систему из двух векторных уравнений с одним неизвестным вектором.

Векторный анализ

Допустим, что каждому значению скалярной переменной соответствует определенный вектор **a**. В этом случае говорят, что вектор является функцией скалярной и переменной от ω (вектор–функцией) и записывают его в виде $\mathbf{a}(\omega)$. Координатное задание вектор–функции $\mathbf{a}(\omega)$ эквивалентно заданию трех скалярных функций от ω: $a_x(\omega)$; $a_y(\omega)$; $a_z(\omega)$, т.к.

$$\mathbf{a}(\omega) = \boldsymbol{i}a_x(\omega) + \boldsymbol{j}a_y(\omega) + \boldsymbol{k}a_z(\omega) \qquad (1.199)$$

Если при различных значениях ω откладывать вектор $\mathbf{a}(\omega)$ от общего начала, то конец вектора $\mathbf{a}(\omega)$ опишет некоторую кривую, которая называется годографом вектора $\mathbf{a}(\omega)$. Производная вектор – функции $\mathbf{a}(\omega)$

$$\frac{d\mathbf{a}(\omega)}{d\omega} = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\mathbf{a}(\omega+\Delta\omega) - \mathbf{a}(\omega)}{\Delta\omega} \qquad (1.200)$$

представляет собой новую векторную функцию от ω, направление которой совпадает с направлением касательной к годографу вектора $\mathbf{a}(\omega)$ в соответствующей точке.

Правила дифференцирования

$$\frac{d}{d\omega}[\mathbf{a}(\omega) + \boldsymbol{b}(\omega) + \boldsymbol{c}(\omega) + \ldots] = d\mathbf{a}\frac{(\omega)}{d\omega} + d\mathbf{b}\frac{(\omega)}{d\omega} + d\mathbf{c}\frac{(\omega)}{d\omega} + \ldots, \qquad (1.201)$$

$$\frac{d}{d\omega}[\varphi(\omega)\mathbf{a}(\omega)]=\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\mathbf{a}(\omega)+\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{a}\frac{(\omega)}{d\omega}, \qquad (1.202)$$

где $\varphi(\omega)$ – скалярная функция от ω

$$\frac{d}{d\omega}[\mathbf{a}(\omega)]=a\,\mathrm{d}\mathbf{a}\frac{(\omega)}{d\omega}, \qquad (1.203)$$

где a – постоянная величина

$$\frac{d}{d\omega}[\mathbf{a}(\omega)\cdot\mathbf{b}(\omega)]=\mathrm{d}\mathbf{a}\frac{(\omega)}{d\omega}\mathbf{b}(\omega)+\mathrm{d}\mathbf{b}\frac{(\omega)}{d\omega}\mathbf{a}(\omega), \qquad (1.204)$$

$$\frac{d}{d\omega}[\mathbf{a}(\omega)\times\mathbf{b}(\omega)]=\mathrm{d}\mathbf{a}\frac{(\omega)}{d\omega}\times\mathbf{b}(\omega)+\mathbf{a}(\omega)\times d\boldsymbol{b}\frac{(\omega)}{d\omega}\,. \qquad (1.205)$$

В выражении (1.205) переставлять множители местами нельзя (см. выше свойства векторного произведения векторов).

Определенный интеграл $\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathbf{a}(\omega)d\omega$ для вектора $\mathbf{a}(\omega) = \boldsymbol{i}\mathrm{a}_x(\omega) + \boldsymbol{j}\mathrm{a}_y(\omega) + \boldsymbol{k}\mathrm{a}_z(\omega)$ может быть выражен через координаты

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathbf{a}(\omega)d\omega = \boldsymbol{i}\int_{\omega_1}^{\omega_2}a_x(\omega)d\omega+\boldsymbol{j}\int_{\omega_1}^{\omega_2}a_y(\omega)d\omega+\boldsymbol{k}\int_{\omega_1}^{\omega_2}a_z(\omega)d\omega. \qquad (1.206)$$

В математических расчетах приходится иметь дело не только с постоянными векторами или изменяющимися в зависимости от скалярного аргумента ω, но и с более сложными случаями, когда с каждой точкой рассматриваемого пространства связывается значение некоторого скаляра или вектора. Рассматриваемое пространство называется тогда *скалярным* или *векторным полем,* смотря по тому, какая функция, скалярная или векторная, изучается. Так, в неоднородной среде мы можем рассматривать скалярное поле плотности, т.к. каждой точке среды соответствует своя плотность; в трубопроводе с движущейся жидкостью мы имеем векторное поле скорости частиц жидкости и т.д.

Понятие z скалярного и векторного полей в теории автоматического управления распространяются на возмущающие воздействия и обобщенные координаты движения автоматической системы управления.

Если в рассматриваемом, например трехмерном, пространстве закрепить начало координат, то каждую точку этого пространства можно определить ее *радиус-вектором* **r** (т.е. вектором, проведенным из начала координат в данную точку) с координатами *x, y, z*. Чтобы задать в рассматриваемом пространстве скалярное или векторное поле, необходимо привести в соответствие радиус-вектору **r** значение некоторой скалярной функции ***f(r)*** или некоторой векторной функции ***f(r).*** Таким образом, *скалярное* поле есть скалярная функция точки $f(\mathbf{r}) = f(x,y,z)$ вместе с областью ее определения.

Поверхности

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) = const$$

называются *поверхностями уровня поля*; они позволяют представить поле геометрически.

Векторное поле есть векторная функция точки ***f(r)*** = ***f***(*x, y, z*) вместе с областью ее определения. Векторное поле **f(r)** может быть представлено геометрически своими векторными линиями. Эти линии можно построить следующим способом (рис. 1.12). Возьмем какую-нибудь точку поля *a* и отложим вдоль отвечающего этой точке вектора ***f(r)*** отрезок $\Delta\mathbf{r}$ малой длины, в результате придем в точку *b*, из которой опять отложим отрезок $\Delta\mathbf{r}$ вдоль отвечающего этой точке вектора **f(r)** и т.д. В результате получится ломаная линия, в пределе ($\Delta\mathbf{r} \to 0$) переходящая в плавную векторную линию II, в каждой точке которой вектор ***f(r)*** имеет направление касательной к линий III.

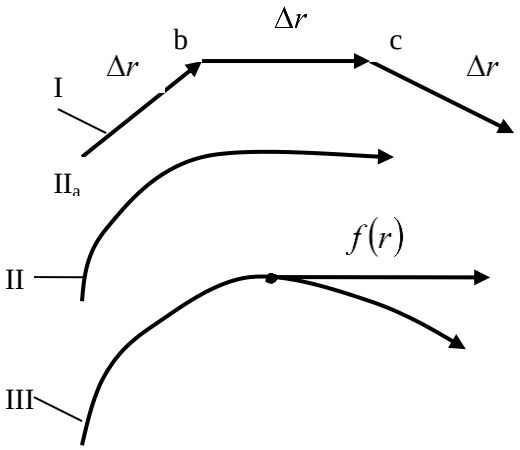


Рис.1.12. Геометрическая интерпретация векторных линий векторного поля.

Векторные линии определяются дифференциальными уравнениями

$$d\boldsymbol{r} \times f(\boldsymbol{r}) = 0$$

или

$$\frac{dx}{f_X(x,y,z)} = \frac{dy}{f_Y(x,y,z)} = \frac{dz}{f_Z(x,y,z)}.$$

Ориентировка векторных линий дает направление вектора ***f(r)*** в каждой точке поля, а относительная плотность векторных линий в каждой точке пропорциональна модулю $|\mathbf{f}(\mathbf{r})|$.

Часто скалярные или векторные функции являются функциями времени, т.е. *f(**r**,t)* ***f(r**,t),* соответствующие поля тогда называются *нестационарными*, поля же, не меняющиеся с течением времени, называются *стационарными*.

Для характеристики скалярных и векторных полей применяются три функции:

1) *градиент* – векторная функция, аргументом которой является скалярная функция точки;

2) *дивергенция* – скалярная функция, аргументом которой является векторная функция точки;

3) *ротор (или вихрь)* – векторная функция, аргументом которой является векторная функция точки.

Градиент

Рассмотрим скалярное поле функции $f(\mathbf{r}) = f(x,y,z)$. Градиентом этой функции в декартовой системе координат называется вектор с координатами $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}$, $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}$, $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}$.

Он обозначается через grad f(**r**). Согласно определению

$$\text{grad } f(\mathbf{r}) = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}. \qquad (1.207)$$

Этот вектор имеет направление нормали к поверхности уровня в сторону возрастания f(**r**), а его модуль равен

$$|grad\ f(\mathbf{r})| = \sqrt{\left[\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}\right]^2}.$$

Из других обозначений градиента f(**r**) наиболее употребляемое $\nabla f(\mathbf{r})$, где знак ∇ читается «набла». При этом обозначении

$$\nabla f(r) = \Delta f(\mathbf{r})\,\boldsymbol{i}\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}. \qquad (1.208)$$

Из выражения (1.208) видно, что ∇ можно рассматривать как векторно-дифференциальный оператор

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1.209)$$

Оператор ∇ впервые был предложен Гамильтоном и поэтому его называют *оператором Гамильтона* (см. ниже).

Правила вычисления градиента:

$$\left.\begin{aligned} &grad\ a = 0;\\ &grad\ [f_1(\mathbf{r}) + f_2(\mathbf{r})] = grad\ f_1(\mathbf{r}) + grad\ f_2(\mathbf{r});\\ &grad\ [a\,f(\mathbf{r})] = a\ grad\ f(\mathbf{r});\\ &grad\ [f_1(\mathbf{r})\,f_2(\mathbf{r})] = f_1(\mathbf{r})\ grad\ f_2(\mathbf{r}) + f_2(\mathbf{r})\ grad\ f_1(\mathbf{r});\\ &grad\ f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}). \end{aligned}\right\} \qquad (1.210)$$

Физический смысл понятий скалярного поля и градиента и возможности их практического использования применительно к автоматическим системам управления, проиллюстрируем на примере простейшей самонастраивающейся системы (рис. 1.13).

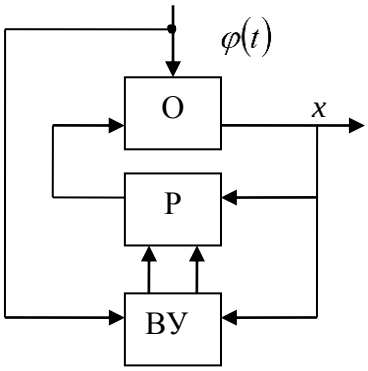


Рис. 1.13. Пример самонастраивающейся автоматической системы: φ(t) – возмущающее действие; О – объект регулирования; Р – регулятор; ВУ – вычислительное устройство.

Предположим, что в рассматриваемой системе возмущающим воздействием $\varphi(t)$ является нагрузка. Система настроена оптимальным образом на определенную нагрузку. С изменением нагрузки меняются динамические свойства объекта регулирования ***О,*** в результате чего параметры настройки регулятора ***Р*** уже не будут оптимальными. Возникает задача таким образом изменять параметры настройки регулятора, чтобы система регулирования всегда была оптимальной.

Чтобы решить поставленную задачу, в первую очередь необходимо обоснованно выбрать какой-то показатель, который бы однозначно характеризовал оптимальность системы, – так называемый критерий оптимальности Q. В качестве такового, например, могут быть к.п.д. объекта, быстродействие системы, интегральный критерий, оценивающий площадь под кривой переходного процесса, и т.д. Важно подчеркнуть, что в оптимальной системе критерий качества Q должен иметь экстремальное значение (минимальное или максимальное в зависимости от постановки задачи).

Следующим этапом решения поставленной задачи является выявление функциональной зависимости Q от варьируемых параметров (в данном случае параметров настройки регулятора при различных нагрузках). Предположим, что в рассматриваемом случае имеется возможность изменять два параметра настройки регулятора k_1 и k_2. Кроме того, предположим, что нам удалось установить вид функциональной зависимости.

$$Q = \mathrm{f}\,[\varphi(t), k_1, k_2].$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение нестационарного скалярного поля Q в координатах k_1, k_2.

Рассмотрим сначала случай, когда нагрузка постоянна, т.е. $Q = \mathrm{f}\,(k_1, k_2)$. Задавая Q постоянные значения $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, по уравнениям $Q_i = \mathrm{f}\,(k_1, k_2)$ построим в системе координат k_1, k_2 поверхности уровня поля Q (рис.1.14).

В данном случае (при двух координатах) поле будет плоским и поверхности уровня вырождаются в линии уровня.

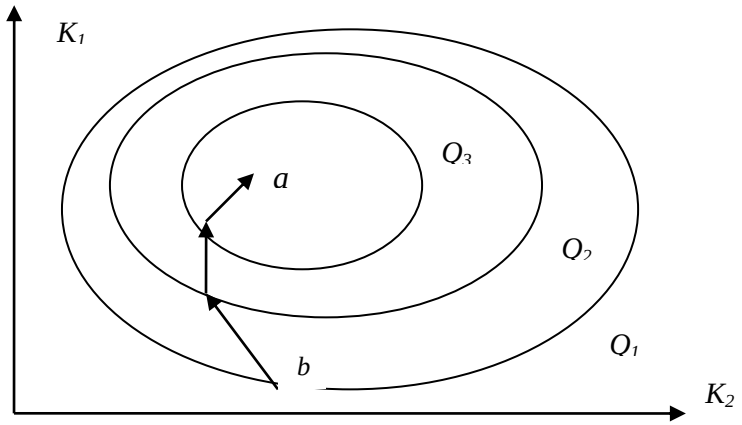


Рис. 1.14. Кривые постоянных значений критерия качества в плоскости параметров настройки регулятора системы рис. 1.13.

Пусть экстремальному значению критерия оптимальности Q соответствует точка a (рис. 1.14), а рассматриваемая система в настоящее время находится в точке b. Требуется таким образом организовать работу вычислительного устройства ВУ (рис. 1.13), чтобы система за минимально короткое время перешла из состояния b в состояние a (рис. 1.14).

Для решения поставленной задачи в теории оптимального управления широко применяется так называемый *метод градиента,* суть которого заключается в следующем.

В точке b вычислительным устройством ВУ определяется значение grad Q, после чего ВУ изменяет параметры настройки регулятора k_1 и k_2 в направлении grad Q , если в точке a критерий Q имеет свое максимальное значение, и в направлении, противоположном grad Q , если в точке a Q имеет минимальное значение. При этом скорость изменения параметров k_1 и k_2 должна быть соответственно пропорциональна $\frac{\partial Q}{\partial k_1}$ или $\frac{\partial Q}{\partial k_2}$.

В точке пересечения вектора grad Q с новой линией уровня Q_i снова вычисляется значение grad Q и организуется аналогичное, рассмотренному изменение параметров k_1 и k_2 . В пределе вычислительное устройство ВУ, непрерывно определяя grad Q , обеспечивает изменение параметров k_1 и k_2 по плавной кривой, приближая систему к оптимальному состоянию. Если рассмотреть векторное поле grad Q , то движение системы в нем к оптимальному состоянию будет происходить по векторной линии.

При изменении нагрузки объекта точка a займет новое положение в плоскости k_1 , k_2 и в общем случае линии уровня Q_i тоже будут иными. В этом случае ВУ, аналогичным образом, будет переводить систему из состояния, уже не соответствующего оптимальному значению Q , в новое состояние, отвечающее оптимальному состоянию системы.

Дивергенция

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \mathbf{k}a_z .$$

Дивергенцией этого вектора **a** называется скалярная величина (обозначается div **a**), определяемая для декартовой системы координат соотношением

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (1.211)$$

Дивергенция представима в виде суммы следующих скалярных произведений:

$$\text{div } \mathbf{a} = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial \mathrm{a}}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \mathrm{a}}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial \mathrm{a}}{\partial z}. \qquad (1.212)$$

Ротор

Ротор вектора **a** – это векторная величина, определяемая для декартовой системы координат соотношением

$$rot\ \mathbf{a} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \qquad (1.213)$$

Ротор можно представить в виде суммы следующих векторных произведений:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \boldsymbol{i}\times\frac{\partial \mathrm{a}}{\partial x} + \boldsymbol{j}\times\frac{\partial \mathrm{a}}{\partial y} + \boldsymbol{k}\times\frac{\partial \mathrm{a}}{\partial z} \qquad (1.214)$$

Чтобы уяснить физический смысл дивергенции и ротора, рассмотрим плоскую площадку Σ в скалярном или векторном полях, ограниченную контуром c (рис. 15). Вектором плоской площадки Σ, ограниченной контуром c, называется вектор **s**, модуль которого равен площади **s** площадки Σ, а направление **s** выбрано перпендикулярно к Σ так, чтобы, если смотреть с конца вектора **s**, обход площадки казался идущим против часовой стрелки. Таким образом, выбор направления на контуре площадки связи с выбором лицевой стороны площадки, т.е. стороны, от которой отходит вектор **s**. Эта связь переносится на любую кривую поверхность, ограниченную контуром.

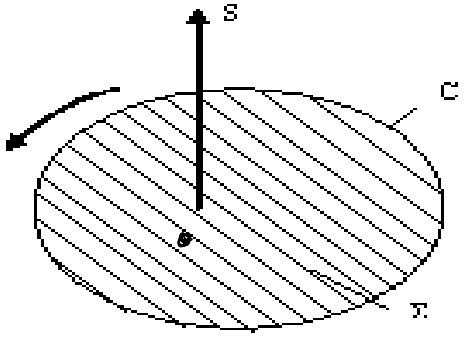


Рис. 1.15. К определению вектора плоской площадки

Различают три вида интегралов по поверхности Σ:

1. Поток скалярного поля (векторная величина)

$$\boldsymbol{P}=\int\limits_{\Sigma} f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{s}. \tag{1.215}$$

2. Скалярный поток векторного поля

$$Q=\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{s}. \tag{1.216}$$

3. Векторный поток векторного поля

$$\boldsymbol{R}=\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\times d\boldsymbol{s}. \tag{1.217}$$

Вычисление интегралов (1.215) – (1.217) по поверхности в декартовых координатах производится по следующим формулам:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{i}\iint\limits_{\Sigma_{yz}} f(\boldsymbol{r})\,dydz + \boldsymbol{j}\iint\limits_{\Sigma_{zx}} f(\boldsymbol{r})\,dzdx + \boldsymbol{k}\iint\limits_{\Sigma_{xy}} f(\boldsymbol{r})\,dxdy; \tag{1.218}$$

$$Q=\iint\limits_{\Sigma_{yz}} f_x dydz + \iint\limits_{\Sigma_{zx}} f_y dzdx + \iint\limits_{\Sigma_{xy}} f_z dxdy; \tag{1.219}$$

$$\boldsymbol{R}=\iint\limits_{\Sigma_{yz}} (\boldsymbol{j}f_z - \boldsymbol{k}f_y)\,dydz + \iint\limits_{\Sigma_{zx}} (\boldsymbol{k}f_x - \boldsymbol{i}f_z)\,dzdx + \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (\boldsymbol{i}f_y - \boldsymbol{j}f_x)\,dxdy \tag{1.220}$$

В выражениях (1.218) – (1.220) каждый двойной интеграл распространяется на площадь – проекцию **Σ** на координатные оси, при этом в выражениях, стоящих под знаком интеграла, необходимо одну из переменных выразить через две другие из уравнения поверхности Σ.

Пример 1.20: Даны функции $f(x,y,z)=xyz$; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$. Вычислить для них **P**, Q и **R** по части плоскости $x+y+z=1$, заключенной между тремя координатными плоскостями (лицевая сторона верхняя).

1. $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}\int\limits_{y}\int\limits_{z}(1-y-z)yzdydz+\boldsymbol{j}\int\limits_{z}\int\limits_{x}(1-x-z)xzdxdz+\boldsymbol{k}\int\limits_{x}\int\limits_{y}(1-x-y)xydxdy$.

Рассмотрим первое слагаемое

$$\int\limits_{y}\int\limits_{z}(1-y-z)yzdydz=\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-z}(1-y-z)yzdydz=\frac{1}{120}.$$

Остальные два интеграла вычисляются аналогично. В результате получаем:

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{120}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

2. $Q=\int\limits_{y}\int\limits_{z} xdydz+\int\limits_{z}\int\limits_{x} ydzdx+\int\limits_{x}\int\limits_{y} zdxdy$.

Рассмотрим последнее слагаемое

$$\int\limits_{x}\int\limits_{y} zdxdy=\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x}(1-x-y)dxdy=\frac{1}{6}.$$

Остальные два интеграла вычисляются аналогично. В результате получаем:

$$Q=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0{,}5.$$

3. $\boldsymbol{R}=\int\limits_{\Sigma}(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)\times(\boldsymbol{i}\,dydz+\boldsymbol{j}\,dzdx+\boldsymbol{k}\,dxdy)=0.$

Рассмотрим в скалярном f (**r**) или векторном $\boldsymbol{f}$ (**r**) полях точку, окруженную замкнутой оболочкой. Вычислим интегралы (1.215) – (1.217) по замкнутой поверхности Σ оболочки, которые соответственно обозначаются

$$\oint_{\Sigma} \mathrm{f}(\mathbf{r})\mathrm{d}\boldsymbol{s};\quad \oint_{\Sigma} \mathbf{f}(\mathbf{r})\mathrm{d}\boldsymbol{s};\quad \oint_{\Sigma} \boldsymbol{f}(\mathbf{r})\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Пределы отношения полученных интегралов к объему V, заключенному внутри поверхности Σ, при $V \to 0$ называются объемными (или пространственными) производными скалярного или векторного поля.

Объемная производная скалярного поля является его градиентом, а объемные производные векторного поля приводят к понятиям дивергенции и ротора.

Таким образом:

$$grad f(\boldsymbol{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{\int_{\Sigma} f(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{S}}{V}\ ; \qquad (1.221)$$

$$div\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_{\Sigma} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{S}}{V}; \qquad (1.222)$$

$$rot\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = -\lim_{V\to 0} \frac{\oint_{\Sigma} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\times d\boldsymbol{S}}{V}; \qquad (1.223)$$

Выражения (1.221)–(1.223) для градиента, дивергенции и ротора, раскрывая физическую суть последних, идентичны соответственно выражениям (1.208), (1.211) и (1.213), записанным для случая декартовой системы координат.

Оператор Гамильтона

В декартовых координатах оператор Гамильтона определяется выражением (1.209). Его применение к скалярным и векторным функциям точки формально соответствует некоммутативной операции умножения на вектор с декартовыми координатами ∂/∂x, ∂/∂y, ∂/∂z, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \Delta f(\boldsymbol{r}) &= grad\ f(\boldsymbol{r});\\ \Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) &= div\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r});\\ \Delta \boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{r}) &= rot\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}). \end{aligned}\right\} \qquad (1.224)$$

Оператор Лапласа

В декартовых координатах оператор Лапласа (лапласиан) $\nabla^2 = \nabla\nabla$ (обозначается также через Δ) выражается формулой

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (1.224)$$

Этот оператор может быть применен к скалярным и векторным функциям точки с помощью некоммутативного скалярного умножения

$$\Delta f(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(\boldsymbol{r}), \qquad (1.226)$$

$$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}\,\Delta f_x + \boldsymbol{j}\,\Delta f_y + \boldsymbol{k}\,\Delta f_z \qquad (1.227)$$

Применение операторов Гамильтона и Лапласа к скалярным и векторным функциям позволяет значительно упростить запись выражений и операции над ними.

Контрольные вопросы:

1.Что означает понятие скаляр? (чистые и псевдоскаляры).
2. Что означает понятие вектор? (связанный, скользящий, эквивалентный, компларный, орт).
3. Методика записи системы уравнения в векторной форме.
4. Сумма векторов. Разность двух векторов. Основные свойства суммы и разности вектров.
5. Произведение вектора на скаляр и его свойства.
6. Скалярное произведение векторов и его свойства.
7. Векторое произведение векторов и его свойства.
8. Векторное уравнение прямой.
9.Правило дифференцирования.
10. Понятие скалярного и векторного поля.
11. Понятие градиента как характеристики скалярного и векторного поля.
12. Понятие дивергенции.
13. Понятие вихря (ротора).
14. Оператор Гамильтона.
15. Оператор Лапласа.

1.6 Элементы матричного исчисления
Основные понятия

Историческое понятие матрицы и матричного исчисления возникло в связи с изучением систем линейных уравнений. Впоследствии матрицы стали объектом самостоятельного изучения в математике.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными, записанную в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0} \end{aligned}\right\} \qquad (1.228)$$

Решением системы (1.228) называется упорядоченная совокупность n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые, будучи поставленными в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращают их в тождества. Система (1.228) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. Совместная система

называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет больше одного решения.

Пример 1.21: Система

$$2x_1 - x_2 = -1;\ \ x_1 + x_2 = 4$$

имеет одно единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, следовательно, система является определенной.

2. Система

$$2x_1 - 3x_2 = 4;\ 4x_1 - 6x_2 = 8$$

является неопределенной, т.к. второе уравнение является следствием первого. Решив систему относительно x_1, получим:

$$x_1 = 2 + 1{,}5x_2 .$$

Задаваясь любыми значениями x_2, получаем бесчисленное множество решений для x_1.

3. Система

$$2x_1 - 3x_2 = 4\ ;\ \ 4x_1 - 6x_2 = 10 .$$

является несовместной, т.к., сократив второе уравнение на 2, получим $2x_1 - 3x_2 = 5$; образовалось два уравнения с одинаковыми левыми частями и разными правыми; таким образом, оба уравнения не могут одновременно удовлетворяться ни при каких значениях x_1 и x_2.

Рассмотрим систему из двух линейных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= a_{20} \end{aligned}\right\} \qquad (1.229)$$

Будем каждую пару значений x_1 и x_2, удовлетворяющих каждому из уравнений системы (1.229), рассматривать как координаты точки в плоскости x_1Ox_2. Тогда для каждого уравнения геометрическое место точек образует прямую линию. Решение системы уравнений с двумя неизвестными геометрически изобразится точкой пересечения двух прямых, соответствующих данным уравнениям.

На рис. 1.16 построены прямые, соответствующие уравнениям из систем, рассмотренных в примере 1.21. Как видно на рис. 1.16, *а*, прямые соответствующие определенной системе, пересекаются в точке с координатами (1,3); прямые, соответствующие неопределенной системе, сливаются в одну прямую (рис. 1.16, б); уравнениям несовместной системы соответствуют две параллельные прямые, не имеющие точек пересечения (рис. 1.16, *в*).

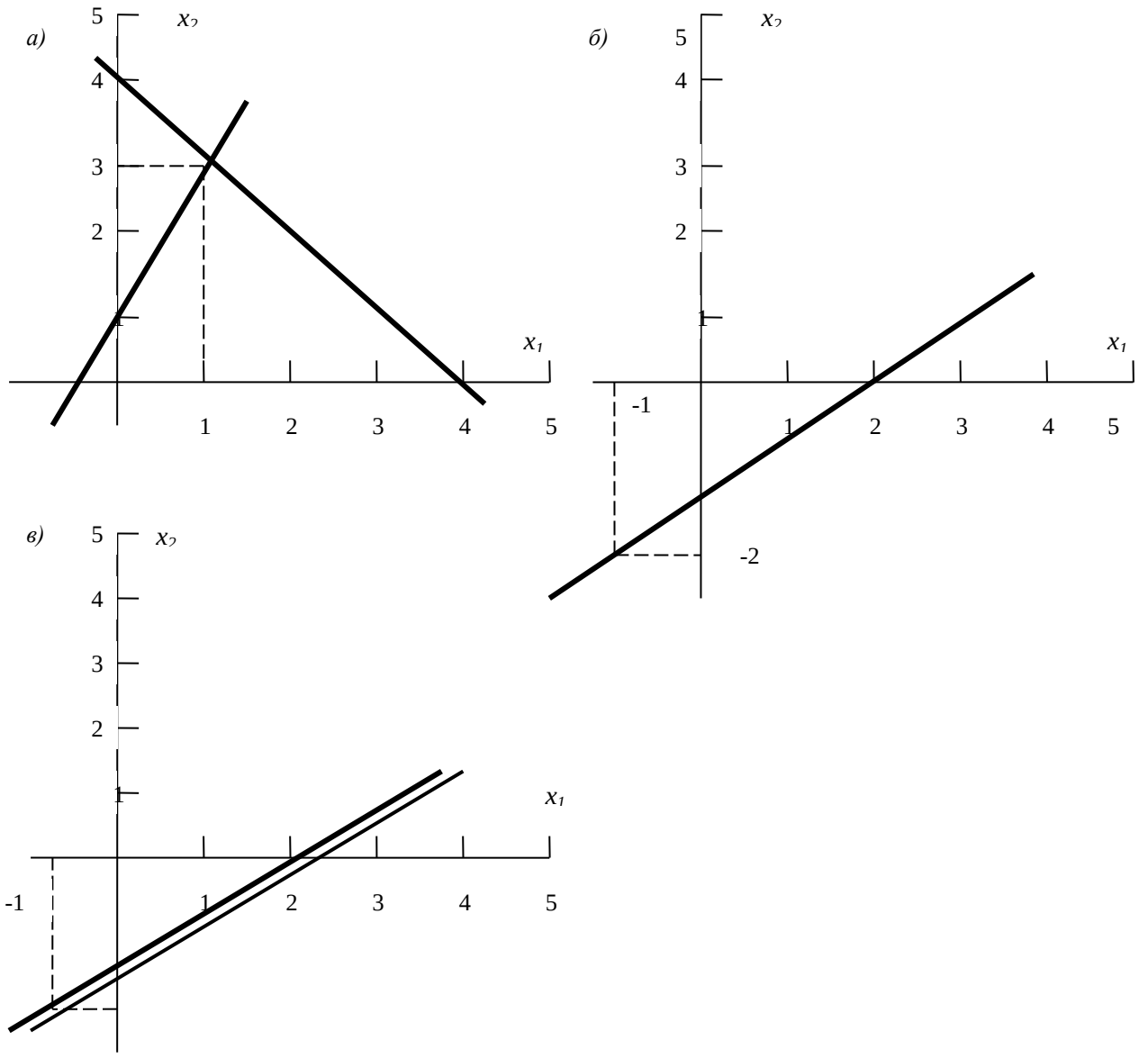


Рис.16. Геометрическое представление системы двух уравнений:
а – система определения; *б* – система неопределенная; *в* – система несовместная

Достаточно наглядная геометрическая иллюстрация исследования и решения систем двух уравнений с двумя неизвестными привела к идее геометрического анализа систем уравнений с любым числом неизвестных n. Чтобы использовать геометрические представления при анализе систем уравнений с любым числом неизвестных, введем понятие n-мерных векторов (или точек n -мерного пространства).

Выше были введены понятия двух - и трехмерного векторов. Было показано, что например, каждому двухмерному вектору **а** соответствует пара чисел α_1 и α_2, взятых в определенном порядке. Вектор **а** с координатами α_1 и α_2 и записывается в виде **а** = (α_1, α_2). Аналогично определяется трехмерный вектор **а**=(α_1, α_2, α_3) или, что то же, точка в трехмерном пространстве. Двух- и трехмерные векторы геометрически изображаются с помощью радиус-векторов; при этом координаты вектора представляют собой алгебраические

проекции радиус-вектора на оси прямоугольной системы координат. Используя понятия двухмерного вектора, решение $x_1 = \alpha_1$ и $x_2 = \alpha_2$ системы двух уравнений с двумя неизвестными, можно трактовать как двухмерный вектор $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Вместо того, чтобы говорить о двух неизвестных x_1 и x_2 можно говорить о неизвестном векторе **x** = (x_1, x_2). Например, решение первой системы уравнений примера 1.21 можно записать в виде $\mathbf{x} = (1,3)$.

Понятие двух- и трехмерного векторов примем как исходные для дальнейших обобщений. Будем называть *n*-мерным вектором **a** (или точкой *n*-мерного пространства) совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, взятых в определенном порядке, и запишем его в виде $\mathbf{a} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$ называются координатами вектора **a**. Применительно к автоматическим системам управления понятие *n*-мерного вектора было проиллюстрировано на примере рис.1.9. Все математические зависимости векторного исчисления, изложенные выше, справедливы и для *n*-мерных векторов.

Используем понятие *n*-мерных векторов для упрощения записи системы линейных уравнений (1.228). Введем для этого m – мерные векторы

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}); \\ \mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}), \end{array}\right\} \qquad (1.230)$$

координаты которых представляют собой коэффициенты при соответствующем неизвестном во всех *m* уравнениях системы (1.228).

Введем также m-мерный вектор– свободный член

$$\mathbf{a}_0 = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}) \qquad (1.231)$$

Тогда систему (1.228) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{a}_0 \qquad (1.232)$$

решение которого сводится к нахождению таких значений $x_1 = \alpha_1, ..., x_n = \alpha_n$, при подстановке которых в уравнение (1.232) получается тождество

$$\mathbf{a}_1 \alpha_1 + \mathbf{a}_2 \alpha_2 + \ldots + \mathbf{a}_n \alpha_n = \mathbf{a}_0 . \qquad (1.233)$$

Таким образом, если ввести понятие *n*-мерного вектора **x** задача решения системы уравнений (1.228) сводится к нахождению вектора $\mathbf{x} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Таким образом, введение понятия *n*-мерного вектора свело задачу решения системы линейных уравнений к определенным математическим операциям над векторами.

В процессе решения систем уравнений производятся различные тождественные преобразования, целью которых является переход к более простым и удобным системам: перенос членов из одной части уравнения в другую, почленное умножение обеих частей уравнения на один и тот же отличный от нуля множитель, почленное вычитание из уравнений системы

одного какого-либо уравнения, уравнивание коэффициентов при неизвестных и т.д.

Используя понятие n-мерного вектора, все рассмотренные операции можно формально трактовать как преобразование векторов.

Например, решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= a_{20} \end{aligned}\right\} \qquad (1.234)$$

можно рассматривать как преобразование неизвестного вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ в известный вектор $\mathbf{a}_0 = (a_{10}, a_{20})$ с помощью известных коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Для упрощения записи вводят понятие матрицы преобразования или таблицы чисел, которая для системы (1.234) имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Соответственно для системы уравнений (1.228) матрица преобразования имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2}... & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

Матрицу записывают сокращенно в виде $\|a_{ik}\|$, либо обозначают одной буквой ***A, B*** и т.д.

Если для векторов **x** и $\mathbf{a}_0$ ввести соответствующие матрицы в виде

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{matrix} a_{10} \\ a_{20} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m0} \end{matrix} \right\|,$$

то систему уравнений (1.228) в матричной форме можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0, \qquad (1.235)$$

где

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2n} \\ ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2}...a_{mn} \end{matrix} \right\|; \qquad \mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|; \qquad \mathbf{a}_0 = \left\| \begin{matrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, отыскание неизвестных $x_1,...,x_n$ в системе уравнений (1.228) сводится к определению матрицы вектора **x,** т.е. к операции над матрицами.

Необходимо помнить, что матрица – это таблица $m \times n$ чисел, записанных в определенном порядке, и понятие матрицы нельзя отождествлять с понятием *определитель*, который является алгебраическим выражением и строится по

определенному правилу из элементов матрицы. Например, матрица второго порядка имеет вид

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

а определитель второго порядка

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.236)$$

Алгебра матриц

Матрицу можно рассматривать в качестве некоторого математического символа, над которым можно производить действия, аналогичные действиям над обычными числами. Совершенно так же, как с помощью двух вещественных чисел приходят к построению чисел новой природы, а именно комплексных чисел вида a + jb, так и с помощью $m \times n$ чисел, расставленных в виде определенной таблицы, приходят к понятию нового числа- матрицы и к понятию алгебры матриц. В отличие от обычной алгебры, алгебра матриц имеет одну особенность, которая заключается в не коммутативности умножения, т.е. результат умножения зависит от порядка сомножителей.

Виды матриц

Матрица вида

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2}... & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

состоящая из $m \times n$ чисел, расположенных в m строк и n столбцов, называется *прямоугольной матрицей* с размерами $m \times n$ или $m \times n$-матрицей. Числа, составляющие матрицу, называется ее *элементами*. Если m = n, то матрица называется *квадратной*, а число m - ее *порядком*.

Для квадратной матрицы выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2n} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2}... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем (детерминантом)*. Это число вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}, \qquad (1.237)$$

где A_{ik} – *алгебраическое дополнение (или адъюнкт)* элемента a_{ik}, вычисляемое по формуле

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}. \qquad (1.238)$$

Определитель Δ_{ik} получается из определителя Δ путем вычеркивания i-й строки и k-го столбца. В выражении (1.237) определитель раскрыт по i-й строке, но он может быть раскрыт и по любому k-му столбцу в соответствие с формулой

$$\Delta = a_{1k}\mathrm{A}_{1k} + a_{2k}\mathrm{A}_{2k} + ... + a_{nk}\mathrm{A}_{nk}\,. \qquad (1.239)$$

С помощью выражений (1.237) и (1.239) вычисление любого определителя можно свести к вычислению определителей второго порядка, которые раскрываются по формуле

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (1.240)$$

Если определитель матрицы равен нулю, то говорят, что она *вырожденная. Минором* матрицы называют определитель, полученный вычеркиванием из матрицы одинакового числа строк и столбцов. Если все миноры порядка r + 1, которые можно составить из матрицы, равны нулю, а среди миноров порядка r хотя бы один отличен от нуля, то число r называют *рангом* этой матрицы.

Например, матрица

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

вырожденная, порядок её равен 4, а ранг 1.

У квадратной матрицы имеются *главная диагональ*, состоящая из элемента $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, и *побочная*, состоящая из элементов $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$. Квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю, называется *диагональной матрицей*, например

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице, называются *единичной*, в матричном исчислении она играет такую же роль, как число 1 в обычной алгебре. Если ввести в рассмотрение *символ Кронекера*

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1\ при & i = k; \\ 0\ при & i \neq k, \end{cases} \qquad (1.241)$$

то для единичной матрицы

$$a_{ik} = \delta_{ik}. \qquad (1.242)$$

Сумма, диагональных элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ размера $n \times n$ называется *следом (шпуром)* матрицы $\boldsymbol{A}$ и обозначается $Tr\,(\boldsymbol{A})$ или $Sp\,(\mathbf{A})$:

$$Tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=0}^{n} a_{ii} \quad . \tag{1.243}$$

Для единичной матрицы размера $n \times n$

$$Tr(\boldsymbol{A}) = n \tag{1.244}$$

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называются *нуль–матрицей*; она играет ту же роль, что и число нуль в обычной алгебре.

Прямоугольная матрица, состоящая из одного столбца, называется *столбцевой,* например

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}.$$

Прямоугольная матрица, состоящая из одной строки, называется *строчной*, например

$$\|a_{11} a_{12} ... a_{1n}\|.$$

Если в квадратной матрице элементы, расположенные симметрично к главной диагонали, равны между собой, т.е. $a_{ik} = a_{ki}$, то такая матрица называется *симметричной*, например

$$\begin{Vmatrix} 1 & x & -y \\ x & 3 & 4 \\ -y & 4 & z \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} x & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -z \\ -3 & -z & 9 \end{Vmatrix}.$$

Матрица, у которой элементы, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны, но противоположены по знаку $(a_{ik} = -a_{ki})$, называется *кососимметричной*, например

$$\begin{Vmatrix} 0 & y & 4 \\ -y & 0 & -x \\ -4 & x & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица, которую можно получить из исходной, заменив строки столбцами, называется *транспонированной* и обозначается $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. Например, матрица

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

является транспонированной по отношению к матрице

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Если произведение двух матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A^{-1}}$ равно единице, то матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ является *обратной* матрицей и вычисляется по следующему правилу:

1) выписывают матрицу $\boldsymbol{A^T}$, транспонированную по отношению к матрице **A**;

2) заменяют каждый элемент матрицы $\boldsymbol{A^T}$ его алгебраическим дополнением A_{ik} , деленным на определитель Δ матрицы **A.**

Пример 1.22: Вычислим матрицу, обратную матрице

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$\Delta = 1(45-48) - 2(36-12) + 3(32-10) = 15.$$

Транспонированная матрица

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Заменим в этой матрице каждый ее элемент соответствующим алгебраическим дополнением

$$\begin{Vmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -24 & 3 & 6 \\ 22 & -4 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Разделив каждый элемент полученной матрицы на $\Delta = 15$, получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{22}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{Vmatrix}.$$

При вычислении обратной матрицы предполагается, что определитель матрицы не равен нулю, т.е. матрица невырожденная. В противном случае определить обратную матрицу невозможно.

Операции над матрицами

Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами.

1. Две матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно с элементами a_{ik} и b_{ik} размера $m \times n$ равны друг другу ($\boldsymbol{A = B}$) в том и только в том случае, когда $a_{ik} = b_{ik}$ для всех ***i*** и ***k.***

2. Сумма двух матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ размера $m \times n$ есть матрица $\boldsymbol{C}$ размера $m \times n$ с элементами

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}\,, \qquad (1.245)$$

например

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{Vmatrix}.$$

3. Произведение матрицы **A** размера $m \times n$ на скаляр α есть матрица ***C*** размера $m \times n$ с элементами

$$c_{ik} = \alpha a_{ik}, \tag{1.246}$$

например

$$3\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{Vmatrix}.$$

4. Произведение матрицы ***A*** размера $m \times n$ с элементами a_{ik} на матрицу ***B*** размера $n \times r$ с элементами b_{ik} есть матрица ***C*** размера $m \times r$ с элементами

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \ . \tag{1.247}$$

Таким образом, элемент c_{ik} матрицы ***C* = *AB*** есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы ***A*** на соответствующие элементы k-го столбца матрицы ***B*** (рис. 1.17). В произведении матриц ***AB*** число n столбцов матрицы ***A*** должно равняться числу строк матрицы ***B*** (говорят, что формы матриц ***A*** и ***B*** должны быть согласованными). Из существования произведения ***AB*** вовсе не следует существование произведения ***BA***. Если существуют оба ***AB*** и ***BA*** (матрицы ***A*** и ***B*** квадратные), то в общем случае ***AB*** ≠ ***BA*** – это свойство некоммутативности умножения является отличительной особенностью алгебры матриц.

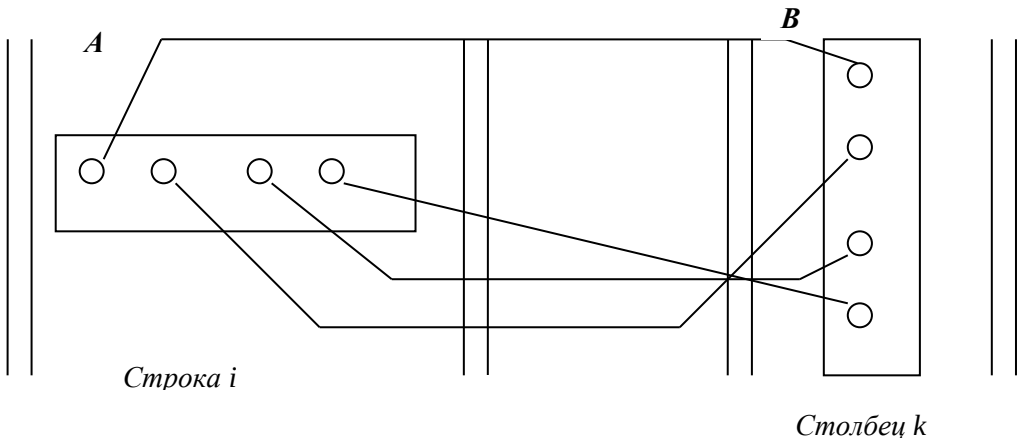


Рис. 1.17. Вычисление элемента c_{ik} произведения двух матриц.

Правило умножения двух квадратных матриц то же, что и умножения двух определителей, однако аналогия между матричным исчислением и операциями с определителями на этом заканчивается. Например, правило умножения на число и правило сложения существенно различны

$$\alpha\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{Vmatrix}, \quad \text{но} \quad \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix},$$

$$\alpha\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_1+a_2 & 2b_1 \\ c_1+c_2 & 2d_1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_1+a_2 & 2b_1 \\ c_1+c_2 & 2d_1 \end{Vmatrix},$$

но

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+a_2b_1 \\ c_1+c_2d_1 \end{vmatrix}.$$

Не будем останавливаться на глубоком различии сущности двух понятий (матрицы и определителя). Важно подчеркнуть, что внешняя аналогия не должна приводить к ошибкам из–за смешения правил вычисления.

Применение матричного исчисления к решению систем линейных уравнений

Рассмотрим случай системы n уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=a_{10}; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=a_{20}; \\ ..... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=a_{n0} \end{array}\right\}. \qquad (1.248)$$

Система уравнений (1.248) будет совместной тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (1.249)$$

равен рангу расширенной матрицы

$$\mathbf{B}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & a_{20} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & a_{n0} \end{Vmatrix}. \qquad (1.250)$$

Совместная система уравнений решается следующим образом.

Перепишем систему уравнений (1.248) в матричной форме

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{a_0}, \qquad (1.251)$$

где $\boldsymbol{A}$–матрица системы, определяемая выражением (1.249); $\mathbf{x}$ – неизвестный вектор; $\mathbf{a}_0$- столбец свободных членов, причем

$$\boldsymbol{x}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{Vmatrix}; \qquad \mathbf{a}_0=\begin{Vmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ ... \\ a_{n0} \end{Vmatrix}.$$

Из выражения (1.251) имеем:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{a}_0. \qquad (1.252)$$

Это и есть решение системы (1.248), записанное с помощью обратной матрицы.

Пример 1.23: Решим следующую систему уравнений:

$$x_1 - x_3 = 2;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6;$$
$$x_2 + 3x_3 = 5.$$

Матрица системы **A** и расширенная матрица **B** имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Ранги матриц равны трем, значит система совместна. Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix} = 1$$

Транспонированная матрица

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Из выражения для транспонированной матрицы, используя приведенные выше правила, получаем обратную матрицу

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, решение системы согласно выражению (1.252)

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

где согласно (1.247)

$$c_{11} = 2\cdot 2 - 1\cdot 6 + 1\cdot 5 = 3 = x_1;$$
$$c_{21} = -3\cdot 2 + 3\cdot 6 - 2\cdot 5 = 2 = x_2;$$
$$c_{31} = 1\cdot 2 - 1\cdot 6 + 1\cdot 5 = x_3.$$

Из выражения (1.252) можно получить формулы Крамера в виде

$$x_1 = \Delta_1/\Delta; \quad x_2 = \Delta_2/\Delta; \ldots; \quad x_n = \Delta_n/\Delta, \tag{1.253}$$

где определители $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ получаются из определителя Δ заменой столбца, составленного из коэффициентов $a_{i\kappa}$ при неизвестном x_κ, столбцом, составленным из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{20} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n0} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

Запись решения по формуле (1.252) имеет преимущество в сравнении с формулами Крамера (1.253) в том отношении, что, вычислив один раз $\boldsymbol{A^{-1}}$, мы можем изучать систему уравнений при различных значениях свободных членов a_{i0}, в то время как по формулам Крамера пришлось бы каждую систему решать заново, т.к. $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ зависят как от коэффициентов уравнений, так и от свободных членов.

Рассмотрим случай системы уравнений, когда число *n* неизвестных не равно числу *m* уравнений системы

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0}. \end{aligned}\right\} \tag{1.254}$$

Признак совместимости для системы (1.254) тот же, что и для системы (1.228). Совместная система уравнений (1.254) решается следующим образом. Определяем ранг r матрицы $\boldsymbol{A}$. Представляем уравнения (1.254) и неизвестные в них $x_1, ..., x_n$ так, чтобы отличный от нуля минор матрицы $\boldsymbol{A}$ с рангом r занял положение в верхнем левом углу матрицы. При этом возможны два случая:

1) $r = n, r \le m.$ Решая систему первых n уравнений по формуле (1.252), получаем единственное решение, которое при m > n будет удовлетворять и остальным m-n уравнениям, являющимся следствием первых. Данная система – определенная.

2) $r < n, r \le m.$ Система неопределенная. Решаем систему первых r уравнений относительно первых r неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$, выражая эти неизвестные через остальные n-r неизвестных $x_{r+1}, ..., x_n$. Получаем единственное решение в виде линейных функций

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1},...,x_n);\\ x_2 &= x_2(x_{r+1},...,x_n);\\ &.....\\ x_r &= x_r(x_{r+1},...,x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (1.255)$$

Пример 1.24:

$$1.\ \begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2;\\ &3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6;\\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8. \end{aligned}$$

Ранг матрицы ***A*** равен 2, ранг расширенной матрицы **B** равен 3. Система несовместна, решений нет.

$$2.\ \begin{aligned} &x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \qquad x_1 - 2x_2 - x_3 = 2;\\ &3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \qquad -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4. \end{aligned}$$

Ранги матриц **A** и **B** равны трем, система совместна. Угловой верхний левый определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0\ ,$$

перестановки не требуется, r = n, система определенная. Решаем систему из первых трех уравнений

$$x_1 = \frac{10}{7};\quad x_2 = -\frac{1}{7};\quad x_3 = -\frac{2}{7};$$

это же решение удовлетворяет и четвертому уравнению.

$$3.\ \begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1;\\ &x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0;\\ &x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0{,}5. \end{aligned}$$

Ранги матриц ***A*** и ***B*** равны двум, система совместна, т.к. r < n, то система неопределенна. Угловой верхний определитель второго порядка равен нулю, поэтому представляем столбец с x_1 на четвертое место

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 - x_4 + x_1 &= 1;\\ -x_2 - x_3 + x_4 + x_1 &= 0;\\ -x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_1 &= -0{,}5. \end{aligned}$$

Решаем систему первых двух уравнений относительно x_2 и x_3

$$-x_2 + x_3 = 1 + x_4 - x_1;\quad -x_2 - x_3 = -x_4 - x_1\ .$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получаем решения $x_2 = x_1 - 0{,}5$ и $x_3 = x_4 + 0{,}5$, которые удовлетворяют уравнениям при любых значениях x_1 и x_4.

Система уравнений, в которой все свободные члены равны нулю

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0;\\ &.....\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (1.256)$$

всегда имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Если система (1.256) имеет ненулевое решение $x_1 = \alpha_1, ..., x_n = \alpha_n$, то она имеет и бесконечное множество решений вида

$$x_1 = k\alpha_1;\quad x_2 = k\alpha_2;\ldots;\quad x_n = k\alpha_n,$$

где k – любое число.

Определители

Определение. Определитель (детерминант)

$$D = \det[a_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & ...a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.257)$$

квадратной таблицы с n^2 (действительными или комплексными) числами (*элементами*) a_{ik} есть сумма $n!$ членов $(-1)^r a_{1k_1} \quad a_{2k_2}...a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из $n!$ различных упорядоченных множеств $k_1, \quad k_2, ..., k_n$, полученных r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества $1,2,...,n$. Число n есть ***порядок*** определителя.

Фактическое вычисление определителя по его элементам упрощается при использовании данных ниже положений. Отметим, что

$$|D|^2 \le \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \quad \textit{(неравенство Адамара).} \qquad (1.258)$$

Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или по столбцу. (Дополнительный) *минор* D_{ik} элемента a_{ik} в определителе n – го порядка (1.257) есть определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из определителя (1.257), если из него вычеркнуть i-ю строку и k-й столбец. *Алгебраическое дополнение* A_{ik} элемента a_{ik} есть коэффициент при a_{ik} в разложении определителя D, или

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik} = \frac{\partial D}{\partial a_{ik}}. \qquad (1.259)$$

Определитель D можно следующим образом выразить через элементы произвольной его строки или столбца и их алгебраические дополнения:

$$D = \det[a_{ik}] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \qquad (1.260)$$

$(j = 1,2,...,n)$ *(разложение по столбцу или по строке).*

Отметим также, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{lk} = 0 \qquad (j \ne l). \qquad (1.261)$$

Определители второго, третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{211} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \quad (1.262)$$

$$- a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad \textit{и т.д.}$$

Дополнительные миноры. Разложение Лапласа. Определитель *m*-го порядка *M,* получающийся из определителя *n*-го порядка $D(m \le n)$, если из него вычеркнуть какие либо $n-m$ строк и какие-либо $n-m$ столбцов, называется *минором m*-го *порядка* определителя D. Минор *m*-го порядка M и минор ($n-m$)-го порядка M' определителя D, получающийся, если из D вычеркнуть строки и столбцы, сохранившиеся в M, называются *дополнительными минорами***:** в частном случае $m=n$, $M'=1$. *Алгебраическое дополнение* M'' минора M в D по определению равно $(-1)^{i_1+i_2+...+i_m+k_1+k_2+...+k_m} M'$, где $i_1, i_2, ..., i_m$ – номера строк, а $k_1, k_2, ..., k_m$ - номера столбцов, входящих в M. *Пусть заданы любые m строк (или столбцов) определителя D. Тогда D равен сумме произведений* $M M''$ *всевозможных миноров m-го порядка M, расположенных в этих строках (или столбцах) на их алгебраические дополнения* M'' (разложение Лапласа по нескольким строкам или *столбцам*).

Определитель *n*-го порядка *D* имеет C_n^m *главных миноров*, диагональные элементы которых является и диагональными элементами *D.*

Различные теоремы.

(а) *Величина D определяется (1.257) не меняется при любой из следующих операций:*

1) замене строк столбцами и столбцов строками (перемене местами индексов i и k в равенстве (1.257));

2) четном числе перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов;

3) прибавлении к элементам любой строки (или столбца), соответствующих элементов какой-либо другой строки (или соответственно столбца), умноженных на одно и то же число $\boldsymbol{\alpha}$*.*

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2n} \\ ..... & \\ a_{n1} & a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22}...a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}...a_{n2} \\ ..... & \\ a_{1n} & a_{2n}...a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & +\alpha a_{12}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & +\alpha a_{22}a_{22}...a_{21n} \\ ..... & \\ a_{n1} & +\alpha a_{n2}a_{n2}.....a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.263)$$

b) Нечетное число перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов равносильно умножению определителя на – 1.

c) Умножение всех элементов какой-либо строки или столбца на множитель α равносильно умножению определителя на α.

d) Если элементы j-й строки (или столбца) определителя n*-го порядка D представлены в виде сумм* $\sum_{r=1}^{m} c_{r1}$, $\sum_{r=1}^{m} c_{r2}$, ..., $\sum_{r=1}^{m} c_{rn}$, *то определитель D равен сумме* $\sum_{r=1}^{m} D_r$ *определителей* n*-го порядка. Все элементы каждого из определителей* D_r, *кроме элементов j-й строки (столбца) совпадают с соответствующими элементами определителя D, а в j-й строке определителя* D_r *стоят элементы* $c_{r1}, c_{r2}, \ldots, c_{rn}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.264)$$

e) Определитель равен нулю, если

1) все элементы какой-либо его строки или столбца равны нулю,

2) соответствующие элементы каких-либо двух его строк или столбцов равны, или же пропорциональны.

Умножение определителей. Произведение двух определителей n-го порядка $\det[a_{ik}]$ и $\det[b_{ik}]$ равно

$$\det[a_{ik}]\det[b_{ik}] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{kj}\right] = \\ = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{kj}\right] = \det\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{jk}\right]. \quad (1.265)$$

Изменение порядка определителей. Данный определитель можно следующим образом записать в виде определителя более высокого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (1.266)$$

где числа α_i произвольны. Этот процесс можно повторять сколько угодно раз.

Порядок данного определителя иногда можно понизить с помощью соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...a_{1n}\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ ...\alpha_{1m} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2n}\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ ...\alpha_{2m} \\ ..... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...a_{nn}\ \alpha_{n1}\ \alpha_{n2}\ ...\alpha_{nm} \\ 0\quad 0\ ...0\quad b_{11}\ b_{12}\ ...b_{1m} \\ 0\quad 0\ ...0\quad b_{21}\ b_{22}\ ...b_{2m} \\ ..... \\ 0\quad 0\ ...0\quad b_{m1}\ b_{m2}\ ...b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2n} \\ ..... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}\ b_{12}\ ...b_{1m} \\ b_{21}\ b_{22}\ ...b_{2m} \\ ..... \\ b_{m1}\ b_{m2}\ ...b_{mm} \end{vmatrix}. \qquad (1.267)$$

Контрольные вопросы:

1. Понятие матрицы и матричного исчисления (совместная, несовместная, определенная, неопределенная).
2. Геометрическое представление системы из двух уравнений.
3. Решение системы уравнений – это операции над матрицами.
4. Виды матриц (прямоугольная, квадратная).
5. Алгебраическое дополнение (адъюнкт).
6. Составляющие квадратной матрицы (главная диагональ, побочная, символ Кронекера, шпур матрицы, нуль-матрица, столбцевая и строчная матрица).
7. Симметричная, транспонированная матрицы.
8. Равенство матриц.
9. Сумма двух матриц.
10. Произведение матрицы на скаляр.
11. Произведение матрицы *A* на матрицы *B*.
12. Решение систем уравнении при помощи матриц.
13. Определитель (детерминант) квадратной матрицы.
14. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или по столбцу.
15. Определители второго, третьего порядка.
16. Дополнительные миноры. Разложение Лапласа.
17. Умножение определителей.
18. Теоремы о свойствах определителя.
19. Изменение порядка определителей.

1.7 Элементы алгебры логики

При решении ряда инженерных задач управления и технологического контроля часто приходится иметь дело с элементами или действиями, которые могут иметь только два состояния типа «включено – выключено», «замкнуто – разомкнуто», «да – нет» и т.п. Если какое-либо устройство состоит из определенного сочетания некоторого числа таких двоичных переменных, то оно представляет собой логическую систему, выходная величина или действие (сигнал) которой также могут принимать только два значения или состояния.

Таким образом, выходной сигнал такой системы является двоичной функцией некоторого числа двоичных аргументов.

Операция с такими двоичными аргументами исследуется с помощью аппарата алгебры логики или *булевой алгебры* (названной так по имени английского математика Д. Буля), являющейся одним из разделов более общей науки – математической логики. Алгебра логики оперирует с высказываниями, являющимися либо *истинными*, либо *ложными*.

Высказывание могут быть простыми и сложными. Одно отдельно взятое высказывание, принимающее значение «истинно» или «ложно», называется простым. Высказывание, являющееся результатом двух или более простых высказываний, называется сложным. Простые высказывания называются *логическими переменными* или *аргументами.* Сложные всказывания являются логическими функциями этих аргументов. Логическая функция двух логических аргументов называется *элементарной логической функцией.*

Например, простым высказыванием является высказывание о соотношении чисел два и три. Как и любое высказывание, оно может быть в двух формах: истинное – два меньше трех или ложное – два больше трех.

Ложная форма высказывания является противоположной истинной форме, ее *отрицанием*. Так, если истинную форму высказывания обозначить через *x,* то другой формой этого высказывания – отрицанием будет «не x», обозначаемое условно через $\bar{x}$. Например, если истинное высказывание x – два меньше трех, то высказывание $\bar{x}$ - два не меньше трех – ложное.

Отрицание ложного высказывания – отрицание отрицания $\bar{\bar{x}}$ равносильно истинному высказыванию *x*, т.е. $\bar{\bar{x}} = x$.

Сложным высказывание z, состоящих из двух простых высказываний *x* и *y*, является, например, высказывание «два меньше трех и пять меньше восьми». Это сложное высказывание является элементарной логической функцией $z = f(x,y)$ двух простых аргументов *x* и *y*. В зависимости от вида сочетания аргументов *x* и *y* они могут образовывать различные элементарные логические функции.

Конъюнкция двух высказываний. Это сложное высказывание истинно только тогда, когда x истинно и y истинно. Если *x* или *y* ложно, то в целом высказывание ложно. Конъюнкция двух аргументов обозначается *x* & *y*, или $x \wedge y$, или *xy*, читается *x* и *y*. Часто конъюнкцию называют логическим умножением по аналогии с обычной алгеброй. Возможны следующие значения функции $f(x,y) = xy$ в зависимости от истинности и ложности аргументов

x	*y*	*f(x,y) = xy*
истинно	истинно	истинно
ложно	истинно	ложно
ложно	ложно	ложно
истинно	ложно	ложно

Действительно из четырех вариантов сложного высказывания: «два меньше трех и пять меньше восьми», «два не меньше (больше) трех и пять

меньше восьми»; « два не меньше трех и пять не меньше восьми» и «два меньше трех и пять не меньше восьми» – истинными является только первое сложное высказывание, в котором оба простых высказывания истинны.

С учетом двойной природы рассматриваемых высказываний, аргументов и функций часто истинные высказывания обозначают через 1, а ложные – через 0.

При этом значения конъюнкции двух высказываний запишутся в виде

x	*y*	*f(x,y) = xy*
1	*1*	*1*
0	*1*	*0*
0	*0*	*0*
1	*0*	*0*

Дизъюнкция двух высказываний. Это сложное высказывание истинно, когда *x* или *y* истинны, и ложно, если *x* и *y* ложны. Дизъюнкция обозначается $x \vee y$ и читается «*x* или *y*». Дизъюнкция также называется логическим сложением. В соответствии с определением дизъюнкции возможны следующие значения функции *f(x,y)* = $x \vee y$ в зависимости от состояния *x* и *y*:

x	*y*	*f(x,y)* = $x \vee y$
1	*1*	*1*
0	*1*	*1*
0	*0*	*0*
1	*0*	*1*

Примерами дизъюнкции являются сложные высказывания «два меньше трех или пять меньше восьми», «два не меньше трех или пять меньше восьми», «два не меньше трех или пять не меньше восьми» и « два меньше трех или пять не меньше восьми», из которых только третье высказывание является ложным.

Всего из двух аргументов, принимающих два независимых друг от друга значения, можно образовать 16 различных сочетаний, а следовательно, и 16 различных элементарных логических функций.

Так как любая логическая функция двоичных аргументов имеет только два значения, т.е. 0 или 1, то их часто называют *переключательными функциями*. Возможные варианты переключательных функций двух аргументов, их название и обозначения приведены в табл. 1.2 из которой следует, что переключательная функция $f_0(x,y)$ имеет значение 0 при любом наборе аргументов, а $f_{15}(x,y)$ - соответственное значение 1. Функция $f_{10}(x,y)$ принимает значения, противоположные значению аргумента *y*, т.е $f_{10}(x,y) = \bar{y}$ независимо от состояния аргумента *x*. Соответственно функция $f_{12}(x,y)$ - «Инверсия *x*» («Отрицание *x*») равна $f_{12}(x,y) = \bar{x}$ независимо от состояния аргумента y. Функция $f_3(x,y) = x$ независимо от состояния *y*. Функция $f_5(x,y) = y$ и не зависит от *x*. Функция $f_6(x,y) = 1$ в случаях, когда аргументы *x* и

y имеют разные состояния. Эта функция также называется суммой по модулю 2, т.к. она равна цифре в низшем разряде суммы аргументов x и y в двоичной системе счисления.

Функция $f_{11}(x,y)$ истинно всегда, кроме случая, когда y истинно, а x ложно. Функция $f_{14}(x,y)$ является отрицанием конъюнкции. Функция $f_8(x,y)$ является отрицанием дизъюнкции.

Смысл остальных переключательных функций двух аргументов с учетом изложенного ясно из табл. 1.2.

С помощью переключательных функций двух агументов можно синтезировать логическую систему любой сложности и любого заданного алгоритма функционирования. В настоящее время промышленностью выпускается серийно ряд унифицированных логических элементов на полупроводниковых приборах, в которых реализована та или иная элементарная переключательная функция. Из этих элементов, как «из кирпичиков», можно собрать любую логическую систему.

Следует отметить, что элементарные логические функции табл. 1.2 не являются независимыми друг от друга, т.к. каждая из них может быть выражена через другие функции. Более того, в одной из теорем математической логики доказано, что логичекую ситему любой сложности можно реализовать с помощью только операций конъюнкциии и инверсии или дизъюнкции и инверсии. С учетом этого для синтеза логических систем наибольшее практическое применение находят унифицированные элементы И, реализующие функцию конъюнкции, ИЛИ, реализующие функцию дизъюнкции, и НЕ, реализующую функцию отрицания ИЛИ инверсии.

С учетом рассмотренных свойств переключательных функций запишем основные формулы равносильных преобразований аппарата алгебры логики:
Конъюнкция (логическое умножение)

$$\left.\begin{array}{ll} 0\cdot 0 = 0, & 1\cdot x = x; \\ 1\cdot 0 = 0, & xx = x; \\ 1\cdot 1 = 1, & x\bar{x} = 0; \\ 0\cdot x = 0, & xy = yx; \end{array}\right\} \qquad (1.268)$$

Таблица 1.2

Переключательные функции двух аргументов

Значение аргументов					Название функции	Обозначение функции
X	0	0	1	1		
Y	0	1	0	1		
Значение функции						
$f_0(x,y)$	0	0	0	0	Нулевая функция (Константа нуль)	0
$f_1(x,y)$	0	0	0	1	Конъюнкция (Произведение или функция И)	Xy

Продолжение таб. 1.2

Значение аргументов					Название функция	Обозначение функции
X	0	0	1	1		
Y	0	1	0	1		
Значение функции						
$f_2(x,y)$	0	0	1	0	Функция запрета x	$x \to y$
$f_3(x,y)$	0	0	1	1	Повторение x	X
$f_4(x,y)$	0	1	0	0	Функция запрета y	x ← y
$f_5(x,y)$	0	1	0	1	Повторение y	Y
$f_6(x,y)$	0	1	1	0	Неравнозначность (Сложение по модулю 2)	x⊕ y
$f_7(x,y)$	0	1	1	1	Дизъюнкция (Сложение или функция ИЛИ)	$x \vee y$
$f_8(x,y)$	1	0	0	0	Функция Вебба (Стрелка Пирса)	$x \downarrow y$
$f_9(x,y)$	1	0	0	1	Равнозначность (Экви)	$x \sim y$
$f_{10}(x,y)$	1	0	1	0	Инверсия y (Отрицание y)	$\bar{y}$
$f_{11}(x,y)$	1	0	1	1	Импликация y *в* x	$x \leftarrow y$
$f_{12}(x,y)$	1	1	0	0	Инверсия x (Отрицание y)	$\bar{x}$
$f_{13}(x,y)$	1	1	0	1	Импликация y *в* x	$x \to y$
$f_{14}(x,y)$	1	1	1	0	Функция Шеффера (Штрих Шеффера)	x / y
$f_{15}(x,y)$	1	1	1	1	Единичная функция (Константа единица)	1

Дизъюнкция (логическое сложение)

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \vee 0 = 0, & 1 \vee x = 1; \\ 1 \vee 0 = 0, & x \vee x = x; \\ 1 \vee 1 = 1, & x \vee \bar{x} = 1; \\ 0 \vee x = x, & x \vee y = y \vee x; \end{array}\right\} \qquad (1.269)$$

Инверсия (отрицание)

$$\left.\begin{array}{l} \bar{0} = 1; \\ 1 = 0; \\ \bar{\bar{x}} = x. \end{array}\right\} \qquad (1.270)$$

С учетом этих элементарных формул можно получить следующие формулы для преобразования сложных логических функций:

Операция поглощения (x поглощает xy)

$$x \vee xy = x; \qquad (1.271)$$

вторая операция поглощения (x поглащает $x \vee y$)

$$x(x \vee xy) = x; \qquad (1.272)$$

Операция склеивания по переменной y

$$xy \vee x\bar{y} = x; \qquad (1.273)$$

вторая операция склеивания по переменной y

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x; \qquad (1.274)$$

Формулы де Моргана

$$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}; \tag{1.275}$$

$$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}. \tag{1.276}$$

В общем случае для любой переключательной функции равносильны тождества:

$$x_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n); \tag{1.277}$$

$$x_1 \vee f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n); \tag{1.278}$$

$$\overline{x}_1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x} f(1, x_2, \ldots, x_n); \tag{1.279}$$

$$\overline{x}_1 \vee f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x}_1 \vee f(1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.280}$$

Если в выражении переключательной функции отсутствуют скобки, то при ее преобразовании сначала выполняют операции инверсии (отрицания), затем операции конъюнкции и последней – операции дизъюнкции.

Для операций конъюнкции и дизъюнкции справедливы следующие логические законы:

закон ассоциативности

$$\left.\begin{array}{l}(xy)z = x(yz);\\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)\end{array}\right\} \tag{1.281}$$

закон коммутативности

$$\left.\begin{array}{l}xy = yx;\\ x \vee y = y \vee x;\end{array}\right\} \tag{1.282}$$

первый закон дистрибутивности

$$(x \vee y)z = xz \vee yz; \tag{1.283}$$

второй закон дистрибутивности

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z); \tag{1.284}$$

закон идемпотентности

$$\left.\begin{array}{l}x \vee x = x\\ xx = x\end{array}\right\} \tag{1.285}$$

Пример 1.25: В результате синтеза или логических умозаключений построена схема технологической сигнализации, имеющая следующие переключательные функции:

$$f_{св}(a, x, y) = a\,\overline{x}\,y \vee ax\,\overline{y} \vee axy; \tag{1.286}$$

$$f_{зв}(a, b, x, y) = \overline{ab}x\overline{y} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,xy \vee a\,\overline{b}\,\overline{x}\,\overline{y} \vee a\,\overline{b}\,x\,\overline{y} \vee a\,\overline{b}\,xy \vee ab\,\overline{x}\,\overline{y} \vee abx\,\overline{y}; \tag{1.287}$$

где $f_{св}(a, x, y)$ и $f_{зв}(a, b, x, y)$ – соответственно переключательные функции для светового и звукового сигналов; a – технологический контакт, замыкающийся при отклонении контролируемого параметра от нормы, b – контакт кнопки съемка звукового сигнала; x и y – аргументы, осуществляющие заданный алгоритм функционирования схемы.

Если схема реализуется на релейно-контактных элементах, то x и $\bar{x}$, y и $\bar{y}$ соответственно является замыкающими и размыкающими контактами реле *X* и *У*.

Как следует из выражений (1.286) и (1.287), для реализации схемы требуется большое количество размыкающих и замыкающих контактов. Для размножения контактов необходимо применение дополнительных промежуточных реле. Схема является необоснованно сложной.

Рассмотрим возможности упрощения схемы при условии сохранении заданного алгоритма ее работы. В соответствии с первым законом дистрибутивности (1.283) запишем переключательную функцию (1.286) в виде

$$f_{св}(a,x,y) = a\bar{x}y \vee ax(y \vee \bar{y}).$$

Производя операцию склеивания (1.273), получим

$$f_{св}(a,x,y) = a\bar{x}y \vee ax$$

или

$$f_{св}(a,x,y) = a(x \vee \bar{x}y).$$

Окончательно с учетом (1.280) для выражения в скобках имеем

$$f_{св}(a,x,y) = a(x \vee y). \qquad (1.288)$$

Производя аналогичные преобразования переключательной функции (1.287), получим

$$f_{св}(a,b,x,y) = a\bar{y} \vee \bar{b}x. \qquad (1.289)$$

Из выражений (1.286) – (1.288) следует, что минимизация переключательной функции в части необходимого числа сочетаний аргументов для ее реализации в несколько раз сократила требуемое количество аппаратуры.

На рис. 1.18 дана автоматическая схема управления, соответствующая переключательным функциям (1.288) и (1.289). На рис. 1.18, б представлена схема через общепринятые в электротехнике изображения коммутирующих устройств.

Схема работает следующим образом. При отклонении значения регулируемого параметра от нормы замыкается технологический контакт ТК, включается реле Х и звонок Зв. Реле Х получает питание через собственный замыкающий контакт и размыкающую кнопку съема звукового сигнала КнСС, включает реле У и сигнальную лампу Л. Реле У включает исполнительный механизм, воздействующий на объект в сторону ликвидации отклонения параметра, встает на самопитание через замкнувшийся технологический контакт ТК и разрывает ранее возникшую цепь питания реле Х через контакт ТК. При нажатии кнопки КнСС разрывается и вторая цепь питания звонка Зв и реле Х. Когда значения параметра приходят в норму, размыкает контакт ТК, реле У отключается и лампа Л гаснет. Схема приходит в исходное состояние.

Проверим алгоритм функционирования схемы с помощью таблиц состояний ее аргументов и переключательных функций по тактам переходов.

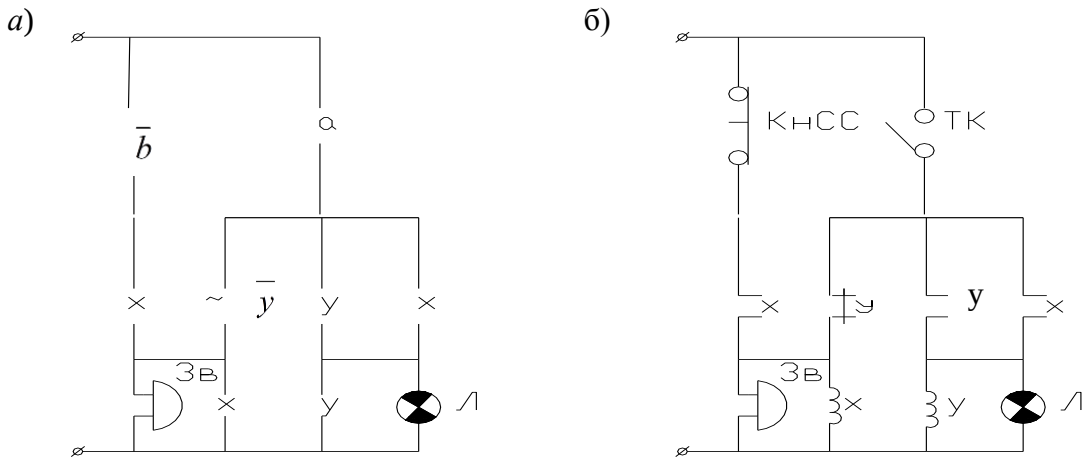


Рис. 1.18. К примеру минимизации переключательной функции схемы сигнализации

В исходном состоянии замкнут только контакт $\bar{b}$. При этом его состояние характеризуется логической единицей. Всем остальным аргументам и функциям соответствует логический нуль. При замыкании контакта *a* в первом такте (табл. 1.3) подготавливается цепь для перехода $f_{зв}(a, b, x, y)$ в другое состояние [см. выражение (1.289)], т.е. для включения реле *У* и звонка *Зв.* Факт перехода $f_{зв.}$ из состоянии 0 в состояние 1 определяется как второй такт. При этом подается напряжение на катушку реле *У* и звонок Зв. В третьем такте реле *У* срабатывает, замыкая замыкающие у и размыкая размыкающие $\bar{y}$ контакты. При этом подготавливается цепь для перехода $f_{св}(a,x,y)$ в состояние 1 [см выражение (1.288)], т.е. для включения реле *X* и сигнальной лампы Л.

Таблица 1.3

Таблица состояний переключательных функций $f_{св}(a,x,y)$ **и** $f_{зв}(a,b,x,y)$

Сигнал	Такт												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
b	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
x	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
y	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
$f_{св} = f_{у} = f_{л}$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
$f_{зв} = f_{x}$	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

При дальнейшей работе схемы по тактам в такте 5 она переходит в новое устойчивое состояние. При этом подаются звуковой и световой сигналы. При нажатии кнопки съема КнСС звукового сигнала в такте 6 схема переходит в

новое устойчивое состояние в такте 9. При этом подается только световой сигнал

$$\left[f_{св}(a,x,y) = 1; \quad f_{зв}(a,b,x,y) = 0 \right].$$

При размыкании технологического контакта в такте 10 схема после отработки такта 12 приходит в исходное состояние.

Таким образом, из табл. 1.3 следует, что алгоритм работы схемы соответствует заданному.

Контрольные вопросы:

1. Булева алгебра.
2. Конъюнкция двух высказываний.
3. Дизъюнкция двух высказываний.
4. Переключательные функции двух аргументов.
5. Инверсия (отрицание).
6. Логические законы алгебры логики (ассоциативности, коммутативности, первый и второй законы дистрибутивности, закон идемпотентности).

2 МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕ ОБЪЕКТОВ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

2.1 Идентификация статических характеристик промышленных объектов

Для конкретных расчетов при проектировании буквенные уравнения, как правило, ценности не представляют. Необходимо иметь не общее буквенное уравнение, а численное, соответствующее конкретному объекту. Получение численных уравнений из теоретических данных не всегда возможно. В подобных случаях прибегают к эксперименту, который заключается в измерении и регистрации одного или нескольких переменных или переходных процессов, исследуемого объекта. Эти процессы соответствуют частным решениям искомого дифференциального уравнения.

Для получения статических характеристик промышленных объектов используют методы активного эксперимента, в основном, метод прямоугольной волны, если объект позволяет провести активные воздействия. Помимо этих детерминистских методов применяют методы статистической динамики – без искусственных воздействий на объект.

Сказанное относится к объектам линейным. Для нелинейных объектов тоже применяют детерминистский и вероятностный подходы. Но методы здесь значительно сложнее и пока практически приемлемы только для объектов первого порядка. Все технологические процессы рассмотреть невозможно, да и не нужно, поскольку методы носят общий для определенных групп динамических систем характер и применимость их не зависит от физической природы объектов. Значение общих уравнений динамики сводится здесь к тому, что они позволяют отнести объект к той или иной динамической группе (классу) и затем выбрать целесообразный метод экспериментального определения уравнения.

Следует иметь в виду, что исходный экспериментальный материал содержит погрешности измерений, поскольку являются их результатом. Поэтому аккуратность и точность эксперимента имеют большое значение. Погрешности измерений, способы их уменьшения, планирование самого эксперимента с целью повышения точности экспериментальных данных подробно рассмотрены в литературе. Поэтому более подробно остановимся на методах обработки экспериментальных данных.

2.1.1 Определение функциональных зависимостей линейных объектов методом наименьших квадратов

При экспериментальном определении уравнений имеются погрешности измерений. Помимо борьбы с ними в процессе самих измерений погрешности можно и нужно исключать, по возможности, при обработке результатов измерений. Одним из приемов является метод наименьших квадратов. Этот

метод дает вероятнейший результат, если погрешности подчинены нормальному распределению и статистически независимы (некоррелированы). Предпосылкой метода является избыточность числа экспериментальных измерений. Если измеряется одно неизвестное количество, то принципиально необходим только один эксперимент. Однако экспериментов проводят больше и результаты усредняют. В данном случае усреднение выполняется по методу наименьших квадратов, который дает минимум суммы квадратов отклонений отдельных измерений от усредненной величины.

Пусть для определения неизвестного количества X произведено n измерений с результатами $y_1, y_2, ..., y_n$. Составим разности $y_1 - x, y_2 - x, ..., y_n - x$ и квадраты их $(y_1 - x)^2, (y_2 - x)^2, ...(y_n - x)^2$. Величину X надо выбрать такой, чтобы сумма квадратов была минимальной

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x)^2 \to \min . \qquad (2.1)$$

Этому отвечает условие

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - x)^2}{\partial x} = 0 \text{ или } 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - x)^2 = 0 .$$

Откуда получаем

$$x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i . \qquad (2.2)$$

Если отдельные измерения неравноточный, то минимизировать надовеличину

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot (y_i - x)^2 \to \min , \qquad (2.3)$$

где σ_i^2 – дисперсия погрешности отдельного измерения. При $\sigma_i^2 = const$ получаем выражение (2.1).

При измерении функциональных зависимостей между несколькими количествами этот метод требует более сложных вычислений, которые рассмотрим на примерах.

Пример 2.1. В таблице 2.1 и на рис. 2.1, *а* приведены результаты экспериментального определения статической характеристики линейной динамической системы.

Требуется методом наименьших квадратов найти статическую зависимость между входной x и выходной y величинами объекта.

Решение. Запишем искомую зависимость в виде

$$y + Ax + B = 0 . \qquad (2.4)$$

Достаточно взять две пары значений x_i и y_i, чтобы из двух полученных уравнений найти A и B. Но подстановка других экспериментальных величин x_i и y_i не удовлетворит уравнение и получится

$$y_i + Ax_i + B = \delta_i \neq 0 . \qquad (2.5)$$

Невязки δ_i с геометрической точки зрения равны расстояниям соответствующих точек (x_i, y_i) до выбранной прямой $y + Ax + B = 0$. Эту

прямую, т.е. ее параметры A и B, нужно выбрать так, чтобы в среднем невязки были минимальными. Метод наименьших квадратов Гаусса проводит прямую так, чтобы сумма квадратов невязок была минимальной $\sum \delta_i^2 = \min$.

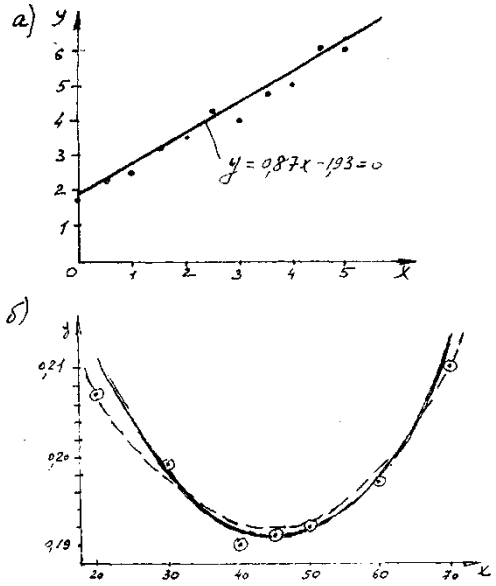


Рис. 2.1. Выравнивание линейной (*а*) и нелинейной зависимости (*б*)

При использовании метода предполагают нормальность закона распределения δ_i как случайной величины. Пусть при измерениях величин x_i и y_i в одних и тех же условиях, одними и теми же приборами получены для (2.4) следующие невязки $\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_n$.

Вероятность совместного появления этих n взаимно независимых невязок, равная произведению отдельных вероятностей, пропорционально величине

$$\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\delta_1^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\delta_2^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\delta_n^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \left(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 \right)} \quad (2.6)$$

Таблица 2.1

Экспериментальные данные

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n=11
X_i	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	ΣX_i=27,50
$У_i$	1,75	2,3	2,5	3,2	3,5	4,25	4,0	4,7	5,0	6,0	6,0	$\Sigma У_i$=43,20
X_i^2	0,0	0,25	1,0	2,25	4,0	6,25	9,0	12,25	16,0	20,25	25	ΣX_i^2=96,25
XiYi	0,0	1,15	2,5	4,8	7,0	10,625	12,0	16,45	20,0	27,0	30,0	$\Sigma X_i У_i$=131,45

Значения констант A и B будут вероятнейшими, если эта величина будет наибольшая, что обеспечивается при

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \min . \quad (2.7)$$

Минимум $\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$ дает также минимум среднеквадратичной невязки

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}\ .$$

Как выбрать A и B, чтобы получить минимум $\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$. Ключевыми являются равенства, определяемые необходимым условием существования экстремума

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{\partial A}=0 \text{ и } \frac{\partial\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{\partial B}=0. \qquad (2.8)$$

Чтобы их развернуть, составляют из результатов эксперимента так называемую условную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &y_1 + Ax_1 + B = \delta_1;\\ &y_2 + Ax_2 + B = \delta_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_n + Ax_n + B = \delta_n. \end{aligned}\right\}. \qquad (2.9)$$

Каждое условное уравнение возводят в квадрат

$$\left.\begin{aligned} &y_1^2 + A^2x_1^2 + B^2 + 2Ax_1y_1 + 2By_1 + 2ABx_1 = \delta_1^2,\\ &y_2^2 + A^2x_2^2 + B^2 + 2Ax_2y_2 + 2By_2 + 2ABx_2 = \delta_2^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_n^2 + A^2x_n^2 + B^2 + 2Ax_ny_n + 2By_n + 2ABx_n = \delta_n^2. \end{aligned}\right\}. \qquad (2.10)$$

Все их суммируют

$$\sum y_i^2 + A^2\sum x_i^2 + +nB^2 + 2A\sum x_iy_i + 2B\sum y_i + 2AB\sum x_i = \sum\delta_i^2\ , \qquad (2.11)$$

находят два так называемых нормальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sum\delta_i^2}{\partial A} = 2A\sum x_i^2 + 2\sum x_iy_i + 2B\sum x_i = 0\\ &\frac{\partial\sum\delta_i^2}{\partial B} = 2nB + 2\sum y_i + 2A\sum x_i = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &A\sum x_i^2 + B\sum x_i = -\sum x_iy_i,\\ &A\sum x_i^2 + B\cdot n = -\sum y_i \end{aligned}\right\},$$

откуда вычисляют вероятнейшие значения A и B.

Для рассматриваемого численного примера числа $n=11;\sum x_i = 27{,}5;\sum y_i = 43{,}20;\sum x_i^2 = 96{,}25;\sum x_iy_i = 131{,}45$ подсчитаны в табл. 2.1.

Нормальные уравнения для заданного примера приобретают вид

$$96{,}25A + 27{,}5B = -131{,}45,$$
$$27{,}5A + 11B = -43{,}20,$$

откуда

$$A = -\frac{131{,}45 \cdot 11 - 43{,}2 \cdot 27{,}5}{96{,}25 \cdot 11 - 27{,}5 \cdot 27{,}5} = -0{,}87;$$

$$B = \frac{96{,}25 \cdot 43{,}2 - 27{,}5 \cdot 131{,}45}{96{,}25 \cdot 11 - 27{,}5 \cdot 27{,}5} = -1{,}93.$$

Искомое усредненное уравнение получилось в виде

$$y - 0{,}87x - 1{,}93 = 0$$

На рис. 2.1, *а* показана соответствующая линия.

При отыскании зависимости между x и y в виде $y + Ax + B = 0$ предполагаем, что экспериментальные измерения входной величины x производится намного точнее, чем выходной величины y. Так обычно и бывает на практике. Если же имеет место обратное явление, то зависимость ищут в виде

$$x + A_1 y + B_1 = 0. \qquad (2.13)$$

Константы A_1 и B_1 находят из уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_1 \cdot \sum y_i^2 + B_1 \cdot \sum y_i &= -\sum x_i \cdot y_i \\ A_1 \cdot \sum y_i + B_1 \cdot n &= -\sum x_i \end{aligned}\right\}. \qquad (2.14)$$

Применение метода наименьших квадратов к уравнению в форме (2.4) и уравнению (2.13) дает не совсем одинаковые результаты (линии на графике не сливаются см. рис. 2.1.б). Об этих деталях подробно рассмотрено в [7].

2.1.2. Определение функциональной зависимости нелинейного объекта

Пример 2.2 В табл. 2.2. и на рис.2.1, б приведены результаты экспериментального определения статической характеристики нелинейного объекта.

Таблица 2.2

Экспериментальные данные

i – номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x – вход	20	30	40	45	50	60	70
y – выход	0,207	0,199	0,19	0,191	0,192	0,197	0,21

Требуется по методу наименьших квадратов найти аналитическую зависимость между входной x и выходной y величинами объекта.

Решение. Прежде всего–необходимо задать вид аналитической зависимости. По экспериментальным данным (рис.2.1., б) можно принять выравнивание полученных точек параболой:

$$y = A + Bx + Cx^2. \qquad (2.15)$$

Тогда задача сводится к определению вероятнейших значений констант *A, B* и *C*. Первым шагом определяются приближенные значения A^1, B^1 и C^1. Для этого можно взять три произвольные экспериментальные точки и трижды подставить их координаты в искомое уравнение. Это дает три уравнения, из

которых определяются приближенные значения A^1, B^1 и C^1. Наиболее целесообразно выбрать точки, равномерно распределенные в заданном промежутке изменения входа. Найдя A^1, B^1 и C^1, можно методом наименьших квадратов отыскать поправки к ним.

Для определения A^1, B^1 и C^1 возьмем например, 1,4 и 7 точки из табл. 2.2, как наиболее точно вырисовывающие контур искомой параболы. Получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}207 &= A' + B' \cdot 20 + C' \cdot 20^2 \\ 0{,}131 &= A' + B' \cdot 45 + C' \cdot 45^2 \\ 0{,}21 &= A' + B' \cdot 70 + C' \cdot 70^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Из (2.16) вычисляем $A' = 0{,}245; B' = -0{,}246 \cdot 10^{-2}; C' = 0{,}28 \cdot 10^{-4}$.

Теперь нужно вычислить поправки

$$\left.\begin{aligned} A &= A' + \Delta A = 0{,}245 + \Delta A \\ B &= B' + \Delta B = -0{,}246 \cdot 10^{-2} + \Delta B \\ C &= C' + \Delta C = 0{,}28 \cdot 10^{-4} + \Delta C \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

Найдем отклонения ординат экспериментальных точек от приближенной параболы $y' = A' + B' \cdot x + C' \cdot x^2$. Для этого в уравнение параболы подставим значения $x_1 = 20, x_2 = 30, ..., x_7 = 70,$, соответствующие экспериментальным данным x_i

$$y_1' = A' + B' \cdot x_1 + C' \cdot x_1^2 = 0{,}245 - 0{,}246 \cdot 10^{-2} \cdot 20 + 0{,}28 \cdot 10^{-4} \cdot 20^2 = 0{,}207;$$
$$y_2' = A' + B' \cdot x_2 + C' \cdot x_2^2 = 0{,}245 - 0{,}246 \cdot 10^{-2} \cdot 30 + 0{,}28 \cdot 10^{-4} \cdot 30^2 = 0{,}1964;$$

по аналогии получим y_3', y_4', y_5', y_6' и

$$y_3' = 0{,}1914; y_4' = 0{,}1912; y_5' = 0{,}1920; y_6' = 0{,}1980; y_7' = 0{,}2100.$$

Вычитая эти количества из соответствующих экспериментальных величин y_i, получаем

$$\Delta y_1 = 0{,}207 - 0{,}207 = 0{,}00;$$
$$\Delta y_2 = 0{,}1990 - 0{,}1964 = 0{,}26 \cdot 10^{-2};$$
$$\Delta y_3 = 0{,}1900 - 0{,}1914 = -0{,}14 \cdot 10^{-2};$$
$$\Delta y_4 = 0{,}1910 - 0{,}1912 = -0{,}02 \cdot 10^{-2};$$
$$\Delta y_5 = 0{,}1920 - 0{,}1920 = 0{,}00;$$
$$\Delta y_6 = 0{,}1970 - 0{,}1980 = -0{,}1 \cdot 10^{-2};$$
$$\Delta y_7 = 0{,}2100 - 0{,}210 = 0{,}00.$$

Поправки $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ определяем следующим образом. Подставив $A' + \Delta A$, $B' + \Delta B$, $C' + \Delta C$ в уравнение

$$y_i = \left(A' + \Delta A\right) + \left(B' + \Delta B\right) \cdot x_i + \left(C' + \Delta C\right) \cdot x_i^2$$

и вычтя из него

$$y_i^1 = A' + B' \cdot x_i + C' \cdot x_i^2,$$

получим уравнения для вычисления поправок:

$y_i - y_i' = \Delta y_i = \Delta A + \Delta B \cdot x_i + \Delta C \cdot x_i^2$ или в численном виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta A + \Delta B \cdot 20 + \Delta C \cdot 20^2 = 0{,}00\\
&\Delta A + \Delta B \cdot 30 + \Delta C \cdot 30^2 = 0{,}26 \cdot 10^{-2}\\
&\Delta A + \Delta B \cdot 40 + \Delta C \cdot 40^2 = -0{,}14 \cdot 10^{-2}\\
&\Delta A + \Delta B \cdot 45 + \Delta C \cdot 45^2 = -0{,}02 \cdot 10^{-2}\\
&\Delta A + \Delta B \cdot 50 + \Delta C \cdot 50^2 = 0{,}00\\
&\Delta A + \Delta B \cdot 60 + \Delta C \cdot 60^2 = -0{,}1 \cdot 10^{-2}\\
&\Delta A + \Delta B \cdot 70 + \Delta C \cdot 70^2 = 0{,}00
\end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Полученная условная система содержит уравнений больше, чем неизвестных. Для вычисления вероятнейших значений $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ следует применить метод наименьших квадратов. Для этого нужно возвести в квадрат все уравнения, сложить их, а затем из условия

$$\frac{\partial \sum \Delta y_i^2}{\partial \Delta A} = 0; \quad \frac{\partial \sum \Delta y_i^2}{\partial \Delta B} = 0; \quad \frac{\partial \sum \Delta y_i^2}{\Delta C} = 0. \qquad (2.19)$$

развернуть в три нормальные уравнения для вычисления $\Delta A, \Delta B, \Delta C$.

Быстрее условную систему можно преобразовать в нормальную по следующему правилу:

–для составления первого нормального уравнения надо каждое из условных уравнений умножить на коэффициент при первой неизвестной, в нем стоящий, и все полученные таким образом уравнения сложить;

–для составления второго нормального уравнения надо каждое условное уравнение умножить на коэффициент при второй неизвестной, в этом уравнений стоящий, и все полученные таким образом уравнения сложить. и т. д. Очевидно, будет получено столько нормальных уравнений, сколько неизвестных. Это правило можно было применить и для предыдущей задачи.

Так как во всех уравнениях (2.18) коэффициент при первой неизвестной ΔA равен единице, то достаточно уравнения просто сложить, чтобы получить первое нормальное уравнение

$$\Delta A \cdot 7 + \Delta B \cdot 315 + \Delta C \cdot 15925 = 0{,}00.$$

Для нахождения второго нормального уравнения нужно сложить

$$\Delta A \cdot 20 + \Delta B \cdot 20 \cdot 20 + \Delta C \cdot 20^2 \cdot 20 = 0{,}00 \cdot 20;$$
$$\Delta A \cdot 30 + \Delta B \cdot 30 \cdot 30 + \Delta C \cdot 30^2 \cdot 30 = 0{,}26 \cdot 10^{-2} \cdot 30;$$
$$\Delta A \cdot 40 + \Delta B \cdot 40 \cdot 40 + \Delta C \cdot 40^2 \cdot 40 = -0{,}14 \cdot 10^{-2} \cdot 40;$$
$$\Delta A \cdot 45 + \Delta B \cdot 45 \cdot 45 + \Delta C \cdot 45^2 \cdot 45 = -0{,}02 \cdot 10^{-2} \cdot 45;$$
$$\Delta A \cdot 50 + \Delta B \cdot 50 \cdot 50 + \Delta C \cdot 50^2 \cdot 50 = 0{,}00 \cdot 50;$$
$$\Delta A \cdot 60 + \Delta B \cdot 60 \cdot 60 + \Delta C \cdot 60^2 \cdot 60 = -0{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 60;$$
$$\Delta A \cdot 70 + \Delta B \cdot 70 \cdot 70 + \Delta C \cdot 70^2 \cdot 70 = 0{,}00 \cdot 70.$$

Получим

$$\Delta A \cdot 315 + \Delta B \cdot 15925 + \Delta C \cdot 874125 = -4{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Для нахождения третьего нормального уравнения нужно сложить

$$\Delta A \cdot 20^2 + \Delta B \cdot 20 \cdot 20^2 + \Delta C \cdot 20^2 \cdot 20^2 = 0{,}00 \cdot 20^2;$$
$$\Delta A \cdot 30^2 + \Delta B \cdot 30 \cdot 30^2 + \Delta C \cdot 30^2 \cdot 30^2 = 0{,}26 \cdot 10^{-2} \cdot 30^2;$$
$$\Delta A \cdot 40^2 + \Delta B \cdot 40 \cdot 40^2 + \Delta C \cdot 40^2 \cdot 40^2 = -0{,}14 \cdot 10^{-2} \cdot 40^2;$$
$$\Delta A \cdot 45^2 + \Delta B \cdot 45 \cdot 45^2 + \Delta C \cdot 45^2 \cdot 45^2 = -0{,}02 \cdot 10^{-2} \cdot 45^2;$$
$$\Delta A \cdot 50^2 + \Delta B \cdot 50 \cdot 50^2 + \Delta C \cdot 50^2 \cdot 50^2 = 0{,}00 \cdot 50^2;$$
$$\Delta A \cdot 60^2 + \Delta B \cdot 60 \cdot 60^2 + \Delta C \cdot 60^2 \cdot 60^2 = -0{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 60^2;$$
$$\Delta A \cdot 70^2 + \Delta B \cdot 70 \cdot 70^2 + \Delta C \cdot 70^2 \cdot 70^2 = 0{,}00 \cdot 70^2.$$

Получим

$$\Delta A \cdot 15925 + \Delta B \cdot 874125 + \Delta C \cdot 50850625 = -3{,}905.$$

Из полученных трех нормальных уравнении

$$\Delta A \cdot 7 + \Delta B \cdot 315 + \Delta C \cdot 15925 = 0{,}00;$$
$$\Delta A \cdot 315 + \Delta B \cdot 15925 + \Delta C \cdot 874125 = -4{,}7 \cdot 10^{-2};$$
$$\Delta A \cdot 15925 + \Delta B \cdot 874125 + \Delta C \cdot 50850625 = -3{,}905$$

вычисляются поправки

$$\Delta A = \frac{0{,}0581}{7} = 0{,}0083;$$
$$\Delta B = \frac{1{,}7216125}{7809{,}375} = -0{,}0221 \cdot 10^{-2};$$
$$\Delta C = \frac{0{,}0056875}{7809{,}375} = 0{,}0073 \cdot 10^{-4}.$$

Введя поправки в раннее приближенно вычисленные параметры параболы (2.17) получим

$$A = A' + \Delta A = 0{,}245 + 0{,}0083 = 0{,}2533;$$
$$B = B' + \Delta B = -0{,}246 \cdot 10^{-2} - 0{,}0221 \cdot 10^{-2} = -0{,}2681 \cdot 10^{-2};$$
$$C = C' + \Delta C = 0{,}28 \cdot 10^{-4} + 0{,}0073 \cdot 10^{-4} = 0{,}2873 \cdot 10^{-4}.$$

Тогда уравнение усредненной параболы получается в виде

$$y = 0{,}2583 - 0{,}2681 \cdot 10^{-2} \cdot x + 0{,}2873 \cdot 10^{-4} \cdot x^2. \qquad (2.20)$$

На рис. 2.1,б нанесены: экспериментальные точки, приближенная (штриховая) и усредненная параболы. Уточненные коэффициенты используются при технико-экономических расчетах работы системы управления объектом.

2. 2. Определение уравнений объектов по кривым разгона

Для получения уравнений объектов прибегают к эксперименту, который заключается в измерении и регистрации одного или нескольких переходных процессов. Эти процессы соответствуют частным решениям искомого дифференциального уравнения.

Наибольшее применение в автоматизации получили два вида экспериментов: снятие кривых разгона и снятие частотных характеристик.

В первом случае регистрируемым частным решением искомого уравнения является реакция объекта на стандартное ступенчатое изменение входной величины, по которой и определяют уравнение объекта.

Во втором случае регистрируется не одно частное решение, а несколько. Решениями этими являются установившиеся колебания выходной величины объекта, вынуждаемые искусственными периодическими колебаниями входной величины на различных фиксированных частотах. Эти частные решения – частотные характеристики объекта – представляют исходный материал для последующего нахождения уравнения.

Если на объекте невозможно применить активный эксперимент, то применяют методы статистической динамики без использования искусственных воздействий на объект.

Для линейного дифференциального уравнения вида

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + x = b_0 \cdot x_0^m + b_1 \cdot x_0^{m-1} + ... + b_m \cdot x_0, \qquad (2.21)$$

$n > m; x, x_0 -$ выход и вход объекта) решение при нулевых начальных условиях и скачкообразном изменении входа X_0 можно записать аналитически в виде функции времени и коэффициентов

$$x = x_{cm} \cdot (t, a_0, a_1, .. a_{n-1}, b_0, b_1, ..., b_m) \qquad (2.22)$$

И обратно, если известен порядок уравнения объекта (2.21) и экспериментально получена реакция $x_{cm}(t)$ на ступенчатое изменение входа, то можно вычислить $n+m+1$ коэффициентов a_i , b_i уравнения (2.21). Для этого приравниваются аналитическое решение $x(t)$ (2.22), в котором фигурируют коэффициенты a_i, b_i и реакция $x_{cm}^1(t)$ при различных значениях времени $t = t_i (i = 1,2,..., m+n+1)$. В результате получается система из $m+n+1$ уравнений с неизвестными коэффициентами a_i, b_i:

$$\dot{x}_{cm}(t_i, a_0, a_1, ..., a_{n-1}, b_0, b_1, ..., b_m) = x'_{cm}(t_i), \quad i = 1,2,..., n+m+1, \quad (2.23)$$

из которой вычисляются искомые коэффициенты. Таким образом $n+m+1$ дискретных ординат $x_{cm}^1(t)$ кривой разгона позволяют получить $m+n+1$ неизвестные коэффициенты. Возможны различные вариации этой идеи, вплоть до применения других видов реакции. Можно взять и избыточное число ординат и применить метод наименьших квадратов.

Существенно здесь знание порядка уравнения объекта (2.21). Аналитический вид решений (2.22) различен для уравнений разного порядка и, если принятый априорно порядок n меньше имеющего места на деле, то этот прием приравнивания ординат аналитического решения и «экспериментального решения» дает неверные a_i и b_i . Если n взято большим, то это не страшно, так как лишние коэффициенты обратятся в нуль. Априорно порядок уравнения объекта определяется по числу сосредоточенных емкостей в объекте.

2.2.1. Определение уравнения объекта первого порядка по кривой разгона

На рис.2.2 показана кривая разгона $y(t)$ одно емкостного линейного объекта. В момент времени $t_0 = 0$ входную величину *x* изменили скачком на *a* единиц.

Необходимо написать в численном виде уравнение объекта.

Искомое уравнение имеет вид

$$T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x \quad \text{или} \quad \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp+1} \tag{2.24}$$

и нужно определить константы *T* и *k*.

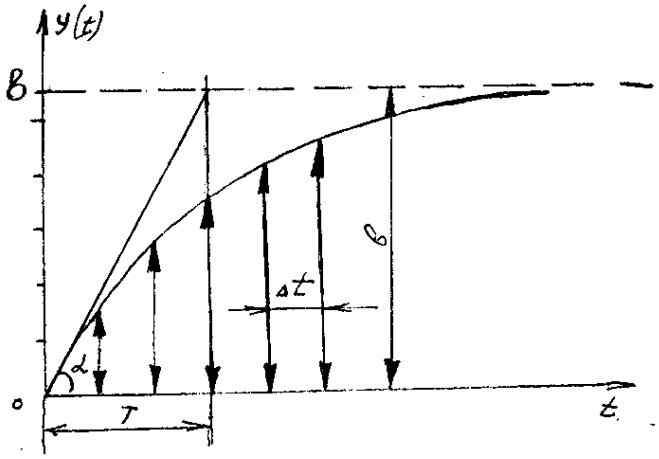


Рис.2.2 К определению уравнения объекта первого порядке по кривой разгона

Вначале найдем аналитическое выражение решения уравнения при данных условиях. Это решение будет содержать константы *T* и k. Полученная кривая разгона есть графическое решение, тогда сравнив график с его аналитическим выражением, найдем константы этого аналитического выражения. Общий вид решения для условий $y = 0$ при $t = 0$ и $x = a$ при $t > 0$ имеет вид

$$y(t) = k \cdot a \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right). \tag{2.25}$$

Принципиально достаточно взять пару любых точек из графика, подставить их координаты в решение и затем из полученных двух уравнений вычислить *T* и *K*. Но уравнения эти трансцендентные

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{\frac{-t_1}{T}}\right) \\ y_2(t) &= k \cdot a \cdot \left(1 - e^{\frac{-t_2}{T}}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{2.26}$$

и вычислить корни их k и T затруднительно. Поэтому можно применить следующий прием. При $t \to \infty$ имеем $y(t) = k \cdot a$, следовательно, ордината асимптоты, к которой стремится y, дает возможность определить k простым делением на a, т. е.

$$k = \frac{b}{a} \tag{2.27}$$

Для вычисления T продифференцируем решение

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot a \cdot \frac{1}{T} \cdot e^{\frac{-t}{T}}$$

и устремим t к нулю

$$\lim_{t \to 0} \frac{dy}{dt} = k \cdot a \cdot \frac{1}{T} = \frac{b}{T} = tg\alpha, \tag{2.28}$$

где α – угол наклона касательной, проведенной к графику $y(t)$ при $t = 0$. Поэтому

$$T = \frac{b}{tg\alpha}. \tag{2.29}$$

Итак, T численно равна длине подкасательной в пределах от начала координат до точки пересечения ее с упомянутой асимптотой.

Такое решение самое простое, но не точное, т.к. трудно провести касательную и точно указать ординату асимптоты. При таком решении используется только начало и конец графика, а все промежуточные его точки из рассмотрения выпадают.

Рассмотрим более точный прием. Разобьем график на интервал Δt, равноотстоящими ординатами y_0, y_1, y_2 и т.д. Для этих точек согласно решению уравнения можно записать

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= k \cdot a \cdot (1 - e^{-\frac{0}{T}}); \\ y_1 &= k \cdot a \cdot (1 - e^{\frac{-\Delta t}{T}}); \\ y_2 &= k \cdot a \cdot (1 - e^{\frac{-2\Delta t}{T}}); \\ y_3 &= k \cdot a \cdot (1 - e^{\frac{-3\Delta t}{T}}); \\ &u.m.\partial \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

Вычтем попарно из последующих уравнении предыдущие

$$\left.\begin{aligned} &y_1 - y_0 = k \cdot a - k \cdot a \cdot e^{\frac{-\Delta t}{T}}; \\ &y_2 - y_1 = k \cdot a \cdot e^{\frac{-\Delta t}{T}} - k \cdot a \cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T}}; \\ &y_3 - y_2 = k \cdot a \cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T}} - k \cdot a \cdot e^{\frac{-3\Delta t}{T}} \\ &u..m.д. \end{aligned}\right\} \quad (2.31)$$

Обозначим для краткости $e^{-\frac{\Delta t}{T}} = q$, тогда

$$\left.\begin{aligned} &y_1 - y_0 = k \cdot a \cdot (1-q); \\ &y_2 - y_1 = k \cdot a \cdot q \cdot (1-q); \\ &y_3 - y_2 = k \cdot a \cdot q^2 \cdot (1-q); \\ &u.m.д. \end{aligned}\right\} \quad (2.32)$$

Разделив каждое последующее из этих равенств на предыдущее, получим ряд значении q

$$q_1 = \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0}; q_2 = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}; q_3 = \frac{y_4 - y_3}{y_3 - y_2}; \text{ и т.д.,} \quad (2.33)$$

численно отличающеися одно от другого из-за погрешностей экспериментального измерения и регистрации $y(t)$.

Более точное усредненное значение дает среднеарифметическое $\bar{q}$ из вычисленных рассмотренным путем отдельных q_i. Затем уточненная постоянная времени $\bar{T}$ определяется из выражения

$$\bar{T} = -\frac{\Delta t}{\ln \bar{q}} \quad (2.34)$$

Аналогично по известным q_i определяется отдельные k_i:

$$k_1 = \frac{y_1 - y_0}{a \cdot (1-q)}; k_2 = \frac{y_2 - y_1}{a \cdot q_2 \cdot (1-q_2)}; k_3 = \frac{y_3 - y_1}{a \cdot q^2{}_3 \cdot (1-q_3)}; \text{ и т. д.} \quad (2.35)$$

Затем находится среднеарифметическое $\bar{k}$ из k_1, k_2, k_3 и т. д.

Для самостоятельной работы студентов предлагается задаться масштабами по оси графика на рис. 2.2, величиной a, величиной Δt и, взяв 7-8 ординат $y_0, y_1, ..., y_8$, вычислить $\bar{k}$ и $\bar{T}$.

2.2.2 Определение уравнения объекта второго порядка с монотонной кривой разгона

На рис. 2.3. дана кривая разгона объекта описываемая уравнением второго порядка

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x; \quad (2.36)$$

Ступенчатое воздействие входа $x = a$. Вычислить константы T_1, T_2 и k, если известно, что возмущение входа было единичным $x = a = 1$ при $t > 0$.

Так же как и предыдущем случае (п.2.2.1.) вначале следует написать в общем виде решение уравнения.

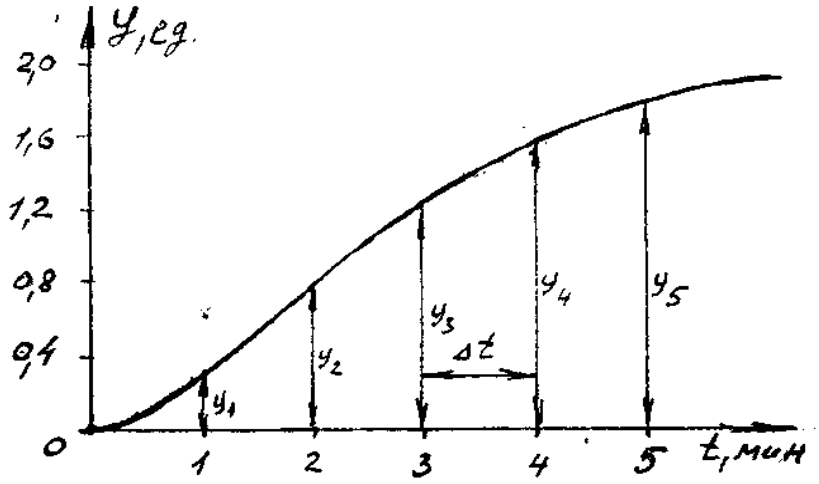


Рис. 2.3 К определению уравнения объекта второго порядка с монотонной кривой разгона

Запишем его в общем виде

$$y_{общ}(t) = C_1 \cdot e^{\frac{-t}{T_1}} + C_2 \cdot e^{\frac{-t}{T_2}} + k \cdot a \ , \qquad (2.37)$$

затем из начальных условии $y = 0$; $\frac{dy}{dt} = 0$ при $t = 0$ определяют произвольные постоянные

$$\left.\begin{aligned} y_{общ}(0) &= C_1 \cdot e^{\frac{-0}{T_1}} + C_2 \cdot e^{\frac{-0}{T_2}} + k \cdot a = 0; \\ y'_{общ}(0) &= -C_1 \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{\frac{-0}{T_1}} - C_2 \cdot \frac{1}{T_2} \cdot e^{\frac{-0}{T_2}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.38)$$

откуда

$$C_1 = \frac{k \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1}; \qquad C_2 = \frac{k \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2} \qquad (2.39)$$

Искомое частное решение получается в виде

$$y(t) = k \cdot a \cdot (1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot e^{\frac{-t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{\frac{-t}{T_2}}) . \qquad (2.40)$$

Теперь принципиально, достаточно взять координаты y_i, t_i трех произвольных точек из заданного графика, подставить их трижды в решение и, из полученных этим путем трех уравнений, найти корни k, T_1, T_2. Но эти

уравнения трансцендентны и корни вычислять сложно, поэтому проще и удобнее использовать метод А. Н. Крылова.

Для этого разобьем график $y(t)$ равноотстоящими с интервалом Δt ординатами y_0, y_1, y_2 и т.д. и запишем

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= k\cdot a + \frac{k\cdot a\cdot T_1}{T_2 - T_1} + \frac{k\cdot a\cdot T_2}{T_1 - T_2};\\
y_1 &= k\cdot a\cdot\left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}\cdot e^{\frac{-\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}\cdot e^{\frac{-\Delta t}{T_2}}\right);\\
y_2 &= k\cdot a\cdot\left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}\cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}\cdot e^{\frac{-2\Delta t}{T_2}}\right);\\
y_3 &= k\cdot a\cdot\left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}\cdot e^{\frac{-3\Delta t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}\cdot e^{\frac{-3\Delta t}{T_2}}\right);\\
&\textit{ит.д.}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

Обозначив $A_1 = k\cdot a;$ $A_2 = \frac{k\cdot a\cdot T_1}{T_2 - T_1};$ $A_3 = \frac{\cdot k\cdot a\cdot T_2}{T_1 - T_2};$ $p = e^{\frac{-\Delta t}{T_1}};$ $q = e^{\frac{-\Delta t}{T_2}},$ перепишем их в виде

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= A_1 + A_2 + A_3;\\
y_1 &= A_1 + A_2\cdot p + A_3\cdot q;\\
y_2 &= A_1 + A_2\cdot p^2 + A_3\cdot q^2;\\
y_3 &= A_1 + A_2\cdot p^3 + A_3\cdot q^3;\\
y_4 &= A_1 + A_2\cdot p^4 + A_3\cdot q^4;\\
y_5 &= A_1 + A_2\cdot p^5 + A_3\cdot q^5
\end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

Будем считать числа 1, p и q корнями кубического уравнения

$$\lambda^3 + B_1\cdot\lambda^2 + B_2\cdot\lambda + B_3 = 0. \qquad (2.43)$$

Умножим первую строку на B_3, вторую на – B_2, третью на – B_1, четвертую на –1 и сложим их, тогда правые части дадут в сумме нуль, поэтому получим

$$y_0\cdot B_3 + y_1\cdot B_2 + y_2\cdot B_1 + y_3 = 0. \qquad (2.44)$$

Проделаем ту же операцию со следующими четырьмя строками:

$$y_1\cdot B_3 + y_2\cdot B_2 + y_3\cdot B_1 + y_4 = 0. \qquad (2.45)$$

Следующие четыре строки дадут

$$y_2\cdot B_3 + y_3\cdot B_2 + y_4\cdot B_1 + y_5 = 0. \qquad (2.46)$$

В этих трех равенствах ординаты y_i известны из кривой разгона, а константы B_1, B_2, B_3 – искомые. Найдя их, далее следует вычислить корни кубического уравнения

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = p = e^{\frac{-\Delta t}{T_1}}; \lambda_3 = q = e^{\frac{-\Delta t}{T_2}}, \qquad (2.47)$$

затем

$$T_1 = -\frac{\Delta t}{\ln p} \quad \text{и} \quad T_2 = -\frac{\Delta t}{\ln q} \ . \qquad (2.48)$$

Из любого уравнения системы (2.42), кроме первого, нужно вычислить k.

Для повышения точности можно брать не шесть исходных ординат, а больше затем усреднить результаты.

По существу этот способ является аппроксимацией заданного графика суммой экспоненциальных членов.

Перейдем к численному примеру. Взяв $\Delta t = 1$ мин измерим на кривой разгона (рис.2.3) шесть ординат (табл. 2.3)

Таблица 2.3

Результаты эксперимента

t, мин	0	1	2	3	4	5
$y(t)$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0{,}31$	$y_2 = 0{,}80$	$y_3 = 1{,}21$	$y_4 = 1{,}5$	$y_5 = 1{,}7$

Из уравнений

$$0 \cdot B_3 + 0{,}31 \cdot B_2 + 0{,}8 \cdot B_1 + 1{,}21 = 0;$$
$$0{,}31 \cdot B_3 + 0{,}8 \cdot B_2 + 1{,}21 \cdot B_1 + 1{,}5 = 0;$$
$$0{,}8 \cdot B_3 + 1{,}21 \cdot B_2 + 1{,}5 \cdot B_1 + 1{,}7 = 0;$$

вычислим $B_1 = -1{,}97; B_2 = 1{,}19; B_3 = -0{,}222.$

Находим корни кубического уравнения: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = p = 0{,}37$; $\lambda_3 = q = 0{,}61$. Это сравнительно легко сделать, т.к. один корень заранее известен ($\lambda = 1$). Затем находим

$$T_1 = \frac{-\Delta t}{\ln p} = \frac{-1}{\ln 0{,}37} \approx 1 мин; \qquad T_2 = \frac{-\Delta t}{\ln q} = \frac{-1}{\ln 0{,}61} \approx 2 мин.$$

Для вычисления k возьмем одну из строк, кроме первой, системы (2.42), например, вторую

$$y_1 = A_1 + A_2 \cdot p + A_3 \cdot q = k \cdot a + \frac{k \cdot a \cdot T_1}{T_2 - T_1} \cdot p + \frac{k \cdot a \cdot T_2}{T_1 - T_2} \cdot q.,$$

или после подстановки численных значений

$$0{,}31 = k \cdot (1 + \frac{1}{2-1} \cdot 0{,}37 + \frac{2}{1-2} \cdot 0{,}61),$$

откуда $k = 2{,}07$; $[k] = \frac{ед.y}{ед.x}$.

2.2.3 Определение уравнения объекта второго порядке с колебательной кривой разгона

Ленточная агломерационная машина применяется для получения путем спекания прочного крупнокускового материала для доменных процессов. Подготовленная шихта (железная руда, кокс, известняк) поступает на движущиеся колосники агломашины. Под колосниками эксгаутер создает вакуум и атмосферный воздух просасывается сквозь движущиеся слой шихты. В начале движения топливо, находящиеся в шихте, поджигается горном, далее процесс горения поддерживается за счет просасывания воздуха.

Определим уравнение этого объекта по реакции выхода $\Delta\theta$(t) (рис 2.4) на скачкообразное изменение входной величины υ до значения $\vartheta = a$, м/мин; $\Delta\theta(t)$ – разность температур в последних отсасывающих камерах, ϑ – скорость движения ленты.

Кривая разгона имеет колебательную форму и можно предположить, что искомое уравнение – уравнение второго порядка с комплексными корнями [13]

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} - (\gamma_1 + \gamma_2)\cdot\frac{d\theta}{dt} + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\Delta\theta = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot k\cdot\upsilon \qquad (2.49)$$

Необходимо вычислить константы γ_1, γ_2, k.

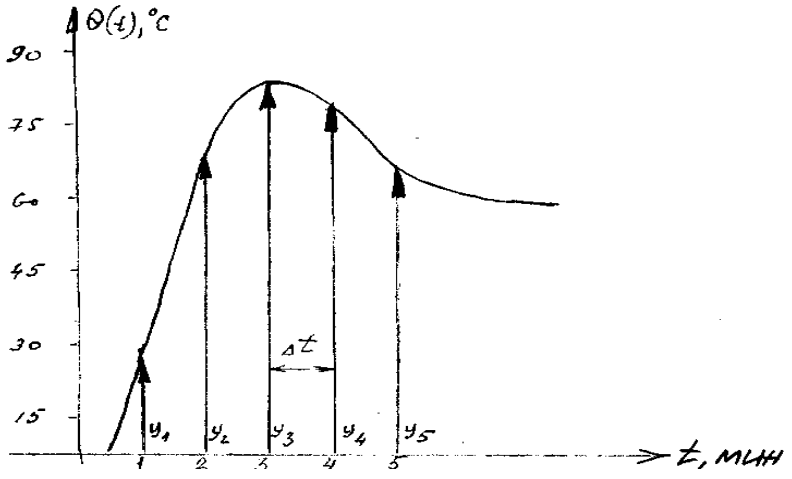


Рис. 2.4. К определению уравнения объекта второго порядка с колебательной кривой разгона

Уравнение это такое же, как в п 2.2.2, изменено лишь обозначение констант $\gamma_1 = -\frac{1}{T_1}, \gamma_2 = -\frac{1}{T_2}$, т.к. постоянное времени здесь, в случае колебательной системы, не имеют физического смысла. Уравнение колебательной системы обычно записывается в виде

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + 2\cdot\varepsilon\cdot\omega_0\cdot\frac{d\Delta\theta}{dt} + \omega_0^2\cdot\Delta\theta = k\cdot\omega_0^2\cdot\upsilon; \qquad (2.50)$$

где ε – коэффициент демпфирования; ω_0 – собственная частота системы.

Отсюда видна связь между физическими константами ε, ω_0 и числами γ_1, γ_2. Последние введены для удобства вычислений.

Используя результаты п 2.2.2, сразу напишем решение уравнения:

$$\Delta\theta(t) = k \cdot a + \frac{k \cdot a \cdot \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \cdot e^{\gamma_1 \cdot t} + \frac{k \cdot a \cdot \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \cdot e^{\gamma_2 \cdot t}.$$

Так как объект управления имеет колебательные свойства, то прием вычисления констант, примененный в предыдущей задаче, даст в результате не действительные числа γ_1 и γ_2, а комплексные, т.е

$$\gamma_1 = \alpha + j\beta; \quad \gamma_2 = \alpha - j\beta. \qquad (2.51)$$

Переходя к действительным количествам, форму записи решения нужно соответственно преобразовать по формуле Эйлера ($e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$)

$$\Delta\theta(t) = k \cdot a \cdot [1 + \frac{\alpha - j\beta}{2j\beta} \cdot e^{(\alpha + j\beta)\cdot t} + \frac{\alpha + j\beta}{-2j\beta} \cdot e^{(\alpha - j\beta)\cdot t}] =$$

$$= k \cdot a \cdot \left\{1 + e^{\alpha t} \cdot \left[\frac{j\alpha + \beta}{-2\beta} \cdot (\cos\beta t + j\sin\beta t) + \frac{j\alpha - \beta}{2\beta} \cdot (\cos\beta t - j\sin\beta t)\right]\right\} =$$

$$= k \cdot a \cdot \left[1 + e^{\alpha t} \cdot \left(-\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin\beta t\right)\right] =$$

$$= k \cdot a \cdot \left[1 + e^{\alpha t} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \cdot \sin\left(\beta t - arctg\,\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]$$

(2.52)

(2.52) соответствует сложению двух гармоник.

Принципиально можно было бы взять координаты трех произвольных точек их графика $\Delta\theta(t)$, поставив их в решение, вычислить из трех уравнении действительные корни α, β и k. Но т.к. уравнения получаются трансцендентными, то решить их весьма сложно, и поэтому целесообразнее применить прием, рассмотренный в предыдущей задаче.

Для этого возьмем из кривой разгона шесть равноотстоящих на интервал $\Delta t = 5 мин$, ординат:

$\Delta\theta_0 = 0{,}0$; $\Delta\theta_1 = 29{,}3$; $\Delta\theta_2 = 69{,}0$; $\Delta\theta_3 = 84{,}3$; $\Delta\theta_4 = 79{,}8$; $\Delta\theta_5 = 71{,}1$.

Составим систему уравнении для определения коэффициентов промежуточного кубического уравнения (2.43)

$$0{,}0 \cdot B_3 + 29{,}3 \cdot B_2 + 69{,}0 \cdot B_1 + 84{,}3 = 0;$$
$$29{,}3 \cdot B_3 + 69{,}0 \cdot B_2 + 84{,}3 \cdot B_1 + 79{,}8 = 0;$$
$$69{,}0 \cdot B_3 + 84{,}3 \cdot B_2 + 79{,}8 \cdot B_1 + 71{,}1 = 0;$$

Из нее вычислим $B_1 = -1{,}654$; $B_2 = 1{,}12$; $B_3 = -0{,}366$ и получим следующее кубическое уравнение: $\lambda^3 - 1{,}654 \cdot \lambda^2 + 1{,}12 \cdot \lambda - 0{,}366 = 0.$

Вычислим его корни (один корень $\lambda_3 = 1$ заранее известен)

$$\lambda_1 = 0{,}327 + j \cdot 0{,}509; \quad \lambda_2 = 0{,}327 - j \cdot 0{,}509; \quad \lambda_3 = 1.$$

Комплексные корни λ_1 и λ_2 представим в показательной форме

$$\lambda_1 = e^{-0{,}5 + j\cdot 1{,}0}; \quad \lambda_2 = e^{-0{,}5 - j\cdot 1{,}0}.$$

Далее найдем константы γ_1 и γ_2

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= -\frac{1}{T_1} = \frac{\ln\lambda_1}{\Delta t} = \frac{-0{,}5 + j\cdot 1{,}0}{5} = -0{,}1 + j\cdot 0{,}2;\\ \gamma_2 &= -\frac{1}{T_2} = \frac{\ln\lambda_2}{\Delta t} = \frac{-0{,}5 - j\cdot 1{,}0}{5} = -0{,}1 - j\cdot 0{,}2\end{aligned}\right\} \qquad (2.53)$$

$$(\alpha = -0{,}1;\ \beta = 0{,}2).$$

Остается вычислить статический коэффициент передачи k. Это легко сделать, подставив в решение дифференциального уравнения координаты произвольной точки кривой разгона и вычисленные константы α и β. Возьмем, например, точку $t = \Delta t = 5 мин$, $\Delta\theta(\Delta t) = \Delta\theta_1 = 29{,}3$

$$\Delta\theta = k\cdot 1\cdot\left[1 + e^{\alpha t}\cdot\left(-\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)\right]$$

или $29{,}3 = k\cdot 1\cdot\left[1 + e^{-0{,}1\cdot 5}\cdot\left(-\cos 0{,}2\cdot 5 + \frac{-0{,}1}{0{,}2}\cdot\sin 0{,}2\cdot 5\right)\right]$,

откуда найдем $k = 70\ \ \frac{град}{м/час}$.

Искомое численное уравнение колебательного объекта будет иметь вид

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + 0{,}2\cdot\frac{d\theta}{dt} + 0{,}05\cdot\Delta\theta = 0{,}05\cdot 70\cdot\upsilon \qquad (2.54)$$

где $\upsilon = м/час; \Delta\theta = {}^0C; [t] = мин;$

Собственная частота объекта

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma_1\cdot\gamma_2} = 0{,}224 рад/мин; \qquad (2.55)$$

Коэффициент демпфирования

$$\varepsilon = \frac{-\lambda_1 - \lambda_2}{2\cdot\omega_0} = \frac{0{,}2}{2\cdot 0{,}234} = 0{,}45. \qquad (2.56)$$

При распространении этого приема на системы более высокого порядка общая схема метода остается аналогичной.

2.2.4 Определение передаточной функции объекта по кривой разгона

Этот вопрос рассмотрим применительно к конкретному объекту. Например, в доменную печь вдувают обогащенный кислородом воздух, который предварительно нагревают до 1000 - 1200^0C. Упрощенная схема нагрева показана на рис. 2.5, *а*.

Исходный поток холодного дутья делится на две части: одна проходит воздухонагреватель 1, другая – регулирующий дроссель 2, не нагреваясь. Затем обе части перед поступлением в печь объединяются, и температура их усредняется. Для стабилизации этой температуры θ, регулирующая часть

автоматической системы, передвигает в ту или иную сторону дроссель 2. Таким образом, входной величиной объекта является положение μ дросселя, выходной – температура горячего дутья θ. На рис. 2.5,б приведена экспериментальная кривая разгона объекта, соответствующая изменению входа $\Delta\mu = 5\%$.

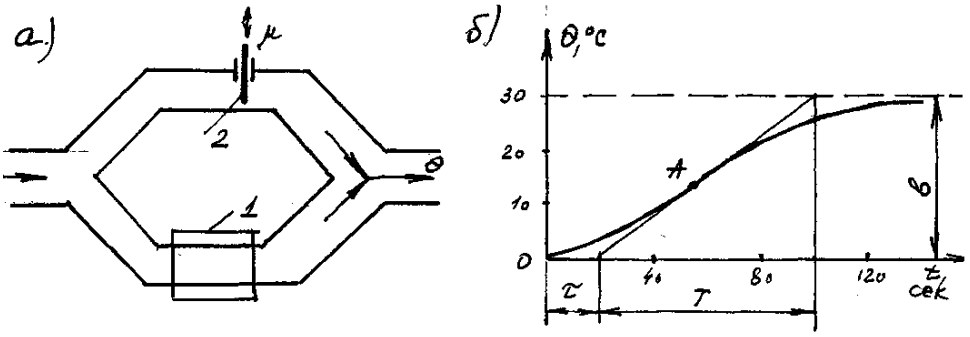


Рис. 2.5 Схема нагрева дутья в печь (а), кривая разгона при нагреве дутья (б)

Определим численную передаточную функцию объекта

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\mu(p)}.$$

На практике объекты с такой кривой разгона часто аппроксимируют инерционным звеном с запаздыванием, т.е.

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\mu(p)} = \frac{k_{об}}{Tp+1} \cdot e^{\tau \cdot p}. \qquad (2.57)$$

Если ценить не только точность, но и простоту, то эту аппроксимацию можно считать одной из самых удобных.

В точке наибольшего наклона кривой разгона A приводит касательную до пересечения с осью времени и асимптотой, к которой стремится кривая разгона. Затем измеряют τ, T и $k_{об}$ как показано на рис. 2.5, б. Для заданного частного случая $\tau = 20$ сек; $T = 80$ сек; $k_{об} = \frac{b}{\Delta\mu} = \frac{30^0 C}{5\%_{хода}} = 6^\circ C / \%хода$.

Передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\mu(p)} = \frac{6}{80p+1} \cdot e^{-20 \cdot p}, \qquad (2.58)$$

где $[\theta] = {}^0 C$; $[\mu] = \%_{хода}$; $[T] = сек$.

Для ускорения определения постоянных и сокращения объема вычислительных работ, известны различные графо-аналитические методы.

На рис. 2.6, *а* приведена номограмма, позволяющая быстро определить две постоянные времени двухемкостного объекта на его кривой разгона следующим образом. На кривой разгона (рис.2.6, *б*) находится точка перегиба A, а затем отрезки T' и T. По обеим осям номограммы откладываются

отрезки $\frac{T'}{T}$, концы их соединяют прямой. Координаты точек пересечения прямой с графиком номограммы обозначим через *а* и *в*. Из-за симметрии безразлично, какую из точек пересечения принять во внимание.
Затем искомые постоянные времени находятся из соотношений

$$T_1 = a \cdot T, \quad T_2 = в \cdot T. \qquad (2.59)$$

При $\frac{T'}{T} = 0{,}73$ прямая касается кривой номограммы и $T_1 = T_2 = 0{,}365 \cdot T$.

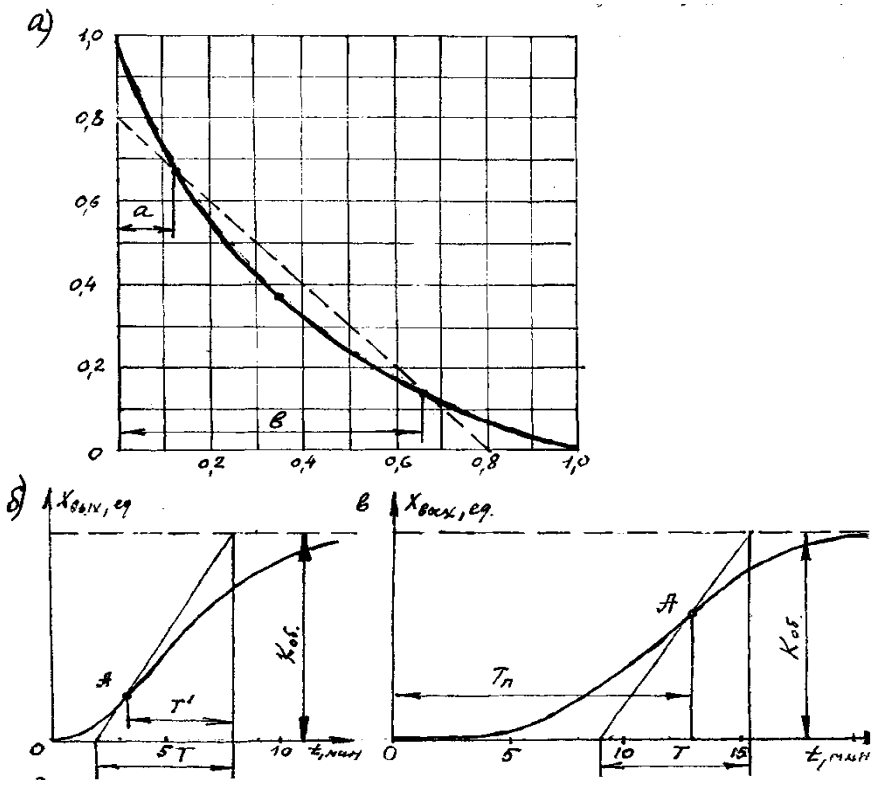


Рис. 2.6 Определение постоянных времени двухемкостного звена по номограмме

Если $\frac{T'}{T} < 0{,}73$, то прямая не пересечет график номограммы, что говорит о том, что система не может быть аппроксимирована двумя звеньями первого порядка. В этом случае объект аппроксимируют двумя инерционными звеньями с постоянными времени T_1, T_2 и звеном запаздывания τ и берут

$$T_1 = T_2 = 0{,}365 \cdot T; \quad \tau = T_П - 0{,}365 \cdot T \qquad (2.60)$$

Рассмотрим применение графоаналитического метода для определения передаточных функции объектов по их кривым разгона, на рис. 2.6, *б* и *в*.

Для рис. 2.6, *б* имеем $T = 6$ *мин*, $T' = 4{,}8$*мин*, $\frac{T'}{T} = 0{,}8$. Откладываем отрезок 0,8 по осям номограммы (рис. 2.6, *а*). Концы отрезков соединяем прямой штриховой линией. Координаты точек пересечения (любой): $a = 0{,}67$; $b = 0{,}13$. Постоянные времени аппроксимируемых звеньев: $T_1 = T \cdot a = 6 \cdot 0{,}67 = 4{,}02$*мин*, $T_2 = T \cdot в = 6 \cdot 0{,}13 = 0{,}78$*мин*.

Передаточная функция объекта

$$\frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{к_{об}}{(T_1 \cdot p + 1)\cdot(T_2 \cdot p + 1)} = \frac{к_{об}}{(4{,}02 \cdot p + 1)\cdot(0{,}78 \cdot p + 1)}.$$

По кривой разгона (рис. 2.6, в) имеем $T = 6{,}6\,мин$; $T_П = 13\,мин$;

$T_1 = T_2 = 0{,}365 \cdot T = 0{,}365 \cdot 6{,}6 = 2{,}4\,мин$; $\tau = T_П - 0{,}365 \cdot T = 13 - 2{,}4 = 10{,}6\,мин$.

Передаточная функция объекта получается в виде

$$\frac{x_{вых}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{к_{об} \cdot e^{-p\tau}}{(T_1 \cdot p + 1)\cdot(T_2 \cdot p + 1)} = \frac{к_{об} \cdot e^{-10{,}6p}}{(2{,}4 \cdot p + 1)^2},$$

где [t]= мин.

2.2.5 Определение порядка уравнения объекта по кривой разгона

При рассмотрении предыдущих задач мы исходили из предположения, что порядок уравнения, описывающего поведение системы, известен. Для точного определения порядка уравнения по переходной функции воспользуемся следующим положением: если график кривой есть сумма n экспонент и разбит равноотстоящими ординатами, то каждая их них есть одна и та же линейная комбинация из n предыдущих ординат. Другими словами, любая ордината получается из n предыдущих по линейной рекуррентной формуле с постоянной шкалой. Одно из доказательств этого вытекает из эквавалентирования разностных и дифференциальных уравнений. Кривая разгона объекта n-го порядка содержит n экспонент. Можно, не зная самих этих экспонент, число их определить следующим образом. Из графика кривой разгона необходимо предварительно вычесть установившуюся составляющую $x'_{\substack{cm \\ t\to\infty}}$, а затем взять равноотстоящие на произвольный интервал последовательные ординаты x_1, x_2, …. Допустим, что число n известно, тогда справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= A_1 \cdot x_n + A_2 \cdot x_{n-1} + ... + A_n \cdot x_1, \\ x_{n+2} &= A_1 \cdot x_{n+1} + A_2 \cdot x_n + ... + A_n \cdot x_n, \\ &и.т.д. \end{aligned}\right\} \qquad (2.61)$$

Любые n из них составляют систему из n линейных уравнений с неизвестными $A_1,..., A_n$. Определитель этой системы не равен нулю

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & ... & x_1 \\ x_{n+1} & x_n & ... & x_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{2n-1} & x_{2n-2} & ... & x_n \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.62)$$

Представим теперь, что истинный порядок уравнения равен n, но мы ошибочно взяли его равным $n+1$. Определитель из $n+1$ уравнений

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} x_{n+1} & x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ x_{n+2} & x_{n+1} & x_n & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2n+1} & x_{2n} & x_{2n-1} & \dots & x_{n+1} \end{vmatrix}=0 \qquad (2.63)$$

равен нулю, т.к. между его столбцами существует линейная зависимость: первый столбец, например, получается как линейная комбинация остальных по формуле (2.61). Все последующее определители Δ_{n+2}, Δ_{n+3} равны нулю по той же причине. Предыдущие определители равны нулю быть не могут.

Из изложенного выше вытекает правило (критерий) для определения неизвестного числа n : по равноотстоящим ординатам кривой разгона последовательно вычисляются определителем $_i\Delta$ $(i=1,2,3....)$, первый обращающийся в нуль определитель указывает число n, которое на единицу меньше порядка этого определителя.

2.3 Определение уравнений объектов частотными методами

2.3.1 Нахождение передаточной функции объекта по его экспериментальным частотным характеристикам

Экспериментально частотные характеристики получают путем подачи на вход объекта гармонических колебаний $X_{вх}(t)=A_{вх}\cdot\sin\omega_i t$ на различных пробных частотах ω_i и регистрации ответных установившихся колебаний на выходе объекта $X_{вых}(t)=A_{вых}\cdot\sin(\omega_i t+\varphi)$.

По результатам эксперимента определяют амплитудную $A(\omega_i)=\frac{A_{вых}(\omega_i)}{A_{вх}(\omega_i)}$ и фазовую $\varphi(\omega_i)$частотные характеристики объекта.

Частотные характеристики широко используются для анализа и синтеза систем регулирования, но они также позволяют получить уравнения объектов. В литературе известны ряд таких методов. Рассмотрим один их них.

Для нахождения передаточной функции некоторой цепи технологических аппаратов определили экспериментально частотные характеристики цепи – амплитудную $A(\omega_i)$ и фазовую $\varphi(\omega_i)$.

Таблица 2. 4

Результаты эксперимента

ω_i, рад/мин	$2\cdot10^{-1}$	$5\cdot10^{-1}$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	и т.д.
$P(\omega_i)$ Погрешность, %	0,45 0,5	0,261 0,5	0,1 0,0	0,37 1,6	0,5 0,0	0,47 0,7	0,39 0,2	0,317 0,5	и т.д.
$Q(\omega_i)$ Погрешность, %	-0,136 0,5	-0,2 0,5	0,0 0,0	0,17 1,7	0,0 0,0	-0,15 1,3	-0,224 0,6	-0,256 0,5	и т.д.

Входная величина объекта $X_0(t)$, а выходная $-X(t)$. Результаты эксперимента приведены в табл. 2.4. В нем записаны не $A(\omega_i)$ и $\varphi(\omega_i)$, а действительная $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$ мнимая частотные характеристики, вычисленные по формулам

$$\begin{aligned} P(\omega_i) &= A(\omega_i)\cdot\cos\varphi(\omega_i); \\ Q(\omega_i) &= A(\omega_i)\cdot\sin\varphi(\omega_i) \end{aligned} \qquad (2.64)$$

из известных $A(\omega_i)$ и $\varphi(\omega_i)$.

По этим данным необходимо вычислить передаточную функцию объекта.

Предположим, что исследуемая технологическая линия является динамической системой третьего порядка. Тогда передаточная функция системы третьего порядка имеет вид

$$W(p)=\frac{X(p)}{X_0(p)}=\frac{b_1\cdot p^2+b_2\cdot p+b_3}{p^3+a_1\cdot p^2+a_2\cdot p+a_3}\ . \qquad (2.65)$$

Задача сводится к вычислению коэффициентов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Заменой $p\to j\omega$ преобразуем $W(p)$ в $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$

$$W(j\omega)=\frac{-b_1\cdot\omega^2+jb_2\cdot\omega+b_3}{-j\omega^3-a_1\cdot\omega^2+ja_2\cdot\omega+a_3}=P(\omega)+jQ(\omega) \qquad (2.66)$$

откуда

$$-b_1\cdot\omega^2+jb_2\cdot\omega+b_3=\left(-j\cdot\omega^3-a_1\cdot\omega^2+ja_2\cdot\omega+a_3\right)\cdot\left[P(\omega)+jQ(\omega)\right]. \qquad (2.67)$$

Так как в отдельности должны быть равны действительные и мнимые количества, то последнее равенство распадается на следующие два:

$$-\omega^2\cdot b_1+b_3+P(\omega)\cdot\omega^2\cdot a_1+Q(\omega)\cdot\omega\cdot a_2-P(\omega)\cdot a_3=Q(\omega)\cdot\omega^3, \qquad (2.68)$$

$$\omega\cdot b_2+Q(\omega)\cdot\omega^2\cdot a_1-P(\omega)\cdot\omega\cdot a_2-Q(\omega)\cdot a_3=-P(\omega)\cdot\omega^3. \qquad (2.69)$$

Эти равенства справедливы при любых значениях частоты ω_i.

Подставляя в равенство (2.69) численные значения из табл. 2.4, при частотах ω_i=1,0; 2,0; 3,0; 4,0, получаем систему уравнений, линейных относительно неизвестных констант (коэффициентов):

$$\left.\begin{aligned} &1{,}0\cdot b_2+0{,}0\cdot a_1-0{,}1\cdot 1{,}0\cdot a_2+0{,}0\cdot a_3=-0{,}1\cdot 1{,}0\\ &2{,}0\cdot b_2+0{,}17\cdot 4{,}0\cdot a_1-0{,}37\cdot 2{,}0\cdot a_2-0{,}17\cdot a_3=-0{,}37\cdot 8{,}0\\ &3{,}0\cdot b_2+0{,}0\cdot a_1-0{,}5\cdot 3{,}0\cdot a_2+0{,}0\cdot a_3=-0{,}5\cdot 27{,}0\\ &4{,}0\cdot b_2-0{,}15\cdot 16{,}0\cdot a_1-0{,}47\cdot 4{,}0\cdot a_2+0{,}15\cdot a_3=-0{,}47\cdot 64{,}8 \end{aligned}\right\}, \qquad (2.70)$$

откуда вычисляем $b_2=1{,}0$, $a_1=5{,}89$, $a_2=11{,}0$, $a_3=4{,}85$.

Для вычисления оставшихся коэффициентов b_1 и b_3 в равенство (2.68) подставим числа из табл. 2.4 при ω_i = 1,0, 2,0 и вычисленные уже значения a_1, a_2, a_3

$$\begin{aligned} -b_1+b_3&=0{,}0\cdot 1^3-0{,}1\cdot 1{,}0\cdot 5{,}89-0{,}0\cdot 1\cdot 11{,}0+0{,}1\cdot 4{,}85,\\ -4{,}0\cdot b_1+b_3&=0{,}17\cdot 8{,}0-0{,}37\cdot 4{,}0\cdot 5{,}89-0{,}17\cdot 2{,}0\cdot 11{,}0+0{,}37\cdot 4{,}85, \end{aligned} \qquad (2.71)$$

откуда находим b_1 = 3,07, b_3 =2,96.

Для определения шести коэффициентов передаточной функции потребовалось четыре пробные частоты. Так как значения $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$ в таблице заданы не точно, то вычисленные коэффициенты отличаются от истинных.

Для их уточнения повторим вычисления при других частотах ω_i = 0,2; 0,5; 5,0; 6,0:

$$\left.\begin{aligned} &0{,}2\cdot b_2 - 0{,}136\cdot 0{,}04\cdot a_1 - 0{,}45\cdot 0{,}2\cdot a_2 + 0{,}136\cdot a_3 = 0{,}45\cdot 8\cdot 10^{-3} \\ &0{,}5\cdot b_2 - 0{,}2\cdot 0{,}25\cdot a_1 - 0{,}261\cdot 0{,}5\cdot a_2 + 0{,}2\cdot a_3 = -0{,}261\cdot 125\cdot 10^{-3} \\ &5{,}0\cdot b_2 - 0{,}224\cdot 25\cdot a_1 - 0{,}39\cdot 5{,}0\cdot a_2 + 0{,}224\cdot a_3 = -0{,}39\cdot 125{,}0 \\ &6{,}0\cdot b_2 - 0{,}256\cdot 36\cdot a_1 - 0{,}317\cdot 6{,}0\cdot a_2 + 0{,}256\cdot a_3 = -0{,}317\cdot 216{,}0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.72)$$

Откуда находим b_2 = 0,985, a_1 = 5,93, a_2 = 11,2, a_3 = 6,18.

При определении b_1 и b_3 для частот ω_i = 0,5;5,0 имеем

$$\left.\begin{aligned} &-0{,}25\cdot b_1 + b_3 = -0{,}20\cdot 0{,}125 - 0{,}261\cdot 0{,}25\cdot 5{,}93 + 0{,}20\cdot 0{,}5\cdot 11{,}2 + 0{,}261\cdot 6{,}18 \\ &-25{,}0\cdot b_1 + b_3 = -0{,}224\cdot 125{,}0 - 0{,}39\cdot 25{,}0\cdot 5{,}93 + 0{,}224\cdot 5{,}0\cdot 11{,}2 + 0{,}39\cdot 6{,}18 \end{aligned}\right\} \qquad (2.73)$$

Из них получим: b_1=2,96, b_3=3,06.

Усредненные значения коэффициентов по результатам двух расчетов равны:

$$a_1 = \frac{5{,}89 + 5{,}93}{2} = 5{,}91;\quad a_2 = \frac{11{,}0 + 11{,}2}{2} = 11{,}1;\quad a_3 = \frac{4{,}85 + 6{,}18}{2} = 5{,}515;$$

$$b_1 = \frac{3{,}07 + 2{,}96}{2} = 3{,}015;\quad b_2 \frac{1{,}0 + 0{,}985}{2} = 0{,}9925;\quad b_3 = \frac{2{,}96 + 3{,}06}{2} = 3{,}01.$$

Усредненный результат по первому и повторному расчетам получается в виде

$$W(p) = \frac{3{,}015p^2 + 0{,}9925p + 3{,}01}{p^3 + 5{,}91p^2 + 11{,}1p + 5{,}515}. \qquad (2.74)$$

Влияние случайных погрешностей экспериментального определения частотных характеристик можно уменьшить повторными вычислениями с привлечением большего числа пробных частот с последующими усреднениями.

Если бы в начале вычислений порядок объекта был завышен относительно заранее неизвестного истинного, то лишние коэффициенты при вычислениях получились бы равными (или почти равными) нулю, если занижен, то повторные вычисления при других пробных частотах дали бы значительно отличающиеся результаты.

Пусть, например, для тех же табличных данных ошибочно предположено, что объект имеет второй порядок

$$W(j\omega) = \frac{jb_1\cdot\omega + b_2}{-\omega^2 + ja_1\cdot\omega + a_2} = P(\omega) + jQ(\omega)\ . \qquad (2.75)$$

Для него искомые равенства запишутся в виде

$$b_2 + Q(\omega)\cdot\omega\cdot a_1 - P(\omega)\cdot a_2 = -P(\omega)\cdot\omega^2 \qquad (2.76)$$

$$\omega\cdot b_1 - P(\omega)\cdot\omega\cdot a_1 - Q(\omega)\cdot a_2 = -Q(\omega)\cdot\omega^2 \qquad (2.77)$$

Подставив в (2.77) табличные значения для трех частот ω_i=0,2; 0,5; 1, получим:

$$\left.\begin{aligned} &0{,}2\cdot b_1 - 0{,}45\cdot 0{,}2\cdot a_1 + 0{,}136\cdot a_2 = 0{,}136\cdot 0{,}04;\\ &0{,}5\cdot b_1 - 0{,}261\cdot 0{,}5\cdot a_1 + 0{,}2\cdot a_2 = 0{,}20\cdot 0{,}25;\\ &1{,}0\cdot b_1 - 0{,}1\cdot 1{,}0\cdot a_1 + 0{,}0\cdot a_2 = 0{,}0, \end{aligned}\right\}, \qquad (2.78)$$

откуда вычислим b_1=0,1875, a_1=1,875, a_2=1,004.

Подставляя одну из пробных частот ω_i=1,0 и вычисленные числа a_1, и a_2 в (2.76), получим

$$b_2 - 0{,}1\cdot 1{,}004 = -0{,}1\cdot 1{,}0 \text{ или } \quad b_2 = 0{,}0004 \qquad (2.79)$$

Повторные вычисления для других пробных частот ω_i=2,0; 3,0; 4,0 дают

$$b_1=2{,}59;\ a_1=5{,}18;\ a_2=9{,}62;\ b_2=0{,}10.$$

Такая весьма значительная разница в численных значениях коэффициентов, полученных при различных пробных частотах, говорит о занижении порядка объекта и ее нельзя отнести за счет погрешностей эксперимента. Поэтому следует, как это сделано, предположить в начале вычислений более высокий порядок объекта. В этом условном примере экспериментальные значения $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$ в табл. 2.4 взяты преднамеренно с ошибками ≈ 1 % – против точных значений, соответствующих контрольной передаточной функции.

$$W(p) = \frac{3p^2 + p + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

В общем случае для определения порядка объекта *n* можно составлять определители Δ_i из коэффициентов системы уравнений (2.70) при различных *n* = *i* = *1,2,.....*; при $i \le n_{ист}$ имеет место $\Delta_i \neq 0$, при $i \succ n_{ист}$ получается $\Delta_i = 0$.

При применении метода наименьших квадратов в систему (2.70) надо вводить больше уравнений, используя дополнительные пробные частоты. Получаемая при этом условная система преобразуется в нормальную, из которой определяются вероятнейшие значения коэффициентов. Аналогично надо поступать с системой (2.71).

2.3.2 Получение расширенных частотных характеристик по кривой разгона

Для получения расширенных частотных характеристик по кривой разгона используем экспериментальную ступенчатую переходную характеристику (рис. 2.7, а), по которой вычислим амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) объекта, а также расширенную АФЧХ при декременте затухания $2\cdot\pi\cdot m = 2\cdot\pi\cdot 0{,}22$.

Обычные частотные характеристики получаются при подаче на вход объекта гармонических колебаний постоянной амплитуды, а в случае расширенных амплитуда затухает по экспоненциальному закону

$$X_{вх} = A_{вх}\cdot e^{-m\cdot\omega t}\cdot \sin\omega t \rightarrow A_{вх}\cdot e^{-m\cdot\omega t}\cdot e^{j\cdot\omega t} \qquad (2.80)$$

Вызванные этим колебания выходной величины имеет ту же частоту и тот же декремент затухания $2 \cdot \pi \cdot m$, но будут отличаться по амплитуде и фазе, т.е.

$$X_{вых} = A_{вых} \cdot e^{-m \cdot \omega t} \cdot t^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (2.81)$$

Отношение

$$W(m, j\omega) = \frac{X_{вых}}{X_{вх}} = \frac{A_{вых}}{A_{вх}} \cdot e^{j\varphi} \quad (2.82)$$

называют расширенной АФЧХ; при $m = 0$ расширенная АФЧХ превращается в обычную. Здесь мы встречаемся со случаем перестроения кривой разгона объекта в его частотные характеристики.

Сущность одного из приближенных методов заключается в следующем.

Кривую разгона разбивают равноотстоящими ординатами и затем для объектов с самовыравниванием вычисления производят по формуле

$$W(m, j\omega) = B \cdot e^{j\alpha} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} e^{m \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} \cdot \Delta_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t) - j \sum_{k=0}^{n} e^{m \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} \cdot \Delta_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right], \quad (2.83)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ – номер ординаты ; Δt – интервал между ординатами; $\Delta_k = X_{вых_{к+1}} - X_{вых_к}$ – приращение ординаты в $к$-ом интервале; параметры B и α определяют из табл. 2.5.

При наличии чистого запаздывания τ формула дополняется

$$W(m, j\omega) = W(m, j\omega) \cdot e^{m \cdot \omega \cdot \tau} \cdot e^{-j\omega \cdot \tau}, \quad (2.84)$$

где $W(m, j\omega)$ берется из формулы (2.83).

На рис. 2.7, а интервал между ординатами равен Δt = 30 сек.

По графику определяем время чистого запаздывания τ = 30 сек. Измерим приращения ординат: Δ_0 =0,03; Δ_1 =0,12; Δ_2=0,18; Δ_3 =0,17; Δ_4 =0,15; Δ_5=0,11; Δ_6 =0,08; Δ_7 =0,07; Δ_8=0,04; Δ_9 =0,03; Δ_{10} =0,01.

Теперь следует приступить к вычислениям по формуле (2.84). Для вычисления обычной амплитудно-частотной характеристики нужно в формуле (2.84) принять $m = 0$ и, варьируя частоту $\omega_i = \omega_1, \omega_2, \ldots$, вычислить $W(j\omega_1)$, $W(j\omega_2)$ и т.д.

Для вычисления расширенных частотных характеристик в формуле (2.84) нужно варьировать m и n. Учитывая, что по условию задачи нужно построить только одну характеристику для $m = 0{,}22$ и далее, варьируя $\omega_i = \omega_1, \omega_2, \ldots$ найдем $W(0{,}22; j\omega_1)$; $W(0{,}22; j\omega_2)$ и т.д.

Пусть, например, $\omega_1 = 0{,}027$ *рад/сек*.

Из табл. 2.5 вначале определим B и α. Параметр $\frac{\omega_1 \cdot \Delta t}{\pi} = \frac{0{,}027 \cdot 30}{3{,}14} = 0{,}25$, из третьей строки табл. 2.5 при $m = 0{,}22$ находим B =1,13, α = - 22°. Далее нужно вычислить суммы $\sum_{k=0}^{n}$, стоящие в квадратных скобках выражения для $W(m, j\omega)$. Эти вычисления сведены в табл. 2.6. Они дают для точки при $m = 0{,}22$; $\omega_1 = 0{,}027$.

Таблица 2 5

Расчетные значения

$\frac{\omega \cdot \Delta t}{\pi}$	m	B	α	$\frac{\omega \cdot \Delta t}{\pi}$	m	B	α
0,031	0,0 0,22 0,37	1,0 0,97 0,95	$2^o\,48'$ $-1^o\,50'$ $-2^o\,10'$	0,500	0,00 0,22 0,37	1,115 1,312 1,46	$-45^o\,00'$ $-42^o\,20'$ $-40^o\,30'$
0,125	0,00 0,22 0,37	1,01 1,06 1,09	$-11^o\,15'$ $-12^o\,36'$ $-12^o\,36'$	0,750	0,00 0,22 0,37	1,275 1,538 1,79	$-67^o\,30'$ $-63^o\,00'$ $-58^o\,20'$
0,25	0,00 0,22 0,37	0,02 1,13 1,18	$-22^o\,30'$ $-22^o\,00'$ $-20^o\,54'$	0,875	0,00 0,22 0,37	1,384 1,86 2,185	$-78^o\,45'$ $-70^o\,00'$ $-64^o\,00'$
0,375	0,00 0,22 0,37	1,07 1,204 1,29	$-33^o\,45'$ $-32^o\,20'$ $-31^o\,20'$	1,00	0,00 0,22 0.37	1,57 2,145 2,545	$-90^o\,00'$ $-77^o\,40'$ $-69^o\,00'$

$$\sum_{k=0}^{10} e^{m\cdot k\cdot \omega\cdot \Delta t}\Delta_k \cdot \cos k\cdot \omega\cdot \Delta t = -0{,}200;$$

$$\sum_{k=0}^{10} e^{m\cdot k\cdot \omega\cdot \Delta t}\Delta_k \cdot \sin k\cdot \omega\cdot \Delta t = 0{,}169.$$

Получаем

$$W(0{,}22;\, j0{,}027) = 1{,}13\cdot e^{-j22^\circ}\cdot(-0{,}200 - j0{,}169).$$

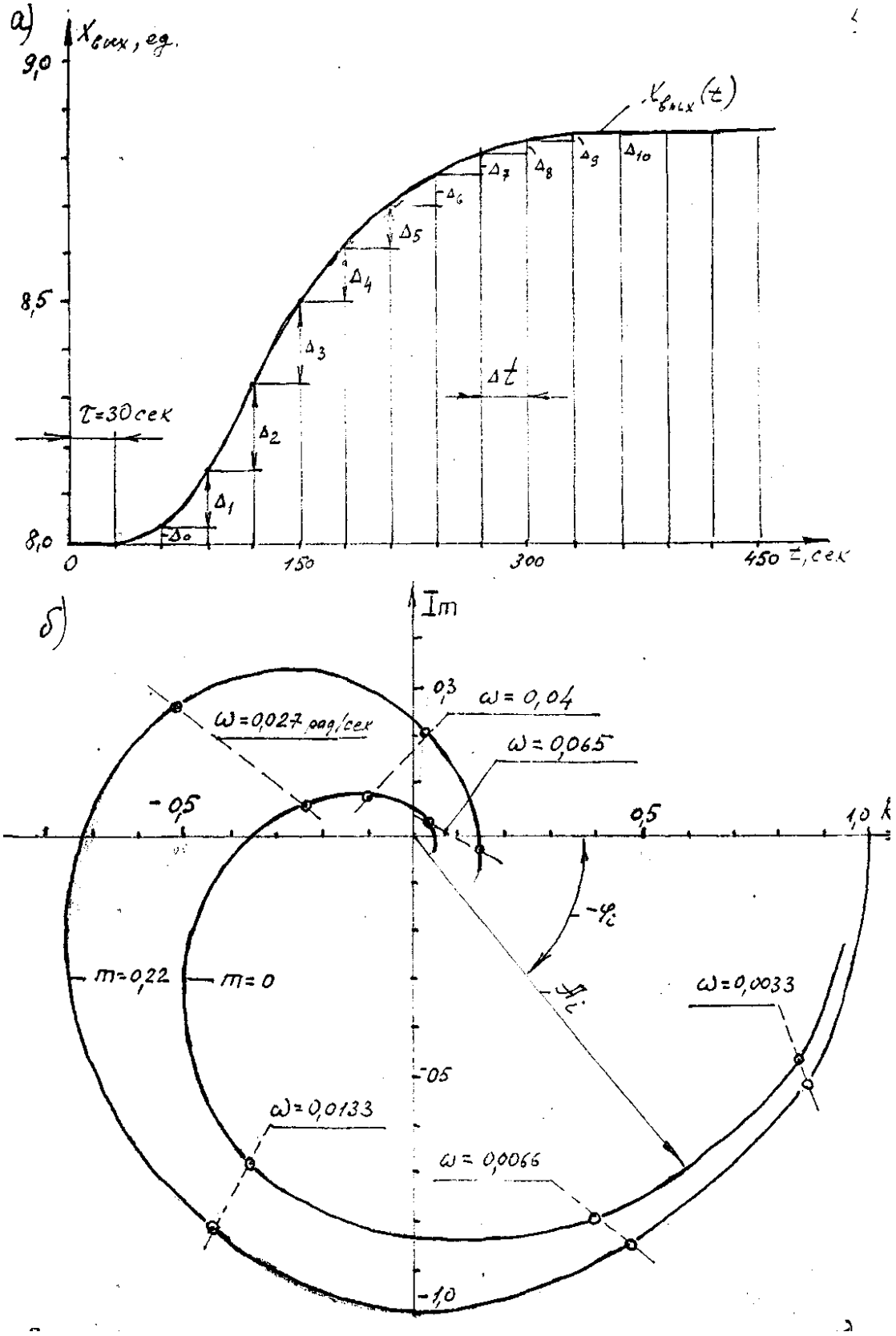


Рис. 2.7. Построение расширенной АФЧХ
по кривой разгона

Таблица 2.6

Расчетные значения

k	Δ_k	$a = e^{0,22 \cdot k \cdot 0,027 \cdot 30}$	$b = \cos k \cdot 0,027 \cdot 30$	$c = \sin k \cdot 0,027 \cdot 30$	$a \cdot \Delta_k \cdot b$	$a \cdot \Delta_k \cdot c$
0	0,03	1.00	1,00	0,00	0,035	0,000
1	0,12	1,19	0,71	0,71	0,102	0,102
2	0,18	1,42	0,00	1,00	0,000	0,251
3	0,17	1,69	-0,71	0,71	-0,206	0,206
4	0,15	2,00	-1,00	0,00	-0,297	0,000
5	0,11	2,39	-0,71	-0,71	-0,191	-0,191
6	0,08	2,84	0,00	-1,00	0,000	-0,230
7	0,07	3,37	0,71	-0,71	0,131	-0,131
8	0,04	4,02	1,00	0,00	0,147	0,000
9	0,03	4,76	0,71	0,71	0,079	0,079
10	0,01	5,70	0,00	1,00	0,000	0,083
					$\sum_{\kappa=0}^{10} = -0,200$	$\sum_{\kappa=0}^{10} = 0,169$

Теперь необходимо учесть чистое запаздывание. Для последующей подстановки в формулу (2.84) вычислим

$$e^{m \cdot \omega_1 \tau} \cdot e^{-j \cdot \omega_1 \cdot \tau} = e^{0,22 \cdot 0,027 \cdot 30} \cdot e^{-j \cdot 0,027 \cdot 30} = 2,00 \cdot e^{-j \cdot 0,81 рад} = 2,00 \cdot e^{-j \cdot 46^\circ}$$

Таблица 2.7

Расчетные значения

ω, *рад/сек*	0,0033		0,0066		0,0133		0,027		0,04		0,065	
M	0,0	0,22	0,0	0,22	0,00	0,22	0,0	0,22	0,0	0,22	0,0	0,22
$A(m,\omega)$	0,96	1,0	0,88	0,97	0,77	0,94	0,24	0,59	0,12	0,2	0,12	0,15
$\varphi(m,\omega)$, град	331	329	296	298	242	236	166	153	144	84	37	351

В результате для $\omega_1 = 0,027$ *рад/сек*, $m = 0,22$ получаем с учетом запаздывания

$$W_{çàï} = (0,22;\ j0,027) = 1,13 \cdot e^{-j22^\circ} \cdot (-0,200 - j0,169) \cdot 2,00 \cdot e^{-j46^\circ} =$$

$$= 2,26 \cdot e^{-j68^\circ} \cdot (-0,200 - j0,169) = 2,26 \cdot e^{-j68^\circ} \cdot \sqrt{(0,20)^2 + (0,169)^2} \cdot e^{jarctg\frac{0,169}{0,200}} = 0,59 \cdot e^{-j207^\circ},$$

где $A(m,\omega) = \frac{A_{вых}}{A_{вх}} = 0,59$; $\varphi(m,\omega) = -207^\circ$ (при $m = 0,22$; $\omega = 0,027$).

Аналогично вычисляются значения частотных характеристик при других частотах. Результаты вычислений по заданной кривой разгона приведены в табл. 2.7. Размерность А равна отношению размерностей выхода и входа объекта. На рис. 2.7, б даны графические изображения искомых АФЧХ (обычной и расширенной).

2.4 Определение математической модели объекта методами статистической динамики

При нормальном стационарном режиме работы входная величина объекта не остается неизменной во времени, а получает приращения случайного характера $X_1(t)$. Выходная величина также получает приращения случайного характера $X_2(t)$. Можно допустить, что ответные приращения выходной величины обусловлены приращениями входной. Тогда между теми и другими существует статистическая связь, определяемая уравнением Винера-Хопфа.

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot R_1(\tau - t) \cdot dt. \qquad (2.85)$$

Здесь $h(t)$ есть импульсная переходная функция объекта – реакция на импульсное изменение входа. Величины

$$\left.\begin{aligned} R_1(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} X_1(t) \cdot X_1(t+\tau) \cdot dt; \\ R_{21}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} X_1(t) \cdot X_2(t+\tau) \cdot dt \end{aligned}\right\} \qquad (2.86)$$

являются автокорреляционной функцией входного $X_1(t)$, и взаимокорреляционной функцией выходного $X_2(t)$ и входного $X_1(t)$ случайных процессов. Зная R_1 и R_{21}, можно вычислить динамическую характеристику объекта $h(t)$. Определение R_1 и R_{21} проводится по результатам экспериментальных наблюдений над объектом, для чего регистрируются и затем обрабатываются процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Пример вычисления автокорреляционной функции (АКФ) $R_1(t)$ и взаимокорреляционной функции (ВКФ) R_{21} рассмотрен ниже. Отличие в вычислении R_{21} заключается в следующем. В таблицу вычислений (см. табл. 2.8) взамен одного столбца $X_1(t)$ вносят два столбца: $X_1(t)$ и $X_2(t)$. И если при вычислении АКФ столбец $X(t)$ сдвигался относительно самого себя, то в случае ВКФ столбец $X_2(t)$ сдвигается относительно столбца $X_1(t)$. Остальные вычисления проводятся аналогично, по формуле (2.86). Определение АКФ и ВКФ позволяют определить динамическую характеристику объекта (импульсную переходную функцию, спектральные плотности).

2.4.1 Вычисление автокорреляционной функции

Для оценки погрешностей измерения температуры с помощью исследуемого прибора произвели регистрацию в течение 2,5 ч. температуры в термостате. Если величина последней поддерживалась строго постоянной и была заранее известна, тогда отклонения показаний прибора от этого контрольного уровня, обозначаемое $n(t)$, ^{0}C, записаны в таблицу с интервалом

времени $\Delta = 3$ мин (третий столбец табл. 2.8). Необходимо, рассматривая погрешность $n(t)$ как стационарный случайный процесс, вычислить значения АКФ $R_n(t)$ для трех значений аргумента $\tau = 0, \tau = 3, \tau = 30$ мин. Следует отметить, что в этом примере случайные отклонения $n(t)$ от среднего значения $\bar{n}(t)$ подобраны так, что все они в совокупности удовлетворяют гауссову нормальному распределению вероятностей.

АКФ процесса $n(t)$ определяется интегралом

$$R_n(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} n(t) \cdot n(t+\tau) \cdot dt \,. \qquad (2.87)$$

В практических расчетах промежутки интегрирования берут не бесконечным

$$R_n(\tau) \approx \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} n(t) \cdot n(t+\tau) \cdot dt \qquad (2.88)$$

и само вычисление интеграла осуществляют приближенно. О выборе величины T и других моментах обработки и подготовки экспериментальных данных подробно рассмотрено в [10].

Промежуток интегрирования разбивается на N малых интервалов Δ. Для рассматриваемой задачи выбрано Δ = 3мин, а N = 50. Придают t и τ дискретные значения, кратные Δ:

$$\tau = k \cdot \Delta, \quad k = 0,1,2,3,\ldots.;$$

$$t = k_1 \Delta, \quad k_1 = 1,2,3\ldots.$$

Тогда интеграл заменяется суммой

$$R_n(\tau) = R_n(k \cdot \Delta) \approx \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{k_1=-N}^{N} n(k_1\Delta) \cdot n[(k_1 + k) \cdot \Delta]. \qquad (2.89)$$

Рассматривая только положительный промежуток T и учитывая, что при $k_1 > N$ имеем $k \cdot n \cdot [(k_1 + k) \cdot \Delta] = 0$, тогда

$$R(k \cdot \Delta) \approx \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{k=1_1}^{N-k} n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n[(k_1 + k) \cdot \Delta].$$

$$R(k \cdot \Delta) \approx \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{k_1=1}^{N} n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n[(k_1 + k) \cdot \Delta].$$

В табл. 2.8 по этой формуле вычислены значения нецентрированной корреляционной функции $R_H(0), R_H(3)$ и $R_H(30)$.

При $\tau = 0$ имеем $k = 0$ и $R_H(0) = \frac{1}{50} \cdot \sum_{k_1=1}^{50} n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n(k_1 \cdot \Delta) = \frac{1}{50} \sum_{k_1}^{50} n^2(k_1 \cdot \Delta),$

т.е. нужно вычислить квадраты чисел, стоящих в третьем столбце и сложить их, и сумму $\sum = 125654$ разделить на 50. Это сделано в четвертом столбце, получилось $R_H(0) = 2513, \left({}^0C\right)^2$. В пятый столбец внесены значения $n(t+3)$, для этого третий столбец передвинуть вверх на один шаг Δ. В шестом столбце вычислены произведения $n(t) \cdot n(t+3) = n(k_1 \cdot \Delta) \cdot n(k_1 \cdot \Delta + 3)$ при $k_1 = 1,2,3,\ldots$, N−1 и

найдена их сумма $\sum 123005,$ которая при деление на N−1 = 49 дает искомое число $R_H(3) = 2510, \left({}^0C\right)^2$. В седьмом столбце записаны значения $n(t+30) = n(t+10\Delta);$ для этого третий столбец сдвинут вверх на 10 шагов Δ. Далее вычислены произведения $n(t)\cdot n(t+30) = n(k_1\cdot\Delta)\cdot n(k_1\cdot\Delta+30)$ при $k_1 = 1,2,3,\ldots,$ N−10 и их сумма $\sum = 100151,$ которая при делении на N−10 = 40 дает $R_H(30) = 2504, \left({}^0C\right)^2$.

Итак, получены $R_H(0) = 2513;\quad R_H(3) = 2510; R_H(30) = 2504,\quad \left({}^0C\right)^2$ для которых исходным материалом для вычислений служил сигнал $n(t)$ в третьем столбце.

Расчетные значения

Таблица 2.8

k_1	*t, мин*	$n(t)==n(k_1 f \Delta), {}^{0}\tilde{N}$	$n^2(t)$	$n(t+\Delta)==n(t+3)$	$n(t)_{\epsilon} n(t+3)$	$n(t+10\Delta)==n(t+30)$	$n(t)_{\epsilon}\ n(t+30)$
1	0,0	51,0	2601	50,0	51,0ž50,0 = 2546	38,0	51,0ž38,0 = 1935
2	3,0	50,0	2500	54,0	50,0ž54,0 = 2700	46,0	50,0ž46,0 = 2300
3	6,0	54,0	2916	52,0	54,0ž52,0 = 2802	47,5	54,0ž47,5 = 2562
4	9,0	52,0	2704	49,0	52,0ž49,0 = 2545	50,4	52,0ƒ50,4 = 2620
5	12,0	49,0	2401	49,0	49,0ž49,0 = 2400	49,5	29,0ƒ49,5 = 2424
6	15,0	49,0	2401	51,5	49,0ž51,5 = 2520	53,0	49,0ž53,0 = 2594
7	18,0	51,5	2652	47,0	51,5ƒ47,0 = 2417	58,0	51,5ž58,0 = 2983
8	21,0	47,0	2209	45,0	47,0ž45,0 = 2112	56,5	47,0ž56,5 = 2655
9	24,0	45,0	2025	43,0	45,0ž43,0 = 1932	55,0	45,0ž55,0 = 2473
10	27,0	43,0	1849	38,0	43,0ž38,0 = 1633	52,0	43,0ž52,0 = 2234
11	30,0	38,0	1444	46,0	38,0ž46,0 = 1745	48,0	38,0ž48,0 = 1823
12	33,0	46,0	2116	47,5	46,0ž47,5 = 2182	49,5	46,0ž49,5 = 2275
13	36,0	47,5	2256	50,4	47,5ž50,4 = 2390	53,5	47,5ž53,5 = 2540
14	39,0	50,4	2540	49,5	50,4ž49,5 = 3490	57,0	50,4ž57,0 = 2870
15	42,0	49,5	2450	53,0	49,5ž53,0 = 2620	61,0	49,5ž61,0 = 3002
16	45,0	53,0	2809	58,0	53,0ž58,0 = 3070	54,5	53,0ž54,5 = 2883
17	48,0	58,0	3364	56,5	58,0ž56,5 = 3277	53,2	58,0ž53,2 = 3082
18	51,0	56,5	3192	55,0	56,5ž55,0 = 3103	50,5	56,5ž50,5 = 2850
19	53,0	55,0	3025	52,0	55,0ž52,0 = 2860	51,0	55,0ž51,0 = 2810
20	57,0	52,0	2704	48,0	52,0ž48,0 = 2492	48,5	52,0ž48,5 = 2520
21	60,0	48,0	2304	49,5	48,0ž49,5 = 2375	47,0	48,0ž47,0 = 2255
22	63.0	49,5	2450	53,5	49,5ž53,5 = 2646	52,0	49,5ž52,0 = 2570
23	66,0	53,5	2862	57,0	53,5ž57,0 = 3048	46,5	53,5ž46,5 = 2483
24	69,0	57,0	3249	61,0	57,0ž61,0 = 3475	39,5	57,0ž39,5 = 2250
25	72,0	61,0	3721	54,5	61,0ž54,5 = 3320	42,0	61,0ž42,0 = 2560
26	75,0	54,5	2970	53,2	54,5ž53,2 = 2895	47,5	54,5ž47,5 = 2587
27	78,0	51,2	2830	50,5	53,2ž50,5 = 2682	43,0	53,2ž43,0 = 2286
28	81,0	50,5	2550	51,0	50,5ž51,0 = 2575	49,0	50,5ž49,0 = 2473
29	84,0	51,0	2601	48,5	51,0ž48,5 = 2470	54,0	51,0ž54,0 = 2750

Продолжение таблицы 2.8

k_1	*t, мин*	$n(t)==n(k_1 f\ \Delta)$, $^{0}\tilde{N}$	$n^2(t)$	$n(t+\Delta)==n(t+3)$	$n(t)_{\epsilon} n(t+3)$	$n(t+10\ \Delta)==n(t+30)$	$n(t)_{\epsilon}\ n(t+30)$
30	87,0	48,5	2352	47,0	48,5*f*47,0 = 2280	62,0	48,5ž62,0 = 3000
31	90,0	47,0	2209	52,0	47,0ž52,0 = 2440	52,0	47,0ž52,0 = 2440
32	93,0	52,0	2704	46,5	52,0ž46,5 = 2420	50,0	52,0ž50,0 = 2600
33	96,0	46,5	2162	39,5	46,5ž39,5 = 1835	46,0	46,5ž46,0 = 2140
34	99,0	39,5	1560	42,0	39,5ž42,0 = 1660	42,0	39,5ž42,0 = 1658
35	102,0	42,0	1764	47,5	42,0ž47,5 = 1994	51,0	42,0ž51,0 = 2140
36	105,0	47,5	2256	43,0	47,5ž43,0 = 2040	55,0	47,5ž55,0 = 2650
37	108,0	43,0	1849	49,0	43,0ž49,0 = 2105	49,6	43,0ž49,6 = 2130
38	111,0	49,0	2401	54,0	49,0ž54,0 = 2642	43,0	49,0ž43,0 = 2104
39	114,0	54,0	2916	63,0	54,0ž62,0 = 3346	46,0	54,0ž46,0 = 2480
40	117,0	68,0	3844	58,0	62,0ž52,0 = 3220	51,0	62,0ž51,0 = 3160
41	120,0	52,0	2704	50,0	52,0ž50,0 = 2596		52,0ž0,00 = 0,00
42	123,0	50,0	2500	46,0	50,0ž46,0 = 2300		50,0ž0,00 = 0,00
43	126,0	46,0	2116	42,0	46,0ž42,0 = 1930		46,0ž0,00 = 0,00
44	129,0	42,0	1764	51,0	42,0ž51,0 = 2140		42,0ž0,00 = 0,00
45	132,0	51,0	2601	55,0	51,0ž55,0 = 2803		51,0ž0,00 = 0,00
46	135,0	55,0	3025	49,6	55,0ž49,6 = 2722		55,0ž0,00 = 0,00
47	138,0	49,6	2460	43,0	49,6ž43,0 = 2115		49,6ž0,00 = 0,00
48	141,0	43,0	1849	46,0	43,0*f*46,0 = 1975		43,0ž0,00 = 0,00
49	144,0	46,0	2116	51,0	46,0ž51,0 = 2340		46,0ž0,00 = 0,00
50	147,0	51,0	2601	0,00	51,0ž0,00 = 0,000		51,0ž0,00 = 0,00
			$\sum = 125654$ $R_H(0) = \frac{1}{50}\sum = 2513$		$\sum = 123005$ $R_H(3) = \frac{1}{49}\sum = 2510$		$\sum = 100151$ $R_H(30) = \frac{1}{40}\sum = 2504$

2.4.2 Вычисление математического ожидания центрированной АКФ, среднеквадратичного отклонения и эквивалентной спектральной плотности случайного сигнала

Для АКФ найденной выше $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_H(\tau) = 2500,\ \left({}^0C\right)^2$ определим математическое ожидание $\bar{n}$ случайного процесса $n(t)$, центрированную АКФ $R_Ц(\tau)$ при $\tau = 0$ и $\tau = 3$ мин процесса $n(t) - \bar{n}$ и среднеквадратичное отклонение σ_n для центрированной погрешности $n_Ц(t) = n(t) - \bar{n}$.

Для этого рассмотрим выражение

$$R_H(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} \left[\bar{n} + n_Ö(t)\right] \cdot \left[\bar{n} + n_Ö(t+\tau)\right] \cdot dt =$$

$$= \bar{n}^2 + \bar{n} \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} \left[n_Ö(t) + n_Ö(t+\tau)\right] \cdot dt +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} n_Ö(t) \cdot n_Ö(t+\tau) dt.$$

Второе слагаемое равно нулю, а третье есть центрированная АКФ $R_Ц(\tau)$, поэтому получим равенство

$$R_H(\tau) = \overline{n^2} + R_Ц(\tau). \qquad (2.90)$$

При $\tau \to \infty$ АКФ центрированных случайных процессов стремятся к нулю, т.е. $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_H(\tau) = n^2 + 0$. Так как по условию данной задачи $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_H(\tau) = 2500,\ \left({}^0C\right)^2$, следовательно, $\bar{n} = \sqrt{\lim\limits_{\tau\to\infty} R_H(\tau)} = \sqrt{2500} = +50^0 C.$

Знак плюс берется потому, что в табл. 2.8 преобладают исключительно положительные отклонения $n(t)$. Затем по известной величине $\overline{n^2} = 2500$ и известным (см.выше) $R_H(0) = 2513;\ \ R_H(3) = 2510$ определим

$R_ц(0) = R_н(0) - \overline{n^2} = 2513 - 2500 = 13\ ({}^0C)^2$,

$R_ц(3) = R_н(3) - \overline{n^2} = 2510 - 2500 = 10\ ({}^0C)^2$.

Величина $R_ц(0) = 13$ есть дисперсия центрированной случайной величины $n_ц(t)$, среднеквадратичное отклонение её $\sigma_H = \sqrt{R_Ц(0)} = \sqrt{13} = 3{,}6^0 C$.

Итак, можно считать, что случайная величина $n(t)$ содержит постоянную $\bar{n} = +50^0 C$ и случайную с $\sigma_n = 3{,}6^0 C$ составляющие.

Считая, что аналитическое выражение для $R_ц(\tau)$ относится к виду $\sigma_n^2 \cdot e^{-\beta^2 \cdot \tau^2}$, получим численные выражения для $R_ц(\tau)$ и для эквивалентной спектральной плотности $S_n(\omega)$.

Для определения констант σ_n^2 и β^2 используем следующие равенства:

$$R_ц(0) = \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta^2 \cdot 0} = 13;\ \ R_ц(0) = \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta^2 \cdot 3^2} = 10.$$

Откуда σ_n^2=13 и $\beta^2 = -\frac{1}{3^2}\ln\frac{10}{13} = 0{,}029$ или σ_n=3,6 ^0C и β=0,17 рад/мин. Тогда искомое аналитическое выражение для $R_ц(\tau)$ имеет вид

$R_ц(\tau) = 13 \cdot e^{-0{,}029\cdot\tau^2}$; $[R_Ц(\tau)] = (^0C)^2$; $[\tau] = мин$.

Перейдем к нахождению спектральной плотности.

Для однократных измерений случайная величина n оценивается математическим ожиданием $\bar{n}$, m_n и распределением вероятностей $f(n)$. При многократных, а также непрерывных измерениях случайный стационарный $n(t)$ процесс характеризуется или функцией корреляции

$$R_n(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} n(t)\cdot n(t+\tau)\cdot dt,$$

или эквивалентной спектральной плотностью $S_n(\omega)$, являющейся преобразованием Фурье от функции корреляции:

$$S_Ц(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Ц(\tau)\cdot\cos\omega\tau\cdot d\tau \qquad (2.91)$$

Для рассматриваемого примера

$$S_Ц(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma_n^2\cdot e^{-\beta^2\cdot\tau^2}\cdot\cos\omega\tau\cdot d\tau = \frac{\sigma_n^2\cdot\sqrt{\pi}}{\beta}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} = \frac{13\sqrt{\pi}}{0{,}17}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\cdot 0{,}029}} = 136\cdot e^{-8{,}64\omega^2};$$

$[S_ц(\omega)] = (^0C)^2\cdot мин$; $[\omega] = рад/мин$.

Физический смысл спектральной плотности объясняется теоремой Рэлея и легко выясняется при рассмотрении электрических сигналов $n(t)$ – напряжения или тока. Величина

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\cdot d\omega = 2\cdot\int_{0}^{\infty} S_n(\omega)\cdot d\omega$$

есть полная электрическая мощность, выделяющаяся на сопротивлении

в 1 Ом. Величина $2\cdot\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_n(\omega)\cdot d\omega$

есть мощность сигнала $n(t)$ в полосе частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Другими словами спектральная плотность характеризует плотность распределения мощности по частотам гармонических составляющих сигнала $n(t)$. Это положение формально распространяется на любые, не только электрические, сигналы, однако эквивалент с физической мощностью имеет место не всегда. Если график $S(\omega)$ деформируется от горизонтальном прямой до импульса в начале координат, то соответствующий график $R(\tau)$, наоборот изменяется от импульса до горизонтальной прямой.

2.4.3 Вычисление импульсной переходной функции

На исследуемом объекте в течение некоторого промежутка времени регистрировали в стационарном режиме его работы отклонения от среднего значения входной $x_1(t)$ и выходной $x_2(t)$ величин.

Далее вычислим АКФ и ВКФ (см.п.2.4.1), значения которых даны в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Расчетные значения

τ, мин	0	1	2	3	4	5	6	∞
$R_1(\tau)$	1,0	0,37	0,16	0,05	0,02	0,01	0,005	0,00
$R_{21}(\tau)$	0,20	0,47	0,39	0,26	0,14	0,06	0,03	0,00

Вычислим импульсную переходную функцию (ИПФ) объекта h(t).

Для решения этой задачи воспользуемся интегральным уравнением Винера-Хопфа (2.85)

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot R_1(\tau - t) \cdot dt .$$

Ограничиваясь конечными пределами интегрирования и учитывая, что h(t) = 0 при t<0, уравнение приближенно запишется в виде

$$R_{21}(\tau) \approx \int_{0}^{T} h(t) \cdot R_1(\tau - t) \cdot dt . \qquad (2.92)$$

Вычисление $h(t)$ по этому уравнению можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для этого, предварительно, интеграл необходимо заменить суммой

$$R_{21}(\tau) \approx \sum_{n=0}^{N} h(n \cdot \Delta) \cdot R_1(\tau - n \cdot \Delta) \cdot \Delta , \qquad (2.93)$$

где Δ – малые интервалы, на которые разбит промежуток интегрирования от 0 до T; n·Δ – дискретное время; N – общее число малых интервалов.

Последнее равенство должно удовлетворяться при любых значениях τ, в том числе при $\tau = \Delta, 2\Delta, \ldots, N \cdot \Delta$. Подставляя в него эти N значений τ, получим систему из N равенств, являющихся линейными алгебраическими уравнениями относительно неизвестных значений ИПФ $h(n \cdot \Delta)$, в дискретные моменты времени $t = \Delta, 2 \cdot \Delta, 3 \cdot \Delta, \ldots, N \cdot \Delta$ $(n=1,2,3,\ldots,N)$.

При $\tau = 0$ получим

$$\frac{1}{\Delta} R_{21}(0) = R_1(0)h(0) + R_1(-\Delta)h(\Delta) + R_1(-2\Delta)h(2\Delta) + \ldots + R_1(-N\Delta)h(N\Delta); \qquad (2.94)$$

при $\tau = \Delta$ получим

$$\frac{1}{\Delta} R_{21}(\Delta) = R_1(\Delta)h(0) + R_1(0)h(\Delta) + R_1(-\Delta)(2\Delta) + \ldots + R_1\left[(-N+1)\Delta\right] \cdot h(N\Delta). \qquad (2.95)$$

Аналогично, фиксированием τ и варьированием t, получаются остальные строки системы линейных уравнений.

Учитывая, что $R_1(\tau)=R_1(-\tau)$, можно ограничиться рассмотрением $\tau>0$.

В реальных объектах всегда $h(0)=0$, и первые члены правых частей строк можно отбросить. Для сохранения диагональной симметрии определителя системы, при этом, иногда передвигают на один шаг $R_{21}(\tau)$, т.е. берут $R_{21}(\Delta)$ вместо $R_{21}(0)$, $R_{21}(2\Delta)$ – взамен $R_{21}(\Delta)$ и.т.д., либо уравнения начинают составлять не с первой, а со второй строки. При малых шагах Δ это вносит незначительные погрешности. Ниже, в численном примере, эти сдвиги для простоты пояснения самого процесса составления уравнений не делаются.

Используя данные табл. 2.9., составим по ней систему уравнений. Интервал взят $\Delta=1$ *мин*. Так как при $\tau>5$ мин корреляционные функции быстро уменьшаются, ограничимся интервалом интегрирования от 0 до 5 мин. Составим первую строку системы при $\tau=0$ по уравнению (2.94)

$$\frac{1}{1}\cdot 0{,}20=1\cdot h(0)+0{,}37h(\Delta)+0{,}16h(2\Delta)+0{,}05h(3\Delta)+0{,}02h(4\Delta)+0.01h(5\Delta),$$

где $R_{21}(0) = 0{,}20$; $R_1(0) = 1$; $R_1(-\Delta) = R_1(1) = 0{,}37$;

$R(-2\Delta) = R_1(2) = 0{,}16$; $R_1(-3\Delta) = R_1(3) = 0{,}05$;

$R_1(-4\Delta) = R_1(4) = 0{,}02$; $R_1(-5\Delta) = R_1(5) = 0{,}01$.

Составим вторую строку системы при $\tau=\Delta=1$ *мин* по уравнению (2.95)

$$\frac{1}{1}\cdot 0{,}47=0{,}37h(0)+1h(\Delta)+0{,}37h(2\Delta)+0{,}16h(3\Delta)+0{,}05h(4\Delta)+0{,}02h(5\Delta),$$

где $R_{21}(\Delta) = 0{,}47$; $R_1(\Delta) = R_1(1) = 0{,}37$; $R(0) = 1{,}0$; $R_1(-\Delta) = R_1(1) = 0.37$;

$R_1(-2\Delta) = R_1(2) = 0{,}16$; $R_1(-3\Delta) = R_1(3) = 0.05$; $R_1(-4\Delta) = R_1(4) = 0{,}02$.

Аналогично составим строки при $\tau=2\Delta=2$ *мин*; $\tau=3\Delta=3$ *мин*; $\tau=4\Delta=4$ *мин*:

$0{,}39=0{,}16h(0)+0{,}37h(\Delta)+1{,}0h(2\Delta)+0{,}37h(3\Delta)+0{,}16h(4\Delta)+0{,}05h(5\Delta)$;

$0{,}26=0{,}05h(0)+0{,}16h(\Delta)+0{,}37h(2\Delta)+1{,}0h(3\Delta)+0{,}37h(4\Delta)+0{,}16h(5\Delta)$;

$0{,}14=0{,}02h(0)+0{,}05h(\Delta)+0{,}016h(2\Delta)+0{,}37h(3\Delta)+1{,}0h(4\Delta)+0{,}37h(5\Delta)$.

Так как h(0) = 0, тогда полученные строки перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}37\cdot h_1+0{,}16\cdot h_2+0{,}05\cdot h_3+0{,}02\cdot h_4+0{,}01\cdot h_5=0{,}20;\\
&1{,}00\cdot h_1+0{,}37\cdot h_2+0{,}16\cdot h_3+0{,}05\cdot h_4+0{,}02\cdot h_5=0{,}47;\\
&0{,}37\cdot h_1+1{,}00\cdot h_2+0{,}37\cdot h_3+0{,}16\cdot h_4+0{,}05\cdot h_5=0{,}39;\\
&0{,}16\cdot h_1+0{,}37\cdot h_2+1{,}00\cdot h_3+0{,}37\cdot h_4+0{,}16\cdot h_5=0{,}26;\\
&0{,}05\cdot h_1+0{,}16\cdot h_2+0{,}37\cdot h_3+1{,}00\cdot h_4+0{,}37\cdot h_5=0{,}14,
\end{aligned}\right\}, \qquad (2.96)$$

где $h_n=h(n\Delta)$.

Решение задачи теперь сводится к вычислению корней системы линейных уравнений. Именно эта часть задачи содержит наиболее трудоемкие вычислительные операции, т.к. число уравнений может быть значительно большим. Вычисления следует производить отнюдь не с помощью определителей по правилам Крамера, а одним из практических методов, например хорошо известным методом последовательного исключения неизвестных Гаусса. Решение можно уточнять итерационными методами [11].

Применение итерационных методов оправдывается еще и тем, что обычно при исследовании объекта можно по априорным знаниям грубо (с ошибкой 30 − 50 %) оценить вид переходной функции, а тем самым и задать первоначальные грубые значения искомых корней (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5), а затем уточнять их итерационными вычислениями.

Для полученной системы вычислены корни:

$$h_1 = h(\Delta) = h(1) \approx 0{,}38; \qquad h_2 = h(2\Delta) = h(2) \approx 0{,}20;$$
$$h_3 = h(3\Delta) = h(3) \approx 0{,}10; \qquad h_4 = h(4\Delta) = h(4) \approx 0{,}05; \qquad (2.97)$$
$$h_5 = h(5\Delta) = h(5) \approx 0{,}02.$$

При подстановке в исходную систему получаются невязки (проверка):

0,20 − 0,1787 = 0,0213 – для первого уравнения,

0,47 − 0,4729 = − 0,0029 – для второго уравнения,

0,39 − 0,3865 = 0,0035 – для третьего уравнения,

0,26 − 0,2565 = 0,0035 – для четвертого уравнения,

0,14 − 0,1454 = − 0,0054 – для пятого уравнения.

График искомой ИПФ построен на рис. 2.8.

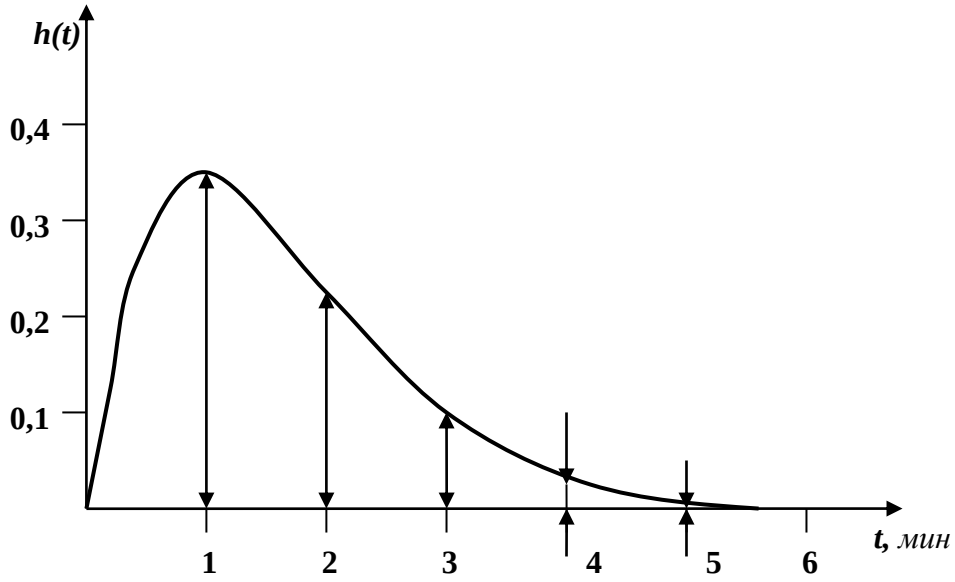


Рис. 2.8. Импульсная переходная функция, полученная решением уравнения Винера-Хопфа

2.4.4 Вычисление спектральной плотности случайного сигнала

Рассмотрим вычисление спектральной плотности случайного процесса, данные эксперимента которого приведены в табл. 2.10. С интервалом $\Delta t = 1\ мин$ проведена регистрация отклонения от среднего значения величины *x(t)*. В первом столбце табл. 2.10. дано время измерения, а во втором столбце – измеренные значения отклонений $x(t)$, $[x] = ед$.

Один из возможных приемов решения этой задачи заключается в аппроксимации *x(t)* на промежутке от 0 до *T* гармоническим рядом Фурье. Задача сводится к вычислению коэффициентов ряда a_i, b_i. Если коэффициенты вычислены, то искомая спектральная плотность определяется в дискретных точках по простым формулам:

$$S(\omega_i) \approx \frac{1}{T}\left(a_i{}^2 + в_i{}^2\right) \tag{2.98}$$

Частота ω_i соответствует i-ой гармонике ряда Фурье для *x(t)*.

Другой метод, который мы и рассмотрим, связан с разложением *x(t)* в ряд по специальным функциям Лаггера, предложенным Н. Винером. Этот метод удобен тем, что дает возможность сразу получить аналитическое выражение для спектральной плотности, в то время как разложение по Фурье дает значения $S(\omega_i)$ в отдельных точках и требуются дополнительные вычисления по аппроксимации самой $S(\omega_i)$ аналитическим выражением.

Суть метода сводится к следующему. Сигнал представляют рядом, ограничиваясь несколькими его членами

$$x(t) = C_0\ell_0(t) + C_1\ell_1(t) + C_2\ell_2(t) + \ldots, \tag{2.99}$$

где C_o, C_1, C_2, … – коэффициенты, которые нужно вычислить,

$\ell_0(t)$, $\ell_1(t)$, $\ell_2(t)$, … –функции Лаггера.

По аналитическим выражениям для функции Лаггера [7]

$$\ell_n(t) = \ell^{-t}\left[\frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{n!}t^n - \frac{2^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)!}t^{n-1} + \ldots + 2\cdot\frac{1}{2}(-1)^n\right] \tag{2.100}$$

$(n = 0,1,2,...)$

вычислены таблицы, т.е. эти функции нам в задаче известны. Вычисление коэффициентов C_o, C_1, C_2, … производят по формулам

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \int_0^T X(t)\cdot \ell_0(t)\cdot dt \approx \sum_{i=0}^{N} X(t_i)\cdot \ell_0(t_i)\cdot \Delta t, \\ C_1 &= \int_0^T X(t)\cdot \ell_1(t)\cdot dt \approx \sum_{i=0}^{N} X(t_i)\cdot \ell_1(t_i)\cdot \Delta t, \\ C_2 &= \int_0^T X(t)\cdot \ell_2(t)\cdot dt \approx \sum_{i=0}^{N} X(t_i)\cdot \ell_2(t_i)\cdot \Delta t \\ &\textit{и.т.д.} \end{aligned}\right\} \qquad (2.101)$$

– почти таким же, как и в случае вычисления коэффициентов Фурье, только теперь функции sin и cos заменены на $\ell_0, \ell_1 \ldots$ Это объясняется тем, что sin и cos – функции, как и ℓ_n – функции, составляют полную ортогональную систему функций [12].

В табл. 2.10. произведено приближенное вычисление первых шести коэффициентов Co, C_1, $C_{2,}\ldots$, C_5. Для этого в 3, 4, 5, 6, 7 и 8 столбцах записаны табличные значения функций Лаггера для соответствующих (в направлении строк) моментов времени t_i. Например, $\ell_4(7) = 0{,}392$. В последующих шести столбцах вычислены произведения $x(t_i)\cdot \ell_0(t_i)$; $x(t_i)\cdot \ell_1(t_i)$ и.т.д. и затем их суммы

$$\left.\begin{aligned} C_0 &\approx \sum_{i=0}^{24} X(t_i)\cdot \ell_0(t_i)\cdot 1 = 2{,}705; \\ C_1 &\approx \sum_{i=0}^{24} X(t_i)\cdot \ell_1(t_i)\cdot 1 = 1{,}146; \\ C_2 &\approx \sum_{i=0}^{24} X(t_i)\cdot \ell_2(t_i)\cdot 1 = 1{,}855; \\ C_3 &\approx \sum_{i=0}^{24} X(t_i)\cdot \ell_3(t_i)\cdot 1 = -7{,}513; \\ C_4 &\approx \sum_{i=0}^{24} X(t_i)\cdot \ell_4(t_i)\cdot 1 = -5{,}475; \\ C_5 &\approx \sum_{i=0}^{24} X(t_i)\cdot \ell_5(t_i)\cdot 1 = -9{,}489. \end{aligned}\right\} \qquad (2.102)$$

Так получена аппроксимация анализируемого сигнала суммой кратных функции Лаггера:

$$\begin{aligned} X(t) \approx\ & 2{,}705\cdot \ell_0(t) + 1{,}146\cdot \ell_1(t) + 1{,}855\cdot \ell_2(t) - 7{,}513\cdot \ell_3(t) - \\ & - 5{,}475\cdot \ell_4(t) - 9{,}489\cdot \ell_5(t). \end{aligned} \qquad (2.103)$$

Известно, что между сигналом $x(t)$ и его спектральной плотностью существует зависимость [13, с. 414]:

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|\int_0^T X(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt\right|^2 \approx \frac{1}{T}\left|\int_0^T X(t)\cdot e^{-j\omega t}\right|, \qquad (2.104)$$

содержащая преобразование Фурье исходного сигнала.

Кроме того, доказано, что преобразование Фурье для функции Лаггера имеет вид

$$L_n(j\omega)=\int_0^T l^{-j\omega t}\cdot dt=\sqrt{2}\cdot\frac{(1-j\omega)^n}{(1+j\omega)^{n+1}}\qquad (n=0,1,2,...,5). \tag{2.105}$$

Поэтому, учитывая, что сигнал $x(t)$ есть сумма кратных функций Лаггера, можно записать

$$\begin{aligned}S(\omega)\approx\frac{1}{T}|&2{,}705\cdot L_0(j\omega)+1{,}146\cdot L_1(j\omega)+1{,}855\cdot L_2(j\omega)-7{,}513L_3(j\omega)-\\&-5{,}475\cdot L_4(j\omega)-9{,}489\cdot L_5(j\omega)\ |^2=\frac{1}{25}\left|\frac{2{,}705\cdot\sqrt{2'}\cdot(1-j\omega)^0}{(1+j\omega)}+\right.\\&+\frac{1{,}146\cdot\sqrt{2}\cdot(1-j\omega)}{(1+j\omega)^2}+\frac{1{,}855\cdot\sqrt{2}\cdot(1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^3}-\frac{7{,}513\cdot\sqrt{2}\cdot(1-j\omega)^3}{(1+j\omega)^4}-\\&\left.-\frac{5{,}475\cdot\sqrt{2}\cdot(1-j\omega)^4}{(1+j\omega)^5}-\frac{9{,}489\cdot\sqrt{2}\cdot(1-j\omega)^5}{(1+j\omega)^6}\ \right|^2,\end{aligned} \tag{2.106}$$

где T = 25 мин взято из табл. 2.10.

Расчетные значение

Таблица 2.10

t_i, мин	$x(t_i)$, åä	$l_0(t_i)$	$l_1(t_i)$	$l_2(t_i)$	$l_3(t_i)$	$l_4(t_i)$	$l_5(t_i)$	$x(t_i)\,l_0(t_i)$	$x(t_i)\,l_1(t_i)$	$x(t_i)\,l_2(t_i)$	$x(t_i)\,l_3(t_i)$	$x(t_i)\,l_4(t_i)$	$x(t_i)\,l_5(t_i)$
0	1,20	1,414	-1,414	1,414	-1,414	1,414	-1,414	1,700	-1,700	1,700	-1,700	1,700	-1,700
1	0,20	0,520	-0,520	0,520	-0,173	0,173	-0,381	0,104	-0,104	-0,104	0,035	0,035	0,076
2	4,00	0,191	0,574	0,191	-0,447	0,191	0,166	0,764	2,296	0,764	-1,788	0,764	0,664
3	2,80	0,070	0,352	0,493	-0,070	-0,352	0,267	0,196	0,982	1,380	-0,070	-0,920	0,748
4	-1,80	0,026	0,181	0,443	0,319	-0,250	-0,205	-0,047	-0,326	-0,796	-0,575	0,450	0,370
5	-1,60	0,009	0,086	0,295	0,435	0,105	-0,327	-0,014	-0,138	-0,472	-0,696	-0,168	0,524
6	1,50	0,003	0,039	0,172	0,375	0,340	-0,086	0,005	0,059	0,258	0,563	0,510	-0,129
7	-3,20	0,001	0,017	0,092	0,263	0,392	0,182	-0,003	-0,055	-0,294	-0,843	-1,250	-0,583
8	-5,70	0,000	0,007	0,046	0,168	0,334	0,347	0,000	-0,040	-0,262	-0,600	-1,900	-1,973
9	-7,90		0,003	0,022	0,094	0,242	0,360		-0,024	-0,174	-0,743	-1,910	-2,840
10	-12,00		0,001	0,010	0,051	0,158	0,310		-0,012	-0,120	-0,612	-1,894	-3,722
11	-4,002		0,000	0,005	0,026	0,095	0,226		0,000	-0,020	-0,104	-0,380	-0,904
12	-2,50			0,002	0,013	0,054	0,152			-0,005	-0,032	-0,135	-0,380
13	0,40			0,001	0,006	0,030	0,095			0,000	0,002	0,012	0,038
14	-0,50			0,000	0,003	0,016	0,057				-0,002	-0,008	-0,029
15	3,60				0,001	0,008	0,032	$x(t_i)l_0(t_i)=$			0,004	0,029	0,115
16	8,20				0,001	0,004	0,018	$=0$			0,008	0,033	0,147
17	6,50	$l_0(t_i)=0$			0,000	0,002	0,009		$x(t_i)l_1(t_i)=$		0,000	0,013	0,059
18	5,60					0,001	0,005		$=0$			0,006	0,028
19	2,90		$l_1(t_i)$			0,000	0,002					0,000	0,006
20	-2,90		$=0$	l_2			0,001			$x(t_i)l_2(t_i)=$			-0,003
21	-0,50			$(t_i)=0$			0,001			$=0$			-0,001
22	3,50				$l_2(t_i)=0$		0,000				$x(t_i)l_3(t_i)=$		0,000
23	7,00						0,000				$=0$		
24	11,00					$l_4(t_i)=0$	0,000						
$\sum$								2,705	1,146	1,855	-7,513	-5,475	-9,489

Если ограничится не шестью, а двумя членами ряда 2.103, то искомая спектральная плотность, хотя и грубое, оценится выражением

$$S(\omega) \approx \frac{1}{25}\left|\frac{3{,}82}{1+j\omega}+\frac{1{,}62(1-j\omega)}{(1+j\omega)^2}\right|^2, \qquad (2.107)$$

которым, лишь для большей наглядности, воспользуемся дальше. Преобразование (2.107) достаточно просто и это позволит понять преобразование более сложного выражения (2.106).

Дальнейшие вычисления сводятся к тождественным преобразованиям для приведения $S(\omega)$ к удобной форме записи, к полному освобождению об мнимых количеств.

Нужно найти квадрат модуля комплексной функции от ω, фигурирующей в (2.107). Освобождаясь от мнимых количеств в знаменателе, выделяя мнимую и действительную части, находя затем модуль и возведя его в квадрат, последовательно получим:

$$\begin{aligned}
&S(\omega) \approx \frac{1}{25}\left|\frac{3{,}82(1-j\omega)}{1+\omega^2}+\frac{1{,}62(1-j\omega)^3}{(1+\omega^2)^2}\right|^2 = \frac{0{,}04}{(1+\omega^2)^4}\cdot\left|3{,}82(1-j\omega)(1+\omega^2)+\right.\\
&\left.+1{,}62(1-j\omega)^3\right|^2 = \frac{0{,}04}{(1+\omega^2)^4}\cdot\left|3{,}82(1+\omega^2)-3{,}82\,j\omega(1+\omega)^2+\right.\\
&\left.+1{,}62(1-3j\omega-3\omega^2-j\omega^3)\right|^2 = \frac{0{,}04}{(1+\omega^2)^4}\cdot\left|(5{,}44-1{,}04\omega^2)-j(8{,}68\omega+5{,}44\omega^3)\right|^2 =\\
&=\frac{0{,}04}{(1+\omega^2)^4}\cdot\left[(5{,}44-1{,}04\omega^2)^2+(8{,}68\omega+5{,}44\omega^3)^2\right].
\end{aligned} \qquad (2.108)$$

Здесь использовано известное соотношение

$$|A(\omega)+jB(\omega)|^2 = \left[\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}\right]^2 = A^2(\omega)+B^2(\omega).$$

Найденная спектральная плотность является четной функцией от ω, график ее симметричен относительно оси ординат. Спектральные плотности случайных сигналов содержат ту же информацию, что и корреляционные функции, и могут быть применены к оценке динамических свойств объектов. Весьма полезна, например, формула

$$|W(j\omega)| = \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)}, \qquad (2.109)$$

оценивающая модуль комплексного коэффициента передачи объекта по спектральным плотностям выходного $S_2(\omega_i)$ и входного $S_1(\omega)$ сигналов.

В обычных, рассматриваемых здесь, методах статистической динамики процедура вычислений сложна, т.к. в сущности надо решать интегральное уравнение Винера – Хопфа, что дает импульсную переходную функцию h(t), а затем еще из h(t) находить передаточную функцию объекта. Спрашивается,

можно ли и как упростить эту процедуру и, в частности, избежать промежуточного вычисления h(t)?

Возможен следующий путь. Для объекта с уравнением вида

$$a_0 x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x_2^{(1)} + x_2 = b_0 x_1 + b_1 x_1^{(1)} + ... + b_m x_1^{(m)}$$

справедливы равенства

$$a_0 \cdot R_{21}^{(n)}(\tau_i) + a_1 R_{21}^{(n-1)}(\tau_i) + ... + a_n \cdot R_{21}(\tau_i) = b_0 R_1(\tau_i) + b_1 R_1^{(1)}(\tau_i) + ... + b_m \cdot R_1^{(m)}(\tau_i)$$

либо

$$a_0 R_2^{(n)}(\tau_i) + a_1 R_2^{(n-1)}(\tau_i) + ... + a_n R_2(\tau_i) = b_0 R_{12}(\tau_i) + b_1 R_{12}^{(1)}(\tau_i) + ... + b_m \cdot R_{12}^{(m)}(\tau_i)$$

(в последней строке сигнал проходит в обратном направлений). Эти равенства дают правило: взаимокорреляционная функция есть выход линейного уравнения, если корреляционная функция есть его вход. Их можно использовать для определения искомых коэффициентов уравнения объекта следующим образом. Экспериментально определяют $R_2(\tau)$ и $R_{12}(\tau)$ (либо R_1 и R_{21}) и затем значения R_2 и R_{12} при разных τ_i подставляют в одно из равенств столько раз, сколько неизвестных коэффициентов. Это дает систему линейных алгебраических уравнений, определяющую коэффициенты $a_i, в_j$. В равенствах надо брать, по крайней мере, столько точек τ_i, сколько неизвестных коэффициентов. Для повышения точности можно привлекать большее число τ_i, используя метод наименьших квадратов. Можно даже привлечь не дискретные точки, а непрерывные отрезки корреляционных функции на интервале $\tau_{\min} < \tau < \tau_{\max}$, заменяя операцию суммирования в методе наименьших квадратов операцией интегрирования.

2.4.5 Вычисление комплексного коэффициента усиления (передаточной функции) объекта с использованием спектральных плотностей

В стационарным режиме работы объекта были зарегистрированы в течение некоторого промежутка времени отклонения от среднего значения входного $X_1(t)$ и выходного $X_2(t)$ сигналов и определены спектральная плотность $S_1(\omega)$ входного сигнала (четная действительная функция от ω) и взаимная спектральная плотность $S_{21}(j\omega)$ выходного и входного сигналов (комплексная функция от ω); $S_{21}(j\omega) = K(\omega) + jM(\omega)$

Графики $S_1(\omega)$, $K(\omega)$ и $M(\omega)$ показаны на рис 2.9, *а, б*, по которым требуется вычислить комплексный коэффициент усиления объекта $W(j\omega)$ (передаточную функцию). Вычисление $S_1(\omega)$ см. 2.4.2.

Комплексный коэффициент усиления представим действительной и мнимой частотными характеристиками [8]

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Вычисления можно осуществить по формулам

$$P(\omega) = \frac{K(\omega)}{S_1(\omega)}; \qquad Q(\omega) = \frac{M(S)}{S_1(\omega)}. \tag{2.110}$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.11. В первой строке которой написаны частоты ω_i, при которых из графиков рис. 2.9, *а, б* отчитывались ординаты $K(\omega_i)$, $M(\omega_i)$ и $S_1(\omega_i)$. Последние вписаны во вторую, третью и четвертую строку. В двух последних строках помещены результаты вычислений $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$, графики которых показаны на рис. 2.9, в.

Зная $P(\omega_i)$ и $Q(\omega_i)$, легко можно получить передаточную функцию объекта.

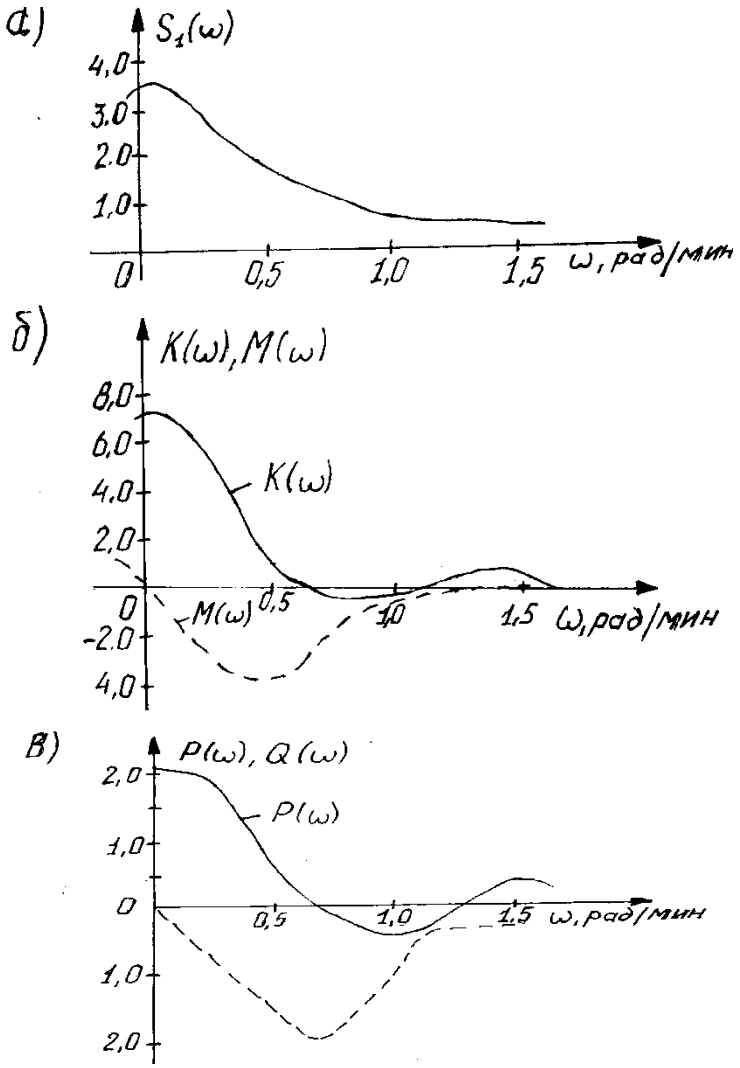


Рис. 2.9. К расчету частотных характеристик статистическими методами

Расчетные значения

Таблица 2.11

ω_i, рад/мин	0,00	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$K(\omega_i)$	7,3	7,1	6,2	4,3	2,5	1,0	0,2	-0,1	-0,2	-0,25	-0,3	-0,2	-0,0	0,1	0,2
$M(\omega_i)$	0,0	-1,1	-2,3	-3,3	-3,8	-3,8	-3,3	-2,3	-1,4	-0,8	-0,3	-0,26	-0,24	-0,22	-0,2
$S_1(\omega_i)$	3,5	3,7	3,0	2,6	2,2	1,8	1,5	1,25	1,0	0,8	0,65	0,6	0,56	0,53	0,5
$P(\omega)=\frac{K(\omega_i)}{S_1(\omega_i)}$	2,08	2,07	2,06	1,65	1,14	0,556	0,13	-0,08	-0,20	-0,34	-0,46	-0,33	0,0	0,05	0,4
$Q(\omega)=\frac{M(\omega_i)}{S_1(\omega_i)}$	0,0	-0,298	-0,77	-1,27	-1,73	-2,11	-2,2	-1,84	-1,4	-1,0	-0,46	-0,44	-0,42	-0,41	-0,4

3 ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

3.1 Объекты управления и виды их математических моделей

Процессы производства определяются большим и разнообразным числом факторов, влияющих на эти процессы.

Сложность анализа промышленных процессов, как объектов управления делает естественным и необходимым при его исследовании, соблюдении определенной иерархической структуры. Особенностью такой структуры является последовательное расчленение технической системы на подсистемы, между которыми устанавливают отношения подчиненности. Иерархическую структуру предприятий с позиции задач управления можно представить в виде трех ступеней:

– нижняя ступень – так называемые типовые процессы (например, в горной технологии: бурение, взрывание, доставка, дробление, измельчение, сепарация и др.);

– средняя ступень – группа процессов или аппаратов, выполняющих самостоятельную технологическую задачу;

– верхняя ступень – технологическая линия добычи и переработки сырья, рассматриваемая в целом.

Для каждой ступени промышленной технологии характерны свои задачи управления, которым соответствуют свои целевые функции, что и определяет вид математической модели, описывающей процесс функционирования данного объекта.

В общем случае математическую модель каждой ступени можно рассматривать как сложный объект промышленной технологии и представить, как некоторую функцию переменных, приведенных на рис. 3.1.

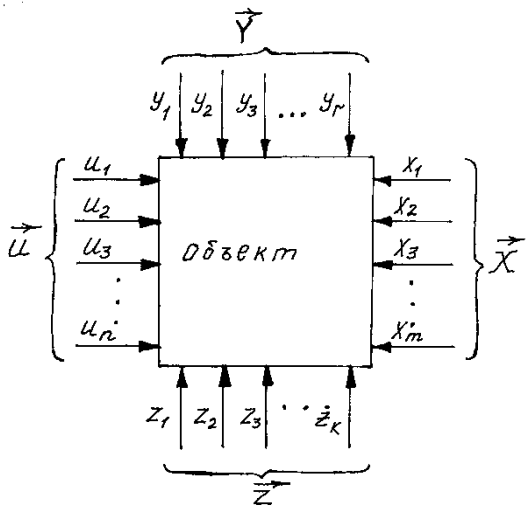


Рис. 3.1. Структура сложного объекта управления

Здесь на входы объекта поступают три типа воздействий:

1) входные неуправляемые (но контролируемые) переменные $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_r\}$, представляют собой вектор возмущений и, как правило, характеризуют качественные показатели исходного сырья;

2) входные управляемые переменные $\vec{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ представляют собой вектор управления и характеризуют, как правило, количественные показатели материальных и энергетических потоков;

3) неконтролируемые факторы $\vec{Z} = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ представляют собой вектор помех. По существу это вектор возмущений, о котором исследователю известно очень мало или ничего не известно.

Существо любого технологического процесса состоит в преобразовании входных воздействий $\vec{Y}, \vec{U}$, в выходные $\vec{X}$. Вектор $\vec{X}$ называется вектором состояния и характеризует качественно-количественные признаки выходных продуктов.

Объекты промышленной технологии удобнее представлять в виде моделей, описывающих типовые процессы. Всего можно выделить четыре типовые операции: простая, смесительная, разделительная и сложная.

Характерной особенностью *простой операции* является переработка одного входного продукта y в выходной продукт x. Эта операция описывается зависимостью

$$X = f\left(Y, \vec{U}\right) \tag{3.1}$$

Например, процесс дробления руды можно отнести к простой операции, где входной переменной является поток крупнокускового материала в загрузке дробилки. Выходной переменной – дробленый материал с контролируемым размером кусков x, а управляющими воздействиями могут быть ширина разгрузочной щели $h(мм)$, производительность потока $Q(т/ч)$ на входе дробилки, крупность кусков в загрузке $d(мм)$, т.е. $\vec{U} = \{h, Q, d\}$.

Смесительная операция характеризуется наличием n технологических потоков $\vec{Y} = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\}$ на входе объекта и одним выходным потоком x. Уравнение этой операции имеет вид

$$X = f\left(\vec{Y}, \vec{U}\right) \tag{3.2}$$

Разделительная операция характеризуется одним входным технологическим потоком y и m выходными технологическими потоками $\vec{X} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ и описывается уравнением

$$\vec{X} = f\left(y, \vec{U}\right) \tag{3.3}$$

Например, сепаратор разделяет поток измельченной руды на входе на два потока по крупности (готовый продукт x_1, циркулирующая нагрузка x_2). Управляющими воздействиями могут служить напор создаваемый вентилятором H, угол установки лопаток φ, частота вращения привода вентилятора n, т.е. $U = \{H, \varphi, n\}$.

Сложная операция характеризуется наличием n входных технологических потоков и m выходных (см. рис. 3.1). Уравнение сложной операции имеет вид

$$X_i = f_i(U,Y);\ i = 1,...,m \qquad (3.4)$$

Обычно сложная операция соответствует технологической схеме, включающей несколько операций, например, последовательное соединение смесительной и разделительной операций (шаровая мельница и классификатор).

Например, в горной технологии типовые операции, как правило, агрегируют последовательным и параллельным их соединением (рис. 3.2).

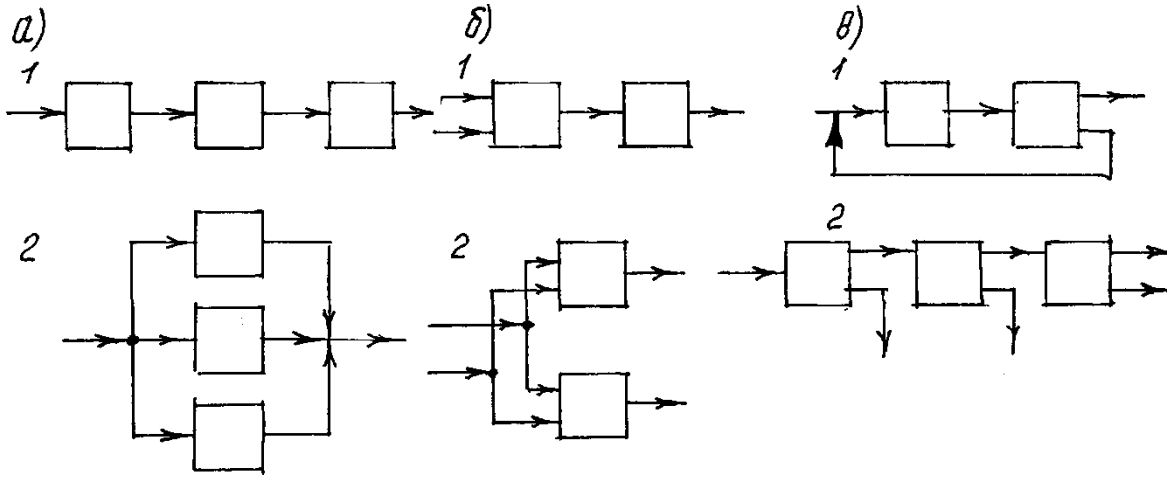


Рис. 3. 2. Виды типовых операции:
а- простые операции (1 – последовательное; 2 – параллельное соединения); *б* – смесительные операции (1- последовательное соединение с простой операцией; 2 – параллельное соединение); *в* – разделительные операции (1- схема с рециклом; 2 – последовательное соединение)

В установившемся режиме работы агрегата, зависимости (3.1) – (3.4) представляют собой математические модели статических режимов работы или статические характеристики объектов (рис. 3.3).

В общем случае статические характеристики являются нелинейными зависимостями выходных переменных $\vec{X}$ от управляемых и неуправляемых входных переменных $\vec{U}$, $\vec{Y}$.

Статические характеристики на основе экспериментального материала наиболее часто представляются в виде степенных полиномов вида

$$X_k = a_0 + \sum_{i=1}^{n+r} a_i \cdot U_i + \sum_{i \neq j}^{n+r} a_{ij} \cdot U_i \cdot U_j + \sum_{i=1}^{n+r} a_{ii} \cdot U_i^2, \qquad (3.5)$$

где a_0 – свободный член a_i, a_{ij} и a_{ii} – коэффициенты, характеризующие влияние параметров, взаимодействий параметров и их квадратов на выходную величину X_k.

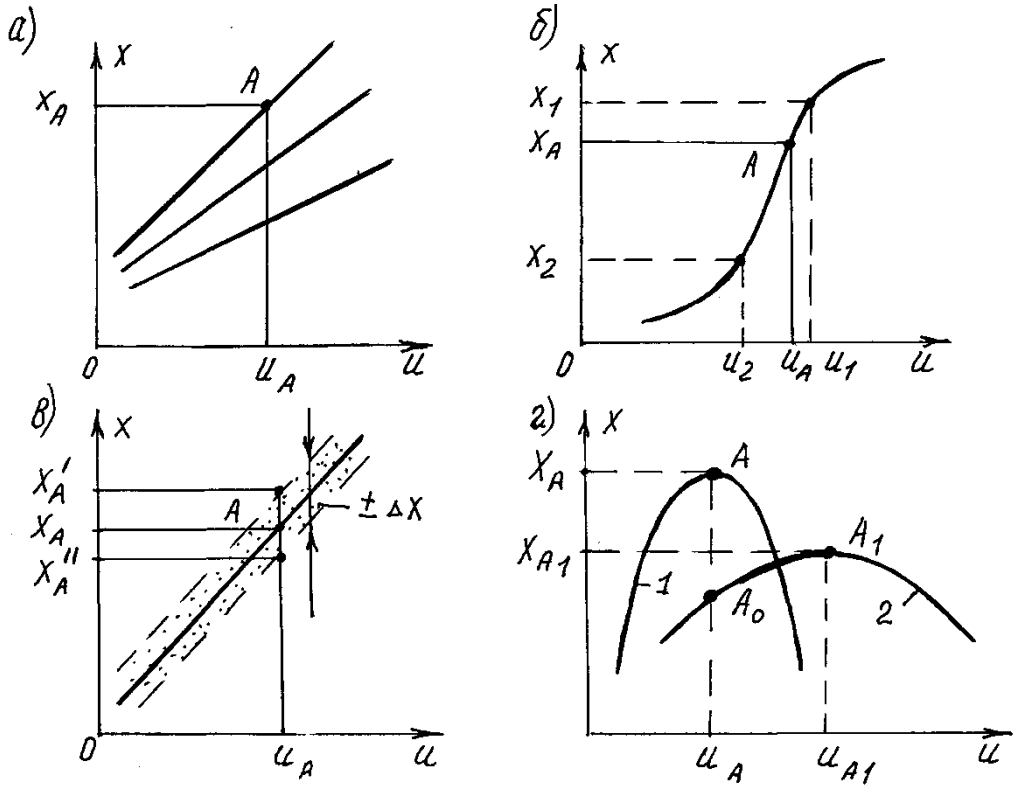


Рис. 3.3. Статические характеристики промышленных объектов

В выражении (3.5) входные переменные $\vec{U}$ и $\vec{Y}$ (см. рис. 3.1) обозначены одной буквой u_i, поэтому верхним пределом знака суммирования является сумма индексов n и r. Например, статическую характеристику простой операции, имеющей два управляющих воздействия u_1 , u_2 ($n = 2$) можно представить выражением

$$X_k = a_0 + a_1 y + a_2 u_1 + a_3 u_2 + a_{12} y u_1 + a_{13} y u_2 + a_{23} u_1 u_2 + a_{11} y^2 + a_{22} u_1^2 + a_{33} u_2^2 \quad (3.6)$$

Согласно выражения (3.4) для разделительной операции всегда имеет место система статических характеристик. Например, для случая, когда $m = 2$, $n = 1$, $r = 1$, имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_0 + a_1 y + a_2 u + a_{12} y u + a_{11} y^2 + a_{22} u^2 \\ x_2 &= в_0 + в_1 y + в_2 u + в_{12} y u + в_{11} y^2 + в_{22} u^2 \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

В частных случаях статические характеристики могут быть линейными. Тогда коэффициенты $\grave{a}_{ij}$ и $\grave{a}_{ii}$ в уравнении (3.5) равны нулю. Это значит, что статическая характеристика, например, простой операции (3.6), преобразуется к виду

$$x_к = c_0 + c_1 y + c_2 u + c_3 u_2 , \quad (3.8)$$

причем в общем случае коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 нелинейной статической характеристики (3.6) не равны коэффициентам c_0, c_1, c_2, c_3.

В задачах автоматического управления статические характеристики используют для выбора рабочей точки A, определяющей желательный режим работы установки, стабилизацию которого, как правило, и

осуществляет система автоматического регулирования. Поэтому существенный интерес представляют локальные линейные статические характеристики, устанавливающие зависимость выходных показателей $\vec{X}$ от управляющих воздействий $\vec{U}$ вблизи выбранной рабочей точки A.

На практике часто бывают случаи, когда непосредственно количественно определить влияние переменной Y на выходную величину X невозможно по техническим причинам. Тогда статическую характеристику обычно представляют в виде набора зависимостей вида

$$x = в_0 + в_1 \cdot u \qquad (3.9)$$

для различных фиксированных значений y, как показано линиями 1, 2, 3 на рис. 3.3, а.

В тех случаях, когда переменная y изменяется в достаточно узких пределах, а ее влияние на переменную $\boldsymbol{x}$ непосредственно учесть невозможно, статическую характеристику $\boldsymbol{x} = f(u)$ простой операции можно представить в виде

$$\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{u}, \qquad (3.10)$$

где $\Delta x = t_p \cdot \sigma_{ост}$ – доверительный интервал выходной переменной (см.рис. 3.3, в);

$$\sigma_{ост} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{q}\left(x_i - x_i^*\right)^2}{q-1}}$$

$\sigma_{ост}$ – остаточное среднее квадратичное отклонение истинных значений $\boldsymbol{x_i}$ от расчетных $\boldsymbol{x_i^*}$ (линия ВС); q – число экспериментальных данных; t_p – коэффициент Стьюдента, взятый для заданной доверительной вероятности p при числе ступеней свободы $(q - 1)$. Методика расчета $\Delta\boldsymbol{x}$, коэффициентов a_0, a_1 в выражении (3.10) известна из курса математической статистики.

Промышленные объекты характеризуются большим разнообразием своих статических характеристик, которые, как правило, носят нелинейный характер. Некоторые виды плавных нелинейных характеристик могут быть с определенными допущениями заменены линейными зависимостями. Например, в окрестностях точки A при изменении переменной u от u_2 до u_1 нелинейную зависимость на рис. 3.3, б можно заменить прямой линией, являющейся касательной в точке A, при этом

$$x_1 - x_2 = k\left(u_1 - u_2\right) \text{ или } \Delta x = k \cdot \Delta u \qquad (3.11)$$

Коэффициент пропорциональности k называют коэффициентом передачи (коэффициентом усиления), который справедлив только для окрестности точки A. При перемещении рабочей точки по статической характеристике (при изменении режима работы технологического агрегата) значение коэффициента k также изменяется.

Если статическая характеристика объекта задана аналитически, то линеаризация в окрестности точки A заключается в разложении зависимости

$x = f(y,u)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки и отбрасывании членов второго и выше порядков малости.

Отдельные виды статических характеристик не поддаются линеаризации. На рис. 3.3, г приведены так называемые экстремальные статические характеристики для различных значений входной переменной y (кривые 1 и 2). Характеристики указанного вида типичны для ряда объектов (процесс бурения, измельчения и др.). В этих установках наиболее выгодным режимом является такой, когда рабочая точка *A* находится в области экстремальных значений выходных переменной x. При изменении входной переменной y смещается и статическая характеристика $x = f(u)$ на плоскости *x0u* (см. рис. 3.3, г). Если рабочая точка находилась в точке *A* статической характеристики 1 при одном значении y_1, то при другом значении y_2 статическая характеристика $x = f(u)$ займет положение 2. В этом случае при управляющем воздействии u_{A} рабочая точка будет в положении A_0. Задачей экстремального управления является перевод рабочей точки из A_0 в точку A_1, соответствующую экстремуму кривой 2. В этом случае управляющее воздействие *u* должно соответствовать величине u_{A_1}.

При непрерывном изменении неконтролируемого воздействия z кривая 1 на рис. 3.3, г будет медленно смещаться. Это значит, что коэффициенты a_0, a_1, a_2 в уравнении $x = f(u)$ будет также изменяться во времени, а уравнение экстремальной статической характеристики будет иметь вид

$$x = a_0(t) + a_1(t) \cdot u + a_2(t) \cdot u^2. \qquad (3.12)$$

Технологические объекты, математические модели которых содержат коэффициенты a_i как функции времени, называются *нестационарными объектами*. Нестационарность проявляется также при постоянном износе, деформации, изменении свойств отдельных элементов технологических элементов.

Часто статические характеристики не удается представить в явном виде, т.е. решить относительно выходной переменной x; тогда они представляются в неявном виде, как, например, статическая характеристика простой операции

$$\varphi\left(x, y, \vec{U}\right) = 0 \qquad (3.13)$$

Динамические характеристики типовых технологических операций

Под воздействием управляющих входных переменных $\vec{U}$ объекта рабочая точка на его статической характеристике перемещается, например, из точки *а* в точку *б* (рис. 3.4, *а*). В точке б возможен новый установившийся режим работы объекта. При изменении входного воздействия скачком, например на величину $\Delta u = u_б - u_а$, в момент времени t_0 (рис. 3.4, *б*) выходная величина x достигает практически установившегося

значения $x_б$ (на 97 %) не мгновенно, а через некоторое время $T_1 = t_1 - t_0$ (рис. 3.4, *в*), которое является временем переходного процесса, т.е. временем изменения переменной $x(t)$ от нуля (в точке 1) до величины $\Delta x(t) = x_\delta - x_\alpha$ (в точке 2). T_1 характеризует динамические свойства объекта. Если $T_1 = 0$ объект является безинерционным и, наоборот, чем больше время переходного процесса T_1, тем инерционнее объект.

В первом приближении указанное изменение переменной $x(t)$ на интервале от точки *а* до точки *б* статической характеристики при подаче на вход объекта скачкообразного управления $\Delta U(t)$ можно описать дифференциальным уравнением инерционного звена первого порядка

$$T\frac{d(\Delta x)}{dt} + \Delta x = k \cdot \Delta u, \qquad (3.14)$$

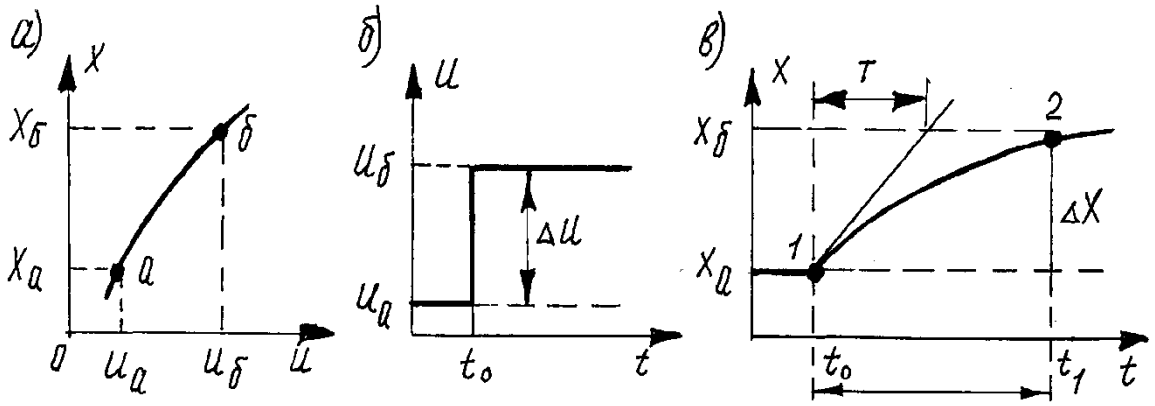


Рис. 3.4. Статическая (*а*), характеристика объекта при ступенчатом входном воздействии (*б*) и динамическая (*в*) характеристики

где T – постоянная времени, равная временному отрезку от момента t_0 до пересечения касательной 1 – 3 (см. рис. 3.4, *в*) линии нового установившегося значения переменной x в точке 3, с.

$$k = \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{\Delta x(\infty) - \Delta x(0)}{\Delta u}$$

$k \cdot$ – коэффициент передачи.

В установившемся режиме работы объекта (когда $\frac{d\Delta x}{dt} = 0$), выражение (3.14) преобразуется в линеаризованную статическую характеристику $\Delta x = k \cdot \Delta u$ на интервале от точки *а* до точки *б* (см. рис. 3.4, а).

Дифференциальное уравнение (3.14) можно представить и в так называемой нормальной форме (форме Коши)

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{1}{T}(k \cdot \Delta u - \Delta x). \qquad (3.15)$$

В общем случае постоянная времени характеризует способность объекта накапливать и рассеивать вещество или энергию.

Другим параметром, характеризующим инерционные свойства объекта является чистое или транспортное запаздывание τ. На рис. 3.5, а, б, в показаны характерные типы переходных функций технологических объектов при наличии транспортного запаздывания и подаче на вход скачкообразного воздействия (рис. 3.5, г). Здесь переменные представлены в относительном виде, где

$$\bar{x}(t)=\frac{\Delta x(t)}{\Delta x(\infty)} \text{ и } \bar{u}(t)=\frac{\Delta u(t)}{\Delta u(\infty)}.$$

Дифференциальное уравнение инерционного звена первого порядка с запаздыванием (см. рис. 3.5, а) имеет вид

$$T\frac{d\bar{x}(t)}{dt}+\bar{x}(t)=\kappa\cdot\bar{u}(t-\tau). \qquad (3.16)$$

Некоторые объекты являются многоемкостными, т.е. описываются дифференциальными уравнениями более высокого порядка, которые в качестве коэффициентов содержат комбинации из нескольких постоянных времени. Динамика таких объектов при наличии чистого транспортного запаздывания описывается линейными дифференциальными уравнениями вида

$$a_n\frac{d^n x(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{(n-1)}}+\ldots+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0x(t)=$$

$$=b_m\frac{d^m u(t-\tau)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t-\tau)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{du(t-\tau)}{dt}+b_0u(t-\tau), \qquad (3.17)$$

где всегда $n\geq m$.

Дифференциальным уравнением вида (3.17) соответствуют S – образные кривые переходных процессов статических объектов (рис.3.5, б).

При описании динамических свойств астатических объектов используются тоже дифференциальные уравнения, но не содержащие в левой части члена $\grave{a}_0\tilde{o}(t)$, а в правой статического коэффициента передачи, так как известно, что астатические объекты не имеют статической характеристики (см. рис. 3.5, в).

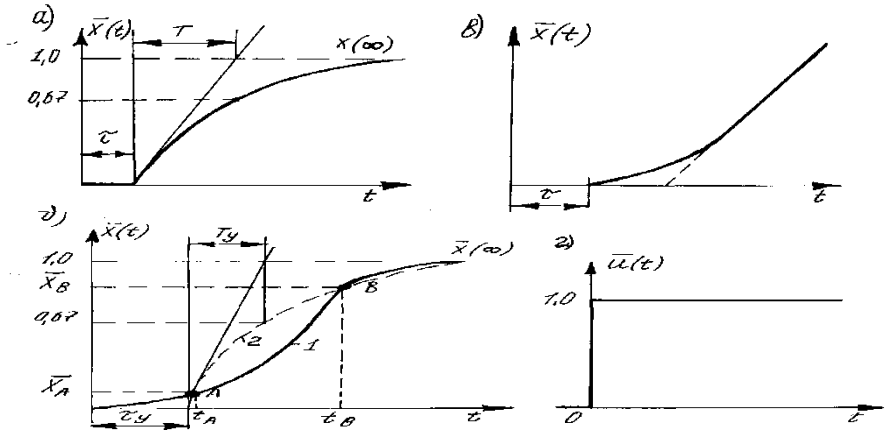


Рис. 3.5. Характерные типы переходных функций технологических объектов

Опыт практической оценки динамических характеристик различных объектов промышленного производства показал, что большинство из них может быть представлено дифференциальными уравнениями одного из видов:

$$
\begin{gathered}
a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0x(t)=в_0\cdot u(t);\\
a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0x(t)=в_0u(t-\tau);\\
a_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0x(t)=в_0\cdot u(t-\tau)\\
a_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0x(t)=в_1\frac{du(t-\tau)}{dt}+в_0\cdot u(t-\tau);\\
a_3\frac{d^3x(t)}{dt^3}+a_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0\cdot x(t)=в_0\cdot u(t-\tau);\\
a_3\frac{d^3x(t)}{dt^3}+a_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a_1\frac{dx(t)}{dt}+a_0\cdot x(t)=в_1\frac{du(t-\tau)}{dt}+в_0\cdot u(t-\tau).
\end{gathered}
\qquad (3.18)
$$

Если же статическую характеристику объекта в окрестности рабочей точки невозможно линеаризовать, то ее следует выразить некоторой нелинейной функцией переменных $x=\Delta x$ и $U=\Delta U$ вида $f(x,U)$. В этом случае дифференциальное уравнение типа (3.16), записанное в форме Коши, имеет вид

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=f\left(\bar{x},\bar{U}\right). \qquad (3.19)$$

Динамика многомерных объектов может быть записана в некоторой локальной области следующей системой дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$
\left.
\begin{gathered}
\frac{dx_1(t)}{dt}=f_1(x_1,...,x_n;U_1,...,U_m);\\
\frac{dx_2(t)}{dt}=f_2(x_1,...x_n;U_1,...,U_m);\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dx_m(t)}{dt}=f_m(x_1,...,x_n;U_1,...,U_m).
\end{gathered}
\right\}
\qquad (3.20)
$$

Таким образом, математические модели, характеризующие статический режим технологических операции, будем преимущественно определять в классе алгебраических уравнении вида (3.5), а динамические модели этих операции определять в классе дифференциальных уравнении вида (3.18) или в нормальной форме (3.20). Такое представление математических моделей технологических объектов вполне достаточно для возможности синтеза систем автоматического управления.

3.2. Методы получения моделей промышленных объектов управления

Под объектом промышленной технологии понимается технологический аппарат или их совокупность, где осуществляется одно из типовых операции или их определенная последовательность. Если для объекта создается система управления, то его называют объектом управления. В этом случае, как правило, к объектам относят чувствительные элементы (датчики), контролирующие состояние вектора выходных управляемых переменных x $= \{x_1, ..., x_m\}$, а также регулирующие органы, изменяющие состояние вектора входных управляемых переменных $\vec{u} = \{u_1, ..., u_m\}$ (см. рис.3.1).

Контуры объекта управления, как правило, зависят главным образом от цели, которую ставит перед собой разработчик системы управления.

Создание системы управления технологическими процессами неразрывно связано с моделями объектов управления. При создании локальных (простых) систем управления технологическими процессами в качестве моделей объектов управления выступают статические и динамические характеристики. При управлении всей технологической линией необходимо использовать более сложные модели, включающие совокупность моделей объектов управления, связи между объектами.

Следовательно, каждая конкретная модель объекта управления является таким отображением физики процесса, происходящих в объекте, которые позволяют выделить его наиболее существенные свойства для поставленной задачи.

Модели объектов управления условно можно подразделить на два класса: физические и математические.

В физических моделях должны происходить явления, идентичные объекту управления.

Как правило, модель отличается от объекта геометрическими размерами и диапазоном изменения переменных $\overline{X}, \vec{U}, \overline{Y}$. Создание таких моделей требует преодоления определенных трудностей, связанных с оценкой степени аналогии процессов, происходящих в объекте и модели. Эта оценка базируется на теоремах теории подобия.

Другой группой физических моделей являются модели, которые имеют иную физическую природу, чем физическая природа объекта. Здесь пользуется не принципом подобия, а принципом эквивалентности.

В этом случае уравнения модели совпадают с уравнениями объекта при выполнении условий эквивалентности. Такие модели называют аналоговыми.

Под математической моделью объекта управления понимается система уравнений в виде алгебраических или дифференциальных, неравенств, логических условий, операторов и т.д., отражающих сущность явлении, протекающих в объекте, которые с помощью определенного алгоритма позволяют прогнозировать поведение вектора состояние объекта $\vec{X}$ при

изменении входных неуправляемых $\vec{Y}$ и управляющих $\vec{U}$ переменных. Как следует из этого определения, важнейшим свойством математической модели является ее содержательность, т.е. способность отражать наиболее существенные стороны изучаемого объекта.

При математическом моделировании объектов управления составляют математическую модель, находят ее решения и проверяют адекватность модели изучаемому процессу.

Различают три основных метода получения математических моделей объектов управления: аналитический, экспериментальный и экспериментально-аналитический.

Аналитический метод получения моделей основан на качественной и количественной оценках процессов, происходящих в моделируемом объекте. Этот метод дает возможность изучить физико-механическую (или другую) сущность процесса: формально представить процесс в виде математической модели как совокупности математических уравнений, отражающих функциональные связи между всеми параметрами и переменными процесса; установить степень соответствия (адекватности) математической модели. Такие модели обладают достаточно большой общностью, они дают представление не об одном конкретном объекте, а о целом классе подобных объектов, что особенно ценно на стадии проектирования систем управления.

Аналитический метод получения математических моделей промышленной технологии не всегда приемлем на практике. Так как технологические процессы в промышленности, как правило нестационарны, существенно нелинейны, многомерны. В большинстве случаев отсутствует априорная информация о форме связи между входными и выходными переменными как в статических, так и в динамических режимах работы объекта. Все это затрудняет получение адекватных моделей этим методом.

Экспериментальные методы определения математических моделей делятся на активные и пассивные. При проведении *активного эксперимента* на вход исследуемого объекта подаются управляющие сигналы *и* определенного вида, а затем фиксируются изменения выходных переменных (рис. 3.6.). Такими сигналами могут быть планируемые воздействия (ПВ), подаваемые на вход объекта вручную или при помощи технических устройств. Входные сигналы *и* делятся на регулярные и случайные.

К регулярным относятся апериодические (ступенчатая функция 2 и импульсное воздействие 3) и периодические (синусоидальное воздействие 4 или прямоугольная волна 1). Указанные ПВ используют для определения динамических характеристик объектов, а воздействие 1 – статических характеристик. Случайные входные воздействия *и* создаются специальными генераторами шума (ГШ), применение которых упрощает методику определения динамических характеристик объектов.

В результате проведения активного эксперимента на входе объекта, на его выходе получают экспериментальные данные $\tilde{O}$, которые затем

аппроксимируют аналитически (как правило, формальными) математическими методами.

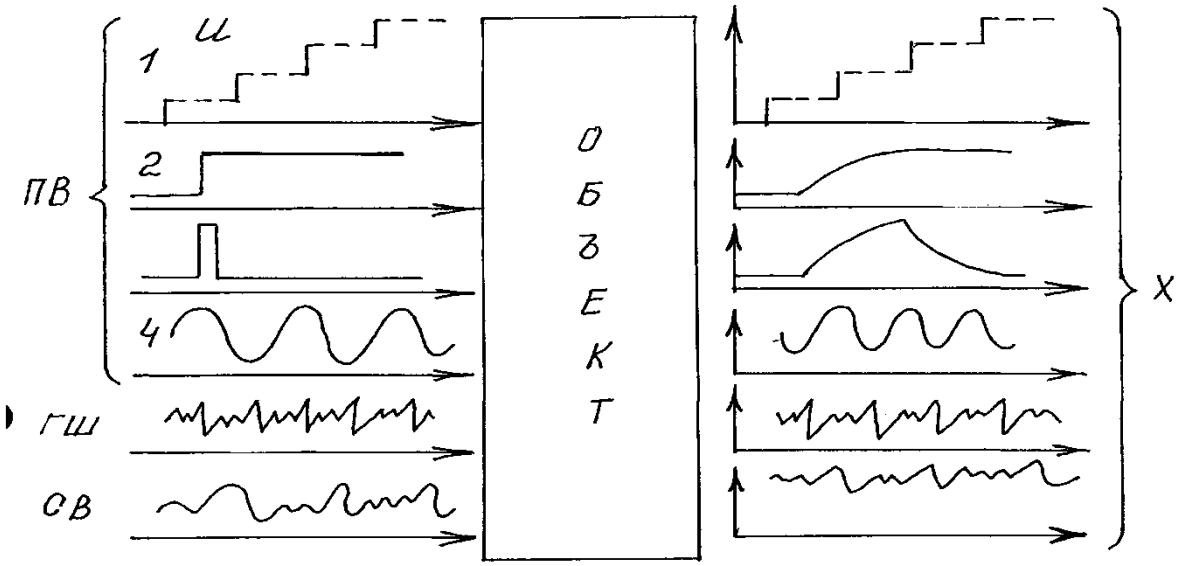


Рис. 3.6 Схема получения математических моделей объектов экспериментальным методом при помощи активного и пассивного экспериментов

При проведении *пассивного* эксперимента регулярно фиксируют случайные воздействия СВ входной переменной *u* и выходной переменной объекта *x*. Обработка экспериментальных данных *u* и *x* сводится к определению статических характеристик случайных сигналов входа и выхода, к вычислению по ним статических и динамических характеристик исследуемого объекта.

Экспериментально-аналитический метод получения моделей характерен тем, что вначале составляют аналитическую модель, а затем проводят экспериментальные исследования на конкретном объекте для уточнения коэффициентов, входящих в математическую модель.

3.2.1 Аналитический метод получения математических моделей

Аналитический метод составления математических моделей базируется на известных законах материального мира. При составлении таких моделей естественна определенная идеализация технологического процесса, она, как правило, заключается в разложении его на элементарные составляющие, относительно которых существует гипотеза математического описания и исследования.

Методика аналитического моделирования объектов состоит из следующих этапов:

– изучения процесса;

– допустимой его идеализации;

– составления уравнений материального и энергетического баланса, уравнений массопереноса, уравнений кинетики процесса, гидравлики и др.;

– определение адекватности теоретической модели и процесса.

Для определения статических характеристик объектов часто используют уравнения материального и энергетического балансов

$$\sum_j Q_j - \sum_i Q_i = 0, \quad \sum_j P_j - \sum_i P_i = 0, \tag{3.21}$$

где Q_j, Q_i и P_j, P_i – подводимые к объекту и отводимые от нее, соответственно, расходы веществ и потоки энергии. Уравнения (3.21) затем преобразуется к виду (3,5) или (3.13).

Для получения дифференциальных уравнений объектов используют выражения

$$\frac{dG_B}{dt} = \sum_j Q_j - \sum_i Q_i, \qquad \frac{dG}{dt} = \sum_j P_j - \sum_i P_i, \tag{3.22}$$

характеризующие процесс накопления вещества или энергии в неустановившемся режиме работы. Это значит, что если расход Q_i к объекту изменился, в объекте начинается процесс накопления вещества G_B и, как следствие, происходит изменение выходных координат, например Q_i. Уравнение (3.22) приводят к виду (3.17) или (3.20)

На рис. 3.7 приведена система автоматической стабилизации расхода жидкости, протекающей по трубопроводу 1. Объектом автоматизации является участок трубопровода 1 длиной *L*. Определим статическую и динамическую характеристики этого объекта аналитическим методом.

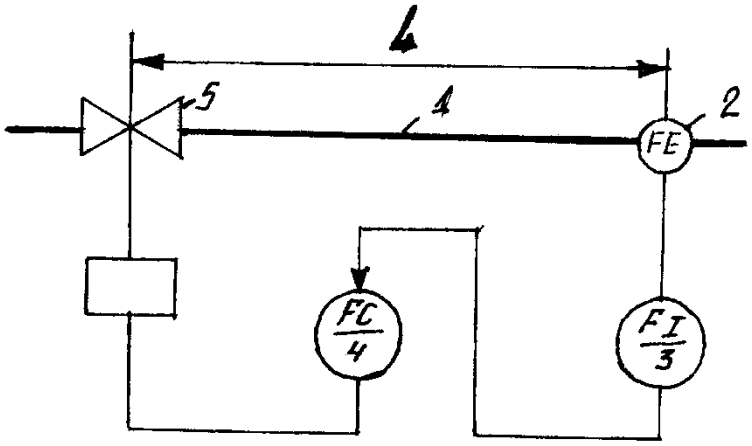


Рис. 3.7. Система автоматической стабилизации расхода жидкости:
1 – трубопровод; 2 – измерительное устройство; 3 – вторичный прибор;
4 – регулятор; 5 – регулирующий орган

Известна зависимость, устанавливающая связь между скоростью жидкости в трубопроводе ϑ и перепадом давления ΔP

$$\vartheta = K_p \cdot \sqrt{2g \cdot \frac{\Delta P}{\gamma}}, \tag{3.23}$$

где g – ускорение свободного падения; γ - плотность жидкости; K_p - коэффициент расхода.

С учетом, того что скорость ϑ прямо пропорциональна расходу Q жидкости через трубопровод с коэффициентом, равным обратной величине площади сечения S, уравнение баланса сил напора $\Delta p \cdot S$ и гидродинамического сопротивления имеет вид

$$\Delta P \cdot S = \frac{Q^2 \gamma}{2g \cdot S \cdot K_p^2}. \qquad (3.24)$$

Выражение (3.24) – статическая характеристика трубопровода, т.к. устанавливает зависимость между выходной переменной Q, входной ΔP, характеристиками жидкости трубопровода - γ, S, K_p .

Если приложенная сила $\Delta p \cdot S$ превышает гидродинамическое сопротивление трубопровода, то поток начнет двигаться с ускорением. Следовательно, уравнение сил в неустановившемся режиме работы запишется:

$$\Delta P \cdot S = \frac{Q^2 \gamma}{2gS \cdot k_p^2} + m\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad (3.25)$$

где $m = \frac{L \cdot S \cdot \gamma}{g}$ – масса жидкости в трубопроводе, кг.

Подставив вместо ϑ расход жидкости Q после преобразования получим

$$T\frac{dQ}{dt} + Q = K \cdot \Delta P, \qquad (3.26)$$

где $T = \frac{2 \cdot L \cdot S \cdot K_p^2}{Q}$ – постоянная времени,

$K = \frac{2g \cdot S^2 \cdot K_p^2}{Q \cdot \gamma}$ – коэффициент передачи.

Из (3.26) видно, что в динамическом отношении участок трубопровода является нелинейным инерционным звеном первого порядка, нелинейность которого обусловлена зависимостью T и K от расхода жидкости Q.

Если использовать значение K_p полученное из (3.24), то постоянную времени T из (3.26) можно записать в виде

$$T = \frac{L \cdot \gamma \cdot Q}{g \cdot S \cdot \Delta P}. \qquad (3.27)$$

Формула (3.27) позволяет вычислить T трубопровода при номинальном расходе. При других расходах ее можно оценить лишь качественно, т.к. она зависит от расхода Q и перепада давления ΔP, которые связаны между собой квадратичной зависимостью (3.24).

3.2.2 Инженерная идентификация динамических характеристик линейных объектов по кривой разгона

Упрощенный расчет. Наиболее часто для идентификации динамических характеристик объектов осуществляют ступенчатое возмущение 2 (рис. 3.6) входной переменной *u(t)*. Реакция объекта на такое возмущение, получившая

название кривой разгона, представляет собой приращение *Δx(t)* выходной величины *x(t),* обусловленное мгновенным изменением *u(t)* от значения *u(t) = u₀* до величины *u₀=B* в момент времени *t=0*, где *B* – постоянная величина (рис.3.5).

Для упрощения методики определения динамических коэффициентов объекта кривые разгона (см.рис.3.5) целесообразно представлять в безразмерной форме, используя для этого зависимость

$$\bar{x}(t_i) = \frac{x(t_i) - x(0)}{x(\infty) - x(0)}, \tag{3.37}$$

где $\bar{x}(t_i)$ – текущее безразмерное значение выходной величины в момент времени t_i; $x(t_i)$ – экспериментальное значение этой величины в тот же момент времени.

Так как реакции объекта на ступенчатое возмущение представляет собой решение некоторого дифференциального уравнения при известных начальных условиях и входном воздействии, то по их виду можно определить и само дифференциальное уравнение, которое отыскивается в классе уравнении (3.18).

Если кривая разгона имеет вид, показанной на рис. 3.5 *а*, то динамические параметры объекта *T, τ* определяют непосредственно из графика, как показано на рисунке, а коэффициент передачи вычисляют по формуле

$$\kappa = \frac{x(\infty) - x(0)}{u(\infty) - u(0)} = \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{\Delta x}{B}. \tag{3.38}$$

При этом исходное дифференциальное уравнение будет соответствовать второму уравнению (3.18), и его можно записать в виде

$$T\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t - \tau), \tag{3.39}$$

где $T = \frac{a_1}{a_0}$, с; $K = \frac{в_0}{a_0}$.

Если кривая разгона имеет *S*-образную форму (см.рис.3.5, *б*), то дифференциальное уравнение также можно представить уравнением (3.39). Такое приближенное описание производят следующим образом.

На нормированной кривой выбирают две точки *A* и *B* с координатами $\overline{x_A}, t_A$ и $\bar{x}_B, t_B$. Точка *A*, как правило, задается в районе перегиба кривой, а ордината $\overline{x_B}$ принимаются равной 0,8 ÷ 0,9. Эти точки рассматриваются как интерполяционные узлы упрощенной кривой разгона, которая представлена на рис. 3.5, *б* штриховой линией. Условное чистое запаздывание τ_y и постоянная времени T_y определяют на основании выбранных координат *A* и *B* по формулам

$$\tau_y = \frac{t_A \cdot \ln\left(1 - \overline{x_A}\right) - t_B \cdot \ln\left(1 - \bar{x}_B\right)}{\ln\left(1 - \bar{x}_A\right) - \ln\left(1 - \bar{x}_B\right)}, \tag{3.40}$$

$$T_y = \frac{t_A - \tau_y}{\ln\left(1 - \bar{x}_A\right)}. \tag{3.41}$$

Таким образом, передаточную функцию объекта, имеющего *S*-образную кривую разгона приближенно можно представить в виде:

$$W(p)=\frac{ke^{-\tau_y p}}{T_y p+1}, \tag{3.42}$$

где k - коэффициент передачи, согласно (3.38).

Метод площадей. Для расчета параметров, характеризующих дифференциальные уравнения (3.18), порядок которых выше первого, применяют метод площадей. Коэффициенты a_i, $в_i$, входящие в уравнения (3.18), определяются следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\grave{a}_1 = F_1 + b_1;\\ &\grave{a}_2 = F_2 + b_2 + b_1F_1;\\ &\grave{a}_3 = F_3 + b_3 + b_2F_1 + b_1F_2, \end{aligned}\right\}, \tag{3.43}$$

где величины F_1, F_2, F_3 связаны с кривой разгона интегральными соотношениями

$$F_1 = \int_0^\infty \left(1-\bar{x}\right)dt; \tag{3.44}$$

$$F_2 = F_1^2\int_0^\infty \left(1-\bar{x}\right)(1-\theta)d\theta; \tag{3.45}$$

$$F_3 = F_1^3\int \left(1-\bar{x}\right)\left(1-2\theta+\frac{\theta^2}{2}\right)d\theta. \tag{3.46}$$

Здесь $\theta=\dfrac{t}{F_1}$ – относительное время.

В реальных условиях эти интегралы определяются по приближенным формулам.

$$F_1 \approx \Delta t\left\{\sum_{t=0}^{n}\left(1-\bar{x}_1\right)-0{,}5\cdot\left[1-\bar{x}(0)\right]\right\}; \tag{3.47}$$

$$F_2 \approx F_1^2\Delta\theta\left\{\sum_{t=0}^{n}\left(1-\bar{x}_1\right)\cdot(1-\theta_1)-0{,}5\cdot\left[1-\bar{x}(0)\right]\right\}; \tag{3.48}$$

$$F_3 \approx F_1^3\Delta\theta\left\{\sum_{t=0}^{n}\left(1-\bar{x}_1\right)\cdot\left(1-2\theta_1+\frac{\theta_1^2}{2}\right)-0{,}5\cdot\left[1-\bar{x}(0)\right]\right\}. \tag{3.49}$$

В процессе расчетов может оказаться, что одна из величин является отрицательной, например $F_3\langle 0$. Это значит, что в дифференциальном уравнении, соответствующем *S*-образной безразмерной кривой разгона

$$a_3\frac{d^3\bar{x}(t)}{dt^3}+a_2\frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2}+a_1\frac{d\bar{x}(t)}{dt}+\bar{x}(t)=u(t); \tag{3.50}$$

коэффициент a_3 отрицателен, т.е. объект неустойчив. Такой вывод противоречит действительности, т.к. снятая экспериментальная кривая свидетельствует об устойчивости объекта. Следовательно необходимо признать, что сделанное априори предположение о степени левой части дифференциального уравнения неверно. В рассмотренном случае нужно

уменьшить на единицу порядок левой части уравнения (3.50), а правой – увеличить на единицу – т.е. прибавить

$$b_1 \frac{dU(t)}{dt} .$$

Коэффициенты a_1, a_2,$в_1$ определяют из системы уравнений (3.49), если предположить, что $a_3=в_2=в_3=0$.

Если $F_2 \rangle F_3 \rangle 0$, то порядок левой части дифференциального уравнения необходимо также уменьшать на единицу, не прибавляя производную в правой части.

Алгоритм вычислении площадей $F_1, F_2, ... F_5$ представлен на рис. 3.8. Он может быть реализован на ЭЦВМ.

В качестве примера рассмотрены результаты расчета на ЭВМ параметров флотомашины по каналу $Q_в - \alpha$. Кривая разгона объекта по этому каналу дана на рис. 3.9, *а*, из которой определим $\tau_3 = 5$ *с*. Ноль оси времени переносим соответственно в точку, отстоящую на 5 *с* от исходного начала координат, кривую разгона нормируем (рис.3.9,б).

При интервале дискретизации $\Delta T=3c$ исходные массивы для расчета

$$T = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33\}$$
$$X = \{0;\ 0,04;\ 0,09;\ 0,17;\ 0,31;\ 0,47;\ 0,64;\ 0,8;\ 0,9;\ 0,97;0,99;1\}$$

При этом $N = 12$.

В результате вычислении имеем $F_1 = 15,33$; $F_2 = 97,2$; $F_3 = 295$; $F_4 = 32,8$

Так как $0 \langle F_4 \langle F_3$ порядок левой части дифференциального уравнения объекта $n=3$, а правая часть не содержит производных, причем $a_3 = F_3$, $a_2 = F_2$, $a_1 = F_1$.

Блок-схема алгоритма вычислении площадей F_1, F_2, F_3.

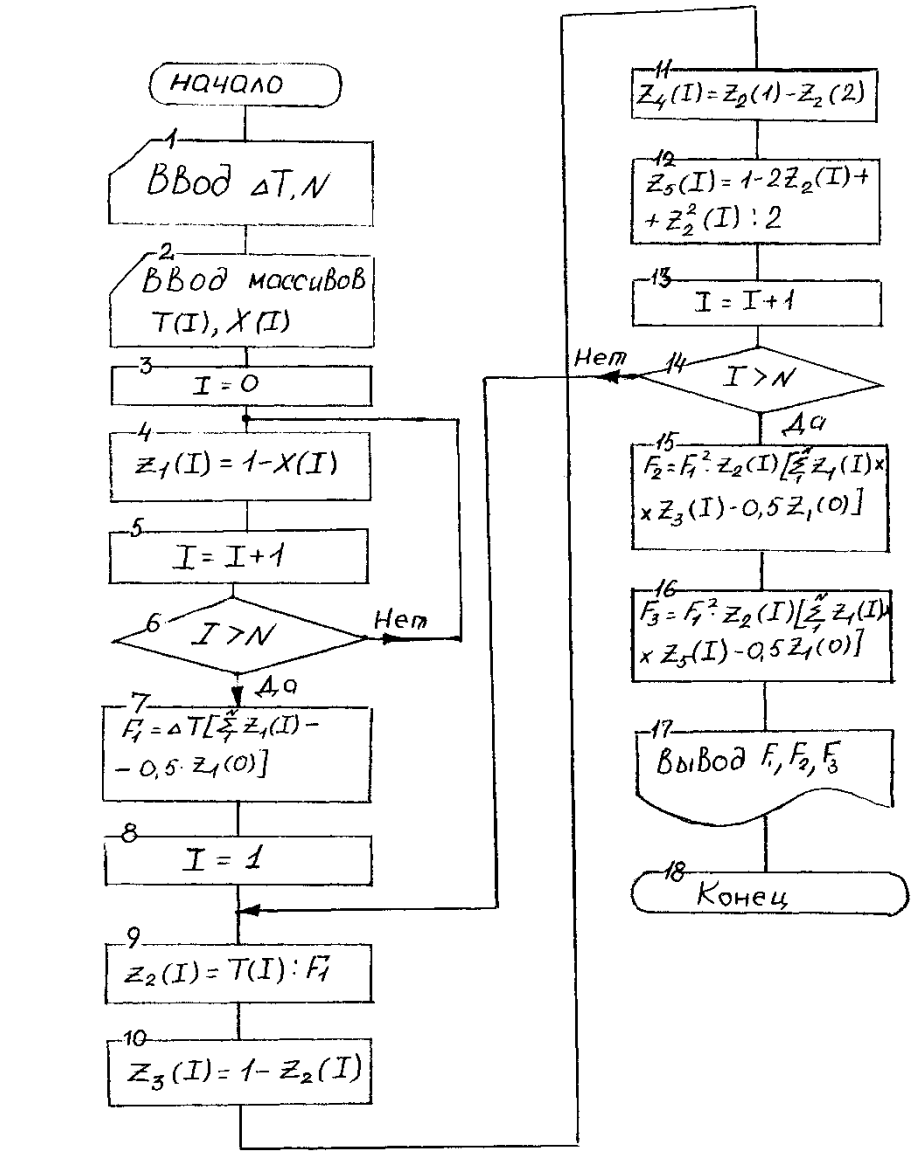


Рис. 3.8 Алгоритм вычисления площадей

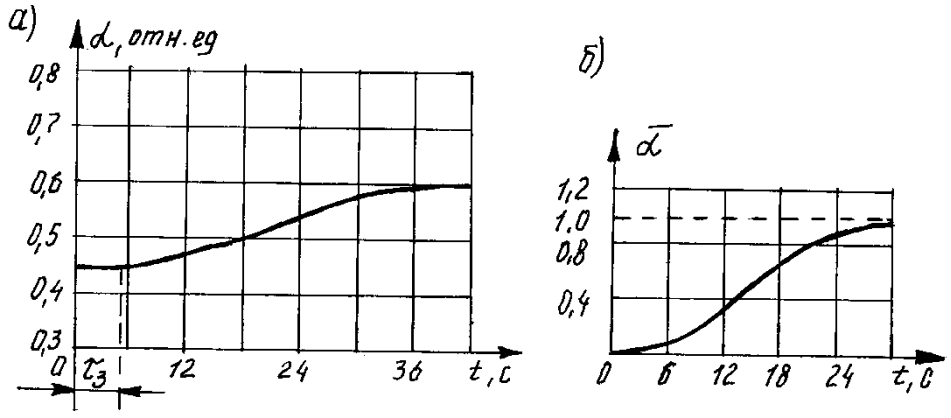


Рис. 3.9 Кривая разгона (а) и нормированная кривая разгона (б) флотомашины по каналу изменение расхода воздуха $Q_В$ на входе аэратора ($\Delta Q_В$ =1м^3/ч) – *изменение степени аэрации угольной пульпы α при расходе пульпы, поступающей на флотацию $Q_П$ = 6,75 м^3/мин.*

Коэффициент передачи объекта (см.рис.3.9,*а*)

$$k = \frac{0{,}15}{1} = 0{,}15$$

С учетом полученных расчетных результатов дифференциальное уравнение флотомашины имеет вид в соответствии с (3.50)

$$295\frac{d^3x(t)}{dt^3} + 97{,}2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 15{,}3\frac{d(t)}{dt} + x(t) = 0{,}15 \cdot u(t-5),$$

где $x(t) = \Delta\alpha(t);\ \ u(t) = \Delta Q_B$.

3.2.3 Применение статистических методов для идентификации динамических характеристик промышленных объектов

Эти методы базируются на применении интегрального уравнения Винера – Хопфа

$$R_{ux}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - t) \cdot W(t)dt\,, \qquad (3.52)$$

где $R_{ux}(\tau)$ – взаимокорреляционная функция между входными и выходными переменными объекта; $R_{uu}(\tau)$ – автокорреляционная функция входной переменной; $W(t)$ – импульсная переходная (весовая) функция объекта по исследуемому каналу.

Уравнение (3.52) решают в три этапа:

1) на интервале времени *T* записывают случайные процессы $u(t)$, $x(t)$ на входе и выходе объекта;

2) по полученным экспериментальным данным вычисляют $R_{uu}(\tau); R_{ux}(\tau)$;

3) уравнение (3.52) решают или в частотной области относительно $W(jw)$ –АФЧХ, или во временной области относительно *W(t)* для данного канала управления, или с применением АВМ.

При этом считают, что объект по данному каналу управления линеен, а случайные процессы $u(t)$, $x(t)$ – стационарны и эргодичны.

Взаимокорреляционная функция двух стационарных случайных процессов $u(t)$ и $x(t)$ на входе и выходе объекта.

$$R_{ux}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left[u(t) - \bar{u}\right]\cdot\left[x(t+\tau) - \bar{x}\right]dt\,, \qquad (3.53)$$

а если обратить процесс корреляции функции $u(t)$ [либо функции $x(t)$] на саму себя, то получим автокорреляционную функцию.

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\cdot\int_0^{T-\tau}\left[u(t) - \bar{u}\right]\cdot\left[u(t+\tau) - \bar{u}\right]d\tau\,, \qquad (3.54)$$

где $\bar{u} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T u(t)\cdot dt\,;\ \bar{x} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T x(t)\cdot dt$

При практическом использовании (3.53) и (3.54) интегралы заменяют суммами, для чего осуществляют дискретизацию интервала реализации

случайной функции $T = \Delta N$, где N – число фиксируемых ординат с постоянным интервалом Δ (рис. 3.10)

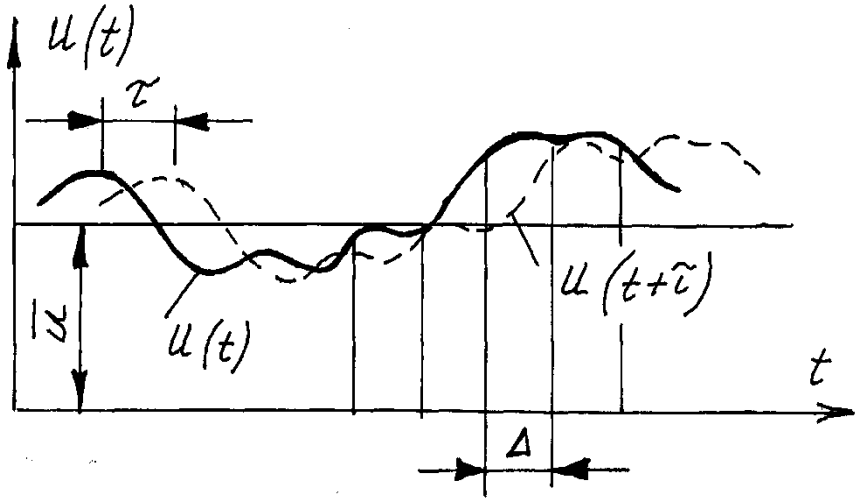


Рис. 3.10. Определение автокорреляционной функции $R_{ии}(\tau)$

Текущее время t и τ также представляют в дискретном виде

$$t = \nu \cdot \Delta, \text{ где } \quad \nu = 1,2,3,...;$$

$$\tau = \mu \cdot \Delta, \text{где } \quad \mu = 0,1,2,....$$

С учетом этих обозначений в дискретной форме выражение (3.54) можно записать

$$R_{uu}(\mu) \approx \frac{1}{N-\mu} \cdot \sum_{\nu=1}^{N-\mu} u_\nu \cdot u_{\nu+\mu} \tag{3.55}$$

$$R_{uu}(\mu \cdot \Delta) = R_{uu}(\mu); \quad u(\nu\Delta) = u_\nu; \quad u[(\nu+\mu)\cdot\Delta] = u_{\nu+\mu}.$$

Взаимокорреляционную функцию вычисляют по аналогичному выражению

$$R_{ux}(\mu) \approx \frac{1}{N-\mu} \cdot \sum_{\nu=1}^{N-\mu} u_\nu \cdot x_{\nu+\mu} \tag{3.56}$$

Формулы (3.55) и (3.56) позволяют рассчитать функции $R_{uu}(\tau), R_{xu}(\tau)$, по одной реализации процесса $u(t)$ и процесса $x(t)$ длиной T при помощи измерения ординат этих реализации через промежутки времени Δ. Для построения одной из указанных функций, например, $R_{uu}(\tau)$, необходимо образовать функции $u(t+\tau)-\bar{u}$, сдвинув $u(t)-\bar{u}$ на интервал τ (см.рис. 3.10) и перемножить на всем исследуемом интервале $0 \div (T-\tau)$ ординаты $u(\nu)$ и $u_{\nu+\mu}$. Затем полученные произведения суммируют и находят среднее значение суммы делением на N-μ.

В результате таких вычислений получим одну точку кривой автокорреляционной функции соответствующую сдвигу $\tau = \mu \cdot \Delta$. Последовательно изменяя величину μ и произведя указанные операции, находим все точки $R_{uu}(\tau)$.

Точность вычислений корреляционных функций зависит от продолжительности реализации T. При выборе величины T по полуэмпирической зависимости $T \geq 10\tau_{\max}$ погрешность не превышает 2 %. Здесь $\tau_{\max}$ – интервал времени τ, после которого выполняется неравенство $|R_{uu}(\tau) \leq 0{,}05 \cdot R_{uu}(0)|$. С другой стороны, если известна минимальная (нижняя) частота $\omega_н$ спектра случайного процесса $u(t)$, то можно принять

$$\tau_{\max} \geq \frac{2\pi}{\omega_н}.$$

Интервал дискретизации Δ выбирают также по полуэмпирической формуле

$$\Delta = \frac{\pi}{10 \cdot \omega_B},$$

где ω_β – максимальная (верхняя) частота спектра случайного процесса $u(t)$. Чаще интервал Δ выбирают таким образом, чтобы функция $u(t)$ мало изменялась в этом промежутке. Такие вычисления, как правило, производят на ЭВМ.

Решение в частотной области. Для этого умножим обе части (3.52) на $e^{-j\omega\tau}$ и проинтегрируем по τ от -∞ до +∞, тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{ux}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{uu}(\tau - t) d\tau. \qquad (3.57)$$

Обозначим

$$S_{ux}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{ux}(\tau) d\tau; \qquad (3.58)$$

$$S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot R_{uu}(\tau) d\tau. \qquad (3.59)$$

(3.58) и (3.59) – преобразования Фурье от корреляционных функций $R_{ux}(\tau)$ и $R_{uu}(\tau)$ и представляют собой спектральные плотности соответствующих случайных процессов.

Из теории автоматического управления известно, что передаточная функция *W(p)* и импульсная характеристика *W(t)* объекта взаимно однозначно связаны прямым и обратным преобразованием Лапласа:

$$W(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} \cdot W(t) dt; \qquad (3.60)$$

$$W(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{-j\infty}^{+j\infty} W(p) \cdot e^{pt} dp, \quad t > 0. \qquad (3.61)$$

Тогда на основании (3.57)-(3.60) с учетом $ð = j\omega$ имеем

$$S_{ux}(\omega) = W(j\omega) \cdot S_{uu}(\omega), \qquad (3.62)$$

где $W(j\omega)$-амплитудно-фазовая характеристика объекта. Следовательно, для определения $W(j\omega)$ важно точно установить соотношение между спектральными плотностям $S_{ux}(\omega)$ и $S_{uu}(\omega)$ входного и выходного случайных сигналов.

С другой стороны, известно, что спектральные плотности выходного $S_{xx}(\omega)$ и входного $S_{uu}(\omega)$ сигналов связаны квадратом модуля АФЧХ, т.е.

$$S_{xx}(\omega) = |W(j\omega)|^2 \cdot S_{uu}(\omega) \qquad (3.63)$$

или

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{\frac{S_{xx}(\omega)}{S_{uu}(\omega)}}$$

Так как автоспектральные плотности $S_{xx}(\omega)$, $S_{uu}(\omega)$ вычисляются проще, чем взаимоспектральная плотность $S_{ux}(\omega)$, то с практической точки зрения уравнение (3.63) более удобно, чем (3.62)

Автоспектральные плотности можно вычислить по приближенной формуле

$$S(\nu \cdot \Delta\omega) = 0{,}54 \cdot \Phi_\nu + 0{,}23 \cdot (\Phi_{\nu-1} + \Phi_{\nu+1}), \quad \nu = 1,2,3,\ldots,m, \qquad (3.64)$$

где $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{(2m+1)\cdot\Delta}$;

$$\Phi_\nu = \left[R(0) + 2\sum_{\mu=1}^{m} R(\mu\cdot\Delta)\cdot\cos\frac{2\pi}{2m+1}\cdot\nu\mu \right]\cdot\Delta.$$

Пример. Определить динамическую модель сепаратора по каналу изменений расходов исходного материала Q_1 и готового продукта Q_2.

Известны $\omega_н = 0{,}1$ с$^{-1}$; $\omega_в = 0{,}5$ с$^{-1}$

Тогда

$$\tau_{max} \geq \frac{2\pi}{\omega_н} = \frac{2\pi}{0{,}1} \approx 63 \text{ с},$$

интервал времени наблюдения $T \geq 10\ \tau_{max} = 10f63 = 630\ c$ и интервал дискретизации $\Delta = \dfrac{\pi}{10\cdot\omega_B} = \dfrac{\pi}{10\cdot 0{,}5} = 0{,}63\ c.$

По формуле (3.55) используя реализации сигналов датчиков при T > 630 с, вычислены автокорреляционные функции $R_{Q_1Q_1}(\tau)$, $R_{Q_2Q_2}(\tau)$ (рис.3.11, а), а затем по формуле (3.64) получены спектральные плотности $S_{Q_1Q_1}(\omega)$, $S_{Q_2Q_2}(\omega)$ (рис.3.11,б).

Модуль передаточной функции $|W_{Q_1Q_2}(j\omega)|$ по каналу управления Q_1 - Q_2 определен по формуле (3.63) и представлен на рис. 3.11, в

На основании модуля передаточной функции найдена логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.11, г)

$$A_{Q_1Q_2}(\omega) = 20\lg\left|W_{Q_1Q_2}(j\omega)\right|. \qquad (3.65)$$

Кривую 1 удобно аппроксимировать тремя отрезками: горизонтальным и двумя наклонными с наклоном –20 и –40 (дБ) на декаду. Тогда

$$W_{Q_1Q_2}(p) = \frac{k_{Q_1Q_2} \cdot e^{-\tau_з p}}{(T_1 p + 1)\cdot(T_2 p + 1)}\ . \qquad (3.66)$$

Значения T_1 и T_2 определяют по сопряженным частотам $\omega_1 = 0{,}14$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 0{,}41$ с$^{-1}$ (см.рис. 3.11, г), $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 7{,}14c; T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 2{,}44c.$

Для вычисления $k_{Q_1Q_2}$ и $\tau_З$ необходимо помимо автокорреляционной функции $R_{Q_1Q_1}(\tau)$ определить взаимокорреляционную функцию $R_{Q_1Q_2}(\tau)$ по тем же формулам (3.55), (3.56), а затем произвести их нормировку по формулам

$$\rho_{Q_1Q_2}(\tau) = \frac{R_{Q_1Q_1}(\tau)}{R_{Q_1Q_1}(0)}\ ; \qquad (3.67)$$

$$\rho_{Q_1Q_2}(\tau) = \frac{R_{Q_1Q_2}(\tau)}{\sqrt{R_{Q_1Q_1}(0)\cdot R_{Q_2Q_2}(0)}}. \qquad (3.68)$$

На рис. 3.11, д приведены графики нормированных авто- и взаимокорреляционных функций $\rho_{Q_1Q_1}(\tau)$ и $\rho_{Q_1Q_2}(\tau)$.

Коэффициент усиления объекта определяют как отношение площадей под кривыми $\rho_{Q_1Q_1}(\tau)$ и $\rho_{Q_1Q_2}(\tau)$, т. е.

$$k_{Q_1Q_2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{Q_1Q_2}(\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{Q_1Q_1}(\tau)d\tau}\ , \qquad (3.69)$$

а запаздывание – как разность между моментами времени, при которых функция $\rho_{Q_1Q_1}(\tau)$ и $\rho_{Q_1Q_2}(\tau)$ становятся отличными от нуля

$$\tau_з = \tau_{спQ_1Q_1} - \tau_{нQ_1Q_2} \qquad (3.70)$$

где $\tau_{спQ_1Q_1}$ – время спада автокорреляционной функции;

$\tau_{нQ_1Q_2}$ – интервал времени от начала взаимокорреляционной функции до начала координат. Имеем $K_{Q_1Q_2} = 0{,}78$; $\tau_З$=27 с.

Таким образом, искомая передаточная функция сепаратора принимают вид $W(p) = \frac{0{,}78}{(7{,}14p+1)\cdot(2{,}44p+1)} e^{-27p}$

Иногда запаздывание принимают $\tau_з^{'}$, называемые эквивалентным, т.к. оно частично учитывает инерционные свойства объекта (см. рис. 3.11, д).

Решение в области изображений по Лапласу.

Для этой цели применимо преобразование Лапласа к правой части (3.52), в результате чего получим уравнение передаточной функции, аналогичное (3.66), т.е.

$$W(p)=\frac{R^*_{ux}(p)}{R^*_{uu}(p)}=\frac{\int_0^\infty e^{-p\tau}\cdot R^*_{ux}(\tau)\cdot d\tau}{\int_0^\infty e^{-p\tau}\cdot R^*_{uu}(\tau)\cdot d\tau}, \qquad (3.71)$$

где $R^*_{ux}(p)$ и $R^*_{uu}(p)$ – изображения корреляционных функций.

Если аппроксимировать экспериментальные корреляционные функции $R_{uu}(\tau)$ и $R_{ux}(\tau)$ известными временными функциями, а затем получить их изображения по Лапласу и найти отношение изображений (3.71), то получим передаточную функцию по каналу управления.

С достаточной точностью $R_{uu}(\tau)$ могут быть аппроксимированы экспонентой

$$R^*_{uu}(\tau)=A_1\cdot e^{-\alpha_{1\cdot\tau}} \qquad (3.72)$$

или затухающей периодической функцией

$$R^*_{uu}(\tau)=A_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot\tau}\cdot\left(\cos\omega\tau+\frac{\alpha_2}{\omega}\cdot\sin\omega\tau\right), \qquad (3.73)$$

где $\alpha_1=\frac{3}{\tau_k}$; $\alpha_2=\omega\cdot tg\gamma$; $\omega=\frac{\pi}{\tau_2-\tau_1}$; $\gamma=arctg\frac{\alpha_2}{\omega}=\frac{\pi\cdot(3\tau_1-\tau_2)}{2\cdot(\tau_2-\tau_1)}$. (3.74)

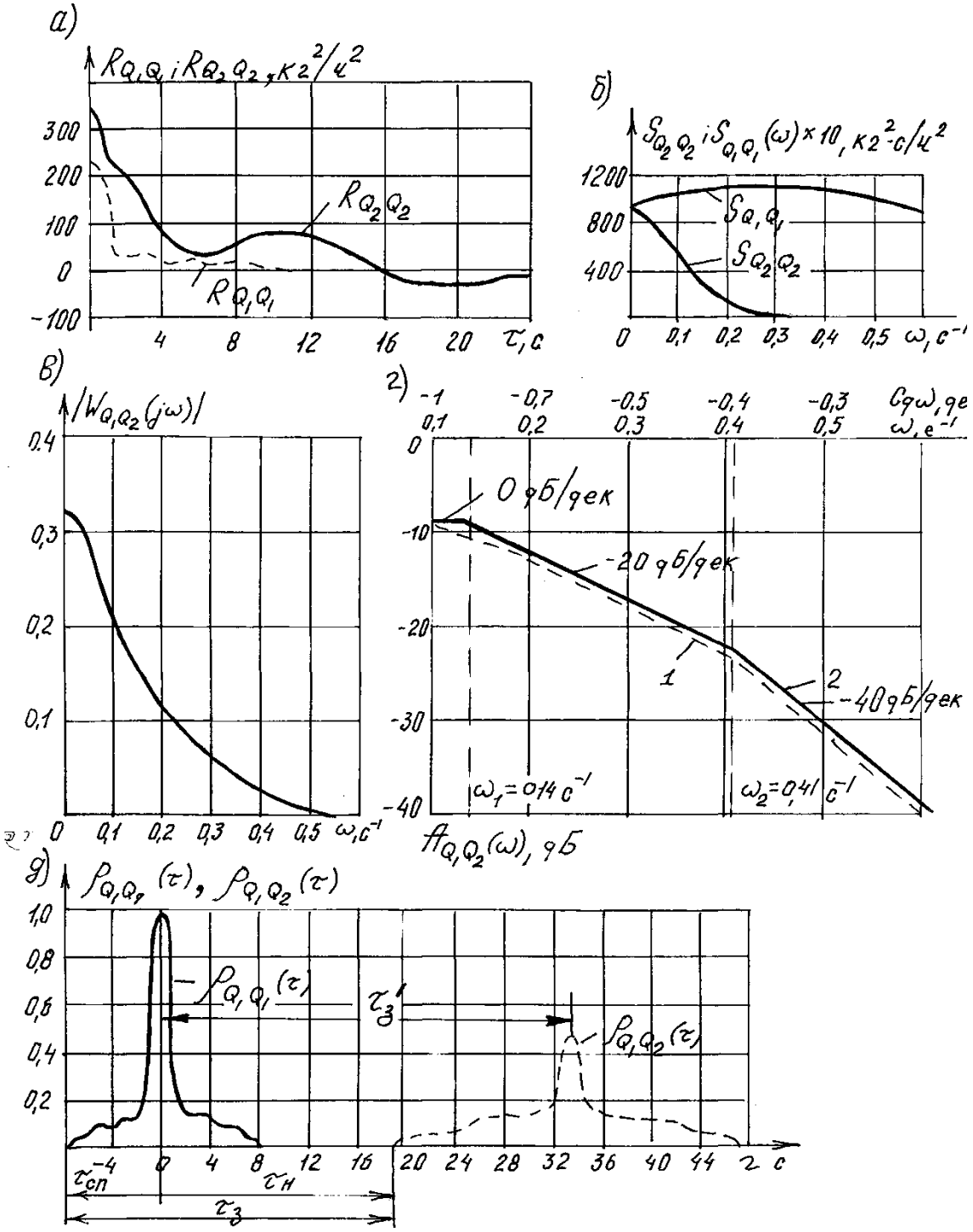


Рис. 3.11 Графики для определения передаточной функции сепаратора *статистическим методом: а – автокорреляционные функции расхода исходного материала Q_1 и готового продукта Q_2; б – спектральные плотности; в – графики изменения модуля передаточной функции (3.63); г – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика объекта:*

$$1 - W_{Q_1Q_2}(j\omega) = 20\lg\left|W_{Q_1Q_2}(j\omega)\right|;\quad 2 - W_{Q_1Q_2}(j\omega) = \frac{k_{Q_1Q_2}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

д) – графики нормированных авто- и взаимокорреляционных функций.

Исходные данные для вычисления коэффициентов указанных функций определяют по графикам (рис. 3.12, *а*, *б*).

Взаимокорреляционные функции достаточно точно аппроксимируются выражениями

$$R^*_{ux}(\tau) = A_3 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \tau} - A_4 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot \tau} \qquad (3.75)$$

$$R^*_{ux}(\tau) = A_3 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot \tau} \cdot \left(\cos \omega\tau + \frac{\alpha_1}{\omega} \cdot \sin \omega\tau \right) - A_4 \cdot e^{-\alpha_2 \tau}, \ \tau \rangle 0 \qquad (3.76)$$

Если экспериментальная взаимокорреляционная функция $R_{ux}(\tau)$ с ростом τ затухает без колебания, то ее удобно аппроксимировать алгебраической суммой экспонент 1 и 2 (рис. 3.12, в) согласно выражения (3.75). Если $R_{ux}(\tau)$ с ростом τ представляет затухающий процесс, то ее удобно аппроксимировать (3.76), состоящем из затухающей периодической функции 1 и экспоненты 2 (рис. 3.12, г). Коэффициенты A_3, A_4, α_1, α_2, ω входящие в (3.75), (3.76) рассчитывают методом наименьших квадратов.

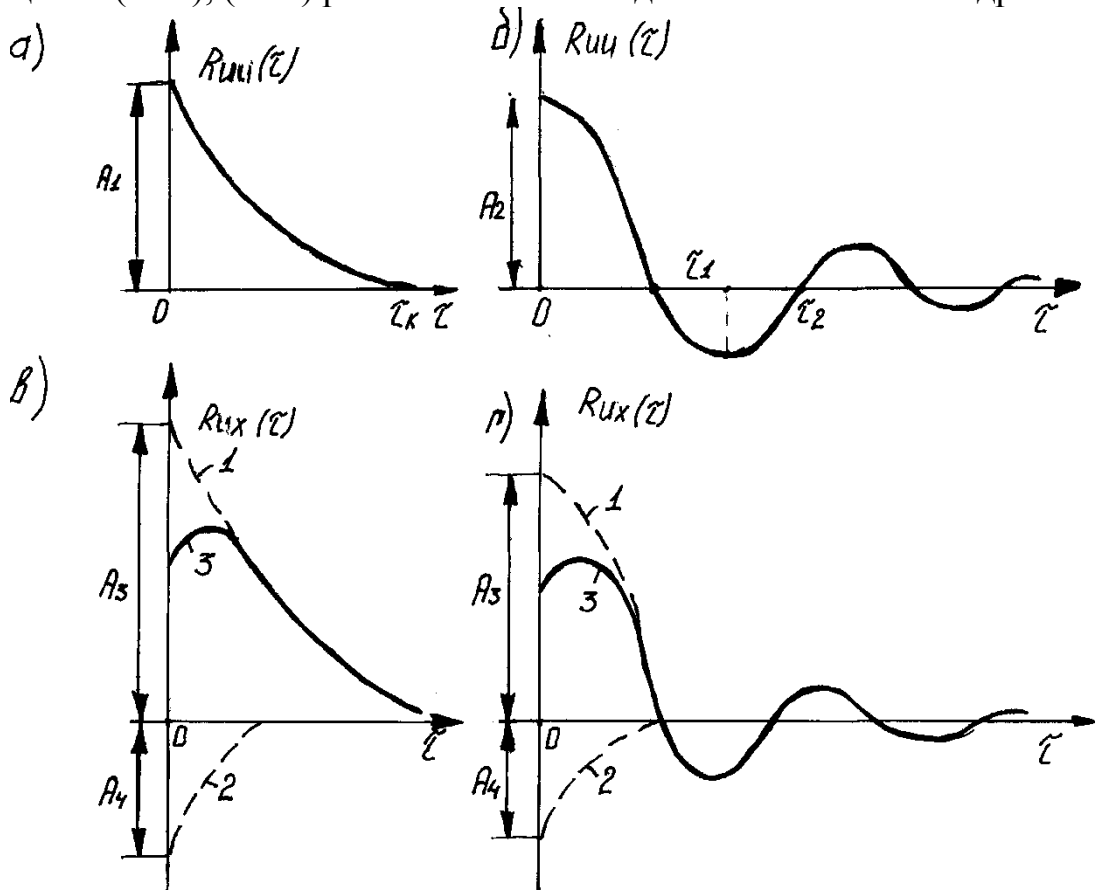


Рис. 3.12 Аппроксимация автокорреляционных функций $R_{uu}(\tau)$ (а,б) и взаимокорреляционных функций $R_{ux}(\tau)$ (в,г)

Безразмерный коэффициент передачи объема k, по исследуемому каналу управления, можно определить как передаточную функцию объекта $W(0)$ в установившемся режиме, приняв $p = 0$.

Решение на операционных усилителях. Если априори известна, то динамическая структура объекта

$$T \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t - \tau) \qquad (3.77)$$

и известны корреляционные функции $R_{ux}(\tau)$ и $R_{uu}(\tau)$, полученные на базе статистической обработки стационарных случайных процессов $u(t)$, $x(t)$ на входе и выходе объекта, то справедлива зависимость

$$T \cdot \frac{dR_{ux}(t)}{dt} + R_{ux}(t) = k \cdot R_{ux}(t - \tau). \qquad (3.78)$$

Это значит, что если на вход системы, состоящей из инерционного звена первого порядка и звена запаздывания, подать известный сигнал системы в виде автокорреляционной функции $R_{uu}(t)$, то выходной сигнал системы будет представлять собой взаимокорреляционную функцию $R_{ux}(t)$.

Процесс идентификации динамических характеристик объекта на операционных усилителях осуществляют следующим образом:

регистрируют случайные сигналы $u(t)$, $x(t)$ на входе и выходе объекта и определяют авто- и взаимокорреляционные функции $R_{uu}(t), R_{ux}(t)$;

–составляют динамическую модель системы (3.78) и набирают ее на операционных усилителях так, чтобы было можно изменять коэффициенты T, τ, k (рис. 3.13, а). Первоначально эти коэффициенты устанавливают из априорных данных об исследуемом объекте;

на вход аппроксимируещей модели подается сигнал, соответствующий автокорреляционной функции $R_{uu}(t)$, при этом получаемый на выходе сигнал зависит от установленных значений коэффициентов T, τ, k. Значения функции $R'_{ux}(t)$ полученный после перерасчета с выходного сигнала модели, сравнивают со значениями ранее рассчитанной функции $R_{ux}(t)$;

–варьируют коэффициенты T, τ, k так, чтобы функции $R'_{ux}(t)$ и $R_{ux}(t)$ максимально сблизились качественно. Для оценки сближения кривых используют, как правило, критерий среднего квадратичного отклонения $R'_{ux}(t)$ и $R_{ux}(t)$, т.е.

$$\left(\bar{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{T_k} \cdot \int_0^k \left[R'_{ux}(t) - R_{ux}(t)\right]^2 \cdot dt, \qquad (3.79)$$

где T_k – время корреляции, определяемое по $R_{ux}(t)$.

Полностью схема моделирования приведена на рис. 3.13, б. Величина запаздывания τ меняется с помощью блока переменного запаздывания БПЗ, входящего в комплект операционных усилителях. Коэффициент T можно менять емкостью конденсатора С (с помощью магазина емкостей),

при постоянном $R2$, т.к. $T = R_2 \cdot C$. Коэффициент k можно менять изменением величины коэффициента α или дискретным изменением величины сопротивления $R1$ (при $R2 = 1 мОм$, $k = \frac{\alpha}{R1}$).

Функции $R_{uu}(\tau)$ и $R_{ux}(\tau)$ набирают на блоках нелинейности соответственно БН1 и БН2. Усилитель У1 формирует линейное напряжение, пропорционально времени. Суммирующий усилитель У3 совместно с блоком нелинейности БН3 (квадратор) и интегрирующим усилителем У4 реализует схему среднего квадратичного отклонения по формуле (3.79). Индикатор И4 предназначен для качественного сравнения кривых $R'_{ux}(t)$ и $R_{ux}(t)$.

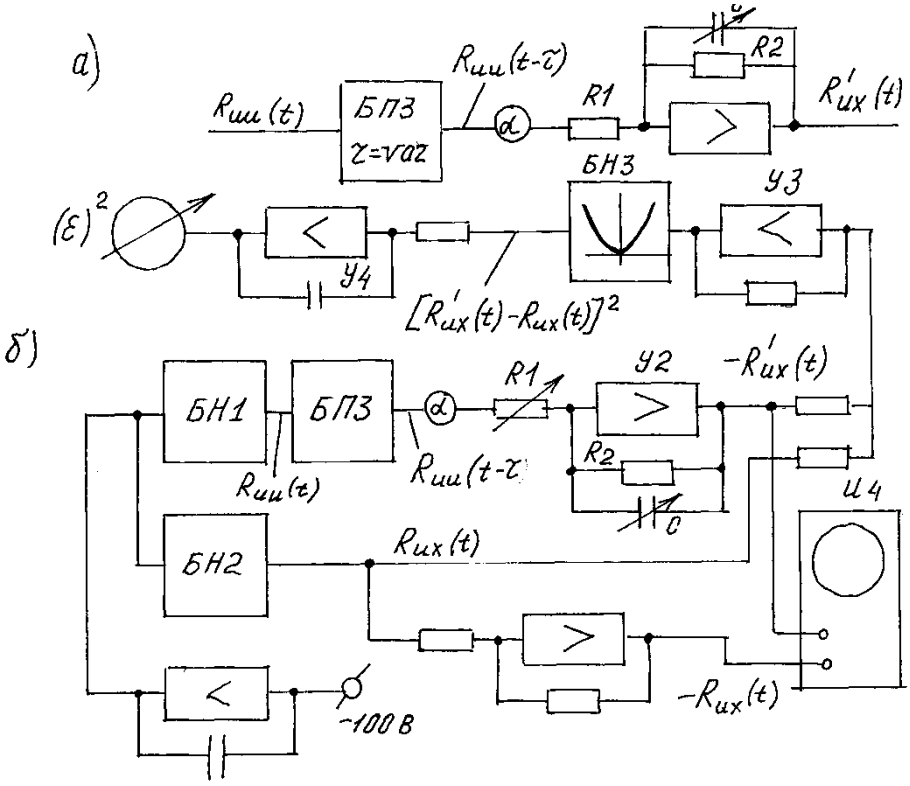


Рис. 3.13 Идентификация объекта при помощи АВМ, аппроксимированного инерционным звеньям первого порядка и звеном запаздывания

Необходимо отметить, что, как правило, диапазон изменения коэффициентов T и k велик, поэтому для более целенаправленного перебора коэффициентов T, τ, k в процессе поиска минимума $(\varepsilon)^2$ рекомендуется применять метод планирования экстремальных экспериментов.

Аналогичным образом можно произвести идентификацию объекта, аппроксимированного звеном второго порядка и звеном запаздывания.

В этом случае уравнение имеет вид

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 R_{ux}(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dR_{ux}(t)}{dt} + R_{ux}(t) = k \cdot R_{uu}(t - \tau). \qquad (3.80)$$

Здесь необходимо произвести на модели поиск уже четырех коэффициентов T_1, T_2, τ, k. Без использования методов планирования экстремальных экспериментов поиск коэффициентов в этом случае затруднителен.

3.3 Идентификация динамики существенно нелинейных объектов

Большинство объектов промышленной технологии инерционны и имеют существенно нелинейные статические характеристики. Их структурная схема может быть представлена цепью, последовательно соединенных линейного инерционного с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{z(p)}{u(p)}$$

и нелинейного безинерционного со статической характеристикой $x=f(z)$ звеньев (рис. 3.14, а)

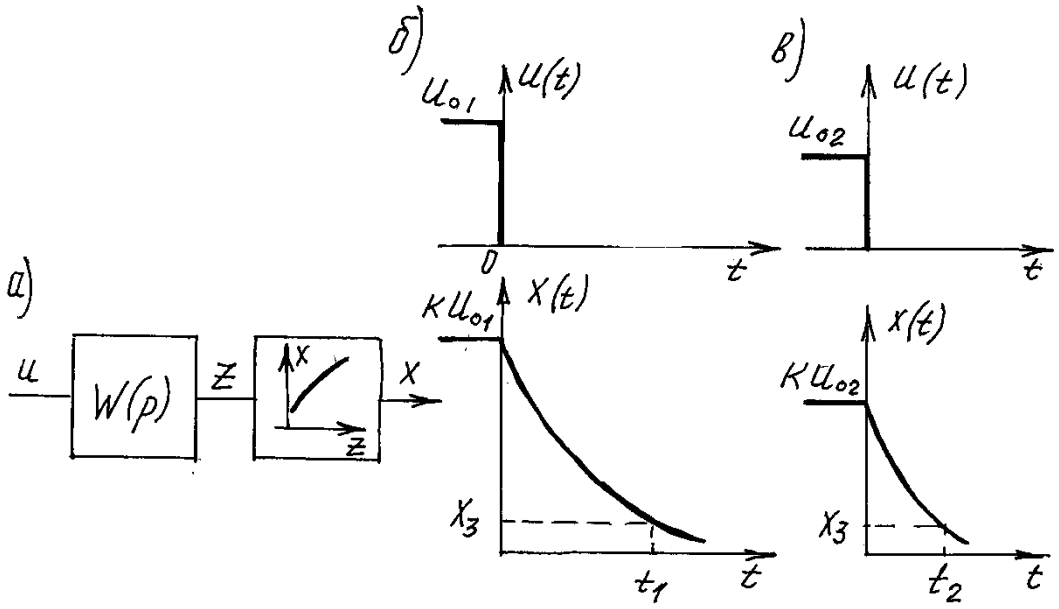


Рис. 3. 14. Структура динамических нелинейных объектов (а) и изменение выходной переменной таких объектов во времени при двух значениях ступенчатых возмущений на входе u_{01} (б) и u_{02} (в).

Примером, существенно нелинейного инерционного объекта, может служить барабанная мельница, для которой $u \to Q$ (т/ч) – производительность по руде, $z \to \varphi_p$ (%) – степень заполнения барабана измельчаемым материалом, $x \to P_Д$ (кВт) – активная мощность приводного двигателя мельницы. Подобную динамическую структуру имеют также дробилки, сушильные барабаны, отсадочные машины и много др. аппаратов.

Приближенно линейное инерционное звено можно представить как апериодическое звено первого порядка, тогда его передаточная функция при

подаче на вход ступенчатого возмущения, вызывающего уменьшение переменной z до нуля, выражается в виде

$$z(t) = k \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (3.81)$$

где T и k – соответственно постоянная времени и коэффициент усиления звена; u_0 – начальное значение входной переменной до подачи ступенчатого возмущения.

Для большинства технологических аппаратов нелинейное звено может быть описано уравнением параболы

$$x = az^2 + bz + c \qquad (3.82)$$

Тогда переходная функция объекта определяется подстановкой значения z из (3.81) в (3.82).

$$x = a \cdot k^2 \cdot u_0^2 \cdot e^{-\frac{2t}{T}} + b \cdot k \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + c, \qquad (3.83)$$

а производная x по z

$$\frac{dx}{dz} = 2 \cdot a \cdot z + b = 2 \cdot a \cdot k \cdot u_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + b. \qquad (3.84)$$

Из уравнений (3.82) и (3.84) следует, что каждому значению x соответствует одно определенное значение $\frac{dx}{dz}$. Поэтому для значения переменной $x = x_3$ (рис. 3.14, б, в), которое наступает в различные моменты времени t_1 и t_2 при подаче на вход объекта различных степеней воздействия u_{0_1} и u_{0_2}, можно написать равенство

$$u_{0_1} \cdot e^{-\frac{t_1}{T}} = u_{0_2} \cdot e^{-\frac{t_2}{T}}. \qquad (3.85)$$

Решив (3.85) относительно T, окончательно получим

$$T = \frac{t_1 - t_2}{\ln u_{0_1} - \ln u_{0_2}}. \qquad (3.86)$$

Формула (3.86) пригодна для расчета T и при наличии в объекте постоянного транспортного запаздывания τ, т.к. в этом случае $t_1 = t_1' - \tau$; $t_2 = t_2' - \tau$.

Числитель формулы (3.86) выражается равенством

$$t_1 - t_2 = t_1' - t_2'$$

из которого следует, что необходимости в специальном учете транспортного запаздывания нет.

Таким образом, последовательность определения постоянной времени T сводится к следующему:

– устанавливают определенный уровень u_{0_1} входной переменной;

– подают в некоторый момент времени ступенчатое возмущение в направлении уменьшения x и измеряют время t_1, в течение которого достигается заданный уровень выходной переменной $x_з$;

– устанавливают новый уровень u_{0_2} и повторяют предыдущий пункт, в результате определяют время t_2.

Рассчитывают T, используя (3.86) и значения t_1, t_2, u_{0_1}, u_{0_2}.

Если в результате отключения питателей мельницы мокрого самоизмельчения, на которых предварительно устанавливалось два уровня производительности ($Q_{01} = 85 т/ч$ и $Q_{02} = 65 т/ч$), время достижения мощностью $P_Д$ заданного значения $P_{Д\,з}$=1250 кВт соответствует $t_1 = 12{,}5$ мин и $t = 9$ мин, то постоянная времени мельницы $T = 12{,}9$ мин.

Чистое запаздывание τ можно определить непосредственно из осциллограмм переходных процессов.

Таким образом удается существенно нелинейный инерционный объект в определенном диапазоне изменения входной переменной $u_{0_1} - u_{0_2}$ представить приближенно как линейный, т.е. описать дифференциальным уравнением вида

$$T \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t - \tau). \qquad (3.87)$$

3.4 Представление математических моделей объектов управления в нормальной форме

Любое дифференциальное уравнение можно представить эквивалентной записью относительно фазового пространства. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$T \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t) \qquad (3.88)$$

в нормальной форме имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{k \cdot u(t) - x(t)}{T} \quad \text{или} \quad x = -x \cdot \frac{1}{T} + \frac{k}{T} \cdot u. \qquad (3.89)$$

Дифференциальному уравнению инерционного звена второго порядка

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \cdot u(t)$$

соответствует система уравнений в нормальной форме

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot x_2 - \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \cdot x_1 + \frac{k}{T_1 \cdot T_2} \cdot u, \end{aligned}\right\}, \qquad (3.90)$$

где $x = x_1$.

Для дифференциального уравнения n-го порядка, записанного в обычном виде

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t) = b_0 \cdot u(t) \qquad (3.91)$$

имеем следующую систему нормальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ ..... \\ \dot{x}_{n-1} = x_n; \\ \dot{x}_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x_n - \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot x_{n-1} + ... + \left(-\frac{a_1}{a_n} \right) \cdot x_2 - \frac{a_0}{a_n} \cdot x_1 + \frac{b_0}{a_n} \cdot u \end{array}\right\} \qquad (3.92)$$

Составление системы нормальных уравнений усложняется, если дифференциальное уравнение объекта имеет производные от u, т.е.

$$\frac{d^n x(t)}{dt} + a_n \cdot \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \cdot x(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_0 \cdot u(t) \qquad (3.93)$$

В этом случае систему нормальных уравнений ищут в виде

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n + c_1 \cdot u; \\ \dot{x}_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n + c_2 \cdot u; \\ ..... \\ \dot{x}_n = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + ... + a_{nn} \cdot x_n + c_n \cdot u \end{array}\right\}, \qquad (3.94)$$

где a_{ij} и c_i – искомые коэффициенты, которые определяют так, чтобы решения исходного уравнения (3.93) и системы (3.94) были бы эквивалентны. Для вычисления a_{ij} составляют характеристический определитель системы (3.94)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \alpha \end{vmatrix}. \qquad (3.95)$$

Раскрывая определитель (3.95) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α, полученного характеристического полинома соответствующим коэффициентом характеристического полинома из левой части (3.93), определяют a_{ij}. При вычислении указанных коэффициентов имеется свобода произвольного выбора, т.к. число неизвестных равно n^2, а

число известных коэффициентов a_k в (3.93) равно n. Для определения коэффициентов c_i составляют присоединенный определитель Δ_1, отличающийся от Δ тем, что элементы первого столбца a_{ij} заменяются элементами c_i

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -c_2 & a_{22}-\alpha & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\alpha \end{vmatrix}. \qquad (3.96)$$

Раскрывая (3.96), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях (3.96) и в правой части (3.93), считая, что a_{ij} известны.

Дифференциальные уравнения вида (3.93) характерны для объектов промышленной технологии, обладающих транспортным запаздыванием. Действительно передаточную функцию звена чистого запаздывания можно разложить в степенной ряд Пада

$$e^{-\tau_з p} = \frac{1-\frac{\tau_з}{2}\cdot p+\frac{\tau_з^2}{8}\cdot p^2-\frac{\tau_з^3}{48}\cdot p^3+\dots}{1+\frac{\tau_з}{2}\cdot p+\frac{\tau_з^2}{8}\cdot p^2+\frac{\tau_з^3}{48}\cdot p^3+\dots} = \frac{1-\kappa_1 p+\kappa_2 p^2-\kappa_3 p^3+\dots}{1+\kappa_1 p+\kappa_2 p^2+\kappa_3 p^3+\dots}, \qquad (3.97)$$

что приведет к образованию производных в правой части дифференциального уравнения. В практических случаях обычно оставляют два или один член разложения (3.97).

В качестве примера представим в нормальной форме дифференциальное уравнение мельницы мокрого самоизмельчения по каналу: изменение производительности на входе Q (т/ч); изменение мощности приводного двигателя P_a (кВт), если $T = 12{,}5 мин$, $\tau_з = 10 мин$, $k = 8{,}5 кВт/т/ч$..

Разложив e^{-10p} в ряд Пада с оставлением одного члена, получим передаточную функцию мельницы в виде

$$W(p) = \frac{P_a(p)}{Q(p)} = \frac{8{,}5}{(12{,}5p+1)}\cdot e^{-10p} = \frac{8{,}5\cdot(1-5p)}{(12{,}5p+1)\cdot(5p+1)} = \frac{-42{,}5p+8{,}5}{62{,}5p^2+17{,}5p+1}\cdot \qquad (3.98)$$

Тогда ее дифференциальное уравнение

$$\ddot{P}_a + 0{,}28\cdot\dot{P}_a + 0{,}016\cdot P_a = -0{,}68\cdot\dot{Q} + 0{,}136\cdot Q, \qquad (3.99)$$

или в общем виде

$$\ddot{x} + a_2\cdot\dot{x} + a_1\cdot x = b_1\cdot\dot{u} + b_2\cdot u. \qquad (3.100)$$

Искомая система нормальных уравнений примет вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + c_1\cdot u;\\ \dot{x}_2 &= a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + c_2\cdot u\end{aligned}\right\} \qquad (3.101)$$

Для определения a_{ij} составим характеристический определитель

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha \end{vmatrix} = (a_{11}-\alpha)\cdot(a_{22}-\alpha) - a_{21}\cdot a_{12} = \qquad (3.102)$$
$$= \alpha^2 - \alpha\cdot(a_{22}+a_{11}) - a_{22}\cdot a_{12} + a_{11}\cdot a_{22}.$$

Приравниваем коэффициенты характеристического уравнения (3.102) и коэффициенты левой части (3.100)

$$a_2 = -(a_{11}+a_{22}), \quad a_1 = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}. \qquad (3.103)$$

Два коэффициента можно выбрать произвольно, т.е. $a_{11}=0$, $a_{21}=1$, тогда $a_{22}=-a_2$, $a_{12}=-a_1$.

Присоединенный определитель находят по (3.96).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -c_1 & a_{12} \\ -c_2 & a_{22}-\alpha \end{vmatrix} = c_1\cdot a_{22} + c_1\cdot\alpha + c_2\cdot a_{12} \qquad (3.104)$$

Сравнивая правую часть (3.100) и выражение (3.104) записываем

$$c_1 = b_1;\ \ c_2 = \frac{b_2\cdot a_2 - b_1}{a_1}. \qquad (3.105)$$

Подставляя известные значения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 из (3.99) в выражения для c_1, c_2, a_{12}, a_{22} окончательно получаем:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -0{,}016\cdot x_2 - 0{,}68\cdot u;\\ \dot{x}_2 &= x_1 - 0{,}281\cdot x_2 + 44{,}34\cdot u\end{aligned}\right\}. \qquad (3.106)$$

Если на входе объекта действует несколько переменных u_1, u_2, …, u_k вместе со своими производными, тогда присоединенный определитель запишется в виде

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -(c_{11}\cdot u_1 + \ldots + c_{1k}\cdot u_k)\cdot a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ -(c_{21}\cdot u_1 + \ldots + c_{2k}\cdot u_k)\cdot a_{22} - \alpha & \ldots & a_{2n} \\ -(c_{n1}\cdot u_1 + \ldots + c_{nk}\cdot u_k)\cdot a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\alpha \end{vmatrix}. \qquad (3.107)$$

Представим в форме Коши дифференциальное уравнение двигателя постоянного тока

$$\left(p^2 + \frac{1}{T}\cdot p + \frac{1}{T\cdot T_M}\right)\cdot x_1 = \frac{1}{T\cdot T_M}\cdot u_1 - \left(\frac{1}{T_M}\cdot p + \frac{1}{T\cdot T_M}\right)\cdot u_2, \qquad (3.108)$$

где $x_1 = c \cdot \omega$ – э.д.с. якоря двигателя, пропорциональная угловой скорости ω; c – коэффициент пропорциональности между моментом и током двигателя или между э.д.с. и его угловой скоростью; u_1 – напряжение на якоре двигателя; $u_2 = I_c \cdot R_Д$ – падение напряжения на якоре двигателя; I_c – ток якоря двигателя, обусловленный моментом статической нагрузкой на его валу; $R_Д$ – сопротивление якоря двигателя;

$T_M = \dfrac{J \cdot R_Д}{c^2}$ – электромеханическая постоянная времени двигателя; $T = \dfrac{L_Д}{R_Д}$ – электромагнитная постоянная времени якоря двигателя; $L_Д$ – индуктивность якоря двигателя; J – момент инерции.

Входными воздействиями двигателя постоянного тока являются переменные u_1, u_2, а выходной координатой – угловая скорость ω (или x_1).

Для данного примера главны и присоединенный определители системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + c_{11} \cdot u_1 + c_{12} \cdot u_2; \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + c_{21} \cdot u_1 + c_{22} \cdot u_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.109)$$

будут иметь вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} - \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \alpha + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \qquad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -c_{11} \cdot u_1 - c_{12} \cdot u_2 & a_{12} \\ -c_{21} \cdot u_1 - c_{22} \cdot u_2 & a_{22} - \alpha \end{vmatrix} = \\ &= (-c_{11} \cdot a_{22} + c_{21} \cdot a_{12}) \cdot u_1 + (-b_{12} \cdot a_{22} + c_{22} \cdot a_{12}) \cdot u_2 + (c_{11} \cdot u_1 + c_{12} \cdot u_2) \cdot \alpha \end{aligned} \qquad (3.111)$$

Приравнивая коэффициенты (3.110) коэффициентам левой части уравнения (3.108), находим

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \frac{1}{T \cdot T_M}; \quad -(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{T}. \qquad (3.112)$$

Здесь два коэффициента выбираются произвольно, т.е. $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$, тогда

$$a_{22} = -\frac{1}{T}; \quad a_{21} = \frac{1}{T \cdot T_M} \qquad (3.113)$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях α и p в выражении (3.111) и правой части (3.108) с учетом (3.113), найдем

$$c_{11} = 0; \; c_{12} = -\frac{1}{T_M}; \; c_{21} = \frac{1}{T \cdot T_M}; \; c_{22} = 0.$$

Тогда окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \frac{1}{T_M} \cdot u_1; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T \cdot T_M} \cdot x_1 - \frac{1}{T} \cdot x_2 + \frac{1}{T \cdot T_M} \cdot u_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.114)$$

4 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ИХ ТЕХНИЧЕСКИМ ДАННЫМ

4.1 Вводные замечания

Студенты, обучающиеся по специальности 5В071800-Электроэнергетика в соответствии с Государственным общеобязательным стандартом образования этой специальности, при изучении специальных дисциплин, в основном, проходят подготовку по трем циклам дисциплин:

1. Электроэнергетика (электрические станции и подстанции, электрические сети и системы, электроснабжение);
2. Автоматизация технологических комплексов (по отраслям в соответствии с выбранной специализацией);
3. Автоматизированный электропривод промышленных агрегатов и установок.

При разработке систем автоматического управления технологическими комплексами наиболее ответственным является вопрос идентификации объекта управления. Путям решения этого вопроса посвящены предыдущие главы.

При учебном проектировании (курсовом, дипломном) по третьему циклу, состоящий из 7 дисциплин с выполнением 5 курсовых работ и проектов, студенты, в основном, выбирают элементы электропривода по справочным данным.

При анализе и синтезе системы управления электроприводом технологической установки по заданным техническим условиям проектирования необходимо знать структуру и параметры динамической модели выбранной системы электропривода, т.е. произвести идентификацию основных элементов этой системы.

Вопрос идентификации элементов автоматизированного электропривода по его техническим характеристикам (обмоточные данные, конструктивные особенности, статические характеристики и т.д.) в учебной литературе практически не освещен, а ряд источников ограничиваются рассуждениями общего характера.

В связи с вышеизложенным вопросы идентификации основных элементов электропривода по их техническим характеристикам изложены в данной главе.

Уточнение динамических параметров эксплуатируемых систем электроприводов с целью повышения их технико-экономических показателей относится к области наладки и настройки автоматизированного электропривода.

4.2 Идентификация генератора постоянного тока

В системах автоматического регулирования, как правило, используются генераторы с независимым возбуждением (рис.4.1). Принципиальная схема такого генератора, нагруженного на активно-индуктивную нагрузку $z_н = r_н + jx_н$ показана на рис.4.1, а.

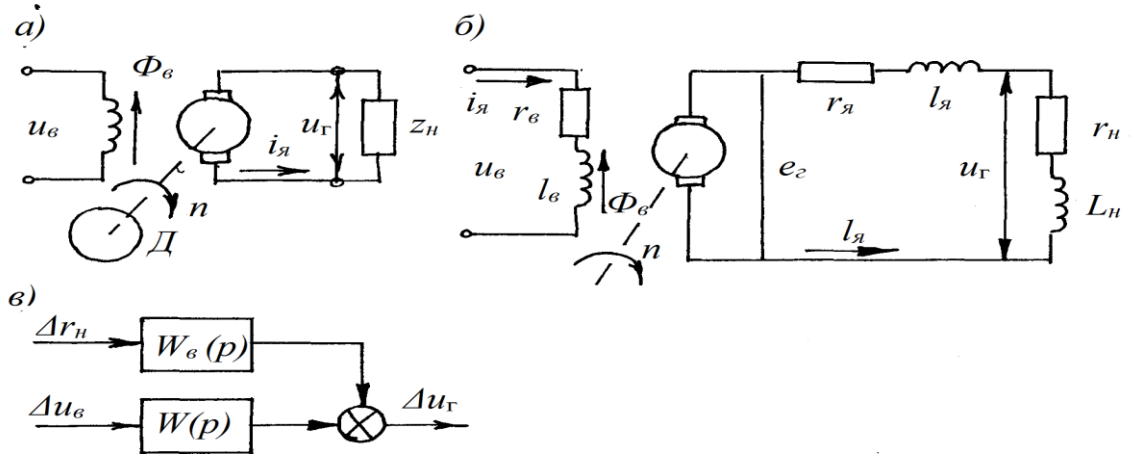


Рис. 4. 1 Генератор постоянного тока с независимым возбуждением

Рассмотрим генератор в статическом режиме работы. В этом случае без учета реакции якоря напряжение на выходе генератора

$$u_Г = e_Г - r_{Я.Ц} \cdot i_Я = c \cdot n \cdot Ф_В - r_{Я.Ц} \cdot i_Я, \qquad (4.1)$$

где $e_Г = c \cdot n \cdot Ф_В$ - э.д.с. генератора, *В*; Ôâ - поток возбуждения генератора, *Вб*; $c = \frac{p \cdot N}{\alpha \cdot 60}$ — конструктивная постоянная [здесь ρ - число пар полюсов; *N* - число активных проводников якоря (равно удвоенному числу витков обмотки якоря *w); a* - число пар параллельных ветвей обмотки якоря]; *n* - скорость вращения якоря, *об/мин;* $r_{я.ц}$ -сопротивление цепи якоря, *Ом;* $i_Я$ -ток якоря, *А*. Конструктивная постоянная генератора может быть найдена по его номинальным данным:

$$c = \frac{e_{Г.НОМ}}{Ф_{В.НОМ} \cdot n_{НОМ}} = \frac{U_{Г.НОМ} + I_{Я.НОМ} \cdot r_{Я.Ц}}{Ф_{В.НОМ} \cdot n_{НОМ}} \qquad (4.2)$$

Из уравнения (4.1) видно, что напряжение генератора падает при увеличении тока нагрузки. Уровнем напряжения генератора можно управлять с наименьшей затратой мощности путем изменения величины магнитного потока возбуждения $Ф_в$, устанавливая соответствующие значения напряжения или тока возбуждения.

Поток возбуждения генератора $Ф_в$ является нелинейной функцией от магнитодвижущей силы *F* (м. д. с.). В технических данных генератора эта зависимость обычно приводится в виде кривой намагничивания на один полюс:

$$Ф_В = f(F) = f(aw_{B1}), \qquad (4.3)$$

где $F = aw_{B1}$ - м; д. с. одного полюса, *А*.

На рис.4.2, а показана кривая намагничивания без учета влияния гистерезиса.

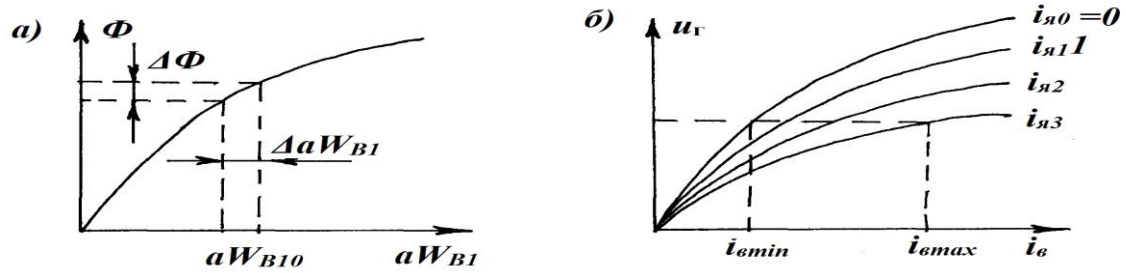


Рис. 4.2. Кривая намагничивание и нагрузочные характеристики генератора с независимым возбуждением Ф ΔФ ΔaW_{B1} ΔaW_{B10} aW_{B1} $u_г$ $i_{я0}$ $i_{я1}1$ $i_{я2}$ $i_{я3}$ $i_{вmax}$

По уравнению (4.1), используя кривую намагничивания, можно построить нагрузочные характеристики генератора (рис.4.2, б). Эти характеристики позволяют определить диапазон изменения тока возбуждения $i_в$ необходимый для поддержания заданного уровня напряжения генератора при изменении тока нагрузки. Найденные значения $i_{вmin}$ и $i_{вmax}$ служат исходными данными для расчета исполнительного элемента автоматической системы, в которой генератор является объектом управления.

Из рассмотренных характеристик, видно, что генератор является нелинейным звеном, а следовательно, его динамика описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

Составим приближенное линейное уравнение динамики генератора для случая $n = const$, полагая входной (управляющей) величиной напряжение возбуждения $u_в$, а выходной - напряжение на нагрузке $u_г$. Для упрощения задачи не будем учитывать влияние гистерезиса, вихревых токов и реакции якоря и предположим, что поток рассеяния изменяется по одному закону с потоком возбуждения $Ф_в$. При составлении уравнения генератора воспользуемся эквивалентной схемой (см. рис. 4.1, б).

Проведя линеаризацию нелинейной зависимости (4.3) в рабочей точке, получим

$$\Delta\dot{\Phi}_B = c_{Г1}\Delta a w_{B1} = c_{Г1} w_{B1}\Delta i_B$$

или в изображениях[1]

$$\Phi_B(p) = c_{Г1}\cdot w_{B1}\cdot I_B(p), \qquad (4.4)$$

где $c_{г1}=\left[\frac{\partial f(aw_{B1})}{\partial(aw_{B1})}\right]_{aw_{B10}} \approx \left(\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta aw_{B1}}\right)_{aw_{B10}}$ - коэффициент, определяемый по зависимости $Ф_В= f(aw_{B1})$, заданной в аналитической или графической форме; w_{B1} - число витков обмотки возбуждения на полюс. Запишем уравнение в изображениях для цепи возбуждения (при последовательном соединении обмоток полюсов):

$$U_B(p) = r_B\cdot I_B(p) + 2p\cdot\sigma_Г\cdot w_{B1}\cdot p\cdot\Phi_B(p) \qquad (4.5)$$

или, учитывая (4.4),

$$U_B(p) = r_B \cdot I_B(p) + L_B \cdot p \cdot I_B(p), \qquad (4.6)$$

где r_B - сопротивление цепи возбуждения, *Ом;* $L_B = 2p \cdot \sigma_Г \cdot c_{Г1} \cdot w_{B1}^2$ - индуктивность цепи возбуждения, *Гн;* $\sigma = 1{,}15 - 1{,}2$ - коэффициент, учитывающий рассеяние магнитного потока генератора.

Используя зависимость (4.4), найдем изображение э. д. с. генератора:

$$E_Г(p) = c \cdot n \cdot \Phi_B(p) = c_Г \cdot c_{Г1} \cdot w_{B1} \cdot I_B(p), \qquad (4.7)$$

где $c_Г = c \cdot n = \frac{p \cdot N}{a \cdot 60} \cdot n$.

Для цепи якоря и нагрузки можно записать уравнения:

$$E_Г(p)=(r_{я.ц}+L_{я.}\cdot p)\cdot I_я(p)+U_Г(p); \qquad (4.8)$$

$$U_Г(p)=(r_н+L_р\cdot p)\cdot I(p), \qquad (4.9)$$

в которых $I_я(p)$ - изображение приращения тока нагрузки в цепи якоря; $U_Г(p)$ - изображение приращения напряжения генератора; $L_я^2$ - индуктивность обмотки якоря; $r_н$ - сопротивление нагрузки; $L_н$ - индуктивность нагрузки. для генераторов с компенсационной (стабилизирующей) обмоткой $\beta = 0{,}25 \div 0{,}4$.

Решив совместно уравнения (4.6) ÷ (4.9), получим уравнение динамики генератора, записанное в изображениях:

$$(T_B p + 1) \cdot (T_Я p + 1) \cdot U_Г(p) = \frac{r_H}{r_{я.ц} + r_H} \cdot k_Г \cdot (T_H p + 1) \cdot U_B(p), \qquad (4.10)$$

где $T_B = L_B / r_B$ - постоянная времени цепи возбуждения *сек;*

$T_{я.Н} = (L_Я + L_H)/(r_{Я.Ц} + r_H)$ - постоянная времени цепи якоря, *сек;*

$T_н = L_H / r_H$ - постоянная времени цепи нагрузки, *сек;*

$k_г = c_Г \cdot c_{Г1} \cdot w_{B1} / r_B$ – коэффициент передачи генератора.

При активной нагрузке $z_i = r_i$ значение $T_н = 0$. Часто при этом величина $T_{я.н} = L_Я / (r_{Я.Ц} + r_H)$ мала и ею можно пренебречь, после чего уравнение генератора в изображениях принимает следующий вид:

$$(T_B p + 1) \cdot U_Г(p) = \frac{r_H}{r_{я.ц} + r_H} \cdot k_Г \cdot U_B(p) \qquad (4.11)$$

Составим уравнение генератора для случая активной нагрузки, предположив, что сопротивление нагрузки изменяется скачком на величину Δr_H. При этом для цепи нагрузки можно записать

$$u_{Г0} + \Delta u_Г = (r_{H0} + \Delta r_H)(i_{я0} + \Delta i_я), \qquad (4.12)$$

где $u_{г0}$, $r_{н0}$ - напряжение генератора и сопротивление нагрузки до возмущения при $t = 0 - |\varepsilon| (\varepsilon \to 0)$; $u_{г0} = u_{г0} / r_{г0}$ - ток нагрузки до возмущения при $t = 0 - |\varepsilon| (\varepsilon \to 0)$; $\Delta r_H = r_H - r_{H0}$ - приращение сопротивления нагрузки после

возмущения при $t+|\varepsilon|(\varepsilon \to 0)$. Переходя к изображениям, для приращений величин получим

$$U_Г(p) = r_Н \cdot I_я(p) + \frac{u_{Г0}}{r_{Н0}} \cdot R_Н(p), \quad (4.13)$$

или

$$U_Г(p) = E_Г(p) - r_{я.ц} \cdot I_я(p). \quad (4.14)$$

Из (4.11) найдем уравнение для э. д. с. генератора, приняв $r_Н = \infty$:

$$(T_В p + 1) \cdot E_Г(p) = k_Г \cdot U_В(p). \quad (4.15)$$

Решив совместно (4.13 ÷4.15) запишем уравнение для напряжения генератора с учетом воздействия со стороны нагрузки:

$$(T_В p + 1) \cdot U_Г(p) = \frac{r_Н}{r_{я.ц} + r_Н} \cdot k_Г \cdot U_В(p) + \frac{r_{я.ц}}{r_{я.ц} + r_Н} \cdot \frac{u_{Г0}}{r_{Н0}} \cdot (T_В p + 1) \cdot R_Н(p) \quad (4.16)$$

Для генератора, используемого в качестве источника напряжения, передаточные функции по управляющему и возмущающему воздействиям определяются из соотношений:

$$W(p) = U_Г(p) / U_В(p); \quad W_В(p) = U_Г(p) / R_Н(p). \quad (4.17)$$

На основании (4.16) и (4.17) генератор можно представить в виде структурной схемы (см. рис.4.1, в).

Рассмотрим динамику генератора при использовании его в качестве источника тока, например, для питания электромагнита. В этом случае нагрузка характеризуется большой индуктивностью. Составим линейное уравнение динамики генератора, если выходной величиной является ток, а возмущающим воздействием - изменение активного сопротивления нагрузки.

Для возмущенного состояния цепи якоря генератора (см. рис.4.1,б) можно записать

$$e_{г0} + \Delta e_г = (r_{я.ц} + r_{Н0} + \Delta r_н)(i_{я0} + \Delta i_я) + (L_я + L_Н) \frac{d\Delta i_я}{dt} \quad (4.18)$$

или, переходя к изображениям,

$$E_Г(p) = i_{я0} \cdot R_Н(p) + (r_{я.ц} + r_Н + L_я p + L_Н p) \cdot I_я(p). \quad (4.19)$$

Решив (4.19) совместно с (4.15), получим уравнение для тока генератора:

$$(T_В p + 1) \cdot (T_{Я.Н} p + 1) \cdot I_я(p) = \frac{k_Г}{r_{я.ц} + r_Н} \cdot U_В(p) - (T_В p + 1) \cdot \frac{i_{я0}}{r_{я.ц} + r_Н} \cdot R_Н(p), \quad (4.20)$$

где $i_{я0} = u_{Г0} / r_{н0}$ - ток нагрузки в цепи якоря генератора до возмущения при $t = 0 - \varepsilon(\varepsilon \to 0)$; $r_Н = r_{н0} + \Delta r_Н$ - активное сопротивление нагрузки

после возмущения при $t = 0 + \varepsilon(\varepsilon \to 0)$; $T_{я.н} = (L_я + L_H)/(r_{я.ц} + r_H)$ - постоянная времени цепи якоря после возмущения. .

Из уравнения (4.20) можно найти передаточные функции генератора по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W(p) = I_я(p)/U_B(p)\ ; \quad W_B(p) = I_я(p)/R_H(p) \quad (4.21)$$

Примеры составления уравнений генератора с учетом реакции якоря и влияния компенсационных обмоток рассмотрены в литературе [23].

Технические данные некоторых типов генераторов постоянного тока серии *П* для $n_{ном}$ = 1450 *об/мин* приведены в табл. 4.1 [24], где приняты следующие обозначения: $U_{НОМ}$, $i_{НОМ}$, $P_{НОМ}$ -номинальные данные генератора по напряжению, току и мощности; P_1 - потребляемая мощность на валу генератора в номинальном режиме; $r_я$, $r_{Д.П}$- сопротивления обмоток якоря и дополнительных полюсов; $r_{ст}$ - сопротивление последовательной (стабилизирующей) обмотки; $w_{в1}$ и $r_в$ - число витков (на полюс) и сопротивление (общее) обмотки возбуждения.

Сопротивления обмоток приведены для холодного состояния при температуре 15°С. В расчетах величины сопротивлений обмоток берутся для нагретого состояния [25]:

$$r_{нагр} = \alpha \cdot r\ , \quad (4.22)$$

где $\alpha = 1 + 0.004\tau$ (τ – перегрев обмотки по сравнению с температурой 15°С); в приближенных расчетах принимают $\alpha \approx 1{,}2$.

Обмотки дополнительных полюсов генератора исключают искрение между щетками и коллектором, а последовательная обмотка уменьшает реакцию якоря. В расчетах по рассмотренной методике сопротивление этих обмоток учитывается при подсчете величины

$$r_{я.ц} = r_я + r_{Д.П} + r_{ст}\ . \quad (4.23)$$

Номинальный ток возбуждения генератора, если он не указан в справочных данных, определяется приближенно:

$$I_{В.НОМ} \approx 0{,}8 \cdot U_{Г.НОМ}\ /(\alpha \cdot r_B) \quad (4.\ 24)$$

На рис 4.3 показана универсальная кривая намагничивания генераторов серии П, используемая для ориентировочных расчетов.

Таблица 4.1

Технические данные генераторов тока серии П

Тип генератора	$U_{ном}$, В	$P_{ном}$, кВт	$I_{ном}$, А	P_1, кВт	$2p$	$2a$	$w_я$	$r_я + r_{д.п}$ Ом	$r_{ст}$, Ом	$w_{в1}$ (на полю)	$r_в$, Ом
П -21	115 230	0,37 0,37	3,2 1,6	0,53 0,53	2	2	1080 2160	5,56 22,55	0,96 3,3	2500 4600	230 1160
П-22	115 23	0,6 0,6	5,2 2,6	0,8 0,8	2	2	630 1296	2,3 10,0	0,6 2,16	1600 3500	152 770
П-31	115 230	1,0 1,0	8,7 4,4	1,3 1,3	2	2	576 1152	1,56 6,9	0,34 1,32	2400 5400	188 980
П-32	115 230	1,5 1,5	13,1 6,5	1,8 1,8	2	2	360 720	0,76 3,17	0,17 0,58	1800 3400	122 480
П-41	115 230	2,7 2,7	23,4 11,7	3,6 3,6	4	2	351 702	0,558 2,23	0,136 0,488	900 1600	68,8 214
П-42	115 230	3,2 3,2	27,8 13,9	4,1 4,1	4	2	270 513	0,39 1,56	0,0534 0,3	750 1350	50 180
П-51	115 230	5,0 5,0	43,4 21,7	6,2 6,2	4	2	217 434	0,191 0,78	0,03 0,112	700 1300	32 120
П-52	115 230	6,5 6,5	56,4 28,2	7,9 7,9	4	2	186 341	0,15 0,6	0,0096 0,074	600 1250	28,3 152
П-61	115 230	9,0 9,0	78,0 39,1	10,7 10,7	4	2	186 341	0,111 0,35	0,0088 0,04	800 1500	35,0 120
П-62	115 230	11,5 11,5	100 50	13,6 13,6	4	2	124 248	0,061 0,222	0,009 0,028	650 1150	25 80
П-71 П-72	230 230	16 21	69,5 91,0	21,8 25,4	4	2	297 210	0,30 0,1745	0,0115 0,00725	950 950	43 50
П-81 П-82	230 230	27 35	117 152	32,0 40,5	4	2	222 155	0,1445 0,863	0,00475 0,00308	1350 1600*	69,5 27,2
П-91 П-92	230 230	50 70	217 304	57,5 78,5	4	2	145 105	0,0504 0,0278	0,00304 0,0018	870 1000	35,8 48,4
П-101 П-101	230 230	90 110	391 478	110 123	4	2 4	93 138	0,0187 0,0128	0,00072 0,00061	950* 840	37,8 32,5
П-111 П-112	230 230	150 190	653 826	167 208	4	4	126 100	0,00963 0,00624	0,00077 0,00045	850 750	28 24

На рис.4.3 показана универсальная кривая намагничивания генераторов указанной серии, используемая для ориентировочных расчетов. Сведения о генераторах, выпускаемых промышленностью, приведены в справочнике [26].

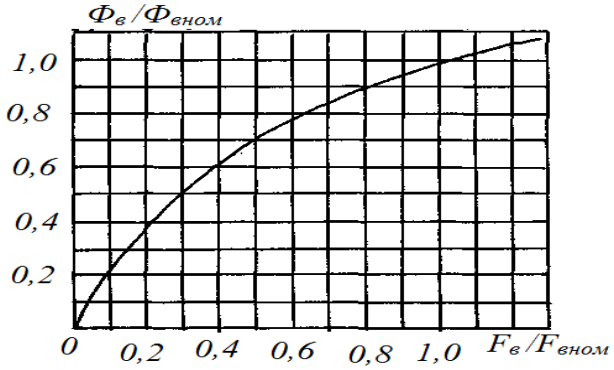


Рис. 4.3 Универсальная кривая намагничивания генераторов постоянного тока серии П $Ф_в/Ф_{вном}$ $F_в/F_{вном}$

Пример. Определим приближенную передаточную функцию генератора постоянного тока с независимым возбуждением типа П-32 ($U_{ном}$=230 в) при,

n = $n_{ном}$ по данным табл.4.1. Нагрузку считаем активной, индуктивностью, обмотки якоря пренебрегаем. Начальный поток возбуждения полагаем номинальным, внутреннее сопротивление источника возбуждения не учитываем.

Из таблицы имеем: $U_{НОМ} = U_{Г.НОМ} = 230B$; $I_{.НОМ} = I_{я.НОМ} = 6{,}5\,\text{А}$; $n_{НОМ} = 1450$ об/мин a=1; $a = 1$; N = 2$w_я$ =1440; $r_{я.ц}$ = 3,75 Ом; w_{B1} =3400; r_B=480 Ом.

Находим конструктивную постоянную:

$$c = \frac{p \cdot N}{a \cdot 60} = \frac{1 \cdot 1440}{1 \cdot 60} = 24,$$

откуда

$$c_Г = c \cdot n_{НОМ} = 24 \cdot 1450 = 3{,}48 \cdot 10^4.$$

На основнии (4.2) номинальный поток возбуждения

$$\Phi_{В.НОМ} = \frac{U_{Г\,НОМ} + I_{я.НОМ} \cdot \alpha \cdot r_{я.ц}}{c \cdot n_{НОМ}} = \frac{230 + 6{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 3{,}75}{3{,}48 \cdot 10^4} = 7{,}45 \cdot 10^{-3}\ \text{Вб}.$$

Определяем номинальные ток возбуждения и м. д. с. на полюс:

$$I_{В.НОМ} \approx \frac{0{,}8 \cdot U_{Г.НОМ}}{\alpha \cdot r_B} = \frac{0{,}8 \cdot 230}{1{,}2 \cdot 480} = 0{,}32A;$$

$$F_{НОМ} = a \cdot w_{В1.НОМ} = I_{В.НОМ} \cdot w_{B1} = 0{,}32 \cdot 3400 = 1080A.$$

По найденным значениям $\Phi_{В.ном}$ и $F_{ном}$ получаем масштабные коэффициенты по осям универсальной кривой намагничивания (см. рис. 4.3):

$$m_{\hat{0}} = 7{,}45 \cdot 10^{-3};\ m_F = 1080.$$

По кривой намагничивания при $\Phi_В = \Phi_{В.ном}$ находим:

$$c_{Г1} = \frac{m_\Phi}{m_F} \cdot \left(\frac{\Delta \bar{\Phi}_B}{\Delta a \cdot \bar{w}_{B1}} \right)_{a w_{B1ном}} \approx \frac{7{,}45 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}04}{1080 \cdot 0{,}1} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

Принимая $\sigma_Г = 1{,}2$, определяем

$$L_B = 2 \cdot p \cdot \sigma_Г \cdot c_{Г1} \cdot w_{B1}^2 = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 3400^2 = 75\text{Гн};$$

$$T_B = \frac{L_B}{\alpha \cdot r_B} = \frac{75}{1{,}2 \cdot 480} = 0{,}13\ \text{сек}.$$

Коэффициент передачи генератора

$$k_Г = \frac{c_Г \cdot c_{Г1} \cdot w_{B1}}{\alpha \cdot r_B} = \frac{3{,}48 \cdot 10^4 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 3400}{1{,}2 \cdot 480} = 0{,}55.$$

На основании (4.11) и (4.17) передаточная функция генератора

$$W(p) = \frac{U_Г(p)}{U_B(p)} = \frac{r_H}{\alpha \cdot r_{я.ц} + r_H} \cdot \frac{k_Г}{T_B p + 1} = \frac{r_H}{\alpha \cdot r_{я.ц} + r_H} \cdot \frac{0{,}55}{0{,}13p + 1}.$$

4.3 Идентификация двигателя постоянного тока

Наибольшее использование в системах автоматического управления, работающих на постоянном токе, имеют двигатели с независимым возбуждением. Такие двигатели, управляемые путем изменения напряжения на якоре, позволяют получить широкий диапазон регулирования скорости вращения, благодаря чему широко применяются в качестве исполнительных элементов в регулируемом приводе многих производственных механизмов и в силовых следящих системах.

Принципиальная схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением показана на рис.4.4. Рассмотрим статический режим работы двигателя. В этом случае без учета реакции якоря для двигателя можно записать:

$$U_д = e_д + r_{я.ц} \cdot i_я ; \quad (4.25)$$

$$e_д = c_e \cdot \Phi_В n ; \quad (4.26)$$

$$M = c_м \cdot \Phi_в \cdot i_я . \quad (4.27)$$

В уравнениях (4.25) – (4.27) приняты следующие обозначения: $u_д$ - напряжение на якоре двигателя, *в*; $i_я$- ток якоря; *А;* $r_{я.ц}$ - сопротивление цепи якоря, *Ом;* $e_д$ - э.д.с. вращения, В; $\Phi_в$ - поток возбуждения, *Вб*; n- скорость вращения двигателя, *об/мин;* M - момент, развиваемый двигателем, $H \cdot M$; $c_e = \frac{p \cdot N}{\alpha \cdot 60}$; $c_M = \frac{p \cdot N}{2\pi \cdot a}$ - конструктивные постоянные [здесь ρ - число пар полюсов двигателя; N - число активных проводников якоря (равно удвоенному числу витков обмотки якоря $w_я$); a - число пар параллельных ветвей обмотки якоря].

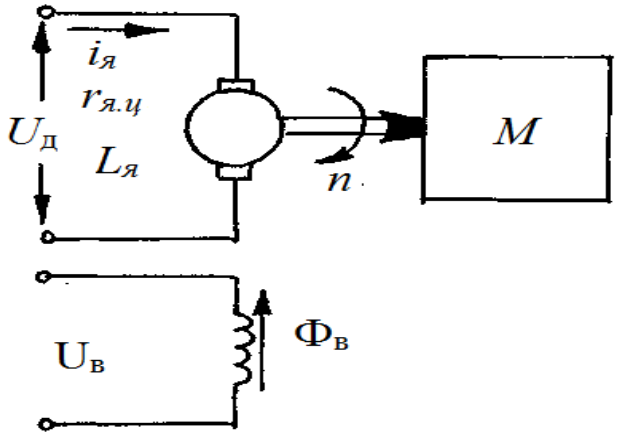


Рис.4.4 Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

В установившемся режиме момент двигателя уравновешивается приведенным к валу статическим моментом сопротивления рабочего механизма M_c, т. е. в этом случае $M = M_c$.

Следует обратить внимание на соотношение

$$\frac{c_e}{c_M} = \frac{2\pi}{60} = 0{,}105, \tag{4.28}$$

которое может использоваться в расчетах.

Из (4.25) – (4.27) получаем уравнение механической характеристики двигателя в виде

$$n = \frac{u_Д}{c_e \cdot \Phi_B} - \frac{r_{я.ц} \cdot i_я}{c_e \cdot \Phi_B}\ , \tag{4.29}$$

или

$$n = \frac{u_Д}{c_e \cdot \Phi_B} - \frac{r_{я.ц} \cdot M}{c_e \cdot c_м \cdot \Phi_B^2}\ . \tag{4.30}$$

В формулах (4.29) и (4.30) в правой части первый член соответствует скорости вращения при идеальном холостом ходе *(M* = 0, $i_я$ = 0), а второй - снижению скорости вращения двигателя под нагрузкой.

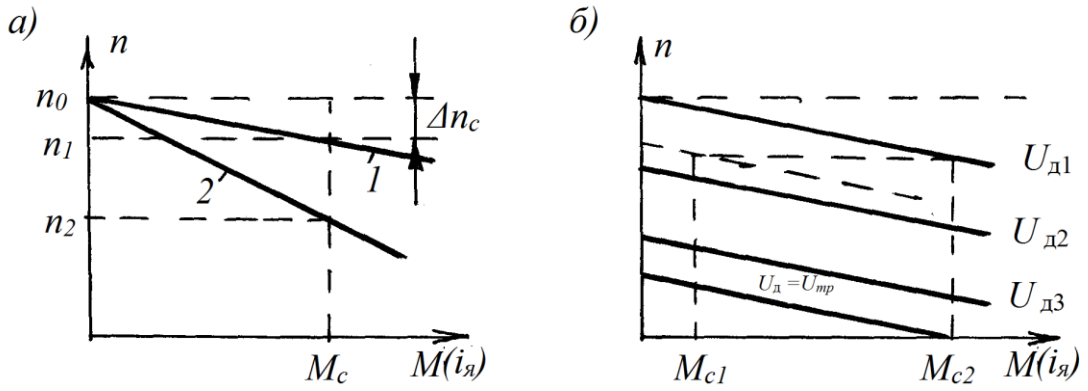


Рис. 4.5 Механические характеристики двигателя с независимым возбуждением

Механическая характеристика двигателя при $\Phi_в$ = const и $u_д$ = const выражается уравнением прямой (рис. 4.5, а, прямая 1). При увеличении сопротивления якорной цепи жесткость механической характеристики двигателя ухудшается (прямая *2).*

Конструктивные постоянные двигателя можно определить по его номинальным данным. Из уравнения (4.29)

$$c_e = \frac{u_{д.ном} - r_{я.ц.} I_{я.ном}}{\Phi_{В.ном} n_{ном}}\ . \tag{4.31}$$

Для определения c_e можно воспользоваться также формулой

$$c_e = \frac{u_{Д.ном}}{\Phi_{В.ном} n_0}\ , \tag{4.32}$$

где n_0 — скорость вращения при идеальном холостом ходе, определенная по механической характеристике при $u_Д$=$u_{Д.ном}$

Из уравнения (4.27)

$$c_м = \frac{M_{НОМ}}{\Phi_{В.НОМ} \cdot I_{я.НОМ}}\ . \tag{4.33}$$

Момент $M_{ном}$ можно определить по механической характеристике при $n=n_{НОМ}$ или по формуле

$$M_{НОМ} = 9{,}55 \cdot \frac{P_{НОМ}}{n_{НОМ}}, \qquad (4.34)$$

где $P_{ном}$ — номинальная мощность на валу двигателя, *Вт*.

Формулы (4.31*)* – (4.32) используются для приближенного вычисления постоянных c_e и $c_м$, так как номинальные данные для двигателей представляют собой усредненные величины.

Рассмотрим регулирование скорости вращения двигателя путем изменения напряжения на якоре.

Механические характеристики двигателя, построенные по уравнению (4.30) при разных напряжениях на якоре, изображены на рис. 4.5, *б.* При уменьшении напряжения механическая характеристика смещается параллельно вниз пропорционально величине напряжения. Статические характеристики позволяют определить диапазон изменения напряжения на якоре двигателя, требуемый для поддержания заданной скорости вращения при заданных пределах изменения статического момента M_c. Соответствующие значения тока якоря можно найти, используя соотношение (4.27). График, .приведенный на рис. 4.5, *б,* позволяет также определить зону нечувствительности двигателя, определяемую напряжением трогания ($u_д=U_{д.тр}$). Это напряжение соответствует началу вращения двигателя и зависит от момента сопротивления на валу M_c. Величина $U_{д.тр}$ может быть найдена также из (4.20) или (4.30*)* при $n = 0$ и $M = M_c$.

Составим уравнение динамики двигателя в отклонениях при $\Phi_в$ = const, не учитывая для упрощения реакцию якоря. За входную величину примем напряжение на якоре, а за выходную - скорость вращения.

Рассмотрим случай, когда момент сопротивления на валу двигателя не зависит от скорости вращения. При этом введем обозначения:

$$c_e \cdot \Phi_B = c_{eД}; \quad c_м \cdot \Phi_B = c_{мД}. \qquad (4.35)$$

Для цепи якоря, учитывая, что $e_д=c_{ед}n$, при нулевых начальных условиях запишем

$$U_Д(p) = c_{eД} \cdot n(p) + r_{я.ц} \cdot I_я(p) + L_я \cdot p \cdot I_я(p)^*. \qquad (4.36)$$

Заменив в формуле для динамического момента двигателя $M_{дин}= J \cdot d\omega_Д / dt$ угловую скорость $\omega_Д$ *(рад/сек)* на *n (об/мин),* получим в изображениях уравнение равновесия моментов:

$$M(p) = \frac{1}{9{,}55} \cdot J \cdot p \cdot n(p) + M_c(p), \qquad (4.37)$$

где $J = J_Д + J_{Н.пр}$ - момент инерции на валу двигателя, *кг.м*^{2}. Здесь $J_д$ - момент инерции якоря двигателя; $J_{Н.пр}= k_р^2 \cdot J_Н$ - момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя ($к_р$ - коэффициент передачи редуктора, соединяющего вал двигателя с нагрузкой).

Используем зависимость

$$M(p) = c_{M.Д} \cdot I_{я}(p). \qquad (4.38)$$

После совместного решения (4 . 3 6) ÷ (4 . 3 8) запишем уравнение двигателя:

$$(T_{я} \cdot T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1) \cdot n(p) = k_{Д} \cdot U_{Д}(p) - (T_{я} p + 1) \cdot k_{Д.В} \cdot M_{c}(p), \qquad (4.39)$$

где $T_{я} = L_{я} / r_{я.ц}$ - постоянная времени цепи якоря, *сек;*

$T_{ЭМ} = \frac{1}{9{,}55} \cdot J \cdot \frac{r_{я.ц}}{c_{е.Д} \cdot c_{МД}}$ – электромеханическая постоянная времени, *сек;*

$k_{Д} = 1/c_{е.Д}$ - коэффициент передачи двигателя по управляющему воздействию, $об/(мин \cdot В)$.

$k_{Д.В} = r_{я.ц}/(c_{е.Д} \cdot c_{М.Д})$ - коэффициент передачи двигателя по возмущающему воздействию, $об/(Н \cdot М \cdot мин)$.

Вычислить индуктивность якоря $L_я$ сложно, поэтому на практике ее определяют экспериментально. Приближенно[22] величина $L_я$ *(Гн)*

$$L_{я} \approx \frac{30}{\pi} \cdot \beta \cdot \frac{U_{Д.НОМ}}{p \cdot n_{НОМ} \cdot I_{я.НОМ}}, \qquad (4.40)$$

где $\beta = 0{,}25 \div 0{,}6$ (нижнее значение принимается для компенсированных машин, верхнее - для некомпенсированных).

Д ля определения $T_{эм}$ имеется также соотношение

$$T_{ЭМ} = \frac{1}{9{,}55} \cdot J \cdot \frac{\Delta n_{c}}{M_{НОМ}}, \qquad (4.41)$$

где $\Delta n_{c} = \frac{r_{я.ц} \cdot I_{я.НОМ}}{c_{еД}}$ - падение скорости двигателя в номинальном режиме.

Анализируя уравнение (4.38), можно установить, что при $T_{ЭМ} \le 4T_{Я}$ двигатель обладает колебательными свойствами, которые являются нежелательными. Поэтому при конструировании двигателей стремятся выполнить соотношение $T_{ЭМ} \ge 4T_{Я}$. В этом случае уравнение динамики двигателя можно записать в виде

$$(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot n(p) = k_{Д} \cdot U_{Д}(p) - (T_{я} p + 1) \cdot \kappa_{Д.В} M_{c}(p), \qquad (4.42)$$

где $T_1 = \frac{T_{эм}}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{T_{я}}{T_{эм}}}\right)$; $T_2 = \frac{T_{эм}}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\frac{T_{я}}{T_{эм}}}\right)$.

В случае, когда $T_{ЭМ} \rangle\rangle T_{Я}$, пренебрегая величиной $T_{я}$, уравнение двигателя можно свести к приближенному уравнению первого порядка.

Передаточные функции двигателя по управляющему и возмущающему воздействиям равны соответственно:

$$W(p) = n(p)/U_{Д}(p) \; ; \; W_{В}(p) = n(p)/M_{c}(p). \qquad (4.43)$$

Часто за выходную величину двигателя принимается угол поворота вала $\alpha_д$ (обычно измеряемый в *радианах*). При этом, учитывая, что $\alpha_Д(p)=\frac{1}{p}\omega_Д(p)$, а $\omega_Д=\left[\frac{рад}{сек}\right]=\frac{1}{9{,}55}\cdot n\left[\frac{об}{мин}\right]$, получаем вместо (4.43) другие передаточные функции двигателя:

$$\left.\begin{aligned} W_\alpha(p)&=\frac{\alpha_Д(p)}{U_Д(p)}=\frac{1}{9{,}55}\cdot\frac{1}{p}W(p);\\ W_{B\alpha}(p)&=\frac{\alpha_Д(p)}{M_c(p)}=\frac{1}{9{,}55}\cdot\frac{1}{p}W_B(p). \end{aligned}\right\} \qquad (4.44)$$

Составим уравнение динамики двигателя для случая, когда статический момент на валу зависит от скорости вращения. Линейная зависимость такого рода существует, например, если нагрузкой двигателя является генератор постоянного тока с независимым возбуждением, замкнутый на постоянное сопротивление. В механизмах с так называемым вентиляторным моментом статический момент на валу зависит от квадрата скорости вращения.

Для малых изменений скорости вращения в общем случае величина приращения статического момента

$$\Delta M_c(t,n)=\Delta M_{c0}(t)+k_c\cdot\Delta n(t), \qquad (4.45)$$

где M_{c0} - постоянная составляющая момента сопротивления;

$k_c=\left[\frac{\partial M_c(t,n)}{\partial n}\right]\cdot\Delta n$ - коэффициент, получаемый при линеаризации зависимости $M_c(t,n)$ в заданной точке.

С учетом зависимости (4.45) уравнение двигателя (4.39) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\left(\frac{T_я\cdot T_{эм}}{1+k_Bk_c}p^2+\frac{k_Bk_cT_я+T_{эм}}{1+k_Bk_c}p+1\right)\cdot n(p)=\\ &=\frac{k_Д}{1+k_Bk_c}U_Д(p)-\frac{k_B}{1+k_B\cdot k_c}(T_я p+1)\cdot M_{c0}(p) \end{aligned} \qquad (4.46)$$

Технические характеристики некоторых двигателей постоянного тока приведены в табл.4.2 - 4.4.

В таблицах приняты следующие обозначения: $U_{НОМ}$, $I_{НОМ}$, $P_{НОМ}$, $\eta_{ном}$ - номинальные данные двигателя по напряжению, току, мощности и к. п.д. ($I_{НОМ}=I_{Я.НОМ}+I_{В.НОМ}$); $r_я$ и $r_{Д.п}$ сопротивление обморок якоря и дополнительных полюсов; $r_{ст}$ - сопротивление последовательной (стабилизирующей) обмотки; GD^2 - маховой момент двигателя; $M_П$ - пусковой момент.

Сопротивления обмоток указаны для холодного состояния. Увеличение сопротивления за счет нагрева можно учесть, пользуясь соотношением (1.31). Сопротивление цепи якоря двигателя подсчитывается по формуле (4.23).

Момент инерции якоря двигателя

$$J_Д = m\rho^2 = mD^2 / 4 \qquad (4.47)$$

где $J_д$ - момент инерции, *кг·м²; m* - масса якоря, *кг;* ρ и *D* - соответственно радиус и диаметр инерции, *М.*

Таблица 4.2

Технические данные двигателей постоянного тока серии П

$n_{ном} = 1500 об/мин$

Тип двигателя	$U_{ном}$, В	$P_{ном}$, кВт	$I_{ном}$, А	$\eta_{ном}$, %	2p	2a	$W_я$	$r_я + r_{д.п}$ (при 15°С), Ом	$r_{ст}$, Ом	$W_{в1}$ (на полюс)	$r_{в,общ}$ (при 15°С), Ом	GD, кГ.м²
П-11	110 220	0,3	4,3 2,06	63,5 66,0	2	2	826 1652	5,14 22,6	0,236 0,88	2700 4000	300 670	0,012
П-12	110 220	0,45	5,2 2,88	78,5 71,0	2	2	574 1176	2,97 11,75	0,125 0,25	1850 4000	158 785	0,015
П-21	110 220	0,7	8,9 4,4	72,0 72,0	2	2	558 1188	1,52 6,59	0,003 0,24	2000 4800	107 600	0,045
П-22	110 220	1,0	11,7 5,9	77,0 77,0	2	2	414 864	0,96 4,17	0,062 0,25	2400 4800	175 712	0,055
П-31	110 220	1,5	17,4 8,6	78,0	2	2	342 756	0,594 2,455	0,026 0,212	2600 4600	130 470	0,085
П-32	110 220	2,2	24,5 12,2	80,5 81,5	2	2	234 468	0,285 1,35	0,02 0,092	1700 3600	78 358	0, 105
П-41	110 220	3,2	36,1 18,0	80,5 80,5	'4	2	243 540	0,2826 1,41	0,007 0,0328	1400 2700	118 470	0,15
П-42	110 220	4,5	50,6 25,3	81,0 81,0	4	2	162 351	0,153 0,65	0,0048 0,0392	760 1500	41,4 172	0,18
П-51	110 220	6,0	66 33	82,5 82,5	4	2	155 372	0,1026 0,565	0,0044 0,00736	900 1800	45,2 262	0,35
П-52	110 220	8,0	86 42,6	84,5 85,5	4	2	124 248	0,0656 0,298	0,0022 0,0068	800 1800	41,8 178	0,40
П-61	220	11	57,3	87,0	4	4	248	0,199	0,006	1950	178	0,56
П-62	220	14	73	86,0	4	4	186	0,1183	0,004	1700	146	0,65

Таблица 4.3

Технические данные двигателей постоянного тока с независимым возбуждением серии МИ

Тип двигателя	$U_{ном}$, В	$n_{ном}$, об/мин	$P_{НОМ}$, кВт	$I_{я.ном}$, А	$I_{в.ном}$, А	$\eta_{ном}$, %	$r_{Яц}$ (при 20^0С), Ом	$r_В$ (при 20^0С), Ом	$M_{ном} \times 9{,}81 \times 10^{-2}$, $Н \cdot М$	$M_с \times 9{,}81 \times 10^{-2}$, $Н \cdot М$	GD, кГ.м^2
МИ-11	60	3000	0,12	2,86	0,27	62	0,46	223	3,9	1,0	0,006
	60	2000	0,1	2,27	0,27	–	0,94	223	–	1,0	0,006
	110	3000	0,12	1,53	0,17	62	1,48	642	3,9	1,0	0,006
	110	2000	0,1	1,22	0,17	–	3,0	642	–	1,0	0,006
МИ-12	60	3000	0,2	4,57	0,28	66	0,23	218	6,4	1,0	0,008
	60	2000	0,12	2,72	0,28	–	0,52	218	–	1,0	0,008
	110	3000	0,2	2,46	0,2	66	0,765	560	6,4	1,0	0,008
	110	2000	0,12	1,46	0,2	–	1,74	560	–	1,0	0,008
МИ-21	60	3000	0,25	5,6	0,2	67	0,284	306	8,0	1,5	0,014
	60	2000	0,2	4,3	0,2	–	0,645	306	–	1,5	0,014
	110	3000	0,25	3,05	0,13	67	0,945	827	8,0	1,5	0,014
	110	2000	0,2	2,33	0,13	–	2,2	827	–	1,5	0,014
МИ-22	60	3000	0,37	8,2	0,23	71	0,195	264	11,9	1,5	0,016
	60	2000	0,25	5,5	0,23	–	0,36	264	–	1,5	0,016
	60	1000	0,12	2,6	0,23	64	1,44	264	11,6	1,5	0,16
	110	3000	0,37	4,4	0,14	–	0,546	934	–	1,5	0,016
	110	2000	0,25	2,9	0,14	69	1,29	790	12,0	1,5	0,016
	110	1000	0,12	1,4	0,14	–	4,58	790	–	1,5	0,016
МИ-31	60	3000	0,45	10,3	0,41	68	0,204	145	14,5	2,5	0,036
	60	2000	0,37	8,2	0,41	–	0,405	145	–	2,5	0,036
	60	1000	0,2	4,4	0,41	–	1,32	145	–	2,5	0,036
	110	3000	0,45	5,6	0,24	68	0,585	460	14,5	2,5	0,036
	110	2000	0,37	4,4	0,24	–	1,16	460	–	2,5	0,036
	110	1000	0,2	2,4	0,24	66	3,93	460	19,4	2,5	0,036
МИ-32	110	2500	0,76	8,2	0,43	80	0,391	258	29,5	2,5	0,053
	110	1500	0,45	5,0	0,43	–	0,975	258	–	2,5	0,053
	110	1000	0,37	4,2	0,43	72	2,21	258	35,9	2,5	0,053
	220	2500	0,76	4,1	0,23	–	1,36	950	–	2,5	0,053
	220	1500	0,45	2,5	0,23	75	3,81	950	29,1	2,5	0,053
	220	1000	0,37	2,1	0,23	–	8,57	950	–	2,5	0,053
МИ-41	110	2500	1,6	19,2	0,43	73	0,249	255	62,0	6,0	0,16
	110	1500	1,1	13,0	0,43	–	0,67	255	–	6,0	0,16
	110	1000	0,76	9,0	0,43	–	1,3	255	–	6,0	0,16
	220	2500	1,6	9,5	0,33	73	0,93	670	62,0	6,0	0,16
	220	1500	1,1	6,4	0,33	–	2,63	670	–	6,0	0,16
	220	1000	0,76	4,5	0,33	72	5,32	670	73,7	6,0	0,16
МИ-42	110	2500	3,2	36,3	0,62	78	0,1	178	121,0	6,0	0,26
	110	1500	1,6	18,2	0,62	–	0,32	178	–	6,0	0,26
	110	1000	1,1	12,6	0,62	75	0,75	178	106,7	6,0	0,26
	220	2500	3,2	18,0	0,31	–	0,376	715	–	6,0	0,26
	220	1500	1,6	9,1	0,31	–	1,28	715	–	6,0	0,26
	220	1000	1,1	6,3	0,31	75	2,95	715	106,7	6,0	0,26
МИ-51	220	2500	5,0	27,2	–	–	0,164	435	–	12,0	0,5
	220	1500	3,2	17,1	–	–	0,46	435	–	12,0	0,5
	220	1000	1,6	8,7	–	–	1,1	435	–	12,0	0,5
МИ-52	220	2500	7,0	37,0	–	–	0,088	312	–	12,0	0,6
	220	1500	4,5	23,3	–	–	0,26	312	–	12,0	0,6
	220	1000	2,5	13,1	–	–	0,569	312	–	12,0	0,6

Таблица 4.4

Технические данные маломощных двигателей постоянного тока типа СЛ

Тип двигателя	$U_{НОМ}$,В	$n_{ном}$, об/мин	$P_{НОМ}$, Вт	$I_{я, ном}$,А	$I_{я.к.з}$,А	$I_{в, ном}$,А	$r_{я.ц}$(при 20^{0}С), Ом	$M_{НОМ}$	$M_П$	Мс	$J_Д$x9,81 x 10^{-5}, кг.м^2	$L_я$, мГн
								x9,81·10^{-4}, Н.М				
СЛ-121	110	4500	7,5	0,16	0,45	0,07	240	14	42	4	0,039	130
СЛ-161	110	4000	8,6	0,17	0,64	0,08	170	21	80	4	1,053	125
СЛ-221	110	3600	13	0,25	0,9	0,05	117	35	90	8	0,14	230
СЛ-221А	110	3600	13	0,25	–	0,05	117	35	90	8	0,14	230
СЛ-261	110	3600	24	0,41	1,74	0,08	51	65	200	8	0,2	140
СЛ-281	24	5200	26	2,16	16,0	0,24	1,15	50	125	8	0,2	0,5
СЛ-321	110	3000	38	0,58	3,3	0,11	25,8	125	310	13	0,6	130
СЛ-361	110	3000	50	0,75	4,35	0,1	20,5	160	400	13	0,7	115
СЛ-369	110	3600	55	0,8	5,85	0,1	15,2	150	450	13	0,7	90
СЛ-521	110	3000	77	1,07	10,0	0,13	8,5	250	650	35	1,7	58
СЛ-521К	110	1000	20	0,37	1,1	0,13	74	200	635	35	1,7	360
СЛ-569	110	3600	175	1,96	24,0	0,11	3,6	475	925	35	2,7	30
СЛ-569К	110	850	36	0,58	2,25	0,22	40	420	1020	35	2,7	290
СЛ-571К	24	2200	95	6,15	62,0	0,85	0,31	420	750	35	2,7	2
СЛ-621	110	2400	172	2,08	30,0	0,16	3,0	700	1250	38	6,75	35
СЛ-661	110	2400	230	2,66	54,0	0,18	1,73	925	1550	38	9,35	25

В справочной литературе и каталогах момент инерции часто выражают через маховой момент GD^2, используя техническую систему единиц МКГСС. В этом случае момент инерции измеряется в $кГ \cdot М \cdot см^2$:

$$J_Д = \frac{G}{g} \cdot \frac{D^2}{4} = \frac{GD^2}{4g},$$

где $\frac{G}{g} = m$ - масса якоря, $кГ \cdot сек^2/М$; g – ускорение силы тяжести, равное 9,81 $м/сек^2$; $G=mg$ – вес якоря (сила тяжести), $кг$ (1 $кГ$ = 9,81 $кг \cdot М / сек^2$).

Для численного выражения момента инерции $J_Д$ в единицах СИ через маховой момент GD^2 [$кг \cdot м^2$] можно пользоваться соотношением

$$J_Д = GD^2/4. \qquad (4.48)$$

Номинальный ток якоря двигателя

$$I_{я.НОМ} = I_{НОМ} - I_{В.НОМ} \approx I_{НОМ} - \frac{U_{НОМ}}{\alpha r_В}.$$

Пример. Определим для двигателя типа П-22 ($U_{ном} = 220В$, $n_{ном} = 1500об/мин$) коэффициенты уравнения динамики при номинальном потоке возбуждения и $M_c = M_c(t)$, $J_{н.пр} = 0{,}014кг \cdot м^2$.

Из табл.4.2. имеем следующие данные:

$U_{Д.НОМ} = 220\,\text{В};\ I_{я..НОМ} = I_{НОМ} - I_{В.НОМ} = 5{,}64A;$ P=1;

$r_{я.ц} = r_{я} + r_{Д.П} + r_{ст} = 4{,}42\,\text{Ом};$ $J_д$=0,0138 $кг \cdot м^2$.

Пользуясь соотношениями (4.35), (4.31), (4,28), определяем постоянные:

$$c_{еД} = \frac{u_{Д.НОМ} - \alpha \cdot r_{я.ц} \cdot I_{я.НОМ}}{n_{НОМ}} = \frac{220 - 1{,}2 \cdot 4{,}42 \cdot 5{,}64}{1500} = 0{,}126;$$

$$c_{МД} = \frac{1}{0{,}105} \cdot c_{еД} = \frac{0{,}126}{0{,}105} = 1{,}2.$$

Учитывая, что двигатели серии П имеют легкую компенсационную (стабилизирующую) обмотку, по приближенной формуле (4.40), полагая β = 0,3, находим:

$$L_{я} = \frac{30}{\pi} \cdot \beta \cdot \frac{u_{Д.НОМ}}{p \cdot n_{НОМ} \cdot I_{я.НОМ}} = \frac{30}{\pi} \cdot 0{,}3 \cdot \frac{220}{1 \cdot 1500 \cdot 5.64} \approx 0{,}075\ Гн.$$

Момент инерции на валу двигателя

$$J = J_{Д} + J_{Н.пр} = 0{,}0138 + 0{,}014 = 0{,}028\ \ кг \cdot м^2.$$

Подставив численные значения параметров, получаем

$$k_{Д} = \frac{1}{c_{еД}} = \frac{1}{0{,}126} \approx 8\ \ об/мин \cdot В;$$

$$k_{В} = \frac{\alpha \cdot r_{ящ}}{c_{еД} \cdot c_{М.Д}} = \frac{1{,}2 \cdot 4{,}42}{0{,}126 \cdot 1{,}2} = 35\ \ об/Н \cdot М \cdot мин;$$

$$T_{я} = \frac{L_{я}}{\alpha \cdot r_{я.ц}} = \frac{0{,}075}{1{,}2 \cdot 4{,}42} = 0{,}014сек;$$

$$T_{эм} = \frac{1}{9{,}55} \cdot J \cdot \frac{\alpha \cdot r_{ящ}}{c_{еД} \cdot c_{М.Д}} = \frac{0{,}028}{9{,}55} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 4{,}42}{0{,}126 \cdot 1{,}2} = 0{,}1сек.$$

4.4 Идентификация двухфазного асинхронного двигателя

Двухфазные асинхронные двигатели широко используются в автоматических системах. Наибольшее применение как исполнительные элементы они находит в маломощных следящих системах. Практическое достоинство этих двигателей заключается в том, что они не имеют коллектора и поэтому обладают высокой надежностью.

В основном выпускаются двухфазные асинхронные двигатели двух типов: с полым немагнитным ротором из материала с хорошей электропроводностью (обычно из алюминия) и с ферромагнитным ротором, имеющим короткозамкнутую обмотку в виде беличьей клетки. Имея меньший к.п.д., двигатели первого типа отличаются малой инерцией ротора и лучшими регулировочными свойствами. Мощность указанных типов двигателей не

превышает 100 ÷200 вт. Принципиальная схема двухфазного асинхронного двигателя показана на рис.4.6. Обмотка управления $\omega_у$ и обмотка возбуждения $\omega_в$ расположены перпендикулярно друг к другу. Необходимый фазовый сдвиг между напряжениями на обмотках, равный 90^0, обеспечивается с помощью конденсатора С, включенного в цепь обмотки возбуждения. Могут применяться и другие схемы включения обмоток [27].

Механические характеристики асинхронного двигателя нелинейны и зависят не только от собственных параметров, но и параметров выходного каскада усилителя и схемы включения обмоток.

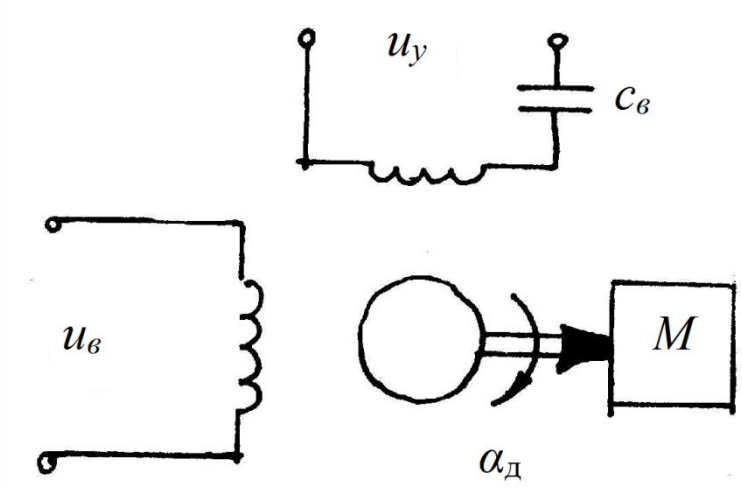


Рис.4.6 Двухфазной асинхронный двигатель $u_у$ $u_в$ $c_в$ M $\alpha_д$

Поэтому механические характеристики, используемые в расчетах, должны соответствовать реальным условиям работы двигателя. Как правило, такие характеристики определяются экспериментально. Обычно в справочниках приводятся технические данные двигателей для показанной на рис.4.6 схемы включения обмоток при управлении от источника с большой мощностью и малым внутренним сопротивлением.

С помощью механических характеристик $n = f(U_Д, M)$ (рис.4.7,а) можно найти управляющее напряжение при заданном статическом моменте сопротивления на валу и напряжение трогания двигателя.

Составим линейное уравнение динамики двигателя в отклонениях, проведя линеаризацию его механических характеристик. За входную величину примем напряжение на управляющей обмотке, а за выходную – угол поворота вала, полагая момент сопротивления не зависящим от скорости вращения, что соответствует большинству применений двухфазных асинхронных двигателей.

Механические характеристики двигателя следует линеаризовать в точке или области рабочего режима путем построения касательных к действительным характеристикам. Если по форме механические характеристики близки к линейным, то их можно заменить приближенными линейными характеристиками в виде параллельных прямых (рис.4.7. б) с наклоном, равным

усредненному наклону прямых, соединяющих при заданных управляющих напряжениях точки пусковых моментов и холостого хода.

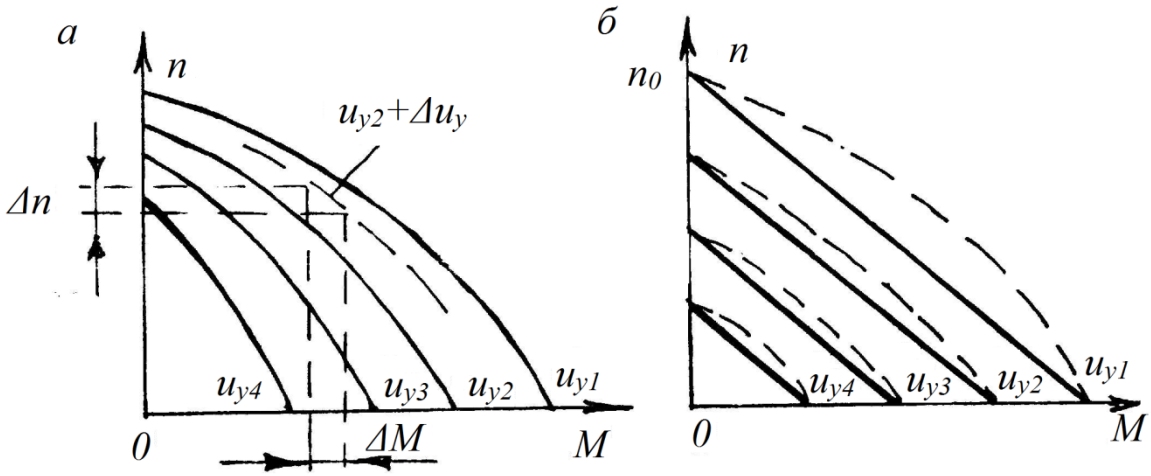


Рис.4.7 Механические характеристики двухфазного асинхронного двигателя

Из дальнейшего рассмотрения исключим инерционность по цепи управления, так как эта величина практически очень мала. Проведя аналогию с двигателем постоянного тока при $L_Я = 0$ на основании уравнения (4.30) для асинхронного двигателя при постоянной амплитуде напряжения возбуждения и малых отклонениях переменных можно записать:

$$\frac{d\alpha_Д}{dt} = \frac{1}{c_e} \cdot U_y - \frac{1}{c_e \cdot c_M} \cdot M \,, \qquad (4.49)$$

где $d\alpha_Д / dt$ – скорость вращения двигателя, *рад/сек*; $\alpha_Д$ – угол поворота вала двигателя, *рад;* $U_Ó$ – действующие значение напряжения на обмотке управления, *В*; *М* – момент двигателя, $Н \cdot М$; $ñ_å$, $ñ_i$ – постоянные двигателя, определяемые в области рабочего режима, $В \cdot сек / рад$; $Н \cdot М / В$.

При этом уравнение равновесия моментов имеет вид

$$M = J \frac{d^2\alpha_Д}{dt^2} + M_c \,. \qquad (4.50)$$

Решив совместно (4.49), (4.50) и перейдя к изображениям, получим уравнение двухфазного асинхронного двигателя

$$(T_{эм} p + 1) \cdot p \cdot \alpha_Д(p) = k_Д \cdot U_y(p) - k_{Д.В} \cdot M_c(p) \,, \qquad (4.51)$$

где $k_д$-$1/c_e$, $k_{д.в}=1/c_e c_м$ – коэффициенты передачи двигателя соответственно по управляющему и возмущающему воздействиям; $T_{э.м}=J/(c_e c_м)$ – электромеханическая постоянная времени, сек. Здесь $J=J_д+J_{нюпр}$ – момент инерции на валу двигателя, кг.м^2; $J_Д$ – момент инерции ротора двигателя, *кг·м*^{2}. Постоянные c_e и $c_м$ могут быть найдены на основании (4.49) по механическим характеристикам.

При $\Delta M = 0$ $(M = const)$ получаем

$$c_e = \Delta U_y / \Delta \omega_Д \,. \qquad (4.52)$$

Принимая $\omega_Д = 0$ $(\omega_Д = const)$, находим

$$c_м = \Delta M / \Delta U_у . \qquad (4.53)$$

В случае приведения механических характеристик двигателя (см.рис.4.7, б)

$$c_е = U_у / \omega_{Д0} \; ; \; c_М = M_П / U_у \; , \qquad (4.54)$$

где $\omega_{Д0}, M_П$ – – скорость при холостом ходе и пусковой момент двигателя при напряжении управления $U_у$.

При отсутствии механических характеристик постоянные двигателя можно определить приближенно по его номинальным данным. Если механическую характеристику двигателя на рабочем участке от номинальной скорости вращения $\omega_{.Д.НОМ}$ до $\omega_Д = 0$ при номинальном напряжении управления $U_{у.НОМ}$ считать линейной, то

$$\left.\begin{aligned} c_е &= \frac{\Delta U_у}{\Delta \omega_Д} = \frac{M_П - M_{ном}}{M_П} \cdot \frac{U_{у.НОМ}}{\omega_{Д.ном}}; \\ c_м &= \Delta M / \Delta U_у = M_П / U_{у.ном}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.55)$$

где $\Delta U_У = U_{у.НОМ} - U_{Тр.НОМ}$ – (здесь $U_{Тр.НОМ} = U_{У.НОМ} \cdot M_{НОМ} / M_П$ – напряжение трогания двигателя при номинальном моменте).

В последнем случае коэффициенты уравнения двигателя запишутся как

$$\left.\begin{aligned} k_Д &== \frac{M_П}{M_П - M_{ном}} \cdot \frac{\omega_{Д.НОМ}}{U_{у.ном}}; \\ k_{Д.В} &= \frac{\omega_{Д.НОМ}}{M_П - M_{ном}}; \\ T_{эм} &= J \frac{\omega_{Д.НОМ}}{M_П - M_{ном}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.56)$$

Так как в справочных сведениях скорость вращения двигателя дается в оборотах в минуту, следует учитывать соотношение

$$\omega_Д = (рад/сек) = \frac{1}{9{,}55} n(об/мин).$$

Передаточные функции двигателя на основании (4.51) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} W_Д(p) &= \frac{\alpha_Д(p)}{U_Д(p)} = \frac{\hat{e}_Д}{\delta \cdot (T_{эл}\, \delta + 1)}; \\ W_{Д.Â}(p) &= \frac{\alpha_Д(p)}{M_c(p)} = \frac{-\hat{e}_{Д.Â}}{\delta \cdot (T_{эл}\, \delta + 1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.57)$$

Примеры составления передаточных функций двухфазных асинхронных двигателей при различной форме механических характеристик рассмотрены в литературе [27].

Технические данные некоторых типов двухфазных асинхронных двигателей с полым ротором приведены в табл.4.5.

Пример. Определим для двигателя типа АДП-262 приближенную передаточную функцию по управляющему воздействию при $J_{Н.ПР} = 1{,}7 \cdot 10^{-6} кг \cdot м^2$,

Из табл. 4.5. имеем следующие данные:

$$U_{У.НОМ} = 125 В;\ \omega_{Д.НОМ} = \frac{1}{9{,}55} \cdot n_{НОМ} = 194 рад/сек;\ M_{НОМ} = 49 \cdot 10^{-3} Н \cdot м;$$

$$M_{П} = 88 \cdot 10^{-3} Н \cdot м;\ J = J_{Д} + I_{Н.пр} = 3{,}37 \cdot 10^{-6} кг \cdot м^2.$$

Используя номинальные данные двигателя, определяем приближенные значения

$$k_{Д} = 3{,}5 \frac{рад}{В \cdot сек}; T_{эм} = 0{,}017 сек\ .$$

При найденных параметрах

$$W_{Д}(p) = \frac{3{,}5}{p \cdot (0{,}017 p + 1)}.$$

Таблица 4.5

Технические данные двухфазных асинхронных двигателей тип АДП

Тип двигателя	f, Гц	$P_{ном}$, Вт	$n_{ном}$, об/мин	n_0 об/мин	Обмотка возбуждения					Обмотка управления					$M_{ном}\cdot10^{-3}$, Н.М	$M_{П}\cdot10^{-3}$, Н.М.	$M_{тр}\cdot10^{-3}$, Н.М	$J_{Д}\cdot10^{-6}$, кг.$М^2$
					$U_{в}$,В	$I_{ном.в}$,А	$P_{в}$, Вт	$C_{в}$,мкФ	$r_{в}$,Ом	U_{max},В	$I_{у}$,А	$I_{у.п.}$, А	$P_{у}$,Вт	$r_{у}$,Ом				
АДП-120		2,4	4000	5000	110	0,3	28	0,25	-	110	0,18	-	8	-	5,9	9,8	0,29	-
АДП-123	400	4,1	4000	5000	110	0,18	16	0,3	-	120	0,18	-	9	-	9,8	13,7	0,29	0,785
АДП-123Б		8,9	6000	7000	110	0,27	26	0,5	-	110	0,22	-	12	-	14,2	16,7	0,29	0,785
АДП-263		24	6000	8800	52	0,78	38	1,38	49±9,5	165	0,37	0,42	38	10±1,0	39	58	1,18	1,67
АДП-263А	500	27,8	6000	8600	36	1,38	42	3,9	3,5±0,35	270	0,51	0,56	42	28±2,0	44	64	1,18	1,86
АДП-363		35	6000	8600	110	0,55	53	6,6	11,5±1,1	120	1,2	1,7	55	3±0,3	56	69	2,0	3,93
АДП-363А	500	46,4	6000	8600	36	2,0	65	6,6	1,22±0,12	240	0,65	0,92	68	11±1,0	73,5	83,4	2,0	4,83
АДП-563А		70,5	6000	8600	36	3,6	105	14,4	2,4±0,2	240	0,9	1,25	76	5±0,5	98	118	4,3	11,75
АДП-262		9,5	1850	2650	110	0,23	23	2,5	190±15	125	0,58	0,6	26	38±3,5	49	88	0,8	1,67
АДП-362	50	19	1950	2650	110	0,6	45	6,5	36±3,5	120	0,65	0,75	25	21±2,0	93	167	1,3	3,93
АДП-562		41	2000	2650	110	0,88	88	11,0	17±1,5	160	0,73	1,15	35	13±1,3	196	343	2,2	12,75

4.5 Основные параметры и передаточная функция электромашинного усилителя

В автоматических системах электромашинные усилители (ЭМУ) до сих пор находят применение. Это объясняется тем, что они имеют высокие коэффициенты усиления по мощности и по напряжению, обладают сравнительно большим быстродействием и при наличии нескольких обмоток управления позволяют просто суммировать управляющие сигналы.

Промышленность выпускает ЭМУ продольного поля (с самовозбуждением) и поперечного поля. Двухступенчатые ЭМУ первого типа изготовляются на большую мощность — до 200 *кВт* и более и используются в управляемом электроприводе. В системах автоматического управления и регулирования широко применяются ЭМУ с поперечным полем, изготовляемые до 10 *кВт.*

Принципиальная электрическая схема ЭМУ поперечного поля (рис.4.8) представляет схему двухкаскадного усилителя. Первый каскад, усиления включает в себя обмотку управления ОУ и обмотку якоря с выходом на щетки поперечной оси 1-1. Магнитный поток $\Phi_у$, создаваемый обмоткой управления, индуктирует в якоре э. д. с. поперечной оси $e_{к.з}$. За счет тока $i_{к.з}$ образуется поперечный поток реакции якоря $\Phi_{к.з}$ который используется для возбуждения второго каскада. Результирующая э. д. с. ЭМУ $e_{я.у}$ снимается со щеток продольной оси 2-2.

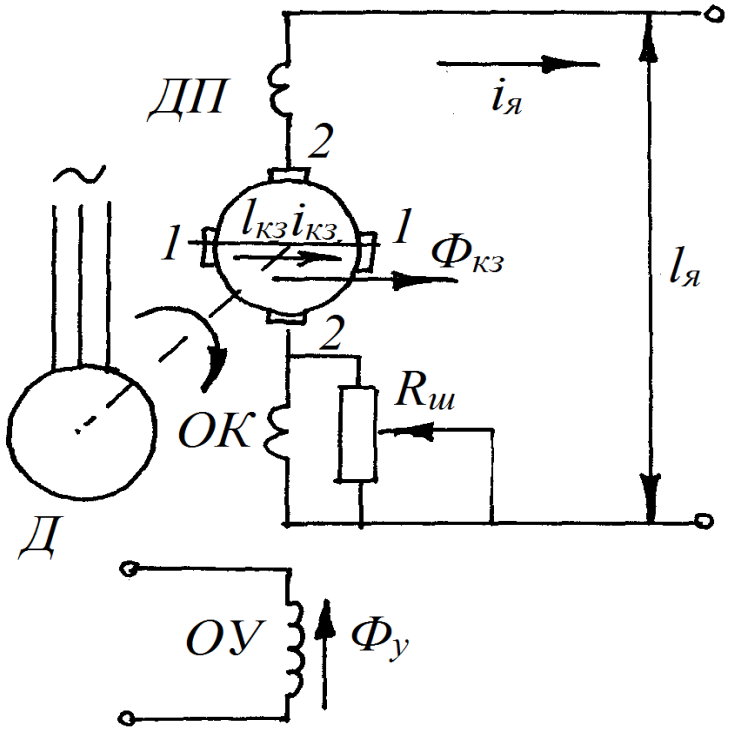


Рис. 4. 8 Электромашинный усилитель с поперечным полем

Для увеличения потока реакции якоря по поперечной оси воздушный зазор между якорем и статором делается равномерным, а дополнительные полюса по этой оси не ставятся. С этой же целью сопротивление якорной

цепи по поперечной оси стремятся сделать минимальным, для чего щетки, расположенные на этой оси, обычно замыкают накоротко,

Для компенсации реакции якоря по продольной оси от тока якоря $i_я$ на статоре по этой оси располагается распределенная обмотка компенсации *ОК,* намагничивающее действие которой регулируется с помощью шунтирующего сопротивления $R_ш$. Для уменьшения искрения между щетками и коллектором в цепи нагрузки по продольной оси машины располагаются также дополнительные полюса *ДП.*

В электромашинных усилителях серии ЭМУ-А, выпускаемых промышленностью, введены дополнительно специальные размагничивающие обмотки переменного тока и последовательная обмотка в поперечной цепи статора. Эти обмотки позволяют существенно уменьшить влияние гистерезиса магнитопровода и тока нагрузки на характеристики ЭМУ. Для примера на рис. 4.9 показаны характеристики холостого хода (*а*) и внешние характеристики (*б*) электромашинного усилителя типа ЭМУ-12А при управлении со стороны обмотки с числом витков $\omega_у$ — 2900 [26].

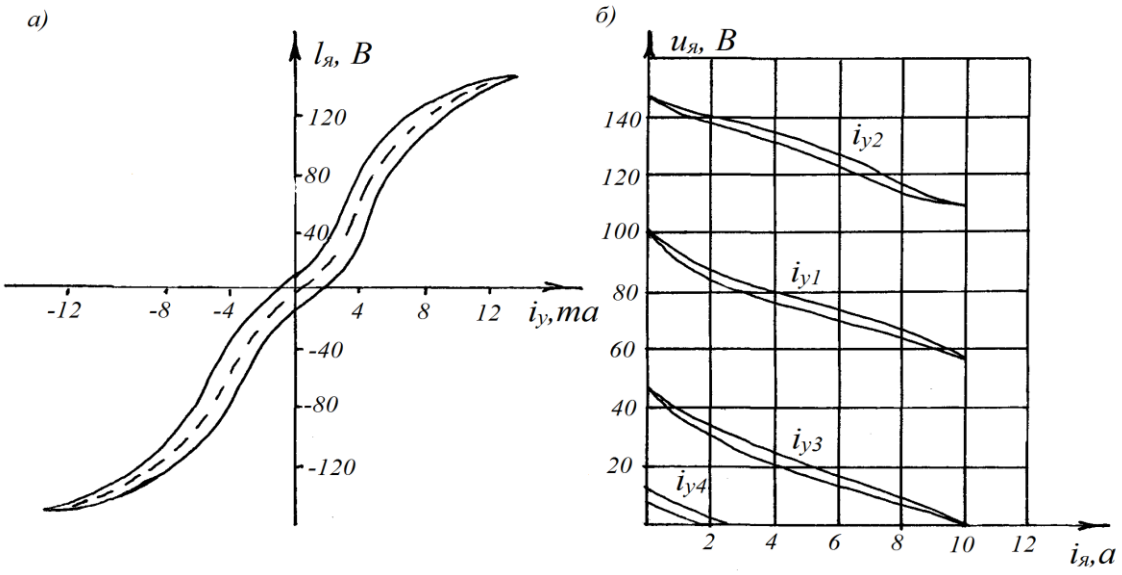


Рис. 4.9 Характеристики холостого хода и внешние характеристики электромашинного усилителя типа ЭМУ-12А

В режиме холостого хода динамика ЭМУ при малых приращениях напряжения управления описываемся передаточной функцией

$$W_{эму}(p) = \frac{E_{я.у}(p)}{U_у(p)} = \frac{k_у}{(T_у p + 1)\cdot(T_{к.з} p + 1)}, \qquad (4.58)$$

где $k_у$ - коэффициент передачи ЭМУ по напряжению, определенный по характеристике х. х.; $T_у$ и $T_{к.з}$ - постоянные времени соответственно цепи управления и к. з. цепи, *сек.*

При наличии нескольких обмоток управления постоянная времени цепи управления ЭМУ принимается равной сумме постоянных времени всех обмоток, включенных на источники сигнала.

В общем случае подключение нагрузки к ЭМУ изменяет его характеристики за счет внутренних обратных связей. Однако, как показывает опыт, в нормально скомпенсированном ЭМУ, содержащем размагничивающие обмотки и последовательные стабилизирующие обмотки в поперечной цепи, изменения характеристик достаточно малы, что позволяет пренебречь влиянием внутренних обратных связей.

Наибольшее применение ЭМУ находят в системах управления двигателями постоянного тока, часто используются в качестве возбудителей генераторов. На рис. 4.10 показана идеализированная эквивалентная схема ЭМУ, нагруженного на якорную цепь двигателя постоянного тока. Уравнение для ЭМУ и двигателя, полученное из этой схемы, имеет вид

$$[(T_{Я\sum} \cdot p+1)\cdot T'_{эм}p+1]\cdot n_{д}(p) = \\ = \frac{к_{у}\cdot к_{Д}}{(T_{у}p+1)\cdot(T_{к.з}p+1)}\cdot U_{у}(p) - (T_{я\sum}\ p+1)\cdot к'_{в}\cdot M_{с}(p), \qquad (4.59)$$

где $T_{я\sum} = \frac{L_{я.у}+L_{я.Д}}{r_{я.у}+r_{я.Д}}$ – суммарная постоянная времени цепи якоря ЭМУ и двигателя, *сек*;

$T'_{эм} = J\frac{r_{я.у}+r_{я.Д}}{c_{е,Д}+c_{м.Д}}$ - электромеханическая постоянная времени двигателя при работе от ЭМУ, *сек*;

$k'_{в} = \frac{r_{я.у}+r_{я.Д}}{c_{е.Д}+c_{м.Д}}$ - коэффициент передачи двигателя по возмущающему воздействию при работе от ЭМУ, $об/н\cdot м\cdot мин$;.

Величину индуктивности цепи якоря ЭМУ $L_{я.у}$ можно найти по приближенной формуле (4.40), принимая $\beta \approx 0{,}25$.

Если нагрузкой ЭМУ является цепь возбуждения генератора, то постоянная времени этой цепи достаточно точно определяется соотношением

$$T'_{В} \approx \frac{L_{В}}{r_{В}+r_{я.у}} = \frac{T_{В}}{1+r_{я.у}/r_{В}} \quad (\text{где } T_{В}=L_{В}/r_{В}), \qquad (4.60)$$

так как всегда $L_{В} \rangle\rangle L_{Я}$. При последовательном соединении ЭМУ и генератора постоянного тока передаточная функция

$$W(p) = \frac{E_{Г}(p)}{U_{у}(p)} = \frac{к_{у}\cdot к'_{Г}}{(T_{у}p+1)\cdot(T_{к.з}p+1)\cdot(T'_{В}p+1)}\ , \qquad (4.61)$$

где $k'_{Г} = \frac{k_{Г}}{1+r_{я.у}/r_{В}}$, здесь – $k_{г}$ – коэффициент передачи генератора при возбуждении от источника с нулевым сопротивлением.

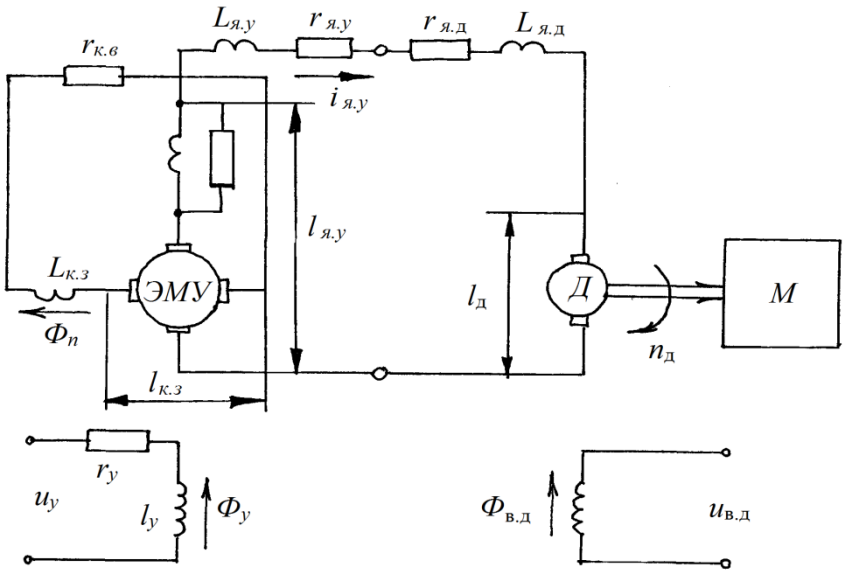


Рис.4.10 Эквивалентная электрическая схема ЭМУ, нагруженного на двигатель постоянного тока

В целях стабилизации параметров и уменьшения влияния нелинейностей и нагрузки электромашинный усилитель часто охватывают жесткой отрицательной обратной связью по напряжению, используя для этого одну из обмоток управления (рис.4.11, а). Эквивалентная схема ЭМУ с жесткой обратной связью показана на рис.4.11, б. Динамика такого ЭМУ описывается передаточной функцией.

$$W'_{эму}(p) = \frac{\kappa'_{y1}}{T^2 p^2 + 2 \cdot \varsigma \cdot Tp + 1}, \qquad (4.62)$$

в которой $k'_{y1} = \dfrac{k_{y1}}{1 + k_{y1} \cdot k_{O.C}}$; $k_{O.C} = \dfrac{w_{y2}}{w_{y2}} \cdot \dfrac{r_{y1}}{r_{y2} + R_{O.C}}$;

$$T = \sqrt{\frac{T_{y\Sigma} \cdot T_{кз}}{1 + \kappa_{y1} \cdot \kappa_{oc}}}; \quad \varsigma = \frac{1}{2\sqrt{1 + \kappa_{y1} \cdot \kappa_{oc}}} \cdot \frac{T_{y\Sigma} + T_{кз}}{\sqrt{T_{y\Sigma} \cdot T_{кз}}}$$

$$T_{y\Sigma} = T_{y1} + T_{y2} = \left(1 + \frac{w_{y2}^2}{w_{y1}^2} \cdot \frac{r_{y1}}{r_{y2} + R_{O.C}}\right) \cdot T_{y1}.$$

Применение в ЭМУ отрицательной обратной связи уменьшает его коэффициент усиления. Особенно сильное влияние обратная связь оказывает на величину коэффициента усиления по мощности:

$$k'_p = \frac{k_p}{(1 + k_{y1} \cdot k_{o.c})^2}, \qquad (4.63)$$

где k_p– коэффициент усиления по мощности при отсутствии обратной связи.

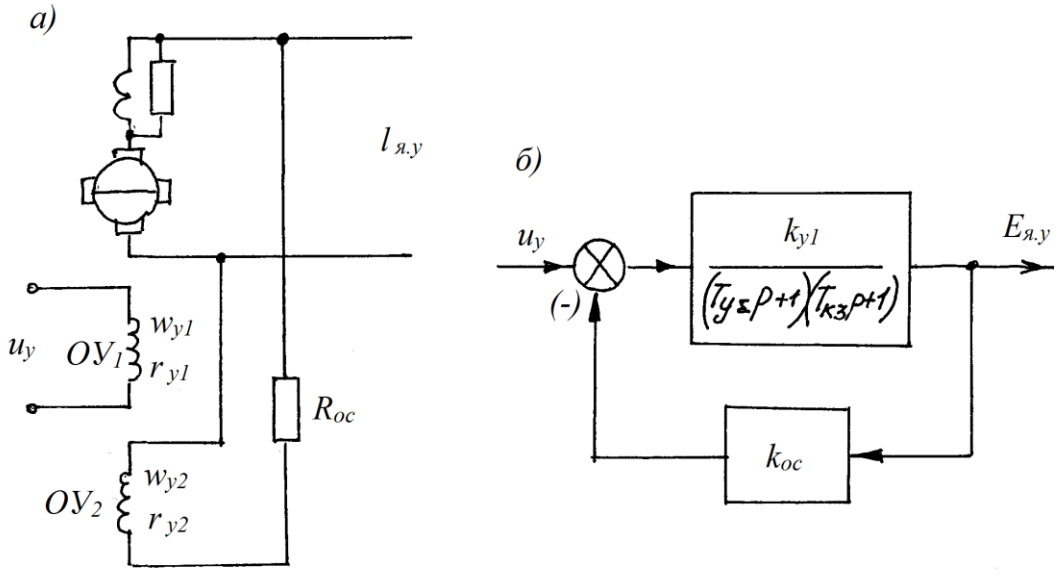


Рис.4.11 Электромашинный усилитель с отрицательной обратной связью по напряжению

Технические данные (электромашинных усилителей серии ЭМУ-А приведены в табл. 4.6 [26,28]. Параметры, характеризующие динамические свойства ЭМУ, являются ориентировочными. Эти параметры определены *с* помощью универсальных характеристик [28], которые связывают величины постоянной времени к. з. и удельной индуктивности обмоток управления с номинальной мощностью ЭМУ и скоростью вращения приводного двигателя.

Электромашинные усилители изготавливаются с различными комплектами обмоток управления (табл.4.7). Высокоомные обмотки используются при управлении ЭМУ от электронных усилителей, а низкоомные - от полупроводниковых. Наличие в комплекте нескольких обмоток позволяет вводить на вход ЭМУ кроме управляющих также и корректирующие сигналы.

Благодаря стабилизирующей обмотке в поперечной цепи электромашинные усилители типа ЭМУ-А имеют смягченные внешние характеристики, достаточно близкие к линейным. Коэффициент передачи для этих усилителей в режиме холостого хода приближенно можно найти по номинальным данным:

$$k_y = \frac{e_{я.у}}{u_y} \approx \frac{m \cdot U_{вых.ном}}{\alpha \cdot r_y \cdot I_{у.НОМ}}, \qquad (4.64)$$

где α=1,15 - коэффициент, учитывающий нагрев обмотки управления; *m*=1,35; 1,3; 1,25 соответственно для усилителей 0,2 - 1,5 *кВт;* 2 - 5 *кВт;* 7-10 *кВт.*

Таблица 4.6

Технические данные электромашинных усилителей серии ЭМУ- А

Тип усилителя	Номинальные данные на выходе			Обмотки управления			$T_{к.з}$, сек	Сопротивления обмоток (при 20^0С), ом				Номинальные данные встроенного трехфазного приводного двигателя			
	$U_{вых}$, В	$P_{вых}$, кВт	$I_{вых}$, А	w_y	P_y, Вт	$\frac{L_y}{w_y^2}\cdot 10^{-6}, Гн$		$r_я$	$r_{о.к}$	$r_{д.п}$	$R_{к.з}$	U, В	I, А	P, кВт	n, об/мин
ЭМУ-3А	115	0,2	1,75	от 2 до 3	0,5	2,8	0,018	7,4	6,2	2,17	2,67	127/220 220/380	2,75/1,6 1,6/0,92	0,47	3000
ЭМУ-5А	115	0,5	4,35		0,5	4,5	0,033	1,65	1,3	0,43	2,3	127/220 220/380	5,5/3,2 3,2/1,85	0,94	3000
ЭМУ-12А	115	1,2	10,4		0,5	6,7	0,06	0,57	0,51	0,11	0,91	127/220 220/380	10,9/6,3 6,3/3,63	1,97	3000
ЭМУ-25А	115	2,5	21,7	от 2 до 4	0,6	9,7	0,1	0,29	0,23	0,052	0,93	127/220 220/380	27/13,8 13,8/8,0	4,2	3000
	230	2,5	10,8		0,6	9,7	0,1	1,16	0,92	0,21	3,35	127/220 220/380	24/13,8 13,8/8,0	4,2	3000
ЭМУ-50А	230	4,5	19.6		0,65	14	0,17	0,35	0,33	0,11	1,11	127/220 220/380	37/21,5 21,5/12,4	6,6	3000
ЭМУ-70А	230	7	30,5		0,6	17	0,22	0,26	0,24	0,047	1,07	127/220 220/380	55,5/32 32/18,5	10	3000
ЭМУ-100А	230	10	43,5		0,65	19	0,28	0,14	0,12	0,026	0,52	127/220 220/380	74/43 43/24,7	13,5	3000

Таблица 4.7

Данные комплектов обмоток управления электромашинных усилителей

Тип усилителя	Номер комплекта	$ОУ_1$				$ОУ_2$				$ОУ_3$				$ОУ_4$			
		$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA	$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA	$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA	$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA
ЭМУ-3	–	2600 4400	1000 3500	20 10,7	120 64,2	2600 4400	1000 3500	20 10,7	120 64,2	–	-	-	-	-	-	-	-
ЭМУ-5	-	3250 5300	1000 3000	20 11,5	120 69	3250 5300	1000 3000	20 20	120 69	-	-	-	-	-	-	-	-
ЭМУ-12	12-2-А	2900	1030	22	190	2900	1030	22	190	-	-	-	-	-	-	-	-
	12-2-Б	4600	2200	14	130	4600	2200	14	130	-	-	-	-	-	-	-	-
	12-2-В	4800	2600	13	117	4800	2600	13	117	-	-	-	-	-	-	-	-
	12-3-Г	3000	1550	21	145	3000	1550	21	145	3000	1345	21	145	-	-	-	-
	12-3-Д	2350	1340	27	135	2350	1340	27	135	460	34,2	140	820	-	-	-	-
	12-3-Е	500	161	130	200	370	84	170	280	740	72	85	600	-	-	-	-
	12-3-Ж	900	155	70	350	900	155	70	350	1350	367	47	240	-	-	-	-
	12-4-З	675	184	94	240	900	155	70	350	675	184	94	240	900	155	70	350
ЭМУ-25	25-2-А	3400	985	22	200	3400	985	22	200	-	-	-	-	-	-	-	-
	25-2-Б	4360	1500	17	155	4360	1500	17	155	-	-	-	-	-	-	-	-
	25-2-В	6600	3310	11,5	105	6600	3310	11,5	105	-	-	-	-	-	-	-	-
	25-2-Г	8000	5000	9,5	85	8000	5000	9,5	85	-	-	-	-	-	-	-	-
	25-3-Д	2600	1065	28,5	150	2600	1065	28,5	150	2600	950	28,5	200	-	-	-	-
	24-4-Е	500	37,2	145	720	330	18,5	220	1100	330	15,6	220	1100	330	18,5	220	1100
	25-4-Ж	1300	340	56	225	330	18,5	220	1100	1300	340	56	225	1300	402	56	225
	25-4-З	3200	1820	23	115	330	18,5	220	1100	3200	1820	23	115	1200	792	61	120
	25-4-И	400	21,7	180	950	2800	1500	26	120	400	21,7	180	950	2800	1500	26	120
	25-4-К	5000	2920	14,5	85	500	131	145	300	5000	2920	14,5	85	1500	1000	49	115
	25-4-Л	1300	340	56	225	330	18,5	220	1100	330	15,6	220	1100	330	18,5	220	1100
	25-4-М	3600	1835	20	100	3600	2165	20	100	3600	1835	20	100	3600	2165	20	100
	25-4-Н	18	0,04	4000	20000	500	44,1	145	720	18	0,04	4000	20000	500	44,1	145	720

Продолжение табл. 4.7

Тип усилителя	Номер комплекта	ОУ$_1$				ОУ$_2$				ОУ$_3$				ОУ$_4$			
		$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA	$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA	$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA	$w_у$	$r_у$, Ом	$I_{у.ном}$, mA	$I_{доп}$, mA
ЭМУ-50	50-2-А	3420	1030	22	200	3420	1030	22	200	-	-	-	-	-	-	-	-
	50-2-Б	3720	1500	19,5	175	3720	1500	19,5	175	-	-	-	-	-	-	-	-
	50-2-В	6600	3920	11,5	105	6600	3920	11,5	105	-	-	-	-	-	-	-	-
	50-4-Г	380	24,8	190	950	220	9,15	330	1650	220	7,95	330	1650	220	9,15	330	1650
	50-4-Д	3200	2200	23	115	220	9,15	330	1000	3200	2200	23	115	1200	930	61	120
	50-4-Е	5000	3540	14,5	85	5000	3540	14,5	85	100	4,16	730	2000	500	44,7	145	720
	50-4-Ж	2800	1540	26	120	2800	1770	26	120	2800	1540	26	120	2800	1770	26	120
	50-4-З	1710	465	44	220	1710	535	44	220	1710	465	44	220	1710	535	44	220
	50-4-И	2750	1500	27	120	2300	1000	32	160	2750	1500	27	120	2300	1000	32	160
	50-4-К	2750	1500	27	120	1260	300	58	290	2750	1500	27	120	400	30	180	900
	50-4-Л	1300	410	56	225	330	21,6	220	1100	1300	410	56	225	1300	470	56	225
	50-4-М	380	24,8	190	950	15	0,04	4800	24000	15	0,04	4800	24000	15	0,04	4800	24000
ЭМУ-70	70-2-А	3600	1000	22	200	3600	1000	22	200	-	-	-	-	-	-	-	-
	70-2-Б	4000	1500	20	180	4000	1500	20	180	-	-	-	-	-	-	-	-
	70-4-Б	3600	1950	22	120	2000	800	40	180	3600	1950	22	120	330	24	240	960
ЭМУ-100	100-2-А	3200	1000	23	210	3200	1000	23	210	-	-	-	-	-	-	-	-
	100-4-Б	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	80
	100-4-В	230	8,16	320	1600	3000	2100	25	120	230	8,16	320	1600	3000	2100	25	120
	100-4-Г	230	8,16	320	1600	460	37,2	160	800	460	32,6	160	800	460	37,2	160	800

Примечание. Сопротивления обмоток указаны при 20°С; длительно допустимый ток обозначен через $I_{доп}$.

4.6 Основные параметры и передаточные функции магнитных усилителей

Магнитные усилители широко используются в системах автоматического управления. Достоинствами таких усилителей являются большое усиление по мощности, малая зависимость работы от изменений напряжения и частоты, простота суммирования сигналов на входе, возможность электрической изоляции рабочей цепи от цепи управления, высокая надежность.

К недостаткам магнитных усилителей следует отнести малое входное сопротивление и инерционность.

Целесообразно применять магнитные усилители при питании их от сети повышенной частоты (400 - 3000 Г*ц)*. В этом случае габариты и инерционность усилителей можно значительно уменьшить.

Качество магнитных усилителей оценивают по величине добротности

$$D = k_p / T_{\sum} \ , \qquad (4.65)$$

где k_p - коэффициент усиления по мощности; $T_{\sum}$ - постоянная времени магнитного усилителя со стороны цепи управления.

С целью увеличения добротности магнитные усилители, как правило, выполняют с положительной обратной связью по току нагрузки [29, 30].

На рис. 4.12 изображены электрические схемы однотактных магнитных усилителей с внешней *(а)* и внутренней (*б*) положительной обратной связью и выходом на переменном токе. В первой схеме обратная связь осуществляется с помощью специальной обмотки $w_{î.ñ}$ включенной в цепь нагрузки $z_н$ через выпрямительный мост. Обмотка $w_{ñì}$ служит для смещения характеристики усилителя, реагирующего на полярность управляющего сигнала $u_{Ó}$. Рабочие обмотки $w_{ð.î}$ включены так, что наводимая э. д. с. в обмотке управления компенсируется.

Во второй схеме усилителя положительная обратная связь создается непосредственно рабочими обмотками $w_{p.0}$, в цепи которых включены диоды. При этом в отличие от первой схемы усилителя рабочие обмотки соединяются таким образом, что они создают постоянную составляющую потока по отношению к обмотке управления. Магнитные усилители с внутренней обратной связью называются также *усилителями с самонасыщением* (см. рис. 4.12, б). Примем следующие обозначения: $w_y, w_{см}, w_{o.c}, w_{p.o}$ - числа витков соответственно обмоток управления, смещения, обратной связи и рабочей обмотки; $r_y, r_{см}, r_{o.c}, r_{p.o}$ - сопротивления соответствующих обмоток, О*м;* R_c - внутреннее сопротивление источника сигнала управления, О*м;* $R_{рег}$ - подстроечное сопротивление для регулировки тока в обмотке смещения, О*м;* $R_{ð}$ -

прямое сопротивление диода, *Ом;* $\eta = R_H / R_\Sigma$ - к. п. д. цепи нагрузки; R_Σ - суммарное сопротивление, учитывающее сопротивление обмоток и диодов, *Ом;* $U_\sim$, u_y, $U_{см}$ - соответственно напряжение сети, управления и смещения, В*;* f - частота сети, *Гц.*

Приближенно передаточную функцию магнитного усилителя с положительной обратной связью при работе на активную нагрузку можно представить в виде [29, 30]

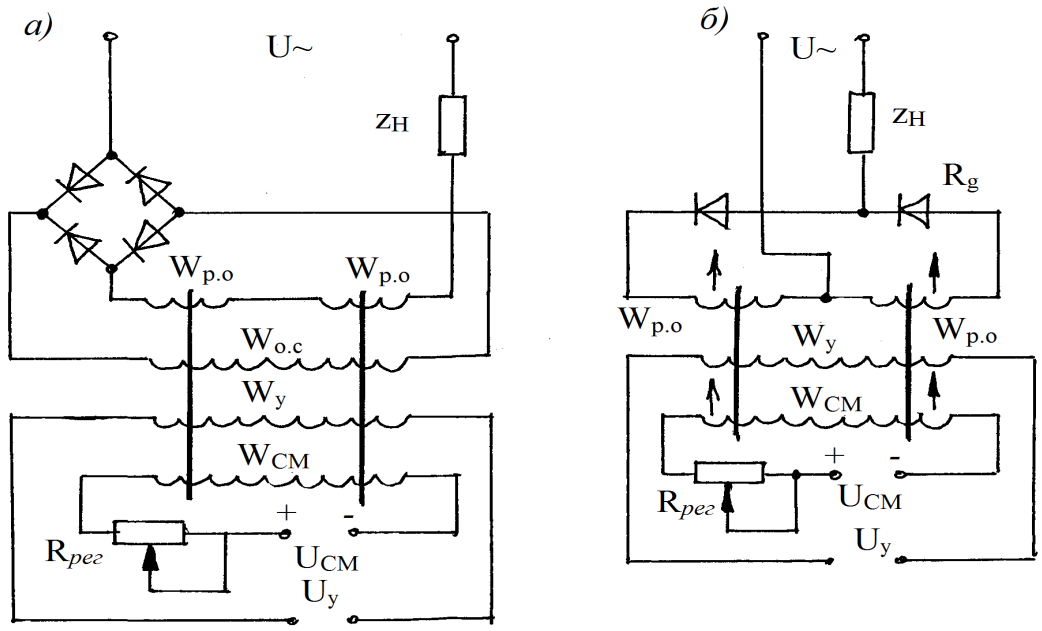


Рис. 4.12 Однотактные магнитные усилители с выходом на переменном токе

$$W_1(p) = \frac{I_{H.cp}(p)}{U_y(p)} = \frac{k_I}{r_y + R_c} \cdot \frac{e^{-pt_3}}{T_\Sigma\, p + 1}, \qquad (4.66)$$

если за выходную величину принять ток нагрузки, или в виде

$$W_U(p) = \frac{U_{H.cp}(p)}{U_y(p)} = R_H \cdot W_1(p) = \frac{k_U}{r_y + R_c / r_y} \cdot \frac{e^{-pt_3}}{T_\Sigma\, p + 1}, \qquad (4.67)$$

если за выходную величину взять напряжение на нагрузке.

В формулах (4.66, 4.67*)* использованы следующие обозначения:

$I_{H.cp}, U_{H.cp}$ — средние значения тока нагрузки *(а)* и напряжения *(в);*

$k_I = \frac{w_y}{w_{p.o}} \cdot \frac{1}{1 - k_{o.c}}$ – коэффициент усиления по току с учетом обратной связи (где $k_{o.c}$ —коэффициент обратной связи; для усилителей с внешней обратной связью $k_{o.c} = w_{o.c} / w_{p.o}$, для усилителей с внутренней обратной связью $k_{o.c} = 0.95 \div 0.96$);

$k_U = k_I R_H / r_y$ — коэффициент усиления по напряжению;

$t_з$ - время запаздывания (для усилителей с внешней обратной связью $t_З=0$, для усилителей с внутренней обратной связью $t_З=1/(2f)$, *сек)*.

Постоянная времени магнитного усилителя T_Σ равна сумме постоянных времени обмоток управления, смещения и обратной связи [29].

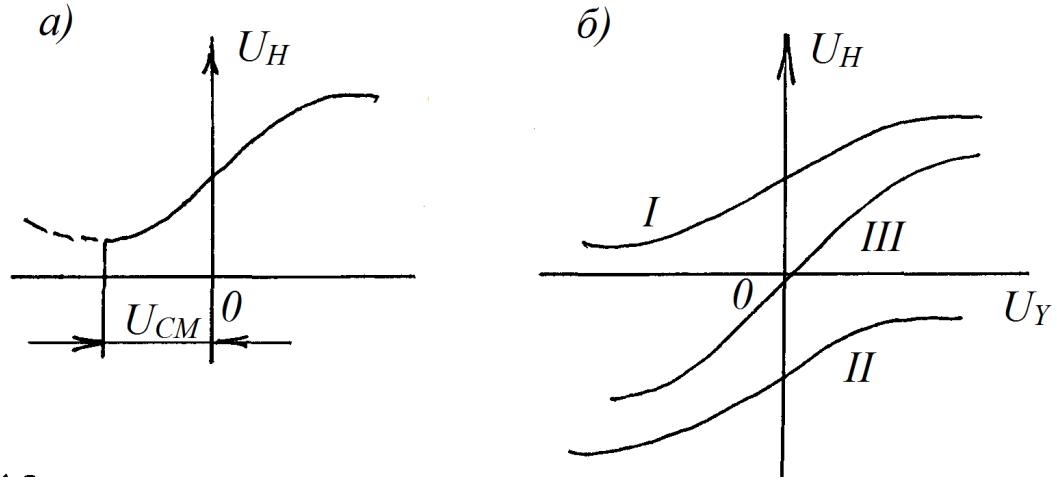


Рис. 4.13 Выходные характеристики магнитных усилителей

Для магнитного усилителя с внешней положительной обратной связью и несколькими обмотками управления

$$T_\Sigma = \frac{R_H}{4f\cdot\eta}\cdot\frac{1}{w_{p.o}^2\cdot(1-k_{o.c})}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_{yi}^2}{r_{yi}+R_{ci}}+\frac{\omega_{см}^2}{r_{см}+R_{рег}}+\frac{\omega_{o.c}^2}{r_{o.c}+2R_д+2r_{p.o}+R_H}\right). \quad (4.68)$$

В магнитном усилителе с внутренней обратной связью обратная связь осуществляется через поток рабочих обмоток, работающих поочередно в каждый полупериод. Для такого усилителя постоянная времени

$$T_\Sigma = \frac{1}{2f\cdot\eta}\cdot\frac{R_H}{w_{p.o}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{yi}^2}{r_{yi}+R_{ci}}+\frac{w_{см}^2}{r_{см}+R_{рег}}\right). \quad (4.69)$$

Для магнитных усилителей с внутренней обратной связи характерно также чистое запаздывание $t_З=1/(2f)$, обусловленное тем, что процесс изменения индукции сердечника под действием сигнала управления происходит в один полупериод, а выдача сигнала в рабочей цепи (соответствующего уровню намагниченности сердечника) - в другой полупериод. При $t\langle\langle T_\Sigma$ величиной $t_З$ пренебрегают.

Реверсивный выход получают с помощью двухтактных магнитных усилителей, которые составляют из двух однотактных усилителей.

Образование реверсивной выходной характеристики III при дифференциальном включении двух однотактных усилителей с характеристиками *I и II* показано на рис. *4.15, б*. Примеры двухтактных магнитных усилителей, построенных по дифференциальной схеме с положительной обратной связью и выходом на переменном токе, приведены на рис. 4.14, *а,б*. Обратная связь в

первом усилителе внешняя, а во втором - внутренняя. Расчетные формулы (4.66) – (4.69) справедливы также и для двухтактных усилителей.

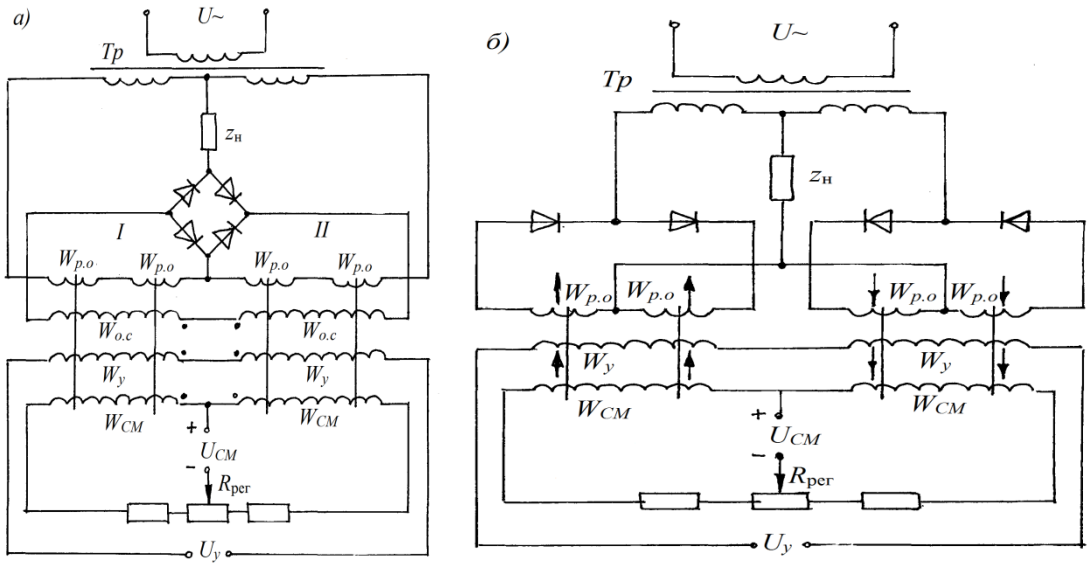


Рис.4.14 Двухтактные магнитные, усилители с выходом на переменном токе

Двухтактные магнитные усилители строят также по мостовой и трансформаторной схемам [29, 30]. Чтобы получить выход на постоянном токе, в выходную цепь следует ввести выпрямительные устройства. Магнитные усилители с двухтактным выходом на постоянном токе имеют низкий к. п. д. Для повышения его применяют специальные схемы усилителей. Однако без использования вспомогательных активных элементов, рассчитанных на работу при соответствующем токе нагрузки, к. п. д. таких усилителей практически не превышает 40 - 45% [30].

Нагрузка магнитного усилителя может иметь индуктивный характер, например, при работе на асинхронный двигатель или на обмотку возбуждения генератора. В общем случае такая нагрузка приводит к изменению передаточной функции усилителя. В магнитном усилителе с выходом на переменном токе влияние индуктивной нагрузки практически исключается, если последнюю настроить в резонанс с частотой сети, подключив параллельно конденсатор. Такое включение магнитного усилителя используется при работе на асинхронный двигатель.

В случае выхода на постоянном токе при индуктивной нагрузке в магнитных усилителях с положительной обратной связью коэффициент обратной связи возрастает, что может привести к неустойчивой работе усилителя. Существуют способы устранения этого явления [30]. При использовании их передаточная функция магнитного усилителя с выходом на постоянном токе и индуктивной нагрузке

$$W_I(p) = \frac{I_{н.ср}(p)}{U_у(p)} = \frac{k_I}{(r_у + R_c)\cdot(T_{\sum}\, p + 1)\cdot(T_н p + 1)}, \qquad (4.70)$$

где $T_н = L_H / R_{\Sigma}$ - постоянная времени цепи нагрузки, *сек* (L_H - индуктивность нагрузки, *гн).*

Наряду с рассмотренными усилителями, в системах автоматического управления применяются также малоинерционные магнитные усилители, называемые *быстродействующими.* Они основаны на использовании схемы с внутренней положительной обратной связью. [29, 30]. Такие усилители могут управляться как постоянным, так и переменным напряжением. Передаточная функция быстродействующего магнитного усилителя

$$W_U(p) = \frac{I_{н.ср}(p)}{U_н(p)} = k_U \cdot e^{-p\tau_з}, \qquad (4.71)$$

где $\tau_з$ - время запаздывания, составляющее половину периода или один период напряжения питания; $k_U = \frac{1}{2}\cdot\eta\cdot\frac{w_{р.о}}{w_у}$ - для однополупериодной схемы; $k_U = \eta\cdot\frac{\omega_{р.о}}{\omega_у}$ - для двухполупериодной схемы.

Малое время реакции быстродействующих усилителей достигается в основном за счет уменьшения усиления по мощности и напряжению, что создает определенные ограничения в применении таких усилителей. Наиболее целесообразно использование быстродействующих магнитных усилителей в качестве выходных каскадов усилительных устройств в сочетании с полупроводниковыми усилителями. Наиболее широко магнитные усилители применяются для управления асинхронными двигателями в маломощных следящих системах, работающих на переменном токе повышенной частоты (400 - 500 Г*ц).*

Контрольные вопросы:

1. Как составить линейное уравнение динамики генератора постоянного тока при n=const по каналу: $U_в$=$U_г$?
2. Составьте уравнение генератора при работе на активную нагрузку.
3. Составьте уравнение генератора постоянного тока при работе на индуктивную нагрузку.
4. Составьте уравнение динамики двигателя постоянного тока (ДПТ) р и $Ф_в$=const без учета реакции якоря по каналу $U_д$ – *n.*
5. Уравнение динамики ДПТ при $M_с$=*f(n).*
6. Составьте линейное уравнение двухфазного асинхронного двигателя о линеаризованной его механической характеристике по каналу: $U_у$ – $\alpha_д$
7. Как определить постоянные двухфазного двигателя по его номинальным данным?

8. Напишите передаточную функцию ЭМУ при
- работе на обмотку генератора постоянного тока;
- работе на якорную цепь двигателя постоянного тока.
9. Напишите передаточную функцию магнитного усилителя при работе на активную нагрузку по каналам $U_у – I_н$; $U_у – U_н$.
10. Передаточная функция магнитного усилителя при работе на индуктивную нагрузку (АД).

5 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

5.1 Вводные замечания

Аналитические методы определения динамических характеристик регулируемых объектов не получили еще широкого распространения в силу их сложности. Методы экспериментального определения динамических характеристик объектов в настоящее время пока наиболее достоверные и легкодоступны для эксплуатационных работников промышленных предприятии.

Так как экспериментальные методы относительно просты и позволяют сравнительно быстро получить математическое описание объекта, то они получили широкое распространение при исследовании свойств объектов, подлежащих автоматизации.

Теплоэнергетические объекты характеризуются непрерывными технологическими процессами и представляют собой устойчивые инерционные динамические системы. С точки зрения динамики их можно рассматривать как фильтры инфранизких частот с полосой пропускания от $\omega=0$ до $\omega=0{,}1\div0{,}2$ *рад/сек.*

Указанные объекты, как правило, достаточно стационарны в интервале времени, значительно превышающем время проведения эксперимента.

Экспериментальное исследование статических и динамических свойств теплоэнергетических объектов делят на три этапа:

- планирование и подготовка эксперимента(изучение объекта, выбор и монтаж аппаратуры, определение методов исследования и порядок проведения опытов);

- проведение эксперимента;

- обработка результатов опытов (сглаживание и усреднение найденных характеристик) с целью подготовки надежных данных для последующего преобразования полученных графиков (табличных данных) к виду, удобному для дальнейшего расчета системы автоматического регулирования.

Экспериментальное исследование динамических свойств объектов может быть «активным»,когда экспериментатор сам выбирает вид возмущающего воздействия и осуществляет его, и «пассивными», когда экспериментатор лишь регистрирует реакции объекта на случайные (независящие от экспериментатора) возмущения, а затем на основе статистической обработки получает необходимые данные о свойствах объекта.

«Активное» экспериментальное исследование свойств объекта производится с помощью апериодических воздействий (определение переходных функций) или периодических воздействий (определение частотных характеристик объекта).

В обоих случаях методика эксперимента имеет много общего, аппаратура за некоторым исключением одинакова, планирование и подготовка объекта для эксперимента идентичны.

Ниже кратко рассмотрены основы экспериментального определения характеристик регулируемых объектов.

5.2 Планирование и подготовка эксперимента

Подготовку к проведению эксперимента обычно начинают с изучения технологического процесса, особенностей объекта при его эксплуатации, наблюдения за действием эксплуатационного персонала (операторов),анализа режимных карт и т.д., выбора схемы экспериментальной установки .

Простейшая схема экспериментальной установки при апериодических воздействиях на объект приведена на рис.5.1,а.

С помощью регулирующего органа производят возмущающие воздействия. Для контроля регулируемой величины устанавливают соответствующий датчик, с помощью указывающего прибора отмечают отклонения регулируемой величины через определенные отрезки времени. По полученным данным строят временную характеристику.

Более совершенной является схема экспериментальной установки для снятия переходных процессов, изображенная на рис.5.1,б. Здесь фиксация отклонений регулируемой величины осуществляется с помощью быстродействующего регистратора, на ленте которого записываются также возмущающего воздействия ,измеряемые специальным прибором.

Схема установки для снятия частотных характеристик приведена на рис.5.2. Здесь предусмотрен специальный генератор синусоидальных колебаний, воздействующий через сервомотор непосредственно на регулирующий орган. На рис. 5.3,а приведена схема экспериментальной установки для определения частотных характеристик в замкнутой системе автоматического регулирования. Этот метод основан на генерации гармонических колебаний в системе автоматического регулирования, состоящей из исследуемого объекта и регулятора , и благодаря этому лишен дефектов, свойственных методам, которые основаны на возбуждении колебаний в объекте при отключенном регуляторе .При таком способе проведения эксперимента обеспечивается сохранение заданного среднего значения регулируемой величины .

Сущность излагаемого метода определения амплитудно-фазовых характеристик состоит в следующем. На вход регулятора ,подключенного к исследуемому объекту, поступают синусоидальные колебания от специального возбудителя-генератора (рис.5.3,а). При проведении опыта регулятор следует настроить так, чтобы затухание переходных процессов в системе регулирование происходило достаточно интенсивно. Эта настройка подбирается опытным путем, так как к моменту начала эксперимента нет данных о динамических свойствах объекта. Таким образом, регулятор реагирует на отклонение регулируемой величины и на синусоидальный сигнал $\sigma_{гарм,}$ от генератора. При отсутствии сигнала от генератора регулятор стремится поддерживать регулируемую величину около заданного постоянного значения. Функция генератора синусоидальных колебаний, подключенного к регулятору по существу сводится к периодическому изменению задания регулятору по закону синусоидальных колебаний. Таким образом, регулируемая величина «следит» за гармоническим сигналом $\sigma_{гарм.}$

Здесь важно заметить, что положение оси колебаний регулируемой величины не зависит от характеристики регулирующего органа.

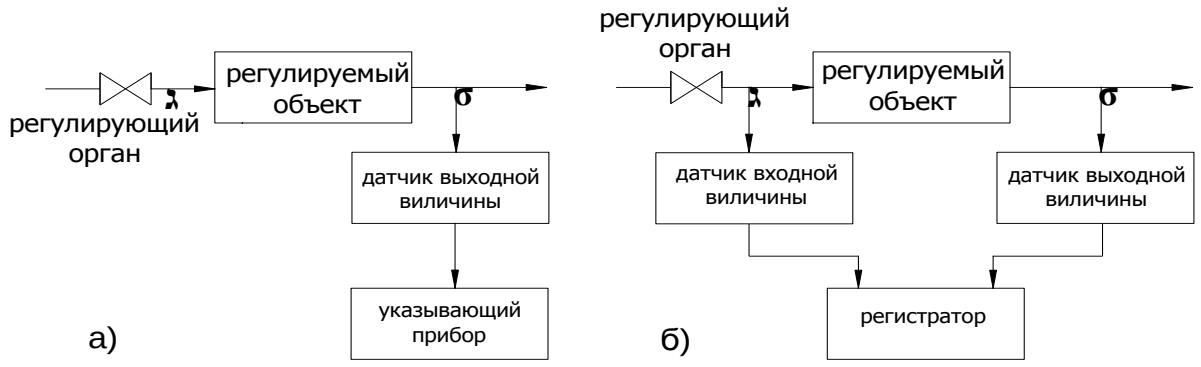


Рис. 5.1 Простейшие схемы экспериментальных установок для определения характеристик объектов

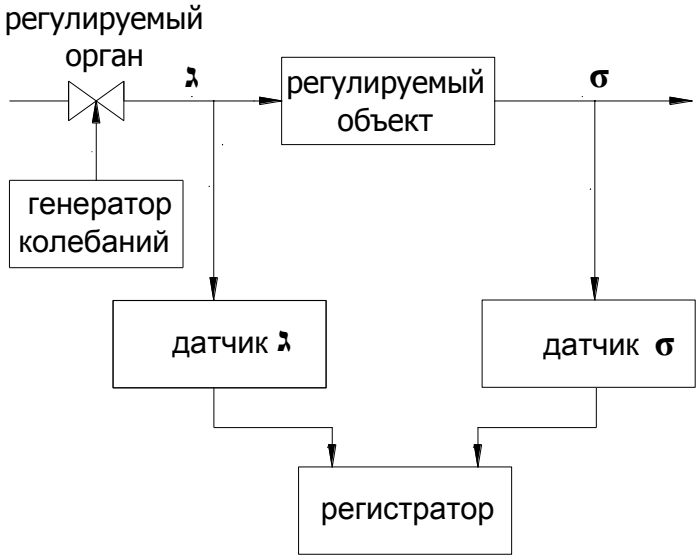


Рис 5.2 Схема экспериментальной установки для определения динамических свойств объекта с использованием генератора колебаний

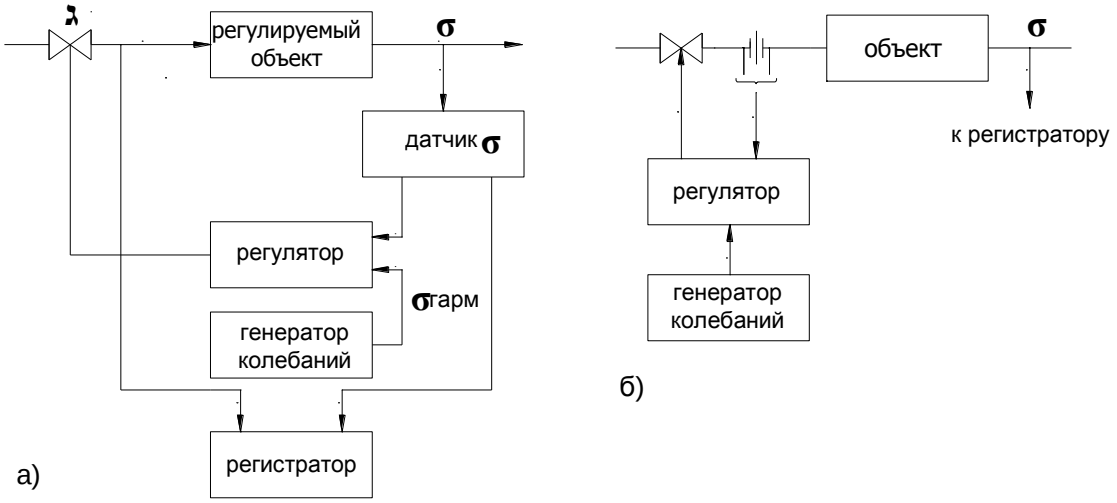


Рис 5.3 Схемы экспериментальных установок для определения амплитудно-фазовых характеристик в замкнутой системе автоматического регулирования

Возбуждение синусоидальных входных колебаний в объекте может также производиться следующим образом. Регулятор воздействует на регулирующий орган объекта, получая сигналы по расходу вещества (или энергии) и от генератора синусоидальных колебаний (рис.5.3,б). При этом также не существенна характеристика регулирующего органа. Требования к настройке регулятора аналогичны требованиям, предъявляемым при снятии характеристик по схеме рис.5.3,а.

Экспериментальное определение частотных характеристик объекта требует дополнительной аппаратуры и большей затраты труда, чем

снятие кривых разгона. Однако сведения о динамических свойствах объекта при этом получаются более достоверными.

На рис. 5.4 для иллюстрации приведена копия диаграммы регистрирующего водомера котла во время проведения одного из опытов. Колебания регулируемой величины имеют гармоническую (или близкую к ней) форму. Как показал опыт определения частотных характеристик котельных агрегатов, предлагаемая методика позволяет получать данные о динамических свойствах объектов с высокой степенью точности.

Приборы для измерения отклонений регулируемых величин и возмущений должны соответствовать природе измеряемых физических величин. В принципе, измерительные приборы могут обладать динамическими характеристиками, которые должны быть, строго говоря , заранее известны, так как, регистрируя выходную величину с помощью измерительного прибора, определяют характеристику не объекта, а системы: объект – измерительный прибор.

Это положение хорошо иллюстрируется кривыми разгона, полученными при измерении отклонения уровня воды в сосуде с помощью различных уровнемеров, например сильфонного и ртутного. Первый является относительно малоинерционным, второй, наоборот,- существенно инерционным. На рис.5.5 представлены кривые отклонения уровня воды, зафиксированные непосредственно по водомерному стеклу (1), с помощью сильфонного (2) и ртутного (3) уровнемеров. В каждый данный момент показания уровнемеров отличаются друг от друга и от истинного состояния уровня. Эти различия в показаниях тем больше, чем большей инерционностью (большей постоянной времени) обладает прибор.

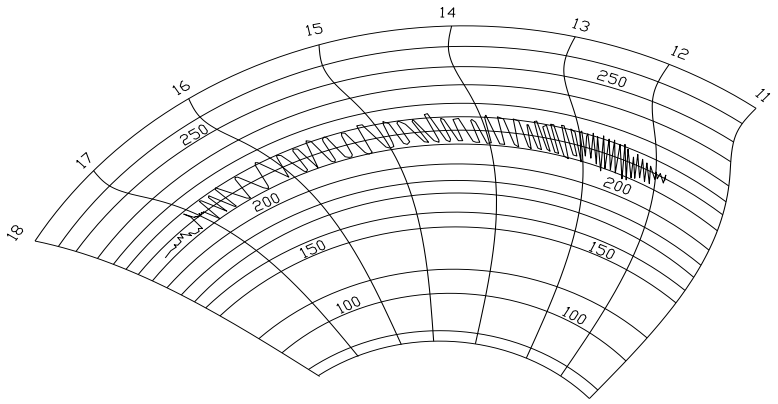


Рис 5.4 Копия диаграммы водомера при определении частотных характеристик котла

Итак, с точки зрения оценки динамических свойств объекта характеристика измерительного прибора не важна, но она должна быть известна. С точки же зрения автоматического регулирования желательно иметь измерительный орган регулятора наименее инерционный.

При наличии на объекте установленного регулятора целесообразно снимать характеристику с помощью измерительного органа самого регулятора; тогда знание динамических свойств измерительного органа не является необходимым для расчета настройки регулятора. В этом случае принято измерительную систему относить не к регулятору, а к объекту, потому что ее свойства учитываются экспериментально снятой характеристикой объекта.

В настоящее время сведения о динамических свойствах серийных измерительных приборов являются, к сожалению, далеко не полными.

Важное значение при снятии динамических характеристик приобретают так называемые преобразователи - компенсационные приставки, предназначенные для преобразования сигналов датчиков в унифицированный сигнал: регистраторы, генераторы гармонических колебаний и вспомогательная аппаратура. В заключение необходимо обратить внимание на характеристики регулирующих органов, с помощью которых производятся возмущающие воздействия.

Регулирующие органы являются весьма ответственной частью системы регулирования. Среда (жидкость, газ, пар и др.), протекающая через регулирующий орган (клапан, вентиль, задвижка, шибер, заслонка и др.), является тем регулирующим агентом, которым осуществляется воздействия на объект. Обычно регулирующий орган уже установлен на объекте и поэтому нет необходимости в его выборе и расчете, однако перед экспериментом следует проверить расходную характеристику регулирующего органа.

Снятие характеристики рекомендуется производить следующим образом. Устанавливают регулирующий орган в положение «закрыто» и измеряют «начальный пропуск». Затем перемещают регулирующий орган на 10-15% хода, отсчитывая по шкале указателя положение штока, и фиксируют показания соответствующего прибора, измеряющего расход среды через регулирующий орган. Таким образом, через каждые 10-15% хода фиксируют расход и получают данные для расходной характеристики регулирующего органа. Затем непрерывным движением перемещают регулирующий орган обратно в положение «закрыто», одновременно замечая время сервомотора T_c (время, в течение которого регулирующий орган продет полный диапазон регулирования). Далее строят кривую изменения воздействия регулирующего органа в зависимости от его положения в процентах и от времени перемещения регулирующего органа (рис. 5.6).

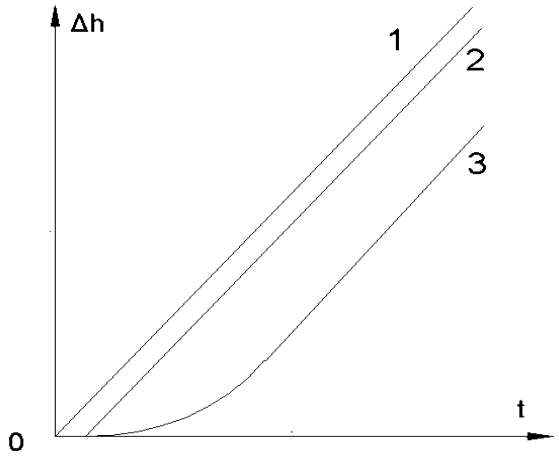


Рис.5.5 Кривые разгона, зарегистрированные разными измерительными приборами

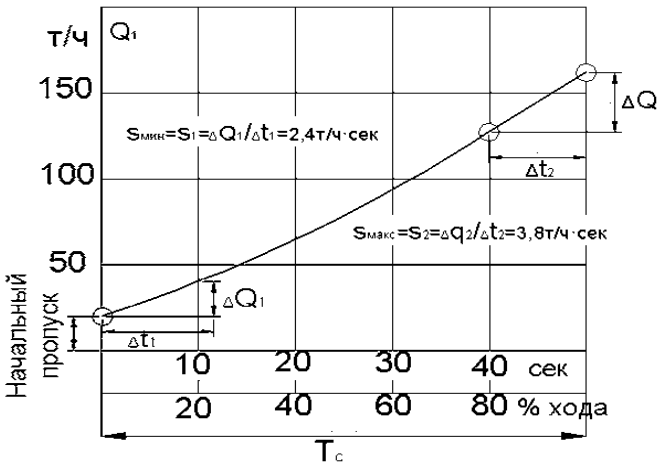


Рис.5.6 Примерная характеристика питательного клапана

Характеристика регулирующего органа, как правило, должна быть возможно ближе к прямолинейной. Желательно, чтобы в пределах диапазона регулирования скорость регулирования изменялась не более чем в два раза. Для пояснения сказанного на рис. 5.6 показано определение скорости регулирования на любом участке диапазона путем деления отрезков:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = s.$$

Если изменение скорости регулирования в пределах диапазона превышает двукратное, необходимо исправить характеристику профилированием регулирующего органа или изменением его сочленения с сервомотором.

Зная характеристику регулирующего органа, можно оценивать величины возмущения λ не по показаниям измерительного прибора (если он ранее не был установлен на объекте),а по показаниям хода регулирующего органа.

Перед возмущением объекта регулируемая величина должна быть по возможности стабилизирована относительно номинального значения. Снятие характеристики непосредственно после каких-либо эксплуатационных манипуляций приводит к неверным результатам. Если это условие не выполняется, то неизбежно искажение характеристики объекта. В самом деле, если перед возмущением регулируемая величина имела тенденцию к увеличению, то в результате созданного возмущения, которое, например, также должно вызвать увеличение регулируемой величины, последняя будет, очевидно, изменяться с большей скоростью и отклонится на большее значение.

Величина возмущения должна быть достаточно большой, чтобы полученная характеристика отличалась от случайных колебаний регулируемой величины в эксплуатационным режиме. Однако может

оказаться, что при больших значениях возмущений отклонение регулируемой величины превысит допустимые технологическими условиями пределы, что может быть опасно с эксплуатационной точки зрения.

Для получения более полных данных о динамических свойствах объекта опыты следует производить при нескольких значениях нагрузки объекта (например, при минимальной, номинальной и максимальной).

При определении настройки регулятора возмущение объекта должно производиться тем регулирующим органом, на который будет воздействовать автоматический регулятор («основное» возмущение). Если же в дальнейшем потребуется выяснить характер переходных процессов в системе автоматического регулирования при других возмущениях, то следует снять также характеристики ,полученные в результате этих возмущений (их называют «внешними» в отличие от «основного» возмущения).

5.3 Экспериментальное определение временных характеристик регулируемых объектов

5.3.1 Снятие кривой разгона и определение динамических параметров регулируемого объекта

Необходимо определить экспериментальным путем кривую разгона пароохладителя поверхностного типа (рис.5.7) и найти динамические параметры объекта: постоянную времени T_a, коэффициент усиления k и время запаздывания τ для последующего их использования при расчете системы регулирования.

Перегретый пар поступает в охладитель *1*,проходит по змеевику *2*, частично погруженному в воду, и подается к потребителю. Охлаждающая вода подводится через регулирующий клапан *3* и выпаривается в охладителе, превращаясь во вторичный насыщенный пар.

Н о м и н а л ь н ы е п а р а м е т р ы: паровая нагрузка $D_п$ = 100 т/час ; температура уходящего пара (регулируемая величина) $t''_п$ = 400 ^{0}C; расход охлаждающей воды $D_В$ = 5 т/час;

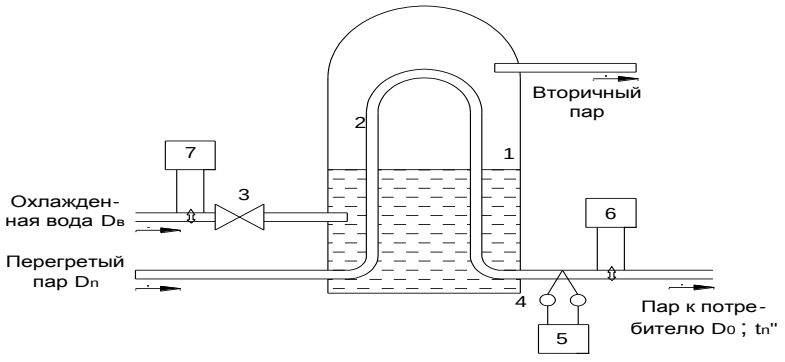


Рис.5.7 Схема поверхностного пароохладателя

Регулируемая температура измеряется при помощи термопары *4* и милливольтметра *5*. Для измерения расходов пара и воды используются соответствующие контрольно-измерительные приборы: паромер – *6* и водомер - *7*.

Снятие характеристик разгона производят при двух видах возмущений: охлаждающей водой и паровой нагрузкой. Поскольку воздействие регулятора предполагается осуществить на клапан, измеряющий подачу охлаждающей воды, первый вид воздействия будут основным, а второй - внешним.

При номинальном значении температуры пара резко изменяют подачу охлаждающей воды (в данном случае λ =2 т/час.). Производят запись изменения показаний милливольтметра во времени. На основании полученных результатов строят кривую разгона при возмущении водой.

Аналогичный опыт производят, резко изменяя паровую нагрузку охладителя при неизменной подаче охлаждающей воды.

Кривые разгона приведены на рис.5.8. Обрабатывая их так, как это показано на графиках, определяют упрощенные динамические параметры регулируемого объекта. Результаты сводят в таблицу 5.1.

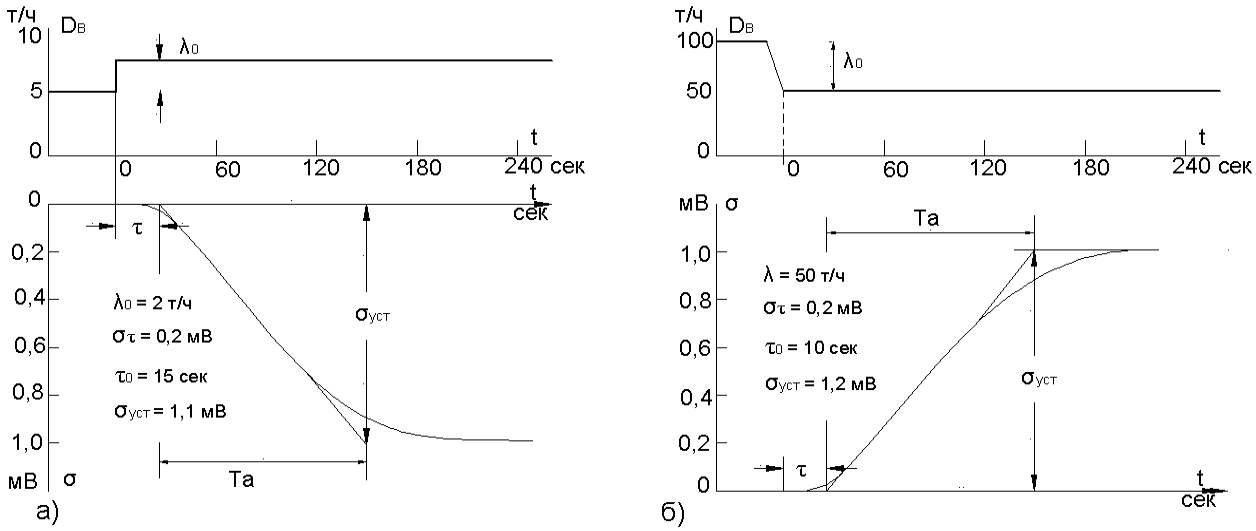


Рис.5.8 Кривые разгона (а - при возмущении расходом охлаждающей воды; б - при возмущении расходом пара)

Таблица 5.1

Результаты эксперимента

Характер возмущения	Величина возмущения λ_0 м/час.	Запаздывание τ, *сек*	Постоянная времении T_a, *сек*	Коэффициент усиления $k = \frac{a}{\lambda_0}, \frac{M_B}{m/час}$	Отношение $\frac{\tau}{T_a}$
Возмущения водой..... Возмущение паровой нагрузкой	2 50	1.5 10	71 59	0,475 0,027	0,21 0,108

5.3.2 Снятие импульсной характеристики и определение динамических параметров объекта

Определим экспериментально импульсную характеристику и динамические параметры участка регулирования температуры прямоточного котла по экспериментально снятой импульсной характеристике (рис.5.9). Регулируемой величиной σ является температура пара за котлом. Возмущения создается уменьшением и последующим увеличением через 40 *сек* подачи воды в пароохладитель на 10 %,т.е. $\lambda_{макс}$=10 % и F_λ =10·40=400 %·сек. Регулируемая величина по окончании опыта не вернулась точно к своему первоначальному значению, поэтому определение τ,$\sigma_{макс.имп}$ и F_σ по экспериментальной характеристике производят так, как это было рекомендовано в [3].

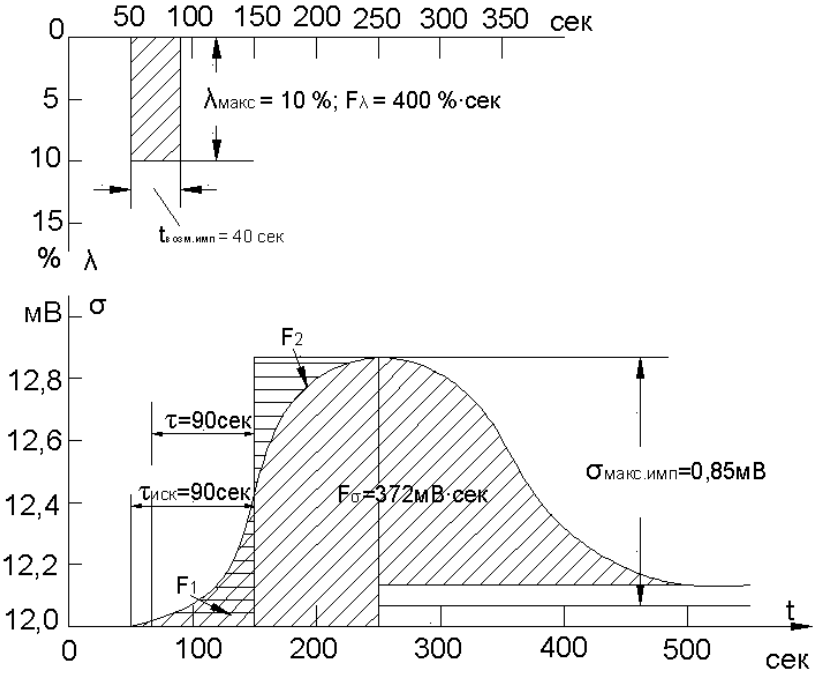


Рис.5.9 К примеру определения импульсной характеристики

В результате получают:

$$\tau_{иск} = 110\ сек; \quad \sigma_{макс.имп} = 0{,}85\ мв;$$

$$F_{\lambda} = 400\%\cdot сек; \quad F_{\sigma} = 372\ мв\cdot сек.$$

Пользуясь вышеприведенными формулами, определяют:

$$K = \frac{F_{\sigma}}{F_{\lambda}} = \frac{372\ (мв\cdot сек.)}{400(\%\cdot сек)} = 0.93 мв / \%;$$

$$T_a = \frac{F_{\lambda}}{\sigma_{макс.имп}} = \frac{400\ (\%\cdot сек.)}{0{,}85\ (мв)} = 470{,}6\ \%\cdot сек/мв;$$

$$\tau = \tau_{иск} - t_{\text{ср. имп.}} = 110\text{-}20 = 90\ сек.$$

5.4 Экспериментальное определение частотных характеристик регулируемых объектов

5.4.1 Определение амплитудное - фазовой характеристики объекта с помощью генератора колебаний, воздействующего непосредственно на регулирующий орган

Пусть надо определить амплитудно-фазовую характеристику объекта, схематически изображенного на рис.5.10. Измерение отклонения уровня воды в резервуаре производится по водомерному стеклу. Источником возмущения служит дроссельный клапан, с которым связан генератор синусоидальных колебаний. Электродвигатель через редуктор 2 непрерывно вращает кривошип 3. Ползун 4, скользящий вдоль прорези траверсы 5, шарнирно соединен с кривошипом 3 так, что при равномерном вращении последнего траверса 5 вместе с жестко соединенной с ней тягой 6 будет совершать синусоидальные колебания в плоскости чертежа:

$$\alpha = r \sin \alpha = r \sin \omega t ,$$

где r-длина кривошипа; α-угол между горизонталью и кривошипом.

Тяга 6 шарнирно связана со штоком 7 дроссельного клапана. Следовательно, регулирующий орган будет изменять приток воды в резервуар также по синусоидальному закону. Частота колебаний может быть изменена путем смены шестерн в редукторе, а амплитуда - изменением длины кривошипа 3.

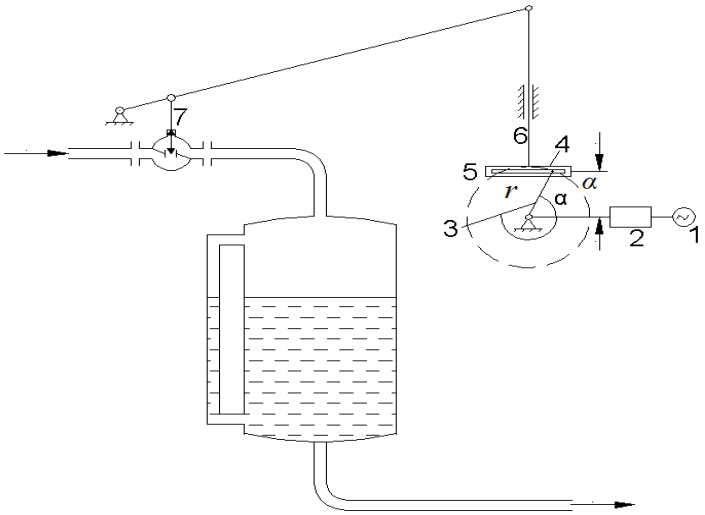


Рис.5.10 Схема установки к примеру определения частотной характеристики объекта

Пусть объект находится в состоянии равновесия (σ=0),когда поступление и расход воды составляют 20 *т/ч.* Длина кривошипа установлена так,чтобы при верхнем крайнем положении траверсы 5 регулирующий орган (клапан) пропускал 30 *т/ч,*а при нижнем 10 *т/ч* воды.Тогда λ_0=10 *т/ч.*

Опыты проведены при значениях частот ω_1=0,001 1/*сек;* ω_2=0,002 1/*сек;* ω_3=0,004 1/*сек;* ω_4=0,008 1/*сек.*

Результаты опытов представлены в виде кривых изменения во время возмущающего воздействия λ и регулируемой величины σ на рис.5.11. Как видно из рис.5.11,а при малой частоте (0,001 1/*сек*) изменение уровня следует за изменением поступления с отставанием Δt_1=460 *сек* или $\varphi_1=26^0$, что составляет всего 7% периода колебаний $T_1=2\pi/\omega_1$=6280 *сек.*

Таблица 5.2

Данные эксперимента

№ опыта	Частота ω, *1/сек*	$A(\omega)=\sigma_0/\lambda_0$, $\frac{см}{т/ч}$	Отставание Δt,*сек*	$\varphi(\omega)=\frac{360}{T}\cdot\Delta t$, *град.*
1	0,001	4,4	460	26
2	0,002	3,6	395	45
3	0,004	2,2	277	63
4	0,008	1,2	166	76

По мере увеличения частоты колебаний относительное отставание увеличивается (рис.5.11,б,в) и при частоте ω_4=0,008 1/*сек* (рис.5.11,г) составляет 21% периода колебаний.Иными словами,сдвиг фаз достигает почти четверти периода($\varphi=76^0$).

Одновременно с увеличением сдвига фаз по мере роста частоты уменьшаются амплитуды колебаний уровня,несмотря на постоянство амплитуды колебаний регулирующего органа.Если при частоте ω_1=0,001 1/*сек* амплитуда регулируемой величины $(\sigma_o)_1$=44 *см* ,то при частоте *;* ω_4=0,008 1/*сек* $(\sigma_o)_4$=12 *см.*

Результаты опытов сведены в таблицу 5.2.

Амплитудно-частотная характеристика A(ω) представлена на рис.5.12,а. Ее значение при ω=0, $A(\omega_0)= \sigma_{уст.}/ \lambda_0=k$ получено в результате снятия кривой разгона:

$$A(\omega_0) = \frac{\sigma_{уст}}{\lambda_0} = \frac{50}{10} = 5\ см{\cdot}т/ч.$$

Из характера зависимости A(ω) на рис.5.12,а видно,что A(ω) представляет собой монотонно убывающую функцию частоты, стремящуюся к нулю с ростом ω.

Фазо-частотная характеристика φ(ω), изображенная на рис.5.12,б, иллюстрирует непрерывное увеличение угла отставания φ колебаний регулируемой величины σ от колебаний возмущающего воздействия λ с ростом ω.

На рис.5.12,в представлена амплитудно-фазовая характеристика W(jω) рассмотренного объекта.

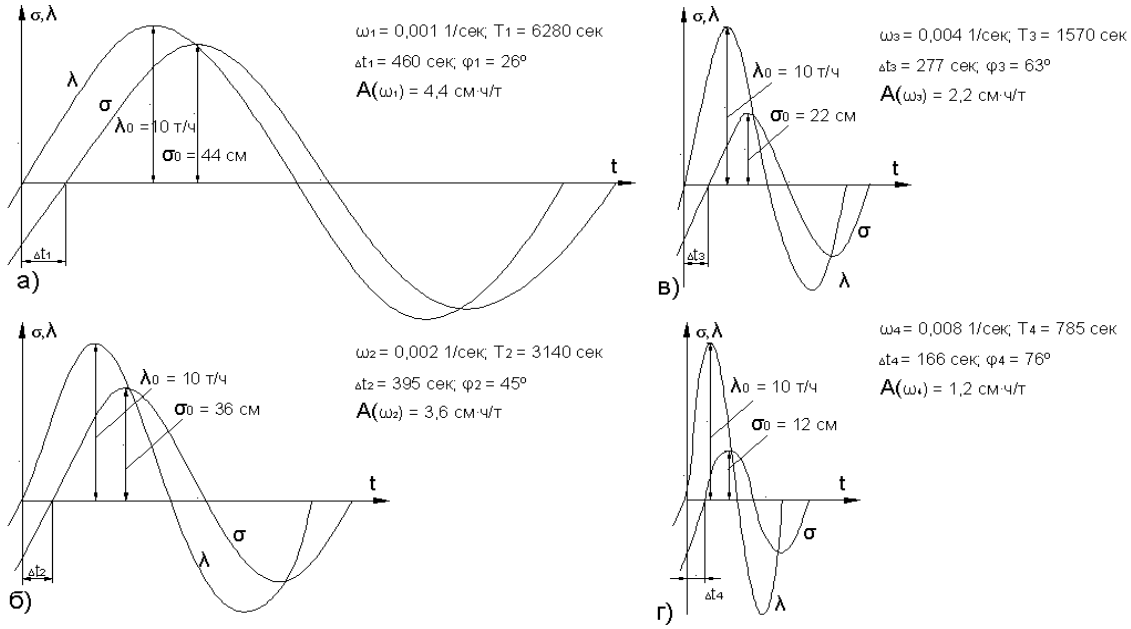


Рис.5.11.Кривые изменения возмущающего воздействия и регулируемой величины при разных частотах колебаний.

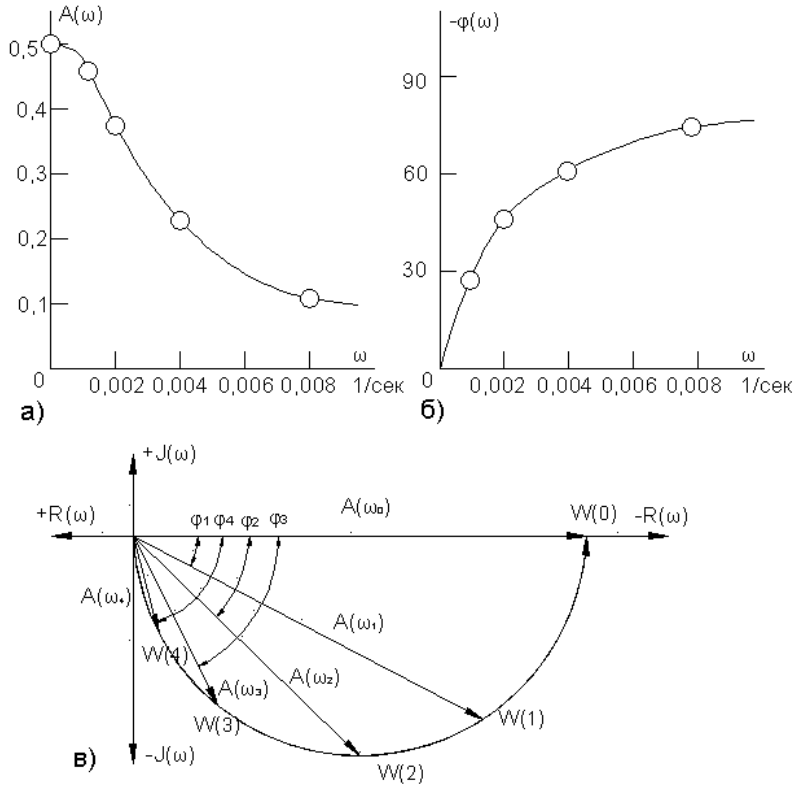


Рис.5.12 Амплитудно – частотная (а), фазо-частотная (б) и амплитудно-фазовая (в) характеристики объекта

5.4.2 Определение амплитудно-фазовой характеристики объекта с помощью генератора при возбуждении гармонических колебаний в замкнутой системе регулирования

Схема экспериментальной установки для определения динамических свойств пароперегревателя прямоточного котла высокого давления в замкнутой системе регулирования с использованием генератора синусоидальных колебаний приведена на рис.5.13.

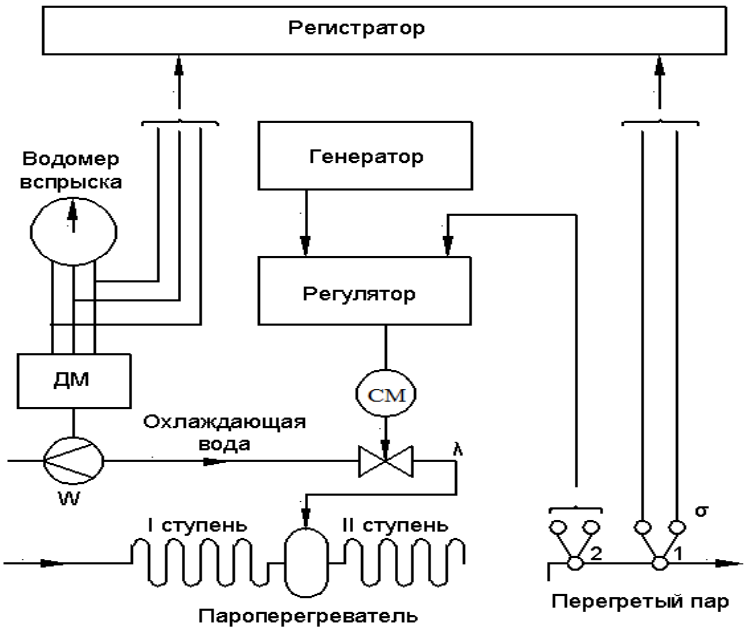


Рис.5.13 Схема эксперимента при определении частотных характеристик пароперегреателя прямоточного котла.

Пар из котла проходит через первую и вторую ступени пароперегревателя и далее поступает к турбинам.

Для поддержания заданной температуры пара на выходе из второй ступени в рассечку перегревателя после первой ступени включен впрыскивающий пароохладитель. Изменением количества охлаждающей воды поддерживают требуемую температуру перегретого пара, измерение которой производится термопарой 2. Термо-э.д.с. термопары 1 поступает на электронный потенциометр для регистрации регулируемой величины. Термопара является датчиком регулятора, воздействующего через сервомотор СМ на регулирующий клапан в линии охлаждающей воды.

Расход охлаждающей воды измеряется дифманометром ДМ, напряжение от которого через выпрямительную приставку также поступает на потенциометр. Генератор включен в электрическую цепь задатчика регулятора температуры.

Выбор амплитуды колебаний регулируемой величины надо производить из следующих соображений. Если в условиях нормальной эксплуатации испытуемого объекта изменения регулируемой величины укладываются в некоторую зону $\Delta_{экспл}$, а зона отклонений, допустимых по технологическим условиям, составляет $\Delta_{доп}$, то амплитуду колебаний регулируемой величины следует выбрать равной:

$$\sigma_{макс}=(\Delta_{доп.} - \Delta_{экспл})/2 \ .$$

При этом может быть гарантирован нормальный технологический режим при любой длительности эксперимента.

Во время проведения опыта следует добиваться установившихся колебаний возмущающего воздействия λ и регулируемой величины σ. Если на протяжении 2-3 периодов максимальные отклонения λ и σ ,их форма и

промежуток времени между максимумами одинаковы, то такие колебания можно считать установившимся. Результаты эксперимента в виде графиков амплитудно-частотной и фаза-частотной характеристик представлены на рис.5.14.а,б.

При снятии амплитудно-фазовых характеристик в некоторых случаях не удается получить точно синусоидальных колебаний входной или выходной величины. Искажение может происходить, в частности, из-за нелинейности характеристик регулирующего органа. Однако это искажение формы колебаний не нарушает повторяемости ее от периода к периоду. Деформация колебаний может быть также вызвана влиянием на регулируемую величину небольших посторонних возмущений, и тогда форма выходных колебаний повторяется не строго.

Во всех этих случаях следует выделить основную гармонику из выходных колебаний. В первом случае достаточно ограничиться обработкой одного установившегося периода колебаний.

Во втором случае (при наличии искажений от посторонних возмущений случайного характера) надо обработать несколько периодов колебаний данной частоты и но ним найти усредненные значения $A(\omega_n)$ и $\varphi(\omega_n)$.

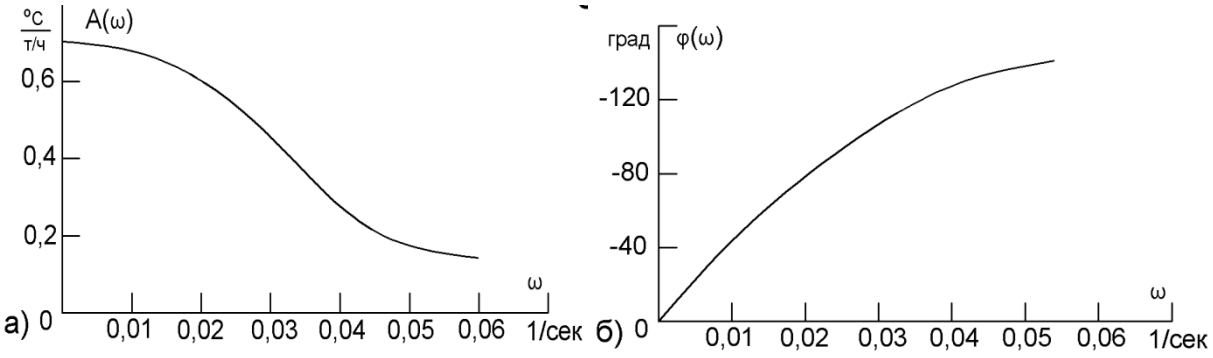


Рис.5.14 Амплитудно - и фазо-частотные характеристики пароперегревателя

Выделение первой гармоники производят следующим образом. Период T разбивают на четное число n равных частей (обычно 12) и измеряют ординаты разбиения x_0, x_1, x_2, x_3... , соответствующие точкам t_0 ,t_1, t_2 . (рис.5.15,а). Искомая гармоника определяется уравнением $x(t)=a_0+a_1 \cos 2\pi t/T+b_1 \sin 2\pi t/T$,

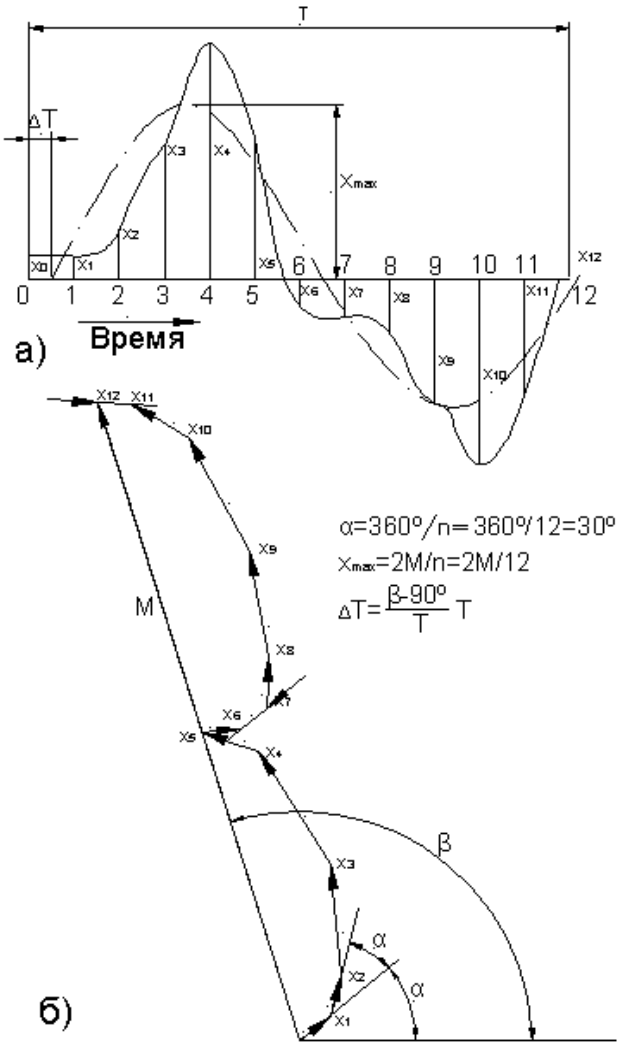


Рис.5.15 Графический метод выделения первой гармоники

где $a_0 = \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{k=11} x_k$;

$$a_1 = \frac{1}{6}\,[x_{11} - x_5 + 0{,}5(x_1 + x_9 - x_3 - x_7) + 0{,}866(x_0 + x_{10} - x_4 - x_6)];$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\,[x_2 - x_8 + 0{,}5(x_0 + x_4 - x_6 - x_{10}) + 0{,}866(x_1 + x_3 + x_7 - x_9)];$$

Рекомендуется также следующий простой графический прием для выделения первой гармоники. Ординаты разбиения x_1 ,x_2, x_3 рассматривают как векторы с модулями x_1, x_2, x_3 и аргументами $a_1=360^0/\ n=\ a$; $a_2=2a$; $a_3=3a$;.....; $a_n=na$. Затем ищут их векторную сумму. Для этого откладывают вначале отрезок x_1 рис.5.15,б, повернув его против часовой стрелки на угол a по отношению к горизонтали. К нему пристраивают отрезок x_2 ,повернутый по отношению к предыдущему отрезку против часовой стрелки на тот же угол a. Такое построение выполняют вплоть до отрезка x_n. При перемене

знака ординаты угол изменяют на 180^0. Замыкающий вектор $\overline{M}$ определяет амплитуду искомой гармоники. Амплитуда равна:

$$x_{\text{макс.}} = \frac{2\overline{M}}{n},$$

где $\overline{M}$ -модуль замыкающего вектора.

Сдвиг между началом отсчета времени и началом основной гармоники равен:

$$\Delta T = \frac{\beta - 90}{360} T,$$

где β - угол между замыкающим вектором и горизонталью.

Если $\Delta T > 0$, то это означает, что начало основной гармоники расположено правее начала отсчета времени, а если $\Delta T < 0$, то влево начало отсчета времени.

5.4.3 Определение частотных характеристик объекта при периодических возмущениях трапецеидальной формы

При экспериментальном определении частотных характеристик объекта и промышленных условиях не всегда имеется возможность создать возмущающие воздействия синусоидальной формы, так как для этого требуется возбудитель гармонических колебаний. Можно определить характеристики объекта, создавая возмущения прямоугольной или трапецеидальной формы (рис. 5.16). Этот метод не требует специальной профилировки регулирующих органов, так как характеристики последних почти не влияют на результаты эксперимента.

Возмущения прямоугольной формы (рис. 5.16, а) могут быть созданы достаточно быстрыми перемещениями регулирующего органа через равные промежутки времени поочередно в одну и другую сторону от положения равновесия на величину λ_0. Для удобства рекомендуется установить на регулирующем органе специальные ограничители амлитуды, что облечает проведения эксперимента.

Возмущения трапецеидальной формы (рис 5.16, б) обычно создают с помощью системы дистанционного управления. В этом случае сервомотор перемещает регулирующий орган с заранее известной скоростью. Периодическую функцию типа равнобокой трапеции или прямоугольника можно разложить в ряд Фурье.

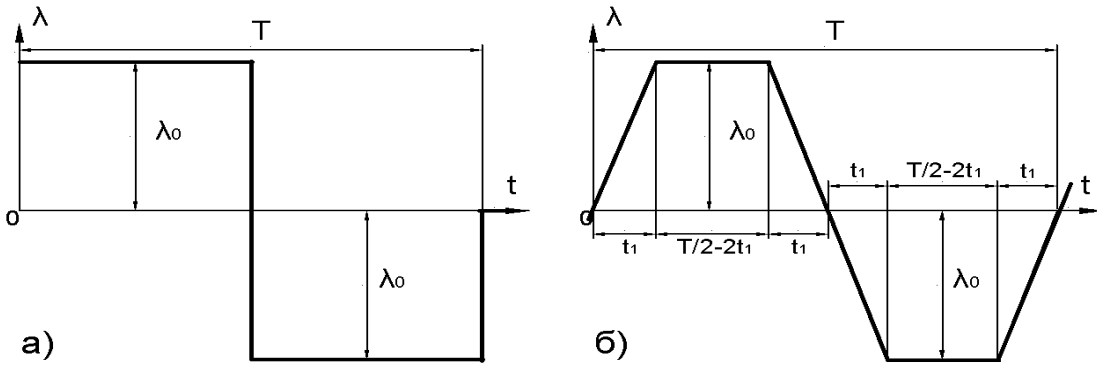


Рис.5.16 Возмущения прямоугольной (а) и трапецеидальной (б) формы

Колебания в форме равнобоких трапеций развертываются в ряд [9]

$$\lambda = \frac{2\lambda_0 T}{\pi^2 t_1}(\sin\frac{2\pi}{T}t_1 \sin\omega t + \frac{1}{3^2}\sin 3\frac{2\pi}{T}t_1 \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\frac{2\pi}{T}t_1 \sin 5\omega t + \ldots),$$

а колебания в форме прямоугольника в ряд

$$\lambda = \frac{4\lambda_0}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots).$$

Обычно все гармонические составляющие этого ряда, кроме первой, интенсивно «подавляются» регулируемым объектом, вследствие чего колебания регулируемой величины в результате возмущений прямоугольной или трапецеидальной формы часто имеют синусоидальный характер.

Таким образом, в приведенных разложениях можно воспользоваться только первой гармоникой, т.е. для трапецеидальных колебаний

$$\lambda = \frac{2\lambda_0 T}{\pi^2 t_1}\sin\frac{2\pi}{T}t_1 \sin\omega t,$$

а для прямоугольных колебаний

$$\lambda = \frac{4\lambda_0}{\pi}\sin\omega t.$$

Последующие операции для определения частотных характеристик регулируемого объекта аналогичны операциям при синусоидальном характере возмущений.

Простейшая схема для снятия частотных характеристик регулируемого объекта при возмущении прямоугольной или трапецеидальной формы аналогична схеме, представленной на рис 5.1. Первый опыт рекомендуется производить на частоте, соответствующей сдвигу фаз между входным и выходным колебаниями, примерно равному 180^0. Для этого объект вводят в режим двухпозиционного регулирования: регулирующий орган перемещают, когда регулируемая величина проходит через свое среднее значение. Затем

проводят опыты с частотами вдвое большей, вдвое меньшей и промежуточными между ними.

Рассмотрим экспериментальное определение частотных характеристик участка регулирования температуры перегретого пара котельного агрегата высокого давления.

Принципиальная схема регулируемого объекта изображения на рис 5.17. Насыщенный пар из барабана котла поступает в первую ступень пароперегревателя и затем в пароохладитель смешивающего (впрыскивающего) типа, включенный в рассечку двух ступеней перегрева. Охлаждающая вода проходит через регулирующий орган – клапан с электроприводом и подается в пароохладитель. Из пароохладителя пар поступает в во вторую ступень перегревателя и далее к турбине .

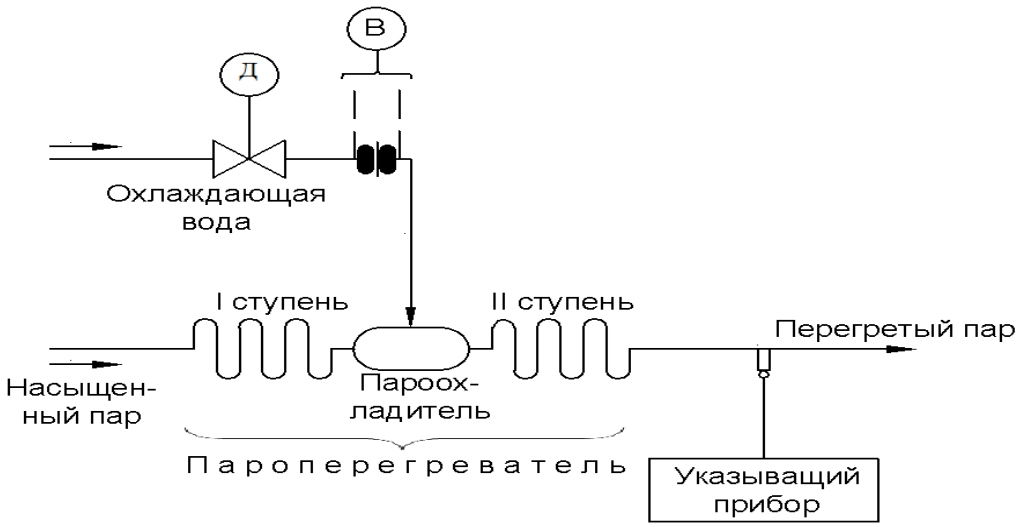


Рис.5.17 Схема эксперимента при снятии частотных характеристик пароперегревателя прямоточного котла методом трапецеидальных колебаний

Измерение температуры пара производится малоинерционной термопарой и милливольтметром. Частотная характеристика, определенная таким способом, является, строго говоря, характеристикой не регулируемого объекта, а системы объект – термопара – указывающий прибор.

Возмущения производятся дистанционным включением электропривода клапана на линии охлаждающей воды, т.е. колебания возмущающего воздействия имеют трапецеидальную формы. Расход воды фиксируются водомером В. Запись показаний и дальнейшая обработка результата эксперимента производятся в следующих размерных единицах: расход воды λ, т/ч, а температура σ,мв.

Регулируемый объект воздействием на клапан «вводится в режим» двухпозиционного регулирования, осуществляемого вручную. Перемещения клапана подбираются так, чтобы колебания температуры перегретого пара были практически симметричны . Этот опыт позволяет определить точку амплитудно-фазовой характеристики ,соответствующую сдвигу фаз между

входными и выходными колебаниями , примерно равному 180^0. Результаты опыта приведены на рис.5.18. Искомой точке амплитудно-фазовой характеристики соответствуют частота ω_2=0,0175 1/*сек*, сдвиг фазы $\varphi_{(\omega 2)}=165^0$ и

$$A(\omega_2)=\frac{0{,}67 мВ}{3{,}18 т/ч}=0{,}21 мВч/т$$

Определение этой частоты позволяет выбрать значения остальных частот, при которых необходимо вести последующие опыты. Рекомендуются в качестве таких частот следующие:

$$\omega=0,\ \omega=0{,}5\omega_2;\ \omega=0{,}75\omega_2;\ \omega=2\omega_2.$$

Методика проведения эксперимента на других частотах несколько отличается от опыта на частоте ω_2. Если при проведении опыта на частоте ω_2 перестановка регулирующего органа определяется знаком регулируемой величины – температурой пара, то в опытах на других частотах экспериментатор переставляет регулирующий орган из одного положения в другое через равные промежутки времени независимо от того, чему равна регулируемая величина в момент перестановки клапана.Опыты проводятся следующим образом.

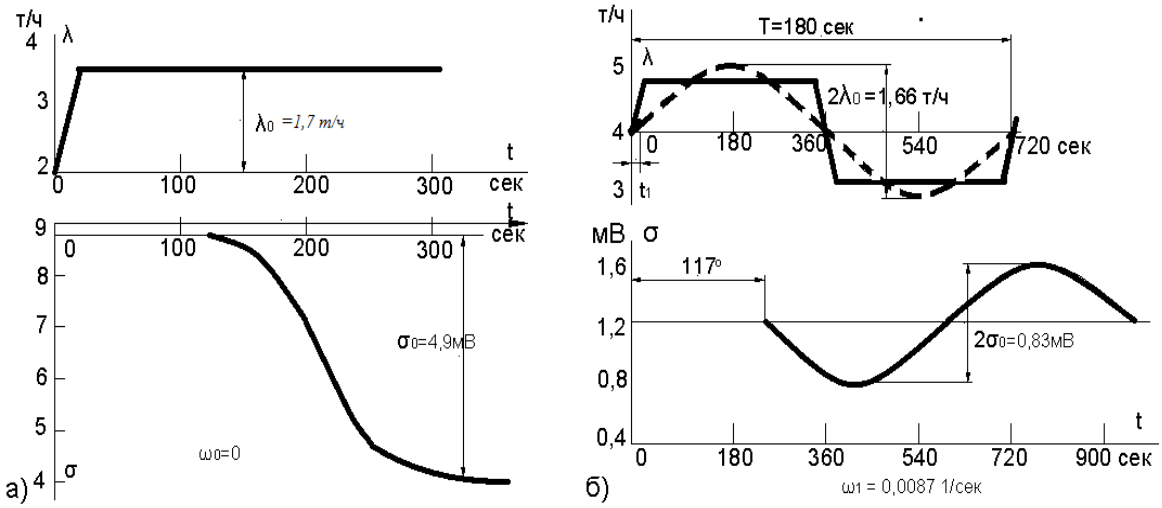


Рис.5.18 Кривые изменения возмущающего воздействия и регулируемой величины при разных частотах колебаний.

После стабилизации нагрузки и производительности котельного агрегата температура перегретого пара достигает установившегося значения. Положение регулирующего органа, соответствующее этому состоянию равновесия, принимается за ось его будущих колебаний. Затем регулирующий орган перемещается в обе стороны от оси колебаний на определенную величину (10-15% максимального хода клапана) и удерживается в этом положении в течение некоторого времени. После этого регулирующий орган перемещается в противоположную сторону на такую же величину и опять удерживается в этом положении столько же времени.Такие чередования положения регулирующего органа производят до тех пор, пока

колебания температуры пара не станут одинаковыми в течение двух-трех периодов, что свидетельствует о «вводе» регулирующего объекта в режим установившихся колебаний.

Опыты были проведены на четырех частотах: ω_0=0; ω_1=0,0087 1/*сек;* ω_2=0,0175 1/*сек;* ω_3=0,035 1/*сек;*

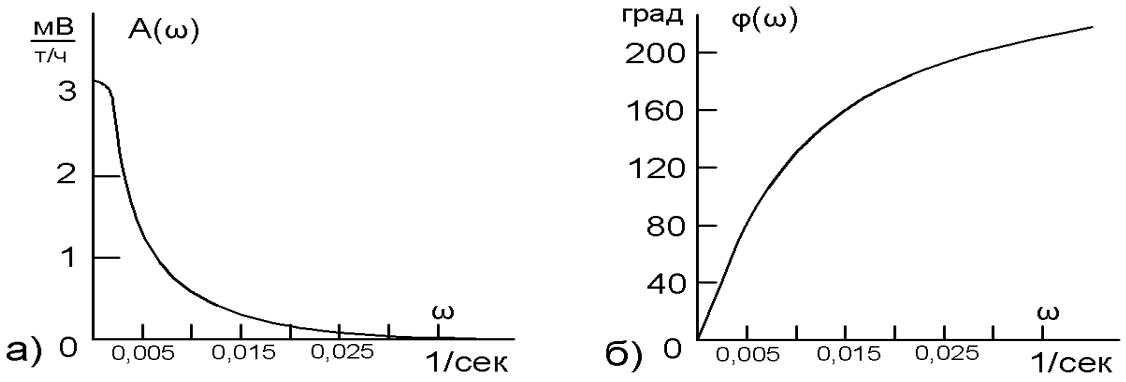


Рис.5.19 Амплитудно-и фазо-частотные характеристики объекта

В результате опытов установлено, что частота ω_3=0,035 1/*сек* практически близка к частоте «среза» при данной амплитуде возмущения. Графики изменения возмущений и температуры изображены на рис.5.18.

Обработка результата эксперимента проводилась в соответствии с рекомендациями, приведенными выше.

Путем сравнения первых гармоник колебаний расхода воды с колебаниями температуры пара были определены сдвиг фаз φ(ω) и отношение амплитуд колебаний A(ω).

Результаты опытов сведены в таблицу 5.3 и в виде графиков представлены на рис.5.19.

Таблица 5.3.

Результаты эксперимента

№ опыта	частота ω_1, 1/сек	Отношение амплитуды $A(\omega)=\frac{2\delta_0}{2\lambda_0}$, *Мв ч/т*	*Отставание* Δt, *сек*	$\varphi(\omega)=\frac{360}{T}\Delta t$, *град*
1	0	2,94	0	0,0
2	0.0087	0,50	334	117
3	0.0175	0,21	165	165
4	0,0350	0,01	114	228

Контрольные вопросы :

1. Охарактеризует основные этапы экспериментального исслдеования промышленных объектов.
2. Поясните основные схемы экспериментальных установок при апериодических воздействиях.
3. Разновидность установок для снятия частотных харатериситик и их сравнителный анализ.
4. Методика снятия кривой разгона и определение по ней динамических параметров энергетического объекта управления.
5. Снятие импульсной характеристики и определение по ней динамических параметров объекта.
6. Определение АФЧХ объекта на базе генератора колебании, воздействующего непосредственно не регулирующий орган.
7. Определение АФЧХ объекта на базе генератора, возбуждающего колебания в замкнутой системе управления.
8. Методика определения частотных характеристик объекта при возмущениях трапедициальной формы и прямоугольной формы. Специфика обработки результатов эксперимента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учебное пособие для студентов ВТУЗов. – М.: Наука, 1981, 304 с.

2. Шостак Р.Я Операционное исчисление. Учебное пособие для ВТУЗов. -М.: Высшая школа, 1972, 279 с.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969, 576с.

4. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968, 368с.

5. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969, 640с.

6. Сейдж Эндрю П., Мелса Д.Л. Идентификация систем управления. Перевод с англ. Под ред. Н.С. Райбмана. – М.: Наука, 1974, 248с.

7. Адамбаев М.Д. Оценивание и мониторинг функционирования технических систем. Коллективная научная монография. –Новосибирск: Изд Сибирская ассоциация консультантов, 2012. 168 с.

8. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. Л.: Энергия, 1969, 375с.

9. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. – М.: Физматгиз, 1962, 132с.

10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. с англ. Под.общ.ред. И.Г. Арамановича. Издание второе. – М.: Наука, 1970, 720с.

11. Справочник по теории автоматического упарвления/Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, 712с.

12. Балакиров В.С., Дудников Е.Т., Цирлин А.М. Экспериментальное опередение динамических характеристик промышленных объектов управления. – М.: Энергия, 1967, 232с.

13. Васильев В.Г., Чуич В.Г. Системы автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1967, 419с.

14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966, 576с.

15. Гнонянский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М.: Высшая школа, 1971, 512 с.

16. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. – М.: Высшая школа, 1971, 807с.

17. Тихонов О.Н. Решение задач по автоматизации процессов обогащения и металлургии. – Л.: Недра, 1969, 430с.

18. Адамбаев М.Д. Определение динамической структуры и параметров промышленных объектов управления. Научное издание (монография). Алматы: тип. «TST-Company», 2010. 258 с.

19. Льюнг Л. Идентификация систем (теория для пользователя). – М.: Наука, 1991.

20. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979.

21. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей процессов производства. – М.: Энергия, 1975.

22. Сейдж Э., Мелса Д. Идентификация систем управления. – М.: Наука, 1974.

23. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Мир, 1975.

24. Адамбаев М.Д., Малдыбаева Т.С. Басқару объектілерін модельдеу және идентификациялау. Оқу құралы. – Алматы: Қаз ККА баспасы, 2007. 164 б.

25. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов /К.Хартман, Э.Лецкий, Б.Шефер и др. Под ред. Э.К.Лецкого. – М.: Мир, 1977.

26. Васильев Д.В., Чуич В.Г. Системы автоматического управления (примеры расчета). – М.: Высшая школа, 1967.

27. Такер Г.К., Уиллс Д.М. Упрощенные методы анализа систем автоматического регулирования. – М.: Госэнергоиздат, 1963.

28. Вавилов А.А., Солодовников А.И. Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем – М.: Госэнергоиздат, 1963.

29. Стефани Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. – М.: Госэнергоиздат, 1960.

30. Марюта А.Н., Качан Ю.Г., Бунько В.А. Автоматическое управление технологическими процессами обогатительных фабрик. – М.: Недра, 1983.

31. Траксел Д. Синтез систем автоматического регулирования. – М.: Машгиз, 1959

32. Адамбаев М.Д. Теория автоматического управления. Методы идентификации промышленных объектов управления. –Алматы, КазНТУ. 2004, 180 с.

33. Адамбаев М.Д. Автоматическое управление процессами сухой рудоподготовки. – Алматы, Комплекс, 2004, 163 с.

34. Адамбаев М.Д. Математические методы идентификации. – Алматы, комплекс, 2005, 180 с.

35. Адамбаев М.Д. Теория и практика технического эксперимента в электрические. Учебник. – Алматы: КазНТУ, 2013. 237 с.

Учебное издание

Адамбаев Мурат Джамантаевич

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ. (ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКЕ ИДЕНТИФИКАЦИЯ)

Учебное пособие

Нау. РИО З.А. Губайдулина

Редактор

Компьютерная верстка

Подписано в печать «___»_____2014 г.
Тираж _____ экз. Формат __60x84 1/16. Бумага типогр. №1.
Объем ____ уч.-изд.л. Заказ №_____. Цена договорная.

Издание Казахского национального технического университета им. К.И. Сатпаева
Информационно издательский центр КазНТУ
г. Алматы, ул. Сатпаева 32

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……		3
1.	ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	8
1.1	Функции комплексного переменного. Комплексные числа….....	8
1.2	Основы положения теории вероятностей. Случайные события…….	17
1.3	Основы операционного исчисления…….	29
1.4	Ряд и интеграл Фурье…….	40
1.5	Основы векторного исчисления……	49
1.6	Элементы матричного исчисления……	63
1.7	Элементы алгебры логики…….	80
2	МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ…….....	89
2.1	Идентификация статических характеристик промышленных объектов……..	89
2.1.1	Определение функциональных зависимостей линейных объектов методом наименьших квадратов.....	89
2.1.2.	Определение функциональной зависимости нелинейного объекта ……	93
2.2.	Определение уравнения объектов по кривым разгона……	96
2.2.1.	Определение уравнения объектов первого порядка по кривой разгона ……	98
2.2.2.	Определение уравнения объекта второго порядка с монотонной кривой разгона ……	100
2.2.3.	Определения уравнения объекта второго порядка с колебательной кривой разгона …….	104
2.2.4.	Определение передаточной функций объекта по кривой разгона…….....	106
2.2.5.	Определение порядка уравнения объекта по кривой разгона…….	109
2.3.	Определение уравнения объектов частными методами ……	110
2.3.1.	Нахождение передаточной функции объекта но его экспериментальным частотным характеристикам…….	110
2.3.2	Получение расширенных частотных характеристик по кривой разгона……	113
2.4.	Определение математической модели объекта методами статистической динамики……...	118
2.4.1	Вычисление автокорреляционной функции (АКФ) ……	118
2.4.2	Вычисление математического ожидания, центрированной АКФ, среднеквадратичного отклонения и эквивалентной спектральной плотности случайного сигнала…….	123

2.4.3 Вычисление импульсной переходной функции ……..… 125
2.4.4 Вычисление спектральной плотности случайного сигнала…… 128
2.4.5 Вычисление комплексного коэффициента усиления (передаточной функции) объекта с использованием спектральных плотностей…… 133
3 ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ…… 126
3.1 Объекты управления и виды их математических моделей…… 126
3.2 Методы получения моделей промышленных объектов управления…….. 135
3.2.1 Аналитический метод получения математических моделей…. 137
3.2.2 Инженерная идентификация динамических характеристик линейных объектов по кривой разгона…… 139
3.2.3 Применение статистических методов для идентификации динамических характеристик промышленных объектов……. 144
3.3 Идентификация динамики существенно нелинейных объектов…….. 154
3.4 Представление математических моделей объектов управления в нормальной форме……. 156
4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ИХ ТЕХНИЧЕСКИМ ДАННЫМ……..…… 161
4.1. Вводные замечания……. 161
4.2. Идентификация генератора постоянного тока……. 162
4.3. Идентификация двигателя постоянного тока…… 169
4.4. Идентификация двухфазного асинхронного двигателя……. 177
4.5. Основные параметра и передаточная функция электромашинного усилителя…….. 183
4.6. Основные параметра и передаточные функции магнитных усилителей…….. 191
5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ……. 198
5.1. Вводные замечания…… 198
5.2. Планирование и подготовка эксперимента……. 199
5.3. Примеры экспериментального определения временных характеристик регулируемых объектов…… 204
5.4. Примеры экспериментального определения частотных характеристик регулируемых объектов…… 207
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК…… 220