

УДК 531.3.01

DOI 10.52167/1609-1817-2024-130-1-70-78

А.К. Тулешов, А.Ж. Сейдахмет, К. Бисембаев, Н.К. Джамалов, А. Удербаетов 
Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан
E-mail: toleubek_a@mail.ru

ДИНАМИКА ТРАНСПОРТНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА С МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕХАНИЗМОМ АККЕРМАНА В КВАЗИКООРДИНАТАХ

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы динамики мобильного колесного робота, предназначенные для решения технических и интеллектуальных задач. Для изучения движения колесных мобильных роботов применяется метод неголономных координат (квазикоординат). Для механизма Аккермана записана система уравнений неголономной связи (отсутствия скольжения колес во время движения).

Для четырехколесного мобильного робота найдено число степеней свободы и число неголономных уравнений связи. Вывод уравнений движения рассматриваемого колесного мобильного робота осуществлен в форме уравнений Больцмана-Гамеля. Полученные дифференциальные уравнения использовались для моделирования движения универсальной платформы вдоль заданной траектории с использованием компьютерной системы Maple.

Ключевые слова. Мобильный робот, механизм Аккермана, уравнения динамики, голономные связи, квазикоординаты.

Введение.

Современные мобильные колесные роботы находят применения в реализации сервисных услуг, связанные доставкой предметов, и обеспечения нужной транспортной логистики в технологическом процессе, а также в реализации целых автоматизированных производственных процессов в предприятиях по кластерному принципу.

Мобильные роботы должны иметь развитую конструкцию ходовой части, бортовое устройство вычислительной техники, навигационную систему маршрутослежения и средства очувствления. Они характеризуются высоким уровнем взаимодействием с внешними объектами, расширенными возможностями приспособления к сложной, неопределенной и подвижной внешней среде, высокой функциональной гибкостью и маневренностью.

Колесный робот относится к классу неголономных систем. В таких системах кроме геометрических присутствуют кинематические связи, т.е. связи налагающие ограничения на величины скоростей точек и тел системы и не сводящиеся к геометрическим. В результате для описания положения колесного робота используются переменные, которые не все являются независимыми. Это вызывает основные сложности анализа и синтеза колесных робототехнических систем и затрудняет использование стандартных методов управления.

Целью работы является: вывод уравнений неголономных связей и уравнений движения, создание динамической модели четырехколесного грузового мобильного робота на жестких и упругих колесах, описывающие его как электромеханическую систему, создании алгоритма автоматизированного вывода дифференциальных уравнений движения как системы с неголономными связями в системе Maple. Расчет и моделирование движения мобильного робота по криволинейной траектории.

Один из наиболее удобных алгоритмов составления уравнений движения можно строить на основе метода Больцмана-Гамеля, который применяется и к неголономным системам, если речь идет о выводе их уравнений в квазикоординатах.

Материалы и методы.

Разрабатываемый мобильный робот состоит из платформы 1, на которую крепятся четыре колеса и два электродвигателя (рисунок 1). Ведущими являются два задних колеса 3. Задние колеса 3 приводятся в движение с помощью мотор-редуктором 2. Передние колеса 4 являются ведомыми. Мобильный транспортный робот имеет габариты (1200×2300) мм, колеса с массивным резиновым ободом. Собственная масса составляет 1200 кг. Скорость перемещения до 15 км/час. Поворот передних колес осуществляется с помощью шестизвенного рычажного механизма Аккермана.

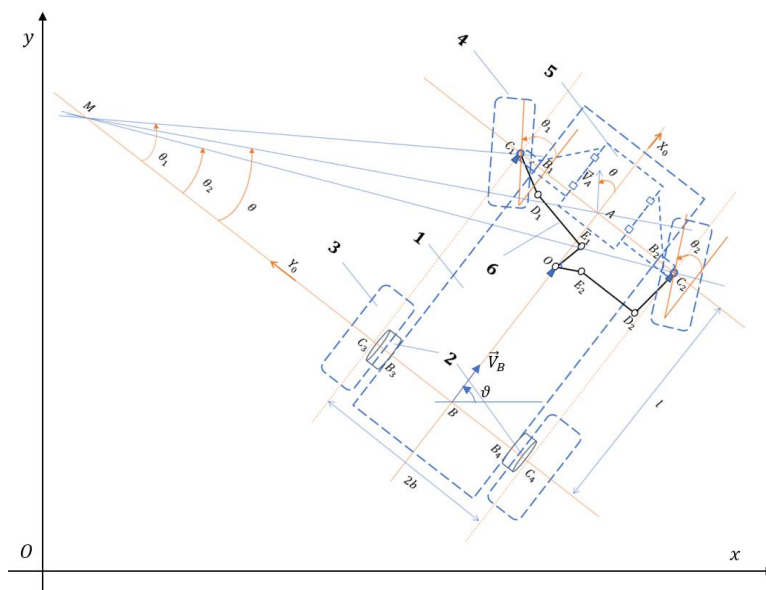


Рисунок 1 — Четырехколесный грузовой мобильный робот: 1-платформа; 2-мотор-редуктор; 3- задние колеса; 4- передние колеса; 5- подвеска; 6- механизм поворота с автономным гидроприводом

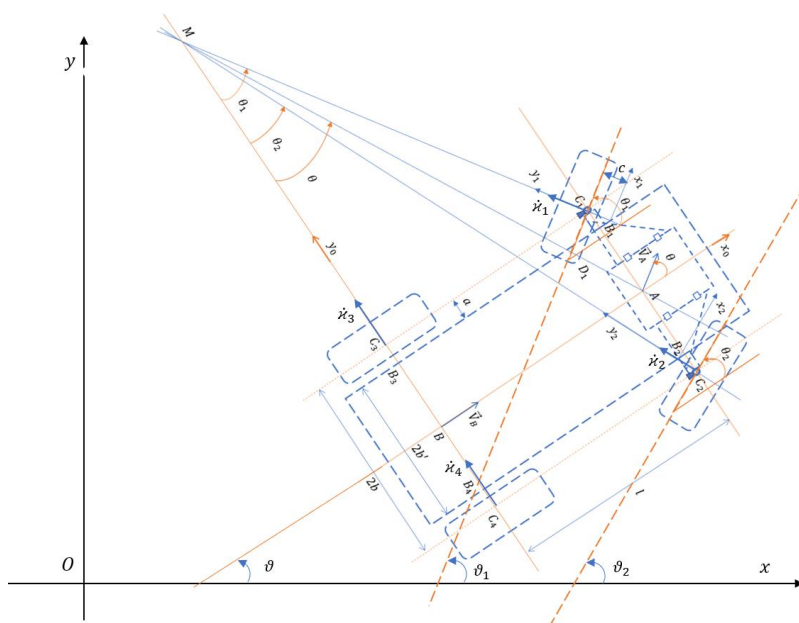


Рисунок 2 — К выводу уравнений неголономных связей

При изучении движения колесных мобильных роботов наиболее подходящим аналитическим аппаратом является метод неголономных координат (квазиординат) [1,2].

Таким образом, рассматривается четырехколесный мобильный робот число степеней равно 2, число неголономных уравнений связи равно 7. Зависимость между обобщенными скоростями $\vec{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_9)$ и квазискоростями $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9)$ записаны в виде системы (2) и (3) и (1) и (4).

Введем в рассмотрение квазискорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_8$, которые являются линейными однородными формами обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta + (b' + a)\dot{\vartheta} - r\dot{\kappa}_3, \\ \omega_2 &= 2(b' + a)\dot{\vartheta} + r\dot{\kappa}_4 - r\dot{\kappa}_3, \\ \omega_3 &= \dot{x} \cos[\vartheta + g_1(\theta)] + \dot{y} \sin[\vartheta + g_1(\theta)] + \dot{\vartheta}[b' \cos g_1(\theta) + l \sin g_1(\theta) + \\ &+ a \tan g_1(\theta) \sin g_1(\theta)] + \frac{2a g_1'(\theta)}{\cos g_1(\theta)} \dot{\theta} - r\dot{\kappa}_1, \\ \omega_4 &= \dot{x} \cos[\vartheta + g_2(\theta)] + \dot{y} \sin[\vartheta + g_2(\theta)] - \dot{\vartheta}[b' \cos g_2(\theta) - l \sin g_2(\theta) + \\ &+ a \tan g_2(\theta) \sin g_2(\theta)] - \frac{2a g_2'(\theta)}{\cos g_2(\theta)} \dot{\theta} - r\dot{\kappa}_2, \\ \omega_5 &= -\dot{x} \sin[\vartheta + g_1(\theta)] + \dot{y} \cos[\vartheta + g_1(\theta)] - \dot{\vartheta}[b' \sin g_1(\theta) - l \cos g_1(\theta) + \\ &+ a \tan g_1(\theta) \cos g_1(\theta)] - \frac{2a g_1'(\theta) \tan g_1(\theta)}{\cos g_1(\theta)} \dot{\theta}, \\ \omega_6 &= -\dot{x} \sin[\vartheta + g_2(\theta)] + \dot{y} \cos[\vartheta + g_2(\theta)] + \dot{\vartheta}[b' \sin g_2(\theta) + l \cos g_2(\theta) - \\ &+ a \tan g_2(\theta) \cos g_2(\theta)] + \frac{2a g_2'(\theta) \tan g_2(\theta)}{\cos g_2(\theta)} \dot{\theta}, \\ \omega_7 &= -\dot{x} \sin \vartheta + \dot{y} \cos \vartheta, \quad \omega_8 = V = \dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta, \quad \omega_9 = \dot{\theta},\end{aligned}\tag{1}$$

Обобщенные координаты обозначим:

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \vartheta, q_4 = \theta, q_5 = S, q_6 = \kappa_1, q_7 = \kappa_2, q_8 = \kappa_3, q_9 = \kappa_4,$$

где S – длина дуги траектории полюса B .

Тогда вводятся векторы $\vec{q} = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_9)$ и $\vec{\omega} = \text{col}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9)$ и положим

$$\vec{\omega} = A\vec{q}, \quad \omega_s = \sum_{k=1}^9 a_{sk} \dot{q}_k, \quad s = \overline{1,9}, \quad A = \|a_{sk}\|_1^9, \tag{2}$$

$$\vec{q} = B\vec{\omega}, \quad \dot{q}_r = \sum_{s=1}^9 b_{rs} \omega_s, \quad r = \overline{1,9}, \quad B = \|b_{rs}\|_1^9 = A^{-1}. \tag{3}$$

где имеет место следующие обозначения:

$\dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{y}, \dot{q}_3 = \dot{\vartheta}, \dot{q}_4 = \dot{\theta}, \dot{q}_5 = V, \dot{q}_6 = \dot{\kappa}_1, \dot{q}_7 = \dot{\kappa}_2, \dot{q}_8 = \dot{\kappa}_3, \dot{q}_9 = \dot{\kappa}_4$ – обобщенные скорости и коэффициенты матрицы $A = \|a_{sk}\|_1^9$:

$$\begin{aligned}a_{11}(\vartheta) &= \cos \vartheta, \quad a_{12}(\vartheta) = \sin \vartheta, \quad a_{13} = (b' + a), \quad a_{18} = -r, \\ a_{23} &= 2(b' + a), \quad a_{28} = -r, \quad a_{29} = r, \\ a_{31}(\vartheta, \theta) &= \cos[\vartheta + g_1(\theta)], \quad a_{32}(\vartheta, \theta) = \sin[\vartheta + g_2(\theta)], \\ a_{33}(\theta) &= [b' \cos g_1(\theta) + l \sin g_1(\theta) + a \tan g_1(\theta) \sin g_1(\theta)], \quad a_{34}(\theta) = \frac{2a g_1'(\theta)}{\cos g_1(\theta)}, \quad a_{36} = -r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{41}(\vartheta, \theta) &= \cos[\vartheta + g_2(\theta)], \quad a_{42}(\vartheta, \theta) = \sin[\vartheta + g_2(\theta)], \\ a_{43}(\theta) &= -[b' \cos g_2(\theta) - l \sin g_2(\theta) + a \tan g_2(\theta) \sin g_2(\theta)], \quad a_{44}(\theta) = -\frac{2a g_2'(\theta)}{\cos g_2(\theta)}, \\ a_{47} &= -r, \\ a_{51}(\vartheta, \theta) &= -\sin[\vartheta + g_1(\theta)], \quad a_{52}(\vartheta, \theta) = \cos[\vartheta + g_1(\theta)], \\ a_{53}(\theta) &= -[b' \sin g_1(\theta) - l \cos g_1(\theta) + a \tan g_1(\theta) \cos g_1(\theta)], \quad a_{54}(\theta) = -\frac{2a g_1'(\theta) \tan g_1(\theta)}{\cos g_1(\theta)}, \\ a_{61}(\vartheta, \theta) &= -\sin[\vartheta + g_2(\theta)], \quad a_{62}(\vartheta, \theta) = \cos[\vartheta + g_2(\theta)], \\ a_{63}(\theta) &= [b' \sin g_2(\theta) + l \cos g_2(\theta) - a \tan g_2(\theta) \cos g_2(\theta)], \quad a_{64}(\theta) = \frac{2a g_2'(\theta) \tan g_2(\theta)}{\cos g_2(\theta)}, \\ a_{71}(\vartheta) &= -\sin \vartheta, \quad a_{72}(\vartheta) = \cos \vartheta, \quad a_{81}(\vartheta) = \cos \vartheta, \quad a_{82}(\vartheta) = \sin \vartheta, \quad a_{94} = 1, \end{aligned}$$

остальные $a_{ij} = 0$.

Коэффициенты b_{rs} обратной матрицы $B = \|b_{rs}\|_1^9$ равны:

$$\begin{aligned} b_{15} &= -\frac{a_{72}(\vartheta) a_{63}(\theta)}{D(\vartheta, \theta)}, \quad b_{16} = \frac{a_{72}(\vartheta) a_{53}(\theta)}{D(\vartheta, \theta)}, \quad b_{17} = \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{52}(\vartheta, \theta) a_{63}(\theta) - a_{53}(\theta) a_{62}(\vartheta, \theta)], \\ b_{19} &= \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{72}(\vartheta) a_{63}(\theta) a_{54}(\theta) - a_{72}(\vartheta) a_{53}(\theta) a_{64}(\theta)], \\ b_{25} &= \frac{a_{71}(\vartheta) a_{63}(\theta)}{D(\vartheta, \theta)}, \quad b_{26} = -\frac{a_{71}(\vartheta) a_{53}(\theta)}{D(\vartheta, \theta)}, \quad b_{27} = \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{61}(\vartheta, \theta) a_{53}(\theta) - a_{51}(\vartheta, \theta) a_{63}(\theta)], \\ b_{29} &= \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{71}(\vartheta) a_{53}(\theta) a_{64}(\theta) - a_{71}(\vartheta) a_{63}(\theta) a_{54}(\theta)], \\ b_{35} &= \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{61}(\vartheta, \theta) a_{72}(\vartheta) - a_{71}(\vartheta) a_{62}(\vartheta, \theta)], \\ b_{36} &= \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{52}(\vartheta, \theta) a_{71}(\vartheta) - a_{72}(\vartheta) a_{51}(\vartheta, \theta)], \\ b_{37} &= \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{51}(\vartheta, \theta) a_{62}(\vartheta, \theta) - a_{52}(\vartheta, \theta) a_{61}(\vartheta, \theta)], \\ b_{39} &= \frac{1}{D(\vartheta, \theta)} [a_{71}(\vartheta) a_{62}(\vartheta, \theta) a_{54}(\theta) + a_{72}(\vartheta) a_{51}(\vartheta, \theta) a_{64}(\theta) - a_{61}(\vartheta, \theta) a_{72}(\vartheta) a_{54}(\theta) \\ &\quad - a_{52}(\vartheta, \theta) a_{71}(\vartheta) a_{64}(\theta)], \\ D(\vartheta, \theta) &= a_{52}(\vartheta, \theta) a_{63}(\theta) a_{71}(\vartheta) + a_{53}(\theta) a_{61}(\vartheta, \theta) a_{72}(\vartheta) - a_{53}(\theta) a_{62}(\vartheta, \theta) a_{71}(\vartheta) \\ &\quad - a_{51}(\vartheta, \theta) a_{63}(\theta) a_{72}(\vartheta) \neq 0, \\ b_{49} &= 1, \quad b_{58} = 1 \\ b_{63} &= \frac{1}{a_{35}}, \\ b_{65} &= -\frac{1}{a_{35}} [a_{31}(\vartheta, \theta) b_{15} + a_{32}(\vartheta, \theta) b_{25} + a_{33}(\theta) b_{35}], \\ b_{66} &= -\frac{1}{a_{35}} [a_{31}(\vartheta, \theta) b_{16} + a_{32}(\vartheta, \theta) b_{26} + a_{33}(\theta) b_{36}], \\ b_{67} &= -\frac{1}{a_{35}} [a_{31}(\vartheta, \theta) b_{17} + a_{32}(\vartheta, \theta) b_{27} + a_{33}(\theta) b_{37}], \\ b_{68} &= -\frac{1}{a_{35}} [a_{31}(\vartheta, \theta) b_{18} + a_{32}(\vartheta, \theta) b_{28} + a_{33}(\theta) b_{38} - a_{34}(\theta)], \\ b_{74} &= \frac{1}{a_{46}}, \quad b_{75} = -\frac{1}{a_{46}} [a_{41}(\vartheta, \theta) b_{15} + a_{42}(\vartheta, \theta) b_{25} + a_{43}(\theta) b_{35}], \\ b_{76} &= -\frac{1}{a_{46}} [a_{41}(\vartheta, \theta) b_{16} + a_{42}(\vartheta, \theta) b_{26} + a_{43}(\theta) b_{36}], \\ b_{77} &= -\frac{1}{a_{46}} [a_{41}(\vartheta, \theta) b_{17} + a_{42}(\vartheta, \theta) b_{27} + a_{43}(\theta) b_{37}], \\ b_{78} &= -\frac{1}{a_{46}} [a_{41}(\vartheta, \theta) b_{18} + a_{42}(\vartheta, \theta) b_{28} + a_{43}(\theta) b_{38} - a_{44}(\theta)], \\ b_{81} &= \frac{1}{a_{17}}, \quad b_{85} = -\frac{1}{a_{17}} a_{13} b_{35}, \quad b_{86} = -\frac{a_{13} b_{36}}{a_{17}}, \quad b_{87} = -\frac{a_{13} b_{37}}{a_{17}}, \quad b_{88} = -\frac{1}{a_{17}}, \quad b_{89} = \frac{1}{a_{17}} \end{aligned}$$

$$b_{91} = -\frac{a_{27}b_{81}}{a_{28}}, b_{92} = \frac{1}{a_{28}}, b_{95} = -\frac{1}{a_{28}}(a_{23}b_{35} + a_{27}b_{85}), b_{96} = -\frac{1}{a_{28}}(a_{23}b_{36} + a_{27}b_{86}),$$

$$b_{97} = -\frac{1}{a_{28}}(a_{23}b_{37} + a_{27}b_{87}), b_{98} = -\frac{a_{27}b_{88}}{a_{28}}, b_{99} = -\frac{1}{a_{28}}(a_{23}b_{39} + a_{27}b_{89})$$

и остальные $b_{rs} = 0$.

Система $\vec{q} = B\vec{\omega}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= b_{15}\omega_5 + b_{16}\omega_6 + b_{17}\omega_7 + b_{19}\omega_9, \\ \dot{y} &= b_{25}\omega_5 + b_{26}\omega_6 + b_{27}\omega_7 + b_{29}\omega_9, \\ \dot{\varphi} &= b_{35}\omega_5 + b_{36}\omega_6 + b_{37}\omega_7 + b_{39}\omega_9, \\ \dot{\theta} &= b_{49}\omega_9, \\ \dot{S} &= V = b_{58}\omega_8, \\ \dot{x}_1 &= b_{63}\omega_3 + b_{65}\omega_5 + b_{66}\omega_6 + b_{67}\omega_7 + b_{69}\omega_9, \\ \dot{x}_2 &= b_{74}\omega_4 + b_{75}\omega_5 + b_{76}\omega_6 + b_{77}\omega_7 + b_{79}\omega_9, \\ \dot{x}_3 &= b_{81}\omega_1 + b_{85}\omega_5 + b_{86}\omega_6 + b_{87}\omega_7 + b_{88}\omega_8 + b_{89}\omega_9, \\ \dot{x}_4 &= b_{91}\omega_1 + b_{92}\omega_2 + b_{95}\omega_5 + b_{96}\omega_6 + b_{97}\omega_7 + b_{98}\omega_8 + b_{99}\omega_9.\end{aligned}\tag{4}$$

Вывод уравнений движения рассматриваемого колесного мобильного робота осуществляется в форме уравнений Больцмана-Гамеля [3]. Их число равно числу степеней свободы неголономной системы и в нашем случае имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_8} - \frac{\partial T}{\partial \pi_8} + \omega_9 \sum_{r=1}^9 \gamma_{98}^r \frac{\partial T}{\partial \omega_r} &= P_8, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_9} - \frac{\partial T}{\partial \pi_9} + \omega_8 \sum_{r=1}^9 \gamma_{89}^r \frac{\partial T}{\partial \omega_r} &= P_9,\end{aligned}\tag{5}$$

и реакций неголономных связей определяются по формулам

$$R_s = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_s} - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^9 \frac{\partial T}{\partial \omega_r} (\gamma_{8s}^r \omega_8 + \gamma_{9s}^r \omega_9) - P_s, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.\tag{6}$$

Здесь

$$\frac{\partial T}{\partial \pi_s} = \sum_{\tau=1}^9 \frac{\partial T}{\partial q_\tau} b_{\tau s}, s = 1, 2, \dots, 9 \quad \text{и} \quad \gamma_{lm}^s = \sum_{k=1}^9 \sum_{r=1}^9 \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} (b_{rl}b_{km} - b_{kl}b_{rm}), l = 8, 9\tag{7}$$

Кинетическая энергия мобильного робота T равна сумме кинетической энергий подвижных частей (рисунок 2): T_0 – кинетической энергии платформы с центром тяжести C ; T_1 и T_2 – кинетических энергий передних колес с центрами тяжести C_1, C_2 ; T_3 и T_4 – кинетических энергий задних колес с центрами тяжести C_3, C_4 ; T_5 – кинетическая энергия механизма поворота.

Кинетическая энергия платформы включает массу подвески колес и других к ней закрепленных деталей. Поэтому центр тяжести C может быть смещена относительно осей симметрии четырехугольной платформы и имеет координаты $C(s, l_0)$ относительно B . Введем обозначения: I_C – момент инерции платформы относительно центра тяжести C ; m_0 – масса платформы; I_B – момент инерции платформы относительно B .

Таким образом при плоскопараллельном движении платформы:

$$T_0 = \frac{1}{2}(m_0 V_C^2 + I_C \dot{\vartheta}^2) = \frac{1}{2} \left[m_0 V_B^2 + 2m_0 (\vec{V}_B \times \vec{\vartheta}) \cdot \vec{BC} + I_B \dot{\vartheta}^2 \right].\tag{8}$$

Кинетическая энергия задних колес

$$T_3 = \frac{m_3}{2} V_{C_3}^2 + \frac{I_3}{2} \dot{\varphi}_3^2 + \frac{I'_3}{2} \dot{\vartheta}^2 \quad \text{и} \quad T_4 = \frac{m_4}{2} V_{C_4}^2 + \frac{I_4}{2} \dot{\varphi}_4^2 + \frac{I'_4}{2} \dot{\vartheta}^2,\tag{9}$$

где I_3, I_4 – осевые моменты инерций колес 3 и 4; I'_3, I'_4 – диаметральный моменты инерций колес 3 и 4, m_3, m_4 – массы колес 3 и 4.

Кинетическая энергия передних колес

$$T_1 = \frac{m_1}{2} V_{C_1}^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{I'_1}{2} \dot{\theta}_1^2 \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{m_2}{2} V_{C_2}^2 + \frac{I_2}{2} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{I'_2}{2} \dot{\theta}_2^2, \quad (10)$$

где I_1, I_2 - осевые моменты инерций колес 1 и 2; I'_1, I'_2 - диаметральные моменты инерций колес 1 и 2, m_1, m_2 – массы колес 1 и 2. Здесь при определении диаметральных моментов инерций и масс учитываются инерциальные свойства рычагов C_1D_1 и C_2D_2 поворотных рычагов, жестко соединенных колесами.

Не нарушая общности данного подхода в уравнении кинетической энергий механизма поворота шатуны E_1D_1 и E_2D_2 считаются безмассовыми, тогда

$$T_5 = \frac{m_5}{2} V_{C_5}^2 + \frac{I_5}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2, \quad (11)$$

где I_5 – приведенный момент инерций механизма поворота к звену 5; m_5 – масса звена 5.

Таким образом кинетическая энергия МР:

$$T = \frac{1}{2} \left[m_0 V_B^2 + 2m_0 (\vec{V}_B \times \vec{\vartheta}) \cdot \vec{BC} + I_B \dot{\vartheta}^2 \right] + \frac{m_1}{2} (V_{C_1}^2 + V_{C_2}^2) + \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \frac{I'_1}{2} [(\dot{\vartheta} + \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{\vartheta} + \dot{\theta}_2)^2] + \frac{m_3}{2} (V_{C_3}^2 + V_{C_4}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi}_3^2 + \dot{\varphi}_4^2) + I'_3 \dot{\vartheta}^2 + \frac{m_5}{2} V_{C_5}^2 + \frac{I_5}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2, \quad (12)$$

где были учтены $I_3 = I_4, I'_3 = I'_4, m_3 = m_4, I_1 = I_2, I'_1 = I'_2, m_1 = m_2$ и $\dot{\theta}_1 = \dot{\vartheta} + \dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2 = \dot{\vartheta} + \dot{\theta}_2$.

Представим выражение кинетической энергии (44) через квазискоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_9$. Поставляя эти соотношения в уравнение (44), получим:

$$T = \frac{1}{2} \left[m_0 (\omega_8^2 + \omega_7^2) + 2m_0 (l_2 \omega_7 + s \omega_8) \dot{\vartheta} + I_B \dot{\vartheta}^2 \right] + \frac{m_1}{2} (\omega_3 \omega_4 + r \omega_3 \dot{\varphi}_2 + r \omega_4 \dot{\varphi}_1 + r^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \omega_5 \omega_6) + \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \frac{I'_1}{2} \{ 2\dot{\vartheta}^2 + 2[g'_1(\theta) + g'_2(\theta)] \dot{\vartheta} \omega_9 + [g'^2_1(\theta) + g'^2_2(\theta)] \omega_9^2 \} + \frac{m_3}{2} (\omega_1^2 - \omega_1 \omega_2 + r \omega_1 \dot{\varphi}_4 + r \dot{\varphi}_3 (\omega_1 - \omega_2) + r^2 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi}_3^2 + \dot{\varphi}_4^2) + I'_3 \dot{\vartheta}^2 + \frac{m_5}{2} [\omega_8^2 + \omega_7^2 + 2(l - e) \omega_7 \dot{\vartheta} + (l - e)^2 \dot{\vartheta}^2] + \frac{I_5}{2} (\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\vartheta} \omega_9 + \omega_9^2), \quad (13)$$

Здесь $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, \dot{\varphi}_4$ определяются выражениями из системы (36) и после их постановки кинетическая энергия (13) будет представлено в квадратичной форме от квазискоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^9 \sum_{k=1}^9 D_{sk}(\vartheta, \theta) \omega_s \omega_k. \quad (14)$$

Представим (14) в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^9 \sum_{k=1}^9 D_{sk} \omega_s \omega_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 D_{ss} \omega_s^2 + \sum_{s=1}^n \sum_{k=s+1}^9 D_{sk} \omega_s \omega_k. \quad (15)$$

Запишем выражения для частных производных:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_s} = \sum_{k=1}^9 D_{ks} \omega_s, \quad \frac{\partial T}{\partial \pi_s} = \sum_{\tau=1}^9 \frac{\partial T}{\partial q_\tau} b_{\tau s}, \quad s = 8, 9. \quad (16)$$

Дифференцируем первое выражение (48) по времени t и получаем массив выражений вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_8} \right) = \sum_{j=1}^9 D_{8j} \dot{V} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_9} \right) = \sum_{j=1}^9 D_{9j} \dot{\theta} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j.$$

Для решения системы дифференциальных уравнений использовалась компьютерная система *Maple* [4].

Результаты.

Полученные уравнения использовались для моделирования движения универсальной платформы вдоль заданной траектории. На рисунке 3а показана заданная траектория движения и рис 3б график изменения скорости платформы вдоль траектории.

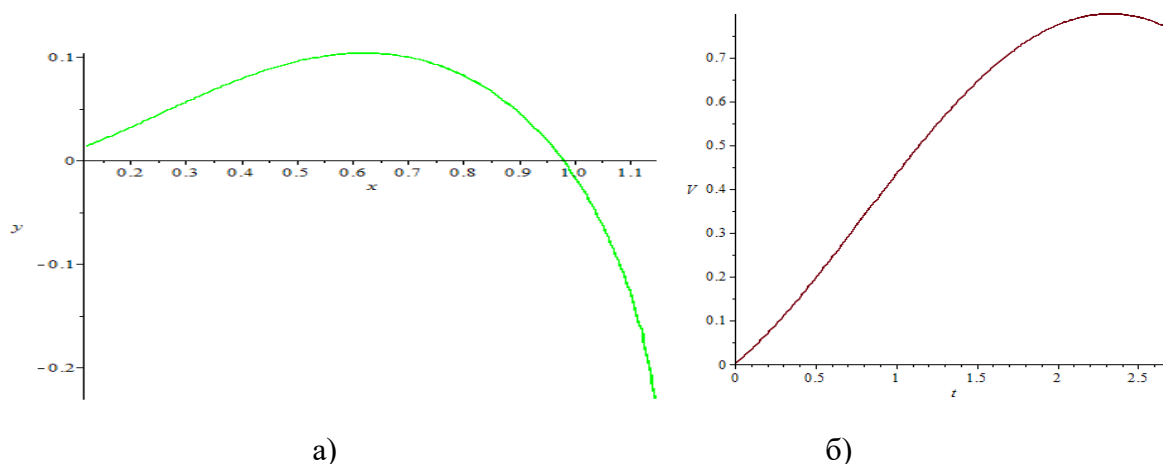


Рисунок 3 — Заданная траектория движения платформы и график изменения скорости платформы вдоль траектории

Обсуждение.

Разработанные авторами уравнения неголономной связи для механизма поворота колес Аккермана, уравнения движения колесных мобильных роботов и применение компьютерной системы *Maple* позволило провести моделирование движения платформы колесного робота по заданной траектории и получить график изменения скорости платформы вдоль траектории.

Заключение.

В статье рассмотрены вопросы изучения движения колесных мобильных роботов с применением метода квазикоординат. Для механизма Аккермана записана система уравнений неголономной связи. Для четырехколесного мобильного робота найдено число степеней свободы и число неголономных уравнений связи. Вывод уравнений движения рассматриваемого колесного мобильного робота осуществлен в форме уравнений Больцмана-Гамеля. Полученные дифференциальные уравнения использовались для моделирования движения универсальной платформы вдоль заданной траектории с использованием компьютерной системы Maple. Проведенные исследования позволяют решать различные технические и интеллектуальные задачи динамики мобильного колесного робота.

Финансирование. Это исследование было профинансировано Комитетом по науке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP09260130).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ozhikenov K.A., A.K. Tuleshov. Stabilization of dynamical peculiarities in tracking drive system. Materials of International scientific-technical conference on «Automatic control and automation of industrial processes», BSTU, 2012. – 204 с.
- [2] Ш.Х. Солтаханов. Основы механики голономных и неголономных систем. - М.: Физматлит, 2016.- 184 с.
- [3] Юревич Е.И. Основы робототехники: учеб. пособие. – 3-е изд. перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. - 368 с.
- [4] Дракунов Ю.М., Сейдахмет А.Ж., Абдраимов А.Е., Будилов А.А. Автоматизированное динамическое исследование неголономных систем// Проблемы механики современных машин. Материалы V международной конференции 25-30 июня 2012г. – Улан-Удэ, 25-30 июня 2012 г. Т.3, – С. 3-6.

REFERENCES*

- [1] Ozhikenov K.A., A.K. Tuleshov. Stabilization of dynamical peculiarities in tracking drive system. Materials of International scientific-technical conference on «Automatic control and automation of industrial processes», BSTU, 2012. – 204 с.
- [2] Sh.Kh. Soltakhanov. Fundamentals of mechanics of holonomic and nonholonomic systems. - M.: Fizmatlit, 2016.- 184 p.
- [3] Yurevich E.I. Fundamentals of robotics: textbook. the manual. – 3rd ed. reprint. and additional – St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2010. - 368 p.
- [4] Dragunov Yu.M., Seidakhmet A.Zh., Abdraimov A.E., Budilov A.A. Automated dynamic research of nonholonomic systems// Problems of mechanics of modern machines. Proceedings of the V International Conference on June 25-30, 2012. – Ulan-Ude, June 25-30, 2012, vol. 3, pp. 3-6.

Амандық Тулешов, т.ғ.д., бас директор, Ө.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы, Қазақстан, aman_58@mail.ru

Асқар Сейдахмет, т.ғ.к., жетекші ғылыми қызметкер, Ө.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы, Қазақстан, seydakhmet@mail.ru

Қуатбай Бисембаев, т.ғ.д., жетекші ғылыми қызметкер, Ө.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы, Қазақстан, kuat_06@mail.ru

Нутпулла Джамалов, т.ғ.к., жетекші ғылыми қызметкер, Ө.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы, Қазақстан, j.nutpulla@gmail.com

Асемгуль Удербаева, PhD, қуымдастырылған профессор, Satbayev University, Алматы, Қазақстан, a.uderbayeva@satbayev.university

КВАЗИ КООРДИНАТТАРДАҒЫ МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН АККЕРМАН МЕХАНИЗМІ БАР КӨЛІКТІК МОБИЛЬДІ РОБОТТЫҢ ДИНАМИКАСЫ

Аңдатпа. Мақалада техникалық және интеллектуалды мәселелерді шешуге арналған мобильді доңғалақты робот динамикасы мәселелері қарастырылады. Доңғалақты мобильді роботтардың қозғалысын зерттеу үшін голономды емес координаттар (квази-

координаттар) әдісі қолданылады. Аккерман механизмі үшін голономды емес байланыс теңдеулерінің жүйесі жазылған (қозғалыс кезінде дөңгелектердің сырғып кетпеуі).

Төрт доңғалақты мобильді робот үшін еркіндік дәрежелерінің саны және голономды емес байланыс теңдеулерінің саны табылды. Қарастырылып отырған доңғалақты мобильді роботтың қозғалыс теңдеулерін шығару Больцман-Гамель теңдеулері түрінде жүзеге асырылады. Алынған дифференциалдық теңдеулер Maple компьютерлік жүйесін қолдана отырып, берілген траектория бойынша әмбебап платформаның қозғалысын модельдеу үшін қолданылды.

Түйінді сөздер. Мобильді робот, Аккерман механизмі, динамикалық теңдеулер, голономды байланыстар, квази-координаттар.

Amandyk Tuleshov, doctor of technical sciences, general manager, U.A. Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan, aman_58@mail.ru

Askar Seidakhmet, candidat of technical sciences, leading researcher, U.A. Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan, seydakhmet@mail.ru

Kuatbai Bissembayev, doctor of technical sciences, leading researcher, U.A. Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan, kuat_06@mail.ru

Nutpulla Jamalov, candidat of technical sciences, leading researcher, U.A. Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan, Almaty, j.nutpulla@gmail.com

Asemgul Uderbayeva, PhD, associate professor, Satbayev University, Almaty, Kazakhstan, a.uderbayeva@satbayev.university

DYNAMICS OF A MOBILE TRANSPORT ROBOT WITH A MODIFIED ACKERMAN MECHANISM IN QUASI-COORDINATES

Abstract. The article discusses the dynamics of a mobile wheeled robot designed to solve technical and intellectual tasks. The method of non-holonomic coordinates (quasi-coordinates) is used to study the movement of wheeled mobile robots. A system of equations of nonholonomic coupling (absence of wheel slip during the movement) is written for the Ackerman mechanism.

The number of degrees of freedom and the number of nonholonomic coupling equations for a four-wheeled mobile robot are found. The derivation of the equations of motion of the considered wheeled mobile robot is carried out in the form of Boltzmann-Hamel equations. The obtained differential equations were used to simulate the movement of a universal platform along a given trajectory using the Maple computer system.

Keywords. Mobile robot, Ackerman mechanism, dynamic equations, holonomic connections, quasi-coordinates.
