Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі

А.Бекбаев, Д.Сүлеев, Б.Хисаров

СЫЗЫҚТЫ ЖӘНЕ БЕЙСЫЗЫҚТЫ АВТОМАТТЫ РЕТТЕУ ЖҮЙЕСІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

Есептер жинағы

Техникалық жоғары оқу орындарының
студенттеріне арналған оқу құралы

Алматы, 2012

УДК 681.6 (075.8)
ББК 32.965.я 73
Б 39

Рецензенттер:
техника ғылымдарының докторы, профессор Сыздыков Д.Ж.,
техника ғылымдарының докторы, профессор Имандосова М.Б.

Профессор А.Бекбаевтың редакциялауымен

ISBN 978-601-7307-28-8

Оқу құралында сызықты және бейсызықты жүйелердің автоматты реттеу теориясы бойынша есептер және олардың шешімдері келтірілген.

Кітапта студенттердің өзіндік жұмыстарын тиімділеу бағытына көп көңіл бөлінген.

Оқу құралы техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған.

УДК 681.6 (075.8)
ББК 32.965.я 73

ISBN 978-601-7307-28-8

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз

Бірінші бөлім. ТИПТІК ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ ӘДІСТЕРІ
1-тарау. Автоматты реттеу жүйесін математикалық әдіспен бейнелеу
1.1. Автоматты реттеу жүйелерінің жұмыс істеу принципін үйрену және оның функционалдық схемасын құру
1.2. Реттеу объектілерінің теңдеуін құру және оларды типтік динамикалық буындармен көрсету. Буындардың уақыттық сипаттамалары
1.3. Автоматты реттеу жүйесі құрылымдық схемасын парапар түрлендіру

2-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығы
2.1. Автоматты реттеу жүйесін орнықтылық критерийлерімен бағалау
2.2. Орнықтылық аймағын анықтау

3-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу және жүйенің сапа көрсеткіштерін анықтау. АРЖ корректирлеу
3.1. Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу
3.2. АРЖ сапа көрсеткіштерін анықтау
3.3. Корректирлеу құрылғыларын таңдау

4-тарау. Бейсызықты автоматты реттеу жүйелері
4.1. Бейсызықты жүйелердің сипаттамаларын сызықтау
4.2. Бейсызықты жүйелерді зерттеу
4.3. Бейсызықты жүйелердің абсолют орнықтылығы
4.4. Бейсызықты автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық схемасын түрлендіру

Екінші бөлім. ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДЕРІ
01-тарау. Автоматты реттеу жүйесін математикалық әдіспен бейнелеу
01.1. Автоматты реттеу жүйелерінің жұмыс істеу принципін үйрену және оның функционалдық схемасын құру
01.2. Реттеу объектілерінің теңдеуін құру және оларды типтік динамикалық буындармен көрсету. Буындардың уақыттық сипаттамалары
01.3. Автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық схемасын парапар түрлендіру

02-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығы
02.1. Автоматты реттеу жүйесін орнықтылық критерийлерімен бағалау
02.2. Орнықтылық аймағын анықтау

03-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу және жүйенің сапа көрсеткіштерін анықтау. АРЖ корректирлеу
03.1. Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу
03.2. АРЖ сапа көрсеткіштерін анықтау
03.3. Корректирлеу құрылғыларын таңдау

04-тарау. Бейсызықты автоматты реттеу жүйелері
04.1. Бейсызықты жүйелердің сипаттамаларын сызықтау
04.2. Бейсызықты жүйелерді зерттеу
04.3. Бейсызықты жүйелердің абсолют орнықтылығы
04.4. Бейсызықты автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық схемасын түрлендіру

Тіркемелер
1-тіркеме. Көрсеткіштік функциялар мәндері
2-тіркеме. h-функция кестесі
3-тіркеме. Тербелмелі буынның нормаланған өтпелі сипаттамалары
4-тіркеме. Типтік нормаланған ЛАС және оларға сәйкес беріліс функциялар мен базалық жиілікті есептеу формулалары
5-тіркеме. Типтік ЛАС үшін өтпелі процестің нормаланған қисықтары
6-тіркеме. Корректирлеуші буындарды таңдау кестесі

Пайдаланылған әдебиеттер

АЛҒЫ СӨЗ

Бүгінгі күні еліміздің барлық жоғары оқу орындары жаңа, кредитті технология жүйесіне көшті. Бұл жүйенің ерекшелігі – студенттердің өзіндік дайындалу бағытының дамуы. Осыған сәйкес оқулықтар мен оқу құралдарын дайындау – кезек күттірмес міндет. Автоматты реттеу теориясы – көптеген техникалық мамандықтар оқитын негізгі пәннің бірі. Өкінішке орай, бұл пән бойынша жарық көрген бірде-бір есептер жинағы жоқ.

Практикалық сабақ өткенде, немесе өзінше сабақты пысықтау кезінде студенттердің орыс тілінде жазылған есептер жинақтарын пайдаланулары оларға едәуір ыңғайсыздықтар туғызуда. Сонымен бірге, автоматты реттеу теориясын терең түсіне білу үшін студенттерге көптеген есептерді шығарып үйрену, соның негізінде пәннің әрбір тарауларына практикалық талдаулар жүргізу ауадай қажет. Сондықтан оқушыларға ұсынылып отырған, бұл қазақ тіліндегі есептер жинағына авторлар сызықты және бейсызықты жүйелердің автоматты реттеу теориясының барлық бөлімдерін қамтитын есептерді кіргізіп отыр. Бұл есептерде автоматты жүйелерді құру және талдау мәселелерінің негізгі кезеңдері қарастырылған:

1) тағайындалуына қарай автоматты жүйе принципиалдық схемасын құру және құрылымдық схема негізінде буындардың немесе бүкіл жүйенің дифференциалдық теңдеулерін салу;
2) жүйенің статикалық есептеу және статикалық қателіктің жарамды шартынан жүйенің параметрлерін таңдау;
3) автоматты жүйенің орнықтылығын зерттеу және оның екпін қисығын тұрғызу.

Жинақты дайындау кезінде авторлардың алдына қойылған екі мақсат болды: біріншіден, автоматты реттеу теориясының негізін студенттерге іс жүзінде қолайлы түрде қолдануды нақтылы есептермен көрсету және, екіншіден, студенттердің өзіндік жұмыстары үшін мысалдарды бір жүйелікке келтіру.

Оқушыларға ұсынылып отырған бұл есептер жинағы – профессор А.Бекбаевтың редакциялауымен жарық көрген «Сызықты автоматты реттеу жүйелері теориясының есептер жинағы» (Алматы, ҚазККА, 2007) кітабының толықтырылып, қайта шығарылған нұсқасы.

Есептер жинағы екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімі мынадай құрылыммен берілді: әрбір тақырыпқа деген қысқаша теориялық түсініктеме; типтік есептер және оларды шығару мысалдары; студенттердің өз бетімен шығарулары үшін берілетін типтік есептер; студенттердің өзін-өзі тексеруі үшін берілген сұрақтар. Екінші бөлімінде осы жинақтың бірінші бөліміндегі есептер мен суреттер нөмірлерінің алдына ноль енгізілді. Сонымен, есептер жинағындағы келтірілген барлық есептердің шешімдері бар. Авторлардың ойы бойынша, кітаптың мұндай құрылымы студенттерді тек қана дайын есепті көшіріп алу емес, оның шешімін іздеу барысындағы ойлану процесіне жедел көмек көрсету үшін өте маңызды секілді. Кітаптың мұндай құрылымы енді етек жая бастаған бакалаврларды дайындау бағдарламасына сәйкес

жасалынды және студенттердің өзіндік жұмыстарының нәтижелі болуына әсерін тигізері сөзсіз.

Есептер жинағын құрастырған кезде авторлар автоматты реттеу теориясына арналған бірқатар белгілі оқулықтар мен оқу құралдарын жетекшілікке алды. Сонда да есептер жинағын және ондағы есептердің құрылымын жасау толығымен 2005 жылы жарық көрген А.Бекбаев, Д.Сүлеев, Б.Хисаров «Сызықты және бейсызықты жүйелердің автоматты реттеу теориясы» - оқулық. Алматы «ЭВЕРО», 2005 оқулығына негізделген. Осыған байланысты ұсынылып отырған оқу құралындағы есептерді шығарудан бұрын, студенттер жоғарыда аталған материалдармен жете танысулары қажет.

Бұл есептер жинағы авторлардың көптеген жылдары жоғары оқу орындарындағы еңбектерінің нәтижесі негізінде құрастырылды. Сонымен бірге, біраз есептер «Пайдаланылған әдебиеттер» бөлімінде келтірілген құрметті авторлардың әр кезде жарық көрген еңбектерінен де алынып, кітапқа қойылған мақсатқа сәйкес бір жүйеге келтіріліп берілді.

Оқу құралының соңында келтірілген тіркемелер барлық есептерді автоматты реттеу теориясынан арнайы анықтама әдебиеттерінсіз-ақ шығаруға мүмкіндік береді.

Б і р і н ш і б ө л і м

ТИПТІК ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ ӘДІСТЕРІ

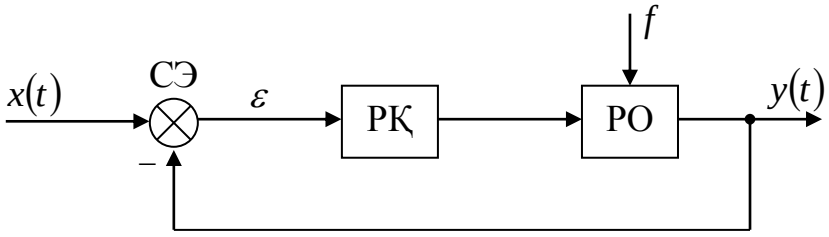
1-тарау. Автоматты реттеу жүйесін математикалық әдіспен бейнелеу

1.1. Автоматты реттеу жүйелерінің жұмыс істеу принципін үйрену және оның функционалдық схемасын құру

Кез келген өндірісте технологиялық процестер белгілі бір мәнде шектелетін физикалық шамалармен сипатталады. Жабдықтардың жұмысы кезінде ол шамалар белгілі бір деңгейде тұрақтануы, не берілген программа бойынша өзгеріп отыруы тиіс. Кез келген қондырғыда технологиялық процестің бірқалыпты жүруі белгілі бір ереженің, *қызмет алгоритмінің* орындалуына байланысты болады. Осы қызмет алгоритмін орындау үшін белгілі бір сыртқы команданы іске асыратын қондырғыны, не машинаны *басқару объектісі* дейді. Технологиялық процесті берілген қызмет алгоритм бойынша өткізу мақсатында объектіге сырттан берілетін арнайы нұсқаулар (ережелер) жиынтығын *басқару алгоритмі* дейді.

Басқару объектісіне басқару алгоритміне сәйкес әсер ететін кез келген техникалық құрылғы *автоматты басқару құрылғысы* делінеді.

Бір-бірімен байланысты және басқару алгоритміне сәйкес өзара әрекеттесе жұмыс жасайтын автоматты басқару құрылғысы мен басқару объектісінің жиынтығы автоматты басқару жүйесі (АБЖ) деп аталады. Ауытқу принципі бойынша жұмыс істейтін автоматты басқарудың тұйықталған жүйесін *автоматты реттеу жүйесі (АРЖ)* деп те атайды. Олардың ерекшелігіне сигнал өтуінің тұйық контурының, яғни СЭ салыстыру элементінің кірісіне $x(t)$ реттелетін шама мәні туралы мәлімет берілетін кері каналдың болуы жатады (1.1-сурет).



1.1-сурет. Автоматты реттеу жүйесі

1.1-суреттегі РҚ – реттеуші құрылғы, РО – реттелетін объект, СЭ – салыстырмалы элемент, $x(t)$ – кірістік сигнал, $y(t)$ – шығыстық сигнал, ал f – сыртқы қобалжыту әсері.

Технологиялық процестің дұрыс өтуіне сәйкес басқарылатын шаманың берілген уақыт аралығында ұстап отыруға керекті мәнін алдын ала берілген мән деп, ал фактілі, яғни процестің өлшенген мәнін нақты (қазіргі) деп атайды. Реттелетін шаманың алдын ала жоспарланған және нақты мәндерінің

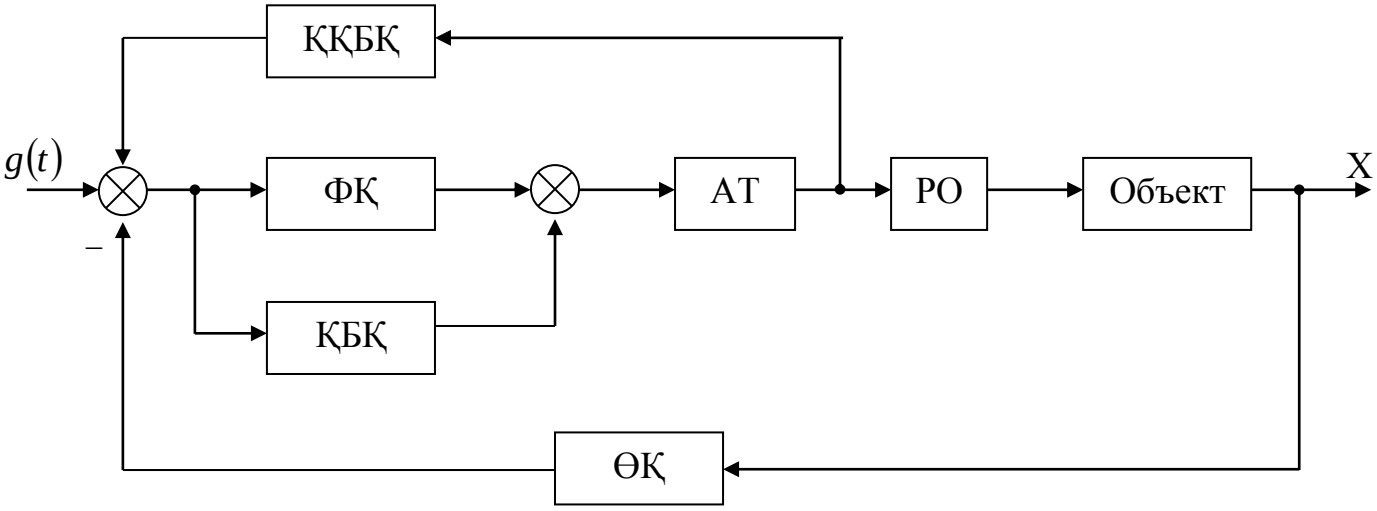
арасындағы айырмасын келісілмеген (айырымдық) шама дейді. Бұл жағдайда СЭ салыстырушы элементтің теңдеуін былай жазуға болады:

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$$

яғни жоспарлаушы құрылғыдан алдын ала берілетін $x(t)$ шамасынан $y(t)$ шығыстық шама алынып тасталады. Нәтижесінде түзілетін $\varepsilon(t)$ жүйе қателігі деп аталынып, реттеуші құрылғының кірісіне беріледі, ал ол өз ретінде реттелетін $y(t)$ шамасының берілген мәнінен ауытқуына сәйкес реттелуші объектіге әсерін тигізеді. Автоматты жүйе өзара байланысқан және белгілі бір қызмет атқаратын дербес конструкциялық элементтерден тұрады, оларды автоматика элементтері не құралдары деп атайды. Элементтерді жүйеде атқаратын қызметіне қарай салыстырушы, түзетуші, қабылдаушы, жоспарлаушы, түрлендіруші және атқарушы деп ажыратады. Басқарылатын объекті мен өлшеуіш жүйелердің шығыстық құрылғылары арасында әрқашан физикалық шама – электр сигналы тектес өлшеуіш түрлендіргіштер болады. Осындай түрлендіргіштерді түрлендіріп бергіш (датчик) деп атайды. Өлшеуіш түрлендіргіштер – түрлендіріп бергіштер түрлендіргіштердің дербес түрі болып саналады. Автоматты реттеу жүйесінің алгоритмдік, функционалдық және конструкциялық құрылымдары болады. Автоматты реттеу жүйесінің *алгоритмдік құрылымы* деп әр бөлігі ақпаратты түрлендірудегі белгілі бір алгоритмді орындауға арналған құрылымды атайды. Автоматты реттеу жүйесінің функционалдық құрылымында әрбір бөлік белгілі бір қызмет атқарады. Егер автоматты басқару жүйесі құрылымының әр бөлігі жеке конструкциялық тұтастық құратын бөлік болса, ондай құрылымды *конструкциялық құрылым* деп атайды. Басқару жүйесінің құрылымын график бойынша кескіндеуді *құрылымдық схема* дейді. Белгілі бір ерекшеліктерімен топталған автоматты жүйе бөлігін график түрінде, ішінде бұл жүйенің оның қандай бөлігі екендігін білдіретін шартты белгісі бар төртбұрышпен кескіндейді. Автоматты жүйенің бөліктерінің арасында берілетін әсер жолын сол әсер берілетін бағыт бойымен бағыттауыш сызықпен кескіндейді.

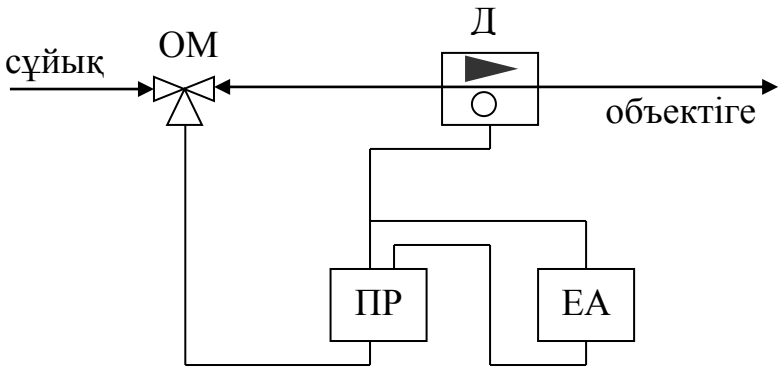
Автоматты басқару жүйесінің, не автоматты құрылғының құрылымдық схемасындағы бөліктері арасындағы берілетін әсердің бағыты мен жолын көрсететін қарапайым құрамдас бөлігін *құрылымдық схеманың байланысы* деп атайды.

Жалпы алғанда автоматты жүйенің басқарушы құрылғысы (1.2-сурет) негізгі әсер тізбегіндегі функционалды құрылғысынан (ҚБҚ) және қосымша кері байланыс құрылғысынан (ҚКБҚ) тұрады. Басқарушы құрылғы өзінің шығыс тізбегінде тұрған атқарушы тетікке (АТ) әсерін тигізеді, ал ол өз кезегінде реттеуші орган (РО) арқылы басқарылатын объектіге (БО) әсер етеді. Басқарылатын шама өлшеуіш құрылғысымен (ӨҚ) өлшенеді.



1.2-сурет. Автоматты басқару жүйесінің функционалдық схемасы

1.1-есеп. 1.3-суретінде көрсетілген объектіге берілетін сұйық шығынының автоматты реттеу жүйесінің функционалдық схемасын құру қажет.



1.3-сурет. Сұйық шығынының АРЖ принципиалдық схемасы

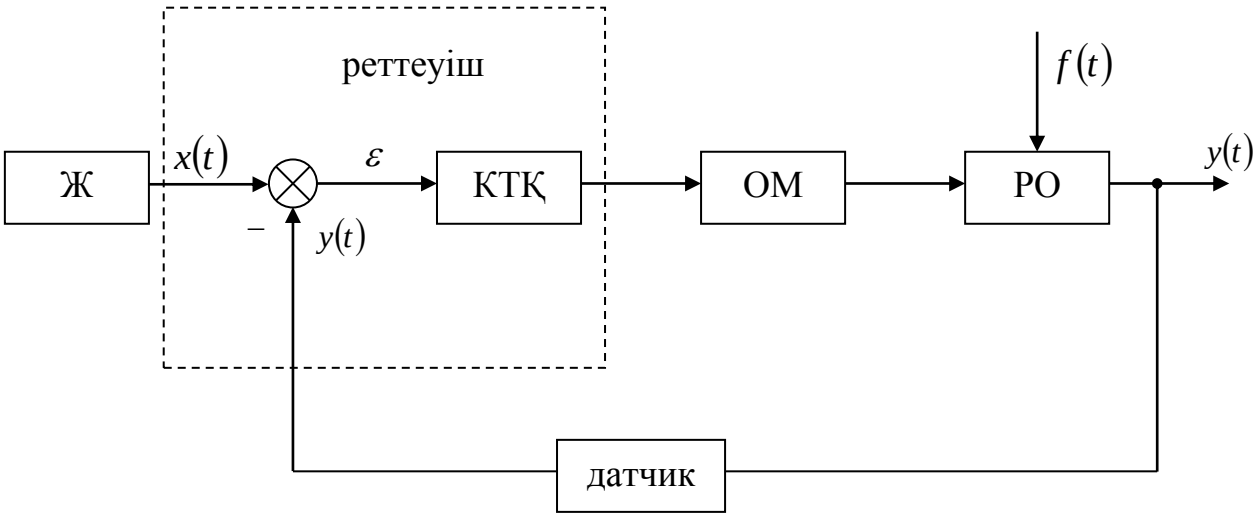
Ш е ш і м і. Объектіге берілетін сұйық шығынының автоматты реттеу жүйесі РО реттелетін объектіден – объектіге сұйық жібергіш құбыр бөлігінен, пневматикалық реттеуіштен (ПР), мембранды орындаушы механизмнен (ОМ), қашыққа ақпарат жеткізе алатын манометрлік датчиктен (Д), құрамында жоспарлаушы және күшейткіш түрлендіргіш құрылғысы (КТҚ) бар екіншілік аспаптан (ЕА) тұрады.

Жүйе төмендегідей жұмыс істейді. Датчик объектіге берілетін сұйықтың шығынын өлшеп, оған пропорционал сигналды реттеуіштегі салыстырушы элементке жеткізеді. Яғни, *y(t)* сұйықтың шығыны реттелетін шама.

Салыстырушы элементтің екінші кірісіне жоспарлаушы құрылғыдан сұйық шығынының *x(t)* берілген (жоспарланған) мәні беріледе, онда осы екі шама салыстырылып, шығысында олардың айырымына сәйкес $\varepsilon = x(t) - y(t)$ қателік сигнал пайда болады. Бұл сигнал реттеуші сигнал ретінде орындаушы механизмге әсерін тигізеді.

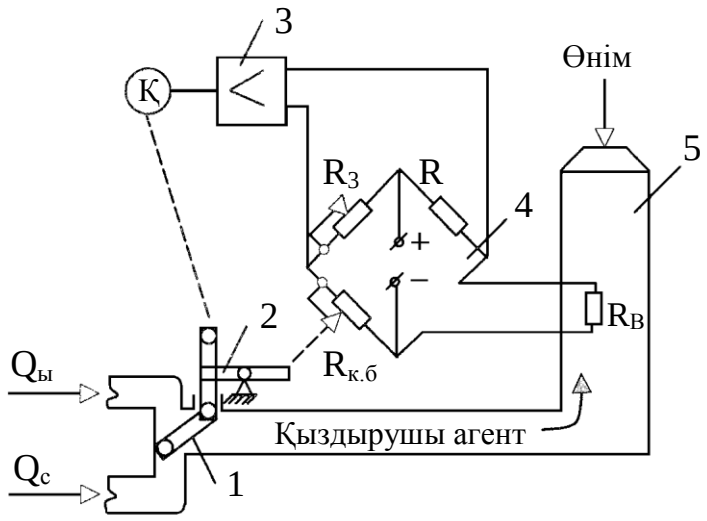
Орындаушы механизмнің клапаны (қалақшасы) сұйықтың берілу шығынын, оның берілген (жоспарланған) шамасына тең болғанына дейін өзгертіп отырады. Клапанның белгілі бір орнықкан күйінде $\varepsilon = 0$ болады да, жүйе берілген режимде жұмыс істейді.

Қарастырылған АРЖ жұмыс істеу принципін білгеннен кейін, оның функционалдық схемасын құруға болады (1.4-сурет). 1.4-суреттегі: Ж – екіншілік аспапта орналасқан жоспарлаушы құрылғы; y – объектіге берілетін G сұйық шығыны; f – қобалжыту әсері. Қалғандарының аттары жоғарыда келтірілген.



1.4-сурет. Объектіге берілетін сұйық шығынының АРЖ функционалдық схемасы

1.2-есеп. 1.5-суретте кептіргішке берілетін қыздырушы агенттің температурасының АРЖ-сының принциптік схемасы келтірілген. Осы жүйенің функционалдық схемасын құру қажет.



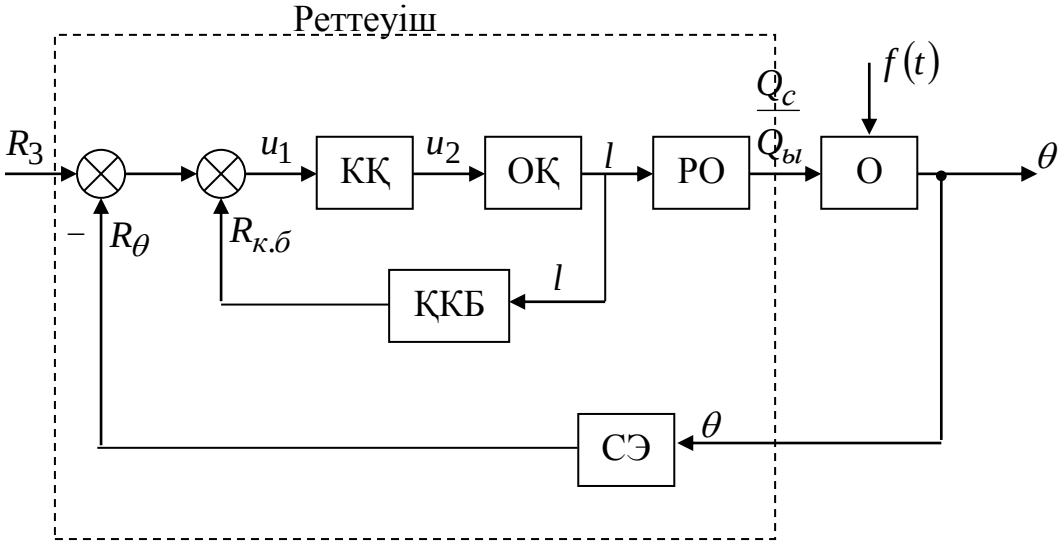
1.5-сурет. Кептіргішке берілетін жылутасығыш температурасының АРЖ принциптік схемасы

Ш е ш і м і. Бұл жүйедегі реттелуші объект – 5 кептіргіш, ал реттелетін шама оған берілетін қыздырушы агенттің температурасы θ. Оны орындаушы

механизм ретіндегі Қ қозғалтқыштың күшімен 1 заслонканы бұру арқылы өзгертіп отыруға болады. Реттеуші орган – заслонка – кептіргішке берілетін Q_c суық және $Q_ы$ ыстық ауалардың өзара қатынастарын өзгерту арқылы қыздырушы агенттің температурасын реттеп отырады. Ауа мен газ араласқан жылутасығыштың температурасы жүйедегі сезімтал элемент ретіндегі R_θ термокедергісімен өлшенеді, ал 4 өлшегіш көпір жоспарлаушы құрылғы мен салыстырушы элементтің функциясын атқарады. Жылутасығыш температурасының берілген мәніне сәйкес «Эталондық кернеуді» $R_З$ кедергісінің қозғалтқышын ығыстыру арқылы алады. Схемадағы R әрпімен көпірдің бір иығындағы кедергі белгіленген, $R_З$ және R_θ кедергілері өлшегіш көпірдің әр түрлі иықтарына орналасқандықтарынан, мұнда R_θ термокедергісінің кернеуі өзінің берілген мәніне сәйкес кернеумен салыстырылады. Қателік, жоспарлаушы $R_З$ пен сезімтал R_θ элементтеріндегі кернеулердің айырымына, яғни температураның берілген мәнінен ауытқуына тең болады. Қателік сигналын З күшейткіш арқылы күшейтіп, Қ электроқозғалтқыштың айналу бағытын басқару үшін қолданады.

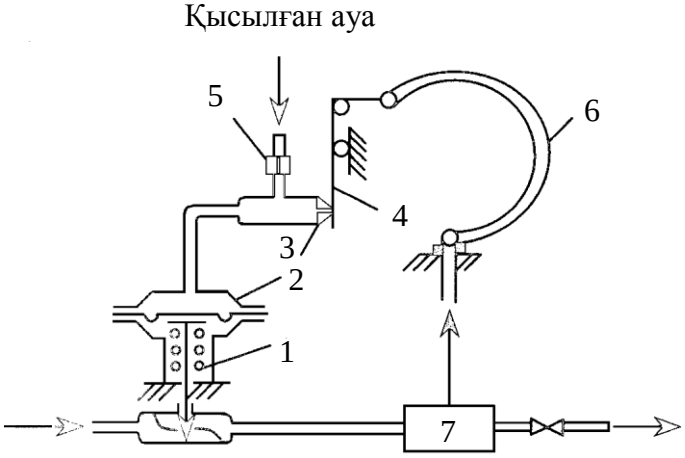
Жүйе былайша жұмыс істейді. Егер қобалжыту әсерінің ықпалымен жылутасығыштың температурасы берілген мәнінен ауытқып кетсе, өлшегіш көпірдің шығысында қателік сигналы пайда болып, күшейткіш арқылы реверсивті электроқозғалтқышқа беріледі. Электроқозғалтқыш берілген реттеуші әсерінің таңбасына сәйкес жүйедегі қателік жойылғанға дейін реттеуші органды олай-бұлай ығыстыратын болады. Реттеу жұмысындағы орнықтылықты қамтамасыз ету үшін жүйеде күшейткіш пен орындаушы механизмді бірге қамтитын ҚКБ қатты кері байланыс қарастырылған. Конструктивтік тұрғыда ол қозғалтқышы 2 рычаг арқылы заслонкамен қатты байланысқан $R_{к.б.}$ өзгермелі кедергі түрінде іске асырылған. Заслонканың ығысуы l әрпімен, ал КҚ күшейткіш құрылғының кірісі мен шығысындағы кернеулер U_1, U_2 деп белгіленген.

1.6-суретінде кептіргіш жылутасығышы температурасы АРЖ-нің функционалдық схемасы бейнеленген.



1.6-сурет. Температураны реттеу автоматты жүйесінің функционалдық схемасы

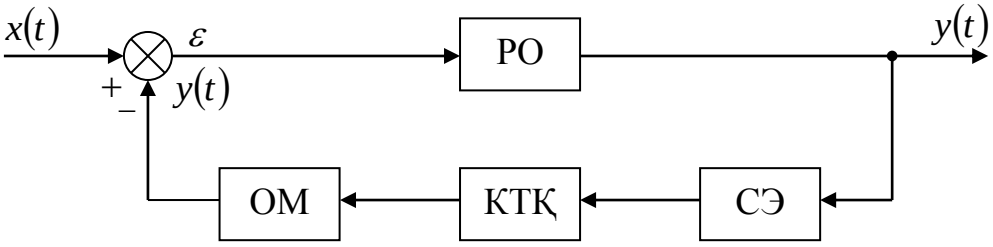
1.3-есеп. 1.7-суретте резервуардың (реттеу объектісі) қысымының АРЖ-сының принциптік схемасы көрсетілген. Осы жүйенің функционалдық схемасын құру керек.



1.7-сурет. Орта қысымы АРЖ принциптік схемасы

Ш е ш і м і. Қысымның АРЖ-сы 7 реттеу объектісінен, реттеуіштің өлшегіш элементі болатын 6 манометрлік серіппеден, 4 заслонкадан, 5 дроссель арқылы қоректік ауа берілетін 3 сопладан және екі орындаушы механизмнен тұрады.

Жүйе былайша жұмыс істейді. Реттелуші объектінің қысымы берілген мәнінен ауытқыды делік. Бұл жағдайда манометрлік пружина заслонканы соплаға қатысты ығыстырады да орындаушы механизмнің клапанына берілетін ауаның қысымын өзгертеді. Ауытқу сигналының таңбасына сәйкес орындаушы механизмнің штогы не олай, не бұлай қозғалып реттелуші объект резервуарда қажетті қысымның болуын қамтамасыз етеді.



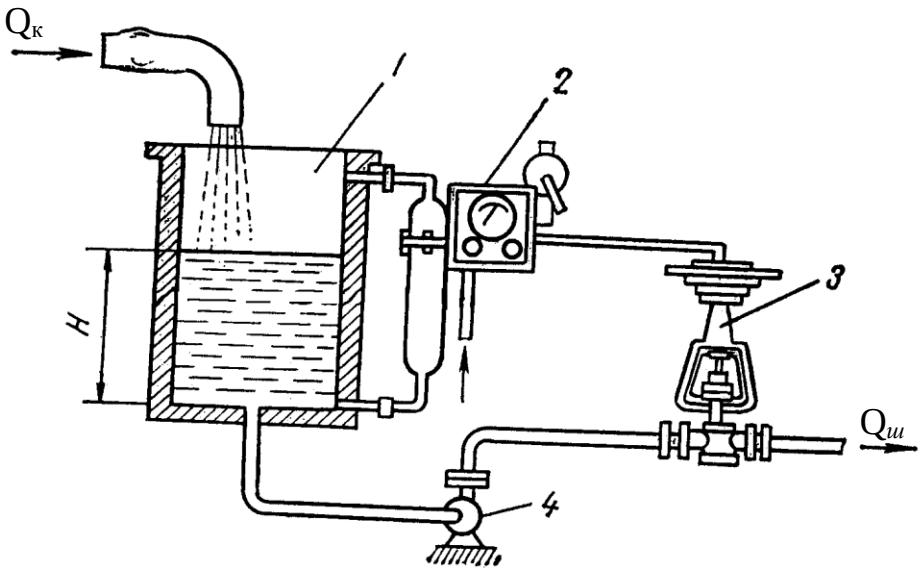
1.8-сурет. Орта қысымы АРЖ функционалдық схемасы

Бұл автоматты реттеу жүйесінің функционалдық схемасын 1.8-суретте көрсетілгендей етіп қарастыруға болады.

Мұндағы ортаға қажетті қысым ұсталып тұратын РО реттелуші объект – резервуар, СЭ сезімтал элемент – манометрлік пружина, КТҚ күшейткіш-түрлендіргіш құрылғы –«сопло-заслонка» түйіні, ОМ – орындаушы механизм – пневматикалық клапан.

Қысымның берілген мәні, жоспарлаушы құрылғы ретінде қолданылатын пневматикалық клапанның бір серіппесінің сығылу дәрежесі бойынша тағайындалады.

1.4-есеп. 1.9-суретте келтірілген сұйық деңгейін автоматты реттеу жүйесінің жұмыс істеу принципімен танысып, оның функционалдық схемасын құрыңыз.



1.9-сурет. Объектідегі сұйық деңгейінің
автоматты реттеу жүйесінің принципиалдық схемасы

Ш е ш і м і. Бұл автоматты жүйеде 1 реттеу объектісі (гидравликалық объект) арқылы ағып жатқан сұйықтың H деңгейі реттеледі. Жүйедегі реттелетін параметрдің ағымдағы мәні 2 пропорционал деңгей реттеуішімен қабылданып отырады, ал ол өз кезегінде шығысында сығылған ауаның қысымы болатын шығыстық әсермен орындаушы 3 механизмге, яғни пневматикалық мембранды реттеуіш клапанның жұмысына ықпалын тигізеді. Бұл клапан реттеу объектісінен ағатын сұйықтың $Q_ш$ шығынын өзгерту үшін қолданылған, сол себептен ол 4 ортадантепкіш насостың сорылмалы тұсында орналасқан. Объектіге берілетін сұйықтың $Q_к$ ағымының өзгерісі жүйедегі қосалқы қобалжыту әсері болады.

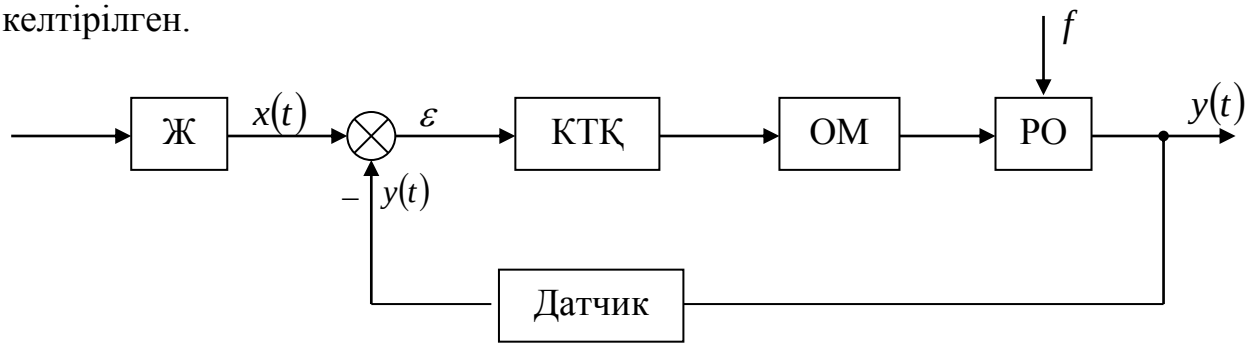
АРЖ жұмысын былай түсіндіруге болады. Егер объектідегі сұйықтың деңгейі берілген мәніне сәйкес болып тұрса, кірістегі $Q_к$ мен шығыстағы $Q_ш$ сұйықтар шығыны бірдей болады да, жүйе орнықты күйде болады, яғни реттеуіш ешқандай реттеуші әсерді түзбейді.

Қосымша қобалжыту әсері өзгерсе, мысалы, кірістегі $Q_к$ сұйық шығыны көбейсе, объектідегі сұйық деңгейі де өседі.

Деңгейдің берілген мәнінен ауытқуы туып, жүйеде қателік пайда болады. Бұл қателік мембранды орындаушы механизмге берілетін сығылған ауаның қысымын өзіне пропорционал етіп өзгертеді. Нәтижесінде объектіден

ағатын сұйықтың шығыны өсіп, сұйық деңгейінің өзгеру жылдамдығы азаяды. Сұйық шығынының өсуі кірістегі және шығыстағы шығындардың теңелгеніне дейін жалғасады да, бұл тепе-теңдік туғанда жүйе орнығып, объектідегі сұйық деңгейінің өсуі тыйылады.

Қарастырылған АРЖ функционалдық схемасы 1.10-суретте келтірілген.



1.10-сурет. Сұйық деңгейінің АРЖ функционалдық схемасы:
Ж – жоспарлаушы буын; КТҚ – күшейткіш түрлендіргіш құрылғы;
ОМ – орындаушы механизм; РО – реттелуші объект.

1.5-есеп. Аппараттағы пульпаның тығыздығын автоматты реттеуші жүйенің құрылымдық схемасын және беріліс функциясын құру қажет. Аппаратта дифманометрмен бір комплекте істейтін пъезометрлік тығыздық датчигі орналасқан (1.11-сурет). Пневматикалық изодромды реттеуіш датчиктен сигнал түскен кезде, аппаратқа берілетін су шығынын реттейтін пневматикалық мембранды клапанға әсерін тигізеді. Жүйе элементтерінің беріліс функциялары, яғни:

Пъезометрлік тығыздық өлшегіштікі (датчик)

$$W_1(p)=\frac{K_1}{T_1 p+1};$$

Изодромды реттеуіштікі (реттеуіш)

$$W_p(p)=\frac{T_u p+1}{D\cdot T_u p},$$

D – дроссильдеу ауқымы; T_u – изодром уақыты.

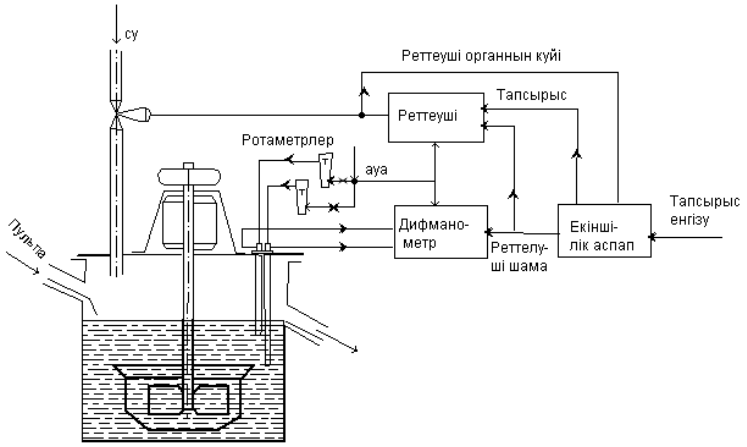
Пневматикалық клапандікі (орындаушы механизм)

$$W_2(p)=\frac{K_2}{T_2(p)+1};$$

Объектінікі (аппарат)

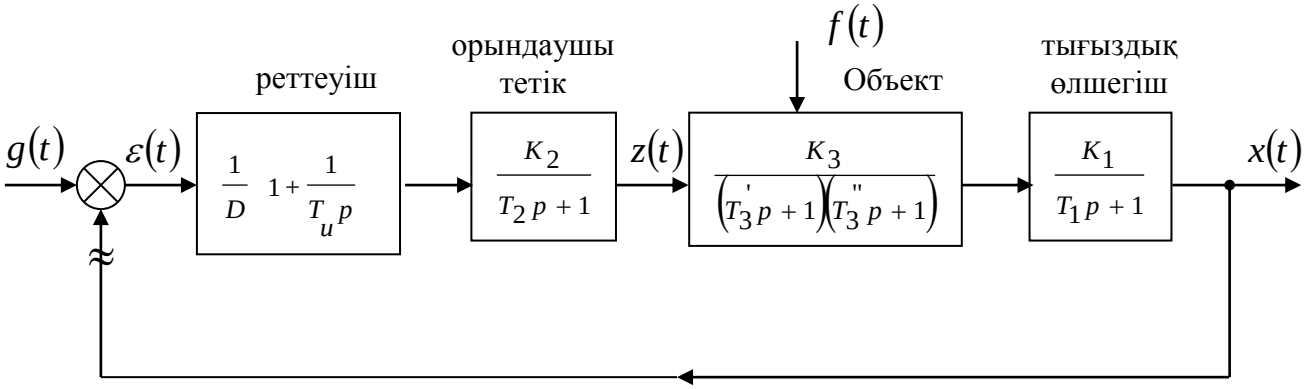
$$W_3(p)=\frac{K_3}{\left(T_3^{'}p+1\right)\left(T_3^{''}p+1\right)}$$

белгілі делік.

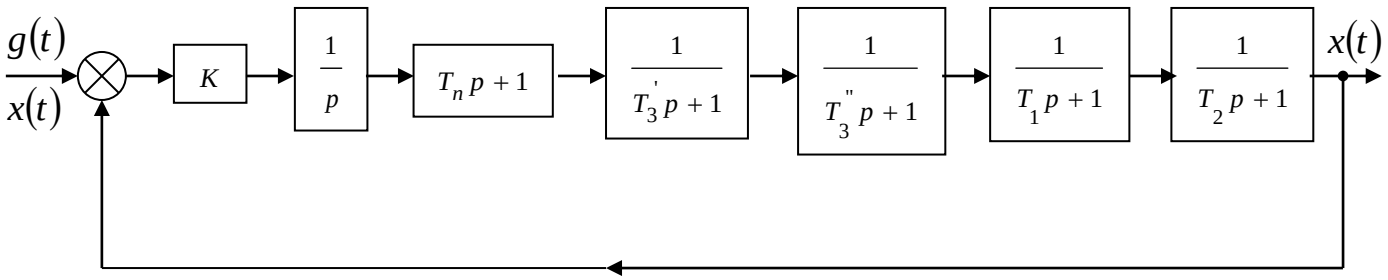


1.11-сурет. Пульпа тығыздығын автоматты реттеуші жүйенің схемасы

Ш е ш і м і: Құрылымдық схеманы құру келесі тұрғыдан қарастырылады. Тығыздық өлшеуіштің $x(t)$ сигналы реттеуіштің алдында реттелетін шаманың $g(t)$ берілген мәнімен салыстырылады. Осы екі шаманың айырымы $\varepsilon(t)$, яғни реттеу қателігі реттеуіштің кірісіне беріледі. Реттеуіш орындаушы механизм арқылы объектіге $z(t)$ сигналымен әсер етеді. Жүйенің құрылымдық схемасы 1.12,*а*-суретте келтірілген.



а



б

1.12-сурет. Тығыздықты автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық *(а)* және оның типтік буындардан тұратын эквиваленттік *(б)* схемалары

Негізгі кері байланысты үзіп, реттеуші әсерге сәйкес ажыратылған жүйенің беріліс функциясын табайық:

$$W(p)=\frac{K_1K_2K_3(T_y p+1)}{D\cdot T_y p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)}.$$

Қобалжыту әсерінің тікелей объектіге беріліп тұрғандығын (аппаратқа келетін пульпаның тығыздығы) ескере отыра, ажыратылған жүйенің қобалжыту әсеріне сәйкес беріліс функциясын объекті мен тығыздық өлшеуіш беріліс функцияларының көбейтіндісіне тең деп алуға болады:

$$W_o(p)=W_3(p)W_1(p)=\frac{K_3K_1}{(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)(T_1 p+1)}.$$

Тұйықталған жүйенің реттеуші әсерге сәйкес беріліс функциясы:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{K_1K_2K_3(T_u p+1)}{D\cdot T_u p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)+K_1K_2K_3(T_u p+1)},$$

ал қобалжыту әсеріне сәйкес беріліс функциясы:

$$F(p)=\frac{W_o(p)}{1+W(p)}=\frac{K_1K_2K_3T_u p(T_2 p+1)}{T_u p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)+K_1K_2K_3(T_u p+1)}.$$

Алынған $F(p)$ беріліс функциясына қарап, реттеу жүйесінде $f(t)$ қобалжыту әсеріне сәйкес бірінші ретті астатизмнің бар екенін көруге болады, яғни уақыт ағымында тұрақты шамаға ұмтылатын $f(t)$ қобалжыту әсерінің кез келген мәнінде орныққан режимдегі қателік нөлге тең.

Ажыратылған жүйенің беріліс коэффициентін

$$K=\frac{K_1K_2K_3}{DT_u}$$

деп алып, жүйенің беріліс функциясын мына түрде жазуға болады:

$$W(p)=\frac{K(T_u p+1)}{p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)}.$$

Осы өрнектің көмегімен автоматты реттеу жүйесін уақыт тұрақтылары T_1, T_2, $T_3^{'}$, $T_3^{''}$ болатын төрт апериодты, интегралдаушы, беріліс коэффициенті K күшейткіш және уақыт тұрақтысы T_u дифференциалдаушы буындардан тұратын бірконтурлы жүйе түрінде көрсетуге болады. Бұл эквивалентті жүйенің құрылымдық схемасы 1.12,*б*-суретте келтірілген.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар:

1. Мына элементтердің қайсысы АРЖ үшін функционалды қажетті болып саналады:

а) реттелуші объект;
б) өлшеуіш құрылғы;
в) күшейткіш-түрлендіргіш құрылғы;
г) жоспарлаушы құрылғы;
д) орындаушы механизм?

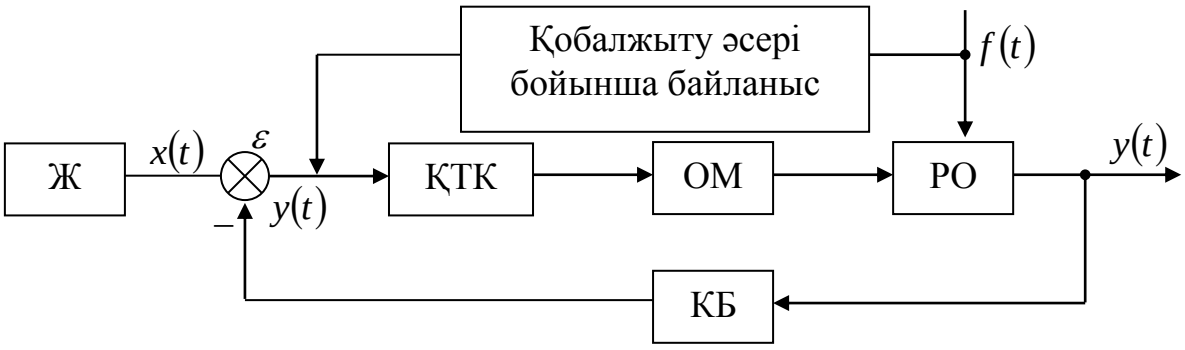
2. *y(t)* реттелетін шаманың өзінің *x(t)* берілген мәнінен ауытқуының негізгі себептері не:

а) объектіге берілетін сыртқы қобалжыту әсері;
б) эксплуатациялау процесінде реттелетін объектінің немесе басқа да АРЖ элементтерінің параметрлерінің өзгеруінің әсері;
в) реттеуіштің баптау параметрлерінің өзгеруінің әсері?

3. Жоғарғы 2 сұрақта көрсетілген факторларды түрлендіру нәтижесінде алынып және ауытқуды жою мақсатында реттелетін объектінің кірісіне берілетін физикалық шама қалай аталынады:

а) тапсырыстық (жоспарлаушы) әсер;
б) реттеуші әсер;
в) қателік (айырымдық) сигнал?

4. Берілген функционалдық схема (1.13-сурет) бойынша мына сұрақтарға жауап беріңіз:



1.13-сурет. АРЖ функционалдық схемасы

1) АРЖ-да мына реттеу принциптерінің қайсысы қолданылған:

а) қобалжыту әсері бойынша;
б) ауытқу әсері бойынша?

2) АРЖ-да тек ауытқу принципін қамтамасыз ету үшін ондағы қай байланысты үзу қажет? Бұл жағдайда АРЖ тұйықталған реттеу циклын құра ма?

3) АРЖ-да тек қобалжыту принципі бойынша басқаруды қамтамасыз ету үшін қай байланысты үзу керек? Бұл байланысты үзгеннен кейін АРЖ қандай түрде болады:

а) тұйықталған реттеу жүйесі;

б) ажыратылған реттеу жүйесі?

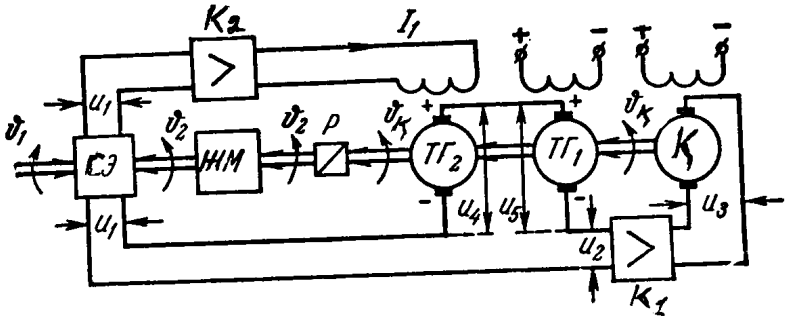
4) АРЖ қай элементіне реттеуші әсер берілген?

5) Схемадағы салыстыру элементін көрсетіңіз.

6) Қателік (айырымдық) сигнал қай элементтің шығысынан алынады?

7) Қай байланыс арқылы АРЖ тұйықталған реттеу циклында жұмыс істейді?

1.6-есеп. Айнымалы демпфирлі қадағалаушы жүйенің құрылымдық схемасын және дифференциалдық теңдеуін құру қажет (1.14-сурет).



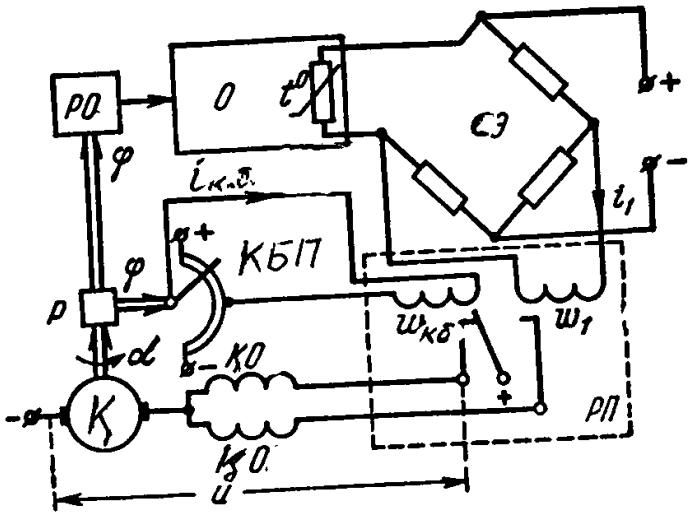
1.14-сурет. Айнымалы демпфирлі қадағалаушы жүйе

Суретте: ν_1, ν_2 – командалық және орындаушы осьтердің бұрылу бұрыштары, $\nu = \nu_1 - \nu_2$ – айырымдық бұрыш (қателік); СЭ – сезімтал элемент (айырымдық бұрыш датчигі); ЖМ – жұмыстық механизм (объект), K_1, K_2 – күшейткіштер, $ТГ_1$, $ТГ_2$ – тахогенераторлар, Қ – қозғалтқыш, Р – редуктор.

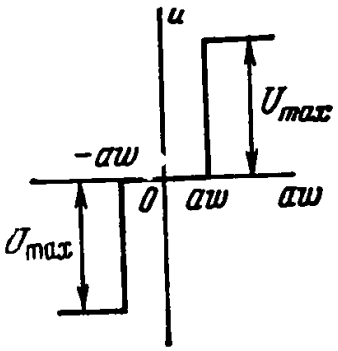
Жүйедегі жергілікті кері байланыс тізбектеле және қарама-қарсы қосылған тахогенераторлар арқылы іске асырылады. Бұл тахогенераторлар кернеулерінің айырымы $U_4 - U_5$ сезімтал элементтен алынған U_1 кернеуімен қосылады. Үлкен айырымдық ν бұрышы болған кезде $ТГ_2$ тахогенераторының қоздыру орамындағы ток ν бұрышына пропорционал болатындығынан $U_4 > U_5$. Сондықтан K_1 күшейткішінің кірісіндегі толық сигнал $U_2 > U_1$ болады да, ол процестің өрбу жылдамдығының үлкеюін қамтамасыз етеді. Ал айырымдық бұрыш ν аз болған кезде $U_4 < U_5$, яғни K_1 күшейткішінің кірісіндегі $U_2 < U_1$, сондықтан жүйе асыра реттеуі жоқ болатын төмен жылдамдықпен жұмыс істейді. Жүйенің теңдеуін құрған кезде жүктеменің статикалық моментін, қозғалтқыштың якорь тізбегіндегі және $ТГ_2$ тахогенератордың қоздыру орамындағы өтпелі процестердің

әсерлерін ескермей-ақ қоюға болады. K_1 және K_2 күшейткіштері инерциясыз буындар.

1.7-есеп. 1.15-суретте келтірілген температураны автоматты реттеу жүйесінің дифференциалдық теңдеуін және құрылымдық схемасын құру қажет.



1.15-сурет. Температураны автоматты реттеу жүйесінің принциптік схемасы



1.16-сурет. Полярланған реленің статикалық сипаттамасы

Суреттегі: О – реттеу объектісі (бірінші ретті апериодтық буын); СЭ – сезімтал элемент (термокедергілі көпір); РП – полярлік реле (күшейткіш); Қ – қозғалтқыш; ҚО – қозғалтқыштың қоздыру орамы; Р – редуктор; РО – реттеуші орган (заслонка); КБП – кері байланыс потенциометрі.

Жүктеменің статикалық моментінің, полярлік реле орамдарындағы өтпелі процестің және қозғалтқыштың уақыт тұрақтыларының әсерлерін ескермеуге болады. Полярланған реленің статикалық сипаттамасы 1.16-суретте келтірілген.

1.2. Реттеу объектілерінің теңдеуін құру және оларды типтік динамикалық буындармен көрсету. Буындардың уақыттық сипаттамалары

Автоматты реттеу жүйелерін құру үшін зерттелетін объектілерді алгебралық және дифференциал теңдеулермен өрнектеу қажет. Теңдеулердің статикалық не орныққан режим теңдеулері және динамикалық не өтпелі процесс теңдеулері тәрізді екі түрі бар. Статикалық теңдеулер жоспарланған әсердің тұрақты болуына қарай, әдетте алгебралық болып табылады, ал динамикалық теңдеулер әдетте дифференциалды, олар ауытқыту күшінің әсерінен туатын өтпелі процесс кезіндегі, не олар аяқталғаннан кейінгі жүйенің қалпын айқындайды. Динамика теңдеуін жасау үшін автоматты жүйе жеке буындарға ажыратылып, олардың әрқайсысы үшін сол буында өтетін процеске тән физикалық заң негізіне сәйкес теңдеулер құрылады. Автоматты жүйенің барлық элементтері үшін құрылған динамика теңдеулерінің жиынтығы автоматты басқару процесін анықтайды.

$x_{кір}$ арқылы элементар буынның кірісіне ықпал ететін физикалық шаманы, ал $x_{шығ}$ арқылы сол буынның шығыстық параметрін белгілесек, онда буынның дифференциал теңдеуі жалпы түрде мынадай болады:

$$a_0\frac{d^n x_{шығ}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x_{шығ}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x_{шығ}=$$

$$=b_0\frac{d^m x_{кір}}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x_{кір}}{dt^{m-1}}+\cdots+b_m x_{кір},$$

мұндағы n – $x_{шығ}$ өзгерісі өрнектелетін дифференциал теңдеудің реті; t – уақыт; m – $x_{кір}$ өзгерісі өрнектелетін дифференциалды теңдеудің реті.

Автоматты реттеу жүйелеріне енетін буындардың құрылымдық, схемалары мен физикалық әрекет принциптері әр түрлі болуы мүмкін. Бірақ орнықтылықты талдау және өтпелі процестерді есептеу тұрғысынан алып қарағанда, аталған белгілер маңызды емес екендігін және олардың әр буынының тек динамикалық қасиеттері ғана көңіл аударарлықтай болатындығын айтуға болады. Сол себепті басқару теориясында буындарды динамикалық қасиеттері бойынша жіктеу қолданылады. Автоматты реттеу жүйелерінде негізгі типтік буындарға күшейткіш (инерциясыз), апериодтық (инерциялық), интегралдауыш, дифференциалдауыш, тербелмелі және кешігу буындары жатады. Бұл буындар бастапқы нөлдік шарттардағы оларда өтетін өтпелі процестің түріне қарай ажыратылады (1.1-кесте), буындардың дифференциалдық теңдеулері *операторлық* әдісті қолдану арқылы шешіледі. Бұл әдісте дифференциалдық теңдеудегі дифференциалдау $\frac{d}{dt}$ символы p оператор символына ауыстырылады ($\frac{d}{dt}\to p$). Алынған операторлық

формадағы теңдеуден буынның немесе жалпы жүйенің *W(p)* беріліс функциясын табады.

Дифференциалдық теңдеудің операторлық формада жазылған түрінен мынадай өрнекті алуға болады:

$$y(p) = W(p)\, x(p).$$

W(p) өрнегі буынның (жүйенің) беріліс функциясы немесе *операторы* деп аталады.

Уақыттық сипаттама деп жүйе кірісіне берілген бірлік сатылы ықпалдың нәтижесіндегі жүйенің бір орнықты күйден екінші орнықты күйге өту кезіндегі шығыстық шамасының уақыт функциясымен өзгеруі деп түсіну қажет.

Егер жүйе бір орнықты күйден екінші бір орнықты күйге ауысқандағы барлық уақыт өтуімен

$$x_{кір}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

бірлік кірістік ықпал буынға не жүйеге ұдайы беріліп тұрса, онда уақытша сипаттаманы буынның не жүйенің *өтпелі функциясы* дейді. Өтпелі функцияның графиктік кескінін буынның не жүйенің *өтпелі сипаттамасы* немесе екпін қисығы дейді.

Өтпелі сипаттама немесе екпін қисығы *h(t)* немесе *y(t)* деп белгіленеді.

Реттеудің автоматты жүйесіндегі буынның операторы немесе беріліс функциясы деп, нөлдік бастапқы шарттардағы шығыстық және кірістік шамалардың арасындағы Лаплас бойынша өрнектелген кескіндерінің қатынасын айтады:

$$W(p) = \frac{x_{шыг}(p)}{x_{кір}(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{K(p)}{Q(p)},$$

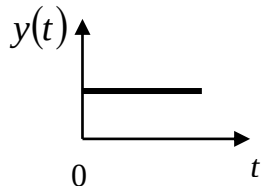
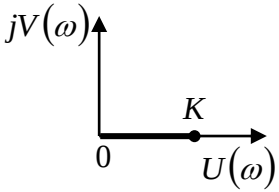
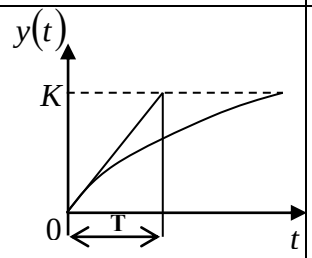
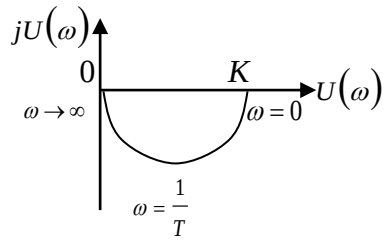
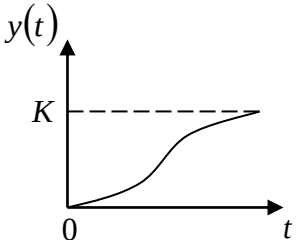
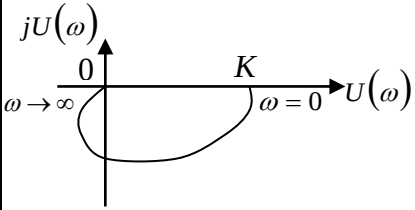
мұндағы $p = \alpha \pm j\beta$ – комплекстік оператор.

Сонымен, дифференциалдық теңдеу бойынша буынның (жүйенің) беріліс функциясын құру төмендегідей жолмен іске асырылады. Дифференциалдық теңдеудің екі жағындағы туындылар, осы туындыға сәйкес ретке тең дәрежесі бар *p* символына ауыстырылады. Нәтижесіндегі оң жақта алынған көпмүше жүйе операторының алымы, ал сол жақтағы көпмүше оператордың бөлімі болады.

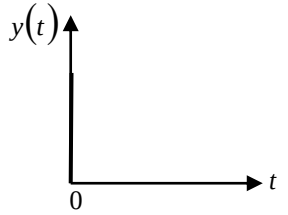
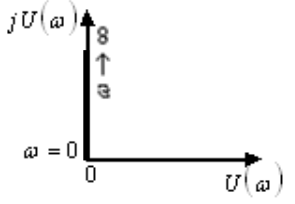
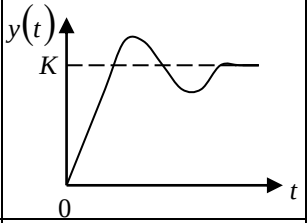
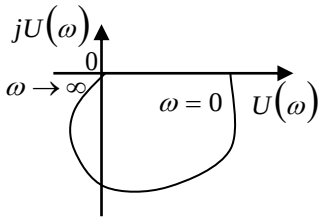
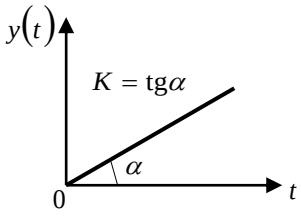
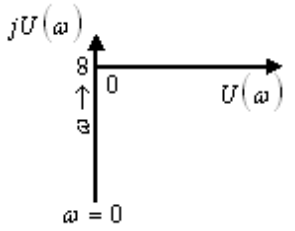
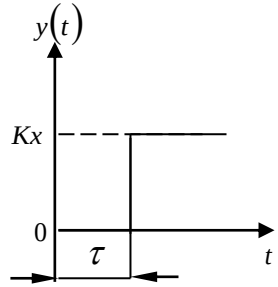
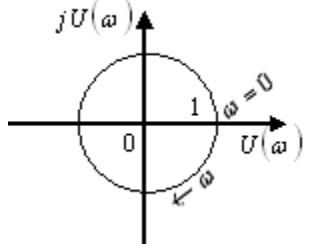
1.8-есеп. Тұрақты ток электрқозғалтқышының дифференциалдық теңдеуін және схемасын құру қажет. Электрқозғалтқыш якорь тогымен басқарылады (1.17-сурет).

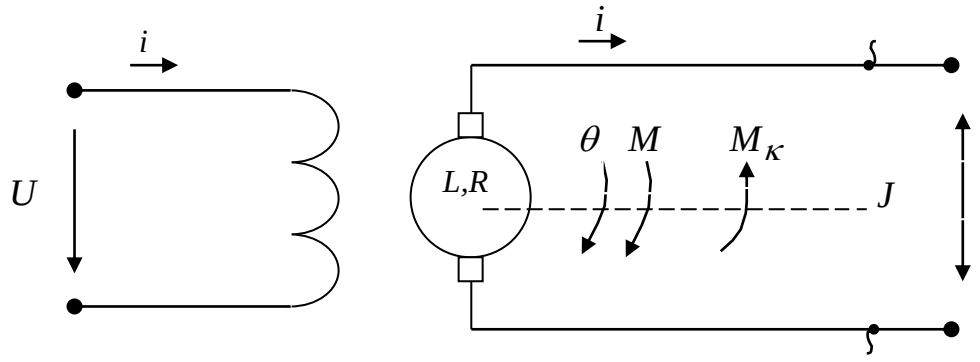
1.1-кесте

Типтік буындар және олардың сипаттамалары

Буынның аты	Буынның дифференциалдық теңдеуі	Беріліс функция $W(p)$	Жиіліктік сипаттамалары		Өтпелі сипаттамасы	Амплитудалық-фазалық сипаттамасы $A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$
			$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$		
1	2	3	4	5	6	7
Инерциясыз	$y(t)=Kx(t)$	K	K	0		
Апериодты бірінші ретті (инерциялы)	$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t)$	$\frac{K}{Tp+1}$	$\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$	$-\mathrm{arctg}\omega T$		
Апериодты екінші ретті	$T_2^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T_1\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t)$	$\frac{K}{T_2^2p^2+T_1p+1}$ $T_2<0{,}5T_1$	–	–		

1.1-кестенің жалғасы

1	2	3	4	5	6	7
Идеал дифферен-циалдауыш	$y(t)=K\frac{dx(t)}{dt}$	Kp	$K\omega$	$\frac{\pi}{2}$		
Тербелмелі	$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t)$	$\frac{K}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$	$\frac{K}{\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\xi^2\omega^2T^2}}$	$-\text{arctg}\times\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2T^2}$		
Интеграл-дауыш	$y(t)=\int_0^t Kx(t)$	$\frac{K}{p}$	$\frac{K}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$		
Кешігу буыны	$y(t)=x(t-\tau)$	$e^{-p\tau}$	–	–		



1.17-сурет. Тәуелсіз қоздырмалы тұрақты ток электрқозғалтқышы

Ш е ш і м і: Есепті шығарғанда мынадай ұйғарымдар жасайық:

1) электрқозғалтқыш өсіндегі кедергі моменті жылдамдыққа сәйкес сызықтық тәуелділікпен өзгереді;

2) электрқозғалтқыштың магниттік жүйелеріндегі құйындық (вихревой) токтарды ескермейміз;

3) электрқозғалтқыш якорінің реакциясын да ескермейміз, яғни $U_қ$ = const.

Қозғалтқыш якорі электрлік тізбегінің сызықталған теңдеуі

$$e_қ(t) = L\frac{di}{dt} + Ri(t) + K_e\frac{d\theta_қ}{dt}, \qquad (1.2.1)$$

мұндағы K_e – электрқозғалтқыштың кернеу бойынша тұрақтысы.

Тәуелсіз қоздырмалы электрқозғалтқыштың сызықталған қозғау моменті

$$M_қ(t) = K_т i(t), \qquad (1.2.2)$$

мұндағы $K_т$ – электрқозғалтқыштың ток бойынша тұрақтысы.

Электрқозғалтқыш якорінің айналу теңдеуі

$$J_қ\frac{d^2\theta_қ}{dt^2} = M_қ(t) - M_к(t), \qquad (1.2.3)$$

мұндағы $J_қ$ – электрқозғалтқыш якорінің инерциялық моменті; $M_к$ – кедергі моменті.

Бірінші ұйғарымға сәйкес кедергі моментінің теңдеуін жазамыз:

$$M_к(t) = K_v\frac{d\theta_қ}{dt}, \qquad (1.2.4)$$

мұндағы K_v – электрқозғалтқыштың жылдамдылық үйкелістік тұрақтысы.

(1.2.1) ÷ (1.2.4) өрнектерін бірге қарастыра отыра мынадай теңдеулер жүйесін алуға болады:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R}\cdot e_{қ}(t) &= T_a\frac{di}{dt} + i(t) + \frac{K_e}{R}\frac{d\theta_{қ}}{dt};\\ j_{қ}\frac{d^2\theta_{қ}}{dt^2} &+ K_v\frac{d\theta_{қ}}{dt} = K_т i(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.5)$$

мұндағы $T_a = \frac{L}{R}$ – якорьдің электрмагниттік уақыттық тұрақтысы.

Бастапқы нөлдік шарттарды пайдаланамыз:

$t = 0$ болғанда $\theta_{қ} = 0$. Онда (1.2.5) өрнегіне Лаплас түрлендіруін қолдана отыра, мынаны аламыз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_{қ}(p)}{R} &= (T_a p + 1)I(p) + \frac{K_e}{R}p\tilde{\theta}_{қ}(p)\\ \left(J_{қ}p^2 + K_v p\right)&\tilde{\theta}_{қ}(p) = K_т I(p). \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.6)$$

Беріліс функцияларды табу үшін (1.2.6) жүйедегі бірінші теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$E_{қ}(p) = U_{a1}(p) + U_{a2}(p), \qquad (1.2.7)$$

мұндағы $U_{a1}(p) = R\,(T_a p + 1)\,I\,(p)$

$U_{a2}(p) = K_e\, p\, \tilde{\theta}_{қ}(p)$.

Осылардан

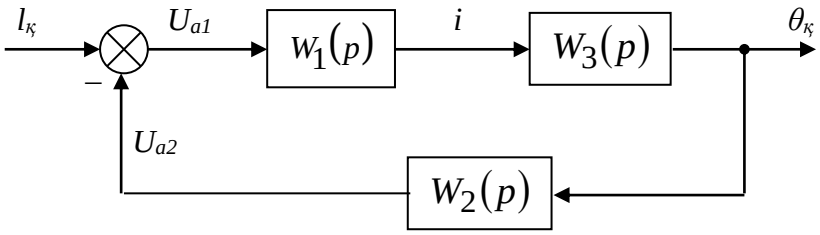
$$W_1(p) = \frac{I(p)}{U_{a1}(p)} = \frac{1/R}{T_a p + 1};$$

$$W_2(p) = \frac{\tilde{\theta}_{қ}(p)}{U_{a2}(p)} = K_e p.$$

$W_3(p)$ беріліс функциясын (1.2.6) теңдеулер жүйесіндегі екінші өрнектен анықтауға болады.

$$W_3(p) = \frac{\tilde{\theta}_{қ}(p)}{I(p)} = \frac{K_т}{p\left(J_{қ}p + K_v\right)}.$$

Алынған беріліс функцияларының және (1.2.7) теңдеуі көмегімен тәуелсіз қоздырмалы электрқозғалтқыштың құрылымдық схемасын тұрғызамыз (1.18-сурет).



1.18-сурет. Тәуелсіз қоздырмалы электрқозғалтқыштың
құрылымдық схемасы

1.9-есеп. Жинақтауышқа берілетін ағым Q_1, әкетілетін ағым Q_2, оның ішіндегі заттардың қоры M.

Жұмыс барысында бұл шамалар өздерінің орташа мәндеріне қатысты аздаған өсімшелерге ие болады, яғни

$$\Delta Q_1 = Q_1 + Q_{орт}\,;\;\; \Delta Q_2 = Q_2 - Q_{орт}\,;\; \Delta M = M - M_{орт}\,.$$

Әкетілетін ағымның тұрақты болмайтыны және оның заттар қорына тәуелді екендігі белгілі:

$$\Delta Q_2 = к\Delta M, \qquad (1.2.8)$$

мұндағы $к$ – пропорционалдық коэффициенті, басқаша айтқанда, неғұрлым қор саны көп болса, соғұрлым әкетілетін ағымның өсімшесі де көп болғаны. Бұл жағдайда жинақтауыштың *өздігінен теңесу* қасиеті бар деп айтады.

ΔQ_1 шамасы кірістік, ал ΔM шамасы шығыстық болғандағы жағдайлар үшін жинақтауыштың дифференциалдық теңдеулерін құру қажет. Екі жағдай үшін де объектінің уақыт тұрақтысын және беріліс коэффициентін анықтау керек.

Ш е ш і м і. Өсімшелер, шамалардың абсолют мәндері секілді бір-бірімен баланс теңдеуі бойынша байланысты:

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \Delta Q_1 - \Delta Q_2.$$

Бірінші жағдайда материалдық баланс теңдеуінен Q_2 өсімшесін шығарып тастау керек. (1.2.8) формуласын ескере отыра мына өрнекті аламыз:

$$\frac{d\Delta M}{dt} = \Delta Q_1 - к\Delta M \qquad \text{немесе} \qquad \frac{d\Delta M}{dt} + к\Delta M = \Delta Q_1,$$

мұндағы $к$ өздігінен *теңесу коэффициенті* деп аталады. Алынған теңдеуді мына түрде жазайық:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d\Delta M}{dt}+\Delta M=\frac{1}{\kappa}\Delta Q_1,$$

мұндағы $\frac{1}{k}=T$ коэффициенті уақыт бірлігімен өлшенеді де, жинақтауыштың *уақыт тұрақтысы* деп аталады.

Сызықты жинақтауыш үшін $\Delta Q_2 = \kappa\Delta M$ қатынасы үшін ғана емес, сонымен бірге осы шамалардың абсолют мәндері үшін де дұрыс: $Q_2 = \kappa M$, осыдан

$$T=\frac{1}{k}=\frac{M}{Q_2}.$$

Сызықты жинақтауыштың уақыт тұрақтысы ондағы материалдық қорының әкетілетін ағымға қатынасына тең. $\frac{1}{k}=K_б$ коэффициентін объектінің беріліс коэффициенті деп атайды. Біз қарастырған дербес жағдайда ол уақыт тұрақтысына тең.

Екінші жағдай үшін материалдық баланс теңдеуінен ΔM шамасын шығарып тастау керек:

$$\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\Delta Q_2}{dt}+\Delta Q_2=\Delta Q_1, \qquad (1.2.9)$$

осыдан уақыт тұрақтысының $T=\frac{1}{k}=\frac{M_{орт}}{Q_{орт}}$ екендігін, ал беріліс коэффициентінің бірге тең екендігін көреміз:

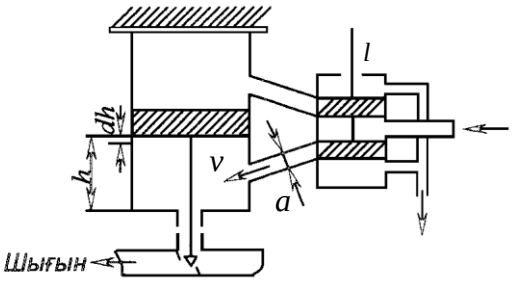
(1.2.9) теңдеуіндегі $\Delta Q_2(t) = y(t)$ айнымалы шығыстық шама, $\Delta Q_1(t) – \Delta Q_2(t) = x(t)$ айнымалы кірістік шама деп алып, реттеу объектісінің дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$y(t)=\frac{1}{T_u}\int x(t)dt.$$

Яғни, қарастырылып отырған жинақтауыш интегралдаушы буынға жатады.

1.10-есеп. 1.19-суретте схемалы көрсетілген гидравликалық жетектің дифференциалдық теңдеуін құру қажет. Кірістік шама (әсер) ретінде реттелетін қысымның салыстырмалы өзгерісін, ал шығыстық шама ретінде – жетек поршенінің салыстырмалы ығысуын алу керек. Гидравликалық

жетектің беріліс функциясын жазып, оның қандай динамикалық буынға жататынын анықтаңыз.



1.19-сурет. Реттеу объектісі – гидравликалық жетек

Ш е ш і м і. Суретте мынадай белгілер қолданылған:

h – орындаушы механизмнің немесе реттелетін орган ысырмасының ығысу шамасы, м;

l – поршень золотнигінің ығысу шамасы, м;

v – тесіктен майдың ағу жылдамдығы, м/с;

S – орындаушы механизм поршенінің ауданы, м^2.

Жетек поршені қозғалғанда көлем өзгерісін мына дифференциал теңдеумен көрсетуге болады:

$$sdh = lavdt$$

немесе

$$s\frac{dh}{dt} = lav. \qquad (1.2.10)$$

Кірістік шаманы $x = \frac{l}{l_{\max}}$, ал шығыстық шаманы $y = \frac{h}{h_{\max}}$ деп белгілейік те, бұл шамаларды (1.2.10) теңдеуіне қояйық.

$$h_{\max} \cdot s\frac{dy}{dt} = l_{\max} avx$$

немесе

$$\frac{h_{\max} s}{l_{\max} av} \cdot \frac{dy}{dt} = x. \qquad (1.2.11)$$

Золотник тесігінің салыстырмалы ашылу дәрежесін P реттелуші қысым өзгеруінің салыстырмалы мәні арқылы көрсетуге болады, яғни

$$y = \frac{l}{l_{\max}} = \frac{P}{P_{\max}}. \qquad (1.2.12)$$

(1.2.11) теңдеуіндегі туынды алдындағы көбейткішті T деп белгілейік. Олай болса, (1.2.12) белгілеуді ескере отыра мына өрнекті аламыз:

$$T = \frac{h_{\max} s}{P_{\max} av}.$$

Бұл алынған өрнек уақыт бірлігімен өлшенетін уақыт тұрақтылығы. Физикалық тұрғыдан қарағанда T уақыт тұрақтысы гидравликалық жетек поршенінің немесе реттейтін орган ысырмасының бір шеткі күйден екінші шеткі күйге жетуіне шығындалатын уақыт.

Сонымен жоғарыда келтірілген белгілеулерді ескере отыра гидравликалық жетектің дифференциалдық теңдеуін былай жазуға болады:

$$T\frac{dy}{dt} = x$$

немесе

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T}x.$$

Бұл дифференциалдық теңдеу операторлық түрде былай көрсетіледі:

$$py(p) = \frac{1}{T}x(p),$$

мұнан гидравликалық жетектің беріліс функциясын табуға болады:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1}{Tp} = \frac{K}{p},$$

мұндағы $K = \frac{1}{T}, \quad c^{-1}$

Беріліс функциясының өрнегінен гидравликалық жетектің интегралдауыш буынға жататындығын көреміз.

1.11-есеп. Температураны реттеу жүйесіндегі датчик – жанаспалы термометрдің дифференциалдық теңдеуін құру қажет. Сынапты жанаспалы термометрдің беріліс функциясын жазып, оны қандай типтік буынмен көрсетуге болатындығын анықтау керек.

Есепті шығарғанда сынапты жанаспалы термометрді екісыйымдылықты элемент деп есептеген жөн. Оның бірінші сыйымдылығы шыныдан жасалған **баллон,** ал екінші сыйымдылығы осы баллонның ішіне құйылған сынаптың көлемі.

Ш е ш і м і. Жылулық баланс шартына сәйкес сынапты жанаспалы термометрдің әрбір сыйымдылығы үшін келесі теңдеулерді жазуға болады:

$$k_1 \frac{d\Delta\theta_1}{dt} = \alpha_1 S_1 \left(\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1\right) \qquad (1.2.13)$$

және

$$k_2 \frac{d\Delta\theta_2}{dt} = \alpha_2 S_2 \left(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2\right) \qquad (1.2.14)$$

мұндағы k_1, k_2 – шыны баллон мен сынап қабырғаларының жылусыйымдылығын, тығыздығын және көлемін ескеретін сәйкес коэффициенттер;

$\Delta\theta_0$, $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ – орта ауасының, шыны баллон қабырғасының және сынаптың температураларының сәйкес өсімшелері;

S_1 және S_2– баллон шыны қабырғасының және баллон ішіндегі сынаптың беттік аудандары;

α_1 және α_2 – ауадан шыны баллонға және шыны баллоннан сынапқа жылу беру коэффициенттері.

(1.2.13) және (1.2.14) теңдеулерін былай етіп түрлендірейік.

$$\frac{k_1}{\alpha_1 S_1}\frac{d\Delta\theta_1}{dt} + \Delta\theta_1 = \Delta\theta_0 \qquad (1.2.15)$$

және

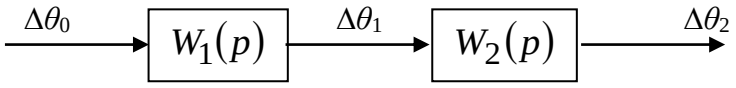
$$\frac{k_2}{\alpha_2 S_2}\frac{d\Delta\theta_2}{dt} + \Delta\theta_2 = \Delta\theta_1. \qquad (1.2.16)$$

Мынадай белгілеулер енгізейік:

$$\frac{k_1}{\alpha_1 S_1} = T_1, \quad \frac{k_2}{\alpha_2 S_2} = T_2,$$

мұндағы T_1 және T_2 – уақыт тұрақтылары.

1.20-суретте жанаспалы сынапты термометрдің құрылымдық схемасы келтірілген.



1.20-сурет. Жанаспалы сынапты термометрдің құрылымдық схемасы

Кірістік шама сыртқы ауа температурасының $\Delta\theta_0$ өсімшесі де, шығыстық шама сынап температурасының $\Delta\theta_2$ өсімшесі. (1.2.15) және (1.2.16) теңдеулерінен $\Delta\theta_1$ аралық айнымалыны шығарып тастап, сынапты жанаспалы термометрдің дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$\left[T_1T_2p^2+\left(T_1+T_2\right)p+1\right]\Delta\theta_2(p)=\Delta\theta_0(p) \qquad (1.2.17)$$

(1.2.17) теңдеуінен беріліс функция үшін мына өрнекті алуға болады:

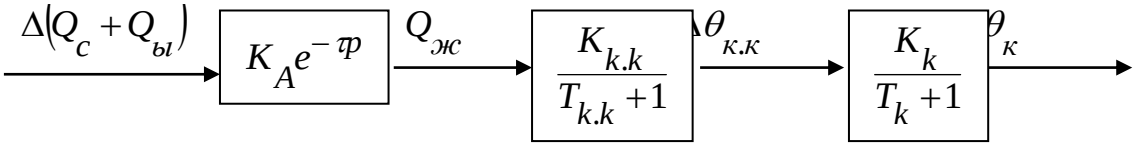
$$W(p)=\frac{\Delta\theta_2(p)}{\Delta\theta_0(p)}=\frac{1}{T_1T_2p^2+\left(T_1+T_2\right)p+1}.$$

Яғни сынапты жанаспалы термометр динамикалық тұрғыдан қарастырғанда екінші ретті апериодтық буынға жатады.

1.12-есеп. Реттеу объектісі – астық дәндерін кептіретін шахталы кептіргіштің дифференциалдық теңдеуін құру қажет.

Кептіргіш тізбектеле қосылған үш буыннан тұрады: дәндер массасы және ол салынатын сыйымдылық – апериодтық бірінші ретті буындар, ауабергіш – таза кешігу буыны.

Ш е ш і м і. Реттеу объектісі – шахталы кептіргіштің құрылымдық схемасын тұрғызамыз. Ол 1.21-суретте келтірілген:



1.21-сурет. Реттеу объектісі – шахталы кептіргіштің құрылымдық схемасы

Кептіргішті құрайтын типтік динамикалық буындардың дифференциалдық теңдеулерін жазайық:

а) ауа бергіш

$$\Delta Q_{ж} = K_A \Delta(Q_c + Q_{ы})(t - \tau_a), \qquad (1.2.18)$$

мұндағы Δ – қайсыбір шаманың өсімшесі;

$Q_{ж}$ – жылутасымалдауыш шығыны, м^3/с;

K_A – ауабергіштің күшейту коэффициенті;

Q_c және $Q_{ы}$ – суық және ыстық ауа шығындары, м^3/с;

t – уақыт, с;

$\tau_в$ – ауабергіштің таза кешігу уақыты, яғни бұл $Q_{ж}$-ның ауабергіш шығысына келу уақыты, с.

б) кептіру камерасы

$$T_{k.k} \frac{d\Delta\theta_{k.k}}{dt} + \Delta\theta_{k.k} = K_{k.k}\Delta Q_{ж}, \qquad (1.2.19)$$

мұндағы $T_{k.k}$ және $K_{k.k}$ – кептіру камерасының сәйкес уақыт тұрақтысы және күшейту коэффициенті;

$\theta_{k.k}$ – кептіру камерасының температурасы, °С.

в) кептіргіштегі дән массасы

$$T_k \frac{d\Delta\theta_{∂}}{dt} + \Delta\theta_{∂} = K_к \Delta\theta_{к.к}, \qquad (1.2.20)$$

мұндағы T_k және $K_к$ – буынның сәйкес уақыт тұрақтысы және күшейту коэффициенті;

$\theta_{∂}$ – дән массасының температурасы, °С.

1.2.5-суреттен кептіргіштің кірістік шамасы ретінде суық және ыстық ауа шығыны, ал шығыстық шамасы ретінде дән температурасының өсімшесі болатынын көреміз.

Аралық айнымалыларды (1.2.18), (1.2.19), (1.2.20) теңдеулерінен шығарып тастап және шығыстық шамаларды дифференциалдық теңдеудің сол жағына жинақтай отыра, нәтижесінде мына теңдеуді аламыз:

$$T_{∂}T_{к.к}\frac{d^2\theta_{∂}}{dt^2} + (T_{∂} + T_{к.к})\frac{d\Delta\theta_{∂}}{dt} + \Delta\theta_{∂} = K_A K_k K_{k.k}\Delta(Q_c + Q_{ы})(t - \tau). \qquad (1.2.21)$$

Алынған (1.2.21) реттеу объектісі – шахталы кептіргіштің дифференциалдық теңдеуі. Бұл теңдеудегі

$$K_{об} = K_A K_k K_{k.k}$$

реттеу объектісінің күшейту коэффициенті.

Реттеу объектісінің беріліс функциясын алу үшін (1.2.21) дифференциалдық теңдеуін операторлық түрде жазамыз:

$$\left[T_{\partial} T_{к.к} p^2 + \left(T_{\partial} + T_{к.к}\right)p + 1\right]\Delta\theta_{\partial}(p) = K_{об} e^{-rp}\Delta\left(Q_c + Q_{ы}\right)(p).$$

Осыдан анықтамаға сәйкес беріліс функцияны табамыз:

$$W(p) = \frac{\Delta\theta_{\partial}(p)}{\Delta\left(Q_c + Q_{ы}\right)(p)} = \frac{K_{об} e^{-p\tau}}{T_{\partial} T_{к.к} p^2 + \left(T_{\partial} + T_{к.к}\right)p + 1}.$$

1.13-есеп. Реттеу объектісі – қайнату колонкасының «бу қысымы – колонка шығысындағы өнім температурасы» арнасы бойынша алынған дифференциалдық теңдеуі мына түрде берілген:

$$30\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t - 22).$$

Орындаушы механизм жылжуының (о.м.ж) 6,25 %-не сәйкес болатын бу қысымының 0,25-тен 0,3 МПа-ға дейінгі күрт өзгеруі колонка шығысындағы өнім температурасын 119,6-дан 121,6 ^{o}C-ге дейін өзгертеді.

Объектінің $K\left(\frac{^{o}C}{\%о.м.ж}\right)$; $T(c)$; $\frac{\tau}{T}$; Δy екпін қисығының көрсеткіштерін анықтап, осы қисықты:

а) кешігуді ескермей; б) кешігуді ескере отырып тұрғызу керек.

Ш е ш і м і. Реттеу объектісі қайнату колонкасының күшейту коэффициентін анықтайық. Колонка шығысындағы өнім температурасының өзгеруі

$$\Delta y = \Delta\theta = 121{,}6 - 119{,}6 = 2{,}0^{o}\text{C}.$$

Яғни, объектінің күшейту коэффициентін мына қатынаспен анықтаймыз.

$$K = \frac{\Delta y^{o}C}{\%о.м.ж} = \frac{2{,}0^{o}C}{6{,}25\%о.м.ж} = 0{,}32\frac{^{o}C}{\%о.м.ж}.$$

Объектінің уақыт тұрақтысы $T = 30c$; кешігу уақыт $\tau = 22c$, $\tau/T = 0{,}73$ параметрлерін қайнату колонкасының дифференциалдық теңдеуінен табамыз.

Есепті τ кешігу уақытын ескермей шешейік. Бұл жағдайда кірістік және шығыстық шамаларды байланыстыратын дифференциалдық теңдеу мына түрде болады:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t), \qquad (1.2.22)$$

мұндағы $T = 30\ c$; $K = 0{,}32\dfrac{^{o}C}{\%o.м.ж}$.

(1.2.22) теңдеуінің оң жағында кірістік сигналдың туындысы жоқ болғандықтан бастапқы ауытқу $x(0_+) = 0$, яғни (1.2.22) дифференциалдық теңдеуге сәйкес келетін сипаттаушы теңдеуді былай жазуға болады:

$$Tp + 1 = 0$$

Сипаттаушы теңдеудің тек $p = -\dfrac{1}{T}$ бір ғана түбірі бар, сондықтан теңдеудің еркін (өтпелі) бөлігі

$$y(t) = Ce^{-\frac{1}{T}},$$

ал дербес шешімі (еріксіз бөлігі) (1.6.1) дифференциалдық теңдеудің оң жағымен анықталады да

$$y(t) = Kx(t)$$

тұрақты шама түрінде ізделінеді.

Сонымен (1.2.22) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін ерікті және еріксіз бөліктерінің қосындысы ретінде анықтауға болады:

$$y(t) = Kx(t) + Ce^{-\frac{1}{T}}. \qquad (1.2.23)$$

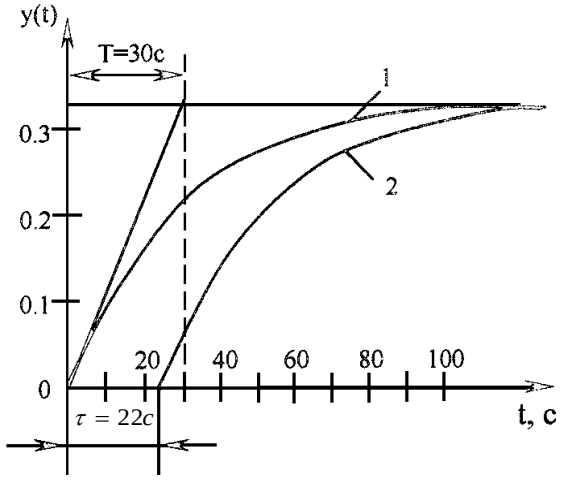
C интегралдау тұрақтысын $t = 0$ және $x(0_+) = 0$ үшін (1.2.23) теңдеуінен табады:

$0 = Kx(t) + C$, яғни $C = -Kx(t)$.

Нәтижесінде қарастырып отырған реттеу объектісінің екпін қисығының аналитикалық өрнегін аламыз:

$$y(t) = Kx(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = 0{,}32x(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{30}}\right). \qquad (1.2.24)$$

«Бу қысымы – колонка шығысындағы өнім температурасы» арнасы бойынша τ кешігуін ескермегендегі қайнату колонкасының (1.2.24) өрнегі арқылы салынған екпін қисығы 1.22-суретте келтірілген (1-қисық). Оны салу үшін 1.2-кестесін толтыру қажет (кесте 1-тіркеменің көмегімен есептеліп толтырылған).



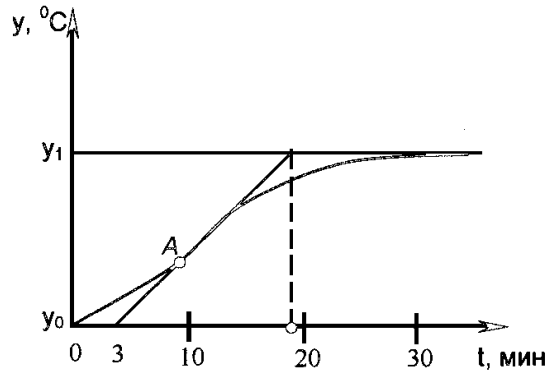
1.22-сурет. Қайнату колонкасының екпін қисығы:
1 – кешігуді ескермегендегі; 2 – кешігуді ескергендегі

1.2-кесте

t, c	0	10	20	30	40	50	60	...	∞
x = t/30	0	0,33	0,66	1,0	1,33	1,68	2,0	...	
e^x	0	1,3909	1,9348	2,7183	3,7810	5,4740	7,3891	...	
e^{-x}	0	0,7189	0,5169	0,3679	0,2645	0,1827	0,1353	...	
$1 – e^{-x}$	0	0,2810	0,4831	0,6321	0,7355	0,8173	0,8647	...	
y(t)	0	0,09	0,153	0,203	0,236	0,262	0,276	...	0,32

Кешігу τ = 22*c* уақытын ескергенде, екпін қисығын *t* осі бойымен оңға қарай 22 секундқа жылжыту керек (2-қисық).

1.14-есеп. 1.23-суретте реттеу объектісінің κ = 17 үшін салынған қисығы келтірілген. Осы қисықтың жуықтатылған теңдеуін табу қажет. Суреттегі *A* нүктесі – объектінің екпін қисығының иілу нүктесі.



1.23-сурет. Реттеу объектісінің екпін қисығы

Ш е ш і м і. Объектінің екпін қисығына *A* нүктесінен жанама жүргіземіз. Ол уақыт осін τ = 3 *мин* нүктесінде қиып өтеді. Бұл деген объектінің τ таза кешігуі бар екендігін көрсетеді. Графиктен *T* = 16,6 *мин* объектінің уақыт тұрақтысын анықтаймыз. Енді реттеу объектісінің дифференциалдық теңдеуін жазамыз.

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t-\tau)$$

Жоғарыда анықталған сандық мәндерді қоя отыра, аламыз

$$16{,}6\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 17x(t-3) \qquad (1.2.25)$$

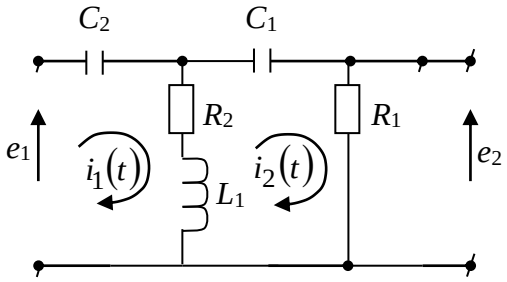
Екпін қисығы (1.2.25) дифференциалдық теңдеудің шешімі арқылы анықталады, сондықтан

$y(t) = 0$ $t < 3$ минут болғанда;

$$y(t) = 17x(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{16{,}6}}\right) \qquad t < 3 \text{ минут болғанда}$$

1.15-есеп. 1.24-суретте келтірілген *RLC* элементтерінен тұратын тізбектің дифференциалдық теңдеуін және беріліс функциясын анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Схемадағы тұйық контурлар үшін контурлық токтар әдісі бойынша теңдеулер құрамыз.



1.24-сурет. *RLC* элементтерінен тұратын тізбек

Бірінші контур үшін

$$e_1(t) = \frac{1}{C_2}\int i_1(t)dt + R_2 i_1(t) + L_1\frac{di_1}{dt} - R_2 i_2(t) - L_1\frac{di_2}{dt}; \qquad (1.2.26)$$

Екінші контур үшін

$$0 = -R_2 i_1(t) - L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_2 dt + R_1 i_2(t) + R_2 i_2(t) + L_1\frac{di_2}{dt} \qquad (1.2.27)$$

Үшінші контур үшін

$$e_2(t) = R_1 i_2(t) \qquad (1.2.28)$$

Алынған (1.2.26), (1.2.27), (1.2.28) теңдеулерін мынадай түрде жазамыз:

$$\left.\begin{aligned} E_1(p) &= z_1(p)I_1(p) - z_2(p)I_2(p);\\ 0 &= -z_2(p)I_1(p) + z_3(p)I_2(p);\\ E_2(p) &= z_4(p)I_2(p), \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.29)$$

мұндағы $z_1(p) = \frac{1}{C_2 p} + R_2 + L_1 p$ – бірінші контурдың өзіндік толық кедергісі;

$z_2(p) = R_2 + L_1 p$ – бірінші және екінші контурлар арасындағы тармақтың толық кедергісі;

$z_3(p) = \frac{1}{C_1 p} + R_1 + R_2 + L_1 p$ – екінші контурдың өзіндік толық кедергісі;

$z_4(p) = R_1$ – екінші және үшінші контурлар арасындағы тармақтың толық кедергісі.

(1.2.29) теңдеулер жүйесіндегі I_1 (p) және I_2 (p) айнымалыларын шығарып тастап мына өрнекті аламыз:

$$W(p)=\frac{E_2(p)}{E_1(p)}=\frac{z_4(p)z_2(p)}{z_1(p)z_3(p)-z_2^2(p)}.$$

Енді $z_1(p)$, $z_2(p)$, $z_3(p)$, $z_4(p)$ мәндерін орындарына қоя отыра, аламыз:

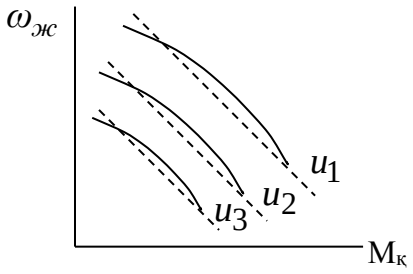
$$W(p)=\frac{R_1(R_2+L_1p)}{\left(\frac{1}{C_2p}+R_2+L_1p\right)\left(\frac{1}{C_1p}+R_1+R_2+L_1p\right)-(R_2+L_1p)^2}. \qquad (1.2.30)$$

$T_1 = R_1C_1$; $T_2 = R_2C_2$; $T_3 = \dfrac{L_1}{R_2}$ деп белгілесек, (1.2.30) өрнектен бастапқы берілген тізбектің беріліс функциясын табамыз.

$$W(p)=\frac{T_1T_2\left(T_3p+1\right)p^2}{T_1T_2T_3p^3+\left[T_1\left(T_2+T_3\frac{R_1}{R_2}\right)+T_2T_3\right]p^2+\left[T_1\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)+T_2\right]p+1}.$$

1.16-есеп. Білігінде айналып тұрған жүктемесі бар екіфазалы электрқозғалтқыштың дифференциалдық қозғалыс теңдеуін анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Дифференциалдық теңдеуді алу үшін екіфазалы электрқозғалтқыштың сыртқы сипаттамаларын пайдаланайық. 1.25-суретте тұтас сызықтармен электрқозғалтқыштың экспериментті түрде алынған сипаттамалары келтірілген. Бұл сипаттамаларды тұрақты еңістікті пунктир сызықтармен аппроксимациялау арқылы қозғалтқыш моменті мен біліктегі жүктеменің айналу жылдамдығы аралықтарындағы сызықтық тәуелділікті аламыз.



1.25-сурет. Екіфазалы электрқозғалтқыштың сырт сипаттамалары

Біліктегі жүктеме айналуының теңдеуі мына түрде жазылады:

$$J_к(t)\frac{d\omega_ж}{dt}=M_қ(t)-M_к(t), \qquad (1.2.31)$$

мұндағы $J_к(t)$ – жүктеменің барлық айналып тұрған бөліктерінің электрқозғалтқыш білігіне келтірілген инерциялық моменті.

Кедергілік момент қозғалтқыш білігіндегі жүктеменің бұрыштық айналу жылдамдығына пропорционал деп есептейміз:

$$M_к(t) = K_{ж}\omega_{ж}(t), \qquad (1.2.32)$$

мұндағы $K_{ж}$ – пропорционалдық коэффициенті.

Қозғалту $M_қ(t)$ моменті u_i басқарушы кернеуге пропорционал деп санаймыз:

$$M_қ(t) = K_i u_i(t), \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (1.2.33)$$

(1.2.32), (1.2.33) өрнектерін ескере отыра, (1.2.31) теңдеуден мынаны аламыз:

$$J_к(t)\frac{d\omega_{ж}}{dt} + K_{ж}\omega_{ж}(t) = K_i u_i(t). \qquad (1.2.34)$$

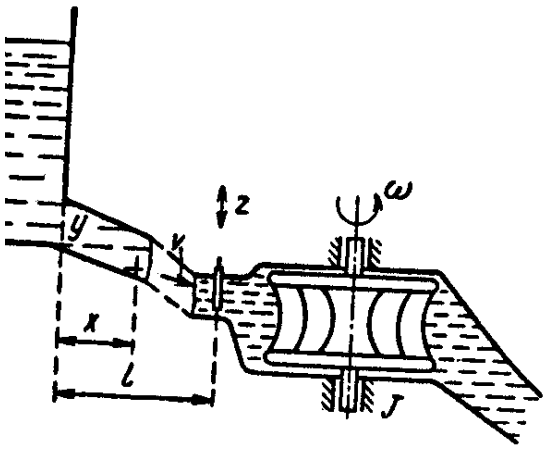
Теңдеудің екі жағын да $K_{ж}$ шамасына бөлсек:

$$T(t)\frac{d\omega_{ж}}{dt} + \omega_{ж}(t) = Ku_i(t), \qquad (1.2.35)$$

мұндағы $T(t) = \frac{J_к(t)}{K_{ж}}$; $K = \frac{K_i}{K_{ж}}$.

Алынған (1.2.35) өрнек білігінде айналып тұрған жүктемесі бар екіфазалы электрқозғалтқыштың айнымалы уақыт тұрақтысы бар сызықтық дифференциалдық теңдеуі болып саналады.

1.17-есеп. Схемасы 1.26-суретінде келтірілген гидравликалық турбинаның дифференциалдық теңдеуін шығарып, беріліс функциясын анықтау қажет. Турбинаның жұмыстық дөңгелегіне су ұзын құбыр арқылы беріледі. Осы реттеу объектісінің құрылымдық схемасын да құру керек.



1.26-сурет. Гидравликалық турбина

Ш е ш і м і. Құбыр ішінде өтетін динамикалық процестерді өрнектейтін теңдеулерді мынадай түрде көрсетуге болады:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}&=\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t};\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{g}{a^2}\frac{\partial y}{\partial t},\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.36)$$

мұндағы y – гидравликалық арын (напор);

x – су қоймасы мен бізге керекті қима (бұл жерде гидротурбинаның бағыттауышы) аралығындағы қашықтық;

a – гидравликалық соққының тарау жылдамдығы;

g – ауырлық күштің үдеуі.

Лаплас түрлендіруін пайдалана отыра (1.2.36) теңдеулер жүйесін мына түрде жазуға болады:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dY(p)}{dx}&=\frac{1}{g}pV(p)\\ \frac{dV(p)}{dx}&=\frac{g}{a^2}pY(p).\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.37)$$

Мынадай шекаралық шарттарды қабылдайық:

$y = 0$ $x = 0$ болғанда

$$\left.\begin{aligned}y&=y_0\\ v&=v_0\end{aligned}\right\} \quad x = l \text{ болғанда} \qquad (1.2.38)$$

Онда мынаны аламыз:

$$\left.\begin{aligned} Y(l,p)-y_0 &= \left(-e^{-\frac{l}{a}p}+e^{\frac{l}{a}p}\right)V(p);\\ V(l,p)-v_0 &= \frac{g}{a}\left(e^{-\frac{l}{a}p}+e^{\frac{l}{a}p}\right)V(p). \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.39)$$

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$\left.\begin{aligned} Y(l,p)-y_0 &= \Delta Y(l,p);\\ V(l,p)-v_0 &= \Delta V(l,p). \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.40)$$

Осыларды пайдалана отыра құбырдың беріліс функциясын мына түрде жазуға болады:

$$W(l,p)=\frac{\Delta Y(l,p)}{\Delta V(l,p)}=-\frac{e^{\tau p}-e^{-\tau p}}{\frac{g}{a}\left(e^{\tau p}+e^{-\tau p}\right)}=-\frac{a}{g}th\tau p. \qquad (1.2.41)$$

Су шығынының теңдеуі салыстырмалы айнымалылар бойынша мына түрде жазылады:

$$\frac{v(t)}{v_0}=\frac{z(t)}{z_0}\sqrt{\frac{y(t)}{y_0}}, \qquad (1.2.42)$$

мұндағы $v(t)$ және $y(t)$ – сәйкес су жылдамдығы және оның бағыттаушы тетіктердегі арыны; $z(t)$ – бағыттаушылардың ауытқуы;

(1.2.42) теңдеуді сызықтайық:

$$\frac{\Delta v(t)}{v_0}=\frac{\Delta z(t)}{z_0}+\frac{1}{2}\frac{\Delta y(t)}{y_0}. \qquad (1.2.43)$$

Лаплас түрлендіруін қолданамыз:

$$\frac{\Delta V(l,p)}{v_0}=\frac{\Delta Z(p)}{z_0}+\frac{1}{2}\frac{\Delta Y(l,p)}{y_0}. \qquad (1.2.44)$$

(1.2.44) теңдеуге

$$\Delta V(l,p)=\frac{1}{-\frac{a}{g}th\tau p}\Delta Y(l,p) \qquad (1.2.45)$$

қойып, аламыз:

$$-\left(\frac{gy_0}{av_0 th\tau p}+\frac{1}{2}\right)\frac{\Delta Y(l,p)}{y_0}=\frac{\Delta Z(p)}{z_0}. \qquad (1.2.46)$$

Алынған (1.2.46) теңдеуден

$$\frac{\Delta Y(l,p)}{y_0}=-\frac{\frac{av_0}{gy_0}th\tau p}{1+\frac{av_0}{2gy_0}th\tau p}\frac{\Delta z}{z_0} \qquad (1.2.47)$$

табамыз және оған келесі белгілерді енгіземіз:

$$\rho_0=\frac{av_0}{2gy_0};\qquad \frac{\Delta Y(l,p)}{y_0}=\tilde{\nu}(p);$$
$$\frac{\Delta Z}{z_0}=\tilde{\mu}(p).$$

Онда мына өрнекті аламыз:

$$\tilde{\nu}(p)=-\frac{2\rho_0 th\tau p}{1+\rho_0 th\tau p}\tilde{\mu}(p). \qquad (1.2.48)$$

Турбинаның жұмыстық дөңгелегінің қозғалыс теңдеуін мына түрде жазамыз:

$$J\frac{d\omega_g}{dt}=\frac{1}{2}nz\frac{v^3}{\omega_g}-M_{ко}+\Delta M_к, \qquad (1.2.49)$$

мұндағы J – жұмыстық дөңгелектің инерция моменті;

ω_g – жұмыстық дөңгелектің бұрыштық айналу жылдамдығы;

n – пропорционалдық коэффициенті;

$M_{ко}$ – кедергілік моменттің орныққан мәні;

$\Delta M_к$ – гидротурбинадағы жүктеме босауының лездік мәні.
(1.2.49) теңдеуге сызықтау жұмыстарын жүргізейік:

$$J\frac{d\Delta\omega_g}{dt}=\frac{1}{2}nz_0\frac{v_0^3}{\omega_{go}}\left[1+\frac{\Delta z}{z_0}-\frac{\Delta\omega_g}{\omega_{go}}+\frac{3}{2}\frac{\Delta y}{y_0}\right]-M_{ко}+\Delta M_к \qquad (1.2.50)$$

Орнықты күй үшін белгілі

$$M_{\ o}=\frac{1}{2}nz_0\frac{v_0^3}{\omega_{go}}=M_{ко}$$

шартты ескере отыра (1.2.50) теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$\frac{J\omega_{go}}{M_{\ o}}\frac{d\frac{\Delta\omega_g}{\omega_{go}}}{dt}=\frac{\Delta M_{ко}}{M_{ко}}-\frac{\Delta\omega_g}{\omega_{go}}+\frac{3}{2}\frac{\Delta y}{y_0}+\frac{\Delta z}{z_0}. \qquad (1.2.51)$$

Төмендегі белгілеулерді енгізсек:

$$T=\frac{J\omega_{go}}{M_{go}};\qquad \gamma=\frac{\Delta\omega_g}{\omega_g};$$

$$f_0=\frac{\Delta M_к}{M_к},$$

(1.2.51) теңдеуді мынадай етіп жазуға болады:

$$T\frac{d\gamma}{dt}+\gamma(t)=f_0+\mu(t)+\frac{3}{2}\vartheta(t). \qquad (1.2.52)$$

Алынған теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолдансақ:

$$\tilde{\gamma}(p)=\frac{1}{p(Tp+1)}F_0+\frac{1}{Tp+1}\tilde{\mu}(p)+\frac{\frac{3}{2}}{Tp+1}\vartheta(p). \qquad (1.2.53)$$

Соңғы теңдеуге (1.2.48) өрнекті қойсақ мына теңдеуді аламыз:

$$\tilde{\gamma}(p)=\frac{F0}{p(Tp+1)}+\frac{1}{Tp+1}\left[\frac{1-2\rho_0 thp\tau}{1+\rho_0 thp\tau}\right]\tilde{\mu}(p). \qquad (1.2.54)$$

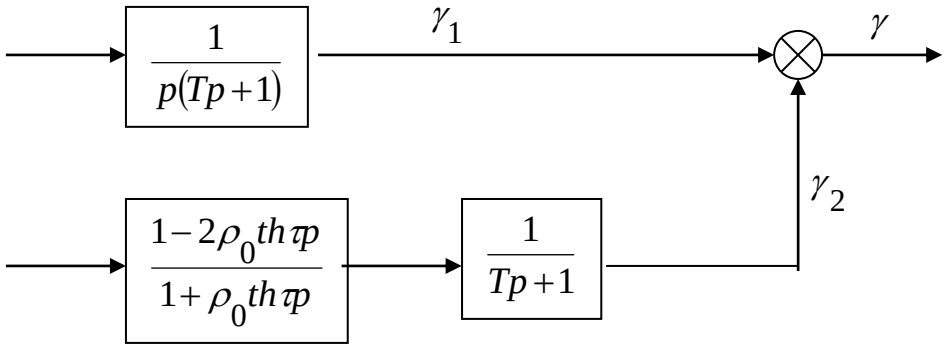
немесе

$$\tilde{\gamma}(p)=\tilde{\gamma}_1(p)+\tilde{\gamma}_2(p). \qquad (1.2.55)$$

Жұмыстық дөңгелекке су беріп тұратын ұзын құбырлы гидротурбинаның беріліс функциясын мына түрде анықтаймыз:

$$\left.\begin{aligned} W_1(p)&=\frac{\bar{\gamma}_1(p)}{F_0(p)}=\frac{1}{p(Tp+1)};\\ W_2(p)&=\frac{\tilde{\gamma}_2(p)}{\tilde{\mu}(p)}=\frac{1}{Tp+1}\left[\frac{1-2\rho_0 th\tau p}{1+\rho_0 th\tau p}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.56)$$

Беріліс функциясы мен (1.10.20) теңдеу бойынша гидротурбинаның құрылымдық схемасын құрамыз (1.27-сурет).



1.27-сурет. Ұзын құбырлы гидротурбинаның құрылымдық схемасы

1.18-есеп. Мына теңдеулермен өрнектелетін буындардың беріліс функцияларын анықтау қажет:

а) $\frac{dy}{dt}+y=x$

б) $\frac{d^2y}{dt^2}-y=\frac{dx}{dt}-x$

Ш е ш і м і: Бұл теңдеулерді символикалық түрде төмендегідей жазуға болады:

а) $(p+1)y = x$

б) $\left(p^2 - 1\right)y = (p-1)x,$

ал олардың сәйкес Лаплас түрлендіруі бойынша жазылған беріліс функциялары

$$W_1(p) = \frac{1}{1+p}, \quad W_2(p) = \frac{p-1}{p^2-1} = \frac{1}{p+1}.$$

болады.

Алынған формулалардан әртүрлі шешімі бар және әртүрлі дифференциалдық теңдеулермен өрнектелген буындардың, Лаплас түрлендіруі бойынша алынған кескіндерінің бір-біріне сәйкес келетіндігін көруге болады.

1.19-есеп. Беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad (0 < \xi < 1)$$

болатын тербелмелі буынның өтпелі және зілдеме (весовая) функцияларын анықтау қажет.

Ш е ш і м і: Бұл буынның дифференциалдық теңдеуі

$$\left(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1\right)y = kx.$$

Өтпелі функцияны анықтау үшін бұл теңдеуді кірістік $x = 1(t)$ әсері үшін алғашқы нөлдік шарттарда шешу қажет:

$$\left(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1\right)y = K \cdot 1(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Сипаттаушы теңдеуі

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0$$

және оның түбірлері

$$p_{1\cdot 2} = -\frac{\xi}{T} \pm j\sqrt{\left(\frac{\xi}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}},$$

немесе

$$p_{1\cdot 2} = -\xi/T \pm j\sqrt{1-\xi^2}/T$$

болады.

$$\alpha = \xi/T \text{ және } \beta = \sqrt{1-\xi^2}\,\big/T$$

деп алып, дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін мына түрде жазуға болады:

$$y_{ерк} = \left(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t\right)e^{-\alpha t}.$$

Ал теңдеудің дербес шешімі $y_{ерік} = K$. Сондықтан біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$y = y_{ерк} + y_{ерік} = \left(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t\right)e^{-\alpha t} + K.$$

Бұл шешімнің туындысы

$$\dot{y} = \left[\beta\left(C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t\right) - \alpha\left(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t\right)\right]\ell^{-\alpha t}.$$

Бастапқы шарттар мына түрге келеді:

$$y(0) = C_2 + K = 0$$

$$\dot{y}(0) = \beta C_1 - \alpha C_2 = 0.$$

Осыдан $C_2 = -K$, $C_1 = -\frac{\alpha}{\beta}K$. Сондықтан өтпелі және зілдеме функциялар үшін мына өрнектерді аламыз:

$$h(t) = K\left[1 - \frac{1}{\beta}\left(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t\right)\ell^{-\alpha t}\right],$$

$$W(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\ell^{-\alpha t}\left[\alpha \sin\left(\beta t + \varphi_0\right) - \beta \cos\left(\beta t + \varphi_0\right)\right]$$

немесе біраз түрлендіру жұмыстарын жүргізе отыра мына функцияларды аламыз:

$$h(t)=K\left[1-\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\right)\ell^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi_0)\right],$$

$$W(t)=\frac{K(\alpha^2+\beta^2)}{\beta}\ell^{-\alpha t}\sin\beta t,$$

мұндағы $\varphi_0=arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

1.20-есеп. Беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{2(p+1)}{(0{,}5p+1)p}$$

болатын буынның өтпелі және зілдеме функцияларын анықтау қажет.

Ш е ш і м і: $W(p)$ беріліс функция $W(t)$ зілдеме функцияның Лаплас түрлендіруі бойынша алынған кескіні болады. Беріліс функцияның полюстері $p_1=0,\ p_2=-2$ жай сандар болғандықтан, $W(t)$ зілдеме функцияны

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}\ell^{p_i t},\quad A'(p_i)=\left.\frac{dA(p)}{dp}\right|_{p=p_i} \qquad (1.2.57)$$

формуласы бойынша анықтауға болады. Біздің жағдайда $B(p)=2(p+1),$ $A'(p)=p+1,$ онда жоғарғы формулаға сәйкес зілдеме функция

$$W(t)=\frac{2}{1}\ell^{0}+\frac{-2}{-1}\ell^{-2t}=2(1+\ell^{-2t}).$$

Лаплас түрлендіруі бойынша $L1(t)=\frac{1}{p}$ болатындықтан, өтпелі функцияның кескіні

$$H(p)=W(p)\cdot\frac{1}{p}=\frac{2(p+1)}{p^2(0{,}5p+1)}.$$

Бұл жағдайда $p_1 = 0$ полюстің $n_1 = 2$ еселілігі (кратность) болады да, $p_2 = -2$ полюсі жай болады. Сондықтан $p_1 = 0$ полюсіне сәйкес қосылғышын (слагаемое)

$$\frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \to P_k} \frac{dn_k - 1}{dp^{n_k - 1}} \left(Y(p)(p - p_k)^{n_k} \ell^{pt} \right)$$

формуласы бойынша, ал $S_2 = -2$ полюсінің сәйкес қосылғышын (1.2.57) формулаға сәйкес анықтаймыз:

$$\lim_{p \to 0} \frac{d}{dt} \left(H(p) p^2 \ell^{pt} \right) = \lim_{p \to 0} \frac{d}{dp} \left(\frac{2(p+1)}{0{,}5p + 1} \ell^{pt} \right) =$$

$$= \lim_{p \to 0} \left(\frac{2(0{,}5p + 1) - 2(p+1)0{,}5}{(0{,}5p + 1)^2} \ell^{pt} + \frac{2(p+1)}{0{,}5p + 1} t \ell^{pt} \right) = 1 + 2t.$$

$B(p) = 2(p+1)$, $A'(p) = 1{,}5p^2 + 2p$ болғандықтан, $S_2 = -2$ полюсіне сәйкес келетін қосылғыш үшін

$$\frac{-2}{2} \ell^{-2t} = \ell^{-2t}$$

аламыз.

Сонымен, өтпелі функцияны мына түрде аламыз:

$$h(t) = 1 + 2t - \ell^{-2t}.$$

1.21-есеп. Якорінің электрлік уақыт тұрақтысы $T_я = 0{,}0007c$, электромеханикалық уақыт тұрақтысы $T_м = 0{,}35c$, номинал басқарушы әсер $U_{ном} = 29B$, номинал айналу саны $n_{ном} = 9000 айн./мин.$, жіберу моменті $M_ж = 60 гсм$, якорь орамының активті кедергісі $R_я = 218$ *Ом* болатын тұрақты ток қозғалтқышының беріліс функциясын анықтау қажет.

Ш е ш і м і: Қозғалтқыш параметрлерін СИ жүйесіне келтірейік:

$$M_ж = 60 гсм = 0{,}0059 Нм, \quad \omega_{ном} = \frac{2\pi n_{ном}}{60} = 942 рад/с.$$

Қозғалтқыштың бос жүрістегі жылдамдығы $\omega_{б.ж} = 1{,}5\omega_{ном} = 1413 рад/с$.

Басқару және қобалжыту әсерлері бойынша қозғалтқыштың беріліс коэффициентін есептейік:

қозғалтқыштың басқару бойынша беріліс коэффициенті:

$$K_{g1} = \frac{1}{c_e} = \frac{\omega_{б.ж}}{U_{уном}} = \frac{1413}{29} = 48{,}7\ рад/Вс,$$

қозғалтқыштың қобалжыту бойынша ($M_{ж}$ жүк моменті) беріліс коэффициенті:

$$K_{g2} = \frac{R_{я}}{c_e c_m} = \frac{M_{ж} R_{я}}{U_{уном}} = \frac{0{,}0059 \cdot 218}{29} = 0{,}044 \frac{(Нм)Ом}{В}.$$

Олай болса, қозғалтқыштың басқару бойынша беріліс функциялары:

$$W_{uω}(p) = \frac{K_{g1}}{1 + pT_{м}} = \frac{48{,}7}{1 + 0{,}35p}; \quad W_{uφ}(p) = \frac{K_{g2}}{p(1 + pT_{м})} = \frac{48{,}7}{p(1 + 0{,}35p)},$$

және қобалжыту бойынша беріліс функциялары:

$$W_{мω}(p) = \frac{K_{g2}}{1 + pT_{м}} = \frac{0{,}044}{1 + 0{,}35p}; \quad W_{мφ}(p) = \frac{K_{g2}}{p(1 + T_{м})} = \frac{0{,}044}{p(1 + 0{,}35p)}.$$

1.22-есеп. Техникалық сипаттамалары: $T_{м} = 10мс = 0{,}01с$, $n_{б.ж} = 7000айн./мин.$, $U_{уном} = 40В$, $M_{ж} = 75 \cdot 10^{-4} Нм$, $i_{рп} = 3А$ болатын синхронды қозғалтқыштың беріліс функциясын анықтау қажет.

Ш е ш і м і: Бос жүрістегі қозғалтқыштың бұрыштық жылдамдығы

$$\omega_{б.ж} = \frac{2\pi n_{б.ж}}{60} = 732\ рад/с.$$

Қозғалтқыштың беріліс коэффициенттерін есептеп шығарамыз:

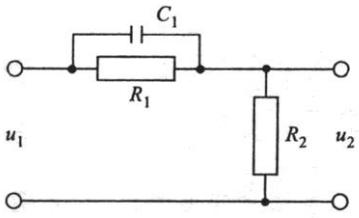
$$K_{1} = \frac{\omega_{б.ж}}{U_{уном}} = 18{,}3\ рад/с, \quad K_{2} = \frac{M_{ж}}{i_{рп}} = 25 \cdot 10^{-4} \frac{Нм}{А}.$$

Онда қозғалтқыштың беріліс функциясы

$$W_{uω}(p) = \frac{18{,}3}{1 + 0{,}01p}, \quad W_{uφ}(p) = \frac{18{,}3}{p(1 + 0{,}01p)},$$

$$W_{мω}(p) = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{1 + 0{,}01p}, \quad W_{мφ}(p) = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{p(1 + 0{,}01p)}.$$

1.23-есеп. 1.28-суретте келтірілген төртполюсниктің беріліс функциясын есептеп шығару қажет:



1.28-сурет

Ш е ш і м і: Бұл жағдайда

$$Z_1(p)=\frac{1}{1/R_1+pC_1}=\frac{R_1}{1+pR_1C_1},\quad Z_2(p)=R_2,$$

$$Z_{кір}(p)=Z_1(p)+Z_2(p)=\frac{R_1+R_2+R_1R_2C_1p}{1+R_1C_1p},\quad Z_{шығ}(p)=R_2.$$

Сондықтан

$$W(p)=\frac{Z_{шығ}(p)}{Z_{кір}(p)}=K\frac{T_1p+1}{T_2p+1},$$

мұндағы $K=\frac{R_2}{R_1+R_2}<1,\quad T_1=R_1C_1,\quad T_2=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1<T_1.$

1.24-есеп. Жүйе кірісіне $x=2\sin 3t$ сигналы беріліп тұр. Беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{p+4}{(p+1)(0{,}04p^2+0{,}2p+1)}$$

болатын жүйенің осы сигналға орныққан күйіндегі реакциясын анықтау қажет.

Ш е ш і м і: Жүйенің АФЖС-сы

$$W(j\omega)=\frac{j\omega+4}{(j\omega+1)(-0{,}04\omega^2+0{,}2j\omega+1)}$$

және $\omega=3,\quad \omega<1/T=1/0{,}2=5.$ Сондықтан

$$A(3)=\frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{9+1}\sqrt{(1-0{,}36)^2+0{,}36}}\approx 1{,}8$$

$$\varphi(3)=arctg\left(\frac{3}{4}\right)-arctg\,3-arctg\left[0{,}6/(1-0{,}36)\right]\approx -1{,}36,$$

яғни $x=3{,}6\sin(3t-1{,}36).$

Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар мен берілген есептер

1. Кірісіне бірлік сатылық әсер берілген және бастапқы нөлдік шарттардағы алынған АРЖ динамикалық теңдеуінің шешімі қайсы сипаттаманы графикалық түрде көрсетеді

а) беріліс функцияны;

б) өтпелі функцияны?

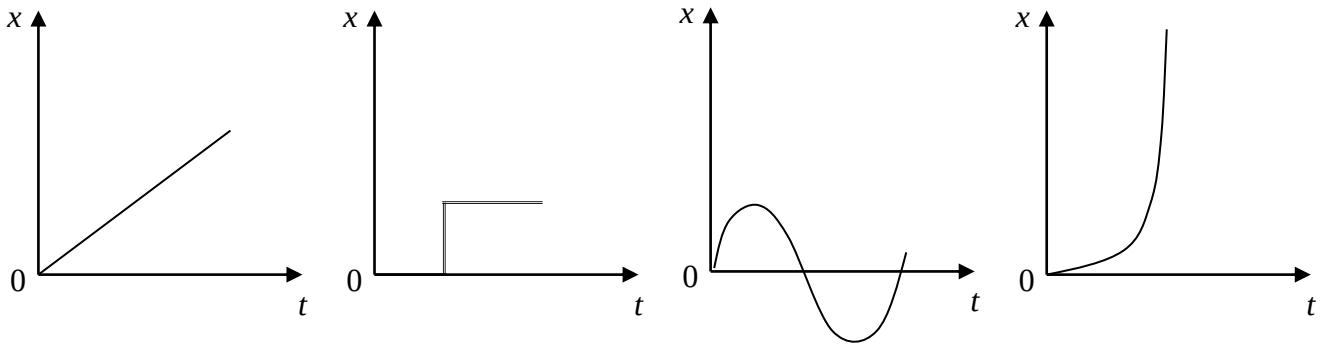
2. Беріліс функция АРЖ-ның қандай жұмыс режимін сипаттайды:

а) өтпелі;

б) орныққан;

в) екеуін де?

3. 1.29-суретінде келтірілген кірістік әсерлердің қайсысы АРЖ-ның өтпелі функциясын алу үшін қолданылады? Осы әсерлердің қайсысы әлдеқайда қарапайым деп саналады?



1.29-сурет. Кірістік әсерлердің түрлері

4. 1.30-суретке сәйкес мына буындардың өтпелі функциясын анықтаңыз (буын кірісіне бірлік сатылық әсер берілген):

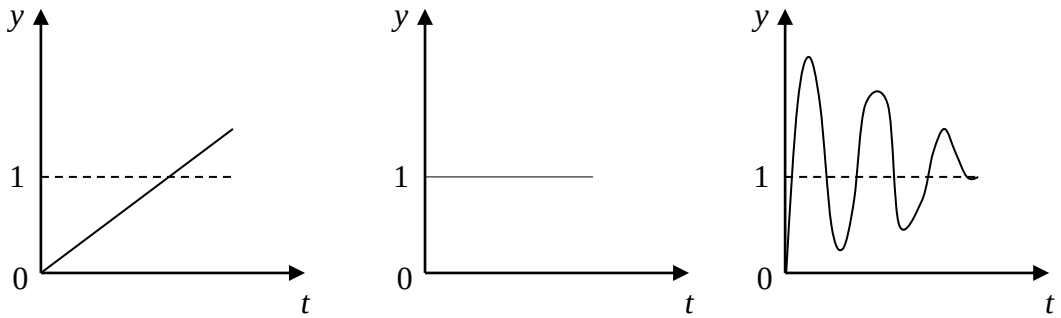
а) тербелмелі;

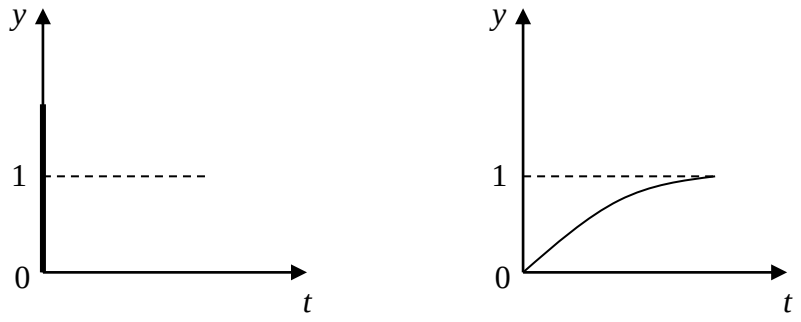
б) инерциясыз;

в) бірінші ретті апериодты;

г) интегралдаушы;

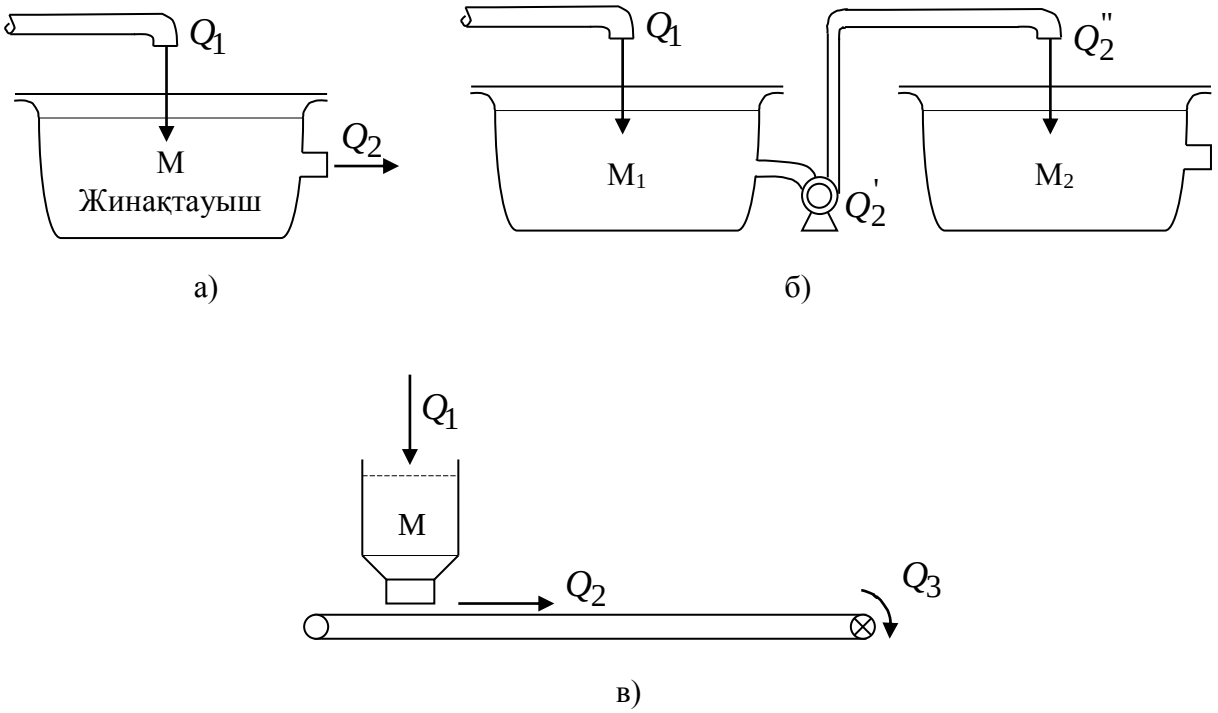
д) дифференциалдаушы.





1.30-сурет. Әр түрлі буындардың өтпелі функциялары

1.25-есеп. 1.31-суретінде келтірілген жинақтауыштың (резервуардың) дифференциалдық теңдеуін құру қажет.



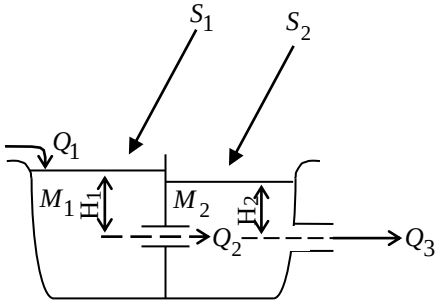
1.31-сурет. Материалдық ағым динамикасына:
а – бірсыйымдылықты объект; б – екісыйымдылықты объект;
в – бункер-конвейер жүйесі.

1.26-есеп. 1.31-суреттегі екі жинақтауыштан тұратын жүйенің дифференциалдық теңдеуін құру қажет.

Бірінші жинақтауыштан шыққан зат екіншісіне беріледі, ал оларды тасымалдау үшін конвейер немесе сорғыш (насос) қолданылады.

1.27-есеп. 1.31-суретте бункер-конвейер жүйесі келтірілген. Бункер ішіндегі затты түсіруге арналған конвейердің ұзындығы l = 50 см, таспасының жылдамдығы v = 1 м/с = 3600 м/сағ. Бункерге әкелінетін заттардың Q_1 ағымы тұрақты және 100 т/сағ. делік.

1.28-есеп. Екі резервуардан тұратын каскадтың дифференциалдық теңдеуін құру қажет (1.32-сурет). Бұл суреттегі Q_1 бірінші резервуардың кірісіндегі ағын, ал оның шығысы болып не қор M_1, не екінші резервуарға құятын Q_2 ағыны есептеледі. Екінші резервуардың шығысы не M_2 қоры, не Q_3 ағыны.



1.32-сурет. Резервуарлар каскады

1.29-есеп. Дифференциалдық теңдеуі

$$\left(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1\right) y(p) = kx(p)$$

буынының $y(t)$ шығыстық сигналының өзгеру заңдылығын анықтау қажет.

1.30-есеп. Дифференциалдық теңдеуі

$$T_2^2 \frac{d^2 t}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} = K\left[T_1 \frac{dx}{dt}(t-\tau) + x(t-\tau)\right]$$

жүйенің беріліс функциясын анықтау қажет.

1.31-есеп. ПИ-реттеуіштің дифференциалдық теңдеуі

$$U(t) = K_p x(t) + \frac{1}{T_U}\int_0^t x(t)dt,$$

мұндағы $U(t)$ – реттеуші ықпал, $x(t) = g(t) - y(t)$ – реттеуіш кірісіндегі реттелетін шаманың нақты (y) және берілген (g) мәндері арасындағы айырымдық әсер.

Реттеуіштің беріліс функциясын анықтау қажет.

1.32-есеп. ПИД-реттеуіштер реттеу объектісіне реттелетін шаманың x ауытқуына, осы ауытқу интегралына және реттелетін шаманың өзгеру жылдамдығына пропорционал ықпал етеді. Яғни оның дифференциалдық теңдеуін мына түрде көрсетуге болады:

$$U(t) = K_p x(t) + \frac{1}{T_u}\int_0^t x(t)dt + T_\partial \frac{dx(t)}{dt}$$

ПИД-реттеуіштің беріліс функциясын анықтау керек.

1.33-есеп. Теңдеуі

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kT\frac{dx(t)}{dt}$$

болатын дифференциалдайтын құрылғының беріліс функциясын табу қажет.

1.34-есеп. Тұйықталған автоматты реттеу жүйесі дифференциалдық теңдеуі

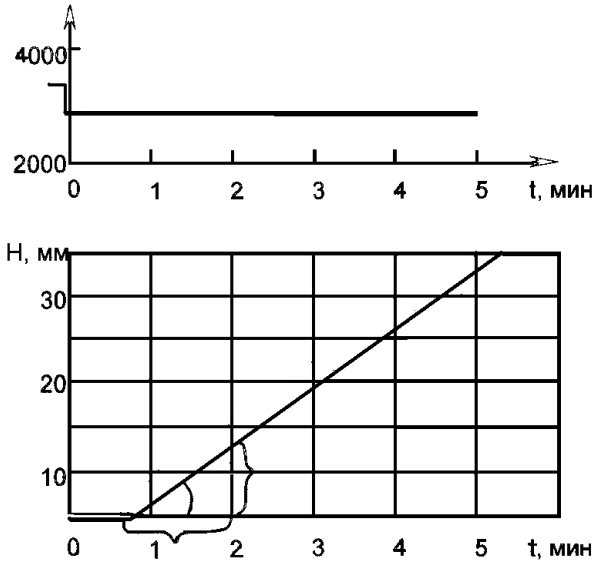
$$T_2^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + T_1\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = kU(t)$$

болатын объектіден және дифференциалдық теңдеуі

$$\frac{dU(t)}{dt} = -K_p\left\{\left[\frac{dx}{dt} - \frac{dg(t)}{dt^2}\right] + \frac{1}{T_U}[x(t) - g(t)] + T_g\left(\frac{d^2x(t)}{dt} - \frac{d^2g(t)}{dt^2}\right)\right\}$$

болатын реттеуіштен тұрады. Жүйенің реттелетін шаманың $g(t)$ берілген мәні арнасы бойынша есептелген беріліс функциясын анықтау керек.

1.35-есеп. 1.33-суретте кірістегі шығын ΔG = 500 л/сағ. сатылы өзгергендегі «шығын-деңгей» арнасы бойынша алынған объектінің екпін қисығы келтірілген. Кешігу уақыты $\tau = 30c.$ Объектінің беріліс коэффициентін және қарастырылған канал бойынша жазылған дифференциалдық теңдеуін анықтау қажет.



1.33-сурет. Объектінің екпін қисығы

1.36-есеп. Объектінің берілген дифференциалдық теңдеуі

$$137800\frac{d^2y(t)}{dt^2}+742\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=0{,}125x(t)$$

бойынша оның беріліс функциясын анықтау қажет.

1.37-есеп. Реттеуіштердің электрондық бөліктерінде корректирлеуші құрылғы ретінде RC-тізбектер жиі қолданылады. RC-тізбектің дифференциалдық теңдеуі мынадай

$$T=\frac{dU_2(t)}{dt}+U_2(t)=U_1(t),$$

мұндағы $U_2(t)$ – шығыстағы кернеу; $U_1(t)$ – тізбектің кірісіндегі кернеу.

Осы RC-тізбектің екпін қисығының теңдеуін табу керек.

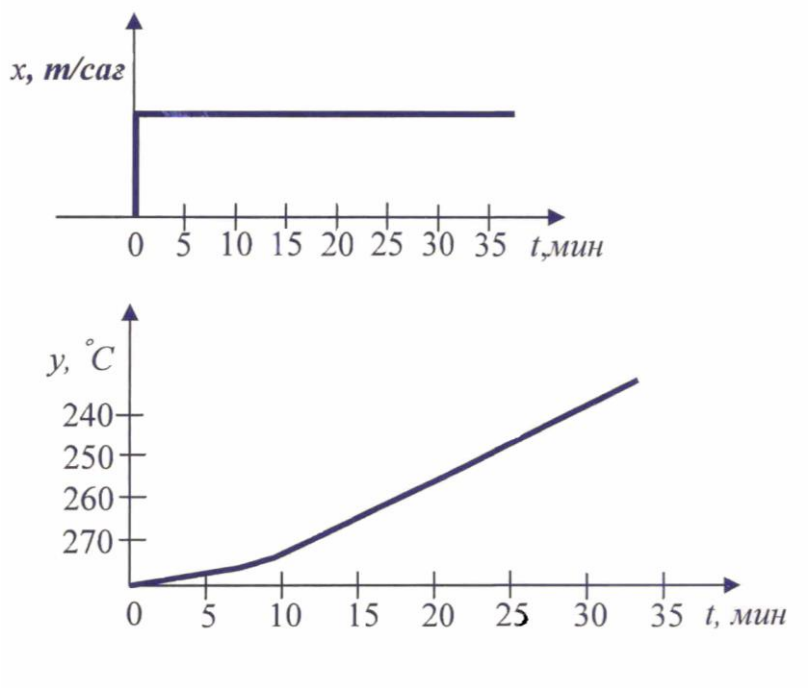
1.38-есеп. Реттеу объектісінің дифференциалдық теңдеуі

$$10{,}5\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t-51).$$

Объект екпін қисығының K, T, τ, τ/T көрсеткіштерін анықтап, өтпелі процесс қисығын τ кешігу уақытынсыз тұрғызу керек.

1.39-есеп. «Суытушы сұйық шығыны – құрылғы ішіндегі температура» каналы бойынша жұмыс істейтін объектінің екпін қисығы 1.34-суретте келтірілген. Сыртқы ауытқу әсері суытушы сұйық шығыны 0-ден 3,8 т/сағ

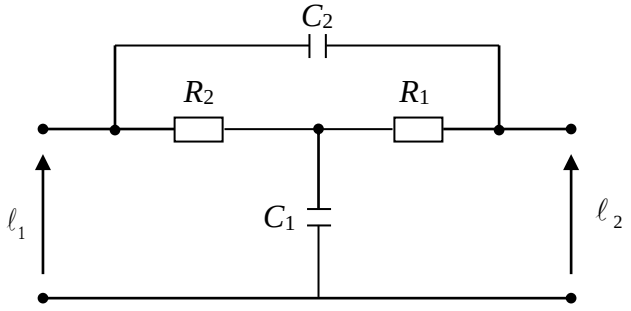
дейінгі аралықта сатылы түрде өзгеріп отырады. Объектінің τ кешігу 4 минутқа тең. Объектінің күшейту коэффициентін және қарастырылып отырған канал бойынша құрылғының дифференциалдық теңдеуін анықтау қажет.



1.34-сурет. Объектінің екпін қисығы

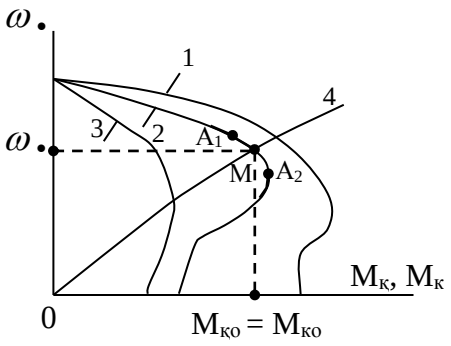
1.40-есеп. АРЖ құрамындағы реттеу объектісі дифманометрден (датчик) және мембранды орындаушы механизмнен тұрады. $K_{об} = K_{д} \cdot K_{о.м.}$ (мұндағы $K_{д}$ және $K_{о.м.}$ – дифманометрдің және орындаушы механизмнің сәйкес күшейту коэффициенттері) деп санай отыра, реттеу объектісінің $K_{об}$ күшейту коэффициентін анықтау қажет. Сонымен бірге, дифманометр арқылы өтетін сұйық шығынның 50 %-ке өзгеруі, оның шығысындағы P қысымның 57,5%-ке өзгеруін, ал мембранды орындаушы механизмдегі сұйық шығынның 50%-ке өзгеруі ондағы золотниктің 49%-ке ығысуын туғызады.

1.41-есеп. Принципиалдық схемасы 1.35-суретте келтірілген T-тәрізді электрлік тізбектің беріліс функциясын анықтау қажет.



1.35-сурет. T-тәрізді электрлік схема

1.42-есеп. Қозғалту $M_{қ}$ және кедергілік $M_{к}$ моменттерінің сипаттамалары 1.36-суретте келтірілген айнымалы токтың үшфазалы электрқозғалтқышының қозғалыс теңдеуі мен беріліс функциясын алу қажет.



1.36-сурет. Үшфазалы электрқозғалтқыштың
қозғалту және кедергілік сипаттамалары

1.43-есеп. Аппараттағы пульпаның тығыздығын автоматты реттеуші жүйенің құрылымдық схемасын және беріліс функциясын құру қажет. Аппаратта дифманометрмен бір комплекте істейтін пъезометрлік тығыздық датчигі орналасқан (1.37-сурет). Пневматикалық изодромды реттеуіш датчиктен сигнал түскен кезде, аппаратқа берілетін су шығынын реттейтін пневматикалық мембранды клапанға әсерін тигізеді. Жүйе элементтерінің беріліс функциялары, яғни:

Пъезометрлік тығыздық өлшегіштікі (датчик)

$$W_1(p)=\frac{K_1}{T_1 p+1};$$

Изодромды реттеуіштікі (реттеуіш)

$$W_p(p)=\frac{T_u p+1}{D\cdot T_u p},$$

D – дроссильдеу ауқымы; T_u – изодром уақыты.

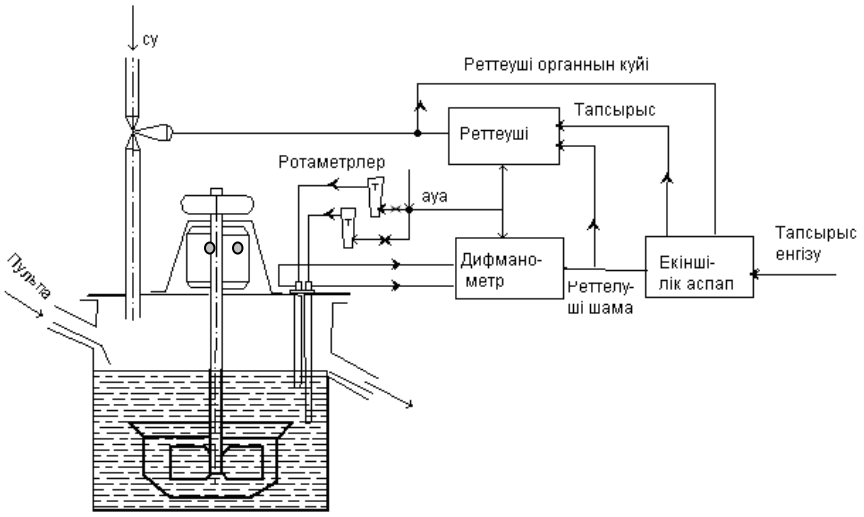
Пневматикалық клапандікі (орындаушы механизм)

$$W_2(p)=\frac{K_2}{T_2(p)+1};$$

Объектінікі (аппарат)

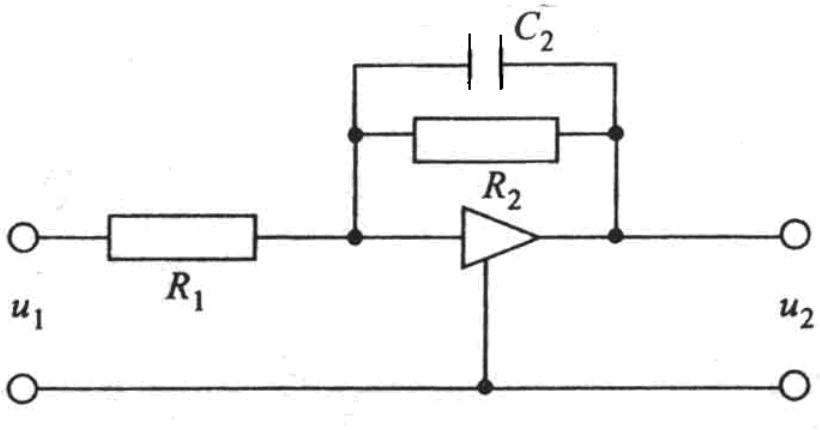
$$W_3(p)=\frac{K_3}{\left(T_3^{'} p+1\right)\left(T_3^{''} p+1\right)}$$

белгілі делік.



1.37-сурет. Пульпа тығыздығын автоматты реттеуші жүйенің схемасы

1.44-есеп. 1.38-суретінде көрсетілген активті төртполюсниктің беріліс функциясын есептеп шығару қажет:



1.38-сурет. Активті төртполюсник схемасы

1.3. Автоматты реттеу жүйесі құрылымдық схемасын пара-пар түрлендіру

Құрылымдық схема деп элементтерінің динамикалық сипаттамалары, әсердің берілу нүктесі және бағыты көрсетілген АРЖ графикалық кескінін айтады. Бұл схема көп жағдайда есептеуге едәуір қиыншылық туғызатын күрделі байланыстардан тұрады. Бұл байланыстарды жеңілдету үшін схемаға арнайы тәсілдерді қолдана отыра түрлендіру жүргізеді. Мұндай түрлендіру нәтижесінде алынған құрылымдық схеманың беріліс функциясының алғашқы схеманың беріліс функциясынан еш өзгерісі болмайды. Сондықтан бұл түрлендіруді *пара-пар түрлендіру* деп атайды.

Төменде құрылымдық схемаларды пара-пар түрлендірудің негізгі формулалары келтірілген:

1) тізбектеле қосылған n буыннан тұратын жүйенің $W(p)$ беріліс функциясы осы буындардың $W_i(p)$ беріліс функцияларының көбейтіндісіне тең.

$$W(p)=\prod_{i=1}^{n}W_i(p); \tag{1.3.1}$$

2) параллель қосылған n буыннан тұратын жүйенің $W(p)$ беріліс функциясы, осы буындардың $W_i(p)$ беріліс функцияларының қосындысына тең

$$W(p)=\sum_{i=1}^{n}W_i(p); \tag{1.3.2}$$

3) қарсы-параллель қосылған негізгі байланыс жолындағы $W_{б}(p)$ мен кері байланыстағы $W_{к.б}(p)$ буындардан тұратын жүйенің $W(p)$ беріліс функциясы мынаған тең

$$W(p)=\frac{W_{б}(p)}{1\pm W_{б}(p)W_{к.б}(p)}, \tag{1.3.3}$$

мұндағы «плюс» таңбасы – теріс, ал «минус» таңбасы оң кері байланысқа сәйкес келеді.

Жүйенің шығысы мен кірісін байланыстырып тұрған кері байланысты *негізгі,* ал қалғандарын *жергілікті кері байланыс* деп атайды.

Беріліс функциясы $W(p)$ буын, беріліс функциясы $W_{к.б}(p)$ теріс кері байланыспен қамтылған делік. Мұндай байланысқан жүйенің беріліс функциясы

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)W_{к.б}(p)}. \tag{1.3.4}$$

Негізгі тізбектегі буынның беріліс функциясын мына түрде көрсетуге болады:

$$W(p) = K \cdot W_1(p),$$

(K – буынның күшейту коэффициенті). Онда (1.3.4) өрнегін былай жазуға болады:

$$\Phi(p) = \frac{KW_1(p)}{1 + KW_1(p)W_{к.б}(p)} = \frac{W_1(p)}{\frac{1}{K} + W_1(p)W_{к.б}(p)}. \qquad (1.3.5)$$

Егер буынның күшейту коэффициенті өте үлкен екен десек $(K \to \infty)$, онда (1.3.5) өрнегі мына түрге келеді:

$$\Phi(p) = \frac{1}{W_{к.б}(p)}.$$

Сонымен, негізгі тізбектегі буынның күшейту коэффициенті өте үлкен болған кезде, жүйенің динамикалық қасиеттері кері байланыстағы буынның беріліс функциясымен анықталады.

Іс жүзінде қатты (жесткий) және бейімделгіш (гибкий) кері байланыстар жиі кездеседі.

Қатты кері байланыс (ҚКБ)

$$x_{к.б.} = K_{к.б.} \cdot y$$

теңдеуімен өрнектелетін, теріс кері байланыс тізбегіне қосылған күшейткіш буын түрінде болады. ҚКБ қолдану жүйенің орнықтылығын нығайтуға мүмкіндік береді.

Бейімделгіш кері байланыс (БКБ)

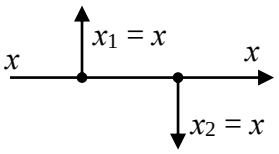
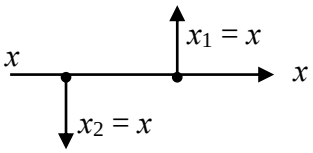
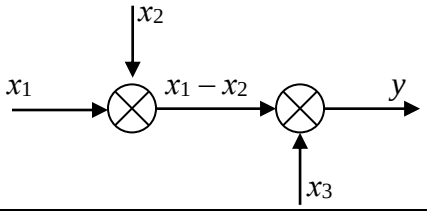
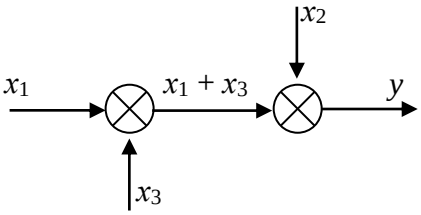
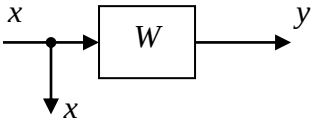
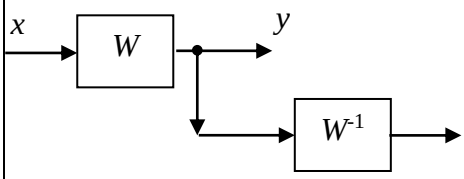
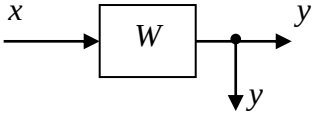
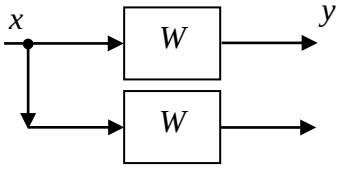
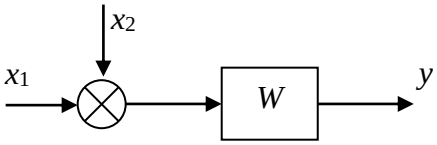
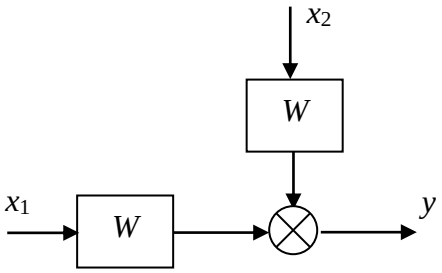
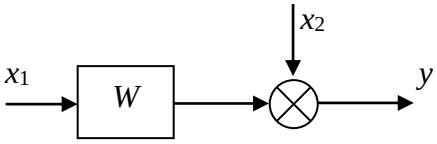
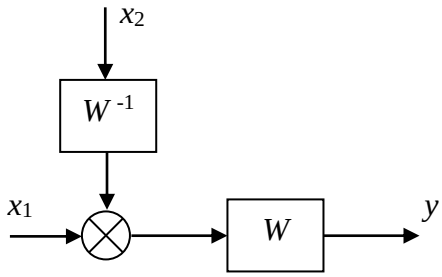
$$T_{к.б.}\frac{dx_{к.б.}}{dt} + x_{к.б.} = K_{к.б.}T_{к.б.}\frac{dy}{dt}$$

теңдеуімен өрнектелетін, теріс кері байланыс тізбегіне қосылған реал дифференциалдауыш буын түрінде болады.

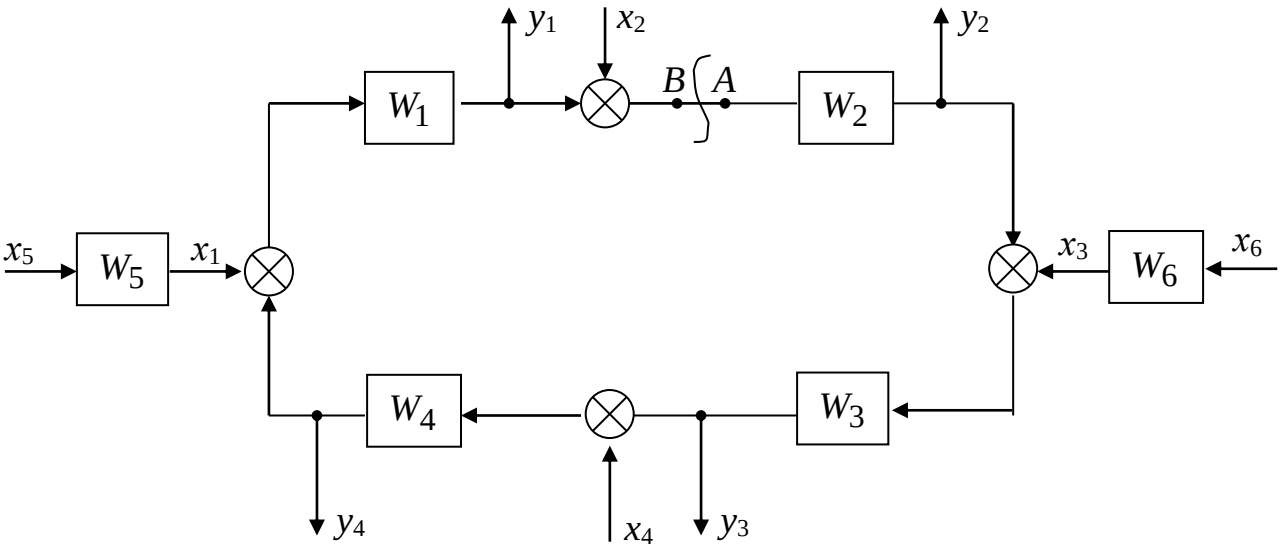
Егер бастапқы схема қарама-қайшы байланыстармен қосылған көпконтурлы болса, онда оны түрлендіру үшін жоғарыдағы үш ережеден басқа қосымша ережелер де қолданылады (1.3.1-кесте).

1.3.1-кесте

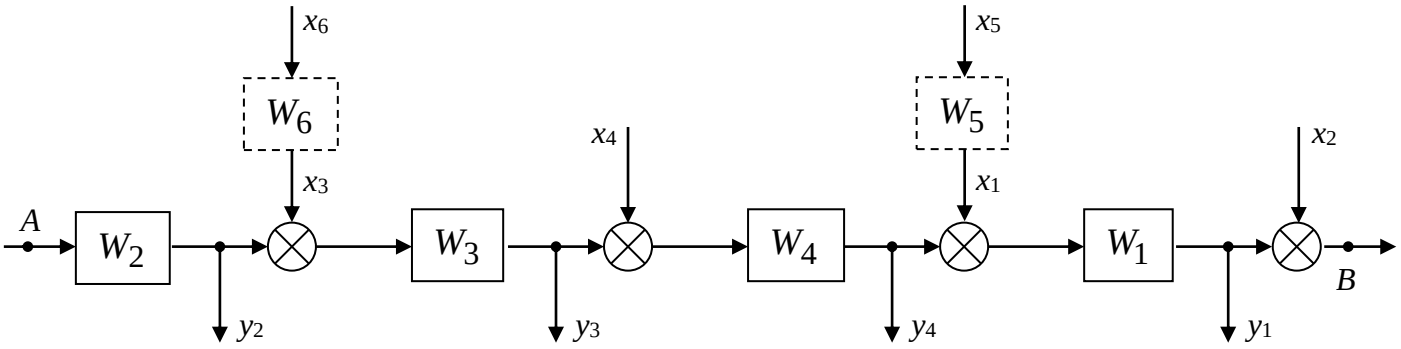
Құрылымдық түрлендіру ережелері

Ереже №	Түрлендіру операциялары	Алғашқы (исходная) схема	Түрлендірілген схема
1	Тарау түйіндерінің орындарын ауыстыру		
2	Қосындағыш-тардың орындарын ауыстыру		
3	Тарау түйінін буын бойымен алға тасымалдау		
4	Тарау түйінін буын бойымен кері тасымалдау		
5	Қосындағыш-ты буын бойымен алға тасымалдау		
6	Қосындағыш-ты буын бойымен кері тасымалдау		

1.45-есеп. 1.39-суретте бірконтурлы тұйықталған реттеу жүйесінің алгоритмдік схемасы келтірілген.



а)



б)

1.39-сурет. Тұйықталған бірконтурлы жүйенің (а) және оның ажыратылған контурының (б) алгоритмдік схемалары

Жүйеде параллель қосылыстармен кері байланыстар болмайтын, *A* мен *B* нүктелерінің арасын үзгендегі алынатын құрылымдық схеманы тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і. *A* мен *B* нүктелерінің арасын үзгендегі пайда болатын жүйенің ажыратылған контурының (1.38,*б*-сурет) беріліс функциясы

$$W_{a.к.}(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p). \qquad (1.3.6)$$

$W_5(p)$, $W_6(p)$ беріліс функциялары тұйық контурдың сыртында тұрғандықтан, (1.3.6) көбейтіндісіне кірмейді.

Жүйедегі x_2, x_4, x_5, x_6 – сыртқы әсерлер, y_1, y_2, y_3, y_4 – шығыстық айнымалылар болғандықтан, тұйық жүйенің әрбір «кіріс-шығыс» пары үшін жеке-жеке беріліс функциясын алуға болады.

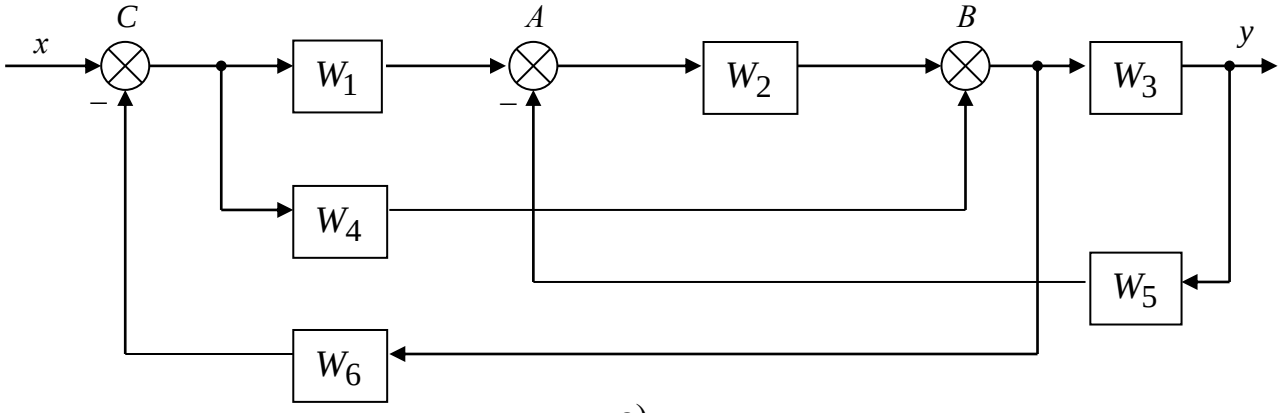
Мысалы, 1.38-суреттегі $x_5 - y_3$ каналы үшін алынған беріліс функция

$$\Phi_{3.5}(p) = \frac{y_3(p)}{x_5(p)} = \frac{-W_5(p)W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1+W_{a.к.}(p)}, \qquad (1.3.7)$$

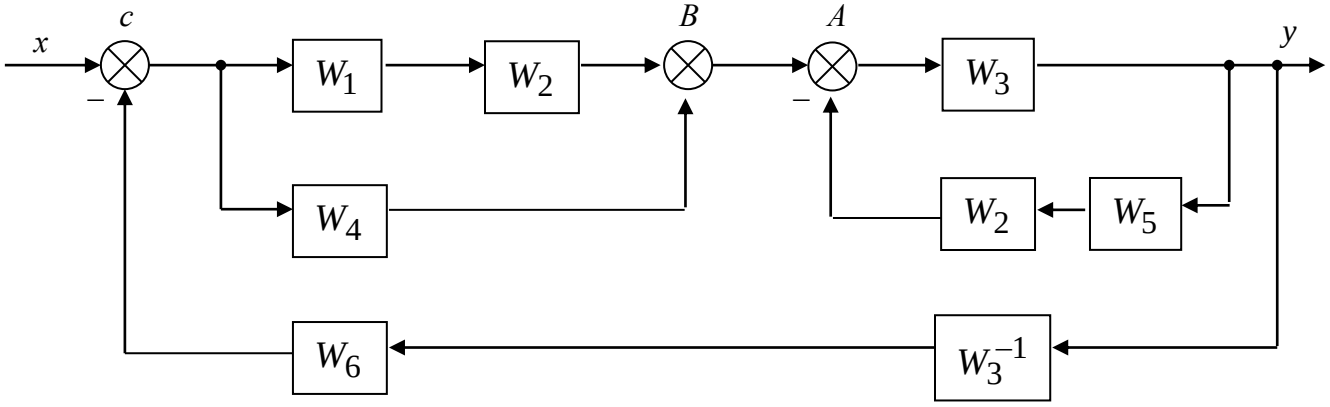
мұндағы $W_{a.к.}(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)$.

(1.3.7) формуласын жазғанда, таңбаның 1.38-суреттегі контурдың ішінде тек бір-ақ рет өзгеретіні (W_3 буынынан кейінгі қосындағышта) ескерілген, яғни кері байланыс – теріс. Таңбаның былай ауысуы тура тізбектегі сигналға да тән, сондықтан өрнектің алымында «минус» тұр.

1.46-есеп. Құрылымдық схемаларды пара-пар түрлендіру ережелерін пайдалана отыра 1.40-суретте келтірілген көпконтурлы, көпбайланысты схеманы бірконтурлы схемаға пара-пар түрлендіру қажет.



а)



б)

1.40-сурет. Көпконтурлы, көпбайланысты (а) құрылымдық схеманы пара-пар түрлендіру (б)

Ш е ш і м і. W_3 буынының кірісіндегі байланыс түйінін оның шығысына ауыстырамыз. Ол үшін W_6 буынының кірісіне $\frac{1}{W_3}$ кері функцияны қосамыз (1.3.1-кестесіндегі № 3 ереже). W_2 буынының кірісіндегі A қосындағышты осы буынның шығысына ауыстырамыз. Ол үшін W_5 буынының шығысына W_2 қосымша буынды енгіземіз (№ 5 ереже). Енді № 2 ереже бойынша A және B қосындағыштардың орындарын ауыстырамыз. Нәтижесінде 1.40-суретте көрсетілгендей қарама-қайшы байланыстары жоқ схеманы аламыз. Бұл схемадағы екі ішкі байланыстармен тұрған буындардың беріліс функциялары:

$$W_{1.2,4}(p)=W_1(p)W_2(p)-W_4(p) \qquad (1.3.8)$$

$$W_{3,2,5}(p)=\frac{W_3(p)}{1-W_3(p)W_2(p)W_5(p)} \qquad (1.3.9)$$

Енді схеманы ажыратылған контурының беріліс функциясы

$$W_{а.к.}(p)=W_{1,2,4}(p)\cdot W_{3,2,5}(p) \qquad (1.3.10)$$

болатын жүйе ретінде қарастыруға болады.

Олай болса, x – y каналы бойынша тұйықталған жүйенің беріліс функциясын аламыз:

$$\Phi(p)=\frac{y(p)}{x(p)}=\frac{W_{а.к.}(p)}{1+W_{а.к.}(p)}$$

немесе (1.3.8), (1.3.9) және (1.3.10) өрнектерін ескере отыра

$$\Phi(p)=\frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)-W_3(p)W_4(p)}{1+W_1(p)W_2(p)W_6(p)-W_2(p)W_3(p)W_5(p)-W_4(p)W_6(p)}.$$

1.47-есеп. 1.2-параграфтағы 1.18-суретіндегі тәуелсіз қоздырмалы электрқозғалтқыш құрылымдық схемасын пара-пар түрлендіріп, оның ыңғайлы түрін алу қажет.

Ш е ш і м і. $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$ үш элементті түрлендіру ережелері бойынша бір элементке жинақтаймыз. Нәтижесінде электрқозғалтқыштың беріліс функциясын мына түрде аламыз:

$$W_{к}(p)=\frac{\dfrac{K_T}{p(T_a p+1)\left(j_{к} p+K_{\upsilon}\right)R}}{\dfrac{K_T K_l p}{p(T_a p+1)\left(j_{к} p+K_{\upsilon}\right)R}}.$$

Ықшамдау мақсатындағы түрлендірулерді жүргізе отыра, аламыз:

$$W_{к}(p)=\frac{K_{к}}{p(T^2 p^2+2\xi T p+1)}, \qquad (1.3.11)$$

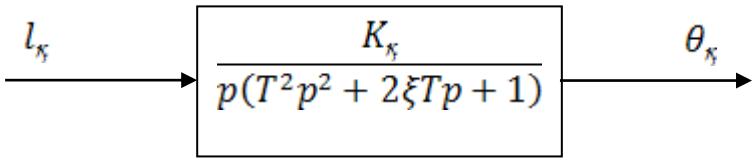
мұндағы

$$K=\frac{K_T}{RK_{\upsilon}+K_T K_{\ell}};$$

$$T=\sqrt{\frac{j\ RT_a}{RK_{\upsilon}+K_T K_{\ell}}};$$

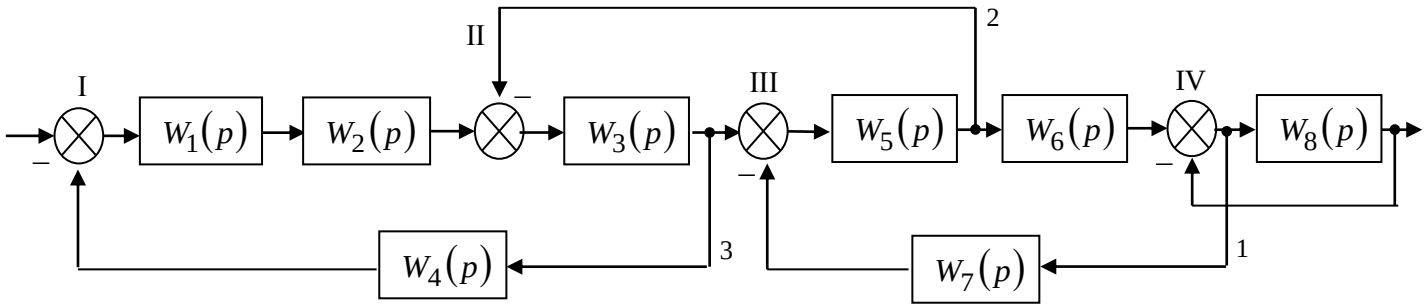
$$\xi=\frac{j\ R+RK_{\upsilon}T_a}{2\sqrt{j\ RT_a\left(RK_{\upsilon}+K_T K_{\ell}\right)}}.$$

(1.3.11) өрнегіндегі беріліс функциясына сәйкес құрылымдық схема 1.40-суретінде келтірілген.



1.40-сурет. Электрқозғалтқыштың түрлендірілген құрылымдық схемасы

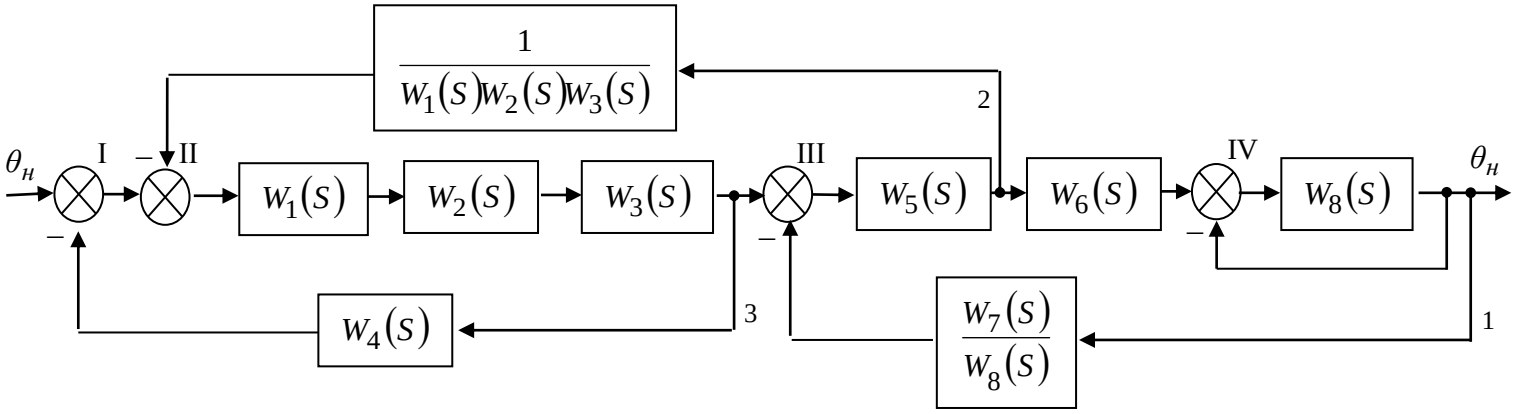
1.48-есеп. 1.41-суретінде келтірілген құрылымдық схеманы пара-пар түрлендіріп есептеуге ыңғайлы түрге келтіру қажет.



1.41-сурет. Бастапқы құрылымдық схема

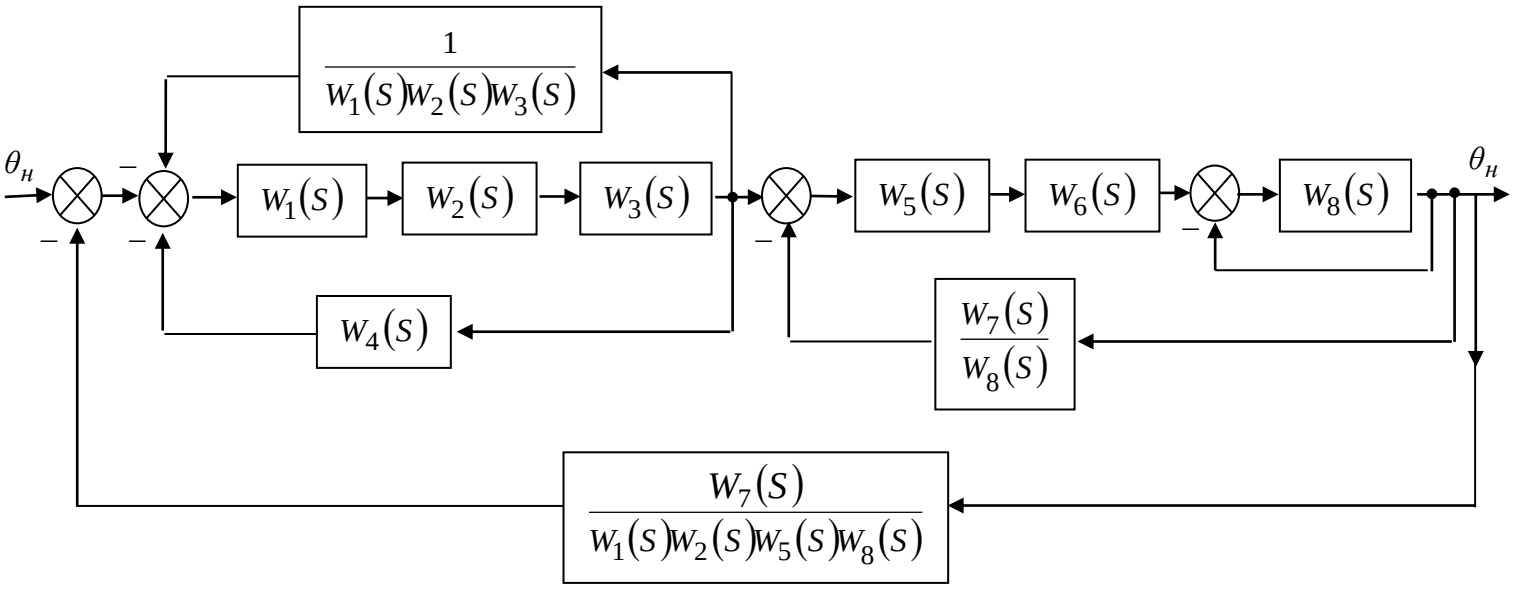
Ш е ш і м і. Кері байланыс қиылыстарын алып тастаймыз. Ол үшін $W_8(p)$ буынының шығысына 1 байланыс желісін; $W_5(p)$ буынының

шығысына 2 байланыс желісін; II салыстырушы элементті $W_1(p)$ мен $W_2(p)$ буындарының алдына апарамыз; ал I және IV салыстырушы құрылғыларды өз орындарында қалдырамыз. Онда 1.3.1-кестедегі құрылымдық түрлендіру ережелеріне сәйкес 1.42-суретте келтірілген құрылымдық схеманы аламыз.



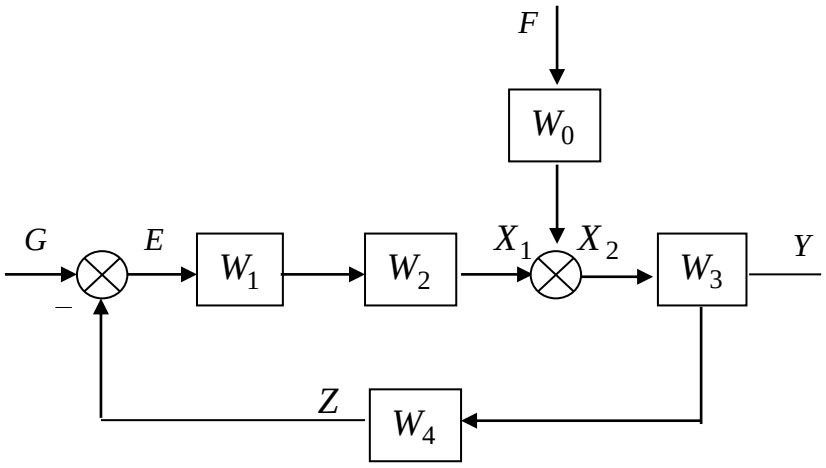
1.42-сурет. Түрлендірілген құрылымдық схема

Әрі қарай, III салыстырушы құрылғының алдына 2 байланыс желісін алып келеміз (1.43-сурет). Бұл кезде түрлендіру ережелері бойынша 1-2 байланыс желілері арқылы бірінен соң бірі өтетін сигналға сәйкес келетін контурды қосамыз. Нәтижесінде кері байланыстар қиылыстары жоқ 1.43-суретінде келтірілген құрылымдық схемасын аламыз.



1.43-сурет. Кері байланыстардың қиылысы жоқ
түрлендірілген схема

1.49-есеп. Жүйенің (1.44-сурет) f кірісі мен e шығысына сәйкес W_{ef} және g кірісі мен y шығысына сәйкес W_{yg} беріліс функцияларын анықтау қажет.



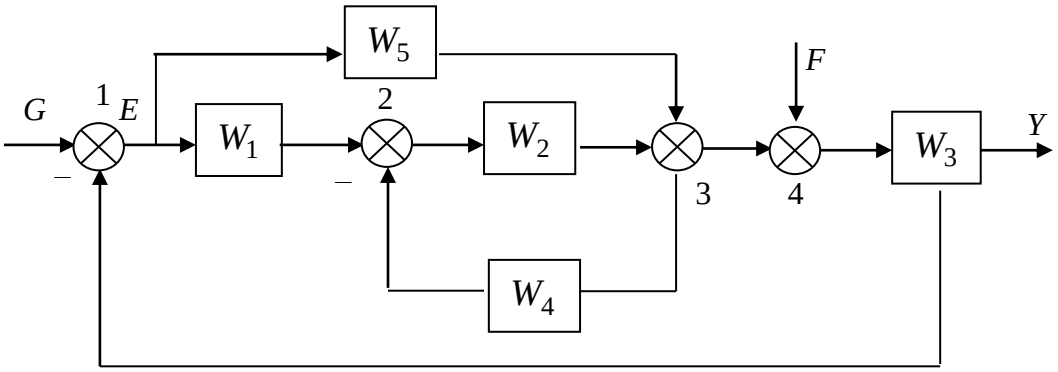
1.44-сурет. Құрылымдық схема

Ш е ш і м і: Жүйедегі тіке тізбек бір-бірімен тізбектеле жалғанған g кіріс пен y шығысқа сәйкес екі қосындағыш пен беріліс функциялары W_1, W_2, W_3 болатын буындардан тұрады. Қосындағыштардың кірістері бұл тізбекте плюс таңбалы болғандықтан, олардың беріліс функциялары бірге тең. Сондықтан тіке тізбектің беріліс функциясы $W_T = W_1W_2W_3$ болады.

f кіріс пен e шығысқа сәйкес келетін тіке тізбек бір-бірімен тізбектеле жалғанған екі қосындағыш пен беріліс функциялары W_0, W_3, W_4 болатын буындардан тұрады. Бірінші қосындағыштың кірісі плюс таңбалы, ал екіншінікі минус таңбалы, сондықтан олардың беріліс функциясы сәйкес бірге және минус бірге тең. Нәтижесінде тіке тізбектің беріліс функциясы $W_T = -W_0W_3W_4$. Яғни ізделініп отырған беріліс функцияларды былай анықтауға болады:

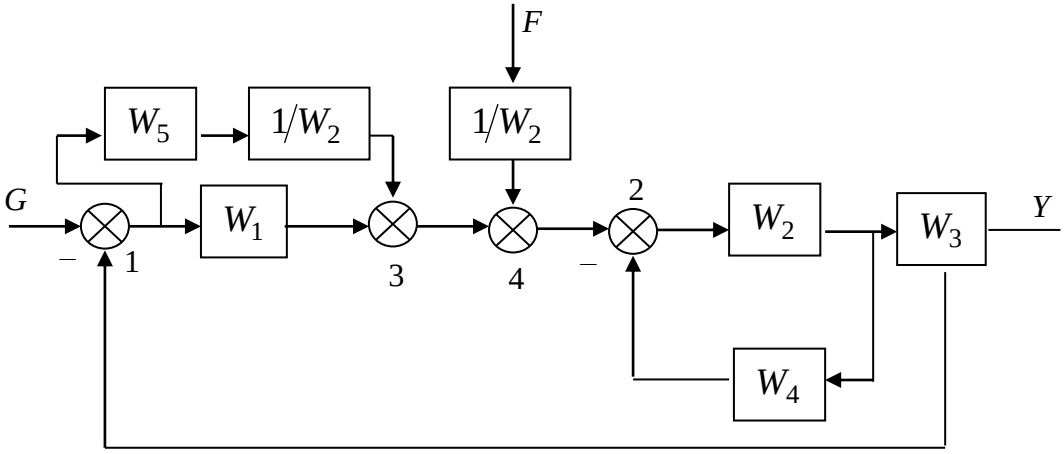
$$W_{yg} = \frac{W_1W_2W_3}{1 + W_1W_2W_3W_4},\ W_{ef} = \frac{-W_0W_3W_4}{1 + W_1W_2W_3W_4}.$$

1.50-есеп. 1.45-суретте келтірілген реттеу жүйесінің W_{yg} және W_{yf} беріліс функцияларын анықтау қажет.



1.45-сурет.

Ш е ш і м і: Алдымен айқас байланыстардан босанамыз. Ол үшін 3 қосындағышты W_2 буын мен 2 қосындағыш арқылы сигнал бағытына қарсы көшіреміз. Тура осы әдісті 4 қосындағышқа да қолданамыз (1.46-сурет).



1.46-сурет. Құрылымдық схема

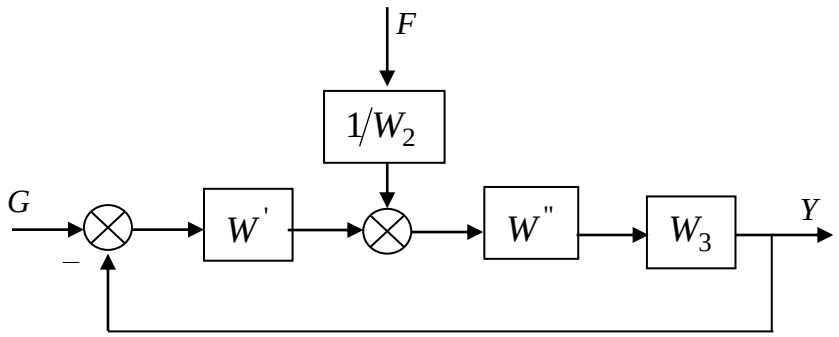
Әрі қарай параллель қосылысты беріліс функциясы

$$W' = W_1 + W_5 \cdot \frac{1}{W_2} = \frac{W_1 W_2 + W_5}{W_2}$$

буынмен және кері байланысты беріліс функциясы

$$W'' = \frac{W_2}{1 + W_2 W_4}$$

болатын буынмен алмастырып, бірконтурлы жүйені аламыз (1.47-сурет).



1.47-сурет.

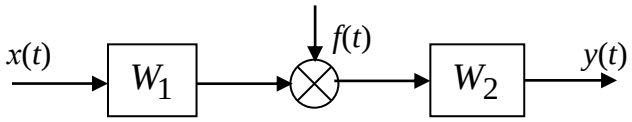
Соңғы схемадан бірконтурлы жүйенің беріліс функциясын есептеу ережесіне сәйкес керекті функцияларды анықтаймыз:

$$W_{yg} = \frac{W'W''W_3}{1+W'W''W_3},\ W_{yf} = \frac{W''W_3}{W_2\left(1+W'W''W_3\right)}.$$

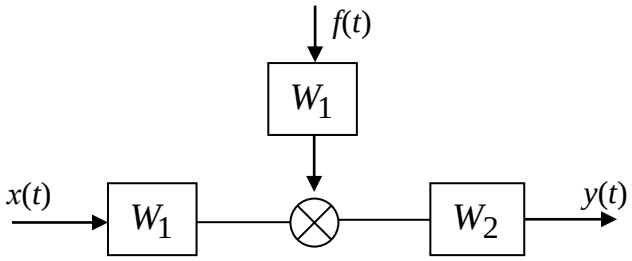
Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар мен берілген есептер

1. Алғашқы схеманы пара-пар түрлендіру нәтижесінде алынған барлық құрылымдық схемаларының беріліс функциялары:
   а) тұтастай алғанда өзгермейді, бірақ та жүйенің қанша және қандай жай буындарға ажыратылғандығына және олардың арасындағы құрылымдық байланыстарға тәуелді болады;
   б) тұтастай алғанда өзгереді және құрылымдық байланыстарға тәуелді болмайды;
   в) тұтастай алғанда өзгермейді әрі жүйенің қанша және қандай жай буындарға ажыратылғандығынан және олардың арасындағы құрылымдық байланыстарға тәуелсіз болады.
2. Тізбектеле, параллель және қарсы параллель қосылған бірнеше буындардың беріліс функциясы:
   а) $W(p)=\sum_{i=1}^{n} W_i(p)$;
   б) $W(p)=\prod_{i=1}^{n} W_i(p)$;
   в) $\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}$
3. 1.48-суреттегі автоматты жүйені пара-пар түрлендіргендегі алынған құрылымдық схеманың дұрысы:
   а) 1.48,б-сурет;

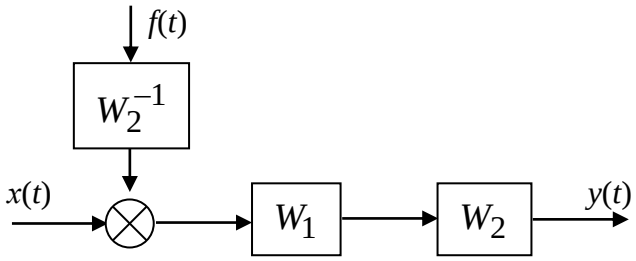
б) 1.48,в-сурет;
в) 1.48,г-сурет.



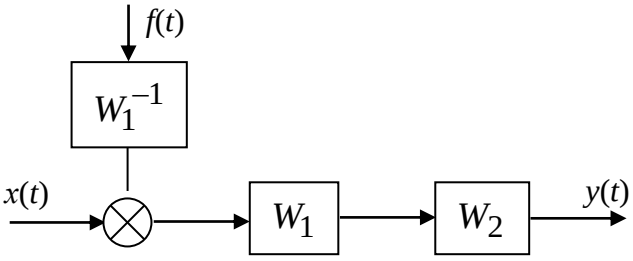
а)



б)



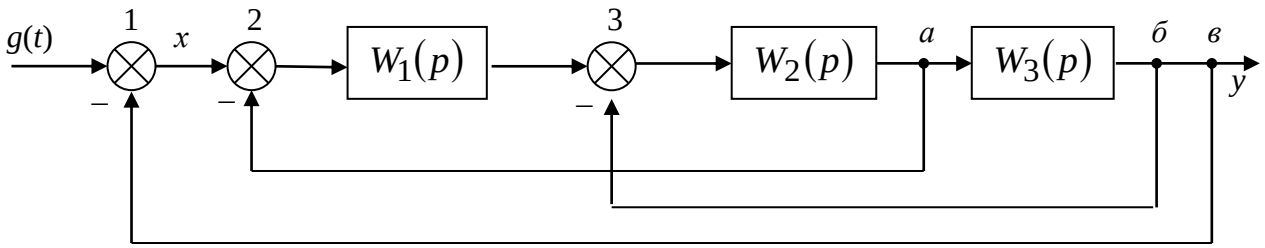
в)



г)

1.48-сурет. Құрылымдық схеманы пара-пар түрлендіру

1.51-есеп. Құрылымдық схемасы 1.49-суретте келтірілген тұйықталған автоматты жүйенің беріліс функциясын табу қажет.



1.49-сурет. Жүйенің құрылымдық схемасы

1.52-есеп. Дифференциалдық теңдеуі

$$\left(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1\right) x_2 = K x_1 \qquad (1.3.12)$$

динамикалық жүйенің қарсы параллель қосылған құрылымдық схемасын құру қажет.

1.53-есеп. 1.49-суреттегі буындардың беріліс функциялары

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1 p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{K_2}{p}, \quad W_3(p) = K_3.$$

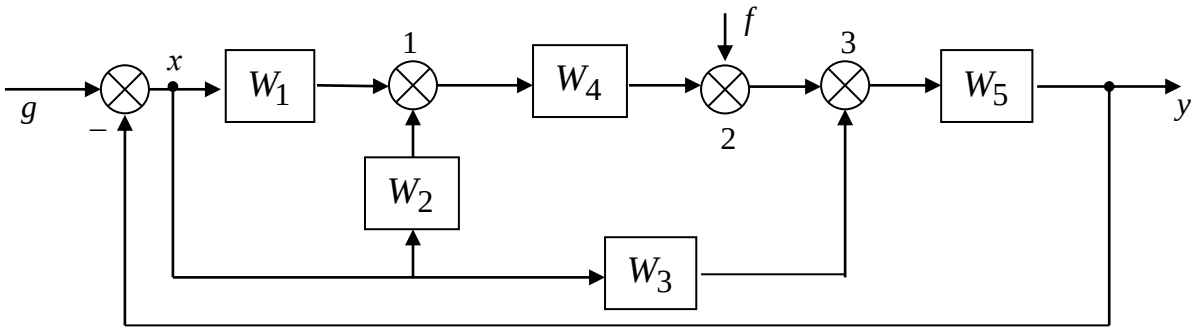
Берілген әсер $g(t)$, реттелетін шама $y(t)$ болғандағы автоматты жүйенің құрылымдық схемасын табу керек.

1.54-есеп. 1.50-суреттегі автоматты реттеу жүйесінің буындарының беріліс функциялары белгілі:

$$W_1(p) = K, \quad W_2(p) = \tau p, \quad W_3(p) = K_3,$$

$$W_4(p) = \frac{K_4}{T_1 p + 1}, \quad W_5(p) = \frac{K_5}{T_2^2 p^2 + T_3 p + 1}.$$

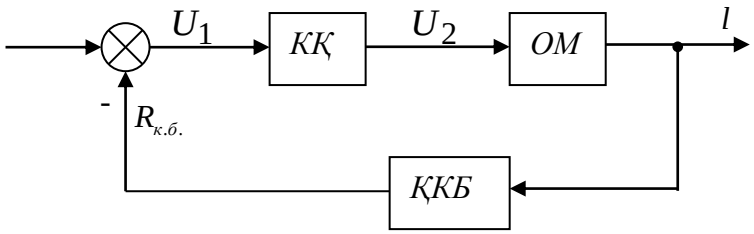
Жүйенің $y(t)$ реттелетін шамасының $f(t)$ қобалжыту әсеріне сәйкес дифференциалдық теңдеуін анықтау қажет.



1.50-сурет. 1.54-есепке берілген құрылымдық схема

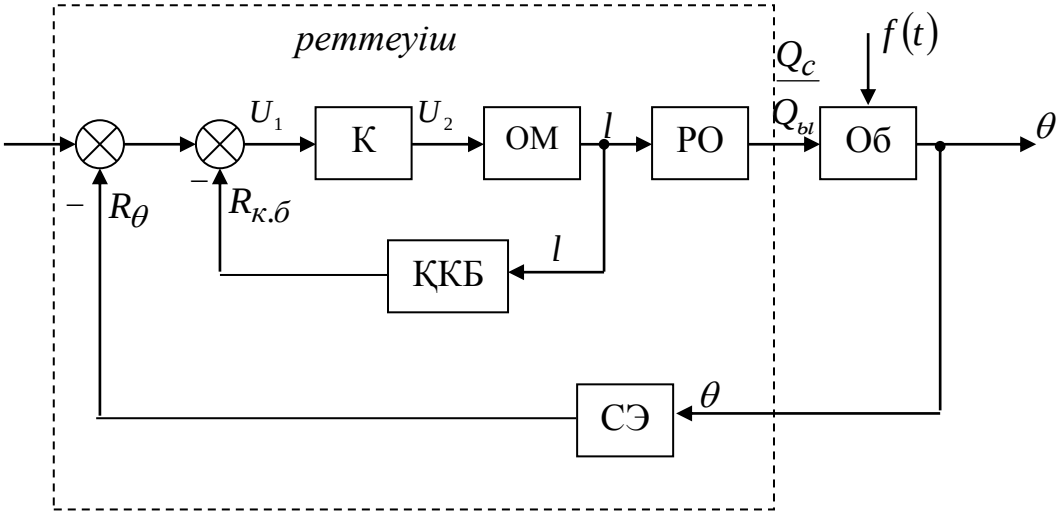
1.55-есеп. Күшейту коэффициенті K күшейткіш буын беріліс функциясы $W_{к.б.}(p)=\frac{T_{к.б.}K_{к.б.}p}{T_{к.б.}p+1}$ кері байланыспен қамтылған. Осындай схемасы бар жүйені бір буынмен алмастырып, оның беріліс функциясын анықтап, алынған нәтижені талдау қажет. Есепті шығарғанда буынның күшейту коэффициенті тура тізбекте шексіздікке ұмтылады, яғни $K\to\infty$ деп есептеңіз.

1.56-есеп. АРЖ құрылымдық схемасы 1.51-суретте келтірілген. Күшейтуші құрылғының (КҚ) беріліс функциясы $W_1(p)=K$, орындаушы механизмнің (ОМ) беріліс функциясы $W_2(p)=\frac{K_2}{p}$. Берілген құрылымдық схеманы пара-пар түрлендіріп, беріліс функциясын табу қажет.



1.51-сурет. АРЖ бөлігінің құрылымдық схемасы

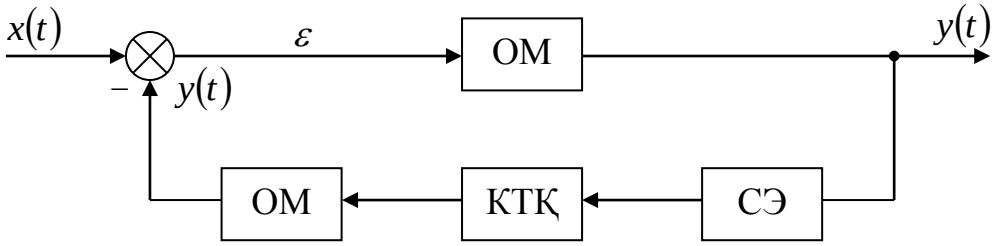
1.57-есеп. 1.52-суреттегі температураны реттеу автоматты жүйесінің құрылымдық схемасын құрып, оны пара-пар түрлендіріп, беріліс функциясын жазу қажет.



1.52-сурет. Температураны реттеу автоматты жүйесінің функционалдық схемасы:
Q_c – суық ауа, $Q_ы$ – ыстық газ, θ – температура

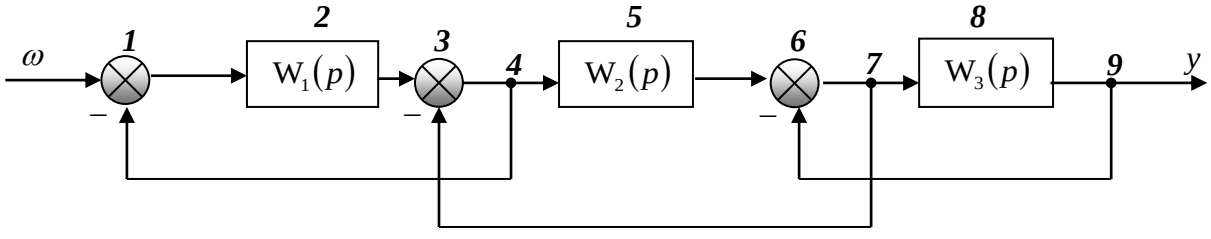
1.58-есеп. Функционалдық схемасы 1.53-суретте келтірілген орта қысымы АРЖ үшін құрылымдық схеманы тұрғызып, оны түрлендіріп, жүйенің ажыратылған және тұйықталған күйлеріндегі беріліс функцияларын жазу қажет.

Есепті шығарғанда реттеу объектісін бірінші ретті апериодтық, ал қалған элементтерді – инерциясыз буындар деп есептеу керек.



1.53-сурет. Орта қысымы АРЖ функционалдық схемасы

1.59-есеп. Құрылымдық схемасы 1.54-суретте келтірілген автоматты реттеу жүйесін парапар түрлендіріп, алынған схеманың беріліс функциясын анықтау қажет.



1.54-сурет. АРЖ құрылымдық схемасы

2-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығы

2.1. Автоматты реттеу жүйесін орнықтылық критерийлерімен бағалау

Жүйенің орнықтылығы деп оның тепе-теңдік күйінен ауытқуына себеп болған әсерді алып тастағаннан кейін, бастапқы орнықтылық қалпына оралу қабілеттілігін айтады.

Автоматты реттеу жүйесінің статикалық тепе-теңдік күйі әр түрлі болады. Жүйенің орнықтылық режиміндегі тепе-теңдік күйі үш түрге ажыратылады: орнықты, орнықсыз және бейтарап.

Орыс ғалымы, академик А.М. Ляпунов бірінші болып орнықтылықтың дәл анықтамасын тұжырымдап, қозғалыстың орнықтылығын зерттеудің жалпы әдісін жасады. Оның теориясы бойынша, сызықты АРЖ-ның орнықтылығы сипаттамалық теңдеудің түбірлерімен анықталады. Сызықтық АРЖ-ның орнықтылық шартының аналитикалық тұжырымын А.М. Ляпунов былайша тұжырымдайды: *Сызықты АРЖ орнықты болуы үшін мынадай шарттар қажетті және жеткілікті: сипаттаушы теңдеудің барлық нақты түбірлерінің теріс таңбалы, ал комплекс түбірлерінің нақты бөлігі теріс таңбалы болуы тиіс.*

Бірінші және екінші ретті жүйелердің сипаттаушы теңдеулерінің барлық коэффициенттері нөлден үлкен болса, олар орнықты делінеді. Жоғары ретті жүйе үшін бұл шарт тек қажетті ғана, бірақ жеткіліксіз. АРЖ-ның орнықтылығын әдетте орнықтылық критерийлерімен бағалайды.

Р а у с – Г у р в и ц к р и т е р и й і. Кейде алгебралық деп аталынатын Раус-Гурвиц критерийінің мәні былайша анықталады:

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n+1} = 0,$$

сипаттаушы теңдеудің түбірлері жорамал осьтің сол жағында жатып және жүйе орнықты болуы үшін Гурвицтің барлық Δ_i диагональ минорлары сипаттаушы теңдеудің оң коэффициенттері кезінде оң болуы қажетті әрі жеткілікті. Сипаттаушы теңдеуден Гурвицтің бас анықтауышы мынаған тең:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & & a_n \end{vmatrix}.$$

Пунктир сызығымен минорлардың (анықтауыштардың) пайда болу реті көрсетілген. Яғни, орнықтылық шартын мына түрде жазуға болады:

$$a_0 > 0, \qquad \Delta_1 = a_1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta_3 = \Delta_2 \cdot a_3 > 0 \qquad \text{т.с.с.}$$

М и х а й л о в к р и т е р и й і – жиіліктік критерий, комплекстік жазықтықта салынған годографтың түрі бойынша тұйықталған жүйенің орнықтылығы туралы шешім қабылдауға мүмкіндік береді.

Бұл жағдайда жүйе орнықты болу үшін ω бұрыштық жиілік 0-ден ∞-ке дейін өзгергенде годографтың комплекстік жазықтықта оң таңбалы жартылай осьтен басталып сағат тіліне қарсы бағытта сипаттаушы теңдеудің ретіне тең квадранттар санына бұрылуы қажетті және жеткілікті.

$G(j\omega)$ годографын тұрғызу үшін

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n$$

тұйықталған жүйенің сипаттаушы полиномын пайдаланады. Бұл өрнекті мына түрге келтіруге болады:

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

мұндағы $U(\omega) = a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \ldots;$

$V(\omega) = \omega a_{n-1} - \omega^3 a_{n-3} + \omega^5 a_{n-5} - \ldots$.

Енді ω жиілігінің мәндерін 0-ден ∞-ке дейін өзгерте отыра $[U(\omega), jV(\omega)]$ координаттарында $G(j\omega)$ өрнегіне сәйкес годографты тұрғызуға болады.

Н а й к в и с т к р и т е р и й і – бұл да жиіліктік критерий. Бұл критериймен ажыратылған жүйенің $W(j\omega)$ амплитудалық фазалық жиіліктік сипаттамасы бойынша тұйықталған жүйенің орнықтылығын анықтауға болады.

Ажыратылған күйдегі орнықты АРЖ тұйықталған күйінде де орнықты болып қалуы үшін $W(j\omega)$ ажыратылған жүйенің амплитудалық фазалық жиіліктік сипаттамасы ω жиілігін 0-ден ∞-ке дейін өзгергенде координатасы (-1, j0) нүктесін қамтымауы тиіс. Егер годограф осы нүкте арқылы өтер болса, онда жүйенің орнықтылық шекарасында тұрғаны.

Көп жағдайларда орнықтылықтың логарифмдік критерийін пайдалану ыңғайлы. Бұл критерийді Найквист критерийінің логарифмдік түрі деп айтуға болады. Жүйе ажыратылған күйінде орнықты болуы үшін $L(\omega) > 0$ болатын жиіліктер ауқымында $\varphi(\omega)$ фазалық сипаттама 180°-қа сәйкес келетін түзуді кесіп өтпеуі немесе оны жоғарыдан төмен және төменнен жоғары қарай бағыттарда бірдей рет кесіп өтуі қажетті және жеткілікті.

Бұл критерийлермен қатар, ажыратылған жүйелердің ЛАС және ЛФС түрлері бойынша тұйықталған жүйелердің орнықтылығы туралы тұжырым жасауға болады. Яғни тұйықталған автоматты реттеу жүйесі, орнықты тұйықталмаған жүйенің ЛАС-сы абсцисса осін ЛФС 180° деңгейіндегі түзуді қиып өтетіндей жиіліктен кіші жиілікте қиып өткенде ғана орнықты болады.

Логарифмдік сипаттамаларда ΔL модульдік орнықтылық қоры фазалық сипаттамасының $\arg W(j\omega)=\pi$ сызығымен қиылысу нүктесіне сәйкес келетін жиілікте алынған амплитуда логарифмі ретінде анықталады.

Орнықтылықтың $\Delta\varphi$ фазалық қоры – $\arg W(j\omega)=-\pi$ сызығынан бастап саналатын қиық жиілігіндегі фазалық сипаттаманың ординатасы.

2.1-есеп. Дифференциалдық теңдеуі

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+xy;\\ \dfrac{dy}{dt}=-y+y^2\end{cases} \qquad (2.1.1)$$

болатын тұйықталған автоматты реттеу жүйесін Ляпуновтың 1-ші әдісі бойынша орнықтылыққа зерттеу қажет.

Ш е ш і м і. (2.1.1) теңдеулер жүйесін $x = 0$, $y = 0$ тепе-теңдік нүктесінің маңайында сызықтаймыз да, мына өрнекті аламыз:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x;\\ \dfrac{dy}{dt}=-y\end{cases}$$

Сипаттаушы теңдеуді табу үшін белгілі әдісті қолданамыз:

$$px + x = 0;$$

$$py + y = 0.$$

Матрица құрамыз да, сипаттаушы теңдеуді табамыз:

$$Y(p)=\begin{vmatrix}p+1 & 0\\ 0 & p+1\end{vmatrix}=(p+1)^2,$$

осыдан $p_1 = p_2 = -1$.

Сонымен, сызықты жақындауға сәйкес қобалжымайтын қозғалыстың ($x = 0$, $y = 0$ тепе-теңдік нүктесі) орнықты болатынын көреміз.

Алғашқы (2.1.1) теңдеуді шеше отыра

$$x = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - y_0 + y_0 e^{-t}}; \qquad y = \frac{y_0 e^{-t}}{1 - y_0 + y e^{-t}}$$

мәндерін табамыз.

Шешімнің $y_0 < 1$ болғанда

$$x \to \frac{x_0}{1 - y_0} e^{-t} \text{ және } y \to \frac{y_0}{1 - y_0} e^{-t}$$

тепе-теңдік нүктесінде түйісетінін көрсетейік.

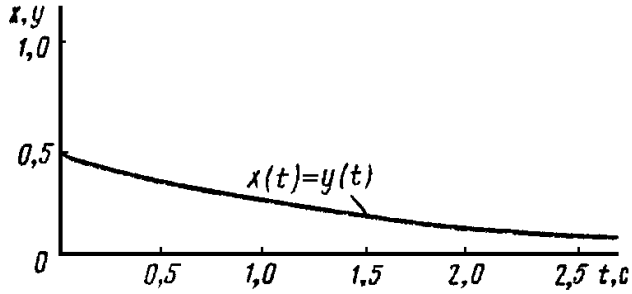
2.1-суретінде реттеу жүйесінің орнықтылығын сипаттайтын, бастапқы бейсызықты жүйедегі өтпелі процесс тұрғызылған.

Осындай нәтижені Ляпунов функциясын $V = x^2 + y^2$ түрінде пайдалана отыра да алуға болады.

(2.1.1) теңдеуден табамыз:

$$\frac{dV}{dt} = -\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y + y^2. \qquad (2.1.2)$$

(2.1.2) өрнектен жоқ дегенде $|x| << 1$ және $|y| << 1$ болғанда $\frac{dV}{dt}$-ның теріс анықталған функция екенін көруге болады. Бұл автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығының дәлелі. Сонымен, Ляпуновтың 1-ші әдісі бойынша тұрақты коэффициенттері бар автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығы қарастырылды.



2.1-сурет. $dx/dt = -x + xy; \qquad dy/dt = -y + y^2$ теңдеуімен өрнектелген бейсызықты жүйенің өтпелі процесі

2.2-есеп. Сипаттаушы теңдеуі

$$p^6 + 6p^5 + 21p^4 + 44p^3 + 62p^2 + 52p + 24 = 0$$

түріндегі автоматты реттеу жүйесін Гурвиц критерийі бойынша орнықтылыққа зерттеу қажет.

Ш е ш і м і. Сипаттаушы теңдеу 6 ретті болғандықтан

$$\Delta_6 = a_6\Delta_5,$$

мұндағы $a_6 = 24 \neq 0.$

Гурвиц анықтауышын құрамыз:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 44 & 52 & 0 & 0 \\ 1 & 21 & 62 & 24 & 0 \\ 0 & 6 & 44 & 52 & 0 \\ 0 & 1 & 21 & 62 & 24 \\ 0 & 0 & 6 & 44 & 52 \end{vmatrix} = 972192 > 0$$

Осы арқылы қалған төрт минорды құрайық:

$$\Delta_1 = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 44 \\ 1 & 21 \end{vmatrix} = 82 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 44 & 52 \\ 1 & 21 & 62 \\ 0 & 6 & 44 \end{vmatrix} = 1688 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 44 & 52 & 0 \\ 1 & 21 & 62 & 24 \\ 0 & 6 & 44 & 52 \\ 0 & 1 & 21 & 62 \end{vmatrix} = 43560 > 0$$

Барлық минорлар оң таңбалы болғандықтан, автоматты реттеу жүйесі орнықты.

2.3-есеп. АРЖ беріліс функциясы

$$W_{об}(p) = \frac{K_{об}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

объектіден және беріліс функциясы

$$W_p(p)=\frac{K_p}{p}$$

И-реттеуіштен тұрады.

Гурвиц критерийінің көмегімен тұйықталған жүйенің $k_ш$ шектік күшейту коэффициентін анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясын анықтаймыз:

$$W(p)=W_{об}(p)W_p(p)=\frac{K}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}=\frac{A(p)}{B(p)}.$$

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{A(p)}{A(p)+B(p)}=\frac{K}{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p+K}$$

және оның сипаттаушы теңдеуі

$$G(p)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0,$$

мұндағы $a_0 = T_1T_2$; $a_1 = T_1 + T_2$; $a_2 = 1$; $a_3 = K$.

Дифференциалдық теңдеудің реті $n = 3$, сондықтан Гурвиц критерийіне сәйкес жүйенің орнықтылығы үшін $\Delta_2 > 0$ болуы қажет, яғни

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0. \qquad (2.1.3)$$

Коэффициенттердің мәндерін (2.1.3) өрнегіне қойып

$$K<\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}$$

аламыз да, одан жүйенің шектік күшейту коэффициентін анықтаймыз:

$$K_ш<\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}. \qquad (2.1.4)$$

2.4-есеп. Ажыратылған күйдегі автоматты реттеу жүйесінің беріліс функциясы мына түрде берілген:

$$W(p)=\frac{K}{p(2p+1)(0{,}85p+1)}.$$

Беріліс коэффициентінің *а*) $K_1 = 1$; *б*) $K_2 = 1{,}675$; *в*) $K_3 = 2$ мәндері үшін Гурвиц критерийін қолдана отыра, тұйықталған жүйенің орнықтылығын анықтау қажет.

Ш е ш і м і. (2.1.4) формуласын пайдалана отыра жүйенің шектік күшейту коэффициентін табамыз:

$$K_ш < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{0{,}85} = 1{,}675.$$

Жүйе күшейту коэффициентінің $K = 1{,}675$ шектік мәнінде тұйықталған жүйеде өшпейтін тербеліс пайда болады, яғни $K_2 = K_ш = 1{,}675$ мәнінде жүйе орнықтылық шекарасында тұрады.

Күшейту коэффициенті $K_1 = 1$ болғанда жүйе орнықты, себебі $K_1 < K_ш$, ал $K_3 = 2$ болғанда тұйықталған жүйеде таралмалы тербеліс пайда болады, яғни ол орнықсыз, себебі $K_3 < K_ш$.

2.5-есеп. Автоматты басқару жүйесі реттеуіштен және T уақыт тұрақтылары бірдей бірінші ретті үш апериодты буыннан тұрады; объектінің күшейту коэффициенті $K_{об} = 1$.

Гурвиц критерийін қолдана отыра реттеуіштің шектік күшейту коэффициентін анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Қарастырылып отырған статикалық жүйенің ажыратылған күйіндегі беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)},$$

мұндағы $K = K_{об}K_p$ – бұл жағдайда реттеуіштің күшейту коэффициентіне тең болатын жүйенің күшейту коэффициенті, себебі $K_{об} = 1$.

Уақыт тұрақтыларын $T_1 = T_2 = T_3 = T$ деп белгілеп, тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуін $A(p) + B(p) = 0$ түрінде жазамыз.

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

мұндағы $a_0 = T_3$; $a_1 = 3T^2$; $a_2 = 3T$; $a_3 = 1 + K_p$.

Яғни, теңдеудің барлық коэффициенттері нөлден үлкен, олай болса Δ_2 анықтауышын табамыз.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 9T^3 - (1 + K)T^3 > 0.$$

Реттеуіштің шектік күшейту коэффициентін мына өрнектен анықтаймыз:

$$9T^3 - (1 + K_ш)T^3 = 0$$

одан

$$K_ш = 8$$

аламыз.

2.6-есеп. Дифференциалдық теңдеуі

$$3\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 4\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = f(t)$$

болатын жүйені Гурвиц критерийі бойынша орнықтылыққа зерттеу қажет.

Ш е ш і м і: Есепте $a_0 = 3;\ \ a_1 = 4;\ \ a_2 = 4;\ \ a_3 = 2;\ \ a_4 = 0$ Гурвиц анықтауыштарын құрамыз.

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 32 - 12 = 20 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = a_4\Delta_3 = 0.$$

Δ_4 анықтауышы нөлге тең болғандықтан, басқа анықтауыштар оң болғанымен, жүйе орнықты емес.

2.7-есеп. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K}{p^3 + 0{,}5p^2 + 4p + 1} = \frac{A}{B};\quad K = 0{,}5;\ 2.$$

Ажыратылған және тұйықталған жүйелерді орнықтылыққа зерттеу қажет.

Ш е ш і м і: Ажыратылған жүйенің сипаттаушы теңдеуі

$$G(p)=p^3+0{,}5p^2+4p+1=0.$$

Теңдеудің барлық коэффициенттері нөлден үлкен және анықтауыш $\Delta_2=\begin{vmatrix}0{,}5 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=0{,}5\cdot 4-1\cdot 1=1>0.$ Ажыратылған жүйе орнықты.

Тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі

$$G(p)=A+B=p^3+0{,}5p^2+4p+1+K.$$

K-ның екі мәнінде де теңдеудің барлық коэффициенттері оң таңбалы, ал Δ_2 анықтауышы $K=0{,}5$ болғанда

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0{,}5 & 1{,}5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=0{,}5\cdot 4-1\cdot 1{,}5=0{,}5>0,$$

ал $K=2$ болғанда

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0{,}5 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=0{,}5\cdot 4-1\cdot 3=-1<0.$$

Яғни, тұйықталған жүйе $K=0{,}5$ болғанда орнықты, ал $K=2$ болғанда орнықсыз.

2.8-есеп. Дифференциалдық теңдеуі

$$\frac{d^5y(t)}{dt^5}+\frac{d^4y(t)}{dt^4}+11\frac{d^3y(t)}{dt^3}+5\frac{d^2y(t)}{dt^2}+18\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=f(t)$$

болатын жүйенің орнықтылығын Михайлов критерийі бойынша зерттеу қажет.

Ш е ш і м і: Сипаттаушы теңдеу

$$p^5+p^4+11p^3+5p^2+18p+4=0.$$

Михайлов векторы

$$G(j\omega)=(j\omega)^5+(j\omega)^4+11(j\omega)^3+5(j\omega)^2+18(j\omega)+4=U(\omega)+jV(\omega),$$

мұндағы $U(\omega)=\omega^4-5\omega^2+4=0$

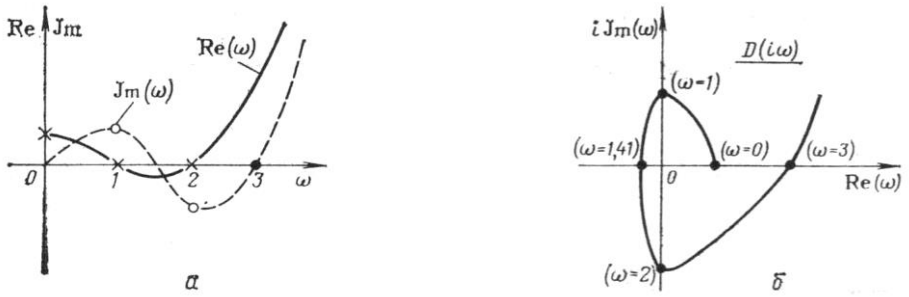
$V(\omega)=\omega(\omega^4-11\omega^2+18)=0$

Осы теңдеулердің түбірлерін анықтайық:

$U(\omega)$ үшін: $\omega_{1\cdot 2} = \pm 1; \quad \omega_{3,4} = \pm 2;$

$V(\omega)$ үшін: $\omega_1 = 0; \quad \omega_{2\cdot 3} = \pm 1{,}41; \quad \omega_{4,5} = \pm 3.$

Сандық оське $U(\omega)$ мен $V(\omega)$ оң түбірлерінің мәндерін қойсақ, «алмасу критерийінің» орындалатынын көреміз, яғни, $U(\omega)$ мен $V(\omega)$ түбірлері бір-бірімен алма-кезек ауысып отырады (2.2,*а*-сурет). Енді жиілікті $0 \le \omega \le \infty$ аралығында өзгерте отыра $U - V$ жазықтығында Михайлов годографын тұрғызсақ (2.2,*б*-сурет), оның бес квадрантты бірінен кейін бірін басып өтетінін көреміз, яғни, жүйе орнықты.



2.2-сурет. Нақты және жорамал бөліктері (а) және орнықты жүйе үшін Михайлов годографы (б)

2.9-есеп. АРЖ үш сыйымдылықты объектіден және П-реттеуіштен тұрады. Тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі мына түрде берілген:

$$G(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

мұндағы $a_0 = 0{,}04$; $a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 2$; $a_3 = 1 + K = 10$.

Михайлов орнықтылық критерийін қолдана отыра ажыратылған жүйедегі реттеуіштің $K_ш$ шектік күшейту коэффициентін анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Жүйенің сипаттаушы теңдеуіне коэффициенттердің берілген мәндерін қоямыз:

$$G(p) = 0{,}04p^3 + 0{,}5p^2 + 2p + 1 + K = 0. \qquad (2.1.5)$$

$p = j\omega$ деп ауыстырып, (2.1.5) теңдеуін

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

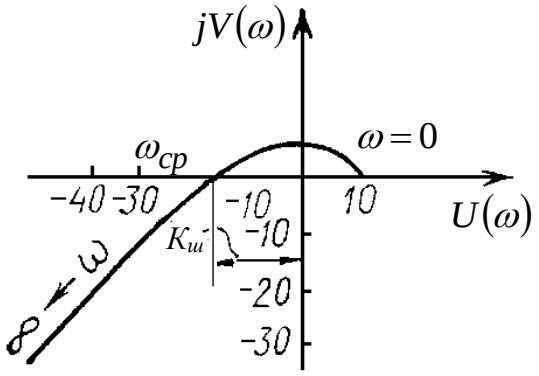
түрінде қарастырамыз.

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= 1 - 0{,}5\omega^2 + K \\ V(\omega) &= \omega\left(2 - 0{,}04\omega^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.6)$$

Жиілікті 0-ден ∞-ке дейін өзгерте отыра, $U(\omega)$ және $V(\omega)$ жазықтығында Михайловтың годографын тұрғызамыз (2.3-сурет). Суреттен реттеуіштің шектік күшейту коэффициентін мына теңдеулер арқылы анықтауға болатынын көреміз.

$$\begin{aligned} jV(\omega_к) &= 0 \\ U(\omega_к) &= K_ш \end{aligned} \qquad (2.1.7)$$

мұндағы $\omega_к$ – кесу жиілігі. Бұл жиілікте Михайлов қисығы нақты осьті кесіп өтеді.



2.3-сурет. Михайлов годографы

(2.1.6) және (2.1.7) теңдеулерін бірге қарастыра отыра, $\omega_к$ және $K_ш$ мәндерін табамыз:

$$\omega_к = \sqrt{\frac{2}{0{,}04}} = \sqrt{50} \approx 7c^{-1},$$

$$K_ш = 0{,}5\omega^2 - 1 = 0{,}5 \cdot 50 - 1 = 24.$$

2.10-есеп. Автоматты реттеу жүйесінің сипаттаушы теңдеуі мына түрде берілген:

$$G(p) = p^3 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} p^2 + \frac{1}{T_1 T_2} p + \frac{K}{T_1 T_2} = 0.$$

Параметрлері төмендегідей болғандағы жүйе орнықтылығын Михайлов критерийі бойынша зерттеу қажет:

а) T_1 = 0,05 с; T_2 = 0,5 с; K = 2,2 с$^{-1}$;
б) T_1 = 0,05 с; T_2 = 0,5 с; K = 22 с$^{-1}$; (2.1.8)
в) T_1 = 0,05 с; T_2 = 0,5 с; K = 220 с$^{-1}$.

Ш е ш і м і. Сипаттаушы теңдеудің нақты және жорамал бөліктерін анықтаймыз:

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= K - (T_1 + T_2)\omega^2; \\ V(\omega) &= \omega - T_1 T_2 \omega^3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.9)$$

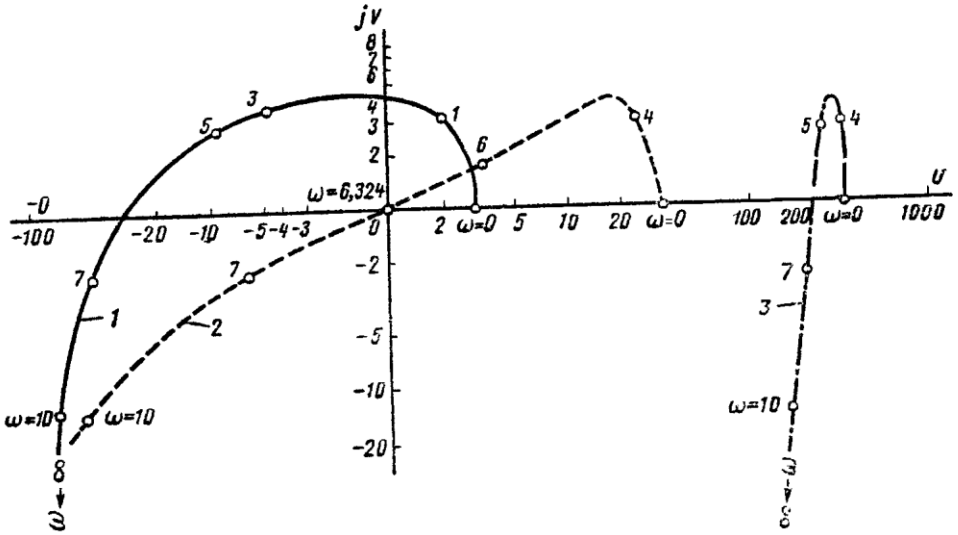
Алынған (2.1.9) өрнекке жүйе параметрлерінің сандық мәндерін қойып мынаны табамыз:

$$\left.\begin{aligned} \text{à)}\quad U_1(\omega) &= 2{,}2 - 0{,}55\omega^2; \\ V_1(\omega) &= \omega - 0{,}025\omega^3; \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.10)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{á)}\quad U_2(\omega) &= 22 - 0{,}55\omega^2 \\ V_2(\omega) &= \omega - 0{,}025\omega^3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.11)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{â)}\quad U_3(\omega) &= 220 - 0{,}55\omega^2 \\ V_3(\omega) &= \omega - 0{,}025\omega^3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.12)$$

Жиілікті $0 \le \omega \le \infty$ аралығында өзгерте отыра 2.4-суреттегі Михайлов годографын логарифмдік масштабта саламыз. Бұл суреттегі 1-қисық (2.1.10) формула, 2-қисық (2.1.11) формула, 3-қисық (2.1.12) формула бойынша есептеліп тұрғызылған.



2.4-сурет. Михайлов годографтары

Суреттегі 1-қисық сағат тілі бағытына қарсы үш квадрантты бірінен кейін бірін басып өтіп жатқанын көреміз, яғни K = 2,2 болғанда автоматты реттеу жүйесі орнықты. Ал, K = 22 (2-қисық) болғанда годограф координат басын басып өтеді, яғни автоматты реттеу жүйесі орнықтылық шекарасында тұр. K = 220 болғанда Михайлов годографы (3-қисық) тек бірінші және төртінші квадранттар арқылы ғана өтеді. Бұл деген жүйенің орнықсыздығын көрсетеді.

2.11-есеп. Сипаттаушы теңдеуі

$$a_0 p^6 + a_1 p^5 + a_2 p^4 + a_3 p^3 + a_4 p^2 + a_5 p + a_6 = 0$$

түрінде берілген автоматты реттеу жүйесін Михайлов критерийі бойынша, a_6 = 24 және a_6 = 240 мәндері үшін, орнықтылыққа зерттеу қажет.

Жүйенің параметрлері: a_0 = 1; a_1 = 6; a_2 = 21; a_3 = 44; a_4 = 62; a_5 = 52.

Ш е ш і м і. Сипаттаушы теңдеудің нақты және жорамал бөліктерін табамыз:

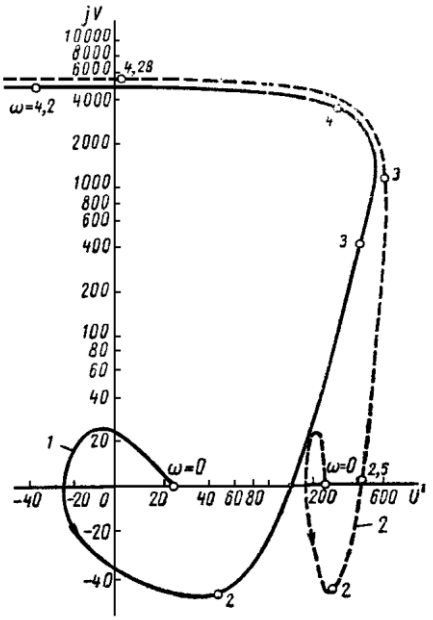
$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= a_6 - a_4\omega^2 + a_2\omega^4 - \omega^6; \\ V(\omega) &= a_5\omega - a_3\omega^3 + a_1\omega^5. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.13)$$

Жүйе параметрлерінің сәйкес мәндерін қойып, екі пар формула аламыз:

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= 24 - 62\omega^2 + 21\omega^4 - \omega^6 \\ V(\omega) &= 52\omega - 44\omega^3 + 6\omega^5 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.14)$$

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= 240 - 62\omega^2 + 21\omega^4 - \omega^6 \\ V(\omega) &= 52\omega - 44\omega^3 + 6\omega^5 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.15)$$

Енді ω жиілікті $0 \le \omega \le \infty$ аралығында өзгерте отыра, (2.1.14) формулаға (1-қисық) және (2.1.15) формулаға (2-қисық) сәйкес Михайлов годографын логарифмдік масштабта тұрғызамыз (2.5-сурет).



2.5-сурет. 2.8-есеп үшін Михайлов годографы

1-қисық сағат тілі бағытына қарсы алты квадрантты бірінен кейін бірін басып өтеді, бұл автоматты реттеу жүйесінің орнықты екенін көрсетеді.

Екінші қисық квадранттарды бірінен кейін бірін басып өтпейді, яғни a_6 = 240 болғанда автоматты реттеу жүйесі орнықсыз.

2.12-есеп. Ажыратылған күйіндегі беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{50}{(25p+1)(0{,}1p+1)(0{,}01p+1)} \qquad (2.1.16)$$

болатын бірконтурлы автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығын Найквист критерийі бойынша анықтау қажет.

Ш е ш і м і. (2.1.16) теңдеудегі p орнына $j\omega$-ны қойып, жиіліктік сипаттаушы теңдеуді аламыз:

$$W(j\omega) = \frac{50}{(25j\omega+1)(0{,}1j\omega+1)(0{,}01j\omega+1)} \qquad (2.1.17)$$

Белгілі түрлендіру әдістерін қолдана отыра, (2.1.17) теңдеудің $U(\omega)$ нақты және $V(\omega)$жорамал бөліктерін табамыз:

$$W(j\omega)=\frac{50}{-0{,}0025j\omega^3-2{,}751\omega^2+25{,}11j\omega+1},$$

осыдан

$$U(\omega)=\frac{50\left(1-2{,}751\omega^2\right)}{\left(1-2{,}751\omega^2\right)^2+\left(25{,}11\omega-0{,}025\omega^3\right)^2};$$

$$V(\omega)=-\frac{50\left(25{,}11-0{,}025\omega^2\right)}{\left(1-2{,}751\omega^2\right)^2+\left(25{,}11\omega-0{,}025\omega^3\right)^2}$$

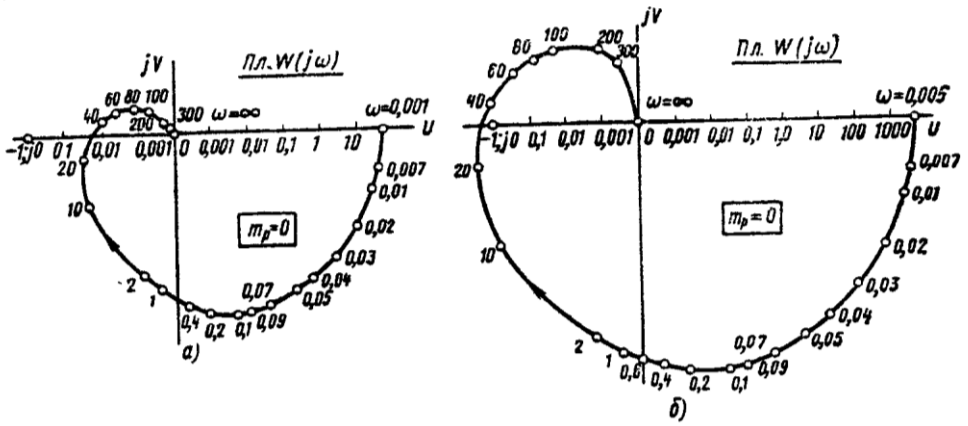
Енді ω жиіліктің мәнін нөлден шексіздікке дейін өзгерте отыра, $W(j\omega)$ комплексті жазықтығында жүйенің амплитудалық-фазалық жиіліктік сипаттамасын аламыз (2.6,*а*-сурет). Алынған $W(j\omega)$ годографы жазықтықтағы (– 1, *j*0) нүктесін қамтымай өткен, яғни Найквист критерийіне сәйкес тұйықталған жүйе орнықты. Енді осы жүйенің күшейту коэффициенті *K* = 5000 делік, онда $W(j\omega)$ годографы (– 1, *j*0) нүктесін қамтып өтеді (2.6,*б*-сурет), яғни, тұйықталған жүйе бұл жағдайда орнықсыз.

$W(j\omega)$ қисығы мен абсцисса осінің қиылысу нүктесіндегі жиіліктің мәнін

$$V(\omega)=-\frac{5000\left(25{,}11-0{,}025\omega^2\right)}{\left(1-2{,}751\omega^2\right)^2+\left(25{,}11\omega-0{,}025\omega^3\right)^2}=0$$

теңдеуін шеше отыра табамыз:

$$\omega_c=31{,}7c^{-1}.$$



2.6-сурет. K = 50 және K = 5000 болғандағы бірконтурлы автоматты реттеу жүйесі үшін тұрғызылған амплитудалық-фазалық жиіліктік сипаттамалар (Найквист қисықтары)

Жүйе орнықтылық шекарасында тұратын күшейту коэффициентті $U(\omega_c) = -1$теңдеуін шешу арқылы табамыз. Онда K = 2762.

2.13-есеп. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{5}{p-1}$$

болатын, тұйықталған жүйенің орнықтылығын Найквист критерийі бойынша зерттеу қажет.

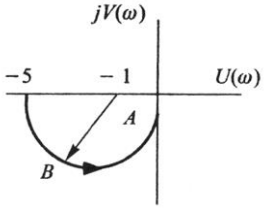
Ш е ш і м і: Беріліс функциясындағы p символын $j\omega$ параметріне алмастыра отыра, нақты және жорамал жиіліктік сипаттамаларды анықтаймыз:

$$W(j\omega) = \frac{5}{j\omega - 1} = \frac{5(-1-j\omega)}{(-1+j\omega)(-1-j\omega)} = \frac{-5-j5\omega}{1+\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$U(\omega) = -\frac{5}{1+\omega^2}; \quad V(\omega) = -\frac{5\omega}{1+\omega^2}$$

Енді ω жиілікті 0-ден ∞-ке дейін өзгерте отыра, ажыратылған жүйенің АФЖС-ын комплексті жазықтықта тұрғызамыз. Қажетті есептелінген мәндер кестеде келтірілген. Осы мәндер негізінде АФЖС тұрғызамыз (2.7-сурет).

ω	0	$0 < \omega < \infty$	∞
$U(\omega)$	-5	< 0	0
$V(\omega)$	0	< 0	0



2.7-сурет. Жүйенің АФЖС-ы

Жүйе орнықты, себебі, ажыратылған жүйенің АФЖС-ы $(-1,\ j\upsilon)$ нүктесін қамтып жатқан жоқ.

2.14-есеп. Беріліс функциялары

$$W_0(p)=\frac{e^{-p}}{p+1};\quad W_p(p)=-2$$

болатын объектіден және реттеуіштен тұратын тұйықталған жүйенің орнықтылығын Найквист критерийі бойынша анықтау қажет.

Ш е ш і м і: Ажыратылған жүйе апериодты $\left(W_1(p)=\frac{1}{p+1}\right)$, күшейткіш $(W(p)=-2)$ және кешігу $(W_3(p)=e^{-p})$ буындарының тізбектеле қосылысынан тұрады, яғни, оның беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{-2e^{-p}}{p+1}.$$

Ажыратылған жүйенің АФЖС-ын тұрғызамыз:

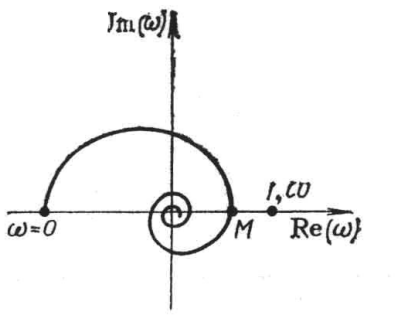
$$W(j\omega)=\frac{-2e^{-j\omega}}{j\omega+1}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

мұндағы $A(\omega)=\frac{2}{\sqrt{\omega^2+1}};\quad \varphi(\omega)=\pi-\omega-arctg\,\omega$ ажыратылған жүйенің АЖС-ы мен ФЖС-ы. Кешігу буынының $A_к(\omega)=1;\quad \varphi(\omega)=-\omega.$

Жүйенің АФЖ сипаттамасы 2.8-суретте келтірілген. Ол суреттен ажыратылған жүйенің $W(p)$ годографының нақты осьті бірнеше рет кесіп өтетінін көруге болады. Ең кіші жиіліктегі (M нүктесі) бірінші кесу нүктесін $\varphi(\omega)=0$ теңдеуінен анықтауға болады:

$$\pi-\omega-arctg\,\omega=0,\ \text{осыдан}\ \omega_м\approx 2.$$

Бұл жиілікте $A(\omega)=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+1}}=0{,}9<1.$



2.8-сурет. Ажыратылған жүйенің амплитудалық-фазалық сипаттамасы

Яғни, ажыратылған жүйенің АФЖС координаты $(1,\ j0)$ нүктесін қамтымайды, тұйықталған жүйе орнықты.

Ескерту: Есеп, жиіліктің оң бағыты сағат тілі бағытымен сәйкес келеді деп шығарылған.

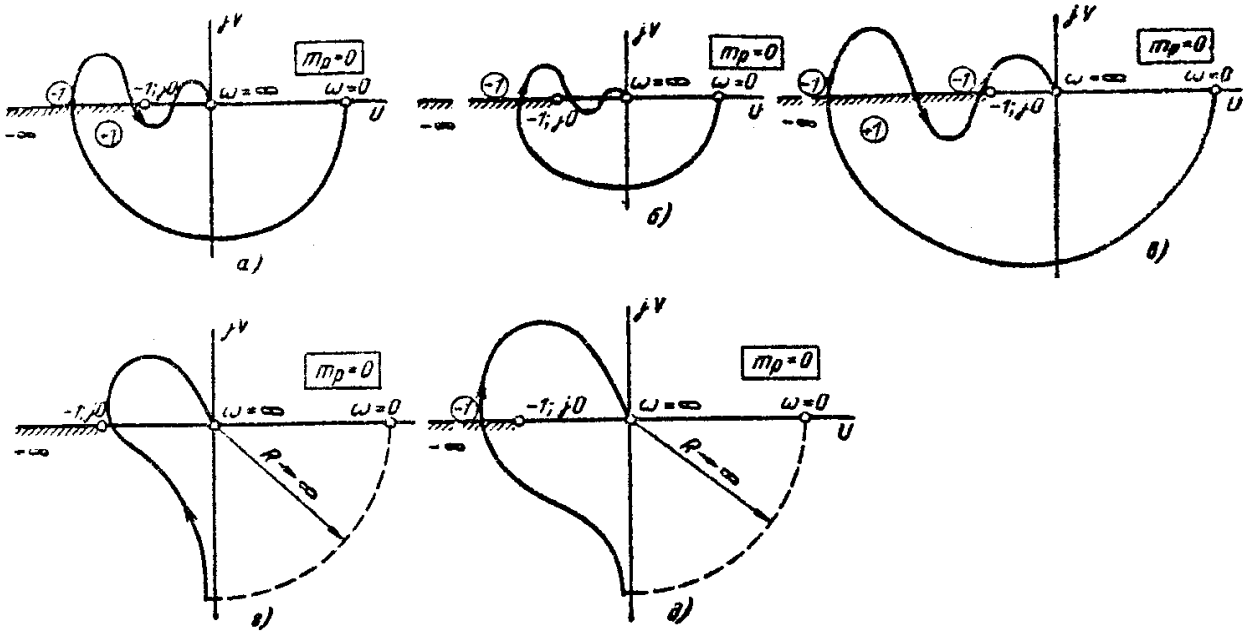
2.15-есеп. Ажыратылған жүйелердің 2.9-суретінде келтірілген амплитудалық-фазалық жиіліктік сипаттамалары бойынша, тұйықталған автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығын талдау қажет.

Ш е ш і м і. Егер ажыратылған статикалық жүйенің беріліс функциясына тек орнықты буындар (яғни m_p = 0) кіретін болса, онда автоматты реттеу жүйесі тұйықталған күйінде де орнықты болады, себебі, қисық мұндай орналасқан жағдайда

$$\mu-\nu=\frac{m_p}{2}$$

қатынасы қамтамасыз етіледі, мұндағы μ – абсцисса осі бойынан – ∞-тен $(-1, jo)$ нүктесі аралығында $W(j\omega)$ қисығының оң өту саны;

ν – осы аралықта $W(j\omega)$ қисығының абсцисса осін теріс өту саны.



2.9-сурет. Бірінші ретті бірконтурлы АРЖ үшін салынған амплитудалық фазалық жиіліктік сипаттамалар

2.9,*а*-суретінен оң және теріс өту санының $+1-1\equiv 0$ екенін көреміз, яғни жүйе тұйықталған күйде орнықты. $W(j\omega)$ қисығының 2.9,*б* және *в* суреттердегідей орналасқан кезінде өту сандары $-1\neq 0$ және $+1-1-1\neq 0$ болады, ал бұл екі реттеу жүйесінің тұйықталған күйде орнықсыз екендігін көрсетеді.

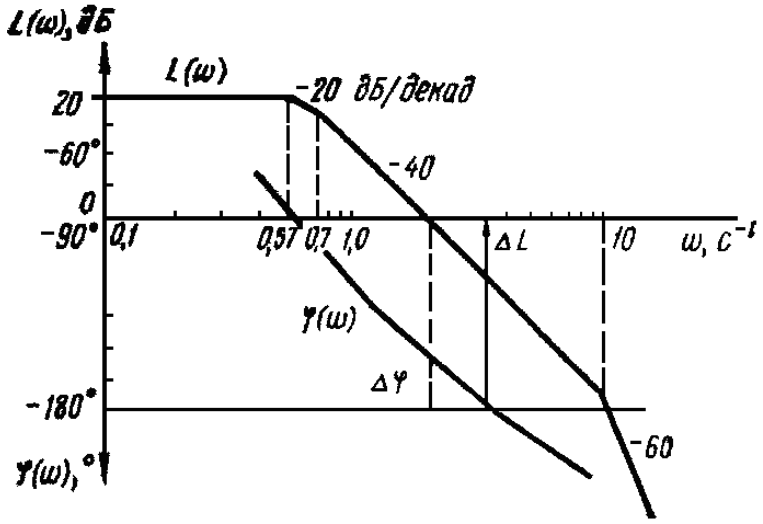
2.9,*г* және *д* суреттерінде m_p = 0 болатын 1-ретті астатизмі бар реттеу жүйесінің $W(j\omega)$ қисықтары келтірілген. 2.9,*г*-суретінен $0-0\equiv 0$ екенін көреміз, яғни жүйе тұйықталған күйде орнықты, ал 2.9,*д*-суретінде $-1\neq 0$, яғни тұйықталған жүйе орнықсыз.

2.16-есеп. Ажыратылған АРЖ беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}=\frac{10}{(1{,}4p+1)(1{,}74p+1)(0{,}1p+1)}.$$

Орнықтылықтың логарифмдік критерийін қолдана отырып, амплитудалық және фазалық орнықтылық қорларын анықтау қажет.

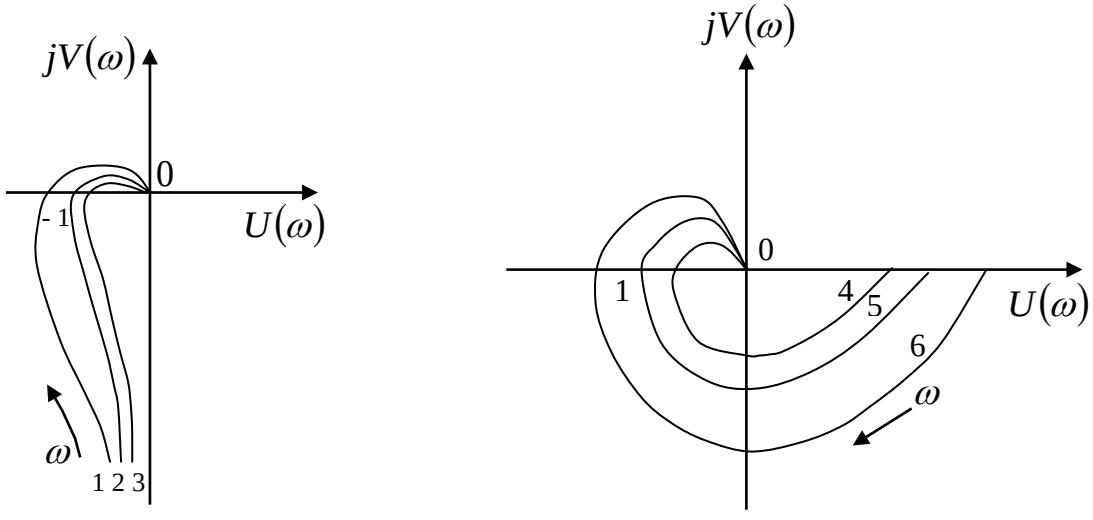
Ш е ш і м і. АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамасы 2.10-суретте келтірілген, одан жүйе орнықтылығының амплитудалық қорының $\Delta L = 11$ дБ, ал фазалық қорының $\Delta\varphi = 25^{\circ}$ екенін көреміз.



2.10-сурет. АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамалары

Өзін тексеру үшін қойылатын сұрақтар мен берілген есептер

1. АРЖ орнықтылығын анықтайтын негізгі фактор:
   а) бастапқы шарттар;
   б) объектінің параметрлері;
   в) кірістік әсердің түрі;
   г) реттеуіштің баптау параметрлері.
2. Жүйе орнықты болу үшін оның теңдеуінің p_i комплекстік түбірінің нақты бөлігі қандай болуы керек:
   а) оң таңбалы;
   б) теріс таңбалы;
   в) нөл?
3. Тұйықталған АРЖ сипаттаушы теңдеуі орнықтылық критерийлерінің қайсысын пайдаланғанда қажет:
   а) алгебралық критерийді (Гурвиц критерийі);
   б) Михайлов критерийін;
   в) Найквист критерийін;
   г) логарифмдік критерийді?
4. Төртінші ретті тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуінің барлық коэффициенттері оң таңбалы болса, оның орнықтылығын білу үшін қайсы анықтауышты есептеу жеткілікті:
   а) Δ_1;
   б) Δ_2;
   в) Δ_3;
   г) Δ_4?
5. Тұйықталған АРЖ орнықтылығына сәйкес келетін 2.11-суреттегі ажыратылған жүйелердің амплитудалық-фазалық сипаттамалардың түрін анықтаңыз.



2.11-сурет. Ажыратылған АРЖ а.ф.с. түрлері

6. Ажыратылған АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамаларының түрінен (2.12-сурет) жүйенің тұйықталған жағдайдағы күйін анықтаңыз:

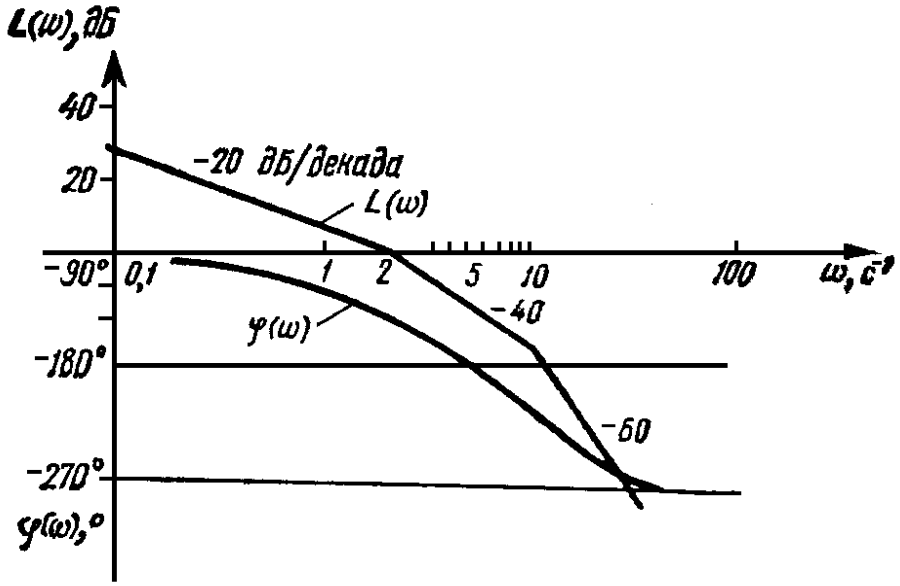
а) орнықты;

б) орнықсыз;

в) орнықтылық шекарасында тұр.

7. 2.12-суреттен жүйенің K күшейту коэффициентінің мәнін; $\omega_{\hat{e}}$ кесу жиілігінің мәнін; амплитуда және фаза бойынша қорының жуықтатылған мәндерін анықтаңыз.

Жүйе орнықтылық шекарасында болуы үшін оның күшейту коэффициентін қанша децибелге көбейту керек?



2.12-сурет. АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамалары

2.17-есеп. Сипаттаушы теңдеуі

$$G(p)=2p^3+4p^2+10p+3=0$$

автоматты реттеу жүйесін Гурвиц критерийі бойынша орнықтылыққа тексеру қажет.

2.18-есеп. АРЖ беріліс функциялары

$$W_o(p)=\frac{K_o}{T_0 p+1}-\text{объектіден,}$$

$$W_{\text{кэ.}}(p)=\frac{K_э}{T_1^2 p^2+T_2 p+1}-\text{ қабылдағыш элементтен}$$

және $W_к(p)=\dfrac{K_к}{T_к p}$ – орындаушы механизмнен тұрады. Гурвиц критерийімен жүйенің орнықтылығын тексеру қажет.

2.19-есеп. Сұйық шығынын автоматты реттеу жүйесінің беріліс функциясы

$$W_{об}(p)=\frac{1{,}17}{1{,}7p^2+2{,}85p+1}$$

болатын объектіден және беріліс функциясы

$$W_р(p)=K_р\frac{1+T_и p}{T_и p}=1{,}4\frac{1+1{,}54p}{1{,}54p}$$

болатын ПИ-реттеуіштен тұрады.

Гурвиц критерийін қолдана отыра осы тұйықталған жүйенің орнықтылығын анықтау қажет.

2.20-есеп. Дифференциалдық теңдеуі (еркін қозғалыс үшін)

$$2\frac{d^3y(t)}{dt^3}+9\frac{d^2y(t)}{dt^2}+13\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=0$$

автоматты реттеу жүйесін Михайлов критерийі көмегімен орнықтылыққа тексеру қажет.

2.21-есеп. Автоматты реттеу жүйесінің беріліс функциясы

$$W_{об}(p)=\frac{K_{об}}{(T_1p+1)(T_2p+1)};$$

мұндағы $K_{об}$ = 1,65; T_1 = 10c; T_2 = 5c объектіден, беріліс функциясы

$$W_{о.м}(p)=\frac{K_{о.м}}{T_{о.м}p+1},$$

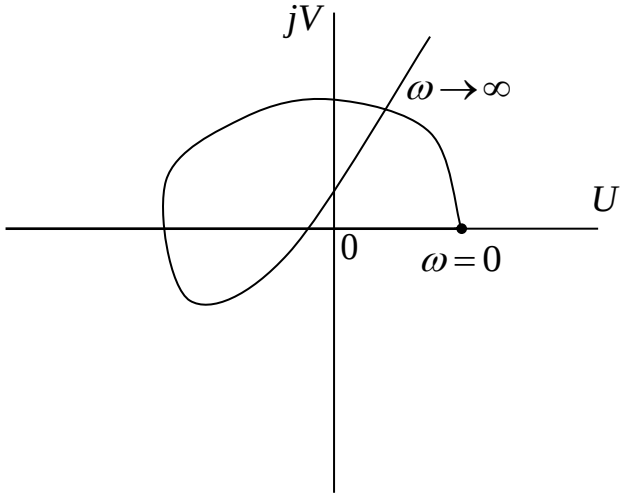
мұндағы $K_{о.м.}$ = 1,5; $T_{о.м.}$ = 2c орындаушы механизмнен және күшейту коэффициенті $K_р$ = 4 реттеуіштен тұрады. Михайлов критерийін пайдалана отыра АРЖ орнықтылығын анықтау қажет.

2.22-есеп. Михайлов годографы көмегімен беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K}{(10p-1)(0{,}1p+1)}$$

болатын ажыратылған автоматты реттеу жүйесін орнықтылыққа зерттеу қажет.

2.23-есеп. 2.13-суретте келтірілген Михайлов годографының түрі бойынша 5-ретті сипаттаушы теңдеудің оң және сол жақ жартылай жазықтықтарда жатқан түбірлер санын анықтау қажет.



2.13-сурет. Орнықсыз буындары бар АРЖ үшін Михайлов годографы

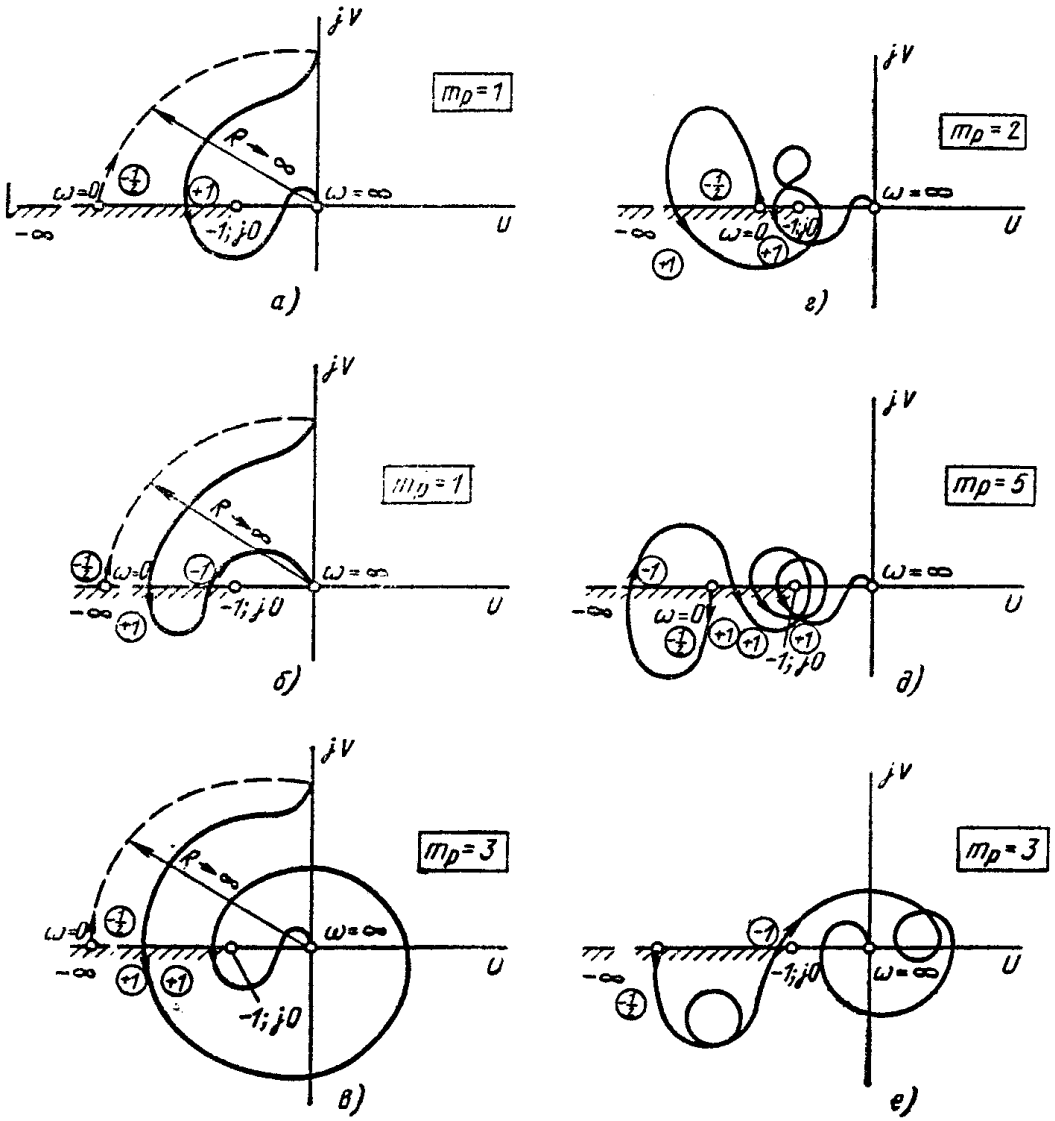
2.24-есеп. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{10}{(p+1)^3}$$

болғандағы, тұйықталған жүйенің орнықтылығын Найквист критерийі бойынша анықтау қажет.

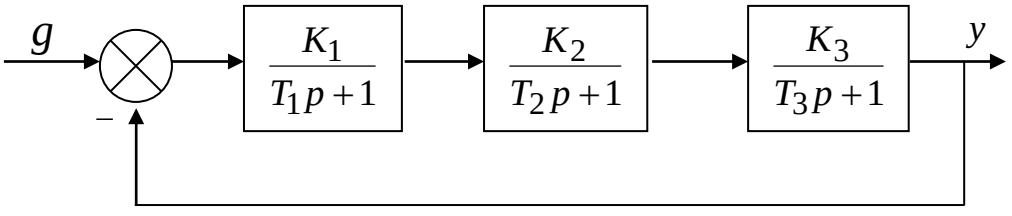
2.25-есеп. 2.21-есебі шартындағы $K_{об}$ = 1,6; $K_{о.м.}$ = 1,5; $K_р$ = 2 деп алып АРЖ орнықтылығын логарифмдік критерийі бойынша анықтап, оның амплитуда және фаза бойынша орнықтылық қорын, сонымен бірге П-реттеуіштің шектік күшейту коэффициентін табу қажет.

2.26-есеп. 2.14-суретте келтірілген ажыратылған жүйелердің амплитудалық-фазалық жиіліктік сипаттамалары бойынша тұйықталған жүйелердің орнықтылығын талдау қажет.



2.14-сурет. Ажыратылған жүйенің сипаттаушы теңдеуінің
оң жақ жартылай жазықтықта әр түрлі полюстер саны бар бірконтурлы
АРЖ амплитудалық-фазалық жиіліктік сипаттамалары

2.27-есеп. T_1 = 0,003 с; T_2 = 0,002 с; T_3 = 0,001 с және k = 10 болғанда логарифмдік жиіліктік сипаттамалар бойынша статикалық автоматты жүйенің орнықтылығын бағалау керек (2.15-сурет).



2.15-сурет. Статикалық АРЖ

2.2. Орнықтылық аймағын анықтау

Кеңістікті бір немесе екі параметрлер бойынша D-бөліктеу әдісі, олардың өзгерулеріне сәйкес автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығын комплекстікті жазықтықта талдауға мүмкіндік туғызады. Кеңістікті бір параметр бойынша бөліктегенде сипаттаушы теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$Q(p) + KR(p) = 0$$

осыдан

$$K = -\frac{Q(p)}{R(p)}.$$

Енді $p = j\omega$ деп алып, мына өрнекті аламыз:

$$K = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Жиілік ω-ны $-\infty$-тен $+\infty$ аралығында өзгерте отыра p түбірлер жазықтығындағы жорамал осьтің орнында болатын K жазықтығындағы қайсыбір қисықты аламыз.

Штрихтеу ережелері. D-бөліктеу қисығы бойымен $\omega = -\infty$ нүктесінен $\omega = +\infty$ нүктесіне қарай жылжығанда оны әрқашан сол жағынан штрихтеу қажет. Нәтижесінде автоматты реттеу жүйесі күйінің орнықтылығына және орнықсыздығына сәйкес келетін аймақтарды алуға болады. Мысалы, сол жақ жартылай жазықтықта жатқан r түбірлер саны бір аймақта жатыр десек, онда D-бөліктеу қисығынан өту арқылы олардың екінші аймақтағы санын да анықтауға болады. Егер бұл өту қисықтың штрихтелмеген жағынан штрихтелген жағына қарай болса, онда бұл аймақтағы түбірлер саны $(r+1)$ бірлігіне көбейеді. Егер штрихтелген жақтан штрихтелмеген жаққа қарай өтсе, онда түбірлер саны $(r-1)$ бірлігіне азаяды. Осылайша әрбір жартылай жазықтықтағы түбірлер санын анықтауға болады. Соңынан $\omega = 0$ деп алып қалған теңдеулердің түбірлерін анықтайды. Егер олардың саны l болса және олардың теріс таңбалы нақты бөліктері бар болса, онда $r = l$, ал жүйе орнықтылық аймағы, сипаттаушы теңдеудің n ретіне тең болатын $l + i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) ретті.

Кеңістікті екі параметрі бойынша бөліктеген кезде сипаттаушы теңдеу мына түрде жазылады:

$$\tau P(p) + \nu Q(p) + R(p) = 0.$$

$p = j\omega$ деп алсақ,

$$\tau P(j\omega)+\nu Q(j\omega)+R(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega).$$

аламыз.

D-бөліктеу қисығын тұрғызу үшін әрбір ω мәндері үшін τ мен ν параметрлерін анықтау қажет. Ол үшін

$$\left.\begin{aligned} U(\omega)&=0;\\ V(\omega)&=0 \end{aligned}\right\}$$

теңдеулерін бірге шешу керек.

Бұл теңдеулердің әрқайсысындағы τ және ν параметрлері бар мүшелерін бөліп алсақ, мына теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left.\begin{aligned} U(\omega)&=\tau P_1(\omega)+\nu Q_1(\omega)+R_1(\omega)=0;\\ V(\omega)&=\tau P_2(\omega)+\nu Q_2(\omega)+R_2(\omega)=0. \end{aligned}\right\}$$

Теңдеулер жүйесін τ мен ν-ге сәйкес шеше отыра

$$\tau=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega)\\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega)\\ P_2(\omega) & Q_2(\omega)\end{vmatrix}};$$

$$\nu=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega)\\ P_2(\omega) & -R_2(\omega)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega)\\ P_2(\omega) & Q_2(\omega)\end{vmatrix}}.$$

Штрихтеу ережелері. D-бөліктеу қисығы бойымен $\omega=-\infty$ нүктесінен $\omega=+\infty$ нүктесіне қарай жылжығанда, егер $\Delta>0$ болса, онда қисық сол жағынан екі рет, ал $\Delta<0$ болса, оң жағынан екі рет штрихтеледі. Екі штрихті қисық арқылы штрихтелген аймақтан штрихтелмеген аймаққа өту сипаттаушы теңдеудің екі түбірінің жорамал ось арқылы сол жақ жартылай жазықтықтан оң жақ жартылай жазықтыққа өтуімен пара-пар және керісінше, штрихтелмеген аймақтан штрихтелген аймаққа өту екі түбірдің оң жақ жартылай жазықтықтан сол жақ жартылай жазықтыққа өтуімен бірдей. Кез келген әдіспен қайсыбір аймақтағы сол жақ жартылай жазықтықта жатқан $r = l$ түбірлерін тауып алып, $l+ i = n$ түбірлер жатқан орнықтылық аймағын анықтаймыз. Егер қайсыбір $\omega=\omega_0$ жиілігінде τ мен ν бір-біріне сызықты тәуелді болса және $\Delta=\Delta_1=0$ немесе $\Delta=\Delta_2=0$ болса, онда түзу

сызықтарды аламыз. D-бөліктеу қисығы бойымен жылжығанда оларды $\Delta > 0$ нүктелерінде сол жақтан, ал $\Delta < 0$ нүктелерінде оң жақтан штрихтейді. Егер $\omega = \omega_0 \ \ (0 < \omega_0 < \infty)$ нүктесінде Δ таңбасын өзгертетін болса, онда бұл нүкте арқылы «ерекше түзу» өтеді. Ерекше түзуді $\Delta > 0$ болса, сол жағынан, ал $\Delta < 0$ болса, оң жағынан екі штрихпен штрихтейді. Егер ω жиілік өскен сайын $\omega = \omega_0$ нүктесінде $\Delta = 0$ таңбасы өзгермесе, онда $\omega = \omega_0$ нүктесінен өтетін түзуді штрихтемейді.

2.28-есеп. Сипаттаушы теңдеуі

$$T_1T_2T_3p^3 + (T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3)p^2 + (T_1 + T_2 + T_3)p + K + 1 = 0 \qquad (2.2.1)$$

болатын автоматты реттеу жүйесі үшін $K = 500c^{-1}$; $T_1 = 10c$; $T_2 = 0{,}1c$ болғанда T_3 параметрі бойынша D-бөліктеу қисығын тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і. (2.2.1) теңдеуді мына түрге келтірейік:

$$T_3\left(p^3 + 10{,}1p^2 + p\right) + \left(p^2 + 10{,}1p + 501\right) = 0 \qquad (2.2.2)$$

$p = j\omega$ деп алып теңдеуді шешейік:

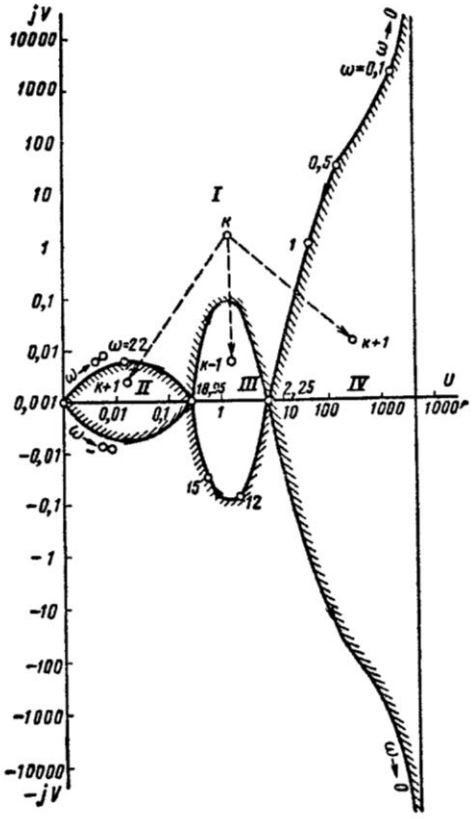
$$T_3 = \frac{501 - \omega^2 + 10{,}1j\omega}{j\omega - j\omega^3 - 10{,}1\omega^2} = \frac{5050}{102{,}01\omega^2 + \left(1 - 10^2\right)^2} + j\frac{\omega^4 - 399{,}99\omega^2 + 501}{102{,}01\omega^2 + \omega\left(1 - \omega^2\right)^2}$$

ω жиіліктің әр түрлі мәндерін бере отыра, D-бөліктеу қисығын тұрғызамыз (2.16-сурет). Белгілі әдістер арқылы штрихтейміз, онда комплексті жартылай жазықтықтың төрт аймаққа бөлінгенін көреміз.

$T_3 = 0$ деп алып, (2.2.2) теңдеуден аламыз:

$$P_{1,2} = \frac{-10{,}1 \pm \sqrt{10{,}1^2 - 4 \cdot 501}}{2},$$

яғни P_1 және P_2 түбірлерінің нақты бөліктері теріс таңбалы, сол себептен I аймақта $K = l = 2$. Олай болса, D-бөліктеу қисығын кесіп өту ережесіне сәйкес II және IV аймақта $K + 1$, ал III аймақта $K - 1$ түбірлер жатқанын анықтаймыз. Орнықтылық аймақтарына үміткер болып II және IV аймақтар қарастырылады, себебі үшінші ретті сипаттаушы теңдеу үшін бұл аймақтарда $K + i = 2 + 1 = 3$ түбірлер жатыр.



2.16-сурет. Бір параметр бойынша жазықтықта салынған D-бөліктеу қисығы

2.29-есеп. Тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі

$$G(p)=(T_1p+1)\left(T_2^2p^2+T_3p+1\right)+K_1K_2=0. \qquad (2.2.3)$$

$T_2=0{,}45c,\quad T_3=5c,\quad K_2=25$ болғанда $\tau=T_1$ және $\nu=K_1$ екі параметр жазықтығындағы D-бөліктеу қисығын салу қажет.

Ш е ш і м і. Берілген мәндерді (2.2.3) теңдеуге қойып және $p=j\omega$ деп алып мына теңдеуді аламыз:

$$-0{,}2\tau j\omega^3-5\tau\omega^2+\tau j\omega-0{,}2\omega^2+50\omega+1+25\nu=0 \qquad (2.2.4)$$

(2.2.4) теңдеудегі нақты және жорамал бөліктерді жекелеп жазайық:

$$\left.\begin{aligned}&-5\tau\omega^2+25\nu+\left(1-0{,}2\omega^2\right)=0;\\&\tau\omega\left(1-0{,}2\omega^2\right)+5\omega=0.\end{aligned}\right\}$$

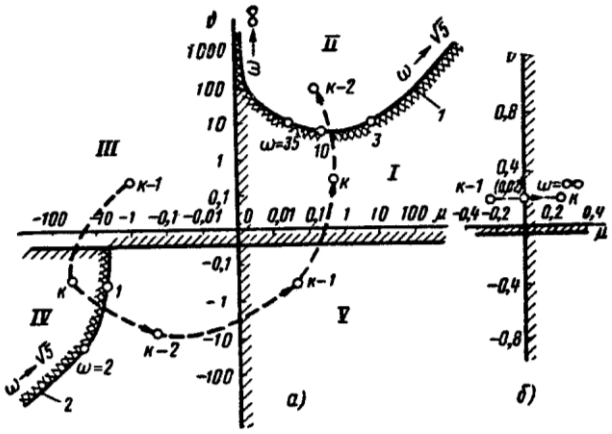
Осыдан

$$\left.\begin{aligned}\tau &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{1-0{,}2\omega^2};\\ \nu &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-25\omega^2 + \left(1-0{,}2\omega^2\right)^2}{25\left(1-0{,}2\omega^2\right)}.\end{aligned}\right\}$$

ω-ның әр түрлі мәндерін бере отыра 1 және 2 қисықтарды (2.17-сурет) саламыз. $\omega = 0$ және $\omega = \sqrt{5}$ болғанда $\Delta = 0$, ал $\omega = \sqrt{5}$ болғанда $\Delta_1 \neq 0$ және $\Delta_2 \neq 0$. Сонымен, $\omega = 0$ нүктесінен $\omega = \sqrt{5}$ нүктесіне қарай жылжығанда $\Delta < 0$. Бұл жағдайда екі рет штрихтеуді оң жағынан, ал $\omega > \sqrt{5}$ болғанда сол жағынан жүргіземіз $(\Delta > 0)$.

Сипаттаушы теңдеудің жоғары ретті бөлігінің коэффициентін және бос мүшесін нөлге теңей отыра, екі түзудің теңдеуін аламыз: $\omega = 0$ үшін $25\nu + 1 = 0$, ал $\omega = \infty$ үшін $-0{,}2\tau = 0$ (яғни $\tau = 0$).

2.17-суретте бұл түзулер ережелерге сәйкес штрихтелінген. Бұл жағдайда I-V бес аймақты аламыз.



2.17-сурет. Екі параметр бойынша жазықтықтағы D-бөліктеу қисығы

$\tau = 0,\ \nu = 0{,}2$ деп алсақ, (2.2.3) теңдеу мына түрге келеді:

$$0{,}2p^2 + 5p + 5 = 0,$$

мұндағы $p_1 = -1{,}3;\quad p_2 = -23$ – теріс түбірлер.

$\tau = 0,\ \nu = 0{,}2$ нүктелері $\omega = \infty$ мәніне сәйкес келетін, яғни l = 2 болғанда, $\tau = 0$ түзуінің бойында жатыр. Бұл түзуді штрих бағытымен кесіп өткенде түбірлердің теріс таңбалы нақты бөліктерінің саны бірге көбейеді. Яғни, I аймақта $K + 1 = 2 + 1 = 3$ аламыз, ал K = 3 болатын аймақ – орнықтылық аймағы. 2.17-суреттегі K, K – 1, K – 2 мәндері D-бөліктеу қисығын кесіп өту ережелеріне сәйкес анықталады.

2.30-есеп. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы $W(p)=K/(T_p+1)^3$. Тұйықталған жүйенің $(K,\ T)$ параметрлер жазықтығындағы орнықтылық аймағын анықтау қажет.

Ш е ш і м і: Тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі:

$$G(p)=T^3p^3+3T^2p^2+3Tp+1+K=0$$

Гурвиц – Раус критерийі бойынша

$$T^3>0,\quad 3T^2>0,\quad 3T>0,\quad 1+K>0,$$

$$\Delta_2=3T^2\cdot 3T-T^3\cdot(1+K)=T^3(8-K)>0$$

Теңсіздіктер $T>0,\ -1<K<8$ шарты болғанда ғана орындалатыны сөзсіз, яғни бұл теңсіздіктер жүйенің орнықтылық аймағын анықтайды.

2.31-есеп. Автоматты реттеу жүйесі беріліс функциясы

$$W_0(p)=\frac{1}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)},$$

мұндағы T_1 = 7,5*c*; T_2 = 12,5*c*; T_3 = 25*c* болатын объектіден және П-реттеуіштен тұрады.

Реттеуіштің K_p беріліс коэффициентінің нақты мәндеріне сәйкес келетін, тұйықталған жүйенің орнықтылық аймағын анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Жүйенің сипаттаушы теңдеуі мына түрде болады:

$$(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+K=0 \qquad (2.2.5)$$

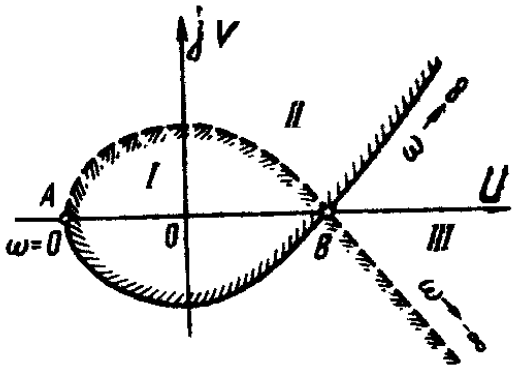
D-бөліктеу шекаралық қисығын салу үшін (2.2.5) өрнекке $p=j\omega$ мәнін қойып, теңдеуді ізделініп отырған K параметріне сәйкес шешеміз. Бұл параметрді $K=U+jV$ комплексті сан деп есептейміз:

$$K=-(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)=$$
$$=jT_1T_2T_3\omega^3+(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2-j(T_1+T_2+T_3)\omega-1=U+jV,$$

мұндағы $U=(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2-1;$

$V=T_1T_2T_3\omega^3-(T_1+T_2+T_3)\omega^2.$

Жиілік ω мәнін 0-ден ∞-ке дейін өзгерте отыра комплексті жазықтықта D-бөліктеу шекаралық қисығын тұрғызамыз және ол алынған қисықты ω-ның теріс таңбалы $(-\infty \le \omega \le 0)$ мәндеріне сәйкес айналық шағылысымен толықтырамыз. D-бөліктеу қисығының түрі 2.18-суретте көрсетілген.



2.18-сурет. D-бөліктеу шекаралық қисығы

Суреттегі 1 аймақ – орнықтылық аймағы. Шынымен де, K = 0 деп алсақ, оның мәні 1-аймақта жататын болады. Бұл жағдайда (2.2.5) теңдеу мына түрде болады:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) = 0.$$

Ал оның $P_i = -\dfrac{1}{T_i}$ (i =1, 2, 3) үш түбірінің де нақты бөліктері теріс таңбалы, яғни жүйе орнықты. Сонымен, жүйе орнықты болуы үшін K-ның нақты бөліктері – $A < K < B$ аралығында жатулары тиіс. Бұл аралықты анықтау үшін

$$V(\omega) = T_1 T_2 T_3 \omega^3 - (T_1 + T_2 + T_3)\omega^2 = 0$$

болғандағы ω жиілігінің мәндерін табамыз.

Теңдіктің орындалуы үшін $\omega_1 = 0$ және

$$\omega_2^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}$$

болулары керек. Енді $\omega_1 = 0$ мәнін

$$U(\omega_1) = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)\omega^2 - 1$$

өрнегіне қойсақ,

$$U(0)=A=-1;$$

ал ω_2 мәнін қойсақ:

$$U(\omega_2)=B=(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}-1=593{,}75\frac{45}{2343{,}75}-1=10{,}4$$

аламыз.

Сонымен, $-1<K<10{,}4$ аралығында тұйықталған жүйе орнықты.

2.32-есеп. Объект пен реттеуіштің беріліс функциялары берілген

$$W_0(p)=\frac{K_0e^{-p\tau}}{Tp+1};\quad W_p(p)=-K_p,$$

мұндағы $K_0=0{,}28;\quad T=15c;\quad \tau=30c.$

Комплексті K_p параметрі жазықтығындағы D-бөліктеу шекаралық қисығының сапалық сипатын және тұйықталған жүйе орнықты болатын реттеуіштің K_p беріліс коэффициентінің оң таңбалы мәндері аймағын анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы мына түрде болады:

$$\Phi(p)=\frac{W_0(p)}{1-W(p)}=\frac{W_0(p)}{1-\left[-K_pW_0(p)\right]}=\frac{W_0(p)}{1+K_pW_0(p)},$$

мұндағы $W(p)$ – ажыратылған жүйенің беріліс функциясы.

Тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуін анықтап, оны K_p-ге сәйкес шешейік:

$$K_p=-\frac{(Tp+1)}{Ke^{-p\tau}}=-\frac{1}{K}(Tp+1)e^{p\tau}.$$

$p=j\omega$ деп алып, түрлендіру жұмыстарын жүргізгеннен кейін

$$K_p=-\frac{1}{K}(1+j\omega T)e^{j\omega T}=-\frac{1}{K}(1+j\omega T)(\cos\omega\tau+j\sin\omega\tau)=$$

$$=\frac{1}{K}(\omega T\sin\omega\tau-\cos\omega\tau)-j\frac{1}{K}(\omega T\cos\omega\tau-\sin\omega\tau)=U(\omega)+jV(\omega).$$

$U(\omega)=0$ және $V(\omega)=0$ деп алып D-бөліктеу шекаралық қисығының комплексті жазықтықтағы нақты және жорамал осьтерді қию жиіліктерін анықтаймыз:

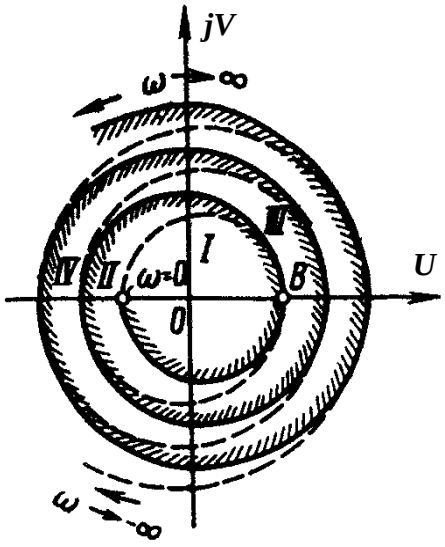
$$U(\omega)=\frac{1}{K}(\omega T\sin\omega\tau-\cos\omega\tau)=0$$
$$V(\omega)=-\frac{1}{K}(\omega T\cos\omega\tau-\sin\omega\tau)=0 \qquad (2.2.6)$$

(2.2.6)-дан

$$\omega T=\frac{\cos\omega\tau}{\sin\omega\tau}=\mathrm{ctg}\omega\tau \qquad (2.2.7)$$

$$\omega T=\frac{\sin\omega\tau}{\cos\omega\tau}=-\mathrm{tg}\omega\tau \qquad (2.2.8)$$

(2.2.7) және (2.2.8) теңдеулердің оң жақтары периодты функциялар болғандықтан, оларға D-бөліктеу шекаралық қисықтарының сипатын анықтайтын шексіз көптеген шешімдер сәйкес келеді: шекара шексіздікке кететін екі спираль арқылы жасалады (2.19-сурет).



2.19-сурет. D-бөліктеу шекарасы

Орнықтылық аймағы – 1 аймақ ($K_p=0$ болғанда жүйе орнықты). K_p күдікті оң мәндерін анықтау үшін (2.2.8) теңдеу бойынша $V(\omega_{\min})=0$ шартын

қанағаттандыратын ω-ның минимал мәнін табамыз. Коэффициенттердің мәндерін (2.2.8) теңдеуге қойғаннан кейін мына өрнекті аламыз:

$$15\omega = -\mathrm{tg}30\omega$$

және

$$\omega_{\min} \approx 0{,}076c^{-1}.$$

Бұл кездегі K_p мәні:

$$K_p = \left(K_p\right)_к = \frac{1}{K}\left(\omega_{\min} T \sin\omega_{\min}\tau - \cos\omega_{\min}\tau\right) =$$

$$= \frac{1}{0{,}28}\left(15 \times 0{,}076 \sin 2{,}28 - \cos 2{,}28\right) \approx 5{,}4.$$

Сонымен, тұйықталған жүйе орнықты болатын K_p оң таңбалы мәндері жататын аймақ $0 < K_p < 5{,}4$ теңсіздігімен анықталады.

2.34-есеп. Автоматты реттеу жүйесінің орнықтылық аймағы шекаралық қисығын, ПИ-реттеуіштің K_p, K_p/T_u баптау параметрлері жазықтығында тұрғызу қажет. Бірконтурлы жүйені құрайтын объекті мен реттеуіштің беріліс функциялары мына түрде жазылады:

$$W_o(p) = \frac{K_o e^{-p\tau}}{Tp+1},$$

$$W_p(p) = -K_p\left(1 + \frac{1}{T_u p}\right),$$

мұндағы $K_o = 0{,}28; \quad \tau = 30c; \quad T = 15c.$

Ш е ш і м і. Тұйықталған автоматты реттеу жүйесінің сипаттаушы теңдеуінде

$$K_p K\left(1 + T_u p\right)e^{-p\tau} + \left(1 + Tp\right)T_u p = 0$$

K_p және T_u екі өзгермелі параметрлер бар. Осы параметрлердің өзгеруінің жүйе орнықтылығына тигізетін әсерін анықтау керек. Ол үшін K_p параметрін бірінші етіп, K_p/T_u параметрін екінші етіп, сипаттаушы теңдеуді қайта жазайық:

$$K_p K p e^{-p\tau} + \frac{K_p}{T_u} K e^{-p\tau} + (1 + Tp)p = 0$$

Бұл теңдеуде $p = j\omega,\ \ e^{-p\tau} = \cos\omega\tau - j\omega\tau$ деп алып, мына өрнекті аламыз:

$$jK_p K\omega(\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau) + \frac{K_p}{T_u} K(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau) + (1 + j\omega T)j\omega =$$

$$= K_p K \sin\omega\tau + \frac{K_p}{T_u} K\cos\omega\tau - \omega^2 T + j\left(K_p K\omega\cos\omega\tau - \frac{K_p}{T_u} K\sin\omega\tau + \omega \right) = 0$$

Теңдеудің нақты және жорамал бөліктерін нөлге теңей отыра екі теңдеу аламыз да, олардан:

$$K_p = \frac{1}{K}(\omega T\sin\omega\tau - \cos\omega\tau); \qquad (2.2.9)$$

$$\frac{K_p}{T_u} = \frac{\omega}{K}(\omega T\cos\omega\tau + \sin\omega\tau) \qquad (2.2.10)$$

мәндерін табамыз.

(2.2.9) және (2.2.10) теңдеулер ПИ-реттеуіштің баптау параметрлері жазықтығындағы D-бөліктеу қисығының шекарасын анықтайды. Жалпы, орнықтылық шекарасы K_p/T_u параметрінің оң мәндері аймағында жатады. Оны жиіліктің мәндерін $0 < \omega < \omega_{шек}$ аралығында өзгерте отыра анықтайды. $\omega_{шек}$ жиілігінің мәнін

$$K_p/T_u = \frac{\omega}{K}(\omega T\cos\omega\tau + \sin\omega\tau) = 0$$

шартынан анықтайды. Бұл шарттан

$$-\omega T = \mathrm{tg}\omega\tau$$

теңдеуін алуға болады.

Берілген T мен τ тұрақты мәндерінде

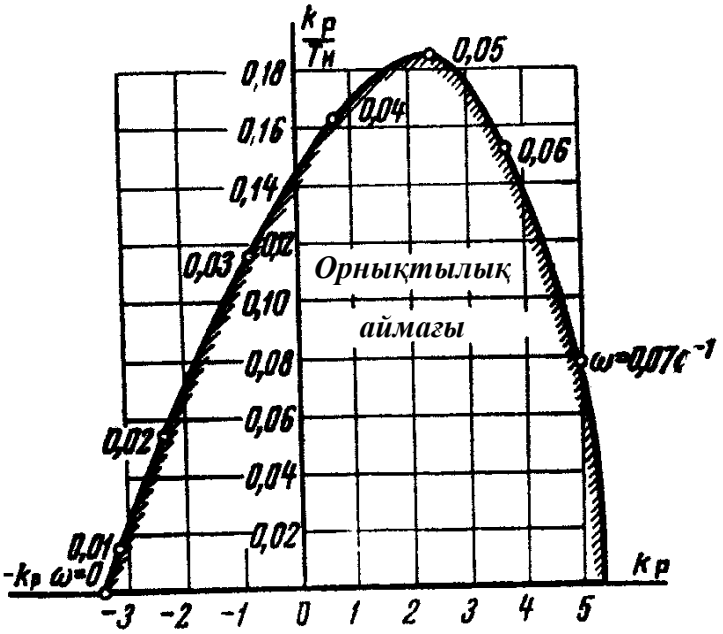
$$-15\omega = \mathrm{tg}30\omega,$$

және $\omega_{шек} \approx 0{,}076c^{-1}$. Орнықтылық шекарасын анықтау үшін 7-9 нүктедегі мәндерді есептеу қажет. Сонымен, $0 < \omega < 0{,}08$ аралығында жиілікті

$\Delta\omega = 0{,}01c^{-1}$ интервалымен өзгертіп (2.2.9) және (2.2.10) теңдеулері көмегімен мына кестені құрамыз:

ω, c^{-1}	k_p	$\frac{k_p}{T_u}, c^{-1}$	ω, c^{-1}	k_p	$\frac{k_p}{T_u}, c^{-1}$
0	– 3,47	0	0,05	2,38	0,1842
0,01	– 3,16	0,0158	0,06	3,85	0,1526
0,02	– 2,27	0,0526	0,07	4,93	0,0789
0,03	– 0,92	0,1158	0,08	5,41	– 0,0632
0,04	0,71	0,1632			

Орнықтылық шекарасының қисығы 2.20-суретте көрсетілген.



2.20-сурет. Орнықтылық шекарасы

Орнықтылық шекарасын тұрғызғаннан кейін орнықтылық аймағын анықтаймыз. Жүйе $K_p = 0$ және $K_p / T_u = 0$ болғанда орнықты болатындықтан, орнықтылық аймағы қисықтың астыңғы жағында орналасады және оған қисық кескен координат осьтеріндегі кесінділер де кіреді ($K_p / T_u < 0$ мәндеріне сәйкес аймақ іс жүзінде қолданылмайтын болғандықтан, есепте қарастырылмайды). Орнықтылық аймағы штрихпен бөлінген.

2.35-есеп. Беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$$

түріндегі ажыратылған автоматты реттеу жүйесін орнықтылыққа зерттеп, екі параметрі бойынша анықталған орнықтылық аймағын салу қажет.

Ш е ш і м і. Сипаттаушы теңдеуді мына түрде табамыз:

$$G(p)+1=T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p+K=0,$$

одан

$$G(p)=p^3+\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}p^2+\frac{1}{T_1T_2}p+\frac{K}{T_1T_2}=0$$

Табылған бұл теңдеуден Гурвиц анықтауыштарын құрамыз:

$$\Delta_1=\frac{T_1+T_2}{T_1T_2};$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2} & \dfrac{K}{T_1T_2}\\ 1 & \dfrac{1}{T_1T_2}\end{vmatrix};\qquad \Delta_3=\frac{K}{T_1T_2}\Delta_2.$$

Орнықтылық шарты былай анықталады:

$$\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}>0;\quad \frac{1}{T_1T_2}\left(\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}-K\right)>0;$$

$$\frac{K}{T_1^2T_2^2}>0.$$

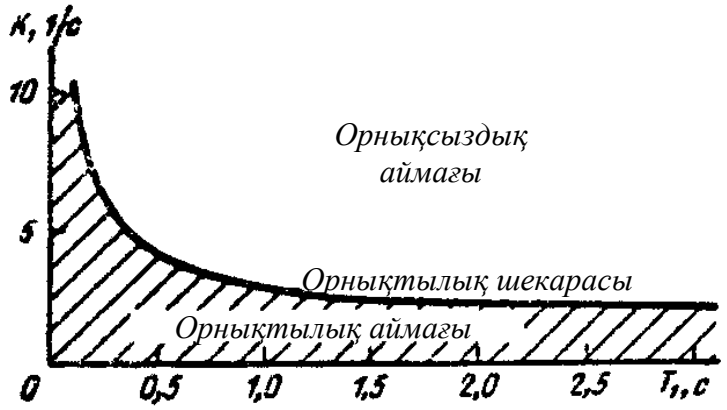
Бұлардағы $T_1>0,\ T_2>0,\ K>0$ болғандықтан, орнықтылықтың тек бір ғана шарты қалады:

$$\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}-K>0.$$

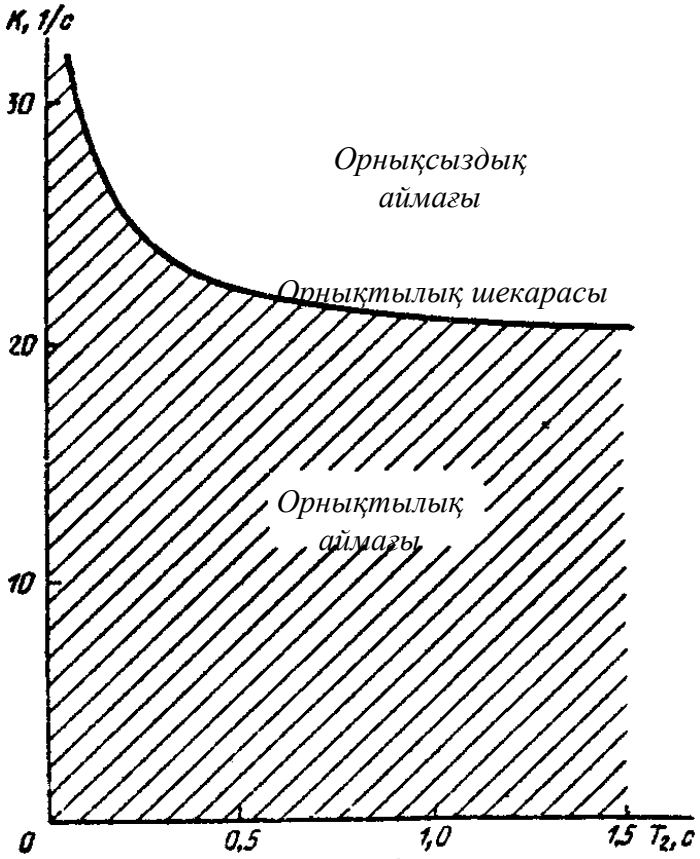
Бұл шартты мына теңсіздікпен өрнектейміз:

$$K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Осы теңсіздік көмегімен $T_2 = 0{,}5c$ болғанда K және T_1 параметрлері бойынша (2.21,*а*-сурет) және $T_1 = 0{,}05c$ болғанда K және T_2 параметрлері бойынша (2.21,*б*-сурет) жүйе орнықтылық аймағының шекарасын тұрғызамыз. Бұл суреттерде орнықтылық аймағы штрихпен көрсетілген.



а)



б)

2.21-сурет. K және T_1, K және T_2 параметрлері бойынша салынған автоматты реттеу жүйесінің орнықтылық аймақтары

2.36-есеп. Сипаттаушы теңдеуі

$$G(p)=T_1T_2T_3p^3+(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)p^2+(T_1+T_2+T_3)p+1+K=0$$

автоматты реттеу жүйесінің орнықтылық аймағын T_2 және K екі параметрлер бойынша тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і. $T_2=\tau,\quad K=\nu$ деп алып, $p=j\omega$ символын сипаттаушы теңдеуге енгізсек:

$$\tau\left[-jT_1T_3\omega^3-(T_1+T_3)\omega^2+j\omega\right]+\nu+\left[-T_1T_3\omega^2+j(T_1+T_3)\omega+1\right]=0$$

аламыз, осыдан

$$U(\omega)=-\tau(T_1+T_3)\omega^2+\nu+\left(1-T_1T_3\omega^2\right)=0;$$

$$V(\omega)=\tau\left(1-T_1T_3\omega^2\right)\omega+\nu\cdot 0+(T_1+T_3)\omega=0;$$

$$P_1(\omega)=-(T_1+T_3)\omega^2;\quad Q_1(\omega)=1;\quad R_1(\omega)=1-T_1T_3\omega^2$$

$$P_2(\omega)=\left(1-T_1T_3\omega^2\right)\omega;\quad Q_2(\omega)=0;\quad R_2(\omega)=(T_1+T_3)\omega.$$

Анықтауыштарды табамыз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-(T_1+T_3)\omega^2 & 1\\ \left(1-T_1T_3\omega^2\right)\omega & 0\end{vmatrix}=\left(T_1T_3\omega^2-1\right)\omega;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-\left(1-T_1T_3\omega^2\right) & 1\\ -(T_1+T_3)\omega & 0\end{vmatrix}=(T_1+T_3)\omega;$$

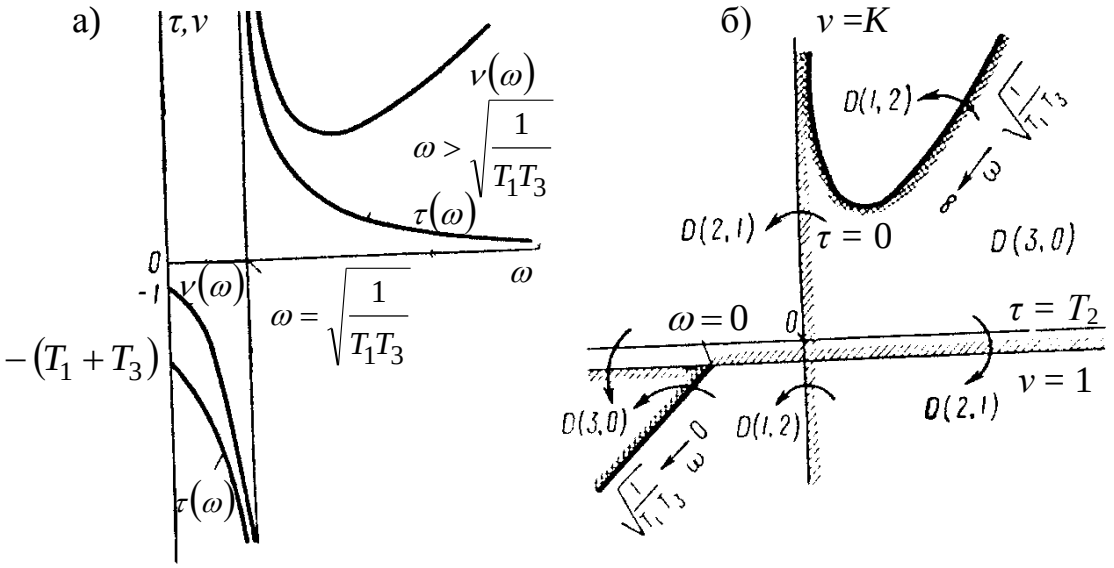
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-(T_1+T_3)\omega^2 & -\left(1-T_1T_3\omega^2\right)\\ \left(1-T_1T_3\omega^2\right)\omega & -(T_1+T_3)\omega\end{vmatrix}=(T_1+T_3)^2\omega^3+\left(1-T_1T_3\omega^2\right)^2\omega.$$

Осылардан

$$\tau=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{T_1+T_3}{T_1T_3\omega^2-1};$$

$$\nu = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \left(T_1 T_3 \omega^2 - 1\right) + \frac{(T_1 + T_3)^2 \omega^2}{T_1 T_3 \omega^2 - 1}.$$

ω мәнінің 0-ден ∞-ке дейінгі аралықта өзгеруіне сәйкес әрбір аймақтары үшін мына суретті аламыз (2.22,*а*-сурет):



2.22-сурет. Екі параметр бойынша D-бөліктеу

$0 \le \omega \le \sqrt{\frac{1}{T_1 T_3}}$ үшін

$$-T_1 + T_3 \ge \tau \ge -\infty; \quad -1 \ge \nu \ge -\infty;$$

$\sqrt{\frac{1}{T_1 T_3}} \le \omega \le \infty$ үшін

$$\infty \ge \tau \ge 0; \quad -\infty \le \beta \le \infty \text{ (бірсарынды емес).}$$

$\omega = 0$ және $\omega = \infty$ нүктелерінде τ және ν үшін алынған теңдеулер тәуелсіздіктерін жоғалтады:

$\omega = 0$ болғанда барлық τ үшін $\nu + 1 = 0$ немесе $\nu = -1$, ал $\omega = \infty$ болғанда барлық ν үшін $\tau = 0$.

Яғни $\tau = 0$ (ординат осі) және $\nu = -1$ ерекше түзулерін аламыз (2.22,*б*-сурет).

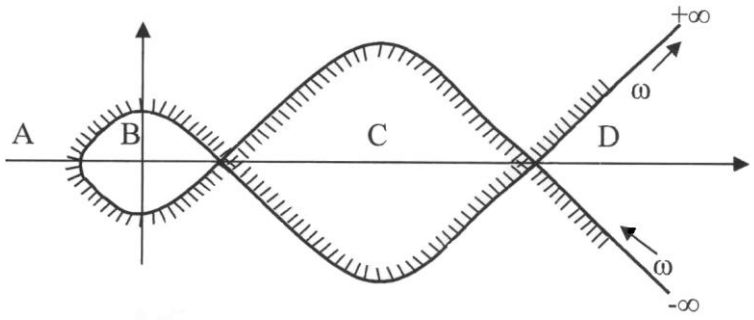
$0 \le \omega \le \sqrt{\frac{1}{T_1 T_3}}$ болғанда Δ анықтауышы теріс таңбалы (яғни үшінші квадрантта), ал $\omega > \sqrt{\frac{1}{T_1 T_3}}$ болғанда оң таңбалы (яғни бірінші квадрантта).

Осыған сәйкес қисықты (бір рет) және ерекше түзулерді (екі рет) штрихтейміз. Орнықтылық аймағына бірінші және үшінші квадранттарда жатқан D (3, 0) аймақтары жатады. Мұндағы бірінші 3 саны теріс таңбалы түбірлер санын, ал 0 – оң таңбалы түбірлер санын көрсетеді.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылатын сұрақтары мен берілген есептер

1. Орнықтылық аймағын мына мақсатта анықтайды:
   а) орнықтылық фактісін дәлелдеу үшін;
   б) орнықсыздық фактісін дәлелдеу үшін;
   в) жүйенің кейбір параметрлерін анықтау үшін;
   г) жүйенің кейбір параметрлерінің өзгеруінің жарамды шегін анықтау үшін.
2. Орнықтылық аймағын мына параметрлерді өзгерте отыра анықтайды:
   а) басқарылатын құрылғының баптау коэффициенттерін;
   б) басқарылатын құрылғының уақыт тұрақтысын;
   в) екеуін де.
3. Орнықтылық аймағы дегеніміз:
   а) Михайлов годографымен шектелетін аймақ;
   б) әрбір нүктесі сипаттаушы теңдеудің тек сол жақта жататын түбірлеріне сәйкес келетін өзгермелі параметрлер кеңістігі;
   в) әрбір нүктесі сипаттаушы теңдеудің тек оң жақта жататын түбірлеріне сәйкес келетін өзгермелі параметрлер кеңістігі.
4. 2.23-суреттегі орнықтылық аймағы

   а) *A*;
   б) *B*;
   в) *C*;
   г) *D*.



2.23-сурет. D-бөліктеу қисығы

5. 2.23-суреттегі *A* аймағында сипаттаушы теңдеудің екі түбірі бар болса, қалған аймақтарда
   а) *B* – 3; *C* – 4; *D* – 5;
   б) *B* – 1; *C* – 4; *D* – 3;
   в) *B* – 1; *C* – 3; *D* – 1;
   г) *B* – 4; *C* – 3; *D* – 2;
   д) *B* – 3; *C* – 4; *D* – 1 түбірлер саны бар.
6. D-бөліктеу қисығы дегеніміз:
   а) $W(j\omega)=U(\omega)+jV$ теңдеуі бойынша $\omega=0$-ден $\omega=\infty$-ке дейін өзгергенде салынған қисық;
   б) $U(\omega)=0$ теңдеуі бойынша салынған қисық;
   в) $V(\omega)=0$ теңдеуі бойынша салынған қисық;
   г) параметрлер жазықтығында салынған қисық.
7. D-бөліктеу қисығы:
   а) $\omega=+\infty$-тен $\omega=-\infty$-ке қарай жылжығанда сол жағынан штрихтеледі;
   б) $\omega=-\infty$-тен $\omega=+\infty$-ке қарай жылжығанда сол жағынан штрихтеледі;
   в) $\omega=-\infty$-тен $\omega=+\infty$-ке қарай жылжығанда оң жағынан штрихтеледі.
8. Ерекше түзу $\omega=\omega_0$ $(0<\omega_0<\infty)$ нүктесі арқылы:
   а) Δ таңбасын өзгертпейтін болса өтеді;
   б) Δ таңбасын өзгертетін болса өтеді;
   в) өтуі мүмкін емес.
9. Егер негізгі анықтауыш:
   а) $\Delta>0$ болса, ω өсер бағытта штрихтеу сол жақтан жүргізіледі;
   б) $\Delta>0$ болса, ω өсер бағытта штрихтеу оң жақтан жүргізіледі;
   в) $\Delta>0$ болса, штриховканы жүргізбесе де болады.

2.37-есеп. Уақыт тұрақтылары $T_1=0{,}1c$; $T_2=0{,}2c$; $T_3=0{,}4c$ бірінші ретті үш инерциалды буындардан тұратын жүйенің орнықтылық аймағын оның *K* беріліс коэффициенті жазықтығында D-бөліктеу әдісімен тұрғызу қажет.

2.38-есеп. АРЖ беріліс функциясы

$$W_{об}(p)=\frac{K_{об}}{(T_{об}p+1)^3}$$

статикалық объектіден және беріліс функциясы

$$W_{Б}(p)=K_n+\frac{K_u}{p}$$

ПИ басқарушы құрылғыдан тұрады. Объектінің параметрлері

$$K_{об} = 0{,}1; \quad T_{об} = 1c.$$

D-бөліктеу әдісімен АРЖ орнықтылық аймағын басқарушы құрылғының K_n және K_u екі баптау коэффициенттері жазықтығында тұрғызу қажет.

2.39-есеп. Автоматты реттеу жүйесі беріліс функциясы

$$W_{об}(p) = K_{об}(T_{об1}p + 1)/(T_{об2}^{\ 2}\, p^2 \quad 1)$$

болатын орнықсыз объектіден және беріліс функциясы

$$W_p(p) = K_n - K_g\, p$$

болатын теріс таңбалы дифференциалдық бөлігі бар ПД-реттеуіштен тұрады.
$K_{об} = 1; \quad T_{об} = 1c; \quad T_{об2} = 2c.$

Реттеуіштің K_n және K_g параметрлері жазықтығындағы жүйенің орнықтылық аймағын тұрғызу қажет.

2.40-есеп. Реттеу объектісінің беріліс функциясы

$$W_o(p) = \frac{K_o e^{-p\tau}}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

және реттеуіштің беріліс функциясы

$$W_p(p) = -K_p.$$

Комплексті параметр жазықтығында D-бөліктеудің шекаралық қисығын тұрғызып $K_o = 1; \quad \tau = 20c; \quad T_1 = 20c; \quad T_2^2 = 50c^2$ болғандағы П-реттеуіштің беріліс коэффициентінің күдікті мәнін есептеу қажет.

2.41-есеп. Реттелетін объектінің беріліс функциясы

$$W_o(p) = \frac{e^{-p\tau}}{50p^2 + Tp + 1}.$$

Объект теңдеуі коэффициенттері τ = 20c; T = 20; 50; 100; 200c болғандағы комплексті параметрлер жазықтығындағы D-бөліктеу

шекарасының сапалық сипатын анықтаңыз, яғни И-реттеуіштің беріліс коэффициентін және оның күдікті нақты мәнін есептеу қажет.

2.42-есеп. АРЖ беріліс функциясы

$$W_o(p) = \frac{e^{-p\tau}}{Tp}$$

болатын объектіден және пропорционал реттеуіштен тұрады. Реттеуіштің K_p беріліс коэффициентінің күдікті мәнінің T/τ қатынасына тәуелділігін анықтау қажет. Мұндағы T – уақыт тұрақтысы, τ – объект теңдеуіндегі кешігу уақыты.

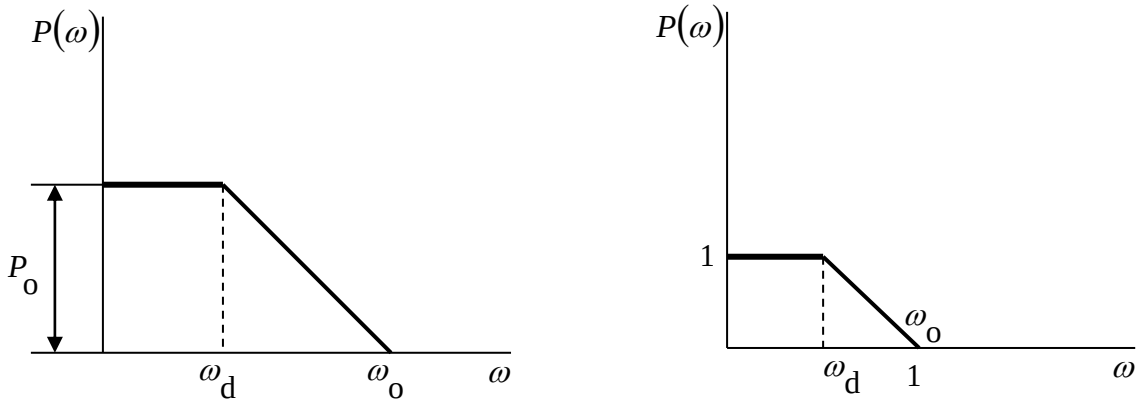
3-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу және жүйенің сапа көрсеткіштерін анықтау. арж корректирлеу

3.1 Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу

В.В.Солодовников әдісі бойынша өтпелі процесс қисығын тұрғызу тұйықталған жүйенің $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасын трапециялармен алмастыруға негізделген.

h-функция кестесі (2-тіркеме) көмегімен әрбір трапеция үшін өтпелі процесс қисығы анықталады. Осы алынған әрбір қисықтардың қосындысы бүкіл жүйенің өтпелі процесін береді.

$P(\omega)$ сипаттамасының бастапқы учаскелерін трапециялармен алмастырғанда өте мұқият болу керек, себебі бастапқы учаскелерді дұрыс аппроксимацияламаса есептеу нәтижесі қате болып шығуы мүмкін.



а) б)

3.1-сурет. Трапециялық жиіліктік сипаттамалар
а – қайсыбір сипаттама; б – бірлік сипаттама

3.1-суретте трапециалды жиіліктік сипаттамалардың түрлері келтірілген.

Тұйықталған жүйенің жиіліктік сипаттамалары бойынша өтпелі процесс қисығын тұрғызу мына ретпен жүргізіледі:

1. Нақты жиіліктік сипаттамасын *i* трапецияларға бөлеміз. Әрбір трпеция үшін ω_{di}, ω_{oi}, P_o мәндерін анықтаймыз.

2. Әрбір трапецияның еңістіктерін мына формула бойынша есептейміз:

$$\chi_i = \frac{\omega_{di}}{\omega_{oi}}.$$

3. *h*-функциясы кестесі бойынша есептеу жұмыстарын жүргізу үшін әрбір χ_i мәніне сәйкес τ уақыт интервалын анықтаймыз (коэффициент χ неғұрлым үлкен болған сайын, алынған τ уақыт интервалы кішкене болуы керек).

4. Есептелінген χ_i және таңдалып алынған τ мәндері бойынша h-функцияның сәйкес мәндерін аламыз (2-тіркеме).

5. Алынған h мәндерін P_o трапеция биіктігіне көбейтеміз.

6. Уақыттың t осі бойына $t=\frac{\tau}{\omega_o}$, ал ординат осі бойына $y=h_i\cdot P_o$ мәндерін қойып әрбір трапеция үшін $y_i(t)$ өтпелі процестер құрамаларын аламыз.

7. Алынған осы қисықтардың ординаталарын таңбаларын еске ала отыра қосындылап ізделініп отырған жүйенің $h(t)$ өтпелі процесінің қисығын аламыз.

3.1-есеп. Ажыратылған АРЖ беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{k}{p(Tp+1)}=\frac{20}{p(0{,}1p+1)}$$

Кірістік шамасы $x(t)=1(t)$ тұйықталған АРЖ-нің $y(t)$ шығыстық шамасының өзгеру заңдылығын графиктік әдіспен тұрғызыңыз.

Ш е ш і м і: Тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуін анықтаймыз:

$$G(p)=p+10p+200=0$$

Бұл өрнектен ω_o және ξ шамаларын табамыз:

$$\omega_o=14{,}1c^{-1};\quad \xi\approx 0{,}4.$$

Тербелмелі жүйе нормаланған өтпелі сипаттамалары (3-тіркеме) көмегімен $y(t)$ тұрғызуға болады. Бірлік өлшемді уақыт мәніне өту үшін $t=\frac{\tau}{\omega_o}=\frac{\tau}{14{,}1}$ формуласын қолданады.

3.2-есеп. Төмендегі мәндері белгілі екі трапециалды сипаттамалар берілген:

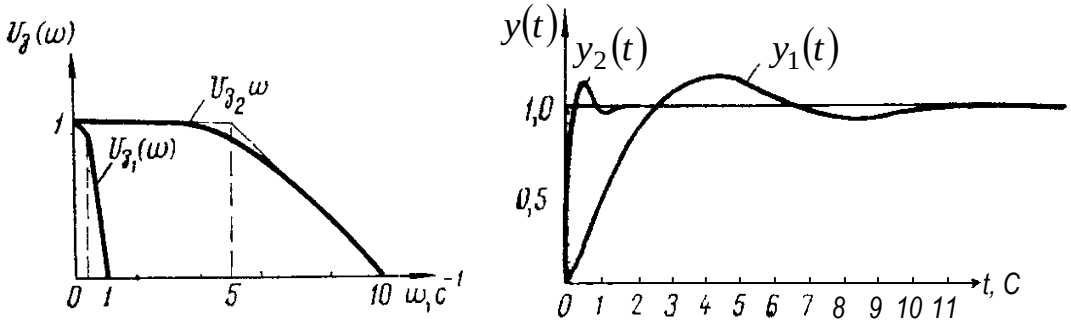
$$P_1(0)=1;\quad \omega_{к1}=1c^{-1};\quad \omega_{d1}=0{,}5c^{-1};$$

және

$$P_2(0)=1;\quad \omega_{к2}=10c^{-1};\quad \omega_{d2}=5c^{-1}.$$

Бір графиктің ішіне трапециалды сипаттамаларды және оларға сәйкес өтпелі процестің қисығын тұрғызыңыз да, салынған нәтижелерге сәйкес қорытынды жасаңыз.

Ш е ш і м і: Берілген трапециалды жиіліктік сипаттамалар 3.2,*а*-суретте келтірілген. Өтпелі процестер қисықтарын тұрғызамыз.



а) б)

3.2-сурет. АРЖ сипаттамалары:
а – трапециалды жиіліктік сипаттамалар; б – өтпелі процестер қисықтары

Трапециялардың еңістіктерін анықтаймыз:

$$\chi_1 = \frac{\omega_{d1}}{\omega_{k1}} = 0{,}5; \quad \chi_2 = \frac{\omega_{d2}}{\omega_{k2}} = 0{,}5;$$

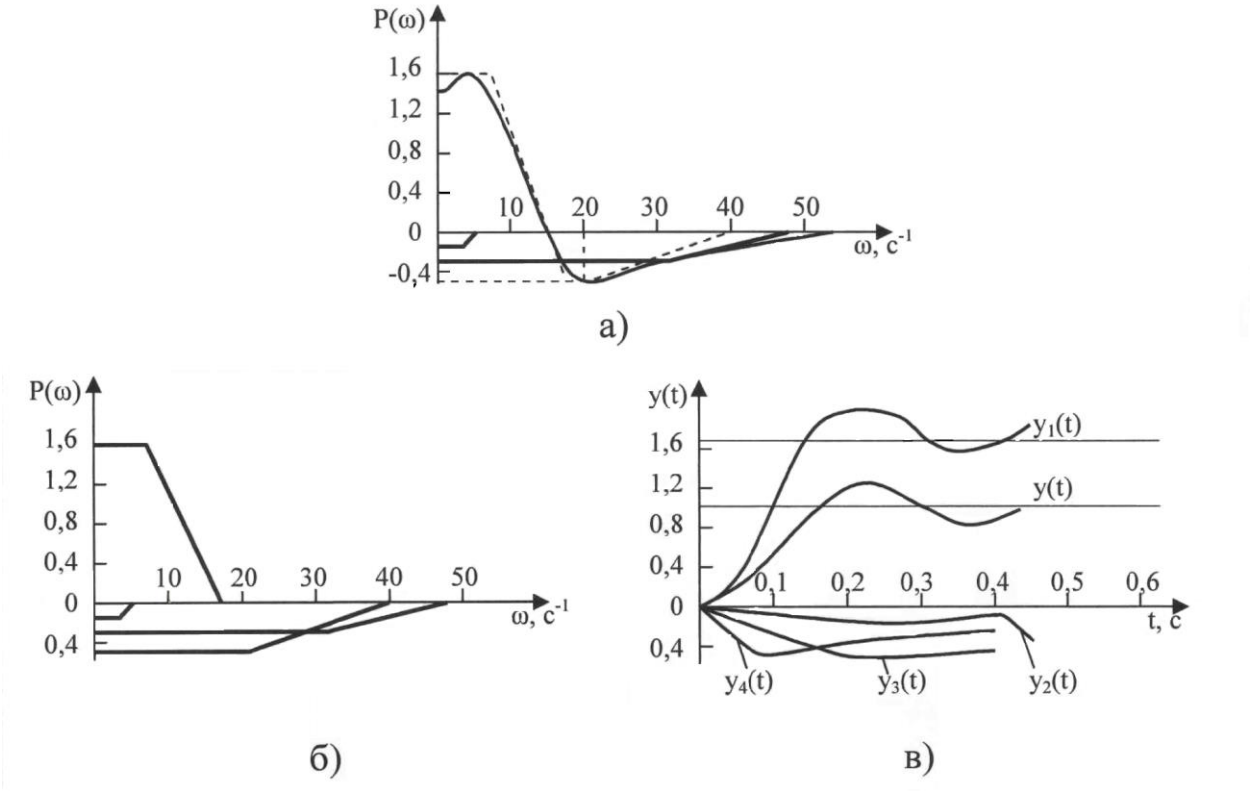
$\chi_1 = 0{,}5$ үшін *h*-функция кестесінен (2-тіркеме) $\bar{t}$ және $h(\bar{t})$ мәндерін аламыз:

$\bar{t}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(\bar{t})$	0	0,461	0,831	1,061	1,142	1,118	1,051	0,993	0,966

$\bar{t}$	9	10	11	12	13	14	15
$h(\bar{t})$	0,968	0,982	0,993	0,997	0,997	0,998	1,00

$P_1(0)$ және $P_2(0)$ мәндері бірге тең болғандықтан, $y_1(t)$ және $y_2(t)$ өтпелі процесс қисықтарының ординаталары да бірдей болып $h(t)$ кестелік мәндеріне тең болады. Уақыттың нақты мәніне өту үшін $t = \frac{\bar{t}}{\omega_k}$ қатынасын пайдаланамыз. $y_1(t)$ қисығы үшін нақты уақыт кестелік мәніне тең, себебі $\omega_{k1} = 1$. Ал, $\omega_{k2} = 10$ болғандықтан, $y_2(t)$ қисығы үшін нақты уақыт кестелік мәнінен 10 есе аз болады. Өтпелі процестердің $y_1(t)$ және $y_2(t)$ қисықтары 3.2,*б*-суретте тұрғызылған.

3.3-есеп. Тұйықталған жүйенің $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасы 3.3-суретте келтірілген. АРЖ кірісіне бірлік секірістік әсер берілгендегі ондағы өтпелі процестің қисығын трапеция әдісі бойынша тұрғызыңыз (нөлдік бастапқы шарттарында).



3.3-сурет. а - нақты жиіліктік сипаттама, б – трапециялар,
в – өтпелі процестер қисықтары

Ш е ш і м і: 3.3,*а*-суретінде тұйықталған жүйенің $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасымен көрсетілген 1, 2, 3, 4 трапециялары көрсетілген, ал 3.3,*б*-суретінде оларға сәйкес $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$ қисықтар мен қарастырылып отырған АРЖ-ның кірісіне сатылық сигнал берілгенде туатын $y(t)$ өтпелі процестің қорытынды қисығы келтірілген.

3.4-есеп. Тұйықталған АРЖ нақты жиіліктік сипаттамасы параметрлері

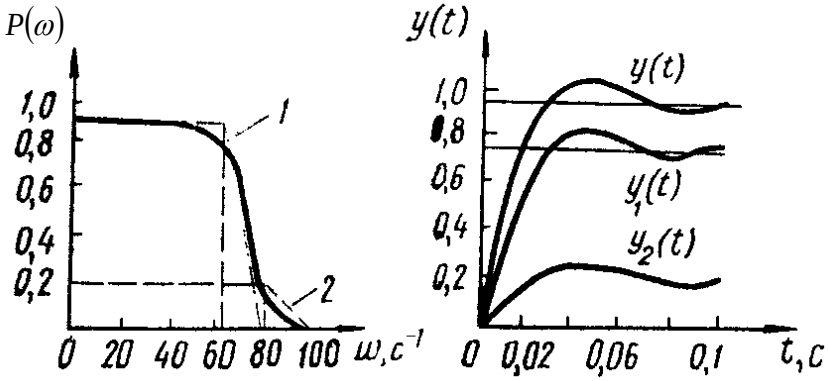
$$1)\ \chi_1 = 0{,}80;\quad \omega_{k1} = 80c^{-1};\quad P_1(0) = 0{,}7;$$
$$2)\ \chi_2 = 0{,}85;\quad \omega_{k2} = 100c^{-1};\quad P_2(0) = 0{,}2$$

екі трапециямен алмастырылған.

АРЖ кірісіне бірлік секірістік әсер беріліп тұрғандағы және бастапқы нөлдік шарттардағы өтпелі процестің қисығын тұрғызыңыз.

Ш е ш і м і: 3.4,*а*-суретінде есеп шарты бойынша салынған тұйықталған АРЖ $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасы мен оған сәйкес трапециялар келтірілген. 3.4,*б*-суретінде осы трапецияларға сәйкес алынған

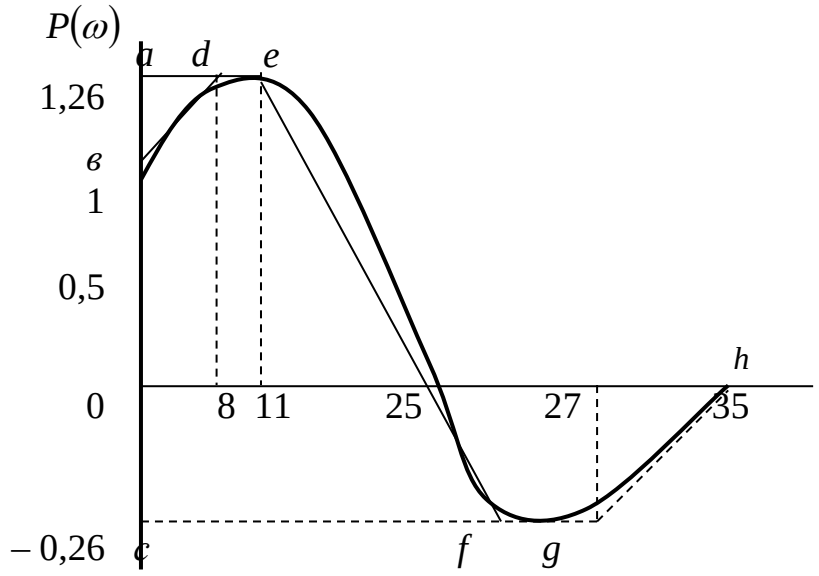
$y_1(t)$, $y_2(t)$ қисықтары және жүйеде өтетін $y(t)$ өтпелі процесс қисығы келтірілген.



а) б)

3.4-сурет. АРЖ сипаттамалары:
а – нақты жиіліктік; б – өтпелі процесс қисықтары

3.5-есеп. Нақты жиіліктік сипаттамасы 3.5-суретте көрсетілгендей жүйенің өтпелі процесін тұрғызу қажет.



3.5-сурет. АРЖ нақты жиіліктік сипаттамасын
түзу кесінділермен аппроксимациялау

Ш е ш і м і. Берілген АЖС түзу кесінділермен аппроксимациялаймыз. Осы түзулер бойынша *aefc, adb, ohgc* трапецияларын тұрғызамыз.

Сонымен берілген жүйенің нақты жиіліктік сипаттамасын төрт трапеция арқылы бейнеледік. Бұл кездегі негізгі шарт барлық трапециялардың бір жақтарының ордината осі бойымен өтеді. Жалпы, сипаттаманың қаншама еңістік учаскелері болса, трапециялар саны да соншама болуы керек.

Алынған трапецияларды жеке-жеке қарастырайық. Бірінші $(aefc)$ трапеция үшін:

Трапеция биіктігі

$$P_1(0) = 1{,}26 + 0{,}26 = 1{,}52$$

$\omega_{d1} = 11c^{-1}$, кесу жиілігі $\omega_{o1} = 25c^{-1}$; $\chi = \frac{\omega_{d1}}{\omega_{o1}} \approx 0{,}45.$

Екінші (adb) трапеция үшін:

$$P_2(0) = -0{,}26.$$

Таңбасы минус, себебі трапецияның еңіс бүйірі НЖС-тың өсу учаскесіне сәйкес келіп тұр.

$$\omega_{d2} = 0; \quad \omega_{o2} = 8c^{-1}; \quad \chi = \frac{\omega_{d2}}{\omega_{o2}} = 0.$$

Үшінші $(ohgc)$ трапеция үшін:

$$P_3(0) = -0{,}26; \quad \omega_{d3} = 27c^{-1}; \quad \omega_{o3} = 35c^{-1}$$

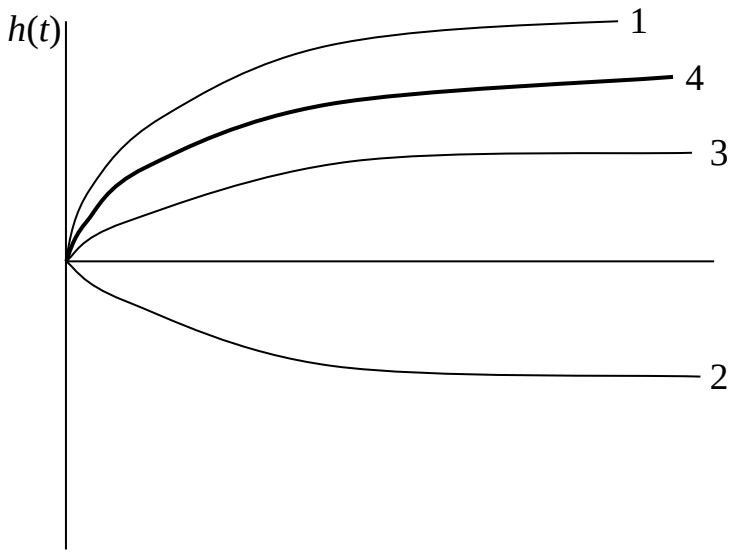
$$\chi = \frac{27}{35} = 0{,}75.$$

Енді есептелінген χ мәндерін пайдалана отыра әрбір трапеция үшін *h*-функция (2-тіркеме) кестесі көмегімен $h(t)$ өтпелі процестерді тұрғызамыз.

Бірінші трапеция үшін:

τ	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4,5	5,5	7	8,5	10	12	15	20	25
$h(\tau)$	0	0,231	0,447	0,646	0,81	0,943	1,038	1,095	1,128	1,097	1,099	0,977	0,987	0,987	1	1,002	0,997
t, с	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14	0	0,22	0,25	0,94	0,4	0,48	0,6	0,8	1
$h(t)$	0	0,375	0,125	1,02	1,31	1,53	1,64	1,77	1,83	1,775	1,625	1,58	1,6	1,6	1,625	1,623	1,6

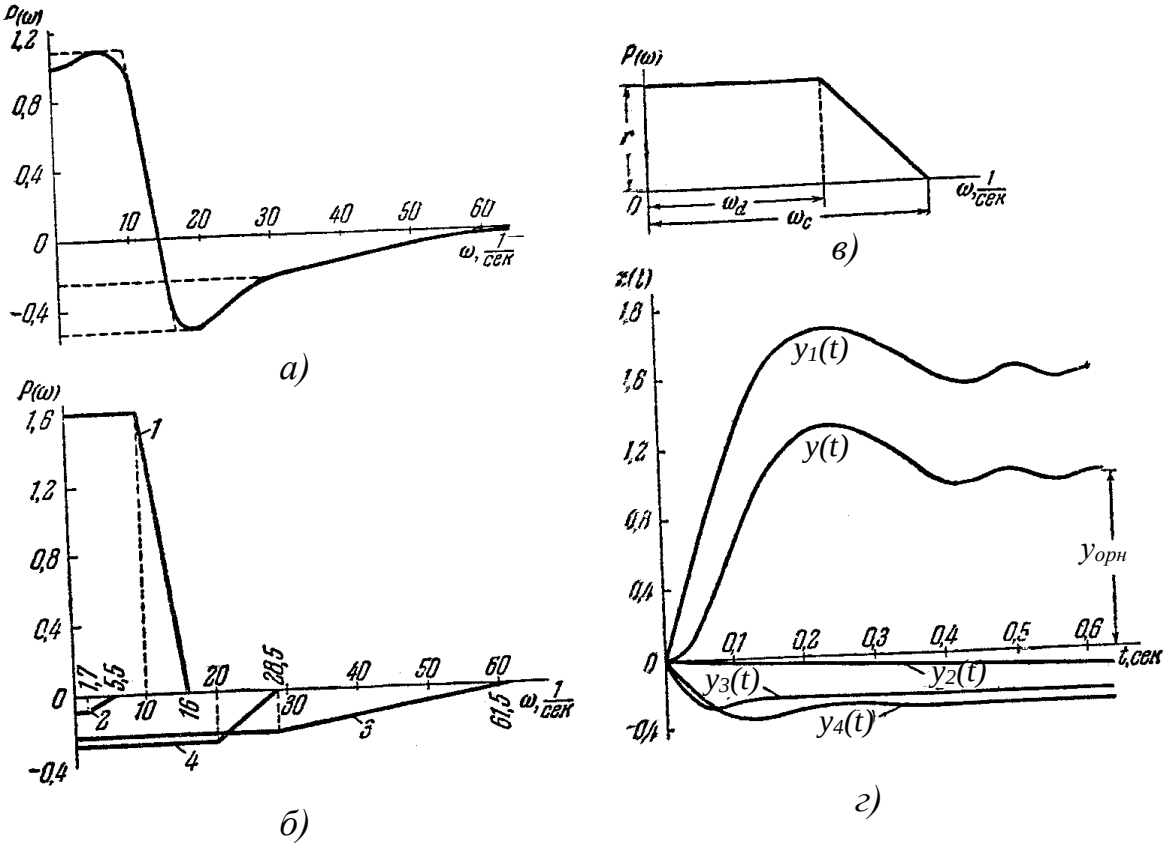
Осылай екінші және үшінші трапециялардың χ шамалары бойынша $h_i(t)$ тұрғызып, олардың ординаталарын қосу арқылы жүйенің өтпелі процесінің қисығын аламыз (3.6-сурет).



3.6-сурет. Жүйенің өтпелі процесінің қисығы:
1 – бірінші, 2 – екінші, 3 – үшінші трапециялар көмегімен салынған қисықтар;
4 – нәтижесіндегі жүйенің өтпелі процесі

3.6-есеп. 3.7,*а*-суретте келтірілген $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасы бойынша, алғашқы нөлдік шарттар және бірлік сатылық әсер берілген кездегі АРЖ өтпелі процесінің қисығын тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і. $P(\omega)$ қисығын бірнеше жуықтатылған трапециялармен алмастырамыз. Трапециялар ординаталарының қосындысы $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасының ординатасына тең болуы қажет. Біздің есепте 3.7,*б*-суретте көрсетілген төрт трапецияны алуға болады. Бұлардың біреуі оң, ал қалғандары теріс. Әрбір трапеция 3.7,*в*-суретте көрсетілгендей типті түрде болуы керек, сонда олар түгелдей үш шамамен анықталады: $\omega_к$ кесу жиілігімен, $\gamma = \frac{\omega_d}{\omega_o}$ – еңістік коэффициентімен және $P(0)$ биіктігімен. 3.7,*б*-суреттегі трапециялардың параметрлері 3.1.1-кестеде келтірілген:



3.7-сурет. Нақты жиіліктік сипаттаманы
жуықтатылған трапециялармен алмастыра отыра өтпелі процесс қисығын алу

3.1.1-кесте

Трапециялар нөмірі	1	2	3	4
$\chi = \dfrac{\omega_d}{\omega_c}$	0,62	0,31	0,46	0,70
ω_c, 1/*сек*	16	5,5	61,5	28,5
r	1,62	– 0,09	– 0,24	– 0,29

Енді 2-тіркемедегі *h*-функция кестесін пайдаланамыз. *h*-функция кестесі нақты жиіліктік сипаттамасы $P(0)=+1,\ \ \omega_o = 1c^{-1}$ параметрлері бар бірлік трапеция болатын жүйенің өтпелі процесс қисығын береді. Бірінші трапецияның $\chi = 0{,}62$ мәні үшін *h*-функция кестесінен t_0 бірқатар мәндері мен оған сәйкес $h(t_0)$ функциясының шамаларын жазып аламыз (3.1.2-кесте). $h_1(t)$ өтпелі процесс функциясының нүктелерін табу үшін мына формуланы қолданамыз:

$$h_1(t) = P_1(0)h\left(\frac{t_0}{\omega_0}\right).$$

Осылайша $h_2(t)$, $h_3(t)$ және $h_4(t)$ мәндерін анықтап (3.1.2-3.1.5-кестелер) әр трапецияға сәйкес өтпелі процесс қисықтарын тұрғызамыз. Алынған қисықтардың ординаталарын бір-бірімен қосу арқылы бірлік сатылық сигнал берілген кездегі жүйенің өтпелі процесін саламыз.

Егер жүйе кірісіне бірлік емес сатылы $y(t)=b\cdot 1(t)$ әсері берілген болса, онда $h(t)$ қисығының ординатасын *b*-ға көбейту қажет.

3.1.2-кесте

Трапеция 1

t_0	0	0,2	0,4	0,8	1,0	1,6	2,6	3,0	4,0	4,4	4,8	5,4	6,0	7,0	7,8	9,0	10
$h(t_0)$	0	0,10	0,20	0,40	0,50	0,75	1,04	1,11	1,16	1,15	1,12	1,07	1,01	0,95	0,94	0,96	1,00
t, с	0	0,0125	0,025	0,050	0,0625	0,100	0,162	0,188	0,250	0,275	0,300	0,337	0,375	0,438	0,488	0,562	0,625
$y_1(t)$	0	0,17	0,33	0,65	0,81	1,21	1,68	1,80	1,88	1,86	1,82	1,73	1,64	1,54	1,52	1,56	1,62

3.1.3-кесте

Трапеция 2

t, с	0	0,109	0,218	0,364	0,546	0,728	0,822	1,09	1,27
$y_2(t)$	0	– 0,022	– 0,043	– 0,067	– 0,086	– 0,096	– 0,098	– 0,096	– 0,094

3.1.4-кесте

Трапеция 3

t, с	0	– 0,0065	0,0163	0,026	0,0325	0,0488	0,065	0,0813	0,0976	0,114	0,13
$y_3(t)$	0	– 0,043	– 0,108	– 0,163	– 0,194	– 0,25	– 0,271	– 0,269	– 0,254	– 0,242	– 0,235

3.1.5-кесте

Трапеция 4

t, с	0	0,014	0,028	0,042	0,070	0,105	0,133	0,176	0,210	0,246	0,281	0,316	0,351	0,386	0,456
$y_4(t)$	0	– 0,064	– 0,122	– 0,467	– 0,267	– 0,328	– 0,339	– 0,314	– 0,284	– 0,27	– 0,27	– 0,284	– 0,296	– 0,302	– 0,290

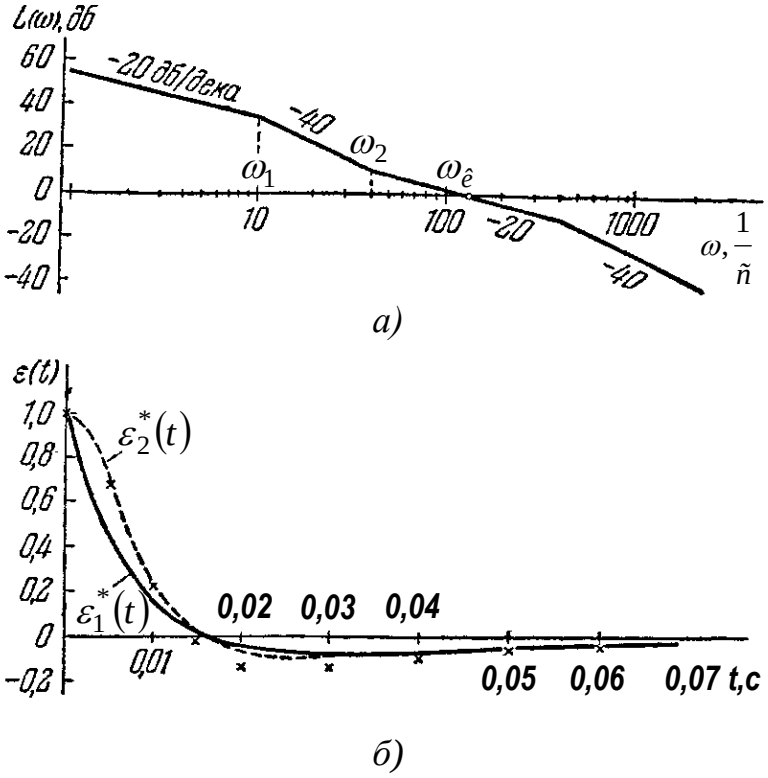
3.7-есеп. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}, \qquad (3.7.1)$$

мұндағы $K=500c^{-1}$; $T_1=0{,}1c$; $T_2=0{,}025c$; $T_3=0{,}0025c$.

Бастапқы нөлдік шартта кірісіне $y(t)=1(t)$ бірлік сатылық әсер беріліп тұрған жүйенің $\varepsilon(t)=y(t)-x(t)$ жуықтатылған қателік қисығын тұрғызу керек. Есепті шығарғанда логарифмдік амплитудалық сипаттаманың түйіндес жиіліктерін қолдану қажет.

Ш е ш і м і: Жүйенің ЛАС-ы 3.8,*а*-суретте тұрғызылған. Сипаттаманың жиіліктік осін – 20 дБ/декада еңістікпен қиып өтетін учаскесінің ұзындығы бір декадан кем болмауы керек деген шарт орындалып тұрғандықтан, ізделініп отырған қисықты ЛАС жанаспалы жиіліктері арқылы тұрғызуға мүмкіндік туады.



3.8-сурет. ЛАС және өтпелі процесс қисығы

Кесу жиілігін $\omega_к = K\dfrac{T_2}{T_1}$ формуласы арқылы немесе тікелей ЛАС-тың өзінен анықтаймыз:

$$\omega_к = 125c^{-1}.$$

ЛАС жанаспалы жиіліктерін пайдалану әдісіне сәйкес, логарифмдік сипаттаманың $\omega_к$ жиілігінің оң жағында жатқан барлық бөліктерін алып тастап, оны жиіліктік осьпен қабаттасып жатқан көлбеу түзумен алмастырамыз. Бұл түрленген жаңа логарифмдік сипаттамаға мына беріліс функция сәйкес келеді:

$$W^*(p)=\frac{K(1+T_2 p)\left(1+\frac{1}{\omega_к}p\right)}{p(1+T_1 p)} \qquad (3.7.2)$$

немесе

$$W^*(p)=\frac{KT_2\frac{1}{\omega_к}\left(\frac{1}{T_2}+p\right)(\omega_к+p)}{T_1 p\left(\frac{1}{T_1}+p\right)}=\frac{(p+\omega_2)(p+\omega_к)}{p(p+\omega_1)}=\frac{(p+40)(p+125)}{p(p+10)}, \qquad (3.7.3)$$

мұндағы $\omega_1 = 1/T_1$; $\omega_2 = 1/T_2$.

Бұл (3.7.2) және (3.7.3) екі формулаға жүйе қателігінің мынадай түрлендірілген беріліс функциясы сәйкес келеді:

$$\Phi^*(p)=\frac{1}{W^*(p)}=\frac{p(p+10)}{(p+40)(p+125)}. \qquad (3.7.4)$$

Бірлік сатылы сигнал үшін $L1(p)=\frac{1}{p}$ екендігін еске ала отыра, $\varepsilon(t)$ функциясының бірінші жуықтаудағы $\varepsilon_1^*(t)$ Лаплас бойынша кескінін табамыз:

$$E(p)=\Phi^*(p)\cdot\frac{1}{p}=\frac{p+10}{(p+40)(p+125)}. \qquad (3.7.5)$$

Енді Лаплас кескіні кестесінен бұл өрнекке сәйкес функцияны тауып аламыз:

$$\frac{p+a_0}{(p+\alpha)(p+\gamma)}=\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}-(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma^{-\alpha}}. \qquad (3.7.6)$$

(3.7.5) және (3.7.6) формулалардан жүйе қателігінің бірінші жуықтаудағы мәні үшін жауап алуға болады:

$$\varepsilon_1^*(t)=1{,}353e^{-125t}-0{,}353e^{-40t}.$$

Бұл функция 3.8,*б*-суретінде тұтас сызықпен салынған.

Екінші жуықтаудағы $\varepsilon_2^*(t)$ шешімді алу үшін $T_3 < t < T_2$, яғни $0{,}0025c < t < 0{,}025c$ ауқымында $\varepsilon_1^*(t)$ мәнін ρ түзету коэффициентіне көбейту қажет. Ал ρ коэффициентін мына формуламен анықтайды:

$$\rho = \left| \frac{W^*(p)}{1 + W(p)} \right|_{p = j\omega_к}$$

немесе (3.7.1) мен (3.7.3)-ке сәйкес

$$\rho = \left| \frac{\dfrac{(p+40)(p+125)}{p(p+10)}}{1 + \dfrac{500(1+0{,}025p)}{p(1+0{,}1p)(1+0{,}0025p)}} \right|_{p = j155} =$$

$$= \left| \frac{(j125+40)(j125+125)(j125+400)}{50000(j125+40) + j125(j125+10)(j125+400)} \right| = 1{,}485.$$

Екінші жуықтаудағы шешімнің қисығы 3.8,*б*-суретте пунктирлі сызықпен салынған. Бұл суреттегі крестикпен белгіленген нүктелер дәл шешімге сәйкес нүктелер.

3.8-есеп. Ажыратылған қадағалаушы жүйенің беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K(1+T_1 p)}{p^2(1+T_2 p)(1+T_3 p)} = \frac{100(1+0{,}160\,p)}{p^2(1+0{,}024\,p)(1+0{,}08\,p)}.$$

Алғашқы нөлдік шарттардағы жүйенің кірісіне $y(t) = 1(t)$ кірістік әсер берілгендегі $x(t)$ шығыстық шаманың өзгеру графигін тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і. Берілген жүйенің логарифмдік амплитудалық сипаттамасын тұрғызамыз (3.9,*а*-сурет). 4-тіркемеде келтірілген формулалар көмегімен ЛАС базалық жиілігін:

$$\omega_0 = \sqrt{K} = \sqrt{100} = 10c^{-1};$$

салыстырмалы уақыт тұрақтыларын:

$$\tau_2 = T_1\omega_0 = 0{,}160 \cdot 10 = 1{,}6;$$
$$\tau_3 = T_2\omega_0 = 0{,}024 \cdot 10 = 0{,}24;$$

салыстырмалы кіші уақыт тұрақтысын:

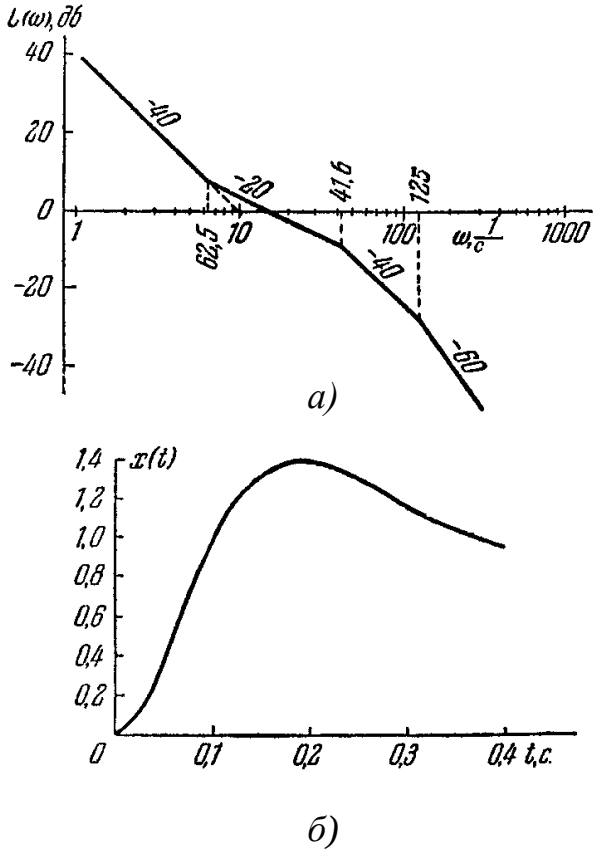
$$\tau_к = T_3\omega_0 = 0{,}008 \cdot 10 = 0{,}08$$

және еңістігі – 20 дБ/дек ЛАС учаскесінің ұзындығын:

$$h = \frac{\tau_2}{\tau_3} = 6{,}67$$

анықтаймыз.

Табылған сандар мен 4-тіркемеде келтірілген нормаланған ЛАС түрлеріне сәйкес, бұл логарифмдік сипаттаманы *M* тербелмелілік көрсеткіші 1,5 пен 1,7 аралығында жататын нормалды түрге келтіруге болатынын көреміз.

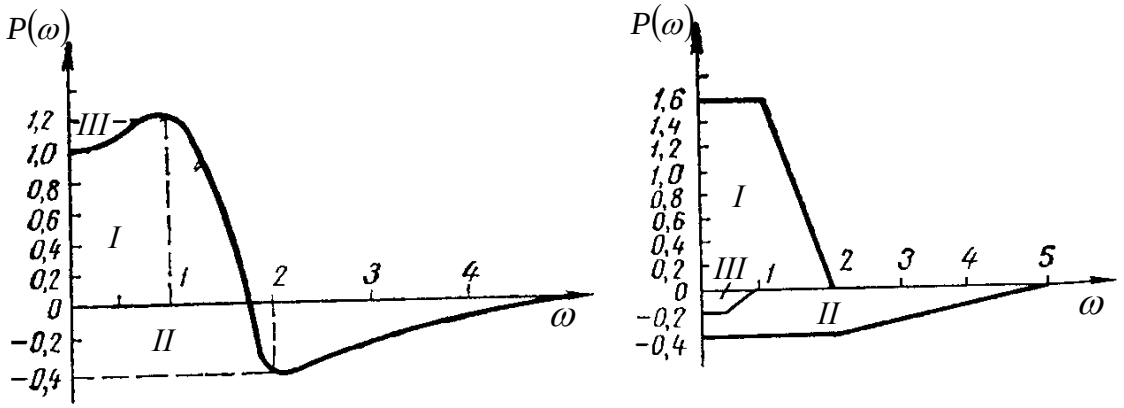


3.9-сурет. ЛАС және өтпелі процесс қисығы

Сондықтан өтпелі процестің $x(t)$ қисығы *M* = 1,5 және *M* = 1,7 мәндері үшін 5-тіркемеде келтірілген $x(\omega_0 t)$ қисықтарының аралығында өтетіндей етіліп тұрғызылуы керек. Нормаланған $x(\omega_0 t)$ қисығынан $x(t)$ өтпелі процесс қисығына өту үшін, нормаланған қисықтың абсциссасын $\omega_0 = 10c^{-1}$ шамасына бөлу қажет. Нәтижесінде 3.9,*б*-суретіндегі $x(t)$ шығыстық шама қисығын аламыз.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылатын сұрақтар мен есептер

1. Өтпелі процестерді түріне сәйкес қандай деп айтуға болады:
   а) апериодты;
   б) бірсарынды;
   в) тербелмелі;
   г) а, б, в – үшеуіндей де?
2. Өтпелі процесс жүйенің
   а) қазіргі күйін;
   б) өткен күйін;
   в) бір күйден екінші күйге өту күйін;
   г) орныққан күйін анықтайды.
3. Мына параметрлердің қайсылары реттеу сапасының көрсеткіштеріне жатады:
   а) t_p – реттеу уақыты;
   б) $y(t)$ – шығыстық сигнал фазасы;
   в) ω_0 – тербелістің меншікті жиілігі;
   г) N – тербелістер саны;
   д) кіріс сигнал амплитудасы;
   ж) σ – асыра реттеу;
   з) ε – статикалық қателік;
   и) γ – динамикалық қателік?
4. Өтпелі процесті
   а) жүйенің дифференциалдық теңдеуін шешу арқылы;
   б) эксперименттік жолмен;
   в) теория бойынша;
   г) кірістік сигналды зерттеу бойынша алуға болады.
5. 3.10-суреттегі I, II, III трапециалды нақты жиіліктік сипаттамаларға сәйкес келетін төменде келтірілген параметрлерді бірінен соң бірін тізіп шығыңыз:



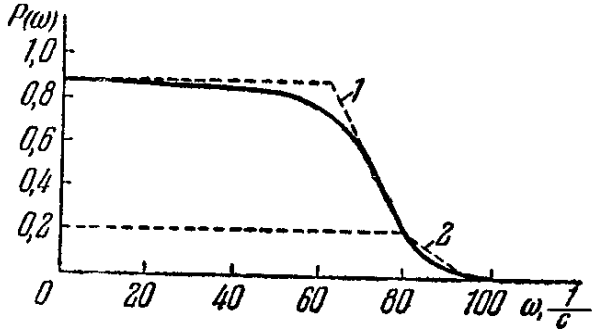
3.10-сурет. Трапециалды жиіліктік сипаттамалар

1) $P(0)=-0{,}2$;
2) $P(0)=-0{,}4$;
3) $P(0)=1{,}6$;
4) $\omega_0=2$
5) $\omega_0=1$
6) $\omega_0=5$

7) $\omega_d=1$;
8) $\omega_d=2$;
9) $\omega_d=0{,}25$;
10) $\chi=0{,}25$;
11) $\chi=0{,}25$;
12) $\chi=0{,}4$.

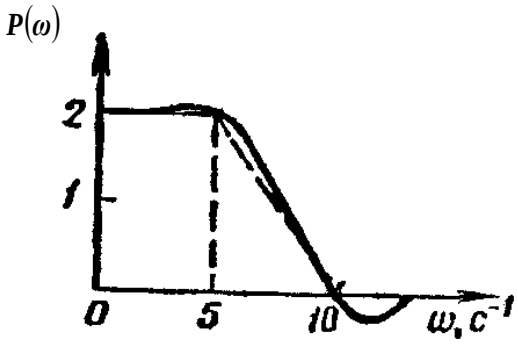
6. 3.10-суреттегі трапециялардың қайсысына мына өтпелі процесс сәйкес келеді:
   а) ең үлкен санды тербеліс;
   б) шығыстық сигналы орныққан ең үлкен мәнді;
   в) реттеу уақыты ең үлкен болатын?

3.9-есеп. Нақты жиіліктік сипаттамасы 3.11-суретте келтірілген алғашқы нөлдік шартта кірісіне $y(t)=b\cdot 1(t)$ әсер берілген автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесс қисығын тұрғызу қажет.



3.11-сурет. Жүйенің нақты жиіліктік сипаттамасы

3.10-есеп. АРЖ-ның нақты жиіліктік сипаттамасы 3.12-суретте келтірілген *h*-функциясы кестесінен сәйкес өтпелі функциясын жазып алып өтпелі процесс қисығын тұрғызу қажет.



3.12-сурет. АРЖ-ның нақты жиіліктік сипаттамасы

3.11-есеп. АРЖ беріліс функциясы

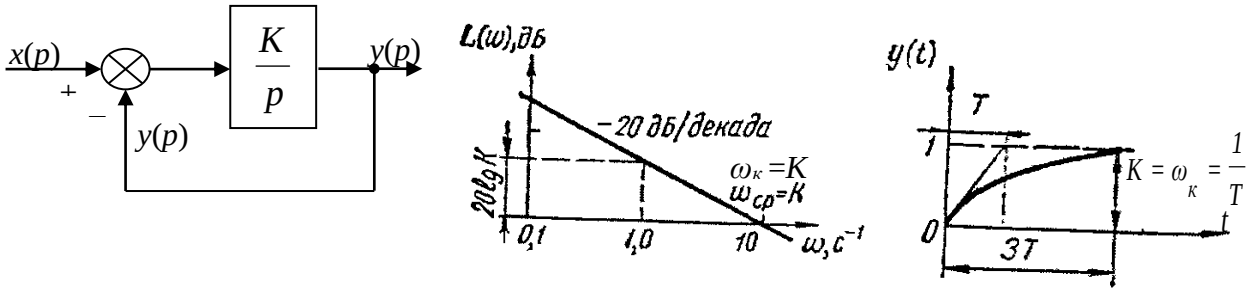
$$W_{об}(p)=\frac{0{,}125}{137800p^2+742p+1}$$

объектіден және күшейту коэффициенті $K_p=100$ П-реттеуіштен тұрады. Кірісіне $x(t)=1(t)$ бірлік сатылық әсер берілгендегі жүйенің өтпелі процесін тұрғызу керек.

3.2. АРЖ сапа көрсеткіштерін анықтау

Реттеу көрсеткіштеріне реттеу уақыты, максимал амплитудалар саны, асыра реттеу және статикалық қателік жатады. Жалпы реттеу процесінің көрсеткіштерін бағалаудың бірнеше жолдары бар, солардың ішіндегі ең ыңғайлысы – логарифмдік амплитудалық жиіліктік сипаттама бойынша бағалау. Енді сапа көрсеткіштерімен л.а.ж.с арасындағы байланысты көрсетейік.

АРЖ теріс кері байланыспен қамтылған интегралдауыш буын түрінде делік (3.13,*а*-сурет).



а *б* *в*

3.13-сурет. Динамикалық буын және оның сипаттамалары:
а – реттеу объектісі; б – буынның л.а.с.; в – өтпелі сипаттама

Тұйықталған АРЖ беріліс функциясы мына түрде болады:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{\frac{k}{p}}{1+\frac{k}{p}}=\frac{1}{Tp+1}, \qquad (3.2.1)$$

мұндағы $T=\frac{1}{k}$ – уақыт тұрақтысы.

(3.2.1) формуласынан қарастырылып отырған тұйықталған АРЖ-ның бірінші реттік апериодтық буынға пара-пар екенін көреміз. Сондықтан оның

өтпелі процесі 3.13,*в*-суретіндегі қисықпен сипатталады. Ажыратылған жүйенің логарифмдік амплитудалық жиіліктік сипаттамасы 3.13,*б*-суретте көрсетілген, ол еңістігі – 20 дБ/декада болатын координаттары (20lg*k*,1) нүкте арқылы өтеді.

Кесу жиілігі $\omega_к = \frac{1}{T}$ және оның тұйықталған АРЖ өтпелі процесі уақытымен байланысы мына қатынас арқылы анықталады:

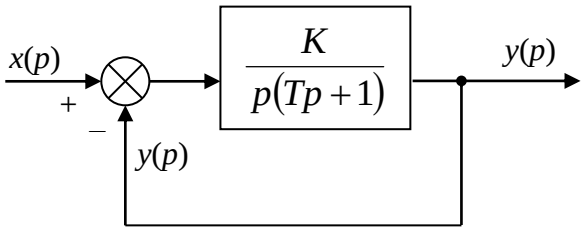
$$t_n \approx 3T = \frac{3}{\omega_к}. \qquad (3.2.2)$$

Бұл жағдайда кесу жиілігінің күшейту коэффициентке тең болатынын атап өткен жөн, яғни $\omega_к = K$.

Ажыратылған күйдегі беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K}{p(Tp+1)} = \frac{A(p)}{B(p)} \qquad (3.2.3)$$

болатын тұйықталған АРЖ-ны қарастырайық (3.14-сурет).



3.14-сурет. АРЖ құрылымдық схемасы

Ажыратылған жүйенің (3.2.3) беріліс функциясын объекті мен реттеуіштің, яғни апериодтық және интегралдауыш буындардың тізбектеле қосылысы ретінде қарастыруға болады. Мұндағы $K = K_{об} \cdot K_р$ – объекті мен реттеуіштің күшейту коэффициенттерінің көбейтіндісімен анықталатын АРЖ-ның күшейту коэффициенті.

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясын анықтайық:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{A(p)}{A(p)+B(p)} = \frac{K}{p(Tp+1)+K} = \frac{\frac{K}{T}}{p^2 + \frac{1}{T}p + \frac{K}{T}}. \qquad (3.2.4)$$

Яғни, динамикалық тұрғыда қарастырғанда, бұл тұйықталған АРЖ беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2} \qquad (3.2.5)$$

болатын тербелмелі буынға пара-пар.

(3.2.4) және (3.2.5) өрнектерінің бөлімдерін бір-бірімен теңеп, одан мынаны аламыз:

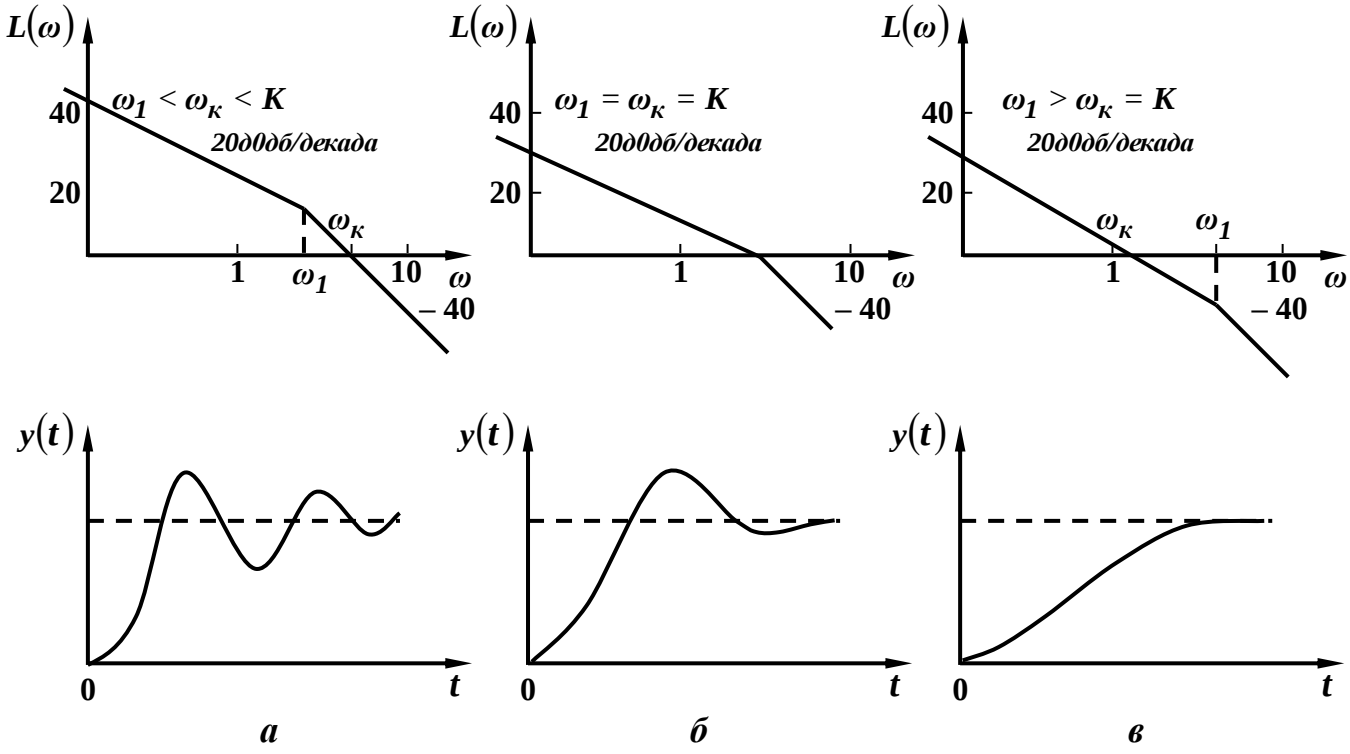
$$\omega_0^2=\frac{K}{T} \text{ және } 2\xi\omega_0=\frac{1}{T},$$

немесе

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{T}} \text{ және } \xi=\frac{0{,}5}{\sqrt{KT}}, \qquad (3.2.6)$$

мұндағы ω_0 – өзіндік тербеліс жиілігі;

ξ – салыстырмалы демпфирлер коэффициенті (өшу коэффициенті).



3.15-сурет. Әр түрлі жағдайлардағы АРЖ сипаттамалары:
а – $\omega_1 < \omega_к$; б – $\omega_1 = \omega_к$; в – $\omega_1 > \omega_к$.

3.15-суретінде қарастырылып отырған ажыратылған АРЖ-ның үш жағдайдағы логарифмдік амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары және тұйықталған жүйенің оларға сәйкес келетін өтпелі процестері келтірілген.

Б і р і н ш і ж а ғ д а й. Егер $\omega_1 = \frac{1}{T} < K$ болса (3.15,*а*-сурет), онда $\omega_1 < \omega_к < K$ теңсіздігі орын алады.

Сонымен,

$$KT > 1. \qquad (3.2.7)$$

(3.2.7) өрнекті ескере отыра, (3.2.6) өрнектен $\omega_1 < \omega_к < K$ шарты үшін тұйықталған жүйеде ξ салыстырмалы демпфирлеу коэффициентінің әр уақытта 0,5-тен кем болатынын көруге болады. Бұл деген, кірісіне бірлік сатылық сигнал берген кезде тұйықталған жүйеде өтетін өтпелі процестің тербелмелі түрде болатындығын білдіреді (3.15,*а*-сурет).

Е к і н ш і ж а ғ д а й. Егер $\omega_1 = \omega_к = K$ болса, онда $\xi = 0{,}5$ болады да, тұйықталған АРЖ өтпелі процесінің сипаты бірінші жағдайға қарағанда әлсіз тербелмелі түрінде болады (3.15,*б*-сурет).

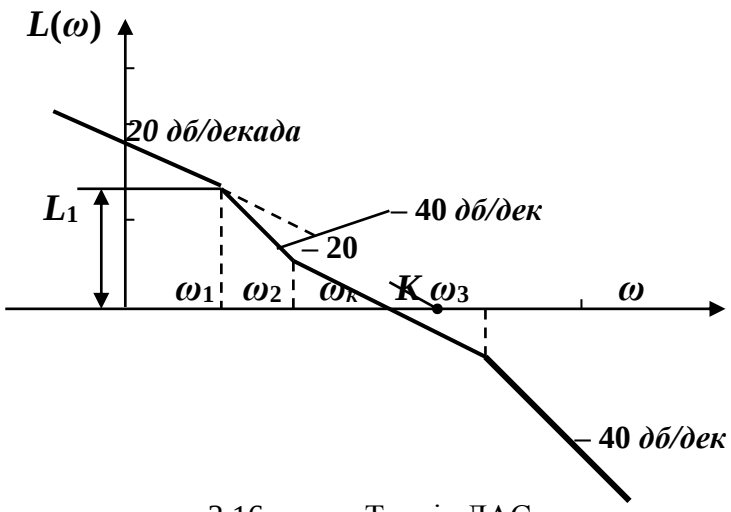
Ү ш і н ш і ж а ғ д а й. Егер $\omega_1 > \omega_к = K$ болса, онда $\xi > 0{,}5$. Неғұрлым $\frac{\omega_1}{\omega_к}$ қатынасы көп болған сайын, соғұрлым ξ салыстырмалы демпфирлеу коэффициентінің шамасы да үлкен болады. Тұйықталған жүйенің өтпелі процесі асыра реттеуі жоқ монотонды болып келеді (3.15,*в*-сурет).

Осы үш жағдайды талдай отыра мынадай қорытынды шығаруға болады. Тұйықталған жүйедегі өтпелі процесс тербелмелі болмауы үшін, $\omega_к$ кесу жиілігі логарифмдік амплитудалық сипаттаманың $-20\,{}^{дБ}\!/_{дек}$ еңістігі бар учаскесіне сәйкес келуі қажет, яғни реттеу жүйесінің логарифмдік амплитудалық сипаттамасы ортажиілікті ауқымда $-20\,{}^{дБ}\!/_{дек}$ еңістікпен өтуі қажет. Өтпелі процестің берілген сапа көрсеткіштерін алу үшін ортажиіліктік ауқымның ені бір декададан кем болмауы қажет. Логарифмдік сипаттамасының бұл учаскесі неғұрлым тар болған сайын, АРЖ өтпелі процесіне логарифмдік сипаттаманың төмен және жоғары жиілікті бөліктері әсерін тигізеді, сондықтан ол көп-көрім тербелмелі болып келеді (тербеліс максимумдары көп болады).

Өтпелі процесс негізінен ортажиіліктік ауқыммен анықталады. Жоғарыжиіліктік ауқым өтпелі процестің бас жағына, ал төменжиілікті ауқым соңғы жағына әсерін тигізеді.

Сонымен, ортажиілікті ауқымдағы ЛАС еңістігі АРЖ орнықтылығының қорын, ортажиіліктік ауқымның ені – асыра реттеу шамасын, ал кесу жиілігінің абсолют мәні – тұйықталған АРЖ өтпелі процесс уақытын анықтайды.

Типтік ЛАС көмегімен тұйықталған жүйе параметрлері мен ондағы өтпелі процесс сапасы арасындағы байланыс анықталады. Ортажиілікті ауқымда $-20\,{}^{дБ}\!/_{дек}$ еңістігі бар типтік ЛАС бір түрі 3.16-суретте көрсетілген.

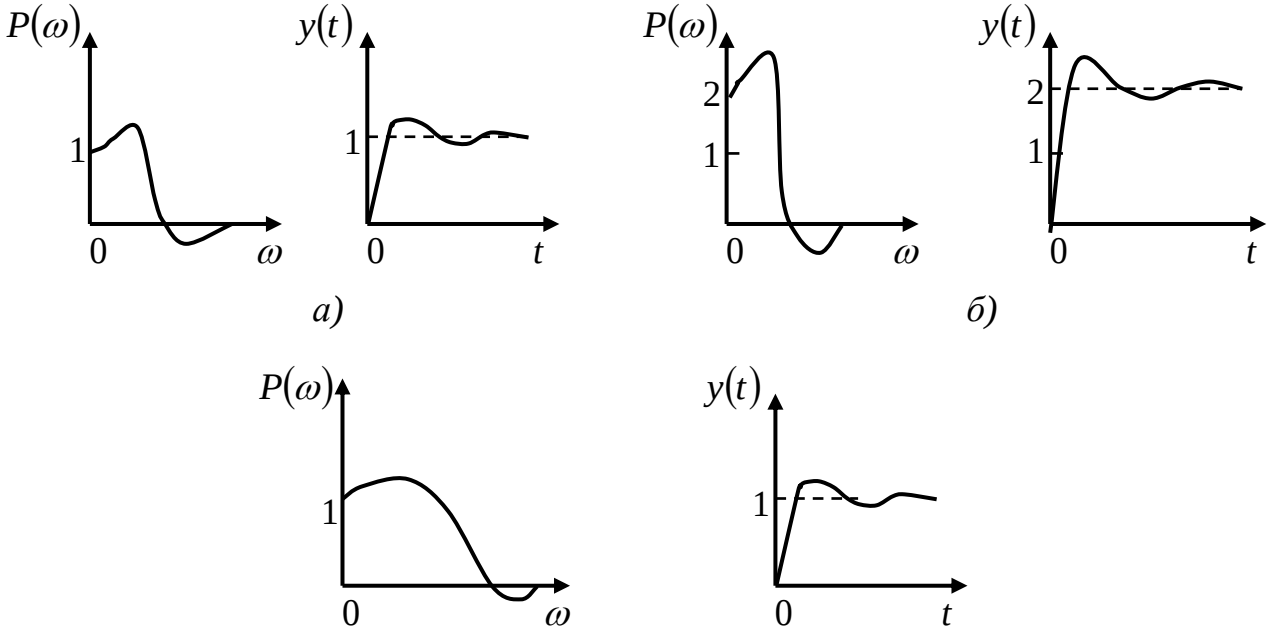


3.16-сурет. Типтік ЛАС

Типтік ЛАС-ны бірінші $\omega = \omega_1$ жанасу (түйісу) жиілігіндегі $L_1(Дб)$ күшейту коэффициентін, $\omega_к$ кесу жиілігін және екі $\frac{\omega_1}{\omega_к}$, $\frac{\omega_3}{\omega_к}$ салыстырмалы жанасу (түйісу) жиіліктерін таңдау арқылы да толық анықтауға болады.

Жүйенің реттеу сапасы көрсеткіштерін тұйықталған АРЖ нақты жиіліктік сипаттамасы (НЖС) арқылы да анықтауға болады. Бұл кезде мынадай екі әдіс пайдаланылады: тұйықталған АРЖ-ның $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасының түрі бойынша және В.В.Солодовников номограммасы бойынша сапаны бағалау.

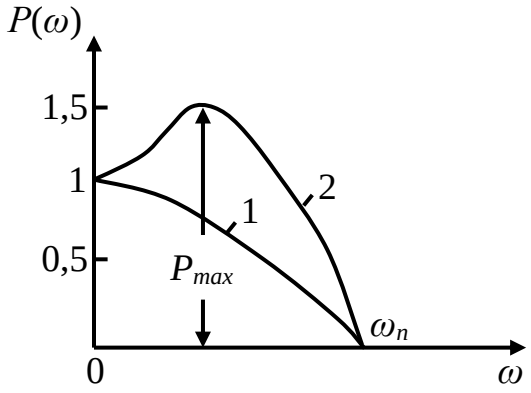
Бірінші әдісті қарастырайық. Бұл әдісте әрбір нақты жиіліктік сипаттамаға тек оған ғана тән өтпелі процесс сәйкес келеді деген қағида қолданылады. Оған мысал ретінде 3.17-суреті келтірілген.



3.17-сурет. Нақты жиіліктік (ω) сипаттамалар және оларға сәйкес $y(t)$ өтпелі процестер

3.18-суретте нақты жиіліктік сипаттамалардың екі түрі көрсетілген. Егер тұйықталған АРЖ НЖС-ы оңтаңбалы және өспейтін (1-қисық) болса, онда максимал асыра реттеу былай есептеледі:

$$\sigma_{\max} = \frac{y(t) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% = 18\%.$$



3.18-сурет. НЖС түрлері

Егер $P(\omega)$ 2-қисық түрінде болса, онда асыра реттеу мына формуламен анықталады:

$$\sigma_{\max} < 1{,}18\frac{P_{\max} - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%.$$

Бірлік кері байланысты АРЖ-ға орныққан режим кезінде $x(t) = x_0 = const$ кірістік және $f(t) = f_0 = const$ сыртқы қобалжыту әсері беріліп тұрған болса, онда жүйеде мына формуламен анықталатын қателік пайда болады:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_x + \varepsilon_f = \frac{1}{1 + W(o)} \cdot x_0 + \frac{W_f(o)}{1 + W(o)} f_o, \qquad (3.2.8)$$

мұндағы $x_0 = 1(t)$;

W_o – орныққан режимдегі ажыратылған АРЖ беріліс функциясы, яғни, $W(p)\big|_{p=0}$. Статикалық АРЖ-да бұл функцияның мәні $W_{(p)}\big|_{p=0} = K$ (мұндағы K – ажыратылған жүйенің күшейту коэффициенті). Бұл жағдайда (3.2.8) өрнегіндегі $f_o = 0$ деп алсақ, онда қателіктің реттеуші әсерден туған құраушысы статикалық қателік деп аталады және мынаған тең:

$$\varepsilon_{\text{ст}} = \frac{x_0}{1+W(0)} = \frac{1}{1+K}1(t) \qquad (3.2.9)$$

Ал қателіктің қобалжыту әсерінен туған құраушысы

$$\varepsilon_f = \frac{K_f f_0}{1+K}$$

болады, мұндағы $K_f = W_f(0)$ – жүйенің шығысы мен қобалжыту әсер берілген нүкте арасындағы күшейту коэффициенті, яғни ол қобалжыту әсері бойынша ажыратылған жүйенің күшейту коэффициенті. Бұл жағдайда (3.2.8) өрнегінде $x_0 = 0$.

Жалпы тұрақты реттеуші (басқарушы) және қобалжыту әсерлері бірдей берілген кездегі жүйенің жұмыстық режимі тұрақтандырушы автоматты жүйелерге тән.

Программалы реттеу жүйелерінде реттеуші әсер тұрақты жылдамдықпен өзгеріп отыруы мүмкін, яғни

$$x(t) = \frac{dx_0(t)}{dt} \cdot t$$

мұндағы $\frac{dx_0(t)}{dt} = A = const.$

Олай болса

$$x(t) = A \cdot t.$$

Астатикалық жүйелерде И-реттеуіштер қолданылатындықтан, (3.2.9) статикалық қателік нөлге тең.

Бірінші ретті астатизмі $(v=1)$ бар жүйелерде $x(t) = A \cdot t$ түріндегі реттеуші әсерден туатын орнықты қателікті былай анықтауға болады:

$$\varepsilon(t) = \frac{\frac{dx_0(t)}{dt}}{K} = \frac{A}{K},$$

мұндағы K – статикалық жүйенің күшейту коэффициенті.

Өтпелі режим кезіндегі, яғни динамикалық қателік, өтпелі процесс қисығының өзінен анықталады.

Асимптоталық ЛАЖС тұрғызу ережелері. 1) Белгілі $W(p)=\frac{K}{p^{\gamma}}W(p)$ өрнек көмегімен $20\lg K$ және жанаспа $\omega_i=1/T_i$ жиіліктерін есептеп алып, жиіліктерді өсуіне сәйкес нөмірлеу қажет: $\omega_1<\omega_2<\ldots$.

2) Абсцисса осіне жанаспа жиіліктер мәндерін, ал координат жазықтығына – (1, $20\lg K$) нүктесін белгілеу қажет. Координат жазықтығындағы белгіленген нүкте арқылы $\gamma 20\,дБ/дек$ еңістігімен бірінші асимптотаға сәйкес түзу тұрғызылады. Бұл асимптота ω_1 жанаспа жиілікке дейін жүргізіледі.

3) Екінші жанаспа ω_2 жиілігіне дейін, бірінші асимптотаның соңынан екінші асимптота жүргізіледі. Ол не $\pm 20\,дБ/дек$, не $\pm 40\,дБ/дек$ еңістіктерімен тұрғызылады. Еңістіктер мәні бірінші немесе екінші ретті болатын элементар көбейткішпен анықталады. Егер көбейткіш алымда тұрса – оң таңба, ал бөлімде тұрса – теріс таңба алынады.

4) Басқа асимптоталарды екінші асимптотаны тұрғызу ережесімен жүргізеді.

Соңғы асимптота түзу сызық түрінде, соңғы жанаспа жиілікке сәйкес келетін асимптотаның соңынан басталады да, шексіздікке кетеді.

3.12-есеп. Беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{10p+10}{p^{\gamma}(p+0{,}1)(0{,}1p^2+p+10)},\quad \gamma=0$$

болатын буынның асимптоталық ЛАЖС-ын тұрғызу қажет.

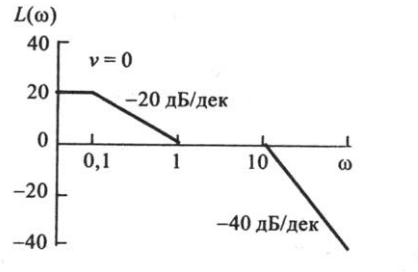
Ш е ш і м і: Беріліс функцияны мына түрге келтіреміз:

$$W(p)=\frac{10(p+1)}{p^{\gamma}(10p+1)(0{,}01p^2+0{,}1p+1)}.$$

1) $\gamma=0$. $20\lg K$ мен жанаспа жиіліктерді анықтаймыз:

$$20\lg K=20\lg 10=20;\quad \omega_1=\frac{1}{10}=0{,}1;\quad \omega_2=1;\quad \omega_3=\frac{1}{0{,}1}=10.$$

Координаты (1, 20) нүктесінен бірінші $\omega_1=0{,}1$ жиілігіне дейін $0\,дБ/дек$ еңістігімен (абсцисса осіне параллель) бірінші асимптотаны жүргіземіз (3.19-сурет):



3.19-сурет. Асимптоталық ЛАЖС

Бірінші жанаспа ω_1 жиілігі, бөлімде тұрған $(10p+1)$ бірінші ретті көбейткіштен болғандықтан, екінші асимптота $-20\,дБ/дек$ еңістігімен созылады. Сондықтан екінші асимптотаны бірінші асимптотаның аяқ жағынан $\omega_2=1$ жанаспа жиілігіне дейін $-20\,дБ/дек$ еңістігімен жүргіземіз.

Екінші жанаспа ω_2 жиілігі, алымда тұрған $(p+1)$ элементар көбейткіштен болғандықтан, үшінші асимптотаның еңістігі, екіншісінікінен $20\,дБ/дек$-ға ерекшеленеді де, $0\,дБ/дек$-ны құрайды. Үшінші асимптотаны екіншінің аяқ жағынан $\omega_3=10$ жанаспа жиілігіне дейін жүргіземіз.

Жанаспа ω_3 жиілігі, бөлімде тұрған $(0{,}01p^2+0{,}1p+1)$ элементар көбейткіштен болғандықтан, төртінші асимптотаның еңістігі, үшіншісінікіне қарағанда $-40\,дБ/дек$-ға ерекшеленеді. Соңғы асимптотаны үшіншінің аяқ жағынан бастап шексіздікке дейін тұрғызамыз.

3.13-есеп. Беріліс функциясы

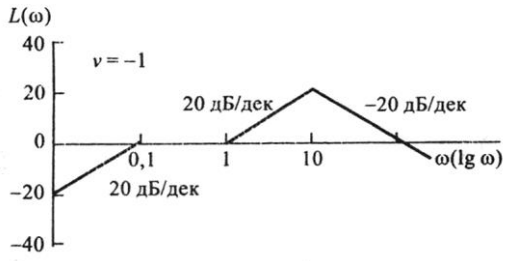
$$W(p)=\frac{10p+10}{p^{\gamma}(p+0{,}1)(0{,}1p^2+p+10)},\quad \gamma=-1,$$

болатын буынның асимптоталық ЛАЖС-ын тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і: $\gamma=-1$. $20\lg K$ және жанаспа жиіліктердің мәндері

$$20\lg K=20\lg 10=20;\quad \omega_1=\frac{1}{10}=0{,}1;\quad \omega_2=1;\quad \omega_3=\frac{1}{0{,}1}=10.$$

Бірінші асимптотаны координаты (1, 20) нүктесі арқылы $\gamma 20\,дБ/дек=20\,дБ/дек$ еңістігімен бірінші жанаспа жиілікке дейін жүргіземіз (3.20-сурет). Барлық қалған асимптоталар 3.12-есебінде келтірілген жолдармен тұрғызылады.



3.20-сурет. ЛАЖС

3.14-есеп. Беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{100p+100}{\left(p^2+0{,}1p\right)\left(0{,}1p^2+p+10\right)}$$

болатын буынның асимптоталық ЛАЖС-ын тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і: Беріліс функцияны түрлендіреміз:

$$W(p)=\frac{100(p+1)}{p(10p+1)\left(0{,}01p^2+0{,}1p+1\right)}.$$

Логарифмдік амплитудалық жиіліктік функция

$$L(\omega)=40+20\lg\sqrt{\omega^2+1}-20\lg\omega-20\lg\sqrt{(10\omega)^2+1}-$$
$$-20\lg\sqrt{\left(1-0{,}01\omega^2\right)^2+(0{,}1\omega)^2}.$$

Жанаспалы жиіліктер мәндерін анықтаймыз:

$$\omega_1=\frac{1}{10}=0{,}1;\quad \omega_2=1;\quad \omega_3=\frac{1}{0{,}1}=10.$$

ЛАЖС тұрғызғанда жанаспалы жиіліктен кіші жиілікте, түбір астында тек бірді ғана қалдырып, басқа мүшелерді ескермейді, ал жанаспалы жиіліктен үлкен жиіліктерде тек ω дәрежесі ең үлкен мүшені ғана қалдырады да, басқа мүшелерді ескермейді. Сондықтан қарастырылып отырған мысалда $\omega<\omega_1$ болғанда

$$L(\omega)\approx 40-20\lg\omega$$

аламыз. Бұл – координаталары $\omega=1$ және $L=40$ нүктесі арқылы $-20\,дБ/дек$ еңістігімен өтетін түзудің теңдеуі. Түзудің еңістігі $-20\,дБ/дек$ деген сөз, жиілік 10 есе өскен кезде $L(\omega)$ $20\,дБ$-ге азаяды дегенді білдіреді (3.21,*а*-

сурет). Бірінші асимптота бірінші жанаспалы жиілікте аяқталады (3.21,*б*-сурет).

$$\omega_1 \le \omega < \omega_2 \text{ болғанда,}$$

$$L(\omega) \approx 40 - 20\lg\omega - 20\lg(10\omega) = 20 - 40\lg\omega.$$

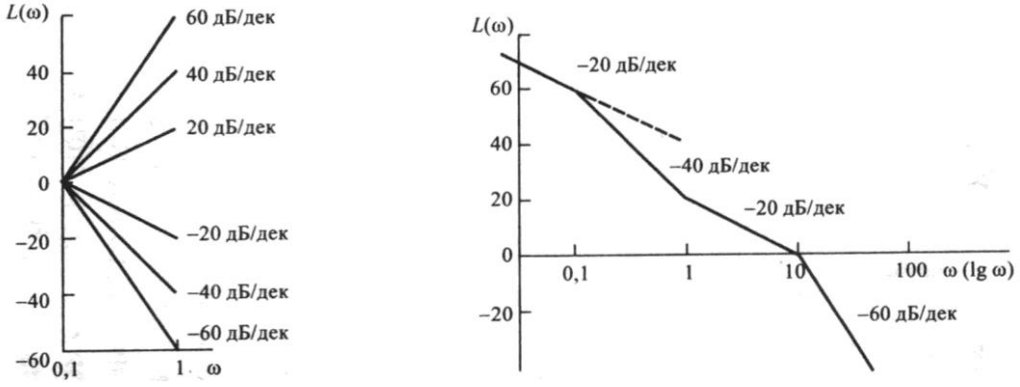
Бұл – екінші асимптотаның теңдеуі. Оның еңістігі бірінші асимптотаға сәйкес тағы да $-20\,дБ/дек$-ға өзгереді. Екінші асимптотаны біріншінің аяққы ұшынан бастап екінші жанаспалы жиілікке дейін $-40\,дБ/дек$ еңістікпен жүргізеді.

$$\omega_2 \le \omega < \omega_3 \text{ болғанда,}$$
$$L(\omega) \approx 20 - 40\lg\omega + 20\lg\omega = 20 - 20\lg\omega \text{ аламыз.}$$

Бұл – үшінші асимптотаның теңдеуі. Оның еңістігі екінші асимптотаға сәйкес тағы да $-20\,дБ/дек$-ға өзгереді. Ол екінші асимптотаның аяққы ұшынан үшінші жанаспалы жиілікке дейін $-20\,дБ/дек$ еңістікпен тұрғызылады.

$$\omega \ge \omega_3 \text{ болғанда,}$$
$$L(\omega) \approx 20 - 20\lg\omega - 20\lg(0{,}1\omega)^2 = 60 - 60\lg\omega \text{ аламыз.}$$

Бұл – соңғы асимптотаның теңдеуі. Оның еңістігі үшінші асимптотаға сәйкес $-40\,дБ/дек$-ға өзгереді де, $-60\,дБ/дек$ еңістігімен тұрғызылады.



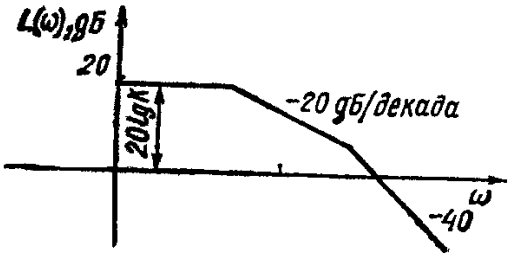
а) *б)*

3.21-сурет. Логарифмдік сипаттамалар

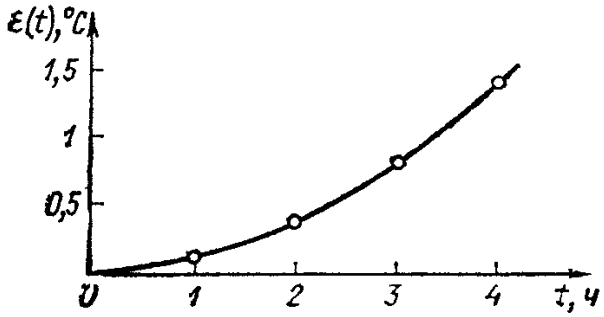
3.15-есеп. 3.22-суретте бейнеленген АРЖ-ның астатизмдік коэффициентін анықтаңыз. Кірістік сигнал $x(t) = t^2$ заңдылығымен өзгеріп

тұрғандағы 4 сағат аралығындағы $\varepsilon(t)$ қателігінің тәуелділігін тұрғызыңыз (дәлдік сипаттамасы). Уақыт сағатпен көрсетілген.

Ш е ш і м і. Қарастырылып отырған АРЖ астатизмдік ретін анықтаймыз. 3.22-суреттен логарифмдік амплитудалық сипаттаманың төменгі жиілік ауқымындағы еңістігі 0 дБ/декада, яғни бұл жүйедегі астатизмдік рет ν нөлге тең де, жүйе статикалық болып саналады.



3.22-сурет. Л.А.Ж.С.



3.23-сурет. АРЖ-дегі қателіктің өзгеру қисығы

3.22-суреттен ажыратылған жүйенің күшейту коэффициентін анықтауға болады $20\lg K = 20$ дБ, осыдан $\lg K = 1$, яғни $K = 10$.

Статикалық АРЖ жұмысының дәлдігіне, ажыратылған жүйенің K күшейту коэффициенті мен кірістік сигналдың түрі негізгі әсерін тигізеді, яғни (3.2.9) формуласына сәйкес

$$\varepsilon(t) = \frac{x(t)}{1+k}$$

немесе, біздің есеп үшін

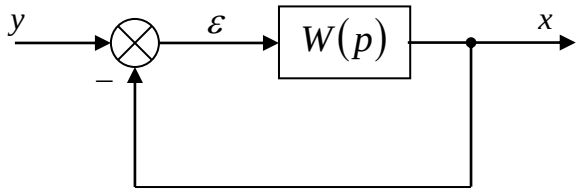
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1+10} t^2. \qquad (3.2.10)$$

Енді табылған (3.2.10) теңдеуге t уақытының мәнін 0-ден 4 сағатқа дейін қою арқылы $\varepsilon(t)$ өзгеру заңдылығын табамыз (3.23-сурет). Бұл суреттен статикалық АРЖ қателігінің квадратты заңдылықпен өзгеріп, уақыт барысында өсетінін көруге болады.

3.16-есеп. Ажыратылған қадағалаушы жүйенің (3.24-сурет) беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Қателіктің алғашқы үш коэффициентін және жылдамдық бойынша сапалылығын анықтау қажет.



3.24-сурет. Қадағалаушы жүйе

Ш е ш і м і. Қателік бойынша беріліс функцияны анықтаймыз:

$$\Phi_{\varepsilon}(p)=\frac{1}{1+W(p)}=\frac{p(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)+K}.$$

Бұл өрнекті алымын бөліміне бөлу арқылы қатарға түземіз:

$$\begin{array}{l|l} p+(T_1+T_2)p^2+T_1T_2p^3 & K+p+(T_1+T_2)p^2+T_1T_2p^3 \\ \hline p+\frac{1}{K}p^2+\frac{T_1+T_2}{K}p^3+\frac{T_1T_2}{K}p^4 & \frac{1}{K}p+\frac{1}{K}\ T_1+T_2\ \frac{1}{K}\ p^2+\ldots \\ \hline T_1+T_2\ \frac{1}{K}\ p^2+\ T_1T_2\ \frac{T_1T_2}{K}\ p^3\ \frac{T_1T_2}{K}p^4 & \end{array}$$

Осыдан қателік коэффициенттерін аламыз:

$$a_0=0,\quad a_1=\frac{1}{K}[c],\quad \frac{a_2}{2}=\frac{1}{K}\ T_1+T_2\ \frac{1}{K}\ [c^2]$$

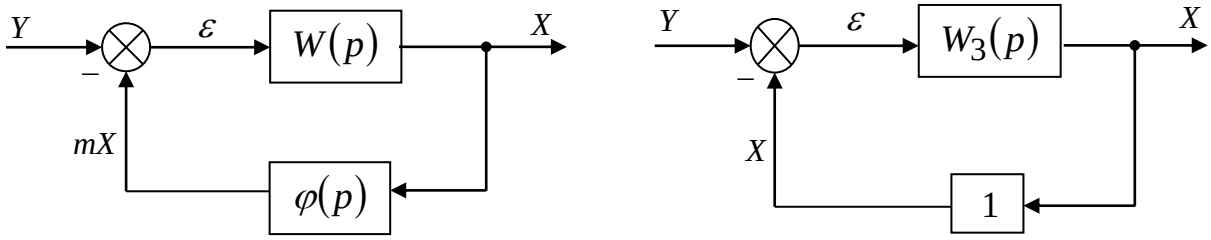
Жылдамдығы бойынша сапалылығы:

$$K_{\Omega}=\frac{1}{a_1}=K[c\ ^1]$$

3.17-есеп. Статикалық реттеу жүйесінде (3.25,*а*-сурет) ажыратылған жүйенің беріліс функциясы мына түрде берілген:

$$W(p)=\frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Жүйе бірінші ретті астатизмге ие болатын, бірлік емес кері байланыстың $\varphi(p)=m$ берілістік коэффициентін және бірлік кері байланысы бар ажыратылған пара-пар жүйенің беріліс функциясын анықтау қажет (3.25,*б*-сурет).



а) *б)*

3.25-сурет. Статикалық АРЖ

Ш е ш і м і. Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{K}{T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1+mK}. \qquad (3.2.11)$$

Статикалық қателіктің жоқ болу шарты:

$$K=1+mK,$$

осыдан

$$m=\frac{K-1}{K}=1-\frac{1}{K}.$$

Онда тұйықталған жүйенің беріліс функциясы мына түрге келеді:

$$\Phi(p)=\frac{K}{T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+K}, \qquad (3.2.12)$$

ал бірлік кері байланысты ажыратылған жүйенің пара-пар беріліс функциясы

$$W_{nn}(p)=\frac{\Phi(p)}{1\quad\Phi(p)}=\frac{K}{(T_1+T_2)p+T_1T_2p^2}=\frac{K_\Omega}{p(1+T_{nn}p)},$$

мұндағы $K_\Omega=\dfrac{K}{T_1+T_2}$ – жылдамдық бойынша сапалылығы,

$T_{nn}=\dfrac{T_1T_2}{T_1+T_2}$ – пара-пар уақыт тұрақтылығы.

3.18-есеп. Статикалық реттеу жүйесінің статикалық және жылдамдылық қателіктері жойылатын, бірлік емес $\Psi(p)$ кері байланыстың беріліс функциясын анықтау қажет. Мұндай жүйенің құрылымдық схемасы 3.25,*а*-суретте келтірілген. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Ш е ш і м і. Бірлік емес кері байланысты тұйықталған жүйенің беріліс функциясы жалпы жағдайда мына түрде жазылады:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+\Psi(p)W(p)}=\frac{b_o p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_o p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

$a_n=b_m$ болғанда жүйедегі статикалық қателік нөлге тең болады, ал оған қосымша $a_{n-1}=b_{m-1}$ шарты орындалса, жүйедегі жылдамдық қателік жойылады.

Қарастырылып отырған жүйедегі статикалық және жылдамдық қателіктерін жою үшін, кері байланыстағы тізбекке беріліс функциясы

$$\psi(p)=\frac{K_{к.б.}}{1+\tau_2p}$$

болатын фильтрді енгізу қажет.

Онда тұйықталған жүйенің беріліс функциясы мына түрге келеді:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+\psi(p)W(p)}=$$

$$=\frac{K(1+\tau_2p)}{T_1T_2\tau_2p^3+(T_1T_2+T_1\tau_2+T_2\tau_2)p^2+(T_1+T_2+\tau_2)p+1+K\kappa_{к.б.}}.$$

Ал мына шарттар орындалғанда:

$$1+K\kappa_{к.б.}=K,$$

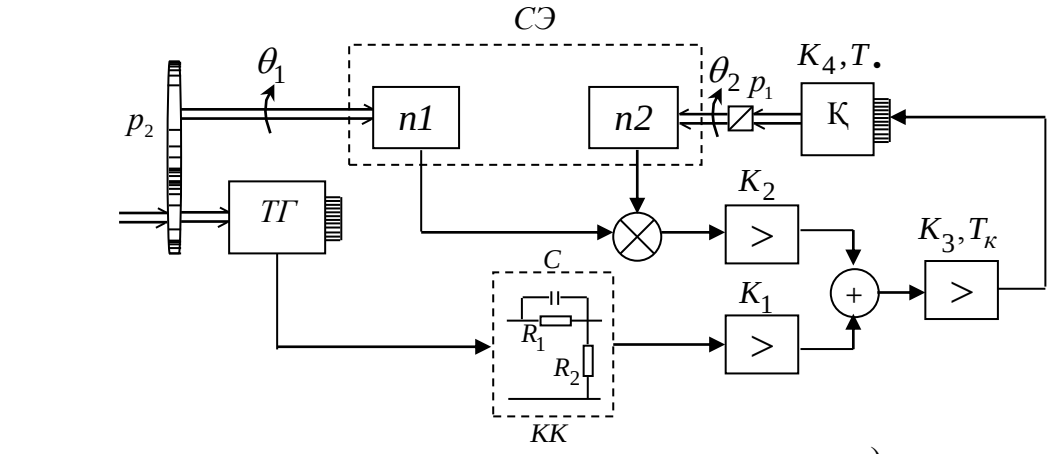
$$K_{к.б.}=\frac{K-1}{K}.$$

және $K\tau_2=T_1+T_2+\tau_2$

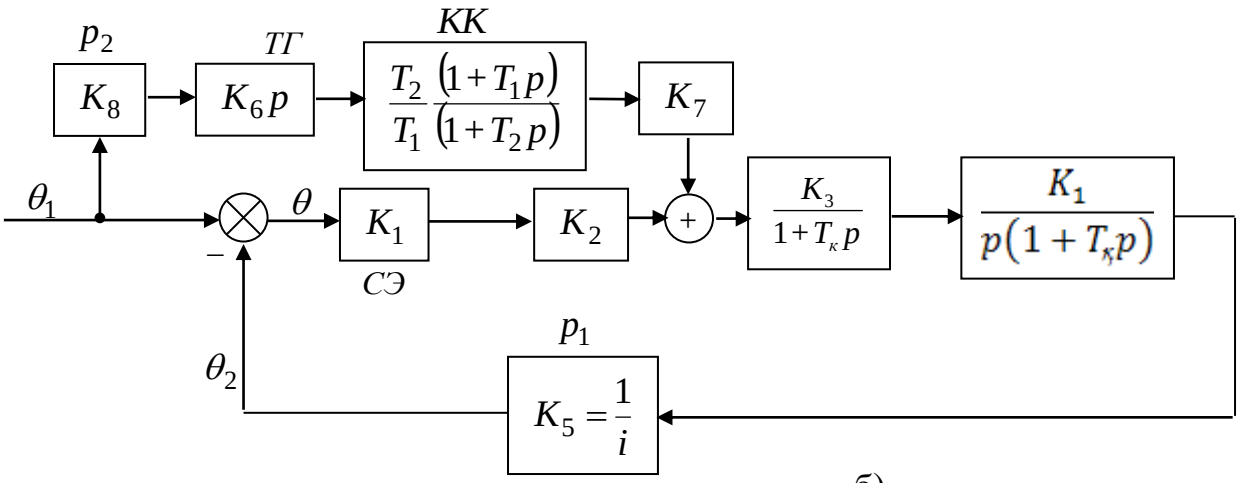
$$\tau=\frac{T_1+T_2}{K-1}$$

жүйе екінші ретті астатизмге ие болады, ал бұл жағдайда статикалық және жылдамдылық қателіктері нөлге тең болады.

3.19-есеп. 3.26-суретте көрсетілген аралас басқару жүйесі үшін үшінші ретті астатизмді алу шартын және C_3 қателік коэффициентін анықтау қажет.



а)



б)

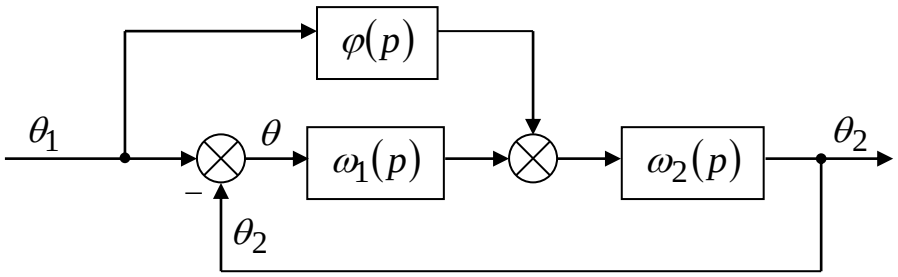
3.26-сурет. Аралас басқару жүйесі

Суретте: СЭ – қабылдаушы осьтер мен $П_1$ және $П_2$ потенциометрлерден тұратын сезімтал элемент, *Қ* – орындаушы қозғалтқыш, $Р_1$ және $Р_2$ – редукторлар, *ТГ* – тахогенератор, *КК* – корректирлеуші контур, θ_1 – қозғалысты беру осінің бұрылу бұрышы, θ_2 – қабылдаушы (орындаушы) осьтің бұрылу бұрышы, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ – айырым.

Берілген мәндер: $K_1 = 1$ В/град = 57,3 В/рад – сезімтал элементтің тіктігі, $K_2 = 25-$ негізгі тізбектегі алғашқы күшейткіштің кернеу бойынша күшейту коэффициенті, $K_3 = 4$ – соңғы күшейткіштің кернеу бойынша күшейту коэффициенті, $K_4 = 27{,}3\frac{айн.}{В\ \ мин} = 2{,}86\frac{рад}{В\ \ с}$ орындаушы қозғалтқыштың беріліс коэффициенті, $K_5 = \frac{1}{i_1} = \frac{1}{1000}$ P_1 редуктордың беріліс коэффициенті, $K_6 = 0{,}055\frac{В\ \ мин}{айн.} = 0{,}525\frac{В\ \ с}{рад}$ тахогенератордың беріліс

коэффициенті, K_7 – корректирлеу тізбегіндегі алғашқы күшейткіштің кернеу бойынша беріліс коэффициенті, $K_8 = i_2 = 500P_2$ редуктордың беріліс коэффициенті, $T_к = 0{,}005c$ – күшейткіштің уақыт тұрақтысы, $T_қ$ – $0{,}1c$ – орындаушы қозғалтқыштың уақыт тұрақтысы, $T_1 = R_1C$ және $T_2 = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C$ – пассивті дифференциалдаушы контурдың уақыт тұрақтылары. Ізделінетін параметрлер: K_7, T_1 және T_2.

Ш е ш і м і. Қарастырып отырған жүйенің түрлендірілген құрылымдық схемасы 3.27-суретте келтірілген.



3.27-сурет. Аралас басқару жүйесінің түрлендірілген құрылымдық схемасы

Негізгі тізбекте тұрған бөліктің беріліс функциясы

$$\omega_1(p) = K_1K_2,$$

$$\omega_2(p) = \frac{K_3K_4K_5}{p(1 + T_кp)(1 + T_қp)}.$$

Коррекциялау тізбегінің беріліс функциясы

$$\varphi(p) = K_6K_7K_8p\frac{T_2(1+T_1p)}{T_1(1+T_2p)}. \qquad (3.2.13)$$

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы

$$\Phi(p) = \frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)} = \frac{W(p) + \varphi(p)\omega_2(p)}{1+W(p)}, \qquad (3.2.14)$$

мұндағы

$$W(p) = \omega_1(p)\omega_2(p) = \frac{K}{p(1 + T_кp)(1 + T_қp)} \qquad (3.2.15)$$

алғашқы ажыратылған жүйенің беріліс функциясы.

Жалпы күшейту коэффициенті

$$K = \kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4\kappa_5 = \frac{57{,}3 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 2{,}86}{1000} = 16{,}4c^{-1}.$$

Қателік бойынша беріліс функция

$$\Phi_o(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_1(p)} = 1 - \Phi(p) = \frac{1 - \varphi(p)\omega_2(p)}{1 + W(p)}. \qquad (3.2.16)$$

Бұл (3.2.16) өрнекке (3.2.13) және (3.2.15) теңдеулерді қойсақ

$$\Phi_\theta(p) = \frac{b_0p^4 + b_1p^3 + b_2p^2 + b_3p}{(1 + T_2p)\left[T_KT_к p^3 + \left(T_K + T_к\right)p^2 + p + K\right]}, \qquad (3.2.17)$$

аламыз, мұндағы

$$\begin{aligned} b_0 &= T_2T_KT_к \\ b_1 &= T_KT_к + T_KT_2 + T_кT_2, \\ b_2 &= T_K + T_к + T_2 - K_3K_4K_5K_6K_7K_8T_2, \\ b_3 &= 1 - K_3K_4K_5K_6K_7K_8\frac{T_2}{T_1}. \end{aligned}$$

Екінші ретті астатизмге ие болу шарты:

$$b_3 = 0 \text{ және } b_2 = 0.$$

Осыдан мынадай екі теңдеуді аламыз:

$$K_7\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{K_3K_4K_5K_6K_8}, \qquad (3.2.18)$$

$$T_2(K_3K_4K_5K_6K_7K_8 - 1) = T_K + T_к. \qquad (3.2.19)$$

(3.2.18) және (3.2.19) екі теңдеулер құрамында K_7, T_1, T_2 үш белгісіз шама бар. Сондықтан есепті шешу үшін үшінші теңдеу қажет. Оны қателіктің c_0, c_1, c_2 коэффициенттерінен кейінгілеріне қойылатын талаптар негізінде алуға болады. Ол коэффициенттер нөлге тең, себебі жүйенің екінші ретті астатизмі бар. Осыған байланысты есептеуді келесі мағлұматтар бойынша жүргізген жөн.

Жалпы пассивті дифференциалдаушы контур үшін уақыт тұрақтыларының қатынасы $T_2/T_1 \approx 10$-ға тең. (3.2.18) өрнекте $\frac{T_1}{T_2} = 10$ деп алып корректирлеу тізбегіндегі күшейткіштің күшейту коэффициентінің қажетті мәнін аламыз:

$$K_7 = \frac{T_1/T_2}{K_3K_4K_5K_6K_8} = \frac{10 \cdot 1000}{4 \cdot 2{,}86 \cdot 0{,}525 \cdot 500} = 3{,}34.$$

(3.2.19) өрнектен уақыт тұрақтысының қажетті мәнін табамыз:

$$T_2 = \frac{T_K + T_к}{K_3K_4K_5K_6K_7K_8 - 1} = \frac{0{,}005 + 0{,}1}{4 \cdot 2{,}86 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}525 \cdot 3{,}34 - 1} = \frac{0{,}105}{10 - 1} = 0{,}0117c.$$

(3.2.18) және (3.2.19) шарттар орындалған жағдайда (3.2.17) қателік бойынша беріліс функциясы мына түрге келеді:

$$\Phi_\theta(p) = \frac{b_0p^4 + b_1p^3}{(1+T_2p)\left[T_KT_кp^3 + (T_K+T_к)p^2 + p + K\right]}. \qquad (3.2.20)$$

(3.2.20) өрнектің алымын бөліміне бөлу арқылы басқарушы әсердің үшінші туындысы бойынша қателік коэффициентін табамыз:

$$\frac{C_3}{3!} = \frac{b_1}{K} = \frac{T_KT_к + T_KT_2 + T_кT_2}{K} \qquad (3.2.21)$$

Параметрлердің сандық мәндерін қойып, аламыз:

$$\frac{C_3}{6} = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}1 + 0{,}005 \cdot 0{,}0117 + 0{,}1 \cdot 0{,}0117}{16{,}4} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}c^3.$$

Сонымен, (3.2.21) теңдеу (3.2.18) және (3.2.19) теңдеулермен бірге шешілетін ізделінген үшінші жетіспейтін теңдеу.

3.20-есеп. Ажыратылған қадағалаушы жүйенің беріліс функциясы:

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Параметрлердің мәндері: $K = 20c^{-1}$, $T_1 = 0{,}02c$, $T_2 = 0{,}03c$.

Жүйе кірісіне амплитудасы $\theta_{1\max} = 10^o$, периоды $T_к = 7c$ болатын гармоникалық сигнал беріліп тұр. Қателік амплитудасын анықтау қажет.

Ш е ш і м і. 1) Есепті дәл шешу үшін қателікке сәйкес беріліс функциясын табамыз:

$$\Phi_\theta(p)=\frac{1}{1+W(p)}=\frac{p(1+T_1p)(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)+K}.$$

Түрлендіру жұмыстарын жүргізіп және параметрлердің сандық мәндерін қойып мына өрнекті аламыз:

$$\Phi_\theta(p)=\frac{6\cdot10^{-4}p^3+5\cdot10^{-2}p^2+p}{6\cdot10^{-4}p^3+5\cdot10^{-2}p^2+p+20}.$$

Қателік амплитудасы

$$\theta_{\max}=|\Phi_\theta(j\omega)|\theta_{1\max}.$$

Енді $\omega=\omega_к=\frac{2\pi}{T_к}=0{,}9c^{-1}$ болғандағы қателік бойынша жиіліктік беріліс функциясының модулін табамыз:

$$|\Phi_\theta(j\omega_к)|=\left|\frac{6\cdot10^{-4}(j\omega_к)^3+5\cdot10^{-2}(j\omega_к)^2+(j\omega_к)}{6\cdot10^{-4}(j\omega_к)^3+5\cdot10^{-2}(j\omega_к)^2+(j\omega_к)+20}\right|=$$

$$=\left|\frac{-0{,}004+j0{,}9}{20+j0{,}9}\right|=\sqrt{\frac{0{,}004^2+0{,}9^2}{20^2+0{,}9^2}}=0{,}045.$$

Әрі қарай

$$\theta_{\max}=0{,}045\cdot10=0{,}45^{\circ}=27'$$

табамыз.

2) Жуықтатылған шешім үшін $\omega=\omega_к$ болғандағы ажыратылған жүйенің жиіліктік беріліс функциясының модулін табамыз:

$$A(\omega_к)=|W(j\omega_к)|=\frac{20}{0{,}9\sqrt{1+0{,}9^2\cdot0{,}02^2}\cdot\sqrt{1+0{,}9^2\cdot0{,}03^2}}=22{,}2.$$

Қателік амплитудасы

$$\theta_{\max}=\frac{\theta_{1\max}}{A(\omega_к)}=\frac{10}{22{,}2}=0{,}45^{\circ}=27'.$$

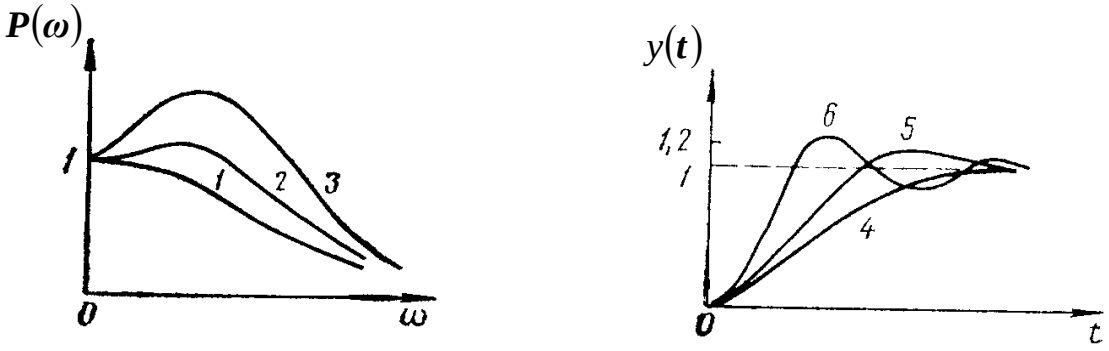
Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар мен есептер

1. Тұйықталған жүйенің $P(\omega)$ НЖС-ын (3.28-сурет) және оған сәйкес асыра реттеу

   а) $\sigma = 20\%$;

   б) $\sigma \le 1{,}18\dfrac{P_{\max}(\omega) - P(0)}{P(0)}$;

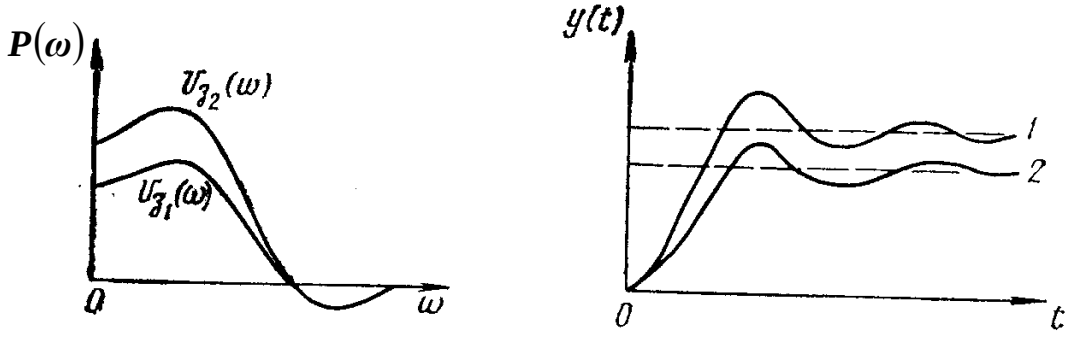
   в) $\sigma = 0\%$ (монотонды өтпелі процесс кезінде) болғандағы $y(t)$ өтпелі функцияны анықтаңыз.



а) б)

3.28-сурет. 1-сұраққа сәйкес сипаттамалар

2. Нақты жиіліктік сипаттаманың масштабы абсцисса осі бойымен екі есе өзгерсе, осы ось бойымен өтпелі процестің масштабы неше есе өзгереді?
3. Тұйықталған АРЖ $P_1(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасына қай $y(t)$ өтпелі функция (3.29-сурет) сәйкес келеді?

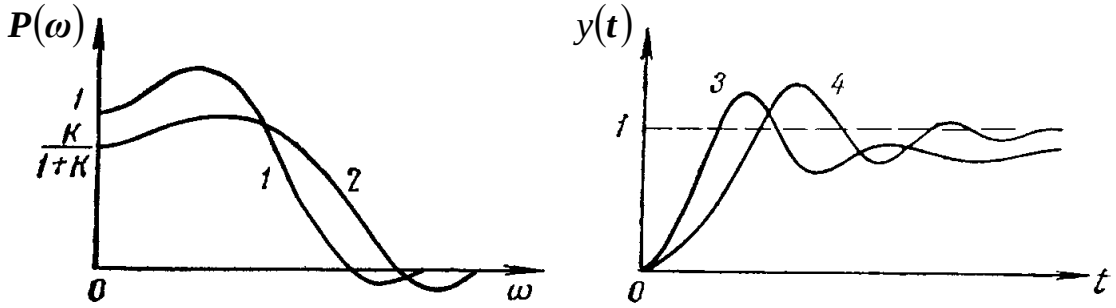


а) б)

3.29-сурет. 3-сұраққа сәйкес сипаттамалар

4. Статикалық АРЖ $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасын (3.30, а-сурет) және оған сәйкес өтпелі функциясын (3.30, б-сурет) анықтаңыз. Егер АРЖ кірісіне бірлік сатылық әсер берілген болса, орныққан режимдегі

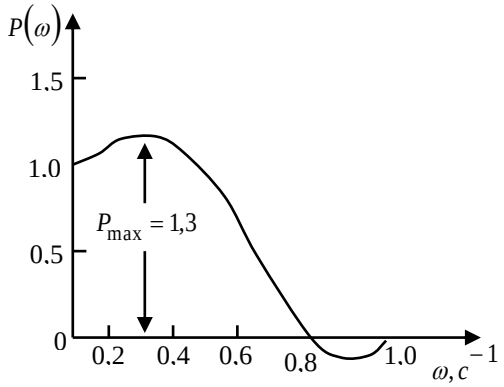
статикалық АРЖ қателігінің шамасы реттеуіштің күшейту коэффициентінің мәніне тәуелді бола ма?



а) б)

3.30-сурет. 4-сұраққа сәйкес сипаттамалар

3.21-есеп. Тұйықталған АРЖ-нің $P(\omega)$ нақты жиіліктік сипаттамасы 3.31-суретте келтірілген. Реттеу уақытын және асыра реттеу шамасын анықтау қажет.



3.31-сурет. Тұйықталған жүйенің нақты жиіліктік сипаттамасы

3.22-есеп. АРЖ беріліс функциясы

$$W_{об}(p) = \frac{K_{об}}{Tp+1} = \frac{0{,}156}{p+1}$$

объектіден және беріліс функциясы $W_p(p) = \frac{10}{p}$ И-реттеуіштен тұрады.

Тұйықталған АРЖ-нің өтпелі процесінің қисығын және реттеу сапасы көрсеткіштерін анықтаңыз.

3.23-есеп. Статикалық АРЖ беріліс функциясы

$$W_{об}(p)=\frac{K_{об}}{Tp+1}=\frac{1}{120p+1}$$

объектіден және беріліс функциясы

$$W_p(p)=K_p=3$$

П-реттеуіштен тұрады. Жүйе кірісіне $x(t)=1(t)$ бірлік сатылық сигнал берілген.

Ажыратылған және тұйықталған АРЖ өтпелі сипаттамаларын анықтап кірістік әсермен бірге бір графикте көрсетіңіз.

Статикалық қателікті табыңыз.

3.24-есеп. Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы

$$\Phi(p)=\frac{5p+200}{0{,}001p^3+0{,}502p^2+6p+200}$$

түрінде берілген. Кірістік шама

$$y(t)=5+20t+10t^2$$

заңдылығымен өзгергендегі қателіктің орныққан, яғни өтпелі процесс біткеннен кейінгі мәнін табу керек.

3.25-есеп. 3.25,*а*-суретіндегі статикалық реттеу жүйесінде ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

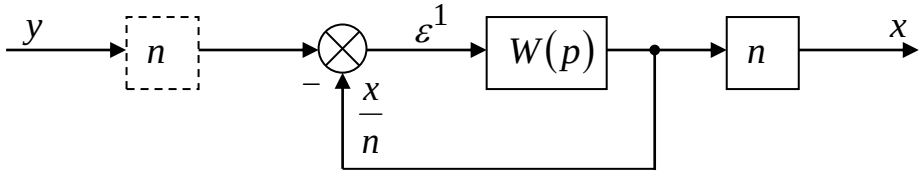
$$W(p)=\frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}.$$

Қателіктің алғашқы екі коэффициентін екі жағдайда анықтау қажет:

1) тікелей тізбектің жалпы күшейту коэффициенті тұрақты $(K=const)$;
2) тікелей тізбектің жалпы күшейту коэффициенті тұрақты емес $(K\neq const)$.

3.26-есеп. Статикалық АРЖ құрылымдық схемасы 3.25-суретте келтірілген. $T_1=1c,\ T_2=0{,}02c$ және $K=1000\pm50$ болғандағы қателіктің алғашқы екі коэффициентін анықтау қажет.

3.27-есеп. 3.32-суретте статикалық реттеу жүйесі келтірілген.



3.32-сурет. Тікелей тізбегінде
масштабтаушы құрылғы бар статикалық жүйе

Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

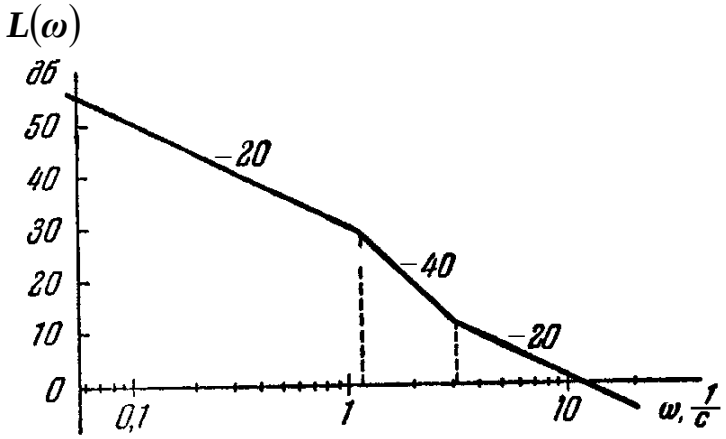
$$W(p)=\frac{K}{(1+T_0 p)(1+T_1 p)(1+T_2 p)}.$$

Басқарушы әсерге сәйкес жүйе бірінші ретті астатизмге ие бола алатын кірістік немесе шығыстық тізбегіндегі масштабтаушы құрылғының беріліс коэффициентін анықтау қажет.

3.28-есеп. Қадағалаушы жүйенің ажыратылған түрінің логарифмдік амплитудалық сипаттамасы (3.33-сурет) берілген. Кірістік әсер

$$\theta_1=\theta_{1\max}\sin\omega_к t \quad \left(\theta_{1\max}=15^o,\quad \omega_к=0{,}2c^{-1}\right)$$

заңдылығы бойынша өзгергендегі қателік амплитудасын анықтау қажет.



3.33-сурет. Қадағалаушы жүйенің ЛАС-ы

3.29-есеп. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K(1+T_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)},$$

мұндағы $K = 200c^{-1}, \quad T_1 = 0{,}5c, \quad T_2 = 0{,}1c, \quad T_3 = 0{,}01c.$

Кірісіне амплитудасы $\theta_{1\max} = 20^o$ және периоды $T_к = 1c$ болатын гармоникалық сигнал беріліп тұрған жүйенің шығысындағы фазалық қателікті анықтау қажет.

3.3. Корректирлеу құрылғыларын таңдау

АРЖ орнықтылығын және реттеу процесінің сапа көрсеткіштерін анықтау үшін алғашқы жүйенің логарифмдік жиіліктік сипаттамаларын тұрғызады. Көптеген жағдайда бұл алғашқы АРЖ өтпелі процестің қажетті сапа көрсеткіштерін қамтамасыз ете алмайды. Бұл кезде алғашқы жүйеге корректирлеу құрылғысын енгізіп, қажетті логарифмдік жиіліктік сипаттаманы тұрғызу қажет.

Корректирлеуші құрылғылар жүйеге тізбектеле немесе параллель қосылады.

Корректирлеуші құрылғы тізбектеле қосылған ажыратылған корректирленген АРЖ беріліс функциясы былай анықталады:

$$W_{кр}(p) = W(p)W_к(p),$$

мұндағы $W(p)$ – алғашқы корректирленбеген жүйенің беріліс функциясы,

$W_к(p)$– корректирлеуші құрылғының беріліс функциясы.

Бұл өрнектен

$$W_к(p) = \frac{W_{кр}(p)}{W(p)} \qquad (3.3.1)$$

аламыз.

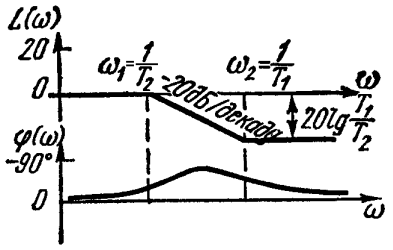
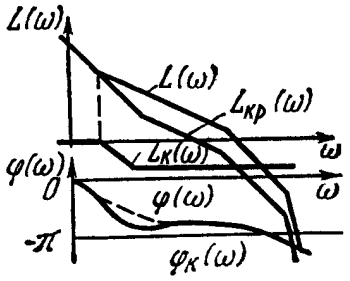
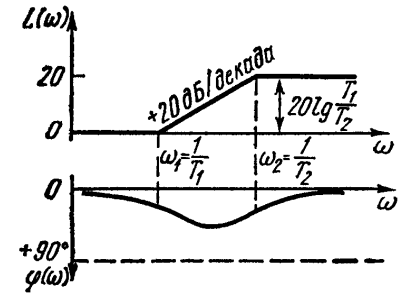
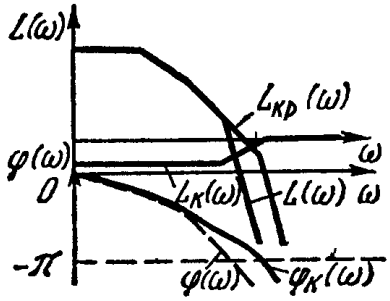
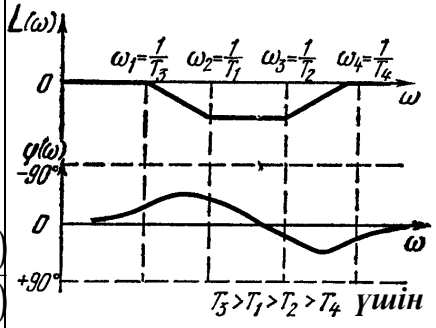
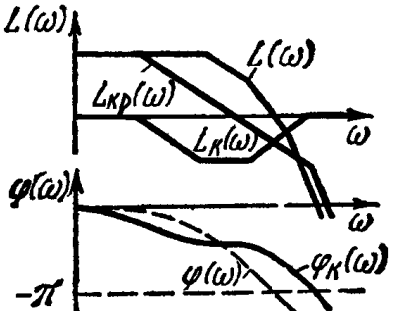
Корректирлеуші құрылғының логарифмдік амплитудалық сипаттамасы үшін (3.3.1) формуласын ескере отыра мына өрнекті жазуға болады:

$$L_к(\omega) = L_{кр}(\omega) - L(\omega). \qquad (3.3.2)$$

Алынған (3.3.2) өрнектен корректирлеуші буынның ЛАС-ын қажетті (керекті) ЛАС пен алғашқы корректирленбеген ЛАС ординаталарының айырымы ретінде табуға болатынын көруге болады.

Тізбектеле қосылған корректирлеуші құрылғыларды қарастырайық. Мұндай құрылғылар ретінде интегралдауыш, дифференциалдауыш және интегродифференциалды тізбектердің әр түрлі комбинациялары қолданылады. Корректирлеуші тізбектердің осы үш негізгі түрлерінің беріліс функциялары мен логарифмдік жиіліктік сипаттамалары 3.3.1-кестеде келтірілген.

3.3.1-кесте

Корректирлеуші тізбектің беріліс функциясы	Логарифмдік жиіліктік сипаттамалары	Жүйені коррекциялау
$\frac{T_1}{T_2}<1, \quad T_2>T_1$ болғанда интегралдауыш $W(p)=\frac{T_1 p+1}{T_2 p+1}$		
$\frac{T_1}{T_2}>1, \quad T_1>T_2$ болғанда дифференциалдауыш $W(p)=\frac{T_1 p+1}{T_2 p+1}$		
$T_1T_2=T_3T_4,$ $T_3+T_4>T_1+T_2$ болғанда интегродифференциалды $W(p)=\frac{(1+T_1p)}{(1+T_3p)}\times\frac{(1+T_2p)}{(1+T_4p)}$		

Кестедегі жиіліктік сипаттамалардан интегралдауыш буынның орта және жоғары жиіліктерде жүйенің күшейту коэффициентін азайта отыра, оның орнықтылығын нығайтатынын байқауға болады. Бірақ та бұл жағдайда жүйенің тезәрекеттігі бәсеңдейді. Мұндай тізбектер жүйенің фазасы бойынша ығысуын тек бір тар аймақта ғана үлкейтеді. Амплитудалық және

фазалық сипаттамаларды $\alpha = \frac{T_1}{T_2}$ (T_1 және T_2 – корректирлеуші құрылғының уақыт тұрақтылары) параметрін өзгерте отыра алуға болады. T_2 параметрін корректирлеуші тізбектің фазалық-жиіліктік сипаттамасы жалпы фазалық сипаттаманы елеулі жиіліктер ауқымында нашарлатпайтындай етіп таңдау қажет.

Дифференциалдауыш тізбекпен коррекциялағанда кесу жиілігі аймағында фазалық ығысу азаяды, ал коррекцияланған жүйенің кесу жиілігі алғашқыныкіне қарағанда жиіліктік ось бойында оңға қарай жатқандықтан, жүйенің тезәрекеттігі жоғарылайды. Бұл тізбек фазалық ығысуды максимал $+45^{o}$-қа дейін жеткізеді, сондықтан оның орнықтырғыш мүмкіндігі шектеулі.

Интегродифференциалды тізбекті қолдану жүйенің берілген сапасын алуды қамтамасыз ете алады. Себебі, оның қасиеттері жүйенің өтпелі процесі сапасына негізінен ортажиіліктік аймақта әсерін тигізетіндіктен, алғашқы ЛАС-ты осы жиілік ауқымында демпфирлеу қажет.

Іс жүзінде қолданылатын корректирлеуші құрылғылардың схемалары, параметрлері және логарифмдік амплитудалық сипаттамалары -тіркемеде келтірілген.

3.30-есеп. Алғашқы жүйенің беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

мұндағы K – күшейту коэффициенті, T_1 = 0,1 сағ.; T_2 = 0,01 сағ. – реттеу объектісінің уақыт тұрақтылары.

Реттеу объектісі бірінші ретті екі апериодтық буыннан тұрады, ал интегралдауыш элемент жүйеге астатикалық қасиеттерді беру мақсатында қосылған.

Интегродифференциалдық тізбек көмегімен алғашқы жүйені корректирлеу қажет. Корректирленген АРЖ-ға қойылатын талаптар мынау: 1) Жүйенің ең үлкен күшейту коэффициентін алу арқылы, реттеу дәлдігін мүмкіндігінше жоғарылатуды қамтамасыз ету; 2) асыра реттеу 20-30 %-дан аспауы тиіс.

Ш е ш і м і. Реттеу процесінің берілген дәлдігін қамтамасыз ету үшін күшейту коэффициентінің мәнін K = 120 деп алайық. Енді осы күшейту коэффициентіне сәйкес алғашқы жүйенің ЛАС-ын тұрғызамыз. Ол үшін алдымен

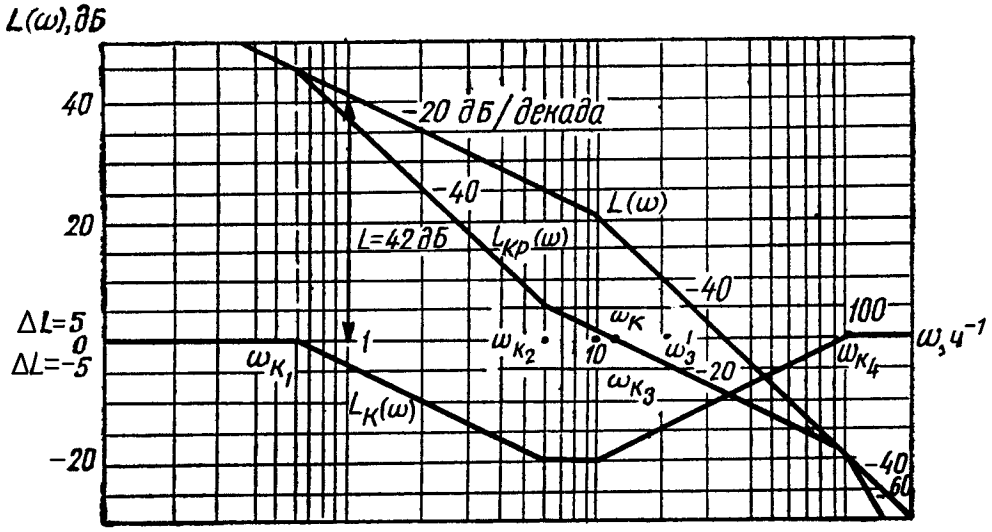
$$20\lg K = 20\lg 120 = 20 \cdot 2{,}1 = 42 \text{ дБ}$$

шамасын және

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \text{ сағ}^{-1};\ \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0{,}01} = 100 \text{ сағ}^{-1}$$

жанасу (түйісу) жиіліктерін анықтап аламыз.

Енді ординатаға $\omega = 1c^{-1}$ мәніне сәйкес $L = 20\lg K = 42$ дБ қоямыз да, бұл нүкте арқылы бірінші $\omega_1 = 10$ сағ$^{-1}$ жанасу жиілігіне дейін еңістігі – 20 дБ/дек болатын төменжиілікті асимптотаны жүргіземіз. ЛАС әрі қарайғы еңістігі бірінші ретті апериодтық буындармен анықталады. Корректирленбеген алғашқы жүйенің логарифмдік амплитудалық сипаттамасы $L(\omega)$ деп белгіленіп 3.34-суретте бейнеленген.



3.34-сурет. Логарифмдік сипаттамалар

$L_1 = 40$ дБ, $\frac{\omega_3}{\omega_к} = 8$ мәндеріндегі (3.16-сурет) ω_1-ден ω_2-ге дейінгі және ω_3-тен ∞-ке дейінгі учаскелерде еңістігі – 40 дБ/декада типтік ЛАС таңдап аламыз да, кесу жиілігін анықтаймыз: $\omega_к = \omega_3/8 = 100/8 = 12{,}5$ сағ$^{-1}$.

Корректирленген (қалаулы) ЛАС $L_{кр}$ деп белгіленіп 3.34-суретте тұрғызылған. Корректирленген ЛАС ω_3 жиілігі $L(\omega)$ алғашқы ЛАС-тың ω_2 мәнімен тура келеді (яғни $\omega_3 = \omega_2 = 100$ сағ$^{-1}$).

Қалаулы (корректирленген) ЛАС тұрғызу ретін қарастырайық. Жиіліктік ω осі бойынан кесу жиілігіне сәйкес $\omega_к = 12{,}5$ сағ$^{-1}$ нүктені белгілеп алып, ол арқылы еңістігі – 20 дБ/декада түзу жүргіземіз. Бұл түзу корректирленген ЛАС ортажиіліктік асимптотасы болады.

Корректирленген ЛАС амплитуда бойынша қоры $\Delta L = \pm 5$ дБ делік. Ординат осіне нөлдік нүктеден жоғары және төмен қарай $\Delta L = \pm 5$ дБ мәндерін салып, осы мәндер деңгейінен ω жиіліктік оське параллель түзулер

тұрғызамыз. Бұл түзулердің корректирленген ЛАС ортажиіліктік асимптотасымен қиылысқан $\omega_{к2}$ және ω_3^1 жиіліктеріндегі нүктелерді аламыз.

ЛАС төменжиілікті асимптотасы жүйенің орныққан режимдегі қателігін анықтайтындықтан, корректирленген ЛАС төменжиілікті асимптотасы ретінде, берілген күшейту коэффициенті бар жүйенің алғашқы (корректирленбеген) ЛАС-ының төменжиілікті бөлігін алады.

Бұл жағдайда орнықты режимдегі АРЖ жұмысының берілген дәлдігіне қол жеткізуге болады және корректирлеуші құрылғы да аса күрделі болмайды.

Ортажиілікті асимптота мен төменжиілікті асимптоталарының түйісулерін ЛАС-тың бір кесіндісі көмегімен жүргізген жөн және де алғашқы $L(\omega)$ ЛАС пен корректирленген $L_{кр}(\omega)$ ЛАС асимптоталарының еңістіктері арасындағы айырым 20 дБ/декадаға тең болуына ұмтылу керек.

Осыны еске ала отыра, $\omega_{к2}$ жиілігіне сәйкес нүктеден алғашқы $L(\omega)$ ЛАС төменжиілікті асимптотасымен қиылысқанға дейін, еңістігі – 40 дБ/декада асимптоталық ЛАС жүргіземіз. Жиілігі $\omega_{к1}$ нүктесін аламыз (3.34-сурет). $L(\omega)$ және $L_{кр}(\omega)$ сипаттамаларының еңістіктерінің айырымы

$$L(\omega) - L_{кр}(\omega) = -20 - (-40) = 20 \text{ дБ/декада}.$$

Енді корректирленген ЛАС жоғарыжиіліктік бөлігін тұрғызамыз. Бұл бөлік өтпелі процесс сапасына көп әсер ете қоймайды, сондықтан оны алғашқы және корректирленген асимптоталар еңістіктері айырымы 20 дБ/декададан аспайтындай етіп тұрғызады. Осыған байланысты ω_3^1 жиілігіне сәйкес нүктеден асимптотаны – 20 дБ/декада еңістікпен алғашқы жүйе логарифмдік сипаттамасымен қиылысқанша созамыз. Жиілігі $\omega_{к4}$ нүктесін аламыз.

Корректирленген ЛАС ординатасынан алғашқы жүйенің ЛАС ординатасын алып тастау жолымен корректирлеуші құрылғының $L_к(\omega)$ логарифмдік амплитудалық сипаттамасын аламыз (3.34-сурет).

Алынған корректирлеуші құрылғының ЛАС-ы бойынша техникалық тұрғыда күрделі емес корректирлеуші тізбекті таңдап аламыз да, оның беріліс функциясын және басқа да негізгі параметрлерін анықтаймыз.

Біздің есеп үшін корректирлеуші құрылғының беріліс функциясы мына түрде болады (3.3.1-кестені қара):

$$W_к(p) = \frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{(1+T_3 p)(1+T_4 p)},$$

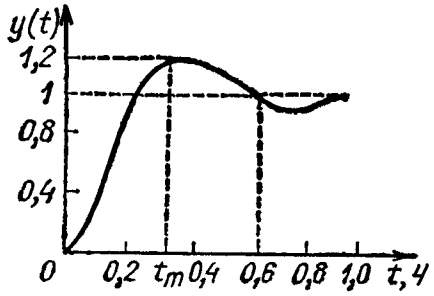
мұндағы $T_1 = \frac{1}{\omega_{к2}} = 0{,}158$ сағ.; $T_2 = \frac{1}{\omega_{к3}} = 0{,}1$ сағ.;

$$T_3 = \frac{1}{\omega_{к1}} \approx 1{,}58 \text{ сағ.}; \; T_4 = \frac{1}{\omega_{к4}} = 0{,}01 \text{ сағ.}$$

3.34-суретінен анықталған уақыт тұрақтылары.

Сапа номограммасы бойынша корректирленген АСР сапа көрсеткіштерін анықтаймыз. Нәтижесінде мына сапа көрсеткіштерін табамыз: асыра реттеу $\sigma = 20\%$; реттеу уақыты $t_p = 0{,}6$ сағат; бірінші максимумға жету уақыты $t_m = 0{,}3$ сағат.

Корректирленген қалаулы жүйенің өтпелі сипаттамасы 3.35-суретте кескінделген.



3.35-сурет. Қалаулы корректирленген жүйенің өтпелі сипаттамасы

Іс жүзінде интегродифференциалды тізбекпен корректирлеуді ПИД-реттеуіші көмегімен жүзеге асыруға болады.

Уақыт тұрақтысы T_4 бірінші ретті апериодтық буынның өтпелі процеске әсері тым аз болатындықтан, ол буынды ескермеуге болады. Олай болса, АСР өзгермейтін бөлігінің интегралдауыш буынын еске алғандағы корректирлеуші құрылғының беріліс функциясы мына түрде болады:

$$W_к(p) = \frac{1}{p} \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)}. \qquad (3.3.3)$$

(3.3.3) өрнегін ыңғайлы түрге түрлендірсек, мынаны аламыз:

$$W_к(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p} \; \frac{1}{T_3 p + 1} = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{p} \; \frac{1}{T_3 p + 1} =$$

$$= \frac{1}{p} + T_1 T_2 p + (T_1 + T_2) \; \frac{1}{T_3 p + 1} = K_p + \frac{K_u}{p} + K_g p \; \frac{1}{T_3 p + 1},$$

мұндағы K_p, K_u, K_g – реттеуішті баптау параметрлері;

$$K_p = (T_1 + T_2) = 0{,}258; \; K_u = 1 \text{ сағ}^{-1}; \; K_g = 0{,}0158 \text{ сағ.}$$

3.31-есеп. Алғашқы АСР динамикалық қасиеттері мынадай беріліс функциясымен анықталады:

$$W(p)=\frac{K}{p(T_1p+1)(T_2p+1)},$$

мұндағы $K=30;\ T_1=0{,}1$ сағ.; $T_2=0{,}01$ сағ. – сәйкес бірінші ретті апериодтық буындардың күшейту коэффициенті және уақыт тұрақтылары.

Жүйенің күшейту коэффициентін сақтай отыра, интегралдауыш тізбек көмегімен алғашқы жүйеге корректирлеу жұмысын жүргізу қажет.

Ш е ш і м і. Алғашқы жүйенің ЛАС тұрғызу үшін алдымен мына параметрлерді анықтаймыз:

$$L=20\lg K=20\lg 30=20\cdot 1{,}477\approx 30\ \text{дБ}$$

және жанасушы жиіліктер

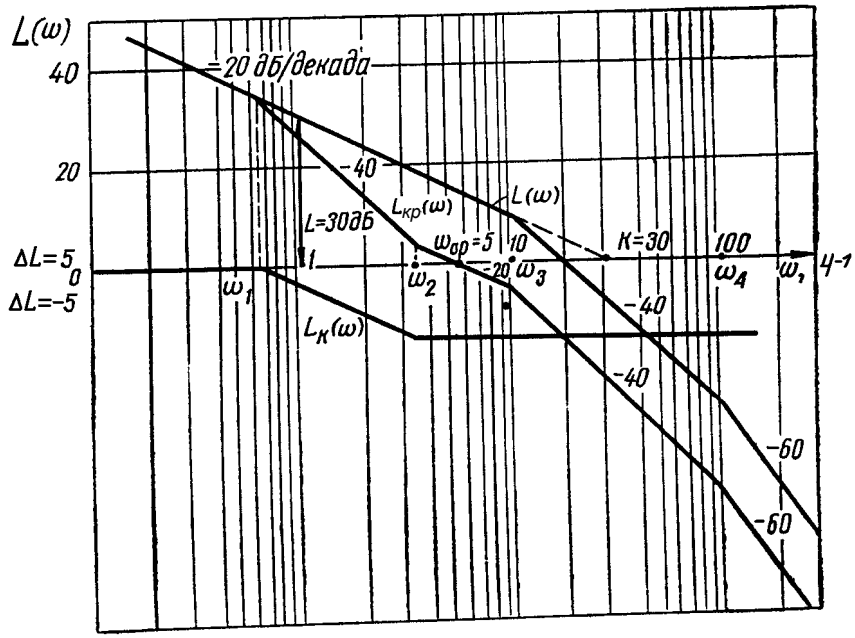
$$\omega_3=\frac{1}{T_1}=\frac{1}{0{,}1}=10\ \text{сағ}^{-1};\ \omega_4=\frac{1}{T_2}=\frac{1}{0{,}01}=100\ \text{сағ}^{-1}.$$

Алғашқы жүйенің беріліс функциясында интегралдауыш жүйе бар болғандықтан, ЛАС тұрғызуды мына әдіспен жүргізеді. $\omega=1$ жиілігінде $L=20\lg K=30$ ординатасын тұрғызамыз. Алынған нүкте арқылы $\omega_3=10$ сағ$^{-1}$ жанасушы жиілікке дейін – 20 дБ/декада еңістікпен төменжиілікті асимптота жүргіземіз. $\omega_3=10$ сағ$^{-1}$ жиілігі бірінші ретті апериодтық буындыкі болғандықтан, ЛАС әрі қарайғы еңістігі – 40 дБ/декадаға тең болады. Бұл сипаттама $\omega_4=100$ сағ$^{-1}$ жиілікке дейін созылады. Ал бұл ω_4 жиілігі де бірінші ретті апериодтық буынға жататындықтан, ЛАС әрі қарай – 60 дБ/декада еңістікпен жалғасады.

Алғашқы ЛАС $L(\omega)$ 3.36-суретінде бейнеленген.

Корректирленген ЛАС тұрғызайық. ω_1-ден ω_2-ге дейінгі және ω_3-тен ∞-ке дейінгі учаскелерде еңістігі – 40 дБ/декада типтік ЛАС таңдап аламыз.

Фазасы бойынша $\Delta\varphi\approx 38^{\circ}$ қорды қамтамасыз ететін $\frac{\omega_3}{\omega_к}=2$ қатынасын аламыз (арнайы номограммадан).



3.36-сурет. Логарифмдік сипаттамалар

Корректирленген ЛАС кесу жиілігін анықтаймыз. $\omega_к = \omega_{3/2} = 10/2 = 5$ сағ$^{-1}$ (3.36-суретті қара). Кесу $\omega_к = 5$ сағ$^{-1}$ жиілігіне сәйкес ω осінен нүкте аламыз да, ол арқылы еңістігі – 20 дБ/декада болатын түзу жүргіземіз. Бұл түзу – корректирленген, қалаулы ЛАС-тың ортажиіліктік асимптотасы.

Енді корректирленген ЛАС амплитудасы бойынша қоры $\Delta L = \pm 5$ дБ делік. Ординат осіне мәні 0 дБ нүктесінен жоғары және төмен қарай осы ΔL мәнін саламыз, алынған нүктелерден жиілік осіне параллель түзулер жүргіземіз. Осы түзулердің корректирленген ЛАС ортажиіліктік асимптотасымен қиылысқан нүктелерінен ω_2 және ω_3 жиіліктерін анықтаймыз.

Алғашқы және корректирленген жүйелердің күшейту коэффициенттері бірдей болулары керек деген шарт қойылғандықтан, қалаулы ЛАС төменжиілікті асимптотасы ретінде алғашқы ЛАС төменжиілікті бөлігін аламыз.

Жоғарыдағы 3.30-есепті шығарғанда айтылғанды ескере отыра, ω_2 жиілігіне сәйкес нүктеден алғашқы ЛАС төменжиілікті асимптотасымен қиылысқанға дейін еңістігі – 40 дБ/декада асимптотикалық ЛАС жүргіземіз. Жиілігі ω_1 нүктесін аламыз (3.36-суретті қара).

Жоғарыжиіліктік асимптотаны – 5 дБ және ω_3 сызықтарының қиылысқан нүктесінен алғашқы логарифмдік амплитудалық сипаттамаға параллель тұрғызамыз.

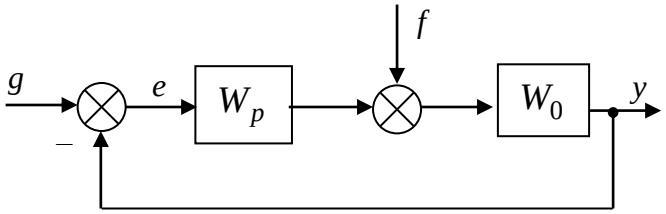
Сонымен корректирленген жүйенің $L_{кр}(\omega)$ асимптоталық ЛАС-ын аламыз.

$L_{кр}(\omega)$ ординатасынан $L(\omega)$ ординатасын алып тастау арқылы $L_к(\omega)$ корректирлеуші құрылғының ЛАС-ын табамыз. Біздің жағдайда корректирлеуші құрылғының беріліс функциясы мына түрде болады (3.3.1-кестені қара):

$$W_к(p)=\frac{T_1p+1}{T_2p+1},$$

мұндағы $T_2=\frac{1}{\omega_1}=\frac{1}{0{,}65}=1{,}5$ сағ; $T_1=\frac{1}{\omega_2}=\frac{1}{3{,}5}=0{,}3$ сағ.

3.32-есеп. Объектінің беріліс функциясы $W_0(p)=\frac{1}{p+1}$ болғанда, жүйенің (3.37-сурет) статикалық қателігі қандай типтік басқару заңдылығы кезінде нөлге тең болатынын анықтау қажет.



3.37-сурет. Құрылымдық схема

Ш е ш і м і: Жүйе берілген (жоспарлаушы) және ауытқытушы әсерлерге сәйкес астатикалық болып келгенде, оның статикалық қателігі нөлге тең. Бұл үшін реттеуіште интегралдауыш буын болуы қажет. Сондықтан ізделініп отырған заңдылық пропорционал-интегралды (ПИ) немесе пропорционал-интегралды-дифференциалды (ПИД) болады.

3.33-есеп. 3.37-суретте реттеуіштің беріліс функциясы $W_p(p)=K_n$, объектінікі $W_o(p)=\frac{1}{p(0{,}1p+1)}$, $f(t)=0$ болғанда, жүйедегі өтпелі процестің апериодты болуы үшін K_n параметрінің мәні қандай болуы керек екендігін анықтау қажет.

Ш е ш і м і: Өтпелі процесс апериодты болуы үшін

$$G(p)=0{,}1p^2+p+K_n=0$$

сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты, яғни бұл теңдеудің детерминанты

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 0{,}1K_n \geq \text{ немесе } K_n \leq 2{,}5$$

болуы қажет.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылатын сұрақтар

1. АРЖ коррекциялау не үшін қолданылады:
   а) керекті орнықтылықты қамтамасыз ету үшін;
   б) жүйенің динамикалық дәлдігін көтеру үшін;
   в) өтпелі процестің сапа көрсеткіштерін жақсарту үшін?
   реттеуіштің параметрлерін баптау жеткілікті ме, жоқ па?

2. АРЖ беріліс функциясы

$$W_{об}(p) = \frac{K_{об}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

реттеу объектісінен және беріліс функциясы

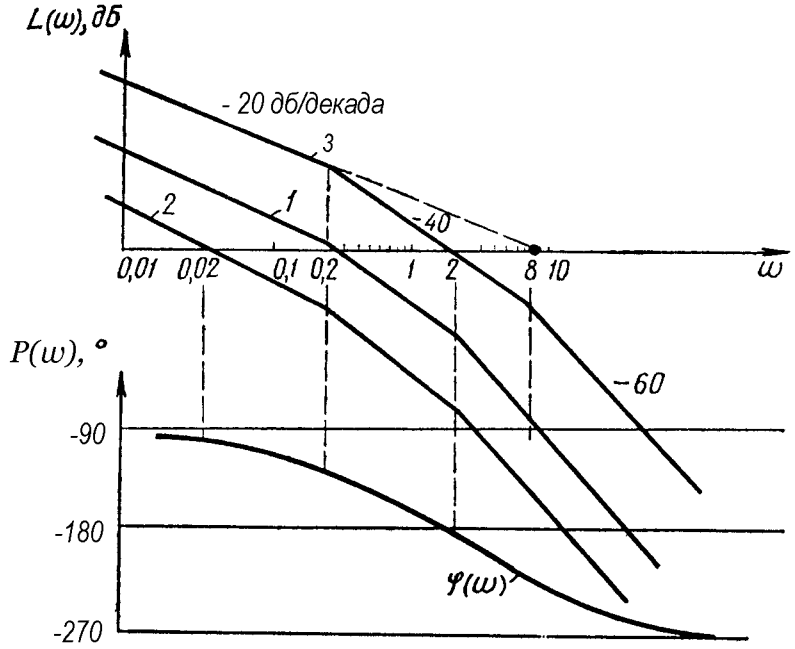
$$W_p(p) = \frac{K_p}{p}$$

И-реттеуіштен тұрады. 3.38-суреттегі ажыратылған АРЖ берілген логарифмдік жиіліктік сипаттамасынан мыналарды анықтаңыз:

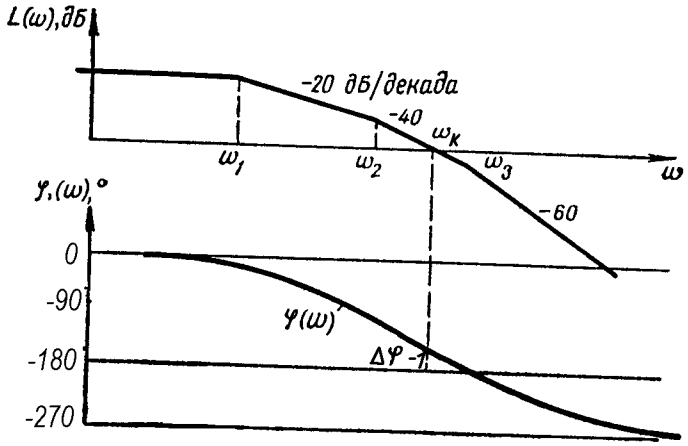
1) АРЖ өзгермелі параметрі:
   а) T_1; б) T_p; в) $K_{об}$; г) K_p;
2) Өзгермелі параметр өскенде төменде көрсетілген жиіліктердің қайсысы көбейеді:
   а) $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ жанасу жиілігі; б) $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ жанасу жиілігі; в) $\omega_к$ – кесу жиілігі; г) $\omega_{күд}$ – күдікті жиілік. Осы жиіліктердің қайсысы реттеуіштің K_p күшейту коэффициенті өзгергенде тұрақты болып қалады?
3) Қарастырылып отырған АРЖ-да $\varepsilon_{ст}$ статикалық қателік бар ма?
4) Реттеуіштің K_p күшейту коэффициентінің үлкені жүйенің фазасы бойынша орнықтылық қорына қалай әсерін тигізеді?
5) Төмендегілердің қайсысына ЛАС сәйкес келеді:
   а) тұйықталған жүйенің теріс кері байланысы $\omega_к$ кесу жиілігінде оң таңбалыға ауысуына;
   б) реттеуіштің K_p ең кіші мәнді күшейту коэффициентіне;

в) жүйенің шекті мәнді күшейту коэффициентіне ($K = K_{об}K_p$).

6) Объектінің күшейту коэффициенті $K_{об} = 2$ болған кезде, реттеуіштің шектік күшейту коэффициенті нешеге тең болады?



3.38-сурет. Астатикалық АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамалары



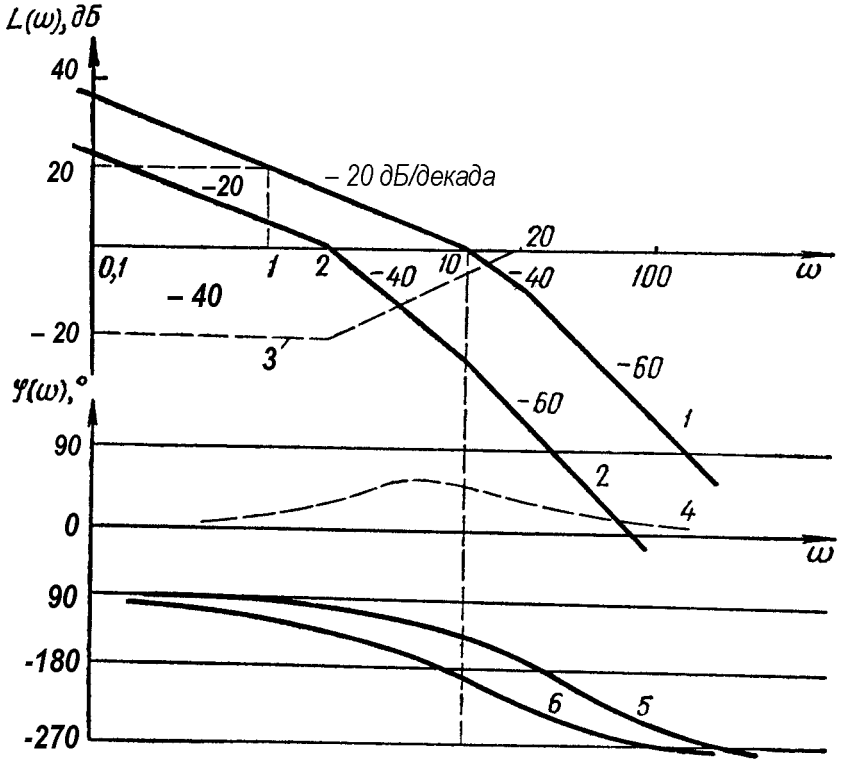
3.39-сурет. Статикалық АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамалары

3. 3.39-суретте ажыратылған статикалық АРЖ логарифмдік сипаттамалары келтірілген. Мынаны анықтаңыз:

1) Статикалық $\varepsilon_{ст}$ қателікті азайту үшін реттеуіштің K_p күшейту коэффициентін қалай өзгерту қажет?

2) Бұл кезде мына параметрлер қалай өзгереді:
   а) жүйенің $\omega_к$ кесу жиілігі;
   б) амплитуда және фаза бойынша жүйенің орнықтылық қоры;
   в) жүйенің өтпелі процесі;
3) Бұл кезде орнықтылықтың жойылуы мүмкін бе?

4. 3.40-суретте корректирлеуге дейінгі және корректирлеуден кейінгі ажыратылған АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамалары, сонымен бірге тізбектеле қосылған корректирлеуші құрылғының логарифмдік жиіліктік сипаттамалары келтірілген. Мыналарды анықтаңыз:
   1) корректирленбеген жүйенің ЛЖС-ын;
   2) корректирленген жүйенің ЛЖС-ын;
   3) корректирлеуші құрылғының ЛЖС-ын және оның типін:
      а) дифференциалдауыш;
      б) интегралдауыш;
      в) интегродифференциалды;
   4) корректирленбеген жүйенің *K* күшейту коэффициентін;
   5) егер $\varphi(\omega_к) = 145°$ болса, корректирленбеген жүйенің фаза бойынша $\Delta\varphi$ орнықтылық қорын;



3.40-сурет. Ажыратылған АРЖ логарифмдік жиіліктік сипаттамалары

6) корректирленген жүйенің күшейту коэффициентін;
7) егер $\varphi(\omega_к) = 145°$ болса, корректирленген жүйенің фаза бойынша $\Delta\varphi$ орнықтылық қорын;

8) корректирлеуші құрылғының $T_{к1,}$ $T_{к2}$ уақыт тұрақтылары бір-бірінен қаншалықты өзгешеленеді?
9) корректирленген және корректирленбеген жүйелердің кесу жиіліктерінің бір-бірінен айырмасы қандай?
10) жүйені корректирлегеннен кейінгі t_p реттеу уақыты қалай өзгереді?

5. Икемді және қатаң кері байланыстардың мәністерін ашатын мына сұрақтарға жауап беріңіз:
   1) ҚКБ-пен қамтылған буынның кірісіне қандай шама беріледі?
   2) ИКБ-пен қамтылған буынның кірісіне қандай шама беріледі?
   3) ИКБ АСР-дің қандай режимінде іске асырылады?

3.34-есеп. 3.37-суретте $W_o(p)=1/\left(p^2(p+1)\right)$, $g(t)=at$ және $f(t)=b$ болғанда, жүйенің орныққан қателігі қандай типтік басқару заңдылығында нөлге тең болатынын анықтау қажет.

3.35-есеп. 3.37-суретте келтірілген жүйеде реттеуіштің беріліс функциясы $W_p(p)=K_n$, объектінікі $W_o(p)=\dfrac{1}{p(0{,}1p+1)}$, $f(t)=0$. J_{20} интегралдық квадраттық қателіктің K_n-ның қай мәнінде минимал болатындығын анықтау қажет.

4-тарау. Бейсызықты автоматты реттеу жүйелері

4.1. Бейсызықты жүйелердің сипаттамаларын сызықтау

Іс жүзінде сызықты жүйелер жоқ. Жүйенің ең дегенде бір элементінің сипаттамасы елеулі бейсызықты болып келсе, онда бұл жүйені бейсызықты деп атайды.

Мұндай жүйелердің жұмысы *бейсызықты* дифференциал теңдеулер арқылы өрнектеледі. Іс жүзінде инерциясыз бейсызықты буыны бар жүйелер көп кездеседі.

Жүйедегі мұндай буынның болуы оның жалпы динамикасының қасиеттеріне көп-көрім себебін тигізеді. Мысалы: егер сызықты жүйе бастапқы күйінен аз ауытқығанда орнықты болып қалса, онда ол үлкен ауытқуда да орнықты болып қалады, ал бейсызықты жүйе аз ауытқуда орнықты болғанымен, үлкен ауытқуда орнықсыз болуы мүмкін.

Бұл тұрғыда мынадай жағдайларды атап өткен жөн:

- біріншіден, бейсызықты АРЖ-ға суперпозиция принципі қолданылмайды;
- екіншіден, бейсызықты АРЖ өтпелі процесінің сапасы жүйеге берілетін қосымша қобалжыту әсерінің көрсеткішіне тәуелді болады.

Бейсызықты (БС) жүйелердің бір ерекшелігі олардағы автотербелістің пайда болуында, яғни, қандай сыртқы қобалжыту әсері болғанымен де жүйеде сөнбейтін тұрақты амплитудалы тербелістің пайда болуында. Осындай тұрақты амплитудалы орнықты тербелісті *автотербеліс* деп атайды. Автотербеліс – тек БС жүйеге ғана тән және де орнықтылықтың жаңа ерекше түрі болып саналады.

БС жүйе орнықтылығын қарастырған уақытта бастапқы шарт пен сыртқы қобалжыту әсерін де еске ала отыру керек. Сондықтан БС жүйе үшін, жалпы орнықтылық туралы емес, жүйенің қай режимдегі орнықтылығы жөнінде сөз қозғаған жөн.

Бейсызықты физикалық жүйенің өзінің сызықты моделіне өту процесін *сызықтандыру* деп атайды.

Бейсызықты сипаттамаларды сызықтаудың бірнеше әдістері бар. Соның бірі сипаттамаларды қатарға түзу әдісі.

Бұл әдіс бойынша бейсызықты сипаттаманы Тейлор қатарына түзеді де, оның алғашқы екі мүшелерін ғана алып, $y = f(x)$ сипаттамасын оған жуық келетін сызықты тәуелділікпен алмастырады. Бейсызықты $y = f(x)$ сипаттамасы дифференцияланады және $x(t)$ кіріс сигналы шамасының өзінің әлдебір x_0 орташа мәнінен айырмашылығы аса емес делік, олай болса $y(t)$ өрнегін жуықтатылған

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (4.1.1)$$

түрінде көрсетуге болады. Бейсызықты $y(t)$ тәуелділігін (4.1.1) сызықты өрнекпен алмастыру, геометриялық тұрғыдан қарастырғанда $y = f(x)$ қисығын оның x_0 нүктесінде жүргізілген жанамамен алмастырумен бірдей.

АРЖ-ға берілетін сыртқы қосымша қоздыру әсерлерін, математикалық күтуі m_x және центрленген кездейсоқ бөлігі $\dot{x}(t)$ болатын станционар кездейсоқ $x(t)$ функциясы түрінде қарастыруға болады:

$$x(t) = m_x + \dot{x}(t)$$

Бұл жағдайда бейсызықты сипаттаманы сызықтауды $\dot{x}(t)$ центрленген кездейсоқ кіріс сигналына сәйкес жүргізу ыңғайлы, яғни, (4.1.1) теңдеудегі x_0 мәнін жіктеу центрі ретінде $x(t)$ кіріс сигналының m_x математикалық күтуін алады. Нәтижесінде

$$y(t) \approx f(m_x) + f'(m_x)\dot{x}(t) \qquad (4.1.2)$$

өрнегі алынады.

Сонымен, жуықтатылған (4.1.2) тәуелділік тек кіріс сигналдың $\dot{x}(t)$ кездейсоқ құрамына ғана сәйкес сызықты және m_x математикалық күтуге сәйкес бейсызықты болады. Осы себептен бұл жерде суперпозиция принципі қолданылмайды.

Көп жағдайда бейсызықты буынның кірісіне

$$x(t) = A\sin\omega t = A\sin\psi; \quad \psi = \omega t$$

гармоникалық тербелістер берілетін есепті қарастыруға тура келеді. Бұл кезде бейсызықты жүйенің шығыс сигналы гармоникалық емес периодты болады.

Гармоникалық сызықтау идеясы $y(t)$ шығыс периодты сигналды Фурье қатарына түзіп, әрі қарай зерттеуде сол қатардың тек алғашқы екі мүшесін ғана қарастырумен шектеледі. Олай болғанда бейсызықты

$$y = f(x) = f(A\sin\psi)$$

тәуелділігі оған жуықтатылған

$$y = a_0 + a\sin\omega\cdot t + b\cos\omega\cdot t = a_0 + q_1 x + q_2 \dot{x}/\omega$$

мәнімен алмастырылады. Мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi)d\psi;$$

$$q_1 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi)\sin\psi d\psi; \qquad (4.1.3)$$

$$q_2 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi)\cos\psi d\psi; \qquad (4.1.4)$$

q_1 мен q_2 коэффициенттерін бейсызықты буынның гармоникалық күшейту коэффициенттері немесе эквивалентті күшейту коэффициенттері деп атайды.

Олардың мәндері кірістегі x сигналының амплитудасына тәуелді, яғни, айнымалы x кіріс сигналының әр түрлі A амплитудалары үшін бұл тұрақты коэффициенттердің мәндері де әр түрлі болады:

$$q_1 = q_1(A); \quad q_2 = q_2(A).$$

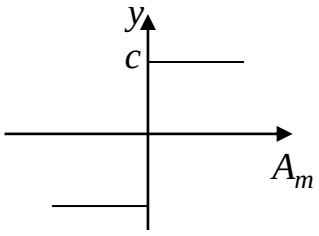
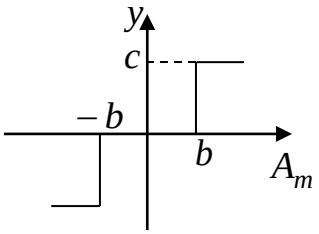
Графикалық тұрғыда бұл бейсызықтық сипаттаманы бір ғана түзумен емес, еңістігі x айнымалысының A амплитудасына тәуелді бір топ түзулермен алмастырады деген сөз.

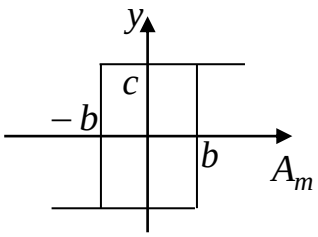
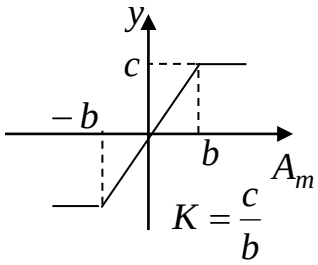
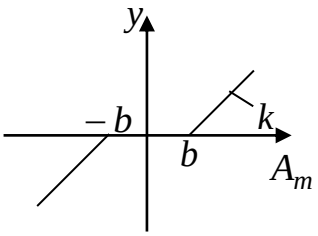
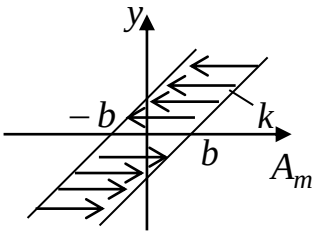
Әрбір берілген периодикалық процесс үшін (яғни, қайсыбір A амплитудасы болғанда) эквиваленттік сипаттама сызықты, бірақ процестен процеске (әр түрлі A амплитудалары үшін) және өтпелі процестерде түзу сызықтық еңістігі де өзгеріп отырады, яғни, гармоникалық сызықтауда белгілі бір мағынада бейсызықтылық қасиеттер сақталып қалады.

Типті бейсызықты сипаттамалар үшін 4.1-кестеде $q_1(A)$ және $q_2(A)$ коэффициенттерін есептейтін формулалар келтірілген.

4.1-кесте.

Типтік бейсызықтылықтарды гармоникалық сызықтау коэффициенттері

№	$y = f(A_m)$	$q_1(A_m)$	$q_2(A_m)$
1		$\frac{4c}{\pi A_m}$	0
2		$x_m > b$ *болғанда* $\frac{4\tilde{n}}{\pi A_m^2}\sqrt{A_m^2 - b^2}$	0

3		$\frac{4\tilde{n}}{\pi A_m^2}\sqrt{A_m^2 - b^2}$	$x_m > b$ болғанда $-\frac{4cb}{\pi A_m^2}$
4		$A_m > b$ болғанда $\frac{2k}{\pi}\left(\arcsin\frac{b}{A_m} + \frac{b}{A_m^2}\sqrt{A_m^2 - b^2}\right)$	0
5		$A_m > b$ болғанда $k - \frac{2k}{\pi}\left(\arcsin\frac{b}{A_m} + \frac{b}{A_m^2}\sqrt{A_m^2 - b^2}\right)$	0
6		$\frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2b}{A_m}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{x_m}\right) \times \sqrt{\frac{b}{A_m}\left(1 - \frac{b}{A_m}\right)}\right]$	$A_m > b$ болғанда $\frac{-4kb}{\pi A_m}\left(1 - \frac{b}{A_m}\right)$

Гармоникалық сызықтау автотербелістік режимді зерттеу үшін жүргізіледі. Сызықты бөліктің беріліс функциясы

$$W_c(p) = K_c(p)/D_c(p)$$

ал бейсызықты бөліктің беріліс функциясы

$$W_б(A) = q_1(A) + q_2(A)\, p/\omega$$

болғанда, ажыратылған бейсызықты жүйенің беріліс функциясы

$$W(p) = W_c(p)\;\; W_б(A) = \frac{K_c(p)}{D_c(p)}\;\; q_1(A) + q_2(A)\frac{p}{\omega}$$

болады. Олай болса, гармоникалық сызықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі былай жазылады:

$$F(p, A, \omega) = D_c(p) + K_c(p)[q_1(A) + q_2(A)\, p/\omega] = 0. \qquad (4.1.5)$$

Автотербелістің бейсызықты жүйеде болуына орнықтылықтың тербелмелік шекарасында, (4.1.5) сызықталған жүйені табу сәйкес келеді. Тербелмелік шекараны Михайлов пен Найквист критерийлері бойынша анықтайды.

Михайлов критерийі бойынша жүйеде $x(t) = A_{ma} \sin \omega_a t$ автотербелісі бар не жоқ екенін білу үшін, (4.1.5) теңдеуге $p = j\omega_a$ белгілеуін қоя отыра, автотербелістің төмендегідей орнықтылық шартын аламыз:

$$(\partial P/\partial A_{ma})(\partial Q/\partial \omega_a) - (\partial P/\partial \omega_a)(\partial Q/\partial A_{ma}) > 0.$$

Найквист критерийіне сәйкес, егер ажыратылған жүйенің а.ф.с. $(-1,\ jo)$ нүктесі арқылы өтсе, онда жүйе тербелістің орнықтылық шекарасында тұрғаны. Яғни жүйеде автотербелістің болу шарты мына теңдеумен анықталады:

$$W_c(j\omega_a) = \frac{1}{W_б(A_{ma})}. \qquad (4.1.6)$$

Сонымен, $W_б(A)$ коэффициентінің кірістегі тербелістің жиілігіне тәуелсіз екендігін көреміз. Ол тек бұл тербелістің A амплитудасына ғана тәуелді, міне, бейсызықты инерциясыз буынның сызықты инерциялы буыннан айырмашылығы да осында.

Статистикалық сызықтау шығысындағы пайдалы сигнал деңгейімен флуктуация деңгейін белгілі бір жағдайда сақтай отыра, бейсызықты буынды флуктуацияға сәйкес буынмен алмастыру арқылы жүргізіледі. Бұл жағдайда бейсызықты функция тұрақты эквивалентті сызықты күшейту коэффициентімен аппроксимацияланады. Шын мәнінде бейсызықты функцияны тұрақты коэффициентпен аппроксимациялау кездейсоқ сигналды түрлендірудің толық суреттемесін бере алмайды, себебі бұл кезде сигнал спектрін бейсызықты буынмен түрлендіру еске алынбайды. Осыған байланысты, инерциясыз бейсызықты буындарды оның шығысындағы сигналдың спектрлік тығыздығының кірісіндегі сигнал спектрлік тығыздығына қатынасымен анықталатын статикалық эквивалентті беріліс функциясымен аппроксимациялайды.

Айта кетер бір жай, бейсызықты элемент өзінің кірісіне берілген функцияның ықтималдық үлестірімдік тығыздығын түрлендіріп отырады.

АРЖ-да БС буындардың сызықты буындармен бірге болатынын және олар үшін кездейсоқ сигналдардың түрлендіру заңдарының бұл

сигналдардың дисперсиямен емес, корреляциялық функциясымен анықталатындығын еске ала отырып, статистикалық сызықтауды қолданғанда, шығыс сигнал корреляциялық функциясын шындық мәнге жақындату мақсатында, оның дисперсиясында біраздаған қателіктерді арнайы жіберуге болады.

Бұл жағдайда k_1-ді мына өрнек арқылы есептеген дұрыс:

$$k_1 = M[y\dot{x}]/\sigma_x^2$$

мұндағы M – математикалық күтудің символы. Егер $\varphi(x) - x(t)$-ның ықтималдылық үлестірімді тығыздығының бірөлшемді функциясы болса, онда:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx; \qquad (4.1.7)$$

$$k_1^{(1)} = \pm \frac{1}{\sigma_x} \left\{ f^2(x) \varphi(x) dx - m_y^2 \right\}^{0.5}; \qquad (4.1.8)$$

$$k_1^{(2)} = \pm \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f(x) \varphi(x) dx, \qquad (4.1.9)$$

Бірінші және екінші әдістері бойынша k_1 коэффициентін есептегенде шығыстағы сигналдың корреляциялық функциясында қарама-қарсы таңбалы бірбағытты қателіктер пайда болады, сол себептен k_1 үшін:

$$k_1 = \left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)} \right] / 2 \qquad (4.1.10)$$

формуласын пайдаланған жөн.

Көптеген есептерде бейсызықты буынның кірісіндегі $z(t)$ сигнал синусоидалды сигнал мен $x(t)$ кездейсоқ функцияның қосындысы ретінде болып келеді:

$$z(t) = A\sin\omega t + x(t) = A\sin\omega t + m_x + \overset{0}{x}(t)$$

Бұл жағдайда гармоникалық және статистикалық сызықтауларды бірлестіре қолданады, яғни, бейсызықты буынның $y(t) = f[z(t)]$ сипаттамасын

$$y(t) \approx f_0 + \eta_1 A\sin\omega t + \eta_2 A\cos\omega t + \eta \overset{0}{x}(t)$$

кіріс сигналдың синусоидалды және центрленген кездейсоқ құрамдарына сәйкес жуықтатыла сызықталған мәнімен алмастырады.

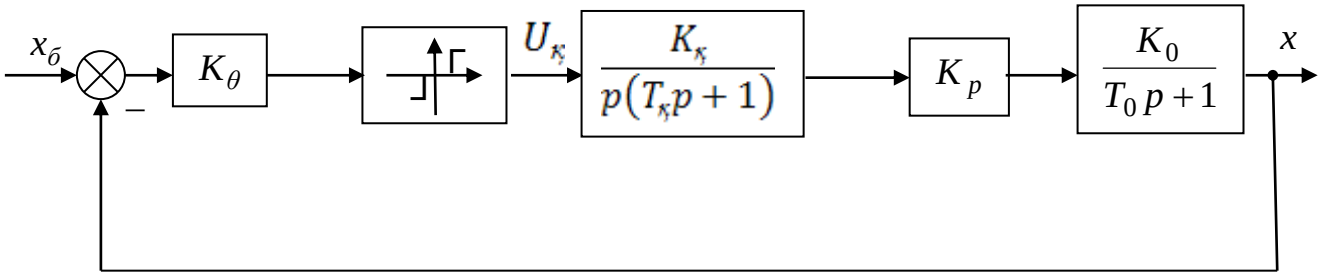
$y = f(z)$ тақ сипаттама үшін:

$$f_0 = \eta_0 m_x.$$

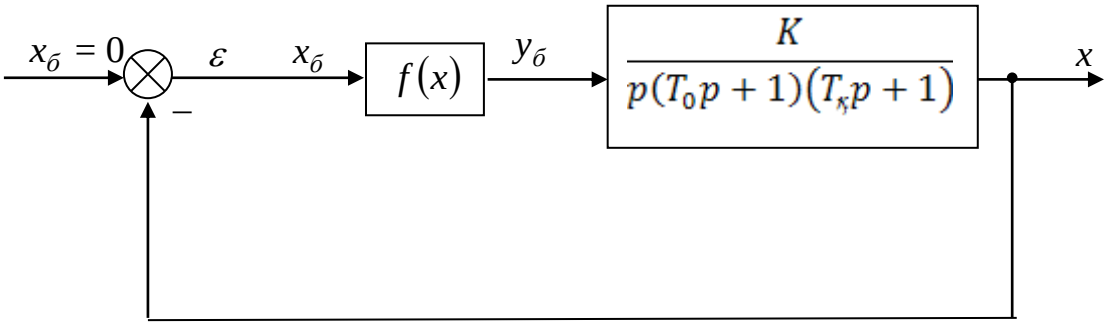
Бейсызықты буынның пайдалы сигналды, бірінші гармониканы және кіріс сигналының флюктуациялық деңгейін тасымалдауын дұрыс есептеу шартынан, η_0, η_1, η_2 және η мәндерін әртүрлі әдістер арқылы анықтауға болады.

4.1-есеп. Параметрлері $K_c = 0{,}04^{\circ}C/B \cdot c$; $c = 50B$; $b = 1^{\circ}C$, $T_o = 10c$, $T_к = 0{,}5c$ болғандағы 4.1,*а*-суретте келтірілген жүйеде туатын автотербелістің амплитудасы мен жиілігін анықтау қажет.

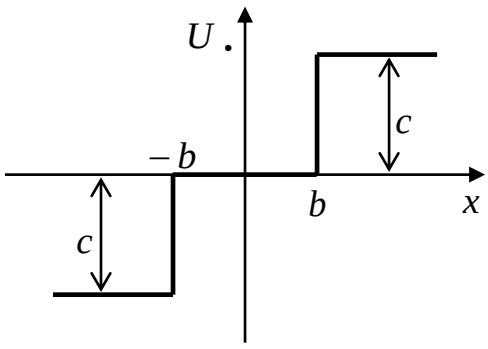
Бейсызықты элемент – үшпозициялы реле. Оның сипаттамасы 4.1,*в*-суретте берілген.



а)



б)



в)

4.1-сурет. Автоматты реттеу жүйесінің алғашқы *(а)*, түрлендірілген *(б)* схемалары және реленің сипаттамасы *(в)*

Ш е ш і м і. Берілген 4.1, *а*-схеманы 4.1, *б* түріне келтіреміз. Сызықты бөліктің беріліс функциясы мынаған тең:

$$W_c(p) = \frac{K_c}{p(T_o p + 1)(T_к p + 1)}.$$

Бейсызықты элемент – үшпозициялы реленің эквиваленттік функциясы (4.1-кестені қара):

$$W_б(p, \quad A_{бт}) = q_1(A_m) = 4c\sqrt{A_m^2 - b^2}\,/\,\pi A_m^2.$$

Жүйенің сипаттаушы полиномы

$$F(p, \quad A_m) = T_o T_к p^3 + (T_o + T_к)p^2 + p + K_c q(A_m). \quad (4.1.11)$$

$p = j\omega_a$ деп алып, (4.1.11) теңдеудің нақты және жорамал бөліктерін нөлге теңейік:

$$\left.\begin{aligned} P(\omega_a, \quad A_{ma}) = K_c q_1(A_{ma}) - (T_o + T_к)\omega_a^2 = 0 \\ Q(\omega_a, \quad A_{ma}) = \omega_a(1 - T_o T_к \omega_a^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.1.12)$$

(4.1.12) жүйенің екінші теңдеуінен автотербелістің жиілігін анықтауға болады:

$$\omega_a = 1/\sqrt{T_o T_к}. \quad (4.1.13)$$

Анықталған ω_a мәнін (4.1.12) жүйенің бірінші теңдеуіне қойып, A_{ma} жалғыз белгісізі бар теңдеу аламыз:

$$\left(K_c 4c\sqrt{A_{ma}^2 - b^2}\,/\,\pi A_{ma}^2\right) - (T_o + T_к)/T_o T_к = 0. \quad (4.1.14)$$

$B = \pi^2 (T_o + T_к)^2 / 16 K_c^2 c^2 T_o^2 T_к^2$ деп белгілеп, (4.1.14) теңдеуін мына түрге келтірейік:

$$BA_{ma}^4 - A_{ma}^2 + b^2 = 0. \quad (4.1.15)$$

Алынған биквадрат (4.1.15) теңдеуін коэффициенттердің берілген мәндері үшін шешпей тұрып, оның дискриминантын зерттейік:

$$D = 1 - 4Bb^2.$$

(4.1.15) теңдеудің тек $D > 0$, яғни

$$2K_c cT_o T_к - \pi\left(T_o + T_к\right)b > 0 \qquad (4.1.16)$$

болғанда ғана A_{ma}^2 нақты түбірі болады (ал жүйеде амплитудасы A_{ma} автотербеліс болуы мүмкін).

Есеп шартында берілген параметрлер үшін (4.1.16) теңсіздігі орындалмайды, яғни жүйеде автотербелістің болуы мүмкін емес.

(4.1.16) шартынан сызықты бөлік коэффициентінің шектік мәнін анықтауға болады:

$$K_{с.ш.} = \pi b\left(T_o + T_к\right)/2cT_o T_к.$$

$K_{с.ш.}$ үлкен мәнінде автотербелістің болуы мүмкін. Мысалы, $K_c = 0{,}4$ болғанда (4.1.15) теңдеуінің екі нақты шешімі бар: $A_{ma} = 2{,}1^{o}C$ және $A_{ma} = 12^{o}C.$

Осы екі шешімнің қайсысы орнықты тербеліске сәйкес келетінін анықтау үшін

$$(\partial P/\partial A_{ma}) \cdot (\partial Q/\partial \omega_a) - (\partial P/\partial \omega_a) \cdot (\partial Q/\partial A_{ma}) > 0 \qquad (4.1.17)$$

орнықтылық шартын пайдаланайық.

Олай болса,

$$\left.\begin{gathered} \partial P/\partial A_m|_{A_m = A_{ma}} = 4K_c c\left(2b^2 - A_{ma}^2\right)/\pi A_{ma}^3\sqrt{A_m^2 - b^2}; \\ \partial P/\partial \omega|_{\omega=\omega_a} = -2\left(T_o + T_к\right)\omega_a; \\ \partial Q/\partial A_m = 0; \quad \partial Q/\partial \omega|_{\omega=\omega_a} = 1 - 3T_o T_к \omega_a^2. \end{gathered}\right\} \qquad (4.1.18)$$

Дербес туындылардың (4.1.18) мәндерін (4.1.17) шартына қоя отыра және (4.1.13) жиіліктің мәнін ескере отыра, аламыз:

$$4K_c c(2b^2 - A_{ma}^2)\,(1-3)/\pi A_{ma}^3\sqrt{A_{ma}^2 - b^2} > 0$$

немесе

$$A_{ma} > b\sqrt{2}.$$

Бұл шартты тек екінші шешім қанағаттандырады. Яғни жүйеде амплитудасы $A_{ma} = 12^{o}C$ және жиілігі $1/\sqrt{T_o T_к} = 0{,}45c^{-1}$ болатын автотербеліс туады.

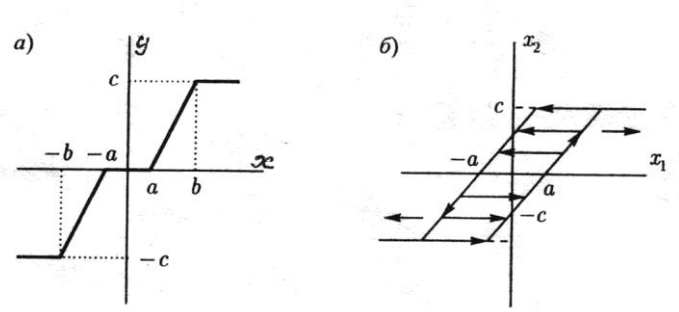
Тербелістің периоды $T_a = 2\pi/0{,}45 = 14c.$

Егер реленің сезімсіздік аймағы болмайтын болса, яғни $b = 0$ болса, онда (4.1.15) теңдеуінің әрқашан да бір-ақ нақты шешімі болады:

$$A_{ma} = 4K_c cT_o T_к / \pi\left(T_o + T_к\right).$$

$T_к \to 0$ болса, автотербелістің амплитудасының нөлге, ал (4.1.13) теңдеуіне сәйкес, жиілігінің шексіздікке ұмтылатынын көруге болады.

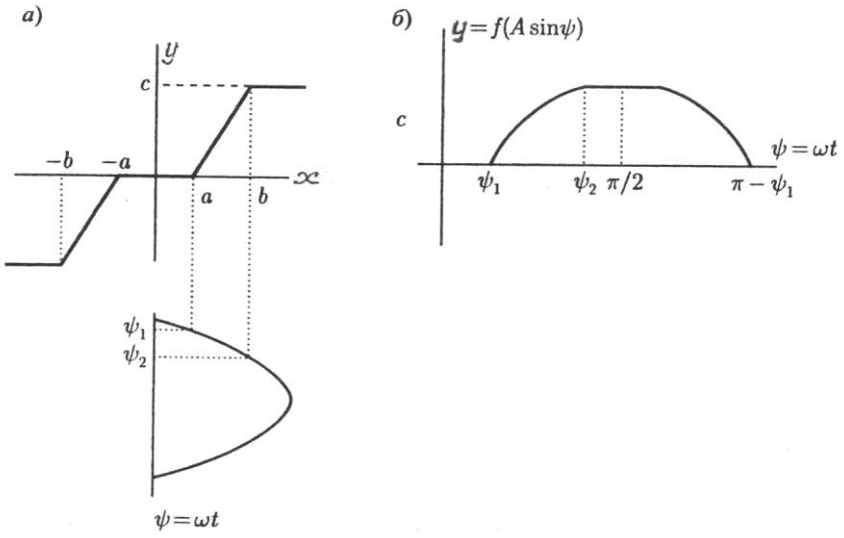
4.2-есеп. Симметриялы тербеліс кезіндегі, қанықкан және сезімсіздік аймағы бар құрама-сызықты сипаттамалы (4.2-сурет) бейсызықты буынның гармоникалық сызықтау коэффициентін анықтау қажет.



4.2-сурет

Ш е ш і м і: Бейсызықты буынның сипаттамасы бірмағыналы және координат басына сәйкес симметриялы болғандықтан, $f(x)$ функциясы тақ болады, сондықтан бұл жағдайда гармоникалық сызықтаудың жорамал коэффициенті $q_2(A)=0$. Осы себептен гармоникалық сызықтаудың тек нақты $q_1(A)$ коэффициентін ғана есептеп шығару керек.

Кірісіне $x = A\sin\omega t$ гармоникалық сигнал беріліп тұрған, жоғарыдағыдай сипаттамасы бар бейсызықты буынның шығыстық сигналының графигі 4.3-суретте келтірілген.



4.3-сурет

Бұл суреттен, бейсызықты буынның кірісіндегі сигнал a мәніне жетпейінше, немесе ψ айнымалысы $\psi_1\left(x = A\sin\psi_1 = a\right)$ болмайынша, буынның шығысындағы сигнал нөлге тең болатынын көреміз. Ал кірістік сигнал $[a,\ b]$ аралығында, немесе ψ айнымалысы $[\psi_1,\ \psi_2]$ интервалы аралығында (мұндағы ψ_2 $A\sin\psi_2 = b$ қатынасымен анықталады) өзгергенде, бейсызықты буынның шығысында

$$y = K\left(A\sin\psi - a\right)$$

шамасын аламыз. Мұндағы $K = c/(b-a) - (a,b)$ интервалында бейсызықты буын сипаттамасының тангенс еңістік бұрышы. Ал $[\psi_2,\ \pi/2]$ аралығында бейсызықты буынның шығыстық сигналы c тұрақты мәнге ие болады.

$[0,\ \pi]$ аралығында шығыстық сигналдың графигі $\psi = \pi/2$ түзуіне сәйкес симметриялы болады. Сондықтан шығыстық сигнал $[\pi/2,\ \pi - \psi_2]$ аралығында c тұрақты шамасына, $[\pi - \psi_2,\ \pi - \psi_1]$ аралығында $y = K\left(A\sin\psi - a\right)$ функциясымен бейнеленіп, ал $[\pi - \psi_1,\ \pi]$ аралығында нөлге тең болады.

Сондықтан гармоникалық сызықтаудың нақты коэффициенті мына өрнек бойынша анықталады:

$$q_1(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} f\left(A\sin\psi\right)\sin\psi d\psi =$$

$$= \frac{2}{\pi A}\left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} K\left(A\sin\psi - a\right)\sin\psi d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} c\sin\psi d\psi + \int_{\pi-\psi_2}^{\pi-\psi_1} K\left(A\sin\psi - a\right)\sin\psi d\psi \right].$$

Бұл өрнекті $\sin^2\psi = (1 - \cos 2\psi)/2$ тригонометриялық тепе-теңдікті пайдалана отыра интегралдап, мына формуланы аламыз:

$$q_1(A) = \frac{2}{\pi A}\left\{K\left[A\left(\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin 2\psi\right) - a\psi\right]_{\psi_1}^{\psi_2} + \right.$$

$$\left. + c\cos\psi\Big|_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} + K\left[A\left(\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin 2\psi\right) - a\psi\right]_{\pi-\psi_2}^{\pi-\psi_1}\right\}.$$

Интегралдау шектерін қоя отыра, мынаны аламыз:

$$q_1(A)=\frac{4K}{\pi}\left[\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\psi_2-\sin 2\psi_1)+\right.$$

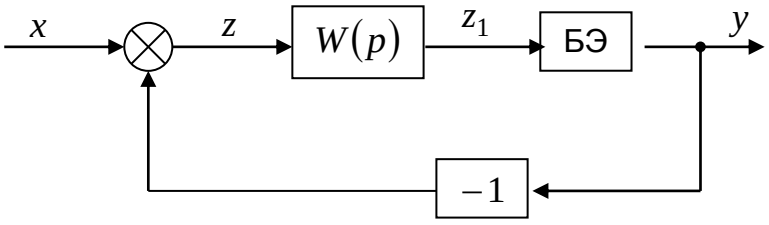
$$\left.+a(\cos\psi_2-\cos\psi_1)\right]+\frac{4c}{\pi A}\cos\psi_2.$$

4.3,а-суреттен $A\sin\psi_1=a,\quad A\sin\psi_2=b,\quad \psi_1=\arcsin\frac{a}{A},\quad \psi_2=\arcsin\frac{b}{A},$ $K=\frac{c}{b-a}$ қатынастарын ескере отыра, қанығуы мен сезімсіздік аймағы бар бейсызықты буынды гармоникалық сызықтаудың нақты коэффициенті үшін мына өрнекті аламыз:

$$q(A)=\frac{2c}{\pi(b-a)}\left[\arcsin\frac{b}{A}-\arcsin\frac{a}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right.$$

Бұл формула $A\geq b$ болғанда орындалады.

4.3-есеп.



4.4-сурет. Бейсызықты элемент сызықты бөліктен кейін тұрған бейсызықты жүйе

Бейсызықты АРЖ кірісіне $x(t) = v$ үздіксіз және $S_{xx}(\omega)$ шамасымен сипатталатын кездейсоқ құрамдардан тұратын сигнал беріліп тұр. Сызықты бөлігінің беріліс функциясы $W(p) = K/Q(p)$ (4.4-сурет).

Динамикалық z_g қателік және D_z қателік дисперсиясын анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Динамикалық қателік, сызықты жүйелердегі сияқты, бейсызықты элементінің түрлену коэффициенті K_o-ге тең деп алынып есептеледі:

$$z_g = v/(K_o K_\gamma) = v/[K_o(m_z, \quad D_z)K_\gamma] = m_x.$$

Дисперсия қателігін есептегенде бейсызықты элемент $K_1(m_z, \quad D_z)$ коэффициенті арқылы ескеріледі, яғни,

$$D_z = f[\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n; \quad S_{xx}, \quad K_1(m_z, \quad D_z)],$$

мұндағы $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ – жүйе параметрлері.

Сызықты жүйелердегідей:

$$D_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\left|\frac{1}{1 + K_1(m_z, \quad D_z)W(j\omega)}\right|^2 d\omega,$$

яғни кестелік интегралды аламыз.

Алынған өрнектің графоаналитикалық шешімдеріндегі қисықтардың қиылысқан нүктесі m_z және D_z мәндерінің шамасын береді.

4.4-есеп. Бейсызықты объектінің

$$y = \sqrt[3]{x}$$

статикалық теңдеуін $x_0 = 1;\ \ y_0 = \sqrt[3]{1} = 1$ нүктесінің маңайында сызықтау қажет.

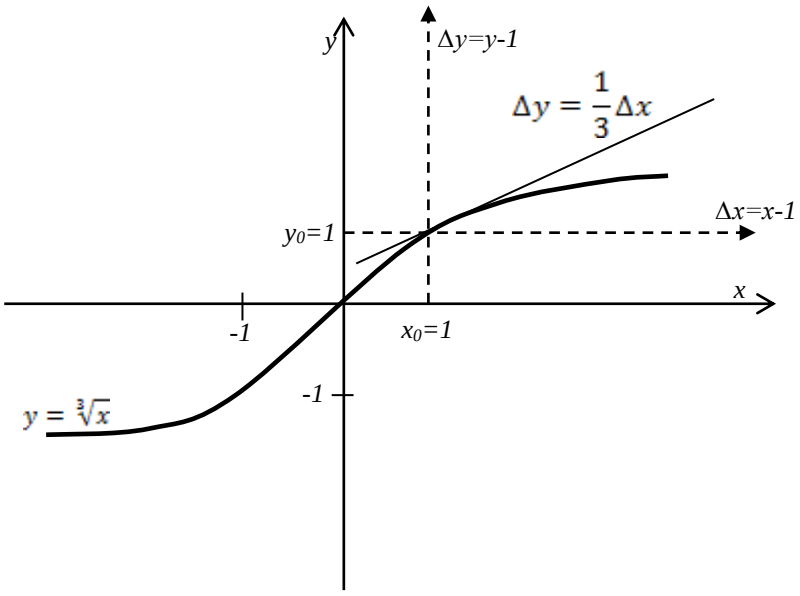
Ш е ш і м і: Сызықтауды бейсызықты теңдеуді $(x_0,\ \ y_0)$ берілген нүктенің маңайында Тейлор қатарына түзу және жаңа $\Delta x = x - x_0,\ \ \Delta y = y - y_0$ координат жүйесіне өту арқылы жүргіземіз. Берілген функцияны $x_0 = 1$ нүктесі маңайында Тейлор қатарына түзіп, дәрежесі бірден жоғары $(x - x_0)$ өрнегі бар мүшелерін алып тастап, мынаны аламыз:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \approx$$
$$\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

яғни $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$.

Мынадай $y - 1 = \Delta y;\ \ x - 1 = \Delta x$ белгілеулер енгізсек, $\Delta y = \Delta x/3$ сызықталған теңдеуді аламыз.

4.5-суретте алғашқы және сызықталған статикалық сипаттамалар келтірілген.



4.5-сурет. Алғашқы және сызықталған сипаттамалар

4.5-есеп. Сезімсіздік аймағы бар релелі бейсызықты жүйедегі өтетін процестерді зерттеу қажет (4.6,а-сурет).

Ш е ш і м і: Жүйе келесі теңдеулермен өрнектеледі:

$$\ddot{y} = u, \quad l = g_0 - y, \quad u = \begin{cases} 1, & l > \alpha, \\ 0, & |l| \le \alpha, \\ -1, & l < -\alpha. \end{cases}$$

Мұнда берілген (жоспарланған) шама $g = g_0$, яғни тұрақты. Жаңа айнымалылар енгізейік: $x_1 = l$, $x_2 = \dot{x}_1$. Бұл жаңа айнымалылар үшін жүйенің теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -u, \quad u = \begin{cases} 1, & x_1 > \alpha, \\ 0, & |x_1| \le \alpha, \\ -1, & x_1 < -\alpha. \end{cases}$$

Фазалық жазықтықты $x_1 = \alpha$ және $x_1 = -\alpha$ түзулерімен I, II, III үш аймақтарға бөлейік (4.6,б-сурет). Әр аймақ шеңберінде $u = const$. Сондықтан, соңғы теңдеулердегі екінші теңдеуді біріншіге бөліп, оны интегралдап, мына өрнекті аламыз: $x_2^2 = -2ux_1 + c$.

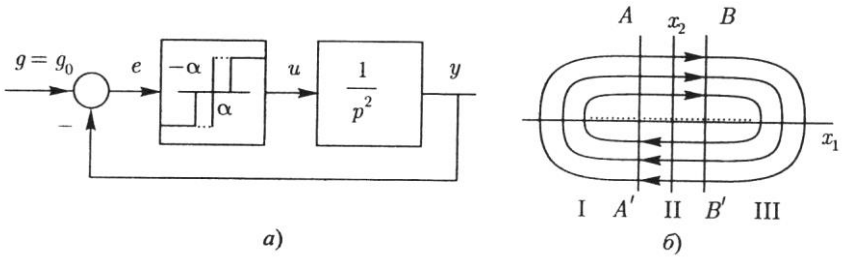
I аймақта $(x_1 < -\alpha)$ $u = -1$, және фазалық траекториялар теңдеуі мына түрде $x_2^2 = 2x_1 + c_1$ болады да, оң жаққа бағытталған параболалар үйірін анықтайды.

II аймақта $(|x_1| \le \alpha)$ $u = 0$, және фазалық траекториялар теңдеуі $x_2^2 = c_2$ түрінде болады да, абсцисса осіне параллель болатын түзулер үйірін анықтайды.

III аймақта $(x_1 > \alpha)$ $u = 1$, және фазалық траекториялар теңдеуі $x_2^2 = -2x_1 + c_3$ түрінде болады да, сол жаққа бағытталған параболалар үйірін анықтайды.

Жоғарыда айтылғаннан, барлық үш аймақтардағы фазалық траекториялардың теңдеулері де әр түрлі екенін және траекториялардың аймақтар шекараларынан өткен кезде бір түрден екінші түрге ауысатындықтарын көруге болады.

Алынған теңдеулер негізінде 4.6,б-суретте жүйенің фазалық портреті келтірілген:



4.6-сурет

Суреттен нөлдік емес бастапқы шарттарда, жүйеде өшпейтін тербеліс туатынын көруге болады. Тербеліс амплитудасы бастапқы шарттарға тәуелді. Тепе-теңдік күй (координат басы) орнықсыз, себебі, егер $\varepsilon < \alpha$ деп алсақ, онда δ оң санының қаншама аз мәнін таңдағанмен, абсцисса осінен емес, радиусы δ сфера ішінде басталған қобалжыған қозғалыс, әр уақытта радиусы ε сфераға жетіп отырады.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар мен берілген есептер

1. Бейсызықты жүйе деп
A) Ең дегенде бір элементінің сипаттамасы елеулі бейсызықты болып келсе
B) Ең дегенде екі немесе одан да көп элементі болса
C) Ең дегенде екі элементінің сипаттамасы елеулі бейсызықты болып келсе
D) Ең дегенде бір элементінің сипаттамасы елеулі сызықты болып келсе
E) Ең дегенде екі элементінің сипаттамасы елеулі сызықты болып келсе

2. Бейсызықты жүйеге
A) Аппроксимация қолданылады
B) Суперпозиция принципі қолданылмайды
C) Суперпозиция принципі қолданылады
D) Аппроксимация қолданылмайды
E) Интегралдау әдісі қолданылады

3. Тек бейсызықты жүйеге тән және орнықтылықтың жаңа ерекше түрі
A) Автотербеліс
B) Апериодтық орнықтылық
C) Тербелмелі орнықтылық
D) Орнықсыз тербеліс
E) Амплитудалы тербеліс

4. Бейсызықты сипаттамаларды гармоникалық әдіспен сызықтау кезінде
A) Бейсызықты жүйенің кіріс сигналы гармоникалық емес периодты болады
B) Бейсызықты жүйенің шығыс сигналы гармоникалық емес периодты болады
C) Сызықты жүйенің шығыс сигналы гармоникалық емес периодты болады
D) Сызықты жүйенің кіріс сигналы гармоникалық емес периодты болады
E) Бейсызықты жүйенің шығыс сигналы гармоникалық емес апериодты болады

5. Қатарға түзу әдісімен сызықтау кезінде бейсызықты сипаттаманы былай сызықтайды:
A) Аппроксимациялау арқылы
B) Суперпозиция принципін қолдану арқылы
C) Интегралдау әдісін қолдану арқылы
D) Дифференциалдау арқылы
E) Тейлор қатарына түзу арқылы

4.6-есеп.

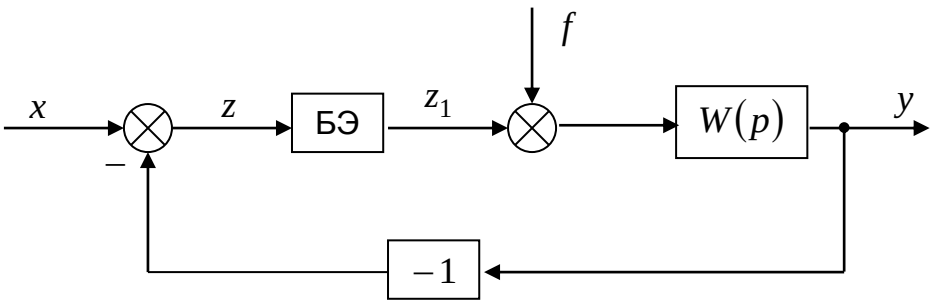
Параметрлері $K_c = 1,\ T = 10c,\ \tau = 5c,\ c = 25,\ b = 1$ болғандағы үшпозициялы релесі (4.1-кестедегі № 2 қара) және

$$W_c(p) = K_c e^{-p\tau} / (Tp + 1)$$

кешігуі бар сызықты бөлігі бар жүйедегі автотербелістің амплитудасы мен жиілігін анықтау қажет.

4.7-есеп. Симметриялы тербеліс кезіндегі қанығу мен гистерезисі бар құрама-сызықтық сипаттамалы бейсызықты буынның (4.2,б-сурет) гармоникалық сызықтау коэффициенттерін анықтау қажет.

4.8-есеп.



4.7-сурет. Статистикалық сызықтау әдісі үшін схема

АРЖ бейсызықты (БЭ) және беріліс функциясы $W(p) = K_o / p$ сызықты бөліктен тұрады. Жүйе кірісіндегі пайдалы сигнал $x(t) = 0$.

Спектралды тығыздығы $S_{ff}(\omega) = N^2$ бөгет $f(t)$ сигналы БЭ бейсызықты элемент пен сызықты бөлік арасына беріліп тұр (4.7-сурет).

Қателіктің D_z дисперсиясын анықтау қажет.

4.2. Бейсызықты жүйелерді зерттеу

Бейсызықты жүйелерді зерттеу үшін, жоғарыда қарастырылған бейсызықты сипаттамаларды сызықтау әдістеріне негізделген гармоникалық баланс, статистикалық сызықтау және фазалық траекториялар әдістері қолданылады.

Гармоникалық баланс әдісінің негізін мына тұрғыдан қарастыруға болады. Бейсызықты элементтің кірісі жағынан жүйе ажыратылады. Автотербелістік режим кезінде бейсызықты элементтің кірісіндегі x және шығысындағы y шамалардың бірінші гармоникалары бір-біріне тең және мына теңдеулермен өрнектеледі:

$$x = A\sin\omega t; \quad y = A(q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t).$$

Бұл теңдеулерді комплексті түрде былай жазуға болады:

$$\dot{x} = Ae^{j\omega t};$$
$$\dot{y} = A(q_1 + jq_2)e^{j\omega t} = (q_1 + jq_2)\dot{x}.$$

Олай болса, ажыратылған жүйенің шығысындағы сигналды мына теңдеумен көрсетуге болады:

$$\dot{z} = W(j\omega)(q_1 + jq_2)\dot{x} = W(j\omega)W_{б.э.}(A)\dot{x}.$$

Егер ажыратылған жүйенің кірісі мен шығысы $\dot{z} = -\dot{x}$ қатынасымен байланысқан болса, онда тұйықталған жүйеде автотербелістің бар болғаны. Яғни тұйықталған жүйе үшін

$$1 + W(j\omega)W_{б.э.}(A) = 0.$$

Осыдан $W(j\omega) = -\dfrac{1}{W_{б.э.}(A)}$.

Л.С. Гольдфарб формуласы деп аталатын бұл теңдеу есепті графоаналитикалық жолмен оңай шығаруға мүмкіндік береді. Бұл әдіс бойынша алдымен $W(j\omega)$ сызықты бөліктің амплитудалық фазалық сипаттамасы салынып, осы координат жүйесіне $W(A) = -\dfrac{1}{W_{б.э.}(A)}$ гармоникалық беріліс коэффициентінің қисығы да тұрғызылады.

Осы екі сипаттамалардың қиылысқан нүктесі бойынша $W(j\omega)$ қисығынан – автотербелістің ω жиілігі, ал $W(A)$ қисығынан A амплитудасы анықталады.

Егер қисықтар екі жерден қиылысса, онда жүйеде осы екі нүктеге сәйкес екі автотербелістің болғаны.

Жалпы жағдайда бейсызықты жүйелерде автотербелістің болмағаны жөн, болса да кейбір бейсызықты жүйелерде автотербеліс жұмыстық режим болып саналады.

Сонымен, гармоникалық баланс әдісі бойынша бейсызықты жүйелерді орнықтылыққа зерттеу келесі ретпен жүргізіледі:

1) жүйенің құрылымдық схемасы тұрғызылады;
2) бейсызықты элемент бөлініп алынып және жүйенің сызықты бөлігімен қосылып бірге қарастырылады;
3) сызықты бөлігінің жиіліктік сипаттамалары анықталады;
4) бейсызықты элемент сипаттамасы $W_{б.э.}(A)$ эквивалентті элементпен алмастырылады;
5) комплекстік жазықтықта $W(j\omega)$ және $W_{б.э.}(A)$ тұрғызылады;
6) егер қисықтар қиылысса, автотербелістің орнықтылығы зерттеледі және автотербелістік режимдегі параметрлер анықталады.

Статистикалық сызықтау нәтижесінде бейсызықты буын, m_y пайдалы сигнал мен $\dot{y}(t)$ бөгеттік сигналдар үшін әр түрлі күшейткіш коэффициенттері бар инерциясыз буынмен алмастырылады. Пайдалы және бөгеттік сигналдар үшін сызықталған жүйенің беріліс функциясын мына түрде көрсетуге болады:

$$\Phi_y^{(0)}(p) = W(p)/[1 + k_0 W(p)] \qquad (4.2.1)$$

$$\Phi_y^{(1)}(p) = W(p)/[1 + k_1 W(p)] \qquad (4.2.2)$$

$m_x = const$ болғанда, (4.2.1) формуланы пайдалана отыра

$$m_y = m_x W(0)/\left[1 + k_0\left(m_y, \sigma_y\right) W(0)\right], \qquad (4.2.3)$$

аламыз.

Алынған (4.2.3) теңдеу құрамында m_y пен σ_y екі белгісіз шамалар бар, сол себептен оның шешімін тек шығыс шаманың дисперсиясын анықтайтын

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\left|\frac{W(j\omega)}{1+k_1(m_y,\sigma_y)W(j\omega)}\right| d\omega \qquad (4.2.4)$$

теңдеумен бірге шешу арқылы табуға болады. Бұл теңдеудегі $S_x(\omega) - \overset{\circ}{x}(t)$ функциясының спектрлік тығыздығы.

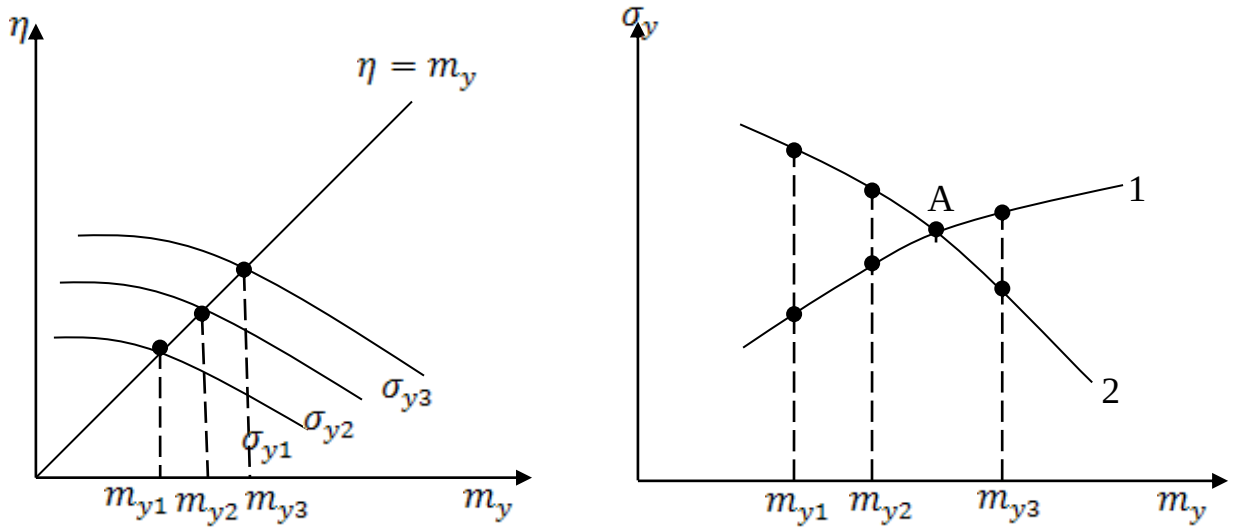
Жоғарыдағы (4.2.3) мен (4.2.4) теңдеулерді графикалық әдіспен де шешуге болады. Ол үшін (13.16) теңдеуді өзіне тең шамалы

$$\eta = m_y; \qquad (4.2.5)$$

$$\eta = m_x W(0)/\left[1 + k_0\left(m_y, \sigma_y\right)W(0)\right] \qquad (4.2.6)$$

теңдеулер жүйесімен алмастырамыз.

Бұл жүйедегі (4.2.5) теңдеуге $m_y - \eta$ координаталарында салынған 4.8-суреттегі координата бұрышының биссектрисасы сәйкес келеді; ал (4.2.6) теңдеуге осы координата жазықтығында салынған σ_{yi} параметрлері бар қисықтар тобы сәйкес келеді.



а) *б)*

4.8-сурет. (4.2.5) және (4.2.6) теңдеулердің графикалық шешімі

(4.2.6) теңдеуге сәйкес келетін σ_y-тің бірқатар мәндері үшін салынған қисықтар топтары мен (4.2.5) теңдеуге сәйкес түзудің қиылысқан нүктелері арқылы, алынған σ_{yi} мәндеріне сәйкес келетін m_{yi} шамаларын анықтаймыз. Табылған нүктелер бойынша $m_y - \sigma_y$ координата жазықтығында 1 қисықты саламыз (4.8,*б*-сурет). Осы координатада (4.2.4) теңдеу арқылы 2-қисықты да саламыз. Бұл екі қисықтардың *A* қиылысу нүктесі есептің іздеген шешімін береді.

Бұл әдісті автотербеліс бола алмайтын жүйелерге ғана қолдануға болады, себебі, автотербеліс жоқ болған жағдайда ғана m_x-тің тұрақты мәнінде m_y тұрақты шама бола алады. Осыған байланысты бұл әдісті қолдану алдында жүйеде автотербелістің болар не болмас мүмкіндігін гармоникалық баланс арқылы тексеріп алған жөн.

Жүйенің әрбір уақыт кезеңіндегі күйін кейбір *n*-өлшемді кеңістікте – *кескіндейтін нүкте* деп аталынатын жеке бір нүктемен көрсетуге болады, ал бұл нүктенің жүйе күйі өзгеру процесіне сәйкес қозғалыс жолын анықтайтын жолсызықты *фазалық траектория* деп атайды.

Фазалық траекториялар жиынтығын жүйенің *фазалық портреті* деп атайды.

Жалпы іс жүзінде көпөлшемді кеңістікті қолдану біраз қиыншылық туғызатындықтан, бейсызықты жүйелерді зерттегенде екіөлшемді фазалық жазықтықты қолданумен шектеледі. Бұл жағдайда абсцисса осі бойына реттелетін y (оның берілген мәнінен ауытқуын) мәнін салады да, ордината осіне $z = dy/dt$ мәнін салады.

Фазалық жазықтықтағы фазалық траекториялардан жиналу нүктелерін (немесе жинақсызданатын нүктелер) *ерекше нүктелер* деп атайды.

Параметрлік түрде фазалық траекториялар теңдеулер жүйесімен өрнектеледі:

$$\left.\begin{aligned} dy/dt &= P(y,z);\\ dz/dt &= Q(y,z), \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.7)$$

мұндағы $P(y,z)$ пен $Q(y,z)$ – y пен z мәндері үшін БС функциялар.

Екінші теңдеуді бірінші теңдеуге бөлу арқылы фазалық траекторияның дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{Q(y,z)}{P(y,z)} = H(y,z) \qquad (4.2.8)$$

Айнымалыларды бөліп және (4.2.8)-ді интегралдап фазалық траекториялардың тобы үшін жазылған өрнекті аламыз. АРЖ орнықтылығын анықтау үшін ерекше нүктелер маңайындағы (бұл жағдайда – координат басының маңайында) фазалық траекториялардың беталысын қараған жөн. Бұл үшін (4.2.7) теңдеулер жүйесін сызықтаймыз, яғни, оларды Маклорен қатарына түзіп, оның алдыңғы екі мүшесін қарастырсақ, мынаны аламыз:

$$dy/dt = ay + bz \qquad (4.2.9)$$

$$dz/dt = cy + dz, \qquad (4.2.10)$$

мұндағы $a = \partial P/\partial y;\ b = \partial P/\partial z;\ c = \partial Q/\partial y;\ d = \partial Q/\partial z.$

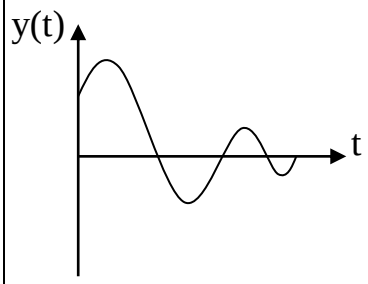
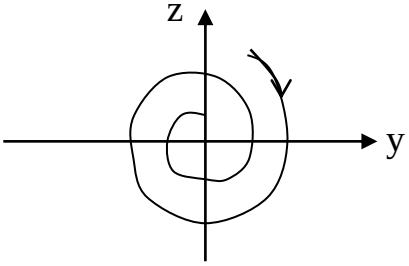
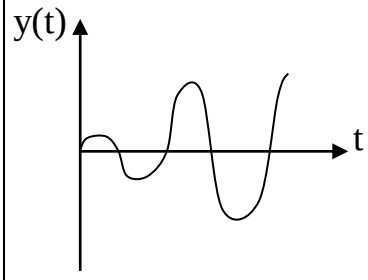
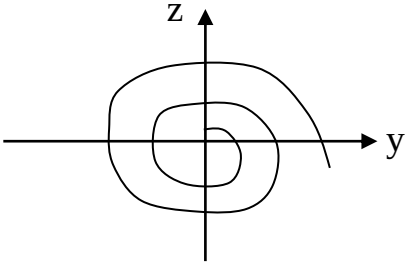
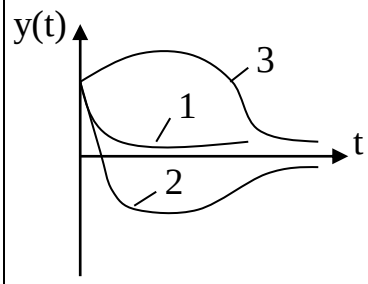
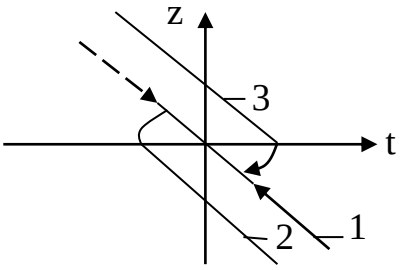
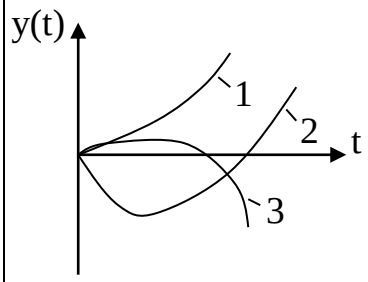
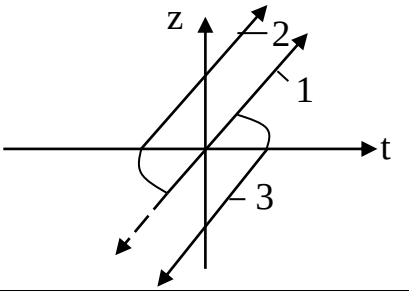
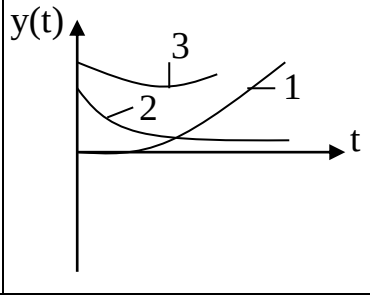
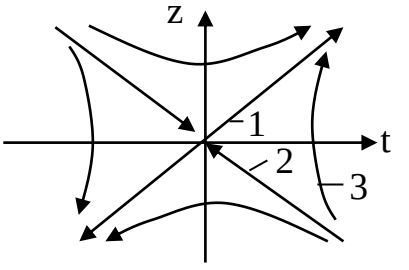
$y = z = 0$ болғанда, (4.2.9) және (4.2.10) теңдеулерді y үшін шешіп ерекше нүкте маңайындағы жүйе қозғалысының сызықталған теңдеуін аламыз.

Центр деп аталынатын ерекше нүкте ретіне координат басы жатады.

Фазалық жазықтықтағы тұйық фазалық траекторияның болуы АРЖ-да автотербелістердің бар екендігінің куәсі.

Төмендегі 4.1.2-кестеде ерекше нүктелердің әртүрлі жағдайлары,атаулары, оларға сәйкес келетін өтпелі процестер мен фазалық траекториялар келтірілген. Бұл кестедегі 1-3 әртүрлі өтпелі процестер және оларға сәйкес келетін фазалық жазықтықтағы фазалық траекториялар.

4.1.2-кесте

Аты	Өтпелі процесс	Фазалық траектория
орнықты фокус		
орнықсыз фокус		
орнықты түйін		
орнықсыз түйін		
ершік		

4.1.2-кестеде келтірілген фазалық траекториялар, (4.2.7) теңдеулер жүйесін сызықтауға мүмкіндік болатын тек *y* – *z* белгілі бір аймақ үшін ғана шындыққа сай келеді. Ал бұл аймақ сыртында алғашқы уақыттық теңдеулердің сызықтық қатынастардан алшақтап кетуіне байланысты фазалық траекториялар өзгерісі басқадай түрде болады.

4.10-есеп.

Бейсызықты АРЖ сызықты бөлігінің беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K}{p\left(T_1T_2p^2+T_1p+1\right)},$$

ал бейсызықты бөлігіндегі лезде жұмыс жасайтын полярланған реленің статикалық сипаттамасы

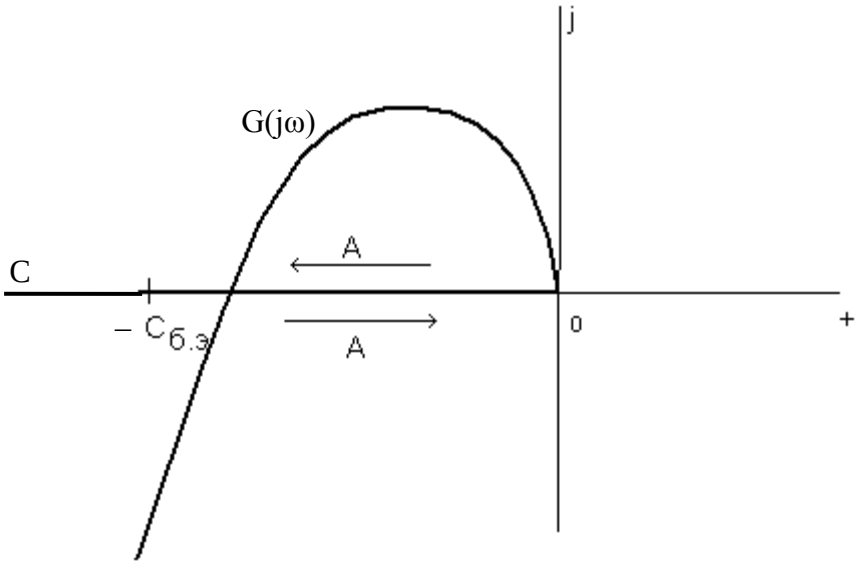
$$y=f(x)=\begin{cases} M; & x>a \quad болғанда; \\ 0 & -a<x<a \quad болғанда; \\ -M, & x<-a \quad болғанда, \end{cases}$$

мұндағы $M=const$.

Жүйенің сызықты бөлігінің кері амплитудалық фазалық сипаттамасын тұрғызу қажет.

Ш е ш і м і. Жүйенің кері беріліс функциясы кескініне $p=j\omega$ өрнегін қойып, оның нақты және жорамал бөліктерін анықтаймыз:

$$G(j\omega)=\left(\frac{1}{K}\right)\left[-\omega^2T_1+j\omega\left(1-\omega^2T_1T_2\right)\right]$$



4.9-сурет.

$G(j\omega)$ годографы (4.9-сурет) абсцисса осін оның жорамал бөлігі нөлге айналғанда, яғни $1-\omega^2T_1T_2=0$ болғанда кесіп өтеді. Бұл өрнекті нөлге айналдыратын ω_o жүйедегі автотербелістің жиілігі болады.

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}.$$

Координат басы мен қиылысу нүктесі арасында жатқан нақты ось бойындағы кесіндінің ұзындығы мынаған тең:

$$c = \omega^2 T_1 / K = \frac{1}{KT_2}.$$

Сызықтау нәтижесінде алынған бейсызықты буынның гармоникалық күшейту коэффициенттерін анықтайық:

$$q_1 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f\left(A\sin\psi\right)\sin\psi d\psi = 0;$$

$$q_2 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f\left(A\sin\psi\right)\cos\psi d\psi = 0;$$

$$a_o = \frac{4M}{\pi A}\int_0^{\pi/2}\sin\psi d\psi = \frac{4M}{\pi A}\cos\alpha,$$

мұндағы α мәнін $x = A\sin\alpha = a$ немесе $\cos\alpha = \sqrt{1 - a^2/A^2}$ қатынастарынан анықтауға болады.

Сонымен

$$q(A) = \begin{cases} \frac{4M}{\pi A}\sqrt{1 - a^2/A^2}, & A \geq a \text{ болғанда} \\ 0, & A < a \text{ болғанда.} \end{cases}$$

Тербеліс амплитудасын мына теңдеуден табамыз:

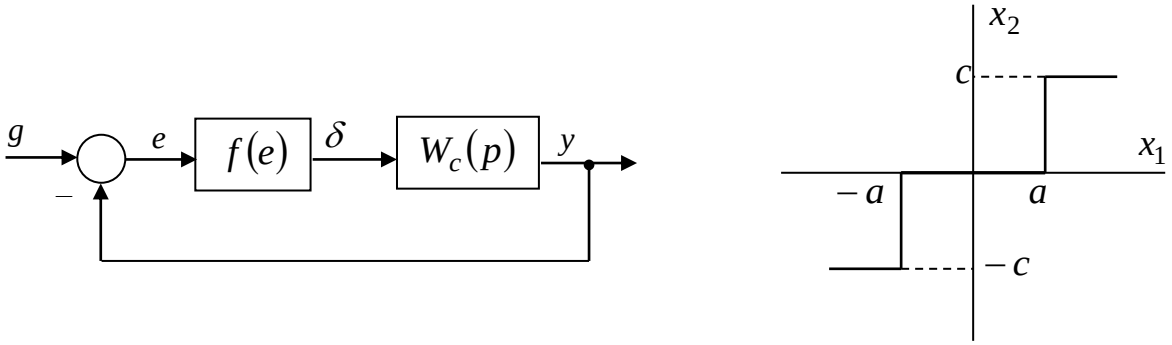
$$q(A) = \frac{4M}{\pi A}\sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} = c = \frac{1}{KT_2}.$$

Біздің жағдайда шешімді аналитикалық түрде алуға болады:

$$A = 2\sqrt{2}KT_2\frac{M}{\pi}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \pi^2 a^2/\left(4K^2T_2^2M^2\right)}}.$$

Қиылысу нүктесі біреу-ақ болғанымен, оған екі амплитуданың мәні сәйкес келеді. Оның кіші мәні ось бойымен A-ның өсу бағытымен оң жаққа жылжығанда алынады. Амплитуданың әрі қарай өсуі, қайсыбір нүктеде жылжу бағытын өзгертеді. Екінші қиылыс үлкен амплитуда кезінде солға қарай жылжығанда алынады. Егер $4K^2T^2/M^2 < \pi^2 a^2$ немесе $a > 2KT_2M/\pi$ болса, онда сипаттамалардың қиылысуы болмайды да, автотербеліс те тумайды.

4.11-есеп. Бейсызықты жүйе (4.10,а-сурет) параметрлері $a = 0{,}45,\ \ c = \pi$ болатын сезімсіздік аймағы бар релелік сипаттамалы (4.10,б-сурет) бейсызықты буыннан, беріліс функциясы $W(p) = 4{,}1/(0{,}5p+1)^2$ сызықты бөліктен және $g = const$ тапсырыстық әсерден тұрады. Осы жүйедегі автотербелісті зерттеу қажет.



а) б)

4.10-сурет

Ш е ш і м і: Бейсызықты буынның беріліс функциясы

$$W_б(A) = q(A) = \frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} = \frac{4}{A}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}45}{A}\right)^2}.$$

Жүйедегі периодтық процестің түзілу шартын мына түрде жазуға болады:

$$-j0{,}25\omega^3 - \omega^2 + j\omega + \frac{16{,}4}{A}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}45}{A}\right)} = 0$$

немесе

$$U(\omega) = -\omega^2 + \frac{16{,}4}{A}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}45}{A}\right)^2} = 0,$$

$$V(\omega) = -0{,}25\omega^3 + \omega = 0.$$

Соңғы теңдеудің оң шешімі $\omega = 2$ болғанда болады. Бұл жиіліктің мәнін қоя отыра, бірінші теңдеуді биквадрат теңдеуге түрлендіруге болады:

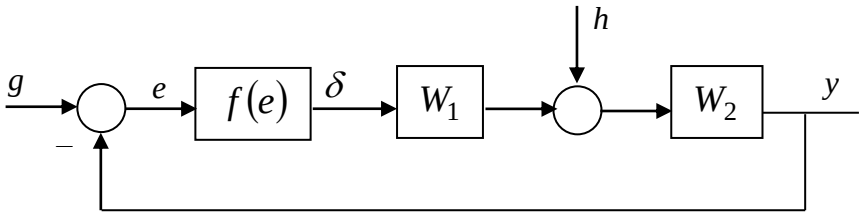
$$A^4 - 4{,}1^2 A^2 + 4{,}1^2 \cdot 0{,}45^2 = 0.$$

Бұл теңдеудің $A_1 \cong 4{,}08$ және $A \cong 0{,}454$ екі оң шешімі бар. Орнықтылық шартын тексерейік. Туынды

$$\frac{dq(A)}{dA} = \frac{4\left(0{,}405 - A^2\right)}{A^3\sqrt{A^2 - 0{,}45^2}}$$

$A_1 \cong 4{,}08$ болғанда теріс мәнге, ал $A \cong 0{,}454$ болғанда оң мәнге ие болады. Сондықтан, бірінші амплитудалы тербеліс асимптотикалық орнықты, ал екіншісі орнықсыз болады. Сонымен, қарастырылып отырған жүйеде амплитудасы $A_1 \cong 4{,}08$, жиілігі $\omega = 2$ автотербеліс пайда болады.

4.12-есеп. Бейсызықты жүйе (4.11-сурет) параметрі $c = \pi$ болатын идеал релелі сипаттамалы бейсызықты буыннан және беріліс функциялары $W_1(p) = 1/(0{,}5p + 1)$, $W_2(p) = 1/(0{,}5p + 1)p$ сызықты бөліктен тұрады. Сыртқы берілген әсерлер $g = 1(t)$ және $h = 0{,}5 \cdot 1(t)$. Жүйедегі автотербелісті зерттеу қажет.



4.11-сурет

Ш е ш і м і: Жүйе теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$y = W_1(p)W_2(p)\delta + W_2(p)h, \quad \delta = f(e), \quad e = g - y$$

Егер $W_1(p) = P_1(p)/Q_1(p)$, $W_2(p) = P_2(p)/Q_2(p)$ және $P(p) = P_1(p)/P_2(p)$, $Q(p) = Q_1(p)Q_2(p)$, $S(p) = P_2(p)Q_1(p)$ десек, онда y және δ айнымалыларын жоғалта отыра, жүйенің теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$Q(p)l + P(p)f(e) = Q(p)g - S(p)h.$$

Яғни, $P_1(p)=P_2(p)=1,\quad Q(p)=0{,}5p+1,\quad Q_2(p)=(0{,}5p+1)p,$ $Q(p)=Q_1(p)Q_2(p)=(0{,}5p+1)^2\,p$ және $S(p)=P_2(p)Q_1(p)=0{,}5p+1.$

Гармоникалық сызықтау коэффициенттері мына түрде болады:

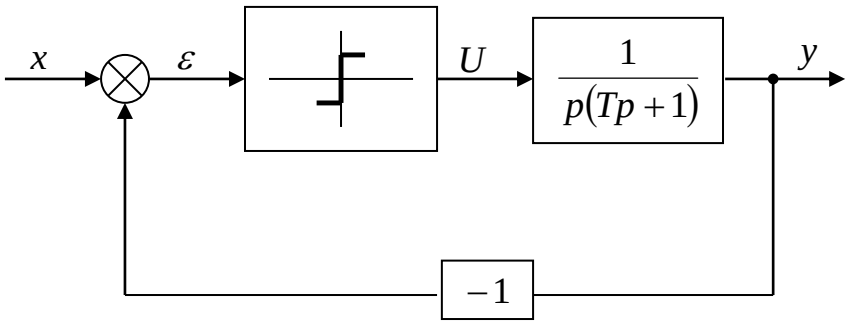
$$\delta=\frac{2c}{\pi}\arcsin\frac{l}{A},\quad q_1=\frac{4c}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{l}{A}\right)^2},\quad q_2=0,\quad A\geq|e|.$$

$Q(0)=0,\ P(0)=1$ және $S(0)=1$ болатындықтан, $\arcsin\frac{l}{A}=-0{,}25$ немесе $\frac{l}{A}=-\sin 0{,}25\cong -0{,}25.$

4.13-есеп.

Бейсызықты релелік жүйенің (4.12-сурет) сызықты бөлігінің беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K}{p(Tp+1)}.$$



4.12-сурет. Релелік жүйенің құрылымдық схемасы

Жүйенің қозғалыс теңдеуін және басқарушы U әсеріне сәйкес шығыстық шаманың өзгерісін анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Жүйенің сызықты бөлігінің теңдеуі

$$T\frac{dy}{dt}+y=ku. \qquad (4.2.11)$$

Релелік құрылғының шығысындағы сигналдың шамасы тұрақты, ал таңбасы ε айырымдық шаманың таңбасына сәйкес өзгеріп отырады:

$$u=U\operatorname{sign}\varepsilon, \qquad (4.2.12)$$

немесе

$$u = \frac{U\varepsilon}{|\varepsilon|}. \qquad (4.2.13)$$

Айырымдық шама

$$\varepsilon = x - y \qquad (4.2.14)$$

екендігін ескере отыра, (4.2.11), (4.2.12), (4.2.14) өрнектерінен жүйенің дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$T\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - kUsign(x - y) = 0 \qquad (4.2.15)$$

$sign(x - y)$ – тақ функция, яғни $sign(-\varepsilon) = -sign(\varepsilon)$ екендігін ескере отыра және $x = 0$ жағдайын қарастыра отыра (4.2.15) теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$T\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + kU\,\mathrm{sign}y = 0. \qquad (4.2.16)$$

Есепті жеңілдету үшін $T = 1$ және $kU = 1$ деп алайық. $\mathrm{sign}y = -\chi$ деп белгілейік, яғни $\chi = 1 \quad y < 0$ болғанда және $\chi = -1 \quad y > 0$ болғанда.

Олай болса, (4.2.16) теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \chi.$$

$\frac{dy}{dt} = V$ деп алып, бірінші ретті теңдеу аламыз:

$$\frac{dV}{dt} + V = \chi; \quad \frac{dy}{dt} = V. \qquad (4.2.17)$$

(4.2.17) теңдеуден тәуелсіз t айнымалысын шығарып тастасақ, V мен y шамаларын бір-бірімен байланыстыратын теңдеуді аламыз:

$$\frac{dV}{dy} = (\chi - V)/V.$$

Бастапқы $t=0,\ V=V_o,\ y=y_o$ шарттарда интегралдау амалын жүргізе отыра, фазалық траектория теңдеуін аламыз:

$$y = y_o + V_o - V + \chi \ln\left[(V_0 - \chi)/(V - \chi)\right]$$

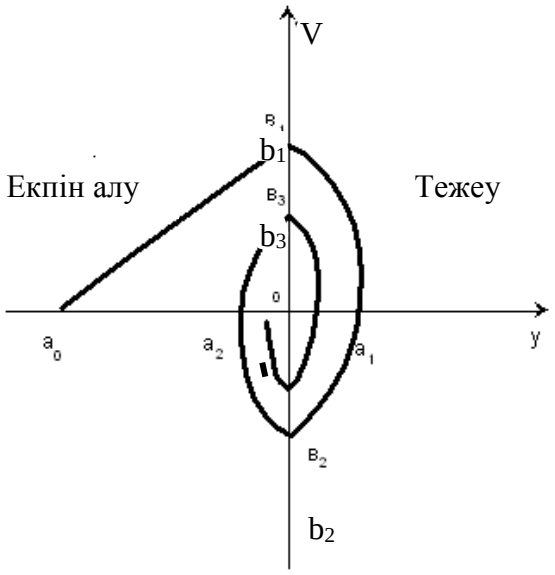
$\chi = 1$ болғанда, фазалық траектория теңдеуі:

$$y = y_o + V_o - V + \ln\left[(1 - V_o)/1 - V\right], \qquad (4.2.18)$$

ал $\chi = -1$ болғанда:

$$y = y_o + V_o - V - \ln\left[(1 + V_o)/1 + V\right]. \qquad (4.2.19)$$

4.13-суретте әр түрлі бастапқы шарттардағы $\chi = 1$ және $\chi = -1$ мәндері үшін фазалық траекториялар келтірілген. $\chi = +1$ үшін салынған траекториядан $\chi = -1$ үшін салынған траекторияға өту, V осінде y таңбасын өзгерткен кезде және χ мәні + 1-ден – 1-ге дейін немесе керісінше өзгерген кезде іске асырылады. Фазалық траектория V осіне жеткен кезде реле қайта қосылады. V осі қайта қосу сызығы.



4.13-сурет. Релелік жүйенің фазалық траекториясы

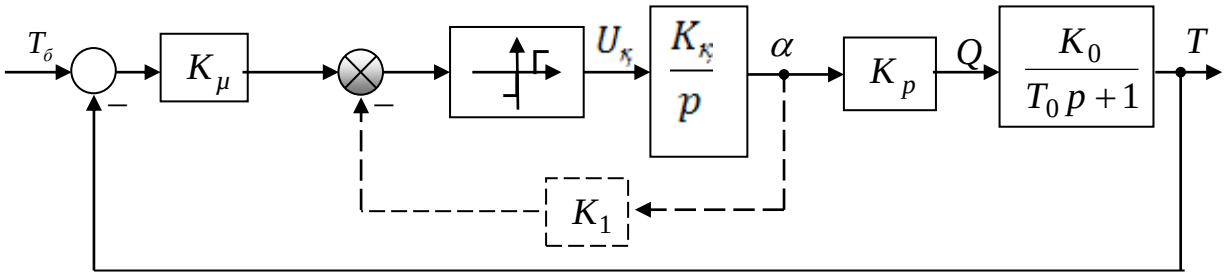
Бастапқы $V_o = 0$ және $y = \overline{0a_o}$ шарттар үшін, яғни жүйенің кірісіне $t = 0$ кезінде x_o күрт түсімі берілгендегі фазалық траектория 4.13-суретінде келтірілген. Онда жүйе қозғалтқышы екпінін және бастапқы ауытқуды сипаттайтын $a_o b_1$ аймағы (4.2.18) формула бойынша тұрғызылған. Ал, $b_1 a_1 b_2$ аймағы (4.2.19) формулаға сәйкес тұрғызылған. Әрі қарай т.с.с. Екінші

аймағы үшін бастапқы мәндер $y=0,\ V_o=\overline{0b_1}$, ал үшінші аймағы үшін $y_o=0,\ V_o=\overline{0b_2}$ және т.с.с.

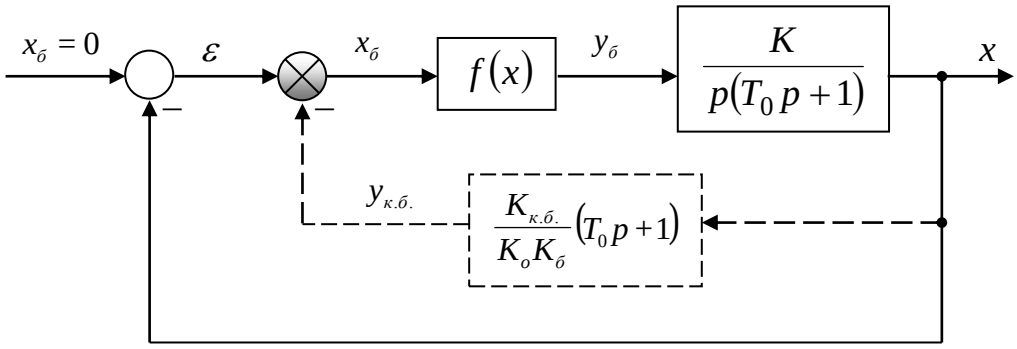
Нәтижесінде координат басында тоғысатын қисық алынған. Яғни, жүйедегі тербелістің өтпелі, ал жүйенің орнықты екенін көреміз.

4.14-есеп.

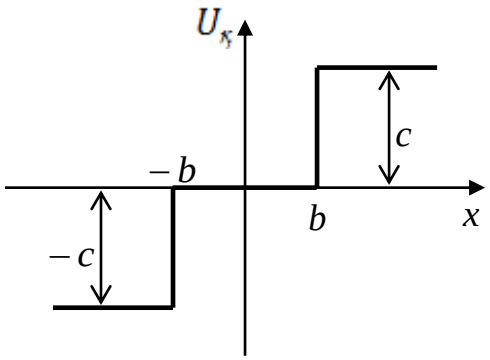
Үшпозициялы релемен басқарылатын температураны стабильдеу жүйесінің фазалық портретін тұрғызу қажет. Жүйенің алгоритмдік схемасы 4.14,*а*-суретте келтірілген. Объект – инерциялы, өлшегіш элемент пен реттеуіш – K_μ, K_p инерциясыз, ал орындаушы механизм – $\frac{K_к}{p}$ интегралдауыш буынмен көрсетілген. Бейсызықты элемент – үшпозициялы реле. Оның сипаттамасы 4.14,*в*-суретте берілген.



а)



б)



в)

4.14-сурет. Температураны стабильдеу жүйесінің алғашқы *(а)*, түрлендірілген *(б)* схемалары және реленің сипаттамасы *(в)*

Ш е ш і м і. Берілген 4.14,*а*-схеманы 4.14,*б* түріне келтіреміз. Схеманың сызықты бөлігінің теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$T_o \frac{d^2T}{dt^2} + \frac{dT}{dt} = K_c U_к,$$

мұндағы $K_c = K_\mu K_p K_к$ – сызықты бөліктің беріліс коэффициенті.

Бейсызықты бөлік – реленің теңдеуін $U_к = f(x_б)$ бейсызықты функция түрінде жазамыз:

$$U = f(x_б) = \begin{cases} +c & егер\ x_б > в, \\ 0 & егер\ |x_б| < в, \\ -c & егер\ x_б < -в. \end{cases}$$

Ішкі кері байланыс жоқ кезде $x_б = \varepsilon$. T температураның $T_б$ берілген мәнінен ауытқуын x деп алайық. Олай болса, $\varepsilon = -x$, ал тұйықталған жүйенің ауытқулар бойынша теңдеуі мына түрде жазылады:

$$T_o \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = K_c f(x), \qquad (4.2.20)$$

мұндағы

$$f(x) = \begin{cases} +c & егер\ x < -в, \\ 0 & егер\ |x| < в, \\ -c & егер\ x > в. \end{cases} \qquad (4.2.21)$$

(4.2.20) теңдеуі Коши формасында жазылған бірінші ретті екі теңдеулер жүйесіне пара-пар:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ dx_2 \big/ dt &= [-x_2 + K_c f(x_1)]/T_o, \end{aligned}\right\}$$

мұндағы $x_1 = x = \Delta T = T - T_б$, $x_2 = x_1$.

Екінші теңдеуді біріншісіне бөліп, фазалық траекторияның бейсызықты теңдеуін аламыз:

$$dx_2 / dx_1 = T_o^{-1}[-1 + K_c f(x_1)/x_2]. \qquad (4.2.22)$$

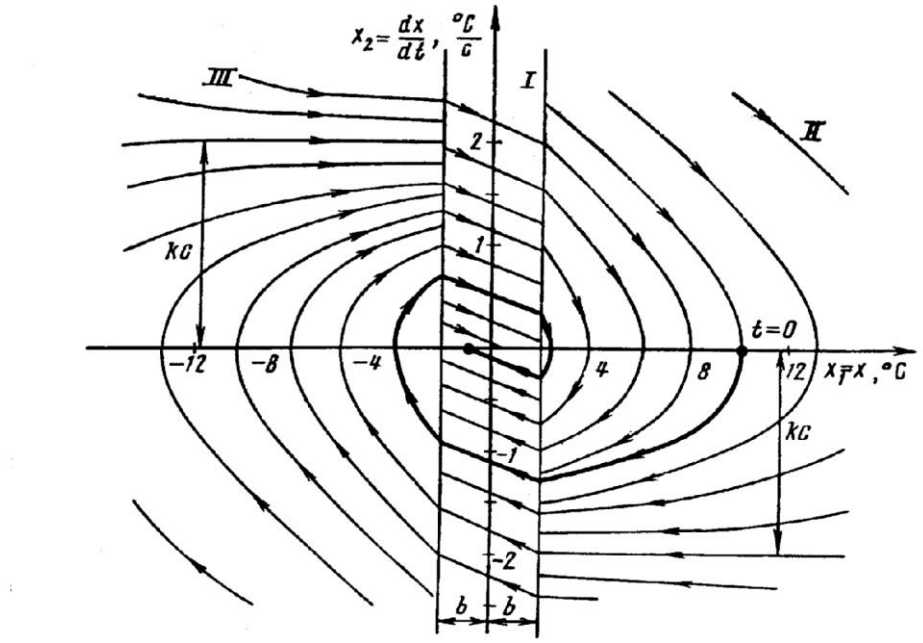
(4.2.21) функцияның түріне сәйкес фазалық жазықтықты (4.15-сурет) үш аймаққа бөлеміз. $|x| < в$ мәніне сәйкес келетін I аймақта, (4.2.22) теңдеуі мына түрде жазылады:

$$dx_2 = -\frac{1}{T_o} dx_1.$$

Алынған теңдеудің шешімі

$$x_2 = -\frac{1}{T_o} x_1 + C_{01},$$

мұндағы C_{01} – интегралдау тұрақтысы.



4.15-сурет. Температураны стабильдеу жүйесінің фазалық портреті

Сонымен, I орталық аймақта фазалық траекториялар $\frac{1}{T_o}$ теріс еңістігі бар түзу сызықтар түрінде болады.

$x > в$ және $x < в$, ал $f(x_1) = -c$ және $f(x_1) = +c$ болатын сәйкес II және III аймақтарда (1.1.3) теңдеуі мына түрде жазылады:

$$dx_2 / dx_1 = (-1 \pm K_c c / x_2 T_o).$$

x_1 және x_2 айнымалыларын бөлектей отыра, аламыз:

$$dx_1 = -T_o x_2 \, dx_2 / (x_2 \pm K_c c). \qquad (4.2.23)$$

(4.2.23) өрнегін интегралдасақ, фазалық траекторияның теңдеуін аламыз:

$$x_1 = -\left(T_o x_2 \pm T_o K_c c \ln\left|x_2 \pm K_c c\right|\right) + c_{0II(III)},$$

мұндағы жоғарғы белгілер II аймақ үшін, ал төменгі белгілер III аймақ үшін алынады.

4.15-суреттегі фазалық траекториялар $T_o = 10c$, $K_c = 0{,}04^{\circ}C/B \cdot C$; $c = 50B$, $в = 2^{\circ}C$ параметрлері болғандағы C_o тұрақтысының әр түрлі мәндері үшін тұрғызылған. Температураның бастапқы $\Delta T = x_o = +10^{\circ}C$ ауытқуына сәйкес келетін фазалық траектория жуан сызықпен көрсетілген.

Фазалық портреттен, температураның әрбір бастапқы ауытқуынан және оның туындысынан кейін жүйеде өтетін өтпелі тербелісті көруге болады. Бұл тербеліс температураның ауытқуы $в = 2^{\circ}C$ сезімсіздік аймағынан кіші болғанға дейін жалғаса береді.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар мен берілген есептер

1. Автотербелістің жиілігін зерттеу үшін қолданылатын әдіс
A) Фазалық траекториялар әдісі
B) Гармоникалық баланс немесе А.С.Гольдфарб әдісі
C) Статикалық сызықтау әдісі
D) Жинақтау әдісі
E) Ляпунов әдісі

2. Бейсызықты жүйенің q_1 және q_2 гармоникалық күшейту коэффициенттері тәуелді...
A) Шығыстағы сигналдың амплитудасына
B) Шығыстағы сигналдың жиілігіне
C) Кірістегі сигналдың амплитудасына
D) Кірістегі сигналдың жиілігіне
E) Кірістегі сигналдың ұзақтығына

3. Комплексті жазықтықта сызықты бөліктің АФЖС-ы $W_c(j\omega)$ мен бейсызықты жүйенің гармоникалық күшейткіш коэффициенті қисығы $M(A)$ бір-бірімен қиылысса
A) Жүйеде автотербеліс пайда болады
B) Әртүрлі параметрлі автотербеліс болмайды
C) Жүйеде автотербеліс пайда болмайды
D) Әртүрлі параметрлі автотербеліс болады
E) Автотербеліс орнықты болады

4. Бейсызықты жүйелерді зерттеуде, егер кірістік сигнал кездейсоқ болса,
A) Статистикалық әдіс қолданылады
B) Гармоникалық баланс әдісі қолданылады
C) Жинақтау әдісі қолданылады
D) Гармоникалық әдіс қолданылады
E) Ляпунов әдісі қолданылады

5. Гармоникалық баланс әдісі
A) Жүйеде орныққан гармоникалық тербеліс болғанда пайдаланылады
B) Идеал релелік сипаттамалар үшін негізделген
C) Бірмағыналы статикалық сипаттамаларды сызықтау әдісіне негізделген
D) Сызықты сипаттамаларды сызықтау әдісіне негізделген
E) Бірмағынасыз статикалық сипаттамаларды сызықтау әдісіне негізделген

6. Жүйе күйін кескіндейтін нүктенің жүйе күйі өзгеру процесіне сәйкес қозғалыс жолын анықтайтын жолсызық
A) Фазалық траектория
B) Фазалық портрет

C) Шектік циклдар
D) Орнықсыздық
E) Орнықтылық

7. Фазалық траекториялар жиынтығы жүйенің
A) Фазалық портреті
B) Фазалық траекториясы
C) Шектік циклдары
D) Орнықсыздығы
E) Орнықтылығы

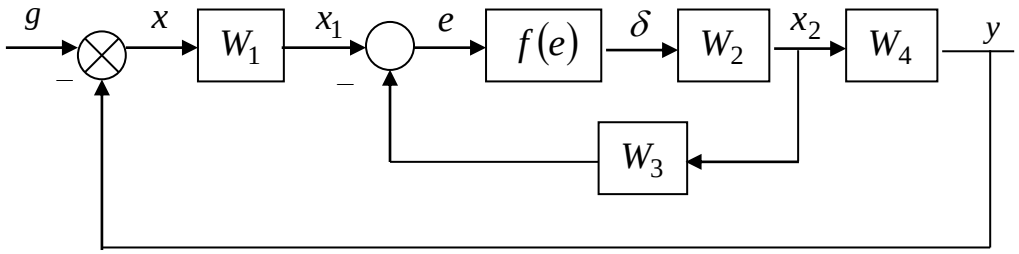
8. Фазалық жазықтықта қозғалыс теңдеу түбірі жорамал болса оған
A) Эллипс түрінде болатын фазалық траектория сәйкес болады
B) Шеңбер түрінде болатын орнықсыз жүйе сәйкес болады
C) Эллипс түрінде болатын фазалық траектория сәйкес бола алмайды
D) Эллипс түрінде болатын орнықты жүйе сәйкес болады
E) Шеңбер түрінде болатын фазалық траектория сәйкес болады

9. Ерекше нүктелер
A) Фазалық жазықтықтағы фазалық траекториялардың жиналу нүктелері
B) Уақыт жазықтығындағы нүктелер
C) Фазалық жазықтықтағы нүктелер
D) Жүйе күйін кескіндейтін нүктелер
E) Өтпелі процесс кезіндегі нүктелер

10. Фазалық траектория
A) Жүйе күйін кескіндейтін нүктенің жүйе күйі өзгеру процесіне сәйкес келетін қозғалыс жолын анықтайтын жолсызық
B) Фазалық жазықтықтың нүктелерінен фазалық траекториялар бірдей еңістікпен өтетін нүктелердің геометриялық орны
C) Уақыттық жазықтықтың нүктелерінен фазалық траекториялар бірдей еңістікпен өтетін нүктелердің геометриялық орны
D) Фазалық жазықтықтағы нүктелер жиынтығы
E) Фазалық жазықтықтағы ерекше нүктелер жиынтығы

11. Фазалық портрет
A) Фазалық траекториялар жиыны
B) Жүйе күйін кескіндейтін нүктенің жүйе күйі өзгеру процесіне сәйкес келетін қозғалыс жолын анықтайтын жолсызық
C) Уақыттық жазықтықтың нүктелерінен фазалық траекториялар бірдей еңістікпен өтетін нүктелердің геометриялық орны
D) Фазалық жазықтықтың нүктелерінен фазалық траекториялар бірдей еңістікпен өтетін нүктелердің геометриялық орны
E) Фазалық жазықтықтағы фазалық траекториялардан жиналу нүктелері

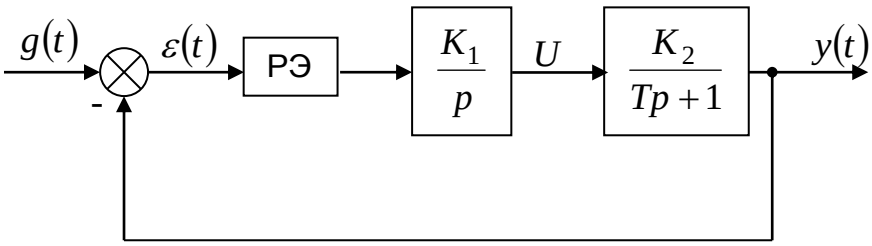
4.15-есеп. Бейсызықты жүйе (4.16-сурет) параметрі $c=\pi$ болатын идеал релелік сипаттамалы бейсызықты буыннан және беріліс функциялары $W_1=K_1(1+0{,}1p)$, $W_2=1/(0{,}1p+1)p$, $W_3=K_3/(T_3p+1)$, $W_4=1/(p+1)$ сызықты бөліктен тұрады. Бейсызықты буынның кірісіндегі автотербеліс амплитудасын $A=4$ және беріліс функциясы W_4 буын автотербеліс амплитудасын 100 рет әлсірететін, K_3 және T_3 мәндерін анықтау қажет.



4.16-сурет

4.16-есеп.

Құрамында бейсызықты РЭ релелі элементі бар, сызықты бөлігі интегралдауыш (сервоқозғалтқыш) және апериодты (объект) буындардан тұратын автоматты реттеу жүйесін фазалық жазықтықта зерттеу қажет. Объектінің өздік теңесу қасиеті бар делік.



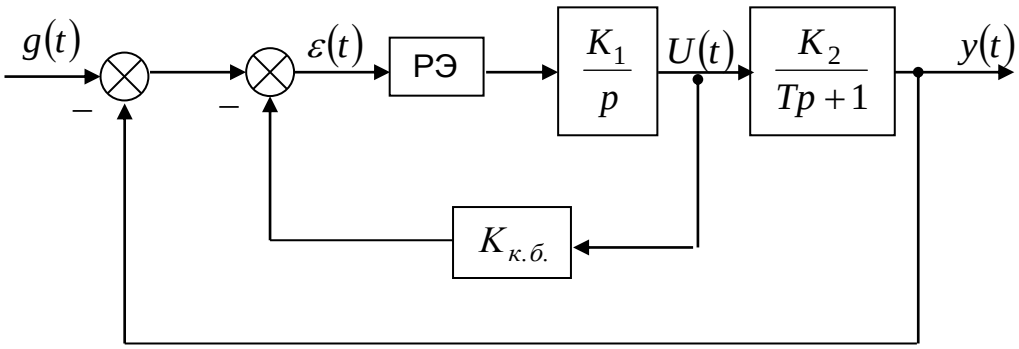
4.17-сурет. Релелі элементі бар АРЖ

4.17-есеп.

Жоғарыдағы 4.16-есептегі объектінің өздік теңесу қасиеті жоқ деп алып, жүйедегі процестің фазалық портретін зерттеу қажет. Есепті $K=50c^{-1}$, $y_{01}=10$; $y_{02}=30$, $y_{03}=100$ мәндері үшін шығару керек.

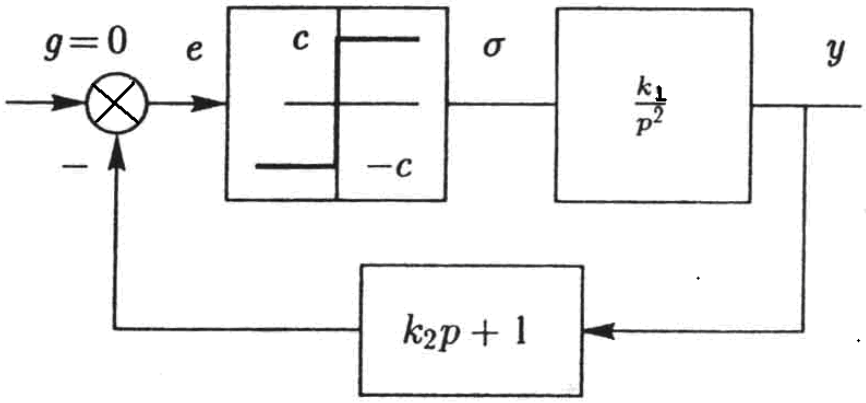
4.18-есеп.

Реттеу жүйесінің жұмысын тұрақтандыру үшін беріліс коэффициенті $K_{к.б.}$ жергілікті кері байланыс қолданылған. Есепті шығарарда 4.16-есепке назар аудару қажет.



4.18-сурет. Бейсызықты АРЖ құрылымдық схемасы

4.19-есеп. Төмендегі 4.19-суретте келтірілген жүйені фазалық портретін тұрғызу арқылы зерттеу қажет.



4.19-сурет

4.3. Бейсызықты жүйелердің абсолют орнықтылығы

Бейсызықтықтың белгілі бір класында әсердің «үлкен болғандағы» немесе «жалпы жағдайдағы» бейсызықты жүйенің орнықтылығын абсолют орнықтылық деп атайды.

Бейсызықты жүйенің абсолют орнықтылығы үшін румын ғалымы В.М.Поповтың критерийі қолданылады:

Статикалық сипаттамасы [o,k] бұрышында жатқан бейсызықты элементі бар және амплитудалық фазалық жиіліктік сипаттамасы $W_C(j\omega) = P_C(\omega) + jQ_C(\omega)$ *болатын сызықты буыннан тұратын бейсызықты жүйенің абсолют орнықтылығы үшін қайсыбір q санының болуы және жиіліктің барлық* $\omega \geq 0$ *мәндерінде*

$$P_C(\omega) - q\omega Q_C(\omega) + \frac{1}{k} > 0, \qquad (4.3.1)$$

шарттың орындалуы жеткілікті.

Попов критерийінің анықтамасындағы

$$P_C(\omega) - q\omega Q_C(\omega) + \frac{1}{k} = 0, \qquad (4.3.2)$$

немесе

$$\omega Q_C(\omega) = \frac{kP_C(\omega)+1}{kq} \qquad (4.3.3)$$

өрнегі геометриялық тұрғыда

$$Q_C^*(\omega) = Q_C(\omega) \cdot \omega,$$

$$P_C^*(\omega) = P_C(\omega)$$

координатында $P_C^*(\omega)$ осін $\left(-\frac{1}{k}\right), 0$ нүктесінде $tg\alpha = \frac{1}{q}$ еңістік бұрышымен кесіп өтетін түзу сызық. Бұл сызық *Попов түзуі* деп аталады.

Попов түзуі барлық жазықтықты екі жартылай жазықтықтарға бөледі. Осыған байланысты (4.3.1) теңсіздігінің Попов түзуінің оң жақ бөлігіндегі жазықтықты сипаттайтынын көруге болады.

Сонымен, Попов критерийіне төмендегідей геометриялық түсініктеме беруге болады:

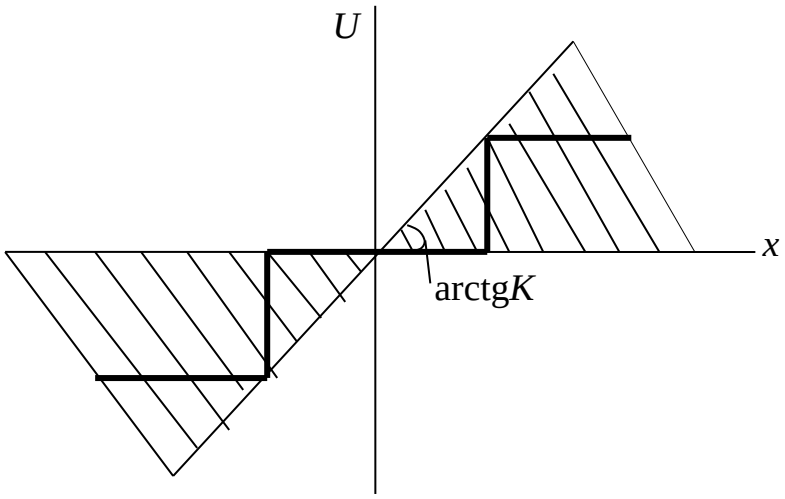
Орнықты сызықты бөлігі бар және [0,k] бұрышында бейсызықтығы бар АРЖ абсолют орнықтылығының жеткілікті шарты, $W_C^*(j\omega)$ *жазықтығында нақты ось бойындағы* $-\frac{1}{K}$ *нүктесінен түзу жүргізе*

алатындай мүмкіндіктің болуы және түрі өзгертілген $W_c^*(j\omega)$ *АФЖС-ның осы түзудің тек оң жағында орналасуы.*

4.20-есеп. Бейсызықты жүйенің сызықты бөлігінің беріліс функциясы

$$W_c(p) = \frac{-1}{(0{,}5p+1)(0{,}2p+1)(0{,}1p+1)}$$

ал бейсызықты бөлігінің сипаттамасы (4.20-сурет)



4.20-сурет. Бейсызықты буынның статикалық сипаттамасы

[o,k] бұрышында орналасқан (мұндағы $K = K_c K_б$ және ол бейсызықты буынға жатқызылған делік). *K*-ның қандай мәндерінде жүйе абсолют орнықты екенін анықтау қажет.

Ш е ш і м і. Жиіліктік беріліс функциясының нақты және жорамал бөліктерін анықтаймыз:

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Осыдан

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)}{(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)(1+\omega^2T_3^2)}$$

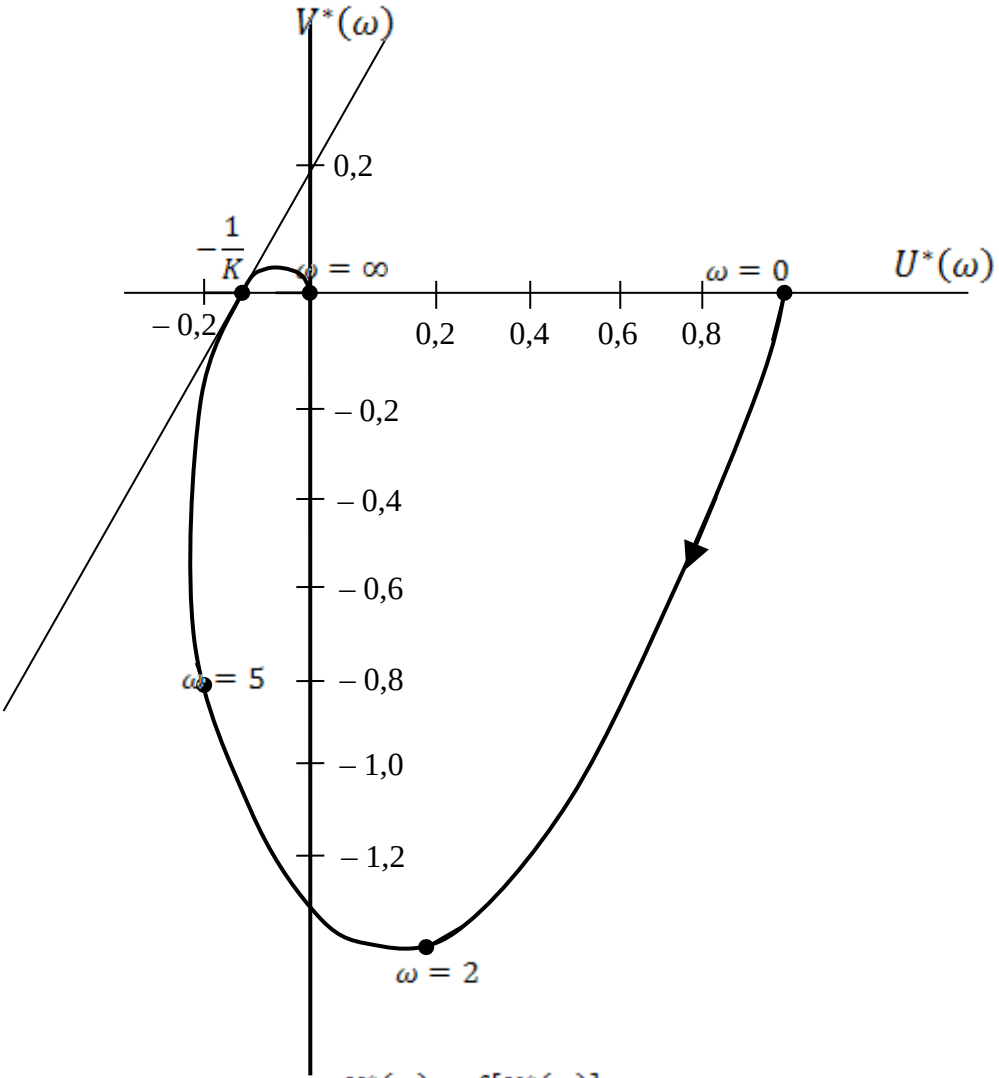
$$V(\omega) = \frac{-\omega(T_1+T_2+T_3)+\omega^3T_1T_2T_3}{(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)(1+\omega^2T_3^2)}.$$

Қайсыбір $U^*(j\omega) = U(\omega)$ және $V^*(\omega) = \omega V(\omega)$ функцияларын енгіземіз:

$$U^*(\omega) = \frac{1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)}{(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)(1+\omega^2T_3^2)}$$

$$V^*(\omega) = \frac{-\omega^2(T_1 + T_2 + T_3) + \omega^4T_1T_2T_3}{(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)(1+\omega^2T_3^2)}.$$

Алынған өрнектерді пайдалана отыра, $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ жазықтығындағы сипаттаманы (4.21-сурет) тұрғызамыз. Енді $(-1/k, jo)$ нүктесі арқылы, алынған сипаттама түгелімен оң жағында жататындай етіп, Попов түзуін жүргіземіз. Алынған 4.21-суреттен $1/k \approx 0{,}08$ екендігін анықтаймыз, сондықтан $0 < K < 12{,}5$ бұрышында жатқан, барлық бейсызықты сипаттамалар үшін қарастырылып отырған жүйе абсолют орнықты.

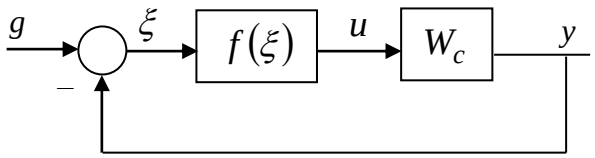


4.21-сурет. $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ жазықтығындағы сипаттама

4.21-есеп. Бейсызықты жүйенің (4.22-сурет) сызықты бөлігінің беріліс функциясы

$$W_c(p)=\frac{b_0}{a_0p^2+a_1p+a_2}(b_0,\quad a_0,\quad a_1,\quad a_2>0).$$

Жүйенің K-ның қандай мәндерінде $[0,\ K]$ бұрышында абсолют орнықты болатынын анықтау қажет.



4.22-сурет

Ш е ш і м і: Сызықты бөліктің жиіліктік комплекстік күшейту коэффициенті

$$W_c(j\omega)=\frac{b_0}{-a_0\omega^2+ja_1\omega+a_2}.$$

Осыдан

$$U(\omega)=\frac{b_0\left(a_2-a_0\omega^2\right)}{\left(a_2-a_0\omega^2\right)^2+(a_1\omega)^2},$$

$$V(\omega)=\frac{-b_0a_1\omega}{\left(a_2-a_0\omega^2\right)^2+(a_1\omega)^2}.$$

Поповтың абсолют орнықтылық критерийіне сәйкес

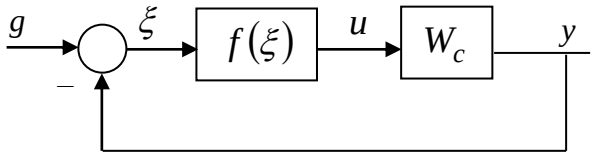
$$\frac{b_0\left(a_2-a_0\omega^2\right)+qb_0a_1\omega^2}{\left(a_2-a_0\omega^2\right)^2+(a_1\omega)^2}+\frac{1}{K}>0.$$

Егер $q=a_0/a_1$ деп алсақ,

$$U(\omega)=\frac{b_0a_2}{\left(a_2-a_0\omega^2\right)^2+(a_1\omega)^2}+\frac{1}{K}>0.$$

Алынған теңсіздік барлық $\omega \geq 0$ және $K > 0$ болғанда орындалады. Сондықтан жүйе барлық ақырлы $K > 0$ үшін $[0,\ K]$ бұрышында абсолют орнықты.

4.22-есеп. Бейсызықты жүйенің (4.23-сурет) сызықты бөлігінің беріліс функциясы $W_c = 10/(p-1)$. Жүйенің $[0{,}2;\ 200]$ бұрышта абсолют орнықтылығын зерттеу қажет.



4.23-сурет

Ш е ш і м і: Түрлендірілген беріліс функция мына түрде болады:

$$W_T = W_c/(1 + K_1 W_c) = 10/(p+1).$$

Осыдан

$$W_T(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1} = \frac{10(1 - j\omega)}{\omega^2 + 1},$$

$$U_T(\omega) = \frac{10}{\omega^2 + 1},\ V_T(\omega) = -\frac{10\omega}{\omega^2 + 1}$$

Сызықты бөлігі орнықты емес жүйе үшін Попов критерийіне сәйкес шарт мына түрде болады:

$$\frac{10}{\omega^2 + 1} + q\omega\frac{10\omega}{\omega^2 + 1} = \frac{10 + q10\omega^2}{\omega^2 + 1} > -\frac{1}{200 - 0{,}2},$$

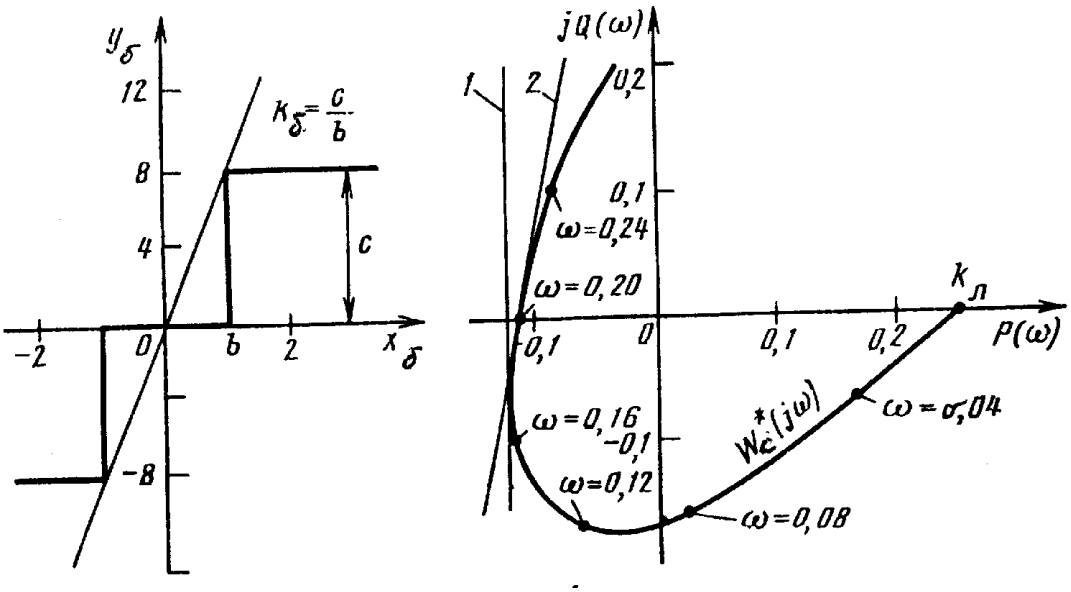
және шарт барлық $\omega \geq 0$ және $q \geq 0$ мәндерінде орындалады. Яғни, жүйе $[0{,}2;\ \ 200]$ бұрышында абсолют орнықты.

4.23-есеп.

Параметрлері $в = 1,\ \ c = 8$ үшпозициялы релелі элементтен (4.24,*а*-сурет) және параметрлері $K_c = 0{,}25;\ \ T = 10c;\ \ \tau = 10c,$ яғни

$$W_c(j\omega) = K_c e^{-j\omega\tau} / (Tj\omega + 1)$$

сызықты бөліктен тұратын бейсызықты жүйенің Попов критерийі көмегімен абсолют орнықтылығын бағалау қажет.



а) *б)*

4.24-сурет. Абсолют орнықтылықты бағалау

Ш е ш і м і. Есеп шартындағы сызықты бөліктің беріліс функциясын нақты және жорамал бөліктермен жазамыз:

$$W_c(j\omega) = \frac{K_c(\cos\omega\tau - T\omega\sin\omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} - j\frac{K_c(\sin\omega\tau + T\omega\cos\omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Алынған теңдеудің түрлендірілген түрін табамыз:

$$W_c^*(j\omega) = \frac{K_c(\cos\omega\tau - T\omega\sin\omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} - j\omega q\frac{K_c(\sin\omega\tau + T\omega\cos\omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} = U^*(\omega) + jV^*(\omega).$$

Абсциссасы $1/K_c = -0{,}125$ нүктесінен 1 түзуін жүргіземіз (4.24,*б*-сурет). Бұл түзу $W_c^*(j\omega)$ қисығымен қиылыспайды. Яғни, берілген параметрлерде жүйе абсолют орнықты.

Енді кері есепті шешейік: орнықтылық шарты бойынша *в* сезімсіздік аймағының жарамды (допустимое) мәнін анықтайық.

Ол үшін $W_c^*(j\omega)$ сипаттамасына жанастырылған 2 түзуді тұрғызамыз. Бұл түзу нақты осьті абсциссасы $\approx 0{,}11$ нүктесінде қиып өтеді. Осыдан

жарамды мәні бұрыштық коэффициент үшін $K_б \leq 1/0{,}11 \approx 9$, ал сезімсіздік аймағы үшін $в \geq C/K_б = 8/9 \approx 0{,}9$ болады. $в < 0{,}9$ кезінде жүйе орнықсыз.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар мен берілген есептер

1. Бейсызықтың белгілі бір класында әсердің «үлкен болғандағы» немесе «жалпы жағдайдағы» орнықтылығы
A) Абсолют орнықтылық
B) Тікелей орнықтылық
C) Бейсызықты орнықтылық
D) Сызықты орнықтылық
E) Ауыспалы орнықтылық

2. Бейсызықты жүйенің абсолютті орнықтылығы үшін
A) В.М.Поповтың критерийі қолданылады
B) Ляпуновтың критерийі қолданылады
C) Тікелей критерийі қолданылады
D) Сызықты критерийі қолданылады
E) Талдау критерийі қолданылады

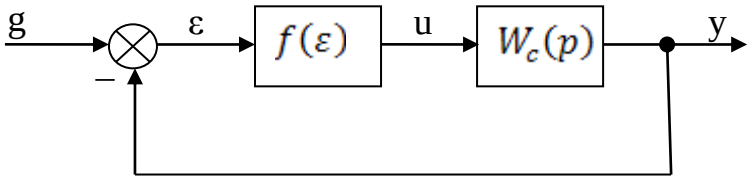
3. Абсолют орнықтылық шарты
A) $K_1 \leq \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq K_2$
B) $K_1 \geq \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \vdash\vdash K_2$
C) $K_1 \leq \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \geq K_2$
D) $K_1 \geq \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq K_2$
E) $K_1 \dashv \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \dashv\dashv K_2$

4. $P_c(w) - qwQ_c(w) + \frac{1}{k} > 0$ теңсіздігі
A) Попов критерийінің негізгі шарты
B) Попов түзуінің сол жақ бөлігіндегі жазықтықты сипаттайды
C) Абсолют орнықтылықты сипаттайды
D) Бейсызықты жүйенің орнықтылығын сипаттайды
E) Сызықты жүйенің орнықтылығын сипаттайды

4.24-есеп. Сызықты бөлігінің беріліс функциясы

$$W_c(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$$

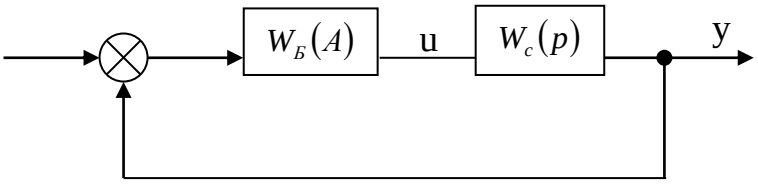
болатын жүйенің (4.25-сурет) [0, 10] бұрышындағы абсолют орнықтылығын зерттеу қажет.



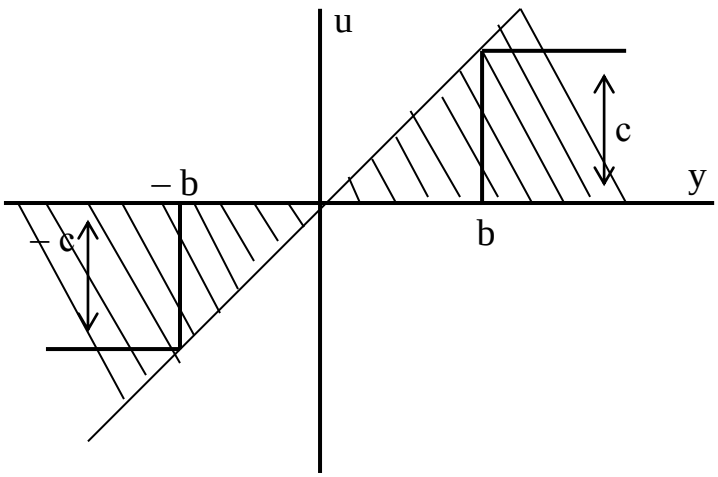
4.25-сурет

4.25-есеп. Бейсызықты жүйенің құрылымдық схемасы және оның бейсызықты бөлігінің сипаттамасы 4.26-суретте келтірілген. Параметрлері $T_1 = 5c,\ \ T_2 = 1{,}25c,\ \ \xi_1 = 0{,}5,\ \ \xi_2 = 0{,}05,$ сызықты және бейсызықты бөліктерінің сәйкес беріліс және күшейту коэффициенттері $K_c = 4,$ $K_б = c/b = 0{,}5$ деп алып, жүйенің абсолют орнықтылығының жеткілікті шартының орындалуын тексеру қажет. Мұнда

$$W_c(p) = \frac{-K_c}{(1 + 2\xi_1 T_1 p + T_1^2 p^2)(1 + 2\xi_2 T_2 p + T_2^2 p^2)}$$



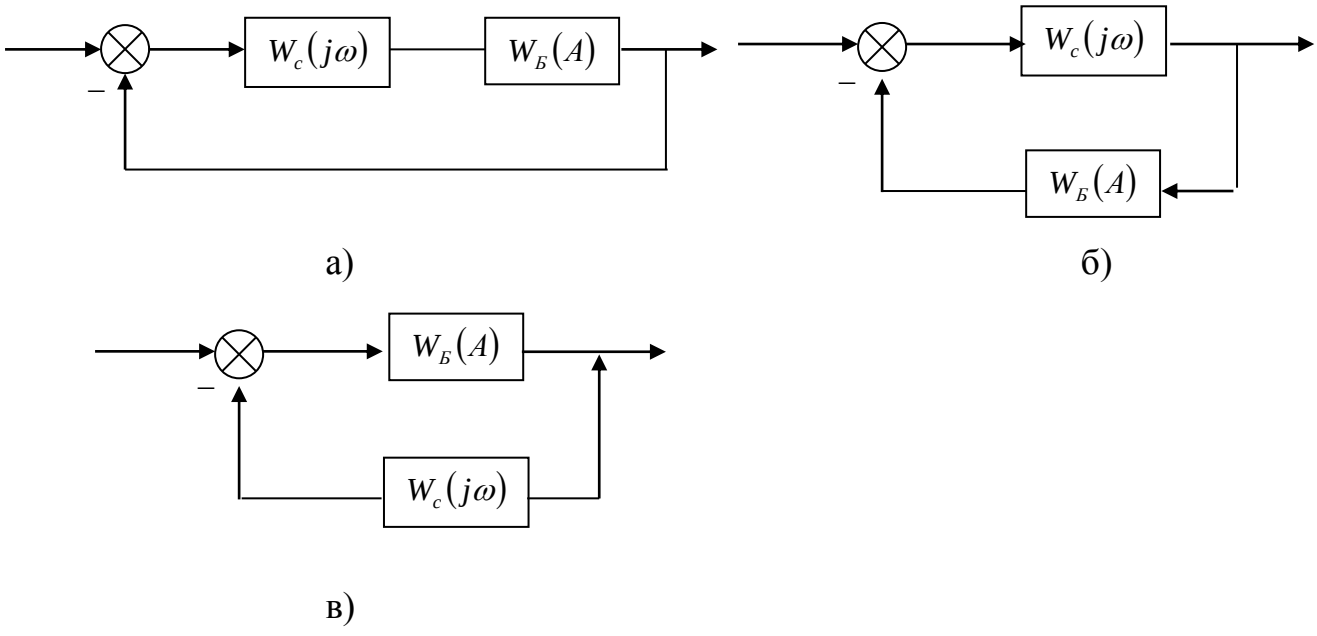
а)



4.26-сурет. Жүйенің құрылымдық схемасы және бейсызықты буынның сипаттамасы

4.4. Бейсызықты автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық схемасын түрлендіру

Жүйенің орнықтылығын талдау үшін көпконтурлы бейсызықты автоматты реттеу жүйесін құрылымдық түрлендіру арқылы 4.27,а-4.27,в-суреттердегідей бірконтурлы түрге келтіру қажет.



4.27-сурет. Бейсызықтылығы бар автоматты реттеу жүйесінің есептеуіш құрылымдық схемасы

Тұйық жүйенің (4.27,а-сурет) беріліс функциясы

$$\Phi(A, j\omega) = \frac{W_C(j\omega)\cdot W_Б(A)}{1 + W_C(j\omega)\cdot W_Б(A)}, \qquad (4.4.1)$$

Мұндағы $W_Б(A)$ – бейсызықты элементтің эквивалентті беріліс функциясы;

$W_C(j\omega)$ – жүйенің сызықты бөлігінің беріліс функциясы.

Екінші схемадағы (4.27,б-сурет) тұйық жүйенің беріліс функциясы

$$\Phi(A, j\omega) = \frac{W_C(j\omega)}{1 + W_C(j\omega)\cdot W_Б(A)}, \qquad (4.4.2)$$

ал үшінші (4.27,в-сурет) схемадағынікі:

$$\Phi(A, j\omega) = \frac{W_Б(A)}{1 + W_C(j\omega)\cdot W_Б(A)}, \qquad (4.4.3)$$

Жоғарыда айтылғандай, бұл жүйелердің орнықтылығын талдау келесі теңдеу көмегімен орындалады:

$$1 + W_C(j\omega)W_Б(A) = 0 \qquad (4.4.4)$$

немесе

$$W_C(j\omega) = -M_Б(A), \qquad (4.4.5)$$

мұндағы $M_Б(A) = W_Б^{-1}(A)$.

Сонымен, бейсызықты автоматты реттеу жүйесін талдау үшін алдымен құрылымдық түрлендіруді жүргізіп, соңынан (4.4.4) немесе (4.4.5) түріндегі теңдеулерді құру қажет.

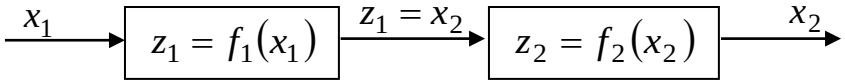
Бейсызықты жүйеде буындарды бейсызықты элемент арқылы жылжытуға болмайды. Ал бейсызықты элементтің не алдында, не артында тұрған сызықты буындарды белгілі ережелер бойынша түрлендіре беруге болады. Құрылымдық түрлендірудің бұл әдісінде сызықты буындарға жүргізілген түрлендірулерге қарамастан, бейсызықты элемент өзінің алғашқы орналасқан жерін сақтап қалады.

Құрылымдық схеманы түрлендірудің басқа да әдісі бар. Бұл әдіс бейсызықтықты бір байланыс жолынан ажыратып, оны ішкі контурлардан шығарып алуға негізделген.

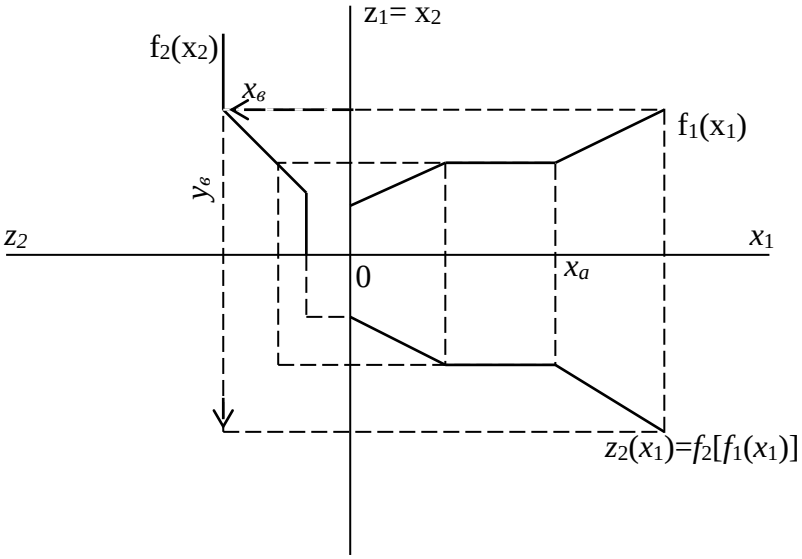
4.26-есеп.

Тізбектеле қосылған $z_1 = f(x_1)$ «сезімсіздік аймақты» және $z_2 = f_2(x_2)$ «шектеу» типті бейсызықты екі буыннан тұратын жүйенің сипаттамасын анықтау қажет.

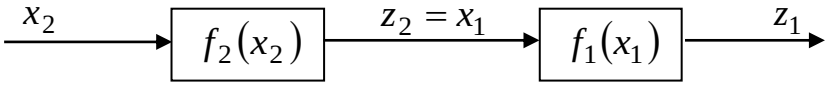
Ш е ш і м і. 4.28-суретінде мұндай қосылыстардың сипаттамаларын тұрғызудың екі нұсқасы орындалған.



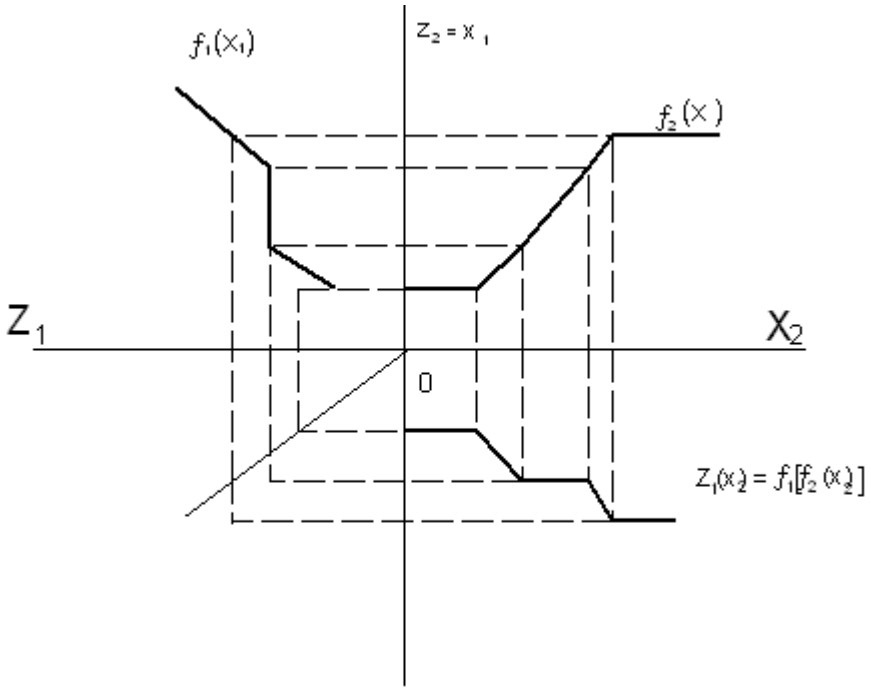
а)



б)



в)



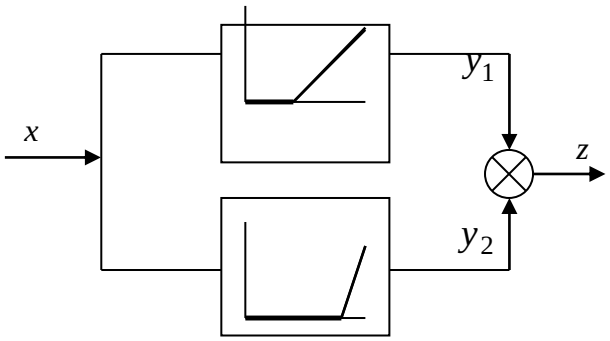
г)

4.28-сурет. Бейсызықты буындардың тізбектеле қосылуы және олардың сипаттамалары

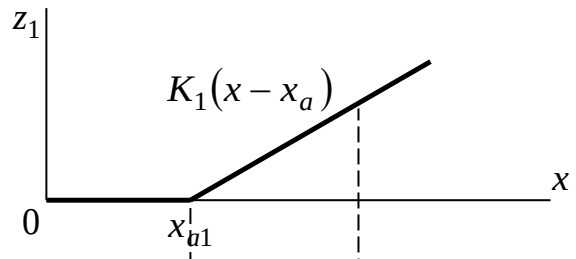
4.28,*б*-суретте *а)* суретіндегі бейсызықты буындардың қосылысы үшін салынған $z_2(x_1) = f_2[f_1(x_1)]$ тәуелділігі, ал 4.28,*г*-суретінде өзіне сәйкес 4.28,*в*-суретіндегі бейсызықты буындардың қосылысы үшін салынған $z_1(x_2) = f_1[f_2(x_2)]$ тәуелділігі келтірілген. Тұрғызу нәтижесінде екі жағдайда да «сезімсіздік аймақты шектелу» типті буынға сәйкес сипаттаманы алғанымызды көреміз. Бірақ олардағы z_c шектеуіне сәйкес келетін шығыстық шама және x_c сезімсіздік аймағына сәйкес келетін кірістік шама мәндерінің әр түрлі болатындықтарын байқаймыз.

4.27-есеп.

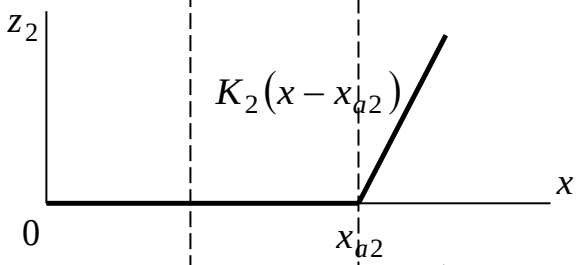
Тіктіктері K_1, K_2 және сезімсіздік аймақтары x_{a1}, x_{a2} (4.29,*б,в*-суреттер) параллель қосылған екі бейсызықты буындардан (4.29-сурет) тұратын жүйенің сипаттамасын анықтау қажет.



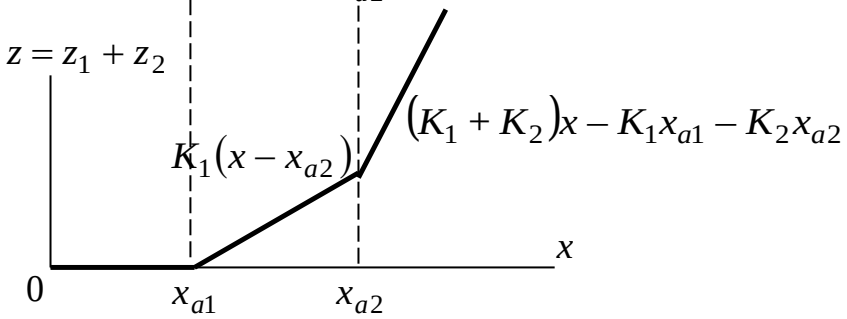
а)



б)



в)



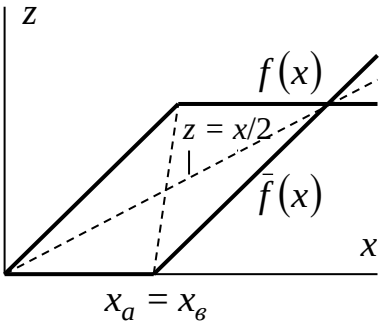
г)

4.29-сурет. Бейсызықты буындардың параллель қосылуы және олардың сипаттамалары

Ш е ш і м і. Есепті графикалық әдіспен шешеміз. Ол үшін 4.29,*б*-сурет және 4.29,*г*-суретіндегі берілген бейсызықты буындардың ординаталарын x-тің әрбір мәні үшін графикалық әдіспен қосамыз. Нәтижесінде 4.29,*г*-суретіндегі сипаттаманы аламыз.

4.28-есеп.

«Бірлік еңістікті және $x_в = 1/2$ сызықтық аймақты шектеу» типті берілген $f(x)$ сипаттамасына (4-сурет) қатынасты қосымша $\bar{f}(x)$ сипаттамасын табу қажет.



4.30-сурет. Қосымша сипаттаманы анықтау

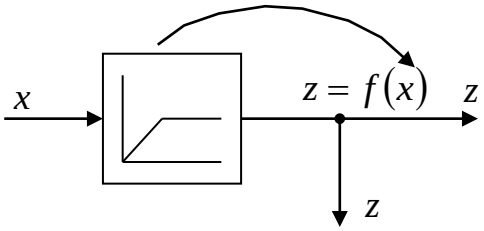
Ш е ш і м і. Координат басынан $z = x/2$ түзуін жүргіземіз (4.30-суреттегі пунктир сызық). Бұл түзуге сәйкес y осі бойымен эквидистанттық шартынан керекті $\bar{f}(x)$ сипаттамасын табамыз.

Бұл сипаттама, $x_а = x_в = 1/2$ болатын «сезімсіздік аймақты» типті буынды бейнелейді. Сонымен, бірлік еңістікті және $x_а = x_в$ болғанда «шектеу» және «сезімсіздік аймақты» типті буындардың өзара қосымша сипаттамалары болатынын көреміз.

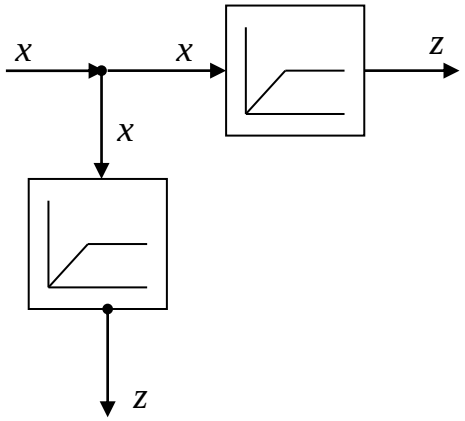
4.29-есеп.

4.31,*а*-суретінде келтірілген бейсызықты буынды шығысындағы қосылыс нүктесінен кейін орналастыру қажет.

Ш е ш і м і. Тараудың теориялық бөлімінде келтірілген түрлендірудің бірінші ережесіне сәйкес қосылыс нүктесіндегі байланыс бойына операторы ығыстырылатын буындікіндей қосымша буынды орналастырамыз.



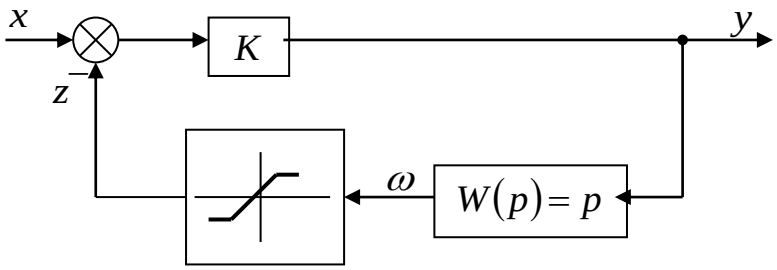
а)



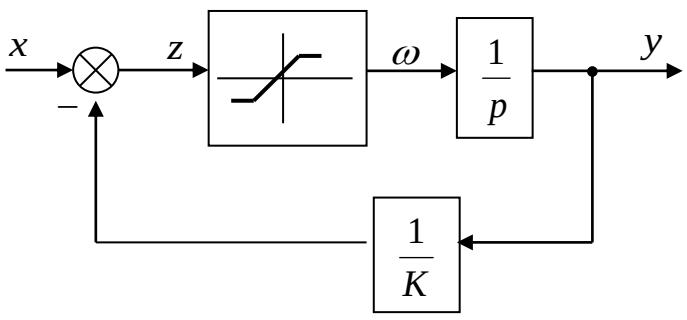
б)

4.31-сурет. Қосылу нүктесін ауыстыру

4.30-есеп. Бейсызықты жүйенің негізгі байланыс жолында беріліс функциясы $W(p)=K$ пропорционалдық буын, ал кері байланысы жолында $z=f(\omega)$ бейсызықты буын және беріліс функциясы $W(p)=p$ дифференциалдауыш буын бар (4.32,*а*-сурет). Негізгі және кері байланыстардағы буындардың орындарын алмастыру қажет.



а)



б)

4.32-сурет. Кері байланысты бейсызықты жүйе

Ш е ш і м і. Тарау басында келтірілген теориядағы бейсызықты жүйелерді түрлендірудің үшінші ережесіне сәйкес 4.32,*б*-суретіндегідей түрлендірілген схеманы аламыз. Бұл схемадағы буындардың операторлары кері етіліп алынған.

Іс жүзінде интегралдаушы буынды іске асыру оңай болғандықтан, 4.32,*б*-суретінде алынған схеманы жасау ыңғайлы.

Өзін-өзі тексеру үшін қойылған сұрақтар мен берілген есептер

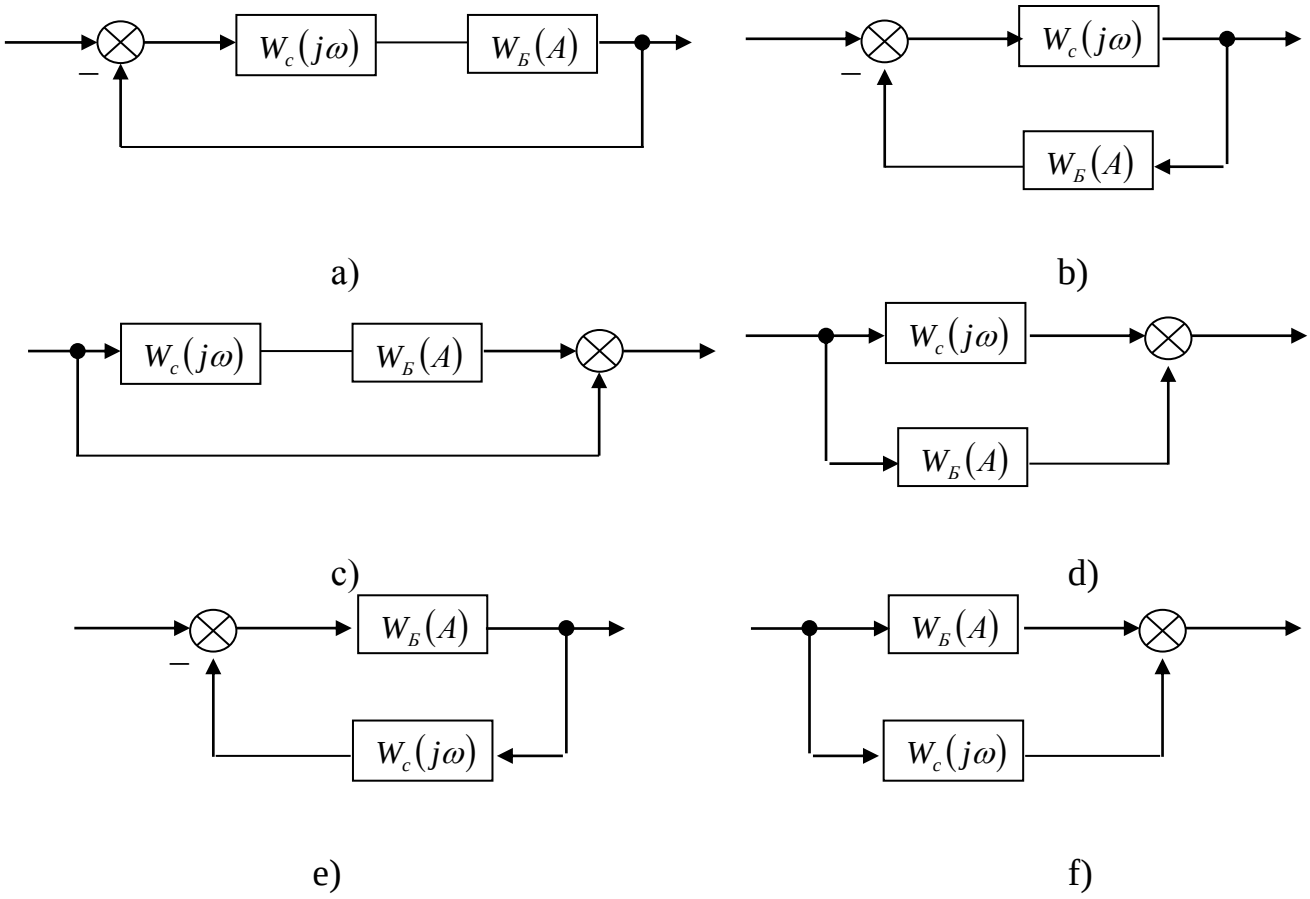
1. Бейсызықты жүйе схемасын пара-пар түрлендіру мына мақсатта жүргізіледі:
A) Физикалық модель алу үшін;
B) Математикалық модель алу үшін;
C) Бейсызықты автоматты реттеу жүйесін талдау үшін;
D) Жүйені синтездеу үшін;
E) Орнықтылығын анықтау үшін.

2. Бейсызықты жүйені құрылымдық түрлендіру кезінде бейсызықты элементтің мына параметрі өзгермейтін болып қалуы керек:
A) Кірістік сигналдың жиілігі
B) Шығыстық сигналдың жиілігі
C) Кірістік сигналдың амплитудасы
D) Шығыстық сигналдың амплитудасы
E) Кірістік сигналдың фазасы

3. Бейсызықты жүйенің құрылымдық схемасын түрлендірген кезде мына қағида орындалуы тиіс:
A) Түрлендіру сызықты жүйедегідей өтеді
B) Бейсызықты элемент арқылы буындарды алдынан артына қарай жылжытуға болмайды
C) Бейсызықты элемент арқылы буындарды артынан алдына қарай жылжытуға болмайды
D) Буындарды бейсызықты элемент арқылы жылжытуға болмайды
E) Буындарды бейсызықты элемент арқылы жылжытуға болады

4. Бейсызықты жүйеге түрлендіру жүргізгенде
A) Бейсызықты элемент өзінің алғашқы орналасқан жерінде қалмауы керек
B) Бейсызықты элемент өзінің алғашқы орналасқан жерін сақтап қалуы қажет
C) Бейсызықты элемент алынып тасталуы керек
D) Бейсызықты элемент сызықты элементпен алмастырылуы қажет
E) Бейсызықты элементтің сипаттамасын өзгерту қажет

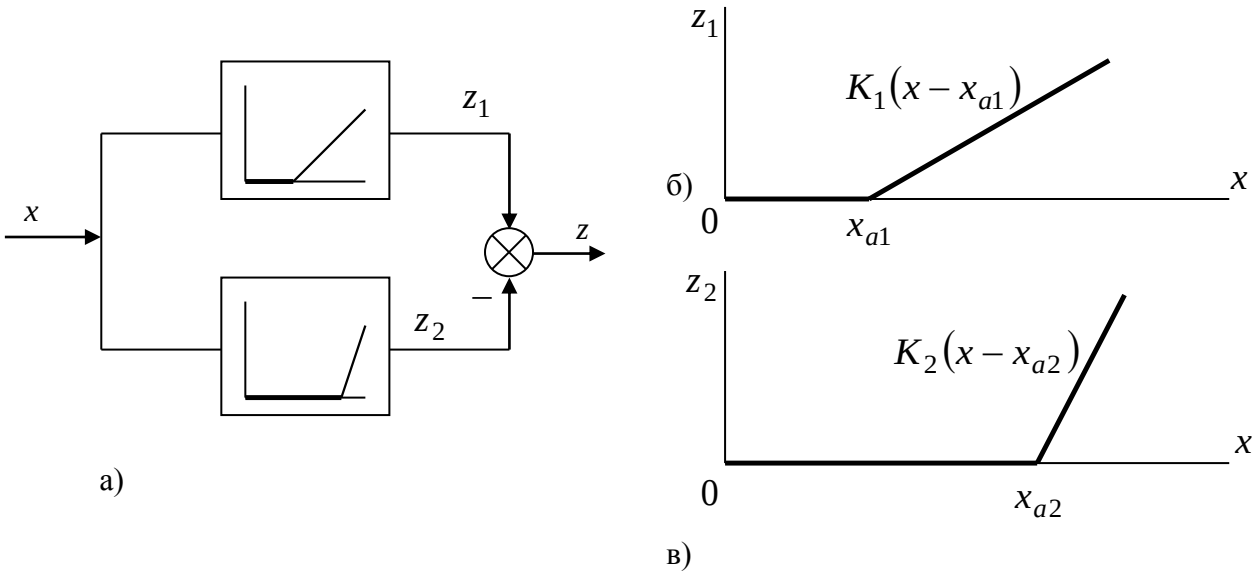
5. Көпконтурлы бейсызықты автоматты реттеу жүйесін құрылымдық түрлендіру арқылы мына схемалардағы бірконтурлы түрге келтіру қажет (4.33-сурет):
A) a, b, c
B) a, b, d
C) a, b, e
D) a, c, f
E) b, d, e



4.33-сурет. Құрылымдық схемалар

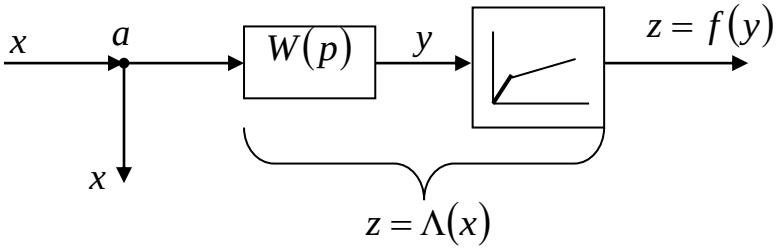
4.31-есеп.

Тіктіктері K_1 және K_2 болатын, сезімсіздік x_{a1}, x_{a2} аймақтары бар (4.31,*б,в*-сурет) екі бейсызықты буыннан тұратын жүйенің (4.31-сурет) сипаттамасын тұрғызу қажет.



4.34-сурет. Параллель қосылған екі бейсызықты буындардан тұратын жүйе және олардың сипаттамалары

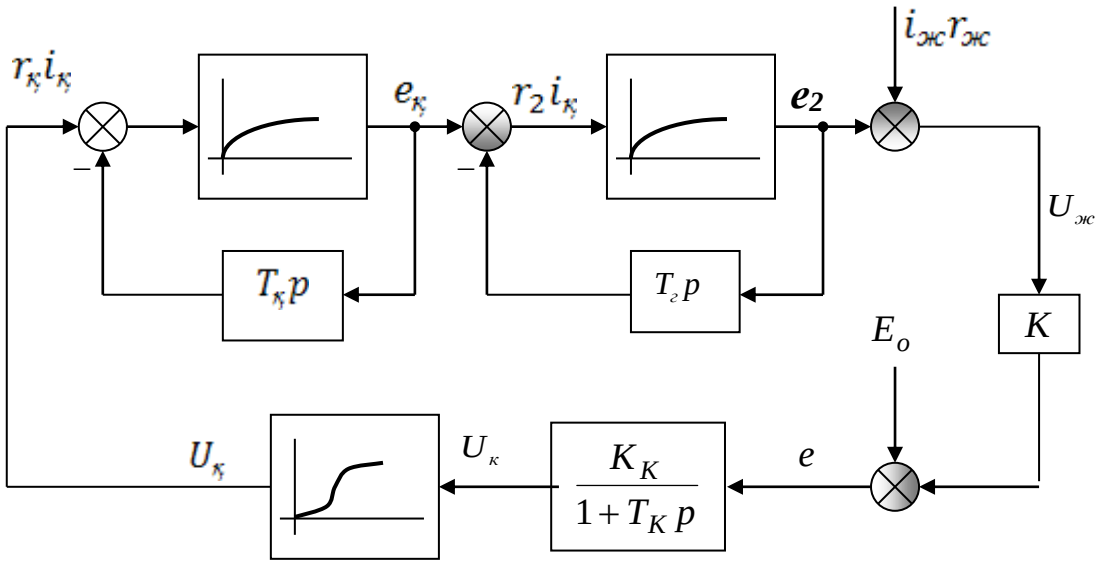
4.32-есеп.



4.35-сурет. Бейсызықты жүйенің құрылымдық схемасы

4.35-суретінде келтірілген бейсызықты жүйе схемасындағы *a* қосылу нүктесін бейсызықты буынның шығысына әкеліп орналастыру қажет.

4.33-есеп.



4.36-сурет. Кернеуді стабильдеу схемасы

4.36-суретінде көрсетілген кернеуді стабильдеу схемасы үшін, құрамында дифференциалдаушы буындар жоқ болатын пара-пар схеманы табу қажет.

ЕКІНШІ БӨЛІМ

ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМІ

01-тарау. АВТОМАТТЫ РЕТТЕУ ЖҮЙЕСІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ ӘДІСПЕН БЕЙНЕЛЕУ

01.1. Автоматты реттеу жүйелерінің жұмыс істеу принципін үйрену және оның функционалдық схемасын құру

01.6-есеп.

Ш е ш і м і. Жүйе буындарының дифференциалдық теңдеулерін құрамыз.

1. Сезімтал элемент теңдеуі

$$U_1 = K_1 \nu, \quad \nu = \nu_1 - \nu_2, \tag{01.1}$$

мұндағы K_1 – сезімтал элементтің статикалық сипаттамасының тіктігі.

2. K_1 күшейткішінің теңдеуі

$$U_3 = K_2 U_2, \quad U_2 = U_1 + U_4 - U_5, \tag{01.2}$$

мұндағы U_3 – күшейткіш шығысындағы кернеу, K_2 – күшейту коэффициенті.

3. Қозғалтқыш теңдеуі

$$(T_M p + 1) p v_қ = K_3 U_3, \tag{01.3}$$

мұндағы $v_қ$ – қозғалтқыш білігінің бұрылу бұрышы, T_M, K_3 – қозғалтқыштың электрмеханикалық уақыт тұрақтысы және беріліс коэффициенті.

4. $ТГ_2$ тахогенератордан және K_2 күшейткіштен тұратын бейсызықты кері байланыс тізбегінің теңдеуі

$$U_4 = K_4 p U_1 v_қ, \tag{01.4}$$

мұндағы K_4 – пропорционалдық коэффициент.

5. $ТГ_1$ тахогенераторының теңдеуі

$$U_5 = K_5 p v_қ, \tag{01.5}$$

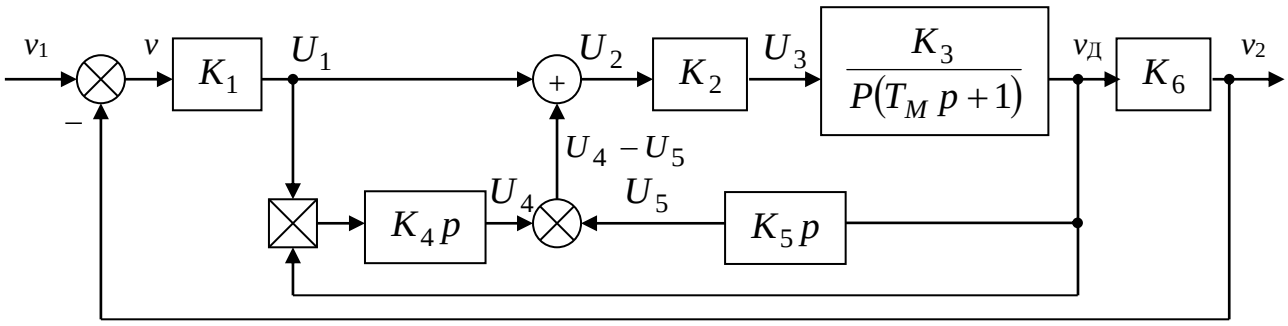
мұндағы K_5 – тахогенератордың статикалық сипаттамасының тіктігі.

6. Редуктор теңдеуі

$$v_2 = K_6 v_к, \qquad (01.6)$$

мұндағы K_6 – редуктордың беріліс коэффициенті.

Алынған (01.1) ÷ (01.6) теңдеулерге сәйкес жүйенің құрылымдық схемасын тұрғызамыз (01.1-сурет).



01.1-сурет. Айнымалы демпфирлі қадағалаушы жүйенің құрылымдық схемасы

Бұл схемада × белгісімен екі айнымалыны (01.4) теңдеуге сәйкес көбейтетін құрылғы көрсетілген.

Алынған құрылымдық схемаға сәйкес толық жүйенің бейсызықты дифференциалдық теңдеуін құрамыз:

$$\left[T_M p^2 + (1 + K_2 K_3 K_5) p + K_1 K_2 K_3 K_6\right] v_2 - K_1 K_2 K_3 K_4 p(v_1 - v_2) v_2 = \\ = K_1 K_2 K_3 K_6 v_1.$$

01.7-есеп.

Ш е ш і м і. Берілген принциптік схемадағы буындардың дифференциалдық теңдеулерін құрамыз.

1. Реттелетін объект теңдеуі

$$(T_o p + 1)\theta_2 = K_o \varphi,$$

мұндағы T_o – объектінің уақыт тұрақтысы, θ_2 – температураның нақты мәні, K_o – объект пен реттеуші органның беріліс коэффициенті, φ – реттеуші органның бұрылу бұрышы.

2. Сезімтал элементтің теңдеуі (ампер-орам):

$$aw_1 = K_1 \theta, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2,$$

мұндағы θ_1 – объект температурасының берілген мәні, θ – жүйе қателігі.

3. Релелік күшейткіш теңдеуі

$$U = F(aw), \quad aw = aw_1 - aw_{кб}, \tag{01.7}$$

мұндағы $F(aw)$ – статикалық сипаттамамен берілген бейсызықты функция.

4. Тұрақты ток қозғалтқышының теңдеуі

$$p\alpha = K_2 U,$$

мұндағы α – қозғалтқыш білігінің бұрылу бұрышы, K_2 – қозғалтқыштың беріліс коэффициенті.

5. Редуктор теңдеуі

$$\varphi = K_3 \alpha,$$

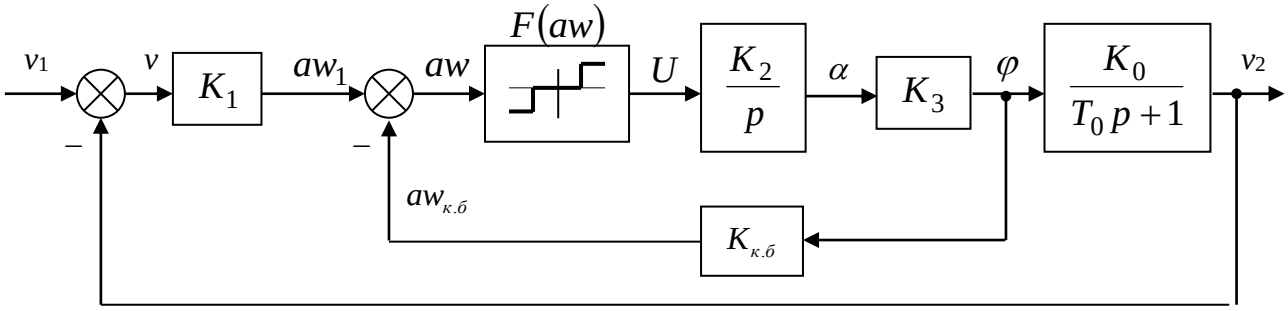
мұндағы $K_3 = \frac{1}{i}$ – редуктордың беріліс коэффициенті, i – редуктордың беріліс қатынасы.

6. Кері байланыс тізбегінің теңдеуі

$$aw_{к.б.} = K_{к.б.}\varphi,$$

мұндағы $aw_{к.б}$ – кері байланыс орамының ампер-орамы.

Жүйенің құрылымдық схемасы 01.2-суретте келтірілген.



01.2-сурет. Температураны автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық схемасы

Құрылымдық схемаға сәйкес жүйенің сызықты бөлігінің дифференциалдық теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$(T_o p + 1)paw = K_1 p\theta_1 - K_2 K_3 [K_{к.б}(T_o p + 1) + K_o K_1]U. \tag{01.8}$$

Сызықты бөлігінің (01.8) теңдеуі жүйенің бейсызықты бөлігінің (01.7) теңдеуімен толығады:

$$U = F(aw).$$

01.2. Реттеу объектілерінің теңдеуін құру және оларды типтік динамикалық буындармен көрсету. Буындардың уақыттық сипаттамалары

01.25-есеп.

Ш е ш і м і. Объектінің күйі үш шамамен, яғни $Q_1(t)$ заттардың берілу (құйылу) ағымы, $Q_2(t)$ әкетілу ағымы және жинақтауыштағы M материалдар қорымен сипатталады. Жинақтауыштағы материалдар санының өсімшесі Δt уақыт аралығындағы кіріске келтірілген $Q_1(t)$ ағымы мен шығыстағы $Q_2(t)$ ағымының айырымына тең, яғни

$$\Delta M = Q_1(t)\,\Delta t - Q_2(t)\,\Delta t.$$

Теңдеудің екі жағын да Δt шамасына бөліп және Δt мәнін шексіздікке ұмтылдыра отыра, мына өрнекті аламыз:

$$\frac{dM}{dt} = Q_1(t)\Delta t - Q_2\Delta t. \qquad (01.2.1)$$

Алынған теңдеу – $Q_1(t)$ және $Q_2(t)$ шамалары өзгерген кездегі объектінің күйін анықтайтын теңдеу. Оны материалдық баланс теңдеуі деп атайды.

(01.2.1) теңдеуіндегі $M = y(t)$ шығыстық шама, $Q_1(t) - Q_2(t) = x(t)$ кірістік шама деп алып және оған белгілі түрлендіру әдісін қолданып жинақтауыштың дифференциалдық теңдеуін алады:

$$y(t) = \int x(t)dt.$$

Бұл дифференциалдық теңдеуден жинақтауыштың интегралдаушы буын екендігін көреміз.

01.26-есеп.

Ш е ш і м і. Әрбір жинақтауыштың күйі жоғарғы есепте анықталғандай мына теңдеулермен өрнектеледі:

$$\frac{dM}{dt} = Q - Q_2';$$
$$\frac{dM_2}{dt} = Q_2'' - Q_3.$$

Бұл теңдеулердің арасындағы байланысты білу үшін, Q_2' пен Q_2'' ағымдарды бір-бірімен байланыстыратын теңдеуді алу қажет.

Егер тасымалдау тұрақты өнімділікті конвейер немесе насос арқылы жүргізілсе, онда бірінші жинақтауыштан шығатын барлық Q_2' ағымы екінші жинақтауышқа кешігіп беріледі. Ал τ кешігу уақыты жинақтауыштардың арақашықтығымен және материалдың құбыр немесе конвейер таспасымен жылжу жылдамдығымен анықталады. t уақыт мезгіліндегі Q_2'' ағымының шамасы $t-\tau$ уақыт мезгіліндегі Q_2 ағымының шамасына тең, яғни

$$Q_2'''(t)=Q_2'(t-\tau).$$

Олай болса, жинақтауыштар жүйесінің дифференциалдық теңдеуі мына түрде болады:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dM_1(t)}{dt}&=Q(t)-Q_2'(t);\\ \frac{dM_2(t)}{dt}&=Q_2'(t-\tau)-Q_3(t),\end{aligned}\right\}$$

мұндағы $\tau=\dfrac{l}{v}$ (l – тасымалдау жолының ұзындығы, v – материалдың жылжу жылдамдығы).

01.27-есеп.

Ш е ш і м і. Бункердің теңдеуі

$$\frac{dM}{dt}=100-Q_2(t),$$

конвейердің теңдеуі

$$Q_3(t)=Q_2(t-\tau)=Q_2\left(t-\frac{50}{3600}\right)$$

немесе

$$Q_2(t)=Q_3\left(t+\frac{50}{3600}\right).$$

Q_2 аралық шаманы шығарып тастағаннан кейін, берілген жүйенің дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$\frac{dM}{dt}=100-Q_3\left(t+\frac{50}{3600}\right),$$

мұндағы [*M*] = *m*; [*Q*] = *m/сағ*; [*t*] = *сағ*.

01.28-есеп.

Ш е ш і м і. Бұл есепте

$$\frac{dM_1}{dt} = Q_1 - Q_2 \tag{01.2.2}$$

$$\frac{dM_2}{dt} = Q_2 - Q_3 \tag{01.2.3}$$

баланстық қатынастардан басқа төмендегідей қосымша тәуелділіктер орын алады:

$$Q_3 = \mu_1 S_1 \sqrt{2gH_2} = k_1 \sqrt{H_2} \tag{01.2.4}$$

$$Q_2 = \mu_1 S_2 \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = k_1' \sqrt{H_1 - H_2} \tag{01.2.5}$$

$$M_1 = \rho S_1 H_1 \tag{01.2.6}$$

$$M_2 = \rho S_2 H_2, \tag{01.2.7}$$

мұндағы M_1, M_2 – қорлар; Q_1, Q_2, Q_3 – ағындар, S_1, S_2 – резервуарлардың қималарының аудандары; μ_1, μ_2 – шығын коэффициенттері; H_1, H_2 – резервуарлардағы сұйықтардың деңгейлері; ρ – сұйық заттың тығыздығы.

Жалпы, жоғарыда алынған теңдіктер каскадтың жиынтық теңдеулері, сол себептен есепті шешілді деп те айтуға болады, бірақ та автоматтандыру жұмыстарын жасар кезде бізге тек екі айнымалылар арасындағы тәуелділікті анықтау қажет, сондықтан басқа айнымалыларды шығарып тастау керек.

Шығыстық Q_3 және кірістік Q_1 айнымалылар арасындағы тәуелділікті анықтау керек делік. Ол үшін жиынтық теңдеуде Q_1 және Q_3 айнымалыларын қалдырып, Q_2, M_1, M_2, H_1, H_2 айнымалыларын шығарып тастаймыз. (01.2.2-01.2.7) теңдеулерінен

$$M_2 = \rho S_2 \left(\frac{Q_3}{k_1} \right)^2 \tag{01.2.8}$$

аламыз, олай болса (01.2.5), (01.2.7), (01.2.8) теңдеулерінен

$$M_1 = \rho S_1 \left[\left(\frac{Q_2}{k_1'} \right)^2 + \left(\frac{Q_3}{k_1} \right)^2 \right] \qquad (01.2.9)$$

аламыз, ал (01.2.8) теңдеуін ескере отыра, (01.2.3) теңдеуін былайша жазуға болады:

$$\frac{d\left[\rho S_2 \left(\frac{Q_3}{k_1} \right)^2 \right]}{dt} = Q_2 - Q_3$$

немесе

$$Q_2 = Q_3 + \frac{\rho S_2}{k_1^2} \cdot 2Q_3 \frac{dQ_3}{dt} \qquad (01.2.10)$$

(01.2.9) және (01.2.10) теңдеулеріндегі M_1 және Q_2 мәндерін (01.2.2) қатынасына қоя отыра мына өрнекті аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left\{ \rho S_1 \left[\frac{1}{k_1'^2} \right] \left(Q_3 + \frac{\rho S_2}{k_1^2} \cdot 2Q_3 \frac{dQ_3}{dt} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2} Q_3^2 \right\} +$$

$$+ \frac{\rho S_2}{k_1^2} \cdot 2Q_3 \frac{dQ_3}{dt} + Q_3 = Q_1.$$

Бұл екінші ретті бейсызықты теңдеу, Q_1, Q_2 – уақыт функциялары да, қалғандары тұрақты шамалар. Теңдеудің реті каскадтағы резервуарлар санына тең.

01.29-есеп.

Ш е ш і м і. Буынның беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{K}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Кірістік сигналдың Лаплас түрлендіруі бойынша кескіні

$$L[x(t)] = L[1(t)] = \frac{1}{p}.$$

Шығыстық сигналдың өзгеру заңдылығын Лапластың кері түрлендіруі бойынша анықтаймыз:

$$y(t)=L^{-1}\left[x(t)W(p)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{K}{T_1^2p^2+T_2p+1}\right]=$$

$$=L^{-1}\left[\frac{K}{p}\cdot\frac{1}{T_1^2}\frac{1}{\left(p^2+\frac{T_2}{T_1^2}p+\frac{1}{T_1^2}\right)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{K}{T_1^2}\frac{1}{\left(p+\frac{T_2}{2T_1^2}\right)^2+\left(\frac{1}{T_1^2}-\frac{T_2^2}{4T_1^4}\right)}\right].$$

Келесі белгілеулер енгізейік:

$$\frac{T_2}{2T_1^2}=-a;\quad \frac{1}{T_1^2}=b^2;\quad \frac{1}{T_1^2}-\frac{T_2^2}{4T_1^4}=b^2-a^2=\omega^2.$$

$\omega\neq 0$ жағдайды қарастырайық, онда мына өрнекті аламыз:

$$\frac{b^2}{p}\cdot\frac{1}{(p-a)^2+\omega^2}=\frac{1}{p}-\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}+\frac{a}{(p-a)^2+\omega^2}.$$

Анықтама кітабындағы Лаплас түрлендіруі кестесінен әрбір қосындылардың нақты мәндерін анықтайық:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=1;$$

$$L^{-1}\left[\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\cos\omega t;$$

$$L^{-1}\left[\frac{a}{(p-a)^2+\omega^2}\right]=\frac{a}{\omega}e^{at}\sin\omega t.$$

Сонымен, шығыстық сигнал мынадай заңдылықпен өзгереді:

$$y(t)=K\left(1-e^{at}\cos\omega t+\frac{a}{\omega}e^{at}\sin\omega t\right).$$

Осылай, $\omega = 0$, яғни, $a^2 = b^2$ болатын жағдай үшін мынаны аламыз:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right] = e^{at};$$

$$L^{-1}\left[\frac{a}{(p-a)^2}\right] = ate^{at};$$

$$y(t) = K\left[1 - e^{at}(1-at)\right].$$

01.30-есеп.

Ш е ш і м і. Бастапқы нөлдік шарттарға сәйкес Лаплас түрлендіруін қолданса, берілген дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$\left(T_2^2 p^2 + T_1 p\right) y(p) = k(T_1 p + 1) e^{-p\tau} x(p).$$

Анықтама бойынша беріліс функция нөлдік бастапқы шарттардағы шығыстық пен кірістік шамалардың арасындағы Лаплас түрлендіруі бойынша өрнектелген кескіндердің қатынасы болатындықтан, мынаны аламыз:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k(T_1 p + 1)e^{-p\tau}}{T_2^2 p^2 + T_1 p}.$$

01.31-есеп.

Ш е ш і м і. ПИ-реттеуіштің беріліс функциясы мына түрде болады:

$$W(p) = K_p + \frac{1}{T_u p}.$$

01.32-есеп.

Ш е ш і м і. ПИД-реттеуіштің беріліс функциясы:

$$W(p) = K_p + \frac{1}{T_u p} + T_\partial p.$$

01.33-есеп.

Ш е ш і м і. Дифференциалдаушы құрылғының беріліс функциясы:

$$W(p)=\frac{kTp}{Tp+1}.$$

01.34-есеп.

Ш е ш і м і.

$$\Phi(p)=\frac{x(p)}{g(p)}=\frac{kk_p\left(1+\frac{1}{T_u p}+T_\partial p\right)}{T_2^2 p^2+T_1 p+1+kk_p\left(1+\frac{1}{T_u p}+T_\partial p\right)}$$

немесе түрлендіруден кейін

$$\Phi(p)=\frac{x(p)}{g(p)}=\frac{-W(p)}{1-W(p)},$$

мұндағы $W(p)=W_{об}(p)\cdot W_p(p)=-\frac{k}{T_2^2p^2+T_1p+1}k_p\left(1+\frac{1}{T_up}+T_\partial p\right).$

объекті мен реттеуіштің беріліс функциялары арқылы анықталатын ажыратылған жүйенің беріліс функциясы.

01.35-есеп.

Ш е ш і м і. 1.33-суреттен белгілі әдіс бойынша объектінің беріліс коэффициентін анықтаймыз, яғни

$$K=tg\alpha=\frac{a}{b},$$

мұндағы $a=15мм,\quad b=t-\tau=120-30=90c.$

Объектінің бірлік сатылы әсер үшін күшейту коэффициенті

$$K=\frac{a}{b\cdot\Delta G}=\frac{15}{90\cdot500}=0{,}33\cdot10^{-3}\frac{мм\cdot саг}{л\cdot с}.$$

Объектінің екпін қисығын былай жазуға болады:

$y(t)=0\quad t\le\tau=30c$ болғанда;

$y(t)=\frac{a}{b\Delta G}(t-\tau)\quad t>\tau=30c$ болғанда.

Бұл теңдеу – түзу сызықтың теңдеуі және де объектінің берілген дифференциалдық теңдеуінің шешімі болып табылады. Осыған сәйкес объектінің «шығын – деңгей» арнасы бойынша алынған дифференциалдық теңдеуі мына түрде болады:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Kx(t-\tau),$$

мұндағы $y(t)$ – шығыстық шама (деңгей), мм;

$K = 0{,}33 \cdot 10^{-3}$ – объектінің беріліс коэффициенті, $\frac{мм \cdot саг}{л \cdot с}$.

$x(t)$ – кірістік шама (шығын), л/сағ;

$\tau = 30c$ – кешігу уақыты.

01.36-есеп.

Ш е ш і м і. Объектінің дифференциалдық теңдеуін операторлық түрде жазамыз:

$$(137800p^2 + 742p + 1)y(p) = 0{,}125x(p).$$

Осыдан беріліс функциясының өрнегін табуға болады:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{0{,}125}{137800p^2 + 742p + 1}.$$

01.37-есеп.

Ш е ш і м і. Екпін қисығы кірістік шама сатылы өзгерген кездегі $U_1(t) = U_0 \cdot 1(t)$ және бастапқы нөлдік шарттардағы $U_2(t)$ шығыстық шаманың өзгеру заңдылығын анықтайды.

$t > 0$ үшін мына дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$T\frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_0. \qquad (01.2.12)$$

Бұл дифференциалдық теңдеуді операторлық түрде жазамыз. Ол үшін d/dt дифференциалдау операторын p-ға алмастырамыз:

$$(Tp+1)U_2(p) = U_0(p).$$

Алынған теңдеуді пайдалана отыра сипаттаушы теңдеуді аламыз:

$$Tp + 1 = 0.$$

Сипаттаушы теңдеудің түбірі $p = -\frac{1}{T}$, яғни теңдеудің еркін бөлігі

$$U_{epk}(t) = C_1 e^{-\frac{1}{T}}.$$

(01.2.12) теңдеудің дербес шешімін (еріксіз бөлігін) А тұрақты шама түрінде іздеу керек.

$U_2(t) = A$ шамасын (01.2.12) теңдеуіне қойып $A = U_0$ өрнегін аламыз (бастапқы нөлдік шарттарды ескере отыра).

Сонымен, теңдеудің жалпы шешімі мына формуламен анықталады:

$$U_2(t) = U_0 + C_1 e^{-\frac{1}{T}}.$$

Бұл теңдеуден, t = 0 және $U_2(0)$ = 0 шарттарын ескере отыра C_1 интегралдау тұрақтысын табамыз:

$0 = U_0 + C_1$, яғни $C_1 = -U_0$.

Нәтижесінде қарастырып отырған RC-тізбектің екпін қисығының теңдеуі мына түрде болады:

$$U_2(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{T}}\right).$$

01.38-есеп.

Ш е ш і м і. Объектінің дифференциалдық теңдеуінен керекті шамаларды анықтаймыз: объектінің уақыт тұрақтысы T = 10,5 мин, кешігу τ = 51 мин., $\frac{\tau}{T} = \frac{51}{10{,}5} = 4{,}85$.

Реттеу объектісінің беріліс коэффициенті K = 1.

Есеп шартынан объектінің бірінші ретті апериодтық буын екенін көреміз. Осы буынның екпін қисығы формуласын пайдаланып, оған K және T параметрлерінің табылған мәндерін қояйық:

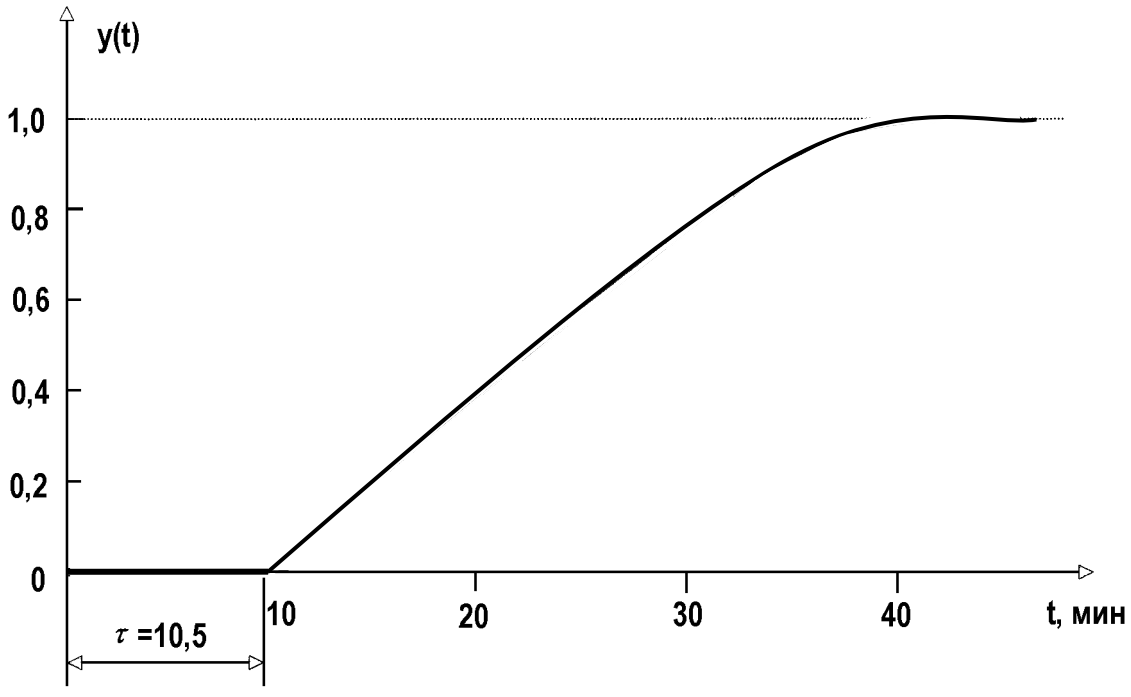
$$y(t) = Kx(t)\left(1 - e^{-\frac{1}{T}}\right) = x(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{10{,}5}}\right),$$

мұндағы $x(t) = A \cdot 1(t)$ $A = 1$ болғанда.

Бірінші ретті апериодтық буынның екпін қисығын салу әдісін қолдана отыра қарастырылған реттеу объектісінің өтпелі процесс қисығын тұрғызамыз (01.3-сурет).

t, мин.	0	2	4	6	8	10	12	14
$x = \frac{t}{10,5}$	0	0,19	0,38	0,57	0,76	0,95	1,14	1,33
e^{x}	0	1,2	1,46	1,76	2,14	2,58	3,13	3,78
e^{-x}	0	0,83	0,68	0,56	0,47	0,39	0,33	0,26
$1 - e^{-x}$	0	0,17	0,32	0,44	0,53	0,61	0,67	0,74

t, мин.	16	18	20	24	26
$x = \frac{t}{10,5}$	1,52	1,71	1,9	2,29	2,48
e^{x}	4,57	5,47	6,68	9,97	12,18
e^{-x}	0,22	0,18	0,15	0,1	0,08
$1 - e^{-x}$	0,78	0,82	0,85	0,9	0,92



01.3-сурет. Реттеу объектісінің өтпелі процесс қисығы

01.39-есеп.

Ш е ш і м і. Реттеу объектісінің күшейту коэффициентін анықтайық:

$$K = \frac{a}{b \cdot \Delta G} = \frac{260}{19 \cdot 3{,}8} = 3{,}6,$$

мұндағы $b = 23 - \tau = 19$ мин. (1.34-суретті қара), $\Delta G = 3{,}8$ т/сағ.

Объектінің дифференциалдық теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 3{,}6(t - 4).$$

01.40-есеп.

Ш е ш і м і. Өлшемсіз бірлікпен алғандағы буынның күшейту коэффициентін реттелетін шама өзгерісі процентінің кірістегі әсер өзгерісі проценттік шамасына қатынасымен анықтауға болады:

Дифманометрдің күшейту коэффициенті

$$K_{\partial} = \frac{P}{Q} = \frac{57{,}5}{50} = 1{,}15.$$

Мембранды орындаушы механизмнің күшейту коэффициенті

$$K_{о.м.} = \frac{Q}{\varphi} = \frac{50}{49} = 1{,}02.$$

Реттеу объектісінің күшейту коэффициенті жеке буындар күшейту коэффициенттерінің көбейтіндісіне тең, яғни

$$K_{об} = K_{\partial} \cdot K_{о.м.} = 1{,}15 \cdot 1{,}02 = 1{,}17.$$

01.41-есеп.

Ш е ш і м і. Мынадай теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\left.\begin{aligned} E_1(p) &= [z_1(p) + z_2(p)]I(p); \\ E_2(p) &= z_2(p)I(p), \end{aligned}\right\}$$

мұндағы $z_1(p) = \dfrac{R_2}{1 + R_2 C_2 p};$

$$z_2(p) = \frac{1}{C_1 p} + R_1.$$

Алынған теңдеулер жүйесінен

$$W(p)=\frac{E_2(p)}{E_1(p)}=\frac{z_2(p)}{z_1(p)+z_2(p)}.$$

Бұл өрнекке $z_1(p)$, $z_2(p)$ мәндерін қоя отыра аламыз:

$$W(p)=\frac{\dfrac{1}{C_1p}+R_1}{\dfrac{R_2}{1+R_2C_2p}+\dfrac{1}{C_1p}+R_1}.$$

$T_1=R_1C_1;\quad T_2=R_2C_2$ деп белгілей отыра берілген схеманың беріліс функциясын анықтаймыз:

$$W(p)=\frac{T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)+T_2\right]p+1}.$$

01.42-есеп.

Ш е ш і м і. Үшфазалы электрқозғалтқыш роторының айналу теңдеуі

$$J_қ\frac{d\omega_қ}{dt}=M_қ(t)-M_к(t). \qquad (01.2.13)$$

Электрқозғалтқыштың қозғалту күшінің моменті якорьдің $\omega_қ$ бұрыштық жылдамдығына, статордың *u* қорек кернеуіне (1.36-суретіндегі 1-3 қисықтары) тәуелді, яғни

$$M_қ(t)=M_{к(\omega_қ,\ u)},$$

ал кедергілік момент осы суреттегі 4 қисық бойынша өзгереді

$$M_к(t)=M_к\left(\omega_қ\right).$$

$M_қ(t)$, $M_к(t)$ сипаттамаларының бейсызықтығы едәуір болатындығын еске ала отыра, оларды электрқозғалтқыштың $\Delta\omega_қ$ бұрыштық айналу жылдамдығы өзгерісінің аздаған ауқымында сызықтаймыз (A_1 және A_2 нүктелері аралығында). *A* нүктесінде олардың

$$M_{қо}=M_{ко} \qquad (01.2.14)$$

орныққан мәндерін аламыз.

$M_{қ}(t)$, $M_{к}(t)$ сипаттамаларын A нүктесі маңайында Тейлор қатарына түзіп, олардың тек алғашқы екі мүшесін ғана қарастырамыз:

$$M_{қ}(t) = M_{қо} + \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} \Delta\omega_{қ} + \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial u}\right)_{о} \Delta u,$$

мұндағы $M_{қо} - \omega_{қо}$ және $u_{о}$ кезіндегі қозғалту моменті;

$$M_{с}(t) = M_{со} + \left(\frac{\partial M_{с}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} \Delta\omega_{қ},$$

мұндағы $M_{со} - \omega_{қо}$ кезіндегі кедергілік момент.

Табылған $M_{қ}(t)$, $M_{с}(t)$ сызықталған мәндерін (01.2.13) теңдеуге қоямыз:

$$J_{қ}\frac{d\Delta\omega_{қ}}{dt} = M_{қо} + \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} \Delta\omega_{қ} + \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial u}\right)_{о} \Delta u - M_{со} - \left(\frac{\partial M_{с}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} \Delta\omega_{қ}. \quad (01.2.15)$$

(01.2.14) теңдеуді еске ала отыра, (01.2.15) теңдеуді мына түрде жазайық:

$$J_{қ}\frac{d\Delta\omega_{қ}}{dt} + \left[\left(\frac{\partial M_{к}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} - \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о}\right]\Delta\omega_{қ} = \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial u}\right)_{о} \Delta u$$

немесе

$$J_{қ}\frac{\frac{d\Delta\omega_{қ}}{\omega_{қо}}}{dt} + \left[\left(\frac{dM_{к}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} - \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о}\right]\frac{\Delta\omega_{қ}}{\omega_{қо}} = \frac{u_{о}}{\omega_{қо}}\left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial u}\right)\frac{\Delta u}{u_{о}}. \quad (01.2.16)$$

Төмендегідей белгілеулер енгізейік:

$$T_{қ} = \frac{J_{қ}}{\left(\frac{\partial M_{к}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} - \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о}};$$

$$K = \frac{\frac{u_{о}}{\omega_{қо}}\left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial u}\right)_{о}}{\left(\frac{\partial M_{к}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о} - \left(\frac{\partial M_{қ}}{\partial \omega_{қ}}\right)_{о}};$$

$$\mu = \frac{\Delta\omega_к}{\omega_{кo}}; \quad \rho = \frac{\Delta u}{u_o}.$$

Осыларды еске ала отыра, (01.2.16) өрнекті мына түрде жазуға болады:

$$T_к \frac{d\mu}{dt} + \mu(t) = к\rho(t). \qquad (01.2.17)$$

Алынған (01.2.17) қозғалыс теңдеуіне Лаплас түрлендіруін қолдана отыра синхронды үшфазалы электрқозғалтқыштың беріліс функциясын аламыз:

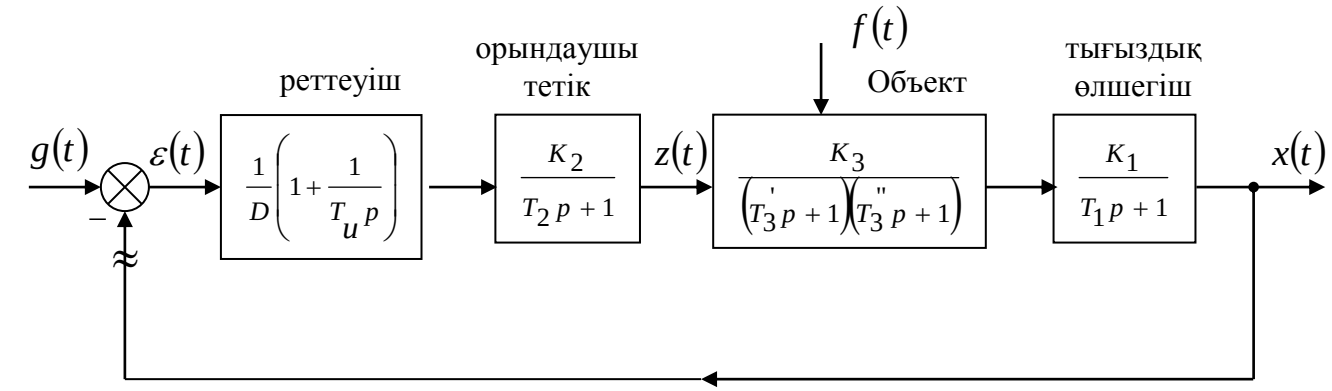
$$W(p) = \frac{\tilde{\mu}(p)}{\tilde{\rho}(p)} = \frac{к}{T_к p + 1}.$$

Үшфазалы асинхронды қозғалтқыштың беріліс функциясы мына түрде болады:

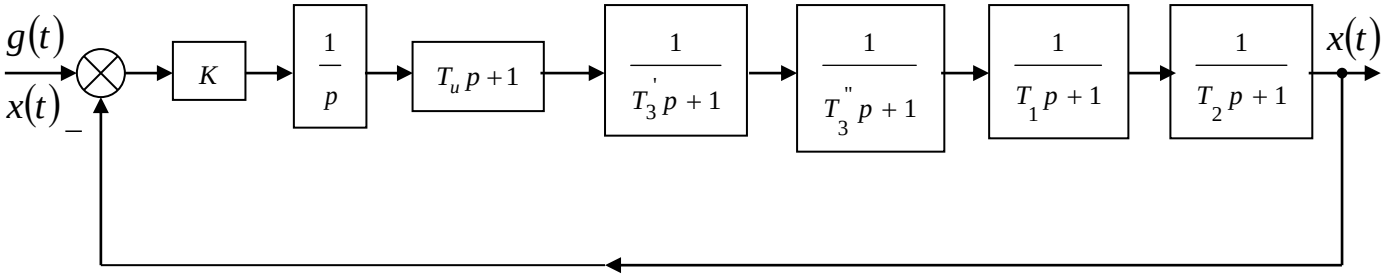
$$W(p) = \frac{\tilde{\theta}_к(p)}{U(p)} = \frac{к}{p(T_к p + 1)}.$$

01.43-есеп.

Ш е ш і м і: Құрылымдық схеманы құру келесі тұрғыдан қарастырылады. Тығыздық өлшеуіштің $x(t)$ сигналы реттеуіштің алдында реттелетін шаманың $g(t)$ берілген мәнімен салыстырылады. Осы екі шаманың айырымы $\varepsilon(t)$, яғни реттеу қателігі реттеуіштің кірісіне беріледі. Реттеуіш орындаушы механизм арқылы объектіге $z(t)$ сигналымен әсер етеді. Жүйенің құрылымдық схемасы 01.4,*а*-суретте келтірілген.



а



б

01.4-сурет. Тығыздықты автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық *(а)* және оның типтік буындардан тұратын эквиваленттік *(б)* схемалары

Негізгі кері байланысты үзіп, реттеуші әсерге сәйкес ажыратылған жүйенің беріліс функциясын табайық:

$$W(p)=\frac{K_1K_2K_3(T_y p+1)}{D\cdot T_y p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3' p+1)(T_3'' p+1)}.$$

Қобалжыту әсерінің тікелей объектіге беріліп тұрғандығын (аппаратқа келетін пульпаның тығыздығы) ескере отыра, ажыратылған жүйенің қобалжыту әсеріне сәйкес беріліс функциясын объекті мен тығыздық өлшеуіш беріліс функцияларының көбейтіндісіне тең деп алуға болады:

$$W_o(p)=W_3(p)W_1(p)=\frac{K_3K_1}{(T_3' p+1)(T_3'' p+1)(T_1 p+1)}.$$

Тұйықталған жүйенің реттеуші әсерге сәйкес беріліс функциясы:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{K_1K_2K_3(T_y p+1)}{D\cdot T_y p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)+K_1K_2K_3(T_y p+1)},$$

ал қобалжыту әсеріне сәйкес беріліс функциясы:

$$F(p)=\frac{W_o(p)}{1+W(p)}=\frac{K_1K_2K_3T_y p(T_2 p+1)}{T_y p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)+K_1K_2K_3(T_y p+1)}.$$

Алынған $F(p)$ беріліс функциясына қарап, реттеу жүйесінде $f(t)$ қобалжыту әсеріне сәйкес бірінші ретті астатизмнің бар екенін көруге болады, яғни уақыт ағымында тұрақты шамаға ұмтылатын $f(t)$ қобалжыту әсерінің кез келген мәнінде орныққан режимдегі қателік нөлге тең.

Ажыратылған жүйенің беріліс коэффициентін

$$K=\frac{K_1K_2K_3}{DT_u}$$

деп алып, жүйенің беріліс функциясын мына түрде жазуға болады:

$$W(p)=\frac{K(T_u p+1)}{p(T_1 p+1)(T_2 p+1)(T_3^{'} p+1)(T_3^{''} p+1)}.$$

Осы өрнектің көмегімен автоматты реттеу жүйесін уақыт тұрақтылары T_1, T_2, $T_3^{'}$, $T_3^{''}$ болатын төрт – апериодты, интегралдаушы, беріліс коэффициенті K күшейткіш және уақыт тұрақтысы T_u дифференциалдаушы буындардан тұратын бірконтурлы жүйе түрінде көрсетуге болады. Бұл эквивалентті жүйенің құрылымдық схемасы 01.4,*б*-суретте келтірілген.

01.44-есеп.

Ш е ш і м і: Бұл жағдайда:

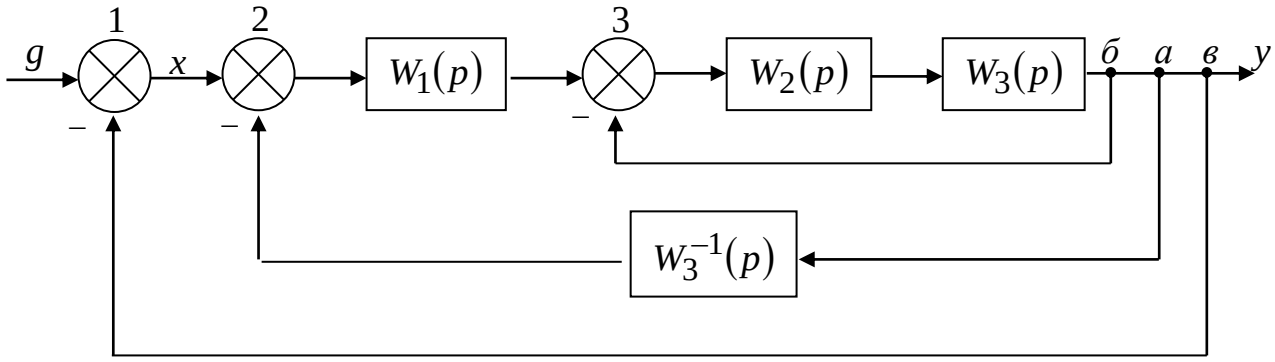
$$Z_1(p)=R_1,\quad Z_2(p)=\frac{1}{1/R_2+pC_2}=\frac{R_2}{1+pR_2C_2},$$

сондықтан $W(p)=-\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}=-\frac{K}{1+pT},\quad K=\frac{R_2}{R_1},\quad T=R_2C_2.$

01.3. Автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық схемасын параллель түрлендіру

01.51-есеп.

Ш е ш і м і. 01.5-суреттегі қарама-қарсы байланыстардан босатыламыз, ол үшін 1.3.1-кестедегі ережелерді пайдаланып *а* байланыс нүктесін W_3 буынның шығысына ауыстырамыз. Түрлендірілген құрылымдық схема 01.4-суретінде көрсетілген.



01.5-сурет. Түрлендірілген құрылымдық схема

Алынған құрылымдық схема бойынша беріліс функциясын анықтаймыз:

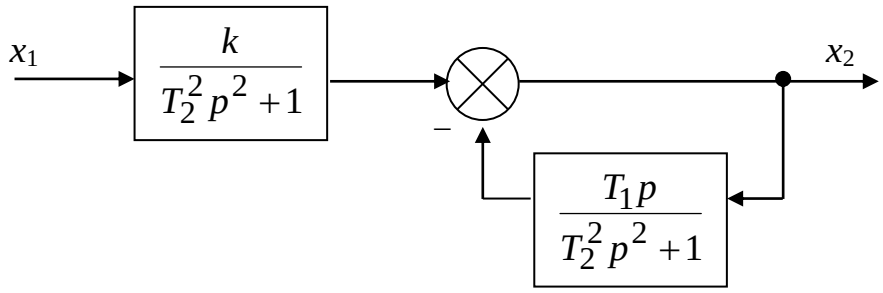
$$\Phi(p)=\frac{W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)}{1+W(p)_1\cdot W_2(p)+W_2(p)\cdot W_3(p)+W_1(p)\cdot W(p)_2\cdot W_3(p)}.$$

01.52-есеп.

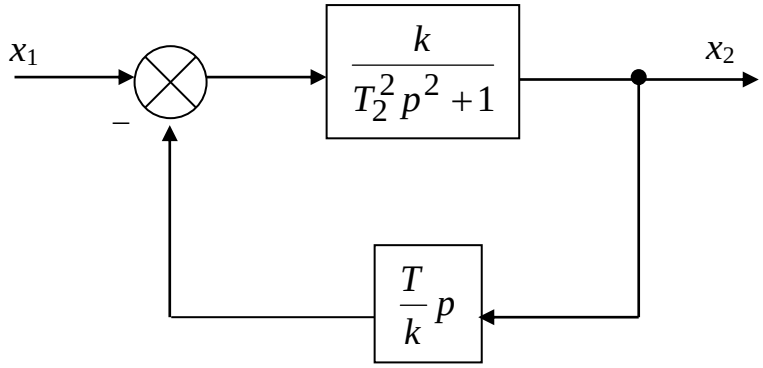
Ш е ш і м і. Жүйенің (1.3.12) дифференциалдық теңдеуін түрлендіріп мына түрге келтіреміз:

$$x_2=\frac{k}{T_2^2p^2+1}\cdot x_1-\frac{T_1p}{T_2^2p^2+1}\cdot x_2$$

Осы теңдеу бойынша құрылымдық схеманы тұрғызамыз (01.5,*а*-сурет). 1.3.1-кестедегі № 6 ережеге сәйкес түрлендіру жүргізіп ізделінген 01.5,*б*-суреттегі құрылымдық схеманы аламыз.



а)



б)

01.6-сурет. Түрлендірілген құрылымдық схема

01.53-есеп.

Ш е ш і м і. Жоғарыдағы 01.51-есептің шешімінен

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{b_0}{a_0 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_2},$$

аламыз, мұндағы $Y(p)$, $G(p)$ – реттелетін шамамен берілген әсердің кескіндері, $p = c + j\omega$ – комплексті айнымалы, $b_0 = k_1 \cdot k_2$, $a_0 = T_1 \cdot k_2^{-1}$, $a_1 = k_2^{-1} + k_3 \cdot T_1$, $a_2 = k_1 + k_3 + k_1 k_3$.

Олай болса, алғашқы дифференциалдық теңдеу

$$\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right) y(t) = b_0 g(t),$$

мұндағы $p = \frac{d}{dt}$ – дифференциалдау символы.

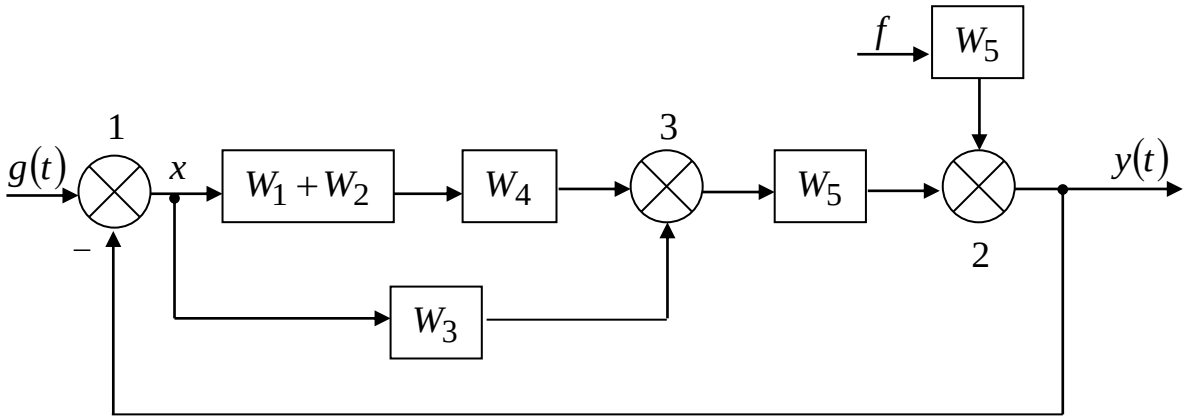
01.54-есеп.

Ш е ш і м і. 1.50-суретті пара-пар түрлендіре отыра автоматты жүйенің қобалжыту әсеріне сәйкес $\Phi_f(p)$ беріліс функциясын анықтаймыз. Ол үшін 2 қосындағышты W_5 буынының шығысына ауыстырамыз да, W_1 және W_2 буындарын бір буынмен алмастырамыз (01.7-сурет). Содан кейін алдымен ажыратылған жүйенің жоспарлау әсеріне сәйкес

$$W(p)=\frac{Y(p)}{G(p)}=\left[(W_1(p)+W_2(p))\cdot W_4(p)+W_3(p)\right]\cdot W_5(p)$$

және қобалжыту әсеріне сәйкес беріліс функциясын табамыз:

$$W_f(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=W_5(p).$$



01.7-сурет. АРЖ түрлендірілген схемасы

Олай болса

$$\Phi_f(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{W_f(p)}{1+W_f(p)}=\frac{d_0p+d_f}{a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3},$$

мұндағы $Y(p)$ және $F(p)-y(t)$ және $f(t)$ әсерлерінің кескіндері;
$p=c+j\omega$ – комплексті айнымалы;

$d_0=k_5T_1;\quad d_1=k_5;\quad a_0=T_1T_2^2;\quad a_1=T_2^2+T_1T_3;\quad a_2=T_1+T_3+k_4k_5\tau+k_3k_5T_1;$
$a_3=1+k_3k_5+k_1k_4k_5.$

Осыдан бастапқы дифференциалдық теңдеу мына түрде табылады:

$$\left(a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3\right)y(t)=(d_0p+d_1)f(p),\quad p=\frac{d}{dt}.$$

01.55-есеп.

Ш е ш і м і. Қарастырып отырған жүйенің беріліс функциясы мына түрде жазылады:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)\ W_{к.б.}(p)}=\frac{K\ W_1(p)}{1+K\ W_1(p)\ W_{к.б.}(p)}=\frac{W_1(p)}{\frac{1}{K}+W_1(p)W_{к.б.}(p)},$$

мұндағы $W(p)=KW_1(p)$ – тура тізбектегі буынның беріліс функциясы.

$K\to\infty$ кезде

$$\Phi(p)=\frac{1}{W_{к.б.}(p)}=\frac{1}{\frac{T_{к.б.}k_{к.б.}p}{T_{к.б.}p+1}}=\frac{T_{к.б.}\cdot p+1}{T_{к.б.}\cdot к_{к.б.}\cdot p}=$$

$$=\frac{1}{к_{к.б.}}+\frac{1}{T_{к.б.}к_{к.б.}p}=к_p\quad 1+\frac{1}{T_u\cdot p},$$

мұндағы $к_p=\frac{1}{к_{к.б.}}$, $T_u=T_{к.б.}$.

Күшейткіш буынды икемді кері байланыспен қамтысақ, статикалық жүйеден ПИ-реттеу заңдылығы бар астатикалық жүйені аламыз.

01.56-есеп.

Ш е ш і м і. Күшейткіш және орындаушы механизмдер бір-бірімен тізбектеле қосылған, яғни

$$W(p)=W_1(p)\cdot W_2(p)=\frac{k_1\cdot k_2}{p}=\frac{k}{p},$$

мұндағы $k=k_1\cdot k_2$ – тура тізбектің күшейту коэффициенті.

Қатты кері байланыс (ҚКБ) күшейту коэффициенті $K_{к.б.}$ күшейткіш буын түрінде. Онда бұл АРЖ-ның беріліс функциясы былай табылады:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)\cdot k_{к.б.}}=\frac{\frac{к}{p}}{1+\frac{к\cdot k_{к.б.}}{p}}=\frac{\frac{1}{к_{к.б.}}}{\frac{1}{к\cdot k_{к.б.}}\cdot p+1}=\frac{к_э}{T_эp+1},$$

мұндағы $к_э=\frac{1}{к_{к.б.}}$ – контурдың күшейту коэффициенті;

$T_э=\frac{1}{к_{к.б.}}$ – уақыт тұрақтысы, *с*.

Сонымен қатты кері байланыспен қамтылған интегралдауыш буын, динамикалық тұрғыдан қарастырғанда бірінші ретті апериодтық буынға пара-пар.

01.57-есеп.

Ш е ш і м і. Берілген функционалдық схемадан (1.52-сурет) жүйе буындарының беріліс функцияларын анықтаймыз:

1) τ күшейту уақытын ескермегендегі реттеу объектісі $W_{о.б}(p)=\frac{Q(p)}{\varphi(p)}=W_1(p)$, мұндағы $\varphi(p)=\frac{Q_c(p)}{Q_{ы}(p)}$;

2) Реттеуші орган (заслонка) $W_{р.о}(p)=\frac{\varphi(p)}{l(p)}=W_2(p)$;

3) Орындаушы механизм (редукторлы электрқозғалтқыш)

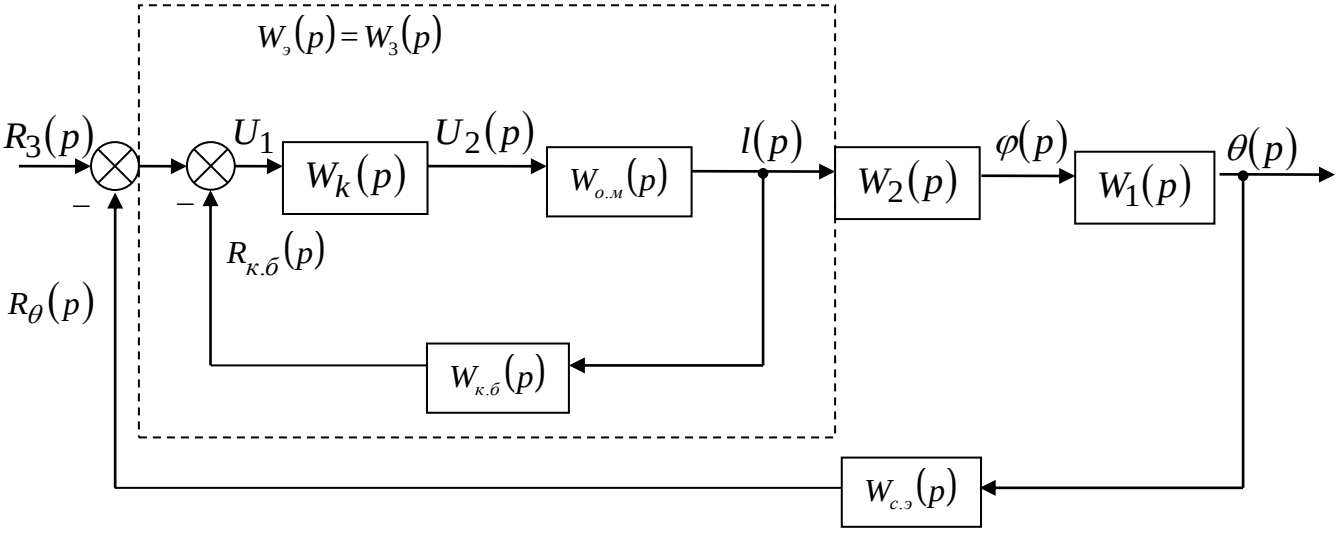
$$W_{ом}(p)=\frac{l(p)}{U_2(p)};$$

4) Күшейткіш $W_к(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}$;

5) Күшейткіш пен орындаушы механизмді қамтыған қатты кері байланыс элементі $W_{к.б.}(p)=\frac{R_{к.б.}(p)}{l(p)}$;

6) Сезімтал элемент (термокедергі) $W_{с.э}(p)=\frac{R_\theta(p)}{Q(p)}=W_4(p)$.

Жоғарыдағы белгілеулерге сәйкес жүйенің құрылымдық схемасын 01.8-суретте көрсетілгендей сызуға болады.



01.8-сурет. Кептіргіштің құрылымдық схемасы

Құрылымдық схемаларды түрлендіру ережесін пайдалана отырып жүйенің ішкі контурының беріліс функциясын анықтаймыз:

$$W_{экв}(p)=\frac{W_k(p)\ W_{о.м}(p)}{1+W_к(p)\ W_{о.м}(p)\ W_{к.б}(p)}.$$

$W_{экв}(p)=W_3(p)$ деп белгілейік. Онда тура тізбекте беріліс функциялары $W_1(p),\ W_2(p),\ W_3(p)$ үш буын тізбектеле қосылады.

Негізгі кері байланыс тізбегінде беріліс функциясы $W_4(p)$ буын бар. Яғни тұйықталған жүйенің беріліс функциясы, түрлендіру ережесіне сәйкес

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1+W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)}.$$

Егер бастапқы белгілеулерін қойсақ

$$\Phi(p)=\frac{W_{об}(p)\ W_{р.о}(p)\ W_k(p)\ W_{о.м}(p)}{1+W_к(p)\ W_{о.м}(p)\ \left[W_{к.б}(p)+W_{об}(p)\ W_{р.о}(p)\ W_{с.э}(p)\right]}.$$

01.58-есеп.

Ш е ш і м і. Есептің шартына және функционалдық схемаға (1.53-сурет) сәйкес орта қысымы АРЖ-сы үшін беріліс функциялары төмендегідей мына буындарды бөліп алайық:

1) Реттеу объектісі – резервуар $W_{об}(p)=\frac{K_{об}}{Tp+1}$,

мұндағы $K_{об}$ – реттеу объектісінің күшейту коэффициенті;

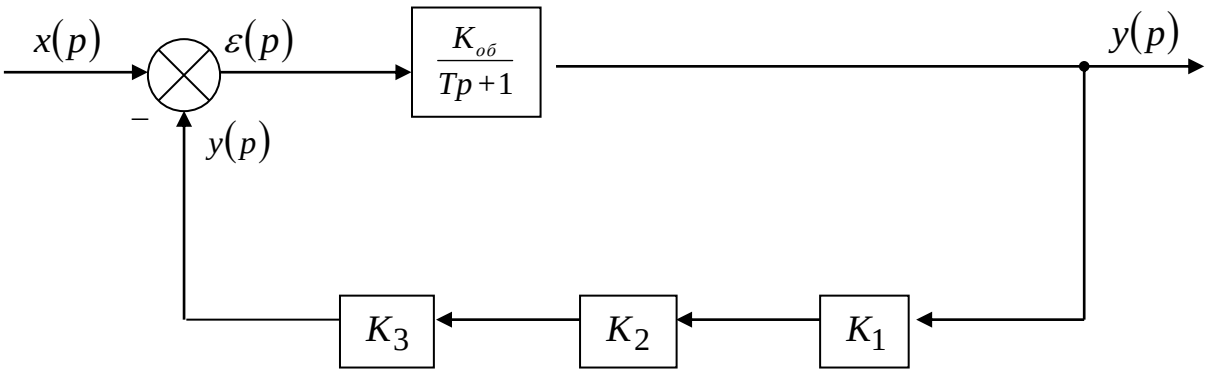
T – уақыт тұрақтысы;

2) Сезімтал элемент – манометрлік серіппе $W_1(p)=K_1$;

3) Күшейткіш-түрлендіргіш құрылғы – «сопло-заслонка» түйіні $W_2(p)=K_2$;

4) Орындаушы механизм – пневматикалық клапан $W_3(p)=K_3$;

Бұл жүйенің құрылымдық схемасы 01.9-суретінде көрсетілген.



01.9-сурет. Қысым АРЖ-сының құрылымдық схемасы

АРЖ беріліс функциясын анықтайық. Ол үшін кез келген жерден кері байланысты үзейік. Онда беріліс функциясы

$$W(p) = W_{об}(p) \cdot W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) = \frac{K_{об} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3}{Tp+1} = \frac{K_{об} \cdot K_p}{Tp+1},$$

(мұндағы $K_p = K_1 K_2 K_3$ – реттеуіштің күшейту коэффициенті) болатын буындардың тізбектеле қосылысын аламыз. Бұл жағдайда бүкіл АРЖ күшейту коэффициенті $K_{об}K_p$ болады.

Тұйықталған АРЖ беріліс функциясы мына формуламен анықталады:

$$\Phi(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{об}(p) \cdot W_1(p) W_2(p) W_3(p)} = \frac{\frac{K_{об}}{Tp+1}}{1 + \frac{K_{об} \cdot K_p}{Tp+1}} = \frac{K_{об}}{Tp + \left(1 + K_{об} \cdot K_p\right)}.$$

Бұл өрнектің алымы мен бөлімін $1+K_{об}K_p$ шамасына бөлсек, мына формуланы аламыз:

$$\Phi(p) = \frac{K_э}{Tp+1},$$

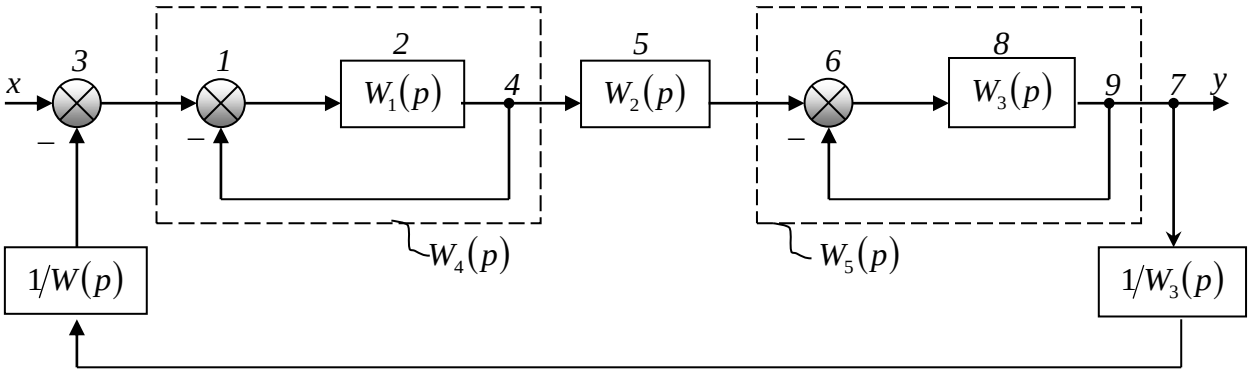
мұндағы $K_э = \dfrac{K_{об}}{1 + K_{об} \cdot K_р}$; $T_э = \dfrac{T}{1 + K_{об} \cdot K_р}$.

Алынған өрнектен тұйықталған АРЖ-ның динамикалық тұрғыда параметрлері $K_э$ және $T_э$ болатын бірінші ретті апериодтық буын екенін көреміз.

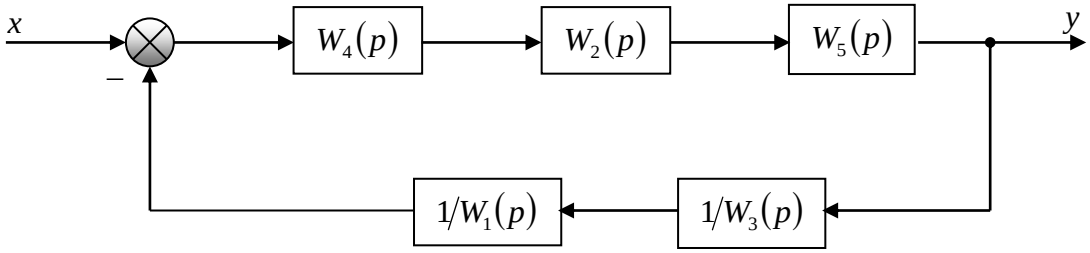
01.59-есеп.

Ш е ш і м і. Белгілі құрылымдық пара-пар түрлендіру ережелеріне сәйкес (6-ереже), 3-қосындағышты $W_1(p)$ буынының кірісіне, ал 7-түйінді $W_3(p)$ буынының шығысына (3-ереже) ауыстырамыз да, 01.10,*а*-суреттегі схеманы аламыз. (1.3.3)-формуласына сәйкес, $W_4(p) = \dfrac{W_1(p)}{1 + W_1(p)}$ және $W_5(p) = \dfrac{W_3(p)}{1 + W_3(p)}$ анықтап, 01.10,*б*-суреттегі құрылымдық схеманы аламыз. Алынған АРЖ беріліс функциясы

$$W(p) = \frac{W_2(p)W_4(p)W_5(p)}{1 + \dfrac{W_2(p)W_4(p)W_5(p)}{W_1(p) \cdot W_3(p)}}.$$



а)



б)

01.10-сурет. АРЖ құрылымдық схемасын түрлендіру

02-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің орнықтылығы

02.1. Автоматты реттеу жүйесін орнықтылық критерийлерімен бағалау

02.17-есеп.

Ш е ш і м і. Сипаттаушы теңдеудің

$$a_0 = 2;\ a_1 = 4;\ a_2 = 10 \text{ және } a_3 = 3,$$

барлық коэффициенттері оң таңбалы. Яғни, орнықтылықтың бірінші шарты орындалады.

Гурвиц анықтауыштарын құрамыз; сипаттаушы теңдеу үшінші ретті болғандықтан, олардың саны да үшеу болады:

$$\Delta_1 = a_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 4 \cdot 10 - 3 \cdot 2 = 34 > 0.$$

$$\Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 = 3 \cdot 34 = 102 > 0.$$

Гурвиц критерийінің екінші шарты да орындалады, яғни, жүйе орнықты.

02.18-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p) = W_o(p) \cdot W_{к.э.}(p) \cdot W_к(p) = \frac{K_o}{T_o p + 1} \cdot \frac{K_э}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} \cdot \frac{K_к}{T_к p} =$$

$$= \frac{K_o K_э K_к}{T_o T_1^2 T_к p^4 + (T_0 T_2 + T_1^2) T_к p^3 + (T_0 + T_2) T_к p^2 + T_к \cdot p} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі

$$G(p) = B(p) + A(p) = T_0 T_1^2 T_к p^4 + (T_0 T_2 + T_1^2) T_к p^3 + (T_0 + T_2) T_к p^2 + T_к p + K_o K_э K_к.$$

Теңдеу төртінші ретті. Теңдеудің коэффициенттері мынаған тең:

$$a_0 = T_0 T_1^2 T_к > 0; \quad a_1 = (T_0 T_2 + T_1^2) T_к > 0;$$

$$a_2 = (T_0 + T_2)T_к > 0; \quad a_3 = T_к > 0; \quad a_4 = K_o K_э K_к > 0.$$

Гурвиц критерийінің бірінші шарты орындалады, енді осы критерий ережелерін төртінші ретті сипаттаушы теңдеуге пайдаланайық:

$$\Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = (T_1^2 + T_0 + T_0 T_2) T_2 T_к^2 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2 = \left[(T_1^2 + T_0^2 + T_0 T_2) T_2 T_к - (T_1^2 + T_0 T_2)^2 K_o K_э K_к\right] T_к^2.$$

$\Delta_3 > 0$, яғни $\Delta_4 > 0$ болулары үшін мына шарт орындалуы тиіс:

$$K_o K_э K_к < \frac{T_1^2 + T_0^2 + T_0 T_2}{(T_1^2 + T_0 T_2)^2} T_2 T_к,$$

ал бұған әр уақытта T және K коэффициенттерін таңдау арқылы қол жеткізуге болады.

02.19-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған жүйе беріліс функциясын табамыз:

$$W(p) = W_{об}(p) \quad W_p(p) = \frac{2{,}53p + 1{,}639}{2{,}63p^3 + 4{,}39p^2 + 1{,}54p} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясын жазамыз:

$$\Phi(p) = A(p) + B(p) = 0, \text{ яғни}$$

$$\Phi(p) = 2{,}63p^3 + 4{,}39p^2 + 4{,}07p + 1{,}639 = 0.$$

Мынадай белгілеулер енгізейік:

$$a_0 = 2{,}63; \quad a_1 = 4{,}39; \quad a_2 = 4{,}07; \quad a_3 = 1{,}639.$$

Гурвиц критерийіне сәйкес барлық $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ коэффициенттері оң таңбалы болуымен қатар Δ_1, Δ_2 және Δ_3 анықтауыштары да нөлден үлкен болулары тиіс. Осы шартты тексерейік:

$$\Delta_1 = a_1 = 4{,}39 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 17{,}87 - 3{,}97 = 13{,}9 > 0;$$

$$\Delta_3 = a_3 a_2 = a_3 (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 - a_0 \cdot a_3^2 = 29{,}3 - 7{,}05 = 22{,}25 > 0.$$

$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ шарттары орындалады, яғни тұйықталған жүйе орнықты.

02.20-есеп.

Ш е ш і м і. Жүйенің сипаттаушы теңдеуін табамыз. Ол үшін дифференциалдық теңдеудегі $\frac{d}{dt}$ символын p операторына алмастырамыз:

$$G(p) = 2p^3 + 9p^2 + 13p + 6 = 0.$$

Енді $p = j\omega$ деп алып Михайлов векторының өрнегін аламыз:

$$G(j\omega) = \left(6 - 9\omega^2\right) + j\left(13\omega - 2\omega^3\right),$$

мұндағы $U(\omega) = 6 - 9\omega^2$

$V(\omega) = 13\omega - 2\omega^3$

Михайлов векторының аргументі

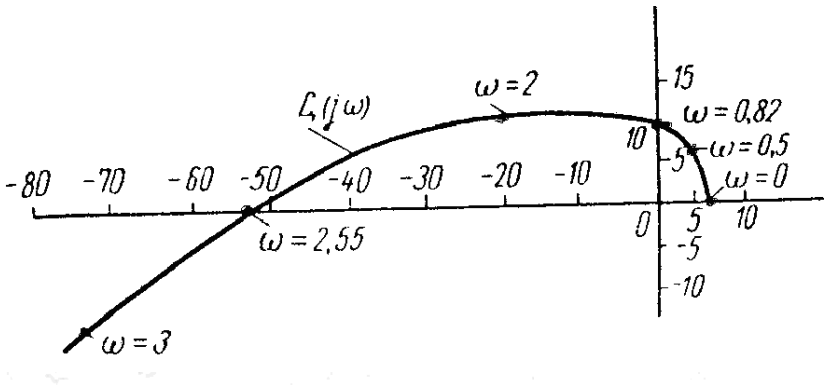
$$\arg G(j\omega) = arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = arctg \frac{13\omega - 2\omega^3}{6 - 9\omega^2},$$

оның модулі

$$|G(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{4\omega^6 + 29\omega^4 + 61\omega^2 + 36}.$$

ω-ның әр түрлі мәндерін қоя отырып, *U*-*V* жазықтығында Михайлов годографын сызамыз (02.1-сурет).

G



02.1-сурет. Михайлов годографы

Годографтың $U(\omega)$ нақты осьпен қиылысқан нүктесінде вектордың жорамал бөлігі нөлге тең, яғни

$$V(\omega)=13\omega-2\omega^3=0,$$

осыдан $\omega_1=0$ және $\omega_2=\sqrt{\frac{13}{2}}=2{,}55.$

Бұл кезде

$$|G(j\omega)|_{\omega=0}=6;\quad |G(j\omega)|_{\omega=2{,}55}=52{,}5.$$

Модульдің бұл екі мәні годографтың нақты осьпен қиылысатын екі нүктесін береді (аргументтері 0 және π болғандағы).

Годографтың жорамал осьпен қиылысу нүктесі $U(\omega)=0$ шартына сәйкес келеді:

$$U(\omega)=6-9\omega^2=0,$$

осыдан $\omega=\sqrt{6/9}=0{,}82$ және $|G(j\omega)|_{\omega=0{,}82}=9{,}6.$

Годограф жорамал осьпен тек бір нүктеде қиылысады (аргументі $\pi/2$ болғанда). ω өскен сайын сипаттаушы вектордың модулі де өсе бастайды және $|G(j\omega)|\to\infty;$ бұл модуль ешқашан нольге тең болмайды, ал бұл вектордың бұрылу бұрышы сағат тілі бағытына қарсы $3/2\,\pi$ шамасына ұмтылады. Сонымен, Михайлов годографы үш квадрантты бірінен кейін бірін кезекпен басып өтіп жатыр, яғни жүйе орнықты.

02.21-есеп.

Ш е ш і м і. Жүйенің ажыратылған күйіндегі беріліс функциясын жазайық:

$$W(p)=\frac{K_{об}\ \ K_{ом}\ \ K_p}{(T_1p+1)\ \ (T_2p+1)\ \ (T_{ом}p+1)}=\frac{10}{(2p+1)\ \ (5p+1)\ \ (10p+1)}=\frac{A(p)}{B(p)}.$$

Тұйықталған жүйенің сипаттаушы полиномы $A(p)+B(p)=0$ мына түрде жазылады:

$$a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0,$$

мұндағы $a_0=T_1\ \ T_2\ \ T_{о.м.}=100;$ $a_1=(T_1\ \ T_2+T_1\ \ T_{о.м.}+T_2\ \ T_{о.м.})=80;$ $a_2=(T_1+T_2+T_{о.м.})=17;$ $a_3=1+K=11.$

Жүйенің сипаттаушы полиномындағы p-ны $j\omega$-ға алмастырып $(p=j\omega)$ Михайлов годографының теңдеуін аламыз:

$$G(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega),$$

мұндағы $U(\omega)=a_3-a_1\cdot\omega^2=11-80\omega^2;$

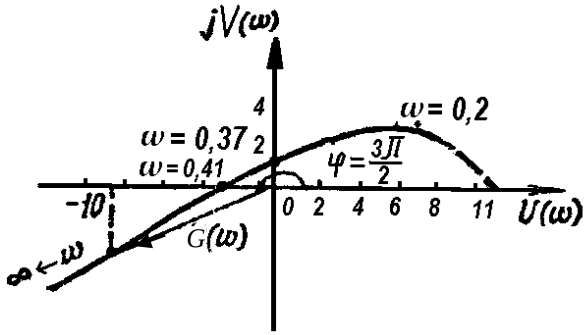
$V(\omega)=\omega(a_2-a_0\cdot\omega^2)=\omega(17-100\omega^2);$

Бұл әдісті қолданғанда $j=\sqrt{-1},\ \ j^2=-1,\ \ j^3=-j$ болатынын есте ұстау керек.

Енді жиілікті $0\le\omega\le\infty$ ауқымында өзгерте отыра $U(\omega)$ мен $V(\omega)$ шамаларының мәндерін табамыз:

$\omega,\ \ c^{-1}$	0	0,05	0,1	0,2	0,37	0,413	0,5	1,0
$U(\omega)$	11	10,8	10,2	7,8	0	– 2,4	– 9	– 69
$V(\omega)$	0	0,85	1,6	2,6	1,25	0	– 4,0	– 83

Алынған деректер бойынша Михайлов қисығын (02.2-сурет) тұрғызамыз. Жиілік ω нөлден шексіздікке дейін өзгергенде $G(j\omega)$ векторының қорытындылық бұрылу бұрышы $\varphi=n\frac{\pi}{2}=3\frac{\pi}{2}$ (мұндағы n = 3 – жүйе теңдеуінің реті) болатындықтан, қарастырып отырған жүйенің орнықты екенін көреміз.



02.2-сурет. Михайлов годографы

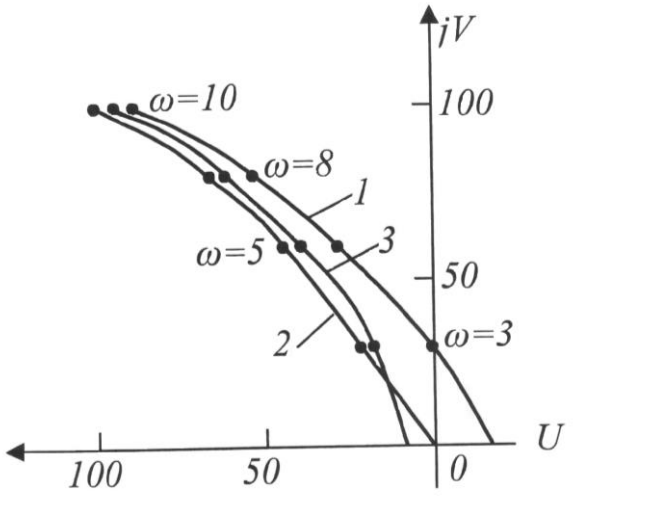
02.22-есеп. Жүйенің сипаттаушы теңдеуі

$$W(p)=p^2+9{,}9p+K-1=0.$$

Бұл теңдеудегі p операторының орнына $j\omega$-ны алмастыра отыра оның нақты және жорамал бөліктерін аламыз:

$$\left.\begin{aligned} U(\omega)&=K-1-\omega^2;\\ V(\omega)&=9{,}9\omega. \end{aligned}\right\}$$

Жиілік мәнін $\omega=0$-ден $\omega=\infty$-ке дейін өзгерте отыра K = 10, K = 1 және K = 0,1 үшін Михайлов годографын тұрғызайық. K = 10 болғанда годограф екі квадрантты бірінен кейін бірін басып өтіп жатыр (02.3-сурет, 1-қисық), яғни бұл жағдайда жүйе орнықты. K = 1 болғанда жүйе орнықтылық шекарасында тұр, себебі, годограф координат басы арқылы өткен (2-қисық). K = 0,1 болғанда (3-қисық) годограф тек екінші квадрантта жатыр, бұл жүйенің орнықсыз екендігін көрсетеді.



02.3-сурет. Михайлов годографтары.
1-қисық – К = 10; 2-қисық – К = 1; 3-қисық – К = 0,1

02.23-есеп. Жиілік $\omega = 0$-ден $\omega = \infty$-ке дейін өзгергенде $W(j\omega)$ векторының бұрылу бұрышы мына формуламен анықталады:

$$\varphi = n\frac{\pi}{2} - m\pi, \qquad (02.23.1)$$

мұндағы n – сипаттаушы теңдеудің реті;

m – сипаттаушы теңдеудің оң жақ жартылай жазықтықтағы түбірлер саны.

2.13-суреттен $0 \le \omega \le \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ болғанда n = 5 екендігін көреміз. Сәйкес мәндерді (02.23.1) формулаға қоя отыра

$$\pi/2 = 5\frac{\pi}{2} - m\pi,$$

m = 2 аламыз. Яғни, сипаттаушы теңдеудің оң жақ жартылай жазықтықта үш түбірі, ал сол жақ жартылай жазықтықта екі түбірі бар.

02.24-есеп.

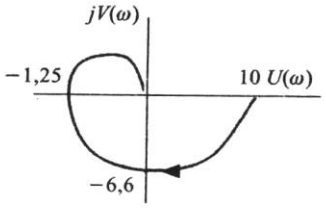
Ш е ш і м і: Нақты және жорамал жиіліктік функцияларды анықтаймыз:

$$W(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{10\left[1 - 3\omega^2 - j\left(3\omega - \omega^3\right)\right]}{\left(1 - 3\omega^2\right)^2 + \left(3\omega - \omega^3\right)^2},$$

$$U(\omega) = -\frac{10\left(1 - 3\omega^2\right)}{\left(1 - 3\omega^2\right)^2 + \left(3\omega - \omega^3\right)^2}, \quad V(\omega) = -\frac{10\dot{\omega}\left(3 - \omega^2\right)}{\left(1 - 3\omega^2\right)^2 + \left(3\omega - \omega^3\right)^2}.$$

АФЖС тұрғызу үшін координат осьтерімен қиылысатын нүктелерді анықтап алып, оларды бірқалыпты қисықпен қосамыз. Есептеу нәтижесіндегі мәндер кестеде, ал оның негізінде алынған АФЖС 02.4-суретте келтірілген.

ω	0	$0 < \omega < 1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3} < \omega < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\omega > \sqrt{3}$	∞
$U(\omega)$	10	> 0	0	< 0	– 1,25	< 0	0
$V(\omega)$	0	< 0	– 6,6	< 0	0	> 0	0



02.4-сурет. АФЖС

Жүйе орнықсыз, себебі, ажыратылған жүйенің АФЖС-ы $(-1,\ jo)$ нүктесін қамтып жатыр.

02.25-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы:

$$W(p)=W_p(p)\ \ W_{об}(p)\ \ W_{о.м.}(p)=\frac{4{,}8}{(2p+1)\ \ (10p+1)\ \ (5p+1)}.$$

Бұл өрнектегі p-ны $j\omega$-ға алмастыра отыра жиіліктік беріліс функциясын аламыз:

$$W(j\omega)=\frac{4{,}8}{(1+j2\omega)\cdot(1+j10\omega)\cdot(1+j5\omega)}.$$

Олай болса, жүйенің амплитудалық-жиіліктік және фазалық-жиіліктік сипаттамаларын былай көрсетуге болады:

$$A(\omega)=\frac{4{,}8}{\sqrt{1+(2\omega)^2}\cdot\sqrt{1+(10\omega)^2}\cdot\sqrt{1+(5\omega)^2}},$$

$$\varphi(\omega)=\varphi_{о.м.}(\omega)+\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)=-arctg2\omega-arctg10\omega-arctg5\omega.$$

Логарифмдік жиіліктік сипаттама

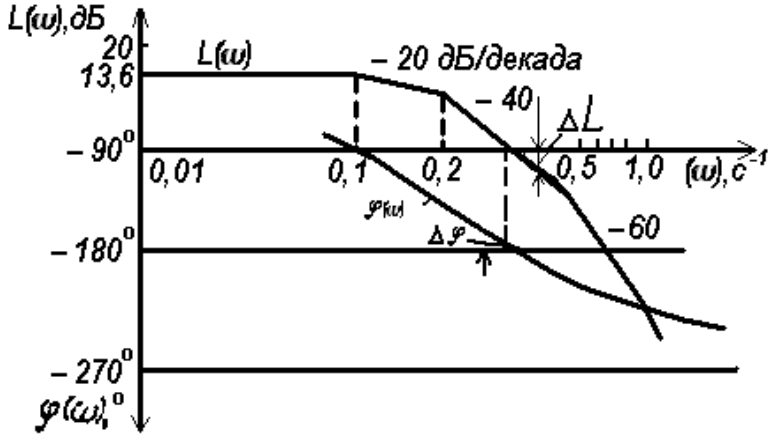
$$L(\omega)=201g\ \ \ A(\omega)=201g4{,}8-201g\sqrt{1+(2\omega)^2}-201g\sqrt{1+(10\omega)^2}-201g\sqrt{1+(5\omega)^2}.$$

Сипаттаманың жанасушы жиіліктері мынаған тең:

$$\omega_1=\frac{1}{T_1}=0{,}1c^{\ 1};\quad \omega_2=\frac{1}{T_2}=0{,}2c^{\ 1};\quad \omega_3=\frac{1}{T_{о.м.}}=0{,}5c^{-1};$$

Алынған жанасушы жиіліктердің мәндерін ω жиіліктік осіне салып $201gK=201g4{,}8=13{,}6$ Дб биіктіктен бастап $L(\omega)$ логарифмдік

амплитудалық-жиіліктік сипаттамасын және $\varphi(\omega)$ логарифмдік фазалық-жиіліктік сипаттамаларын тұрғызамыз (02.5-сурет).



02.5-сурет. АРЖ логарифмдік-жиіліктік сипаттамалары

Орнықтылықтың логарифмдік критерийіне сәйкес реттеуіштің күшейту коэффициентінің берілген $K_p = 2$ мәнінде жүйе орнықты, себебі бұл кезде ЛАЖС жиіліктік осін ЛФЖС – 180°С-қа сәйкес түзуді кесіп өтетін жиіліктен кіші жиілікте қиып өтеді.

02.5-суреттен ΔL амплитуда және $\Delta\varphi$ фаза бойынша орнықтылық қорын анықтаймыз: $\Delta L \approx 5$Дб, $\Delta\varphi \approx 10^{o}$.

$L(\omega)$ ЛАЖС-сын ΔL шамасына көтергенде сипаттаманың түрі өзгермейді, тек кесу жиілігінің шамасы критикалық жиілігіне тең болады $(\omega_к = \omega_{кр})$, яғни, бұл жағдайда тұйықталған жүйе орнықтылық шекарасында тұрады.

Жүйенің $K_ш$ шектік күшейту коэффициентін мына өрнектен анықтаймыз:

$$20lgK_ш = 18{,}6; \quad K_ш = 8.$$

$$K_ш = K_{об} \cdot K_{о.м.} \cdot K_p = 8, \text{ осыдан } K_p = \frac{8}{1{,}5 \cdot 1{,}6} = 3{,}3.$$

Реттеуіштің күшейту коэффициентінің $K_p > 3{,}3$ мәндерінде тұйықталған жүйе орнықсыз болады.

02.26-есеп. 2.14,*а*-суретінен $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ аламыз, яғни тұйықталған жүйе орнықты. 2.14,*б*-суретінен $1 - \frac{1}{2} - 1 \neq \frac{1}{2}$ табамыз, бұл тұйықталған жүйенің орнықсыз екенін көрсетеді.

2.14,*в*-суретіндегі $W(j\omega)$ годографтан $1+1-\frac{1}{2}\equiv\frac{3}{2}$ аламыз, яғни, жүйе тұйықталған күйде орнықты.

2.14,*г*-суретіндегі $W(j\omega)$ годографтан $1+1-\frac{1}{2}\neq\frac{2}{2}$ екенін анықтаймыз, яғни тұйықталған жүйе орнықсыз.

$W(j\omega)$ годографынан (2.14,*д*-сурет) $+\frac{1}{2}+1+1+1-1\equiv\frac{5}{2}$ болады да – тұйықталған жүйе орнықты, ал 2.14,*е*-суретте $\frac{1}{2}-1\neq\frac{3}{2}$ болғандықтан, тұйықталған жүйе орнықсыз.

02.27-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p)=\frac{K}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}.$$

Оператор *p*-ны $j\omega$ символына алмастырып, жүйенің комплекстік күшейту коэффициентін аламыз:

$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega).$$

Бұл функцияның модулі мен аргументі сәйкесінше мынаған тең:

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\frac{K}{\sqrt{(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)(1+\omega^2T_3^2)}}.$$

$$\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=\operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=-\operatorname{arctg}\omega T_1-\operatorname{arctg}\omega T_2-\operatorname{arctg}\omega T_3.$$

ЛАС теңдеуі:

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg K-20\lg\sqrt{1+\omega^2T_1^2}-$$
$$-20\lg\sqrt{1+\omega^2T_2^2}-20\lg\sqrt{1+\omega^2T_3^2}. \qquad (02.27.1)$$

Асимптоталық ЛАС салу үшін жанасу жиілігін табады да:

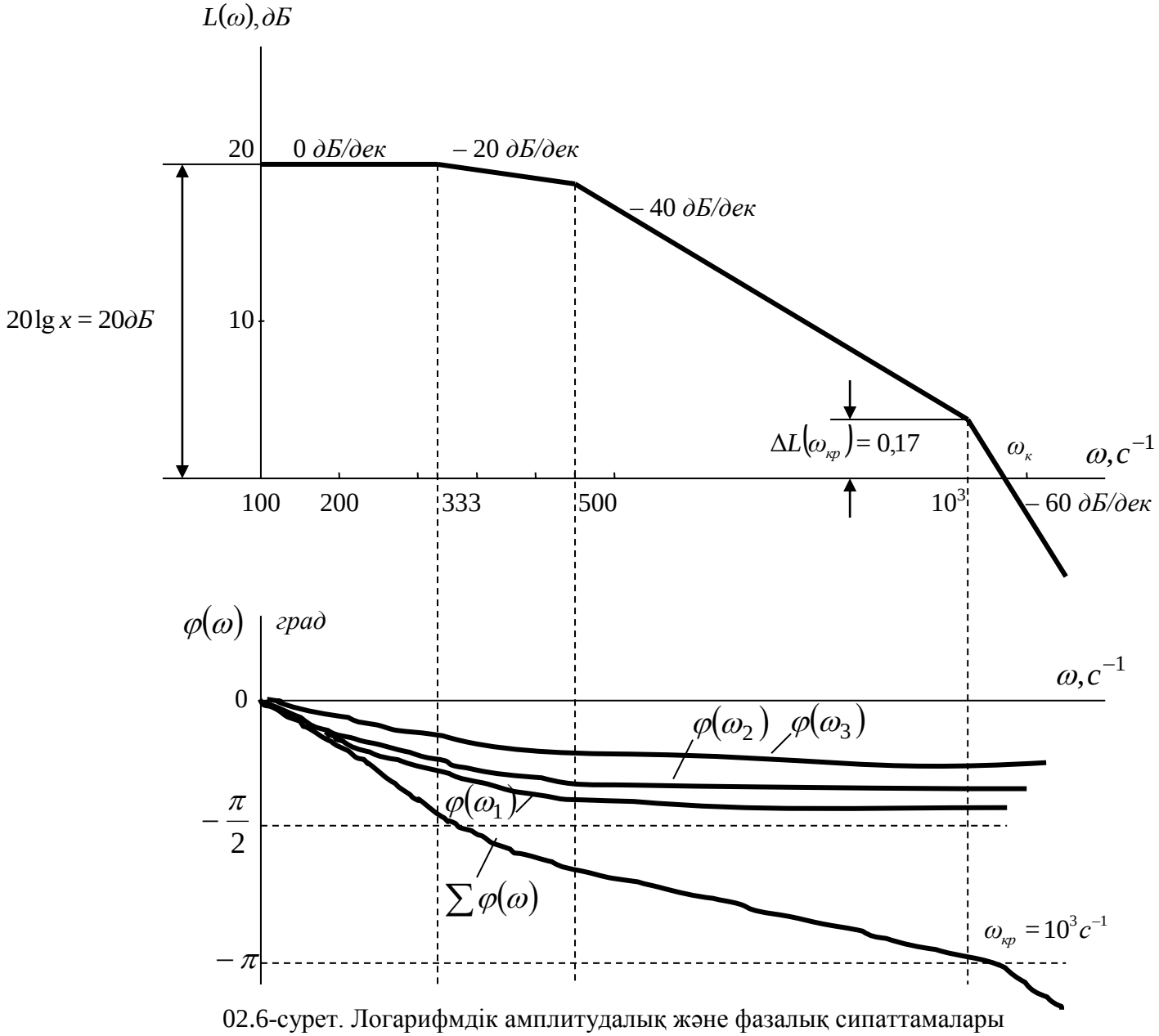
$$\omega_{c1}=\frac{1}{T_1}=\frac{1}{0{,}003}=333c^{-1};$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{T_2} = 500c^{-1};$$

$$\omega_{c3} = \frac{1}{T_3} = 1000c^{-1}$$

жиілік осіне салады (02.6-сурет). Ординат осіне (02.27.1) теңдеуінің бірінші мүшесін $201gk = 201g10 = 20$ дБ салады да, алғашқы жанасушы ω_{c1} жиілікке дейін түзу жүргізеді. Содан кейін екінші жанасушы ω_{c2} жиілікке дейін – 20дБ/дек *көлбеу түзулер* жүргізеді, сонда екінші апериодтық буын есебінен көлбеу тағы да – 20 дБ/дек-ға артады. Осының нәтижесінде ω_{c2} мен ω_{c3} нүктелерінің аралығында ЛАС кесіндісін – 40 дБ/дек көлбеуімен жүргізеді.

Үшінші ω_{c3} жанасушы жиіліктің оң жағында құлама тағы да 20 дБ/дек төмендейді, яғни түзу – 60 дБ/дек көлбеумен жүргізіледі де, жиілікті одан кейін өзгерткенде ЛАС әрі қарай өзгеріссіз қалады.



02.6-сурет. Логарифмдік амплитудалық және фазалық сипаттамалары

Фазалық логарифмдік сипаттаманы (ЛФС) (02.21.2)-не сәйкес барлық буындардың аргументтерін қосып салады. Бұл кезде жанасу жиілігінде әрбір апериодтық буын $\omega \to 0$ кезінде $\varphi(\omega) = -45^o$-қа, ал $\omega \to \infty$ кезінде $\varphi(\omega) \to -90^o$-қа кешігетінін естен шығармау керек.

Есептеу нәтижесі төменгі кестеге ендірілген.

$\omega_1,\ c^{-1}$	0	100	500	1000	5000	∞
$\varphi_1(\omega) = \text{arctg}\omega T_1$	0	17	56	72	86	90
$\varphi_2(\omega) = \text{arctg}\omega T_2$	0	12	45	63	85	90
$\varphi_3(\omega) = \text{arctg}\omega T_3$	0	6	27	45	79	90
$\varphi(\omega)$, град	0	35	128	180	250	270
$L(\omega)$, дБ	20	19,3	11,0	0,17	– 33,9	–

Асимптоталық ЛАС және кесте мәліметтеріне қарай $\omega_{кр} < \omega_{ср}$ екенін, оған қоса кризистік жиілікте амплитуда бірден үлкен $(L(\omega_{кр}) = 0{,}17)$ болатындығын байқаймыз, демек, жүйе орнықсыз.

02.2. Орнықтылық аймағын анықтау

02.37-есеп.

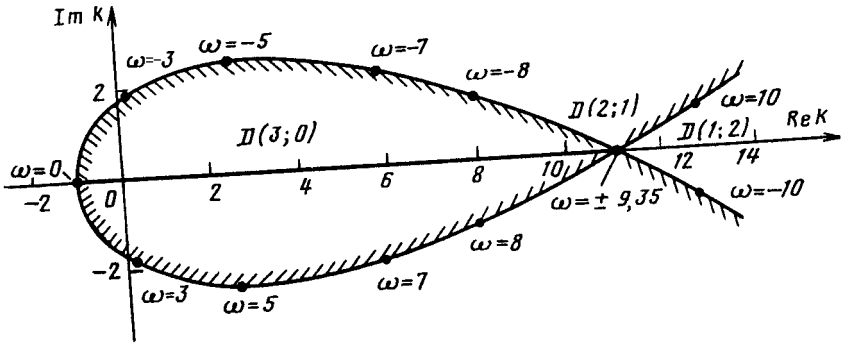
Ш е ш і м і. Жүйенің сипаттаушы теңдеуі

$$G(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + K = 0.$$

$p = j\omega$ деп алып теңдеуді K коэффициентіне қарасты шешеміз:

$$K = -(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1) = \left[(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\omega^2 - 1\right] +$$
$$+ j\left[T_1T_2T_3\omega^3 - (T_1 + T_2 + T_3)\omega\right] = \left(0{,}14\omega^2 - 1\right) + j\left(0{,}08\omega^3 - 0{,}7\omega\right).$$

Енді ω айнымалысына 0-ден ∞ аралығындағы мәндерін бере отыра Д-бөліктеу қисығын тұрғызамыз (02.7-сурет).



02.7-сурет. Бір параметр жазықтығындағы орнықтылық аймағы

Штрихтеу жұмысын жүргізгеннен кейін орнықтылық аймағына ең көп сол жақтағы түбірлер жатқан $D(3;\ 0)$ аймағының жататынын көреміз. Шынында да, $K = 0$ болған кезде сипаттаушы теңдеудің барлық үш түбірлері де теріс таңбалы: $p_1 = -\dfrac{1}{T_1};\quad p_2 = -\dfrac{1}{T_2};\quad p_3 = -\dfrac{1}{T_3}.$

Бұл жүйенің беріліс коэффициентінің жарамды өзгеру ауқымы – 1-ден + 11,2 аралығында.

02.38-есеп.

Ш е ш і м і. Жүйенің сипаттаушы теңдеуін мына түрде аламыз:

$$G(p) = 1 + \frac{K_{об}}{(T_{об}p + 1)^3}\left(K_n + \frac{K_u}{p}\right) = 0.$$

Түрлендіргеннен кейін

$$G(p) = T_{об}^3 p^4 + 3T_{об}^2 p^3 + 3T_{об} p^2 + (1 + K_{об}K_n)p + K_{об}K_u = 0.$$

$p = j\omega$ деп алып бұл теңдеудің нақты және жорамал бөліктерін табамыз:

$$T_{об}^3\omega^4 - 3T_{об}\omega^2 + K_{об}K_u = 0$$
$$-3T_{об}^2\omega^3 + (1 + K_{об}K_n)\omega = 0$$

Бұл теңдеулер жүйесін мына түрге келтіреміз:

$$\left.\begin{aligned} K_n \cdot 0 + K_u K_{об} - T_{об}\omega^2(3 - T_{об}^2\omega^2) = 0 \\ K_n \cdot K_{об}\omega + K_u \cdot 0 + \omega(1 - 3T_{об}^2\omega^2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Енді анықтауыштарды анықтаймыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & K_{об} \\ K_{об}\omega & 0 \end{vmatrix} = -K_{об}^2\omega;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} T_{об}\omega^2\left(3 - T_{об}^2\omega^2\right) & K_{об} \\ -\omega\left(1 - 3T_{об}^2\omega^2\right) & 0 \end{vmatrix} = K_{об}\omega\left(1 - 3T_{об}^2\omega^2\right);$$

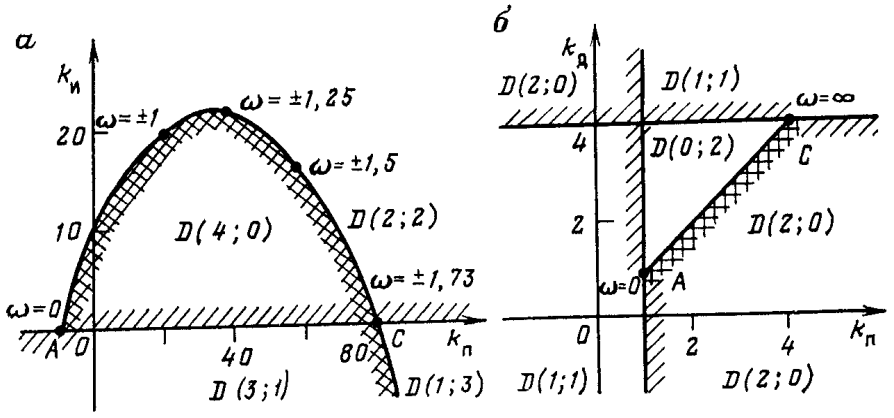
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & T_{об}\omega^2\left(3 - T_{об}^2\omega^2\right) \\ K_{об}\omega & -\omega\left(1 - 3T_{об}^2\omega^2\right) \end{vmatrix} = -K_{об}T_{об}\omega^3\left(3 - T_{об}^2\omega^2\right).$$

Параметрлік формада орнықтылық шекарасының теңдеулерін анықтаймыз:

$$K_n = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\left(3T_{об}^2\omega^2 - 1\right)}{K_{об}};$$

$$K_u = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{T_{об}\omega^2\left(3 - T_{об}^2\omega^2\right)}{K_{об}}.$$

Айнымалы ω мәндерін 0-ден ∞ аралығында өзгерте отыра K_n және K_u мәндері арқылы орнықтылық шекарасын тұрғызамыз (02.8,*а*-сурет, АС қисығы).



02.8-сурет. Орнықтылық аймақтарын екі параметрлер жазықтығында тұрғызу

Негізгі шекаралық қисықты $\omega_u = 0$ мәніне сәйкес келетін ерекше түзумен толықтырамыз:

$$a_n = a_4 = K_{об}K_u = 0 \text{ немесе } K_u = 0.$$

$\omega_u = \infty$ мәніне сәйкес ерекше түзу шексіздікте жатыр.

Негізгі қисықты екі рет штрихтейміз. ω-ның оң мәндерінде $\Delta<0$ болатындықтан, штрихтеуді нольден шексіздікке қарай жылжығанда, оң жақтан жүргіземіз. Ерекше түзуді негізгі шекаралық қисықтың штрихтеріне беттес болатындай етіп штрихтейміз. $\omega=0$ нүктесінде ерекше түзудің штрихтелуі қарама-қарсы жаққа ауысады.

Сонымен K_n және K_u параметрлер жазықтығы $D(4;0)$; $D(3;1)$; $D(2;2)$; $D(1;3)$ төрт аймаққа бөліктенді. Орнықтылық аймағына $D(4;0)$ аймағы жатады.

02.39-есеп.

Ш е ш і м і. Жүйенің сипаттаушы теңдеуі:

$$\left(T_{об_2}^2-K_gK_{об}T_{об_1}\right)p^2+\left(K_nK_{об}T_{об_1}-K_gK_{об}\right)p+K_nK_{об}-1=0,$$

берілген мәндерді қойсақ, мынаны аламыз:

$$K_n(p+1)+K_g(-p^2-p)+4p^2-1=0$$

$p=j\omega$ деп алып екі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned} K_n\cdot 1+K_g\omega^2-4\omega^2-1=0\\ K_n\cdot\omega+K_g(-\omega)+0=0 \end{aligned}$$

Анықтауыштарды табамыз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \omega^2\\ \omega & -\omega\end{vmatrix}=-\omega-\omega^3;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4\omega^2+1 & \omega^2\\ 0 & -\omega\end{vmatrix}=-4\omega^3-\omega=-\omega\left(4\omega^2+1\right)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 4\omega^2+1\\ \omega & 0\end{vmatrix}=-\omega\left(4\omega^2+1\right)$$

Енді D-бөліктеу қисығының шекаралық теңдеуін құрамыз:

$$K_n=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1+4\omega^2}{1+\omega^2};$$

$$K_g=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1+4\omega^2}{1+\omega^2}$$

Бұл бірдей теңдеулерге $K_n - K_g$ жазықтығындағы AC түзуі сәйкес келеді (02.8,*б*-сурет). Негізгі шекаралық түзуді $\omega_{u1} = 0$ және $\omega_{u3} = \infty$ жиіліктеріне сәйкес келетін екі ерекше түзулермен толықтырамыз:

$$a_2 = K_n - 1 = 0 \text{ немесе } K_n = 1,$$
$$a_0 = K_g - 4 = 0 \text{ немесе } K_g = 4.$$

Штрихтеуді белгілі ережелер бойынша жүргізіп, $K_n - K_g$ жазықтығындағы $D(2;0)$ орнықтылық аймағын аламыз.

02.40-есеп. $p = j\omega$ деп алсақ, тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі мына түрде жазылады:

$$K_p = U(\omega) + jV(\omega),$$

мұндағы

$$U(\omega) = \frac{1}{K}\left[\omega T_1 \sin\omega\tau - \left(1 - \omega^2 T_2^2\right)\cos\omega\tau\right];$$

$$V(\omega) = -\frac{1}{K}\left[\omega T_1 \cos\omega\tau + \left(1 - \omega^2 T_2^2\right)\sin\omega\tau\right].$$

$\omega = 0$ болғанда $U(\omega) = 0;\ V(\omega) = -\frac{1}{K}.$ Сонымен бірге $U(\omega) = 0;$ $V(\omega) = 0$ шарттарын D-бөліктеу шекарасының түрін анықтайтын $\omega_к \neq 0$ шексіз жиындар (множество) қанағаттандырады: шекара 2.19-суреттегідей шексіздікке кететін екі спираль түрінде болады.

Орнықтылық аймағына П-реттеуіштің

$$-\frac{1}{K} < K_p < U(\omega_{\min})$$

интервалында жатқан мәндері сәйкес келеді. Мұндағы $\omega_{\min} - V(\omega_{\min}) = 0$ шартын қанағаттандыратын жиіліктің ең кіші оң мәні. П-реттеуіштің беріліс коэффициентінің күдікті оң мәндері $U(\omega_{\min})$-ға тең.

Енді $\omega_{\min}$ анықтайық. $V(\omega)$ нөлге тең деп алып

$$\omega T_1 \cos\omega\tau = \left(\omega^2 T_2^2 - 1\right)\sin\omega\tau$$

аламыз, немесе

$$\frac{\omega T_1}{\omega^2 T_2^2 - 1} = tg\omega\tau.$$

T_1, T_2 және τ мәндерін қойсақ, теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\frac{20\omega}{50\omega^2 - 1} = tg20\omega.$$

Егер $\omega < \sqrt{1/50} \approx 0{,}141$ болса, бұл теңдеудің оң жағының теріс таңбалы екенін, ал $1{,}57 < 20\omega < 3{,}14$ болғанда сол бөлігінің теріс таңбалы болатынын көреміз. $\omega = 0{,}11c^{-1}$ орташа мәнін қойсақ, ол теңдеудің оң жағы – 3,39 болады да, сол жағы – 3,08 болады. Әрі қарай $\omega = 0{,}093,\ \ 0{,}092c^{-1}$ мәндерін теңдеуге қойып, оның оң және сол жақтарын есептеп, графикалық әдіс арқылы $\omega_{\min} = 0{,}0933c^{-1}$ мәнін табамыз:

$$\left(K_p\right)_{күдікті} = U(\omega_{\min}) = \omega T_1 \sin\omega\tau - (1 - \omega^2 T_2^2 \cos\omega\tau) =$$

$$= 0{,}0933 \cdot 20 \cdot \sin 1{,}866 - (1 - 0{,}0933^2 \cdot 50)\cos 1{,}866 =$$

$$= 1{,}866 \cdot 0{,}957 - 0{,}565(-0{,}292) = 1{,}95.$$

02.41-есеп. Тұйықталған АРЖ сипаттаушы теңдеуінен K_p параметрін бөліп алып, $p = j\omega$ мәнін қойып, қажет түрлендіруді жүргізгеннен кейін мынаны аламыз:

$$K_p = U(\omega) + jV(\omega),$$

мұндағы

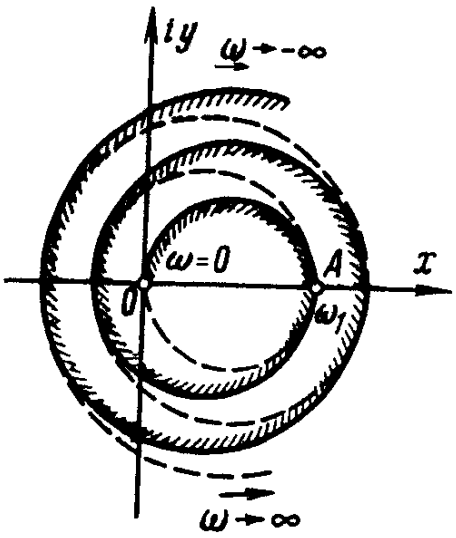
$$U(\omega) = \omega\left[\omega T\cos\omega\tau + \left(1 - 50\omega^2\right)\sin\omega\tau\right];$$
$$V(\omega) = \omega\left[\omega T\sin\omega\tau - \left(1 - 50\omega^2\right)\cos\omega\tau\right].$$

Егер $\omega = 0$ болса, $U(0) = 0;\ V(0) = 0.$ Сонымен бірге, $U(\omega) = 0,$ $V(\omega) = 0$ шарттарынан мына теңдеулерді аламыз:

$$\frac{\omega T}{50\omega^2 - 1} = tg\omega\tau, \quad U(\omega) = 0; \qquad (02.41.1)$$

$$\frac{\omega T}{1-50\omega^2} = ctg\,\omega\tau, \quad V(\omega) = 0; \qquad (02.41.2)$$

Бұл (02.41.1) және (02.41.2) теңдеулеріне D-бөліктеу шекарасының түрін анықтайтын шексіз көп шешім сәйкес келеді: шекара, $\omega = 0$ болғанда комплексті жазықтықтағы координат басында ортақ нүктесі бар, шексіздікке кететін екі спираль арқылы құрылады (02.9-сурет).



02.9-сурет. D-бөліктеу шекаралық қисықтары

K_p мәндері нақты ось бойындағы 0 – A нүктелері аралығында өзгергенде тұйықталған жүйе орнықты. И-реттеуіштің күдікті оң мәнді беріліс коэффициенті мынаған тең:

$$U(\omega_{\min}) = A,$$

мұндағы $\omega_{\min}$ – (02.41.2) теңдеуді қанағаттандыратын жиіліктің ең кіші оң мәні.

Берілген $\tau = 20c$; $T = 20c$ сандық мәндерді (02.41.2) теңдеуге қоя отыра, аламыз:

$$\frac{20\omega}{1-50\omega^2} = ctg\,20\omega.$$

Есептеу нәтижесінде $\omega_{\min} = 0{,}0417c^{-1}$ болатынын анықтаймыз, олай болса, K_p коэффициентінің күдікті мәні

$$(K_p)_{\text{күдікті}} = 0{,}0417[0{,}834\cos 0{,}834 + (1 - 0{,}087)\sin 0{,}834] = 0{,}0516.$$

Осылайша T = 50; 100 және 200c мәндері үшін реттеуіштің күдікті беріліс коэффициенттерін табуға болады: 0,051; 0,05; 0,05c^{-1}.

02.42-есеп. Тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуінен

$$K_p = -T_p e^{\rho\tau}.$$

$p = j\omega$ деп алып мынаны аламыз:

$$K_p = -j\omega T(\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau) = \omega T\sin\omega\tau - j\omega T\cos\omega\tau.$$

Соңғы өрнектің жорамал бөлігі нөлге тең болатын ω мәнін табамыз:

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_n = \frac{\pi}{2\tau} \pm \frac{n\pi}{\tau} \ (n = 0;\ 1;\ 2\ \ldots).$$

Бастапқы теңдеуге $\omega_{\min} = \dfrac{\pi}{2\tau}$ мәнін қойып, аламыз:

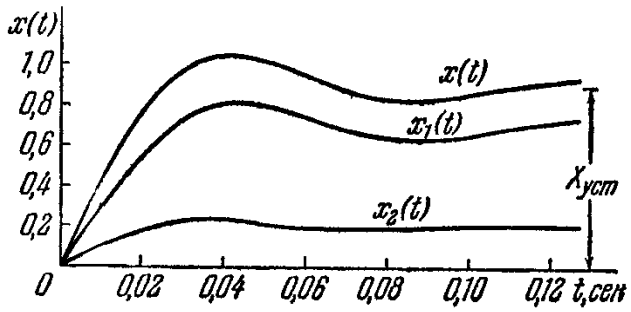
$$K_p = (K_p)_{\text{күдікті}} = \frac{\pi T}{2\tau}\sin\frac{\pi}{2\tau}\tau = 1{,}57\frac{T}{\tau}.$$

03-тарау. Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу және жүйенің сапа көрсеткіштерін анықтау. арж корректирлеу.

03.1. Автоматты реттеу жүйесінің өтпелі процесін тұрғызу

03.9-есеп.

Ш е ш і м і. 03.1-суреттегі қисықты екі трапециялармен алмастырамыз да, олардың параметрлерін анықтаймыз. Бірінші трапеция үшін $\omega_{d1} = 61{,}6c^{-1}$; $\omega_{01} = 79c^{-1}$; $\chi_1 = 0{,}78$; екінші трапеция үшін $\omega_{d2} = 79{,}8c^{-1}$; $\omega_{02} = 95c^{-1}$; $\chi_2 = 0{,}84$. *h*-функция (2-тіркеме) кестесі көмегімен χ_1 және δ_2 мәндері үшін $h_i(t)$ мәндерін анықтаймыз да, трапецияларға сәйкес $h_1(t)$, $h_2(t)$ қисықтарын тұрғызып, b = 1 үшін $h(t)$ өтпелі процесс қисығын саламыз (03.1-сурет). Егер $b \neq 1$ болса, онда $h(t)$ ординатасын b шамасына көбейту қажет.



03.1-сурет. Өтпелі процесс қисықтары

03.10-есеп.

Ш е ш і м і. 3.12-суреттен $\omega_d = 5c^{-1}$ өткізу және $\omega_k = 10c^{-1}$ еркін өткізу жиіліктерін тауып алып, трапецияның еңістік коэффициентін анықтаймыз:

$$\chi = \frac{\omega_d}{\omega_k} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

h-функциясы кестесінен (2-тіркеме) $\chi = 0{,}5$ мәніне сәйкес шамаларды аламыз:

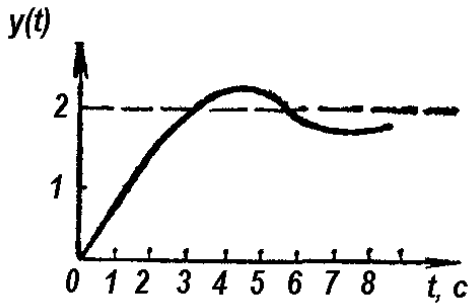
0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0	0,240	0,461	0,665	0,831	0,967	1,061

3,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
1,115	1,142	1,118	1,051	0,993	0,966

Есеп шарты бойынша (3.12-суретті қара) $P(\omega)=h_1=2,$ сондықтан $h(t)$ мәндерін 2-ге көбейту керек. Осылайша $y(t)$ мәндерін аламыз, ал нақты уақыт мәндерін алу үшін $t=\frac{\tau}{\omega_{\hat{e}}}$ формуласын пайдаланамыз.

t	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y(t)$	0	0,48	0,92	1,23	1,86	1,93	2,12	2,23	2,28	2,23	2,1	1,98	1,83

Осы алынған мәліметтер бойынша жүйенің $y(t)$ өтпелі процесін аламыз (03.2-сурет).



03.2-сурет. АРЖ өтпелі процесінің сипаттамасы

03.11-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған АРЖ беріліс функциясы мына түрде болады:

$$W(p)=W_{об}(p)\cdot W_p(p)=\frac{12,5}{137800p^2+742p+1}.$$

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясын табамыз:

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{12,5}{137800\,p^2+742\,p+13,5}$$

Алынған өрнекті 137 800 санына бөліп, тұйықталған АРЖ-ның беріліс функциясының бөлімін тербелмелі буынның беріліс функциясының бөліміне теңеп, мына шамалардың мәндерін табамыз:

$$\omega_0^2=\frac{13,5}{137800};\ \omega_0\approx 0,01c^{-1};$$

$$2\xi\omega_0=\frac{742}{137800};\quad \xi=\frac{742}{2\omega_0\cdot 137800}=0,3.$$

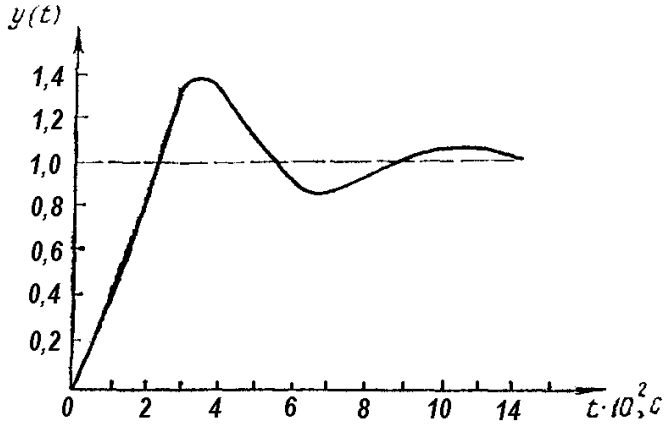
Тұйықталған жүйеде өтетін өтпелі процесті тұрғызу үшін тербелмелі буынның нормаланған өтпелі сипаттамаларын пайдаланамыз (3-тіркеме).

Өлшемсіз τ уақытынан өлшемді t уақытына өту мына формуламен іске асырылады:

$$\tau = \omega_0 \cdot t \text{ немесе } t = \frac{\tau}{\omega_0}.$$

3-ші тіркемедегі графиктерден өтпелі процесс қисығын демпфирлеу коэффициенті $\xi = 3$ болғанда таңдау керектігін көруге болады.

Қарастырылған АРЖ-ның өтпелі процесінің қисығы 03.3-суретте тұрғызылған.



03.3-сурет. АРЖ өтпелі процесінің қисығы

03.2. АРЖ сапа көрсеткіштерін анықтау

03.21-есеп.

Ш е ш і м і. Тұйықталған АРЖ өтпелі процесіндегі асыра реттеу мынаған тең болады:

$$\sigma = 1{,}18\frac{P_{\max} - P(0)}{P(0)} = 1{,}18\frac{1{,}3 - 1}{1} = 0{,}354,$$

немесе $\sigma = 0{,}354 \cdot 100\% = 35{,}4\%.$

Реттеу уақытын мына формула бойынша анықтаймыз:

$$t_p > \frac{\pi}{\omega_к} = \frac{3{,}14}{0{,}8} = 4c.$$

03.22-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған жүйенің беріліс функциясын анықтаймыз:

$$W(p) = W_{об}(p) \cdot W_p(p) = \frac{1{,}56}{p(p+1)}.$$

Жүйенің ω_0 өткізу жиіліктігін және ξ демпфирлеу коэффициентін мына формулалар бойынша анықтаймыз:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T}} = \sqrt{\frac{1{,}56}{1}} = 1{,}2c^{-1},$$

$$\xi = \frac{0{,}5}{\sqrt{KT}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1 \cdot 1{,}56}} = \frac{0{,}5}{1{,}25} = 0{,}4.$$

Тербелмелі буынның өтпелі процесінің сипаттамалары графигінен (3-тіркеме) $\xi = 0{,}4$ демпфирлеу коэффициентіне сәйкес келетін процесс қисығын табамыз.

Графиктен асыра реттеу мәнін анықтаймыз $(P_{\max} = 1{,}25)$:

$$\sigma = \frac{P_{\max} - P(0)}{P(0)} = \frac{1{,}25 - 1}{1} = 0{,}25$$

немесе $\sigma = 0{,}25 \cdot 100\% = 25\%.$

Өтпелі процестің нормаланған уақыты $\tau = 12c$, яғни нақты реттеу уақыты

$$t = \frac{\tau}{\omega_0} = \frac{12}{1{,}25} = 9{,}8c.$$

Бірінші максимумның болу уақыты $t_m = \frac{\tau_m}{\omega_0} = \frac{3{,}5}{1{,}25} = 2{,}8c.$

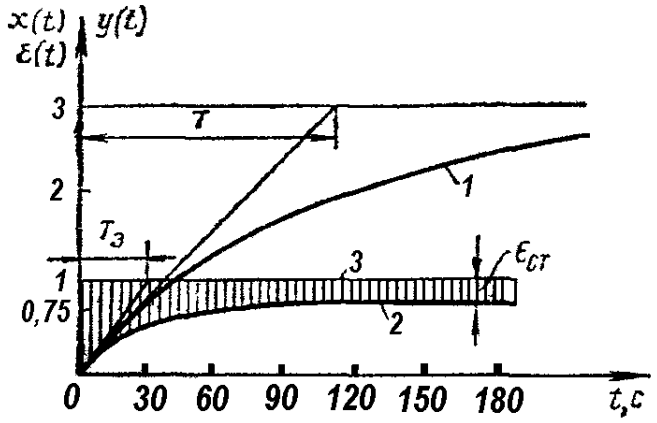
Максимумдар саны $N = 3$.

03.23-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған АРЖ беріліс функциясын анықтаймыз:

$$W(p) = W_{об}(p) \;\; W_p(p) = \frac{3}{120p + 1}. \qquad (03.23.1)$$

Алынған (03.23.1) өрнектен динамикалық тұрғыда ажыратылған жүйенің күшейту коэффициенті $K=3$ және уақыт тұрақтысы $T=120c$ болатын бірінші ретті апериодтық буынға сәйкес келетінін көреміз.



03.4-сурет. АРЖ уақыттық сипаттамалары:
1 – ажыратылған жүйенікі; 2 – тұйықталған жүйенікі; 3 – кірістік әсер.

Ажыратылған жүйенің өтпелі сипаттамасы уақыт барысында $y(t)=Kx(t)=3$ орныққан мәніне ұмтылатын экспонента түрінде болады (03.4-сурет, 1-қисық).

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{K}{Tp+1+K}=\frac{\frac{K}{1+K}}{\frac{T}{1+K}p+1}=\frac{K_э}{T_э p+1},$$

мұндағы $K_э=\frac{K}{1+K}=\frac{3}{4}=0{,}75;\quad T_э=\frac{T}{1+K}=\frac{120}{4}=30c.$

Сонымен

$$\Phi(p)=\frac{0{,}75}{30p+1}. \qquad (03.23.2)$$

Алынған (03.23.2) өрнектен динамикалық тұрғыда жүйенің күшейту коэффициенті $K=0{,}75$ және уақыт тұрақтысы $T=30c$ болатын бірінші ретті апериодтық буынға сәйкес келетінін көреміз. Бұл жағдайдағы жүйенің өтпелі сипаттамасы да жоғарыда көрсетілген параметрлері бар экспонент түрінде болады (2-қисық).

АРЖ статикалық қателігі мынаған тең болады:

$$\varepsilon(t)=x(t)-y(t).$$

Біздің жағдайда $x(t)=1(t)$ – кірістік бірлік секірістік әсер (3-қисық), ал $y(t)$ – тұйықталған жүйенің шығыстық шамасы (2-қисық), олай болса, $\varepsilon(t)$ қателігін графикалық тұрғыда штрихтелген ауданмен көрсетуге болады.

Енді қателікті аналитикалық жолмен табайық. Жалпы статикалық АРЖ-да $f(t)$ қобалжыту әсері жоқ кезде қателік $\varepsilon(t)$ мына өрнекпен анықталады:

$$\varepsilon_{\text{ст}}(t)=\frac{1}{1+k}x(t),$$

мұндағы $k=3$ – ажыратылған жүйенің күшейту коэффициенті;

яғни $\varepsilon_{\text{ст}}(t)=\frac{1}{4}=0{,}25$. Бұл тек орныққан режимдегі қателік. Өтпелі процесс кезінде ол біздің жағдай үшін 1-ден 0,25-ке дейін экспонента бойынша өзгеріп отырады. Ажыратылған АРЖ өтпелі процесс уақыты

$$t_n\approx 3T=360c,$$

ал тұйықталған жүйеде

$$t_n\approx 3T_э=90c,$$

яғни тұйықталған жүйе берілген кірістік әсерді әлдеқайда тез іске асырады, ал оның күшейту коэффициенті ажыратылған жүйенің күшейту коэффициентінен аз.

03.24-есеп.

Ш е ш і м і. Қателік бойынша беріліс функцияны анықтаймыз:

$$\Phi_{\varepsilon}(p)=1-\Phi(p)=\frac{0{,}001p^3+0{,}502p^2+p}{0{,}001p^3-0{,}502p^2+6p+200}.$$

Алымын бөліміне бөлу арқылы (3.16-есепті қара) қателік коэффициенттерін табамыз:

$$C_0=0,\quad C_1=\frac{1}{200}c \text{ және } \frac{C_2}{2}=0{,}00236c^2.$$

Әрі қарай туындыны табамыз:

$$y'(t)=20+20t,$$
$$y''(t)=20.$$

Олай болса, қателік үшін алынған өрнек мына түрде жазылады:

$$\varepsilon(t) = C_0 y(t) + C_1 y'(t) + \frac{C_2}{2} y''(t) =$$

$$= \frac{20 + 20t}{200} + 20 \cdot 0{,}00236 = 0{,}1472 + 0{,}1t.$$

03.25-есеп.

Ш е ш і м і. $K = const$ болған жағдайда 3.17-есептегі (3.2.12) формуладан қателік бойынша беріліс функцияны мына түрде аламыз:

$$\Phi_\varepsilon(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K}.$$

Бұл өрнектің алымын бөліміне бөле отыра (3.16-есепті қара) қателік коэффициенттерін табамыз:

$$C_0 = 0 \text{ және } C_1 = \frac{T_1 + T_2}{K}.$$

$K \neq const$ болған жағдайда $K = K_0 + \Delta K$ деп аламыз және $\frac{\Delta K}{K_0} < 1$, ал кері байланыс тізбегінің беріліс коэффициенті $m = 1 - \frac{1}{K_0}$ деп болжаймыз. Олай болса, тұйықталған жүйенің 3.17-есептегі (3.2.11) формуласымен көрсетілген беріліс функциясы мына түрге келеді:

$$\Phi(p) = \frac{K_0 + \Delta K}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}}.$$

Қателік бойынша беріліс функция

$$\Phi_\varepsilon(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p - \frac{\Delta K}{K_0}}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}}.$$

Бұл өрнекті белгілі әдіспен қатарға түзе отыра қателік коэффициенттерін анықтаймыз:

$$C_0 = \frac{\Delta K}{K_0\left(K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}\right)} \approx -\frac{\Delta K}{K_0^2},$$

$$C_1 = \frac{(T_1 + T_2)(K_0 + \Delta K)}{\left(K_0 + \Delta K - \frac{\Delta K}{K_0}\right)^2} \approx \frac{T_1 + T_2}{K_0}.$$

03.26-есеп.

Ш е ш і м і. 3.25-есепте алынған формулаларды қолдана отыра

$$C_0 \approx -\frac{\Delta K}{K_0^2} = \pm\frac{50}{1000^2} = 5 \cdot 10^{-5},$$

$$C_1 \approx \frac{T_1 + T_2}{K_0} = \frac{1 + 0{,}02}{1000} = 1{,}02 \cdot 10^{-3} c$$

аламыз.

03.27-есеп.

Ш е ш і м і. Масштабтаушы құрылғыны бірге қарастырғандағы тұйықталған жүйенің беріліс функциясы:

$$\Phi(p) = \frac{nK}{T_0T_1T_2p^3 + (T_0T_1 + T_0T_2 + T_1T_2)p^2 + (T_1 + T_2 + T_3)p + 1 + K}.$$

Бірінші ретті астатизмді алу шарты

$$nK = 1 + K,$$

осыдан

$$n = \frac{1 + K}{K}.$$

03.28-есеп.

3.33-суретте бейнеленген ЛАС бойынша

$$\omega = \omega_к = 0{,}2c^{-1}$$

мәніне сәйкес келетін модульді децибел бірлігінде табамыз:

$$L(\omega_к) = 20 \lg A(\omega_к) = 45 \text{ дБ}.$$

Одан кейін $\lg A(\omega_к) = 2{,}25$ табамыз. Логарифм бойынша модульді анықтаймыз:

$$A(\omega_к) = 10^{2{,}25} = 168.$$

Қателік амплитудасы

$$\theta_{\max} = \frac{\theta_{1\max}}{A(\omega_к)} = \frac{15}{168} = 0{,}089^{\circ} = 5{,}3'.$$

03.29-есеп.

Ш е ш і м і. 1) Дәл шешімін алу үшін $\omega = \omega_к = \frac{2\pi}{T_к} = 6{,}28 c^{-1}$ кезіндегі тұйықталған жүйенің жиіліктік беріліс функциясын табамыз:

$$\Phi(j\omega_к) = \frac{W(j\omega_к)}{1 + W(j\omega_к)} = \frac{K(1 + j\omega_к T_2)}{j\omega_к(1 + j\omega_к T_1)(1 + j\omega_к T_3) + K(1 + j\omega_к T_2)} =$$
$$= \frac{K(1 + j\omega_к T_2)}{K \quad \omega_к^2(T_1 + T_3) + j[\omega_к(1 + KT_2) - \omega_к^3 T_1 T_3]}.$$

Сандық мәндерін қоя отыра, аламыз:

$$\Phi(j\omega_к) = \frac{200 + j135}{180 + j130} = 1{,}09 - j0{,}0325.$$

Фазалық қателік

$$\varphi = -arctg \frac{0{,}0325}{1{,}09} = -arctg\, 0{,}03 \approx -1{,}7^{\circ}.$$

2) Жуықтатылған шешімді табу үшін кірістік сигнал маңайындағы жүйенің жиіліктік беріліс функциясы мына түрде болады деп аламыз:

$$W(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)}.$$

$\omega = \omega_к$ болғанда тұйықталған жүйенің қателікке сәйкес беріліс функциясы мынадай деп алуға болады:

$$\Phi_\theta(j\omega_к) \approx \frac{1}{W(j\omega_к)} = \frac{j\omega_к(1+j\omega_к T_1)}{K}.$$

Фазалық қателік

$$\varphi \approx -\mathrm{Im}\frac{1}{W(j\omega_к)} = -\frac{\omega_к}{K} = -\frac{6{,}28}{200} = -0{,}0314рад = -1{,}8°.$$

03.3. Корректирлеу құрылғыларын таңдау

03.34-есеп.

Ш е ш і м і: Орныққан g қателік берілген және f ауытқытушы әсерлер үшін мына формулалармен анықталады:

$$e_{g\infty}(t) = C_{g0}at + C_{g1}a, \quad e_{f\infty} = C_{f0}b,$$

яғни, $C_{g0} = C_{g1} = 0$ және $C_{f0} = 0$ болғанда орныққан қателік нөлге тең болады. Сондықтан жүйе берілген әсерге сәйкес астатизмі 2-ші ретті, ал ауытқытушы әсерге сәйкес астатизмі 1-ші ретті астатикалық болуы қажет. Объект тізбектеле жалғанған екі интегралдаушы буындардан тұратын болғандықтан, қандай да типтік басқару заңдары болмасын, берілген әсерге сәйкес жүйе астатизмі 2-ші реттен кем емес астатикалық болады. Ауытқытушы әсерге сәйкес ол тек ПИ және ПИД-заңдылықтарында астатикалық болады.

ПИ-заңдылықта ажыратылған жүйенің беріліс функциясы

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{K_n p + K_u}{p^3(p+1)}$$

болады да, оның сипаттаушы теңдеуі

$$G(p) = p^4 + p^3 + K_n p + K_u = 0.$$

Бұл теңдеуде p^2 мүшесінің коэффициенті нөлге тең болғандықтан, қажетті орнықтылық шарты орындалмайды. Сондықтан жүйе ПИ-заңы кезінде орнықсыз. ПИД-заңы үшін

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{K_g p^2 + K_n p + K_u}{p^3(p+1)}$$

болады да, жүйенің сипаттаушы теңдеуі

$$p^4 + p^3 + K_g p^2 + K_n p + K_u = 0.$$

Үшінші ретті Гурвиц анықтауышы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & K_n & 0 \\ 1 & K_g & K_u \\ 0 & 1 & K_n \end{vmatrix} = K_g K_n - K_u - K_n^2.$$

Реттеуіштің сәйкес параметрлерін таңдай отыра жүйені орнықты күйге келтіруге болады. Яғни, жүйе ПИД-заңдылықта орнықты.

03.35-есеп.

Ш е ш і м і: $f(t) = 0$ болғандықтан, жүйедегі қателік $e(t) = e_g(t)$. Объектіде интегралдауыш жүйе бар, сондықтан жүйе берілген (жоспарланған) әсер үшін астатикалық болады да, оның статикалық қателігі $e_{g\infty} = 0$. Қателіктің айнымалы құрамы

$$e_a(t) = e_g(t) - e_{g\infty}(t) = e_g(t).$$

Лаплас кескіндеуіне өте отыра мынаны аламыз:

$$E_a(p) = E_g(p) = W_{eg}(p)\frac{1}{p} = \frac{0{,}1p + 1}{0{,}1p^2 + p + K_n}.$$

Яғни

$$J_{20} = \int_0^\infty e_a^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E_a(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{0{,}1j\omega + 1}{0{,}1(j\omega)^2 + j\omega + K_n}\right|^2 d\omega = I_2.$$

Бұл жағдайда $n = 2;\quad b_0 = 0{,}1;\quad b_1 = 1;\quad a_0 = 0{,}1;\quad a_1 = 1;\quad a_2 = K_n.$

Сондықтан

$$J_{20} = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{0{,}01K_n + 0{,}1}{2 \cdot 0{,}1 \cdot K_n} = 0{,}05 + \frac{0{,}5}{K_n}.$$

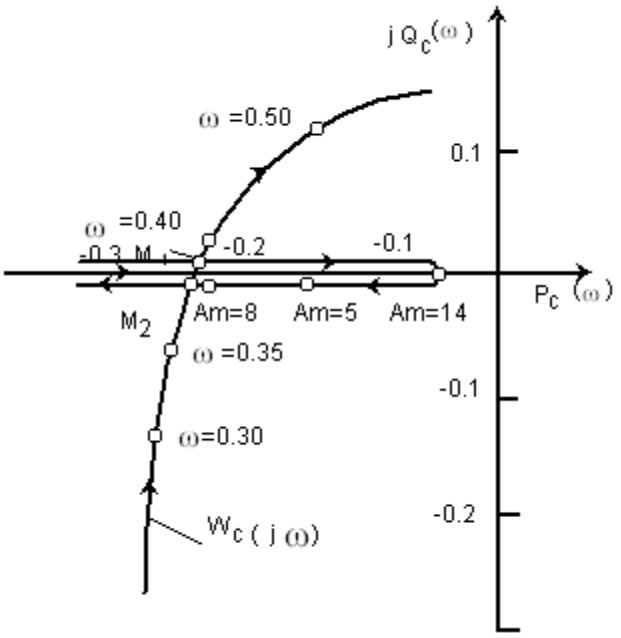
J_{20} ең минимал мәніне $K_n \le 2{,}5$ шарты орындалғанда ие болатынын көруге болады; $K_n = 2{,}5$.

04-тарау. Бейсызықты автоматты реттеу жүйелері

04.1. Бейсызықты жүйелердің сипаттамаларын сызықтау

04.6-есеп.

Ш е ш і м і. Жүйеде кешігу бар болғандықтан, шешімге графикалық әдіс қолданамыз.



04.1-сурет. Автотербелістің амплитудасы мен жиілігін графикалық жолмен анықтау

04.1-суретте сызықты бөліктің а.ф.с. $W_c(j\omega)$ және реленің

$$-\frac{1}{W_б(A_m)} = -\pi A_m^2 \big/ 4c\sqrt{A_m^2 - b^2} \qquad (04.1.1)$$

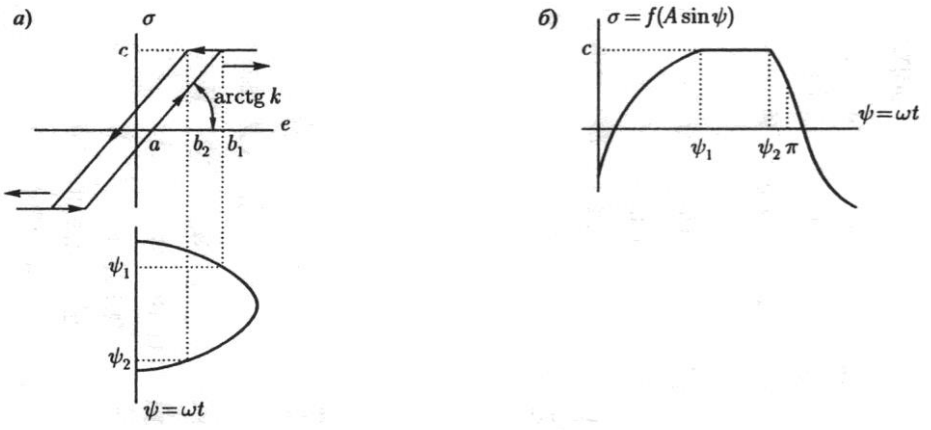
кері сипаттамасы тұрғызылған.

(04.1.1) сипаттама $p(\omega)$ нақты ось бойымен екі рет өтеді. $A_m = b = 1$ болғанда сипаттама $-\infty$-тен басталады да, $A_m = b\sqrt{2} \approx 1{,}4$ мәнінде өзінің $\pi b/2c$ максимал шамасына жетеді, соңынан $A_m \to \infty$ болғанда тағы да $-\infty$-ке қарай созылады.

Сызықты және бейсызықты сипаттамалар екі нүктеде қиылысады. Жоғарыдағы ережелерге сәйкес M_1 нүктесі – орнықсыз тербеліске, ал M_2 нүктесі орнықты тербеліске сәйкес келеді. Автотербелістің амплитудасы $A_{ma} \approx 8$, ал жиілігі $\omega_a \approx 0{,}375c^{-1}$.

04.7-есеп.

Ш е ш і м і: Бейсызықты буынның кірістік және шығыстық сигналдарының графиктері 04.2-суретте көрсетілген.



04.2-сурет

Бейсызықты буынның $[\pi,\ 2\pi]$ аралығындағы шығыстық сигналының қисығын, $[0,\ \pi]$ аралығындағы осы қисықтың абсцисса осіне сәйкес айналық шағылысуынан және оны оңға қарай π бұрышына бұру арқылы алуға болады. Гармоникалық сызықтау коэффициенттерін есептеу кезінде бейсызықты буынның шығыстық сигналы көбейтілетін синус және косинус функциялары қисықтарының да осындай қасиеттері бар. Сондықтан бұл жағдайда гармоникалық сызықтаудың $q_1(A)$, $q_2(A)$ коэффициенттерінің формулаларындағы көрсетілген аралықтардағы интегралдардың мәндері бір-біріне сәйкес келеді және жоғарғы интегралдау шегіндегі 2π-ді π-ге алмастыра отыра, ол аралықтардағы интегралдарды еселеуге болады, яғни ол формулаларды мына түрде жазуға болады:

$$q_1(A)=\frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} f(A\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$q_2(A)=\frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} f(A\sin\psi)\cos\psi d\psi$$

Бейсызықты буын шығысындағы сигнал (04.2,б-сурет) $[0,\ \psi_1]$ аралығында $y=K(A\sin\psi-a)$ функциясымен бейнеленеді, $[\psi_1,\ \psi_2]$ аралығында тұрақты C мәніне тең болады, ал $[\psi_2,\ \pi]$ аралығында $y=K(A\sin\psi+a)$ функциясымен бейнеленеді. Осыған сәйкес коэффициенттер үшін мына өрнектерді аламыз:

$$q_1(A)=\frac{2}{\pi A}\left[\int_0^{\psi_1} K(A\sin\psi-a)\sin\psi d\psi+\int_{\psi_1}^{\psi_2} c\sin\psi d\psi+\right.$$
$$\left.+\int_{\psi_2}^{\pi} K(A\sin\psi+a)\sin\psi d\psi\right],$$

$$q_2(A)=\frac{2}{\pi A}\left[\int_0^{\psi_1} K(A\sin\psi-a)\cos\psi d\psi+\int_{\psi_1}^{\psi_2} c\cos\psi d\psi+\right.$$
$$\left.+\int_{\psi_2}^{\pi} K(A\sin\psi+a)\cos\psi d\psi\right].$$

Екеуін де интегралдаймыз және түрлендіреміз:

$$q_1(A)=\frac{2}{\pi A}\left[\frac{kA}{2}\left(\psi_1-\frac{1}{2}\sin 2\psi_1\right)+Ra(\cos\psi_1-1)-C(\cos\psi_2-\cos\psi_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{kA}{2}\left(\pi-\psi_2+\frac{1}{2}\sin 2\psi_2\right)+ka(1-\cos\psi_2)\right].$$

04.2,а-суреттен $c=k(b_1-a)$, $b_2=b_1-2a$, $A\sin\psi_1=b_1$, $A\sin\psi_2=b_2$, $\psi_1=\arcsin\frac{b_1}{A}$, $\psi_2=\pi-\arcsin\frac{b_2}{A}$ тауып алып, осы қатынастарды еске ала отыра, мынаны аламыз:

$$q_1(A)=\frac{K}{\pi}\left[\arcsin\frac{b_1}{A}+\arcsin\frac{b_2}{A}+\frac{b_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b_1}{A}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b_2}{A}\right)^2}\right],\quad A\geq b_1.$$

Енді $q_2(A)$ үшін де осы амалдарды қолданамыз:

$$q_2(A)=\frac{2}{\pi A}\left[K\left(\frac{1}{2}A\sin^2\psi_1-a\sin\psi_1\right)+c(\sin\psi_2-\sin\psi_1)-\right.$$
$$\left.-K\left(\frac{1}{2}A\sin^2\psi_2+a\sin\psi_2\right)\right].$$

Бұған $c = K(b_1 - a)$, $\sin\psi_1 = b_1/A$ және $\sin\psi_2 = b_2/A$ қатынастарын қоя отыра, нәтижесіндегі өрнекті аламыз:

$$q_2(A) = \frac{K\left(b_2^2 - b_1^2\right)}{\pi A^2}, \quad A \geq b_1.$$

04.8-есеп.

Ш е ш і м і. Қателік өрнегін мына түрде жазуға болады:

$$D_z = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{NK_\gamma}{p + K_\gamma K_1(D_z)} \cdot \frac{NK_\gamma}{-p + K\gamma K_1(D_z)}\, dp,$$

мұндағы $K_1(D_z) = \frac{2B}{\sqrt{2\pi D_z}} e^{-a^2/(2D_z)}$ – статистикалық сызықтау коэффициенті.

Кестелік интегралға сәйкес:

$$D_z = I_1 = \frac{C_o^2}{2d_o d_1} = \frac{N^2 K_\gamma^2}{2K_o K_1(D_z)} = \frac{N^2 K_\gamma \sqrt{2\pi D_z}}{4Be^{-a^2/(2D_z)}}.$$

Бұл өрнектен D_z мәнін аналитикалық түрде алу өте қиын. Сондықтан D_z функциясының оң және сол жақ мәндерін графикалық түрде тұрғызып алып, осы алынған қисықтардың қиылысқан нүктесінен D_z берілген мәнін анықтайды. Егер релелі элемент $a = 0$ мәнімен сипатталса, онда $D_z = \pi N^4 K_\gamma^2 / (8B^2)$.

04.2. Бейсызықты жүйелерді зерттеу

04.15-есеп.

Ш е ш і м і: Беріліс функциясы W_4 буын арқылы автотербеліс өтпейтіндіктен – оның шығысындағы амплитуда кірісіндегіден 100 есе кем – автотербелісті зерттегенде тек ішкі контурды қарастырумен шектелген жөн.

Сызықты бөліктің беріліс функциясы мен бейсызықты буынды гармоникалық сызықтау коэффициенттері мынаған тең:

$$W(p)=W_2(p)\cdot W_3(p)=K_3/\left(0{,}1p^2+p\right)(T_3p+1)$$

$$q_1(A)=4c/\pi A=4/A,\quad q_2(A)=0.$$

Периодты процестің түзілу шарты мына түрде болады:

$$-j0{,}1T_3\omega^3-(0{,}1+T_3)\omega^2+j\omega+K_3\frac{4}{A}=0$$

немесе

$$U(\omega)=-(0{,}1+T_3)\omega^2+K_3\frac{4}{A}=0,$$

$$V(\omega)=-0{,}1T_3\omega^3+\omega=0.$$

Осыдан амплитуда мен жиілік үшін мынаны аламыз:

$$A=4K_3T_3/(1+10T_3),\quad \omega=\sqrt{10/T_3}.$$

Беріліс функциясы W_4 буын автотербеліс амплитудасын 100 рет әлсіретететіндіктен және оның амплитудалық жиіліктік функциясы $A_4(\omega)=1/\sqrt{1+\omega^2}$ болғандықтан:

$$A_4(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(10/T_3)}}=0{,}01$$

немесе

$$T_3=0{,}0001T_3+0{,}001.$$

Осыдан $T_3\cong 0{,}001$.

Бұл мәнді алдында алынған амплитуда өрнегіне қоя отыра, және бейсызықты буынның кірісіндегі амплитуданың A=4 екенін ескере отыра, аламыз:

$$A = 4K_3T_3/(1+10T_3) = \frac{4K_3 0{,}001}{1+0{,}01} = 4.$$

Бұл өрнектен $K_3 = 1010$ аламыз. Сонымен, ізделініп отырған параметрлер $K_3 = 1010$ және $T_3 \cong 0{,}001$.

Жүйедегі автотербелістің бар екендігін түзілген периодты процесті орнықтылыққа тексеру арқылы анықтайық.

$q_2(A) = 0$ болғандықтан, орнықтылық шарты

$$\left.\frac{dq_1(A)}{dA}\right|_{A=4} = \left.-\frac{4}{A^2}\right|_{A=4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Орнықтылық шарты орындалған. Яғни, тербеліс асимптоталық орнықты, жүйеде автотербеліс бар.

04.16-есеп.

Ш е ш і м і:

Объектінің өздік теңесу қасиеті болған жағдайда, ол мына теңдеумен жазылады:

$$T\frac{dy}{dt} + y = K_2U,$$

мұндағы U – реттеуші органның (сервоқозғалтқыштың) координатасы.

Реверсивті тұрақты жылдамдықты сервоқозғалтқыштың (реттеуіштің) теңдеуін мына түрде жазамыз:

$$\frac{du}{dt} = K_1 sign\varepsilon,$$

мұндағы $\varepsilon = g - y = -y$, себебі $g(t) = 0$.

Бірінші теңдеуді дифференциалдап және оған екіншіні қойсақ, жүйенің жалпы теңдеуін аламыз:

$$T\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + K\,\mathrm{sign}y = 0, \quad K = K_1K_2.$$

Процесті фазалық жазықтықта тұрғызу үшін екінші ретті дифференциал теңдеуді екі бірінші ретті теңдеулермен алмастырамыз:

$$T\frac{dz}{dt} + z + K\operatorname{sign} y = 0 \qquad (04.2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = z \qquad (04.2.2)$$

$x > 0$ болғанда (04.2.1) теңдеуі мына түрде жазылады:

$$T\frac{dz}{dt} + z = -K.$$

Алынған теңдеудің шешімін мына түрде іздейміз:

$$z = C_1 e^{-t/T} - K.$$

Егер $t = 0$ кезінде процесс $y = 0,$ фазалық жазықтықтың жоғарғы жағындағы $z = z_o$ нүктесінен басталса, онда осы бастапқы шартты ескере отыра

$$\begin{aligned} C_1 &= z_o + K, \\ z &= \left(z_o + K\right)e^{-t/T} \end{aligned} \qquad (04.2.3)$$

табамыз.

Бастапқы $\left(t = 0, \quad y = 0\right)$ шарт кезінде y үшінші шешім мына түрде болады:

$$y = T\left(z_o + K\right)\left(1 - e^{-t/T}\right) - kt \qquad (04.2.4)$$

(04.2.3), (04.2.4) теңдеулерінен t уақытты шығарып тастасақ, фазалық жазықтықтағы қисықтың теңдеуін аламыз:

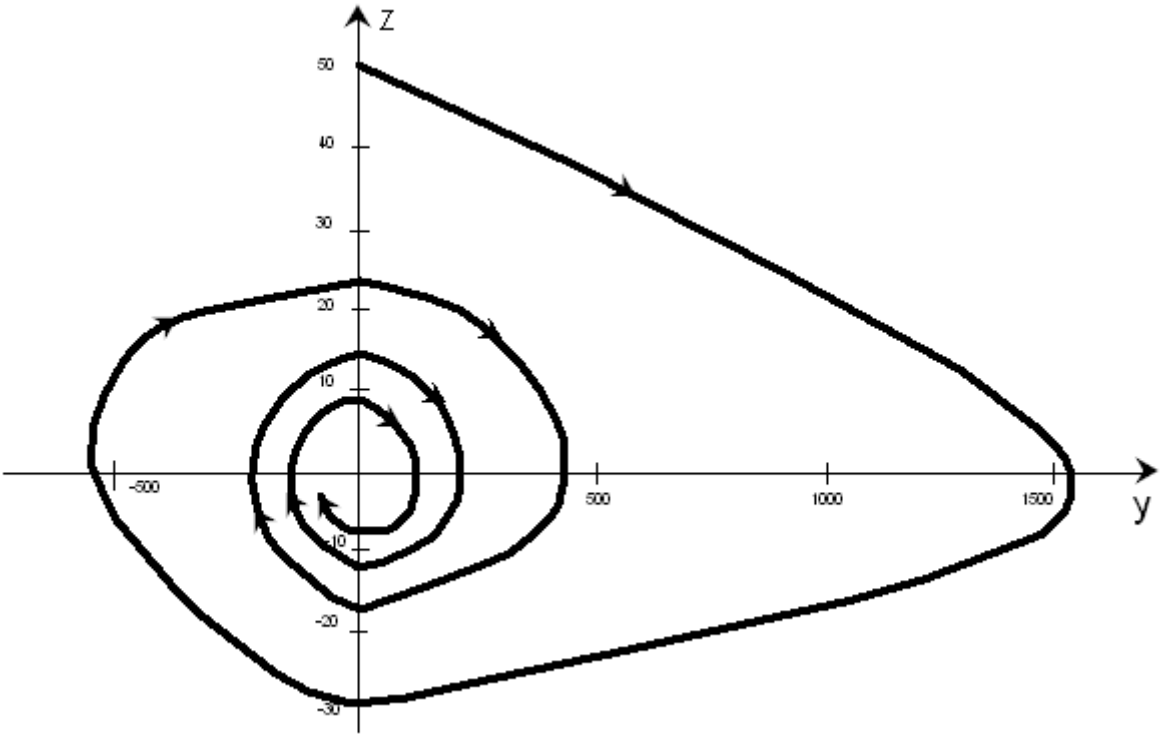
$$y = T\left[\left(z_o - z\right) + K\ln\frac{z + K}{z_o + K}\right]. \qquad (04.2.5)$$

Осылайша, $y < 0$ шартына сәйкес фазалық траекторияның теңдеуін табуға болады:

$$y = -T\left[\left(z_{oo} + z\right) + K \ln \frac{K - z}{K + z_{oo}}\right], \qquad (04.2.6)$$

мұндағы z_{oo} – фазалық жазықтықтың төменгі бөлігіндегі қайта қосу нүктесіне сәйкес келетін бастапқы мән $\left(t = 0, \quad y = 0, \quad z = -z_{oo}\right)$.

Енді $T = 100c, \quad K = 50c^{-1}, \quad t = 0$ кезіндегі жүйенің алғашқы ауытқуы $y_o = 50c^{-1}$ деп алып, фазалық траекторияны тұрғызамыз (04.3-сурет). Суреттен жүйедегі өтпелі процестің бірте-бірте өтетін тербеліспен сипатталатынын көруге болады. $-y_{oo}$ қайта қосуға сәйкес келетін жылдамдықтың келесі мәні (04.2.5) теңдеуінен анықталып, (04.2.6) теңдеуіне қойылады және т.с.с.



04.3-сурет. Өздік теңесуі бар объектінің релелік автоматты реттеу жүйесінің фазалық портреті

04.17-есеп. Ш е ш і м і. Егер объектіде өздік теңесу жоқ болса, оның дифференциалдық теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K_2}{T} U.$$

Бұл жағдайдағы жүйенің қозғалыс теңдеуі

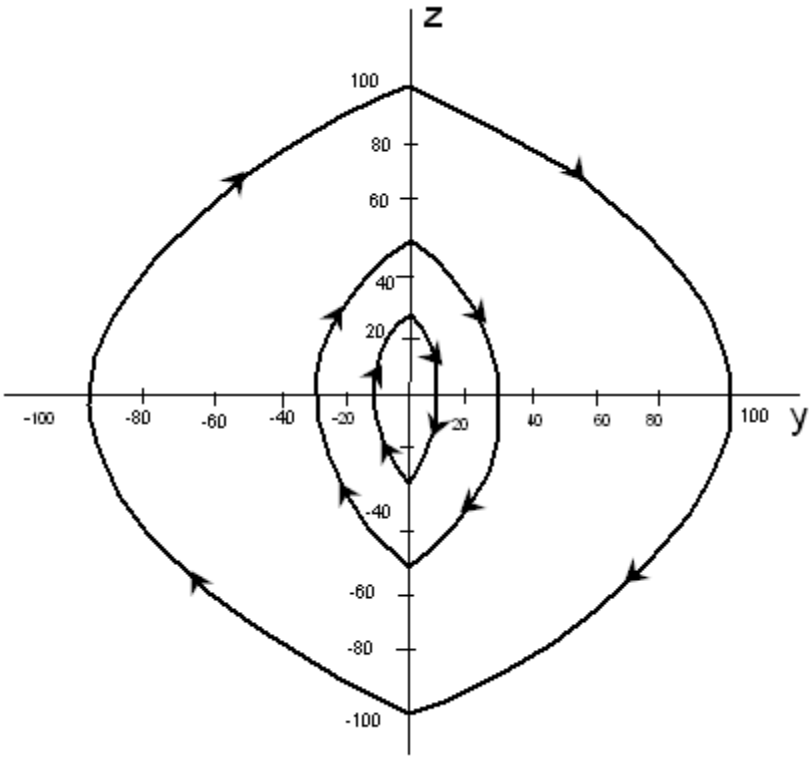
$$\frac{d^2y}{dt^2} + K\text{sign}y = 0, \quad K = \frac{K_1K_2}{T}.$$

Немесе, $\frac{dy}{dt} = z$ деп алып, табамыз:

$$z\frac{dz}{dt} + K\text{sign}y = 0.$$

Бұл теңдеудің шешімі мына түрде ізделінеді:

$$z = \pm\sqrt{2K(y_o + y)} \quad \textit{егер} \quad y < 0 \quad \textit{болса},$$
$$z = \pm\sqrt{2K(y_o - y)} \quad \textit{егер} \quad y > 0 \quad \textit{болса}.$$



04.4-сурет. Өздік теңесуі жоқ объектінің релелік автоматты реттеу жүйесінің фазалық портреті

04.4-суретте тұйықталған қисықтар үйірі іспеттес жүйенің фазалық траекториялары келтірілген. Бұл траекториялар жүйедегі автотербелістік режимді сипаттайды.

04.18-есеп.

Ш е ш і м і: Егер объектіде өздік теңесу болса, онда жүйедегі ε қателік үшін

$$\varepsilon = -\frac{K_2 + 1}{K_2} y - \frac{K_{к.б.} T}{K_2} \quad \frac{dy}{dt},$$

ал өзіндік теңесу болмаса

$$\varepsilon = -y - \frac{K_{к.б.} T}{K_2} \frac{dy}{dt}$$

аламыз.

Жүйедегі жергілікті кері байланысты енгізу бұрынғы фазалық жазықтықтағы ординат осіне сәйкес келетін қайта қосу сызықтарын

$$\gamma = arctg \frac{y}{\frac{dy}{dt}} = arctg \frac{K_{к.б.} T}{K_2 + 1}$$

немесе

$$\gamma = arctg \frac{K_{к.б.} T}{K_2}$$

бұрышына сағат тіліне қарсы бағытқа бұрады.

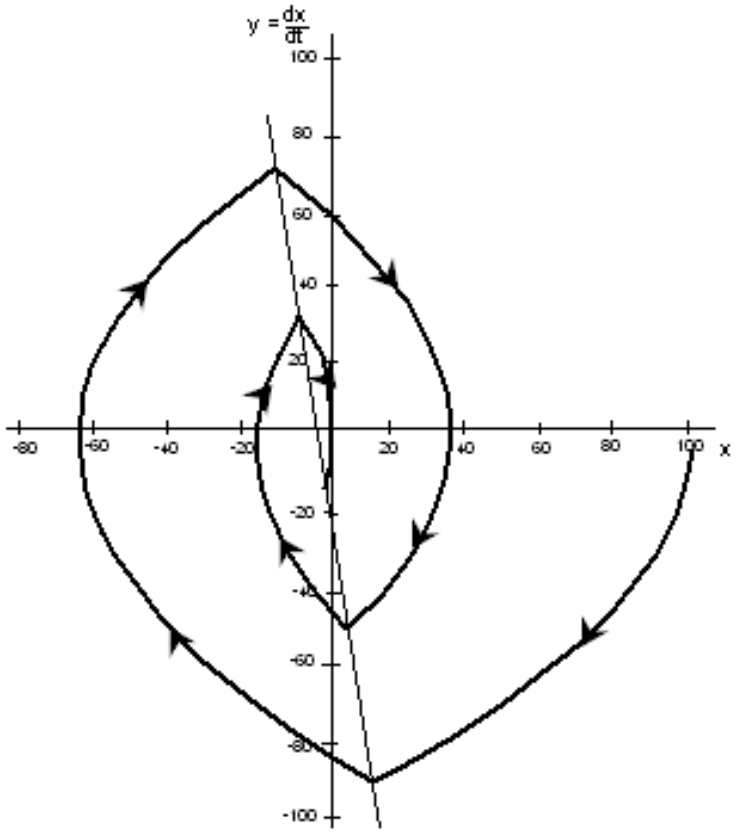
Қарастырып отырған жағдай үшін қайта қосу сызықтарының теңдеуін мына түрде жаза аламыз:

$$z = -\frac{K_2 + 1}{K_{к.б.} T} y$$

немесе

$$z = -\frac{K_2}{K_{к.б.} T} y.$$

Енді $T = 100c, \quad K = 50c^{-1}, \quad y_o = 100, \quad \gamma = arctg\, 0{,}2$ параметрлері үшін жергілікті кері байланысы бар автоматты реттеу жүйесінің фазалық портретін тұрғызамыз (04.5-сурет).



04.5-сурет. Реттеуішке сәйкес теріс кері байланыс енгізілген релелік автоматты реттеу жүйесінің фазалық портреті

Суреттен γ қайта қосу сызықтарының еңістік бұрышы ұлғайған сайын жүйедегі тербелістің өту шартының жақсара беретіндігін көреміз. Алайда γ бұрышының өте үлкен мәндерінде релелік жүйеде сырғанақтық (скользящий) немесе лүпілдеуші (пульсирующий) режим пайда болуы мүмкін, яғни бұл кезде реттеуші әсер үлкен жиілікті қысқа мерзімді импульс түрінде болады. Бұл жағдайда кескіндеуші нүкте фазалық жазықтықта фазалық траектория бойымен емес, қайта қосу сызықтары бойымен оның маңайында тербеле отырып жылжиды.

04.19-есеп.

Ш е ш і м і: Жүйе мына теңдеумен бейнеленеді:

$$\ddot{y} = k_1\sigma, \quad \sigma = c\operatorname{sign} e, \quad e = -(k_2\dot{y} + y).$$

Жаңа $x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x}_1$ айнымалыларын енгізе отыра, бұл теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1 c\operatorname{sign}(k_2 x_2 + x_1).$$

Екінші теңдеуді біріншіге бөле отыра, мына теңдеуді аламыз:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-k_1 c\,\mathrm{sign}(k_2 x_2 + x_1)}{x_2}.$$

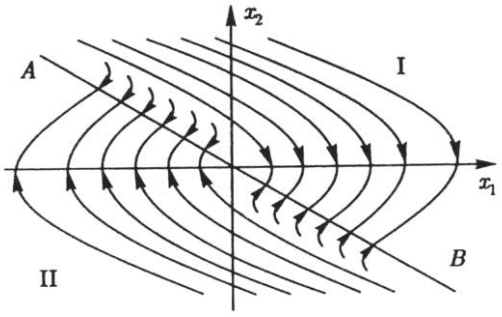
$k_2 x_2 + x_1 = 0$ немесе $x_2 = -(1/k_2)x_1$ теңдеуімен бейнеленетін 04.6-суреттегі АВ түзуі, фазалық жазықтықты екі аймаққа бөліп тұр: I-аймақ $(k_2 x_2 + x_1 > 0)$ және II-аймақ $(k_2 x_2 + x_1 < 0)$. Соңғы теңдеу I-аймақ үшін мына түрде

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-k_1 c}{x_2} \text{ немесе } x_2 dx_2 = -k_1 c dx_1,$$

ал II-аймақ үшін

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k_1 c}{x_2} \text{ немесе } x_2 dx_2 = k_1 c dx_1$$

түрде жазылады.



04.6-сурет

Осы теңдеулерді шеше отыра, фазалық траектория үшін мынадай теңдеулерді аламыз:

I аймақта $x_2^2 = -2k_1 c x_1 + C_1$,

II аймақта $x_2^2 = 2k_1 c x_1 + C_2$.

Бұл теңдеулер бір-біріне қарама-қарсы бағытталған параболалардың теңдеулері. Осы теңдеулер негізінде фазалық портрет тұрғызылып, 04.6-суретте көрсетілген. Бұл суреттен, егер кескіндейтін нүкте қайта қосу сызығында (АВ түзуі) тұрмаса, ол бұл түзуге жетуге дейін фазалық траекторияның біреуі арқылы жылжитынын көреміз. Кескіндеуші нүкте қайта қосу сызығын енді кесіп өтер сәтте, ол қайта қосу сызығы жаққа бағытталған фазалық траекторияның біріне барып түседі. Сондықтан кескіндеуші нүкте қайта қосу сызығын кесіп өткенге дейін тағы да ол жаққа

қарай жылжи береді. Кескіндеуші нүкте қайта қосу сызығын енді ғана кесіп өткен кезде, ол тағы да қайта қосу сызығы жаққа қарай бағытталған фазалық траекторияға келіп түседі. Сондықтан да кескіндеуші нүкте қайта қосу сызығына жеткенге дейін осы траекторияның бойымен шексіз кіші амплитудалы және шексіз үлкен жиілікті тербеліспен жылжи береді. Шын мәнінде реле арқылы жылдамдықпен қайта қосылатындықтан, оның жиілігі шексіз үлкен, ал амплитудасы шексіз кіші болмайды.

Сонымен, кескіндеуші нүкте қайта қосу сызығына жеткен кезде, ол теориялық мәнде осы сызық бойымен сырғанап отырып, тепе-теңдік күйге дейін жылжи береді. Мұндай процесті *сырғымалы режим* деп атайды.

04.3. Бейсызықты жүйелердің абсолют орнықтылығы

04.24-есеп.

Ш е ш і м і: Құрылымдық схемадағы жүйе бөліктерінің дифференциалдық теңдеулерін мына түрде жазуға болады:

$$y = W_c(p) \cdot U,$$

$$U = K\varepsilon,$$

$$\varepsilon = -y.$$

Енді осы теңдеулерді қолдана отыра, $K = 10$ кезіндегі салыстырушы жүйенің орнықтылығын тексере аламыз. Бұндай коэффициент үшін жүйенің сипаттаушы теңдеуін төмендегідей жазуға болады:

$$p^3 + 3p^2 + 3p + 11 = 0$$

Алынған теңдеуге Гурвиц критерийін қолдансақ, екінші анықтауыштың

$$\Delta_2 = 3 \cdot 3 - 11 = -2$$

теріс таңбалы болатындығын көреміз. Абсолют орнықтылықтың қажетті шарты орындалмайды. Яғни, бейсызықты жүйе абсолют орнықты емес.

04.25-есеп.

Ш е ш і м і. Ажыратылған жүйенің беріліс коэффициентін

$$K = K_c K_б = 4 \cdot 0{,}5 = 2$$

бейсызықты буынға жатқызамыз. Олай болса, ажыратылған жүйенің жиіліктік беріліс функциясы мынаған тең болады:

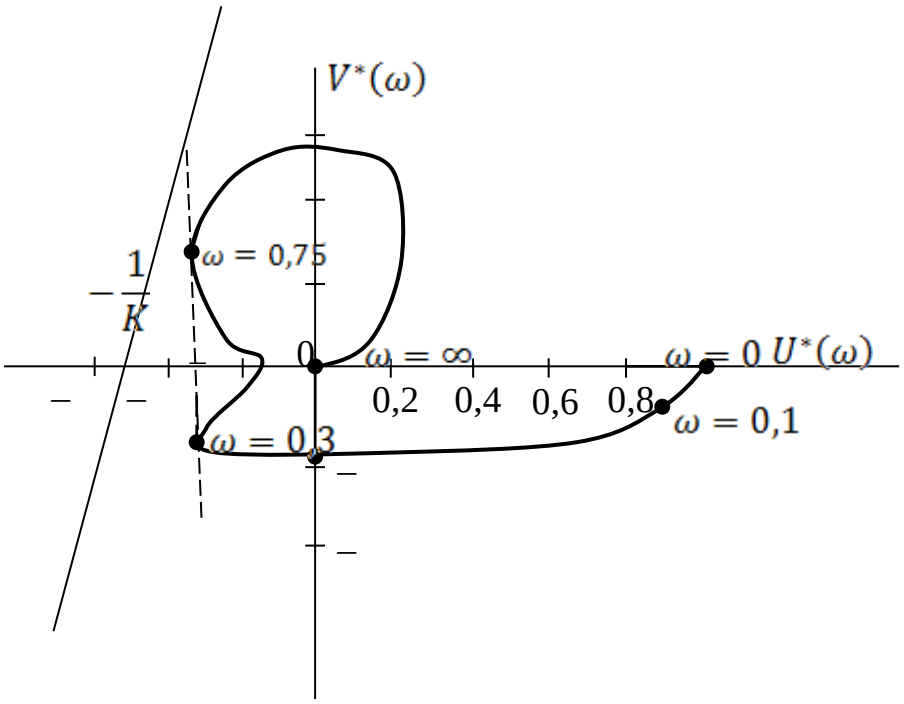
$$W_c(j\omega) = \frac{1}{(1 - T_1^2\omega^2 + 2j\xi_1 T_1\omega)(1 - T_2^2\omega^2 + 2j\xi_2 T_2\omega)}.$$

$U^*(\omega) = U(\omega)$ және $V^*(\omega) = \omega \cdot V(\omega)$ функцияларын анықтаймыз:

$$U^*(\omega) = \frac{(1 - T_1^2\omega^2)(1 - T_2^2\omega^2) - 4\xi_1\xi_2 T_1 T_2\omega^2}{[(1 - T_1^2\omega^2)^2 + 4\xi_1^2 T_1^2\omega^2][(1 - T_2^2\omega^2)^2 + 4\xi_2^2 T_2^2\omega^2]},$$

$$V^*(\omega) = \frac{-2\omega^2[(1 - T_1^2\omega^2)\xi_2 T_2 + (1 - T_2^2\omega^2)\xi_1 T_1]}{[(1 - T_1^2\omega^2)^2 + 4\xi_1^2 T_1^2\omega^2][(1 - T_2^2\omega^2)^2 + 4\xi_2^2 T_2^2\omega^2]}$$

Алынған функциялар арқылы $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ сипаттамасын тұрғызамыз (04.7-сурет). Абсцисса осіндегі $\left(-{}^1/_k, jo\right)$ нүктесінен Попов түзуін, барлық сипаттама оң жағында қалатындай етіп жүргіземіз. Яғни, (o, k) бұрышында жатқан бейсызықты буынның статикалық сипаттамасы бар жүйе $K = 2$ болған кезде абсолют орнықты.

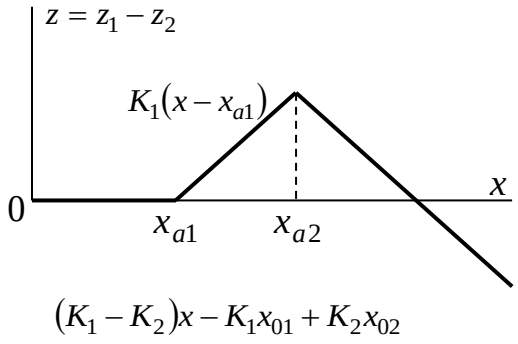


04.7-сурет. $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ сипаттамасы

04.4. Бейсызықты автоматты реттеу жүйесінің құрылымдық схемасын түрлендіру

04.31-есеп.

Ш е ш і м і. Бұл есеп 4.27-есептің жолымен шығарылады, тек мұнда қосындағыш элементке беріліп тұрған z_2 сигналы теріс таңбалы болғандықтан, берілген сипаттамалардың ординаталары x-тің әр мәндері үшін бір-бірінен графикалық жолмен алынады: $z = z_1 - z_2$. Нәтижесінде 04.8-суреттегі сипаттаманы аламыз.

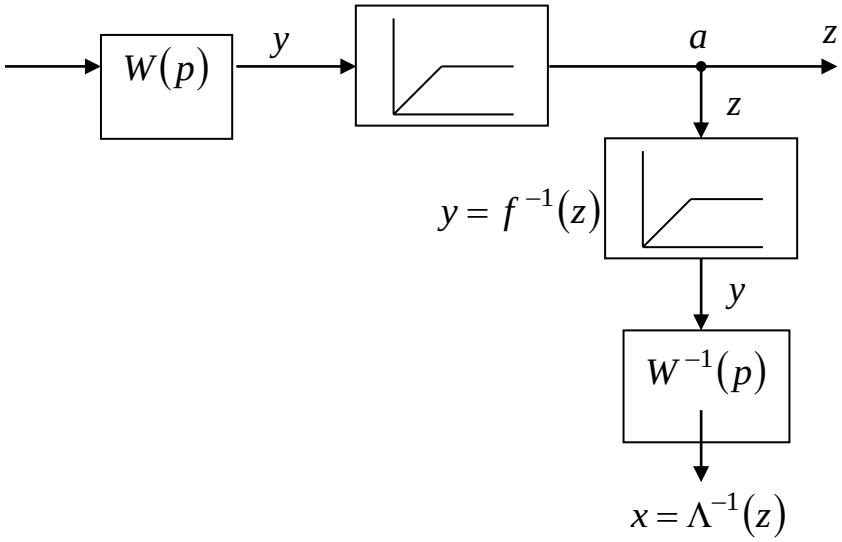


04.8-сурет. Берілген 4.31-есептің шешімі

Алынған сипаттаманың $x > x_{a2}$ аймағын қарастырайық. Егер $K_1 = K_2$ болса, сипаттаманың еңістігі нөлге тең болады да, ол «шектеуі бар сезімсіздік аймақты» типті буынға сәйкес келеді.

04.32-есеп.

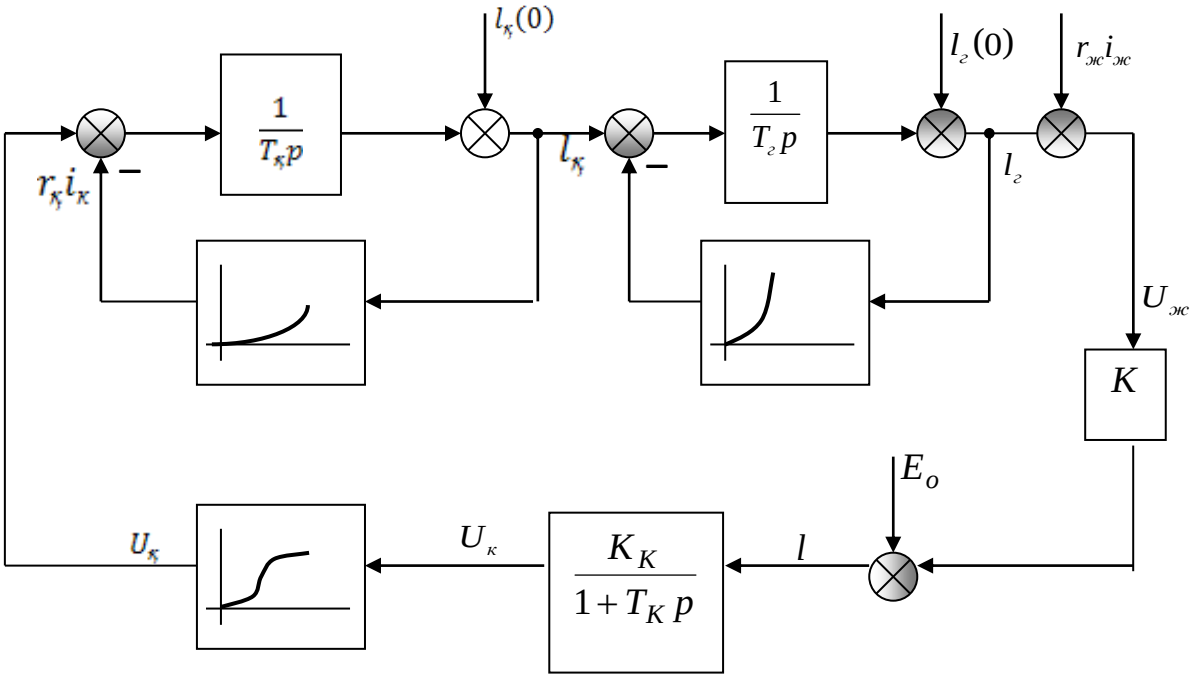
Ш е ш і м і. Бірінші бөлімдегі есептің шарты келтірілген тараудағы түрлендірудің екінші шартына сәйкес, a нүктесі бойындағы байланысқа қосымша $y = f^{-1}(z)$ және $W^{-1}(p)$ кері операторлы буындарды енгіземіз. Нәтижесінде 04.9-суреттегі құрылымдық схеманы аламыз.



04.9-сурет. Түрлендірілген схема

04.33-есеп.

Ш е ш і м і. Дифференциалдауыш кері байланыстармен қамтылған екі бейсызықты буындардың әрқайсысы түрлендірудің үшінші ережесіне сәйкес, сипаттамасы алғашқы буынның сипаттамасына кері болатын бейсызықты кері байланыспен қамтылған интегралдаушы буынға пара-пар болады. Сонымен жүйедегі процестерді модельдеуге ыңғайлы болатын 04.10-суреттегі пара-пар схеманы аламыз.



04.10-сурет. Кернеуді стабильдеу схемасының түрлендірілген пара-пар нұсқасы

1-тіркеме. Көрсеткіш функциялар мәндері

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	0,50	1,6487	0,6065	1,00	2,7182	0,3678
01	0100	0,9900	51	6652	6005	01	7456	3642
02	0200	9802	52	6820	5945	02	7731	3605
03	0304	9704	53	6989	5886	03	8010	3570
04	0408	9607	54	7160	5827	04	8292	3534
05	0512	9512	55	7332	5769	05	8576	3499
06	0168	9417	56	7506	5712	06	8863	3464
07	0725	9323	57	7682	5655	07	9153	3430
08	0832	9231	58	7860	5599	08	9446	3396
09	0941	9139	59	8039	5543	09	9742	3362
0,10	1,1051	0,9048	0,60	1,8221	0,5488	1,10	3,0041	0,3328
11	1162	8958	61	8404	5433	11	0343	3295
12	1275	8869	62	8589	5379	12	0648	3262
13	1388	8781	63	8776	5325	13	0956	3230
14	1502	8693	64	8964	5272	14	1267	3198
15	1618	8607	65	9155	5220	15	1581	3166
16	1735	8521	66	9347	5168	16	1899	3134
17	1853	8436	67	9542	5117	17	2219	3103
18	1972	8352	68	9738	5066	18	2543	3072
19	2092	8269	69	9937	5015	19	2870	3042
0,20	1,2214	0,8187	0,70	2,0137	0,4965	1,20	3,3201	0,3011
21	2336	8105	71	0339	4916	21	3534	2982
22	2460	8025	72	0544	4867	22	3871	2952
23	2586	7945	73	0750	4819	23	4212	2922
24	2712	7866	74	0959	4771	24	4556	2893
25	2840	7788	75	1170	4723	25	4903	2865
26	2969	7710	76	1382	4676	26	5254	2836
27	3099	7633	77	1597	4630	27	5608	2808
28	3231	7557	78	1814	4584	28	5966	2780
29	3364	7482	79	2034	4538	29	6327	2752
0,30	1,3498	0,7408	0,80	2,2255	0,4493	1,30	3,6693	0,2725
31	3634	7334	81	2479	4448	31	7061	2698
32	3771	7261	82	2705	4404	32	7434	2671
33	3909	7189	83	2933	4360	33	7810	2644
34	4049	7117	84	3163	4317	34	8190	2618
35	4190	7046	85	3396	4274	35	8574	2592
36	4333	6976	86	3631	4231	36	8961	2566
37	4477	6907	87	3869	4189	37	9353	2541
38	4622	6838	88	4109	4147	38	9749	2515
39	4769	6770	89	4351	4106	39	4,0148	2490
0,40	1,4918	0,6703	0,90	2,4596	0,4065	1,40	4,0552	0,2466

1-тіркеменің жалғасы

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
41	5068	6636	91	4843	4025	41	0959	2441
42	5219	6570	92	5092	3985	42	1371	2417
43	5372	6505	93	5345	3945	43	1787	2393
44	5527	6440	94	5599	3906	44	2207	2369
45	5683	6376	95	5857	3867	45	2631	2345
46	5840	6312	96	6117	3829	46	3059	2322
47	5999	6250	97	6379	3790	47	3492	2299
48	6160	6187	98	6644	3753	48	3929	2276
49	6323	6126	99	6912	3715	49	4371	2253
1,50	4,4816	0,2231	30	9,9741	1002	3,00	20,085	0,0497
60	4,9530	0,2019	40	11,023	0,0907	3,5	33,115	0302
70	5,4739	1826	50	12,182	0820	4,0	54,598	0183
80	6,0496	1653	60	13,463	0742	4,5	90,017	0111
90	6,6858	1495	70	14,879	0672	5,0	148,413	0067
2,00	7,3890	0,1353	80	16,444	0608	5,5	244,69	0040
10	8,1661	1224	90	18,174	0550	6,0	403,42	0,0024
20	9,0250	1108						

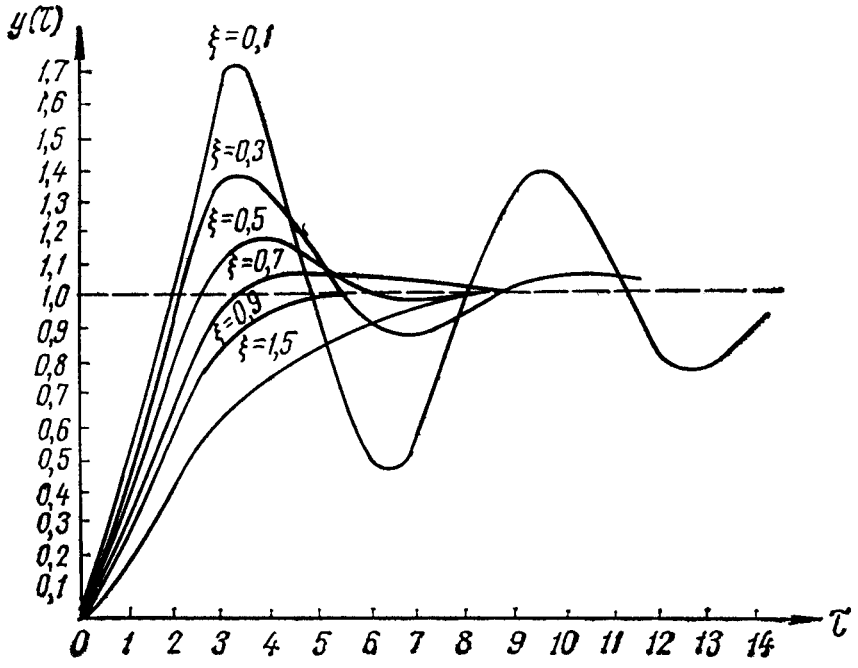
2-тіркеме. h – функция кестесі

t_0 \ χ	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,158	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231	0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
1,0	0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447	0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,580	0,603	0,617	0,646	0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,733	0,761	0,786	0,810	0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020
2,5	0,674	0,705	0,739	0,771	0,802	0,833	0,861	0,891	0,916	0,943	0,967	0,985	1,010	1,031	1,042	1,060	1,078	1,098	1,113	1,125	1,133
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038	1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178
3,5	0,814	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095	1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,166	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,107	1,124	1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129	1,138	1,134	1,134	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
5,0	0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117	1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986
5,5	0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,083	1,093	1,095	1,097	1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
6,0	0,904	0,943	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062	1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,966	0,949	0,934	0,922	0,914	0,906
6,5	0,904	0,942	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033	1,018	1,001	0,982	0,965	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009	0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,025	1,025	1,017	1,005	0,989	0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,995	0,981	0,996	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,997	0,996	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978	0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	0,061
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982	0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987	0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,991	0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991	0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989	0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
12,0	0,950	0,988	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,987	0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,986	0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,987	0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,988	0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970

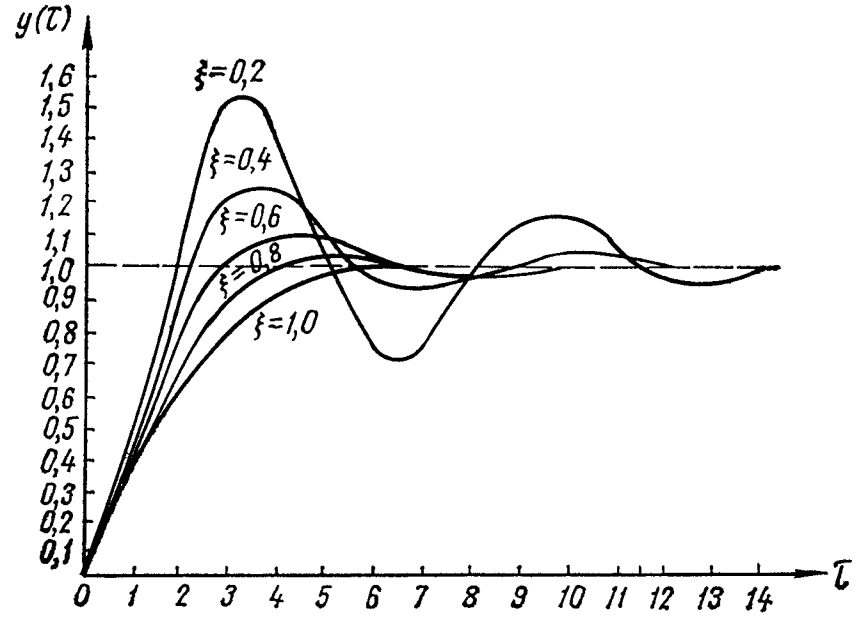
2-тіркеменің жалғасы

χ / t_0	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991	1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996	1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000	1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004	1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007	1,011	1,008	1,001	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009	1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010	1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010	1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010	1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,979
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009	1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006	1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,969	0,967
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004	0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002	0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001	0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001	0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,001	0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	1,000	0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999	0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,997	1,004	1,007	1,003	0,999	0,998	1,001	1,006	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998	0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997	1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997	1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,000	0,996	1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996	1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996	1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983

3-тіркеме. Тербелмелі буынның нормаланған өтпелі сипаттамалары

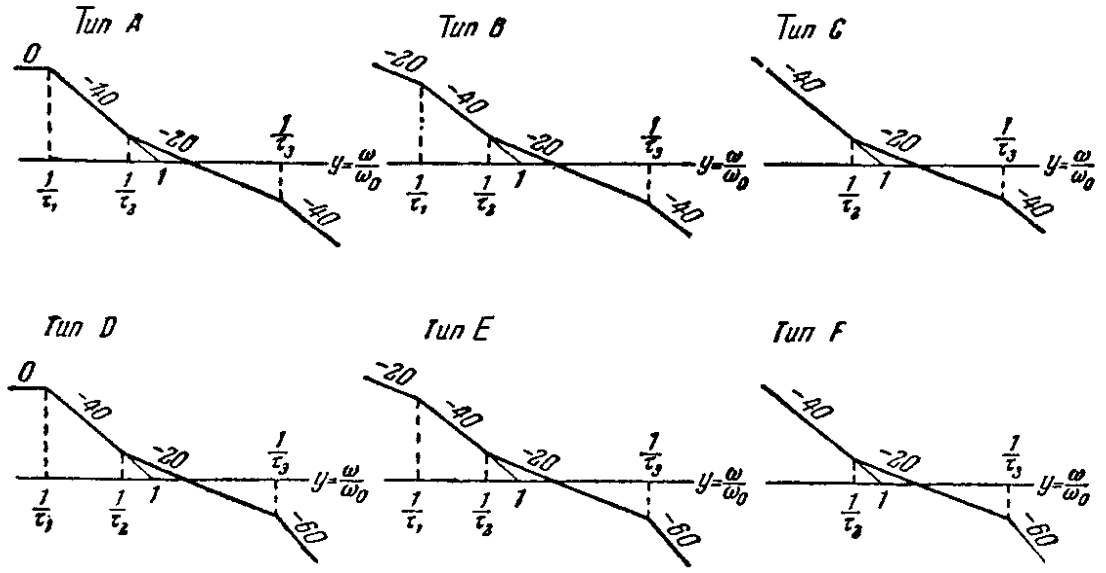


Т3.1-сурет. ξ тақ мәндері үшін салынған
тербелмелі буынның өтпелі сипаттамалары



Т3.2-сурет. ξ жұп мәндері үшін салынған
тербелмелі буынның өтпелі сипаттамалары

4-тіркеме. Типтік нормаланған ЛАС және оларға сәйкес беріліс функциялар мен базалық жиілікті есептеу формулалары



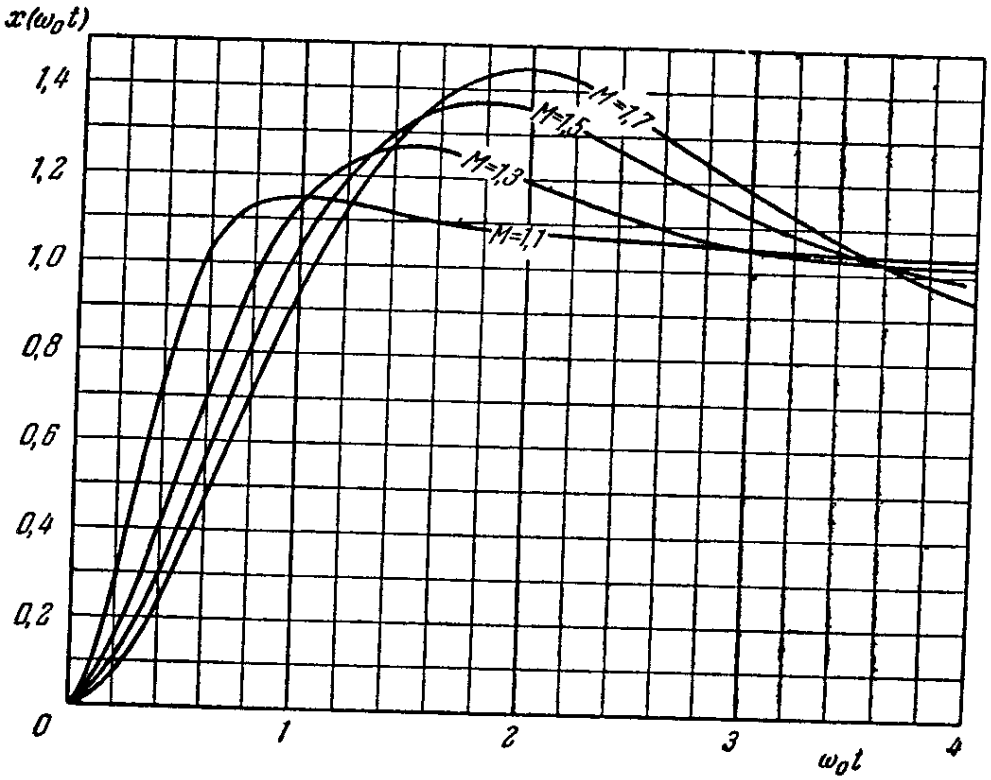
Т4.1-кесте

Астатизм дәрежесі	ЛАС типі	Ажыратылған жүйенің беріліс функциясы	Нормаланған беріліс функция	Базалық жиілік
0	*A*	$\frac{K(1+T_2p)}{(1+T_1p)^2(1+T_3p)}$	$\frac{\tau_1^2(1+\tau_2q)}{(1+\tau_1q)^2(1+\tau_3q)}$	$\frac{\sqrt{K}}{T_1}$
	D	$\frac{K(1+T_2p)}{(1+T_1p)^2(1+T_3p)^2}$	$\frac{\tau_1^2(1+\tau_2q)}{(1+\tau_1q)^2(1+\tau_3q)^2}$	
1	*B*	$\frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)}$	$\frac{\tau_1(1+\tau_2q)}{q(1+\tau_1q)(1+\tau_3q)}$	$\sqrt{\frac{K}{T_1}}$
	E	$\frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)^2}$	$\frac{\tau_1(1+\tau_2q)}{q(1+\tau_1q)(1+\tau_3q)^2}$	
2	*C*	$\frac{K(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)}$	$\frac{1+\tau_2q}{q^2(1+\tau_3q)}$	$\sqrt{K}$
	F	$\frac{K(1+T_2p)}{p^2(1+T_3p)^2}$	$\frac{1+\tau_2q}{q^2(1+\tau_3q)^2}$	

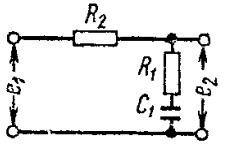
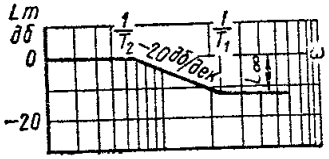
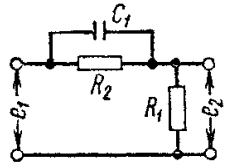
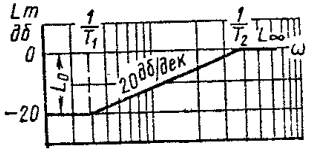
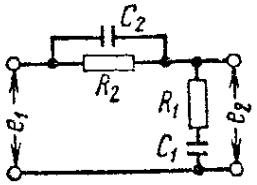
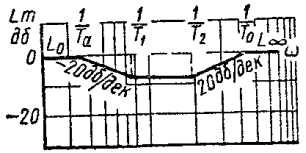
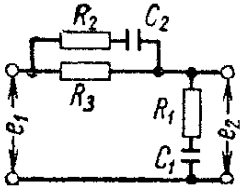
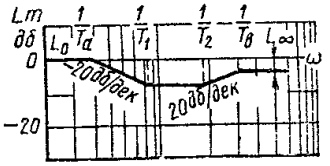
Т4.2-кесте

ЛАС типі	Тербеліс көрсеткіші, M	$\tau = \omega_0$ $T_2 = y_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}$	аз уақыт тұрақтысын есептемегенде		аз уақыт тұрақтысын есептегенде $\tau_M = 0{,}1$	
			$h = \frac{\tau_2}{\tau_3}$	$\tau_3 = \omega_0 T_3$	$h = \frac{\tau_2}{\tau_3}$	$\tau_3 = \omega_0 T_3$
C	1,1	3,32	21,0	0,158	57,2	0,058
	1,3	2,08	7,67	0,272	12,1	0,172
	1,5	1,73	5	0,346	7,04	0,246
	1,7	1,56	3,86	0,404	5,13	0,304
F	1,1	3,32	42,0	0,079	114	0,029
	1,3	2,08	15,3	0,136	24,2	0,086
	1,5	1,73	10	0,173	14,1	0,123
	1,7	1,56	7,72	0,202	10,3	0,152

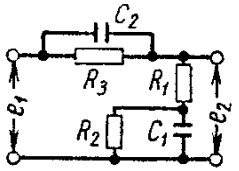
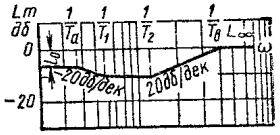
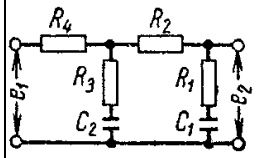
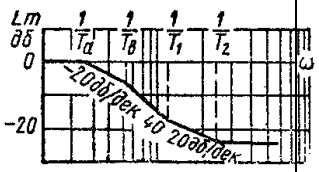
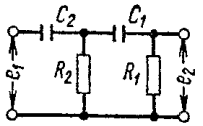
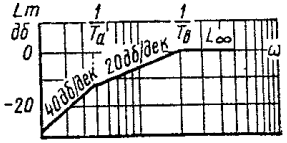
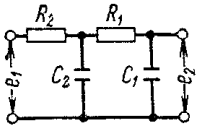
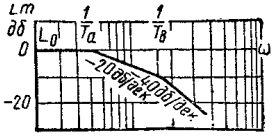
5-тіркеме. Типтік ЛАС үшін өтпелі процестің нормаланған қисықтары



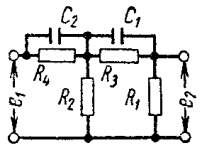
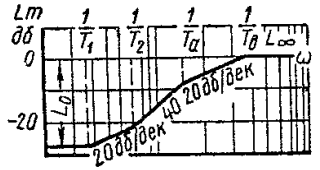
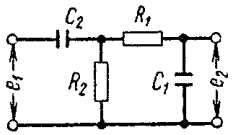
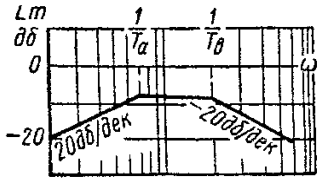
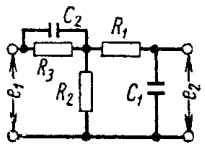
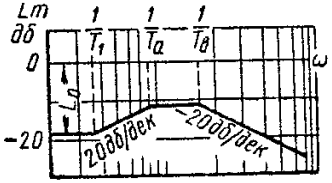
6-тіркеме. Корректирлеуші буындарды таңдау кестесі

Корректирлеуші құрылғылардың схемасы	Беріліс функциясы	L_0	L_∞	T_1	T_2	Асимптоталық логарифмдік амплитудалық сипаттамалар
1	2	3	4	5	6	7
	$W(p)=\dfrac{T_1p+1}{T_2p+1}$	1	$\dfrac{1}{1+\dfrac{R_2}{R_1}}$	R_1C_1	$\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)T_1$	
	$W(p)=L_0\dfrac{T_1p+1}{T_2p+1}$	$\dfrac{1}{1+\dfrac{R_2}{R_1}}$	1	R_1C_1	$\dfrac{1}{1+\dfrac{R_2}{R_1}}T_1$	
	$W(p)=\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)+T_2\right]p+1}$	1	1	R_1C_1	R_2C_2	
	$W(p)=\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2\left(1+\dfrac{R_2R_3}{R_1(R_2+R_3)}\right)p^2+\rightarrow}\rightarrow$ $\rightarrow\dfrac{}{\left[T_1\left(1+\dfrac{R_3}{R_1}\right)+T_2\right]p+1}$	1	$\dfrac{1}{1+\dfrac{R_2R_3}{R_1(R_2+R_3)}}$	R_1C_1	$(R_1+R_3)C_2$	

6-тіркеменің жалғасы

1	2	3	4	5	6	7
	$W(p)=\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\dfrac{R_3}{R_1}\right)+T_2\right]p+\dfrac{1}{L_0}}$	$\dfrac{1}{1+\dfrac{R_3}{R_1+R_2}}$	1	$\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1$	R_3C_2	
	$W(p)=\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2\left[\left(1+\dfrac{R_4}{R_3}\right)\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)+\dfrac{R_4}{R_1}\right]p^2+\left[T_1\left(1+\dfrac{R_4}{R_1}+\dfrac{R_2}{R_1}\right)+T_2\left(1+\dfrac{R_4}{R_3}\right)\right]p+1}$	1	$\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{R_4}{R_3}\right)\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)+\dfrac{R_4}{R_1}}$	R_1C_1	R_3C_2	
	$W(p)=\dfrac{T_1T_2p^2}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)+T_2\right]p+1}$	0	1	R_1C_1	R_2C_2	
	$W(p)=\dfrac{1}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)+T_2\right]p+1}$	1	0	R_1C_1	R_2C_2	

6-тіркеменің жалғасы

1	2	3	4	5	6	7
	$W(p)=\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2p^2+\left\{T_1\left(1+\dfrac{R_3}{R_1}\right)+T_2\left[1+\dfrac{R_4(R_1+R_2)}{R_1R_2}\right]\right\}p+\dfrac{1}{L_0}}$	$\dfrac{1}{1+\dfrac{R_3}{R_1}+\dfrac{R_4(R_1+R_2+R_3)}{R_1R_2}}$	1	R_4C_2	R_3C_1	
	$W(p)=\dfrac{T_1p}{T_1T_2p^2+\left[T_1+T_2\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)\right]p+1}$	0	0	R_2C_2	R_1C_1	
	$W(p)=\dfrac{T_1p+1}{T_1T_2p^2+\left[T_1+T_2\left(1+\dfrac{R_3}{R_2}+\dfrac{R_3}{R_1}\right)\right]p+\dfrac{1}{L_0}}$	$\dfrac{1}{1+\dfrac{R_3}{R_2}}$	0	R_3C_2	R_1C_1	

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Бекбаев А., Сүлеев Д., Хисаров Б. Сызықты және бейсызықты жүйелердің автоматты реттеу теориясы. Оқулық. – Алматы: Эверо, 2005, 328б.
2. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Под редакцией В.В. Солодовникова в 3-х книгах. – М.: Машиностроение, 1969.
3. Соломенцев Ю.М. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 2003.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – М.: Профессия, 2003.
5. Сборник задач по теории автоматизированного регулирования и управления. Под редакцией В.А. Бесекерского. Наука, 1978, 512с.
6. Тихонов О.Н. Решение задач по автоматизации процессов обогащения и металлургии. – Ленинград: Недра, 1969, 430с.
7. Бекбаев А. Автоматика және өндірістік процестерді автоматтандыру. Оқулық. – Алматы: Білім, 1995, 288б.
8. Бекбаев А., Сүлеев Д., Хисаров Б. Сызықты автоматты реттеу жүйелері теориясының есептер жинағы (Оқу құралы). А.Бекбаевтың редакциялауымен. – Алматы: КазККА баспасы, 2007. – 212 бет.
9. Бекбаев А., Сүлеев Д., Скормин В., Ширяева О. Басқару теориясы – Теория управления – Control theory. – Алматы: Асем-Систем, 2008. – 552 бет. – Қазақша, орысша, ағылшынша.

А.Бекбаев, Д.Сүлеев, Б.Хисаров

СЫЗЫҚТЫ ЖӘНЕ БЕЙСЫЗЫҚТЫ АВТОМАТТЫ РЕТТЕУ ЖҮЙЕСІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

Редакторы **Тілеуберді Омарұлы**

Суретшісі **Қанат Сырлыбаев**
Компьютерде
калыптаған

Басуға 22.06.2012 ж. берілді. Пішімі 84/108$^{1}/_{32}$.
Есептік баспа табағы 19.5. Офсеттік басылым.
Гарнитурасы "Times New Roman".
Таралымы 500 дана. Тапсырыс №22.