

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный исследовательский технический
университет имени К. И. Сатпаева

Б. Т. Суйменбаев, Ж. Б. Суйменбаева

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ В
ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛЕТНО-
КОНСТРУКТОРСКИХ ИСПЫТАНИЙ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Рекомендовано Научно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия

Алматы 2016

УДК 629.782(075.8)

С 89

Рецензенты:

Мухамедгалиев А. Ф., – д-р техн. наук, проф.,
директор департамента АО НЦКИТ.

Каим Т. Т. – д-р техн. наук, проф. КазННТУ им. К. И. Сатпаева

Малишевский Е. В. – акад. МАИ, канд. техн. наук, проф.,

директор Центра НТА РК

Бекмухамедов Б. Э. – канд. техн. наук, директор департамента АО НЦКИТ

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2016 год

Суйменбаев Б.Т.

- С 89** Идентификация нестационарных систем в задачах обработки результатов летно-конструкторских испытаний летательных аппаратов: Учеб. пособие / Б.Т. Суйменбаев, Ж. Б. Суйменбаева. – Алматы: КазННТУ имени К. И. Сатпаева, 2016. – 130 с.: Ил.9. Табл.1 Библиогр. – 21назв.

ISBN 978-601-228-992-3

Рассмотрены вопросы идентификации нестационарных систем на основе использования формальных динамических моделей. Предлагаемые методы могут быть использованы при решении задач обработки материалов летно-конструкторских испытаний ракет-носителей и космических аппаратов.

Для научных сотрудников и специалистов, работающих в области проектирования и эксплуатации космических средств. Пособие будет полезным для студентов, магистрантов и докторантов специальности «Космическая техника и технологии» при изучении дисциплин «Летно-конструкторские испытания ракет-носителей и космических аппаратов», «Основы экспериментальной отработки космических средств», «Основы эксплуатации космических средств».

УДК 629.782(075.8)

ISBN 978-601-228-992-3 © Суйменбаев Б.Т., Суйменбаева Ж. Б., 2016

© КазННТУ имени К. И. Сатпаева, 2016.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АВД	– аварийное выключение двигателя
АУТ	– активный участок траектории
АС	– аварийная ситуация
ВТИ	– внешнетраекторные измерения
ИМК	– измерительный комплекс космодрома
КА	– космический аппарат
КСр	– космические средства
КПЭО	– комплексная программа экспериментальной отработки
ЛКИ	– летно-конструкторские испытания
НАКУ	– наземный автоматизированный комплекс управления
ПУТ	– пассивный участок траектории
ПИК	– полигонный измерительный комплекс
ПЛИ	– программа летных испытаний
ПОН	– программа обеспечения надежности
РКК	– ракетно-космический комплекс
РКН	– ракета космического назначения
РН	– ракета-носитель
ТК	– технический комплекс
ТЗ	– техническое задание
ТТЗ	– тактико-техническое задание
СК	– стартовый комплекс

ВВЕДЕНИЕ

Созданные межконтинентальные баллистические ракеты стали основой ракет космического назначения. С запуска первого искусственного спутника Земли начинается эпоха активного освоения космического пространства.

Ракетно-космическая техника становится важным элементом развития экономики государства, перспективным направлением научно-технического прогресса. Широкие возможности ракетно-космической техники открывает для многих научных, народнохозяйственных и военных приложений. Все большее число государств стремится к созданию собственного космического сегмента для решения народнохозяйственных задач, таких как телекоммуникационное обеспечение, исследования природных ресурсов, научные исследования, картография и мн. др. О темпах и масштабах освоения космического пространства можно судить по следующим данным. В настоящее время более 142 государств в той ли иной степени используют достижения космонавтики. Причем 40 из них имеют собственные спутники. Ежегодный прирост числа государств и организаций, владеющих космическими аппаратами, составляет около четырех.

Промышленное освоение космоса, прежде всего, зависит от перспективных разработок космических аппаратов и средств их выведения на орбиту. Энергетические, экономические и эксплуатационные характеристики ракет-носителей определяют массовые характеристики полезной нагрузки и, в конечном итоге, грузопоток, который с каждым годом возрастает. Широкий спектр задач, решаемых космическими аппаратами, приводит к повышенным требованиям в отношении систем управления и процессу управления полетом КА в целом. В настоящее время во многих странах обсуждаются и проектируются различные варианты перспективных космических средств для решения разнообразных задач в интересах экономики.

Под космическими средствами понимается совокупность орбитальных средств, средств подготовки, выведения и управ-

ления космическими аппаратами, а также средств, обеспечивающих их эксплуатацию. Эксплуатация КСр есть целенаправленная деятельность инженерно-технического персонала на приведение КСр в установленную техническую готовность, поддержание КСр в этой готовности и использование их по назначению. Это понятие включает в себя жизненный цикл подготовки и пуска РН и КА, а также эксплуатацию обеспечивающих комплексов, систем и объектов, включая районы падения отделяющихся частей ракеты-носителя.

Понятно, что обеспечение решения многочисленных задач исследования и использования космического пространства потребовало создания определенной космической инфраструктуры (НИИ, КБ, заводы, космодромы, объекты командно-измерительного комплекса, центры управления полетами, приема и обработки информации), на базе которых осуществляется разработка, производство и эксплуатация космических средств.

На космодром, составляющий основную часть наземной космической инфраструктуры, возлагается чрезвычайно важная ответственность в обеспечении выполнения космических программ, а также испытаний перспективных ракет-носителей и космических аппаратов. В настоящее время только на космодроме «Байконур» может проводиться подготовка и запуск до 35 типов КА, 6 типов РН, включая МБР.

Совершенно очевидно, что во многом выработка технических решений по перспективным образцам ракет-носителей и космических аппаратов зависит от результатов летно-конструкторских испытаний.

Обработка большого объема зачастую разнородной информации требует не только широкого использования средств вычислительной техники, но и разработки новых методов и алгоритмов ее обработки. Современный специалист должен знать суть существующих алгоритмов и постоянно расширять арсенал знаний по их совершенствованию, особенно в случае, когда измерения проводятся при воздействии большого числа факторов, мешающих их проведению.

1. ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ ЛЕТНО-КОНСТРУКТОРСКИХ ИСПЫТАНИЙ

1.1. Цель и задачи летно-конструкторских испытаний

Летные испытания проводятся с целью:

- всесторонней проверки и подтверждения характеристик (в том числе предельно допустимых их значений) комплекса (его составных частей и систем), заданных в ТТЗ (ТЗ), в условиях, максимально приближенных к условиям применения и эксплуатации, и в реальных условиях функционирования;

- отработки эксплуатационной документации и проверки достаточности и эффективности экспериментальной отработки изделий комплекса и комплекса в целом, проведения той отработки комплекса и его изделий, которую невозможно осуществить в наземных условиях;

- определения возможности принятия комплекса в эксплуатацию и (или) решения (выполнения) целевых задач.

Летные испытания подразделяются на летно-конструкторские и зачетные.

Основными задачами летно-конструкторских испытаний являются:

- проверка достаточности и эффективности экспериментальной отработки изделий комплекса и комплекса в целом;

- проведение той отработки комплекса и его изделий, которую невозможно осуществить в наземных условиях, и отработка соответствующей конструкторской документации на изделия комплекса;

- проверка и отработка эксплуатационной документации в условиях эксплуатации и в реальных условиях функционирования.

Основными задачами зачетных испытаний являются:

- определение возможности принятия комплекса в эксплуатацию и (или) решения комплексом целевых задач;

- разработка рекомендаций по постановке изделий комплекса на серийное производство (если предусмотрено серийное изготовление).

При решении указанных задач возникает ряд трудностей, связанных, прежде всего, с ограниченным числом дорогостоящих испытаний. Таким образом, в руках аналитиков имеется наличие небольшого и неоднородного по составу объема материалов испытаний.

Указанные обстоятельства ограничивают возможность определения вероятностных характеристик испытываемых объектов классическими статистическими методами и требуют разработки комбинированных методов, учитывающих априорную информацию, накопленную в процессе предшествующих испытаний и теоретических расчетов [1–5].

В основе различных методов обработки информации лежат измерения, получаемые средствами измерительного комплекса космодрома и НАКУ.

Важным технологическим звеном ЛКИ является полигонный измерительный комплекс. ПИК выполняет следующие основные функциональные задачи:

- применения;
- опытно-испытательные;
- научно-исследовательские.

К задачам применения относятся:

- штатная эксплуатация РКН;
- штатная эксплуатация средств, математического обеспечения, объектов ПИК.

К задачам опытно-испытательным относятся:

- натурные испытания РКН;
- испытания ракетно-космических радиолиний;
- испытания средств ПИК, комплексные испытания ПИК;
- разработка, испытание и внедрение математического обеспечения средств ПИК (для обработки результатов измерений испытаний и эксплуатации средств и объектов ПИК);
- опытная эксплуатация средств и математического обеспечения и объектов ПИК.

К научно-исследовательским задачам относятся:

- научное сопровождение натурных испытаний РКН, штатной эксплуатации РКН;

- научное сопровождение испытаний РКН и ракетных радиолиний;
- научное сопровождение разработки, испытаний и внедрения; математического обеспечения средств ПИК;
- научное сопровождение эксплуатации средств математического обеспечения и объектов ПИК;
- разработка научно-технических предложений по совершенствованию организационно-штатной структуры ПИК.

На полигонный измерительный комплекс помимо целевых задач возлагается решение следующих задач:

- проведение телеметрических измерений в ходе различных проверок РН и КА на ТК и СК при подготовке их к пуску;
- проведение телеметрических и траекторных измерений на активном участке полета РН;
- проведение телеметрических и траекторных измерений на пассивном участке полета КА, в том числе ГКА;
- привязка измерительной информации к единой шкале времени;
- автоматизированный сбор, обработка, отображение и документирование измерительной информации;
- оценка состояния бортовых систем РН и КА при подготовке их к пуску и в полете;
- прогнозирование районов падения ступеней РН;
- определение элементов траектории полета РН и факта выхода КА на орбиту;
- послеполетной полной обработки измерительной информации с целью оценки функционирования бортовых систем РН и КА и лётно-технических характеристик РН.

Выполнение перечисленных задач проводят с помощью оптической, радиотехнической, электронной и другой аппаратуры, размещенной на измерительных пунктах.

Сбор измерительной информации и выдача результатов ее обработки на рабочие места операторов (испытателей) для отображения и документирования производится с помощью автоматизированной системы, включающей различные каналы связи (проводные, кабельные, радиорелейные, спутниковые), аппаратуру передачи данных и другие электронные средства [2].

Летные испытания являются приемочными государственными испытаниями комплексов и их изделий, проводимые совместно с представителями организаций промышленности и организаций заказчика. Для выполнения задач летных испытаний общее руководство испытаниями осуществляет межведомственная комиссия, в состав которой, как правило, входят представители заказчика (администратора программы), ведущих НИИ и предприятий, заинтересованных министерств (ведомств), организаций-разработчиков комплекса и его основных изделий, а также в случае необходимости потребителей космической продукции (услуг).

Решения комиссии в рамках своей компетенции, определенных *целями и задачами летных испытаний*, являются обязательными к исполнению министерствами, ведомствами, организациями, юридическими и физическими лицами, участвующими в проведении летных испытаний.

В обеспечение решения задач ЛКИ разрабатывается программа ЛКИ, а также проводятся подготовительные операции по приведению в готовность личного состава и средств наземного обеспечения ЛКИ.

1.2. Программа и обеспечение летно-конструкторских испытаний

Программа летных испытаний комплекса является основным документом проведения летно-конструкторских или зачетных испытаний. На ее основе проводят летные испытания и определяют задачи каждого пуска, вносимые в полетное задание. Для каждого конкретного комплекса определяется порядок проведения летных испытаний, который согласовывают с заказчиком, заинтересованными министерствами (ведомствами), ведущими НИИ и предприятиями, а в случае необходимости с потребителями космической продукции (услуг). Выпуск других документов взамен программы летных испытаний комплекса не допускается.

Программу летных испытаний комплекса разрабатывает головной разработчик комплекса не позднее чем за 2 месяца до начала летных испытаний, если иной срок не установлен рабо-

чими документами, совместно с организациями государственного заказчика по его указанию и организациями-соисполнителями, согласует с испытательным полигоном, головными НИИ государственного заказчика и промышленности, с заинтересованными министерствами (ведомствами). Программу рассматривает совет главных конструкторов и Госкомиссия по проведению летных испытаний, утверждают государственный заказчик комплекса и заказчик (для комплексов коммерческого назначения).

Программа летных испытаний разрабатывается на основании документов сквозного планирования. Рабочими документами сквозного планирования являются: генеральный план-график создания комплекса, а также изделий комплекса, планы-графики разработки технического предложения и эскизного проекта, планы-графики разработки, отработки и изготовления изделий комплекса, планы капитального строительства, создания наземных объектов, стендов, сооружений в обеспечение создания комплекса, а также изделий комплекса. Рабочие документы сквозного планирования на комплекс в целом разрабатывает организация-разработчик комплекса совместно с организациями-соисполнителями.

Рабочие документы сквозного планирования являются основными документами для текущего планирования и контроля работ по созданию комплекса и его изделий. Организации, участвующие в создании комплекса и его изделий, обязаны все работы, включенные в рабочие документы сквозного планирования, вносить в договора (контракты), а также в годовые организационно-плановые документы на проведение и контроль текущих работ по изделиям комплекса, которые разрабатываются, согласовываются и утверждаются в соответствии с действующими нормативными документами.

Все изменения и уточнения вносятся в программу на основании технического документа, обосновывающего необходимость внесения этих изменений или уточнений. Порядок разработки, согласования и утверждения изменений или уточнений, вносимых в утвержденную программу летных испытаний комплекса, является таким же, что и для самой программы.

В программе летных испытаний должны быть отражены:

- виды испытаний (летно-конструкторские и зачетные);
- цели испытаний, их задачи и содержание, требования к испытаниям и порядок их выполнения;
- перечень, состав и назначение объектов испытаний;
- распределение объектов по видам испытаний, включая количество и порядок пусков;
- порядок и последовательность подтверждения требований, заданных в ТТЗ (ТЗ), в том числе при неблагоприятных сочетаниях внешних воздействующих факторов;
- порядок работ по оценке уровня ремонтпригодности в полете (для ПКК), если это технически возможно и экономически целесообразно проводить;
- порядок работ по оценке уровня контролируемости технического состояния комплекса и его основных изделий (если этот уровень задан в ТТЗ, ТЗ) при вводе его в эксплуатацию;
- состав сил и средств обеспечения полигонных служб;
- перечень частных программ проведения летных испытаний для отдельных изделий комплекса, в том числе и на те изделия, которые испытывают при пусках других комплексов;
- порядок отработки системы эксплуатации, эксплуатационных характеристик и эксплуатационной документации;
- порядок поставок изделий, оборудования и необходимой документации, а также материально-технического обеспечения летных испытаний;
- порядок подготовки изделий на стартовом и техническом комплексах;
- порядок подтверждения требований к надежности, заданных в ТТЗ (ТЗ), с учетом результатов экспериментальной отработки;
- порядок подтверждения требований к экологической безопасности пуска РКН и эксплуатации РКК;
- порядок и основные меры по ликвидации объекта после завершения полета;
- форма и порядок отчетности по испытаниям с учетом требований существующей нормативной документации.

В целях выполнения задач по обработке результатов испытаний в программу включают:

- перечень программ и методик определения и оценки характеристик комплекса и его изделий, в том числе средств НАКУ, НСК, КНТО, ПИК, ИКК и ПСК для данного комплекса, в процессе летных испытаний, а также программ и методик подготовки и проведения этих испытаний;
- порядок полной обработки телеметрической информации и внешнетраекторных измерений;
- порядок работы и состав НАКУ, НСК, ПИК, ИКК, КНТО, ПСК.

Программа летных испытаний должна содержать мероприятия по защите окружающей среды, в том числе при возникновении аварийных ситуаций. В нее включают мероприятия по обеспечению экологической безопасности на этапе подготовки и пуска ракет космического назначения, движения ракеты космического назначения на активном участке траектории, утилизации отделяющихся частей ракет-носителей в районах падения ОЧ РН.

При возникновении аварийной ситуации и необходимости прекращения программы полета программой должны быть предусмотрены мероприятия по оперативной обработке данных внешнетраекторных и телеметрических измерений, а также расчет возможных последствий, связанных с выбросом токсичных компонентов ракетного топлива, падением тяжелых металлических конструкций и образованием очагов пожара на земной поверхности.

В обеспечение поставленных задач до начала летных испытаний должны быть завершены:

- строительство зданий и сооружений, монтаж и отладка объектов и систем наземного оборудования и сдача их космодрому в эксплуатацию, включая средства обеспечения экологической безопасности;
- подготовка космодрома, измерительным комплексом, Центром управления полетом космического аппарата своих испытательных и измерительных средств, необходимой документации по управлению полетом, а также личного состава;

– подготовка необходимой конструкторской, технологической и эксплуатационной документации (по согласованным с заказчиком перечням), в том числе документации по баллистическому, математическому, астроному-геодезическому и метеорологическому обеспечению летных испытаний комплекса и его изделий;

– отработка организациями промышленности совместно с эксплуатирующими организациями космодрома технологии проверочных и предпусковых работ на техническом и стартовом комплексах, а также проведение ими проверочных автономных и комплексных испытаний изделий комплекса с соблюдением требований техники безопасности.

При подготовке комплекса и его изделий к летным испытаниям в специальных журналах делают записи о выполнении технологических операций, которые подписывают исполнители и контролеры от организаций промышленности и полигона по каждой операции. Переход к выполнению следующей операции разрешают только при наличии подписей всех лиц, ответственных за выполнение и контроль предыдущей операции.

Работы в соответствии с принятым техническим решением должны проводиться по специальному заданию, утвержденному генеральным (главным) конструктором или его заместителем.

По окончании подготовки к летным испытаниям эксплуатирующие организации промышленности совместно с головными разработчиками составляют акт о готовности средств для обеспечения летных испытаний.

Если программой летных испытаний комплекса предусмотрено совмещение лётно-конструкторских и зачетных испытаний, то в программе должен быть указан номер пуска, начиная с которого действует указанный запрет на внесение изменений и усовершенствований.

Обязательным компонентом программы лётно-конструкторских испытаний должна быть спецпрограмма, предусматривающая всесторонний анализ аварий и отказов (неисправностей) изделий и необходимые расчетно-теоретические и (или) экспериментальные проверки эффективности и достаточности проведенных доработок изделий и мероприятий, ис-

ключающих повторение выявленных причин аварий или отказов. К этим работам обязательно привлекают головные НИИ государственного заказчика (заказчика) и промышленности, другие организации в части, их касающейся. По результатам указанных работ должны быть выпущены соответствующие технические отчеты.

Решение о начале летных испытаний комплекса, а также о проведении каждого запуска космического аппарата с экипажем принимает Госкомиссия на основании рассмотрения результатов экспериментальной отработки, итогов подготовки к летным испытаниям, представленного заключения генерального (главного) конструктора комплекса.

1.3. Порядок обработки результатов лётно-конструкторских испытаний

По каждому пуску службы космодрома совместно с представителями организаций промышленности в срок, установленный Госкомиссией, но не позднее 3-х дней после пуска докладывают Госкомиссии результаты предварительного анализа итогов пуска и составляют в месячный срок, если иной срок не установлен Госкомиссией, технический отчет о результатах пуска, который рассылают в соответствии с нормативными и руководящими документами о взаимообмене информацией между организациями промышленности и заказчиком.

Анализ результатов каждого пуска проводят службы космодрома совместно с головным разработчиком комплекса и с участием разработчиков изделий, ведущих НИИ государственного заказчика (заказчика) и промышленности.

Независимо от результатов пуска организации по изделиям собственной разработки и изготовления, головная организация-разработчик комплекса по комплексу в целом до следующего пуска проводит анализ данных (в том числе телеметрических и изложенных в отчете экипажа – для ПКК) предыдущего пуска (подготовки к пуску и полета).

При этом каждый выявленный отказ, неисправность или случай нахождения параметров на границе допусков должны

быть зафиксированы в соответствии с действующей системой информации и должны быть разработаны мероприятия по устранению их причин. По результатам анализа и реализации принятых мер по устранению выявленных отказов, неисправностей организации выпускают отчеты.

После аварийного пуска, пуска с отказами изделий в полете или невыполнением требований, оговоренных в ТТЗ, ТЗ и влияющих на технические или тактико-технические характеристики изделий, последующий пуск осуществляют только после устранения причин аварий или отказа, выполнения необходимых расчетных и экспериментальных работ для подтверждения эффективности и достаточности принятых мер или реализации мероприятий, исключающих повторение причин аварии или отказа изделия в полете.

Решение о продолжении летных испытаний после аварийного пуска принимает Госкомиссия на основании представленных заключения аварийной комиссии, доклада (заключения) генерального (главного) конструктора комплекса и заключения заказчика (организации заказчика по его указанию).

В отдельных случаях по указанию Госкомиссии головные НИИ государственного заказчика (заказчика) и промышленности представляют дополнительные заключения о готовности комплекса к дальнейшим летным испытаниям.

Организации-разработчики и организации-изготовители обязаны своевременно представлять головным НИИ, заказчику (организации заказчика по его указанию) необходимые материалы для составления указанных заключений.

Научно-методическое обеспечение обработки результатов летно-конструкторских испытаний состоит в разработке:

- методики определения и оценки характеристик комплекса, его составных частей, систем, основных агрегатов (приборов) по результатам летных испытаний, в том числе проверки и оценки защищенности комплекса от несанкционированного пуска;
- штатной циклограммы полета (программы полета космического аппарата), перечня возможных аварийных ситуаций и циклограмма выхода из аварийных ситуаций и проведения

ремонтных работ (в том числе инструкции по действию экипажа и наземных служб в аварийных ситуациях, порядок принятия решения при аварийных ситуациях – для ПКК);

– методики оценки соответствия подтверждаемых характеристик испытываемых комплексов.

Информационное обеспечение летных испытаний состоит в формировании необходимой базы данных на каждое испытание, включающее порядок и объем отработки ракеты (ракеты-носителя), космического аппарата совместно с отдельными составными частями комплекса, НАКУ, ПСК, перечень программ и методик проведения указанных отработок, а также перечень предельных значений требований и характеристик комплекса, подлежащих проверке в процессе летных испытаний. Помимо этого в состав информационного обеспечения испытаний входит необходимая конструкторская, технологическая и эксплуатационная документация, в том числе документации по баллистическому, математическому, астрономо-геодезическому и метеорологическому обеспечению летных испытаний комплекса и его изделий, необходимой документации по управлению полетом.

1.4. Формализация задач обработки результатов ЛКИ

Задачи обработки результатов ЛКИ складываются из целей и задач летных испытаний с учетом функциональных задач ПИК.

ПИК является частью общей системы наземной космической инфраструктуры. При этом ПИК должен:

- функционировать на постоянной основе с накоплением многолетних данных и решения целевых задач;
- включать в состав комплекс технических средств приема и обработки информации на базе радиотехнических, оптических средств и средств инфразвукового контроля, системы связи с локальными, региональными и глобальными системами;
- предусматривать для получения наземных измерений создание распределенной сети центров сбора и первичной обработки информации, базирующихся на типовых платформах.

Основными функциональными составляющими деятельности ПИК являются:

1. Командно-программное обеспечение, включающее:
 - разработку долгосрочных и оперативных планов работы космических аппаратов (КА) и технических средств ПИК;
 - формирование и передачу на борт КА командно-программной информации и получение квитанций о ее прохождении;
 - контроль выполнения программы полета КА по результатам анализа телеметрической (ТМИ) и внешнетраекторной (ВТИ) информации.
2. Навигационно-баллистическое обеспечение, включающее:
 - измерение текущих навигационных параметров КА;
 - определение и прогнозирование параметров орбиты КА по результатам обработки текущих навигационных параметров КА;
 - расчет исходных данных для выполнения коррекции орбиты с целью поддержания заданных параметров или маневра КА;
 - расчет баллистических данных, необходимых для работы средств ПИК.
3. Информационно-телеметрическое обеспечение, включающее:
 - поиск, захват КА радиотехническими и оптическими средствами, переход на режим устойчивого сопровождения для проведения информационного обмена и траекторных измерений;
 - поиск, захват КА средствами инфразвукового контроля, переход на режим устойчивого сопровождения для проведения информационного обмена и измерений параметров инфразвука от движущегося объекта;
 - прием с борта КА, первичную обработку и регистрацию ТМИ;
 - выдачу команд управления КА по командным радиопередачам, координацию управления техническими средствами ПИК;
 - оценку качества выполнения заданного технологического цикла управления КА.
4. Телекоммуникационное обеспечение, включающее:
 - передачу данных ТМИ и ВТИ в экспертно-аналитический центр и центры тематической обработки;

- информационный обмен по стандартам TDRSS, DRTSS, DRS;

- функционирование телепорта.

5. Научно-техническое обеспечение, включающее:

- анализ ВТИ и ТМИ с целью оценки состояния и функционирования бортовых систем КА;

- анализ фотометрической информации в целях определения пространственной ориентации, вида стабилизации и идентификация типа КА;

- анализ выполнения программы выведения КА.

Типовая структура ПИК включает:

- подсистему приема и первичной обработки телеметрической информации (п/с «ТМИ»);

- подсистему сбора и первичной обработки астрометрической и фотометрической информации (п/с «Оптика»);

- подсистему приема и обработки данных дистанционного зондирования Земли (п/с «ДЗЗ»);

- подсистему связи и электромагнитной совместимости (п/с «Связь»);

- подсистему глобальной связи (п/с «Телепорт»);

- подсистему сопровождения движения РКН на АУТ средствами инфразвукового контроля (п/с «АУТ»);

- подсистему передачи на борт КА командно-программной информации;

- подсистему анализа ВТИ, ТМИ и фотометрической информации с целью оценки состояния и функционирования бортовых систем КА, определения пространственной ориентации, вида стабилизации и идентификации типа КА, выполнения программы выведения КА, координатно-временного обеспечения (п/с «Экспертно-аналитический Центр»).

Комплекс технических средств ПИК нацелен на решение основной задачи – определения летно-технических характеристик ЛА на соответствие их требованиям технического задания.

Задача обработки измерений состоит в извлечении сведений о ряде физических параметров, характеризующих ЛА с количественной стороны. Эту задачу можно разбить на две взаимосвязанные подзадачи: определение параметров движения ЛА

и анализ движения ЛА по результатам измерений, полученным при наблюдении за движущимся объектом.

Таким образом, можно выделить следующие основные задачи обработки телеметрической и внешнетраекторной информации:

- определение параметров движения центра масс ЛА (координаты, скорости, ускорения);
- определение параметров движения ЛА вокруг центра масс (углы, угловые скорости и ускорения);
- определение параметров, характеризующих работу системы управления и агрегатов;
- определение параметров возмущений, действующих на ЛА.

Перечисленные задачи решаются в ходе единичных испытаний. Одна из обобщенных задач обработки измерений состоит в определении среднеопытных значений летно-технических характеристик ЛА по серии испытаний.

В ходе обработки измерительной информации в ряде случаев решается задача определения точности работы измерительных средств и обоснования требований к измерительным комплексам.

1.5. Порядок завершения летно-конструкторских испытаний

Основная задача летных испытаний – определение летно-технических характеристик ЛА на соответствие их требованиям технического задания. Летные испытания являются завершающим этапом обработки ЛА, в ходе которого проверяется функционирование всех бортовых систем и агрегатов в действительных условиях полета. Полученные в ходе испытаний данные – материалы летных испытаний – используются в дальнейшем для принятия решений при доработке изделий, выработке рекомендаций по их совершенствованию и эксплуатации.

По окончании ЛКИ составляется акт (отчет) о результатах этих испытаний с оценкой выполнения программы летных испытаний комплекса, соответствия характеристик комплекса заданным в ТЗ и с заключением о возможности принятия комплекса в эксплуатацию или использования комплекса для решения (выполнения) целевых задач. По окончании серии испытаний выдается заключение о возможности начала серийного производства.

К акту (отчету) прилагают технический отчет с изложением результатов выполнения программы летных испытаний комплекса и перечень недостатков, выявленных и не устраненных в процессе летных испытаний, с рекомендациями и предложениями по их устранению (если эти недостатки имели место) с указанием сроков и этапов устранения, а также заключение экологической экспертизы.

Решение о завершении летных испытаний комплекса (его составных частей, систем, агрегатов и приборов) и о возможности принятия комплекса в эксплуатацию или для решения (выполнения) комплексом целевых задач принимает комиссия на основании оценки соответствия характеристик РКН и КА комплекса требованиям ТТЗ (ТЗ).

Оценка соответствия характеристик комплекса и его изделий требованиям ТТЗ, ТЗ проводится по результатам расчетно-теоретических оценок, экспериментальной отработки, подготовки к пускам и пусков (полетов) при летных испытаниях (летно-конструкторских и зачетных) и специспытаний.

Государственный заказчик (заказчик) и головной разработчик комплекса совместно с заинтересованными министерствами (ведомствами) и организациями-соисполнителями на основании акта (отчета) Госкомиссии готовят проект постановления (решения) о принятии комплекса в эксплуатацию и об организации серийного производства, который представляют на утверждение в установленном порядке.

Контрольные вопросы:

1. Основные виды испытаний ракет-носителей и космических аппаратов.
2. Задачи обработки материалов летно-конструкторских испытаний.
3. Задачи зачетных испытаний.
4. Содержание программы летных испытаний.
5. Порядок обработки результатов летно-конструкторских испытаний.
6. Формализация задач обработки результатов летно-конструкторских испытаний.
7. Порядок завершения летно-конструкторских испытаний.

2. АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ВНЕШНЕТРАЕКТОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Для контроля параметров траектории находят применение различные методы измерений. Название этих методов определяется обычно типом сигнала, несущего информацию о параметрах движения объекта. Задача обработки информации состоит в установлении связи между измеряемыми параметрами и параметрами движения.

2.1. Алгоритмы обработки информации по достаточным измерениям

В общем случае связь между измерениями и неизвестными параметрами может быть представлена следующей системой уравнений [1]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) + \delta h_1 &= h_1; \\ \bar{h}_1(\theta_2, \theta_2, \dots, \theta_N) + \delta h_2 &= h_2; \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{h}_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) + \delta h_n &= h_n, \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где $\bar{h}_i(\cdot)$ – математическое ожидание измеряемого параметра; δh_i – ошибка i -го измерения; $i = \overline{1, n}$ – число измерений; N – число параметров.

В качестве функций $\bar{h}_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ чаще используются заранее заданные функции, вид которых (с точки зрения описания явления или простоты вычислений) оказывается наиболее подходящим. Например, радиальная дальность D является функцией координат и скорости объекта в прямоугольной (условной) системе координат, тогда функция $h_i(\cdot)$ может быть записана в виде $D_i(x, y, z, V_x, V_y, V_z)$.

Часто в качестве функции $\bar{h}_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ выбирают линейную функцию неизвестных параметров как, например, в задаче аппроксимации экспериментальных точек полиномами.

Здесь в качестве неизвестных выступают коэффициенты при слагаемом определенного типа.

Как видно, задача обработки состоит в отыскании оценок N неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ по результатам n измерений (наблюдений). Эта задача может быть решена при наличии достаточных избыточных измерений.

В случае обработки информации по достаточным измерениям из системы уравнений (2.1) отбирают ровно столько уравнений, сколько необходимо для однозначного определения неизвестных параметров. Причем предполагают, что ошибки δh_i равны нулю и решают полученную систему нелинейных уравнений. Для определения местоположения ЛА по достаточным измерениям необходимо знать точку пересечения трех поверхностей положения, или двух линий положения, или точку пересечения линии положения и поверхности положения. Как известно, поверхность положения связана с базисной точкой. При использовании достаточного числа измерений для определения координат объекта максимальное количество точек не может быть более трех. Возможные схемы определения координат объекта можно разделить на три группы. В первую группу (рис. 2.1 и 2.2) объединяются схемы, в которых все три координатные поверхности связаны с базисной точкой.

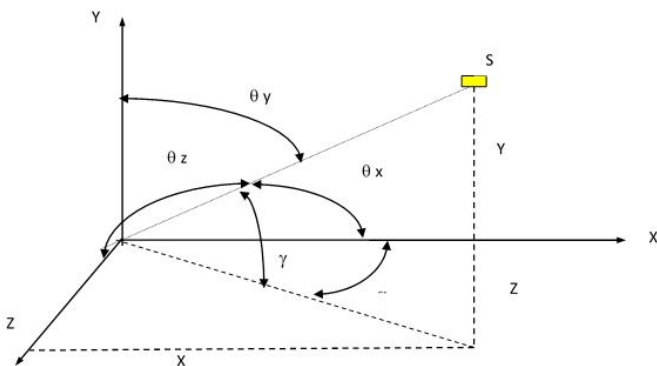


Рис. 2.1. Схема определения координат ЛА с одной базисной точкой

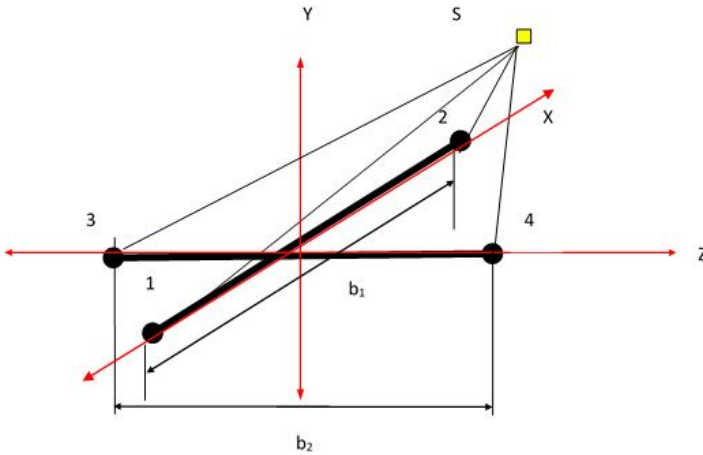


Рис. 2.2. Схема определения координат ЛА с одной базисной точкой:
1–4 – антенны ; b_1 , b_2 – антенные базисы; O – базисная точка

Ко второй группе (рис. 2.3) относятся схемы, в которых три координатные поверхности связаны с двумя базисными точками (рис. 2.4).

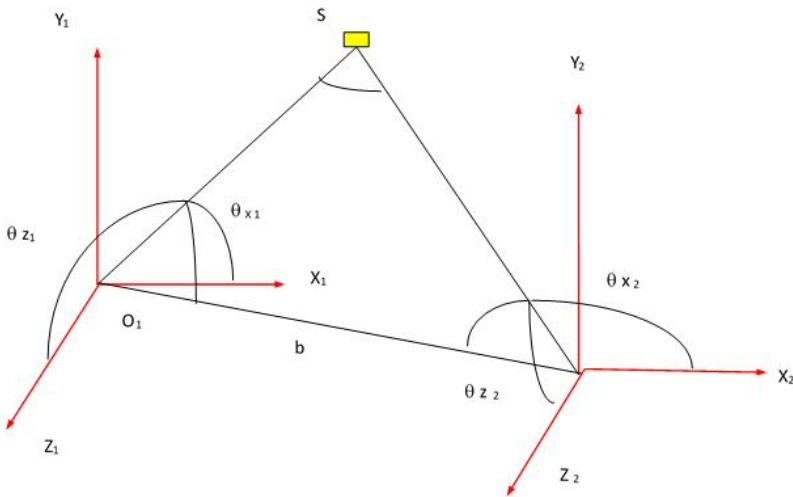


Рис. 2.3. Схема определения координат ЛА
с двух базисных точек

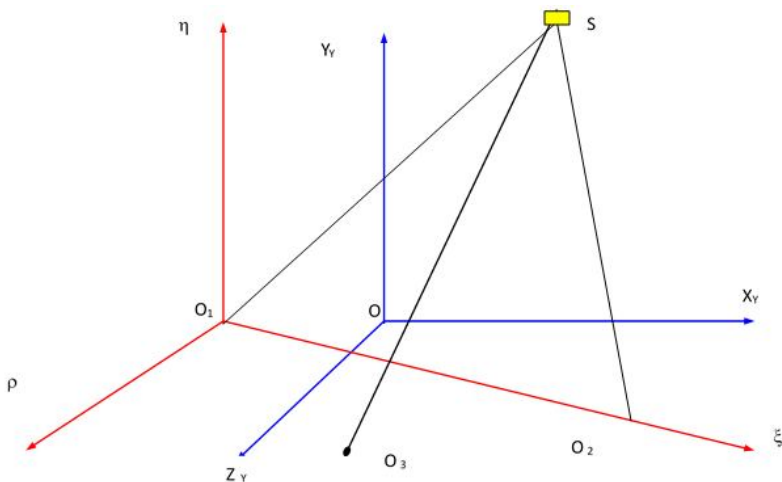


Рис. 2.4. Схема определения координат ЛА с трех базисных точек

С одной из них связаны две координатные поверхности, а с другой – одна. В третью группу включаются схемы с тремя базисными точками. Здесь с каждой из них связывается только одна координатная поверхность. С учетом используемого варианта расположения базисных точек можно получить исходный алгоритм для определения координат ЛА по достаточным измерениям [2, 3].

Определение скорости по достаточным измерениям проводят по зависимостям, связывающим измеренные и искомые параметры. Для определения скорости ЛА достаточными измерениями являются три скоростных и три координатных параметра. Основные математические соотношения приведены в приложении.

2.2. Алгоритм обработки траекторной информации по избыточным измерениям

Для обработки избыточных измерений в уравнении (2.1) полагают $n > N$, что приводит к необходимости решать это уравнение в статистическом смысле. Значения неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ выбирают таким образом, чтобы совокуп-

ность остаточных невязок обладала экстремальными свойствами. Величины $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_N$, принимаемые в качестве подходящих значений неизвестных параметров, называются *оценкой этих параметров*. Задача статистической обработки состоит в отыскании таких формульных и алгоритмических зависимостей построения оценок, при которых отсутствует смещение оценки, а дисперсия оценки наименьшая. Рассмотрим решение задачи на примере обработки данных траекторных измерений.

Пусть в некоторый момент времени t_k с помощью траекторных измерительных средств измерены параметры $h_i (i = 1, 2, \dots, M - \text{номер измеренного параметра})$, характеризующие положение и скорость движения ЛА. В соответствии с уравнением (2.1) запишем

$$h_i = \bar{h}_i + \delta h_i, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.2)$$

Положим, что δh_i – случайная некоррелированная ошибка измерений, имеющая нулевое математическое ожидание, нормальное распределение и дисперсию $\sigma_I^2 = \sigma_0^2 / P_i$, где P_i – вес i -го измерения, а σ_0^2 – дисперсия эталонного измерения. Оценим параметры движения центра масс ЛА в условной системе координат в момент времени t_k с учетом того, что координаты точек стояния измерительных средств известны. Каждый из параметров $\bar{h}_i$ является функцией параметров движения центра масс ЛА в условной системе координат.

Тогда можно записать

$$\bar{h}_i = (\bar{h}_i(\bar{x}_y, \bar{y}_i, \bar{z}_y, \bar{\dot{x}}_y, \bar{\dot{y}}_y, \bar{\dot{z}}_y)), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (2.3)$$

$\bar{x}_y, \bar{y}_i, \bar{z}_y, \bar{\dot{x}}_y, \bar{\dot{y}}_y, \bar{\dot{z}}_y$ – математические ожидания координат и составляющих вектора скорости ЛА в условной системе координат.

Из условия задачи следует, что схема измерений задана выборкой

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_M]^T. \quad (2.4)$$

В соответствии со сделанными предположениями следует, что ошибки измерений не содержат систематической составляющей, некоррелированы и нормально распределены. Кроме того, априорной информации об оцениваемых параметрах нет. В этих условиях наиболее часто методом обработки является метод наименьших квадратов (МНК) [1]. В качестве критерия выберем условия минимума взвешенной суммы квадратов случайных ошибок измерений

$$F = \sum_{i=1}^M P_i (h_i - \bar{h}_i)^2, \quad i = \overline{1, M}. \quad (2.5)$$

Параметры движения $x_y, y_y, z_y, \dot{x}_y, \dot{y}_y, \dot{z}_y$ находим из условия минимума (2.5). В данной постановке задача определения параметров движения означает обработку измерений в сечении на момент времени t_k . Здесь в качестве функций h_i могут выступать, например, измерения дальности D_i , полученные, например, с пяти измерительных пунктов (рис. 2.5).

При этом заметим, что измеренная наклонная дальность D_i связана с координатами ЛА в условной системе координат соотношением

$$D_i = \sqrt{(x_y - x_{0i})^2 + (y_y - y_{0i})^2 + (z_y - z_{0i})^2},$$

где x_{0i}, y_{0i}, z_{0i} – координаты базисных точек в условной системе координат.

Получение шести оценок параметров движения центра масс ЛА возможно только в случае, если в выборке измерений H имеется не менее трех скоростных и трех координатных параметров или не менее шести скоростных параметров.

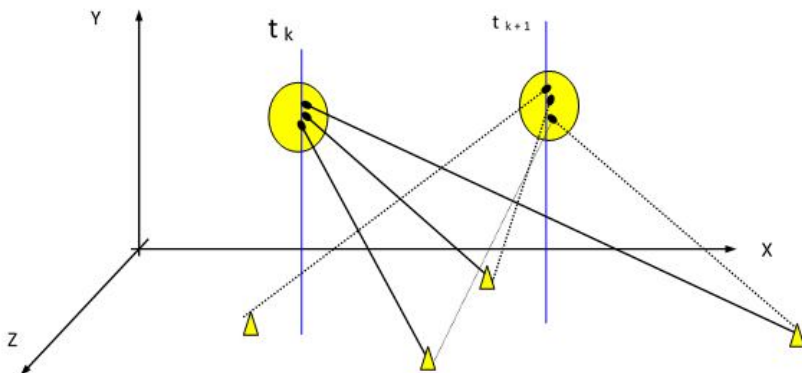


Рис. 2.5. Выборка измерений в сечении на момент времени t_k и t_{k+1}

Ввиду нелинейности характера зависимости (2.3) минимизации (2.5) затруднительна, что приводит к необходимости линеаризации уравнения (2.3).

Зададим параметры движения центра масс нулевого приближения, используя, например, данные расчетной траектории $x_y^{(0)}, y_y^{(0)}, z_y^{(0)}, \dot{x}_y^{(0)}, \dot{y}_y^{(0)}, \dot{z}_y^{(0)}$. Введем обозначения $x_y^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, y_y^{(0)} = \lambda_2^{(0)}, z_y^{(0)} = \lambda_3^{(0)}, \dot{x}_y^{(0)} = \lambda_4^{(0)}, \dot{y}_y^{(0)} = \lambda_5^{(0)}, \dot{z}_y^{(0)} = \lambda_6^{(0)}$.

Обозначим вероятнейшие поправки к параметрам нулевого приближения через $\Delta\lambda_j, j = \overline{1,6}$. Тогда можно записать

$$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + \Delta\lambda_j, \quad j = \overline{1,6}. \quad (2.6)$$

Полагая функцию (2.3) дифференцируемой, а поправки $\Delta\lambda_j$ небольшими, получаем разложение этой функции в ряд Тейлора около значения $h_i^{(0)}$, соответствующего нулевому приближению параметров, и ограничимся линейными членами

$$\bar{h}_i = h_i^{(0)} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial h}{\partial \lambda_j} \Delta\lambda_j, \quad N = 6, \quad (2.7)$$

где $\frac{\partial h}{\partial \lambda_j}$ – частные производные от измеряемых по оцени-

ваемым параметрам, вычисленные для опорной траектории движения ЛА. С учетом (2.7) критерий (2.5) примет вид

$$F = \sum_{j=1}^n P_i \left(h_i - h_i^{(0)} - \sum_{j=1}^6 \frac{\partial h}{\partial \lambda_j} \Delta \lambda_j \right)^2. \quad (2.8)$$

Условие минимума (2.8) запишем в общем виде

$$\frac{\partial F}{\partial(\Delta\lambda_i)} = \sum_{i=1}^n P_i \left(h_i - h_i^{(0)} - \sum_{j=1}^6 \frac{\partial h}{\partial \lambda_j} \Delta \lambda_j \right) \left(-\frac{\partial h}{\partial \lambda_j} \right) = 0, \quad j = \overline{1, N}, i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Решение поставленной задачи ищем из системы нормальных уравнений относительно искомым поправок для случая $N = 6$:

$$\left. \begin{aligned} &\Delta\lambda_1 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i1}^2 + \Delta\lambda_2 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i1} \varphi_{i2} + \dots + \Delta\lambda_6 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i1} \Phi_{i6} = \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i1} \Delta h_i^{(0)}; \\ &\Delta\lambda_1 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i2} \Phi_{i1} + \Delta\lambda_2 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i2}^2 + \dots + \Delta\lambda_6 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i2} \Phi_{i6} = \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i2} \Delta h_i^{(0)}; \\ &\dots\dots\dots \\ &\Delta\lambda_1 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i6} \Phi_{i1} + \Delta\lambda_2 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i6} \Phi_{i2} + \dots + \Delta\lambda_6 \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i6}^2 = \sum_{i=1}^n P_i \Phi_{i6} \Delta h_i^{(0)}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.10)$$

$$\text{где } \Phi_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \lambda_j}, \quad \Delta h_i^{(0)} = h_i - h_i^{(0)}.$$

Алгоритм обработки представлен на рис. 2.6.

Решение системы (2.10) единственно, если ее определитель не равен нулю. Полученные в результате оценки поправок $\Delta \hat{l}_i$

будут поправками первого приближения. Тогда оценки параметров первого приближения запишем в виде

$$\widehat{\lambda}_j^{(1)} = \lambda_j^{(0)} + \Delta \widehat{\lambda}_j^{(1)}, \quad j = \overline{1,6}. \quad (2.11)$$

На этом заканчивается первый цикл этапа обработки. Подставив в систему (2.10) величины $\Delta h_j^{(1)}$ и Φ_{ij} , соответствующие оценкам параметров первого приближения, найдем оценки поправок второго приближения и, соответственно, параметры второго приближения

$$\widehat{\lambda}_j^{(2)} = \lambda_j^{(1)} + \Delta \widehat{\lambda}_j^{(2)}, \quad j = \overline{1,6}. \quad (2.12)$$

Обычно итерационный процесс повторяют 3–4 раза до получения сходимости, удовлетворяющей соотношению

$$|\Delta \widehat{\lambda}_j^{(m)}| \leq \varepsilon, \quad j = \overline{1,6}. \quad (2.13)$$

где ε – заданная положительная константа, выбираемая на основании требований к точности оцениваемых параметров движения; m – номер приближения.

Особенность решения задачи состоит в вычислении частных производных Φ_{ij} от измеряемых по оцениваемым параметрам. Эта процедура занимает иногда до 80 % машинного времени. Алгоритмы вычисления частных производных подробно рассмотрены в [3, 7].

Другой характерной особенностью является то, что сходимость к истинному значению оценок искомых параметров в каждом конкретном случае зависит от выбора начальных значений оценок $\lambda_j^{(0)}$. При невозможности получить достаточно хорошее начальное приближение для искомых параметров или при обработке измерений низкой точности могут применяться подходы, основанные на модифицированном методе наискорейшего спуска или последовательных приближений.

2.3. Алгоритмы аппроксимации параметров движения центра масс полиномами

Различные источники ошибок приводят к разбросу оценок параметров движения центра масс объекта относительно опытной траектории. Поэтому возникает задача аппроксимации оценок и определения по результатам этой аппроксимации сглаженных параметров движения в любой точке траектории.

Решение поставленной задачи осуществляется в два этапа:

- выбор аппроксимирующей кривой;
- определение параметров этой кривой.

Функции, измеряемые траекторными радиотехническими средствами, представляют собой обычно монотонные функции времени. Поэтому в качестве аппроксимирующих кривых обычно выбирают алгебраические полиномы либо ортогональные полиномы, которые также представляют собой монотонные функции.

Аппроксимация параметров движения центра масс ЛА алгебраическим полиномом. Пусть на отрезке $[a, b]$ имеем n измерений параметра $\lambda(t)$, каждое из которых соответствует моменту t_i (i, n). Примем измерения случайного параметра как случайную величину

$$h(t_i) = \lambda(t_i) + \delta h(t_i), \quad (2.15)$$

где $h(t_i)$ – измерения случайного параметра; $\lambda(t_i)$ – значение неслучайного параметра; $\delta h(t_i)$ – случайная ошибка измерений с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_i^2 = \sigma_0^2 / P_i$.

Зависимость параметра λ от времени t может быть представлена алгебраическим полиномом k -й степени

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i, \quad k < n, \quad (2.16)$$

где a_i – неизвестные постоянные коэффициенты разложения.

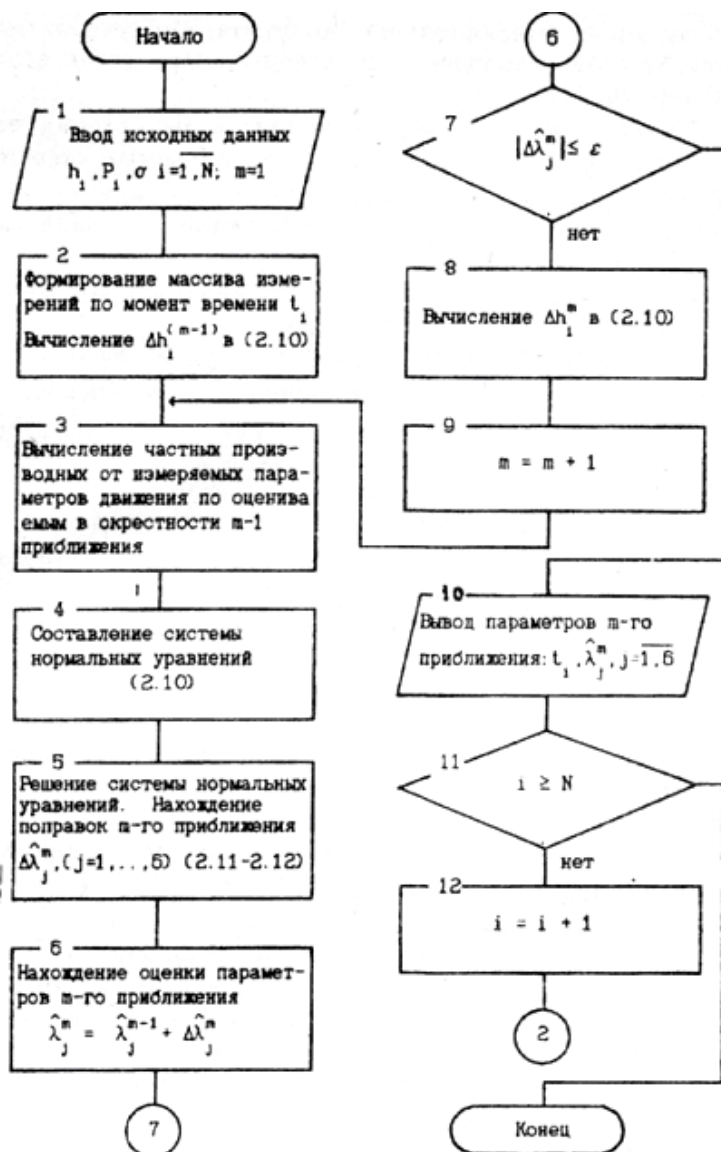


Рис. 2.6. Алгоритм обработки траекторной информации по методу наименьших квадратов в сечении

Произведем оценку неизвестных коэффициентов $a_i (i = \overline{0, k})$. Для этого в соответствии с методом наименьших квадратов потребуем, чтобы взвешенная сумма квадратов ошибок

$$F = \sum_{i=1}^N P_i [\lambda(t_i) - h(t_i)]^2 \quad (2.17)$$

была минимальна.

Для решения поставленной задачи найдем частные производные от выражения (2.16) по всем параметрам $a_0, a_1, \dots, a_k$. Приравняв их к нулю, получим $k + 1$ линейных алгебраических уравнений с $k + 1$ неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_0} &= 2 \sum_{i=1}^N P_i [a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots + a_k t_i^k - h(t_i)] = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=1}^N P_i [a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots + a_k t_i^k - h(t_i)] t_i = 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial F}{\partial a_k} &= 2 \sum_{i=1}^N P_i [a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \dots + a_k t_i^k - h(t_i)] t_i^k = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^N P_i + a_1 \sum_{i=1}^N P_i t_i + \dots + a_k \sum_{i=1}^N P_i t_i^k &= \sum_{i=1}^N P_i h(t_i); \\ a_0 \sum_{i=1}^N P_i t_i + a_1 \sum_{i=1}^N P_i t_i^2 + \dots + a_k \sum_{i=1}^N P_i t_i^{k+1} &= \sum_{i=1}^N P_i h(t_i) t_i; \\ &\dots \dots \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^N P_i t_i^k + a_1 \sum_{i=1}^N P_i t_i^{k+1} + \dots + a_k \sum_{i=1}^N P_i t_i^{2k} &= \sum_{i=1}^N P_i h(t_i) t_i^k. \end{aligned} \right\} \quad 2.19$$

В результате решения системы (2.18) получим оценки искоемых коэффициентов $\hat{a}_i$ и соответственно параметра $\lambda(t)$ в виде

$$\hat{\lambda}(t_j) = \sum_{i=0}^k \hat{a}_i t_j^i, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.20)$$

Алгоритм решения системы (2.18) при фиксированном объеме выборки N и заданной степени полинома k представлен на рис. 2.7. В основе алгоритма лежит методика решения системы методом исключения Гаусса [5].

Выбор степени аппроксимирующего полинома – один из основных в рассматриваемой методике. Если кривая $\hat{\lambda}(t)$ слишком проста, то большие расхождения между кривой и экспериментальными точками могут быть неверно истолкованы как плохие, даже если экспериментальные данные прекрасны. Если же кривая $\hat{\lambda}(t)$ слишком сложна, то она будет близко отслеживать не только истинные изменения экспериментальных значений, но и случайные флуктуации, что может привести к неправильному впечатлению о высокой точности результатов. В этом можно убедиться, используя для решения задачи аппроксимации экспериментальных данных фиксированного объема программу МНК, меняя каждый раз показатель степени k . Строгое математическое обоснование выбора степени аппроксимирующего полинома базируется на критерии Фишера [3]. При изменении степени полинома задачу приходится решать каждый раз заново. От этого свободен алгоритм, основанный на аппроксимации при помощи ортогональных полиномов.

Аппроксимация параметров движения центра масс ЛА ортогональными полиномами Чебышева. Пусть зависимость параметра λ от времени t представлена линейной комбинацией ортогональных полиномов Чебышева $\Phi_0(t), \Phi_1(t), \dots, \Phi_k(t)$.

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^k a_i \Phi_i(t). \quad (2.21)$$

Общий вид полиномов Чебышева [3]:

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) = t^m - \frac{\sum_{i=0}^N t^m \Phi_{m-1}(t)}{\sum_{i=0}^N \Phi_{m-1}^2(t)} \Phi_{m-1}(t) - \\ - \frac{\sum_{i=0}^N t^m \Phi_{m-2}(t)}{\sum_{i=0}^N \Phi_{m-2}^2(t)} \Phi_{m-2}(t) - \dots - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N t_i^m. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ортогональные полиномы Чебышева при $m \neq \ell$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^N \Phi_m(t_i) \Phi_\ell(t_i) = 0, \quad (2.23)$$

благодаря чему очень удобны для вычислений.

Составим сумму квадратов отклонений значений полинома (2.20) от измерений параметра $\lambda(t)$ в точках t ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$F = \sum_{i=0}^N \left[\sum_{r=0}^K a_r \Phi_r(t) - h(t_i) \right]^2. \quad (2.24)$$

Минимизация (2.23) приводит к системе $k + 1$ линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_0} &= 2 \sum_{i=1}^N [a_0 \Phi_0(t_i) + a_1 \Phi_1(t_i) + \dots + a_k \Phi_k(t_i) - h(t_i)] \Phi_0(t_i) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=1}^N [a_0 \Phi_0(t_i) + a_1 \Phi_1(t_i) + \dots + a_k \Phi_k(t_i) - h(t_i)] \Phi_1(t_i) = 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial F}{\partial a_k} &= 2 \sum_{i=1}^N [a_0 \Phi_0(t_i) + a_1 \Phi_1(t_i) + \dots + a_k \Phi_k(t_i) - h(t_i)] \Phi_k(t_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

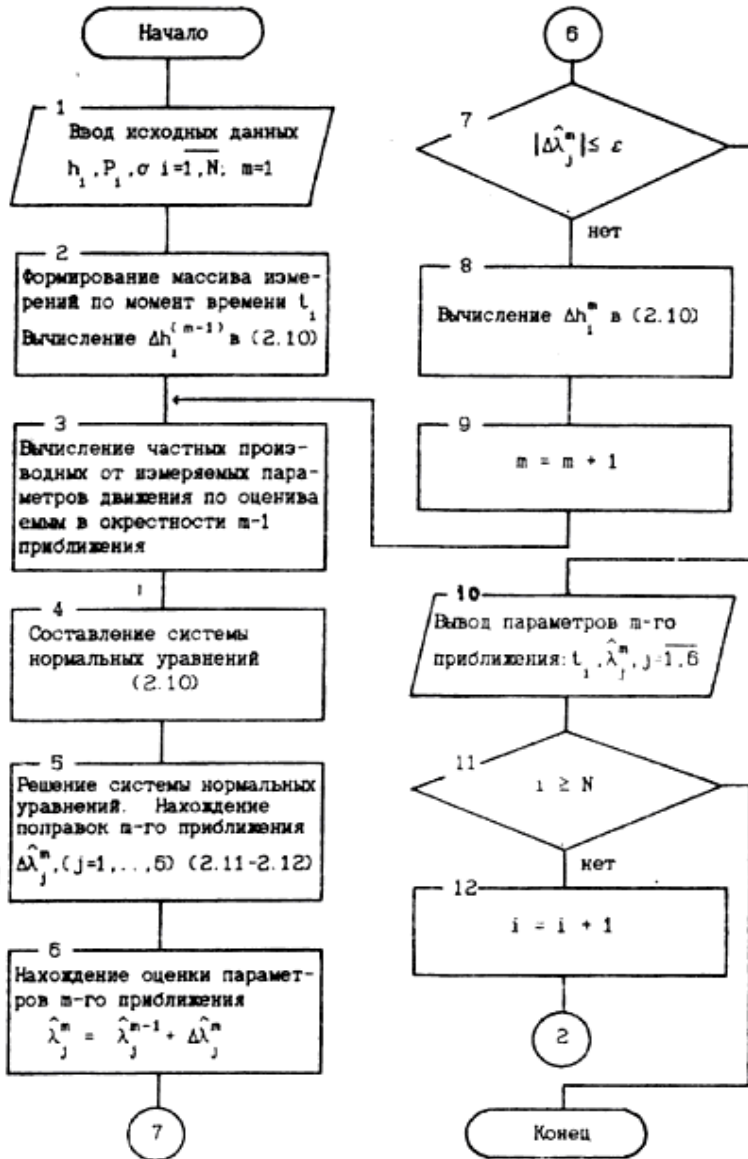


Рис. 2.7. Алгоритм аппроксимации параметров движения центра масс ЛА алгебраическим полиномом

Перепишем (2.24) в виде:

$$\left. \begin{aligned} & a_0 \sum_{i=1}^N \Phi_0^2(t_i) + a_1 \sum_{i=1}^N \Phi_1(t_i) \Phi_0(t_i) + \dots + a_k \sum_{i=1}^N \Phi_k(t_i) \Phi_0(t_i) = \sum_{i=1}^N h(t_i) \Phi_0(t_i); \\ & a_0 \sum_{i=1}^N \Phi_0(t_i) \Phi_1(t_i) + a_1 \sum_{i=1}^N \Phi_1^2(t_i) + \dots + a_k \sum_{i=1}^N \Phi_k(t_i) \Phi_1(t_i) = \sum_{i=1}^N h(t_i) \Phi_1(t_i); \\ & \dots \\ & a_0 \sum_{i=1}^N \Phi_0(t_i) \Phi_k(t_i) + a_1 \sum_{i=1}^N \Phi_1(t_i) \Phi_k(t_i) + \dots + a_k \sum_{i=1}^N \Phi_k^2(t_i) = \sum_{i=1}^N h(t_i) \Phi_k(t_i). \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

В соответствии с условиями ортогональности (2.22) система (2.25) распадается на $k + 1$ независимых уравнений

$$a_j \sum_{i=1}^N \Phi_j^2(t_i) = \sum_{i=1}^N h(t_i) \Phi_j(t_i), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (2.27)$$

из которых оценка коэффициентов запишется как

$$\hat{a}_r = \frac{\sum_{i=1}^N h(t_i) \Phi_j(t_i)}{\sum_{i=1}^N \Phi_j^2(t_i)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Алгоритм решения задачи представлен на рис. 2.8. Программа реализующая методику, состоит из следующих основных частей [6]:

приведение сетки экспериментальных значений к интервалу $(-1, 1)$;

составление нормальной системы;

решение нормальной системы;

вычисление достигнутой величины эмпирического риска.

При этом автоматически осуществляется оптимизация степени полинома и построение аппроксимирующей кривой.

Следует отметить, что выбор кривых для описания экспериментальных данных является одним из основных вопросов. Различные подходы обсуждаются в [3, 4, 6]. Рассмотрим, в частности, алгоритм построения аппроксимирующей кривой с

учетом разбиения всего множества экспериментальных данных на несколько подмножеств.

Аппроксимация параметров движения центра масс ЛА на основе критериев минимума смещения. Критерий минимума смещения требует, чтобы отклонения от аппроксимирующей зависимости носили возможно более случайный характер и, следовательно, чтобы детерминированная зависимость, определяющая уравнение аппроксимирующей кривой, возможно более полно учитывала систематические изменения, содержащиеся в экспериментальных данных [4].

Для автоматизированного анализа больших объемов экспериментальной информации подходит вариант критерия минимума смещения, основанный на вычислении отношения сумм квадратов. Все множество G экспериментальных точек разбивается на $n \in G$ подмножеств, например, на два.

Кривая одного и того же типа используется для описания экспериментальных данных трижды: один раз для описания всех данных и затем для описания данных, входящих в каждое подмножество.

Суммы квадратов отклонений, получаемые в результате таких операций, характеризуют относительное смещение, присущее проверяемому классу кривых. Выберем аппроксимирующую кривую из данного класса для описания всего множества экспериментальных данных, а также подмножеств. Введем обозначения:

S' – сумма квадратов отклонений экспериментальных значений от значений аппроксимирующей кривой;

S'' – сумма квадратов отклонений экспериментальных значений, вычисленная для обоих подмножеств, от значений аппроксимирующей кривой.

В качестве характеристики того смещения, которое имеет место при описании экспериментальных данных с помощью кривой данного класса, берем отношение полной суммы квадратов отклонений к сумме парциальных сумм квадратов отклонений:

$$B = \frac{S'}{S''}. \quad (2.28)$$

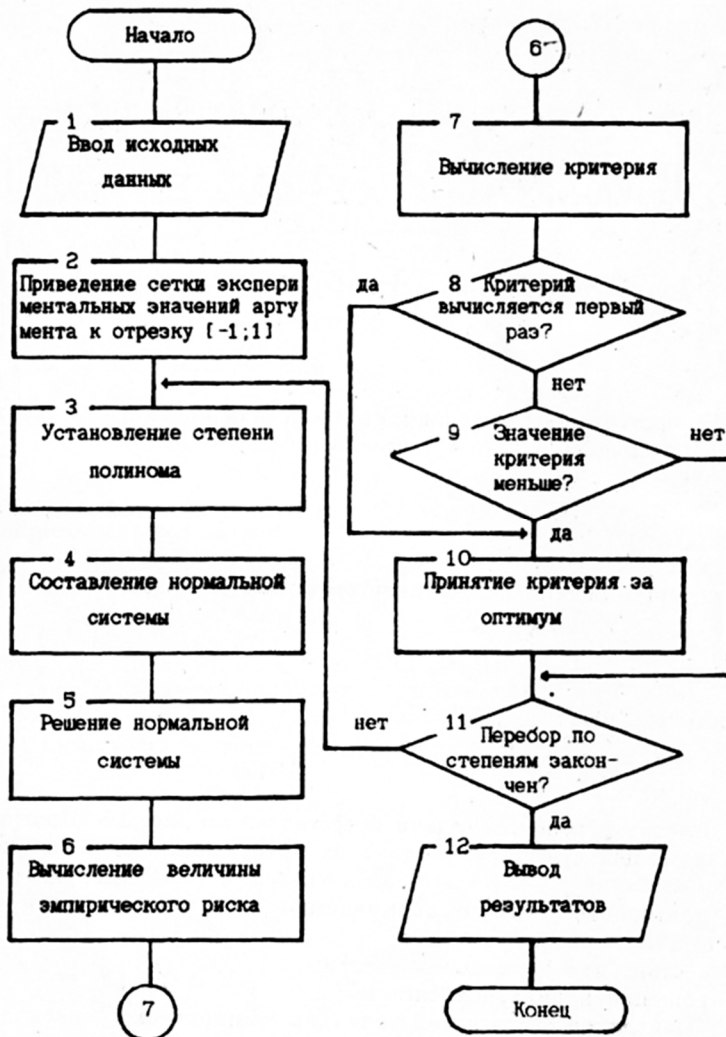


Рис. 2.8. Алгоритм аппроксимации параметров движения центра масс ЛА полиномами Чебышева

Из (2.28) следует, что для кривых подходящего класса S' стремится к S'' , независимо от уровня флуктуаций, содержащихся в экспериментальных данных.

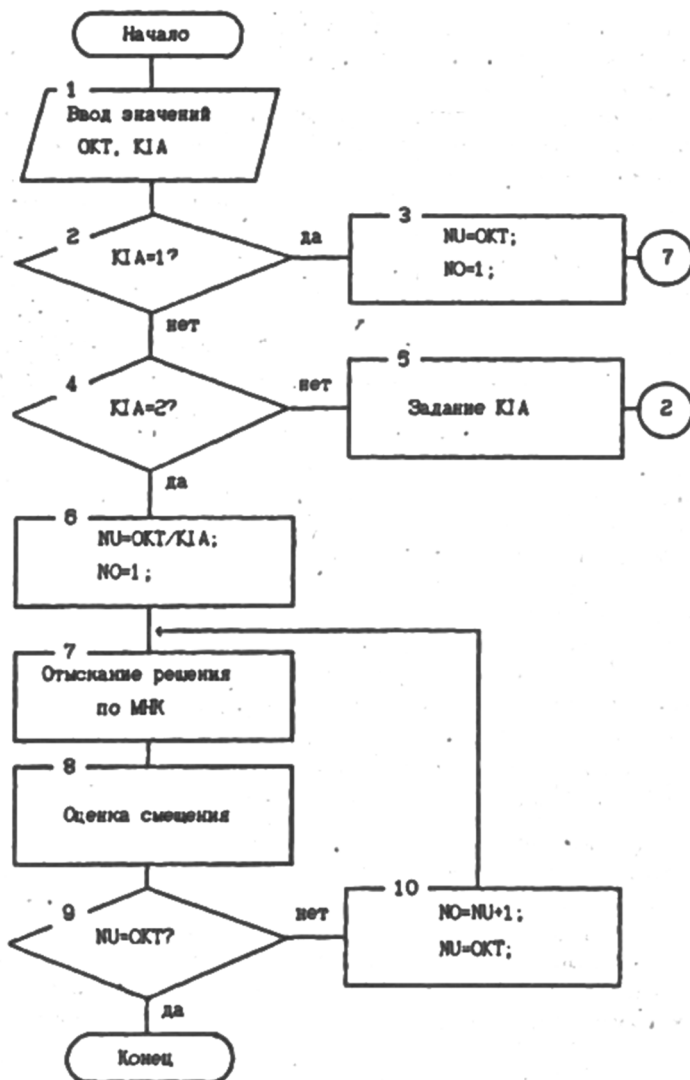


Рис. 2.9. Алгоритм аппроксимации параметров движения центра масс ЛА на основе критерия минимума смещения

Используя параметр B можно из нескольких кривых выбрать кривую с минимальным B либо кривую для которой $B < K$, где K – заданное наперед число. Алгоритм аппроксимации параметров движения ЛА на основе критерия минимума смещения приведен на рис. 2.9.

2.4. Равномерное приближение функций многочленами С. Н. Бернштейна

В задачах восстановления процесса, описываемого некоторой функцией (в частности, задачах обработки траекторных измерений), часто требуется по измерениям в конечном наборе моментов времени построить другую функцию, дающую представление о поведении процесса на конечном временном интервале. Для этой цели удобно использовать так называемые многочлены Бернштейна. Приводимые далее утверждения показывают, что представление функции ее многочленом Бернштейна дает невысокую точность, но с увеличением числа измерений гарантировано более точное представление функции в отличие, например, от многочленов Лагранжа. Кроме того, многочлены Бернштейна сохраняют многие свойства аппроксимирующей функции, а их производные приближают производные функции.

Рассмотрим основные сведения о равномерном приближении функций многочленами Бернштейна и их свойства для эффективного использования в представленных задачах.

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ задана функция $f(x)$. Ее многочленом Бернштейна называется многочлен

$$B_n(f; x) = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n f\left(2 \frac{l}{n} - 1\right) C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l}. \quad (2.29)$$

Установим факт равномерного приближения функции $f(x)$ последовательностью многочленов Бернштейна $\{B_n(f; x)\}$. Для этой цели докажем лемму.

Лемма 1. Для любого n выполняется

$$\frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \equiv 1, \quad (2.30)$$

а для $n \geq l$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left(2 \frac{l}{n} - 1\right) C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \equiv 1, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left(2 \frac{l}{n} - 1\right)^2 C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \equiv \\ & \equiv \frac{n-1}{n} (x+1)^2 - 2 \frac{n-1}{n} (x+1) + 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Доказательство

Учитывая, что

$$\frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \equiv \frac{1}{2^n} ((x+1)(1-n))^n \equiv \frac{1}{2^n} 2^n = 1,$$

получаем тождество (2.30).

Далее с учетом (2.30)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left(2 \frac{l}{n} - 1\right) C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=1}^n \frac{l}{n} C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (x+1)^{k+1} (1-x)^{(n-1)-k} - 1 \equiv \\ & \equiv (x+1) \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (x+1)^k (1-x)^{(n-1)-k} - 1 \equiv (x+1) - 1 \equiv x. \end{aligned}$$

Тем самым доказано тождество (2.31).

Наконец, используя (2.30) и (2.31), имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left(2 \frac{l}{n} - 1 \right)^2 C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \equiv \\
 & \equiv \frac{1}{2^n} 4 \sum_{k=0}^n \frac{l^2}{n^2} C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} - \\
 & - 4 \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \frac{l}{n} C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} + 1 \equiv \\
 & \equiv \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} C_{n-1}^k (x+1)^{k+1} (1-x)^{(n-1)-k} - 2(x+1) + 1 \equiv \\
 & \equiv \frac{(n-1)(x+1)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^{n-2} n-1} C_{n-1}^k (x+1)^k (1-x)^{(n-1)-k} + \\
 & + \frac{2}{n} (x+1) - 2(x+1) + 1 \equiv \frac{(x-1)}{n} (n+1)^2 - 2 \frac{(n-1)}{n} (x+1) + 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, тождество (2.32) также установлено. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему о равномерном приближении многочленами Бернштейна функции $f(x)$ и одновременно получим оценку приближения.

Теорема 2.1. Для любой функции $f(x) \in Lip(1, L)$, $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \varepsilon(n) = \frac{L}{\sqrt{n}}.$$

(2.33)

До к а з а т е л ь с т в о

Запишем, используя (2.30),

$$\begin{aligned}
 |f(x) - B_n(f; x)| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left(f(x) - f\left(2 \frac{l}{n} - 1 \right) \right) C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left| f(x) - f\left(2 \frac{l}{n} - 1 \right) \right| C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \leq \\
 &\leq L \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left| x - \left(2 \frac{l}{n} - 1 \right) \right| C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \leq
 \end{aligned}$$

по неравенству Гельдера и (2.30)

$$\leq L \left(\frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \left(x - \left(2 \frac{l}{n} - 1 \right) \right)^2 C_n^l (x+1)^l (1-x)^{n-l} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

с учетом (2.30) – (2.32)

$$\begin{aligned} &= L \left(x^2 - 2x^2 + \frac{n-1}{n} (x+1)^2 - 2 \frac{n-1}{n} (x+1) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= L \left(-x^2 + \frac{n-1}{n} x^2 + 2 \frac{n-1}{n} x + \frac{n-1}{n} - 2 \frac{n-1}{n} x - 2 \frac{n-1}{n} x + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= L \left(-\frac{1}{n} x^2 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{L}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \varepsilon(n) = \frac{L}{\sqrt{n}}.$$

Что и доказывает теорему.

Замечание

Известно, что для липшецевых функций порядок приближения равен 2, т. е. существуют многочлены, которые приближают липшецевые функции так, что входят в оценку со степенью -2. В этом смысле многочлены Бернштейна далеки от идеальных, но они обладают рядом замечательных свойств, которые будут приведены далее.

Теорема 2.2. Если $k \leq n$, то

$$B_n^{(k)}(f; x) = \frac{k!}{2^n} C_n^k \sum_{l=0}^{n-k} \Delta_{\frac{2}{n}}^k \left(f, 2 \frac{l}{n} - 1 \right) C_{n-k}^l (x+1)^l (1-x)^{n-l-k}, \quad (2.34)$$

$$\text{где } \Delta_{\frac{2}{n}}^k \left(f, 2 \frac{l}{n} - 1 \right) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} C_n^m f \left(2 \frac{l+m}{n} - 1 \right).$$

Доказательство

Первая производная $B_n^{(l)}(f; x)$ находится следующим образом:

$$\begin{aligned} B_n^{(k)}(f; x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=1}^n f\left(2\frac{l}{n}-1\right) C_n^l l (x+1)^{l-1} (-x+1)^{n-1} - \\ &- \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n-1} f\left(2\frac{l}{n}-1\right) C_n^l (n-l) (x+1)^l (1-x)^{n-1-l} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n-1} \left[f\left(2\frac{l+1}{n}-1\right) (l+1) C_n^{l+1} - \right. \\ &\left. - f\left(2\frac{l}{n}-1\right) (n-l) C_n^l \right] (x+1)^l (1-x)^{n-1-l}. \end{aligned}$$

Поскольку $(l+1)C_n^{l+1} = (n-l)C_n^l = nC_{n-1}^l$, то

$$\begin{aligned} B_n^{(l)}(f; x) &= \frac{n}{2^n} \sum_{l=0}^{n-1} \left[f\left(2\frac{l+1}{n}-1\right) - f\left(2\frac{l}{n}-1\right) \right] C_{n-1}^l (x+1)^l \times \\ &\times (1-x)^{n-1-l} = \frac{n!}{2^n} C_n^1 \sum_{l=0}^{n-1} \Delta_{2/n}^1 \left(f, 2\frac{l}{n}-1 \right) C_{n-1}^l (x+1)^l (1-x)^{n-1-l}. \end{aligned}$$

Пусть теперь (2.34) выполняется для некоторого $k < n$; докажем справедливость (2.34) для $k+1$.

$$\begin{aligned} B_n^{(k+1)}(f; x) &= \frac{k!}{2^n} C_n^k \sum_{l=1}^{n-k} \Delta_{2/n}^k \left(f, 2\frac{l}{n}-1 \right) C_{n-k}^l l (x+1)^{l-1} (1-x)^{n-l-k} - \\ &- \sum_{l=0}^{n-k-1} \Delta_{2/n}^k \left(f, 2\frac{l}{n}-1 \right) C_{n-k}^l (n-l-k) (x+1)^l (1-x)^{n-l-k-1} = \\ &= \frac{k!}{2^n} C_n^k \sum_{l=0}^{n-k-1} \left[\Delta_{2/n}^k \left(f, 2\frac{l+1}{n}-1 \right) - \Delta_{2/n}^k \left(f, 2\frac{l}{n}-1 \right) \right] (n-k) \times \\ &\times C_{n-k-1}^l (x+1)^l (1-x)^{n-l-k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $k! C_n^k (n-k) = (k+1)! C_n^{k+1}$ и

$$\Delta_{2/n}^{k+1} \left(f, 2\frac{l}{n}-1 \right) = \Delta_{2/n}^k \left(f, 2\frac{l+1}{n}-1 \right) - \Delta_{2/n}^k \left(f, 2\frac{l}{n}-1 \right),$$

получаем

$$B_n^{(k+1)}(f; x) = \frac{k+1!}{2^n} C_n^{k+1} \sum_{l=0}^{n-k-1} \Delta_{2/n}^{k+1} \left(f, 2 \frac{l}{n} - 1 \right) C_{n-k-1}^l (x+1)^l (1-x)^{n-l-k-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $f(x) \geq 0$, то

$$\Delta_{2/n}^0 \left(f, 2 \frac{l}{n} - 1 \right) = f \left(2 \frac{l}{n} - 1 \right) \geq 0 \quad \text{и} \quad B_n(f; x) \geq 0.$$

Следствие 2. Если $f(x)$ возрастающая функция, то

$$\Delta_{2/n}^1 \left(f, 2 \frac{l}{n} - 1 \right) \geq 0 \quad \text{и} \quad B_n^{(1)}(f; x) \geq 0;$$

это означает, что для возрастающей функции ее многочлен Бернштейна возрастает на отрезке $[-1, 1]$.

Следствие 3. Если $f(x)$ выпукла вниз на $[-1, 1]$, то

$$\Delta_{2/n}^2 \left(f, 2 \frac{l}{n} - 1 \right) \geq 0 \quad \text{и} \quad B_n^{(2)}(f; x) \geq 0,$$

т. е. выпуклость вниз функции $f(x)$ влечет выпуклость вниз ее многочлена Бернштейна.

Докажем еще один факт. Если $f(-x) = f(x)$ для $x \in [-1, 1]$, то

$$B_n(f; -x) = B_n(f; x), \quad \text{для } x \in [-1, 2].$$

Имеем

$$\begin{aligned} B_n(f; -x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n f \left(2 \frac{l}{n} - 1 \right) C_n^l (-x+1)^l (1-(-x))^{n-l} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f \left(2 \frac{n-k}{n} - 1 \right) C_n^{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^k = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f \left(1 - 2 \frac{k}{n} \right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $f(-x) = f(x)$, получаем $B_n(f; -x) = B_n(f; x)$.

Аналогично доказывается, что если функция $f(x)$ нечетна, то и $B_n(f; x)$ нечетный.

Большой интерес для практики представляют следующие утверждения.

Теорема 2.3. Если для любого n $B_n(f; x) \geq 0, x \in [-1, 1]$, то $f(x) \geq 0$ для $x \in [-1, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим

$$f(x) = f(x) - B_n(f; x) + B_n(f; x) \geq \varepsilon(n) = -\frac{L}{\sqrt{n}}, \text{ т. е. } f(x) = -\frac{L}{\sqrt{n}}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем $f(x) \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.4. Если для любого n многочлены $B_n(f; x)$ возрастают на отрезке $[-1, 1]$, то функция $f(x)$ не убывает при $x \in [-1, 1]$.

Доказательство

Пусть $x_1 < x_2$.

Запишем

$$f(x_1) - f(x_2) = [f(x_1) - B_n(f; x_1)] + [B_n(f; x_2) - f(x_2)] + [B_n(f; x_1) - B_n(f; x_2)].$$

В силу теоремы 3.2 и возрастания $B_n(f; x)$ при любом n получаем

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 2\varepsilon(n) = \frac{2L}{\sqrt{n}}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, заключаем, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е: Так же просто доказывается, что из убывания всех многочленов Бернштейна следует невозрастание функции $f(x)$.

Теорема 2.5. Если для любого n $B_n(f; -x) = B_n(f; x), x \in [-1, 1]$, то $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$.

Доказательство

Рассмотрим

$$\begin{aligned} |f(-x) - f(x)| &= |f(-x) - f(x) - B_n(f; -x) + B_n(f; x)| \leq \\ &\leq |f(-x) - B_n(f; -x)| + |f(x) - B_n(f; x)| \leq \frac{2L}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Как и ранее, устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем $|f(-x) - f(x)| = 0$, т. е. $f(-x) = f(x)$. Теорема доказана

З а м е ч а н и е: Нечетность функции $f(x)$ при условии нечетности всех $B_n(f; x)$ доказывается аналогично. Для этого следует рассмотреть $|f(-x) + f(x)|$.

Теорема 2.6. Если для любого n $B_n(f; x)$ выпуклый вниз на $[-1, 1]$, то $f(x)$ выпукла вниз для $x \in [-1, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Выпуклость $B_n(f; x)$ означает, что

$$(1-\lambda)B_n(f; x_1) + \lambda B_n(f; x_2) - B_n(f; (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq 0$$

для любых $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Поэтому

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - (1-\lambda)f(x_1) - \lambda f(x_2) &\leq \\ &\leq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - B_n(f; (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + \\ &+ (1-\lambda)(B_n(f; x_1) - f(x_1)) + \lambda(B_n(f; x_2) - f(x_2)). \end{aligned}$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - (1-\lambda)f(x_1) - \lambda f(x_2) &\leq \\ &\leq \varepsilon(n) + (1-\lambda)\varepsilon(n) + \lambda\varepsilon(n) = \frac{2L}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ и $\lambda \in [0, 1]$, т.е. $f(x)$ выпукла вниз.

Теорема доказана.

Приведем без доказательства очень важное свойство многочленов Бернштейна.

Теорема 2.7. Если $f(x)$ имеет непрерывные производные порядка m включительно на $[-1, 1]$, то $|f^{(k)}(x) - B_n^{(k)}(f; x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, равномерно для всех $k = 0, 1, \dots, m$.

Подытожим изложенные факты. Многочлены Бернштейна равномерно приближают функции, удовлетворяющие условию Липшица, но порядок приближения далек от теоретически возможного. Однако этот недостаток компенсируется тем, что многочлены Бернштейна сохраняют многие важные свойства функции:

- а) знакопостоянство (следствие 1 и теорема 4);
- б) монотонность (следствие 2 и теорема 5);
- в) выпуклость (следствие 3 и теорема 7);
- г) четность-нечетность (теорема 6).

Производные многочленов Бернштейна равномерно приближают производные функции (теорема 8).

Укажем теперь иное представление многочленов Бернштейна, удобное для практического использования. Вспоминая теорему 3 и используя разложение функций в ряд Тейлора в точке $x = -1$, получаем

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k}} C_n^k \Delta_{\frac{2}{n}}^k(f, -1)(x+1)^k, \quad (2.35)$$

$$\text{где } \Delta_{\frac{2}{n}}^k(f, -1) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} C_k^m f\left(2 \frac{m}{n} - 1\right).$$

Многочлены Бернштейна, представленные в виде (2.35), в частности, легче дифференцировать и интегрировать.

Контрольные вопросы:

1. Определение ортогональных многочленов.
2. Полиномы Бернштейна.
3. Полиномы Чебышева.
4. Полиномы Лаггера.
5. Алгоритм аппроксимации параметров движения центра масс ЛА на основе критерия минимума смещения.
6. Метод наименьших квадратов.

3. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

При решении задачи идентификации параметров нестационарных систем каждую компоненту вектора $x(t)$ представляют в виде многочлена

$$X(t) = \sum_{i=0}^n a_i P_i(t), \quad (3.1)$$

где a_i – коэффициенты Фурье, а $P_i(t)$ – ортогональные многочлены, заданные на отрезке $[a, b]$. При этом задача оценки переменных параметров сводится к задаче оценки постоянных коэффициентов. Но такой подход при автоматизированной обработке измерений не является рациональным, так как для решения задачи приходится сначала накапливать информацию до полной выборки, по которой затем осуществляется оценка постоянных коэффициентов, а уже в последнюю очередь производится расчет переменных коэффициентов. Короче говоря, при таком подходе затруднена процедура оценки переменных параметров объекта в темпе с поступлением информации.

3.1. Аппроксимация статических моделей решением системы однородных дифференциальных уравнений

Известно [1–4], что наиболее эффективным методом обработки измерений, позволяющим автоматизировать решение задачи, является метод, использующий фильтры Калман-Бьюси. Но для его реализации необходимо знать достаточно точную динамическую модель объекта, чтобы не допустить расходимости алгоритма [1]. Динамические модели объектов испытаний ЛА, как правило, очень сложны и содержат большое количество неопределенных факторов. Это фактически исключает практическое использование фильтров Калмана-Бьюси при обработке результатов телеметрических и траекторных измерений.

В настоящей главе предлагается метод аппроксимации статической модели (3.1) динамической в пространстве состояний,

который позволяет решить задачу применения фильтров Калмана-Бьюси при обработке результатов измерений в темпе их поступления. Метод основан на использовании известных свойств ортогональных многочленов. В частности, для классических ортогональных многочленов Якоби, Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева, Лягерра и Эрмита справедлива рекуррентная формула

$$P_{n+1}(t) = (A_n \cdot t + B_n)P_n(t) - C_n P_{n-1}(t), \quad (3.2)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{K_{n+1}}{K_n}, \quad B_n = A_n(r_{n+1} - r_n), \quad r_n = \frac{K_{n'}}{K_n}, \\ C_n &= \frac{K_{n+1}K_{n-1}h_n}{K_n^2 h_{n-1}}, \quad h_n = \int_a^b P_n(t)dt \\ C_n &= \frac{K_{n+1}K_{n-1}h_n}{K_n^2 h_{n-1}}, \quad h_n = \int_a^b P_n(t)dt, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $K_{n'}$ – коэффициент при t^{n-1} , K_n – коэффициент при t^n в полиноме $P_n(t)$.

Использование (3.2) позволяет аппроксимировать (3.1) решением системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка. В этой связи справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Если функция $X(t)$ на интервале $[a, b]$ допускает представление (3.1) по системе ортогональных многочленов, удовлетворяющих равенству (3.2), то она может быть аппроксимирована решением системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A \cdot P(t) \\ X(t) &= a \cdot P(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$P^T(t) = |P_0(t)P_1(t)\dots P_n(t)|. \quad (3.5)$$

$$a = |a_0 a_1 \dots a_n| . \quad (3.6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{10} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n_0} & \alpha_{n_1} & \dots & \alpha_{n_{n-1}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

при начальных условиях

$$P^T(0) = |P_0(0)P_1(0)\dots P_{n(0)}| . \quad (3.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Для доказательства будем использовать равенство (3.2), придавая $n = 0, 1 \dots, j \dots$

Известно, что для всех многочленов

$$P_0(t) = const .$$

Поэтому

$$\dot{P}_0(t) = 0 . \quad (3.9)$$

При $n = 0$, $P_{n-1}(t) = 0$ из (3.2) следует, что

$$P_1(t) = (A_0 t + B_0)P_0(t) . \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.10), получим

$$\dot{P}_1(t) = A_0 P_0(t), \quad P_1(0) = B_0 P_0(0) . \quad (3.11)$$

При $n = 1$ имеем

$$P_2(t) = (A_1 t + B_1)P_1(t) - C_1 P_0(t) . \quad (3.12)$$

$$P_2(0) = B_1 P_1(0) - C_1 P_0(0) . \quad (3.13)$$

Дифференцирование (3.12) дает

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + (A_1 t + B_1) \dot{P}_1(t). \quad (3.14)$$

Подставляя в (3.14) выражение (3.11), найдем

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + (A_1 t + B_1) A_0 P_0(t). \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) перепишем в виде

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + A_1 (A_0 t + \frac{B_1 A_0}{A_1}) P_0(t) \quad (3.16)$$

Прибавив к правой части и отняв величину $A_1 B_0 P_0(t)$, получим

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + A_1 (A_0 t + B_0) P_0(t) + (B_1 A_0 - A_1 B_0) P_0(t). \quad (3.17)$$

Учитывая (3.10), окончательно будем иметь

$$\dot{P}_2(t) = \alpha_{21} P_1(t) + \alpha_{20} P_0(t), \quad (3.18)$$

где

$$\alpha_{21} = 2A_1,$$

$$\alpha_{20} = B_1 A_0 - B_0 A_1, \quad (3.19)$$

При $n = 2$ из (2.30) следует

$$P_3(t) = (A_2 t + B_2) P_2(t) - c_2 P_1(t). \quad (3.20)$$

$$P_3(0) = B_2 P_2(0) - c_2 P_1(0). \quad (3.21)$$

Дифференцирование (3.20) дает

$$\dot{P}_3(t) = A_2 P_2(t) + (A_2 t + B_2) \dot{P}_2(t) - C_2 \dot{P}_1(t). \quad (3.22)$$

Подставляя в (3.22) (3.11) и (3.18), получим

$$\dot{P}_3(t) = A_2 P_2(t) + \alpha_{21} * (A_1 t + B_2) P_1(t) + \alpha_{20} (A_2 t + B_2) P_0(t) - \alpha_{10} C_2 P_0(t) \quad (3.23)$$

Это выражение приводится к виду

$$\dot{P}_3(t) = A_2 P_2(t) + \alpha_{21} \frac{A_2}{A_1} (A_1 t + \frac{B_2 A_1}{A_2}) P_1(t) + \frac{A_2}{A_0} (A_0 t + \frac{B_2 A_0}{A_2}) \alpha_{20} P_0(t) - \alpha_{10} C_2 P_0(t) \quad (3.24)$$

Прибавив и отняв величины $\frac{A_2}{A_1} (B_1 \alpha_{21} P_1(t))$, $\frac{\alpha_{20} A_2 B_0 P_0(t)}{A_1}$

после преобразования получим

$$P_3(t) = A_2 P_2(t) + \frac{A_2}{A_1} (\frac{B_2 A_1}{A_2} - B_1) \alpha_{21} P_1(t) + \alpha_{21} \frac{A_2}{A_1} (A_1 t + B_1) P_1(t) + \alpha_{20} \frac{A_2}{A_1} * (A_0 t + B_0) P_0(t) + \alpha_{20} \frac{A_2}{A_1} (\frac{B_2 A_0}{A_2} - B_1) * P_0(t) - \alpha_{10} C_2 P_0(t) \quad (3.25)$$

Прибавляя и отнимая теперь величину $\alpha_{21} \frac{A_2}{A_1} C_1 P_0(t)$ и учитывая равенства (3.10), (3.12), будем иметь

$$P_3(t) = (A_2 + \alpha_{21} \frac{A_2}{A_1}) P_2(t) + \left[\alpha_{20} \frac{A_2}{A_0} + \alpha_{21} (B_2 - \frac{A_2}{A_1} B_1) \right] P_1(t) + (\alpha_{21} \frac{A_2 c_1}{A_1} + \alpha_{20} \frac{B_2 A_0 - B_0 A_2}{A_2} - \alpha_{10} c_2) P_0(t) \quad (3.26)$$

Отсюда следует

$$P_3(t) = \alpha_{32} P_2(t) + \alpha_{31} P_1(t) + \alpha_{30} P_0(t), \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{32} &= A_2 + \alpha_{21} \frac{A_2}{A_1} . \\ \alpha_{31} &= \alpha_{20} \frac{A_2}{A_0} + \alpha_{21} \frac{B_2 A_1 - A_2 B_1}{A_1} . \\ \alpha_{30} &= \alpha_{21} \frac{A_2 C_1}{A_1} + \alpha_{20} \frac{B_2 A_0 - B_0 A_2}{A_0} - \alpha_{10} C_2 .\end{aligned}\quad (3.28)$$

Аналогично для $n = 3$ можем записать

$$\dot{P}_4(t) = \alpha_{40} P_0(t) + \alpha_{41} P_1(t) + \alpha_{42} P_2(t) + \alpha_{43} P(t), \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{40} &= \alpha_{31} \frac{A_3 C_1}{A_1} + \alpha_{30} \left(B_3 - B_0 \frac{A_3}{A_0} \right) - C_3 \alpha_{20} . \\ \alpha_{41} &= \alpha_{30} \frac{A_3}{A_0} - \alpha_{31} \left(B_3 - B_1 \frac{A_3}{A_0} \right) + \alpha_{32} \frac{A_3 C_2}{A_2} - \alpha_{21} C_3 . \\ \alpha_{42} &= \alpha_{31} \frac{A_3}{A_1} + \alpha_{32} \left(B_3 - B_2 \frac{A_3}{A_0} \right) . \\ \alpha_{43} &= A_3 + \alpha_{32} \frac{A_3}{A_2} .\end{aligned}\quad (3.30)$$

Продолжая описанную процедуру для любого $(j + 1)$ будем иметь

$$\dot{P}_{j+1}(t) = \alpha_{j+1,0} P_0(t) + \alpha_{j+1,1} P_1(t) + \dots + \alpha_{j+1,j} P_j(t) . \quad (3.31)$$

Объединяя уравнения (3.31) при $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, получим систему уравнений (3.4), в которой коэффициенты матрицы (3.7) будут определяться выражениями

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{10} &= A_0, \alpha_{20} = B_1 A_0 - B_0 A_1, \alpha_{21} = 2A_1 \\
 \alpha_{j+1,0} &= \alpha_{j,0} \frac{A_j c_1}{A_1} + \alpha_{j,0} \left(B_j - B_0 \frac{A_j}{A_0} \right) - \alpha_{j-1,0} C_j \\
 &\vdots \\
 \alpha_{j+1,i} &= \alpha_{j,i+1} \frac{A_j C_{i+1}}{A_{i+1}} + \alpha_{j-1} \left(B_j - B_i \frac{A_j}{A_i} \right) + \alpha_{j-1} \frac{A_j}{A_{i-1}} - \\
 &\quad - \alpha_{j-1,i} c_j, \quad (i = 1, 2, \dots, j-2) \\
 &\vdots \\
 \alpha_{j+1,j-1} &= \alpha_{j,j-2} \frac{A_j}{A_{j-2}} + \alpha_{j,j-1} \left(B_j - B_{j-1} \frac{A_j}{A_{j-1}} \right) \\
 \alpha_{j+1,j} &= A_j + \alpha_{j,j-1} \frac{A_j}{A_{j-1}}, \quad (j = 2, 3, \dots, n-1)
 \end{aligned} \right\} \cdot (3.32)$$

Учитывая, что матрица A нижняя треугольная, переходная матрица состояний будет равна

$$\Phi(t, t_0) = E + \sum_{i=1}^{n-1} A^i \frac{(t-t_0)^i}{i!}. \quad (3.33)$$

Тогда решение системы (3.4) запишется в виде

$$X(t) = a \cdot \Phi(t, t_0) P(0). \quad (3.34)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что решение (3.34) совпадает с (3.1). Таким образом, теорема доказана.

3.2. Преобразование уравнения статической модели к уравнениям в пространстве состояний

Непосредственное использование системы (3.4) невозможно в силу того, что неизвестна строка a . В результате при построении динамической модели идентифицируемой системы в последней будет неизвестной матрица вывода. Это значит, что алгоритм фильтра Калмана при обработке измерений реализовать невозможно. Однако это затруднение легко можно преодолеть, преобразуя систему (3.4) к эквивалентной системе вида [5, 6].

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A^T \xi(t), \\ X(t) &= h \cdot \xi(t),\end{aligned}\tag{3.35}$$

в которой $\xi(0)$ – вектор состояний, а $h=[1 \ 0 \ \dots \ 0]$. В этом случае неопределенность системы (3.35) будет заключаться в начальных условиях $\xi(0)$, которые будут неизвестны. Тогда задача оценки параметров системы (3.4) будет сведена к задаче оценки начальных условий $\xi(0)$ для системы (3.35).

Известно, что для эквивалентности систем (3.4) и (3.35) по выходу необходимо и достаточно, чтобы существовало эквивалентное преобразование

$$P(t) = Q \cdot \xi(t),\tag{3.36}$$

где Q – квадратная невырожденная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$.

Покажем, что матрица Q существует и может быть определена однозначно. Подставляя (3.36) в (3.4), получим

$$\begin{aligned}Q \cdot \dot{\xi}(t) &= A \cdot Q \xi(t), \\ X(t) &= a \cdot Q \xi(t).\end{aligned}\tag{3.37}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= Q^{-1} A Q \xi(t), \\ X(t) &= a \cdot Q \xi(t).\end{aligned}\tag{3.38}$$

Очевидно, что системы (3.35) и (3.38) эквивалентны, если выполняются равенства

$$\begin{aligned} A^T &= Q^{-1} A \cdot Q, \\ h &= a \cdot Q \end{aligned} \quad (3.39)$$

или

$$\begin{aligned} QA^T &= A \cdot Q, \\ h &= a \cdot Q. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Запишем матрицу Q по столбцам, а матрицу A^T по элементам.

Тогда будем иметь

$$Q \cdot \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{10} & \alpha_{20} & \cdots & \alpha_{n0} \\ 0 & 0 & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = A[q_0 q_1 \dots q_n]. \quad (3.41)$$

$$|100 \dots 0| = a|q_0 q_1 \dots q_n|. \quad (3.42)$$

Очевидно, что умножение матрицы Q на первый столбец матрицы A^T дает нулевой столбец, который будет равен произведению матрицы A на столбец q_0 , т. е. из (3.41) и (3.42) для столбца q_0 имеем систему

$$\begin{aligned} Aq_0 &= 0_{n+1}, \\ aq_0 &= 1. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Аналогично

$$Q \begin{vmatrix} \alpha_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} = Aq_1, \quad aq_1 = 0. \quad (3.44)$$

Из (2.324) следует, что

$$Aq_1 = \alpha_{10}q_0, \quad aq_1 = 0. \quad (3.45)$$

Для столбца q_2 система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} Aq_2 &= \alpha_{20}q_0 + \alpha_{21}q_1, \\ aq_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Таким образом, для любого $j \geq 1$ из (3.41) и (3.42) можем записать уравнения

$$\begin{aligned} Aq_j &= \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{ij}q_i, \\ aq_j &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Каждая пара уравнений (3.43) и ((3.47) образует систему алгебраических уравнений с $(n + 1)$ неизвестными. Поэтому эти уравнения нетрудно решить методом наименьших квадратов.

Действительно, из (3.43) следует

$$\left| A^T : a^T \right| \cdot \left| \frac{A}{a} \right| q_0 = \left| A^T : a^T \right| \begin{vmatrix} 0_{(n+1)} \\ \dots \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (3.48)$$

Отсюда находим

$$q_0 = [A^T A + a^T a]^{-1} a^T. \quad (3.49)$$

В свою очередь из (3.45) находим

$$\left| A^T : a^T \right| \cdot \left| \frac{A}{a} \right| q_1 = \left| A^T : a^T \right| \begin{vmatrix} \alpha_{10}q_0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (3.50)$$

Решение системы (3.50) имеет вид

$$q_1 = [A^T A + a^T a]^{-1} \alpha_{10} A^T q_0. \quad (3.51)$$

Из (3.51) видно, что столбец q_1 может быть определен только после определения столбца q_0 .

Аналогично для системы (3.50) имеем

$$\left| A^T : a^T \right| \cdot \left| \frac{A}{a} \right| q_2 = \left| A^T : a^T \right| \begin{vmatrix} \alpha_{20} q_0 + \alpha_{21} q_1 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (3.52)$$

Отсюда находим

$$q_2 = [A^T A + a^T a]^{-1} A^T (\alpha_{20} q_0 + \alpha_{21} q_1). \quad (3.53)$$

Продолжая описанную процедуру, любой j -й столбец матрицы Q определим выражением

$$q_j = [A^T A + a^T a]^{-1} A \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{ji} q_i, \quad (j = \bar{1}, \bar{n}). \quad (3.54)$$

Получив, таким образом, матрицу Q , начальные условия для системы (3.35) нетрудно найти по формуле

$$\xi(0) = Q^{-1} P(0). \quad (3.55)$$

Из (3.54) видно, что все столбцы матрицы Q могут быть определены, если матрица $[A^T A + a^T a]$ положительно определена. В этой связи докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. Если $a_n \neq 0$, то

$$\det |A^T A + a^T a| > 0.$$

Доказательство:

Определим произведение $A^T A$, используя (3.35)

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_{i0}^2 & \sum_{i=1}^n \alpha_{i0} \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{n0} \alpha_{n,n-1} & \vdots & 0 \\ \sum_{i=2}^n \alpha_{i1} \alpha_{i0} & \sum_{i=2}^n \alpha_{i1}^2 & \cdots & \alpha_{n1} \alpha_{n,n-1} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,n-1} \alpha_{n0} & \alpha_{n,n-1} \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,n-1}^2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Учитывая, что произведение столбца на строку дает матрицу и, обозначив элементы матрицы (3.56) через k_{ij} , получим

$$\det[A^T A + a^T a] = \det \begin{bmatrix} k_{11} + a_0^2 & k_{12} + a_0 a_1 & \cdots & k_{1n} + a_0 a_{n-1} & \vdots & a_0 a_n \\ k_{21} + a_1 a_0 & k_{22} + a_1^2 & \cdots & k_{2n} + a_1 a_{n-1} & \vdots & a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} + a_{n-1} a_0 & k_{n2} + a_{n-1} a_1 & \cdots & k_{nn} + a_{n-1}^2 & \vdots & a_{n-1} a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_0 & a_n a_1 & \cdots & a_n a_{n-1} & \vdots & a_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Вынесем из каждой строки и каждого столбца по элементу a_i , а затем из каждой строки отнимем последнюю.

Тогда получим

$$\det[A^T A + a^T a] = \prod_{i=0}^n a_i^2 \det \begin{bmatrix} \frac{k_{11}}{a_0^2} & \frac{k_{12}}{a_0 a_1} & \cdots & \frac{k_{1n}}{a_0 a_{n-1}} & 1 \\ \frac{k_{21}}{a_1 a_0} & \frac{k_{22}}{a_1^2} & \cdots & \frac{k_{2n}}{a_1 a_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

В (3.48) вычтем из каждой строки по одному элементу $\frac{1}{a_i} (i = \overline{0}, \overline{n-1})$, а затем из каждого столбца по одному элементу, после преобразований будем иметь

$$\det[A^T A + a^T a] = a_n^2 \det \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} & \vdots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & & k_{nn} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_0 & a_1 & & a_{n-1} & \vdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Раскрывая определитель (3.59) по элементам последнего столбца, получим

$$\det[A^T A + a^T a] = a_n^2 \det \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Матрица К образована произведением треугольных матриц ранга следовательно

$$\det[A^T A + a^T a] = a_n^2 \det|k| = a_n^2 \det|A_{-1}^T A_{-1}|, \quad (3.61)$$

где

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n_{n-1}} \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Поэтому

$$\det[A^T A + a^T a] = a_n^2 \det A_{-1}^Y \det A_{-1}. \quad (3.63)$$

Учитывая (3.62), окончательно получим

$$\det[A^T A + a^T a] = a_n^2 \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{i,i-1}^2 \right)^2 = a_n^2 \prod_{i=1}^n \alpha_{i,i-1}^2 > 0. \quad (3.64)$$

Поскольку для любого полинома, включая и ряд Тейлора $\alpha_{i,i-1} > 0 \quad i = \overline{1, n}$, то неравенство $\det[A^T A + a^T a] > 0$ будет выполняться только при $a_n \neq 0$. Теорема доказана.

Приведенные результаты доказывают лишь существование матрицы Q , но при неизвестной строке a определить ее не представляется возможным. Однако этот факт не является существенным в силу того, что при практических расчетах представляется возможным использовать модель (3.35) с неизвестными начальными условиями и известными матрицами перехода A^T и вывода h , а не уравнения (2.32) с неизвестной матрицей вывода.

3.3. Идентификация линейных нестационарных систем, как задача наблюдения

Пусть модель линейной нестационарной системы приведена к виду

$$y(t) = F(t)X(t) + V(t), \quad (3.65)$$

где $F(t)$ известная матрица, $V(t)$ – помеха, $X(t)$ – вектор неизвестных параметров.

Предположим, что каждая компонента вектора $X(t)$ допускает аппроксимацию дифференциальными уравнениями вида (3.35). Тогда, вводя расширенные вектор и матрицы

$$\xi^T(t) = \left| \xi_1^T(t) \xi_2^T(t) \dots \xi_m^T(t) \right|. \quad (3.66)$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & h_m \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & A_m \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A \cdot \xi(t) \\ y(t) &= C(t)\xi(t) \end{aligned}, \quad (3.69)$$

где

$$C(t) = F(t) \cdot H. \quad (3.70)$$

Идентифицируемость системы (3.65) доказывается следующей теоремой.

Теорема 3.3. Если для каждой компоненты вектора $X(t)$ выполнены условия теоремы 3.1, то линейная нестационарная система (3.65) идентифицируема на интервале $[t_0, t_k]$ тогда и только тогда когда расширенная однородная система (3.69) полностью наблюдаема на интервале $[t_0, t_k]$, т. е. когда матрица

$$M(t_0, t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \Phi^T(t, t_0) F^T(t) F(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (3.71)$$

положительно определена для $t_k > l$

Достаточность докажем следующим образом. В соответствии с (3.69), полагая, что ошибки измерений отсутствуют, находим

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\xi_0, \quad (3.72)$$

умножая (3.72) на $\Phi^T(t, t_0)c^T(t)$ и интегрируя по t на интервале $[t_0, t_k]$, получим

$$\int_{t_0}^{t_k} \Phi^T(t, t_0)C^T(t)y(t)dt = \int_{t_0}^{t_k} \Phi^Y(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt\xi_0. \quad (3.73)$$

Отсюда с учетом (3.71) следует

$$\hat{\xi}_0 = M^{-1}(t_k, t_0) \int_{t_0}^{t_k} \Phi^T(t, t_0)C^T(t)y(t)dt. \quad (3.74)$$

Из (3.74) видно, что для определения вектора начальных условий $\hat{\xi}_0$ достаточно, чтобы система (3.69) была наблюдаемой. Этому же условия достаточно для того, чтобы идентифицировать вектор $\hat{x}(t)$, поскольку в соответствии с (3.35) для любой j -ой компоненты справедливо решение

$$\hat{X}_j(t) = h_1 \Phi_j^T(t, t_0) \hat{\xi}_{j0}, \quad (3.75)$$

где

$$\Phi_j^T(t, t_0) = E + \sum_{i=1}^{n_{j-1}} (A_j)^i \frac{(t-t_0)^i}{i!}. \quad (3.76)$$

Покажем, что этого условия достаточно, чтобы определить любую j -ую компоненту в виде

$$\hat{X}_j(t) = \hat{a}_j P(t). \quad (3.77)$$

Для того, чтобы получить оценку в виде (3.77) при известном векторе $\hat{\xi}_j(0)$ необходимо осуществить обратный переход от системы (3.35) к системе (2.32). Этот переход осуществим из уравнений (3.39), так как

$$a = h \cdot Q^{-1}, \quad A^T Q^{-1} = Q^{-1} \cdot A. \quad (3.78)$$

Здесь и далее для сокращения записи индекс j опущен.

Из (3.78) видно, что для определения a необходимо найти обратную матрицу эквивалентного преобразования. Для этой цели воспользуемся (3.55), дополнив его системой (3.78). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} A^T Q^{-1} &= Q^{-1} A \\ \hat{\xi}(0) &= Q^{-1} P(0) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Записав матрицу Q^{-1} по строкам

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

будем иметь

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{10} & \alpha_{20} & \cdots & \alpha_{n0} \\ 0 & 0 & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_0(0) \\ \hat{\xi}_1(0) \\ \vdots \\ \hat{\xi}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} P(0). \quad (3.82)$$

После перемножения матриц получим

$$r_0 A = \sum_{i=1}^n \alpha_{i0} r_i \quad (3.83)$$

$$\hat{\xi}_0(0) = r_0 \cdot P(0)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 A &= \sum_{i=2}^n \alpha_{i1} r_i \\ \hat{\xi}_1(0) &= r_1 P(0) \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{n-1} \cdot A &= \alpha_{n,n-1} r_n \\ \xi_{n-1}(0) &= r_{n-1} P(0) \end{aligned} \right\}. \quad (3.85)$$

$$\left. \begin{aligned} r_n \cdot A &= 0_n \\ \xi_n(0) &= r_n P(0) \end{aligned} \right\}. \quad (3.86)$$

Из (3.86) имеем

$$r_n [A \dot{ : } P(0)] = [0_n \dot{ : } \hat{\xi}_n(0)]. \quad (3.87)$$

Система (3.87) представляет собой систему $(n_j + 2)$ уравнений с $(n_j + 1)$ неизвестным. Поэтому из (3.87) находим, что

$$r_n = \hat{\xi}_n(0) P^T(0) [A A^T + P(0) P^T(0)]^{-1}. \quad (3.88)$$

Аналогично (3.85) запишем

$$r_{n-1} [A \dot{ : } P(0)] = [\alpha_{n,n-1} r_n \dot{ : } \hat{\xi}_n(0)]. \quad (3.89)$$

Отсюда находим, что

$$r_{n-1} [\alpha_{n,n-1} r_n \cdot A^T + \hat{\xi}_n(0) P^T(0)] [A A^T + P(0) P^T(0)]^{-1}. \quad (3.90)$$

Продолжая описанную процедуру, для любого $j \leq n-1$ будем иметь

$$r_j = \left[\sum_{i=j+1}^n \alpha_{ij} r_i A^T + \hat{\xi}_j(0) P^T(0) \right] [A A^T + P(0) P^T(0)]^{-1}. \quad (3.91)$$

При этом $\hat{r}_0$ будем определять выражением

$$\hat{r}_0 = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{i0} r_i A^T + \hat{\xi}_0(0) P^T(0) \right] [A A^T + P(0) P^T(0)]^{-1} \quad (3.92)$$

из первого уравнения (3.78) окончательно находим, что

$$\hat{a}_0 = \hat{r}_0. \quad (3.93)$$

Таким образом, начальные условия $\hat{\xi}(0)$ системы (3.35) полностью определяют коэффициенты ряда Фурье. Этим самым доказывается, что для идентифицируемости системы (3.65) достаточно, чтобы расширенная система (3.69) была наблюдаема.

Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что система (3.65) является идентифицируемой, а следовательно, система (3.69) – полностью наблюдаемой, но матрица $M(t_k, t_0)$ не является положительно определенной, т. е. для некоторого вектора $\hat{\xi}(0) \neq 0$

$$\hat{\xi}^T(0)M(t_k, t_0)\hat{\xi}(0) = 0. \quad (3.94)$$

В силу (3.73) это означает, что

$$\hat{\xi}^T(0) \int_{t_0}^{t_k} \Phi^T(t, t_0) c^T(t) y(t) dt = 0. \quad (3.95)$$

Подставляя в (3.95) уравнение (3.72), получаем

$$\int_{t_0}^{t_k} y^T(t) y(t) dt = 0. \quad (3.96)$$

Отсюда следует, что

$$y(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_k.$$

Таким образом, существует отличное от нуля состояние $\hat{\xi}(0)$, которое нельзя определить, зная $y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_k$, что противоречит предположению о наблюдаемости расширенной системы, а значит и об идентифицируемости системы (3.65). Теорема доказана.

Учитывая, что в практике обработки результатов измерений в основном используются ЭВМ, то для получения машинных алгоритмов достаточно записать модели (3.65) и (3.69) в дискретной форме

$$y(k) = F(k)X(k) + V(k). \quad (3.97)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi(k+1) &= \Phi \cdot \xi(k) \\ y(k) &= C(k)\xi(k) + V(k) \end{aligned} \right\}, \quad (3.98)$$

где каждый диагональный блок матрицы Φ определяется рядом

$$\Phi_j = E + \sum_{i=1}^{n_{j-1}} (A_j^T)^i \frac{T^i}{i!}, \quad (3.99)$$

T – период дискретизации измерений.

В этом случае оценка вектора состояний $\hat{\xi}(0)$ будет равна

$$\hat{\xi}(0) = M^{-1}(N) \sum_{k=1}^N (\Phi^k)^T C^T(k) y(k), \quad (3.100)$$

где

$$M(N) = \sum_{k=1}^N (\Phi^k)^T C^T(k) C(k) \Phi^k, \quad (3.101)$$

Оценка любой j -ой компоненты вектора $X(k)$ будет соответственно равна

$$\hat{X}_j(k) = h_j \Phi_j^k \hat{\xi}_j(0). \quad (3.102)$$

Следовательно, и в данном случае справедлива теорема.

Теорема 3.4. Линейная дискретная нестационарная система (3.97) идентифицируема на интервале $[0, N]$ тогда и только тогда, когда расширенная однородная дискретная система (3.98) полностью наблюдаема на интервале $[0, N]$, т. е. когда матрица

$$M(N) = \sum_{k=1}^N (\Phi^k)^T C^T(k) C(k) \Phi^k$$

положительно определена для некоторого $N > 0$. Доказательство аналогично доказательству теоремы (3.3).

Из выражений (3.88) ÷ (3.93) видно, что обратный переход (2.35) возможен только в том случае, если матрица

$[AA^T + P(0)P^T(0)]$ положительно определена. Поэтому по аналогии с (3.55) докажем следующую теорему.

Теорема 3.5. Если $P_0(0) \neq 0$, то

$$\det[AA^T + P(0)P^T(0)] > 0. \quad (3.103)$$

Доказательство. По аналогии с (3.57) можем записать

$$\det[AA^T + P(0)P^T(0)] = \begin{bmatrix} P_0^2(0) & P_0(0)P_1(0) & \cdots & P_0(0)P_n(0) \\ P_1(0)P_0(0) & S_{11} + P_1^2(0) & \cdots & S_{1n} + P_1(0)P_n(0) \\ P_2(0)P_0(0) & S_{21} + P_2(0)P_1(0) & \cdots & S_{2n} + P_2(0)P_n(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(0)P_0(0) & S_{n1} + P_n(0)P_1(0) & \cdots & S_{nn} + P_n^2(0) \end{bmatrix}, \quad (3.104)$$

где с учетом (3.62) обозначено

$$S = A_{-1}A_{-1}^T = \begin{bmatrix} \alpha_{10}^2 & \alpha_{10}\alpha_{20} & \cdots & \alpha_{10}\alpha_{n0} \\ \alpha_{20}\alpha_{10} & \alpha_{20}^2 + \alpha_{21}^2 & \cdots & \alpha_{20}\alpha_{n0} + \alpha_{21}\alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n0}\alpha_{10} & \alpha_{n0}\alpha_{20} + \alpha_{n1}\alpha_{21} & \cdots & \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{n,i-1}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

Будем считать, что все элементы вектора $P(0)$ не равны нулю. Вынесем из каждой строки и каждого столбца по одному элементу $P_i(0) (i = \bar{0}, \bar{n})$, а затем из каждой строки вычтем первую.

Тогда получим

$$\det[AA^T + P(0)P^T(0)] = \prod P_i^2(0) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{S_{11}}{P_1^2(0)} & \cdots & \frac{S_{1n}}{P_1(0)P_n(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{S_{n1}}{P_n(0)P_1(0)} & \cdots & \frac{S_{nn}}{P_n^2(0)} \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Из (3.106) после преобразований, аналогичных (3.59) следует, что

$$\det[AA^T + P(0)P^T(0)] = P^2(0) \det \begin{bmatrix} 1 & P_1(0) & \cdots & P_n(0) \\ 0 & S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & S_{n1} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Раскрывая (3.107) по элементам первого столбца, получим

$$\det[AA^T + P(0)P^T(0)] = P_2^0(0) \det S_0. \quad (3.108)$$

Отсюда с учетом (3.105) находим

$$\det[AA^T + P(0)P^T(0)] = P_0^2(0) \det[A_{-1}A_{-1}^T] = P_0^2(0) \prod_{i=1}^n \alpha_{ii-1} \quad (3.109)$$

Поскольку для любого полинома, включая и ряд Тейлора $\alpha_{i,i-1} \neq 0$ ($i = \overline{0, n}$), то неравенство (3.103) будет выполняться только при $P_0(0) \neq 0$.

Теорема доказана.

Следует иметь в виду, что для всех ортогональных многочленов, а также для степенных функций $P_0(0) = 1$. Поэтому для

всех полиномов преобразование (3.79) существует, и матрица Q^{-1} при этом определяется однозначно.

При практических расчетах совершенно очевидно, что необходимости в определении матрицы Q^{-1} нет. Достаточно знания того, что матрица Q^{-1} существует. Это позволяет при решении задач идентификации сразу представлять модель системы (3.65) в виде (3.69) и только при необходимости определения оценки вектора-строки коэффициентов ряда для каждой компоненты, можно по оценкам начальных условий матрицу Q^{-1} по формулам (3.88) ÷ (3.92). Оценки же неизвестных коэффициентов ряда нетрудно определить по формуле (3.93).

Приведенные результаты дают достаточно строгое математическое обоснование перехода от задачи оценки коэффициентов аппроксимирующего полинома к задаче оценки начального состояния. В то же время преобразование статической модели системы к динамической в пространстве состояний открывает широкие возможности применения фильтров Калмана-Бьюси при решении практических задач автоматизированной обработки результатов телеметрических и траекторных измерений в темпе с их поступлением. В число этих задач входят и задачи идентификации параметров нестационарных систем.

3.4. Алгоритм обработки траекторной информации на основе формальных динамических моделей

Рассмотренные ранее алгоритмы аппроксимации параметров движения центра масс алгебраическими или ортогональными многочленами имеют один существенный недостаток: значительное время на обработку, складывающееся из времени накопления всей выборки измерений, времени решения задачи аппроксимации и нахождения коэффициентов многочлена и времени построения кривой по найденным оценкам коэффициентов многочлена.

В настоящем разделе предлагается подход к обработке траекторной информации, основанный на переходе от формальных

статистических моделей (3.1) к формальным динамическим моделям.

Положим, что модель измерения задана в виде

$$y(t) = Gx(t) + V(t). \quad (3.110)$$

Положим, что измеряемый параметр представлен формальной моделью аппроксимации типа (3.1). Тогда в общем случае зависимость параметра от времени и модель измерения могут быть представлены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^n a_i P_i(t), \\ y(t) &= G(t)x(t) + V(t), \end{aligned} \quad (3.111)$$

где $n < N$ (N – количество обрабатываемых измерений); a_i – коэффициенты Фурье; $P_i(t)$ – ортогональные многочлены, заданные на отрезке $[a, b]$; $G(t)$ – коэффициент наблюдения; $V(t)$ – шумы в канале наблюдения.

Для классических ортогональных многочленов Гегенбауэра, Лежадра, Чебышева, Лаггера, Эрмита и Якоби справедлива рекуррентная формула [8]

$$P_{n+1}(t) = (A_n t + B_n)P_n(t) - C_n P_{n-1}(t), \quad (3.112)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{K_{n+1}}{K_n}; \quad B_n = A_n(r_{n+1} - r_n); \quad r_n = \frac{K'_n}{K_n}; \\ C_n &= \frac{K_{n+1}K_{n-1}h_n}{K_n^2 h_{n-1}}; \quad h_n = \int_a^b P_n(t)dt; \end{aligned}$$

K'_n – коэффициент при t^{n-1} ; K_n – коэффициент при t^n .

Покажем, что использование (3.112) (3.2) позволяет аппроксимировать (3.111) (3.1) решением системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

Теорема 3.6. Если $x(t)$ на отрезке $[a, b]$ допускает представление (3.111) (3.1) по системе ортогональных многочленов (3.112) (3.2), то она может быть аппроксимирована решением системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}(t) &= AP(t); \\ x(t) &= aP(t), \end{aligned} \right\}, \quad (3.113)$$

где

$$\begin{aligned} P^T(t) &= [P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)]; \\ P^T(0) &= [P_0(0), P_1(0), \dots, P_n(0)]; \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{10} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}; \quad a = [a_0, a_1, \dots, a_n].$$

Доказательство

Для доказательства теоремы найдем решение (3.113) (3.2) и покажем, что оно совпадает с (3.111). Заметим, что представление в виде (3.113) сделано не ради того, чтобы определить ортогональные полиномы.

Известно, что для всех многочленов $P_0(t) = \text{const}$ и соответственно, $\dot{P}_0(t) = 0$. Тогда при $n=0$, $P_{n-1}(t) = 0$ и

$$P_1(t) = (A_1 T + B_1) P_0(t). \quad (3.114)$$

Дифференцируя (3.114), получаем

$$\dot{P}_1(t) = A_0 P_0(t), \quad (3.115)$$

где $P_1(0) = B_0 P_0(0)$.

При $n = 1$ имеем

$$P_2(t) = (A_1 t + B_1) P_1(t) - C_1 P_0(t). \quad (3.116)$$

Дифференцируя (3.116), получаем

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + (A_1 t + B_1) \dot{P}_1(t), \quad (3.117)$$

где $P_2(0) = B_1 P_1(0) - C_1 P_0(0)$.

С учетом (3.115) выражение (3.117) запишем в виде

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + (A_1 t + B_1) A_0 P_0(t); \quad (3.118)$$

или

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + A_1 \left(A_0 t + \frac{B_1 A_0}{A_1} \right) P_0(t). \quad (3.119)$$

Преобразуем (3.119) к виду

$$\dot{P}_2(t) = A_1 P_1(t) + A_1 (A_0 t + B_0) P_0(t) + (B_1 A_0 - A_1 B_0) P_0(t). \quad (3.120)$$

С учетом (3.116) окончательно запишем

$$\dot{P}_2(t) = \alpha_{21} P_1(t) + \alpha_{20} P_0(t), \quad (3.121)$$

где $\alpha_{21} = 2A_1$, $\alpha_{20} = B_1 A_0 - B_0 A_1$.

Продолжая аналогичную процедуру для любого $n = j + 1$, получаем выражения для $\dot{P}_{j+1}$

$$P_{j+1}(t) = \alpha_{j+1;0} P_0(t) + \alpha_{j+1;1} P_1(t) + \dots + \alpha_{j+1;j} P_j(t) \quad (3.122)$$

и коэффициентов $\alpha_{j+1;0}, \alpha_{j+1;1}, \dots, \alpha_{j+1;j}$.

Тогда решение (3.115) при известной теперь уже структуре матрицы A запишем в виде

$$x(t) = a \Phi(t, t_0) P(0), \quad (3.123)$$

где $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица состояний.

Нетрудно убедиться, что решение (3.123) совпадает с (3.111) и, следовательно, представление (3.113) вполне справедливо.

И все же мы не пришли к конструктивному концу, ибо в (3.123) по-прежнему неизвестна вектор-строка a . Попробуем перейти от системы (3.113) к эквивалентной системе, например, вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A^T \xi(t); \\ x(t) &= h\xi(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.124)$$

где $\xi(t)$ – вектор состояния; $h = [1, 0, 0, \dots, 0]$; A^T – матрица дифференцирования. Такой переход оправдан тем, что неопределенность системы (3.124) будет заключаться в начальных условиях $\xi(0)$ и задача оценки процесса $x(t)$ будет сведена к задаче оценки начальных условий для системы (3.124).

Известно [11], что эквивалентность систем (3.113) и (3.124) определяется существованием эквивалентного преобразования

$$P(t) = Q\xi(t), \quad (3.125)$$

где Q – невырожденная матрица преобразования.

Таким образом, для решения задачи оценки параметров движения Ла будем использовать соотношения (3.124), которые с учетом уравнения (3.111) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= A^T \xi(t); \\ y(t) &= H(t)\xi(t) + V(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.126)$$

где $H(t) = G(t)h$.

Для цифровой обработки измерений будем рассматривать дискретный алгоритм фильтра Калмана-Бьюси. Будем считать, что модель системы (3.113) преобразована к виду (3.126). Учитывая, что система однородна для данной модели, алгоритм сразу запишем как частный случай, изложенный в [3] для неоднородной системы.

родной системы, на входе которой действует дискретный белый шум

$$\widehat{\xi}(k+1) = \Phi \widehat{\xi}(k) + K(k+1)[y(k+1) - H(k+1)\Phi \widehat{\xi}(k)] : \quad (3.127)$$

$$\left. \begin{aligned} K(k+1) &= P(k+1/k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1/k) \times \\ &\times H(k+1) + D_v(k+1)]^{-1}; \\ P(k+1/k) &= \Phi P(k)\Phi^T; \\ P(k+1) &= [E - K(k+1)H(k+1)]P(k+1/k). \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

При этом оценка вектора $\widehat{x}(k)$ будет равна

$$\widehat{x}(k) = H(k)\widehat{\xi}(k). \quad (3.129)$$

Изложенное распространяется на векторные независимые параметры $x_j(t)$, каждый из которых может быть представлен соотношением (3.124). Тогда, учитывая, что матрица Φ является блочно-диагональной и обозначая

$$H(k) = G(k) \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_m \end{bmatrix} = [C_1(k), C_2(k), \dots, C_m(k)], \quad (3.130)$$

где $C_i(k) = g_i(k)h_i$, ($i = \overline{1, m}$), распишем алгоритм фильтрации в поэлементной форме. Из (3.125) следует

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{\xi}_1(k+1) \\ \widehat{\xi}_2(k+1) \\ \vdots \\ \widehat{\xi}_1(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\xi}_1(k) \\ \widehat{\xi}_2(k) \\ \vdots \\ \widehat{\xi}_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(k+1) \\ k_2(k+1) \\ \vdots \\ k_m(k+1) \end{bmatrix} \times \\ &\times \left\{ y(k+1) - [C_1(k+1), C_2(k+1), \dots, C_m(k+1)] \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\xi}_1(k) \\ \widehat{\xi}_2(k) \\ \vdots \\ \widehat{\xi}_1(k) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Обозначив

$$\gamma(k+1) = y(k+1) - \sum_{i=1}^m C_i(k) \Phi_i \widehat{\xi}_i(k), \quad (3.131)$$

для любого i -го вектора $\widehat{\xi}_i$ имеем

$$\widehat{\xi}_i(k+1) = \Phi_i \widehat{\xi}_i(k) + K_i(k+1) \gamma(k+1). \quad (3.132)$$

Аналогично выводятся и другие уравнения алгоритма фильтрации. Таким образом можно получить сводку уравнений алгоритма фильтра Калмана в поэлементной форме

1. Выражение для оценки i -го вектора состояний

$$\widehat{\xi}_i(k+1) = \widehat{\xi}_i(k+1/k) + k_i(k+1) \gamma_i(k+1), \quad (i = \overline{1, m}).$$

2. Прогноз оценки i -го вектора состояний

$$\widehat{\xi}_i(k+1/k) = \Phi_i \widehat{\xi}_i(k).$$

3. Прогноз оценки вектора неизвестных параметров

$$\widehat{x}(k+1/k) = H \widehat{\xi}(k+1/k).$$

4. Выражение невязки

$$v(k+1) = y(k+1) - F(k+1) \widehat{x}(k+1/k).$$

5. Блоки априорной матрицы ошибок оценивания

$$P_{ji}(k+1/k) = \Phi_i P_{ij}(k) \Phi_j^T, \quad (i, j = \overline{1, m}).$$

6. Блоки матрицы коэффициентов передачи фильтра

$$k_{ij}(k+1) = \sum_{j=0}^m P_{ij}(k+1/k) C_j^T(k+1) \times \\ \times \left[\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^m C_i(k+1) P_{ij}(k+1/k) C_j^T(k+1) + D_v^{-1}(k+1) \right].$$

7. Блоки апостериорной матрицы ошибок оценивания

$$P_{ji}(k+1) = P_{ji}(k+1/k) - k_i(k+1) \sum_{i=1}^m C_i(k+1) P_{ij}(k+1/k).$$

8. Оценка вектора неизвестных параметров

$$\hat{x}(k) = H \hat{\xi}(k).$$

Для решения практических задач необходимо соответствующим образом представить модель системы в виде (3.124) (2.42).

Контрольные вопросы:

1. Понятие идентифицируемости.
2. Условие идентифицируемости систем.
3. Понятие наблюдаемости.
4. Условие наблюдаемости систем.
5. Формула для оценки вектора состояний.
6. Смысл невязки измерений.
7. Уравнения алгоритма фильтрации по Калману.

4. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

4.1. Идентифицируемость линейных однородных систем

Известно, что линейная однородная система описывается уравнением

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A(t) \cdot \xi(t) \\ y(t) &= c(t) \cdot \xi(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $\xi(t)$ - N – мерный вектор состояний; $y(t)$ - m – мерный выходной вектор системы; $A(t)$ - (N×N) – матрица перехода; $c(t)$ - (m×N) – матрица вывода.

Решение системы (1.1) записывается в виде

$$\left. \begin{aligned}\xi(t) &= \Phi(t_1, t_0) \cdot \xi_0 \\ y(t) &= C(t) \cdot \xi(t)\end{aligned}\right\},\tag{4.2}$$

где $\Phi(t_1, t_0)$ – переходная матрица системы, ξ_0 – начальный вектор состояний.

Задача идентифицируемости системы (4.2) связана с возможностью определения переходной матрицы по измерениям векторов $\xi(t)$ и $y(t)$. для дискретных стационарных систем условия идентифицируемости сформулированы в [1]. Можно предположить, что приведенные в [1] условия N-идентифицируемости и I-идентифицируемости для линейных стационарных систем справедливы и для нестационарных. Однако строгого доказательства этого факта в литературе нет. Поэтому этот вопрос изучается в настоящей работе.

Введем следующие определения.

Определение 1. Систему (4.1) будем называть идентифицируемой по состоянию на интервале $[t_0, t_k]$, если при заданных t_0

и t_k переходную матрицу состояний можно определить, зная ξ_0 и текущее значение вектора состояний $\xi(t)$ для любого $t(t_0 \leq t \leq t_k)$.

Определение 2. Систему (4.1) будем называть идентифицируемой по выходу на интервале $[t_0, t_k]$, если при заданных t_0 и t_k переходную матрицу состояний можно определить, зная начальный вектор состояний ξ_0 и текущее значение вектора $y(t)$ для любого t из интервала $t_0 \leq t \leq t_k$.

Рассмотрим теперь условия идентифицируемости системы (4.1) по состоянию, предполагая что на интервале $[t_0, t_k]$ измеряется полностью вектор состояний $\xi(t)$. Поскольку матрица $\Phi(t, t_0)$ размера $(N \times N)$, то для ее определения необходимо составить N^2 уравнений. Для этой цели, считая матрицу $A(t)$ дифференцируемой $(N-1)$ раз, продифференцируем первое уравнение системы (4.2). Очевидно, что

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0)\xi = A(t)\Phi(t, t_0) \cdot \xi_0 \quad (4.3)$$

Дифференцирование (4.3) дает

$$\ddot{\xi}(t) = \dot{A}(t) \cdot \Phi(t, t_0)\xi_0 + A^2(t) \cdot \Phi(t, t_0)\xi_0 = LA^2(t) + \dot{A}(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \xi_0. \quad (4.4)$$

Введем линейный дифференциальный оператор

$$L(t, D) = A(t) + \frac{d}{dt} \quad (4.5)$$

и обозначим

$$L_1(t) = A(t). \quad (4.6)$$

Тогда

$$A^2(t) + \dot{A}(t) = L(t, D) * L_1(t) = L_2(t), \quad (4.7)$$

где $*$ обозначает воздействие дифференциального оператора. В этом случае можем записать

$$\dot{\xi}(t) = L_1(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \xi_0, \quad (4.8)$$

$$\ddot{\xi}(t) = L_2(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \xi_0, \quad (4.9)$$

продолжая описанную процедуру, для любого j будем иметь

$$\xi^{(j)}(t) = L_j(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \xi_0, \quad (4.10)$$

где

$$L_j(t) = L(t, D) * L_{j-1}(t).$$

Таким образом, при $j=N-1$ будем иметь

$$\xi^{(N-1)}(t) = L_{n-1}(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \xi_0. \quad (4.11)$$

Составим теперь матрицу $(N \times N)$ вида

$$S(t) = \begin{vmatrix} \xi(t) & \dot{\xi}(t) & \dots & \xi^{(N-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

С учетом выражений (4.8), (4.9) и (4.11) получим

$$S(t) = \begin{vmatrix} \Phi(t, t_0) \cdot \xi_0 & L_1(t) \cdot \Phi(t, t_0) \xi_0 & \dots & L_{N-1}(t) \cdot \Phi(t, t_0) \xi_0 \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

Это выражение перепишем в виде

$$S(t) = \Phi(t, t_0) \begin{vmatrix} \xi_0 F_1(t, t_0) & \xi_0 \dots F_{N-1}(t) \cdot \Phi(t, t_0) \xi_0 \end{vmatrix}, \quad (4.14)$$

где

$$F_j(t, t_0) = \Phi(t, t_0) L_j(t) \cdot \Phi(t, t_0). \quad (4.15)$$

Обозначим $j = \overline{(1, N-1)}$

$$B(t, t_0) = \left| \xi_0 F_1(t, t_0) \cdot \xi_0 \dots F_{N-1}(t) \xi_0 \right|. \quad (4.16)$$

Тогда

$$S(t) = \Phi(t, t_0) \cdot B(t, t_0). \quad (4.17)$$

Из (4.16) видно, что матрица $B(t, t_0)$ имеет размер $(N \times N)$.

Поэтому

$$\Phi(t, t_0) = S(t) \cdot B^{-1}(t, t_0). \quad (4.18)$$

Действительно, известно, что переходная матрица может быть определена в виде ряда

$$\Phi(t, t_0) = E + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t, t_0), \quad (4.19)$$

где

$$H_i(t, t_0) = \int_{t_0}^t A(\tau_i) \cdot \int_{t_0}^{\tau_i} A(\tau_{i-1}) \dots \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i. \quad (4.20)$$

В этом случае для любого j будем иметь

$$L_j(t) \Phi(t, t_0) = L_j(t) + \sum_{i=1}^{\infty} L_j(t) H_i(t, t_0) \quad (4.21)$$

Для $j = 1$ и для любого i можем записать

$$L_1(t) H_i(t, t_0) = A(t) \cdot \int_{t_0}^t A(\tau_i) \int_{t_0}^{\tau_i} A(\tau_{i-1}) \dots \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_i \quad (4.22)$$

Поскольку $A(t)$ не зависит от переменных интегрирования, то ее можно внести под знак интеграла. Это с учетом выполнения условия коммутативности, дает

$$L_1(t) H_i(t, t_0) = \int_{t_0}^t A(\tau_i) \cdot A(t) \int_{t_0}^{\tau_i} A(\tau_2) \cdot d\tau_1 \dots d\tau_i. \quad (4.23)$$

Последовательный перенос матрицы $A(t)$ по всем подынтегральным выражениям дает

$$L_1(t)H_i(t, t_0) = H_i(t, t_0) \cdot A(t) = H_i(t, t_0) \cdot L_1(t). \quad (4.24)$$

Поскольку (1.24) справедливо для любого i , то

$$L_1(t)\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \cdot L_1(t), \quad (4.25)$$

т. е. если матрица $A(t)$ коммутативна сама с собой, то она коммутативна и с переходной матрицей состояний.

Продифференцируем условие коммутативности по t_2 j -раз, получим

$$\frac{d^j}{dt^j} [A(t_1) \cdot A(t_2)] = A(t_1) \cdot \frac{d^j}{dt^j} A(t_2) = \frac{d^j A(t_2)}{dt^j} \cdot A(t_1). \quad (4.26)$$

Из (1.26) видно, что если матрица $A(t)$ коммутативна, то она коммутативна и с любой j -й производной. С другой стороны, умножим условие коммутативности справа на $A(t_2)$, получим

$$A(t_1) \cdot A^2(t_2) = A(t_2) \cdot A(t_1) \cdot A(t_2) = A^2(t_2) \cdot A(t_1) \quad (4.27)$$

Следовательно, для любого j можем записать, что

$$A(t_1) \cdot A^j(t_2) = A^j(t_2) \cdot A(t_1), \quad (4.28)$$

т. е. коммутативность матрицы $A(t)$ обеспечивает и коммутативность с матрицей в любой j -ой степени. Поскольку $L_j(t)$ представляет собой линейную комбинацию матриц $A(t)$ в различных степенях и ее производных, то нетрудно убедиться, что коммутативность матрицы $A(t)$ обеспечивает в силу (4.26) и (4.28) коммутативность ее с матрицей $L_j(t)$, т. е.

$$L_j(t_1) \cdot A(t_2) = A(t_2) \cdot L_j(t_1),$$

$$L_j(t) \cdot H_i(t, t_0) = H_i(t, t_0) \cdot L_j(t). \quad (4.29)$$

В силу (4.29) можем записать, что

$$L_j(t) \left[E + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t, t_0) \right] = \left[E + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t, t_0) \right] L_j(t). \quad (4.30)$$

Это влечет за собой равенство

$$L_j(t) + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t, t_0) L_j(t) = \Phi(t, t_0) L_j(t) \quad (4.31)$$

Таким образом, для любого j справедливо равенство

$$L_j(t) \Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0) L_j(t) \quad (4.32)$$

Для стационарных систем

$$L_j(t) = A^j. \quad (4.33)$$

Поэтому

$$B = \left| \xi_0 A \xi_0 \dots A^{N-1} \cdot \xi_0 \right|. \quad (4.34)$$

Рассмотрим теперь идентифицируемость по выходу, полагая для простоты $y(t)$ скалярным процессом.

Из (4.12) и (4.18) видно, что для определения матрицы перехода необходимо знать вектор состояний и $(N-1)$ его производных. Для этой цели продифференцируем уравнение наблюдений $(N-1)$ раз, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= [c(t)A(t) + \dot{c}(t)] \cdot \xi(t) = C_1(t) \cdot \xi(t) \\ \ddot{y}(t) &= [c_1(t)A(t) + \dot{c}_1(t)] \cdot \xi(t) = C_2(t) \cdot \xi(t) \\ &\vdots \\ y^{N-1}(t) &= [c_{N-2}(t) \cdot A(t) + C_{N-2}(t)] \cdot \xi(t) = C_{N-1}(t) \cdot \xi(t) \end{aligned} \right\}. \quad (4.35)$$

В этом случае в (4.35) обозначено

$$C_j^T(t) = L^T(t, D) * C_{j-1}^T(t), (j = 1, \overline{N-1}). \quad (4.36)$$

Составим N -вектор $Y_{N-1}(t)$, получим

$$Y_{N-1}(t) = \begin{vmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{N-1}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_{N-1}(t) \end{vmatrix} \cdot \xi(t) \quad (4.37)$$

Обозначив

$$M(t) = \begin{vmatrix} c(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_{N-1}(t) \end{vmatrix}, \quad (4.38)$$

можем записать

$$Y_{N-1}(t) = M(t) \cdot \xi(t). \quad (4.39)$$

Отсюда следует, что

$$\xi(t) = M^{-1}(t) \cdot Y_{N-1}(t). \quad (4.40)$$

Дифференцируя равенство (4.40) $(N-1)$ раз найдем матрицу $S(t)$ в виде

$$S(t) = M^{-1}(t) \cdot Y_{N-1}(t) [M^{-1}(t) \cdot Y_{N-1}(t)]' \dots [M^{-1}(t) \cdot Y_{N-1}(t)]^{N-1}. \quad (4.41)$$

Но матрица $M(t)$ является матрицей наблюдаемости. Следовательно, для идентифицируемости системы (4.1) по выходу необходимо, чтобы матрица $M(t)$ была неособенная на интервале $[t_0, t_k]$. В то же время, как видно из (4.41), обратная матрица $M^{-1}(t)$ должна быть дифференцируемой $(N-1)$ раз на интервале $[t_0, t_k]$, но дифференцируемость матрицы $M^{-1}(t)$ предполагает дифференцируемость и матрицы наблюдаемости. Поэтому при выполнении условия идентифицируемости системы по состоянию необходимым и достаточным условием является то, чтобы матрица наблюдаемости была неособенная и дифференцируема $(N-1)$ раз на интервале $[t_0, t_k]$.

Для стационарных систем матрица наблюдаемости постоянна и равна

$$M = \begin{vmatrix} c \\ c \cdot A \\ \vdots \\ c \cdot A^{N-1} \end{vmatrix}. \quad (4.42)$$

Поэтому

$$S(t) = M^{-1} \left| Y_{N-1}^{(t)} \dot{Y}_{N-1}^{(t)} \dots Y_{N-1}^{(N-1)}(t) \right|, \quad (4.43)$$

что дает

$$\Phi(t, t_0) = M^{-1} \left| Y_{N-1}^{(t)} \dot{Y}_{N-1}^{(t)} \dots Y_{N-1}^{(N-1)}(t) \right| B^{-1} \quad (4.44)$$

Для стационарных систем необходимым и достаточным условием идентифицируемости является то, чтобы матрицы B и M были неособенными.

Приведенные выводы показывают, что наблюдаемость есть свойство двух матриц $A(t)$ и $c(t)$ от времени, нестационарная система (4.1) не может быть идентифицируема по одной реализа-

ции вектора $y(t)$. Обусловлено это тем, что матрица $S(t)$, определяемая выражением (4.41) зависит от неизвестной матрицы наблюдаемости (4.38). Поэтому при практическом решении задачи идентификации однородной системы необходимо проводить серию экспериментов. Причем их число должно быть равно размерности вектора состояний.

Пусть в j -м эксперименте при ξ_{j_0} изменен выходной процесс $y_j(t)$.

Тогда в соответствии с (4.2) можем записать

$$y_j(t) = C(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \xi_{j_0}. \quad (4.46)$$

Дифференцируя (4.46) $(N-1)$ раз, получим

$$\begin{aligned} y_j(t) &= M(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \xi_{j_0} \\ y_j^T(t) &= \left| y_j(t) \dot{y}_j(t) \dots y_j^{N-1}(t) \right| \end{aligned} \quad (4.47)$$

Образуя матрицы (NxN) (при скалярном выходе) вида

$$S(t) = \left| Y_1(t) Y_2(t) \dots Y_N(t) \right|; \quad (4.48)$$

$$B_0 = \left| \xi_{10} \xi_{20} \dots \xi_{N0} \right|. \quad (4.49)$$

будем иметь

$$S(t) = M(t) \Phi(t, t_0) \cdot B_0. \quad (4.50)$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(t, t_0) = M^{-1}(t) S(t) \cdot B_0^{-1}. \quad (4.51)$$

Из (4.51) видно, что и в этом случае одним из условий идентифицируемости системы (4.1) по выходу является ее наблюдаемость. Второе условие идентифицируемости заключается в том, чтобы матрица начальных условий B_0 была невырождена. Это значит, что в практических случаях подбор началь-

ных условий должен быть таким, чтобы строки и столбцы матрицы B_0 были линейно независимы.

Из (4.51) видно, что и в данном случае решение задачи не является окончательным в силу того, что пара $A(t), C(t)$ неизвестна. Однако если использовать серию экспериментов, можно решить задачу идентификации системы, эквивалентной системе (4.1) по выходу.

Дифференцируя (4.50), получим

$$\dot{S}(t) = \dot{M}(t) \Phi(t, t_0) \cdot B_0 + M(t) \cdot A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot B_0. \quad (4.52)$$

Подстановка (4.51) в (4.52) дает

$$\dot{S}(t) = [\dot{M}(t) + M(t) \cdot A(t)] \cdot M^{-1}(t) \cdot S(t). \quad (4.53)$$

Обозначив

$$F(t) = [\dot{M}(t) + S(t)M(t) \cdot A(t)] \cdot M^{-1}(t), \quad (4.54)$$

получим

$$\dot{S}(t) = F(t) \cdot S(t). \quad (4.55)$$

Отсюда следует, что

$$F(t) = \dot{S}(t) \cdot S^{-1}(t). \quad (4.56)$$

Фактически это означает переход от вектора состояний к новому вектору $Y(t)$ с помощью преобразования подобия

$$\xi(t) = M^{-1}(t) \cdot Y(t). \quad (4.57)$$

В этом нетрудно убедиться, подставляя (4.57) в (4.1).

С учетом (4.57) матрица вывода будет равна

$$H(t) = C(t) \cdot M^{-1}(t); \quad (4.58)$$

т. е. путем преобразования координат (4.57) идентификация пары $A(t), C(t)$ заменяется процедурой идентификации эквивалентной пары $F(t), H(t)$.

4.2. Условия идентифицируемости неоднородных систем

Рассмотрим неоднородную линейную систему вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A(t)\xi(t) + B(t)U(t) \\ Y(t) &= C(t) \cdot \xi(t) \end{aligned} \right\}. \quad (4.59)$$

Будем считать, что начальные условия нулевые.

Тогда

$$y(t) = \int_{t_0}^t C(t) \cdot \Phi(t, \tau) B(\tau) \cdot U(\tau) d\tau. \quad (4.60)$$

Как и в случае однородной системы, в данном случае необходимо определить условия идентифицируемости переходной матрицы состояний. Очевидно, что и в данном случае для идентификации системы необходимо провести серию экспериментов, подавая на вход системы тестовые сигналы $U(t)$. В частности, таким сигналом можно принять δ -функцию.

Положив

$$U(t - \tau) = \delta(t - \tau), \quad (4.61)$$

получим

$$y(t, \tau) = W(t, \tau) = C(t) \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau). \quad (4.62)$$

Выражение (4.62) определяется импульсную переходную функцию системы (4.59).

Дифференцируя (4.62) по t для любого j можем записать

$$W_t^{(j)}(t, \tau) = C_j(t) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau), \quad (4.63)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_j(t) &= C_{j-1}^{(i)} + C_{i-1}(t) \cdot A(t) \\ C_0(t) &= C(t) \end{aligned} \right\}. \quad (4.64)$$

Образуя вектор

$$F_1(t, \tau) = \begin{pmatrix} W(t, \tau) \\ W_t(t, \tau) \\ \vdots \\ W_t^{N-1}(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

получим

$$F_1(t, \tau) = M(t) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau); \quad (4.66)$$

где $M(t)$ – матрица наблюдаемости системы (4.38).

Продифференцируем теперь (4.66) по τ ($N-1$)-раз.

Тогда для любого i можно записать

$$F_\tau^{(i)}(t, \tau) = M(t) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot B_i(\tau), \quad (4.67)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B_i(\tau) &= \dot{B}_{i-1}(\tau) - A(\tau) \cdot B_{i-1}(\tau) \\ B_0(\tau) &= B(\tau) \end{aligned} \right\}. \quad (4.68)$$

Введем обозначения

$$\Psi(t, \tau) = \left| F(t, \tau) F_{1\tau}(t, \tau) \dots F_{1\tau}^{N-1}(t, \tau) \right|. \quad (4.69)$$

$$Q(\tau) = \left| B(\tau) B_1(\tau) \dots B_{N-1}(\tau) \right|. \quad (4.70)$$

Тогда будем иметь

$$\Psi(t, \tau) = M(t) \cdot \Phi(t, \tau) \cdot Q(\tau). \quad (4.71)$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(t, \tau) = M^{-1}(t) \cdot \Psi(t, \tau) \cdot Q^{-1}(\tau). \quad (4.72)$$

В силу того, что $M(t)$ – матрица наблюдаемости, а $Q(t)$ – матрица управляемости, то необходимыми условиями идентифицируемости неоднородной системы (4.59) являются наблюдаемость и управляемость системы. Суть требования наблюдаемости аналогична однородной системе. В свою очередь, требования управляемости означают необходимость с помощью входного сигнала $U(t)$ возбуждения всех координат вектора состояний. Очевидно, если $A(t)$ и $B(t)$ неуправляемая пара, то матрицу $\Phi(t, \tau)$ нельзя определить даже в том случае, если можно измерить все компоненты вектора $F(t, \tau)$.

Из (4.72) видно, что в данном случае задача идентификации матрицы $\Phi(t, \tau)$ не решена в конечном счете при известной матрице $\Psi(t, \tau)$ в силу того, что матрицы $M(t)$ и $Q(t)$ неизвестны. Однако и в данном случае возможен переход к эквивалентной системе.

Действительно, дифференцируя (4.71) по t , получим

$$\dot{\Psi}(t, \tau) = [\dot{M}(t) + M(t)A(t)] \cdot \Phi(t, \tau) \cdot Q(\tau). \quad (4.73)$$

Подстановка (4.72) и (4.73) с учетом (4.54) дает

$$\dot{\Psi}(t, \tau) = F(t) \cdot \Psi(t, \tau). \quad (4.74)$$

Отсюда находим

$$F(t) = \Psi(t, \tau) \cdot \Psi^{-1}(t, \tau). \quad (4.75)$$

Выражение (4.75) определяет матрицу перехода эквивалентной по выходу системы. Матрица перехода исходной системы будет равна

$$A(t) = M^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot M(t) - M^{-1}(t) \cdot \dot{M}(t). \quad (4.76)$$

В свою очередь, полагая (4.66) $t = \tau$, найдем

$$B(t) = M^{-1}(t) \cdot F_1(t, t). \quad (4.77)$$

Подстановка (4.76) и (4.77) в уравнение состояний системы (4.59) дает

$$\dot{\xi}(t) = M^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot M(t) \cdot \xi(t) - M^{-1}(t) \cdot \dot{M}(t) \cdot \xi(t) + M^{-1}(t) \cdot F_1(t, t) U(t) \quad (4.78)$$

Умножая слева (4.78) на $M(t)$ после преобразований получим

$$\dot{M}(t) \cdot \xi(t) + M(t) \cdot \dot{\xi}(t) = F(t) \cdot M(t) \cdot \xi(t) + F_1(t) U(t). \quad (4.79)$$

Вводя новый вектор состояний

$$Z(t) = M(t) \cdot \xi(t). \quad (4.80)$$

Уравнение (4.79) перепишем в виде

$$\dot{Z}(t) = F(t) \cdot Z(t) + F_1(t, t) \cdot U(t). \quad (4.81)$$

В свою очередь подстановка (4.80) в уравнение наблюдения системы (4.59) дает

$$y(t) = C(t) \cdot M^{-1}(t) \xi(t). \quad (4.82)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} H &= C(t) \cdot M^{-1}(t), \\ D(t) &= F_1(t, t), \end{aligned} \quad (4.83)$$

окончательно уравнения эквивалентной системы запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}(t) &= F(t)Z(t) + D(t)U(t) \\ y(t) &= H \cdot Z(t) \end{aligned} \right\}. \quad (4.84)$$

Известно, что

$$C(t) \cdot M^{-1}(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.85)$$

Следовательно, в силу равенства (4.75) и (4.83), все матрицы системы (4.84) могут быть определены по результатам экспериментов, в результате которых находится импульсная переходная функция системы и ее производные. Обратный эквивалентный переход позволяет определить $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ исходной системы.

4.3. Идентифицируемость линейных нестационарных дискретных систем

Уравнение однородной дискретной системы записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi(k+1) &= \Phi(k+1, k)\xi(k) \\ y(k) &= C(k) \cdot \xi(k) \end{aligned} \right\}. \quad (4.86)$$

Они получаются путем дискретизации системы (4.2). А это означает, что все результаты, полученные при рассмотрении условий идентифицируемости однородных непрерывных систем, справедливы и для дискретных нестационарных систем. Поэтому в данном разделе рассмотрим только специфические моменты проблемы идентифицируемости системы (4.86). Очевидно, что дискретная нестационарная система в силу зависимости матриц $\Phi(k+1, k)$ и $C(k)$ от k не может быть идентифицирована по одной реализации. Как и в случае непрерывных систем, необходимо провести серию экспериментов при различных начальных условиях.

Рассмотрим условия идентифицируемости по состоянию. Допустим, что проведен один эксперимент при заданной ξ_0 .

В этом случае для любого k имеем

$$\xi(k) = \Phi(k, 0)\xi_0. \quad (4.87)$$

Значения векторов $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(N-1)}$ можно принять в качестве начальных условий для проведения последующих экспериментов. Такой подход позволяет определить соответствующее количество векторов

$$\xi_i(k) = \Phi(k, 0) \xi_i(0) \quad (i=1, N-1) \quad (4.88)$$

Составив матрицы

$$S(k) = \begin{vmatrix} \xi(k) & \xi_1(k) & \dots & \xi_{N-1}(k) \end{vmatrix}, \quad (4.89)$$

$$B_0 = \begin{vmatrix} \xi(0) & \xi_1(k) & \dots & \xi_{N-1}(k) \end{vmatrix}, \quad (4.90)$$

получим

$$S(k) = \Phi(k, 0) \cdot B_0. \quad (4.91)$$

Учитывая, что

$$\xi(i) = \Phi(i, 0) \cdot \xi_0, \quad (4.92)$$

матрицу В можем определить в виде

$$B_0 = \begin{vmatrix} \xi_0 \Phi(1, 0) \xi_0 & \Phi(2, 0) \xi_0 & \dots & \Phi(N-1) \xi_0 \end{vmatrix}. \quad (4.93)$$

Матрицу B_0 назовем матрицей идентифицируемости дискретной системы по состоянию. Очевидно, что решение системы (4.91)

$$\Phi(k, 0) = S(k) B_0^{-1} \quad (4.94)$$

существует, если матрица идентифицируемости неособенная.

В частном случае стационарных систем имеем

$$\Phi(i, 0) = \Phi^{-1}$$

и, следовательно,

$$B_0 = \begin{vmatrix} \xi_0 \Phi \xi_0 & \Phi^2 \xi_0 & \dots & \Phi^{N-1} \xi_0 \end{vmatrix}, \quad (4.95)$$

т. е. получим результат, совпадающий с [1]. Используя уравнение наблюдения для любого j -го вектора начальных условий будем иметь

$$y_i(k) = C(k) \cdot \Phi(k, 0) \cdot \xi_{j0} . \quad (4.96)$$

Составим вектор $y_j(k)$ вида

$$y_j(k) = \begin{vmatrix} y_j(k) \\ y_j(k+1) \\ \vdots \\ y_j(k+N+1) \end{vmatrix} . \quad (4.97)$$

Тогда с учетом (4.96), можем записать

$$y_j(k) = \begin{vmatrix} C(k) \\ C(k+1)\Phi(k+1, k) \\ \vdots \\ C(k+N-1)\Phi(k+N-1, k) \end{vmatrix} \Phi(k, 0) \xi_j(0) . \quad (4.98)$$

Обозначив

$$M(k) = \begin{vmatrix} C(k) \\ C(k+1)\Phi(k+1, k) \\ \vdots \\ C(k+N-1)\Phi(k+N-1, k) \end{vmatrix} , \quad (4.99)$$

получим

$$y_j(k) = M(k) \Phi(k, 0) \cdot \xi_{j0} . \quad (4.100)$$

Если теперь из вектора $y_j(k)$ составим матрицу

$$Z(k) = \begin{vmatrix} y(k) & y_1(k) & \dots & y_{N-1}(k) \end{vmatrix} , \quad (4.101)$$

то можем записать

$$Z(k) = M(k)\Phi(k,0) \cdot B_0. \quad (4.102)$$

Отсюда найдем

$$\Phi(k,0) = M^{-1}(k) \cdot Z(k)B_0^{-1}. \quad (4.103)$$

Из (4.103) видно, что для идентификации матрицы $\Phi(k,0)$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $M(k)$ и B_0 были неособенными. Поскольку матрица B_0 есть матрица идентифицируемости по состоянию, а матрица $M(k)$ – матрица наблюдаемости, то условия идентифицируемости линейной дискретной системы формулируются аналогично условиям идентифицируемости линейных непрерывных систем.

Таким образом, для того, чтобы линейная однородная нестационарная система была идентифицируема по выходу, необходимо и достаточно, чтобы она была наблюдаема и идентифицируемой по состоянию.

Рассмотрим теперь условия идентифицируемости неоднородной системы

$$\left. \begin{aligned} \xi(k+1) &= \Phi(k+1)\xi(k) + B(k)U(k) \\ y(k) &= C(k) \cdot \xi(k) \end{aligned} \right\}. \quad (4.104)$$

Если на вход системы в процессе эксперимента подавать единичный импульс

$$U(k-m) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & \text{при } k=m \\ 0 & \text{при } k \neq m, \end{cases} \quad (4.105)$$

то реакция системы будет представлять собой импульсную переходную функцию

$$W(k, m) = \underset{m=0, k-1}{C(k)} \Phi(k, m+1) \cdot B(m), \quad (4.106)$$

которую можно записать в виде

$$W(k, m) = C(k)\Phi(k,0) \cdot \Phi(0, m+1) \cdot B(m). \quad (4.107)$$

Положив в (4.107) $m = 0$, сформулируем столбец

$$F_1(k,0) = \begin{vmatrix} W(k,0) \\ W(k+1,0) \\ \vdots \\ W(k+N-1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C(k)\Phi(k,0) \cdot \Phi(0,1)B(0) \\ C(k+1)\Phi(k+1,0) \cdot \Phi(0,1)B(0) \\ \vdots \\ C(k+N-1)\Phi(k+N-1,0) \cdot \Phi(0,1) \cdot B(0) \end{vmatrix}. \quad (4.108)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$F_1(k,0) = \begin{vmatrix} C(k) \\ C(k+1)\Phi(k+1,k) \\ \vdots \\ C(k+N-1)\Phi(k+N-1,k) \end{vmatrix} \Phi(k,0) \cdot \Phi(0,1)B(0) \quad (4.109)$$

Учитывая определение матрицы наблюдаемости, получим

$$F_1(k,0) = M(k) \cdot \Phi(k,0) \cdot \Phi(0,1)B(0). \quad (4.110)$$

Очевидно, что при $m = j$, будем иметь

$$F_1(k,j) = M(k) \cdot \Phi(k,0)\Phi(0,j+1)B(j). \quad (4.111)$$

Составим матрицу $(N \times N)$

$$\Psi(k, N-1) = \begin{vmatrix} F_1(k,0) & F_1(k,1) & \dots & F_1(k, N-1) \end{vmatrix}, \quad (4.112)$$

получим

$$\Psi(k, N-1) = M(k) \cdot \Phi(k,0) \cdot Q(N-1), \quad (4.113)$$

где

$$Q(N-1) = \begin{vmatrix} \Phi(0,1)B(0) & \Phi(0,2)B(1) & \dots & \Phi(0,N)B(N-1) \end{vmatrix} - \quad (4.114)$$

матрица управляемости неоднородной системы.

Из (4.113) находим

$$\Phi(k, 0) = M^{-1}(k) \cdot \Psi(k, N-1) Q^{-1}(N-1). \quad (4.115)$$

Отсюда видно, что матрица $\Phi(k, 0)$ может быть определена только в том случае, если матрицы $M(k)$ и $Q(N-1)$ неособенные.

Таким образом, для того, чтобы дискретная неоднородная система была идентифицируема, необходимо и достаточно, чтобы она была наблюдаемой и управляемой.

Если теперь в выражении (4.111) положить $j = k-1$, то можем записать, что

$$F_1(k, k-1) = \begin{vmatrix} W(k, k-1) \\ W(k+1, k-1) \\ \vdots \\ W(k+N-1, k-1) \end{vmatrix} = M(k) \Phi(k, 0) \cdot \Phi(0, k) \cdot B(N-1). \quad (4.116)$$

Так как $\Phi(k, 0) \cdot \Phi(0, k) = E$, будем иметь

$$F_1(k, k-1) = M(k) \cdot F_1(k, k-1), \quad (4.117)$$

из (4.117) находим

$$B(k-1) = M^{-1}(k) \cdot F_1(k, k-1). \quad (4.118)$$

Выражение (4.118) определяет матрицу ввода неоднородной системы.

Как и в случае непрерывных систем, здесь целесообразно перейти к эквивалентной системе, вводя преобразование вида

$$\eta(k) = M(k) \cdot \xi(k). \quad (4.119)$$

Подстановка (4.119) в (4.104) дает

$$\left. \begin{aligned} \eta(k+1) &= M(k+1)\Phi(k+1, k)M^{-1}(k)\eta(k) + m(k+1)B(k)U(k) \\ Y(k) &= C(k)M^{-1}(k) \cdot \eta(k) \end{aligned} \right\}. \quad (4.120)$$

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= M(k+1)\Phi(k+1, k) \cdot M^{-1}(k) \\ D(k) &= M(k+1)B(k) \\ H &= C(k) \cdot M^{-1}(k) \end{aligned} \right\}, \quad (4.121)$$

уравнение (4.120) перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \eta(k+1) &= A(k) \cdot \eta(k) + D(k) \cdot U(k) \\ y(k) &= H \cdot \eta(k) \end{aligned} \right\}. \quad (4.122)$$

Такой подход позволяет перейти от определения матриц $\Phi(k+1, k)$, $B(k)$, $C(k)$ к определению $A(k)$, $D(k)$, H .

Очевидно, что если импульсная переходная функция известна, эта задача решается сравнительно просто.

Действительно, записывая (4.118) для момента времени и подставляя его во второе выражение (4.121), сразу найдем, что

$$D(k) = M(k+1) \cdot M^{-1}(k+1) \cdot F_1(k+1, k) = F_1(k+1, k). \quad (4.123)$$

Для определения матрицы $A(k)$ запишем (4.113) для момента $(k+1)$.

Тогда получим

$$\Psi(k+1, N-1) = M(k+1)\Phi(k+1, k) \cdot \Phi(k, 0) \cdot Q(N-1). \quad (4.124)$$

Подстановка (4.115) в (4.124) сразу дает

$$\Psi(k+1, N-1) = A(k) \cdot \Psi(N-1). \quad (4.125)$$

Отсюда находим

$$A(k) = \Psi(k+1, N-1) \Psi^{-1}(k, N-1). \quad (4.126)$$

Таким образом, если известна импульсная переходная функция системы, то формулы (4.123) и (4.126) дают возможность определить параметры эквивалентной системы.

Контрольные вопросы:

1. Понятие идентифицируемости систем
2. Условия идентифицируемости линейных однородных систем
3. Условия идентифицируемости линейных неоднородных систем
4. Определение нестационарности систем
5. Особенности идентифицируемости нестационарных дискретных систем.
6. Идентифицируемость формальных динамических систем

5. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ СКОЛЬЗЯЩИМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

5.1. Сущность скользящего метода наименьших квадратов

Любая линейная нестационарная система может быть приведена к виду

$$y(k) = F(k) \cdot X(k) + \mathcal{G}(k), \quad (5.1)$$

где $y(k)$ – m -мерный вектор измерений; $X(k)$ – n -мерный вектор неизвестных параметров систем; $F(k)$ – матрица заданных коэффициентов ($m \times n$); $\mathcal{G}(k)$ – m -мерный вектор ошибок измерений с нулевым математическим ожиданием.

Будем считать, что на интервале $[-N, N]$ вектор $X(k)$ удовлетворяет условию

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= const \\ \Delta^j X(k) &= 0, i = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}. \quad (5.2)$$

Тогда, вводя обозначения

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(k-N) \\ \vdots \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k+N) \end{bmatrix} \quad \Phi(k) = \begin{bmatrix} F(k-N) \\ \vdots \\ F(k) \\ \vdots \\ F(k+N) \end{bmatrix} \quad V(k) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}(k-N) \\ \vdots \\ \mathcal{G}(k) \\ \vdots \\ \mathcal{G}(k+N) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Запишем

$$Y(k) = \Phi(k) \cdot X(k) + V(k). \quad (5.4)$$

Очевидно, что система (5.4) представляет собой систему $(2N + 1)$ условных уравнений с n – неизвестными. В качестве критерия оценки примем квадратичную форму

$$Q(k) = [Y(k) - \Phi(k)X(k)]^T W(k) [Y(k) - \Phi(k)X(k)]. \quad (5.5)$$

где $W(k)$ – диагональная весовая матрица размера $(2N+1)(2N+1)$. Минимизация (5.5) по $X(k)$ приводит к системе нормальных уравнений

$$\Phi^T(k)W(k)\Phi(k) \cdot X(k) = \Phi^T(k)W(k)Y(k). \quad (5.6)$$

Оценка скользящего МНК будет иметь вид

$$\hat{X}(k) = [\Phi^T(k)W(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi(k)W(k)Y(k). \quad (5.7)$$

Качество оценки (5.7) следует характеризовать ее вероятностными свойствами. Поэтому докажем теорему.

Теорема 5.1. Если вектор $X(k)$ удовлетворяет условиям (5.2), а вектор ошибок измерений принадлежит к распределению с нулевым математическим ожиданием и матрицей конечных вторых начальных моментов, т. е. $V(k) \in (0, \sigma^2(k) : W^{-1}(k))$, то оценка является несмещенной

$$M[\hat{X}(k)] = X(k)$$

и представляет собой случайный n -вектор с корреляционной матрицей

$$P(k) = \sigma_0^2(k) [\Phi^T(k)W(k)\Phi(k)]^{-1}. \quad (5.8)$$

Для доказательства подставим (5.4) в (5.7), тогда получим

$$\hat{X}(k) = [\Phi^T(k)W(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)W(k) [\Phi(k)X(k) + V(k)]. \quad (5.9)$$

Раскрывая квадратичные скобки, будем иметь

$$\hat{X}(k) = X(k) + [\Phi^T(k)W(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)W(k)V(k). \quad (5.10)$$

Подвергая (5.10) операции математического ожидания, получим

$$M[\hat{X}(k)] = X(k) + [\Phi^T(k)W(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)M[V(k)].$$

В силу того, что

$$M[V(k)] = 0$$

имеем

$$M[\hat{X}(k)] = X(k).$$

Ошибка оценивания равна

$$\tilde{X}(k) = \hat{X}(k) - X(k) = [\Phi^T W(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T W(k) V(k). \quad (5.11)$$

Корреляционная матрица определяется выражением

$$P(k) = M[\tilde{X}(k)\tilde{X}^T(k)] = [\Phi^T W(k) \Phi(k)]^{-1} \times \\ \times \Phi^T W(k) M[V(k)V^T(k)] \Phi(k) [\Phi^T(k)W(k)\Phi(k)]^{-1}. \quad (5.12)$$

Если $M[V(k)V^T(k)] = \sigma_0^2(k)W^{-1}(k)$, то

$$P(k) = \sigma_0^2(k) [\Phi^T(k)W(k)\Phi(k)]^{-1}.$$

Очевидно, что корреляционная матрица $P(k)$ будет полностью определена, если известна $\sigma_0^2(k)$. Если $\sigma_0^2(k)$ неизвестна, то нужно иметь несмещенную оценку этой величины, что позволит определить несмещенную оценку матрицы $P(k)$.

Оценка критерия (5.5) будет равна

$$\hat{Q}(k) = [Y(k) - \Phi(k)\hat{X}(k)]^T W(k) [Y(k) - \Phi(k)\hat{X}(k)]. \quad (5.13)$$

Можно сказать, что

$$M[\hat{Q}(k)] = \sigma_0^2(k) \cdot (2N - n + 1).$$

Поэтому оценка величины $\sigma_0^2(k)$ будет равна

$$\hat{\sigma}_0^2(k) = \frac{\hat{Q}(k)}{2N - n + 1}. \quad (5.14)$$

Таким образом, если выполнены условия (5.2), то оценка скользящего МНК обладает свойствами классической оценки МНК.

5.2. Последовательная форма скользящего МНК

Для автоматизированной обработки измерений целесообразно использовать алгоритмы, не требующие процедуры накопления информации, а позволяющие определить оценки в темпе с ее поступлением. Поэтому рассмотрим методику вывода последовательного алгоритма скользящего МНК.

В соответствии с выражением (5.7) для $(k + 1)$ -го шага оценивания можем записать

$$\hat{X}(k + 1) = [\Phi^T(k + 1)W(k + 1)\Phi(k + 1)]^{-1} \Phi(k + 1)W(k + 1)Y(k + 1) \quad (5.15)$$

Для упрощения выкладок будем считать, что матрица весов является единичной, т. е. $W(k) = E$.

Учитывая обозначения (5.3), можем записать

$$Y(k) = \begin{vmatrix} y(k-N) \\ \text{-----} \\ Y_{-1}(k) \end{vmatrix}; \Phi(k) = \begin{vmatrix} F(k-N) \\ \text{-----} \\ \Phi_{-1}(k) \end{vmatrix}; \quad (5.16)$$

$$Y(k+1) = \begin{vmatrix} Y_{-1}(k) \\ \text{-----} \\ y(k+N-1) \end{vmatrix}; \quad \Phi(k+1) = \begin{vmatrix} \Phi_{-1}(k) \\ \text{-----} \\ F(k+N-1) \end{vmatrix},$$

где

$$Y_{-1}(k) = \begin{vmatrix} y(k-N+1) \\ \vdots \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k+N) \end{vmatrix}, \quad \Phi_{-1}(k) = \begin{vmatrix} F(k-N+1) \\ \vdots \\ F(k) \\ \vdots \\ F(k+N) \end{vmatrix}. \quad (5.17)$$

В соответствии с обозначениями (5.16) имеем

$$P^{-1}(k) = F^T(k-N)F(k-N) + \Phi_{-1}^T(k)\Phi_{-1}(k). \quad (5.18)$$

$$P^{-1}(k+1) = \Phi_{-1}^T(k)\Phi_{-1}(k) + F^T(k+N+1)F(k+N+1). \quad (5.19)$$

Обозначив

$$D^{-1}(k) = \Phi_{-1}^T(k)\Phi_{-1}(k), \quad (5.20)$$

получим

$$P^{-1}(k) = D^{-1}(k) + F^T(k-N)F(k-N),$$

$$P^{-1}(k+1) = D^{-1}(k) + F^T(k+N+1)F(k+N+1).$$

Отсюда видно, что матрицы $P^{-1}(k)$ и $P^{-1}(k+1)$ связаны между собой через промежуточную матрицу (5.20). Этот факт позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 5.2. Если матрица $P^{-1}(k+1)$ определяется выражением

$$P^{-1}(k+1) = D^{-1}(k) + F^T(k+N+1)F(k+N+1), \quad (5.21)$$

где

$$D^{-1}(k) = P^{-1}(k) - F^T(k-N)F(k-N), \quad (5.22)$$

и матрица $P^{-1}(k)$ положительно определена, то обратная матрица $P^{-1}(k+1)$ будет равна

$$\begin{aligned} P(k+1) &= D(k) - D(k)F^T(k+N+1) \times \\ &\times [E + F(k+N+1)D(k)F^T(k+N+1)]^{-1} F(k+N+1)D(k) \end{aligned} \quad (5.23)$$

где

$$\begin{aligned} D(k) &= p(k) + P(k)F^T(k-N)[E - F(k-N)D(k)F^T(k-N)]^{-1} \times \\ &\times F(k-N)P(k) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Доказательство

Выражение (5.23) сразу следует из (5.12) на основании известной леммы об обращении матриц. Следовательно, для доказательства теоремы необходимо показать справедливость выражения (5.24). С этой целью умножим (5.22) слева на матрицу $D(k)$.

Тогда получим

$$E_1 = D(k)P^{-1}(k) - D(k)F^T(k-N)F(k-N). \quad (5.25)$$

Умножая теперь (5.25) справа на $P(k)$, будем иметь

$$P(k) = D(k) - D(k)F^T(k - N)F(k - N)P(k). \quad (5.26)$$

Умножим (5.26) справа на $F^T(k - N)$

$$P(k)F^T(k - N) = D(k)F^T(k - N) - D(k)F^T(k - N)F(k - N)P(k)F^T(k - N) \quad (5.27)$$

Отсюда найдем, что

$$P(k)F^T(k - N) = D(k)F^T(k - N)[E - F(k - N)P(k)F^T(K - N)]. \quad (5.28)$$

Из (5.28) следует

$$D(k)F^T(k - N) = P(k)F^T(k - N)[E - F(k - N)P(k)F^T(K - N)]^{-1} \quad (5.29)$$

Подставляя правую часть (5.29) в (5.26), получим

$$P(k) = D(k) - P(k)F^T(k - N)[E - F(k - N)P(k)F^T(K - N)]^{-1} \times \\ \times F(k - N)P(k) \quad (5.30)$$

Из (5.30) находим выражение

$$D(k) = P(k) + P(k)F^T(k - N)[E - F(k - N)P(k)F^T(K - N)]^{-1} \times \\ \times F(k - N)P(k)$$

которое совпадает с (5.24).

Проверку полученного результата нетрудно осуществить непосредственной подстановкой сначала (5.22) в (5.24), а затем (5.21) в (5.23).

Доказанная теорема дает возможность вывести последовательный алгоритм оценивания.

Действительно, с учетом обозначений (2.16 ÷ 2.20) для $(k + 1)$ -го шага оценивания можем записать

$$\hat{X}(k + 1) = P(k + 1) [\Phi_{-1}^T(k) Y_{-1} + F^T(k + N + 1) y(k + N + 1)] \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) (5.23) и вводя промежуточную оценку

$$\hat{X}(k + 1/k) = D(k) \Phi_{-1}^T(k) Y_{-1}(k), \quad (5.32)$$

получим

$$\begin{aligned} \hat{X}(k + 1) = & \hat{X}(k + 1/k) - D(k) F^T(k + N + 1) [E + F(k + N + 1) D(k) \times \\ & \times F^T(k + N + 1)]^{-1} \times F(k + N + 1) \hat{X}(k + 1/k) D(k) F^T(k + N + 1) \times \\ & \times \{E - [E + F(k + N + 1) D(k) F^T(k + N + 1)]^{-1} F(k + N + 1) D(k) \times \\ & \times F^T(k + N + 1) y(k + N + 1)\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} E - [E + F(k + N + 1) \cdot D(k) F^T(k + N + 1)]^{-1} \cdot F(k + N + 1) \times \\ \times D(k) F^T(k + N + 1) = [E + F(k + N + 1) D(k) F^T(k + N + 1)] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Из (5.33) найдем

$$\begin{aligned} \hat{X}(k + 1) = & \hat{X}(k + 1/k) - D(k) F^T(k + N + 1) [E + F(k + N + 1) D(k) \times \\ & \times F^T(k + N + 1)]^{-1} \times y(k + N + 1) - D(k) F^T(k + N + 1) \times \\ & \times [E + F(k + N + 1) D(k) F^T(k + N + 1)]^{-1} F(k + N + 1) \hat{X}(k + 1/k) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Объединяя в (5.35) второе и третье слагаемые, будем иметь

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + D(k)F^T(k+N+1)[E - F(k+N+1)D(k) \times \\ \times F^T(k+N+1)]^{-1} \times [y(k+N+1) - F(k+N+1)\hat{X}(k+1/k)] \quad (5.36)$$

Выражение (5.36) позволяет получить оценку на $(k+1)$ -Ом-шаге на основе использования промежуточной оценки $\hat{X}(k+1/k)$ и привлечения новой информации, соответствующей $(k+N+1)$ -му измерению.

Формула (5.36) может быть записана в виде

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + P(k+1)F^T(k+N+1) \times \\ \times [y(k+N+1) - F(k+N+1)\hat{X}(k+1/k)] \quad (5.37)$$

так как после умножения (5.23) справа на $F^T(k+N+1)$ сразу находим

$$P(k+1)F^T(k+N+1) = D(k)F^T(k+N+1) \times \\ \times [E + F(k+N+1)D(k)F^T(k+N+1)]^{-1} \quad (5.38)$$

Для определения промежуточной оценки к выражению (5.32) прибавим и отнимем слагаемое $D(k)F^T(k-N)y(k-N)$

Тогда будем иметь

$$\hat{X}(k+1/k) = D(k)[\Phi_{-1}^T(k) \cdot Y_{-1}(k) + F^T(k-N)y(k-N)] - \\ - D(k)F^T(k-N)y(k-N) \quad (5.39)$$

Отсюда с учетом (5.16) следует, что

$$\hat{X}(k+1/k) = D(k)\Phi^T(k) \cdot Y(k) - D(k)F^T(k-N)y(k-N) \quad (5.40)$$

Подстановка (5.24) в (5.40) дает

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1/k) = & D(k)\Phi^T(k)Y(k) - P(k)F^T(k-N)y(k-N) + \\ & + P(k)F^T(k-N)[E - F(k-N)P(k)F^T(k-N)]^{-1} \times \\ & \times F(k-N)P(k)\Phi^T(k)Y(k) - P(k)F^T(k-N) \times \\ & \times [E - F(k-N)P(k)F^T(k-N)]^{-1} F(k-N)P(k)F^T(k-N)y(k-N) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Учитывая, что

$$\hat{X}(k) = P(k)\Phi^T(k)Y(k). \quad (5.42)$$

И проводя преобразования, аналогичные описанным, получим

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1/k) = & \hat{X}(k) - P(k)F^T(k-N)[E - F(k-N)P(k)F^T(k-N)]^{-1} \times \\ & \times [y(k-N) - F(k-N)\hat{X}(k)] \end{aligned} \quad (5.42)$$

или

$$\hat{X}(k+1/k) = \hat{X}(k) - D(k)F^T(k-N)[y(k-N) - F(k-N)\hat{X}(k)] \quad (5.43)$$

Выражение (5.43) позволяет определить промежуточную оценку путем исключения из оценки $\hat{X}(k)$ информации, соответствующей $(k-N)$ -му измерению.

Таким образом, выражения (5.43), (5.38) совместно с (5.24) и (5.23) и составляют алгоритм скользящего МНК. Реализация этого алгоритма должна осуществляться в следующей последовательности:

1. $D(k) = P(k) + P(k)F^T(k-N)[E - F(k-N)P(k)F^T(k-N)]^{-1} F(k-N)P(k)$.
2. $\hat{X}(k+1/k) = \hat{X}(k) - D(k)F^T(k-N)[y(k-N) - F(k-N)\hat{X}(k)]$.

3. $P(k+1) = D(k) - D(k)F^T(k+N+1)[E + F(k+N+1)D(k)F^T(k+N+1)]^{-1} \times$
 $F(k+N+1)D(k)$
4. $\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + P(k+1)F^T(k+1) \times$
 $\times [y(k+N+1) - F(k+N+1)\hat{X}(k+1/k)]$

В частном случае скалярного выхода будем иметь

1. $D(k) = P(k) + \frac{P(k)F^T(k-N)F(k-N)P(k)}{1 - F(k-N)P(k)F^T(k-N)}$
2. $\hat{X}(k+1/k) = \hat{X}(k) - \frac{P(k)F^T(k-N)}{1 - F(k-N)P(k)F^T(k-N)} [y(k-N) - F(k-N)\hat{X}(k)]$
3. $P(k+1) = D(k) - \frac{D(k)F^T(k+N+1)F(k+N+1)D(k)}{1 + F(k+N+1)D(k)F^T(k+N+1)}$
4. $\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + \frac{D(k)F^T(k+N+1)}{1 + F(k+N+1)D(k)F^T(k+N+1)} \times$
 $\times [y(k+N+1) - F(k+N+1)\hat{X}(k+1/k)]$

Реализация расчетов по данному алгоритму возможна при произвольных начальных значениях $\hat{X}(0)$ и $P(0)$ при условии, что матрица $P(0)$ является положительно определенной симметрической. Неопределенность в начальных условиях будет устранена через $(2N + 1)$ шаг за счет привлечения на каждом шаге новой информации и исключения использованной.

5.3. Последовательный алгоритм скользящего МНК при коррелированных ошибках измерений

Рассмотрим вывод последовательного алгоритма при коррелированных ошибках измерений, предполагая, при этом, что выход линейной модели (5.1) является скалярным. Очевидно в этом случае матрица $W(k)$ будет представлять собой обратную корреляционную матрицу ошибок измерений, т. е.

$$W(k) = K_V^{-1}(k), \quad (5.44)$$

где

$$\mathbf{K}_v(k) = M[V(k)V^T(k)] . \quad (5.45)$$

В соответствии с (5.7) для $(k + 1)$ -го шага можем записать

$$\hat{X}(k+1) = P(k+1)Z(k+1), \quad (5.46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P(k+1) &= [\Phi^T(k+1)K_\nu^{-1}(k)\Phi(k+1)]^{-1} \\ Z(k+1) &= \Phi^T(k+1)K_\nu^{-1}(k)Y(k+1) \end{aligned} \right\}. \quad (5.47)$$

Определим корреляционную матрицу $K_v(k+1)$, учитывая обозначения (5.3) в виде

$$K_v(k+1) = M \left\{ \begin{array}{c|c} V_{-1}(k) & \\ \hdashline & \\ \dots\dots & [V_{-1}^T(k) : \mathcal{G}(k+N+1)] \\ \hdashline & \\ \mathcal{G}(k+N+1) & \end{array} \right\}. \quad (5.48)$$

Из выражения (5.48) следует

[illegible]

Обозначим

$$K_{-1}(k) = M[V_{-1}(k)V_{-1}^T(k)]. \quad (5.50)$$

$$C(k+1) = M[V_{-1}(k)\mathfrak{G}(k+N+1)]. \quad (5.51)$$

$$d_v(k+N+1) = M[\mathcal{G}^2(k+N+1)]. \quad (5.52)$$

Тогда будем иметь

$$K_{11}^{-1}(k+1) = K_{11}^{-1} + \frac{K_{11}^{-1}(k)C(k+1)C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)}{d_\nu(k+N+1)}. \quad (5.62)$$

С учетом обозначений (5.16), (5.17) определим матрицу в виде

$$P^{-1}(k+1) = [\Phi_{-1}^T(k) : F^T(k+N+1)] \begin{bmatrix} K_{11}^{-1}(k+1) : C_{-1}(k+1) \\ \vdots \\ C_{-1}^T(k+1) : d_\nu^*(k+N+1) \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \Phi_{-1}(k) \\ \vdots \\ F(k+N+1) \end{bmatrix}$$
(5.63)

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
P^{-1}(k+1) &= \Phi_{-1}^T(k) K_{11}^{-1}(k+1) \Phi_{-1}(k) + F^T(k+N+1) \times \\
&C_{-1}^T(k+1) \Phi_{-1}(k) C_{-1}(k+1) F(k+N+1) + d_v(k+N+1) \times \\
&F^T(k+N+1) F(k+N+1)
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Подставляя (5.64) в равенства (5.60)–(5.62), после преобразований получим

$$\begin{aligned}
P^{-1}(k+1) = & \Phi_{-1}^T(k)K_{11}^{-1}(k)\Phi_{-1}(k) + \\
& \frac{[F(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)\Phi_{-1}(k)]^T}{1/d_\nu^*(k+N+1)} \times \quad (5.65) \\
& \times [F(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)\Phi_{-1}(k)]
\end{aligned}$$

Обозначим

$$D^{-1}(k) = \Phi_{-1}^T(k) K_{-1}^{-1}(k) \Phi_{-1}(k) . \quad (5.66)$$

$$P^{-1}(k+1) = D^{-1}(k) + F_*^T(k+N+1)F(k+N+1). \quad (5.68)$$
[illegible]
$$\begin{aligned}d_\nu(k-N) &= M[\mathcal{G}^2(k-1)] \\ C(k) &= M[V_{-1}(k)\mathcal{G}(k-N)], \\ K_{11}(k) &= M[V_{-1}(k)V_{-1}^T(k)]\end{aligned}\tag{5.70}$$
$$K_\nu(k) = \begin{bmatrix} d_\nu(k-N) : C_{-1}^T(N) \\ \vdots \\ C_{-1}(k) : W_{11}^{-1}(k) \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

115

$$\mathbf{D}(l) \mathbf{\Gamma}^T (l + \mathbf{M} + 1) \mathbf{\Gamma} (l + \mathbf{M} + 1) \mathbf{D}(l)$$

Определим теперь вектор $z(k+1)$ в блочном виде

$$Z(k+1) = \Phi_{-1}^T(k)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k) + \frac{[F(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)\Phi_{-1}(k)]^T [y(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k)]}{d_V(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)} \quad (5.84)$$

Обозначив

$$y_*(k+N+1) = \frac{y(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k)}{\sqrt{d_V(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)}} \quad (5.85)$$

и учитывая (5.67), получим

$$Z(k+1) = \Phi_{-1}^T(k)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k) + F_*^T(k+N+1)y_*(k+N+1). \quad (5.86)$$

Подстановка (5.86) и (5.81) в (5.46) дает

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1) = & D(k)\Phi_{-1}^T(k)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k) + D(k)F_*^T(k+N+1)y_*(k+N+1) + \\ & + \frac{D(k)F_*^T(k+N+1)F_*(k+N+1)}{1 + F_*(k+N+1)D(k)F_*^T(k+N+1)} \times D(k)\Phi_{-1}^T(k)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k) - \\ & - \frac{D(k)F_*^T(k+N+1)F_*(k+N+1)D(k)F_*^T(k+N+1)}{1 + F_*(k+N+1)D(k)F_*^T(k+N+1)} y_*(k+N+1) \end{aligned} \quad (5.87)$$

Вводя промежуточную оценку

$$\hat{X}(k+1/k) = D(k)\Phi_{-1}^T K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k) \quad (5.88)$$

после преобразований получим

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + \frac{D(k) \cdot F_*^T(k+N+1)}{1 + F_*(k+N+1)D(k)F_*^T(k+N+1)} \times \\ \left[y_*(k+N+1) - F_*(k+N+1)\hat{X}(k+1/k) \right] \quad (5.89)$$

Аналогично (5.86), используя (5.73)–(5.75), вектор $Z(k)$ можем определить в виде

$$Z(k) = \Phi_{-1}^T(k)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k) + F_*^T(k-N)y_*(k-N) . \quad (5.90)$$

где

$$y_*(k-N) = \frac{y(k-N) - C^T(k)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k)}{\sqrt{d_V(k-N) - C^T(k)K_{11}^{-1}(k)C(k)}} . \quad (5.91)$$

Из (5.91) следует

$$\Phi_{-1}^T(k)K_{11}^{-1}(k)Y_{-1}(k) = Z(k) - F_*^T(k-N)y_*(k-N) . \quad (5.92)$$

Подставляя (5.92) в (5.88), получим

$$\hat{X}(k+1/k) = D(k)Z(k) - D(k)F_*^T(k-N)y_*(k-N) . \quad (5.93)$$

Отсюда с учетом (5.82) нетрудно определить промежуточную оценку в виде

$$\hat{X}(k+1/k) = \hat{X}(k) - \frac{P(k)F_*^T(k-N)}{1 - F_*(k-N)P(k)F_*^T(k-N)} \times \\ \left[y(k-N) - F_*(k-N)\hat{X}(k) \right] \quad (5.94)$$

Таким образом, последовательный алгоритм скользящего МНК в случае коррелированных ошибок измерений включает

предварительные расчеты по формулам (5.62), (5.67), (5.78) и (5.91), а затем определение оценок $\hat{X}(k)$ и $\hat{X}(k+1/k)$ по формулам (5.89) и (5.94) с учетом (5.81) и (5.82). Фактически путем преобразований задача оценивания при коррелированных ошибках измерений сводится к эквивалентной задаче оценивания при коррелированных ошибках измерений сводится к эквивалентной задаче оценивания при некоррелированных в моменты $(k - N)$ и $(k + N + 1)$ ошибках измерений с единичной дисперсией.

Действительно, подставляя (5.85) в равенства, имеем

$$y(k + N + 1) = F(k + N + 1)X(k + 1) + \mathcal{G}(k + N + 1). \quad (5.95)$$

$$Y_{-1}(k) = \Phi_{-1}(k)X(k + 1)X(k + 1) + Y_{-1}(k). \quad (5.96)$$

$$y_*(k + N + 1) = F_*(k + N + 1)X(k + 1) + \frac{\mathcal{G}(k + N + 1) - C^T(k + 1)K_{11}^{-1}(k)V_{-1}(k)}{\sqrt{d_V(k + N + 1) - C^T(k + 1)K_{11}^{-1}(k)C(k + 1)}}. \quad (5.97)$$

Отсюда видно, что эквивалентный шум в любой $(k+N+1)$ -й момент времени будет определяться равенством

$$\mathcal{G}_*(k + N + 1) = \frac{\mathcal{G}(k + N + 1) - C^T(k + 1)K_{11}^{-1}(k)V_{-1}(k)}{\sqrt{d_V(k + N + 1) - C^T(k + 1)K_{11}^{-1}(k)C(k + 1)}}. \quad (5.98)$$

Дисперсия эквивалентного шума будет равна

$$\begin{aligned}
 M[\mathcal{G}^2(k+N+1)] &= \frac{M\left\{\left[\mathcal{G}(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)V_{-1}(k)\right]^2\right\}}{d_V(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)} = \\
 &= \frac{M[\mathcal{G}^2(k+N+1)] - M[V_{-1}^T(k)\mathcal{G}(k+N+1)]K_{11}^{-1}(k)C(k+1)}{d_V(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)} + \\
 &\quad + \frac{C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)M[V_{-1}^T(k)V_{-1}(k)]K_{11}^{-1}(k)C(k+1)}{d_V(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)} - \\
 &\quad - \frac{C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)M[V_{-1}(k)\mathcal{G}(k+N+1)]}{d_V(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)}
 \end{aligned}$$

Учитывая (5.50)–(5.52), получим

$$M[\mathcal{G}^2(k+N+1)] = \frac{d_V(k+N+1) + C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)}{d_V(k+N+1) - C^T(k+1)K_{11}^{-1}(k)C(k+1)} = 1$$

Аналогично можно показать, что

$$M[\mathcal{G}^2(k-N)] = 1.$$

Рассмотрим частный случай некоррелированных ошибок измерений.

В этом случае $C(k+1) = C(k) \neq 0$.

Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned}
 F_*(k-N) &= \frac{F(k-N)}{\sigma(k-N)}; & y_*(k-N) &= \frac{y(k-N)}{\sigma(k-N)}; \\
 F_*(k+N+1) &= \frac{F(k+N+1)}{\sigma(k+N+1)}; & y_*(k+N+1) &= \frac{y(k+N+1)}{\sigma(k+N+1)};
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

Подставляя (5.99) в (5.89), (5.94) и (5.81), (5.82), получим

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + \frac{D(k)F^T(k+N+1)}{\sigma^2(k+N+1) + F(k+N+1)D(k)F^T(k+N+1)} \times \\ \times [y(k+N+1) - F(k+N+1)\hat{X}(k+1/k)] \quad (5.100)$$

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k) - \frac{P(k)F^T(k-N)}{\sigma^2(k-N) - F(k-N)D(k)F^T(k-N)} \times \\ \times [y(k-N) - F(k-N)\hat{X}(k)] \quad (5.101)$$

$$P(k+1) = D(k) - \frac{D(k)F^T(k+N+1)F(k+N+1)D(k)}{\sigma^2(k+N+1) + F(k+N+1)D(k)F^T(k+N+1)}; \quad (5.102)$$

$$D(k) = P(k) + \frac{P(k)F^T(k-N)F(k-N)P(k)}{\sigma^2(k-N) - F(k-N)P(k)F^T(k-N)} \quad (5.103)$$

Таким образом, полученный результат обладает достаточной общностью, и из него путем соответствующих допущений может быть получен алгоритм, приведенный ранее в разделе 2.2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колосов Л. В. Алгоритмы обработки материалов натурных испытаний летательных аппаратов / Л. В. Колосов, Б. Т. Суйменбаев, А. П. Росляков. – М.: Изд-во МАИ, 1996. – 44 с.
2. Кринецкий Е. И. Летные испытания ракет и космических аппаратов: Учеб. пособие для технических вузов / Е. И. Кринецкий, Л. Н. Александровская и др. / Под ред. Е. И. Кринецкого. – М.: Машиностроение, 1979. – 464 с., ил.
3. Суйменбаев Б. Т. Экологическая безопасность эксплуатации ракетно-космических комплексов / Б. Т. Суйменбаев, Д. Г. Максин, С. А. Куликов. – М.: Изд-во МАИ, 1997. – 44 с.
4. Статистические основы экспериментальной баллистики летательных аппаратов: Конспект лекций. – М.: Министерство обороны СССР, 1971. – 172 с.
6. Положение о порядке создания, производства и эксплуатации (применения) космических комплексов (Положение РК-98-КТ).
7. Дайлевски Г. Критерии выбора кривых для описания экспериментальных данных // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – Т. 8. – № 8.
8. Гудзовский В. А. Баллистика ракет / В. А. Гудзовский, С. Г. Худяков. – М.: МО СССР, 1971. – 580 с.
9. Гандмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гандмахер. – М.: Наука, 1988. – 576 с.
10. Сейдж Э. П. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. П. Сейдж, Дж. Мелс. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
11. Сейдж Э. П. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
12. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. В. И. Вапника. – М.: Наука, 1984. – 816 с.
13. Мудров В. И. Методы обработки измерений / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. – М.: Сов. Радио, 1976.
14. Гудзовский В. А. Баллистика ракет / В. А. Гудзовский, С. Т. Худяков. – М.: МО СССР, 1971.

15. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / Б. Ф. Жданюк. – М.: Сов. радио, 1978.
16. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на Фортране / Д. Мак-Кракен, Ч. Дорн. – М.: Мир, 1977.
17. Турчак Л. И. Основы численных методов / Л. И. Турчак. – М.: Наука, 1987.
18. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – Т.2. – М.: Наука, 1974.
19. Натансон И. П. Конструктивная теория функций / Натансон И. П. – М–Л., 1949.
20. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1.ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ ЛЕТНО- КОНСТРУКТОРСКИХ ИСПЫТАНИЙ.....	6
1.1. Цель и задачи летно-конструкторских испытаний...	6
1.2. Программа и обеспечение летно-конструкторских испытаний.....	9
1.3. Порядок обработки результатов летно- конструкторских испытаний.....	14
1.4. Формализация задач обработки результатов летно- конструкторских испытаний.....	16
1.5. Порядок завершения летно-конструкторских испытаний	19
2.АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ВНЕШНЕТРАЕКТОР- НОЙ ИНФОРМАЦИИ.....	21
2.1.Обработки информации по достаточным измерениям	21
2.2.Обработки траекторной информации по избыточным измерениям.....	24
2.3.Алгоритмы аппроксимации параметров движения центра масс полиномами.....	30
2.4.Равномерное приближение функций многочленами С. Н.Бернштейна.....	40
3.МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАР- НЫХ СИСТЕМ.....	49
3.1 Аппроксимация статических моделей решением си- стемы однородных дифференциальных уравнений.....	49
3.2 Преобразование уравнения статической модели к уравнениям в пространстве состояний.....	56
3.3 Идентификация линейных нестационарных систем как задача наблюдения.....	62
3.4 Алгоритм обработки траекторной информации на основе формальных динамических моделей.....	71
4. ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТА- ЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ.....	79
4.1. Идентифицируемость линейных однородных систем.	79
4.2. Условия идентифицируемости неоднородных систем	89

4.3. Идентифицируемость линейных нестационарных дискретных систем.....	93
5. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ СКОЛЬЗЯЩИМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.....	101
5.1. Сущность скользящего метода наименьших квадратов	101
5.2. Последовательная форма скользящего МНК.....	104
5.3. Последовательный алгоритм скользящего МНК при коррелированных ошибках измерений.....	111
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	123
Приложение	127

Приложение

Тип комплек-са	Координаты точек ИПов	Измеряемые параметры	Расчетные соотношения
Одна базисная точка. Комплекс «радиодальномер – фазовый пеленгатор»	O, X, Y, Z . Базисная точка находится в начале измерительной системы координат.	1. Наклонная дальность D . Угол места γ . Азимут α . 2. Наклонная дальность D . Направляющие косинусы $\cos \Theta_x$ и $\cos \Theta_z$.	$x = D \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha$; 1. $y = D \cdot \sin \gamma$; $z = D \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha$. $x = D \cdot \cos \Theta_x$; 2. $y = D \cdot \cos \Theta_y$; $z = D \cdot \cos \Theta_z$; где $\cos \Theta_y = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_x - \cos^2 \Theta_z}$.
	O, X, Y, Z . Базисная точка находится в начале измерительной системы координат. Антенны 1-2, 3-4 разнесены по осям OZ и OX , антенные базисы b_1, b_2 делятся точкой O пополам. $(X_1, Y_1, Z_1)(X_4, Y_4, Z_4)$	3. . Наклонная дальность D . Разность наклонных дальностей ΔD_1 и ΔD_2 . Радиальная скорость D . Сумма и разность радиальных скоростей D_Σ и ΔD . Скорость изменения направля-	3. $\Delta D_1 = D_1 - D_2$; $\Delta D_{21} = D_3 - D_4$; $\Delta D_1 = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2} - [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2]^{1/2}$; $\Delta D_2 = [(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2]^{1/2} - [(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2]^{1/2}$; $\cos \Theta_x = \frac{\Delta D_1}{b_1}$; $\cos \Theta_z = \frac{\Delta D_2}{b_2}$; $x = D \cdot \frac{\Delta D_1}{b_1}$; $y = D \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\Delta D_1}{b_1} \right]^2 - \left[\frac{\Delta D_2}{b_2} \right]^2}$; $z = D \cdot \frac{\Delta D_2}{b_2}$; 4. $\Delta \dot{D}_1 = \dot{D}_1 - \dot{D}_2 = \frac{1}{D_1 D_2} \{ \dot{x}[D_2(x - x_1) - D_1(x - x_2)] + \dot{y}[D_2(y - y_1) - D_1(y - y_2)] + \dot{z}[D_2(z - z_1) - D_1(z - z_2)] \}$;

	координаты точек в измерительной системе координат	ющих косинусов $\cos \Theta_x$, $\cos \Theta_z$. Направляющие косинусы $\cos \Theta_x$ и $\cos \Theta_z$.	$\Delta \dot{D}_2 = \dot{D}_3 - \dot{D}_4 = \frac{1}{D_3 D_4} \{ \dot{x}[D_4(x-x_3) - D_3(x-x_4)] + \dot{y}[D_4(y-y_3) - D_3(y-y_4)] + \dot{z}[D_4(z-z_3) - D_3(z-z_4)] \};$ $\dot{D} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{D};$ $\begin{cases} c_{11}\dot{x} + c_{12}\dot{y} + c_{13}\dot{z} = \dot{D}; \\ c_{21}\dot{x} + c_{22}\dot{y} + c_{23}\dot{z} = \Delta \dot{D}_1; \\ c_{31}\dot{x} + c_{32}\dot{y} + c_{33}\dot{z} = \Delta \dot{D}_2; \end{cases}$ C_{ij} – коэффициенты, выражения для которых определяются из приведенных выше Соотношений ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$). $\dot{x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \dot{y} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dot{z} = \frac{\Delta_3}{\Delta};$ где Δ – определитель системы, Δ_i – определители, получающиеся заменой в Δ i-го столбца столбцом свободных членов пре- подаватель
Две базисные точки. Два фазовых пеленгатора. Измерительная система координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, $O_2 X_2 Y_2 Z_2$.	Точка стояния фазовых пеленгаторов в относительной геоцентрической системе координат $O_1 X_{Г1} Y_{Г1} Z_{Г1}$, $O_2 X_{Г2} Y_{Г2} Z_{Г2}$.	Направляющие косинусы первого ИПа - $\cos \Theta_{x1}$, $\cos_{z1}$. Направляющие косинусы второго ИПа - $\cos \Theta_{x2}$, $\cos_{z2}$.	$\begin{aligned} x_1 &= D_1 \cdot \cos \Theta_{x1}; \\ y_1 &= D_1 \cdot \cos \Theta_{y1}; \\ z_1 &= D_1 \cdot \cos \Theta_{z1}; \end{aligned}$ где $\cos \Theta_{y1} = \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{x1} - \cos^2 \Theta_{z1}}.$ $D_1 = b \frac{\sin \beta}{\sin \gamma};$ $\begin{aligned} b &= [(x_{Г2} - x_{Г1})^2 + (y_{Г2} - y_{Г1})^2 + \\ &+ (z_{Г2} - z_{Г1})^2]^{1/2}; \\ \sin \gamma &= \sin(180 - (\alpha + \beta)) = \\ &= \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta; \\ \cos \beta &= -D_2^0 A_{Г2} b_1^0; \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta}. \end{aligned}$

Три базисные точки. Радиодальномерью	Координаты базисных точек в условной системе координат $X_{01}^U Y_{01}^U Z_{01}^U$; $X_{02}^U Y_{02}^U Z_{02}^U$; $X_{03}^U Y_{03}^U Z_{03}^U$.	1. Наклонные дальности D_1, D_2, D_3 .	1. $x_y = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{1 + a_1^2 + a_2^2} \pm \sqrt{\left[\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{1 + a_1^2 + a_2^2} \right]^2 - \frac{b_1^2 + b_2^2 - D_1^2}{1 + a_1^2 + a_2^2}};$ $y_y = a_1 x_y + b_1; x_y = a_2 x_y + b_2;$ $a_1 = \frac{x_{y3} z_{y3} - x_{y2} z_{y3}}{y_{y2} z_{y3} - y_{y2} z_{y2}};$ $a_2 = \frac{x_{y2} y_{y2} - x_{y3} y_{y2}}{y_{y2} z_{y3} - y_{y3} z_{y2}};$ $b_1 = \frac{a_2 z_{y3} - a_3 z_{y2}}{y_{y2} z_{y3} - y_{y3} z_{y2}};$ $b_2 = \frac{a_3 y_{y2} - a_2 y_{y3}}{y_{y2} z_{y3} - y_{y3} z_{y2}};$ $a_2 = \frac{1}{2} (D_1^2 + D_{12}^2 + D_2^2);$ $a_3 = \frac{1}{2} (D_1^2 + D_{13}^2 + D_3^2);$
		2. ξ_1, ξ_2, ξ_3 – координаты собственных базисных точек в системе O, ξ, ρ, μ .	$\begin{cases} \xi^2 + \mu^2 + \rho^2 = D_1^2; \\ (\xi - \xi_2)^2 + \mu^2 + \rho^2 = D_2^2; \\ (\xi - \xi_3)^2 + \mu^2 + (\rho - \rho_3)^2 = D_3^2; \end{cases}$ $\xi = \frac{D_1^2 - D_2^2 + \xi_2^2}{2\xi_2};$ $\rho = \frac{D_1^2 - D_3^2 + \rho_3^2 + \xi_3^2 - 2\rho\xi_3}{2\xi_2};$ $\mu = \sqrt{D_1^2 - \xi^2 - \rho^2};$ $\begin{vmatrix} x_y \\ y_y \\ z_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y, \xi \\ \rho \\ \mu \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \xi \\ \rho \\ \mu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{01}^y \\ y_{01}^y \\ z_{01}^y \end{vmatrix}$

Учебное издание

Суйменбаев Багдат Темиргалиевич
Суйменбаева Жанна Багдатовна

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ В
ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛЕТНО-
КОНСТРУКТОРСКИХ ИСПЫТАНИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ
АППАРАТОВ

Учебное пособие

Нач. ОПНП РУ ДСО	<i>З. А. Губайдулина</i>
Редактор	<i>З. А. Губайдулина</i>
Компьютерная верстка	<i>Л. Т. Касжанова</i>

Подписано в печать 16.10.2016 г.

Тираж 300 экз. Формат 60х84х 1/16. Бумага типогр. № 1.
Уч.-изд.л. 8,1. Усл. п.л 7,5. Заказ №759. Цена договорная.

Издание Казахского национального исследовательского
технического университета имени К. И. Сатпаева

Департамент по связям с общественностью КазНКТУ
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22

ISBN 978-601-228-989-3



9 786012 289893