

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

С. Д. Ысқақова, Р. К. Шыңғысова

СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ
САНДЫҚ БЕЛГІШЕЛЕРІ БАР ПРОЕКЦИЯЛАР

Университеттің Оқу-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2017

ӘОЖ 514.18 (075.8)

ҚБЖ 22.151. 3я73

Ы 88

Пікір жазғандар:

Ж. М. Есмұхан, «Сызба геометрия және инженерлік графика» каф. профессоры, техн. ғыл. док., Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ;

Ы. Нәби, педагог. ғыл. док., Астана Қаржы адемиясының профессоры;

А. Б. Дарбадаев, геол.-минер. ғыл. канд., Қ. И. Сәтбаев атындағы Геология ғылымдары институты БҒК;

А. Ж. Ордабекова, «КИЖТ» каф. ассист.-проф., Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2017 жылғы басылым жоспары бойынша басылды

Ысқақова С. Д.

Ы 88 Сызба геометрия. Сандық белгішелері бар проекциялар: Оқу құралы/
С. Д. Ысқақова, Р. К. Шыңғысова. – Алматы: Қ. И. Сәтбаев атындағы
ҚазҰТЗУ, 2017. – 287 бет.
ISBN 978-601-323-082-5

Оқу құралы пәннің бағдарламасына, техникалық мамандықтар бойынша мамандар дайындау стандарттары мен талаптарына сәйкес. Ұсынылған материалдар оқушыларды қызықтыратын, жүйелі түрде берілген, зерттеу есептері де ұсынылған.

Есептердің шешуі проекциялау қасиеттеріне, нысандардың орналасуына, беттердің қасиеттеріне байланысты етіліп, алгоритмдерімен толықтырылған. Глоссарий мен алгоритмдер тізбесі оны анықтамалық ретінде қолдануға мүмкіндік береді.

Оқу құралы геология, тау-кен, құрылыс, жер өңдеу мамандықтарында оқитын студенттерге және сызба геометрия пәні оқытушыларына арналған.

ӘОЖ 514.18 (075.8)

ҚБЖ 22.151. 3я73

ISBN 978-601-323-082-5

© Ысқақова С. Д., Шыңғысова Р. К., 2017

© ҚазҰТЗУ, 2017

АЛҒЫ СӨЗ

Ұсынылып отырған оқу құралының мазмұны геология, тау-кен, құрылыс, су ресурстарын пайдаланушылар саласындағы ҚР Білім және ғылым министрлігі бекіткен жоғары оқу орындарында оқытылатын сызба геометрия пәнінің Типтік оқу бағдарламасына сәйкес келеді. Соңғы 20 жыл ішінде қазақ тілінде сызба геометрияға қатысты 20-ға жуық оқулықтар баспадан шықса да, оларда сандық белгішелері бар проекциялар өте аз орын алған. Бұл оқулық С. Д. Ысқақованың Ш. Т. Рахметовамен бірге 2003 жылы шығарған «Инженерлік графикадан есептер минимумы. Сандық белгілері бар проекциялар» деген оқу құралының өзгертілген, толықтырылған енбегі, онда автордың осы саладағы 40 жылдан асқан тәжірибесі ескерілген. Бұл оқу құралы жоғарыда айтылған мамандықтар үшін ауадай қажет. *Сандық белгішелері бар проекцияларды* (СБП) толық түрде қамтиды десе болады, себебі есептер шешуі проекциялау қасиеттеріне негізделіп, талдаумен толықтырылып берілген. Бұл оқу құралы қайсыбір есептерді шешу әдістемелігі емес.

Оқу құралы кіріспеден және 17 тараудан тұрады. *Kіріспеде* сызба геометрияның жоғары техникалық оқуда алатын орны, мақсаты мен міндеттері, негізгі проекциялау әдістері, қасиеттері баяндалған.

1–7-тараулар Монж эпюрінде сызбаларды тұрғызуға арналған.

1-тарауда проекциялау әдісінің түрлері, олардың қасиеттері, қайтымды сызбалар және оларға қойылатын талаптар ашып көрсетілген.

2-тарауда: эпюрді жеткілікті түсінуге арналған аксонометрияның негіздері, оның ішінде *нүкте, түзу, жазықтықтың координата* бойынша берілген сызбалары мен аксонометрияның негізгі теоремасы.

3-тарауда: Монж эпюрінде нүкте, түзудің, жазықтықтың жалпы және дербес жағдайдағы сызбалары.

4-тарауда: Монж эпюріңде негізгі позициялық есептерді шығару алгоритмдері.

Осы тараулар бойынша *1.1-қорытынды жұмыс* «Аксонметрия және Монж эпюрінің байланысы» ұсынылады. Оқу құралында қорытынды жұмыстар портфолио әдісімен тапсыруға болатыны ескерілген.

5-тарауда: көпжақтардың сызбалары және оларға қатысты позициялық есептер.

6-тарауда: кең тараған айналу және бұранда беттердің сызбалары.

7-тарауда: беттерге қатысты позициялық есептер.

Осы тараулар бойынша *1.2-қорытынды жұмыс* «Көпжақтың қимасы» ұсынылып, түсіндіріледі.

8–17-тараулардан сандық белгішелері бар проекцияларға (СБП) қатысты жеткілікті мағлұмат алуға болады.

8-тарауда: нүкте мен түзудің сандық белгішелері бар проекциялары, түзудің жатыс элементтері.

9-тарауда: жазықтықтың сандық белгішелері бар проекциялары және оның жатыс элементтері.

10-тарауда: нүкте мен түзудің, жазықтықтың өзара орналасуы және оларға қатысты позициялық есептер.

11-тарау сандық белгішелері бар проекцияларда метрикалық есептерге, перпендикулярды тұрғызуға арналған.

Осы тараулар бойынша *2-қорытынды жұмыс* «Позициялық және метрикалық есептер СБП-да» ұсынылады және түсіндіріледі.

12-тараудан қисық сызықтар мен беттердің СБП-мен, топографиялық беттермен танысу басталады.

13-тарауда топографиялық беттерге қатысты позициялық есептер шығарылады.

14-тараудан бастап такырыптар мамандықтарға сай бөлінеді. 14,16-тараулар оқу барысында алған білімді тәжірибе жүзінде қолдануға арналған.

14-тарауда (геология, тау-кен) *3-қорытынды жұмыс*, графикалық тапсырмалар түсіндіріліп, сызбалардың үлгілері берілген. 3-қорытынды жұмыстың ішінде: 3.1. «Топографиялық план» және 3.2. «Блок-диаграмма».

15-тарау сызбаны техникалық құжат түріне келтіру стандарттарына арналған, оның ішінде тау-кен стандарттарынан үзінділері берілген (тау-кен, құрылыс, су ресурстары).

16-тарауда 4-қорытынды жұмыс «Құрылыс алаңының жер жұмыстарының шекараларын құру» түсіндіріліп, сызбалардың үлгілері берілген.

17-тарау топографиялық беттерге қатысты ерекше сызықтарға арналады.

Оқу құралында оқырмандарға пәнді меңгеруге, өзіндік жұмыстарды орындауға барлық жағдай жасалды десе болады. Онда:

- қорытынды жұмыстарды 100 % орындамай, оқушыларға *портфолио* әдісімен қолданып, бағаны өз талабына, біліміне сай (50 %-дан 100 %-ға дейін) алу мүмкіншілігі берілген;

- оқу құралында кездесетін барлық белгіленулердің түсініктемелері, қолдану орны көрсетілген;

- есептердің шешулері олардың *алгоритмдерімен* толықтырылған;

- оқу құралында *гlossарий* берілген – ол алфавит ретімен пәнге қатысты термин сөздердің түсініктемелері (гlossарий бірінші рет 2003 жылғы біздің оқу құралымызда берілген);

- оқу құралында есептерді тақырыптарға сай етіп *шешу алгоритмдер тізбесі* оны қолдануды жеңілдету үшін берілген. Бұл гlossарий мен бірге оқулықты *анықтамалық* ретінде қолдануға мүмкіндік береді;

- оқу барысында орындалатын барлық графикалық жұмыстардың кестелі-нұсқалы тапсырмалары, оларды орындау үлгілері берілген;

- жаңа талаптарға сай зерттеу есептері енгізілген, олар «*» белгімен берілген;

- тапсырмаларға қатысты сұрақтар орындаушыдан логикалық ойлауды талап етеді.

Оқырманға ескертулер:

- ең алдымен осы оқу құралының гlossарий беттерін шолып өту, осы пәннің өздеріңіз қалаған мамандықпен қандай байланысы бар екенін анықтайды. Жалпы шолу пәнге деген

қызығушылықты арттыра отырып, пәнді толығымен меңгеруге түрткі болады;

– сіздерді оқу құралының мәтіндері мен суреттері жалықтырмас үшін, пәнге деген сіздердің қызығушылықтарыңызды арттыру мақсатында сіздермен бірге пәнді меңгеру барысында үнемі Х мырза болады. Х мырза оқулық беттерінде сұрақтарды қойып, ұсыныстарымен бөлісетін авторлардың көмекшісі, оқырманның жанкүйері;

– Х мырзаның бірінші ұсынысы: тақырыпты түсіну үшін оған байланысты дәрісті, оқулықтарды *кешіктірмей*, зер салып оқуды, түсінуді *әдетке* айналдырыңыз. Сабаққа қатысып, өткенді дер кезінде игермеу, түсінген материалды ұмытуға әкеліп соқтырады. Түсінбегенді оқытушыдан сұрауды *әдетке* айналдырыңыз;

– Х мырза: *«осыны бәрібір мен түсінбеймін!»* – деуден сақтаныңыз. Аңдаусыз санаңызға (подсознание) кірген осындай ой, оқуда әжептәуір кедергі болады. Осыдан оқуға салақтық туындайды;

– оқуда дәйектілікті сақтаған ұтады. Орта жолдан қосылып, қажетті деңгейге көтерілу қиынға түседі;

– есепті шығарғанда, графикалық жұмысты орындағанда сызбада не берілді, нені анықтау керек, шешуі қалай табылады – осының бәрін білу Сіздің негізгі мақсатыңыз. Сонда ғана сызбадағыны тексерушіге де, досыңызға да *ұғындыра* аласыз;

– Х мырзаның ескертулері: барлық графикалық жұмыстарды дер кезінде тапсыруды *әдетке* айналдырыңыз, семестрдің соңғы аптасына қалдырмай. Асығыс жасалған жұмыстардың сапасы да берген нәтижесі де төмен болады;

– біздің пәнді меңгеруде ең бастапқы мақсат – *сызбаны* түсініп, жылдам *оқи* білу, яғни нүкте мен түзуді, жазықтық пен бетті сызбада ажырата білу. Осыдан кейінгі мақсат *есептің сызбасын* жылдам оқу, яғни берілген геометриялық элементтердің өзара қатынастарын – олардың қиылысуын, параллельдігін, тиістілігін, т.б. анықтай білу. Бұл сызбаларды орындау барысында алгоритмнің әр қадамын түрлі-түсті қаламмен сызып отырса, сызбаны оқу мәселесі жеңілденеді;

– қолмен сызудың пайдасы: сызу барысындағы көзбен қолдың үндескен қимылы мидың атқарушы жұмысын нығайтады, оның мүмкіншіліктерін кеңейтеді. Ол адамның психо-физикалық күйін қалыпқа келтіруге ықпал етеді. Өз сызбаларыңызды орындаудан қашпаңыз.

Соңғы кеңес. Спортшылар бір секіргеннен шебер болып шықпайды. Олар жаттығып, тәжірибесін тірнектеп жинап, шеберлікке көтеріледі. Сіздер де оқуда жаттығып, білімді болуға тырысыңыздар. Іске сәт!

Қолданылған белгіленулер, негізгі ұғымдар мен аксиомалар

Оқу құралында берілген белгіленулер орта мектеп геометриясында, жалпы математикада қолданылады. Олардың айырмашылығы сызба геометрияның ерекшеліктеріне қатысты, проекциялаумен байланысты.

Кеңістікте берілген:

1. Нүктелер латын алфавитінің бас әріптерімен A,B,C,D,... немесе араб сандарымен 1,2,3,... белгіленеді.

2. Жалпы жағдайда орналасқан түзулер мен кисық сызықтар латын алфавитінің кіші әріптерімен a,b,c,d,... белгіленеді.

Дербес жағдайдағы сызықтардың белгіленуі:

h – горизонталь деңгей сызығы (горизонталь), h^2 – 2м деңгейдегі сызық,

f – фронталь деңгей сызығы (фронталь), f^5 – 5м деңгейдегі фронталь;

p – профиль деңгей сызығы;

x – абсциссалар осі;

y – ординаталар осі;

z – аппликатаалар осі;

k – Монж эпюрінің тұрақты сызығы;

s – параллель проекциялау бағыты.

Сызықтардың белгіленуі төменгідей болуы мүмкін:

AB – екі A және B нүктелерімен анықталатын түзу;

[AB] – A,B нүктелерімен шектелген түзу кесіндісі;

|AB| – [AB] кесіндісінің ұзындығы, нақты шамасы;

e_x, e_y, e_z немесе e, егерде $e_x = e_y = e_z$, – өлшем бірліктері .

3. Беттер, жазықтықтар грек алфавитінің кіші әріптерімен α – альфа, β – бета, γ – гамма,... белгіленеді.

Беттердің берілуі әріп белгісінің қасында дөңгелек жақшада көрсетіледі: $\alpha(ABC)$, $\beta(b,M)$, ..., – α жазықтығы үш A, B, C нүктемен, β жазықтығы b түзуі және M нүктесімен анықталады.

Проекциялау жазықтықтары π әріпімен белгіленеді:

$\pi_1(xOz)$ – фронталь проекциялар жазықтығы;

$\pi_2(xOy)$ – горизонталь проекциялар жазықтығы;

$\pi_3(yOz)$ – профиль проекциялар жазықтығы;

π' – аксонометриялық проекциялар жазықтығы.

π_0 – нөл деңгейлік горизонталь жазықтығы, план жазықтығы
 $\pi_0 \parallel \pi_2(\text{хоу})$;

4. Бұрыштар грек алфавитінің кіші әріптерімен $\alpha^\circ, \beta^\circ, \gamma^\circ, \dots$ белгіленеді.

Одан басқа белгілер де қолданылады:

$\angle ABC$ – төбесі В нүктесінен өтетін бұрыш;

α, γ – α түзуімен γ жазықтығының арасындағы бұрыш;

$\perp$ – сызбада тікбұрыштың белгісі.

Сызбаларда:

5. Проекцияларда нүктелердің, сызықтардың, жазықтықтардың немесе беттердің белгіленуі:

$A_1, B_1, \dots; a_1, b_1, \dots; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ – горизонталь проекциялар;

$A_2, B_2, \dots; a_2, b_2, \dots; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$ – фронталь проекциялар;

$A_3, B_3, \dots; a_3, b_3, \dots; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \dots$ – профиль проекциялар;

$A', B', \dots; a', b', \dots; \alpha', \beta', \gamma', \dots$ – аксонометриялық проекциялар;

$A^3, B^4, \dots; a^1, b^3, \dots$ сандық белгішелері бар проекциялар;

6. Шексіз алыста (өзіндік емес, ақырсыз қашық) орналасқан нүктелер мен сызықтарды, жазықтықтарды « ∞ » белгісін қойып, көрсетеді: A^∞, b^∞ .

7. Негізгі қатынастардың символдары:

$\in, \ni$ – тиістілік: $A \in \sigma$ – А нүктесі σ жазықтығына тиісті;

$\subset$ – тиістілік (бір жиынның екінші жиынға енуі): $b \subset \gamma$ – b түзуі γ бетіне тиісті;

$\perp$ – перпендикулярлық: $c \perp \sigma$ – c түзу σ жазықтығына перпендикуляр;

$\parallel$ – параллельдік: $m \parallel n$ – m түзуі n түзуіне параллель;

$\cap$ – қиылысу белгісі: $b \cap \gamma = V$ – b түзуі және γ беті В нүктесінде қиылысады;

$\cup$ – қосылу, бірігу: $\beta(b \cup A)$ – b түзуі және А нүктесі β жазықтығын құрайды;

$\sim$ – ұқсастық: $ABC \sim A'B'C'$ – ұқсас үшбұрыштар;

$\div$ – айқасу: $b \div c$ – b және c түзуі қиылыспайды, айқасады;

$\nparallel$ – қиылыспайды, $\notin$ – тиісті емес, $\nperp$ – перпендикуляр емес,

$\nparallel$ – параллель емес;

– сызбада беттесу $A_1 = B_1$, не болмаса қатынастың нәтижесі $B \cap \gamma = B$;

→ – бейнелеу, түрлендіру: $\alpha \rightarrow \alpha_1$ – кеңістіктің α сызығына сызбада α_1 сызығы сәйкес, бірақ осы сызыққа кеңістікте сәйкес сызық анықталусыз;

↔ – өзара бірімді сәйкестік: $A \leftrightarrow (A_1, A_2)$ – кеңістіктің A нүктесіне сызбада A_1, A_2 нүктелері сәйкес және осы нүктелерге кеңістікте A нүктесі сәйкес.

Сызба геометрияда орта мектеп геометриясының объектілері, ондағы негізгі ұғымдар мен аксиомалар, заңдылықтар түгел сақталады. Оларды қысқаша түрде атап өтейік.

Негізгі ұғымдар: нүкте, түзу, жазықтық, беттер, көпжақтар. Кеңістік – осы элементтердің жиыны. Қозғалыс.

Негізгі аксиомалар:

- түзу екі нүктемен толық анықталады;
- жазықтық бір түзуге тиісті емес 3 нүктемен анықталады;
- екі жазықтықтың ортақ бір нүктесі бар болса, олардың қиылысу сызығы түзу болады;
- екі нүкте жазықтыққа тиісті болса, онда сол екі нүктемен анықталатын түзу де жазықтыққа тиісті;
- кез келген A мен B екі нүкте үшін A -дан B -ға дейінгі арақашықтық деп аталатын теріс емес шама $|AB|$ болады. $|AB|$ арақашықтығы тек A мен B нүктелері дәл беттескенде нөлге тең болады;
- түзуге тиісті емес нүктеден сол түзуге параллель бір түзу жүргізуге болады (екі параллель түзу бір жазықтыққа тиісті болады және олардың ортақ нүктесі болмайды немесе олар беттеседі);
- түзу мен жазықтық бір нүктеде қиылысады;
- түзу мен жазықтық өзара параллель орналасуы үшін, түзу сол жазықтықтың бір түзуіне параллель орналасуы керек;
- екі жазықтық өзара параллель орналасуы үшін бір жазықтықтың екі қиылысқан түзуі, екінші жазықтықтың екі қиылысқан түзуіне параллель болуы керек;
- екі параллель жазықтық үшінші жазықтықпен екі параллель түзу арқылы қиылысады;

– үш параллель емес жазықтықтың бір ортақ нүктесі болады;

– жазықтықтың кез келген нүктесінен, берілген түзуге бір перпендикуляр жүргізуге болады (егер екі түзу қиылысқанда тікбұрыш пайда болса, онда мұндай екі түзу өзара перпендикуляр болады);

– түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр орналасуы үшін, түзу жазықтықтың екі қиылысқан түзуіне перпендикуляр болуы керек;

– екі жазықтық өзара перпендикуляр орналасуы үшін, бірінші жазықтық екінші жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтуі керек.

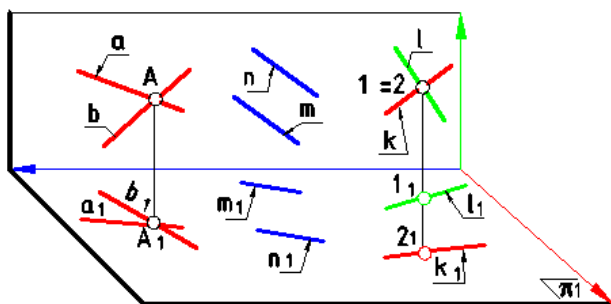
Осы аксиомаларды қолданып сызбада көптеген есептерді алда шығаратын боламыз. Осыған жетейік!

Осы оқу құралының сапа деңгейін көтеріп, оң әсер жасаған әріптесіміз Әзиза Шәйімбекқызы Маубековаға, техникалық көмегін аямаған әріптесіміз Рашид Қабдуллаұлы Карпековке авторлардың алғысы шексіз.

КІРІСПЕ

Сызба геометрия оқу пәнінде геометриялық объектілердің, оның ішінде абстракты да ақиқатты, жер үсті мен жерасты нысандардың *жазық проекцияларын* салу әдістері зерттеледі. Өткен ғасырда сызуды техника тілі, ал сызба геометрияны сол тілдің грамматикасы деп айтатын. Бұл көзқарас қазіргі кезде графикалық пәндердің ауқымын тарылтады. Қазір сызба геометрия мен инженерлік графика техникалық ақпаратты жасау, сақтау және тасымалдау әдістерінің ең қарапайым, сенімді және лайықты түрі болып есептеледі. Шынында да инженер техникалық ойын, идеясын алдымен қағазға не компьютердің көмегімен сызба ретінде жариялап, оның дұрыс-бұрысын тексеріп, ой елегінен өткізіп, әріптестерімен кеңесіп, содан кейін ғана сызбадағыны жүзеге асыруға кіріседі. Осындай тәртіппен барлық жобалау-зерттеу мекемелері жұмыс істейді.

Сызба геометрия және инженерлік графиканы оқытудың мақсаты – арнайы пәндерді меңгерудің теориялық-техникалық негізін құру. Пәндерді меңгеру нәтижесінде бұл мақсат оқушының жалпы техникалық және графикалық мәдениетін, кеңістікте логикалық ойлау қабілетін дамытады. Сызба геометрия пәнін меңгерген оқырман геология, құрылыс саласында проекциялау әдісін, сандық белгішелері бар проекцияларды салуды білуі керек, сызбаларды, топографиялық пландарды орындаумен оқуда машығы болуы керек. Инженерлік графиканы меңгерген оқырман *стандарттарды* қолданып, сызбаларды техникалық құжат ретінде салуда, сандық белгішелері бар проекцияларда меңгеруде білікті болуы керек.



1-сурет

Осыдан шығатын қорытынды – инженерлер үшін геометрияның аса маңызды бір саласы ол сызба геометрия. Сызбаны *графикалық модель* десе де болады. Модель – ол бір объектіні алмастыратын және бірінші объект туралы көптеген нақты мәліметтерді беретін екінші объект. Біздің жағдайымызда сызбада кеңістіктегі *геометриялық* объектілер туралы қажетті мәліметтер беріледі. 1-суретке қарап, кеңістікте үш қос түзу берілгенін байқаймыз: a, b мен m, n және l, k . Олардың қиылысуын, параллельдігін, айқасуын түзулерді проекцияларымен бірге қарастырып, дәлелдеуге болады. Шынында да: $a_1 \cap b_1 = A_1$, $m_1 \parallel n_1$, $l_1 \perp k_1$. l және k түзулері кеңістікте айқасады, неге десеніз k түзуі бізге, көрерменге, l түзуімен салыстарғанда, жақын орналасқан. Оны 1_1 және 2_1 нүктелері дәлелдеп тұр. Қорыта айтқанда, оқуда осындай модельдерді игеру, жасау, қолдана білу – жалпы түрдегі мақсат, ал нақты мақсат – сызбаны оқу, құру, сызбада есептерді шығара білу. Техникалық сызбалар өндірістің салаларына қарай ажыратылады, мысалы: машина жасау сызбасы, құрылыс пен сәулет сызбасы, геология мен тау-кен сызбасы, т.с.с. Бұлардың ерекшеліктері бар, бірақ негіздері бір – олардың бәрі де *проекциялау әдісімен* салынады, яғни олардың теориясы ортақ, ол сызба геометрия. Біз келесі беттерден бастап сызба геометрия әлемімен сіздерді таныстырамыз. Сіздер дайынсыздар ма? Онда болашақ мамандығымызға сауатымызды ашуды бастаймыз!

1. ПРОЕКЦИЯЛАУ ӘДІСТЕРІ, ОЛАРДЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ.СЫЗБАЛАРҒА ҚОЙЫЛАТЫН ТАЛАПТАР. ҚАЙТЫМДЫ КЕСКІНДЕР – СЫЗБАЛАР

1.1. Центрілік проекциялар

Сызба геометрия оқу пәнінде сызбалар жазықтыққа проекциялау әдісімен салынады. Проекциялау әдісі өте қарапайым, 2-сурет оны көрсетіп, дәлелдеп тұр.

Сызбалар жазықтығы π' болсын. S нүктесін *проекциялау центрі* етіп алайық және ол π' жазықтығына тиісті емес болсын. Енді кеңістіктегі A нүктесінің π' жазықтығына суретін (проекциясын) салайық, ол A' нүктесі болды: SA түзуінің π' жазықтығымен қиылысу нүктесі. Осы әдіспен B нүктесінің де B' проекциясын салуға болады: $SB \cap \pi' = B'$, басқа нүктелердің проекцияларын дәл осылай салуға болады. Енді әдіске қорытынды жасайық:

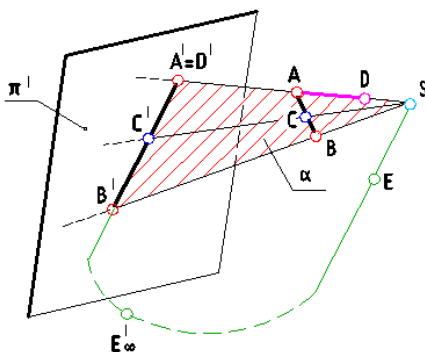
π' – проекциялар (кескіндер) жазықтығы;

S – проекциялау центрі, бұл екеуі *проекциялау аппаратын* құрады;

$A, B, C, \dots$ – кеңістіктегі объектілер (нысандар);

$A', B', C', \dots$ – берілген нысандардың проекциялары (суреттері, кескіндері),

$SA, SB, SC, \dots$ – проекциялаушы түзулер (сәулелер).



2-сурет

Ортақ нәтиже: $SA \cap \pi' = A', SB \cap \pi' = B', SC \cap \pi' = C'$.

Енді SA түзуіне тиісті D нүктесінің проекциясы қайда болады, ойланайық? Әрине, ол A' нүктесімен беттеседі: $SD \cap \pi' = D' = A'$ (бұның дәлелін аксиомалардан қараңыз).

Енді AB түзуінің проекциясы не болады? Әрине, ол $A'B'$ түзуі болады. Енді AB түзуіне тиісті C нүктесінің проекциясы қайда орналасады? Әрине, ол $A'B'$ түзуіне тиісті болады: $C \in AB \rightarrow C' \in A'B'$ (бұлардың да дәлелін аксиомалардан табасыз). Барлық проекциялаушы $SA, SB, SC, \dots$ түзулері бір S нүктесінен тарайды және олардың проекциялары жәй нүкте болады: A', B', C' ! Енді осы S нүктесінің проекциясы π' -те бар ма? Ол жоқ, неге десейіз S нүктесі проекциялаудан шығарылған нүкте. Енді осы *центрлік проекциялу* әдісін тәжірибеде қолдану үшін, олардың *қасиеттерін* жоғарыдағы нәтижелерден шығарайық:

1-қасиет. Нүктенің проекциясы нүкте болады: $A \rightarrow A'$;

2-қасиет. Түзудің проекциясы жалпы түрде *түзу* болады: $AB \rightarrow A'B'$, ал проекциялаушы түзулердің проекциясы *нүкте* болады: $SA \rightarrow D' = A'$;

3-қасиет. Нүкте түзуге (сызыққа) *тиісті* болса, оның проекциясы сол түзудің (сызықтың) проекциясына *тиісті* болады: $C \in AB \rightarrow C' \in A'B'$.

Осы қасиеттерді дәлелдеу үшін проекциялаушы S нүктесінен өтетін α ($S \in \alpha$) жазықтығын және кіріспеді берілген аксиомаларды қолдану керек. Осы 3 қасиет *центрлік проекциялау әдісінің* негізгі қасиеттері болып саналады, оларды алдағы уақытта қолданатын боламыз. Осы проекциялаудың 4-қасиеті бар, сәулетшілер перспективтік проекцияларды салғанда қолданатын, оны 4 нүктенің *күрделі қатынасы* проекциялауда *сақталады* деп атайды, біз оны оқу барысында қолданбаймыз.

Енді 2-суреттегі SE түзуіне назар аударайық, ол $A'B'$ түзуіне параллель болсын, демек $SE \parallel A'B' \rightarrow SE \parallel \pi'$. Осындай жағдайда E нүктесінің проекциясы қайда болмақ? Біз орта мектеп геометриясымен (Евклид геометриясы) шектелетін болсақ, оның проекциясы жоқ деп айтар едік. Бұл геометрияны *шексіз алыстағы (өзіндік емес не ақырсыз қашық)* нүктелермен толықтырып, *кеңейтілген* Евклид кеңістігіне кіре отырып,

Е нүктесінің проекциясын табуға мүмкіншілік аламыз. Кеңістікті кеңейту тәртібі:

– түзудің *өзіндік емес*, ақырсыз қашық бір нүктесі бар, ол түзуге параллель барлық түзулер сол нүктеде қиылысады. Сызбада Е нүктесінің проекциясы шексіз алыста, ол $A'B'$ -пен SE түзуінің қиылысу нүктесі E'^∞ болады және бұл нүкте π' -қа да тиісті, яғни π' -тың E'^∞ нүктесі $A'B'$ -қа параллель барлық түзулерге ортақ;

– жазықтықтың *өзіндік емес*, *ақырсыз қашық* бір түзуі бар, ол сол жазықтыққа параллель барлық жазықтықтардың ортақ түзуі. Мысалы S нүктесінен өтетін δ жазықтықтығын алайық: $S \in \delta \parallel \pi'$, бұл жазықтықтар ақырсыз қашық түзу арқылы қиылысады: $\delta \cap \pi' = d'^\infty$;

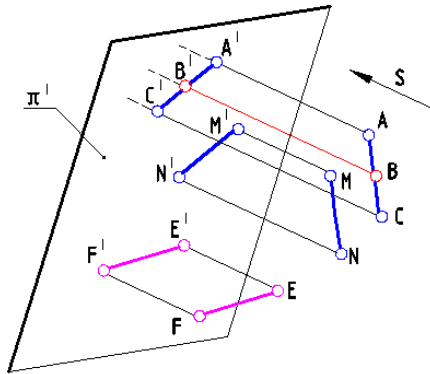
– кеңістіктің барлық *өзіндік емес* нүктелері мен сызықтары ақырсыз қашық бір жазықтықты құрайды, мысалы π'' ;

Осыдан шығатын нәтиже: S нүктесінен өтетін және π' -ке параллель орналасқан δ жазықтығының кез келген нүктесінің не сызықтың проекциясы шексіз алыста. Оны сызбада қалай табамыз? E'^∞ нүктесін үлгі ретінде қарастырайық: сызбада ол нүктенің «*нақты өкілі*» $A'B'$ түзуі болды, демек ақырсыз қашық нүкте нақты түзу арқылы беріледі: $A'B' \in E'^\infty$. Сол сияқты *өзіндік емес* d'^∞ түзуінің сызбадағы «*нақты өкілі*» δ не π' жазықтықтығы болады: $d'^\infty \subset \delta$. Ақырсыз қашық π'' жазықтығының «*нақты өкілі*» біздің 3-өлшемді кеңейтілген Евклид кеңістігі.

1.2. Параллель проекциялау әдісі

Егер проекциялау центрі S нүктесі шексіз алыста орналасқан болса S^∞ , онда проекциялаушы түзулер сол нүктеден *өзара параллель* болып тарайды, сызбада ол нүкте «*нақты өкілі*» – мен, проекциялау s бағытымен беріледі. Проекциялау s бағытымен берілген проекцияларды **параллель проекциялар** деп атайды. Оны 3-суреттен көріп, түсінуге болады. Бұл суретте проекциялау аппараты: π' – проекциялар жазықтығы және s – проекциялау бағыты. Нүктелердің проекциялары бұрынғыдай салынады: $AA' \parallel s$, $BB' \parallel s, \dots$, $AA' \cap \pi' = A'$, $BB' \cap \pi' = B', \dots$ Бұл проекциялар центрлік проекциялардың *жеке* түрі, сондықтан жоғарыда көрсетілген

3 қасиет параллель проекциялауда сақталады және оның өзіне тән қасиеттері бар. Солармен танысамыз.



3-сурет

4-қасиет: $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}$ бір түзуге тиісті кесінділердің немесе параллель түзулердегі кесінділердің қатынасы параллель проекциялауда сақталады,

3-суретте AC, BC және A'C', B'C' кесінділері бір түзуге тиісті.

5-қасиет: параллель проекциялауда параллельдік сақталады.

$$AC \parallel MN \rightarrow A'C' \parallel M'N'.$$

6-қасиет: проекциялар жазықтығына параллель орналасқан кесінді немесе жазық фигура (жазық сызық) нақты шамасымен проекцияланады. 3-суретте $EF \parallel \pi'$. Бұл кесінді оның проекциясы E'F'-пен параллелограмм құрады, олай болса $|EF| = |E'F'|$. Осы қасиеттерді қолданып параллель проекциялауға қатысты барлық есептерді шешуге болады. Осыған жетейік!

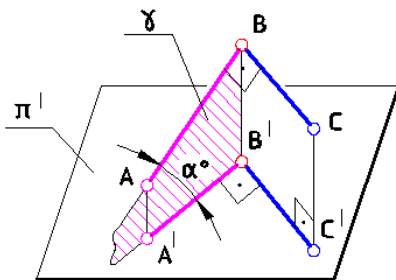
1.3. Тікбұрышты проекциялар

Егер проекциялау бағыты s проекциялар жазықтығы π' -қа перпендикуляр орналасқан болса, онда кеңістікте **тікбұрыштап проекциялау** әдісі пайда болады: $s \perp \pi'$.

Бұл жағдай 4-суретте көрсетілген: $AA' \parallel BB' \parallel CC' \perp \pi'$.

Бұл әдіс параллель проекциялау әдісінің бір түрі, сондықтан жоғарыда қарастырылған *6 қасиет* екеуіне де *ортақ*, сонымен қатар тікбұрыштап проекциялаудың өзіне тән екі қасиеті бар, солармен танысамыз.

7-қасиет: кесіндінің проекциясы кесіндінің өзінен үлкен болуы мүмкін емес, яғни $|AB| \geq |A'B'|$. Шынында да, AB кесіндісінің проекциясының ұзындығы $|A'B'| = |AB| \cos \alpha$ өрнегімен анықталады. Мұнда $\cos \alpha \leq 1$, сызбада $0 < \alpha < 90^\circ$, олай болса $\cos \alpha < 1$, яғни $|A'B'| < |AB|$. Егер $\cos \alpha = 1$, онда $\alpha = 0$, сызбада ол BC түзуіне қатысты болады: $BC \parallel \pi' \rightarrow |B'C'| = |BC|$.



4-сурет

4-суретте 7-қасиеттің дәлелі айқын көрсетілген. Енді осы суреттен ортогональ проекциялау әдісінің 8-қасиетімен танысамыз, ол теорема ретінде келтіріледі. **Теорема:** *егер тік бұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель орналасқан болса, ал екінші қабырғасы оған перпендикуляр емес болса, онда тік бұрыштың ортогональ проекциясы да тік бұрыш болады.* Осы теореманың дәлелін анықтап көрелік. Сызбада берілгені: $\angle ABC$ —тік бұрыш, $\angle B = 90^\circ$, $BC \parallel \pi'$, AB

кабырғасы π' -ке перпендикуляр емес, ал $AA' \parallel BB' \parallel CC' \perp \pi'$. Дәлелдеу керек: $\angle A'B'C' = 90^\circ$? Дәлелдеу үшін $\gamma(ABV')$ жазықтығымен BC түзуінің өзара орналасуын анықтайық: BC түзуі γ жазықтығының екі қиылысқан түзуіне перпендикуляр: $BC \perp AB$, $BC \perp BV'$, сондықтан BC түзуі γ -ға да перпендикуляр: $BC \perp (AB \cap BV') \rightarrow BC \perp \gamma$. Олай болса BC түзуі γ -ның кез келген түзуіне де перпендикуляр болады, яғни $BC \perp A'B'$. Егер $BC \parallel B'C'$ болса, онда $B'C' \perp A'B'$, яғни $\angle A'B'C' = 90^\circ$. Теорема дәлелденді.

1.4. Сызбаларға қойылатын талаптар

Өндірісте қолданылатын сызбаларға 4 талап қойылады: сызбаның құру әдісі жеңіл болуы, сызба көрнекі болуы, сызбаның дәлдігі жоғары болуы керек және сызба қайтымды болуы керек. Жоғарыда келтірілген алғашқы 3 талап біздің проекцияларымызға сай келеді, яғни проекция оңай тұрғызылды, сызба көрнекі болып келді – нүкте мен түзудің проекциялары нүкте мен түзу болды, сызба дәлдігі де жеткілікті түрде болды. Қайтымды сызба бойынша бұйымның өзін кеңістікте қайта құруға болады, яғни ол бұйымның орнын және формасын анықтауға мүмкіндік береді. Біз кескін салу әдісімен және олардың қасиеттерімен жете таныстық.

Енді бір мәселеге назар аударайық – сызбада берілген нүктенің проекциясы бойынша оның орның кеңістікте бірімнді анықтауға бола ма? Оның жауабы проекциялаудың 2-қасиетінде жатыр: *проекциялаушы түзудің проекциясы нүкте, проекциялаушы жазықтықтың проекциясы түзу!* Яғни жоғарыда қарастырылған әдістің бір проекциялы сызбасын тәжірибеде қолданудың қажеті жоқ десе болады. Бірақ проекциялау әдісімен сызбаны салу оңай болғандықтан олардың негізінде қайтымды сызбалардың бірнеше түрі тәжірибеде дүниеге келді: *аксонометрия* – көрнекі кескін, *Монж этюрі* – машинажасау, құрылыс сызбасында, *сандық белгішелері бар проекциялар* – геология, тау-кен сызбасында, *сызықтық перспектива* – сәулет және құрылыс сызбасында қолданылады. Жалпы түрде нүктенің сызбасы қайтымды болуы үшін оның үш

координатасы сызбадан анықталуы керек. Күрделі нысандардың әр нүктесінің үш координатасы сызбадан табылуы керек, сонда ғана сызба кеңістікте берілген нысандарды (объектілерді) *бірмәнді* анықтайтын болады. Біздің мақсатымыз – қайтымды сызбаларды игеру. Осыған да жетеміз!

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Сызба геометрияның негізгі мәселесі қандай?
2. Проекциялау әдісі дегеніміз не? Нүктенің, түзудің проекциясы қалай салынады?
3. Центрлік проекцияның негізгі қасиеттерін дәлелдеңіз.
4. Параллель проекцияның негізгі қасиеттеріне анықтама беріңіз.
5. Ортогональ проекциялаудың қасиеттерін атаңыз.
6. Қай жағдайда түзудің, жазық фигураның проекциясы көрнекілігін жоғалтады?
7. Тік бұрышты төртбұрыш қай жағдайда: а) нақты шамамен, ә) кесіндімен, б) параллелограммен кескінделеді?
8. Шеңбер қай жағдайда: а) эллипске, ә) шеңберге, б) түзу кесіндіге проекцияланады?
9. Сызбаға қандай талаптар қойылады?
10. Шексіз алыстағы, өзіндік емес (ақырсыз қашықтықтағы) нүктенің, түзудің орналасуы сызбада қалай анықталады?
11. Нүктенің, түзудің «нақты өкілі» дегеніміз не?
12. Аксиомаларды қолданып, 1–6-қасиеттерді дәлелдеп көріңіз, реферат жасаңыз.

2. АКСОНОМЕТРИЯ, ОНЫҢ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМАСЫ. НҮКТЕ, ТҮЗУ, ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ АКСОНОМЕТРИЯСЫ. КООРДИНАТТАЛҒАН СЫЗБА

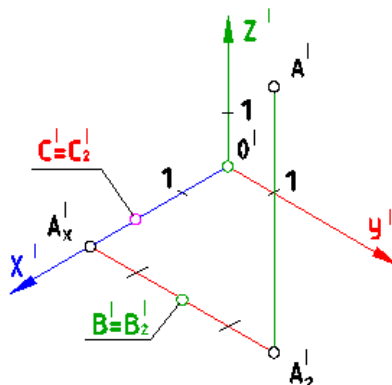
2.1. Аксонометрия, оның қасиеттері, негізгі теоремасы

Аксонометрия – көрнекі кескін, жобалау жұмыстарында көмекші болып саналады. Оқу барысында ол сызбаны түсіну үшін көп қолданылады. Аксонометрия – грек тілінен аударғанда «осьтер бойынша өлшеуді» білдіреді. Тәжірибеде ең көп тараған *параллель* аксонометрия, сонымен танысайық.

Аксонометрияда нысанды оған бекітілген тікбұрышты декарт координаттар жүйесімен бірге жазықтыққа *параллель* проекциялайды, демек мұнда параллель проекциялау әдісінің *барлық 6 қасиеттері* сақталады. 5-суретте кеңістікте берілген $A(3,4,5)$ нүктесінің аксонометриясын құру мысалы берілген.

Мұнда кеңістіктегі тікбұрышты координаттар жүйесіне бекітілген A нүктесі және оны 5-суреттегі аксонометриялық проекциялар жазықтығы π' -қа проекциялау бағыты көрсетілмеген, оны елестетуге болады.

$$C = C_2 \rightarrow C \in \pi_1, C \in OX \rightarrow ZC = 0, C(2,0,0)$$



5-сурет

Кеңістікте осьтердің орналасуы белгілі: $0x \perp 0y \perp 0z$. Суретте $0'x'y'z'$ – декарт координаттар жүйесінің аксонометриясы. $0'x'$, $0'y'$, $0'z'$ осьтерінің орналасуы аксонометрияда әртүрлі болады (ол туралы төменде айтамыз), $e'_x \neq e'_y \neq e'_z$ – аксонометриялық өлшем бірліктері, жалпы түрде олар натурал өлшем бірлігі e – ге тең болмайды:

$$e'_x \neq e'_y \neq e'_z \neq e. \quad (1)$$

А нүктесінің аксонометриялық A' проекциясы аксонометриялық координаталық сынық сызығы $O'A'_xA'_2A'$ арқылы табылған және сынықтардың шамасы нүктенің координаттарына сәйкес екені де анық: $|O'A'_x| = 3$, $|A'_xA'_2| = 4$, $|A'_2A'| = 5$ және $A'_xA'_2 \parallel O'y'$, $A'_2A' \parallel O'z'$. Мұнда A'_2 нүктесі А нүктесінің екінші (горизонталь) проекциясы, ал A' – берілген А нүктесінің аксонометриялық проекциясы. Бұл аксонометрия қайтымды $A \leftrightarrow (A'_2, A')$, демек сызбадан нүктенің координаттарын анықтауға болады, ол қалай? $|A'_2A'|$ кесіндісі А нүктесінің z координатасына (аппликатаға) тең, $|A'_xA'_2|$ кесіндісі А нүктесінің y координатасына (ординатасына) тең, ал $|O'A'_x|$ кесіндісі оның x координатасына (абсциссаға) тең. Байқасаңыздар, сызбада нүктенің ең кемінде екі проекциясы белгілі болу керек: аксонометриясы және екінші проекциясы. Осы сызбада В нүктесі де берілген, оның координаттары $(3, 2, 0)$, демек оның аппликаты 0-ге тең. Олай болса В нүктесі кеңістікте (xOy) горизонталь жазықтығына тиісті: $z_B = 0 \rightarrow B'_2 = B'$, сондықтан бұл нүктенің аксонометриясы және горизонталь проекциясы беттеседі. Сол сияқты С нүктесінің екі координатасы $y_C = 0$, $z_C = 0$ нөлге тең екен, онда сызбада нүктенің проекциясы $0x$ осіне тиісті болу керек: $C(2, 0, 0) \rightarrow C' = C'_2 \in 0'x'$, мұнда да С нүктесінің аксонометриясы және горизонталь проекциясы беттесті. Енді 5-суреттегі осьтерінің орналасуына тоқталайық. Жоғарыда айтылғандай, бұл осьтер және өлшем бірліктер сызбада қалауымызша алынған. Ол дұрыс па? Бұл сұраққа аксонометрияның негізгі теоремасы (немесе Польке теоремасы) жауап береді: **қиғаш бұрышты аксонометрияда осьтердің орналасуын және өлшем бірліктерін e'_x , e'_y , e'_z қалауымызша алуға болады.** Яғни сызбада қиғаш бұрышты аксонометриялық

координаталар жүйесін тұрғызу үшін жазықтықта бір нүктеге тиісті 3 түзуді қалауымызша алып, олардың бойына 3 өлшем бірлігін қалауымызша салу жеткілікті. Проекциялау *бағытына* қарағанда аксонометрияның екі түрі бар: қиғаш және тік бұрышты. Қиғаш бұрышты аксонометрияда проекциялау бағыты 90° -қа тең емес, тік бұрыштыда ол 90° -қа тең болады. Жоғарыда айтылған (1) теңсіздікті ескере отырып, аксонометриялық және натурал өлшемдер жалпы жағдайда бір-біріне тең болмайтынын көреміз, мысалы $|OA_x| \neq |O'A'_x|$, бірақ натурал және аксонометриялық координаталар өзара тең! Ол неден? Ол проекциялау әдісінің 4-қасиетінен шығады! Шынында да:

$$\frac{|OA_x|}{e} = \frac{|O'A'_x|}{e'_x} = x; \quad \frac{|A_xA_2|}{e} = \frac{|A'_xA'_2|}{e'_y} = y; \quad \frac{|A_2A|}{e} = \frac{|A'_2A'|}{e'_z} = z.$$

Бұл теңдіктердің сол жағында кеңістікте пайда болған қатынастар, ал оң жағында оларға сәйкес (5-сурет) аксонометриядағы қатынастар. Осы қатынастардан қандай нәтиже шығаруға болады? Аксонометрияны салғанда бұрмалану көрсеткіштері пайда болады: $u=e'_x/e$ – бұл Ox осі бойынша бұрмалану көрсеткіші, $v=e'_y/e$ – бұл Oy осі бойынша бұрмалану көрсеткіші, $w=e'_z/e$ – Oz осі бойынша бұрмалану көрсеткіші. Осы көрсеткіштердің арасындағы байланыс мынадай [1,2,3,4]:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi. \quad (2)$$

Бұл теңдікте φ° – қиғаш бұрышты аксонометриялық проекциялау бағытымен проекциялар жазықтығының арасындағы бұрыш. Тік бұрышты аксонометрияда $\varphi^\circ=0$, сондықтан (2) теңдіктің түрі төмендегідей:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2. \quad (3)$$

Бұрмалану көрсеткіштерінің ара қатынасына қарай аксонометрияны 3 түрге бөлуге болады:

изометрия $u=v=w$ – барлық көрсеткіштері бірдей;

диметрия $u=w \neq v$ – екі көрсеткіші өзара тең, ол үшіншісіне тең емес;

триметрия $u \neq v \neq w$ – көрсеткіштер өзара тең емес.

Оқу барысында біз не қиғаш бұрышты, не стандарт аксонометрияны қолданамыз, оның ішінде *тік бұрышты изометрия* мен *диметрияны*. МСТ 2.317–2011 бойынша тік бұрышты изометрияның осьтері өзара тең орналасады және бұрмалану көрсеткіштері де өзара тең 0,82 болады, бұл (3) теңдіктен шығады. Бірақ бұл көрсеткішті тәжірибеде қолдану ыңғайсыз, оның *келтірілген* түрі қолданылады: $U=V=W=1$, яғни сызбада бұйым 1,22 есе үлкейтіліп көрсетіледі (6, а-сурет), кескін масштабы $M_{1,22:1}$. Осы суретте квадраттың изометриясы берілген. Енді алғы сөзде айтылған Х-мырзаға кезек береміз.

Х мырзаның 1-сұрағы. Оны қандай мәліметтермен дәлелдеуге болады? Жауап. 1 – ол төртбұрыш, оның қабырғалары 2-ге тең, қарама-қарсы жақтары параллель; 2 – ол квадрат, оның қабырғалары өзара перпендикуляр, себебі олар Ox және Oy осьтеріне параллель! 3 – оның диагональдары да өзара перпендикуляр. Демек изометрияда квадрат *ромб* түрінде кескінделеді! 6, ә-суретте осы квадраттың диметриясы берілген, ол *параллелограмм* болып кескінделді!

Х мырзаның ұсынысы: оның дәлелін өздеріңіз келтіріңіздер.

Х мырзаның пайымдауы: осы суреттерде квадраттың аксонометриясы бар. Бұл сызба қайтымды болса, оның екінші проекциясы қайда? Назар аударайық! 1. Квадрат жазықтығы горизонталь жазықтығына тиісті, сондықтан олар сызбада беттесіп тұр! Яғни бұл квадраттың барлық нүктелері үшін $z=0$! 2. Аксонометрияда объектінің проекциялар жазықтығына тиістілігі жиі кездесіп тұрады, сондықтан оның екі проекциясының беттесуі «айтпаса да түсінікті» деген қағидаға сай, айтылмайды.

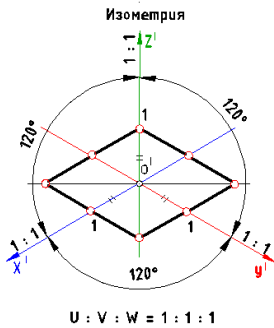
Жоғарыда айтылған стандарт бойынша тік бұрышты диметрияда Ox және Oz осьтерінің бұрмалану көрсеткіштері өзара тең, Oy осі бойынша екі есе кіші: $u=w$, $v=u/2$. Осы мәндерді (2) теңдікке қойып, оны шығарғанда $u=w=0,94$, $v=u/2=0,47$ болады. *Келтірілген* тік бұрышты диметрияда көрсеткіштер $U=W=1$, $V=0,5$ болады, яғни сызбада заттың өлшемдері 1,06 есе үлкейеді, кескін масштабы $M_{1,06:1}$ болады (6, ә-сурет).

Аксонетрияның екінші проекциясын фронталь не профиль проекциялар жазықтықтарына салуға болады, оны 6, б-суретінен түсініп көрейік. Горизонталь проекциялар π_2 жазықтығы xOy осьтерімен, фронталь проекциялар π_1 жазықтығы xOz осьтерімен, ал профиль проекциялар π_3 жазықтығы yOz осьтерімен анықталады. 5-суреттегі сызбаны проекциялар жазықтықтарымен толықтырып, 6, б-суреттен осыны көреміз:

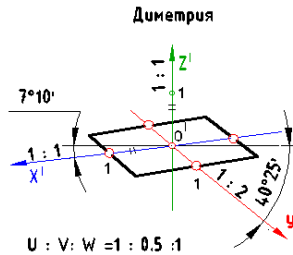
$\pi_1(xOz)$ – фронталь проекциялар жазықтығы,

$\pi_2(xOy)$ – горизонталь проекциялар жазықтығы,

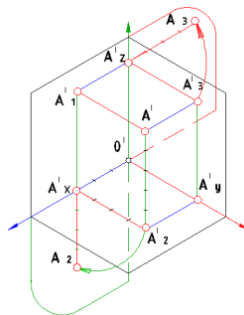
$\pi_3(yOz)$ – профиль проекциялар жазықтығы.



а)



ә)



б)

6-сурет

Кеңістікте олар өзара перпендикуляр $\pi_1 \perp \pi_2 \perp \pi_3$ болып орналасатының ұмытпайық.

Бұл үш жазықтық үй бөлмесінің үш қабырғасының моделі болуға жарайды, және π_2 -ні үнемі еден жазықтығы деп білген дұрыс. Осы сызбада А нүктесінің проекцияларын π_1 және π_3 -ке салу үшін, оларға А нүктесінен перпендикуляр, яғни проекциялаушы (демек Оу не Ох остеріне параллель!) сәулелерді жүргізу керек, олар $A'A_1'$ және $A'A_3'$ түзулері болады. Бұл түзулер π_1 -мен A_1' нүктесінде, π_3 -пен A_3' нүктесінде қиылысады, яғни A_1' – А нүктесінің *фронталь* проекциясы, ал A_3' – А нүктесінің *профиль* проекциясы. Осы нүктелер проекциялаушы параллелограмдар $A'A_2'A_x'A_1'$ -тың, $A'A_2'A_y'A_3'$ -тың 4-төбесі болады. Бұл параллелограмдар кеңістікте тік төртбұрыш, себебі олардың қабырғалары үнемі өзара перпендикуляр осьтерге параллель.

Енді 1–5-суреттерінде берілген нүктелер мен түзулерге келетін болсақ, олар *кеңістіктегі* нүктелер мен түзулердің жиынынан қалауымызша алынған, себебі олар шексіз көптің біреулері ғана. Біздің мақсатымыз сызбаны оқи және сала білу. Сызбада нүкте, түзу, жазықтықты салып, оларды талдауды үйренеміз бе? Бастайық!

2.2. Нүктелер сызбасы

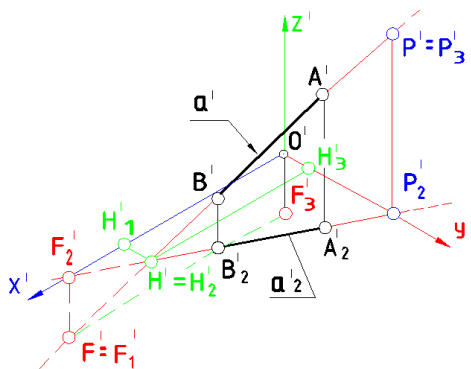
7, а-суретте кеңістіктегі 3 нүкте А, В, С-ның сызбасы берілсін, оның ішінде $A(A'A_2')$ нүктесі аксонометрия және *горизонталь* проекциясымен, $B(B'B_1')$ нүктесі аксонометрия және *фронталь* проекциясымен, $C(C'C_3')$ нүктесі аксонометрия және *профиль* проекциясымен берілген, яғни сызбада А нүктесінің z-, В нүктесінің y-, С нүктесінің x координаттары анық берілген.

Х мырза: 4-сұрақ. Сызбадан нүктелердің проекциялар жазықтықтарына *тиістілігін* анықтауға бола ма? Жауап. Әрине, болады. Сызбаны оқуды жалғастырамыз! Егер кеңістіктің қайсыбір М нүктесі үшін $|M'M_2'|=0$ болса, онда М-ның z координатасы 0-ге тең, яғни М нүктесі π_2 жазықтығына тиісті: $(M \in \pi_2) \rightarrow (M'=M_2')$. Осы сияқты егер Р нүктесі үшін $|P'P_1'|=0$, онда Р-ның y=0, яғни Р нүктесі π_1 жазықтығына тиісті: $(P \in \pi_1) \rightarrow (P'=P_1')$. Егер К нүктесі үшін $|K'K_3'|=0$, онда міндетті түрде К-ның x координатасы 0-ге тең болады, К нүктесі π_3 жазықтығына тиісті: $(K \in \pi_3) \rightarrow (K'=K_3')$.

Х мырзаның ұсынысы. Бір сызбада алты $M(x,y,0)$, $P(x,0,z)$, $K(0,x,z)$, $A(x,0,0)$, $B(0,y,0)$, $C(0,0,z)$ нүктені қалауыңызша сызбаға түсіріп, олардың үш проекциясын, координаттарын анықтап, тиістілігін тексеріп, жазыңыздар. Бұл шағын оқу-зерттеу (СОЗЖ) жұмысы болады. Есептің нөмірі $1^*_{(2,2)}$ болады.

2.3. Түзулер сызбасы, іздері

Кеңістіктегі түзу сызбада екі кескінімен, проекциясымен беріледі. Түзудің нүктесімен толық анықталатындығы бізге белгілі, сондықтан түзу сызбада екі нүктенің проекцияларымен беріледі. Мысалы (8-сурет) α түзуі екі А,В нүктесімен берілген: $\alpha(AB)$, сызбада ол екі проекциясымен $\alpha'(A'B')$, $\alpha_2'(A_2'B_2')$ көрсетілген.



8-сурет

Х мырза: 5-сұрақ. Осы сызбадан түзудің кез келген нүктесінің координаталары қалай анықталады? Жауап. Жоғарыда көрсетілгендей (1-сұрақтың жауабын қараңыз) олардың аксонометриялық координаталық сынық сызықтарын салып: А нүктесі үшін ол $A'A_2'A_x'O'$, В нүктесі үшін ол $B'B_2'B_x'O'$.

Х мырза: 6-сұрақ. Түзу проекциялар жазықтықтарымен қиылысады, сол қиылысу нүктелерін *түзудің іздері* деп атайды: *горизонталь*, *фронталь* және *профиль ізі*, оларды қалай сызбадан табуға болады? Жауап. Оларды проекциялар қасиеттеріне сүйеніп, дәлірек айтса тиістілікпен табуға болады (8-сурет). Түзудің *горизонталь ізі* Н нүктесі: α түзуінің π_2 -мен ортақ нүктесі: $\alpha \cap \pi_2 = Н$. Бізге белгілі горизонталь π_2 жазықтығының барлық нүктелері үшін $z=0$, олай болса $z_H=0$, сондықтан Н нүктесі сызбада оңай табылады: $\alpha' \cap \alpha'_2 = Н' = Н'_2$, яғни ол нүктенің *горизонталь* проекциясы мен аксонометриясы *беттеседі*. Фронталь π_1 жазықтығының барлық нүктелері үшін $y=0$, олай болса түзудің *фронталь ізі* $F = \alpha \cap \pi_1$ және $y_F=0$, мұндай нүктенің сызбадағы орны алдымен горизонталь проекциясынан табылады: $\alpha'_2 \cap O'x' = F'_2$. Бұл нүктенің фронталь проекциясы тиістілік арқасында табылады: $F'_1 \in \alpha'_1$. Сызбада α'_1 түзуі жоқ, бірақ F'_2 -тен төменге қарай байланыс сызығын $A'B'$ түзуімен қиылысқанша жүргізіп, F'_1 табылады. Мұнда да іздің *фронталь* проекциясы мен аксонометриясы *беттеседі* $F'_1 = F'$. Жоғарыда айтылғандай, профиль жазықтығының да нүктелері үшін $x=0$, олай болса түзудің *профиль ізі* $P = \alpha \cap \pi_3$ және $x_P=0$. Бұл нүктенің де сызбадағы орны алдымен горизонталь проекциясынан табылады: $\alpha'_2 \cap O'y' = P'_2$. Оның профиль проекциясы P'_3 тиістілік арқасында табылады: $P'_3 \in \alpha'_3$. Әдеттегідей оның профиль проекциясы мен аксонометриясы *беттеседі* $P'_3 = P'$.

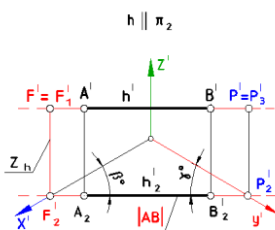
Х мырза: 7-сұрақ. Қиылысуда түзудің көрінетін бөлігін анықтау мәселесі бар, ол сызбада қалай шешімін табады? Жауап. Бұл жерде: Н нүктесінен кейін α түзуінің төменгі (сол жақ) бөлігі көрінбейді, себебі ол горизонталь жазықтығының астында. F нүктесінен кейін α түзуінің сол жақ бөлігі көрінбейді, себебі ол фронталь жазықтығының артында. P нүктесінен кейін α түзуінің

оң жақ бөлігі көрінбейді, себебі ол π_3 жазықтығының артында (8 –сурет). Сызбада көрінетін бөлікті анықтау мәселесі толық шешілмегендіктен, төменде бұл есепке қайта ораламыз.

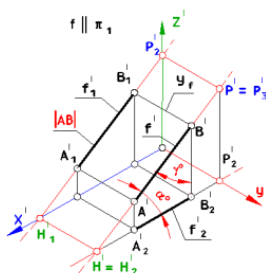
Х мырзаның ұсынысы. АВ түзуін қалауыңызша алып, оның фронталь, горизонталь, профиль *іздерін* сызбада құрыңыз. Олардың координаталарын анықтап, π_1 , π_2 , π_3 -ке тиістілігін тексеріп, нәтижесін жазыңыз. Бұл шағын СОЗ (студенттің оқу-зерттеу) жұмысы болсын, оқулықтың Б қосымшасымен қолданып, АВ түзуінің теңдеуінен іздерін анықтап, сызбадағымен салыстыру жасаңыз. Есептің нөмірі 2*_(2.3) болсын.

2.4. Түзулердің орналасуы: деңгейлік, проекциялаушы, жалпы түрде

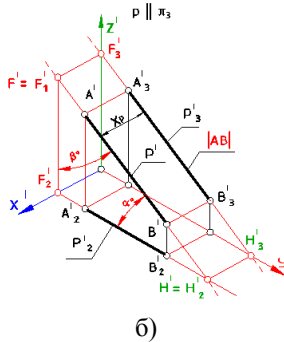
Х мырза: 8-сұрақ. Түзулердің орналасуында қандай айырмашылық болуы мүмкін? *Жауап*. Түзулердің өзара орналасуы 3 түрге бөлінеді. 1 – проекциялар жазықтықтарына *параллель*: фронталь $f \parallel \pi_1(xOz)$, горизонталь $h \parallel \pi_2(xOy)$, профиль $p \parallel \pi_3(yOz)$ түзулері, оларды *деңгейлік* деп атайды; 2 – проекциялар жазықтықтарына *перпендикуляр*, мысалы $a \perp \pi_1$, $b \perp \pi_2$, $c \perp \pi_3$, оларды *проекциялаушы* деп атайды; 3 – проекциялар жазықтықтарына перпендикуляр да, параллель де емес *жалпы жағдайда* орналасқан түзулері (8-сурет, АВ түзуі). *Анықтама*. Жалпы жағдайдағы түзулердің барлық проекциялары осьтерге көлбеу орналасады.



а)



б)



9-сурет

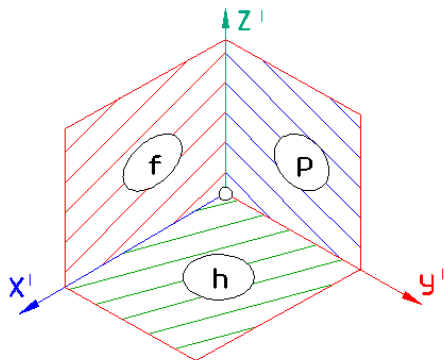
Х мырза: 8, а-сұрақ. Деңгейлік түзулердің сызбаларының ерекшеліктері қандай? *Жауап*. Горизонталь $h \parallel \pi_2$ түзуінің барлық нүктелері горизонталь жазықтығынан бір қашықтықта болып, оның теңдеуі $z_h = \text{const}$ болады, демек оның аксонометриясы және горизонталь проекциясы өзара параллель: $h' \parallel h_2'$. Егер $z_h = c$ болса, олардың арақашықтығы c -ға тең және $h_1' \parallel O'x'$ (9,а-сурет). Сол сияқты фронталь $f \parallel \pi_1$ түзуі де фронталь проекциялар жазықтығына параллель болып, оның теңдеуі $y_f = \text{const}$ болады, демек, оның аксонометриясы және фронталь проекциясы өзара параллель болу керек:

$f' \parallel f_1'$. Егер $y_f = a$ -ға тең болса, онда олардың арақашықтығы да a -ға тең және $f_2' \parallel O'y'$ болады (9,ә-сурет). Осындай шарттар профиль $p \parallel \pi_3$ түзуіне де қатысты, сондықтан $x_p = \text{const}$ шартына орай $x_p = d$ болса, онда $p' \parallel p_3'$ және $p_2' \parallel O'x'$, p' және p_3' -тың арақашықтығы d болады (9,б-сурет).

Х мырза: 8,ә-сұрақ. Осы деңгейлік түзулердің қандай ортақ қасиеттері бар? *Жауап*. Олар осы түзулерге қатысты ортақ 6-шы проекциялау қасиетінен туындайды.

1. Түзулердің кесінділері параллель проекциялар жазықтығына нақты шамамен кескінделеді. 2. Түзулердің проекциялар жазықтықтарына көлбеу бұрыштары да нақты шамамен проекцияланады. Сызбада ол анық көрініп тұр (9,а,ә, б-суретте). Бірақ аксонометрияда олардың нақты шамасының мәндерін табу оңай емес. Монж этюрі сызбасында осы мәселеге

қайта ораламыз, сонда оның шешімін оңай табамыз. 10-суретте қайсыбір айтылған деңгейлік түзулер жиынының мысалдары келтірілген. Естеріңізде болсын: осы деңгейлік түзулердің, әсіресе горизонталь сызықтардың тәжірибеде пайдалану орны өте кең. Онымен кейінірек танысамыз, дайын болыңыз.



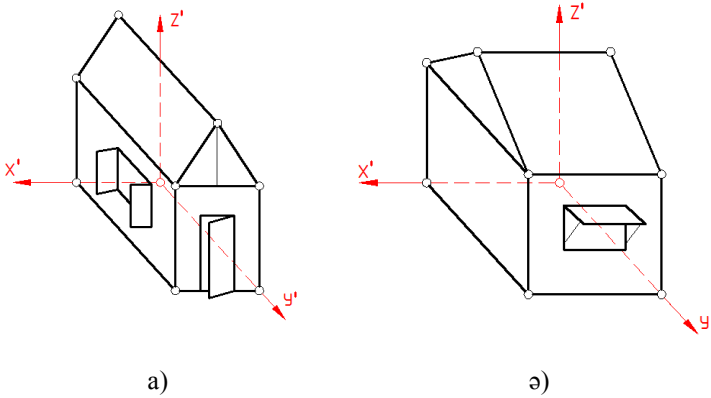
10-сурет

Х мырза: 8,б-сұрақ. 9, а-суретте берілген горизонталь h түзуінің қай ізі нақты, қай ізі өзіндік емес, ақырсыз қашықтықта болады? Жауап. Кеңейтілген Евклид кеңістігінің заңы бойынша h түзуінің *горизонталь ізі* өзіндік емес, ақырсыз қашықтықта болады. Сол сияқты фронтальдың *фронталь ізі* өзіндік емес және профиль түзуінің *профиль ізі* өзіндік емес болады. Басқа іздер нақты түрде болады. Оларды анықтап көріңіз.

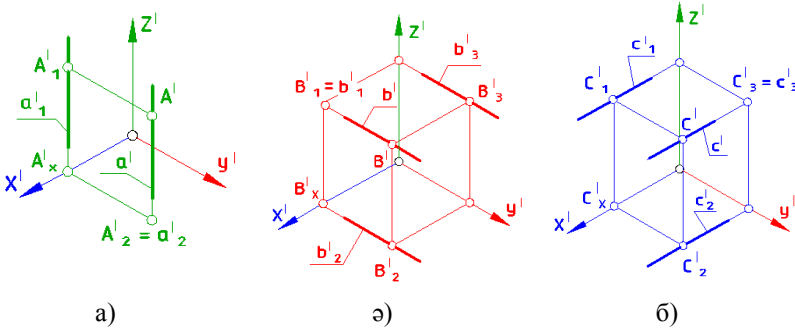
Х мырзаның түйіні. Демек, бұл ақырсыз қашық нүктелердің «*нақты өкілдері*» сызбада h' , f' , p' болды!

Х мырза: 9,а-сұрақ. Сызбада проекциялаушы түзулердің қандай *ортақ* ерекшеліктері ескерілуі керек? Жауап. Проекциялаудың *2-қасиетіне* орай бұл түзулердің бір проекциясы нүкте болу керек, яғни $a \perp \pi_1$ болса, оның фронталь проекциясы a_1' -нүкте болады; $b \perp \pi_2$ болса, оның горизонталь проекциясы b_2' -нүкте болады, сол сияқты $c \perp \pi_3$ болса, оның профиль проекциясы c_3' -нүкте болады. Осыны түсіну үшін

өздеріңіз отырған бөлменің, не болмаса 11-суреттегі үйлердің қырларының орналасуын талдап көріңіз.



11-сурет



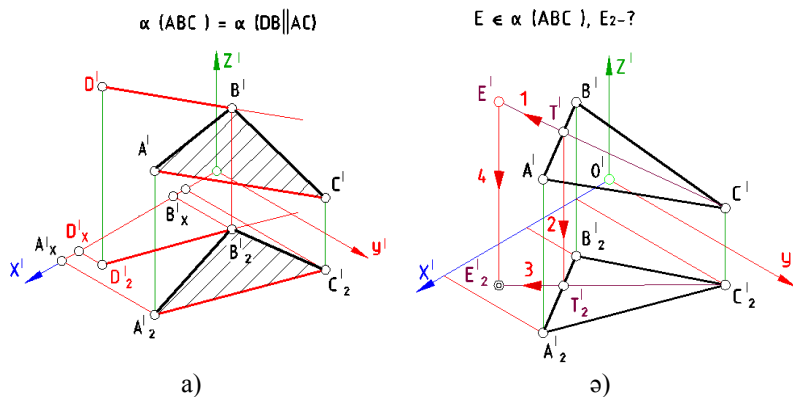
12-сурет

12,а,б,в-суретте айтылған a, b, c түзулердің сызбалары келтірілген. Сызбадан a түзуі Oz осіне, b түзуі Oy осіне, c түзуі Ox осіне параллель екенін анық байқаймыз, яғни олар екі проекциялар жазықтығына сәйкесінше параллель! Енді 11-және 12-суреттерді салыстырып көріңіздер, a, b, c түзулеріне сәйкес үйлердің қырларын табыңыздар.

Х мырза: 9,ә-сұрақ. 12,а,ә,б-суреттерде берілген а,б,с түзулердің қай іздері *нақты*, қай іздері *өзіндік емес*, яғни *ақырсыз қашық* нүкте болады? Жауап. Әрине а түзуінің горизонталь проекциясы a'_2 нүкте оның *горизонталь ізі* болады. Сонымен қатар $a \parallel Oz$ болғандықтан, оның *фронталь* және *профиль іздері*, Oz осінің *өзіндік емес* нүктесі болады. Сол сияқты б түзуінің *фронталь ізі нақты* b'_1 нүкте болып, горизонталь және профиль іздері, Oy осінің *өзіндік емес*, ақырсыз қашық нүктесі болады. Енді с түзуінің іздерін өз беттеріңше анықтап көріңіздер. Мұнда Х мырза айтқандай, проекциялаушы түзулердің *ақырсыз қашық* іздерінің «*нақты өкілдері*» сызбада a' , b' , c' түзулері болады!

2.5. Жазықтықтар сызбалары

Жалпы жағдайда жазықтық бір түзуге тиісті емес 3 нүктемен не екі қиылысқан, не екі параллель түзуімен анықталады. 13,а-суретте $\alpha(ABC)$ жазықтығы 3 нүктемен берілді, оны екі қиылысқан түзумен $\alpha(AB \cap BC)$, не екі параллель түзумен $\alpha(AC \parallel BD)$ берілді десе де болады. Жазықтық ол нүктелер мен түзулердің жиыны, сондықтан осы α жазықтығын оған тиісті басқа нүктелер және түзулермен сызбада алуға болады.



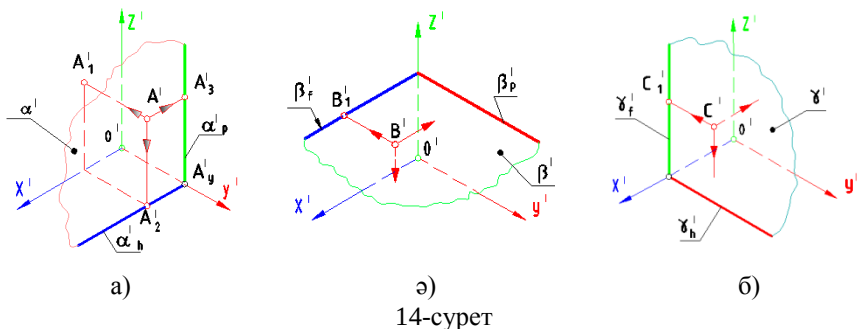
13-сурет

Х мырза: 10-сұрақ. Сызбада осы жазықтыққа тиісті басқа нүкте мен түзуді қалай табуға болады? Жауап. 13, ә-суретте $\alpha(ABC)$ жазықтығына *тиісті* $E(E')$ нүктесі берілсін, оның горизонталь E_2' проекциясын табу керек болсын. 1. Жазықтық түзулер жиыны болғандықтан, E нүктесінен осы түзулердің біреуін, дәлірек айтсақ C нүктесінен *жүргізген лайықты*: $CE(C_1E_1')$. 2. Енді осы түзудің AB түзуімен қиылысу нүктесін алу керек: $AB \cap CE = T$. 3. Осы нүкте арқылы CE түзуінің горизонталь проекциясын құрамыз, алдымен $T_2' \in B_2'A_2'$ нүктесін тауып. 4. Одан кейін $C_2'T_2'$ түзуінде E_2' нүктесін табамыз: $E_2' \in C_2'T_2'$. *Ізделінген* нүкте осы. Шешудің нәтижесінде E -ның координаталарын табуға болады, анықтаңыз.

2.6. Деңгейлік, проекциялаушы, жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтар және олардың іздері

Х мырза: 11-сұрақ. Жазықтықтардың орналасуында қандай ерекше жағдайлар болады? Жауап. Жазықтықтар түзулер сияқты деңгейлік, проекциялаушы және жалпы жағдайда болып ажыратылады. Олардың сызбалары да түзулердің сызбаларына ұқсас, сәйкес болып келеді. 13, а, ә-суреттерде жалпы жағдайдағы жазықтық берілген. Ол міндетті түрде 2 проекциясымен анықталады. Деңгейлік және проекциялаушы жазықтықтардың сызбада *іздері* – *түзулері* беріледі. Жалпы айтқанда жазықтықтың іздерін «*нөл деңгейлік*» түзулер десе болады.

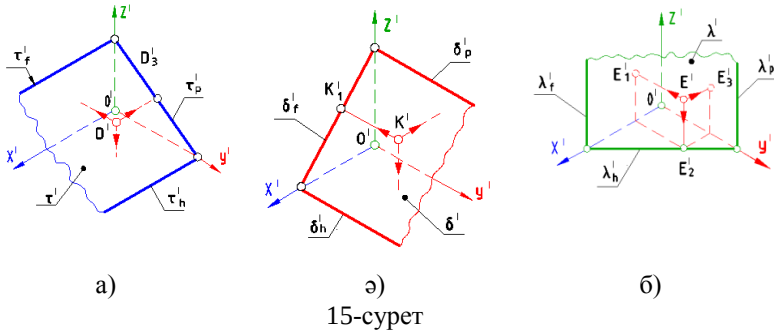
Мысалы 14, а, ә, б-суретте берілген $\alpha || \pi_1, \beta || \pi_2, \gamma || \pi_3$ – бұлар *деңгейлік фронталь, горизонталь және профиль* жазықтықтары. Негізгі аксиомада айтылғандай, α, β, γ жазықтықтары сәйкесінше π_1, π_2, π_3 -тердің екі қиылысқан осіне параллель орналасқан: $\alpha || (Ox \cap Oz), \beta || (Ox \cap Oy), \gamma || (Oy \cap Oz)$.



14-сурет

Сондықтан сызбада олар сәйкес осьтерге параллель іздерімен толық анықталады: $\alpha'(\alpha_h' \cap \alpha_p')$, $\beta'(\beta_f' \cap \beta_p')$, $\gamma'(\gamma_h' \cap \gamma_f')$. Бұл жерде α_h' және α_p' түзулері сәйкесінше α жазықтығының *горизонталь* және *профиль* іздері, β_f' және β_p' түзулері сәйкесінше β жазықтығының *фронталь* және *профиль* іздері, γ_h' және γ_f' түзулері сәйкесінше γ жазықтығының *горизонталь* және *фронталь* іздері. Анықтама. Жазықтықтың іздері оның проекциялар жазықтықтарымен қиылысу сызықтары.

Х мырза: 12-сұрақ. *Проекциялаушы жазықтықтар* сызбада қалай ажыратылады? Жауап. Бұл жазықтықтар кеңістікте осьтердің біреуіне *параллель* болады, сол себептен олар проекциялар жазықтықтарының екеуіне *перпендикуляр* болады. Шынында да Ох осі *профиль* проекциялар жазықтығына перпендикуляр. Осы оське параллель орналасқан τ жазықтығы π_3 —ке перпендикуляр: $\tau \perp \pi_3$ (15, а-сурет). Сызбада бұл жазықтықтар көрнекі болу үшін 3 ізімен көрсетілді: $\tau'_h, \tau'_p, \tau'_f$, оның ішінде τ'_h, τ'_f іздері Ох осіне параллель, ал τ'_p ізі *профиль* жазықтығында көлбеу түзу болады.



Оу осі фронталь жазықтығына перпендикуляр, сондықтан δ жазықтығын Оу осіне параллель етіп алса, ол π_1 —ге перпендикуляр болады: $\delta \perp \pi_1$, оның 3 ізі $\delta_h', \delta_f', \delta_p'$. Оның ішінде δ_h', δ_p' іздері Оу осіне параллель, ал δ_f' ізі фронталь жазықтығында көлбеу түзу болады (15, ә-сурет). Енді Oz осіне параллель $\lambda \perp \pi_2$ жазықтығының сызбада әдеттегідей 3 ізі салынды: $\lambda_f', \lambda_h', \lambda_p'$. Бұның ішінде λ_f', λ_p' іздері Oz осіне параллель, ал λ_h' ізі горизонталь жазықтығында көлбеу түзу болады (15, б-сурет). Осында келтірілген барлық мысалдар алғы сөзде берілген аксиомаларға сәйкес (оны тексеріп көріңіз).

Х мырза: 13-сұрақ. Сызбада деңгейлік жағдайдағы жазықтықтарға тиісті нүктелерді қалай құруға болады? Жауап. 14, а-суретте α жазықтығы және оған тиісті А нүктесі берілген: $\alpha \parallel \pi_1$, $A \in \alpha$. Осы нүктенің екінші проекциялары жазықтықтың орналасу шартына сәйкес оның *нақты* іздеріне тиісті: $A'_2 \in \alpha_h'$, $A'_3 \in \alpha_p'$. α -ның фронталь ізі – ия, ақырсыз қашық! Фронталь проекциясы A'_1 -пен аксонометрия A' -тың арақашықтығы α және π_1 -дің арақашықтығына тең, яғни $|A'A'_1|$ түзуі Оу осіне параллель және осы арақашықтық А нүктесінің ординатасы: $y_A = |O'A'_y|$. Оның абсциссасы $|A'A'_3| = x_A$, аппликаты $|A'A'_2| = z_A$ болады. Осындай әдіспен β, γ жазықтықтарына тиісті, мысалы $B \in \beta, C \in \gamma$ нүктелерімен жұмыс істеуге болады, өзіндік жұмыс жасап, осылардың барлық проекцияларын, координаталарын анықтаңыз (14, а, ә-сурет).

Х мырза: 14, а-сұрақ. *Проекциялаушы* жазықтықтарға тиісті нүктелердің координаталарын анықтау мысалын қарастырайық.

Жауап. Берілген $\lambda \perp \pi_2$ және оған тиісті $E \in \lambda$ нүктесі болсын (15, б-сурет). Бұл нүктенің горизонталь проекциясы жазықтықтың горизонталь ізіне тиісті: $E'_2 \in \lambda'_h$. $|E' E'_2|$ кесіндісі нүктенің аппликаты – z координатасы болады, оның басқа проекциялар мен координаттарың 15, б-суретінен табасыз: E_1 нүктесіне қатыстыны $E' E'_2 E'_x E'_1$ төртбұрыштан, E_3 нүктесіне қатыстыны $E' E'_2 E'_y E'_3$ төртбұрышынан. Егер келтірілген мысалдар түсінікті болса, онда сызбада берілген $K \in \delta$, $D \in \tau$ – екі нүктемен жоғарыда көрсетілгендей жұмыс жасап, болмаса оқытушымен, білімді достарыңызбен ақылдасып, жауабын табыңыздар.

Х мырза: 14, ә-сұрақ. 14, а, ә, б-суреттерде берілген α , β , δ деңгейлік жазықтықтардың өзіндік емес, ақырсыз қашық іздері бар ма? Жауап. Ия, бар. Берілген $\alpha || \pi_1$ болғандықтан оның фронталь ізі -, $\beta || \pi_2$ болғандықтан оның горизонталь ізі -, $\gamma || \pi_3$ болғандықтан оның профиль ізі өзіндік емес, ақырсыз қашықтықта болады.

Х мырзаның ұсынысы: Б қосымшамен қолданып, осы жауаптың нәтижесін жазықтықтардың тендеулерінен анықтап, дәлелдерін табыңыз. Бұл шағын СОЗЖ есебі, оның нөмірі 3.2*^(2.6) болсын.

Қорытынды. Нүктенің аксонометриялық сызбасы аксонометриялық координаталар сынық сызығымен, немесе осьтерге параллель орналасқан түзулерге тиісті оның екі проекциясымен анықталады (7, а-сурет. $A'A_2' || Oz$, $B'B_1' || Oy$, $C'C_3' || Oz$). Сондықтан оське параллель орналасқан қайсыбір түзудің екі нүктесін – олардың кеңістіктегі қайсыбір нүктелерінің проекциясы деуге әбден болады. Түзулердің аксонометриясы. Деңгейлік түзулердің бір проекциясы Ox не Oy осіне параллель орналасады. Проекциялаушы түзулердің бір проекциясы сызбада нүкте болу керек. Жазықтықтың аксонометриясы. Жазықтық деңгейлік орналасқан болса, онда ол екі координата осіне параллель, ал проекциялаушы орналасқан жағдайда олар бір координата осіне параллель болады. Біз осы тарауда түзулер мен жазықтықтардың орналасуын ажыратуды, олардың іздерін сызбада құруды, оның ішінде өзіндік емес іздеріне де «көз салдық», үйрендік, әжептәуір білімді, білікті болдық. Басқа

мәселелерді келесі тарауларда қарастырып, түсініп, оларды да меңгерейік.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. $A(5,3,7)$, $B(2,5,3)$ нүктелерін аксонометрияда салып, AB түзуінде x, y, z координаталары нөлге тең үш I, II, III нүктесін анықтаңыз. Түзудің ізі деп аталатын осы нүктелердің координаталарын жазыңыз: $I=AB \cap \pi_1$, $II=AB \cap \pi_2$,

$III=AB \cap \pi_3$.

2. $A(5,3,7)$ нүктесінен өтетін, $\pi_1(xOz)$ жазықтығына параллель, y осін қиып өтетін f фронталь түзуін аксонометрияда салыңыз.

3. $B(2,5,3)$ нүктесінен өтетін, $\pi_2(xOy)$ жазықтығына параллель, z осін қиып өтетін h горизонталь түзуін аксонометрияда салыңыз.

4. Қандай түзулерді фронталь және горизонталь деп атайды?

5. $C(10,8,5)$ нүктесінен өтетін π_1 , π_2 , π_3 жазықтықтарына перпендикуляр үш проекциялаушы түзудің аксонометриясын салыңыз.

6. Аксонометрияда $\pi_1(xOz)$, $\pi_2(xOy)$, $\pi_3(yOz)$ жазықтықтарына қарағанда $A(5,3,7)$ нүктесіне симметриялы B, C, D нүктелерінің орналасуын көрсетіңіз және нүктелердің координаталарын анықтаңыз.

7. Қандай түзулердің *өзіндік емес* іздері болады? 9, а, ә, б-суретті түсіндіріңіз.

8. Қандай жазықтықтардың *өзіндік емес* іздері болады? 12, а, ә, б-суреттерді түсіндіріңіз.

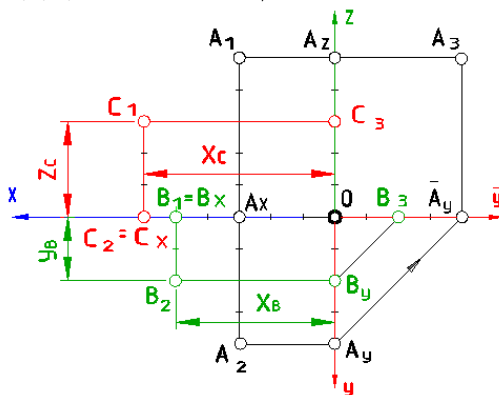
9.14, а, ә-суреттен B , C нүктелердің жетіспейтін проекцияларын, координаттарын анықтаңыз.

10.15, а, ә-суреттен D, K нүктелердің жетіспейтін проекцияларын, координаттарын анықтаңыз.

3. НҮКТЕ, ТҮЗУ, ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ МОНЖ ЭПЮРІ

3.1. Нүкте эпюрі

$$A(3,4,5), B \in \pi_2 \rightarrow Z_B = 0, \quad C \in \pi_2 \rightarrow Y_C = 0$$



16-сурет

Монж эпюрі деп жазық қайтымды сызбаны айтады. Сызбаның аты француз математигі, инженері және ғалымы Гаспар Монжға (1746–1818) байланысты. Эпюр деген сөз де француз тілінде сызбаны білдіреді. Өткен ғасырдан қалған сызу дәстүрін жалғастырамыз. Машина жасау мен құрылыс салаларында бұл сызбаны қолдану өте тиімді.

Қайтадан 6, б-суреттің сызбасын талдайық. Бұл *кеңістіктік* конструкциядан *жазық* сызбаға (16-сурет) – Монж эпюріне қалай көшуге болады?

Ең қарапайым көшу әдісі – горизонталь π_2 жазықтығын Ох осінен айналдырып, π_3 – профиль жазықтығын Оz осінен (6, б-сурет) айналдырып, екеуін де фронталь жазықтығымен беттестіру, соның нәтижесінде жазық сызба (16-сурет) шығады. Сонда A_1A_2 және A_1A_3 – вертикаль және горизонталь *байланыс сызықтары* пайда болады, осының арқасында эпюрге нүкте *бірмәнді* анықталады: $A \leftrightarrow (A_1A_2)$. Эпюр қайтымды сызба болып табылады. Нүктенің екі проекциясы белгілі болса, үшінші

A_3 проекциясы салулармен анықталады (16-сурет). Нүктенің үш проекциясы A_1, A_2, A_3 міндетті түрде *проекциялық байланыста* болуы керек: A_1, A_2 – вертикаль байланыс, A_1, A_3 – горизонталь байланыс сызық!

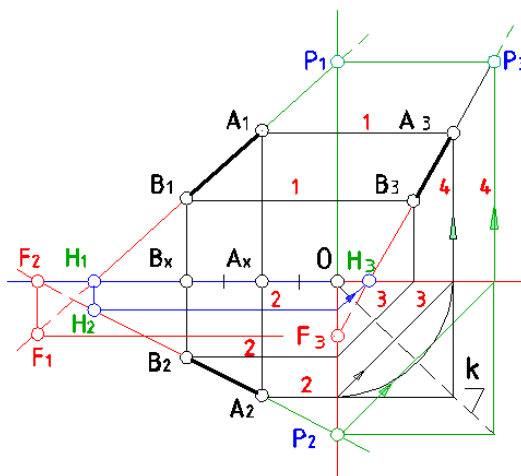
Х мырза: 15-сұрақ. Сызбада В, С нүктелерінің екі координатасы көрсетілген, олардың үшінші координатасын табайық. Жауап. Алдыңғы тарауда айтылғандай, нүкте проекциялар жазықтығына тиісті болса, оның бір проекциясы оське тиісті болады. Шынында да В нүктесі горизонталь проекциялар жазықтығына тиісті, оның *аппликаты* 0-ге тең: $B \in \pi_2 \rightarrow z_B = 0 \rightarrow B_1 = B_x \in O_x$. Бұл нүктенің B_3 проекциясы O_y осіне тиісті және u_B қашықтықта орналасқан: $|OB_3| = u_B$! Сол сияқты С нүктесі фронталь проекциялар жазықтығына тиісті, оның *ординаты* 0 – тең: $C \in \pi_1 \rightarrow u_C = 0$. Ал С нүктесінің профиль проекциясы O_z осіне тиісті және z_C қашықтықта: $|OC_3| = z_C$! Осылай нүктелерді сызбада қалауыңызша алып, координаттарын анықтап көріңіздер! Сызбада А нүктесінің профиль A_3 проекциясы мен O_z осінің арақашықтығы нүктенің ординатасына тең: $|A_z A_3| = y_A$, сондықтан $A_y \bar{A}_y$ сызығы 45° -пен көлбейді. Осымен *нүктенің эпюрімен* жеткілікті түрде таныстық.

3.2. Түзудің эпюрі, іздері

Алдыңғы тарауда айтылғандай, түзуді сызбада екі нүктемен анықтаймыз.

8, а-суреттегі АВ түзуінің эпюрін саламыз (17-сурет). Ол үшін сызбада берілген өлшем бірліктерімен нүктелердің координаталарын $A(2,3,4), B(4,2,2)$ қолданамыз.

$$AB \cap \pi_1 = F, AB \cap \pi_2 = H, AB \cap \pi_3 = P$$



17-сурет

Эпюрдің Ox осіне 0-ден бастап 2 бірлікті салып, A_x нүктесін белгілейміз: $x_A = |O A_x|$, A_x нүктесінен *вертикаль байланыс сызығын* жүргіземіз. Енді байланыс сызықтың осьтен төменгі жағына $y_A = |A_x A_2| = 3$ бөлікті саламыз, мұнда A_2 –нүктенің *горизонталь* проекциясы. Сол сияқты байланыс сызықтың осьтен жоғарғы жағына $z_A = |A_x A_1| = 4$ бөлікті саламыз, A_1 – нүктенің *фронталь* проекциясы. Қорытынды: $A \leftrightarrow (A_1, A_2)$ – кеңістіктегі A нүктесін эпюрде екі A_1, A_2 нүкте *бір мәнді* анықтайды. Осындай түрде B нүктесінің де 2 проекциясы салынады: $B \leftrightarrow (B_1, B_2)$. Сызбада AB түзуінің екі проекциясын жүргіземіз: $AB \leftrightarrow (A_1 B_1, A_2 B_2)$. Үшінші проекциясын салу үшін A_1, B_1, A_2, B_2 нүктелерінен горизонталь байланыс сызықтарын оң жаққа қарай жүргізу керек. A_1 нүктесінен оңға қарай 1-түзу, A_2 нүктесінен оңға қарай 2-түзу Oy осімен A_y нүктесінде қиылысқанша жүргізіледі. Осы A_y нүктесінен Oy осімен 45° -пен көлбейтін 3-түзуді горизонталь осімен қиылысқанша жүргіземіз. Осы нүктеден вертикаль 4-түзуді A_1 нүктесінен өтетін байланыс сызықпен A_3 нүктесінде қиылысқанша жүргіземіз. Осындай әдіспен нүктенің, түзудің қосымша үшінші проекциялары

салынады: $A_3 B_3$. Сызбада 3-түзудің орнына доға жүргізуге болады, оның радиусы $|OA_y|$ -ке тең, центрі – координаталар басы. Не болмаса оның орнына сызбаның *тұрақты k* сызығын жүргізуге болады, ол координаталар басынан өтіп, Оу осіне 45° -пен көлбейді.

Енді түзулердің *іздерін* эпюрде салып үйренейік. Алдыңғы тараудың 4-сұрағына 8, ә-суреттегі жауапты еске түсіріп, онда айтылғанды эпюрде жүзеге асырамыз. Түзудің (17-сурет) *горизонталь ізі* H нүктесі: $AB \cap \pi_2 = H$, бұл түзудің π_2 жазықтығымен ортақ нүктесі. Горизонталь π_2 -нің барлық нүктелері $z=0$ шартына тәуелді, олай болса $z_H = 0$, H нүктесінің сызбадағы орны: $\alpha_1(A_1B_1) \cap O_x = H_1$ —бұл *горизонталь ізінің фронталь* проекциясы, оның *горизонталь проекциясы* байланыс сызық H_1H_2 арқылы табылады: $H_2 \in A_2B_2$. Сол сияқты фронталь π_1 -дің барлық нүктелері үшін $y=0$, олай болса түзудің *фронталь ізі* $F = AB \cap \pi_1$, $y_F=0$, мұндай нүктенің сызбадағы орны $\alpha_2(A_2B_2) \cap O_x = F_2$, бұл *фронталь ізінің горизонталь* проекциясы, оның фронталь проекциясы F_1 тиістілік арқасында табылады: $F_1 \in \alpha_1$ және $F_1F_2 \perp O_x$. Профиль жазықтығының барлық нүктелері үшін $x=0$, олай болса түзудің *профиль ізі* $P = a \cap \pi_3$ және $x_P=0$, мұндай нүктенің сызбадағы орны $\alpha_2 \cap O_y = P_2$, бұл *профиль ізінің* горизонталь проекциясы. Бұл нүктенің профиль проекциясы P_3 тиістілік арқасында табылады: $P_3 \in \alpha_3$.

5-сұрақты еске түсіріп, Х мырза келесі 16 сұрақты қояды. Түзудің көрінетін бөлігін анықтау мәселесі эпюрде қалай шешімін табады? Жауап. Бұл жерде H нүктесінен кейін AB түзуінің төменгі бөлігі көрінбейді, эпюрде H_1, H_2 нүктелерінен кейін түзулердің сол жақ бөліктері көрінбейді, π_2 жазықтығының астында болып. F_1, F_2 нүктелерінен кейін A_1B_1, A_2B_2 түзулерінің сол жақ бөлігі көрінбейді, π_1 жазықтығының артында болып. P_2 нүктесінен кейін AB түзуінің оң жақ бөлігі көрінбейді, π_3 жазықтығының артында болып (17-суретті 8, ә-суретімен салыстырыңыз!). Бірақ бұл жерде түзудің *көрінетін бөлігін* анықтау мәселесі әлі толық шешілмеді!

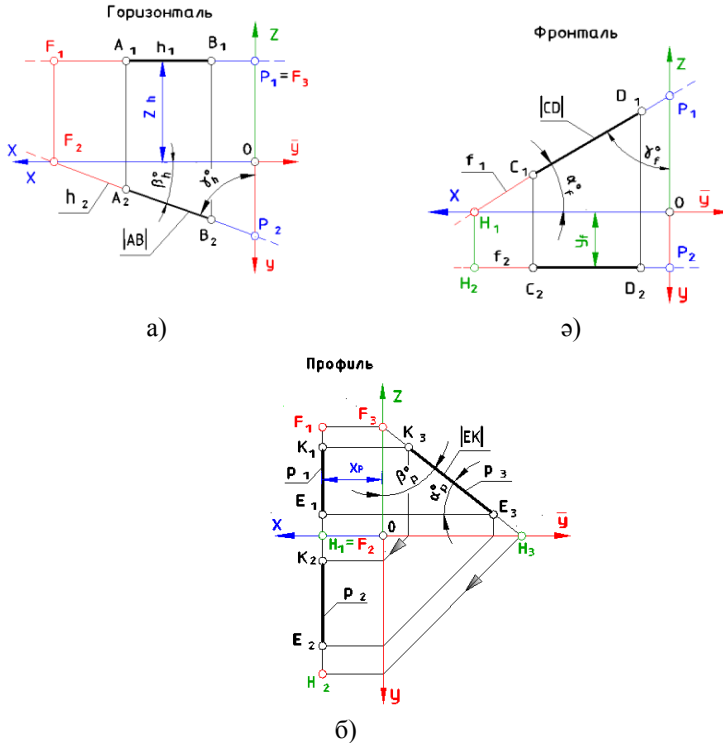
3.3. Деңгейлік және проекциялаушы түзулер

6-сұрақты еске түсіріп, түзулердің кеңістікте орналасуына ден қойып, олардың *ерекшеліктерімен* эпюрге танысайық. Жоғарыда айтылғандай түзулердің кеңістікте орналасуы үш түрде болуы мүмкін. 1 – *фронталь* $f \parallel \pi_1(xOz)$, *горизонталь* $h \parallel \pi_2(xOy)$, *профиль* $p \parallel \pi_3(yOz)$ – олар *деңгейлік* түзулер. 2 – проекциялар жазықтықтарына *перпендикуляр*, мысалы $a \perp \pi_1$, $b \perp \pi_2$, $c \perp \pi_3$ – *проекциялаушы* түзулер. 3 – проекциялар жазықтықтарына перпендикуляр да, параллель де емес *жалпы жағдайда* орналасқан түзулер (9–12-суреттерді шолып шығыңыз).

Х мырза: 17-сұрақ. Деңгейлік түзулердің сызбасы эпюрге қалай ажыратылады? Жауап. Горизонталь $h \parallel \pi_2$ түзуі горизонталь жазықтығына параллель болып, $z_h = \text{const}$ шартына бағынады, демек оның *фронталь* проекциясы Ox осіне параллель болуы керек: $h_1 \parallel Ox$. Егер $z_h = c$ болса, h_1 мен Ox -тың арақашықтығы c болады (18, а-суретпен 9-суретті *салыстырыңыз*). Сол сияқты фронталь $f \parallel \pi_1$ түзуі фронталь проекциялар жазықтығына параллель болып, ол $y_f = \text{const}$ шартына бағынады, демек оның *горизонталь* проекциясы Ox осіне параллель болуы керек: $f_2 \parallel Ox$. Егер $y_f = a$ болса, онда f_2 мен Ox -тың арақашықтығы a -ға тең (18, ә-суретпен 9, ә-суретті *салыстырыңыз*). Осы шарттар *профиль* $p \parallel \pi_3$ түзуіне де қатысты, сондықтан $x_p = \text{const}$ шартына орай $x_p = d$ болса, онда $p_1 \parallel Oz$, $p_2 \parallel Oy$, олар бір вертикаль түзудің бойында орналасады және осы осьтерден арақашықтығы d -ға тең болады (18, б-суретпен 9, б-суретті *салыстырыңыз*). 8-сұрақтың жауабын еске түсіріп, Х мырза 18-сұрақты қояды. Эпюрге деңгейлік түзулердің *нақты шамасына* қатысты мәселелері қалай шешіледі? Жауап. Проекциялаудың деңгейлік түзулерге қатысты 6-қасиеті эпюрге толық орындалады. Оның ішінде:

– горизонталь түзудің кесіндісі *горизонталь* проекцияда *нақты шамаға* тең: $h_2 \in A_2B_2 \Rightarrow |A_2B_2| = |AB|$. Сол сияқты фронтальға тиісті кесіндінің *фронталь* проекциясы оның *нақты шамасына* тең: $f_1 \in C_1D_1 \Rightarrow |C_1D_1| = |CD|$. Профиль түзуіне тиісті кесіндінің *профиль* проекциясы да оның *нақты шамасына* тең:

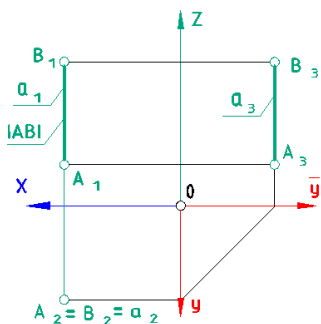
$$p_3 \in E_3F_3 \Rightarrow |E_3F_3| = |EF|;$$



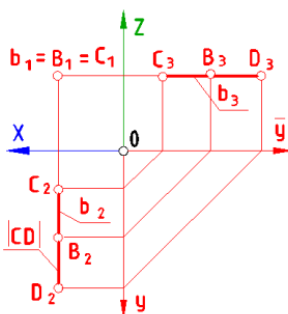
18-сурет

– бұл түзулердің проекциялар жазықтықтарына *көлбеулік бұрыштары* да *нақты шамамен* проекцияланады. Сызбада ол анық көрініп тұр. Аксонометрияда олардың нақты шамалар мәндерін табу оңай емес деген едік. Енді Монж эпюрінде осы мәселе *толық шешімін тапты*. Шынында да $h_2, \wedge \pi_1 = \alpha_h^\circ$, $h_2, \wedge \pi_3 = \gamma_h^\circ$, $f_1, \wedge \pi_2 = \beta_f^\circ$, $f_1, \wedge \pi_3 = \gamma_f^\circ$, $p_3, \wedge \pi_1 = \lambda_p^\circ$, $p_3, \wedge \pi_2 = \varphi_p^\circ$. Бұл жерде α_h° және γ_h° – горизонталь түзуінің π_1 , π_3 жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары, β_f° және γ_f° – фронталь түзуінің π_2 , π_3 жазықтықтарына көлбеулік бұрыштары, λ_p° және φ_p° – профиль түзуінің π_1 , π_2 жазықтықтарына көлбеу бұрыштары. Бұл бұрыштардың *нақты шамаларын* сызбадан өлшеп алуға болады (Х мырзаның түйіні: проекциялаудың 6-қасиеті қандай тамаша!).

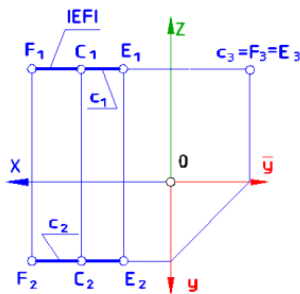
9-сұрақтың ізімен жүріп, Х мырза: 19-сұрақтың кезі келді. Проекциялаушы түзулерді эпюрге қалай ажыратамыз?



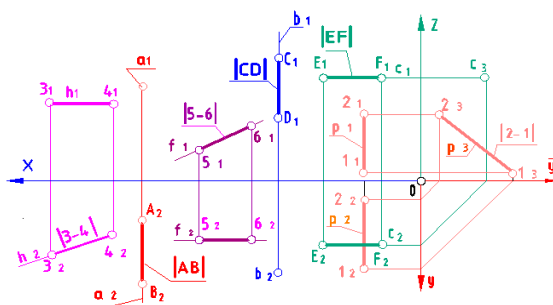
а)



ә)



б)



в)

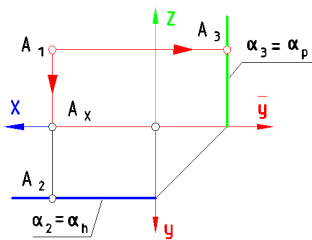
19-сурет

Жауап. Проекциялаудың 2-қасиетіне орай бұл түзулердің бір проекциясы нүкте болуы керек, яғни $a \perp \pi_2$ болса, оның *горизонталь* проекциясы a_2 -нүкте болады: $a \perp \pi_2 \rightarrow a_2$. $b \perp \pi_1$ болса, оның *фронталь* проекциясы b_1 нүкте болады: $b \perp \pi_1 \rightarrow b_1$. Сол сияқты: $c \perp \pi_3 \rightarrow c_3$ нүкте. (12, а,ә,б және 19, а,ә,б-суреттерді салыстырыңыз). Әрине бұл түзулер бір емес, екі проекциялар жазықтығына параллель: $a \parallel \pi_1, \pi_3$, $b \parallel \pi_2, \pi_3$, $c \parallel \pi_1, \pi_2$, сондықтан оларға тиісті кесінділер $a_{1,3}, b_{2,3}$ және $c_{1,2}$ кескіндер де *нақты шамамен* проекцияланады. Оны өздеріңіз тексеріп шығыңыздар. Түзулердің құрама сызбасын 19, в-суреттен олардың түр-түрін, яғни орналасуын ажыратып, оқып шығыңыздар.

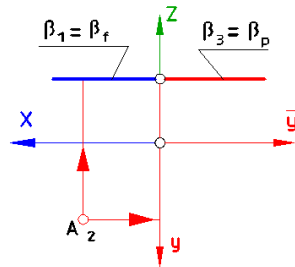
Х мырзаның ұсынысы: 19, в-суреті бойынша шағын оқу-зерттеу жұмысын (СОЗЖ) орындаңыз. Жеке үш сызбада проекциялаушы a, b, c , деңгейлік f, h, p түзулерін салып, 1 – олардың іздерін анықтыңыз, 2 – деңгейліктердің көлбеу бұрыштырын, 3 – оларға тиісті кесінділердің нақты шамаларын табыңыз, 4 – барлық іздердің координаталарын жазып беріңіз. Б қосымшасын қолданып, түзулердің теңдеулерін жазып, олардың іздерінің координаталарын тауып, сызбалардың дәлдігін тексеріңіз. Сызбалардың, есептердің нөмірлері $4^{*(3.3)}$ - $6^{*(3.3)}$.

3.4. Жазықтықтың эпюрі. Деңгейлік және проекциялаушы жазықтықтар

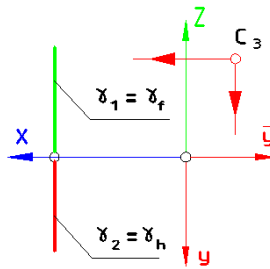
Жазықтықтар кеңістікте қалай берілсе, эпюрде де сол элементтердің екі проекциясымен беріледі. Бірақ деңгейлік және проекциялаушы жазықтықтар үшін эпюрде бір проекциясы (ол түзу ретінде) жеткілікті, оларды жазықтықтың *анықтаушы* проекциясы деп атайды.



а)

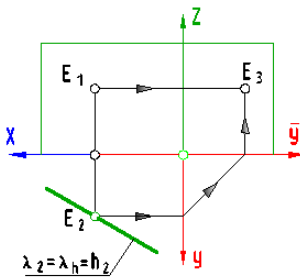


б)

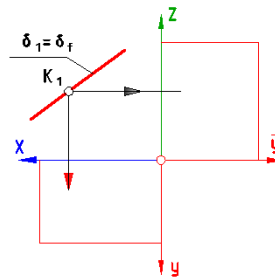


а)

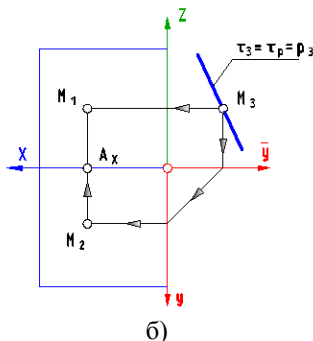
20-сурет



а)



а)



21-сурет

Сондықтан 14, а,ә,б-суреттегі деңгейлік жазықтықтардың проекциялары 20, а,ә,б-суреттегідей болады: $\alpha_2 \parallel O_x$, $\beta_1 \parallel O_x$, $\gamma_1 \parallel O_z$ не $\gamma_2 \parallel O_y$ және бұлар сәйкесінше α -ның *горизонталь ізі* $\alpha_2 = \alpha_h$, β -ның *фронталь ізі* $\beta_1 = \beta_f$ және γ -ның *фронталь* не *горизонталь іздері* $\gamma_1 = \gamma_f$, $\gamma_2 = \gamma_h$. Ал 15, а,ә,б-суреттегі δ , λ , τ проекциялаушы жазықтықтардың эпюрі 21, а,ә,б-суреттегідей болады: $\delta \perp \pi_1 \rightarrow \delta_1$ – бұл жазықтықтың жеткілікті проекциясы және оның *фронталь ізі*, яғни бұл δ -ның фронталь проекциялар жазықтығымен *қиылысу* сызығы. Сол сияқты $\lambda \perp \pi_2 \rightarrow \lambda_2$ – бұл жазықтықтың *анықтауыш* проекциясы және оның *горизонталь ізі*, яғни бұл λ – ның горизонталь проекциялар жазықтығымен *қиылысу* сызығы. Профиль проециялаушы τ жазықтығы үшін τ_3 проекциясы *анықтауыш* – жеткілікті және ол оның *профиль ізі* болады, яғни бұл оның профиль проекциялар жазықтығымен *қиылысу* сызығы. 20- және 21-суреттегі жазықтықтардың эпюрін ажыратып салыстырғанда байқайтынымыз: деңгейлік жазықтықтардың проекциялары – іздері осьтерге параллель, проекциялаушы жазықтықтардың проекциялары – іздері осьтерге көлбеу орналасады.

Х мырза: 20-сұрақ. Сызбада дербес орналасқан жазықтықтардың кез келген нүкте мен түзуінің проекциялары, олардың координаталары қалай анықталады? *Жауап.* Жалпы айтқанда ондай жазықтықтың барлық нүктелер мен түзулер (сызықтар) жиыны *анықтауыштың* бір проекциясына тиісті болады. Мысалы, $\alpha \parallel \pi_1$, $\beta \parallel \pi_2$, $\gamma \parallel \pi_3$ – бұлар *деңгейлік*

фронталь, горизонталь және профиль жазықтықтары (20-сурет). Сызбада оларды $\alpha_2, \beta_1, \gamma_1$ – *анықтауыш* проекцияларымен көрсетеді және осылар жоғарыда айтылған нүктелер мен түзулердің сәйкесіше горизонталь, фронталь, профиль проекцияларының жиынтығы болып табылады. Енді осылардың басқа проекцияларына тоқталайық. Мысалы, α ($\alpha || \pi_1$)-ны алайық. Оның нүктелері мен түзулерінің фронталь проекциялары π_1 -дің бүкіл өрісін алады, горизонталь проекциялары α_2 -ға тиісті болады. Сондықтан оның А нүктесінің x, z координаталары берілсе, онда $x_A = |OA_x|$ -қа тең, горизонталь проекциясы $A_2 \in \alpha_2$ және $|A_x A_2| = y_A$, ал фронталь A_1 проекциясы вертикаль байланыс сызықта Z_A -ға тең қашықтықта болады: $|A_x A_1| = Z_A$. Егер нүктенің координаталары берілмеген, тек тиістілігі белгілі болса: $M \in \alpha$, онда $M_2 \in \alpha_2$, ал оның фронталь M_1 проекциясы M_2 нүктесінен өтетін вертикаль байланыс сызығының кез келген нүктесі болуы мүмкін: $M_1 M_2 \perp O_x$. Ескертеміз: α -ның барлық нүктелерінің y_α -ординаталар мәні, β -ның барлық нүктелерінің Z_β -аппликаталар мәні, ал γ -ға тиісті нүктелердің X_γ -абсциссалар мәні тең болады.

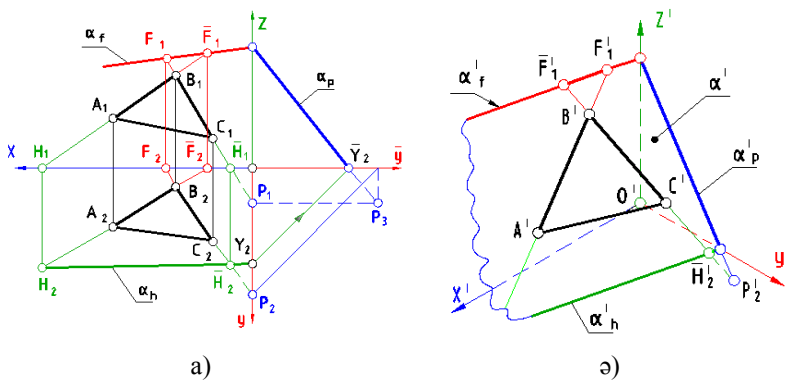
Енді 21-суреттегі δ, λ, τ проекциялаушы жазықтықтарға тиісті нүктелерімен жоғарыдағыдай жұмыс жасап көрелік. Мұнда λ жазықтығының нүктелерінің фронталь проекциялары π_1 -дің бүкіл өрісін алады (21, а-сурет), δ жазықтығының нүктелерінің горизонталь проекциялары π_2 -нің бүкіл өрісін алады (21, ә-сурет), ал τ жазықтығының нүктелерінің фронталь проекциялары π_1 -дің бүкіл өрісін алады, ол 21, б-суретінде.

Бұлардың *анықтауыш* проекциялары сәйкесінше $\delta_1, \lambda_2, \tau_3$ болады: λ -ның барлық нүктелерінің горизонталь проекциялары λ_2 -ге, δ -ның барлық нүктелерінің фронталь проекциялары δ_1 -ге, ал τ -дың барлық нүктелерінің профиль проекциялары τ_3 -ке тиісті. Мысалы $\lambda \perp \pi_2$ алайық, оған тиісті Е-нің горизонталь проекциясы $E_2 \in \lambda_2$ берілсін, онда Е нүктесінің x және y координаттары белгілі болды. Оның фронталь E_1 проекциясы E_2 нүктесінен өтетін вертикаль байланыс сызықтың бойында орналасады. Е нүктесінің z координатасы берілген болса ол $|E_x E_1| = Z_E$ арқылы табылады. Егер оның z координатасы берілмеген болса, онда E_1 нүктесі E_x E_2 түзуінің қайсыбір нүктесі болуға құқығы бар. Сол сияқты $K \in \delta \perp \pi_1$ берілсе, оның фронталь

K_1 проекциясы δ_1 -ге тиісті болып, оның профиль K_3 проекциясы K_1 нүктесінен өтетін горизонталь байланыс сызықтың бойында, ал K_2 проекциясы K_1 -ден өтетін вертикаль байланыс сызықтың бойында болуы керек. Осындай әдіспен τ жазықтығымен оған тиісті M нүктесін алып та, жұмыс істеуге болады.

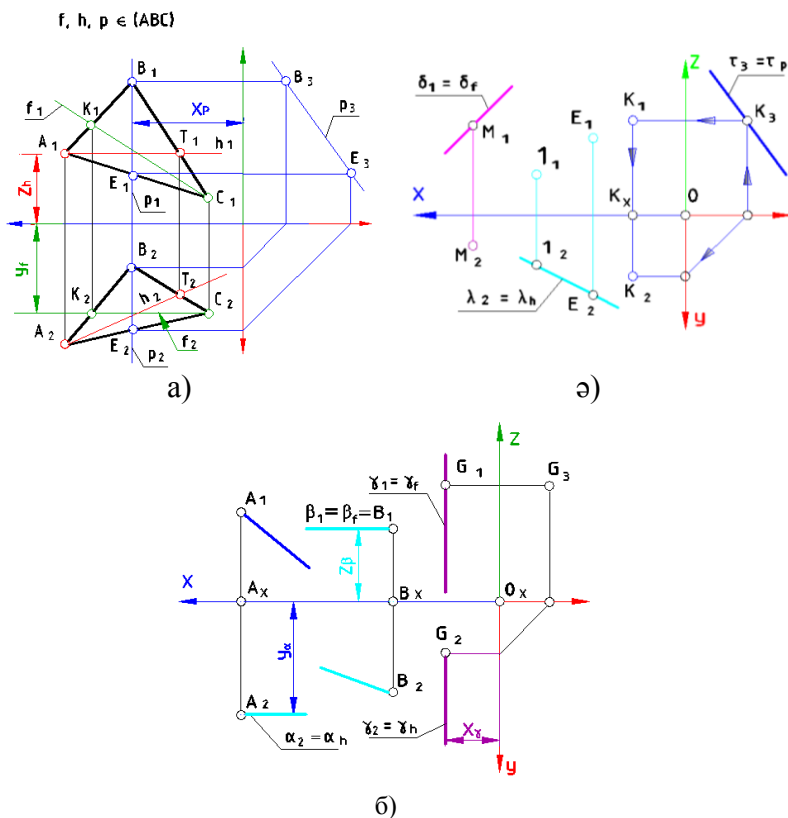
3.5. Жазықтықтың іздері

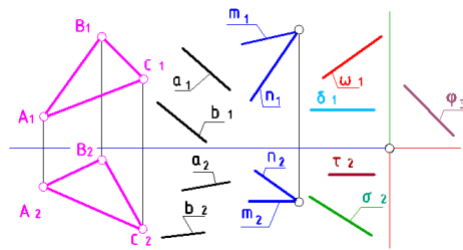
Х мырза: енді 21-сұрақтың кезегі келді. Эпюрде жалпы жағдайдағы жазықтықтың іздері қалай табылады? Жауап. Жалпы жағдайдағы жазықтықты екі қиылысқан сызық анықтайды, сондықтан осы екі түзудің фронталь, горизонталь, профиль іздерін сызбада анықтап, сәйкесінше оларды қосып, жазықтықтың үш ізін эпюрде құруға болады. 22, а-суретте α -ның іздерін құру үшін алдымен 8-суретке қатысты мәтінді қайта шолып, 22, а-суретте AB -ның фронталь $F = AB \cap \pi_1$ ізін және BC -ның фронталь $\bar{F} = BC \cap \pi_1$ ізін құру керек. Нәтиже: α -ның фронталь ізі $\alpha_f(F_1\bar{F}_1)$ болды. Горизонталь проекциясында: AB -ның $H = AB \cap \pi_2$ және BC -ның $\bar{H} = BC \cap \pi_2$ іздері α -ның горизонталь ізі $\alpha_h(H_2\bar{H}_2)$ болды. Осындай әдіспен жазықтықтың профиль $\alpha_p(P_3\bar{P}_3)$ ізін де құруға болады. Жазықтықтың фронталь және горизонталь іздері бойынша профиль ізін α_p табуға болады. Берілген α -ның іздері түсінікті болуы үшін осы есептің аксонометриясын (22, ә-сурет) салып көріңіз. Бұл екі суретті салыстырып, түсініп алыңыз.



22-сурет

Х мырза: 22-сұрақ. Сызбада берілген $\alpha(ABC)$ жазықтығының деңгейлік: фронталь, горизонталь, профиль түзулерін қалай құруға болады? Алдымен жазықтыққа тиісті фронталь (не горизонталь мен профиль) сызықтары шексіз көп және олар өзара параллель болатындығын ұмытпайық. Одан кейін 2.2-тармақтағы 8,8, а-сұрақтарының аксонометриядағы жауабын шолып шығып, осы сұрақтың жауабын құрайық (23, а-сурет). Сұрақ жауабын құруда мына шарттарды есте сақтау және қолдану қажет: $f \parallel \pi_1 \rightarrow y = \text{const}$, $h \parallel \pi_2 \rightarrow z = \text{const}$, $p \parallel \pi_3 \rightarrow x = \text{const}$.





в)
23-сурет

Сызуды фронталь f түзуінің *горизонталь* ($y=\text{const!}$) проекциясынан бастаймыз, оны берілген сызбада лайықты деп C_2 -ден жүргіземіз: $C_2 \in f_2 \parallel O_x$. Бұл түзудің AB түзуімен қиылысу нүктесін – $K_2 = f_2 \cap A_2B_2$ қолданып, *горизонталь проекциясында* фронталь $f_2 = C_2K_2$ табамыз! Тиістілік арқасында $K_1 \in A_1B_1$ нүктесі табылып, фронтальдың *фронталь* проекциясын – $f_1 = C_1K_1$ -ді жүргіземіз! Осындай әдіспен ABC жазықтығының горизонталін салып көрейік. Горизонталь h түзуін *фронталь* ($z=\text{const!}$) проекциясынан бастап, оны сызбада лайықты деп A_1 -ден жүргіземіз: $A_1 \in h_1 \parallel O_x$. Бұл түзудің BC түзуімен қиылысуы: $T_1 = h_1 \cap B_1C_1$. *Горизонтальдың фронталь* проекциясы табылды: $h_1 = A_1T_1$! Тиістілік арқасында $T_2 \in B_2C_2$ табылып, горизонтальдың *горизонталь* проекциясы $h_2 = A_2T_2$ анықталды! Осы әдіспен ABC жазықтығының профиль түзуін құрыңыздар p (p_1, p_2, p_3).

Қорытынды. Бұл тарауда кеңістіктің *негізгі* элементтері нүкте, түзу, жазықтықтың негізгі сызбасы – эпюрмен таныстық, ондағы сызбаларды оқып, талдауды, салуды үйрендік. Кез келген нүктенің координаттарын анықтауды, деңгейлік, проекциялаушы және жалпы жағдайдағы түзулері мен жазықтықтарды ажыратуды, олардың іздерін табуды үйрендік. Бұл біздің бастапқы байлығымыз! Ендігі мақсатымыз – осыдан алған барлық білімдерімізді қолданып, сызбада *есептерді шешу*.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. $A(5,3,7)$, $B(2,5,3)$ нүктелердің Монж эпюрін салыңыз, AB түзуінің координатасы нөлге тең үш нүктені анықтаңыз. *Түзудің ізі* деп аталатын осы нүктелердің координаттарын жазыңыз: $I = AB \cap \pi_1$, $II = AB \cap \pi_2$, $III = AB \cap \pi_3$.

2. $A(5,3,7)$ нүктесінен өтетін, $\pi_1(xOz)$ жазықтығына параллель, y осін қиып өтетін f түзуінің эпюрін салыңыз.

3. Осы f түзуінің горизонталь ізінің координаттарын жазыңыз.

4. $B(2,5,3)$ нүктесінен өтетін, $\pi_2(xOy)$ жазықтығына параллель, z осін қиып өтетін h түзуінің эпюрін салыңыз.

5. Осы h түзуінің фронталь ізінің координаттарын жазыңыз.

6. Қандай түзулерді фронталь және горизонталь деп атайды?

7. $C(10,8,5)$ нүктесінен өтетін π_1 , π_2 , π_3 жазықтықтарына перпендикуляр үш түзудің эпюрін салыңыз.

8. Монж эпюрінде $\pi_1(xOz)$, $\pi_2(xOy)$, $\pi_3(yOz)$ жазықтықтарына перпендикуляр, $A(5,3,7)$ нүктесінен өтетін үш жазықтықты сызбада салыңыз.

9. $A(5,3,7)$, $B(2, 5, 3)$ нүктелерінен өтетін үш проекциялаушы жазықтықты $\alpha \perp \pi_1$, $\beta \perp \pi_2$, $\gamma \perp \pi_3$ эпюрге салыңыз.

10. 18, ә-, 22, ә-суреттегі түзулермен жазықтықтардың түрлерін ажыратып, аттарын атап шығыңыздар.

11. 19, в, 23, в-суреттерді оқып, берілген түзулер мен жазықтықтарды атап шығыңыз.

12. 23, ә-суреттегі деңгейлік жазықтықтар нүктелері қандай шартқа тәуелді?

13. 23, б-суреттегі проекциялаушы жазықтықтар нүктелерінің координаттарын анықтаңыз.

4. НЕГІЗГІ ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР МОНЖ ЭПЮРІНДЕ

Бұл тарауда негізгі сызба – эпюрде жұмыс жасаймыз, аксонометрияны сызба түсінікті болу үшін қолданамыз. *Негізгі* позициялық есептер – ол нүкте, түзу, жазықтықтардың *өзара орналасуын* анықтайтын есептер. Өзара орналасуда олардың *тиістілігі, параллельдігі және қиылысуы* анықталады. Мысалы: нүкте жазықтыққа тиісті ме, жазықтық пен түзу өзара параллель ме, әлде қиылыса ма, екі жазықтықтың қиылысу сызығы қалай анықталады, т.с.с. есептер кездеседі. *Жалпы* позициялық есептерде беттерге қатысты орналасулар анықталады, *олармен келесі тарауларда кездесеміз*. Осыларды шешуге дайынсыздар ма? Бастаймыз, батыл кірісеміз!

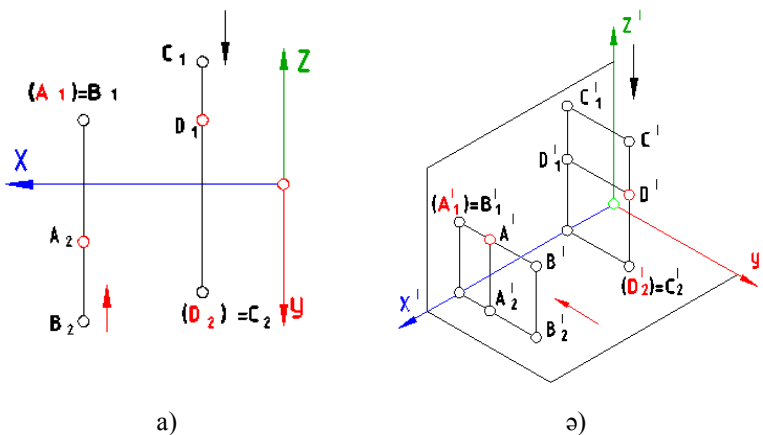
Позициялық есептерге *кіріспе* ретінде айтатынымыз: 1 – бұл есептер *оңай* шешуін табады, егерде түзу не жазықтықтың біреуі *проекциялаушы* болған жағдайда. 2 – егер олар жалпы жағдайда орналасса, шешу алгоритмдерінде *қосымша түзулер және проекциялаушы жазықтықтар* қолданылады.

4.1. Тиістілік есептері

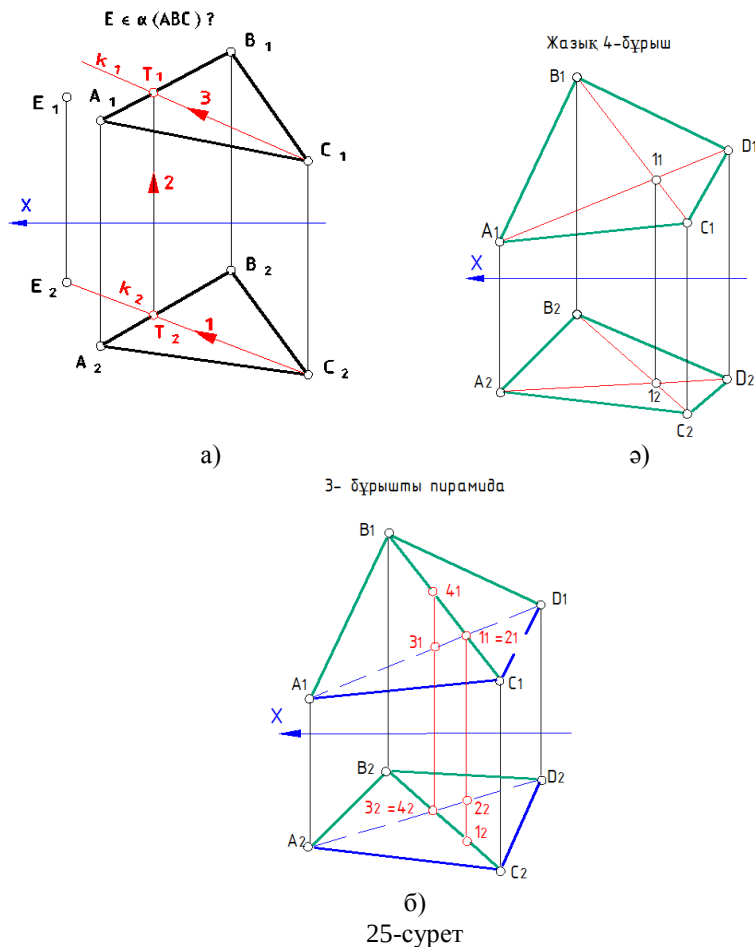
Жалпы тиістілік есебі проекциялаудың *2-қасиетіне* байланысты шешіледі: нүкте кеңістікте түзуге тиісті болса, онда сызбада оның проекциялары түзудің проекцияларына тиісті болады. Жеке есеп ретінде ол саналмайды.

1-негізгі позициялық есеп. Нүктелердің *бәсекелес* орналасуы. Бұл есеп сызбада *көрінетіндікті* анықтауға арналған, осы есеппен бұл мәселе *толық шешуін* табады. Ол проекциялау ерекшелігіне байланысты: 1-суреттен бастап, байқасаңыздар, қолданып отырған проекциялау әдісінде *проекцияланатын зат көрермен және π – проекциялар жазықтығының арасында орналасады*, 24, а, ә-суретте *көрерменнің* орны нұсқарлармен (бағытша) көрсетілген. Есептің шарты: сызбада төрт нүкте берілсін А, В және С, D. А, В нүктелері үшін $X_A = X_B$ және $Z_A = Z_B$, С, D нүктелері үшін $X_C = X_D$ және $Y_C = Y_D$. Бұлардың қос-қостап координаттары тең, сондықтан проекциялары

беттеседі: $A_1 = B_1$, $C_2 = D_2$ (24, а, ә-суреттер). Беттескен проекцияларда қайсы нүкте *көрінеді*, қайсысы *көрінбейді*, бәсекелестік осында. Шешу. Сызбада $A_1 = B_1$, осы екі нүктенің арасында *фронталь бәсекелестік* пайда болды. Фронталь проекциясында қайсы нүкте *көрінеді*? Оның шешуін 2-ші проекциядан табамыз: егер $Y_A < Y_B$ болса, онда B_1 нүктесі *көрінеді*, себебі ол *көрерменге* жақын, A_1 оның астында қалады. Теңсіздік керісінше болса, A_1 нүктесі *көрінетін* болады. Сызбада проекциялау қағидасы бағытшалармен көрсетілген. А және В нүктелерін *фронталь бәсекелес* деп айтады. С және D нүктелерін *горизонталь бәсекелес* нүктелер деп атайды, себебі олар үшін $X_C = X_D$ және $Y_C = Y_D$, сондықтан $C_2 = D_2$. Көрінетіндіктің жауабын фронталь проекциясынан іздейміз: егер $Z_C < Z_D$ болса, онда D_2 нүктесі *көрінеді*. Керісінше болса C_2 нүктесі *көрінеді* (*нұсқарларға* назар аударыңыз!). Өзіндік жұмыс жасап, басқа нүктелерді алып, көрінетіндік мәселесін түсініп, білгеніңізді тексеріңіз.



24-сурет



2-негізгі позициялық есеп. Сызбада $\alpha(ABC)$ жазықтығы және E нүктесі берілсін. E нүктесі жазықтыққа тиісті ме (25, а-сурет)? Осы есептің бір жауабы аксонометрияда 10-сұрақтың жауабында берілген еді (13, ә-сурет). Онда E нүктесі жазықтыққа тиісті болған, оның жетіспейтін проекциясы анықталған. Ұсынылып отырған есепте *тиістілікті тексеру* керек болып тұр. Бұл екі есептің шешу алгоритмі бірдей. Осыны көрейік!

Шешу. 1-алгоритм. Жазықтық нүктелер мен түзулердің жиіні екенін, есептің шешуі жазықтықтың және проекциялаудың қасиеттеріне байланысты екенін ескеруді ұмытпайық.

Талдау: егер E нүктесі жазықтыққа тиісті болса, онда E нүктесінен жазықтыққа тиісті шексіз көп көмекші түзулерін жүргізуге болады.

1. Көмекші $k(CE)$ түзуі – ең лайықтысы, сызбада ол C_2E_2 (не B_1E_1 түзуін алуға болады). Осы түзудің фронталь проекциясы E_1 нүктесінен өтетін болса, онда $E \in \alpha$ болады! Осыны тексереміз.

2. k -ның фронталь проекциясын анықтау үшін алдымен оның AB түзуімен қиылысу T нүктесін анықтаймыз: сызбада $a_2 \cap A_2B_2 = T_2$.

3. T нүктесін және k түзуін фронталь проекциясында табамыз:

$$T_1 \in B_1 \rightarrow k_1(C_1T_1).$$

4. *Салыстыру:* сызбада $E_1 \in k_1$ ма, әлде $E_1 \notin k_1$? Фронталь проекциясында E нүктесі k түзуіне тиісті болса, онда E нүктесі α жазықтығына тиісті болғаны. Керісінше E_1 нүктесі k_1 түзуіне тиісті емес болса, онда E нүктесі де α жазықтығына тиісті емес болады. Есептің шешуі сызбаның шешуіне сәйкес: сызбада $E_1 \notin k_1$ сондықтан $E \notin \alpha$.

1-ескерту. Жазықтық бір түзуге тиісті емес үш нүктемен бірмәнді анықталады. Төртінші нүктесін, тек оның жазықтыққа тиістілігін тексеріп, алуға болады. Тексерместен бұрын нүктелерді жазықтыққа қосатын болсаңыз, сызбада жазықтық емес, үшбұрышты пирамида не жеке нүктелер жиынтығы берілген болады. Шынында да, 25, ә, 25, б-суреттерді салыстырайық: 25, ә-суретте жазық төртбұрыш берілген, оның диагональдарының қиылысу нүктесі $1(1_1, 1_2)$ бар! 25, б-суретте үшбұрышты пирамида! 25, б-суретте пирамиданың көрінбейтін қырлары олардың 1, 2 фронталь-, 3,4 горизонталь бәсекелес нүктелері арқылы анықталды.

Х мырзаның ұсынысы: сызбада қалауыңызша алынған төрт K, M, L, N нүктенің екі проекциясын құрып, олар кеңістікте бір жазықтыққа тиісті ме, жоқ па, тексеріңіз, екі түзуді жүргізіп: KM

және LN. Тиісті болса, диагональдарының қиылысу нүктесінің координаталарын анықтаңыз.

2-ескерту. Байқасаңыздар, есептің шешу жолдарын жазып шығару, оны түсініп алу оңай емес, бірақ сызбада, шешуін біле тұра, орындау оңай және ол көп уақытты алмайды! **X мырза:** сіздерге осындай жағдайлар оқуда кездесе береді, тіпті күтіп тұратын сияқты болады. Осыған келісесіздер ме? Онда алға! Жаңа есептерді меңгеруге асығайық!

4.2. Қиылысу, параллельдік есептері

Бұл есептер осы тараудың кіріспесінде айтылғандай оңай шешіледі, егер есептің элементтерінің біреуі проекциялаушы жағдайда болса. Осыған сәйкес алдымен оңай *қосымша*, *ілеспе* есептермен танысайық.

1-қосымша есеп. 26, а-суретте α (ABC) жазықтығы және фронталь проекциялаушы m түзуі берілсін. Осылардың қиылысу M нүктесін анықтау керек: $M = \alpha(ABC) \cap m$. Шешу *алгоритмі* 1қ.

1. Берілген шартты *талдау*: $m \perp \pi_1$, сондықтан m -ның фронталь проекциясы нүкте, сол нүкте қиылысу M нүктесінің алғашқы проекциясы: $M_1 = m_1$.

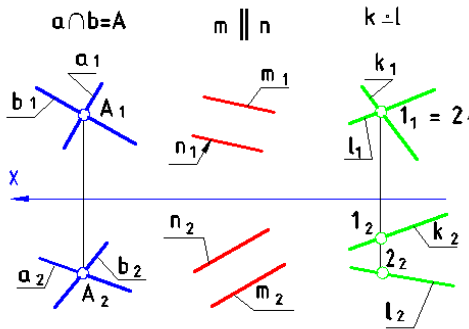
2. M нүктесінің горизонталь проекциясын табу үшін *қосымша* α түзуінің фронталь проекциясы жүргізіледі, сызбада ол $\alpha_1(A_1M_1)$. Бұл түзудің BC түзуімен қиылысу нүктесі $K_1 = \alpha_1(A_1M_1) \cap B_1C_1$ анықталады.

3. K -ның горизонталь проекциясы B_2C_2 -дан табылады: $K_2 \in B_2C_2$, одан қосымша түзудің горизонталь проекциясы $\alpha_2(A_2K_2)$ сызбада пайда болды.

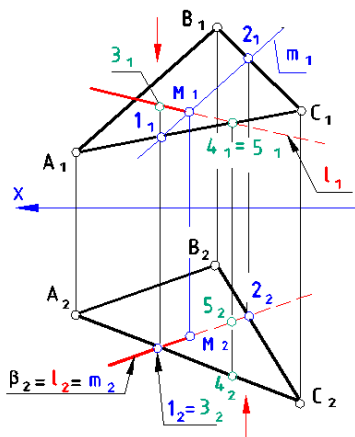
2. Фронталь проекциясында l_1 түзуі тиістілік арқасында анықталады: $l_1(1_1 2_1)$, мұнда: $1 = AC \cap \beta$, $2 = BC \cap \beta$. $l(l_1, l_2) = \alpha \cap \beta$ бұл *ізделінген қиылысу* сызығы.

3. Енді α -ның көрінетін бөлігін табамыз, ол фронталь проекциясында l_1 түзуінің сол жағындағы бөлігі (горизонталь проекциясында бағдарша оны көрсетіп тұр).

3-негізгі позициялық есеп. Түзулер айқасып, қиылысып және параллель орналаса алады (кіріспедегі 1-сурет). Егер кеңістікте екі түзу берілген болса, символдық түрде олардың орналасуы: $\alpha \cap b = C$ – екі түзу C нүктесінде қиылысады, $c \perp d$ – мұнда екі түзу қиылыспайды, айқасады, $m \parallel n$ – мұнда екі түзу өзара параллель (27-сурет). Бұл жерде бір жазықтықта жатқан сызықтар өз алдына екі жазықтықты құрайды: $\alpha \cap b$ және $m \parallel n$, ал $c \perp d$ түзулері бір жазықтыққа тиісті емес, олардың проекциялардағы қиылысу $1_1 = 2_1$ нүктелері тек *бәсекелес* нүктелер, сондықтан олар айқасады.



27-сурет



28-сурет

4-негізгі позициялық есеп. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы *үш түрлі* болуы мүмкін: олар *қиылысады*, *параллель* болады және түзу жазықтыққа *тиісті* болуы мүмкін. Осы үш жағдай алғы сөзде (қараңыз) келтірілген негізгі аксиомалардан туындайды. Олардың ортақ тек *бір нүктесі нақты түрде* не *шексіз алыста*, *өзіндік емес* болса – бұл қиылысу не параллельдіктің белгісі. *Екі ортақ нүктесі* бар болса – бұл тиістіліктің белгісі. Осының бәрін *сызбадан* анықтауға батыл кірісеміз. Алдымен 26, б-суреттегі оңай қосымша 3-есепті еске түсірейік, онда екі жазықтықтың біреуі *проекциялаушы* болған, осы есептің алдағы уақытта көмегі болады. Есептің *шарты*. Сызбада α (ABC) жазықтығы және l түзуі берілсін (28-сурет). Осы түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын анықтау керек, ортақ нүктесі бар болса *түзудің көрінбейтін бөлігін* анықтау керек. Шешу. 2-алгоритм.

1. *Талдау*: 2 қосымша алгоритмнің негізінде *қосымша проекциялаушы* жазықтықты міндетті түрде l түзуінен өткізу керек. Кеңістікте ондай шексіз көп жазықтықтардың ішінде 2 проекциялаушы жазықтық l түзуінен өтеді, осының біреуін алу керек. *Қосымша горизонталь* проекциялаушы β жазықтығын аламыз, сызбада: $l_2 \in \beta_2$ болсын (β -ны фронталь проекциялаушы етіп алса, онда $l_1 \in \beta_1$).

2. Енді осы β жазықтығының берілген $\alpha(ABC)$ -мен қиылысу m сызығын анықтаймыз: $\beta \cap \alpha = m$. Сызбада, горизонталь проекциясында ол l түзуімен беттеседі: $m_2 = l_2$. Бұл түзудің AC , BC түзулерімен қиылысуын табу керек міндетті түрде: $\beta_2 \cap A_2C_2 = 1_2$, $\beta_2 \cap B_2C_2 = 2_2$, яғни $m_2(1_2 2_2)$ болды.

3. Тиістілік арқасында оның фронталь проекциясы табылды, ол $m_1(1_1 2_1)$ болады: $1_1 \in A_1C_1$, $2_1 \in B_1C_1$.

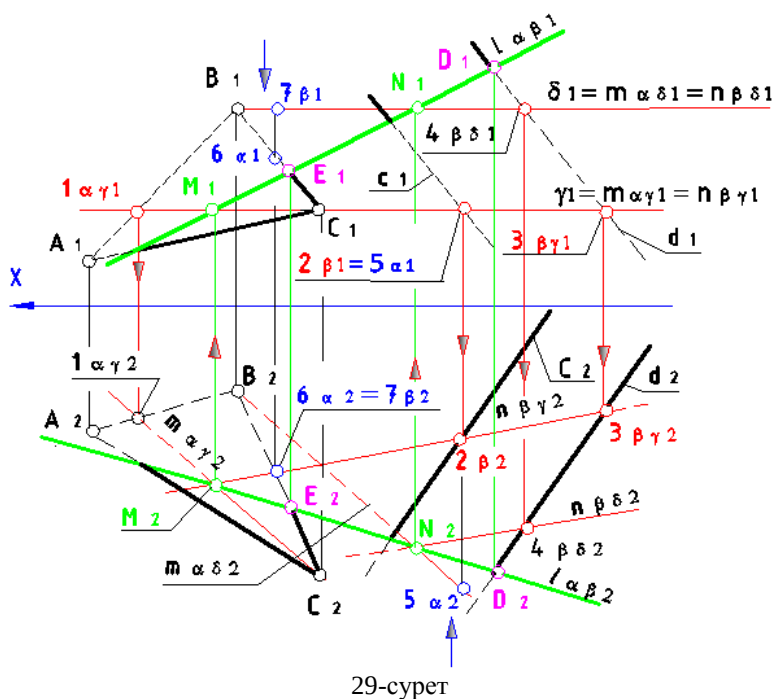
4. Енді 2к-есептегідей m_1 мен l_1 түзулерінің өзара орналасуын *салыстырамыз*: олар қиылыса ма $m_1 \cap l_1 = M_1$ нүктесінде, өзара параллель ме $m_1 \parallel l_1$, не болмаса беттесе ме $m_1 = l_1$? Есептің шешуі осы сұрақтардың жауабына сәйкес. Сызбада қиылысу $M(M_1, M_2)$ нүктесі бар, яғни түзу мен жазықтық кеңістікте *қиылысады* M нүктесінде (28-сурет). Егер сызбада $m_1 \parallel l_1$ болса, онда кеңістікте l және α *параллель* $l \parallel \alpha$, егер сызбада $m_1 = l_1$ болса, онда кеңістікте түзу жазықтыққа *тиісті*: $l \in \alpha$. Сызбада есептің шешуі $\alpha(ABC) \cap l = M$.

5. Енді l түзуінің көрінбейтін, яғни оның жазықтықтың астындағы бөлігін табу керек, оны *бәсекелес нүктелер* (1-позиц. есеп) арқылы табамыз. *Горизонталь* проекциясында *бәсекелес* $1_2 = 3_2$ нүктелердің 1-шісі AC түзуіне, 3-шісі l түзуіне тиісті болсын. Осылардың фронталь проекциясындағы орналасуын *зерттейміз*: 3_1 нүктесі көрерменге (бағдаршаға) жақын 1_1 нүктесіне қарағанда, сондықтан *горизонталь* проекциясында l түзуінің сол жақ бөлігі көрінеді, оң жағы M_1 нүктесінен кейін көрінбейді. *Фронталь* проекциясында *бәсекелес* нүктелер $4_2 = 5_2$ болсын, мұнда 4-ші нүкте AC түзуіне, 5-ші нүкте l түзуіне тиісті дейік. Енді осы нүктелердің *горизонталь* проекциясындағы орналасуын *тексереміз*: 5_1 нүктеге қарағанда, 4_1 нүктесі көрерменге (бағдаршаға) жақын, сондықтан *фронталь проекциясында* l түзуінің сол жақ бөлігі *көрінеді*, оң жағы M_1 нүктесінен кейін *көрінбейді*.

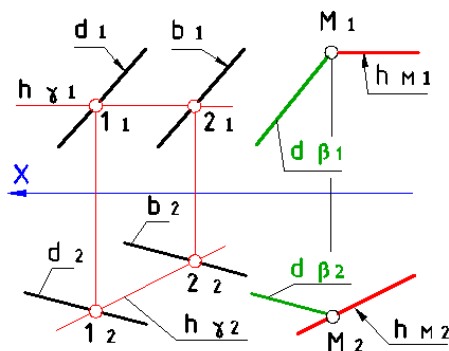
Х мырзаның ұсынысы: 28-суреттің негізінде шағын оқу-зерттеу жұмысын (СОЗЖ) орындаңыз. Жеке сызбада $\alpha(ABC)$ жазықтығын құрып, l түзуін профиль проекциялаушы етіп алыңыз. Осылардың қиылысу нүктесін тауып, оның координаталарын анықтаңыз. l түзуінің көрінбейтін бөлігін көрсетіңіз. Оқу құралында берілген Б қосымшасын қолданып,

қиылысу нүктесінің координаталарын тексеріңіз. Сызбаның, есептің нөмірі $7^*_{(4,2)}$ болсын.

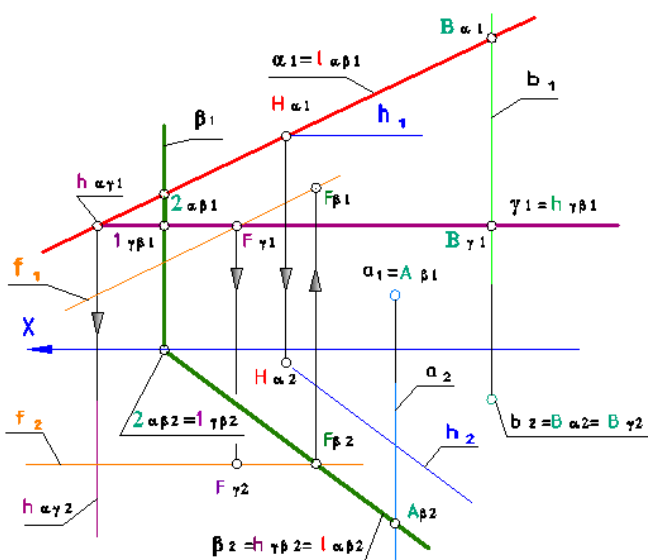
Ескерту. Осы есеп сызба геометрияның 1-қиын есептеріне жатады, ал шешу алгоритмінің 5-қадамын қиын есептің ішіндегі қиын бөлігі десе болады. **Х мырза:** қиындықтардан жасымай сызба геометрияны оқуды ары қарай жалғастырайық! Алға!



5-негізгі позициялық есеп. Екі жазықтықтың өзара орналасуы. Екі жазықтық кеңістікте өзара *параллель* болады, не *қиылысады*, немесе *беттеседі*. Сызбада осы 3 жағдайды шешу жолы қандай? Бұл есепті 4-есептің алгоритмін 2 рет қолданып шешуге болады.



30-сурет



31-сурет

Себебі жазықтықтардың қиылысу түзуі 2 нүктемен анықталады. *Талдау:* 2-алгоритмде қосымша проекциялаушы (3-кос. есепті қараңыз) жазықтық қолданылған. Бұл жерде осы

қосымшамен үш жазықтықтың *бір ортақ нүктесі* болатыны ескеріліп, жазықтықтардың қиылысу сызығы осындай екі нүкте арқылы анықталады. Айтылғанды жүзеге асырайық.

29-суретте $\alpha(ABC)$ және $\beta(c\cap d)$ жазықтықтары берілген. Осы екі жазықтықтың қиылысу l түзуін анықтау керек: $\alpha\cap\beta = l$. Кез келген түзу оның екі нүктесімен анықталады, сол l түзуінің 2 нүктесін анықтап көрейік. Шешу. *3-алгоритм.*

1. *Қосымша* $\gamma\perp\pi_1$ фронталь проекциялаушы жазықтығын алайық және оны C нүктесінен жүргізейік: $C\in\gamma$.

2. Енді үш жазықтықтың ортақ бір M нүктесін анықтап: $\gamma\cap\alpha\cap\beta=M$, ол $M\in l$ түзуіне тиісті екенін естен шығармайық. Сызбада: $C_1\in\gamma_1$, γ -ның берілген жазықтықтармен кеңістікте қиылысуы: $\gamma\cap\alpha=m_{\alpha\gamma}$, $\gamma\cap\beta=n_{\beta\gamma}$. Сызбада: $\gamma_1=m_{\alpha\gamma 1}=n_{\beta\gamma 1}$ және $m_{\alpha\gamma 1}(C_1 1_1)$, $n_{\beta\gamma 1}(2_1 3_1)$ – бұл фронталь проекциялар жазықтығында. Сызбаны мұқият тексеріп отырыңыз!

3. Енді осы $m_{\alpha\gamma}$, $n_{\beta\gamma}$ түзулердің горизонталь проекцияларын тиістілік арқылы табамыз: $1_2\in A_2B_2$ және $m_{\alpha\gamma 2}(C_2 1_2)$, $2_2\in c_2$, $3_2\in d_2$ және $n_{\beta\gamma 2}(2_2 3_2)$, M -ның горизонталь проекциясы: $M_2=m_{\alpha\gamma 2}\cap n_{\beta\gamma 2}$ табылды!

4. M_1 нүктесі γ_1 -ге тиісті: $M_1\in\gamma_1$. Бұл нүктенің толық белгісі $M_{\alpha\beta\gamma}$.

Енді алгоритмнің осы төрт қадамын қайталаймыз, бірақ δ жазықтығы үшін: $\delta\parallel\gamma$. Онда $\delta\cap\alpha\cap\beta=N$ – үш жазықтықтың *ортақ N нүктесі* қиылысу сызықтың екінші нүктесі болады. Біздің мақсатымыз осы $N\in l$ нүктесін анықтап, $\alpha\cap\beta = l(MN)$ – есептің шешуін табу.

5. Сызбада: $B_1\in\delta_1\parallel\gamma_1$. $\delta\cap\alpha=m_{\alpha\delta}$. $\delta\cap\beta=n_{\beta\delta}$. Сызбада: $m_{\alpha\delta 1}=n_{\beta\delta 1}=\delta_1$.

6. Есептің $\delta\parallel\gamma$ шартына сай сызбада $B_1\in m_{\alpha\delta 1}$ және $m_{\alpha\delta 1}\parallel m_{\alpha\gamma 1}$, сол сияқты $4_1=\delta_1\cap d_1$ және $4_1\in n_{\beta\delta 1}\parallel n_{\beta\gamma 1}$. Мұнда δ мен γ -ның берілген α , β -мен қиылысу сызықтары өзара параллель!

7. Енді осы екі түзудің қиылысу N нүктесін анықтаймыз горизонталь проекциясында: $m_{\alpha\delta 2}\cap n_{\beta\delta 2}=N_{\alpha\beta\delta 2}$.

8. N нүктесінің фронталь проекциясы да табылды: $N_{\alpha\beta\delta 1}\in\delta_1$ тиістілікпен.

9. Қорытынды қадам: $\alpha\cap\beta = l(MN)$ – қиылысу сызығы сызбада осылай анықталды!

10. Енді көрінетіндікті тексерейік! Сызбада α мен β -ның қайсы бөліктері қай проекцияда көрінбейді? Көріну шекарасы $l(MN)$ болатыны түсінікті.

3'-алгоритм.

10.1. *Горизонталь* проекциясында α мен β -ның 2 бәсекелес $6_{\alpha 2} = 7_{\beta 2}$ нүктелері алынды, мұнда $6_{\alpha} \in BC, 7_{\beta} \in p_{\beta \gamma}$.

10.2. Осы нүктелердің фронталь проекцияларын құрып, олардың орналасуын *салыстырамыз*.

10.3. $7_{\beta 1}$ нүктесі $6_{\alpha 1}$ нүктеге қарағанда көрерменге жақын, сондықтан *горизонталь* проекциясында $l(MN)$ -нен жоғары α -ның ($A_2 B_2$) бөлігі көрінбейді, β -ның бөлігі көрінеді.

10.4. *Фронталь* проекциясында α мен β -ның 2 бәсекелес $2_{\beta 1} = 5_{\alpha 1}$ нүктелері алынды, мұнда $5_{\alpha 1} \in m_{\alpha \gamma 1}, 2_{\beta 1} \in p_{\beta \gamma 1}$.

10.5. Осы нүктелердің горизонталь проекцияларын құрып, олардың орналасуын *салыстырамыз*.

10.6. $5_{\alpha \gamma 2}$ нүктесі $2_{\beta \gamma 2}$ нүктеге қарағанда горизонталь проекциясында көрерменге жақын, сондықтан *фронталь* проекциясында $l(MN)$ -нен төмен α -ның (C_2) бөлігі көрінеді, β -ның бөлігі көрінбейді.

Х мырза: 23-сұрақ. Берілген сызбада жазықтықтар қиылысқан болды. Ал олар кеңістікте *параллель*, не *беттескен* болса, оны сызбадан қалай ажыратамыз? Жауап. Жоғарыдағы 2-алгоритмнің 4-адымындағыдай *салыстыруды* қолданамыз. Егер горизонталь проекциясында $m_2 \cap n_2$ болса, онда α мен β қиылысады. Егер сызбада $m_2 = n_2$ болса, онда α мен β беттеседі. Егер сызбада $m_2 \parallel n_2$, онда α мен β *параллель* болады немесе қолданған қосымша жазықтықтар $\delta \parallel \lambda$ берілген α мен β -ның қиылысу сызығына параллель алынған. Оны тексеру үшін δ мен λ параллель болмауы керек.

Х мырза: 24-сұрақ. Екі α мен β жазықтықтың қиылысу түзуі $l(MN)$ табылды дейік, енді α -ның кез келген түзуі β -мен қай нүктеде қиылысады? β -ның кез келген түзуі α мен қай нүктеде қиылысады? Жауап. Оның жауабы сызбада *оңай* табылады, себебі ол нүктелердің барлығы $l(MN)$ түзуіне міндетті түрде *түісті* болуы керек! Шынында да $BC \cap \beta = E \in l(MN), d \cap \beta = DE \in l(MN)$! Өзіндік жұмыс жасап, жазықтықтарға тиісті кез келген

түзулерді сызбадан алып, олардың басқа жазықтықпен қиылысу нүктелерін табыңыз.

Х мырза: 24'сұрақ. Кеңістікте екі жазықтыққа параллель түзу сызбада қалай орналасуы керек? Жауап. Ондай түзу екі жазықтықтың қиылысу сызығына міндетті түрде параллель!
Х мырза: олай болса 29-суретте кез келген К нүктесін алып, оны бастыра α мен β -ға параллель түзуді жүргізіңіз.

Лесуши, қосымша есептер. 4-ші қос. есеп. Берілген $\gamma(d \parallel b)$ жазықтығы және М нүктесі, γ -ға тиісті емес. М нүктесінен γ -ға және горизонталь $\pi_2(xOz)$ жазықтығына параллель h_M – горизонтальді жүргізу керек:

$M \in h_M \parallel \gamma, h_M \parallel \pi_2$ (30-сурет).

Шешу. 4-қ. алгоритм. Берілген шартты *талдайық:* М нүктесінен γ -ға параллель етіп шексіз көп түзулерді жүргізуге болады, бірақ ол горизонталь болуы үшін h_M түзуі γ -ның h_γ горизонталіне параллель болуы керек! Сондықтан сызбада:
1. Алдымен γ -ның горизонталін құрамыз: 1_{d1} нүктесінен $h_{\gamma1} \parallel O_x$ түзуін жүргіземіз, оның b_1 түзуімен қиылысу 2_{b1} нүктесін белгілейміз.

2. $h_{\gamma2}$ түзуі 1_{d2} 2_{b2} нүктелерімен (тиістілік шарты!) анықталды.

3. Енді М нүктесінен h_γ түзуіне параллель h_M түзуін жүргіземіз: $M_1 \in h_{M1} \parallel h_{\gamma1}$, $M_2 \in h_{M2} \parallel h_{\gamma2}$, есептің шешуі осы h_M түзуі!

5-қос. есеп. 31-суретте *проекциялаушы* α, β, γ жазықтықтарымен *деңгейлік* f, h және *проекциялаушы* a, b түзулері берілген. Осылардың қайсысы өзара *параллель*, қайсысы *қиылысады* не *перпендикуляр* болады? Сызбаны дұрыс оқуды үйренейік. Алдымен *жазықтық* пен *түзулердің* өзара орналасуын табайық.

1. Берілген $\alpha \perp \pi_1$ мен f, h, a, b түзулерінің орналасуын тексереміз. Сызбада $a_1 \parallel f_1$, сондықтан f түзуі α -ның фронталь түзуіне параллель: $\alpha \parallel f \rightarrow f \parallel \alpha$. Берілген a түзуі α -ның горизонталь h_α түзуіне параллель: $\alpha \parallel h_\alpha \rightarrow a \parallel \alpha$, ал b түзуімен α жазықтығы B_α нүктесінде қиылысады: $b_1 \cap a_1 = B_{\alpha1}$. Бұл жазықтық h түзуімен де H_α нүктесінде қиылысады: $h_1 \cap a_1 = H_{\alpha1}$.
Қорытынды: $\alpha \parallel f, a$ және $\alpha \cap h, b$.

2. Берілген $\beta \perp \pi_2$ мен f, h, a, b түзулерін тексереміз. Сызбада $\beta_2 \parallel h_2$, сондықтан h түзуі β -ның h_β горизонталіне параллель: $h \parallel \beta$. β жазықтығы a түзуімен қиылысады A нүктесінде: $\beta_2 \cap a_2 = A_{\beta 2}$. Бұл жазықтық f түзуімен де қиылысады F_β нүктесінде: $F_{\beta 2} = \beta_2 \cap f_2$, ал b түзуіне ол параллель $\beta \parallel b$ және b түзуі β жазықтығының f_β фронталіне параллель $b \parallel f_\beta$!

Қорытынды: $\beta \parallel h, \beta \parallel b$ және $\beta \cap a, f$.

3. Берілген $\gamma \parallel \pi_2$ және f, h, a, b түзулерін тексереміз. Сызбада $h \parallel \gamma$, оны $h_1 \parallel \gamma_1$ көрсетіп тұр. Бұл жазықтық b түзуімен қиылысады $B_{\gamma 1}$ нүктесінде: $b_1 \cap \gamma_1 = B_{\gamma 1}$. Берілген a түзуі γ жазықтығына параллель: $a \parallel \gamma$ және ол (γ) f түзуімен қиылысады $F_{\gamma 1}$ нүктесінде: $f_1 \cap \gamma_1 = F_{\gamma 1}$. *Қорытынды:* $\gamma \parallel h, a$ және $\gamma \cap b, f$.

4. Жазықтықтардың өзара орналасуларын тексереміз.

4.1. Берілген α мен γ қиылысады: $\alpha_1 \cap \gamma_1 = h_{\alpha \gamma 1}$ және бұл түзу α түзуіне параллель: $\alpha \parallel h_{\alpha \gamma}$.

4.2. α мен β қиылысады l түзуі бойымен: $\alpha \cap \beta = l_{\alpha \beta}$ және бұл түзу сызбада беттеседі берілген проекциялармен: $l_{\alpha \beta 1} = \alpha_1, l_{\alpha \beta 2} = \beta_2$, себебі проекциялаушы жазықтықтар сызбада сәйкес іздерімен – анықтауыш проекцияларымен беріледі.

4.3. β және γ жазықтықтары $h_{\beta \gamma}$ түзуі арқылы қиылысады және бұл түзу де сызбада беттеседі (4.2-қараңыз) берілген проекциялармен: $h_{\beta \gamma 1} = \gamma_1, h_{\beta \gamma 2} = \beta_2$. *Қорытынды:* $\alpha \cap \beta, \gamma, \beta \cap \gamma$!

5. Түзулердің өзара орналасуын тексеру қалды.

5.1. Берілген барлық түзулер өзара айқасады, яғни олар қос-қостап алғанда, бір жазықтыққа тиісті емес: $f \div h \div a \div b$.

5.2. Осы түзулердің арасында өзара перпендикуляр түзулер бар: $a \perp f, b \perp h, a \perp b$.

Х мырзаның тұжырымы: осы 5-ші қосымша есептен сүрінбей, жалқаулыққа орын бермей шыққан, емтиханда да сүрінбейді!

Ескерту. Осы есептің жолдарын жете түсініп, шағын оқу-зерттеу жұмысын (СОЗЖ) орындау керек: 31-суретті жіктеп, жеке бес сызбада есептің нәтижелерін беріңіз. Сызбалардың, есептердің нөмірлері $8^{*(4.2)} - 12^{*(4.2)}$ болсын.

5, ә-есебі. Берілген M нүктесінен $\gamma(d \parallel b)$ -ға параллель β жазықтығын жүргізу керек: $M \in \beta \parallel \gamma(d \parallel b)$.

Шешу. 4-алгоритм. Бұл есеп үшін жоғарыда берілген 30-суретті қолданамыз.

Талдау. Аксиомада айтылғандай, екі жазықтық өзара параллель болуы үшін, бір жазықтықтың екі қиылысқан түзуі екінші жазықтықтың екі қиылысқан түзуіне параллель болуы керек. Олай болса сызбада 4-ші қос. алгоритмін қолдану керек. Алдымен берілген $\gamma(d||b)$ -ға тиісті, d, b түзулерімен қиылысатын түзуді жүргізу керек. Ондай түзулер шексіз көп!

1. Осылардың біреуі – горизонталь h_γ түзуі болсын, d, b түзулерімен сәйкесінше 1, 2-де қиылысатын: $h_\gamma(1_\gamma 2_\gamma)$. Сызбадағы осы түзудің екі проекциясы: $h_{\gamma 1}(1_{\gamma 1} 2_{\gamma 1})$, $h_{\gamma 2}(1_{\gamma 2} 2_{\gamma 2})$.

2. М нүктесінен жүргізу керек: $h_m || h_\gamma$, h_m түзуі β -ға тиісті!

3. β жазықтығы М нүктесінен өтеді, ол екі қиыласқан $h_m \cap d_\beta(h_m || h_\gamma, d_\beta || d)$ түзумен анықталды: $M \in \beta(h_m \cap d_\beta) || \gamma(d || h_\gamma)$. Есептің шешуі осы.

Қорытынды. Позициялық есептердің шешуі проекциялаудың қасиеттеріне және берілген нысандардың (объектілердің) ерекшеліктері мен орналасуларына байланысты, бұл қосымша және негізгі есептерді *салыстырғанда* айқын көрінеді. *Шешу әдісі:* негізгі позициялық есептерде берілген түзулерден *қосымша* түзулер не проекциялаушы жазықтықтар жүргізілуі керек. Одан кейін осы қосымша элементтер мен берілген элементтердің *қиылысулары* анықталады. Соңында *салыстыру* арқылы есептің шешуі табылады: олардың тиістілігі не қиылысуы, не параллельдігі (қараңыз: 2-ші есептің 1-ші алгоритмнің 4-ші қадамын, 4-ші есептің 2-ші алгоритмнің 4-ші қадамын) анықталады.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. 20, а,э,б-суреттердегі β -ның горизонтальдары, α -ның фронтальдары, γ -ның профиль түзулерінің бағыттары қандай? Сызбада осыларды тұрғызып, анықтаңыз. Осыларды 23, б-суреттегі жазықтықтардың деңгейлік түзулерімен *салыстырыңыз*.

2. 21, а,э,б-суреттердегі λ, δ, τ жазықтықтардың горизонталь, фронталь, профиль түзулері қалай орналасады? Сызбада осыларды тұрғызып, анықтаңыздар. 23, ә-суреттегі жазықтықтардың проекциялаушы түзулерімен *салыстырыңыз*.

3. 23, а-суреттегі СК, АТ, ВЕ кесінділерінің нақты шамаларын сызбада қосымша салуларсыз табуға бола ма? Сызбадан өлшеп анықтаңыздар.

4. 18, а,ә,б, 23-суреттердің негізінде деңгейлік, проекциялаушы түзулердің қайсы *ізі* шексіз алыста (өзіндік емес) орналасатынын анықтаңыз .

5. Екі жазықтыққа параллель түзу қалай орналасады?

6. 19, а,ә,б-суреттердің негізінде проекциялаушы түзулердің қайсы *ізі* шексіз алыста (өзіндік емес) және олар қай остерге тиісті болады?

7. 29-суреттегі АВ, ВС не АС түзулері β жазықтығымен қай нүктелерде қиылысады?

8. 29-суреттегі с, d түзулері α жазықтығымен қай нүктелерде қиылысады?

9.Түзумен жазықтықтың ортақ нүктесі сызбада қалай анықталды?

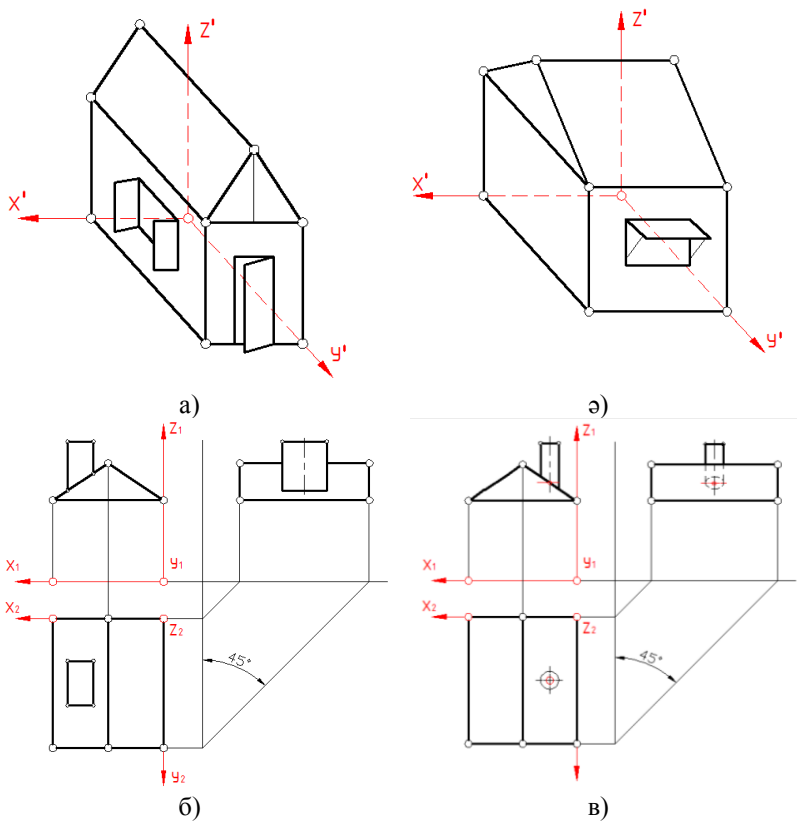
10. Нүктенің жазықтыққа тиістілігі қалай анықталады (1- алгоритм)?

11. *Бәсекелес* нүктелер сызбада қандай мақсатпен және қалай қолданылады?

1.1-қорытынды жұмыс «Аксонетрия және Монж эпюрінің байланысы». Берілген: 1.1, а,ә-шартты үйлердің суреттері, 1.1, б, в-шартты үйлердің шатырлар суреттері. Бұл тапсырмада аксонетриялық сызбадан Монж эпюріне көшу, берілген сызбаларды қажетті үй жабдықтарымен толықтыру керек, яғни мұнда қарапайым жобалау жұмысты орындау талап етілген. Сонымен бірге мұнда оқушының танымал нысандардың сызбаларын оқуға және орындауға машықтары тексеріледі. Бұл жұмыс екі А3 пішімде орындалады: 1-парақта 1.1.1-тапсырмасы, 2-парақта 1.1.2-тапсырмасы. Үйлердің габариттік өлшемдері (ұзындығы а, ені b, биіктігі с) нұсқа бойынша 1.1-кестеден алынады. Үйдің басқа өлшемдері көз мөлшерімен, пропорциямен 1.1, а, ә,б, в-суреттерге сәйкес алынады.

І парақ: 1.1, а, ә-суреттерді А3 пішімнің жоғарғы жағына көшіріп, оларды 1-, 2-сурет деп белгілеп, 1–9-сұрақтар бойынша суреттерді толықтырыңыз.

1. 1-, 2-суреттерде үйдің көрінбейтін қырларын көрсетіңіз. 2-суретте қосымша сол жақтан дөңгелек терезе жасаңыз, қажетті есік орнатыңыз.



1.1-сурет

Үйлердің габариттік өлшемдері

Нұсқа №	Ұзынд. а, мм	Ені b, мм	Биіктігі с, мм	Нұсқа №	Ұзынд. а, мм	Ені b, мм	Биіктігі с, мм
1	25	40	40	14	20	40	45
2	30	40	40	15	20	45	50
3	20	35	45	16	30	60	50
4	25	45	40	17	35	60	45
5	35	50	45	18	25	60	40
6	30	50	45	19	30	60	45
7	25	40	45	20	20	45	35
8	20	45	40	21	40	30	55
9	25	50	45	22	45	35	55
10	25	50	40	23	25	50	50
11	25	40	50	24	30	55	55
12	30	50	50	25	35	55	50
13	30	40	50	26	50	25	60

2. 1-, 2-суреттегі үйлерді төрт бұрышты мұржамен толықтырыңыз.

3. 1-, 2-суреттеріне сай етіп, үйлердің үш проекциясын олардың астына орналастырыңыз (Монж эпюрі), оларды 3-, 4-суреттер деп белгілеп.

4. 1-, 3-суреттерде үйдің Оу осіне параллель қырларын барлық проекцияларда қызыл түспен көрсетіңіз.

5. 2-, 4-суреттерде үйдің Ох осіне параллель қырларын барлық проекцияларда көк түспен көрсетіңіз.

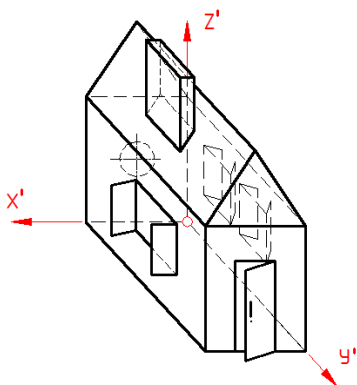
6. Шатырдың көлбеу фронталь проекциялаушы жазықтықтарын қызыл түспен бояңыз.

7. Шатырдың көлбеу профиль проекциялаушы жазықтықтарын көк түспен бояңыз.

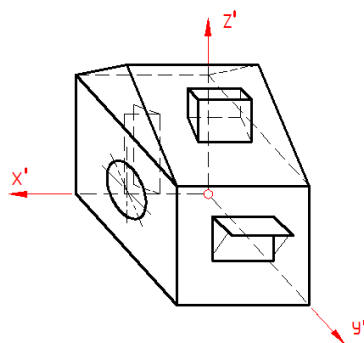
8. Үйлерді құрушы бөліктерін, қозғалмалы және үнемі горизонталь проекциялаушы орналасқан жазықтықтарды барлық суреттерде жасыл түспен бояңыз.

9. Үйлерді құрушы бөліктерін, қозғалмалы және үнемі профиль проекциялаушы болатын жазықтықтарды барлық

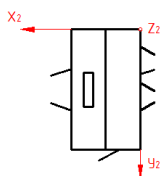
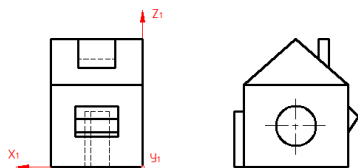
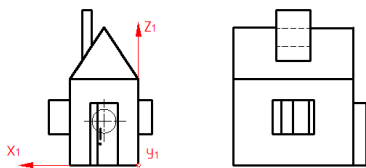
суреттерде сары түспен бояңыз. Бұл парақтың боялмаған үлгісі 1.1.1-суретте берілген.



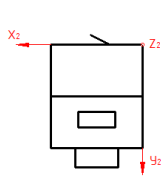
1-сурет



2-сурет



3-сурет



4-сурет

1.1.1-сурет

2-парақ. 1.1, б, в-суреттерді А3 пішімнің сол жағына бірінің астына бірін орнатып, оларды 1-, 2-сурет деп белгілеп, 10–15 сұрақтар бойынша суреттерді толықтырыңыз.

10. 1–2-суреттерді үй қабырғаларымен, есік, терезелермен толықтырыңыз, координаттар осьтерін үй қырларына бекітіп,

сызбада үйдің габариттік өлшемдерін 1.1-кестесінен алып, көрсетіңіз. Профиль проекцияларын салыңыз.

11. 1-суретте М нүктесі мұржаның *көрінетін* бетіне тиісті болсын, оның проекцияларын салып, координаттарын анықтап, көрсетіңіз: $M(x,y,z)$.

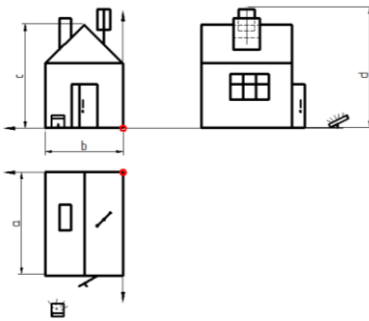
12. 2-суретте Е нүктесі мұржаның *көрінбейтін* бетіне тиісті болсын, оның үш проекциясын құрып, координаттарын анықтап, көрсетіңіз: $E(x,y,z)$.

13. 1-, 2-суреттердегі үйлердің тікбұрышты изометриясын пішімнің оң жағына орналастырыңыз, өлшем бірліктерін өзгертпей, оларды 3-, 4-сурет деп белгілеңіз.

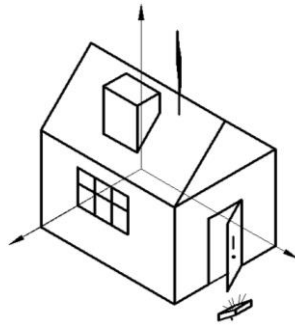
14. Бастапқы 1-, 2 және 3-, 4-суреттерде үйдің кіре берісіне электр жарығының жабдығын, шатырына қарапайым антенна орнатыңыз.

15. Өз қалауыңызша үй ауласында ағаш отырғызып, гүл егіп, балалар ойнайтын алаң тұрғызыңыз, машинаның ең соңғы түрін қоюды ұмытпаңыз.

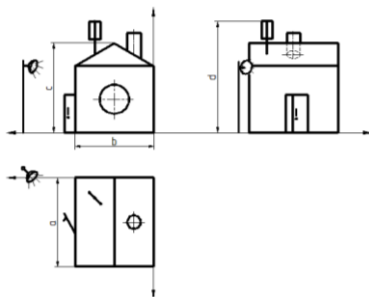
Бұл парақтың сәйкес нүктелерсіз үлгісі 1.1.2-суретте берілген, өз сызбаңызды осылармен толықтырасыз.



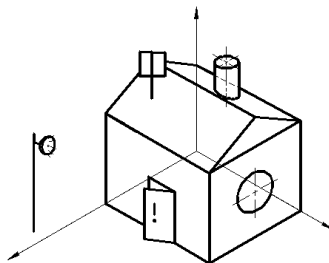
1-сурет



2-сурет



3-сурет



4-сурет

1.1.2-сурет

Тапсырмаға қатысты сұрақтар

1. Осы үйлерді қанша жазықтық шектеп тұр?
2. Оның ішінде қаншасы вертикаль орналасқан, қаншасы фронталь-, не профиль проекциялаушы?
3. 1.1.1-суреттегі үйлердің $z=\max$, $z=0$ нүктелерін, $x=y=z=0$ нүктесін анықтаңыз.
4. Бастапқы 1-, 2 және 3-, 4-суреттерде сәйкес нүктелерді тағайындап алып, олардың координаттарын анықтаңыз, үш проекциясын көрсетіп.

Бұл жұмысты үш деңгейде орындап, тапсыруға болады.

1-деңгей. 1-парақты орындап, бағасы 50–74 % болады (қорғауда).

2-деңгей. 1-парақты толығымен, екінші парақты аксонометриясыз орындап, бағасы 75–89 % болады (қорғауда).

3-деңгей. 1, 2-парақтарды толығымен орындап, бағасы 90–100 % болады (қорғауда).

5. КӨПЖАҚТАРДЫҢ ЭПЮРІ, ОЛАРҒА ҚАТЫСТЫ ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Көпжақты беттер табиғатта, техникалық тәжірибеде кең тараған, мысалы кристалдық торлар, ара ұялары, техникада машина бөлшектерінің беттері, т.с.с. Осының барлығы көпжақтардың сызбаларымен танысуды талап етеді.

Көпжақтар деп жазықтықтармен шектелген көлемді денелерді айтады, олардың ішінде кең тараған призмалар мен пирамидаларды ажыратуға болады. Пирамиданың бүйір беттері бір нүктеден (төбеден) өтетін үшбұрыштармен шектеледі және оның табаны көпбұрыш болады. Призма жазық төртбұрыштармен шектеледі және олардың қырлары өзара параллель болады, яғни призманың төбесі шексіз алыста орналасады, табандары көпбұрыш болады. Көпжақты оның табанының жақтары санына қарай үшбұрышты, төртбұрышты, т.с.с. пирамида не призма деп атайды. Егер көпжақтың табаны дұрыс көпбұрыш болса, пирамиданың төбесінен өтетін биіктігі табанының центрінен өтсе, оны *дұрыс* пирамида дейді. Призманың табаны дұрыс көпбұрыш, бүйір қырлары табанына перпендикуляр болса, оны *дұрыс* призма деп атайды. 32, а, ә, б, в-суреттерде үшбұрышты пирамиданың, 33-суретте үшбұрышты призманың сызбасы берілген. Көпжақтың сыбайлас *жақтары* қиылысып, көпжақтың *қырлары* пайда болады. Өз кезегінде қырлары қиылысып, көпжақтың *төбелерін* құрайды. Көпжақтың бір төбеде ең кемінде үш қыры не үш жағы қиылысады. Сызбада көпжақ өзінің *қаңқасымен* – жақтары, қырлары мен төбелерінің жиынтығымен беріледі. Егер оның жақтар санын n , қырлар санын p , төбелер санын m деп белгілесе, онда бұлардың арасында $p = m + n - 2$ байланыс орын алады (Х мырзаның ұсынысы: осыны тексеріп көріңіздер берілген суреттерден, өз мысалдарыңыздан).

5.1. Көпжақтарға қатысты позициялық есептер

Мұнда тиістілік пен қиылысу мәселесі шешіледі. Көпжақты беттерге тиісті кез келген нүктенің проекциясын сызбадан

анықтауға мүмкіншілік бар болса, ондай сызбаны *геометриялық толық сызба* деп атайды [1,2].

Біздің сызбаларымыз толық, осылармен жеткілікті түрде танысамыз (32-, 33-суреттер). Көпжақтың қимасына келетін болсақ, онда көпбұрыш пайда болатыны бәрімізге мәлім, мәселе көпбұрыштың жақтар санында. Ол үшбұрыштан бастап n -бұрышқа дейін барады, себебі n -көпжақтың жақтар саны. Осыны ескере отырып, қиманың түрін алдын ала біліп, есепті қатесіз шешуге болады. Сол сияқты *түзудің* жазық қисық сызықтар және денелермен қиылысу нүктелер санын алдын ала білуге болады. Жалпы жағдайда жазық қисық (шеңбер, эллипс) сызықтар мен денелер алгебралық теңдеулермен анықталып, теңдеулер дәрежесі n болса, онда түзу қисық сызықтар мен денелерді n нүктеде қиып өтеді. Ескерілетін тағы бір жайт: геометрияда жазық сызықтар мен денелерді *дөңес* және *дөңес емес* деп, 2 түрге бөледі. *Дөңес* сызықтар мен денелер түзумен *екі нүктеде* қиылысады (қалған $n - 2$ нүкте *жорамал* [1, 2]). *Дөңес* сызықтар мен денелердің белгісі: қисық сызық (дене) оған жанасатын түзудің (жазықтықтың) үнемі бір жағын алады. Біздің сызбаларымызда дөңес көпжақтар берілген. Дөңес денелердің *қималары* да *дөңес* болады, осының салдары: *түзу және дөңес көпжақтар (денелер, сызықтар) екі нүктеде қиылысады*.

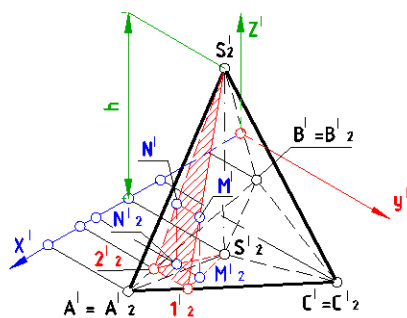
Ескерту. Көпжақтарға қатысты позициялық есептер шешуі негізгі позициялық есептердің шешуімен жүзеге асырылады, себебі көпжақтар түзулер және жазықтықтармен шектеледі.

5.1.1. Тиістілік есептері

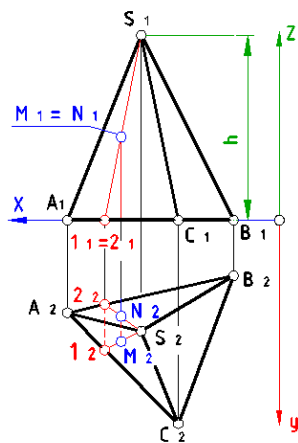
32, а-суретте пирамиданың аксонометриясы, 32, ә-суретте оның эпюрі берілген. Тиістілік есебін шешіп көрейік. 1-есеп. Сызбада берілген үшбұрышты пирамида $SABC$ және оған тиісті $M(M_1)$ нүктесі, нүкте ACS алдыңғы жағында болсын. Осы нүктенің горизонталь проекциясын құру керек. Шешу. 1-алгоритм бойынша, аксонометрияда 13, ә-суретте, эпюрге 25-суретте берілгендей етіп шығарамыз. *1, а-алгоритм.*

1. Фронталь проекциясында *қосымша* S_1M_1 түзуін, оны A_1C_1 түзуімен қиылысқанша созып, 1-нүктені анықтаймыз: $1_1 = S_1M_1$

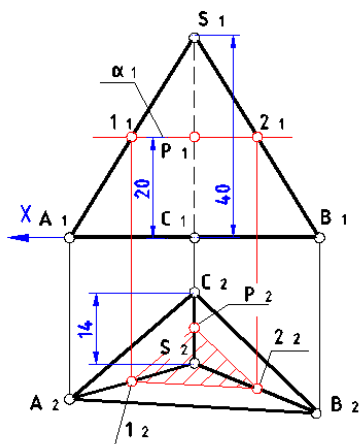
$\cap A_1 C_1$.



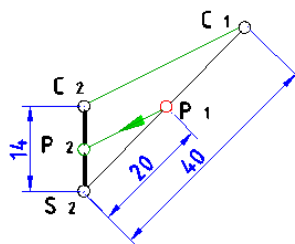
a)



а)

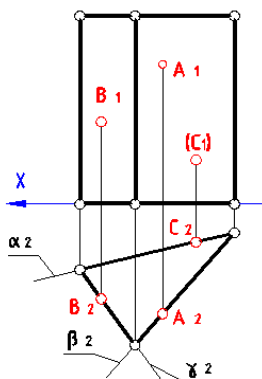


б)



в)

32-сурет



33-сурет

2. Сызбадан осы нүктенің горизонталь проекциясын тауып, S_21_2 түзуін жүргіземіз.

3. *Ізделінген* M_2 нүктесі S_21_2 -ге тиісті болады: $M_2 \in S_21_2$.

Х мырзаның ескертулері. 1. Егер $N(N_1)$ нүктесі ABS -қа тиісті болса, онда N_1 нүктесінен S_12_1 түзуі фронталь проекциясында жүргізіледі: $2 = SM \cap AB$. Оның горизонталь N_2 проекциясы S_22_2 -ге тиісті болар еді. 2. Егер $M(M_2)$ нүктесі горизонталь проекциясында берілсе, онда алдымен S_21_2 не S_22_2 түзулері жүргізіліп, M_1 нүктесі не S_11_1 -ге, не S_12_1 тиісті болады.

Х мырзаның ұсынысы: 1, ә-есеп ретінде ескертулерді жүзеге асырып көріңіз. Түсінгеніңізді *тексеріп* отыруды ұмытпаңыз.

32, б-суретте осы есептің тағы бір түрі берілген. 2-есеп. Пирамида $SABC$ және оған тиісті нүктесі $P(P_1) \in SC$ берілген. Мұнда SC қырының екі проекциясы бір вертикаль түзудің бойында орналасқан, яғни SC – профиль түзуі. P -ның горизонталь проекциясын анықтау керек. Шешу. *1, ә-алгоритм.*

1. Бұл жағдайда *қосымша* проекциялаушы α жазықтығы қолданылады, ол P нүктесінен өтіп, пирамида табаны β -ға *параллель* етіп алу керек, себебі $\beta (ABC) \parallel \pi_2$: $P \in \alpha \parallel ABC \rightarrow \alpha \parallel \pi_2$.

2. Осы α -ның пирамидамен қимасы $1_1 - 2_1 - P_1$ анықталып (дөңес кима !), оның горизонталь проекциясы пирамиданың табанына ұқсас үшбұрыш болады: $(1_2 - 2_2 - P_2) \sim A_2 B_2 C_2$.

3. *Ізделінген* $P_2 \in S_2C_2$ нүктесі табылды. Есептің шешуі осы. Мақсатымызға жеттік! Ескерту. Қосымша жазықтықты P_1 нүктесінен S_1B_1 -не S_1A_1 -ге параллель етіп алуға болады, онда кима төртбұрыш болады. Оның екі қабырғасы пирамиданың бүйір қырларына параллель болып, нәтижесінде P_2 нүктесі табылады. Тексеріп көріңіз, P_2 нүктесінің орны өзгермейді!

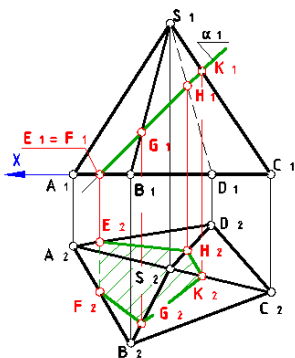
Бұл есепті проекциялау әдісінің 4-қасиетін қолданып сызбадан табуға болады. Бұл қасиетте түзудің бойындағы екі кесіндінің қатынасы проекциялауда сақталады делінген, яғни $|S_1P_1| : |P_1C_1| = |S_2P_2| : |P_2C_2|$. Мұның шешуін сызбада Фалес теоремасының негізінде 32, в-суретінен көруге болады. 1. S_2C_2 түзуін бос орынға вертикаль етіп, нақты шамамен көшіреміз. 2. S_2 нүктесінен $|S_1P_1C_1|$ кесіндісін көшіріп, C_1C_2 түзуін жүргіземіз. 3. Енді P_1 нүктесінен C_1C_2 түзуіне параллель P_1P_2 түзуі жүргізіліп, *ізделінген* P_2 нүктесі пайда болды. Сызбаларды салыстырыңыз, ол өз орнын өзгертпеді!

Х мырзаның кеңесі: 32, б, в-суреттерге сәйкес, айтылған әдістермен қолданып, есепті шешіңіз (2, ә-есеп болсын).

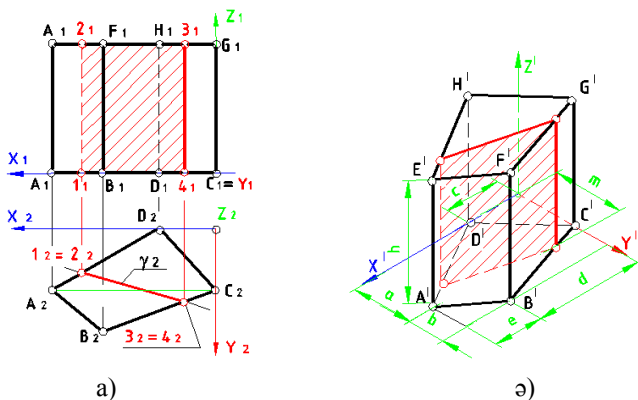
Енді 33-суреттегі призмамен жұмыс жасап, оның сызбасын оқимыз. Призма тік, дөңес, үшбұрышты. Берілген A, B, C нүктелері оның бүйір жақтарына тиісті, себебі олардың горизонталь проекциялары призманы жақтаушы α, β, γ жазықтықтарына тиісті: $A_2 \in \beta_2, B_2 \in \gamma_2, C_2 \in \alpha_2$. Оның β, γ жақтары фронталь проекциясында көрінетін жақтар, ал α жағы көрінбейді.

Х мырзаның ұсынысы: осы сызбаға координаталар осьтерін өлшем бірліктерімен тағайындап алып, шағын оқу-зерттеу жұмысын (СОЗЖ) орындаңыз. 13*(5.1.1.)-есебі ретінде призманың өлшемдерін, нүктелердің координаталарын анықтап шығыңыз. Б қосымшасын қолданып, призманы шектеуші 5 жазықтықтың теңдеуін алып, A, B, C нүктелердің координаталарының дұрыс анықталуын тексеріңіз.

5.1.2. Қиылысу есептері



34-сурет



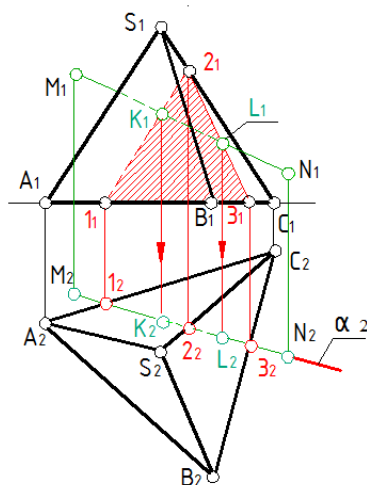
35-сурет

3-есеп. 34-суреттегі төртбұрышты пирамида фронталь проекциялаушы α жазықтығымен қиылысады. Қиманың проекцияларын анықтау керек. *Талдау:* бұл есеп оңай, себебі $\alpha \perp \pi_1$. Қима бесбұрыш болады, себебі α пирамиданың 3 бүйір қырын және табанын 2 нүктеде қиып өтеді. Шешу. Шынында да қиманың фронталь проекциясы α -ның фронталь проекциясымен *беттеседі*: $\alpha_1 = E_1F_1G_1H_1K_1$, ал оның екінші проекциясы тиістілік

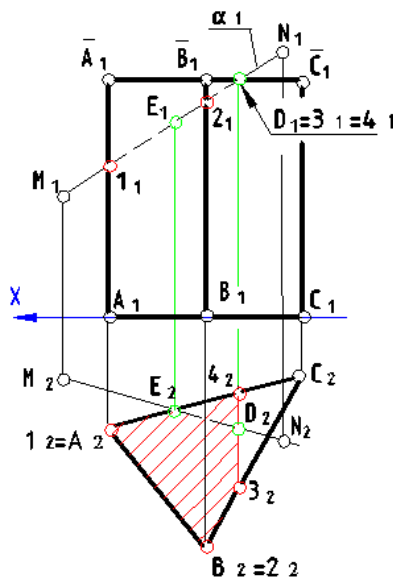
арқасында табылады: $E_2 \in A_2D_2$, $F_2 \in A_2B_2$, $G_2 \in S_2B_2$, $H_2 \in S_2C_2$, $K_2 \in S_2D_2$. Бұл қиманың көрінбейтін қырын E_2F_2 -ны ескеру керек.

4-есеп. 35, а-суретте тік, төртбұрышты призма горизонталь проекциялаушы γ жазықтығымен қиылысады. Қиманың проекцияларын анықтау керек. *Талдау:* бұл есеп оңай, себебі $\gamma \perp \pi_2$. Оның қимасы тік төртбұрыш болады, себебі γ бүйір қырларына параллель. Шешу. Шынында да қиманың горизонталь проекциясы γ -ның горизонталь проекциясымен *беттеседі*: $\gamma_2 = 1_2 2_2 3_2 4_2$, ал оның фронталь проекциясы тиістілік арқасында табылады: $1_1 \in A_1D_1$, $2_1 \in E_1H_1$,

$MN \cap (\text{пирамида } SABC) = K, L$



а)



ә)

36-сурет

$3_1 \in B_1C_1, 4_1 \in F_1G_1$. Бұл сызбада қосымша берілгені: призмаға бекітілген координаттар остері және призманың орналасу өлшемдері.

Х мырзаның ұсынысы. Осыларды қолданып, призманың аксонометриясын 4, а-есебі ретінде салып, жаттығуды ұмытпаңыз (үлгісі 35, ә-суретте берілген).

5-есеп. 36, а-суретте SABС пирамидасы, MN түзуі берілген. Осылардың қиылысу нүктелерін анықтау керек. Оған біз дайынбыз, себебі біліктіміз! Бастаймыз!

Талдау: берілген пирамида дөнес, сондықтан қиылысу нүктесі екіден артық емес. Шешу. 2, а-алгоритм. 4.2-тармақтың 2-алгоритмін қолданамыз.

1. MN түзуінен горизонталь проекциялаушы α жазықтығы ($MN \in \alpha \perp \pi_2$) жүргізіліп, оның пирамидамен қиылысуы анықталады. Сызбада: $\alpha_2 (M_2N_2)$ – түзу, оның қимасы α_2 -мен беттеседі.

2. Горизонталь проекцияда қиманың төбелері анықталды:

$1_2 \in S_2A_2, 2_2 \in S_2B_2, 3_2 \in S_2C_2$.

3. Фронталь проекцияда $1_1 2_1 3_1$ – кимамен M_1N_1 түзуінің ортақ нүктелері анықталады: $1_1 2_1 3_1 \cap M_1 N_1 = E_1$, K_1 – бұл *ізделінген* нүктелер.

4. Горизонталь проекциясы тиістілікпен анықталады: $E_1, K_2 \in M_2 N_2$ – есептің шешуі осы.

5'-есепі. 36, ә-суретте үшбұрышты призма, MN түзуі берілсін. Осылардың қиылысу нүктелерін анықтаймыз: (призма) $\cap MN = E, D$. *Талдау.* Алгоритмі 5-ші есептегідей.

1. MN түзуінен фронталь проекциялаушы $\alpha \perp \pi_1$ жүргізіліп, оның пирамидамен қиылысуы анықталады. Сызбада: α_1 – түзу, оның $1_1 2_1 3_1 4_1$ қимасы α_1 -мен беттеседі.

2. Қима төбелері горизонталь проекциясында анықталды: $1_2 2_2 3_2 4_2$.

3. Сызбада $1_2 2_2 3_2 4_2$ кимамен $M_2 N_2$ түзуінің ортақ нүктелері анықталды: $1_2 2_2 3_2 4_2 \cap M_2 N_2 = E_2, D_2$ – бұл *ізделінген* нүктелердің горизонталь проекциясы.

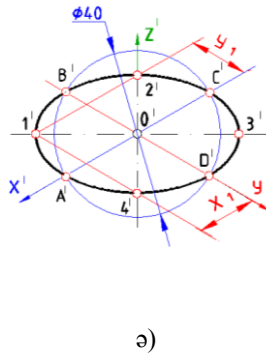
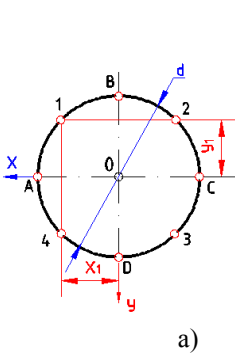
4. Фронталь проекциясы тиістілікпен анықталады: $E_1, D_1 \in M_1 N_1$ – есептің шешуі осы. MN түзуінің көрінбейтін бөлігін анықтауды ұмытпаңыз.

5.2. Конусқа, цилиндрге іштей не сырттай сызылған көпжақтар

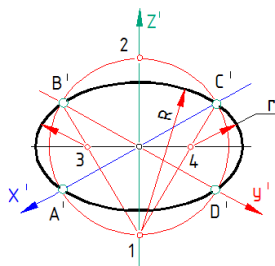
5.2.1. Шеңбер мен эллипс

Бұл екі қисық сызық өзара сәйкес болады, техникада көп қолданылады, осылармен жете танысайық. 37, а, ә-суретте горизонталь орналасқан шеңбер эпюрге және оған *сәйкес* эллипс аксонометрияда берілген. Біздің қазіргі мақсатымыз эпюрге берілген шеңберге сәйкес аксонометрияда эллипсті салуды үйреніп, түсіну. Одан кейін конусқа, цилиндрге іштей не сырттай сызылған көпжақтармен жұмыс жасау.

Параллель проекциялардың қасиеті бойынша нүктенің аксонометриялық және декарт координаталары тең болады, тек өлшем бірліктері тең емес болуы мүмкін. Біздің мысалымызда өлшем бірліктері де тең болсын (37, 38-суреттер).



37-сурет



38-сурет

37, а-суретте шеңбер берілген, Ох, Оу осьтері оның центрінен өтеді және олармен А, В, С, D нүктелерінде қиылысады, шеңбер диаметрі d болсын. Шеңбердің 1,2,3,4-нүктелері АВ, ВС, CD, DA доғаларын қақ бөлетін болсын. 37, ә-суретте тікбұрышты изометрияда осы шеңберді салуды үйренеміз. Изометрия осьтері 120° бұрышымен қиылысады (6, а,ә-сурттерді қараңыз!).

1. Алдымен О' нүктесін берілген шеңбердің центрі етіп аламыз, оны сызамыз. Радиусы ОА – ға тең етіп оны жінішке сызықпен 37ә, 38 суретке сызамыз.

2. Изометрияда эллипстің А,В,С, D нүктелері Ох, Оу осьтеріне тиісті және олардың координаттары белгілі: $A(R, 0) \rightarrow A'(R,0)$, $B(0,-R) \rightarrow B'(0,-R)$, $C(-R, 0) \rightarrow C'(-R,0)$, $D(0,R) \rightarrow D'(0,R)$ – бұл нүктелер шеңбердің осьтермен қиылысу нүктелері болып табылады.

3. 1', 2', 3', 4' нүктелерін салуда мынаны ескеру керек: $x_1 = -y_1$, $y_2 = y_1$, $x_2 = -x_1$ және т.с.с. Бұл нүктелер бір-біріне осьтерге, не центрге қатысты симметриялы болады. Сондықтан сызбада бір нүкте тұрғызылса, оған симметриялы үш нүкте табылады.

4. Осылай сызбада пайда болған 8 нүктені бірқалыпты етіп қосып, эллипс сызығын салуға болады. Бұл эллипстің 37, а-суреттегі шеңберге сәйкестігі бізмәнді, яғни эллипстің кез келген нүктесіне шеңбердің *сәйкес* нүктесі табылады және керісінше де солай болады. Сызбадан түсінеміз: 1' 3' кесіндісі эллипстің *үлкен* осі, ал 2' 4' кесіндісі *кіші* осі болады, ол сызбада үшінші осімен (Oz) беттеседі, ал үлкен ось оған перпендикуляр болады. Бұл осьтер эллипстің симметрия осьтері. 2.1-тармақта айтылғандай, тікбұрышты изометрияда эллипстің үлкен осі $1,22d$, кіші осі $0,71d$ – тең болады.

Осыған ұқсас π_1 не π_3 проекциялар жазықтықтарына тиісті шеңберлерге сәйкес эллипстерді салуға болады. Егер эллипстің центрі О' болса, онда π_1 -ге тиісті эллипстің үлкен осі Оу осіне перпендикуляр болып, кіші осі оған тиісті болады. Егер ол π_3 -ке тиісті болса, эллипстің үлкен осі Ох осіне перпендикуляр болып, кіші осі оған тиісті.

Осындай көп уақыт алатын әдіспен эллипстерді салудың орнына сызу тәжірибесінде оны 4-центрлік овалмен (сопақшамен) алмастыру әдісі қолданылады.

Овал өзара жанасатын 4 доғадан құралады. Бұл әдіспен мектепте танысқан боларсыз, осыны еске түсірейік (38-сурет). 37, а-суреттегі шеңберге сәйкес эллипстің орнына тік бұрышты изометрияда 4-центрлік *овалды* саламыз. 120° -пен қиылысатын және өлшем бірліктері шеңбердің өлшем бірліктеріне тең изометрия осьтерін саламыз.

1. О'нүктесін центр етіп, берілген шеңберді сызамыз. Тиістілік қасиетіне сай оның осьтермен қиылысқан A', B', C', D' нүктелері овалдың бастапқы нүктелері болады.

2. Осы шеңбермен Oz осінің қиылысқан 1, 2-нүктелері овал доғаларының екі центрі болады.

3. Овалдың О'нүктесінен Oz осіне перпендикуляр етіп үлкен, горизонталь осін жүргіземіз.

4. Енді овалдың доғаларын жүргізейік. 1-доғаның центрі 1-нүкте, $|1 - B'|$ кесіндісі радиусы болатын, B', C' нүктелерін 1-доғамен қосамыз.

5. Сол сияқты 2-нүктені центр етіп, $|1 - B'|$ кесіндісі радиусы болатын, A', D' нүктелерін 2-доғамен қосамыз.

6. Овалдың 3, 4-центрлері оның горизонталь осіне тиісті, ол 1- B' , 2- D' не 1- C' түзулерімен қиылысу нүктелері. 3-доғаның центрі 3-ші нүкте, радиусы $|3 - B'|$ болады.

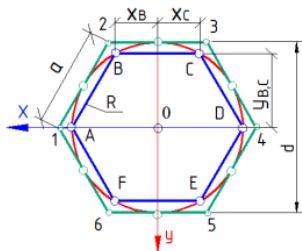
7. 4-доғаның центрі 4-ші нүкте, радиусы $|3 - B'|$ болады. Нәтиже: осылай алынған 4 доға A', B', C', D' нүктелерінде бір-бірімен жанасады, яғни сол нүктелер доғалардың жанама түзулеріне ортақ. Осындай түрде алынған *овалды* эллипс ретінде қолданамыз.

5.2.2. Шеңберге іштей не сырттай сызылған дұрыс көпбұрыш

39, а-суретте шеңберге іштей сызылған ABCDEF алтыбұрышы және сырттай сызылған 1-2-3-4-5-6 алтыбұрышы берілген. 39, ә,б-суреттерде осы алтыбұрыштардың аксонометриясы келтірілген: $A' B' C' D' E' F'$ және $1' - 2' - 3' - 4' - 5' - 6'$.

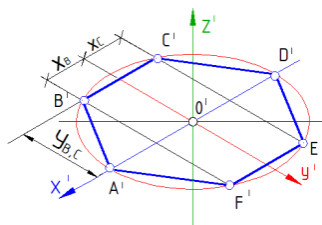
Сызбаларды оқып үйренген болдық, енді 39, а-суретте $|AB|=R$ және $a = |1-2| = 2R\sqrt{3}$ теңдіктерді қолданып, сәйкесінше 39, ә-суретте *іштей* сызылған алтыбұрышты, 39, б-суретте *сырттай* сызылған алтыбұрышты құрамыз. 39, ә-суретке түсініктеме.

Сырттай, іштей сызылған 6-бұрыштар



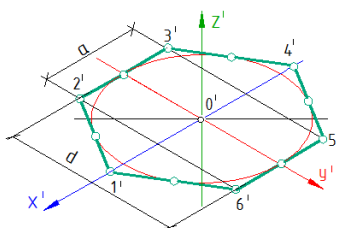
а)

Іштей сызылған 6-бұрыш



ә)

Сырттай сызылған 6-бұрыш



б)

39-сурет

1. A' нүктесінің $x_A=R$, $y_A=0$ координаталарын қолданып, оны сызбаға түсіреміз $O'x'$ осіне.

2. D' -пен A' нүктелері $O'y'$ осіне қатысты симметриялы болады.

3. Сол сияқты B' -пен C' нүктелері Oy осіне қатысты симметрияда, координаталары 39, а-суретінен алынады: $x_B = -x_C$, $y_B = y_C$.

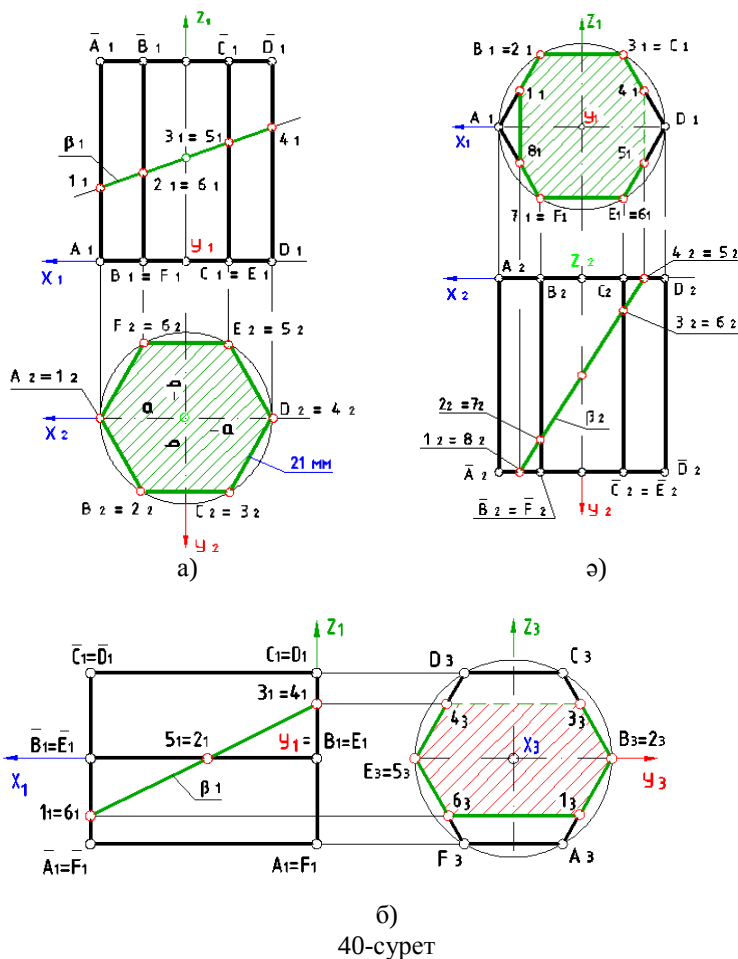
4. E' , F' нүктелері және B' , C' нүктелері $O'x'$ осіне қатысты бір-біріне симметриялы. Осы 6 нүкте шеңберге *іштей* сызылған дұрыс алтыбұрыштың аксонометриясын анықтайды.

39, б-суретке түсініктеме. Сырттай сызылған алтыбұрыштың 1', 4' нүктелері $O'x'$ осінің бойында болады, олардың O' нүктесінен арақашықтығы α -ға тең. Оның қабырғасы $\alpha = |1-2|=|2-3| \dots$ болғандықтан біздің мақсатымыз 2-, 3-, 5-, 6-нүктелерін сызбаға түсіру. Олардың координаталары: $x_2 = \frac{\alpha}{2}$, $x_3 = -\frac{\alpha}{2}$, $y_2 = y_3 = R$. 39, а-суретінен α -ның шамасын өлшеп, не болмаса оны жоғарыдағы теңдіктен есептеп алу керек. *Талдау:* $2'3'$ түзуі $O'x'$ осіне параллель, эллипспен жанасады, $2'3'$ нүктелері $O'y'$ осіне симметриялы. Осыларды ескеріп, сызбада $2', 3'$ нүктелерін құрып, $2', 3'$ -ке $O'x'$ осіне қатысты симметриялы $5', 6'$ -нүктелерін саламыз. Осы нүктелер шеңберге *сырттай* сызылған дұрыс алтыбұрыштың аксонометриясын құрады.

5.3.1. Дұрыс призма, пирамиданың эпюрі және қимасы

Көпжақтың орналасуына қарай сызбалардың түрлерін талдап көрейік. Егер 6-бұрышты дұрыс призманың осі Oz осіне параллель болса, оның горизонталь (анықтауыш) проекциясы тең 6-бұрышты көпбұрыш болады. Сондықтан бұл призманы салу оның *горизонталь* проекциясынан басталуы керек.

Сол сияқты призманың осі Oy осіне параллель болса, оның фронталь проекциясы анықтауыш, тең 6-бұрыш болады. Егер призманың осі Ox осіне параллель болса, оның профиль проекциясы анықтауыш тең 6-бұрыш болады. Басқа проекциялар осыларға сәйкес етіп салынады. Оны 40, а, ә, б-суреттерінен түсінуге болады. Мұнда шеңберге іштей сызылған призманың мысалдары көрсетілген. Егер осы призмаларды аксонометрияда орындайтын болсақ, онда декарт координаталар осьтерін призманың табанына лайықты етіп бекіту керек.



Мысалы 40, а-суретінде Ox , Oy осьтері табанының симметрия осьтерімен беттеседі, ал Oz осі призма осімен беттесті. Сол сияқты 40, ә-суретінде Ox , Oz осьтері артқы табанының симметрия осьтерімен беттеседі, ал Oy осі призма осімен беттесіп тұр. Сол сияқты 40, б-суретінде Oy , Oz осьтері артқы табанының симметрия осьтерімен беттеседі, ал Ox осі призма осімен беттесіп тұр.

Сызбада призмалар *проекциялаушы* жазықтықтармен қиылысқан. Қиманың түрі жазықтықтың орналасуына байланысты. Шынында да 40, а-суретінде қима 6-*бұрыш* болады, себебі қиюшы жазықтық призманың 6 бүйір қырын қиып өтеді. 40, ә-суретінде қиюшы жазықтық призманың 4 бүйір қырын және 2 табаның 4 нүктеде қиып өтеді, қима 8-*бұрыш*. 40, б-суретінде қиюшы жазықтық призманың 2 бүйір қырын және 2 табаның 4 нүктеде қиып өтеді, нәтижесінде қима 6-*бұрыш* болды.

Х мырза ұсынады: осы сызбаларды 5, а-есеп ретінде профиль проекцияларымен толықтырып көріңіздер. Білікті болайық.

5.3.2. Призма, пирамиданың аксонометриясы

Осы призмалардың аксонометриясын өткен тақырыптарға сай салуға болады. 6-есеп. 40, а-суреттегі призманың аксонометриясын салу керек болсын (41, а-сурет).

5-алгоритм.

1. Тікбұрышты изометрияның осьтерін сызбада жүргіземіз (41, а-сурет).

2. Призма табанын – $A' B' C' D' E' F'$ алтыбұрышын саламыз, 39,ә – суреттегідей.

3. Осы нүктелерден жоғары қарай призманың бүйір қырларын сызбаға қондырамыз, ұзындығын призманың биіктігіне тең алып, призманың екінші табаның саламыз (сызбада көрсетілмеген).

4. Қима 6-бұрышының $1'-2'-3'-4'-5'-6'$ төбелерін осы қырларға сәйкесінше орналастырамыз (қима дөңес!).

Х мырзаның 25-сұрағы. 7-есеп. Көпжақтардың түзумен қиылысуы сызбада қалай табылады? Жауап. Осы сызбаны (41, а-сурет) кеңістіктегі MN түзуімен толықтырып, оның призмамен қиылысу екі нүктесін анықтайық.

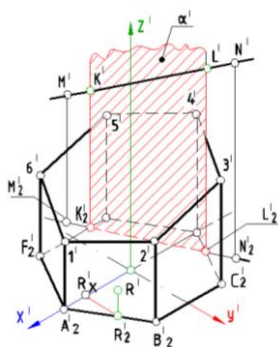
6-алгоритм.

1. Сызбада түзу $M'N'$, $M'_2 N'_2$ – екі проекциясымен берілген.

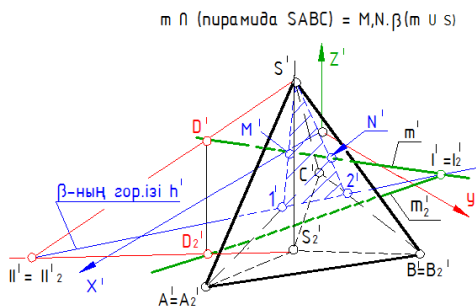
2. Бұл екі түзу кеңістікте вертикаль (тік) қиюшы α жазықтығын құрайды.

3. Оның горизонталь $M'_2 N'_2$ проекциясы призма табанын K'_2, L'_2 нүктелерінде қияды: бұл екеуіне ортақ, қиылысу нүктелері. Олардың аксонометриясы тиістілікпен табылады: $K', L' \in M'N'$ – есептің шешуі осы.

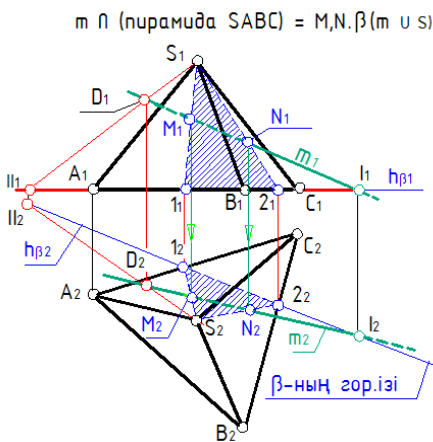
Пирамиданың призмаға қарағанда ерекшеліктері, сиқыры бар. Жоғарыда айтылғандай, призманың бүйір қырлары өзара параллель болып *ақырсыз қашық* нүктеде қиылысса, пирамиданың бүйір қырлары нақты нүктеде, оның төбесінде қиылысады.



а)



ә)



б)

41-сурет

Пирамидаға қатысты позициялық есептердің шешуінде ерекшелігі – көмекші жазықтықтар көбінесе проекциялаушы емес, жалпы жағдайда, S нүктесіне тиісті болады.

Мысалы, 41, ә-суретте: 8-есеп. $SABC$ пирамида және m түзуінің аксонометриясы берілген, осылардың қиылысу M, N нүктелерін анықтау керек: $SABC \cap m = M, N$. Шешу. 7- алгоритм. Талдау: пирамида дөңес, сондықтан қиылысу нүктелері екіден аспайды. Пирамида табаны ABC – горизонталь, $x'O'y'$ - қа тиісті.

1. Берілген m түзуінен көмекші, S нүктесіне тиісті жалпы жағдайда орналасқан β жазықтығы жүргізіледі: $\beta(S \cup m)$.

2. Сызбада осы жазықтықтың пирамида табанымен қиылысуын, яғни оның горизонталь ізінің 2 нүктесін табу керек. Ол үшін алдымен m түзуінің горизонталь ізін алу керек: $m' \cap m'_2 = I' = I'_2$.

3. Одан кейін β -ға тиісті тағы бір түзуді, мысалы SD -ны алып, оның горизонталь ізін табу керек. Ол үшін алдымен $D \in m$, одан кейін SD -ның екі проекциясының қиылысу нүктесін, яғни оның 2-ізін табу керек: $S'D' \cap S'_2D'_2 = II' = II'_2$.

4. β -ның горизонталь ізі $I'_2 - II'_2$ түзуі табылды!

5. Осы жазықтықтың пирамидамен қиылысуы үшбұрыш $S'1'_2 2'_2$ болады, себебі оның горизонталь ізі $I'_2 - II'_2$ пирамида табанымен $1'_2, 2'_2$ нүктелерінде қиылысады.

6. m' түзуі осы $S'1'_2 2'_2$ үшбұрышымен M', N' нүктелерінде қиылысады, ізделінген нүктелер осы. Осы есептің эпюрге шешуі (8, а-есеп болсын) 41, б-суретте берілген.

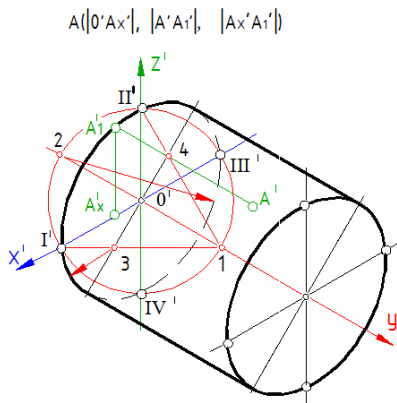
Х мырзаның ұсынысы: сызбаны мұқият оқып, 41, ә, б-суреттерді салыстырып, сәйкес түзулермен нүктелерді анықтаңыз. 8, а-есебінің шешу жолдарын түсініп алуды кейінге қалдырмаңыз.

5.4. Призмаға сырттай (іштей) сызылатын цилиндрдің аксонометриясы

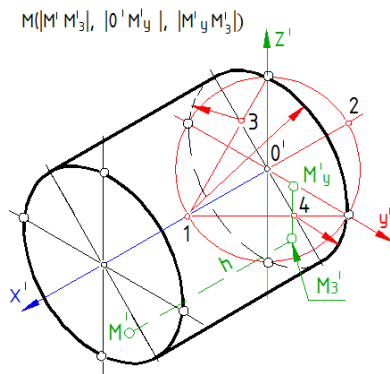
Ендігі мақсатымыз призмаға сырттай (не іштей) сызылатын цилиндрдің сызбасын құру болсын. 40, ә-суреттегі призмаға

сырттай сызылатын цилиндрдің аксонометриясын саламыз (42-сурет), эллипсті 4-центрлік овалмен алмастырып.

8-алгоритм цил/ акс.



42-сурет



43-сурет

1. Тікбұрышты изометрия осьтерінің өлшем бірліктерін эпордегі өлшем бірліктеріне тең алып,сызбада жүргіземіз.

2. Призманың осі Оу осіне параллель болғандықтан, оның табаны xOz проекциялар жазықтығына тиісті.

3. О' нүктесін центр етіп, көмекші шеңберді $R=|AB|$ радиусымен сызамыз.

4. Осы шеңбердің О'х',О'z' осьтерімен қиылысу I', II', III', IV' нүктелері 4-центрлік овалдың бастапқы нүктелері.

5. Жоғарыда айтылғандай, шеңбердің О'у' осімен қиылысу 1,2-нүктелері овалдың центрлері болады.

6. Овалдың қалған екі 3,4-центрі О'у' осіне перпендикуляр түзудің бойынан (эллипстің үлкен осінен) табылады.

7. Осы центрлерден қажетті радиуспен 4 доғаны жүргізу керек: 1-нүкте 1-доғаның центрі, оның радиусы $|I'-1|$, доға I', II' нүктелерді қосады; 2-нүкте 2-доғаның центрі, оның радиусы $|I'-1|$, доға III', IV' нүктелерді қосады; 3-нүкте 3-доғаның центрі, оның радиусы $|I'-3|$, доға I', IV' нүктелерді қосады; 4-нүкте 4-доғаның центрі, оның радиусы $|I'-3|$ болады, доға II', III' нүктелерді қосады.

Ескерту. Бұл овал қажетті цилиндрдің артқы табаны болады, сондықтан оның үлкен осінен төменгі бөлігі көрінбейді.

Цилиндрдің алдыңғы табанын жоғарыда «8 алгоритм цил/акс» - да айтылғандай етіп табандар арақашықтығын призманың биіктігіне тең етіп салу керек. Осы екі овалды жанай өтетін екі шектеуші түзумен цилиндрдің сызбасын толықтырыңыз. Осы алгоритмді қолданып 40, б-суреттегі призмаға іштей сызылған цилиндрді құруға болады, оның мысалы 43-суретте келтірілген. Призманың орналасуына қатысты берілген алгоритмнің 2, 4, 5, 6-адымында өзгерістер бар. Мұқият оқып, 43-суретте берілгенді тексеріп, қатесіз сызыңыз.

2-адым: призманың осі $O'x'$ осіне параллель болғандықтан, оның табаны yOz проекциялар жазықтығына тиісті болады.

4-адым: осы шеңбердің $O'y'$, $O'z'$ осьтерімен қиылысу I' , II' , III' , IV' нүктелер 4 центрлік овалдың бастапқы нүктелері болады.

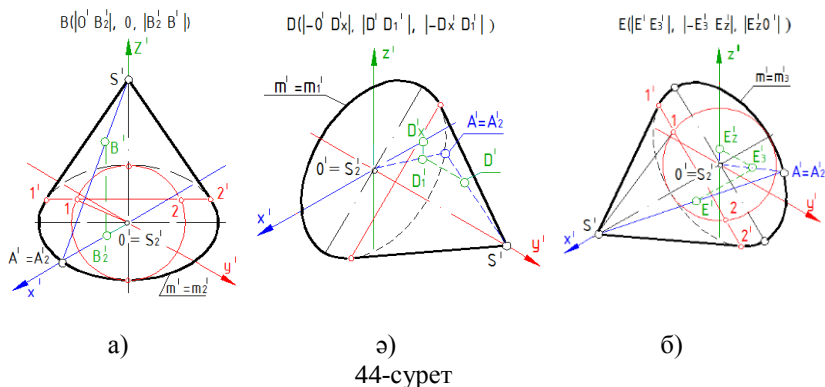
5-адым: жоғарыда айтылғандай шеңбердің $O'z'$ осімен қиылысу 1,2-нүктелері овалдың центрлері болады.

6-адым: овалдың қалған екі 3,4 центрі $O'x'$ осіне перпендикуляр түзудің бойында табылады. Ескертуді де ұмытпаңыз.

5.5. Пирамидаға сырттай сызылатын конустың аксонометриясы

Конустың аксонометриясын тұрғызуда конустың табаны және төбесі белгілі болуы керек. Төбесінен табанына қарай шектеуші, онымен жанасатын екі жасаушысы жүргізілу керек. 44, а-суретінде конус берілген: төбесі S нүктесі, осі Oz осімен беттеседі, табаны m шеңбері (іштей сызылатын алтыбұрышты пирамиданы елестетуге болады, сызба анық болу үшін ол көрсетілмеді). Аксонометрияда m шеңбері 4-центрлік m' овалмен берілген. S' төбесінен m' овалмен $1'$, $2'$ нүктеде жанасатын екі түзу жүргізілген. Осы екі нүктені дәл табу әдісімен танысайық. Мұнда екі қисық сызық – шеңбер мен эллипстің *сәйкестілігі* қолданылады: O' нүктесі центр болатын, эллипспен іштей жанасатын және оған сәйкес болатын шеңбер сызылады. Осы шеңберге S' төбесінен мектептен белгілі әдіспен жанамалар

жүргізіледі: $S'1$, $S'2$. Бұл жерде *сәйкестік бағыты*— эллипстің үлкен осі, сондықтан 1,2-нүктелерге сәйкес овалдың (эллипстің) бойынан 1',2'-нүктелері анықталып, табанымен *жанасатын* ізделінген екі түзу жүргізіледі: $S'1'$, $S'2'$.



44-сурет

Осындай әдіспен осьтері Ox , Oy осьтеріне параллель орналасқан конустардың аксонометриясын құруға болады. Үлгісі 44, ә, б-суреттерінде берілген.

Х мырзаның ойы: осы үлгіні өзіндік жұмыс етіп, 9, а-есеп ретінде шығарып, сызып алған озады!

Қорытынды. Бұл тарауда геометрияда және техникада кең тараған призма, пирамида, конус, цилиндр беттерімен танысып, оларға қатысты позициялық есептерді шешу әдістерін меңгердік. Пирамида мен призмаға сырттай не іштей сызылатын конус пен цилиндрлердің түр-түрімен жете танысып шықтық. Келесі тарауларда осының бәрін қолданамыз, білгенімізге не жетсін!

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Призма мен пирамиданың қандай айырмасы мен ұқсастығы бар?
2. Қандай көпжақты дөңес деп айтады?
3. Түзудің дөңес көпжақпен неше ортақ нүктесі болуы мүмкін?
4. 4-центрлік овалды қалай сызу керек?

5. Көпжаққа қатысты тиістілік есептерін қалай шешеді?
6. Аксонометрияда конус пен цилиндрге тиісті нүктелердің координаталары қалай анықталады?
7. 6-бұрышты призманың, пирамиданың қималарының түрі қандай болуы мүмкін?
8. 40, а-суретіндегі призманың 3-, 5-бұрышты қималарын салыңыз.
9. Нүктенің бетке тиістілігі қалай анықталады?
10. Эпюрге призманың фронталь проекциялаушы түзуімен қиылысуын анықтау әдісі.
11. 1, а-есепті сызбада орындаңыз.
12. 2, а-есепті сызбада орындаңыз.
13. 3, а-есепті сызбада орындаңыз.
14. 4, а-есепті сызбада орындаңыз.
15. 5, а-есепті сызбада орындаңыз.
16. 8, а-есепті сызбада орындаңыз.
17. 9, а-есепті сызбада орындаңыз.

6. МОНЖ ЭПЮРІНДЕ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТАР, АЙНАЛУ ЖӘНЕ БҰРАМА БЕТТЕРІ

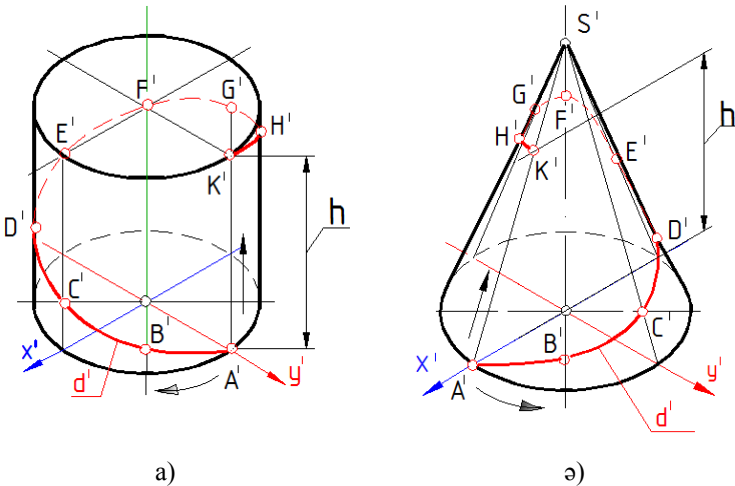
Қисық сызықтар мен беттердің әлемі кең, олардың құрылу әдістері көп және жаңа түрлері тәжірибеге, зерттеулерге сай дүниеге келуде [1,2]. Сызба геометрияда сызықты кеңістікте үздіксіз қозғалатын нүкте траекториясы ретінде қарастыр. Үздіксіз қозғалатын нүктенің кеңістіктегі орындар жиыны қисық сызықты анықтайды. Сызықтарды жазық және кеңістіктік сызықтар деп екі топқа бөледі. Жазық сызықтың барлық нүктелері бір жазықтықта, ал бір жазықтықта жатпайтын сызықты кеңістіктік сызық дейді. Жазық эллипс, гипербола, шеңбер және синусоида сияқты қисықтар бұрыннан белгілі. Шеңберге сәйкес эллипсті салуды жоғарыда үйрендік. Кеңіс сызықтардың ішінде техникада көп қолданылып жүрген бұрама (винттік) сызықтармен танысамыз. Олар күнделікті өмірде кездеседі. Мысалы шарикті қаламды алайық. Оның бірнеше тетігі бұрама беттер арқылы қосылып, нәтижесінде біртұтас, пайдалануға қажетті зат шығады. Әртүрлі іші қуыс бұйымдар бұрандалы қаппақтармен жабылады. Автокөліктерді біртұтас бұйым ретінде әртүрлі қосылыстардың арқасында пайдаланады. Олардың жеке бөлшектері оның тұрқысына (корпусына), басқа тетіктеріне бұрандалы бұйымдармен бекітіледі.

6.1. Бұрама сызықтар мен беттер

Бұрама сызықтың жасалу тәсілі: нүкте түзудің бойымен бірқалыпты қозғалып және түзумен бірге осьтен бірқалыпты айналу пайда болатын сызық. Бұл кеңістіктік және орамалары шексіз көп сызық. *Орама* деп нүктенің бір айналуынан пайда болған сызықтың бөлігін айтады. Егер түзу оське параллель болса, нүкте *цилиндрлік бұрама* сызықты жасайды, ал түзу осьпен қиылысқан жағдайда *конустық бұрама* сызық пайда болады (45, а, ә-суреттер). Олардың негізгі сипаттары: бұрама сызықтар *оңқай* және *солақай* болып ажыратылады және бұл сызықтардың адымы h бар. 45, а-суретте цилиндрлік солақай, 45, ә-суретте конустік оңқай сызықтар берілген. Егер сызықтың көрінетін

бөлігі оң жаққа көтерілетін болса – ол оңқай, ал көрінетін бөлігі сол жаққа көтерілсе – солақай сызық болады. Бұрама сызықтың *h* адымы деп оське қатысты нүктенің бір айналуа жылжу (көтерілу) мөлшерін айтады.

1-мысал. Монж эпюрінде оңқай цилиндрлік бұрама сызықтың бір орамасын салуды үйренейік, оның адымы *h* (46-сурет) болсын. Бұл сызықтың сызбасын салуда бұраманың бірқалыпты қозғалуын қолданамыз. Ол үшін шеңберді және *h* – адымын тең 8 бөлікке бөлеміз. Сызбаны жылдам орындап және түсіну үшін 8 бөлікке бөлу тиімді.



45-сурет

Бөліктер саны неғұрлым көп болса, сызба дәлдігі арта түседі. Бөлудің нәтижесінде цилиндр беті тең 8 вертикаль және тең 8 горизонталь бөліктерге бөлінді, оның бетіне тікбұрышты тор түсірілді. Бұрама сызығымыз осы тордың түйіндерінен өтеді. Бұрама сызықтың бастапқы нүктесі А болсын. Ол нүкте $1/8$ бөлікке айналып және $1/8$ бөлікке көтерілген кезде сызықтың В нүктесі пайда болады. Сол сияқты С нүктесі де А-ның $1/4$ бөлікке айналып, $1/4$ -ге көтерілуінен пайда болады. Осыны жалғастыра берсе АВС...К нүктелері бізге бұрама сызықты құрады. К нүктесі 1 ораманың соңғы нүктесі. Бұл нүктелерді

бірқалыпты қосудан сызықтың фронталь проекциясында d_1 синусоида сызығы пайда болады. Нүктелерді қосуда оның көрінбейтін Е нүктесінен жоғары бөлігі ескерілуі керек. Горизонталь проекциясы d_2 шеңбер болып қала береді.

Цилиндр бетінің *жаймасын* алғанда (46-сурет), ол ұзындығы $2\pi R$, биіктігі h -қа тең тіктөртбұрыш болады. Бұрама сызық $A_0 K_0$ *түзу* ретінде оған диагональ болып түседі. Сол себептен цилиндрлік бұрама сызықты цилиндрдің *геодезиялық* (ең қысқа) сызығы деп атайды. Яғни цилиндр бетінде екі нүктені *ең қысқа* түрде қосатын осы бұрама сызығы. Техникада, тәжірибеде цилиндрді жиі қолданудың бір себебі осы қасиет.

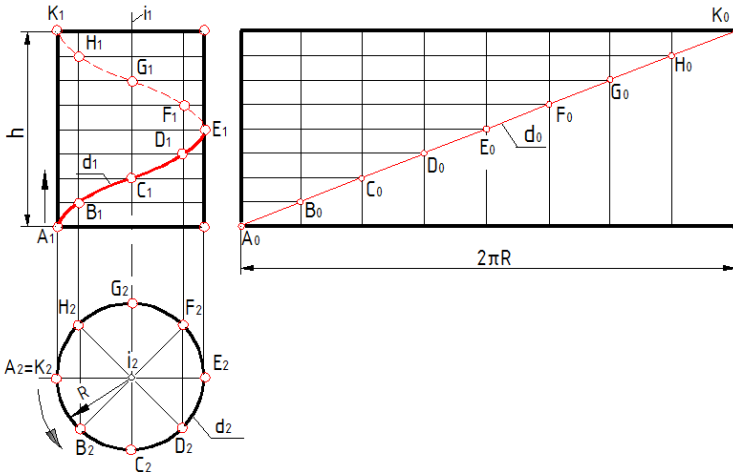
Х мырза: 26-сұрақ. Ойланатын жайт – цилиндр бетіне тиісті және А нүктесінен өтетін *қанша* бұрама сызықты құруға болады? Жауап. Адымына қарай шексіз көп! Ал шеңбердің бойындағы шексіз көп нүктені ескергенде ол шексіздік екінші дәрежеге көтеріледі! Сызбада берілген бұрама сызыққа кеңістікте сәйкес сызық табылады, керісінше де солай.

Бұрама беттер. Техникада кең тараған бұрандалы бұйымдар бұрама беттермен шектеледі. Олардың кең тарағаны сонша, өндіріс бұрама беттермен бұрандалы бұйымдарды *стандарттауға* мәжбүр болған, мысалы, бұрандалар, бұрамалар (винт), бұрандамалардың (болт), т.с.с. түр-түрлері пайда болды. Осыларды білуден шет қалмайық.

Кез келген бір сызықтың бұрама қозғалуынан *бұрама беттер* пайда болады. Яғни бұрама беттің *жасаушысы*, *осі* және *оң*, *солын* қадағалайтын *бағыттаушы* сызығы және *адымы* болуы керек. Техникада жиі қолданылатын қарапайым бұрама беттердің жасаушысы *түзу* сызық болады, мұндай беттерді *геликоид* деп атайды. Егер осы жасаушы түзу сызық айналу осіне перпендикуляр болса, геликоидті *түзу* деп атайды, егер жасаушысы осіне *көлбеу* болса, геликоидті *көлбеу* деп атайды. Егер беттің жасаушысы оспен қиылысатын болса, геликоидты *жабық*, жасаушы оспен аяқасатын болса, оны *ашық* деп атайды [1,2,3 қараңыз]. Бұл беттердің негізгі параметрлері: *жасаушы*, *оңқай* не *солақай* бағыты, *адымы*, *бағыттаушы*.

2-мысал. Сызбада жасаушысы $A \bar{A}$, осі i , адымы h -қа тең, бағыттаушысы d бұрама сызығы болатын *оңқай*, *түзу* φ

геликоидтың бір орамын салу керек болсын (47-сурет). Жасаушының A нүктесі i осімен жылжыса, A нүктесі бұрама d сызығы бойымен, остен айналып өтеді. Осы екі сызық (i , d) фронталь проекциясында беттің шектеушісі және бағыттаушысы болады.



46-сурет

Оның бір орамын фронталь проекциясында d_1 , i_1 , $A_1\bar{A}_1$ және $E_1\bar{E}_1$ сызықтары шектейді. Бұл беттің жасаушылары оське үнемі перпендикуляр орналасады және осьтен айналады, сондықтан сызбада олар $A_1\bar{A}_1$ -ға параллель не нүкте болады: $B_1=\bar{B}_1, C_1=\bar{C}_1$. Профиль проекциясында бұрама беттің барлық орамалары d_3 сызығымен шектеледі, жасаушылары осьтен радиалды тарайды. Енді осы сызбада бетке қатысты позициялық есептерді шығарып көрейік.

1-есеп. 47-суретте M нүктесі M_3 проекциясымен берілген және ол осы ϕ геликоид бетіне тиісті болсын. Оның фронталь M_1 проекциясы қалай алынады? Шешу. 9,а-алгоритм. Талдау. Нүкте бетке тиісті болса, сол нүктеден оның бір жасаушысы өтуі керек міндетті түрде.

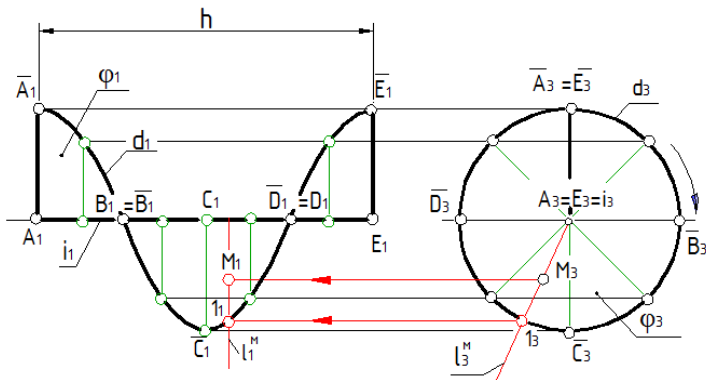
1. Профиль проекциясында барлық жасаушылар радиальды бағытпен өтеді: $M_3 \in l_3^M \cap i_3$.

2. Бұл жасаушы l^M бағыттаушы d сызығымен $\bar{C}\bar{D}$ бөлігінде 1-нүктеде қиылысады: $l_3^M \cap d_3 = 1_3$.

3. Фронталь проекциясында l_1^M жасаушысы беттің d_1 сызығының 1_1 нүктесінен өтеді: $1_1 \in l_1^M \perp i_1$.

4. Тиістілік арқасында M_1 нүктесі де сызбада табылады: $M_1 \in l_1^M$.

Х мырзаның ескертуі және ұсынысы. 1. Егер сызбада N нүктесінің фронталь N_1 проекциясы берілсе, онда 9,ә-алгоритмнің қолдану реті төменгідей: 1. $N_1 \in l_1^N \perp i_1$. 2. $l_1^N \cap d_1 = 2_1 \in \bar{C}_1\bar{D}_1$. 3. $2_3 \in \bar{C}_3\bar{D}_3$, $2_3 \in l_3^N \cap i_3$. 4. $N_3 \in l_3^N$! Осыны шағын оқу-зерттеу жұмысы ретінде жүзеге асырыңыз. Бұл 14*_(6.1) – СОЗЖ есебі болсын. Сызбада кез келген N_1 нүктесіне сәйкес N_3, N_2 нүктесін анықтап көріңіз.



47-сурет

2. Осы геликоидтың горизонталь проекциясын тұрғызыңыз, онда оның $A_2, B_2, C_2, \dots, E_2$ нүктелері горизонталь i_2 осінде қала береді. Бағыттаушы d_2 -нің нүктелерін фронталь және профиль проекцияларына сәйкес құру керек, олар синусоидаға тиісті болады: $\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2, \dots, \bar{E}_2$. Мұнда $\bar{A}_2, \bar{C}_2, \bar{E}_2 \in i_2$. Бұл сызбаның, есептің нөмірі 14.1*_(6.1) болады.

6.2. Айналу беттері

Беттердің түрлері күрделі, жасалу әдістері көп болғандықтан сызба геометрияда, оқу барысында қозғалудан пайда болатын беттерді қарастырады. Біз айналу беттерінің танымал түрлерімен жете танысамыз және жұмыс жасаймыз: олар конус (48, а-сурет), цилиндр (48, ә-сурет), сфера (48, б-сурет). Бұл беттердің ұқсастығы ортақ жасалу әдісінен туындайды. Айналу беттерінің ортақ қасиеттері: айналу осьтері i – конустың, j – цилиндрдің, g – сфераның. Осьтен айналатын сызықтар – *жасаушылар*: конус пен цилиндрдің ең қарапайым жасаушысы l, m түзулері, сондықтан оларды *сызықтық беттер* деп атайды. Конус пен цилиндрдің айырмасы: цилиндрдің төбесі ақырсыз қашық нүкте болса, конустың төбесі нақты түрде беріледі. Ескеру керек: бұл беттердің кез келген сызығы олардың жасаушысы бола алады, ең қарапайымы – *түзу* не *шеңбер*, осыларды әртүрлі есептерді шешуде қолданатын боламыз. *Сфераның* қарапайым жасаушысы m – шеңбер, сондықтан оны *сызықтық емес бет* деп атайды. Жасаушының әр нүктесі осьтен айналып шеңбер құрады, сол шеңберлер жиынын *ендіктер* немесе *параллельдер* жиыны деп атайды. Бұл шеңберлердің жазықтығы үнемі оське перпендикуляр болады: $r_A \perp i$, $r_A \perp j$, $r_A \perp g$. Сызбада: π_2 -де r_{A2} – шеңберлер, π_1 -де r_{A1} – x осіне параллель сызықтар.

Жер бетімен салыстырғанда бұл беттердің де *бойлықтары* – *меридиандар* жиыны бар. Олар беттегі ең қарапайым, оське тиісті (сызбада $\alpha \perp \pi_2$) жазықтықпен қиылысудан пайда болған сызықтар. Біздің сызбаларымызда олардың фронталь проекциялары қиманы шектеуші, горизонталь проекциялары түзу сызықтар. Конустың, цилиндрдің меридиандары l, T – жасаушылары. Сфераның меридиандары шеңбер болады, бірақ оның проекциясы орналасуына қарай шеңбер, эллипс не түзу болуы мүмкін (салыстырыңыз $m_{1,2}$, $n_{1,2}$). Сфераның меридиандары үнемі *солтүстік* және *оңтүстік полюстерден* өтеді. Сфераның *экваторы* оның *горизонталь* проекциясын шектейтін e_2 сызығы, ал фронталь проекциясында e_1 – түзу. Ол ендіктердің біреуі, ең үлкені, диаметрі сфераның диаметріне тең. *Экватор* бетті тең (оңтүстік және солтүстік) екі бөлікке бөледі.

мөлшерде берілетін) сызбаларымен қысқаша танысайық: 49, а-суретте конус, 50, а-суретте цилиндр, 51, а-суретте сфера берілген. Беттердің минималды сызбаларынан олардың пішімін (формасын) түсіну қиын. Мысалы, конус пен бұрама беттің минималды сызбалары ұқсас, айырмасы – бұрама беттің сызбасында оның адымы берілуі керек. Сондықтан минималды сызбалардың міндетті түрде түсіндіруші мәтіні – олардың *алгоритмдік бөлігі* болу керек: $\Phi[S - \text{төбе}, l - \text{жасаушы}, i - \text{ось}]$ – айналу конус, $\Psi[j - \text{ось}, l - \text{жасаушы}]$ – айналу цилиндр, $\theta[O - \text{центр}, A \in \theta, |OA| = R]$ – сфера. Сызба геометрияда беттің *анықтауышы* мәтіндік – *алгоритмдік бөлігінен* және *геометриялық бөлігі* – сызбадан (49, а, 50, а, 51, а-суреттер) құралады. *Алгоритмдік бөлігі* сызбадағы геометриялық элементтерін және оларға сәйкес беттің түрін айтып шығады. *Беттің анықтауышы берілген бетті басқа беттерден бірмәнді ажыратады.* Минималды сызбада барлық *позициялық* және *метрикалық* есептерді шығаруға болады, сондықтан бұл сызбалар да, көпжақтар сияқты, геометриялық толық сызбалар (5-ші тараудан қараңыз).

Беттің минималды сызбасын формасы түсінікті болу үшін оны *нұсқа* (очерк) сызығымен толықтырады. Мысалы 45, а, ә-суретінде конус пен цилиндр бетінің шектеуші сызықтары аксонометрияда, 48, а, ә, б-суреттерінде эпюре беттердің шектеуші, нұсқа сызықтары беріліп, оларды тануға да, ажыратуға да толық мүмкіндік береді. Минималды сызбалар көбінесе жобалау, зерттеу мекемелерінде және оқу барысында қолданылады.

Минималды сызбаны беттің *нұсқа сызығымен* толықтыру оңай әдістерімен танысамыз.

2-есеп. 49, а-суреттегі конусты сәйкес нұсқамен толықтыру керек (49, ә-сурет). *Шешу. 10, а-алгоритм.*

1. Жасаушысы l -дің табанына тиісті болатын 1-нүктесін аламыз.

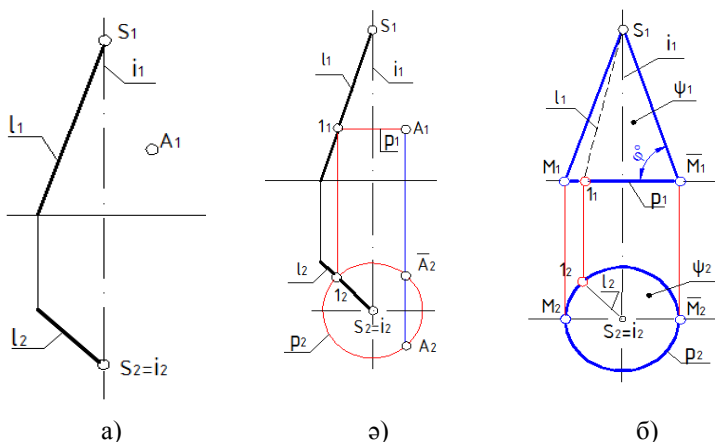
2. Сол нүктеден беттің параллелін жүргіземіз: $l_1 \in r_1 \perp l_1$, r_1 – түзу, $l_2 \in r_2$ – шеңбер, оның радиусы $|l_2 - i_2|$, осы радиуспен r_2 – параллелі салынады.

3. Осы параллельдің *бас меридианына* тиісті M , $\bar{M}$ нүктелерін екі проекцияда белгілейміз: $M_1, \bar{M}_1, M_2, \bar{M}_2$.

4. Нұсқаның шектеуші сызықтары: $S_1M_1, S_1\bar{M}_1$ – фронталь проекциясында, p_2 – горизонталь проекциясында, φ° – конустың көлбеу бұрышы да анықталды.

5. Беттің ψ_1, ψ_2 белгілерін қоямыз.

Конустың көп қасиеттерінің бірі – ол *көлбеулігі тең беттердің* ең қарапайым түрі, онымен келесіде танысып, жұмыс жасаймыз.



49-сурет

3-есеп. 50, ә-суретінде 1-ші есептегідей цилиндр сызбасын (50, а-сурет) сәйкес нұсқамен толықтырамыз. Шешу. 10, ә-алгоритм.

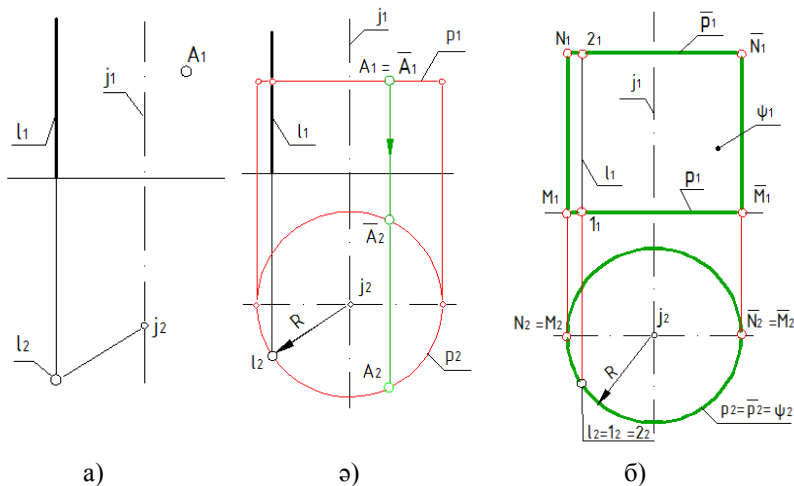
1. Жасаушысы l -ға тиісті төменгі 1 -, жоғарғы 2 -нүктелерді аламыз, сызбада $l_2 = 2_2$. Осы нүктелерден цилиндрдің табандары өтетін болсын.

2. Төменгі 1 -ден беттің параллелін жүргіземіз: $l_1 \in p_1 \perp i_1$, p_1 – түзу, $l_2 \in p_2$ – шеңбер, $R = |l_2 - j_2|$ – осы радиуспен p_2 – параллелі салынады. Осыған ұқсас 2 -ден беттің $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ параллельдерін жүргіземіз.

3. Осы параллельдердің *бас меридианына* тиісті M , $\bar{M}$, $N, \bar{N}$ төрт нүктенің екі проекциясын белгілейміз: $M_1, \bar{M}_1, M_2, \bar{M}_2$ және $N_1, \bar{N}_1, N_2, \bar{N}_2$.

4. Шектеуші нұсқа сызықтары: $M_1N_1, \bar{M}_1\bar{N}_1$ – фронталь проекциясында, $p_2 = \bar{p}_2$ горизонталь проекциясында.

5. Беттің Ψ_1, Ψ_2 белгілерін қоямыз.



50-сурет

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Қандай беттерді сызықтық және сызықтық емес деп атайды?
2. Айналу беттердің анықтаушы деп нені айтады?
3. Бұрама сызықтың жасалуы, түрлері, негізгі сипаттарын айтыңыз.
4. Цилиндрлік бұрама сызық қалай эпюрге салынады?
5. Бұрама беттердің сызбасы, анықтаушысы.
6. Қандай сызықты геодезиялық сызық деп атайды, оның негізгі қасиеті?
7. Геодезиялық сызықтың сызбасын беріңіз.
8. 1'-есепін шығарыңыз.
9. 48, б-суретінде сфераның экваторын, меридиананың ендігін көрсетіңіз.
10. Меридиан (бойлық) туралы түсінік.
11. Беттердің минималды сызбасының мысалдарын келтіріңіз, оларды нұсқа сызықтарымен толықтырыңыз.
12. 49, ә, 50, ә және 49, а, 50, а-суреттердің байланысын айтып шығыңыз.

7. АЙНАЛУ, БҰРАМА БЕТТЕРГЕ ҚАТЫСТЫ ПОЗИЦИЯЛЫХ ЕСЕПТЕР

Бұл позициялық есептерде тиістілік және қиылысу мәселелері қарастырылады. Есептердің шешу алгоритмдері бұрын айтылғандай: а – проекциялаудың қасиеттеріне (4–5-тараудағы көпжақтарды еске түсіріңіздер), б – беттердің ерекшеліктеріне және в – есепте берілген геометриялық элементтерінің орналасуына байланысты болып келеді. Әрине проекциялаушы орналасқан түзумен, жазықтықпен, цилиндрмен қиылысу сызығының нүктелері оңай табылады.

7.1. Тиістілік есептері

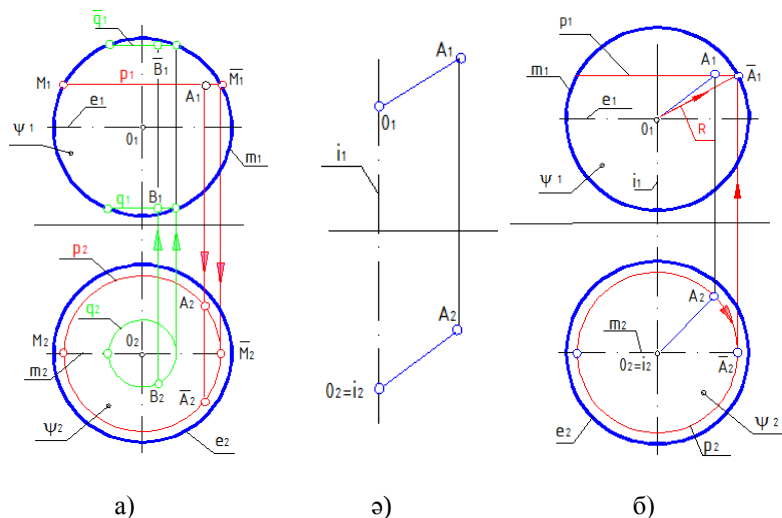
1-есеп. Конус бетіне тиісті A нүктесі берілсін. Оның горизонталь A_2 проекциясын құру керек (49, б-сурет, минималды сызба). Шешу. *Талдау:* айналу сызықтық беттердің *негізгі қасиетін* қолданамыз, яғни – оның әр нүктесінен параллель (ендік) және түзу өтеді. *11-алгоритм.*

1. A_1 -ден параллельдің фронталь проекциясын жүргізейік, ол p_{1A} түзуі: $p_{1A} \perp l_1$. Бұл ендік l_1 жасаушысымен l_1 нүктесінде қиылысады: $p_{1A} \cap l_1 = 1_1$.

2. Тиістілік арқасында горизонталь проекциясын да анықтаймыз: $1_2 \in l_2$, p_{2A} – ендіктің радиусын l_2 S_2 -ге тең етіп шеңберді жүргіземіз.

3. Одан соң A_1A_2 вертикаль байланыс түзуін p_{2A} параллелімен қиылысқанша жүргізіп, *ізделінген* $A_2, \bar{A}_2$ нүктелерін табамыз, $\bar{A}_2$ нүктесі фронталь проекциясында көрінбейді. Есептің шешуі осы.

Х мырзаның ескертуі: егерде конустың табаны сызбада берілген болса, онда A_1 нүктесінен A_1S_1 жасаушысын *табанымен* қиылысқанша жүргізіп, соның арқасында бәрі бір есептің шешуі A_2 нүктесі болады. Осыны сызбада тексеріп көріңіз, тексеруді *әдетке* айналдырыңыз.



51-сурет

Тура осы әдіспен 50, б-суретте, минималды сызбада (50, а-сурет) берілген цилиндрге тиісті А нүктесінің горизонталь проекциясы анықталады, оны өзіндік жұмыс ретінде түсініп, сызыңыз (1'-есебі).

2-есеп. 51, а-суретте $A(A_1)$, $B(B_2)$ нүктелері сфераға тиісті болсын (нұсқасы сызбада берілген), олардың жетіспейтін A_2 – горизонталь, B_1 – фронталь проекцияларын анықтау керек. Шешу. *Талдау:* есепті шешу үшін сфераның қасиетін қолданамыз: оның әр нүктесінен шексіз көп шеңбер өтеді. Олардың ішінде ең қолайлысы ендік не фронталь жазықтығына параллель орналасқан шеңберлер. Сызбада *ендіктер* қолданылған.

12-алгоритм. 1. A_1 нүктесінен p_1 ендігі – түзу жүргізілген. Ол фронталь проекциясында сфераны шектеуші бас меридианды, m_1 -ді M_1 , $\bar{M}_1$ нүктелерінде қиып өтеді.

2. Бұлардың горизонталь проекциясы m_2 -ге тиісті: M_2 , $\bar{M}_2 \in m_2$.

3. Енді $[M_2\bar{M}_2]$ кесіндісін диаметр етіп, p_2 шеңберін сызамыз.

4. Оның бойынан екі A_2 , $\bar{A}_2$ нүктелері табылады. Есептің бірінші шешуі осы. А нүктесі фронталь проекциясында көрінбейді, $\bar{A}$ көрінетін болады.

5. B_2 нүктесіне тиісті сфераның ендігін – шеңберді жүргіземіз. Оның радиусы $|O_2 B_2|$ және сызбада ол сфераның оңтүстік және солтүстік бөлігіне сәйкес екі ендіктің проекциясы болады: $q_2 = \bar{q}_2$.

6. Олар меридиан m_2 -мен $N_2, \bar{N}_2$ нүктелерінде қиылысады.

7. Фронталь проекциясында $q_1, \bar{q}_1$ ендіктері – түзулер жүргізіледі.

8. Тиістілікпен $B_1, \bar{B}_1$ нүктелерін анықтаймыз. Есептің екінші шешуі осы. Бұл нүктелер фронталь проекциясында көрінеді.

3-есеп. 51, ә-суретте минималды сызбасымен берілген сфераның радиусын анықтап, сызбаны *нұсқамен* (очеркпен) толықтыру керек болсын. Шешу. *Талдау.* Сызбада сфераның радиусы OA нүктелерімен берілген, бірақ бұл оның нақты шамасы емес. Біздің мақсатымыз алдымен осыны анықтау.

13-алгоритм. 1. Сфераның $|OA|$ радиусын анықтау үшін 51, б-суретіндегі OA түзуін O нүктесінен айналдырып, оны фронталь, не горизонталь жағдайға келтіреміз. Сызбада: $O_2 A_2$ - ні айналдырып, Ox осіне параллель етіп орналастырдық: $O_2 \in O_2 \bar{A}_2 \parallel Ox$. Бұл түзу фронтальдың горизонталь проекциясы болды.

2. $\bar{A}$ нүктесінің фронталь проекциясын анықтау. A_2 нүктесін сфера бойымен айналдырғанда, ол p_2 ендік бойымен жылжиды. Осы ендіктің фронталь проекциясы Ox осіне параллель A_1 нүктесіне тиісті p_1 – түзуі.

3. $\bar{A}_2$ нүктесінен өтетін вертикаль байланыс сызығының осы сызықпен қиылысу нүктесі *ізделінген* $\bar{A}_1$ болды: $\bar{A}_2 \bar{A}_1 \cap A_1 \bar{A}_1 = \bar{A}_1$!

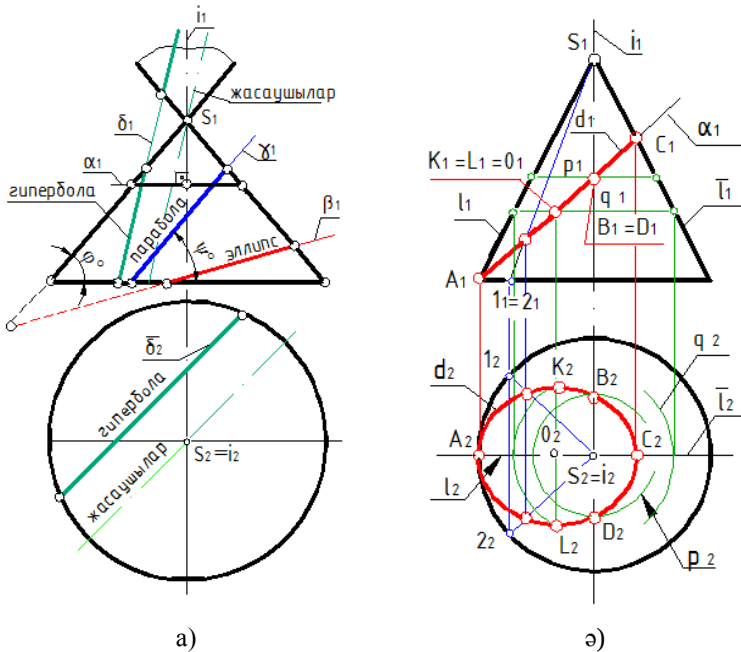
4. Сфераның радиусы $R = |O_1 \bar{A}_1|$ анықталды!

5. Осы радиуспен сфераның *нұсқа* сызықтары жүргізіледі, ол 51, а-суретіндегідей фронталь проекциясында оның бас меридианы m_1 , горизонталь проекциясында e_2 экваторы болады.

6. Беттің Ψ_1, Ψ_2 белгілері қойылады.

7.2. Қиылысу есептері

Бұл бөлімде беттердің жазықтықпен, түзумен қиылысуын қарастырамыз, беттердің өзара қиылысуын [1–4] көруге болады.



52-сурет

7.2.1. Қималар

Алдымен конустың қималарына көңіл бөлейік. Айналу конусының қималарының ішінде екінші ретті барлық сызықтарды: шеңбер мен эллипсті, парабола мен гиперболаны, екі түзуге ажырыған қисық сызықты кездестіруге болады. Қиманың түрі қиюшы жазықтықтың орналасуына байланысты (52, а-сурет) болып келеді. Әрине қиюшы жазықтық төбесінен өтетін болса, қимада екі не бір беттескен жасаушы – түзу, не бір нүкте – конус төбесі болады. Соңғы нұсқада бір нүкте нақты болып, екі беттескен түзу жорамал түзулерге айналады [2]. *Беттескен* түзулер – жазықтық конус бетімен *жанасқанда* пайда болады (6-есепті, 54-суретті қараңыз).

Егер α жазықтығы конус осіне перпендикуляр болса, қима *шеңбер* болады: $\alpha \perp l \rightarrow$ шеңбер.

Егер қиюшы жазықтық β конустың барлық жасаушыларын қиып өтсе және оське перпендикуляр болмаса, қима *эллипске* айналады. Онда β жазықтығы үшін $\varphi^\circ > \psi^\circ_\beta > 0^\circ$ теңсіздігі орындалуы керек. Мұнда φ° конус жасаушысының көлбеу бұрышы, ал ψ°_β – қиюшы жазықтықтың көлбеу бұрышы.

Егер қиюшы γ жазықтығы үшін $\varphi^\circ = \psi^\circ_\gamma$ теңдігі орындалатын болса, қима *параболаға* айналады, себебі γ жазықтығы конустың *бір жасаушысына* параллель (52, а-сурет).

Егер қиюшы δ (δ) жазықтығы үшін $\varphi^\circ < \psi^\circ_\delta$ теңсіздігі орындалатын болса, қима *гиперболаға* айналады, себебі δ (δ) жазықтығы конустың *екі жасаушысына* параллель. Гиперболаның екі тармағы осы қиюшы жазықтық конустың екі бөлігін қиып өткен жағдайда пайда болады. Параболаның шексіз алыста *бір нүктесі*, гиперболаның *екі нүктесі* бар екенін біле жүрейік (ол сәйкесінше бір не екі жасаушыға параллельдіктің салдарынан). Ендігі біздің мақсатымыз конустың қимасын құрудың жалпы әдісімен танысу.

4-есеп. 52, ә-суретте айналу конус Ψ және оны қиюшы $\alpha \perp \pi_1$ жазықтығы берілген. Конустың қимасын анықтау керек: $\Psi \cap \alpha = d$, d - ?

Шешу. *Талдау:* α жазықтығы конустың барлық жасаушыларын қиып өтеді, сондықтан қима d *эллипс* болады.

14-алгоритм. 1. Эллипстің фронталь d_1 проекциясы A_1C_1 кесіндісі болып, α_1 жазықтығымен беттеседі. Бұл нүктелер осы эллипстің үлкен осін нақты шамамен кеңістікте анықтайды. A_2, C_2 нүктелері $l_2, \bar{l}_2$ -ге тиісті болады: $A_2 \in l_2$, $C_2 \in \bar{l}_2$.

2. Эллипстің В, D, E, F аралық нүктелері болсын. Енді осы нүктелердің горизонталь проекцияларын анықтаймыз. $B_1 = D_1$ ось бойында, олардың горизонталь проекциясы ендік $p(p_1, p_2)$ арқылы табылады: $B_2, D_2 \in p_2$.

3. $E_1 = F_1$ нүктелерінің горизонталь проекцияларын ендіктер не жасаушылар $S_11_1 = S_12_1$ арқылы табуға болады: $E_2 \in S_21_2$, $F_2 \in S_22_2$. Бұл нүктелердің орнын өздерің белгілеңдер. Сызбаның дәлдігі жоғары болу үшін қосымша жасаушыларды жүргізіп, тағы да бірнеше нүктелерді алуға болады.

4. Енді осы сызда *эллипстің осьтерін* анықтайық. Оның үлкен осі A_2C_2 болады (нақты шамасы $|A_1C_1|$).

14'-ішкі алгоритм. 5.1. Кіші $K_2 L_2$ осі $A_2 C_2$ -ге перпендикуляр етіп, оны O_2 нүктесінде қаж бөледі. Сызбада $K_1 = L_1 = O_1$ және $O_1 A_1 = O_1 C_1$.

5.2. K_2, L_2 нүктелерінің горизонталь проекциялары $O_1 O_2$ вертикаль байланыс сызығына тиісті болады.

5.3. K_1, L_1 -ге тиісті q_1 ендіктің горизонталь q_2 проекциясын – шеңберді саламыз. Оның бойындағы K_2, L_2 нүктелері *ізделінген* кіші осьтің нақты шамасын береді: $|K_2 L_2|$.

6. Табылған нүктелерді бірқалыпты етіп қосып, d_2 – эллипстің горизонталь проекциясын ($A_2 E_2 K_2 B_2 C_2 \dots A_2$) құрамыз, есептің шешуі осы.

5-есеп. 53-суретте цилиндр Ψ мен қиюшы $\beta \perp \pi_1$ жазықтығы берілген. Осылардың қимасын $\Psi \cap \beta = d$ -ны анықтап, оның профиль проекциясын құру керек.

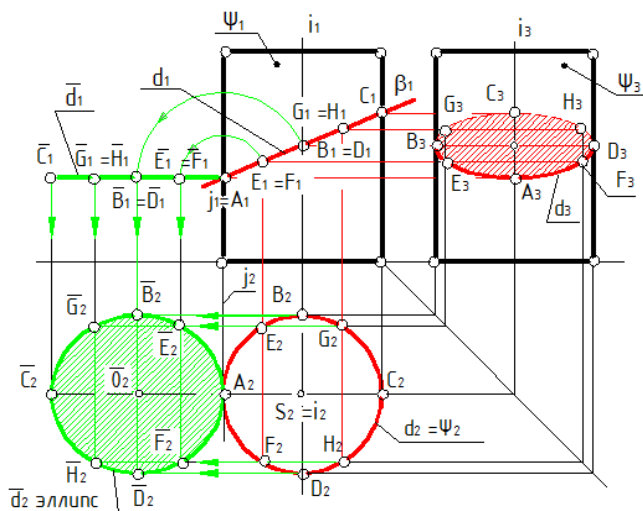
Шешу. *Талдау:* бұл цилиндрдің қималары тіктөртбұрыштан эллипс пен шеңберге дейін өзгереді. Сызбадағы қима эллипс болады, себебі қиюшы жазықтық цилиндрдің барлық жасаушыларын қиып өтеді және ол оське перпендикуляр емес. Егер қиюшы жазықтық оське параллель болса қима тіктөртбұрыш, егер ол оське перпендикуляр болса қима шеңбер болады.

15-алгоритм. 1. Эллипстің фронталь проекциясы қиюшы жазықтықпен беттеседі: $d_1 = \beta_1$, ол $A_1 C_1$ кесіндісі. Бұл эллипстің шектеуші нүктелері және $|A_1 C_1|$ оның үлкен осінің *нақты шамасы*, кіші осінің *нақты шамасы* цилиндрдің *диаметріне* тең.

2. Эллипстің $B, D, E, F, \dots$ аралық нүктелері болсын.

3. Осы айтылған нүктелердің горизонталь проекциялары беттің Ψ_2 проекциясына түседі, себебі цилиндрдің бұйыр беті π_2 -ге перпендикуляр орналасқан: $A_2, B_2, \dots \in \Psi_2$, сондықтан $d_2 = \Psi_2$. Эллипстің өзі бұл проекцияларда жоқ, сондықтан оның профиль проекциясын құрамыз.

4. Профиль проекциясында цилиндр Ψ_3 осі i_3 вертикаль болатын тіктөртбұрыш.



53-сурет

5. $|A_3C_3| \in i_3$, бұл кесінді сызбадағы эллипстің *кіші осі* болады. Ось бойындағы $B_1=D_1$ -дің профиль проекциялары B_3, D_3 -ті тиістілікпен тіктөртбұрыштың бойынан табамыз, $|B_3D_3|$ кесіндісі сызбадағы эллипстің үлкен осіне тең.

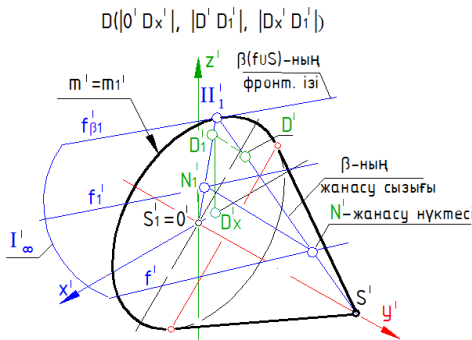
6. Аралық $E_1=F_1$, $G_1=H_1$ нүктелері A_1C_1 кесіндісін тең төрт бөлікке бөлетін болсын. Горизонталь проекциясындағы $|E_2F_2|$, $|G_2H_2|$ кесінділерінің арақашықтықтары профиль проекциясындағы $|E_3F_3|$, $|G_3H_3|$ арақашықтықтарына тең болады, ол сызбадан анық көрініп тұр.

7. Осы $A_3 B_3 C_3 D_3 E_3 F_3 G_3 H_3$ нүктелерін бірқалыпты етіп қосып, эллипстің профиль d_3 проекциясын анықтаймыз. Қиманы сызықтап, оның көрінбейтін $B_3 C_3 D_3$ бөлігін үзілме сызықпен көрсетуге ұмытпаңыздар.

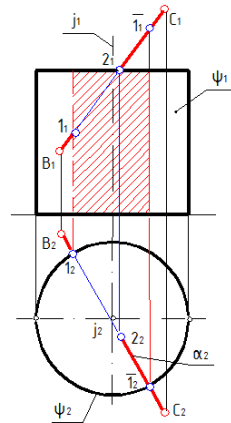
Х мырза: 27-сұрақ. Қимадағы эллипстің *нақты шамасын* анықтауға бола ма? Жауап. Оның анықтауы қиынға түспейді, себебі d_1 сызығы проекциялаушы $\beta_1 \perp \pi_1$ жазықтығына тиісті. Шынында да, егер фронталь проекциясындағы $d_1 = A_1C_1$ кесіндісін A_1 нүктесінен өтетін $j \perp \pi_1$ осінен айналдырып, оны горизонталь жазықтыққа параллель етіп орналастырса: $A_1 \bar{C}_1 \parallel O_x$,

эллипстің жаңа проекциясы $\bar{d}_2$ горизонталь проекциясында нақты шамасымен түседі: $\bar{d}_2$ ($\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2\bar{D}_2$). Сызбада бұл нүктелер қалай табылғаны анық көрсетілген. Х мырзаның ұсынысы: осыны шағын оқу-зерттеу (СОЗЖ) жұмыс етіп сызыңыздар, түсініңіздер. Бұл сызбаның, есептің нөмірі 15*^(7.2.1) болсын.

7.2.2. Беттердің түзулермен (сызықтармен) қиылысуы



54-сурет



55-сурет

6-есеп. Жоғарыдағы пирамидаға қатысты есепті ескеріп, 54-суретте конуспен f түзуінің ортақ нүктелерін алдымен *аксонометрияда* анықтайық. Конус төбесі S' , табаны m' овал болсын. 5.3.2-тармағының 8-есепі, 7-алгоритмде айтылғандай етіп есепті шығарамыз. Сызбада $f' \parallel f'_1$, себебі f – фронталь түзуі π_1 параллель.

Алгоритм 7 кон. 1. Кеңістікте көмекші $\beta(S \cup f)$ жазықтығы алынады, сызбада оның *фронталь* f'_1 *ізінің* екі нүктесі анықталуы керек.

2. Біздің мысалымызда $f' \parallel f'_1$ болғандықтан бұл екі түзу шексіз алыста қиылысады: $I'_\infty = f' \cap f'_1$. β -ның фронталь f'_1 *ізі* f' -ке *параллель* болады және ол I'_∞ -ке, үш параллель түзудің ізіне тиісті. Іздің *бағыты* анықталды, ол f – ке параллель

3. $f'_{1\beta}$ -тың екінші ізі (нүктесі) қалауымызша алынған $N \in f$ нүктесінен өтетін SN түзуінің фронталь ізі: $\Pi' = \Pi'_1 = S'N' \cap S'_1N'_1$. Бұл нүкте $\Pi'_1 \in m'$ -ке тиісті болып тұр.

4. Осы нүктеден жүргізілген β -ның фронталь $f'_{1\beta} (I'_{\infty} \Pi'_1)$ ізі m' -пен жанасты, яғни β жазықтығы және конус беті $S \Pi$ түзуі бойымен жанасады!

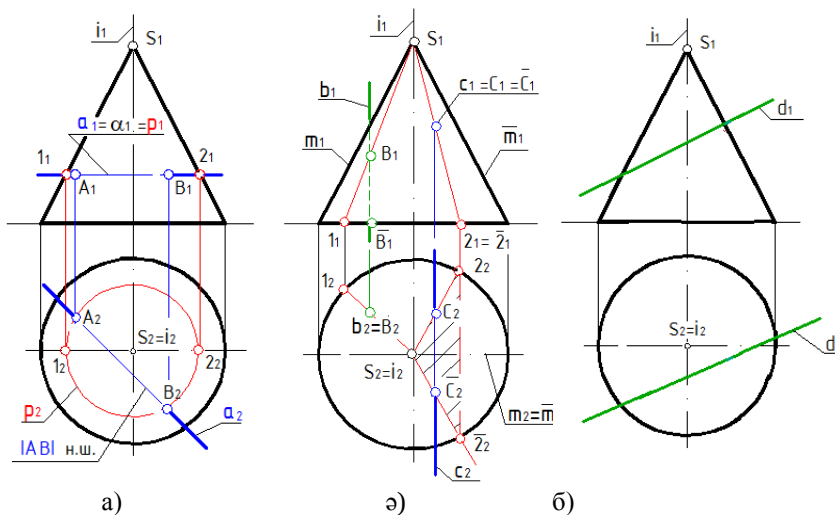
5. Әдеттегідей салыстыруды жүргізіп, шешудің барлық нұсқаларын қарастырайық.

5.1. $I'_{\infty} \Pi'_1$ түзуі мен конус табаны m' өзара қалай орналасқан? Егер $I'_{\infty} \Pi'_1 \cap m' = 1', 2'$, онда түзу мен конустың осы екі нүктеден өтетін $S1, S2$ жасаушылардың f -пен қиылысу нүктелері *ізделінген ортақ нүктелері*!

5.2. Егер $I'_{\infty} \Pi'_1$ түзуі m' табанымен жанасса Π'_1 нүктесінде, онда f түзуі конуспен N' нүктесінде *жанасады*: $N' = S'\Pi'_1 \cap f'$.

5.3. Егер $I'_{\infty} \Pi'_1$ -пен m' -тың ортақ нүктелері болмаса, онда түзу мен конус беті *қиылыспайды* нақты нүктеде. Сызбамызда f' түзуі конуспен N' нүктесінде жанасты: $N' = S'\Pi'_1 \cap f'$. Есептің шешуі осы.

7-есеп. 55-суретте цилиндр Ψ және BC түзуі берілген. Осылардың қиылысу нүктелерін анықтау керек: $\Psi \cap BC = 1, 2$.



56-сурет

Шешу. *Талдау.* 1. Сызбадағы цилиндрдің орналасуы есепті оңай шешуге әкеледі.

2. Цилиндр горизонталь проекциялаушы болып орналасқан, сондықтан B_2 C_2 түзуінің цилиндрдің Ψ_2 горизонталь проекциясымен қиылысу $1, \bar{1}$ нүктелері *ізделінген* нүктелерге жатады. Сол жақтағы 1 – нүкте қиылысу шартына сәйкес, ал $\bar{1}$ – нүктесі оған сай емес, оның фронталь проекциясы цилиндрден жоғары орналасып тұр.

3. Берілген BC түзуі цилиндрдің жоғарғы бетін қиып тұр: $B_1C_1 \cap \Psi_1 = 2_1$ нүктеде – бұл *ізделінген* екінші нүкте. Сызбада 1_12_1 және 1_22_2 кесінділерін үзілме етіп сызуды ұмытпаңыздар. Есептің шартын цилиндрлік тоннельмен кабельдің қиылысуын анықтау десе болады. Келесі есепте қырат пен тоннельдің осьтері берілді деп алыңыз.

8-есеп. 56, а,ә,б-суреттерінде айналу конус беті және әртүрлі орналасқан түзулер берілген. Осылардың қиылысу нүктелерін анықтау керек. Алғашқы а-, ә-суреттерінде түзулердің орналасуы оңай шешуді ұсынып тұр, алдымен осыны жүзеге асырайық.

1-шешу. 1. α түзуі горизонталь орналасқан, оның үстінен $\alpha_1 \perp i, \alpha_1 \parallel \pi_2$ жазықтығын жүргіземіз: $\alpha \in \alpha_1$.

2. Ол конусты $p(p_1, p_2)$ параллель арқылы қияды, оның диаметрі $|1_12_1|$ -ге тең.

3. Ізделінген нүктелер алдымен горизонталь проекциясында табылады: $p_2 \cap \alpha_2 = A_2, B_2$. Фронталь проекциялары тиістілікпен анықталады: $A_1, B_1 \in p_1 = \alpha_1$.

4. Сызбада $|A_1 B_1|, |A_2 B_2|$ кесінділері көрінбейтінін ескеріңіздер. 56, а-суреттегі есептің *шешуі* осы.

2-шешу. *Талдау.* 56, ә-суретінде b, c түзулерінің бір проекциясы нүкте, яғни олар проекциялаушы орналасқан: $b \perp \pi_2, c \perp \pi_1$. Бұл жерде ең лайықтысы сол нүктелерден өтетін жасаушыларды қолдану, себебі қиылысу $B, \bar{B}, C, \bar{C}$ нүктелерінің бір проекциясы сол нүктелермен беттесіп тұру керек: $b_2 = B_2, \bar{B}_2, c_1 = C_1, \bar{C}_1$.

1. Қажетті жасаушыны жүргіземіз: $b_2 \in S_2 1_2$.

2. Оның фронталь проекциясын $S_1 1_1$ табамыз.

3. Осы жасаушының b түзуімен қиылысуын табамыз: $S_1 1_1 \cap b_1 = B_1$ – есептің *бір шешуі* осы, $\bar{B}_1$ нүктесі конус табанында

жатыр. Фронталь проекциясында b түзуінің B_1 нүктесінен төменгі бөлігі көрінбейді.

4. Екінші қажетті жасаушыны жүргіземіз: $c_1 \in S_1 2_1$.

5. Оның горизонталь екі проекциясын $S_2 2_2$, $S_2 \bar{2}_2$ табамыз.

6. Осы жасаушылардың c түзуімен қиылысуын табамыз: $S_2 2_2 \cap c_2 = C_2$, $S_2 \bar{2}_2 \cap c_2 = \bar{C}_2$ – есептің екінші *шеуі* осы. Сызбада $|C_2 \bar{C}_2|$ кесіндісі көріне ме?

3-шешу. Соңғы түйенің жүгі ауыр дегендей, біз қиын есепке жеттік. 5б, б-суретте қиысуы d түзуі жалпы жағдайда орналасқан, сондықтан бұл жерде конус төбесінен өтетін *қосымша* жазықтықты қолдану керек. Егер d түзуінен қосымша проекциялаушы жазықтық жүргізілсе, онда қима қисық сызық болады. Бұның өзі қиын есепке жатады (52, ә-суретті, 14- алгоритмді қараңыз). Сондықтан осы тармақтағы б-есептің шешу жолын тандаймыз.

7 *кон-алгоритм*. Шешу. Жалпы *талдау*. S нүктесінен және d түзуінен өтетін β жазықтығын алу керек: $\beta (Sud)$. Бұл *жалпы жағдайда* орналасқан жазықтық. Осы жазықтықтың π_2 -мен (яғни конус табанымен) қиылысу

I–II сызығын анықтау керек. Ол β -ның горизонталь ізі! Сонда β жазықтығының конус бетімен қиылысқан жасаушылар проекциялары $S_2 3_2$, $S_2 4_2$, $S_1 3_1$, $S_1 4_1$ -де табылады. Бұл түзулердің берілген d түзуімен қиылысу A , B нүктелері – *ізделінген* нүктелер болады. Осыны жүзеге асырамыз.

1. Сызбада фронталь проекциясында d_1 түзуінің қалауымызша $1_1, 2_1$ нүктелерін алып, сол нүктелерден $S_1 - 1_1$, $S_1 - 2_1$ түзулерін π_2 жазықтығымен (x осімен) I_1 , II_1 нүктелерінде қиылысқанша жүргіземіз. Бұл түзулер β -ны құрайды және I_1 II_1 түзуі оның *горизонталь ізінің* фронталь проекциясы!

2. Олардың бойынан I_2 , II_2 нүктелерін табу үшін I_1, II_1 нүктелерінен төмен қарай байланыс сызықтарын жүргіземіз. Горизонталь проекциясында 1_2 , 2_2 нүктелерін d_2 -ден тауып, $S_2 1_2$, $S_2 2_2$ түзулерін жүргіземіз. Оларды I_2, II_2 нүктелеріне тірелгенше жалғастырамыз.

3. Осы түзулердің бойындағы I_2 , II_2 нүктелерін қосқанда, β -ның π_2 -мен *қиылысу сызығы*, оның *горизонталь ізі* пайда болады: $\beta \cap \pi_2 = I_2 II_2$.

4. Енді кішігірім *зерттеу (салыстыру)* жүргізейік.

4.1. Горизонталь проекциясында I_2 Π_2 түзуі конус табаны m_2 -мен 3_2 , 4_2 нүктелерінде қиылыса ма? Қиылысатын болса, онда $\beta((I - \Pi)Ud)$ жазықтығы конус бетімен екі жасаушы: S_23_2 , S_24_2 арқылы қиылысады. Өз кезегінде d түзуі конус бетін *екі ізделінген* A , B нүктесінде *қиып өтеді*: $A, B = d \cap (S_3, S_4)$.

4.2. Қиылыспайтын болса, онда β жазықтығы конус бетімен қиылыспайды және d түзуі де конуспен *қиылыспайды*.

4.3. Егер $I_2 - \Pi_2$ түзуі m_2 -мен *жанасатын* болса, онда d түзуі де конуспен *жанасады*, сызбада $S_23_2 = S_24_2$ бетеседі. Бұлардың d түзуімен ортақ *жанасу* G нүктесі болады: $S_23_2 = S_24_2 \cap d_2 = G_2$. Есептің шешуі осы. Сызбадан есептің *нақты жауабын* өздеріңіз анықтаңыз. Түзудің көрінбейтін бөлігі бар ма? Осы есепке сызбасы ұқсас 41, а, ә-суреттерін қараңыз.

Х мырзаның ұсынысы: 56, б-суретте шағын оқу-зерттеу (СОЗЖ) есебі ретінде берілген конуспен d түзуінің қиылысу нүктелерін, олардың координаталарын алгоритмге сай етіп, анықтаңыз. d түзуінің көрінбейтін бөлігінің, нақты шамасын анықтаңыз. Сызбаның, есептің нөмірі $16^{*(7.2.2)}$ болсын.

9-есеп. 57, а, ә, б-суреттердегі есептер Ψ сфераның a , f , b түзулерімен қиылысу нүктелерін анықтауға арналған. Алғашқы 57, а, ә-суреттерінде оңай есептердің мысалы берілген, себебі түзулердің орналасуы оңай шешу жолын ұсынып тұр: $a \perp \pi_1$, $f \parallel \pi_1$!

1-шешу. 1. Сызбада a_1 түзуі нүкте, сондықтан оның сферамен қиылысу $A_1, \bar{A}_1$ нүктелері a_1 -мен беттеседі: $a_1 = A_1, \bar{A}_1$.

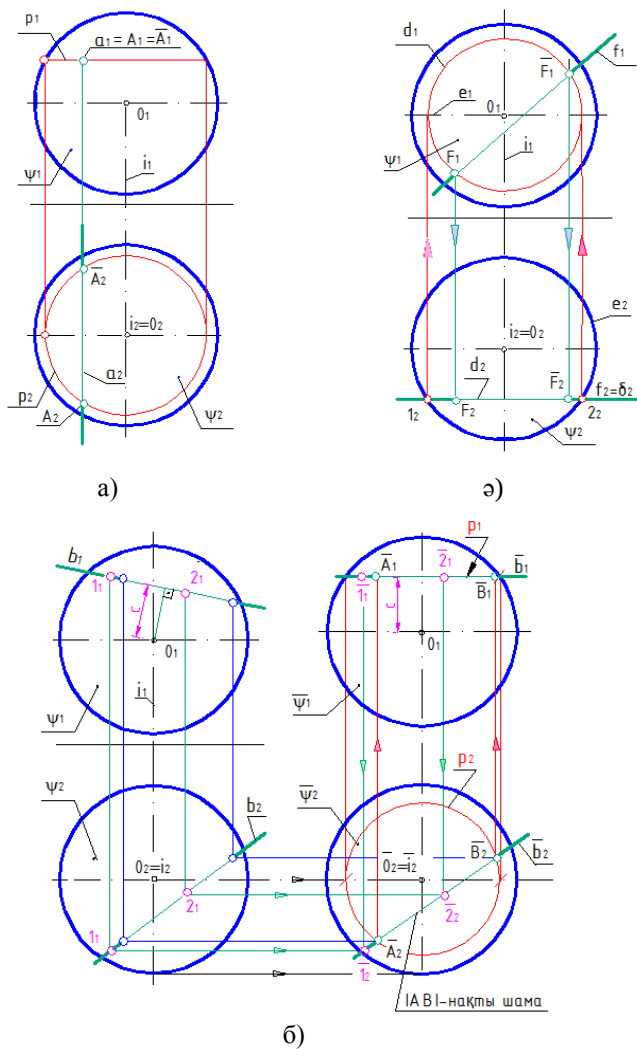
2. Бұл нүктелердің горизонталь прокциялары осылардан өтетін ендік p -ға тиісті болады: $A_1, \bar{A}_1 \in p_1$ – түзу, $A_2, \bar{A}_2 \in p_2$ – шеңбер. Есептің *1-шешуі* осы.

2-шешу. 1. $f_2 \parallel ox$, сондықтан осы түзуден *қосымша* $\delta \parallel \pi_1$, $f_2 = \delta_2$ жазықтығы жүргізілді.

2. Осы жазықтық сферамен d шеңбері арқылы қиылысады: $\delta \cap \Psi = d$. Сызбада $f_2 = \delta_2 = d_2$ және ол сфера экваторымен екі $1_2, 2_2$ нүктеде қиылысады. $|1_2 2_2|$ кесіндісі d шеңберінің диаметрі.

3. Фронталь проекциясында d_1 шеңбері нақты шамамен салынады.

4. Осы шеңбердің f_1 түзуімен ортақ $F_1, \bar{F}_1$ нүктелері *ізделінген* нүктелер: $f_1 \cap d_1 = F_1, \bar{F}_1, f \cap \psi = F, \bar{F}$. Сызбада $|F_1 \bar{F}_1|$ кесіндісі көрінбейтінін ескеріңіздер.



57-сурет

3-шешу. 57, б-суретінде қиылысатын b түзуі *жалпы жағдайда* орналасқан, сондықтан берілген сызбаны *түрлендіріп*, түзуді фронталь не горизонталь жағдайға келтіріп, 2-ші шешуді қолдану керек. Одан кейін қиылысу нүктелерін анықтауға болады. *Түрлендіруге* батыл кірісейік [1,2,3].

16-алгоритм. 1. Фронталь проекциясында b -ға тиісті қалауымызша екі 1, 2 нүктені алайық: $1, 2 \in b$.

2. Сызбада бір-бірімен байланысты 4 элемент – үш нүкте $1_1, 2_1, O_1$ және шеңбер пайда болды. Осы 4 элементтің байланысын бұзбай, орналасуын ғана өзгертіп, $b_1 \parallel O_1x$ етіп, оң жаққа жаңа сызбаны фронталь проекциясында саламыз: $\bar{\Psi}_1, \bar{b}_1(\bar{1}_1 - \bar{2}_1)$, мұнда c өлшеміне назар аударыңыз!

3. Біз осы күрделі түрлендіруді түсіну үшін оның *екі қарапайым түрлендіруден* құрылғанын көрсетейік. 1 – берілген сызба O_1 нүктесінен өтетін $i \perp \pi_1$ осінен айналдырылып, b түзуі *горизонталь* орналастырылады. Өз кезегінде сфера да сол бұрышқа осьтен айналдырылады, бұны *айналдыру әдісі* деп айтады. 2 – осы айналдырылған сызбаны проекциялау байланысын бұзбай, бос оң жаққа *жылжыту* нәтижесінде жаңа фронталь проекциялар $\bar{\Psi}_1, \bar{b}_1$ пайда болды. Бұл түрлендіруді *жазық параллель ығыстыру* әдісі деп атайды. Түрлендірудің әдістерін жете түсіну үшін [1,2,3] қарауға болады.

4. Енді *жаңа* фронталь $\bar{\Psi}_1, \bar{b}_1$ проекцияларға сәйкес *жаңа* горизонталь проекцияны құрамыз. Ол үшін: а) $\bar{1}_1, \bar{2}_1, \bar{O}_1$ нүктелерінен төмен қарай вертикаль байланыс сызықтарын, ә) $1_2, 2_2, O_2$ нүктелерінен оңға қарай горизонталь байланыс сызықтарын вертикаль байланыс сызықтармен қиылысқанша жүргіземіз, б) осының нәтижесінде үш нүкте: $\bar{1}_2, \bar{2}_2, \bar{O}_2$ пайда болады. $\bar{O}_2$ нүктесі центр болатын шеңбер – $\bar{\Psi}_2$ сфераның нұсқасы және түзу $\bar{b}_2(\bar{1}_2\bar{2}_2)$ жүргізіліп, жаңа горизонталь проекциясы пайда болды: $\bar{\Psi}_2, \bar{b}_2(\bar{1}_2\bar{2}_2)$.

5. Сфераның $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ *ендігін* қолданып, табамыз: $\bar{b}_1(\bar{1}_1\bar{2}_1) = \bar{r}_1, \bar{r}_2 \cap \bar{b}_2 \rightarrow \bar{b}_2 \cap \bar{\Psi}_2 = \bar{A}_2, \bar{B}_2$. Бұл – *ізделінген* қиылысу A, B нүктелерінің горизонталь проекциялары.

6. Олардың фронталь проекциялары $\bar{A}_1, \bar{B}_1$ – нүктелері тиістілікпен табылады. Есептің шешуі осы. Түзудің көрінбейтін бөлігін көрсетіңіздер.

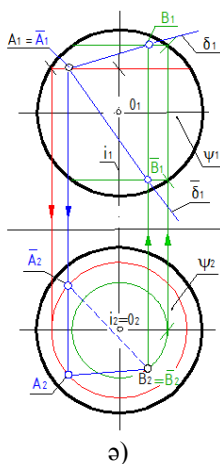
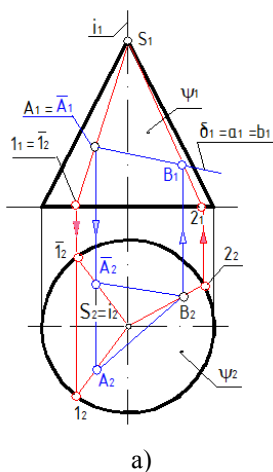
7. Енді А, В нүктелерін *бастанқы* сызбада қалай табуға болады? Сызбада оның 1-ші жауабы: $\bar{A}_2, \bar{B}_2$ нүктелерден солға қарай байланыс сызықтарды b_2 – мен қиылысқанша, одан кейін жоғарыға қарай b_1 – мен қиылысқанша. Нәтижесі: A_2, B_2 және A_1, B_1 табылды. 2 –ші жауабы: b_1 және $\bar{b}_1$ түзулері біріне бірі тең. Сондықтан $\bar{A}_1, \bar{B}_1$ нүктелердің орналасуын b_1 –ге көшіру керек, одан кейін A_2, B_2 табылады.

10-есеп. 58, а, ә-суреттерінде конус пен сфера беті және оларға тиісті А, В нүктелері берілген. Осы нүктелерден бетті қиып өтетін түзулердің сызбасын салу керек. 1-шешу. 58, а-суретін *талдаймыз*. Конусқа тиісті А, В нүктелері бір проекцияларымен берілген, біздің алдағы мақсатымыз осылардың екінші проекциясын табу: A_2, B_1 – ? Осыдан кейін *ізделінген* түзулердің проекцияларын құруға, табуға болады. Берілген алгоритмде конустың *жасаушылары* қолданылған.

17-алгоритм. 1. $A(A_1)$ нүктесі фронталь проекциясымен берілген, оның горизонталь проекциясы жасаушы SA арқылы табылады: $A_1 \in S_1 1_1$.

2. Сол жасаушының горизонталь екі проекциясы $S_2 1_2, S_2 \bar{1}_2$.

3. Проекциялық байланыс арқылы осы жасаушылардың бойынан А нүктесінің екі проекциясы анықталады: $A_2 \in S_2 1_2, \bar{A}_2 \in S_2 \bar{1}_2$.



58-сурет

4. Берілген B_2 нүктесінен SB жасаушы жүргізіледі: $B_2 \in S_2 2_2$.
5. Оның фронталь проекциясы $S_1 2_1$.
6. Осы $S_1 2_1$ -ның бойынан B -ның екінші проекциясы анықталады: $B_1 \in S_1 2_1$.
7. Енді осы нүктелерді қосып, есептің шешуін табамыз: a (AB), b ($\overline{AB}$). Мұндағы түзулер бір δ жазықтығына тиісті, себебі $a \cap b = B$ және ол жазықтық фронталь проекциялаушы: $A_1 B_1 = \overline{A_1 B_1}$, $\delta \perp \pi_1$.

Х мырзаның ұсынысы. Егер конустың орнында сфера болса, онда жасаушылардың орнына берілген алгоритмде оның бойлықтары мен ендіктері қолданылуы керек. Өзіндік жұмыс жасап, 58, ә-суретінде ұсынылған есептің 2-шешуін талдап, түсініп, алгоритмін жазыңыз және δ , $\overline{\delta}$, γ , $\overline{\gamma}$ - 4 жазықтықты анықтаңыз, жазықтықтардың құрушы нүктелерін анықтаңыз, ортақ қиылысу сызығын көрсетіңіз.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Айналу конустың қималарын атап шығыңыздар.
2. Айналу конустың қимасы парабола болу үшін қандай шарт орындалуы керек?
3. Айналу конусының қимасы эллипс болу үшін қандай шарт орындалуы керек, оның үлкен, кіші остері қалай анықталады?
4. Беттерге қатысты тиістілік есептерінің шешу әдісі қандай? Қажетті 11, 12-алгоритмдерді айтып шығыңыз.
5. Түзумен дөнес беттің қиылысу нүктелері қанша, осыған қатысты 16-алгоритмді айтып шығыңыз?
6. Қандай жағдайда түзумен беттің бір ортақ нүктесі болады?
7. Конустың қимасы нүкте болуы мүмкін бе?
8. Центрі $O(20, 30, 35)$, радиусы 15мм болатын сфераның фронталь проекциялаушы түзумен қиылысу нүктелерін анықтаңыз.
9. Айналу цилиндрінің осі $i \parallel OX$, радиусы 20мм, биіктігі 45 мм болсын. Осы беттің қималарын – тіктөртбұрышты, эллипсті салыңыз.

10. 52, б-суретінде берілген есептің шешу алгоритмін айтып шығыңыз.

11. 57, б-суретінде A_1, B_1, A_2, B_2 нүктелері қалай анықталған?

12. 58, ә-суретінде берілген есептің шешуін айтып шығыңыз, оған қатысты 17-алгоритмді өзгертіп, оны өздеріңіз құрыңыз.

1.2-қорытынды жұмыс «Көпжақтың қимасы». Берілгені 1.2-кесте және орналасуды түсіндіретін 1.2, а, ә, б, в-суреттер. Орындау үлгісі 1.2.1-, 1.2.2-суреттерінде көрсетілген. Сызбаға барлық өлшемдер мәні қойылуы керек.

1.2 «Көпжақтың қимасы» тапсырмасын орындау реті. А3 пішімнің жоғарғы сол жағына М1:1 масштабымен нұсқа бойынша, алдымен призманың проекцияларын өз өлшемдерімен салу керек (үлгі, 1-сурет). Қиюшы α жазықтығы осьтің ортасынан берілген бұрышпен өтеді. Осыдан кейін келесі есептер шығарылады:

1. Призманың (1-сурет) қимасын 5.3.1-тармағында берілгендей етіп, оның барлық проекцияларында салу керек. Бұл суретте призманың, шеңбердің қажетті барлық өлшемдері қойылады.

1.2-кесте

«Көпжақтың қимасы» тапсырмасының берілгені

Нұсқалар №	Сырттай сызылған шеңбер диаметрі D_1 , мм	Осьтің орналасуы (i)	Призма биіктігі h , мм	Қиюшы α жазықтықтың орналасуы, φ° бұрышы	Іштей сызылған шеңбер диаметрі D_2 , мм
1	40	$i = Oz$	50	25	-
2	45	$i = Oy$	60	35	-
3	35	$i = Ox$	45	40	-
4	-	$i = Oz$	60	60	40
5	-	$i = Oy$	60	50	30
6	-	$i = Ox$	50	25	45
7	48	$i = Oz$	60	35	-
8	35	$i = Oy$	65	50	-
9	40	$i = Ox$	55	35	-
10	-	$i = Oz$	55	30	35
11	-	$i = Oy$	50	40	45

1-2 кестенің жалғасы

12	-	$i = O_x$	60	25	45
13	45	$i = O_z$	65	30	-
14	35	$i = O_y$	60	35	-
15	40	$i = O_x$	56	40	-
16	-	$i = O_z$	55	30	50
17	-	$i = O_y$	65	60	30
18	-	$i = O_x$	60	40	40
19	45	$i = O_z$	55	35	-
20	38	$i = O_y$	60	25	-
21	45	$i = O_x$	45	40	-
22	-	$i = O_z$	50	60	35
23	-	$i = O_y$	60	50	40
24	-	$i = O_x$	65	40	45
25	48	$i = O_z$	65	25	-
26	45	$i = O_y$	60	35	-
27	38	$i = O_x$	55	50	-

2. Пішімнің ортасына жуық осы призманың 5.3.2-тармағында берілгендей етіп, тікбұрышты *изометриясын* (2-сурет) салу керек.

3. Бастапқы және соңғы аксонометрияда сызбалардың арасындағы *сәйкес* нүктелерді координаталармен бірге анықтаңыз. Мысалы, нүктені қиюшы жазықтыққа (эпюрде), призманың жақтарына, қырларына тиісті (аксонометрияда) етіп алса.

4. Қалауыңызша алынған фронталь және профиль проекциялаушы түзулермен призманың *қиылысу нүктелерін* анықтаңыз (көпжақтың 3 проекциясында, аксонометрияда) 1- және 2-суретте.

5. Берілген призмаға (3-сурет) нұсқа бойынша сырттай не іштей сызылған цилиндрдің α жазықтығымен қимасын құрып, эллипстің *нақты шамасын* анықтаңыз. Бұл суретті пішімнің сол жағына, бос орынға орналастырыңыз.

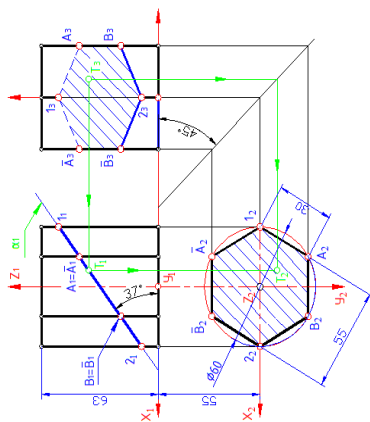
6. Үлгілерде берілген 1.2.1-, 1.2.2-суреттермен өз сызбаларыңызды салыстырып, керек болған жағдайда, оларды түзету керек.

7. Негізгі жазуды толтырыңыз.

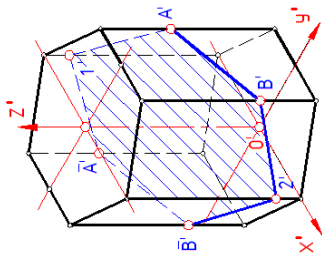
Тапсырмаға қатысты сұрақтар

1. Призманың түріне, орналасуына сай анықтама беріңіз.
 2. Призманың қаңқасында қанша төбе, қыры, қабырғасы бар?
 3. Призманың әр төбесінде оның қанша қыры және қабырғасы қиылысады?
 4. Призманың қималарына жазықтықтың орналасуына сай анықтама беріңіз.
 5. Тапсырмадағы қиманың ұзындығы қайсы шамадан аспайды?
 6. Қиманың симметрия осіне тиісті нүктесінің координаталарын анықтаңыз. Осы нүктені 2-, 3-суреттеріне көшіріңіз.
 7. 2-суретте призманың аксонометриясы қалай тұрғызылған?
 8. 3-суретте айналдыру әдісі не үшін қолданылған?
 9. Призма қимасының нақты шамасын 3-суреттен алуға бола ма?
 10. Цилиндрдің қималары қандай түрде болуы мүмкін?
 11. Эллипстің кіші осі призманың қай өлшеміне тең?
 12. Сәйкес нүктелер үш суретте қалай аныкталады?
- Тапсырманы үш деңгейде орындауға болады.
- I. 1-,2-,3-есептерді шығарып, 50–74 % алып (қорғауда).*
- II. 1...4-есептерді шығарып, 75–89 % алып (қорғауда).*
- III. 1...5-есептерді толық орындап, 90–100 % алып (қорғауда).*

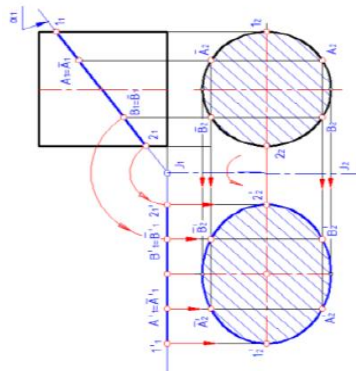
1)



2)



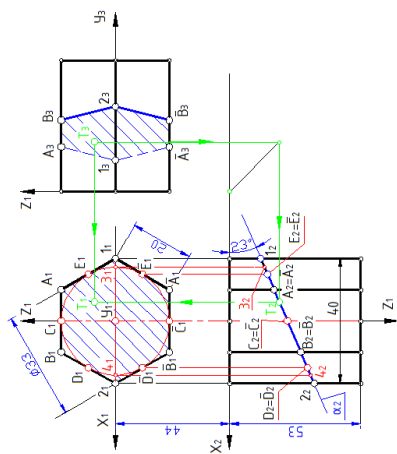
3)



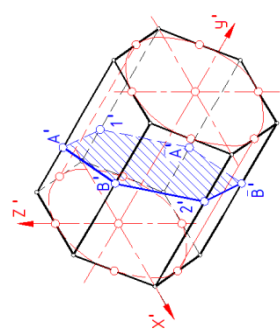
1.2.1- сурет

Негізгі жазу

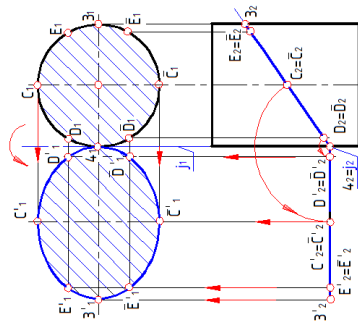
1)



2)



3)



1.2.2-сурет

Негізгі жазу

8. САНДЫҚ БЕЛГІШЕЛЕРІ БАР ПРОЕКЦИЯЛАР (СБП)

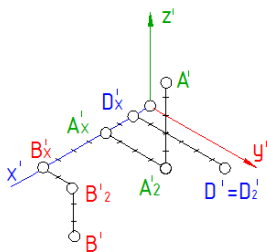
Бұл проекцияларды минималды сызба деп атаса болады, неге десеңіз мұнда барлық ақпарат бір проекцияда беріледі және осы проекция негізінде беттің, дененің қималарын алуға, көрнекі кескінін – аксонометрияны салуға болады, яғни барлық позициялық және метрикалық есептерді шығаруға болады. Әрине бұл проекцияларды машинажасауда қолдану лайықсыз. Бұлар жер бетіне, жер астына қатысты материалдарды сызба ретінде жария етуде қолданылады: тас, теміржолдарын, су арналарын, тау-кен шахталарын, құрылыс алаңдарын, жер бетінің бедерлерін, жер қойнауының байлықтарын айқындауда кездеседі. Бұл сызбалар нысандар –объектілердің ұзындығы мен еніне қарағанда биіктігі әлдеқайда кіші болғанда қолданылады. Бұл проекциялардың кемшілігі бар және ол бір десе болады – олардың көрнекілігі төмен, себебі бастапқы мағлұмат бір проекцияда беріледі. Оны біліммен, кеңістікте ойлау қабілетімізбен толықтыра аламыз. Тиімділігіне сәйкес тау-кен, құрылыс, геологияда, су ресурстарды пайдалануда қолданылатын көптеген сызбалар сандық белгішелері бар проекцияларда орындалады, осыларды меңгеру – біздің келесі мақсатымыз. Батыл кірісейік!

Сандық белгішелері бар проекциялар *горизонталь* проекциясымен беріледі, оны *план*, деп атайды. Бұл сызбада (планда) нүктенің (объектінің) тікбұрышты горизонталь проекциясы салынады. Соның салдары: планда ортогональ проекциялардың барлық қасиеттері сақталады. Бұл проекцияларда кескінделген объектілердің биіктік деңгейлері (z координаталары) сандық белгішелермен беріледі. План жазықтығының деңгейі жалпы жағдайда 0 м, сондықтан оны π^0 деп атап, белгілейді. Планды міндетті түрде *сызықтық масштаб* көрсетіледі. Барлық белгішелер, яғни өлшемдер метрмен беріледі. План қайтымды сызба! Ескертеміз: қайтымды сызба бойынша берілген объекті кеңістікте құруға және оның кезкелген нүктесінің координаттарын анықтауға болады.

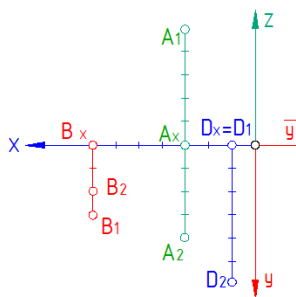
8.1. Нүкте мен түзудің сандық белгішелері бар проекциялары

Планда нүктенің сызбасымен алдымен танысамыз. Ол түсінікті болу үшін оны аксонометрия және эпюрмен салыстырайық. 59, а,ә,б-суреттерде $A(3,4,5)$, $B(7,2,-3)$ нүктелері координаттарымен сәйкесінше аксонометрияда, эпюрге және планда берілген. Оларды салыстыра отырып, біріншіден байқайтынымыз – план мен Монж эпюрінің горизонталь проекциясы ұқсас, яғни сандық белгішелері бар проекциялар – ортогональ проекциялар, екіншіден – план өте тиімді, орындауға көп уақыт пен қағазды талап етпейді, үшіншіден – нүкте қандай да биіктікте немесе тереңдікте орналасса да, кескінде сандық белгішесімен шектеледі, төртіншіден – планда міндетті түрде сызықтық масштаб көрсетіледі.

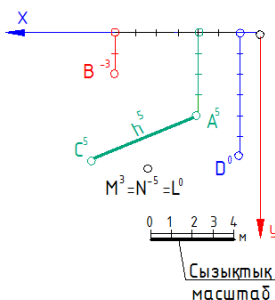
$A(3, 4, 5)$, $B(7, 2, -3)$, $D(1, 6, 0)$



а)



ә)



б)

59-сурет

Барлық суреттерде А нүктесінің координаталары оң, оның сызбасы жеңіл оқылады. В нүктесінің z координатасы теріс, оның сызбасын оқу 59, а, ә-суретте қиындау, ал планда жеңіл – оның белгішесі – 3, ол нүктенің π^0 -ден 3м төмен орналасқанын көрсетеді. Бұл жазықтықтан нүкте төмен орналасқан болса, сандық белгішесінің алдынан минус таңбасы қойылуы керек. Планда Ох, Оу осьтері оның жоғарғы және оң жағын алған тиімді. 59, б-суретте қосымша С, D нүктелері берілген. Олардың орналасуын тексеріп, салыстырып, сызбаны оқып шығайық: С және А нүктелердің биіктіктері бірдей, оларды горизонталь $h^5(AC)$ түзуі қосты. Бұл түзудің кез келген нүктесінің белгішесі 5м болады. D^0 нүктесі π^0 -ге тиісті, сондықтан $z_D=0$. Вертикаль $M^3 N^5$ түзуінің нүктелері планда беттесіп тұр! Осы түзудің π^0 жазықтығымен қиылысу L нүктесінің белгішесі де 0 болады! Олар сызбада беттеседі: $M^3 = L^0 = N^5$. Енді 60, а-суретте АВ түзуі, 60, ә-суретте оның аксонометриясы берілсін. Х мырза: 28-сұрақ. Осы түзудің план жазықтығымен қиылысу С нүктесін қалай анықтауға болады? Жауап. Оны 3.2-тармақта 17-суреттен көріп, еске түсіруге болады. Шынында да АВ кесіндісін $5 = (4 - (-1))$ тең бөлікке бөлсе, оның аралық нүктелерінің белгішелерін алуға болады емес пе? В-ға жақын аралық нүктесінің белгісі 0м болады емес пе? Осыны қайтадан Фалес теоремасының негізінде жүзеге асырамыз. 18-алгоритм. 1. В нүктесінен қалауымзша қосымша n түзуін жүргіземіз.

2. Оның бойына В-дан бастап қалауымызша алынған 5 тең бөлік саламыз.

3. Қосымша түзудің соңғы – 1 нүктесін В нүктесімен қосамыз.

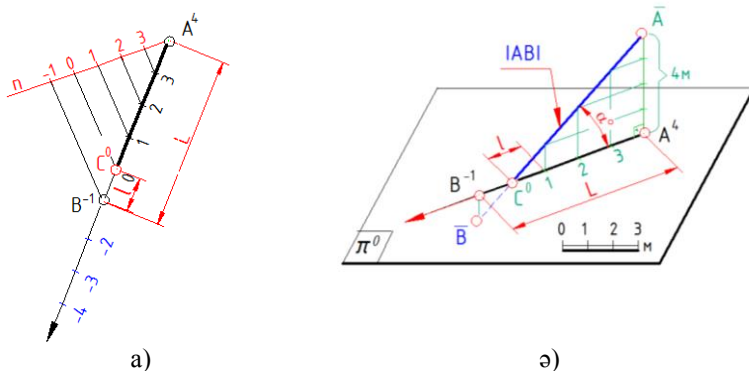
4. Қосымша түзудің аралық нүктелерінен соңғы түзуге параллель түзулерді жүргізіп, АВ түзуін бөліктеп, аралық нүктелердің орнын, 3, 2, 1, 0 белгішелерін анықтаймыз. Осының арқасында ізделінген $C^0 = AB \cap \pi^0$ нүктесі табылды. Мұнда түзуді *пропорциональ бөліктеу* алгоритмі ұсынылды.

Х мырза: 29-сұрақ. Бөліктеуде n түзуінің өлшем бірлігі масштабтың өлшеміне тәуелді ме? Жауап. Жоқ, тәуелді емес. Келесі 30-сұрақ. Осы түзудің бойынан белгішесі 6, 7,...т.б. тең нүктелерді табуға бола ма? Жауап. Әрине болады. Біз түзуді

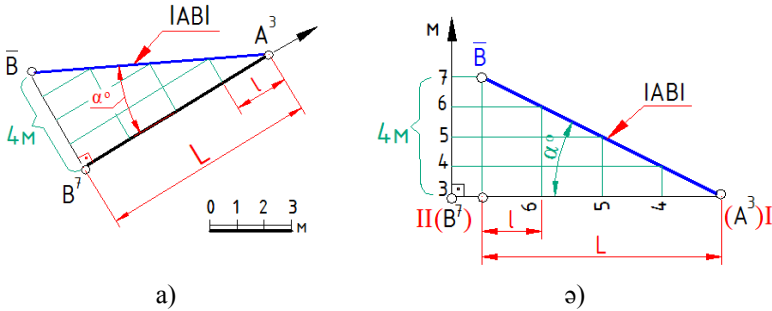
бөліктеудің арқасында осыған қолжеткізіп отырмыз. Шынында да, түзуді бөліктеп, оның l интервалын анықтадық, мысалы $BC = l$. Ол AB кесіндісінің нүктелері бір бірлікке көтерілуіне не төмендеуіне сәйкес бөлігі, яғни A -дан екі бірлік жоғары нүктенің белгісі 6 болады, B нүктесінен 1 бірлік төмен орналасқан нүктенің белгісі – 2 болады, т.с.с.

8.2. Түзудің жатыс элементтері

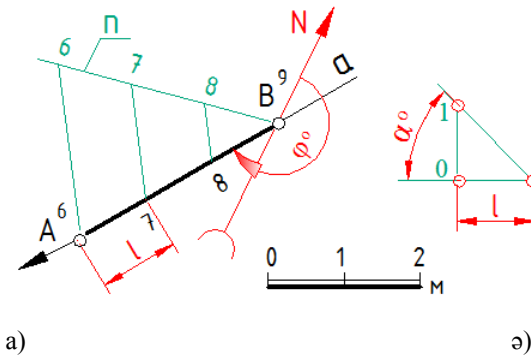
Геометрияның бір элементі қарапайым *түзу* – ол техникада, жобалауда *модель* ретінде қолданылады: ұңғымалардың, құрылыстың, су, мұнай құбырлардың, жер бетіндегі, жер астындағы жыныстардың, техникалық құрылымдарының бөліктерінің таптырмас кескіні болады. Сондықтан планда берілген түзудің барлық *геометриялық* және *орналасу параметрлерін анықтау* сызба қолданушылардың және біздің негізгі мақсатымыз. Бұларды *түзудің жатыс элементтері* деп атайды, солармен жете танысып, олармен қолдануға дайын болайық.



60-сурет



61-сурет



62-сурет

1. Түзу жатысы (табаны) – ол түзудің проекция кесіндісінің ұзындығы, сызбада оны L – әрпімен белгілейді: $|AB| = L$ (60, а, ә-сурет).

2. Түзудің құлау бағыты (төмендеу бағыты), сызбада бағытшамен (нұсқармен) көрсетілген В-дан солға, төменге қарай.

3. Түзудің құлау бұрышы α° , ол түзу мен проекциялар жазықтығы арасындағы бұрыш: $\angle \pi^0 = \alpha^\circ$ (60, ә-сурет).

4. Түзудің интервалы – ол түзу жатысының бір бірлікпен көтерілуіне (төмендеуіне) қатысты бөлігі, оны l әрпімен белгілейді: $l = L/z_A - z_B$. Сызбада ол $l = L/5$ болды.

5. Түзуді бөліктеу. 60, а-суретпен жұмыс жасап, бөліктеу мысалымен танысқанбыз. Ол түзу жатысындағы бүтін сандық белгісі бар нүктелерді анықтау. Бөліктеу арқасында түзудің

интервалы мен құлау бұрышы α° және кесіндінің нақты шамасы анықталады. Интервалдың қасиеті – оны қолданып түзудің кез келген нүктесінің белгішесін анықтауға болады. Бөліктеудің бірнеше әдісі бар. 60, а-суретінде кесіндіні пропорционал бөліктеу-, 61, а-суретінде қосымша вертикаль жазықтық-, 61, ә-суретінде қосымша график (профиль) әдісі берілген. Әр әдістің өзінің қолдану орны бар. Ең кең қолданылатын әдіс 60, а-суретте. Қалған екі әдістің түзу туралы беретін мәліметтері толығырақ. Ескерту. 61, а,ә-суреттердегі $(A^3 B^7 \bar{B}) = (I-II-\bar{B})$ – тең тікбұрышты үшбұрыштар, неге десеніз олардың екі катеті сәйкесінше тең: біреуі L , екіншісі $7\text{ м} - 3\text{ м} = 4\text{ м}$ масштаб бойынша. 61, ә-суреттегі әдіс қосымша орынды талап етеді, егер 61, а-суретте тікбұрышты $A^3 B^7 \bar{B}$ үшбұрышты салуға орын болмаса.

6. Кесіндінің нақты шамасы мен құлау бұрышы қосымша вертикаль және профиль әдістерінде (61, а,ә-суреттер) анықталды. Сызбада ол $A^3 \bar{B} = I - \bar{B} = |AB|$. 62, ә-суретінде AB түзуінің құлау бұрышын анықтау мысалы берілген. Тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті интервалға, екіншісі масштабқа тең болса, гипотенузаның көлбеулігі AB -ның көлбеулігіне тең болады.

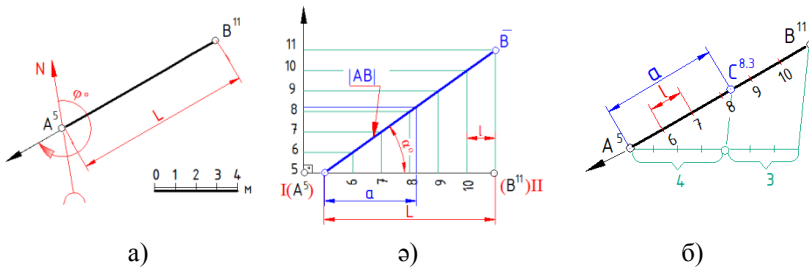
7. Түзу көлбеулігі i , ол интервалға кері шама $i = 1/L$, оның өлшемі (60, а-сурет) AB түзуі үшін: $i = z_A - z_B / L = \tan \alpha$ (сызбада ол $i = 5/L = \tan \alpha$), оның шамасы қатынас немесе пайыз арқылы беріледі, мысалы $i = 1:4 = 25\%$. 61, а,ә-суреттерде көлбеулік тік

бұрышты $(A^3 B^7 \bar{B})$, $(I-II-\bar{B})$ үшбұрыштардың катеттері қатынасына тең. $1:4$ – көлбеуліктің стандартты белгісі мен шама үлгісі. Осы қарастырылған 7 элемент түзудің план жазықтығына қатысты геометриялық орналасуын көрсетеді, келесі 8-ші элемент түзудің жер бетінде орналасуын көрсетеді.

8. Түзу азимуты – ол түзудің дүние жақтарына қарағанда орналасу бұрышы φ° , бағдары, ол меридианның (бойлықтың) солтүстік ұшынан бастап сағат тілі бағытымен түзудің құлау бағытына дейін өлшенетін бұрыш (62, а,ә-сурет). Сызбада меридианның солтүстік ұшы C әріпімен, не ағылшынша солтүстік – N (north), (оңтүстік – S (south)) болып белгіленеді.

Ескерту: сызбада меридианның бағыты берілмесе, оны қалауымызша алуға болады. Ол белгішесі бар нүктеден өткені дұрыс. Планда меридиандар өзара параллель орналасады!

Сызбада (планда) түзу *бір мәнді* анықталады: екі нүктесімен; бір нүктесі, азимуты және құлау бұрышымен не оның орнына интервалы, не көлбеулігі белгілі болса. Олар түзудің барлық жатыс элементтерін анықтауға мүмкіншілік береді, сонымен танысамыз.



63-сурет

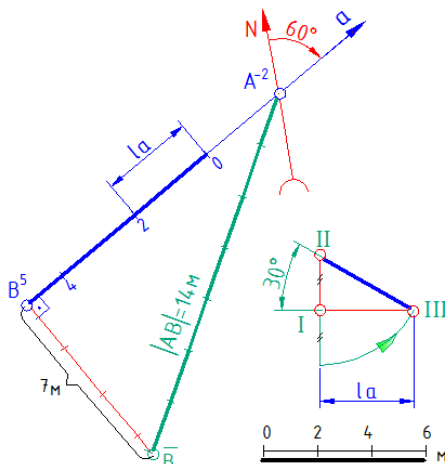
1-есеп. Плана АВ түзуі берілген (63, а-сурет). 1. Осы түзудің барлық жатыс элементтерін табу керек: $L, l, \alpha^\circ, i, \varphi^\circ, |AB|$ (63, ә-сурет). 2. АВ кесіндісін 4:3 қатынаспен бөлетін С нүктесін, оның белгішесін анықтау керек (63, б-сурет). Тәжірибеде АВ түзуі су құбырының моделі болсын, ал С нүктесінен тас жол өтетін болсын. *19-алгоритм.* 1-шешу. 1. АВ түзуінің L -жатысын көрсетеміз және оның φ° азимутын анықтаймыз (63, а-суретте қызыл түспен берілді). Азимутты анықтау үшін меридианды белгішесі бар нүктеден (A^5) жүргізген дұрыс. А нүктесінен солға қарай түзудің құлау бағыты нұсқармен қойылады.

2. АВ-ны бөліктейміз қосымша профиль әдісімен (63, ә-суретте). Осы суреттен *профиль әдісін* құру жолдарын түсінетін болайық. Бос орынға горизонталь түзудің бойына L -жатысын салып, оның ақырлы А,В нүктелерін I, II деп белгілеп, өз деңгейлеріне көтереміз: А-ны 5 м, В-ны 11 м. Сол жақтағы вертикаль түзуде масштаб өлшемдері 5 м бастап берілген.

3. Сонда $I-II - \bar{B}$ тікбұрышты үшбұрыштың $I-\bar{B}$ гипотенузасы AB кесіндісінің нақты шамасына тең болады: $I-\bar{B}=|AB|$.

4. Түзудің құлау бұрышы да осы үшбұрыштан табылады: $\alpha^\circ = \angle AB, \pi^0 = \angle I-II, \angle I-\bar{B}$.

5. Түзудің l – интервалын сызбада көрсетеміз.



64-сурет

2-шешу. 6. AB түзуін 4: 3 қатынаспен бөлетін C нүктесі болса, онда $|AC|: |CB| = 4:3$ болу керек, яғни AB кесіндісі тең $7 = 4+3$ бөлікке бөлінуі керек (60, а-суреттегі есепті қараңыз). 63, б-суретте AB кесіндісін тең 7 бөлікке бөліп, $|AC|=4$ етіп алып, C нүктесінің орнын көрсетеміз.

7. Ендігі мақсатымыз осы C -ның белгішесін анықтау. Ол үшін AB -ны 63, ә-суреттегі l интервалымен бөліктеп, оның белгішесі 8.3 м тең екенін табамыз. Есептің шешуі осы. Бұл белгішені алдыңғы суреттен де анықтауға болады. Ол үшін a өлшемін 63, ә-суреттің табанына көшіріп, оны табамыз. Мұнда да оның белгішесі 8.3 тең болды. Жалпы айтқанда есептің 7-қадамын 63, а-суретте де орындауға болар еді. Есептің шешуі түсінікті болу үшін жеке сызба қолданылған. Х мырзаның 31-сұрағы. Түзудің бір нүктесі және оның азимуты мен құлау

бұрышы берілсе, оның басқа жатыс элементтері қалай табылады? Жауабы 64-сурет, 2-есепте. Сызбада A^{-2} нүктесіне тиісті α түзуін жүргізу керек болсын, егер оның азимуты $\varphi = 60^\circ$, құлау бұрышы $\alpha^\circ = 30^\circ$. Осы түзудің *интервалын*, белгішесі 5-ке тең B нүктесін және AB кесіндісінің *нақты шамасын* анықтау керек болсын.

Шешу. 20-алгоритм. (64-сурет).

1. Сызбада *меридиан* көрсетілген, сондықтан α түзуінің *орналасуы* оның азимуты арқылы (60°) жүргізілді, құлау бағыты нұсқармен белгіленді.

2. Осы түзудің *құлау бұрышы* берілген, сондықтан α түзуінің *интервалын* табуға болады. Ол үшін жеке бос орынға тікбұрышты I – II – III үшбұрышты саламыз. Оның горизонталь катеті I *интервалға*, вертикаль катеті масштабпен өлшем бірлігі 2 метрге, құлау бұрышы 30° тең болуы керек. Белгілі өлшемді салып $I - II = 2\text{м}$, II-ден төменге қарай үшбұрыштың II–III гипотенузасы жүргізілуі керек. Оның көлбеу бұрышы 30° -қа тең болу үшін $|II - III| = 4\text{ м}$ болуы керек (сызбада радиусы 4 м тең доға жүргізілген!). I–III катеті *ізделінген I_α интервалы* болды.

3. A-дан бастап α түзуінің сол жағына интервал көмегімен 7 м салып, B^5 нүктесін табамыз.

4. AB кесіндісінің нақты шамасын анықтау үшін түзудің жатысын, $A^{-2} B^5$ -ті катет етіп, үстіне тікбұрышты үшбұрышты орнатамыз. Оның екінші катеті $5 - (-2) = 7\text{ м}$ тең, оны B нүктесінен масштабпен өлшеп салып, пайда болған нүктені $\bar{B}$ деп белгілейміз. Сызбада дұрыс орындалса: $AB, ^\wedge A\bar{B} = \alpha = 30^\circ$ болуы керек. Тексеріңіз!

5. Осы үшбұрыштың $A^{-2} \bar{B}$ гипотенузасы *ізделінген нақты шама $|AB|$* болады.

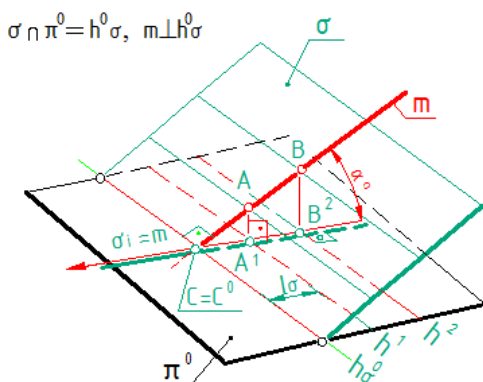
6. Есептің соңғы адымы нақты шаманы метрмен өлшеп, оның мәнін табу: ол масштабпен өлшегенде 14 м болды. Есептің шешуі осы.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. СБП-лар қай жағдайда пайдалынады?
2. Нүктенің сандық белгішесі бар проекциясы (СБП, план) қалай беріледі?
3. СБП-ның эпюр және аксонометриямен байланысы қандай?
4. Сандық белгішелері бар проекцияда түзу қалай беріледі?
5. Түзудің орналасуын қандай жатыс элементтері анықтайды?
6. Түзудің орналасуын қандай параметрлер: а) кескін жазықтығына қарағанда; ә) дүние жақтарына қарағанда анықтайды?
7. АВ кесіндісін $m:n$ қатынасымен қалай бөледі? Сызбада мысал келтіріңіз.
8. Сызықтық масштаб деген не, ол қандай өлшем бірлікпен беріледі?
9. План жазықтығының жалпы жағдайда белгісі қандай?
10. $A(7,2,3)$, $B(3,6,8)$ нүктелерін планда (СБП) көрсетіңіз. АВ түзуінің C^0 нүктесін анықтаңыз.
11. Сызбада АВ түзуінің интервалын анықтаңыз (10-сұрақ).
12. Сызбада АВ түзуінің құлау бұрышын анықтаңыз (10- сұрақ).
13. Кесіндінің нақты шамасы қалай анықталады?
14. Түзудің азимуты қалай анықталады? Азимут дегеніміз не?
15. Түзудің құлау бағыты дегеніміз не?
16. Түзудің интервалы мен көлбеулігі қалай анықталады?
- 19-алгоритмді айтып шығыңыз.

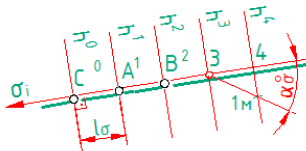
9. ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ СБП-СЫ, ОНЫҢ ЖАТЫС ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Алдыңғы тарауда түзуді модель ретінде қарастырғандай, жазықтықты да табиғи және техникалық нысандар бөліктерінің моделі деп алуға болады. Геология, тау-кен, құрылыс салаларында жазықтық *модель* ретінде жиі қолданылады. Мысалы: көлемді қазбалар шоғырларын, оның ішінде көмірлі *қаттарды* (угольный пласт) алайық. Олардың қат-қабаттарын үстінен, астынан шектейтін беттерді *шартты түрде жазықтық* етіп алады. Оларды *қат жабыны* және *қат табаны (табанасты)* деп бөледі. Жалпы *қат* дегеніміз ол көлемді таужыныстардың жаралымы (образование). Қаттың жабыны мен табанасти шартты, ықшамдалған түрде *өзара параллель* етіп алынады. Бұл геологиялық тәжірибеде кең тараған, жұмыстың нәтижелеріне қарама-қайшылықты тудырмай, оған сәйкес келеді. Жазықтықтың өзінің параметрлері, сипаттамалары бар, оларды *жазықтықтың жатыс элементтері* (орналасу элементтері) деп атайды. Солармен танысып (65, а-суретте аксонометрия, 65, ә-суретте план), түсініп, алдағы уақытта осыларды қолдануға дайын болайық.



a)

σ_i – көлбеулік масштаб, $m=\sigma_i$, $l\sigma=l_m$



ә)
65-сурет

1. Жазықтық *горизонталі* h^1, h^2 (65, а, ә-суреттер). Ұмытпасаңыздар, оның нүктелерінің деңгейлері бірдей, мысалы h^2 -нің деңгейі 2 м, h^1 -дің деңгейі 1 м;

2. Жазықтықтың *сырғытқы* (құлама) *сызығы* m – ол үнемі σ жазықтығының горизонталіне перпендикуляр болатын сызық $m \perp h$ (65, а, ә-суреттер). Бұл түзуді жазықтықтың *ең үлкен құлау сызығы* деп те айтады, себебі физика тұрғысынан қарағанда *сырғытқы бағытымен* жауын-шашындар, т.с.с σ -жазықтық бойымен жылжиды, ағады, домалайды.

3. Жазықтықтың *көлбеулік масштабы* σ_i – ол *сырғытқы* m *сызығының* планда бөліктелген проекциясы (65, а, ә-сурет). Осы сызықпен *жазықтық ең қысқа және жеткілікті түрде* планда кескінделеді. Бұл негізгі сызық: σ_i берілген болса, h_σ -да белгілі болады, себебі $\sigma_i \perp h_\sigma$, яғни СБП-да жазықтық екі $m \perp h$ қиылысқан түзумен анықталады.

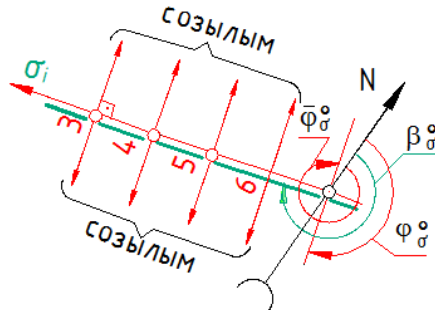
Х мырза: 32-сұрақ. Кеңістікте $m \perp h$ боласа, сызбада міндетті түрде $\sigma_i \perp h_\sigma$ бола ма? Жауап. Әрине солай болады, оның дәлелі ортогональ проекциялаудың қасиетінде: егер тік бұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель не тиісті болса, екіншісі оған перпендикуляр емес болса, онда тік бұрыштың ортогональ проекциясы да тік бұрыш болады. Біздің мысалымызда тік бұрыштың бір қабырғасы h_σ , сондықтан $m \perp h \rightarrow \sigma_i \perp h_\sigma$ болады.

4. Көлбеулік масштабтың *құлау бағыты* бағытшамен (нұсқармен) көрсетіледі.

5. Жазықтықтың *құлау* (*құлама*) *бұрышы* α_{σ}^0 – ол берілген жазықтықпен проекциялар жазықтығы π^0 арасындағы бұрыш. Құлау бұрышының шамасы сырғытқы сызығы мен оның тік бұрышты проекциясы арасындағы бұрышпен өлшенеді (65, а, ә-суреттер) $\alpha_{\sigma}^0 = m, \wedge \pi^0 = m \wedge \sigma_i$. 65, ә-суретінде бұл бұрыш тікбұрышты үшбұрыштың көмегімен табылған: оның бір катеті интервалға (l_{σ}), екінші катеті масштабпен 1 м-ге тең. α_{σ}^0 бұрышы σ_i -мен іргелес бұрыш.

6. Жазықтық *интервалы* l_{σ} (65, а, ә-суреттер) – ол көлбеулік масштабының бір бірлікке көтерілуіне (төмендеуіне) қатысты бөлігі (мысалы, h^2 мен h^3 -тің арақашықтығы). Құлама (құлау) бұрышы α_{σ}^0 неғұрлым ұлғайса, соғұрлым l_{σ} кішірейеді, оны 65, а-суреттен түсінуге болады.

7. Жазықтықтың *созылымы* – ол жазықтық горизонтальдарының орналасуын (жер бетінде жайылғанын, бағдарын) көрсетеді, бағытшалармен көрсетіледі (66-сурет).



66-сурет

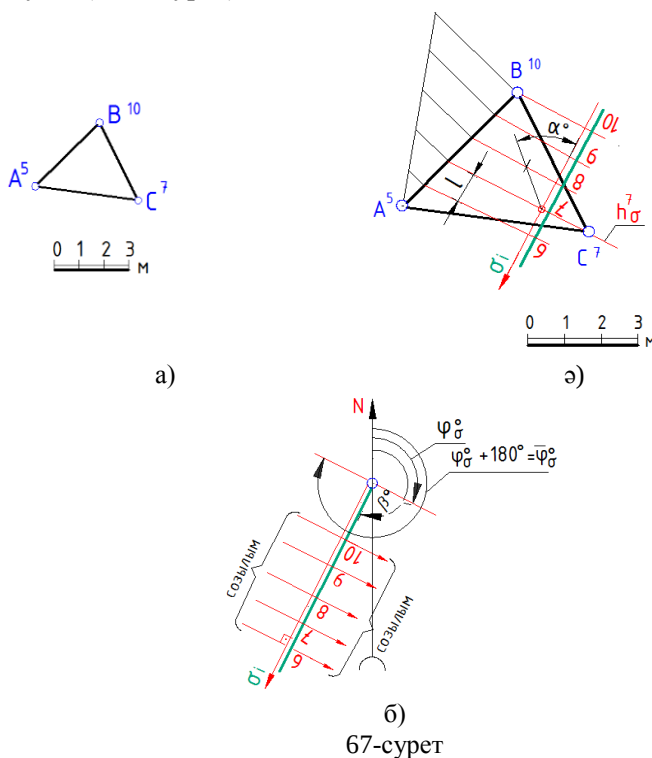
8. *Созылым азимуты* (дирекциондық бұрыш) φ_{σ}^0 – ол меридианның солтүстік ұшынан бастап сағат тілі бағытымен жазықтықтың созылымына дейін өлшенетін бұрыш (66-сурет). Бұл екі бұрыш $\varphi_{\sigma}^0 = \overline{\varphi}_{\sigma}^0 - 180^0$.

9. Жазықтықтың *құлау азимуты* β_{σ}^0 – ол меридианның солтүстік ұшынан бастап сағат тілі бағытымен жазықтықтың көлбеулік масштабының құлау бағытына дейін өлшенетін бұрыш

(66-сурет). Мұнда $\beta^0_\sigma = \varphi^0_\sigma + 90^\circ$ өрнектің орынды екенін ескертеміз.

10. Жазықтықтың көлбеулігі i_σ – ол сырғытқы сызығының көлбеулігімен өлшенеді: $i_\sigma = 1/l_\sigma = \operatorname{tg} \alpha^0 = |BB^2|/|CB^2|$ (65, а-сурет). Бұл жерде 7,8,9 – жатыс элементтері жазықтықтың дүние жақтарына қарағандағы орналасуын көрсетеді, қалғандары берілген жазықтықпен π^0 жазықтықтың өзара орналасуына қатысты.

Х мырза: 33-сұрақ. Жазықтық планда 3 нүктемен берілсе, оның орналасу (жатыс) элементтерін қалай анықтауға болады? Жауап. (67, а-сурет).



67-сурет

3-есеп. Жазықтық үш нүктемен берілсін: $\sigma(ABC)$. Оның жатыс элементтерін анықтау керек: σ_i , l_σ , α^0_σ , β^0_σ , φ^0_σ - ?

Шешу. Жалпы *талдау*. Жазықтықтың горизонтальдары h^i белгілі болған шақта, оның көлбеулік масштабы σ_i -да белгілі болады (4-жатыс элементті қараңыз). Мұның салдарынан барлық жатыс элементтері де табылады. Осы талдауды қысқа түрде байланыс өрнегімен көрсетуге болады:

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \sigma_i \rightarrow \varphi^0_{\sigma} \rightarrow \beta^0_{\sigma} \\ h^i_{\sigma}, h^{i+1}_{\sigma}, \dots \rightarrow l_{\sigma} \rightarrow i_{\sigma} \rightarrow \alpha^0_{\sigma}(1) \end{array} \right\}$$

Осы байланыс өрнегін нақты есепте алгоритм түрінде көрсетеміз.

21-алгоритм.1. Алдымен АВ-ны бөліктеп, C^7 -ге сәйкес h^7_{σ} -горизонталін табамыз (67, ә-сурет), одан кейін h^6 , h^8 ,...горизонтальдарын оған параллель етіп жүргіземіз.

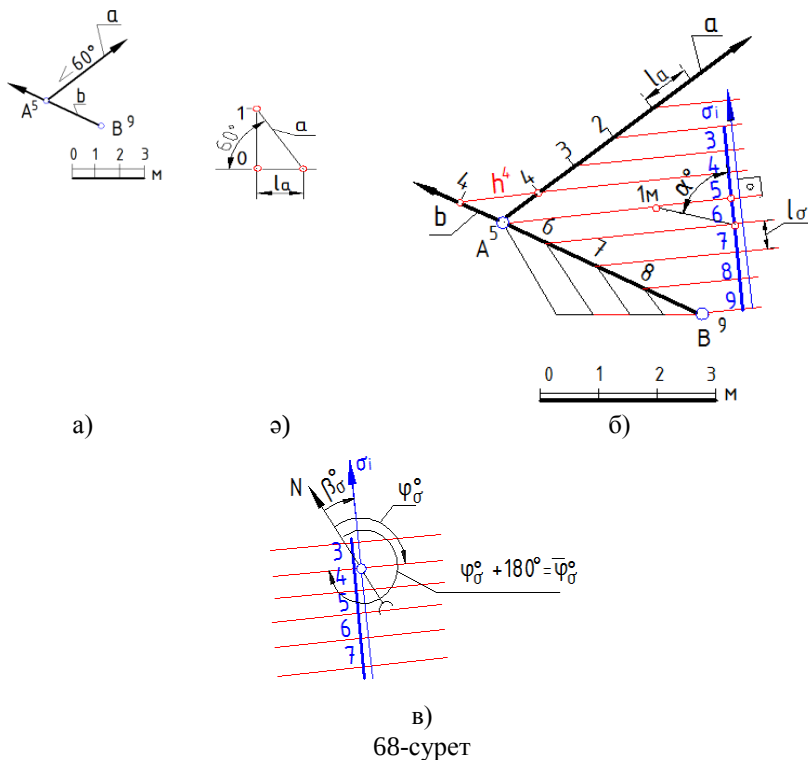
2. Көлбеулік масштабы $\sigma_i \perp h$ болады. Оны сызбада есеп шешуіне ыңғайлы етіп, қалауымызша орналастыру керек (67, ә-сурет), оның бөліктеу белгішелері 5,6,7,8... қойылады.

3. Байқасаңыздар, h^i_{σ} - мен h^{i+1}_{σ} -ның арақашықтығы интервал l_{σ} -ны береді.

4. Интервал белгілі болса, жазықтықтың көлбеулігі де анықталады, себебі $l_{\sigma} = 1/i_{\sigma}$, $i_{\sigma} = \operatorname{tg} \alpha^0$.

5. Құлау бұрышы α^0_{σ} тік бұрышты үшбұрыш көмегімен табылады, ол : $\Delta(7-8-)$, оның катеттері $|8-| = 1m$, $|8-7| = l_{\sigma}$ (65, ә-сурет), бұл жерде / – белгісімен сызбадағы кертпе нүктесі көрсетілген. Бұл үшбұрышты жеке жерде де салуға болады (64-сурет).

6. Жазықтықтың созылымы, құлау және созылым азимуты 67, б-суретінде көрсетілген. Созылым бағыты жазықтықтың горизонтальдарымен айқындалады, құлау азимуты β^0_{σ} жазықтықтың көлбеулік масштабына σ_i -ге байланысты. Созылым азимуты, бұрыштар горизонтальдардың орналасуына тәуелді болады: $\overline{\varphi}^0_{\sigma} = \varphi^0_{\sigma} + 180^0$, осының бәрін 67, б-суреті көрсетіп тұр.



4-есеп. Жазықтық $\sigma(a(A^5, \alpha_a^0 = 60^\circ) \cap b(A^5 B^9))$ қиылысқан екі a , b түзуімен берілген. Жазықтықтың жатыс элементтерін анықтау керек болсын: $\sigma_i, h_\sigma, l_\sigma, \alpha_\sigma, \varphi_\sigma, \beta_\sigma$? (68, а-сурет). Шешу. Жалпы *талдау*. Алдымен символдық түрде берілген есеп шартын түсіндірейік. $a(A^5, \alpha_a^0 = 60^\circ)$: бұл жерде a түзуі A^5 нүктесіне тиісті және оның құлау бұрышы $\alpha_a^0 = 60^\circ$. $b(A^5 B^9)$: бұл жерде b түзуі екі A^5, B^9 нүктесімен берілген. Жоғарыда көрсетілген байланыс өрнегі (1) бұл есеп үшін де орынды. Жазықтық горизонтальдарын анықтауда алдымен a және b түзуін бөліктеп, l_a, l_b -ларды табу керек, сондықтан байланыс өрнегін сол жақтан толықтырамыз:

$$l_a, l_b \rightarrow h_\sigma^i, h_\sigma^{i+1}, \dots \rightarrow l_\sigma \rightarrow i_\sigma \rightarrow \alpha_\sigma^0 \rightarrow \sigma_i \rightarrow \varphi_\sigma^0 \rightarrow \beta_\sigma^0. \quad (2)$$

Бұл жерде сол жақтан: l_a, l_b – екі түзудің интервалы белгілі болса, жазықтықтың горизонтальдары анықталады. Олай болса оң жақта: $\rightarrow\sigma_i \rightarrow\varphi^0_\sigma \rightarrow\beta^0_\sigma$ көлбеулік масштабпен жазықтықтың азимуттары анықталып, оның интервалы мен көлбеулігін, құлау бұрышын анықтау мүмкін болады.

22-алгоритмді мұқият орындап, оның 2-өрнекке сәйкестілігін тексеріп отыру дұрыс болады.

1. Берілген a түзуінің l_a интервалын көмекші тікбұрышты үшбұрыштан табамыз (68, ә-сурет). b түзуін пропорционал бөліктеп, l_b интервалын табамыз (68, б-сурет, сызбада белгіленбеген).

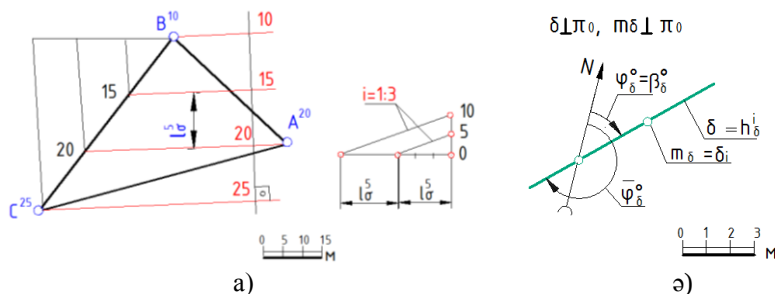
2. Аттас, бір деңгейлік, мысалы 4- a және b түзулерінің нүктелерінен өтетін σ -ның горизонталдарын жүргіземіз: $h^2_\sigma, h^4_\sigma, \dots$ (68, б-сурет).

3. Көлбеулік масштабын $\sigma_i \perp h$ сызбада қолайлы жерден өткізіп, оның интервалын l_σ көрсетіп, σ_i -ды бөліктейміз (68, б-сурет).

4. Құлау α^0_σ бұрышы 68, б-суретте σ_i -ге іргелес тікбұрышты үшбұрыштан табылған.

5. Меридианның солтүстік ұшын тағайындап алғаннан кейін, созылымын, азимутын β^0_σ , созылу бұрышын φ^0 белгілейміз (68, в-сурет).

Байқасаңыздар, есептердің шешуін оның шартымен сай үш суретте бөліп кескіндеуді жөн көрдік. Бәрін бір сызбада көрсеткенде оның анықтамалығы, яғни шапшаң оқу мүмкіншілігі төмендеу болар еді. Сіздерге де осылай жасауды ұсынамыз. Берілген шартты есептер жинағында кішірейтіп салып, шешуін үлкейтілген сызбада көрсеткен дұрыс болады. Сонда өз сызбаларыңызды жылдам оқып, түсінетін және түсіндіре алатын боласыз.



69-сурет

5-есеп. Жазықтық үш нүктемен берілген $\sigma(ABC)$ және оның көлбеулігі $i=1:3$ болсын. Осы сызбаның сызықтық масштабын анықтау керек. (69, а-сурет). Шешу. Жалпы *талдау*. Сызбада масштаб берілмесе де *позициялық* есептерді шешуге болады, мысалы бөліктеу арқасында интервалды тауып, көлбеулік масштабты жүргізуге, түзулердің, жазықтықтардың қиылысуын табу. Бірақ масштабсыз метрикалық есептерді – кесіндінің, интервалдың нақты шамаларын анықтау мүмкін емес. Бұл есеп алдыңғы 3, 4-есептерге *кері* есеп десе де болады. Көлбеулік i_σ және интервал l_σ кері шамалар $l_\sigma=1/i$ екені белгілі, сондықтан есепті шешуге мүмкіншілік бар.

23-алгоритм.1. ВС түзуін бөліктеп, оның 20 – белгішесін А нүктесімен қосып, σ -ның *алғашқы* h_σ^{20} горизонталін табамыз және жазықтықтың көршілес горизонтальдарын жүргіземіз.

2. h_σ^{15} және h_σ^{20} -ның арақашықтығы σ -ның l_σ интервалы болады, ол 5 м-ге *сәйкес* екенін ескертеміз.

3. Көлбеулікті қолданып, қосымша тікбұрышты үшбұрышты 1:3 қатынаспен салуымыз керек. Оның горизонталь катеті l_σ болады. Оны тең 3 бөлікке бөліп, масштабтың сызбадағы шамасын табамыз. Тік катетіне табылған масштаб бірлігін салып, үшбұрыштың гипотенузасын жүргіземіз. Осы түзудің көлбеулігі 1:3 болады! Сызбада түсінікті болу үшін екі көлбеу түзу жүргізілген.

4. Енді *масштаб бірлігінің мәні* анықталды, интервал 5 м-ге сәйкес екенін біліп (алгоритмнің 2-адымын қараңыз), 5 м өлшем

бірлігімен жеке орынға есептің *сызықтық масштабын* саламыз. Есептің шешуі осы.

Х мырза: 34-сұрақ. Вертикаль орналасқан (δ) жазықтықтың қандай жатыс элементтері болады және олар қалай анықталады? Жауап. 69, ә-суретінде берілген δ жазықтығы вертикаль орналасқан: $\delta \perp \pi^0$.

1. Бұл жазықтықтың барлық *горизонтальдары* $h^i_\delta = \delta$, оның проекциясымен беттеседі.

2. Бұл жазықтықтың *сырғытқы* сызықтары $m_\delta \perp \pi^0$ вертикаль орналасады, проекциялары δ -ға тиісті *нүктелер*, бұрын айтылғандай горизонтальға перпендикуляр: $m_\delta \perp h^i_\delta$.

3. 2-нің салдарынан сызбада δ -ның *көлбеулік масштабы* δ_i - нүкте.

4. δ -ның *интервалы нөлге, көлбеулігі* ақырсыздыққа тең: $l_\sigma = 0, i = \infty$. Шынында да, егер интервал теңдеуі $l = \frac{L}{Z_A - Z_B} = \frac{0}{Z_A - Z_B}$, онда $l = 0$, көлбеулік $i = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 90^\circ$, онда $i = \pm \infty$. Осында айта кету керек, вертикаль түзудің де *интервалы нөлге, көлбеулігі* ақырсыздыққа тең: $l_\sigma = 0, i = \infty$ болады.

5. Құлау бұрышы 90° -қа тең, азимуттары δ -ның орналасуына байланысты.

Х мырзаның ұсынысы: шағын оқу-зерттеу жұмысын (СОЗЖ) жасап, 69, ә-суреттің негізінде вертикаль орналасқан δ жазықтығының аксонометриясын құрып, оның барлық жатыс элементтерін көрсетіңіз. Аксонометрияда алдымен оның осьтерін тағайындап алу керек. Сызбаның, есептің нөмірі 17*(⁹) болсын.

Қорытынды. Осы тақырыпты жақсы түсініп алу керек, себебі геология, жер өңдеу, т.б. салаларда, мысалы пайдалы қазба қаттарының төбесі не табанын шектейтін моделі етіп жазықтықтар қолданылады. Жазықтық СБП-да өзінің *көлбеулік масштабымен* бірмәнді анықталады. Ол жазықтық сырғытқы сызығының бөліктелген проекциясы, ол үнемі горизонтальға перпендикуляр орналасады, яғни бұл сызбада да жазықтық қиылысқан екі түзумен – *горизонталь* және *сырғытқысымен* анықталады. Сондықтан бұл сызбадан жазықтықтың барлық орналасу параметрлерін, яғни жатыс элементтерін анықтауға болады.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

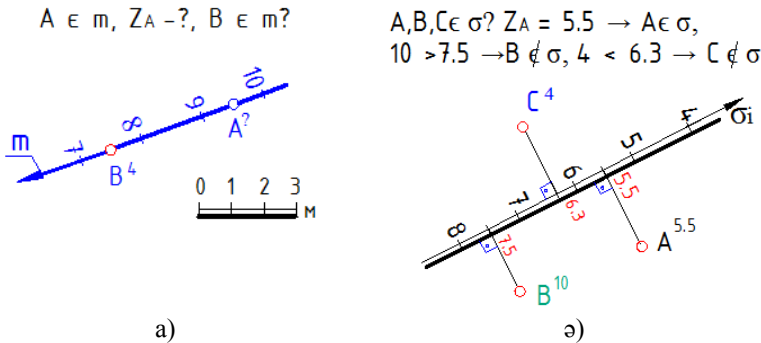
1. Жазықтық СБП-да қалай беріледі?
2. Жазықтықтың қандай жатыс элементтері оның кеңістікте орналасу жағдайын анықтайды?
3. Жазықтықтың көлбеулік масштабы дегеніміз не? $A(3,5,8)$, $B(7,2,3)$, $C(5,5,2)$ нүктелерімен берілген δ (ABC) жазықтығының көлбеулік масштабын салыңыз.
4. Жазықтықтың сырғытқы немесе ең үлкен көлбеу сызығы дегеніміз не?
5. Сырғытқы сызықтың физикалық сипаты қандай?
6. Жазықтықтың құлау бұрышы қалай анықталады ?
7. Үш $A(2,3,4)$, $B(6,5,3)$, $C(7,6,4)$ нүктемен берілген жазықтықтың горизонталін қалай құрады?
8. Жазықтықтың (7 сұрақ) құлау және созылу азимуты қалай анықталады?
9. Жазықтықтың (7 сұрақ) интервалы қалай анықталады, 21-алгоритм айтып шығыңыз?
10. Сызбада (планда) вертикаль жазықтығын құрып, оның сырғытқы сызығын, горизонталін анықтаңыз.

10. СБП-дағы ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР: НҮКТЕ, ТҮЗУ, ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Монж эпюрінде позициялық есептерді шешуді жете меңгергенбіз. Осылардың ерекшеліктерімен енді сандық белгішелері бар проекцияларда танысайық. *Ескерту.* 4-тарауда берілген шешу әдістері мұнда да қажет болады.

10.1. Тиістілік есептері. Нүкте мен түзу, жазықтық

Нүкте түзуге тиісті, не тиісті емес болатыны белгілі. СБП-да бір ғана кескін болғандықтан, бұл есеп тек олардың белгішелерін *салыстырумен* айқындалады. Сызбада беттескен нүкте мен түзудің белгішелері тең болса – олар өзара тиісті, керісінше тиісті емес. Бұл есептер оңай есептер қатарына жатады, сол себепті олардың алгоритмдерін өздеріңіз келтіріңіз.



70-сурет

1-мысал. Планда бөліктелген m түзуі және A, B нүктелері берілсін.

(70, а-сурет). $A \in m$ (тиісті), оның белгішесін табу керек: $Z_A = ?$ Түзуге B нүктесі тиісті ме, жоқ па – соны анықтау керек: $B \in m - ?$

Шешу.1. A нүктесі түзуге тиісті болғандықтан, оның белгішесін түзудің көршілес белгішелерімен *салыстырып*, оны шамамен 9.5 м деп аламыз: $Z_A = 9.5$.

2. В нүктесінің белгішесі 4 м, түзудің көршілес нүктелерінің белгішелері 7,8 болғандықтан В нүктесі m түзуінен төмен жатыр, оған тиісті емес. Есептің шешуі осы.

2-мысал. δ (δ_i) жазықтығы және А,В, С нүктелері берілген. Осылардың қайсысы жазықтыққа тиісті, тиісті емес, одан жоғары не төмен орналасқан (70, ә-сурет)? Шешу. Бұл есеп те оңай есептерге жатады, нүктелердің және жазықтықтың көршілес горизонтальдарының белгішелерін *салыстырумен* шешіледі. Бастайық!

1. А нүктесі тиісті δ -ға, себебі белгішесі жазықтықтың көршілес горизонтальдарының белгішелеріне сәйкес, оның белгісі 5,5 м болу керек екенің сызба дәлелдеп тұр.

2. В нүктесінің белгісі 10 м, жазықтықтың көршілес горизонтальдарының белгішелері 7,8, сондықтан В нүктесі одан *жоғары* орналасқан: $10 > 7,5$, жазықтыққа тиісті емес.

3. Егер С нүктесі δ -ға тиісті болса, оның белгішесі 6,3 болар еді. Сызбада оның белгішесі 4, сондықтан С нүктесі де δ -ға тиісті емес, ол δ -дан *төмен* орналасқан. Есептің шешуі осы.

10.2. Түзулердің өзара орналасуы

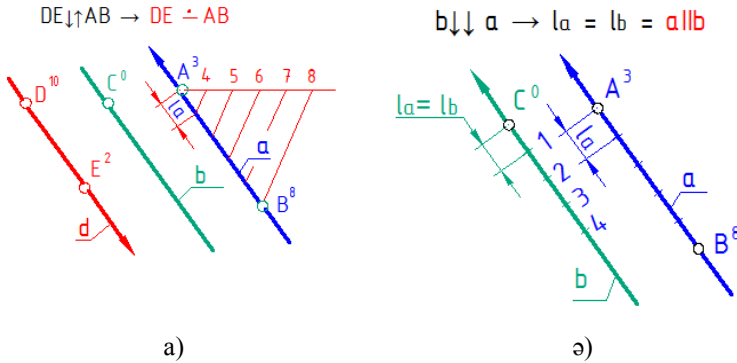
Бұл есепте тиістілік, параллельдік, қиылысу не айқасу сипаттары айқындалады, мысалы $c = d$, $a \parallel b$, $m \cap n = M$, $d \perp e$. Осыларды *панда ажырата* білуіміз керек (алғашқы 1-суретті қараңыз). Сонымен танысайық.

1. *Параллельдік шарты*: егер де сызбада түзулердің жатыстары: а) *параллель*; ә) *құлау бағыттары бірдей*; б) *интервалдары тең* болса, ондай түзулер кеңістікте *параллель* болады. Шарттың біреуі орындалмаса, олар айқасады не қиылысады.

2. *Қиылысу шарты*: егер де сызбада түзулер қиылысатын болса және қиылысу нүктесінде белгішелері екі түзу үшін бірдей болса, ондай түзулер кеңістікте сол нүктеде *қиылысады*, керісінше болса олар *айқасады*.

3. *Тиістілік шарты* орындалу үшін екі түзудің екі ортақ нүктесі болуы керек.

Есептің шешуі осы шарттарға сәйкес болады.



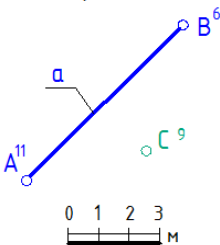
71-сурет

3-мысал. Панда a, b, d түзулері берілген, сызбалары параллель (71, а-сурет). Осылардың қайсысы кеңістікте өзара параллель немесе айқас орналасқан? Шешу. Шартына қарай сызбадағы түзулерге *талдау* жасап көрейік.

1. Сызбада a және d түзулері толық мағлұматымен берілген, осы екеуін *салыстырдық*: құлау бағыттары бірдей емес не болмаса шамалап есептегенде $l_d < l_a$, сондықтан олар кеңістікте айқасады: $a \nparallel d, d \perp a$.

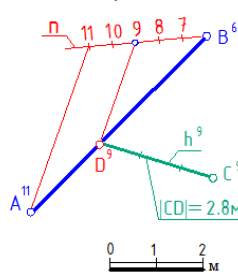
2. Ал b түзуінің мағлұматы толық емес, оны a түзуіне *параллель* етіп көрейік (71, ә-сурет). Ол үшін a мен b -ның құлау бағытын бірдей етіп, a түзуінің интервалы l_a -ны анықтап, b түзуін l_a -мен бөліктейміз. Нәтижесінде $a \parallel b$ болып шықты.

$C \in h \cap a, Z_h = ?$



a)

$h^9(C^9 D^9), Z_h = 9$



б)

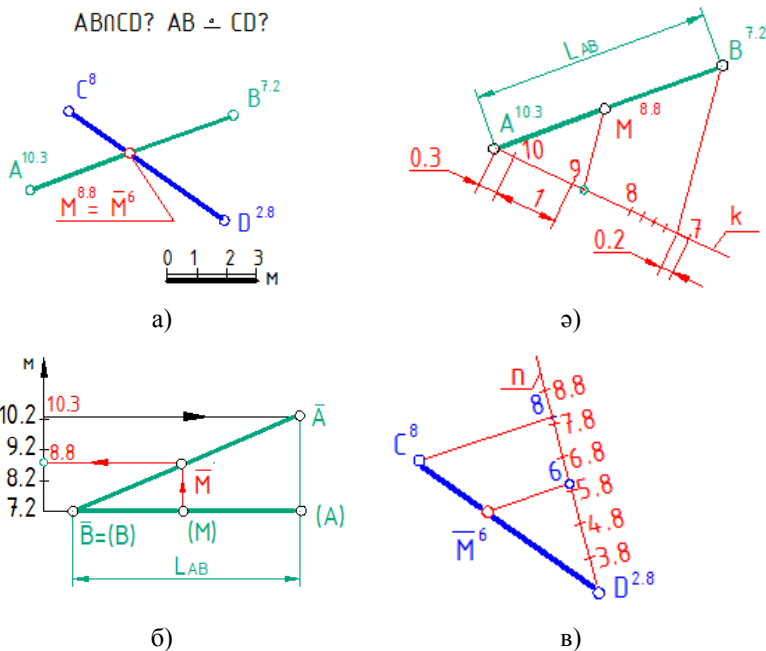
72-сурет

1-есеп. Панда $a(AB)$ түзуі және C нүктесі берілген (72, а-сурет). C нүктесінен a түзуін бастыра етіп горизонталь h түзуін жүргізу керек. Символдық түрде: $C \in h \cap AB = D, h, z_D - ?$

Шешу (72, а, ә-сурет). *Талдау.* Горизонталь түзу π^0 жазықтығына параллель, сондықтан ізделінген h -тың белгішесі C белгішесімен бірдей болу керек. Осыны жүзеге асырамыз.

1. AB түзуін бөліктейміз.
2. Оның бойынан D^9 нүктесін тауып, белгілейміз.
3. $h^9 (C^9 D^9)$ – горизонтальін жүргіземіз.

Х мырза: 35 сұрақ. Сызбада CD кесіндісінің нақты шамасы $|C^9 D^9|$ -ға тең емес пе? Жауап. Ия, бұл горизонталь түзудің қасиеті. Нақты шаманың мәні масштабпен өлшеніп табылады, ол 2,8 м.



73-сурет

4-мысал. AB және CD түзулері берілген. Олардың қиылысуын, немесе айқасуын анықтау керек. Бұрынғы мысалдардан айырмашылығы A, B, D нүктелерінің белгішелері

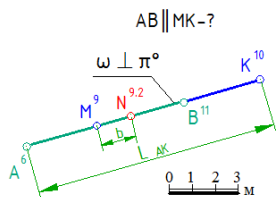
бөлшек сан (73, а-сурет). Шешу. *Талдау.* Сызбада екі түзудің қиылысу нүктесін төмендегідей ажыратамыз: $M \in AB$, $\bar{M} \in CD$. Егер осы екі нүктенің белгішесі бірдей болса, онда екі түзу *қиылысады*: $z_M = \bar{z}_M$! Осыны тексереміз. Алдымен AB -ның негізінде бөлшек санмен берілген түзуді бөліктеудің екі түрімен (73, ә, б-сурет) танысайық. 73, ә, в-суреттерінде пропорционал бөліктеу, 73, б-суретінде қосымша профиль әдісі берілген.

1-түрі. 1. 73, ә-суретте қосымша k түзуінің бойына A нүктесінен бастап бір бөлікті салып, оны 0,3 бөлікке сәйкес деп аламыз. Сол нүктенің белгішесі 10 болса, онда ол A нүктесінің 10,3 белгішесіне сәйкес. 2. Енді 9 бен 10-ның арасы $0,3 \times 3 \cong 1$ болуы керек екені түсінікті. Оңға қарай сол өлшем бірлігімен k түзуі бойынан 9,...,7 белгішелерін аламыз. Соңғы нүктеден солға қарай 0,2 бөлікті алып, оны B нүктесімен қосамыз (ол B -ның 7,2 белгішесіне сай болды). 3. Енді AB түзуінің M нүктесінен сол түзуге параллель түзуді жүргізіп, оның белгішесін анықтаймыз: $z_M = 8,8$ м. Есептің бір шешуі осы.

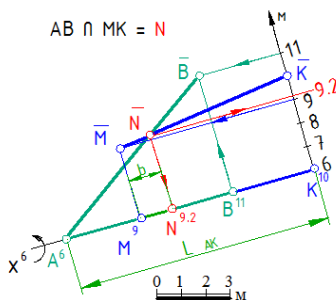
2-түрі. 1. 73, б-суретінде профиль табанына – горизонталь түзуіне AB -ның жатысын тең етіп көшіреміз: ол (A) , (M) , (B) нүктелері. 2. Сол жақтағы вертикаль өлшем түзуіне 7,2 м бастап масштабпен 10,3 м саламыз.

3. B нүктесі өз орнында қалады: $\bar{B} = (B)$, A нүктесін өз биіктігіне көтеріп, $\bar{AB}$ түзуін жүргіземіз. 4. M нүктесінің белгішесін анықтау үшін (M) нүктесінен вертикаль түзуді $\bar{AB}$ -мен қиылысқанша жүргізіп, одан солға қарай горизонталь түзуді масштаб түзуімен қиылысқанша саламыз. Нәтижесінде M нүктесінің белгішесін аламыз: $z_M = 8,8$ м. Байқасаңыздар, екі суретте де M нүктесінің белгішесі бірдей!

3-түрі. Енді CD түзуін (73, в-сурет) бөліктейміз. 1. Мұнда D нүктесінен қосымша n түзуі жүргізіліп, оның бойынан тең етіп 3,8; 4,8;... 7,8 белгішелері алынған. 7,8 белгішеден жоғарыға қарай 0,2 бөлікті салып (ол C -ның 8 м белгісіне сай), оны C нүктесімен қосамыз. Басқасы суреттен түсінікті. 2. $\bar{M}$ нүктесінің белгісі 6 м болды. 3. Екі түзудің сызбада *қиылысу* нүктелерінің белгішелері тең емес ($6 < 8,8$ болды), сондықтан AB және CD түзулері кеңістікте айқасады: $z_M \neq \bar{z}_M \rightarrow AB \nparallel CD$. Есептің шешуі осы.



а)



ә)

74-сурет

2-есеп. Сызбада (74, а-сурет) беттескен АВ және КМ түзулері берілген. Олар өзара қалай орналасқан – беттесе ме, қиылыса ма, әлде параллель ме?

Шешу. 24-алгоритм. Талдау. Бұл екі түзу бір вертикаль ω жазықтығына тиісті екені анық. Біздің мақсатымыз сол жазықтыққа *турасынан* қарап, *жауапты* табу. 36-сұрақ. Ол мүмкін бе? Жауап. Ия, *айналдыру әдісін* қолданса, мүмкін. Ол үшін түзулердің жатысын *айналу* Ох осінгоризонталь ретінде алып, ω жазықтығын сол осьтен айналдырып, горизонталь жағдайға келтіру керек. Екі түзудің орналасуы сол горизонталь жазықтығынан анықталады. Яғни, алдымен сызбаны *түрлендіріп*, одан кейін сызбадағыны *салыстырамыз*. Бастаймыз!

1. Айналу Ох осін А нүктесіне тиісті және горизонталь етіп, 6м деңгейде аламыз: $A^6 \in 0x^6$ (74, ә-сурет).

2. ω -ны айналдырып, горизонталь орналастырдық делік, оның өрісі сызбада осьтен жоғары болсын. Онда А нүктесі өз орнында қалады. В, К, М нүктелердің жаңа проекциялары Ох осіне перпендикуляр түзулер (жылжу бағыты!) бойынан табылады.

3. В нүктесі остен $11 - 6 = 5$ м қашықтықта,оның жаңа орны $\bar{B}$, М нүктесі одан $9 - 6 = 3$ м қашықтықта, ол $\bar{M}$ нүктесі, К нүктесі одан $10 - 6 = 4$ м қашықтықтағы $\bar{K}$ болады.

4. Көз алдымыздағы жаңа сызбамызда, яғни ω^6 – да $\overline{AB}$ және $\overline{KM}$ түзулері есепке жауап беріп тұр: $\overline{AB} \cap \overline{KM} = \overline{N}$ – бұл екі бөлек, параллель емес, қиылысқан түзулер!

5. Сызбадан қиылысу N нүктесінің белгішесі де оңай табылады: ол $9,2m$.

6. Қиылысу нүктесі бастапқы сызбада b -өлшемімен анықталады.

Анықтама. 74, а және б-суреттерді беттестіріп салуға болады, жауабы өзгермейді.

Х мырзаның ұсынысы: 74, а-суреттің масштабын өзгертіп, берілген $\overline{AB}$ және $\overline{KM}$ түзулерін алыңыз. Осы түзулердің өзара орналасуын 24-алгоритммен қолданып, анықтаңыз, шығын оқу-зерттеу жұмысын (СОЗЖ) жасап. Сызбаның, есептің нөмірі $18^*_{(10.2)}$ болсын.

3-есеп. 75-суретте $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ түзулері берілген. Осылардың өзара орналасуларын 4-мысалдың әдісін қолданып, анықтаңыз. Ескерту: мұнда 3 түзу берілген, сондықтан бұлардың орналасулары қос-қостап тексеріледі.

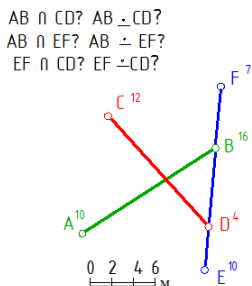
10.3. Жазықтықтардың өзара орналасуы

Жазықтықтардың кеңістікте өзара орналасуы бәрімізге мәлім: $\sigma \parallel \omega$, $\delta \cap \gamma$ – олар *параллель* болады, немесе *қиылысады*, не *беттеседі*. Сызбада оны қалай айқындаймыз? Ол өзара орналасу шартына байланысты, оны еске салайық.

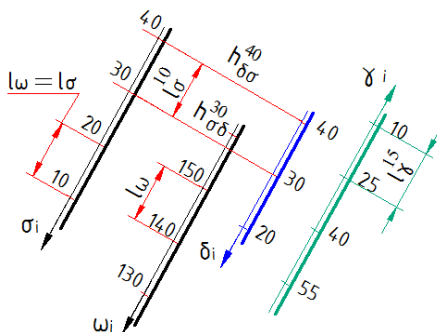
1. *Параллельдік шарты*: егер бір жазықтықтың екі қиылысқан түзуі екінші жазықтықтың екі қиылысқан түзуіне параллель болса, онда кеңістікте осы жазықтықтар параллель болғаны.

Сызбада бұл шарттың орындалуы: егер *екі жазықтықтың көлбеулік масштабтары өзара параллель* $\sigma_i \parallel \omega_i$, *құлау бағыттары бірдей* $\sigma_i \uparrow \omega_i$, *интервалдары тең болса* $l_\sigma = l_\omega$, онда олар кеңістікте өзара параллель болады (76-сурет) (түзулердің параллельдігімен салыстырыңыз!):

$$(\sigma_i \parallel \omega_i, \sigma_i \uparrow \omega_i, l_\sigma = l_\omega) \rightarrow \sigma \parallel \omega.$$



75-сурет



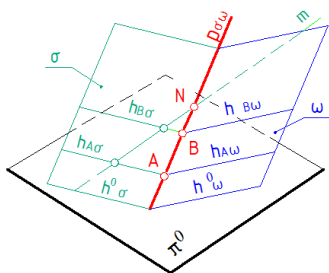
76-сурет

2. Егер де осы үш шарттың біреуі орындалмаса, онда жазықтықтар қиылысады: $(\gamma_i \uparrow \downarrow \omega_i, l_{\gamma} \neq l_{\omega}, \gamma_i \nparallel \omega_i) \rightarrow \omega \cap \gamma$.

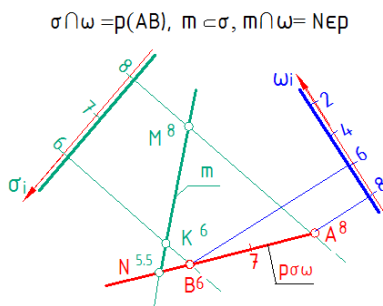
3. *Беттескен* жазықтықтардың ең кемінде екі горизонталі беттеседі, яғни үш ортақ нүктесі болады:

$$(h_{\delta}^{40} = h_{\epsilon}^{40}, h_{\delta}^{30} = h_{\epsilon}^{30}) \rightarrow (\delta = \epsilon).$$

Ескерту. Байқасаңыздар, сызбада 4 жазықтықтың сызғышпен өлшенген интервалдары өзара тең. Нақты шамалары тең емес: γ -ның интервалы 15м-ге, басқалардың интервалы 10 м-ге сәйкес.



а)



ә)

77-сурет

4-есеп. Жазықтықтардың қиылысу сызығын анықтауда өте қарапайым және түсінікті әдіс қолданылады. Оны 77, а, ә-суреттері айқындап тұр:

$$\sigma \cap \omega = p?$$

25-алгоритм. Бәрімізге мәлім жазықтықтар түзу арқылы қиылысады, өз кезегінде түзу екі нүктемен анықталады. Осы екі нүктені анықтау үшін екі жазықтықтың *бір деңгейде орналасқан горизонтальдарының* қиылысқан екі нүктесін анықтау жеткілікті:

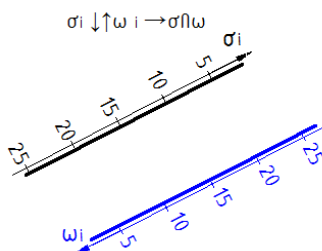
$$1. \mathbf{h}_{\sigma}^i \cap \mathbf{h}_{\theta}^i = \mathbf{A}^i;$$

$$2. \mathbf{h}^{i+n}_6 \cap \mathbf{h}^{i+n}_9 = \mathbf{B}^{i+n};$$

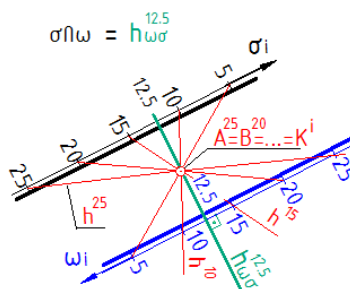
3. $p(A^i B^{i+n})$ – мұнда i, n кез келген белгішелер.

Алгоритмнің нәтижесі 77, а, ә-суреттерінде аксонометрияда және планда берілген: 1. $h^8_6 \cap h^8_\omega = A^8$; 2. $h^6_6 \cap h^6_\omega = B^6$; 3. $p(A^8 B^6) = \sigma \cap \omega$.

Х мырза: 37-сұрақ. Осы жазықтықтың біреуіне тиісті түзудің екінші жазықтықпен қиылысу нүктесін осы сызбадан анықтауға бола ма? Жауап. Ия, болады. Сызбада 6-ға тиісті m түзуі берілді дейік, оны 8,6 белгішелері айқындап тұр. Ол түзудің ω -мен қиылысу N нүктесі міндетті түрде ортақ p түзуіне *тиісті* болады: $\omega \cap m = m \cap p = N^{5,5}$. *Ескерту*. Егер екі жазықтықтың горизонтальдары параллель, бірақ құлау бағыттары қарама-қарсы $\sigma_1 \downarrow \omega_1$ болса, онда шешуін 4'есесінен табасыз.



a)



(e)

82-сүрөт

4'-есеп. Берілген ω және σ жазықтығы (82, а-сурет): $\sigma_i \uparrow \omega_i$, олар параллель емес, қиылысады $\omega \cap \sigma = p$. Оны сызбадан қалай табамыз? Шешу. *Талдау.* Берілген жазықтықтардың горизонтальдары өзара параллель, сондықтан олардың ортақ сызығы да горизонталь болу керек, яғни $p = h$. Біздің мақсатымыз сол h -тың белгішесін, орналасуын анықтау.

28-алгоритм 1. Берілген сызбада σ_i және ω_i түзулердің көмегімен кеңістікте (82, ә-сурет) бірнеше горизонталь жүргізілсін: h^{25} , h^{20} , h^{15} , h^{10} . Байқасаңыздар, олар сызбада бір нүктеден өтеді, дәлірек айтқанда олар *кеңістікте* вертикаль k түзуімен қиылысып тұр: $A^{25} = B^{20} = C^{15} \dots \in k$. Кеңістікте бұл түзулер өзара айқасады, қиылыспайды. (Геометриялық анықтама. Бұл түзулер жиыны кеңістікте кездейсоқ емес, олар проективті *түзулер шоғы* деп аталады. Яғни мұнда σ_i және ω_i түзулер нүктелерінің арасында *сәйкестік* орнатылған. Дәлірек айтқанда осы *түзулер шоғы* кеңістікте *гиперболалық параболоид сызықтық бетін(гипарды)* құрады.) Осы бетке қатысты мағлұматты [1,2,3,8] алуға болады.

2. Осы түзулер шоғының жиынының ішінде берілген σ_i және ω_i түзулеріне перпендикуляр орналасқан h горизонталі де болуы мүмкін. Ол *ізделінген* екі жазықтықтың *ортақ қиылысу* сызығы болады: сызбада $p = h^{12,5}_{\sigma, \omega} = \omega \cap \sigma$. Дәлелі: екі жазықтықтың көлбеулік масштабтары σ_i және ω_i -дің $h^{12,5}$ горизонталімен қиылысу нүктелерінің белгішелері де 12,5 тең!

СОЗЖ – қатысты сызбада $\alpha_i \downarrow \beta_i$ жазықтықтары алынып, олардың $p_{\alpha\beta}^i$ ортақ сызығы анықталуы керек: $p_{\alpha\beta}^i = h_{\alpha\beta}^i$. Сонымен бірге аксонометрияда α_i, β_i түзулері кеңістікте құрған *гипар* беті, $p_{\alpha\beta}^i$ түзуі, гипардың *нұсқа* сызығы көрсетілуі керек. Алдымен аксонометрияның осьтерін, олардың өлшем бірліктерін тағайындап алыңыз. Сызбаның, септің нөмірі 19^{*(10.3)}.

10.4. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

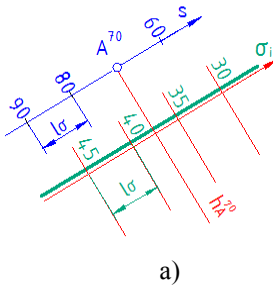
Түзу мен жазықтық өзара *параллель* болады, *қиылысады* және түзу жазықтыққа *түісті* болуы мүмкін: $a \parallel \omega$, $b \cap \gamma$, $c \subset \sigma$.

1. *Параллельдік шарты*: егер де сызбада берілген түзу жазықтықтың бір түзуіне параллель болса, онда олар кеңістікте өзара *параллель* болады. 2. *Тиістілік шарты*: егер де берілген түзу мен жазықтықтың екі ортақ нүктесі болса, онда түзу жазықтыққа *тиісті* болды.

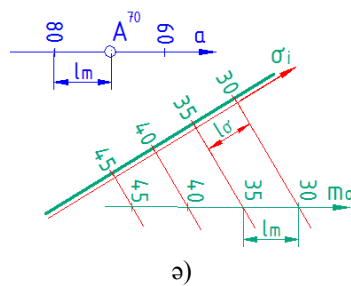
3. *Қиылысу шарты*: егер де жоғарыда айтылған шарттар орындалмаса, онда түзу мен жазықтық *қиылысады*.

5-есеп. Берілген б жазықтығына параллель А нүктесінен а түзуін жүргізу керек: $A \in a \parallel b$ (78, а-сурет). Шешу. *Талдау*. Жалпы айтқанда бұл есептің шексіз көп шешуі бар. Дәлірек айтсақ б-ға параллель түзулер жиыны кеңістікте оған параллель, А нүктесінен өтетін жазықтықты құрайды: $A \in (a, b, f \dots) \parallel \sigma \rightarrow \omega(a \cup b \cup f \dots) \parallel b$. Сондықтан осы есептің 3 шешуін ұсынуды жөн көрдік.

1,2 шешу: $A \in s \parallel \sigma_i, l_s = l_\sigma; A \in h_A \parallel h_\sigma$



3 шешу: $A \in a \parallel m \sigma \rightarrow a \parallel \sigma, l_a = l_m$



78-сурет

1-шешу. А нүктесінен h_σ -ға параллель өтетін горизонталь h_A^{70} -есептің бір жауабы: $A \in h_A^{70} \parallel h_\sigma$.

2-шешу. $A \in s \parallel \sigma_i$, бұл жерде s түзуі σ -ның сырғытқы сызығына параллель, оның интервалы l_σ -ға тең болады (78, а-сурет).

3-шешу. *26-алгоритм*. Берілген б-ның кез келген түзуіне параллель етіп алынған түзу (78, ә-сурет) есептің шешуі болады.

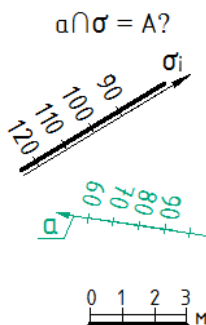
1. Жазықтыққа тиісті түзуді қалауымызша аламыз: $m \subset \sigma$.

2. Оның l_m интервалы, белгішелері σ -ның горизонталь-дарына тәуелді, сызба соны көрсетіп тұр!

3. $A \in a$ түзуі m түзуіне параллель, олар бағыттас, интервалдары тең түзулер болады: $A \in a \parallel m \rightarrow a \uparrow m$, $l_m = l_a$. Есептің үшінші шешуі осы.

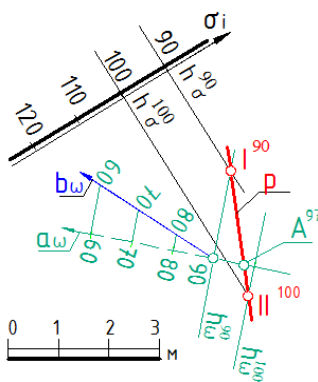
6-есеп. σ жазықтығы мен a түзуі (79, а-сурет) берілген. Осылардың қиылысу нүктесін анықтау керек: $\sigma \cap a = A$?

Шешу. 27-алгоритм. Есепті шешу әдісі (4.2-тармақты қараңыз): алдымен берілген түзуден оған *тиісті, қосымша* жазықтық жүргізіледі. Одан кейін осы *қосымшаның* берілген жазықтықпен *қиылысу* сызығы анықталады. Сол *қиылысу* сызықтың берілген сызықпен *ортақ* нүктесі – *ізелінген* нүкте! Ескерту. Түзуге тиісті шексіз көп жазықтық бар!



а)

$$a \subset \omega(a \cap b) \cap \sigma = p(l - II); p \cap a = A$$



ә)

79-сурет

1. Алдымен a түзуінен *қосымша* жазықтық ω -ны жүргіземіз (79, ә-сурет). Ол үшін a түзуімен қиылысатын b түзуін алу жеткілікті: $\omega(a \cap b)$, b түзуі сызбаның ыңғайына қарай өтеді, яғни оның бағыты мен интервалын *қалауымызша* алуға болады.

2. 21-алгоритмді қолданып ω -ның h^{80} , h^{90} , h^{100} горизонтальдарын саламыз.

3. 25-алгоритмді қолданып жазықтықтардың қиылысуын табамыз: $p = \sigma \cap \omega = ?$

$$\left. \begin{array}{l} 3.1. h_{\sigma}^{90} \cap h_{\omega}^{90} = I, \\ 3.2. h_{\sigma}^{100} \cap h_{\omega}^{100} = II, \\ 3.3. p(I-II) = \sigma \cap \omega. \end{array} \right\} \rightarrow$$

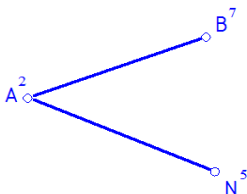
4. Есептің шешуі ең соңғы табылған p түзуімен a түзуінің қиылысу нүктесі болады: $A = \sigma \cap a = p \cap a$, $z_A = 97$ м.

Х мырза: 38-сұрақ. Егер де p және a түзулері *сызбада* қиылыспайтын болса, есептің шешуі қалай болады? Жауап. Ендігі біздің мақсатымыз осындай жағдайларды *салыстыру* арқасында ажырата білу. 4,5 тараулардағыдай p және a түзулерін өзара *орналасуын салыстырамыз*. Егер сызбада алгоритмнің 4-қадамында $p \parallel a$ болса, онда кеңістікте $a \parallel \sigma$ – *параллель*, егер сызбада $p = a$ болса, онда кеңістікте $\sigma = a$ – *миісті* болады.

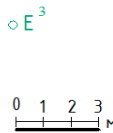
7-есеп. Берілген E нүктесінен а) ω (ABC) жазықтығына параллель етіп б жазықтығын, б) $\beta(\beta_i)$ жазықтығына параллель етіп γ жазықтығын жүргізіп (80, а,ә-сурет), олардың жатыс элементтерін анықтаңыз.

Келесі мысалдарда жазықтықтардың қиылысуында кездесетін *ерекшеліктеріне* тоқталайық.

$$\begin{array}{l} E \in \sigma \parallel \omega(ABC), \sigma - ? \\ 1. E \in a \parallel AB \\ 2. E \in b \parallel AC \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} E \in \sigma \parallel \omega(ABC), \sigma - ? \\ 1. E \in a \parallel AB \\ 2. E \in b \parallel AC \end{array}} \right\} \rightarrow \sigma(a \cap b) \parallel \omega \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l_a = l_{AB} \\ l_b = l_{AC} \end{array} \right.$$

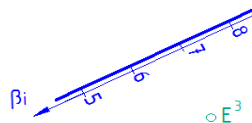


а)



80-сурет

$$E \in \gamma \parallel \beta \rightarrow \gamma_i \uparrow \beta_i \rightarrow l_{\gamma} = l_{\beta}$$

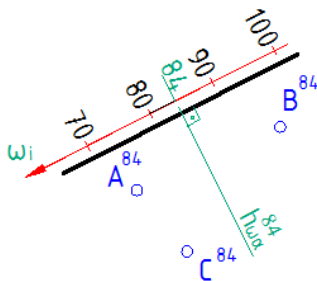


ә)

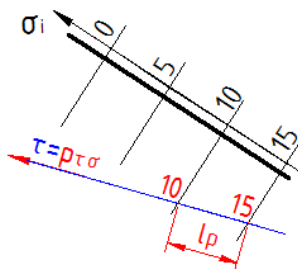
Екі жазықтықтың қиылысуының ерекшеліктері

$$\alpha \cap \pi^0 \rightarrow \alpha \cap \omega = h_{\omega\alpha}^{84}$$

$$\tau \perp \pi^0 \rightarrow \tau \cap \delta = p_{\tau\sigma} = \tau$$



а)



б)

81-сурет

5-мысал. Берілген ω және σ (ABC) жазықтығы, $\sigma \parallel \pi^0$, $z_0 = 84$ м (81, а-сурет). Осылардың қиылысу сызығын анықтау керек: $\omega \cap \sigma = p$? Шешу. σ жазықтығы горизонталь орналасқан, сондықтан екеуінің қиылысу сызығы да горизонталь $h_{\omega\sigma}^{84}$ болады және оның белгішесі де 84 м болу керек!

6-мысал. Берілген σ және τ жазықтығы, $\tau \perp \pi^0$. Осылардың қиылысу сызығын анықтау керек: $\sigma \cap \tau = p$ (81, б-сурет)? Шешу.

τ жазықтығы горизонталь проекциялаушы болып орналасқан, сондықтан екеуінің қиылысу сызығы τ -мен беттеседі: $\tau = p$. Бұл p сызығының l_p интервалы да белгішелері де σ -ға тәуелді, ол сызбада айқын көрсетілген.

Қорытынды. Бұл есептерде негізгі геометриялық элементтерге қатысты олардың тиістілігі, параллельділігі, қиылысуы қарастырылды. Және осы есептердің шешуіне алдыңғы алгоритмдер мұрындық болып, нәтижеге қол жеткізіп отырмыз. Яғни соңғы есептер алдыңғы есептердің қисынды нәтижесі және келесі есептерге мұрындық екені түсінікті. Келесі тақырыптарда да осы алгоритмдерді пайдаланатын боламыз. Олармен танысуға кірісейік!

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Позциялық есептерде қандай өзара орнасулар кездеседі?
2. Түзу мен жазықтықтың параллельдік шартын СБП-да айтып шығыңыз.
3. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі қалай анықталады?
4. Екі горизонталь проекциялаушы жазықтықтың қиылысу сызығы кеңістікте қалай орналасады, сызбада құрыңыз.
5. Екі жазықтықтың параллельдік шарты қандай, ол сызбада қалай шешіледі?
6. 7-есептің шешу сызбасын келтіріңіз.
7. Екі қиылысқан жазықтықтың біреуі вертикаль орналасқан. Осылардың қиылысу сызығының интервалы қалай табылады?
8. Сызбада қиылысқан түзулердің кеңістікте орналасуы қалай ажыратылады?

11. СБП-да МЕТРИКАЛЫҚ (ӨЛШЕМДЕУ) ЕСЕПТЕР. ӨЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ, ЕКІ ЖАЗЫҚТЫҚ

Сызбадан өлшемдерді анықтау есептері бұрынғы тарауларда қарастырылған, олар кесіндінің нақты шамасын, көлбеу бұрышын, интервалын анықтау болатын. СБП-дағы метрикалық есептерде арақашықтықты, бұрышты, ауданның нақты шамасын анықтайды. Осындай есептерді шығарғанда тікбұрыштың проекциясын салу қажет болады. Яғни бұл есептерде алдымен *перпендикулярлық* мәселесі шешілуі керек. Осы мәселені шешуші негізгі теореманы қолданамыз, оның дәлелі 1-тарауда берілген (7-қасиетті қараңыз!). **Теорема.** Егер де тікбұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель болып, екінші қабырғасы оған перпендикуляр емес болса, онда тікбұрыштың тікбұрышты проекциясы да тікбұрыш болады. **Теореманың салдары.** Планда *горизонталь* түзуге *перпендикуляр* түзу кеңістікте де горизонтальға перпендикуляр болады, керісіншеде солай.

Перпендикулярлықтың шарттары.

1. Кеңістікте түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болу үшін берілген түзу жазықтықтың екі қиылысқан түзуіне перпендикуляр болу керек.

2. Кеңістікте екі жазықтық өзара перпендикуляр болу үшін жазықтықтың біреуі екінші жазықтыққа перпендикуляр түзуден өтуі керек. Ендігі мақсатымыз осы теорема мен шарттардың негізінде метрикалық есептерді шешу.

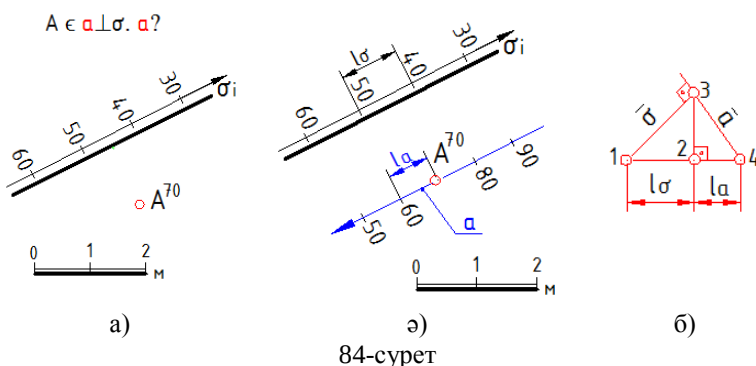
11.1. Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтық

Түзу мен жазықтықтың өзара перпендикуляр орналасуымен 83, а-суретте берілген көрнекі кескіннен танысамыз (10.3-тармақта 82-сурет).

Сызбада σ жазықтығы мен оған перпендикуляр α түзуі берілсін: $A \in \alpha \perp m_\sigma$, $\alpha \perp h_{A\sigma} \rightarrow \alpha \perp \sigma(m_\sigma \cap h_{A\sigma})$.

шығаруға батыл кірісейік. Назар аударыңыз! 83, ә-суретінде өзара кері шамалар l_σ , l_a кесінділерді анықтаудың *графикалық үлгісі* берілген, келесіде осыны қолданатын боламыз.

Барлығын қадағалайтын **X мырза**: жоғарыда $\beta(a \perp m) \perp \pi_0$ жазықтығы вертикаль орналасқан делінген, оның дәлелі қандай? Дәлел: егер $a \perp h_{A\sigma}$ болса, онда үш перпендикуляр теоремасы бойынша a -ның проекциясы да h^0 -ға перпендикуляр. Демек, ол (a -ның проекциясы) σ_i -мен, m -ның проекциясымен беттеседі: $\beta(a \perp m) \rightarrow \beta(a \cup \sigma_i) \perp \pi_0$.



84-сурет

1-есеп. Берілген A нүктесінен σ (σ_i) жазықтығына перпендикуляр a түзуін жүргізу керек (84, а-сурет) болсын: $A \in a \perp \sigma$, $a?$ 84, ә-суретінде есептің шешуі берілген.

29-алгоритм. 1. 83-суретінен белгілі болғандай A нүктесінен a түзуін σ_i -ге параллель және құлау бағытын оған қарама-қарсы етіп аламыз (84, ә-сурет).

2. Бұл түзудің l_a интервалы және σ -ның l_σ интервалы өзара кері шамалар, сондықтан 83, ә-суретіндегі графикалық үлгі бойынша 1-2-3-тікбұрышты үшбұрышты 84, б-суретіндегідей горизонталь катетін l_σ -ға, вертикаль катетін масштабпен 1 м тең етіп саламыз. Осы үшбұрыштың 3-төбесінен 3-2 түзуін гипотенузаға 1-4-ке перпендикуляр етіп жүргіземіз. Сонда 2-3-4 үшбұрышының горизонталь катеті $|2-4|$ – *ізделінген* l_a интервалы.

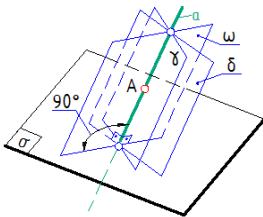
3. Осы интервалмен a түзуін бөліктеп, *перпендикулярды* сызбада бірмәнді анықтаймыз. Есептің шешуі осы.

Х мырза: 38-сұрақ. Осы есептен нүкте мен жазықтықтың арақашықтығын табуға бола ма? Жауап. Ол үшін α түзуінің σ -мен қиылысу В нүктесін анықтау керек, сонда $|AB|$ кесіндісі арақашықтықты береді. 10.4-тармақтағы 27-алгоритмді 6 есепті қараңыз. Алгоритмді қолданып, осы есептің шешуін табыңыз.

11.2. Өзара перпендикуляр жазықтықтар

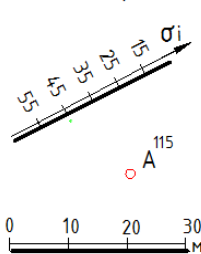
Кеңістікте *екі өзара перпендикуляр жазықтықтың* сызбасын жоғарыда айтылған шартқа және теорема салдарына сәйкес етіп құрамыз: $\sigma (\alpha) \perp \beta \rightarrow \alpha \perp \beta$, мұнда σ жазықтығы β -ға перпендикуляр, себебі σ жазықтығы β -ға перпендикуляр α түзуінен өтеді. Сызбада екі өзара перпендикуляр жазықтықты алу үшін міндетті түрде жазықтыққа перпендикуляр түзуді жүргізе, яғни 29-алгоритмнің бар екенін және оны қолдана білу керек. Енді 85-суретке назар аударайық. Мұнда σ жазықтығы және оған перпендикуляр α түзуі берілген. Сызбадан анық көруге болады: $\alpha \subset \beta, \gamma, \delta, \dots \perp \sigma$.

$A \in \omega \perp \sigma, \omega? A \in \alpha \perp \sigma, \alpha \in \omega, \gamma, \delta, \dots \perp \sigma$



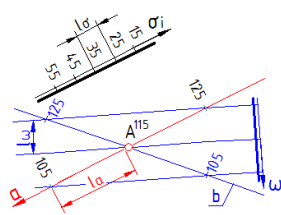
85-сурет

$A \in \omega \perp \sigma, \omega?$

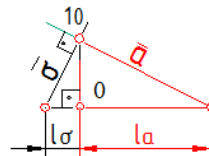


a)

$A \in \alpha \perp \sigma, l\alpha = 1/l\sigma, A \in \omega (\alpha \cap \omega)$



ә)



б)

86-сурет

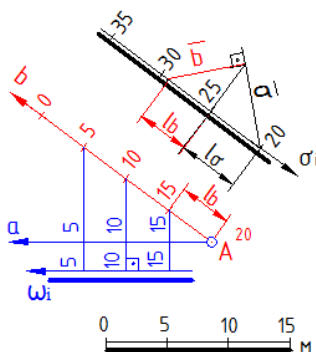
2-есеп. А нүктесі және $\sigma(\sigma_i)$ жазықтығы (86, а-сурет) берілген болсын. А нүктесінен $\sigma(\sigma_i)$ жазықтығына перпендикуляр ω жазықтығын жүргізу керек: $A \in \omega \perp \sigma$, ω ? Шешуі (86, ә-сурет). *Талдау.* Жоғарыда айтылғандай есептің шешуі шексіз көп, сызбада шешудің біреуін келтіреміз.

30-алгоритм. Алдымен 29-алгоритмді қолданамыз. 1.1. А нүктесінен σ (σ_i) жазықтығына перпендикуляр α түзуін жүргіземіз: $A \in \alpha \perp \sigma$, онда $\alpha \uparrow \downarrow \sigma$ -құлау бағыттары қарама-қарсы. 1.2. α түзуінің l_α интервалын анықтаймыз (86, б-сурет): $l_\alpha = 1/l_\sigma$. 1.3. α түзуін l_α интервалымен бөліктейміз (86, ә-сурет). 86, б-суреті 86, ә-суретіне қарағанда үлкейтілген!

2, 3, 4, ... ω жазықтығы екі түзу α және қалауымызша алынған онымен қиылысқан b түзуімен анықталады. В-ның белгішелерін де қалауымызша аламыз: ω ($\alpha \cap b$) –есептің бір шешуі осы жазықтық болып табылады. Сызбаға оның горизонтальдарын, көлбеулік масштабын, интервалын, 21-, 23-алгоритмдерін қолданып түсіреміз.

Х мырза: 39-сұрақ. Берілген А нүктесінен өтетін басқа перпендикуляр жазықтығын қалай алуға болады? Жауап. Егер есепке қосымша шарттар қойылмаса, b түзуінің *интервалын не орналасуын* өзгерту жеткілікі.

$$\alpha \subset \omega \perp \sigma, \omega? A \in b \perp \sigma, \omega (\alpha \cap b)$$



87-сурет

3-есеп. Берілген a түзуінен өтетін ω жазықтығын b жазықтығына перпендикуляр етіп жүргізу керек: $a \subset \omega \perp b$, ω ?
Шешу. *Талдау* (87-сурет). Бұл есеп алдыңғы есепке ұқсас, бірақ бұның бір ғана шешуі бар, себебі a түзуімен қиылысатын және b -ға перпендикуляр b түзуі кеңістікте бір жазықтықты құрады.

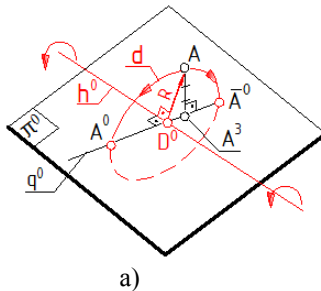
30-алгоритм. 1. Алдымен тағы да 29-алгоритмді қолданып, a түзуінің кез келген нүктесінен (мысалы, A -дан) b жазықтығына перпендикуляр етіп b түзуін l_b -интервалымен бөліктеп жүргіземіз: $A \in b \perp b$ (ол b -і бойына салынған үшбұрыштан анықталды және $l_b = 1/l_a$).

2. *Ізделінген* ω жазықтығын a және b түзулері құрады: $A \in \omega$ ($a \cap b$) $\perp b$. Есептің шешуі осы.

11.3. Бұрыштардың нақты шамасын айналдыру әдісімен анықтау

Ендігі біздің мақсатымыз *бұрыштардың нақты шамасын* анықтау болсын. Бұл жерде есеп *айналдыру* әдісімен шешіледі. Шынында да екі қиылысқан түзу құрған жазықтықты горизонталь осінен айналдырып, горизонталь деңгейге келтірсе, онда планда бұрыштың нақты шамасы өзі шығады. Осы есепті шешуге батыл кірісейік!

$A, \pi^0, h^0 \in \pi^0$ $A \in d(R=AD^0, D^0$ -центр) шеңбер,
 $D^0 \in h^0$ айналудың осі. $\alpha(d) \perp \pi^0, q^0 = \pi^0$.
 $h^0 \perp q^0, d \cap q^0 = A^0, \bar{A}^0$



айналдырылып, оның горизонталь π^0 жазықтығымен беттестірілуі көрсетілген, сызбада ол: $B^0 C^0 \bar{A}^0$. Бұл сызбадан осы үшбұрыштың нақты шамасы мен қиылысқан $a \cap b$ түзулерінің арасындағы бұрыштың да нақты шамасы белгілі болады. Бізге керегі осы. Осыны түсінуге назар аударайық. Шешуді 32-алгоритмінің жолдарымен бастайық және оны тексеріп отырайық.

1. Сызбада $a \cap \pi_0 = B^0$ және $b \cap \pi_0 = C^0$ нүктелері белгіленіп, *айналу осі* анықталады: $h^0 = B^0 C^0$.

2. А нүктесінен *оське перпендикуляр* $A D^0$ түзуі жүргізіліп, нүктенің айналдыру *радиусы* да табылады: $R = |A D^0|$.

3. А нүктесі h^0 осінен *d шеңбері* арқылы *айналады*, оның центрі D^0 болады.

4. Осы β – *шеңбер жазықтығы* π^0 -ге перпендикуляр және оны $g^0 \perp h^0$ түзуімен қиып өтеді.

5. Осы g^0 түзуімен *d* шеңберінің қиылысу нүктелері *ізделінген* А нүктесінің айналдырудан пайда болған бір нүктесі $\bar{A}^0$ -ды алайық. Ендігі қадам 33-алгоритмнің өзіне тән.

6. $B^0 C^0 \bar{A}^0$ үшбұрыштың $\bar{A}^0$ төбесіне сәйкес бұрышы *ізделінген* бұрыштың нақты шамасы: $\alpha^0 = \alpha, ^\wedge b$.

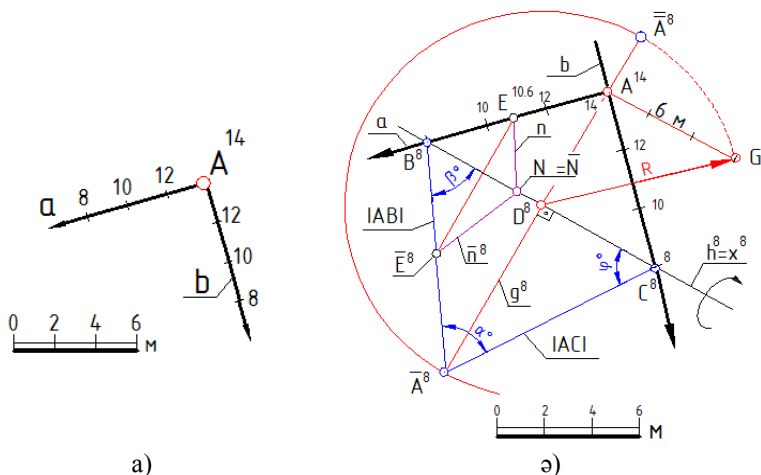
Келесі біздің мақсатымыз жаңағы кеңістікте берілген салуларды планда жүзеге асыру. Келесі 5-есепте 32, 33 алгоритмдерді біртіндеп қолданамыз.

5-есеп. Берілген екі қиылысқан a және b түзулерінің арасындағы бұрыштың нақты шамасын (89, а-сурет) планда анықтау керек болсын: $\alpha^0 = \alpha, ^\wedge b, \alpha^0$?

Шешу. 34-алгоритм (89, ә-сурет). 1. 33-алгоритмнің ізімен a және b түзулерінің π^8 – план жазықтығымен қиылысу нүктелерін табамыз: $a \cap \pi^8 = B^8$ және $b \cap \pi^8 = C^8$, $B^8 C^8$ – *айналу осі* жүргізілді: $h^8 = B^8 C^8$.

2. A^{14} -тен айналу осіне перпендикуляр түзу $g^8 \perp h^8$ жүргізілді, планда ол А нүктесінің *жылжу бағытын* анықтайды (кеңістікте ол айналу *d* шеңбер жазықтығының *горизонталь ізі*).

3. $g^8 \cap h^8 = D^8$ – осы нүкте А нүктесінің *айналу центрі* болады, сондықтан $|A^{14} D^8|$ кесіндісі *айналу R радиусын* анықтайды кеңістікте, сызбада емес: $R = |A^{14} D^8|$.



89-сурет

3.1. Енді сызбада осы радиустың *нақты шамасын* табу керек. Ол үшін А нүктесінен жүргізілген горизонталь AG (h^8 -ге параллель) түзуіне масштабпен $6 \text{ м} = 14 - 8$ салып, GAD тікбұрышты үшбұрышты құрамыз. Осы үшбұрыштың гипотенузасы *ізделінген* радиус болады: $|DG| = R$ – *нақты шама*.

4. D^8 нүктесі центрі болатын D^8G радиусымен шеңберді g^8 сызығымен қиылысқанша жүргізіп, *ізделінген* $\bar{A}^8$ нүктесін табамыз. Ол А нүктесінің кеңістікте осьтен айналып, горизонталь π^8 – план жазықтығымен қиылысу нүктелерінің бірі, екіншісі $\bar{\bar{A}}^8$.

5. $B^8 C^8 \bar{A}^8$ үшбұрыштың $\bar{A}^8$ төбесіне қатысты бұрыш *ізделінген* бұрыштың *нақты шамасы*: $\alpha^0 = \alpha, \wedge b$. Есептің шешуі осы.

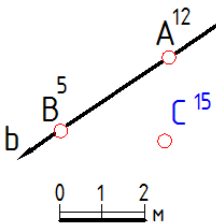
Х мырза: 40-сұрақ. Осы сызбадан қандай қосымша мағлұматтарды алуға болады? Жауап. Бұл сызбадан берілген элементтердің *нақты шамаларын* және айналдырудан пайда болған *сәйкес элементтерді* анықтауға болады [1,2, 14].

Шынында да сызбада $\bar{A}^8 B^8$ және $\bar{A}^8 C^8$ кесінділері олардың нақты шамалары. Мұнда $A^{14} B^8$ -ге сәйкес $\bar{A}^8 B^8$, $A^{14} C^8$ -ге сәйкес $\bar{A}^8 C^8$. Сәйкес түзулердің сызба құлау бұрыштары да $\beta^0 = \alpha, \wedge \pi^8$ мен $\varphi^0 = b, \wedge \pi^8$ нақты шамамен берілген. Панда берілген бұрыштың ($A^{14} B^8 C^8$) және оның *жаңа* горизонталь

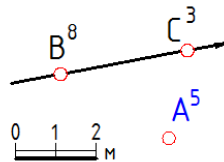
проекциясының ($B^8 C^8 \bar{A}^8$) нүктелері арасында сәйкестік, дәлірек айтса *тектес* сәйкестік құрылған. Оны сәйкес нүктелер мен түзулер айқындап тұр: $\bar{A}^8 \rightarrow A^{14}$, $E^{10.6} \rightarrow \bar{E}^8$, $\bar{A}^8 B^8 \rightarrow A^{14} B^8$, $\bar{A}^8 C^8 \rightarrow A^{14} C^8$. Мұнда *сәйкестік бағыты* $g^8(A^{14} \bar{A}^8)$ сызығы, *сәйкестік осі* айналу осі болады.

Х мырзаның ескертуі: Бұл сәйкестік екі жазық бұрыштың, яғни екі жазықтықтың арасында орнатылған, сондықтан бір жазықтықтың кез келген нүктесі мен түзуіне (сызығына) екінші жазықтықтан *сәйкес* нүкте мен түзуді (сызықты) алуға болады. Мысалы, сәйкес түзулерді $n \rightarrow \bar{n}^8$ алайық, мұнда $n \cap \bar{n} = N = \bar{N} \in x^8$, яғни сәйкестік x^8 осі сәйкестіктің *қос нүктелі* түзуі болады. Осының арқасында B^8, C^8 нүктелері де қос болады: $B^8 = \bar{B}^8$, $C^8 = \bar{C}^8$. Назар аударыңыз: сәйкес түзулер сәйкес нүктелерден өтеді және қос түзуде қиылысады!

Х мырза: 40'-сұрақ. Екі қиылысқан түзудің арасындағы бұрышты анықтадық, ал берілген екі түзу айқас болса, онда арасындағы бұрышты қалай анықтауға болады? Жауап. Ол үшін берілген екі түзуді шартты түрде бір нүктеден өтетін етіп, жазық бұрыштын шамасын 34-алгоритммен анықтау керек. СОЗЖ-ға қатысты 20*_(11.3)- есебі. Панда екі АВ және СМ айқас түзу берілген болсын. 1. Айқас түзулерді бір жазықтыққа тиісті еткізіп алу керек. 2. Айналдыру әдісімен осы түзулердің арасындағы жазық бұрыштың нақты шамасын анықтау керек. 3. Панда тектес сәйкестіктің *бағыты* мен *қос түзуін* анықтап, оның көмегімен сәйкес қисық сызықтарды құру керек.



90-сурет



91-сурет

6-есеп. Берілген $b(AB)$ түзуімен қиылысатын және оған перпендикуляр болатын C нүктесінен горизонталь түзуін жүргізу

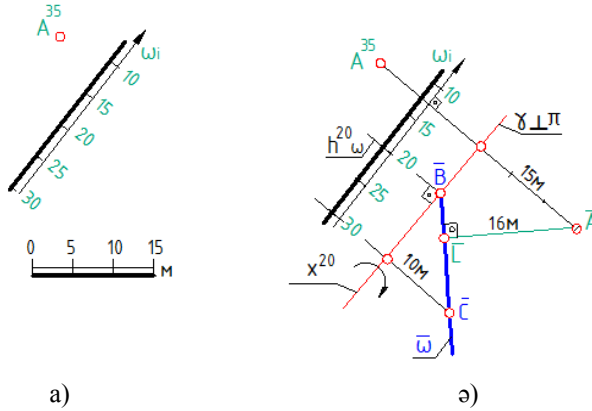
керек: $C \in h \perp b$, $b \cap h = D$? (90-сурет, нұсқалар: а) $z_b = 9$, $z_c = -1$, ә) $z_b = 14$, $z_c = -5$).

21*_(11.3)-есеп. (СОЗЖ) Кеңістікте А нүктесі және ВС түзуі берілген. А нүктесінен өтетін, ВС түзуіне перпендикуляр α түзуінің проекциясы ВС-ға параллель болу керек (91-сурет, нұсқалар: а) $z_A = 7$, $z_B = 1$, $z_C = 4_M$; ә) $z_A = 9$, $z_B = 2$, $z_C = 6_M$).

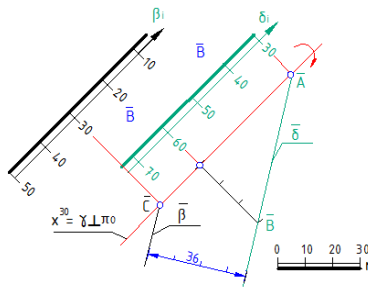
Х мырза: 41-сұрақ. Бұл есептің қанша шешуі бар, жалпы түрде нүктеден түзуге шексіз көп перпендикуляр жүргізуге болады ғой? Жауап. Ия, жалпы түрде нүктеден түзуге қарай *шексіз көп* перпендикуляр түзулерді жүргізуге болады, олар берілген түзуге перпендикуляр жазықтықты құрады. Ол түзулердің біреуі ғана сол түзумен қиылысады, қалғандары онымен айқасады. 20.1*_(11.3)-есептің шартына сәйкес *бір* шешуі бар. Оның шешуін елестету: 1. Егер А нүктесінен вертикаль γ жазықтығы $B^8 C^3$ -ға параллель етіп алынса. 2. Панда оның горизонталь ізі $B^8 C^3$ -қа параллель *ізделінген* α түзуінің проекциясы болуы мүмкін. 3. Ол – α түзуі γ -ға тиісті. Егер оның *интервалы* дұрыс анықталса, сонда ол кеңістіктегі ВС түзуіне перпендикуляр болып шығады, ондай түзу біреу! Х мырзаның кеңесі: ұсынылған елестетуді қолданып, α түзуінің интервалын сызбада анықтап көріңіз.

11.4. Арақашықтықты *түрлендіру* әдісімен анықтау

8-есеп. Берілген А нүктесі мен ω жазықтығының арақашықтығын анықтау керек (92, а-сурет). 1-*талдау*. Бұл есепте А нүктесінен ω -ға перпендикуляр α түзуі жүргізіліп, оның ω -мен қиылысу L нүктесі анықталуы керек. Осы AL кесіндінің *нақты шамасы* есептің шешуі болады (11.1.-тармақта 1-есепті, 29-алгоритмді қараңыз). Бұл есепті перпендикулярлық негізінде *түрлендіру* әдісімен шешуге болады, біз осыны ұсынамыз. 2-*талдау*. Көз алдыңызға елестетіп көріңіз: ω жазықтығын проекциялаушы жағдайға келтірдік, яғни ω -ның проекциясы *түзу* болды делік. Бұл амалдар сызбаны *түрлендірумен* орындалады.



92-сурет



93-сурет

Онда алда айтылғандай А нүктесінен ω -ға перпендикуляр α түзуі жүргізіліп, оның ω -мен қиылысу L нүктесі анықталады. Есептің шешуі осы AL кесіндісі оның нақты шамасы болып табылды. Біз бұл жерде нені ұтамыз? $AL \perp \omega$ болады және ол горизонталь орналасады, яғни сызбада AL кесіндісі нақты шамасымен кескінделеді. Біздің қазіргі мақсатымыз ω жазықтығын проекциялаушы етіп, оны сызбада түзуге түрлендіру. Есепті шешуге батыл кірісейік, ал, бастайық!

35-алгоритм. 1. ω жазықтығын проекциялаушы жағдайға келтіріп, оның проекциясын түзуге түрлендіру амалдары. Мұнда қосымша γ -ны ω -ға және π_0 перпендикуляр етіп аламыз, ол үшін $\gamma \perp h^{20}_\omega$ және $\gamma \perp \pi_0$ болу керек. Сонда ω -ның γ -дағы жаңа проекциясы $\bar{\omega}$ түзуге айналады. А нүктесін де γ -ға проекциялаймыз. Өз кезегінде γ -ны x^{20} осінен айналдырып, оны

горизонталь етіп аламыз. Сызбада ол осьтен оң жаққа айналдырылған. Сондағы сызбадан есептің шешуін аламыз: $\bar{A}$ нүктесімен $\bar{\omega}$ ($\bar{B} \bar{C}$) түзуінің арақашықтығын.

1.1. Панда айналу осін ω -ның горизонталіне перпендикуляр етіп аламыз: $x^{20} \perp h^{20}_{\omega}$. Бұл жерде ескеру керек: $x^{20} = \pi^0 \cap \gamma, \gamma \perp \pi^0, \gamma \perp \omega$, сонда h^i_{ω} -ның γ -ға проекциясы нүкте болады.

1.2. Осы осьтен өтетін қосымша вертикаль γ жазықтығы жаңа проекциялар жазықтығы болады. Осыған ω -мен A -ның жаңа проекцияларын саламыз. Сызбада γ жазықтығы Ox осінен айналдырылып, горизонталь $\bar{\gamma}^{20}$ болып орнастырылды, осьтің оң жағын алып.

2. Жаңа проекциялау бағыты h^i_{ω} – нүктелердің жылжу бағыты, сондықтан горизонтальдардың жаңа проекциясы нүкте болады: $h^{20}_{\omega} = \bar{B}$, мұнда $\bar{B}$ нүктесі оске тиісті. $h^{30}_{\omega} = \bar{C}$, мұнда $\bar{C}$ нүктесі осьтен 10м қашықтықта, нәтиже: $\bar{\omega}$ ($\bar{B} \bar{C}$) – түзу!

3. A нүктесінің жаңа $\bar{A}$ проекциясы осьтен $15m = 35 - 20$ қашықтықта орналасты.

4. $\bar{A}$ нүктесінен $\bar{\omega}$ -ға перпендикуляр $\bar{A}\bar{L}$ -ді жүргіземіз.

5. Оны масштабпен өлшеп, ара қашықтықты табамыз: $|\bar{A}\bar{L}| = 16$ м, (10.2-тармақта 2-есепті, 24-алгоритмді қараңыз, салыстырыңыз). Есептің шешуі осы.

9-есеп. Сызбада β және δ өзара параллель екі жазықтық берілсін. Осы екі жазықтықтың арақашықтығын анықтау керек (93-сурет). Шешу. Талдау. Бұл жерде 24, 35-алгоритмдерді қолданып, β және δ -ны өзара параллель екі $\bar{\beta}, \bar{\delta}$ түзуге түрлендіреміз, яғни оларды түрлендірумен қосымша γ проекциялар жазықтығына перпендикуляр етіп аламыз. Сонда олардың жаңа проекциясы түзуге айналады. Жазықтықтардың арақашықтығы өзара параллель екі $\bar{\beta} || \bar{\delta}$ түзудің арақашықтығына тең болады және ол нақты шамамен кескінделінеді.

35'-алгоритм. 1. Айналдыру осін $x^{30} \ni A$ деп алайық және ол β_i -ге параллель, яғни h_{β} -ға перпендикуляр болсын: $x^{30} || \beta_i$.

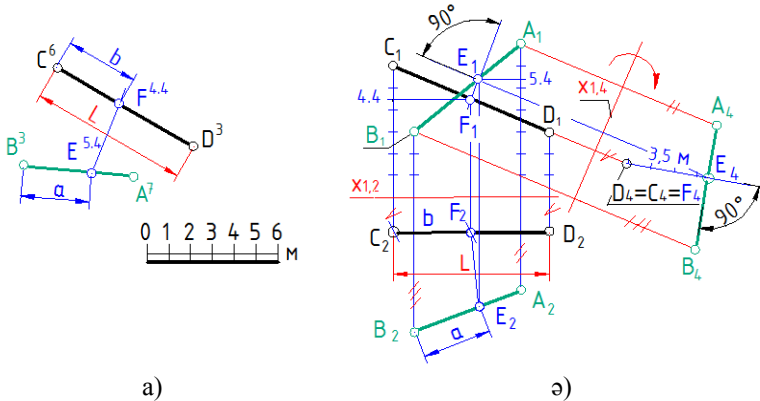
2. Осьтен өтетін қосымша $\gamma \perp \pi^0$ вертикаль жазықтығын осьтен айналдырып, оны горизонталь $\bar{\gamma}^{30}$ жазықтыққа түрлендіреміз. Сызбада ол Ox осінен төменгі оң жақты алсын.

3. 93-суретте нүктелердің жылжу бағыттары β -ның горизонтальдарымен бағыттас, ол сызбада анық көрсетілген.

4. Жоғарыдағының нәтижесінде δ -ның жаңа $\bar{\delta}$ проекциясы екі $\bar{A}$, $\bar{B}$ нүктесімен, β -ның жаңа $\bar{\beta}$ проекциясы $\bar{C}$ нүктесімен анықталады: $\bar{\beta}(\bar{C}) \parallel \bar{\delta}(\bar{AB})$.

5. $\bar{\beta}$ және $\bar{\delta}$ -ның арақашықтығы сызба масштабымен өлшенеді, ол шамамен 36 м тең. Есептің шешуі осы.

10-есеп. ABC бұрышының екі қабырғасының ұзындығын анықтау керек болсын: $|AB|$, $|BC|$? Шешу. Бұл есептің шешуі 11.3-тармақтың 89, ә-суреттегі 40-сұрақтың жауабында айтылған. Шынында да онда $A^8B^8C^8$ үшбұрышы нақты шамамен берілді, сондықтан оның барлық қабырғалырының ұзындығы масштабпен өлшенеді, көлбеу бұрыштары да нақты шамамен өлшенеді. Өзіндік жұмыс жасап, кез келген ABC үшбұрышын алып, оның нақты шамасын анықтаңыз.



94-сурет

11-есеп. Айқас орналасқан AB және CD түзулердің арақашықтығын анықтау керек болсын (94, а-сурет). Шешу. Бұл есептің шешуі де сызбаны *түрлендіруге* байланысты, дәлірек айтқанда қолданылатын түрлендіру әдісі *проекциялар жазықтықтарын алмастыру* деп аталады [1,2,7]. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру арқасында берілген түзулердің біреуі *нүктеге* йналып, екіншісі *түзу* болады. Осы екеуінің арақашықтығы *ізделінген* арақашықтықтың *нақты шамасы* болады.

36-алгоритм.1. 94, а-суретте, планда берілген AB, CD түзулерінің өзара орналасуын және шамаларын өзгертпей, 94, ә-

суретке оларды көшіреміз, бірақ мысалы CD-ны $x_{1,2}$ осіне параллель етіп. Бұл сызбаны горизонталь проекциялар ретінде аламыз, оларды белгілейміз: A_2B_2 , $C_2 D_2$. Мұнда план π^0 жазықтығы π_2 -ге алмастырылды: $\pi^0 \rightarrow \pi_2$ және CD түзуі фронталь етіп орналастырылды.

2. Енді бұл тузулердің жаңа фронталь проекциялары $x_{1,2}$ осіне перпендикуляр байланыс сызықтарында өз белгішелеріне сәйкес орналасады: A_1B_1 , $C_1 D_1$ және мұнда $C_1 D_1$ – нақты шама, себебі ол фронталь!

3. Проекциялар жазықтықтарын алмастыруды жалғастырамыз: жаңа π_4 жазықтығын $C_1 D_1$ түзуіне перпендикуляр етіп аламыз, ось $x_{1,4} \perp C_1 D_1$. Мұндағы алмастыру $\pi_1 \rightarrow \pi_4$, $x_{1,2} \rightarrow x_{1,4}$ болды.

4. π_4 -тегі CD түзуінің жаңа проекциясы нүкте болды $C_4 = D_4$, себебі бұл нүктелердің жаңа $x_{1,4}$ осьтен қашықтығы C_2, D_2 -лердің ескі $x_{1,2}$ осьтен қашықтығына тең.

5. Екінші AB түзуінің жаңа проекциясы $A_4 B_4$, оның да нүктелерінің жаңа $x_{1,4}$ осьтен қашықтығы A_2, B_2 -лердің ескі $x_{1,2}$ осьтен қашықтығына тең болу керек.

6. Шешудің соңғы қадамы π_4 жазықтығында C_4 нүктесі мен $A_4 B_4$ түзуінің арақашықтығын анықтау болады: ол шамамен 3,5м тең, сызбада ол C_4 -пен E_4 -тің арасы. Есептің шешуі осы.

X мырза сызба геометрияға құмары бар оқушылар үшін есепті төменгідей толықтырды: осы арақашықтық $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ бастапқы проекцияларда $E^{4,5} F^{5,4}$ болады, оны сәйкес байланыс сызықтар және пландағы белгішелер, a, b өлшемдері көрсетіп тұр.

Қорытынды. Осы тарауда қарастырылған метрикалық есептер қиын есептерге жатады, себебі метрикалық есептердің шешуі күрделі түрлендірулерге байланысты, оны сызбалардан да байқаған боларсыз. Осы есептер тәжірибеде жиі қолданылады, олардың шешуін түсініп алған жөн, пайдасы көп.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Метрикалық есептерде қандай мәселелер қарастырылады?
2. Метрикалық есептерді шешуде қандай негізгі теорема қолданылады?

3. Түзу мен жазықтықтың кеңістікте өзара перпендикуляр орналасу шартын айтыңыз.

4. Екі жазықтықтың кеңістікте өзара перпендикуляр орналасу шарты қандай?

5. Сызбада екі өзара перпендикуляр жазықтық үшін қандай шарттар ескеріледі?

6. Сызбада өзара перпендикуляр түзу мен жазықтық үшін қандай шарттар ескерілу керек?

7. Өзара кері шамаларды анықтаудың графикалық әдісі қай суретте және ол метрикалық есептерде не үшін қолданылады?

8. 83-, 87-суреттерінде жазықтыққа перпендикуляр түзулердің интервалы қалай анықталды?

9. 84, б-суретінен α түзуінің және β жазықтығының құлау бұрыштарын анықтаңыз. Бұл есепте не берілді, не анықталады және ол қалай анықталды, айтып шығыңыз.

10. 85-суретті талдап көріңіз: не берілді, нені анықтау керек және есептің шешуі қанша?

11. Қандай түрлендірулер метрикалық есептерде қолданылды?

12. 88, а-суретін талдап көріңіз: А нүктесінің айналу осін, центрін, радиусын, шеңберін анықтаңыз.

13. 88, ә-суретін талдап көріңіз: А нүктесінде қиылысқан екі түзудің арасындағы бұрышты анықтаудың алгоритмін айтып шығыңыз.

14. 88, ә-суретінде сәйкестік осін және сәйкестік бағытын көрсетіңіз.

15. 88, а, 89, ә-суретінде сәйкес нүктелер мен түзулерді көрсетіңіз.

16. 1,2,3-есептерді шығарыңыз.

17. 92, ә-суретінде нүкте мен жазықтықтың арақашықтығы қалай анықталды? Мұнда $\overline{\omega}$ түзуі қалай табылды?

18. 93-суретінде екі жазықтықтың арақашықтығы қалай анықталды? Мұнда $\overline{\beta}$, $\overline{\delta}$ түзулері қалай пайда болды?

19. 94, ә-суретінде айқас түзулердің арақашықтығын табу жолдарын айтып шығыңыз: не берілді, не анықталды, қалай анықталды?

2-қорытынды жұмыс. «СБП-дағы позициялық және метрикалық есептер». Берілгені 2.1-кестеде, 2.1-есеп. Ұңғыманың тереңдігін (трассаның ұзындығын) анықтау. Берілгені 2.2-кестеде, 2.2-есеп. Ең қысқа ұңғыманы (трассаны) анықтау. 2.3-есеп. Екі қиылысқан түзудің (трассаның) арасындағы бұрышты анықтау. Есептер сызбасы 1:1000 масштабпен салынады, үш А4 пішімінде, үлгілері 2.1-, 2.2-, 2.3-суреттерінде. *Ескерту.* Геология және тау-кен мамандықтары үшін осы жұмыстың барлық 3 есебі шығарылғаны дұрыс. Құрылыс және су ресурстарын пайдалану мамандықтары үшін 1-есеп жеткілікті.

2.1-есепке түсініктеме. Берілген $A(80,70,102)$ нүктесі ұңғыманың жоғарғы ернеуі не жолдың бастапқы нүктесі болсын. $|AB| = 72\text{м}$ – ұңғыманың (трассаның) ұзындығы. Мұнда В нүктесі трассаның соңғы нүктесі (ұңғыманың түбі). АВ-ның құлау бұрышы $\alpha^0 = 35^0$, азимуты $\varphi^0 = 30^0$. Анықтау керек: В нүктесінің координаталарын (оның ішінде Z_B тереңдікті анықтайды) (2.1-кесте, үлгі 2.1-суреті, А4 пішім, М1:1000).

Шешуі. Бұл тақырып түзудің жатыс элементтерін анықтауға байланысты (19-, 20-алгоритм). 1. А4 пішімінде Ох, Оу осьтері тағайындалып, координаталары бойынша А нүктесі салынады.

2.1-кесте

Ұнғыманың (трассаның) ұзындығы (2.1-есеп)

Нұсқалар N ⁰	AB кесіндісінің (ұнғыманың, трассаның) орналасуы					
	A нүктесі, координаталары, м			AB -ның ұзынды- ғы, м	AB-ның күлау бұрышы α^0	AB-ның азимуты, φ^0
	X _A	Y _A	Z _A			
1	52	25	79	125	40 ⁰	237 ⁰
2	52	25	85	126	40	230 ⁰
3	62	110	85	79	23 ⁰	68 ⁰
4	68	110	85	77	65 ⁰	220 ⁰
5	120	10	90	129	33 ⁰	136 ⁰
6	116	08	80	138	30 ⁰	140 ⁰
7	67	85	110	92	11 ⁰	23 ⁰
8	52	06	107	119	45 ⁰	226 ⁰
9	135	48	83	85	43 ⁰	122 ⁰
10	0	46	80	82	42 ⁰	145 ⁰
11	130	50	80	82	50 ⁰	121 ⁰
12	80	25	130	103	26 ⁰	129 ⁰
13	83	25	79	114	32 ⁰	135 ⁰
14	52	06	107	42	26 ⁰	276 ⁰
15	83	70	107	87	09 ⁰	48 ⁰
16	55	21	107	63	23	116 ⁰
17	135	47	38	96	18 ⁰	147 ⁰
18	52	06	105	87	42 ⁰	122 ⁰
19	68	110	85	82	23	69
20	135	19	36	132	13	103
21	68	110	85	122	23	325
22	67	85	110	94	32	300
23	65	80	100	90	35	308
24	70	85	110	85	16	52
25	0	38	47	142	11 ⁰	286
26	0	48	111	143	12 ⁰	284
27	55	110	80	111	33	291
28	0	30	62	130	22 ⁰	205 ⁰
29	27	53	60	105	25 ⁰	195 ⁰
30	105	21	40	125	15 ⁰	45 ⁰
31	80	25	130	56	30	130
32	70	85	100	95	35	300
33	135	20	36	105	35	25

Ең қысқа ұңғыма(2.2-есеп), екі ұңғыманың арасындағы
бұрыш (2.3-есеп)

Нұсқа- лар № ⁰	А нүктесі			Жазықтық δ (BCD)								
	Координаталары, м											
	X _A	Y _A	Z _A	X _B	Y _B	Z _B	X _C	Y _C	Z _C	X _D	Y _D	Z _D
1	60	90	15	40	100	85	135	19	36	14	52	0
2	120	90	10	65	80	100	130	38	20	15	0	52
3	52	25	80	65	105	80	130	18	35	12	50	0
4	120	92	21	0	80	46	70	115	85	135	20	32
5	115	9	90	0	48	83	68	85	110	135	36	19
6	117	7	85	0	50	85	135	40	20	15	0	50
7	48	82	20	20	0	52	68	80	110	130	38	20
8	116	8	88	50	38	25	0	46	80	70	85	108
9	115	10	92	70	85	110	135	35	20	15	0	52
10	18	-10	90	135	48	83	67	85	110	0	36	19
11	20	12	92	80	25	135	70	85	110	120	0	52
12	15	10	85	80	28	20	130	50	80	70	80	108
13	16	12	88	130	50	80	85	110	10	30	15	120
14	18	12	85	70	85	110	0	35	20	120	0	52
15	18	90	10	83	25	79	67	110	85	121	52	0
16	18	40	75	83	117	6	67	20	0	0	111	48
17	18	79	40	85	75	107	67	0	20	0	48	111
18	117	75	40	0	38	47	135	0	21	15	86	78
19	68	100	85	117	90	9	130	20	36	15	50	0
20	65	80	100	120	90	10	130	38	20	15	0	52
21	60	105	83	50	25	80	120	78	35	12	50	0
22	0	80	47	120	92	21	70	115	85	135	20	32
23	0	48	85	115	10	85	68	85	110	130	36	18
24	0	55	80	117	7	85	135	40	20	15	0	50
25	20	0	52	48	82	25	65	28	100	135	40	25
26	50	78	25	115	8	88	0	46	80	70	85	108
27	70	85	110	110	10	115	135	35	20	15	0	52
28	70	72	90	10	50	62	46	30	62	125	70	45
29	78	80	95	82	125	10	10	10	52	46	30	62
30	80	58	75	46	30	62	82	125	10	10	50	62
31	83	75	96	12	45	60	80	100	20	50	25	70
32	75	85	100	47	28	65	10	50	65	82	126	6
33	85	70	95	50	30	64	12	46	64	85	128	4
34	110	90	9	40	100	100	120	21	36	14	52	0

2. Қалауымызша меридианның бағытын A нүктесінен жүргізіп, оның солтүстік N үшін белгілейміз.

3. Берілген азимуты $\varphi^\circ = 30^\circ$ -қа сәйкес A нүктесінен n түзуін жүргізіп, оның құлау бағытын бағытшамен көрсетеміз.

4. Енді $|AB| = 72\text{м}$ – ұңғыманың (трассаның) ұзындығын қолданамыз. *Талдау.* Сызбада A нүктесінен өтетін тікбұрышты үшбұрышты құру керек. Оның гипотенузасы 72м -ге тең болып, бірінші катеті n түзуінде алынса, онда екінші m катеті гипотенузамен $55^\circ = 90^\circ - 35^\circ$ жасайтын болуы керек: $A \in m \perp n$.

4.1. Алдымен қалауымызша алынған $M \in m$ нүктесінен 55° -пен m түзуіне көлбейтін t түзуін саламыз.

4.2. t түзуіне M нүктесінен 72м -ді өлшеп салып, соңғы $\bar{B}$ нүктесін аламыз. $M\bar{B}$ түзуі берілген трасса (ұңғыма) моделіне сәйкес (ұзындығы мен бағытына қарай, бірақ орналасуына сай емес) алынды.

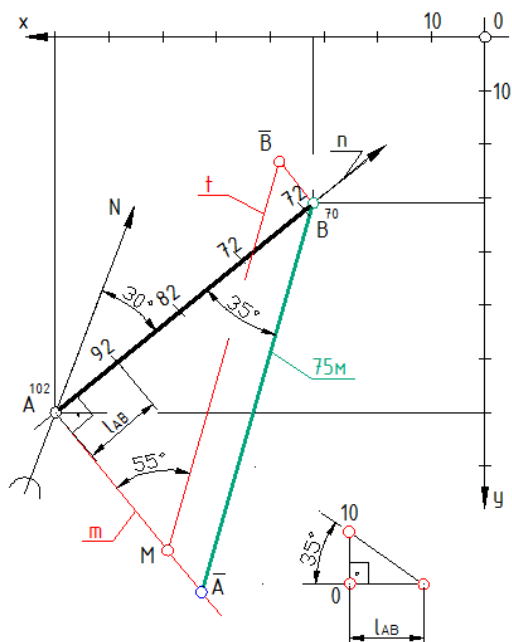
5. $\bar{B}$ нүктесінен $\bar{B}B \perp n$ түзуін құрамыз, осының нәтижесінде n түзуінде *ізделінген* B нүктесі – ол трасса, ұңғыманың соңғы нүктесі, анықталды. Егер B нүктесінен $M\bar{B}$ -ға параллель түзу жүргізілсе, онда трасса (ұңғыма) ұзындығына тең $|\bar{A}B| = 72\text{м}$ гипотенузаны аламыз. Сызбадағы $AB\bar{A}$ тікбұрышты үшбұрышы тапсырма шартына толық сәйкес болды. Оның $A^{102}B^{70}$ катеті сызбада трассаны (ұңғыманы) анықтайды.

6. Ендігі мақсатымыз B нүктесінің координаталарын анықтау.

6.1. B нүктесінің X_B және Y_B координаталары сызбада 32 м , 31 м сай болды.

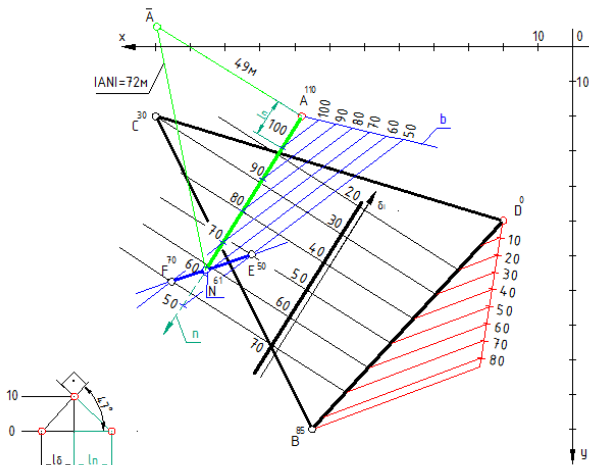
6.2. Z_B координатасын анықтау үшін n түзуін бөліктеп, оның интервалын табу керек. Ол үшін жеке орында тікбұрышты үшбұрышты саламыз. Оның вертикаль катеті 10 м -ге тең (масштабпен), гипотенузасы осы катетті 55° -пен көлбейді, горизонталь катеті интервал l -ға тең болды (19-, 20-алгоритм).

6.3. Осы l -мен AB түзуін бөліктеп, нәтижесінде $Z_B = 70\text{ м}$ табамыз. Бұл есептің жауабы. Сызбада міндетті түрде кестеден нұсқаға сай үзінді мен B нүктесінің координаталары берілуі керек.



Нүктелердің координаталары м.				$ \Delta I , \text{м}$	α°	φ°
A	80	70	102	72	35°	30°
B	32	31	70			

2.1-сурет
Негізгі жазу



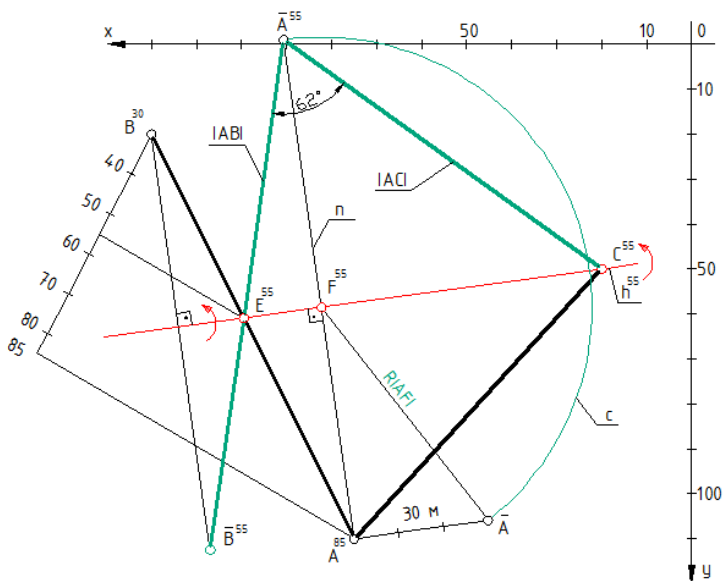
X_A	y_A	Z_A	X_B	y_B	Z_B	X_C	y_C	Z_C	X_D	y_D	Z_D	$ AN $
78	20	110	75	110	85	120	20	30	20	50	0	72M

$$l\delta=9.5\text{M}, \alpha^\circ=47^\circ, \psi^\circ=?, \beta^\circ=?$$

$l_n=11\text{м}$, $|AN|=72\text{м}$ - ең қысқа ұңғыманың (трассаның) ұзындығы
N(106, 64, 61).

2.2-сурет

Негізгі жазу



X_A	y_A	Z_A	X_B	y_B	Z_B	X_C	y_C	Z_C
75	110	85	120	20	30	20	50	55

$$\alpha^\circ = 62^\circ, \quad IABl = 115M, \quad IACl = 87M$$

2.3-сурет

Негізгі жазу

Ескерту. Осы жұмысты $\alpha^{\circ} = 0^{\circ}$ жағдайда орындауға болады, яғни трасса горизонталь алынады. Онда жұмысты қорғауда 50–74 % аралығында баға аласыз (құрылыс, су ресурстарын пайдалану мамандықтары үшін).

2.1-есепке сұрақтар:

1. Есептің шарты бойынша не берілген?
2. Тапсырмада нені анықтау керек?
3. Сызбада меридиан алынды ма, берілді ме?
4. Нұсқаңыз бойынша түзудің құлау бұрышы және азимуты қанша градусқа тең? Оларды қалай қолдандыңыз?
5. Трассаның (ұңғыманың) $|AB|$ ұзындығын қалай қолдандыңыз?
6. Сызбадағы жүргізілген m, t түзулері не үшін керек болды?
7. Интервал l_{AB} не үшін анықталды?
8. А нүктесінің $z_A = 84\text{м}$ болса, z_B қанша болады?
9. Егер AB -ның азимуты 50° болса, l_{AB} қалай өзгереді?

2.2-есепке түсініктеме. Берілгені $A(78, 20, 110)$ нүктесі және $\delta(BCD)$ жазықтығы: $B(75, 110, 85)$, $C(120, 20, 30)$, $D(20, 50, 0)$. А нүктесін ұңғыманың жоғарғы ернеуі, δ -ны пайдалы қазбаның жабыны деп аламыз. А нүктесінен δ жазықтығына дейін ең қысқа AN ұңғыманың бағытын және оның нақты $|AN|$ шамасын анықтау керек (нұсқасы 2.2-кестеде, үлгісі 2.2-суретте, $A4$ пішім, $M1:1000$).

Шешуі. Есеп метрикалық есептер тақырыбына сай, перпендикулярды жүргізуге байланысты. Ұсынылған алгоритмдерді қолданып сызбаларды құрыңыз, төменде ықшамдалған алгоритм берілген. 1. Берілген $1:1000$ масштабмен $A4$ пішімінде Ox, Oy осьтерін тағайындап, A, B, C, D нүктелерін сызбаға түсіреміз, $\delta(BCD)$ жазықтығының үшбұрышын саламыз.

2. Осы үшбұрышпен жұмыс жасап, δ -ның h горизонталін, көлбеулік масштабын δ_i , интервалын l_δ анықтаймыз. Ол үшін алдымен BD -ны бөліктеп, δ -ның алғашқы h^{30} горизонталін құрамыз (21-, 23-алгоритм). Одан кейін $\delta_i \perp h^{30}$, l_δ анықталады.

3. Енді A -дан δ -ға қарай перпендикуляр n түзуін жүргізу керек: $A \in n \perp \delta$.

3.1. $n \updownarrow \delta_i$. 3.2. n -ның интервалын кері шамаларды анықтайтын үшбұрыштан аламыз: $l_\delta = 1/l_n$ (29-алгоритм).

4. Енді n түзуін l_n интервалымен бөліктеп, осы түзудің δ -мен қиылысу N нүктесін табамыз (26-, 28-алгоритм): $A \in n \cap \delta = N$!

4.1. Сызбада n түзуімен қиылысатын b түзуін қалауымызша алып, қосымша β ($n \cap b$) жазықтығын құрамыз.

4.2. Ендігі анықталған EF түзуі δ -мен қосымша β ($n \cap b$)-ның қиылысу сызығы: $\beta(n \cap b) \cap \delta = EF$.

4.3. *Ізделінген* нүкте: $EF \cap n = N!$ 4.4. N нүктесінің белгішесі $61m$ болды.

5. Соңғы қадам – $|AN|$ -ның нақты шамасын анықтау (19-, 20-алгоритм). Ол үшін $A^{110}N^{61}$ -ның бойына тікбұрышты үшбұрышты салу керек. Оның $\bar{AN}$ гипотенузасы *ізделінген* шама $72m$. Сызбада міндетті түрде кестеден нұсқаға сай үзінді және $|AN|$ -ның нақты шамасы берілуі керек.

2.2-есепке сұрақтар. 1. Есептің шарты бойынша не берілген?

2. Ең қысқа ұнғыма нелердің арасында анықталуы керек?

3. Ең қысқа ұнғыманың орналасуы сызбада қалай табылды?

4. BCD -ға перпендикуляр түзуді көрсетіңіз.

5. Перпендикулярдың интервалы қалай анықталды?

6. Сызбада өзара кері шамалар бар ма?

7. Сызбада β жазықтығы қалай берілген, ол не үшін керек?

8. Сызбада β мен δ -ның қиылысу сызығы бар ма?

9. EF -ке тиісті N нүктесінің қысқа ұнғымаға қандай қатысы бар?

10. Ең қысқа ұнғыманың нақты шамасы қалай анықталды?

11. Егер A нүктесінің координаталары өзгерсе, ұнғыманың бағыты не орналасуы, интервалы және нақты шамасы өзгере ме?

12. Егер δ -ның орналасуы өзгерсе, ұнғыманың қандай параметрлері (11-сұрақ) өзгереді?

2.3-есепке түсініктеме. Берілгені $A(75,110,85)$, $B(120,20,30)$, $C(20,50,55)$ нүктелерімен кеңістікте қиылысқан AB және BC түзулері. Осы түзулердің арасындағы бұрыштың нақты шамасын анықтау керек: $\alpha^0 = \angle ABC$ (нұсқасы 2.2-кестеде, үлгісі 2.3-суретте, $A4$ пішім, $M1:1000$).

Шешуі. Бұл есептің тақырыбы айналдыру әдісіне байланысты, ол 11.3-тармақтың 32-, 33-, 34-алгоритмдердің негізінде шешуін табады.

1. Берілген 1:1000 масштабымен А4 пішімінде Ox , Oy осьтерін тағайындап, A , B , C нүктелерін, AB және AC түзулерін бастырып, сызбаға түсіреміз.

2. Сызбада σ (ABC) жазықтығының алғашқы h^{55} горизонталін C нүктесінен жүргізіп (21-, 23-алгоритм), қажет болса басқаларын оған параллель аламыз.

3. Бұл есеп горизонталь осьтен *айналдыру әдісімен* шығарылады. Табылған h^{55} горизонталі *айналдыру осі* болсын: $C^{55} \in h^{55} = Ox$, осьтің деңгейі де 55 м. AB түзуі осьпен E нүктесінде қиылысады: $E = AB \cap h^{55}$. Сызбамызда екі тұрақты, оске тиісті нүкте табылды: $E, C \in h^{55}$, $z_E = z_C = 55$!

4. Ендігі мақсатымыз осьтен ABC жазықтығын айналдырып, оны горизонталь 55 м деңгейге келтіру. Ол үшін A нүктесін осьтен айналдырып, оның жаңа $\bar{A}^{55}$ проекциясын анықтау жеткілікті (34-алгоритм, қараңыз). Нәтижесінде $E^{55}\bar{A}^{55}C^{55}$ – горизонталь орналасқан бұрыш пайда болды.

5. *Ізделінген бұрыш*: $\alpha^0 = \angle AB, \wedge AC = \bar{A}^{55}E^{55}\wedge \bar{A}^{55}C^{55}$. Бұрыштың нақты шамасы $\alpha^0 = 62^0$.

6. Енді бастапқы ABC және соңғы $E\bar{A}C$ проекциялардың арасында пайда болған *сәйкестікке* назар аударайық. Ол *тектес сәйкестік* $A\bar{A}$ сәйкестік *бағытымен*, h^{55} -қос нүктелі *сәйкестік осімен* анықталды: $E^{55}=\bar{E}^{55}$, $C^{55}=\bar{C}^{55}$. Оның арқасында $B^{30} \sim \bar{B}^{55}$ нүктесі табылды: $\bar{A}A \parallel B\bar{B}$. Айта кету керек $|\bar{A}\bar{B}|$, $|\bar{A}\bar{C}|$ – сызбада нақты шамалар. Сәйкестіктің арқасында $\sigma^{55}(E\bar{A}C)$ жазықтығында берілген қайсыбір қисық не түзу сызыққа сәйкес сызықты σ (ABC)-дан табуға болады, керісінше де солай болады.

Х мырзаның ұсынысы: жұмысты қорғауға дайын болу үшін σ -ға тиісті шеңберге *сәйкес* сызық эллипс болады ма, $\bar{\sigma}^{55}$ -ға тиісті шеңберге *сәйкес* сызық эллипс болады ма? Осыны тексеріңіз. Тексеремін дегендерге көмек: алдымен шеңбердің центрін тағайындап, оған сәйкес нүктені табыңыз. Одан кейін шеңбердің 5–8 нүкелеріне сәйкес нүктелерді табыңыз. Сол нүктелерді біртіндеп қосып, сәйкес сызықтың түріне назар аударыңыз (4,5-тарауды шолып көріңіз).

Пішімде міндетті түрде кестеден алынған шарттар және жауаптар берілуі керек.

2.3-есепке сұрақтар. 1. Есептің шарты бойынша не берілді және не анықталады?

2. Екі түзудің арасындағы бұрыш қандай әдіспен анықталады?

3. Сызбада айналдыру осі қалай тұрғызылды?

4. Сызбада қай сызық тұрақты?

5. Сызбада қайсы нүкте айналдырылған, оның айналу центрі, радиусы қалай анықталды?

6. Бұрыш жазықтығы қандай горизонталь деңгейге келтірілді?

7. Егер айналу осінің орнын өзгертсе, мысалы ол h^{30} болса, бұрыштың нақты шамасы өзгере ме?

8. Егер берілген ABC бұрыштың бір нүктесі орнын өзгертсе, ізделінген бұрыштың нақты шамасы қандай жағдайға өзгереді, қандай жағдайда өзгеріссіз қалады? Мысалы. C нүктесі AC түзуінің бойымен жылжыса, не болмаса C нүктесі түзуге тиісті емес болса.

9. C, E төбелерінің бұрыштарының нақты шамасын анықтаңыз.

10. Сызбада айналдырудан қандай, метрмен, градуспен өлшенетін, нақты шамалар пайда болды?

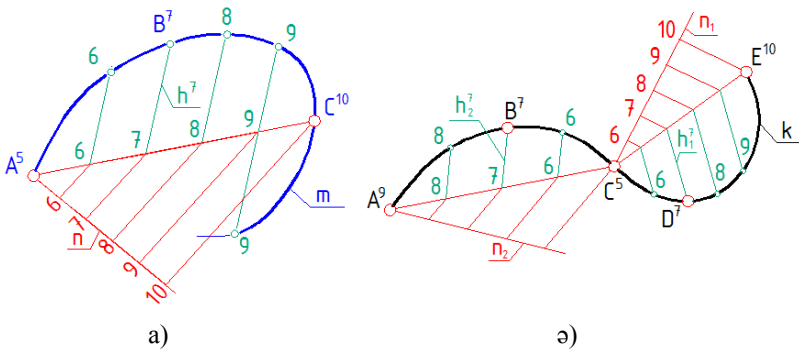
11. Бастапқы және соңғы үшбұрыштардың арасында сәйкес нүктелер мен түзулерді табыңыз.

Ескерту. Геология және тау-кен мамандықтары үшін 2.1-есепі міндетті түрде орындалады, 2.2, 2.3-есептердің біреуі орындалса жеткілікті. Тек 2.1-есепті орындағандар 50–74 % (қорғауда) алады.

12. ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТАР МЕН БЕТТЕРДІҢ СБП-дағы СЫЗБАСЫ. АЙНАЛУ ЖӘНЕ КӨЛБЕУЛІГІ ТЕҢ БЕТТЕР ТОПОГРАФИЯЛЫҚ БЕТТЕР

Қисық сызықтар мен беттердің қайсыбір кең тараған түрлерімен 6-тарауда қысқаша түрде таныс болдық, олар жалпы геометрия мен техникадан сауатты болуға мүмкіншілік береді, көбінесе машинажасауда қолданылады. Танысуымыз бекер емес. Енді қисық сызықтар мен беттер туралы СБП-ға сәйкес жаңа мағлұматтар алып, білімімізді кеңейтіп, толықтырайық.

Қисық сызықтарды нүктелер жиыны, қисық беттерді сызықтар не қарапайым беттердің жиыны деп қарастыруға болады. Ал жиынның түрі қандай дегенде, оны заңдылықты - математикалық өрнектермен ұсынуға болатын немесе керісінше заңдылыққа сай емес, математикалық өрнектеуге келмейтін (ол деңгейіміз жетіспегеннен де болуы мүмкін) деп екіге бөлуге болады. Сызба қалай болса да, қисық сызық пен қисық бет туралы, олардың түрлеріне сәйкес анықтамалар беретін құжат екенін бәріміз білуіміз керек және сызба бет пен сызықты *бір мәнді анықтайтынын* естен шығармауымыз керек.



95-сурет

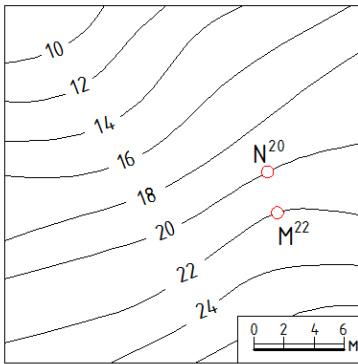
12.1. Қисық сызықтар

Қисық сызық жазық және кеңістіктік болатыны белгілі. Кез келген *жазық* сызық сызбада (СБП-да) өзінің *m* проекциясымен

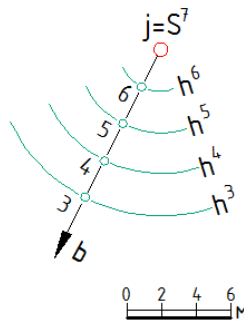
және ең кемінде үш нүктесімен (ABC) толық анықталады (95, а-сурет). Бұл сызықты қарапайым әдіспен – жазықтық горизонтальдары арқылы бөліктеуге болады. Суретте AC хордасы бөліктеліп, соның арқасында m-ның аралық белгішелері 6,8,9-ға тең нүктелер анықталған. *Кеңістік* сызықтың проекциясында нүктелер жеткілікті түрде белгішелерімен берілу керек. 95, ә-суретінде k сызығы A, B, C, D, E нүктелерімен берілген. Бұл сызықтың аралық нүктелерінің белгішелері жуықтатылған түрде хордаларды бөліктеумен анықталады және олар 3 нүктені, яғни бір жазықтықты қамтитын болу керек. Мысалы, сызықтың CDE бөлігінің 6,8,9 белгішелері CE хордасы көмегімен алынған. Сызықтың келесі бөлігі ABC болады, онымен де айтылғандай жұмыс жасап, қалған бөлігін бөліктеп шықса болады. *Ескерту*. Бұл сызбаларда пропорционал бөліктеу әдісі қолданылған.

12.2. Айналу және жалпы түрдегі конус пен цилиндр

Заңдылықты сызықтар мен беттерге, мысалы, эллипс, парабола, конус, сфералар, т.б. жатады. Керісінше, сызбада заңдылыққа сай емес сызықтар мен беттерді нүктелер мен сызықтардың көмегімен графикалық түрде беруге болады. Мысалы, жер бетінің бедерлерін заңдылықпен – математикалық түрде өрнектеп көрсету қиын болғандықтан, оны *топографиялық* беттермен (96, а-сурет) алмастырып, сызбада белгішелері қойылған 10,12,14, ...*горизонтальдар жиынтығымен* кескіндейді. Заңдылықты беттің мысалы ретінде *айналу конусын* алайық.



a)

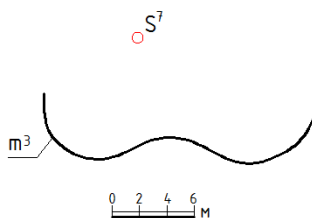


б)

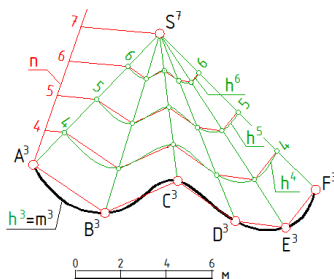
96-сурет

Конустың сызбасында *төбесі* S , оның бөліктелген *жасаушысы* b және айналу *осінің* орналасуы анық болу керек (96, ә-сурет). Егер оның осі *жүертикаль* болса (проекциясы нүкте), оның горизонтальдарын $h^6, h^5, h^4 \dots$ – *шеңберлер* жиынын нақты шамамен сызбаға түсіруге болады. Егер айналу конусының осі *көлбеу* болса, оның горизонтальдары эллипс, парабола не гиперболаларға айналады (6-тарауды қараңыз!). Бұл сызбаларда конусқа қатысты *позициялық есептерді* де шығаруға болады. Алдағы уақытта соны шешетін боламыз. Жалпы жағдайда жер бедерінің төмпешіктерін не *қож* (қоқыс) *үйінділерін* (шлаковый отвал) *конустың жалпы түрімен* кескіндеуге (модельдеуге) болады. Осындай конустың жаңа түрімен танысайық.

1-есеп. Планда 97, а-суретінде ω -конустың жалпы түрі минималды сызбасымен берілген, сол конустың сызбасы 97, ә-суретінде горизонтальдарымен толықтырылған. Суретте ω -конустың төбесі S^7 және бағыттаушысы m^3 -горизонталь сызығымен берілген. Көз алдарыңызға елестетіңіздер: конустың жасаушылары S^7 нүктесінен және бағыттаушы m^3 сызығының барлық нүктелерінен өтіп шығатын болса, соның нәтижесінде конус бетінің жалпы түрі пайда болады.

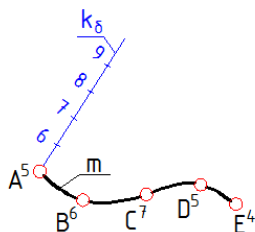


а)

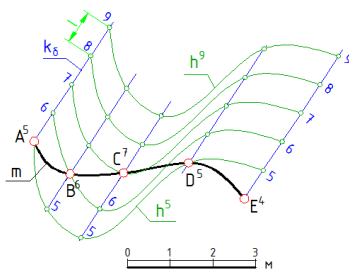


ә)

97-сурет



а)



ә)

98-сурет

Х мырза: 42-сұрақ. Сызбада бұл беттің горизонтальдарын қалай құруға болады?

Жауап. 37-алгоритм. 1. Оларды құру үшін m^3 -тің бойынан қажетті нүктелерді алу керек: шеткі А, F, төбесінен ең алыс B^3 , E^3 , төбесіне ең жақын C^3 және аралық D^3 ,... нүктелерін.

2. Енді S^7A^3 , S^7B^3 , S^7C^3 , ... конус жасаушыларын тең 4-ке бөліп ($7 - 3 = 4$), аралық 6, 5, 4 белгішелерін табамыз. Байқасаңыздар, S^7A^3 бөліктеліп, одан кейінгі жасаушылар АВ, ВС,... хордаларға сәйкес параллель етіп бөліктелген.

3. Табылған деңгейлері тең нүктелерден бірқалыпты етіп жалпы түрдегі конустың h^6_ω , h^5_ω , h^4_ω горизонтальдары жүргізілді.

Х мырза: 43-сұрақ. Осы беттің белгішелері басқа горизонтальдары, мысалы h^0 қалай анықталады? Жауап. 37-алгоритм бойынша әр жасаушының бойынан 0 белгішесін

тауып, оларды сызықпен біртіндеп қосып, беттің h^0_ω горизонталін табуға болады. Есептің шешуі осы.

Х мырзаның ескертуі. Егер де конустың бағыттаушысы горизонталь болмаса, онда есепті шешу жолдары қиындайды, себебі (мысалы 98, а-суреттегі m -ды қараңыз!) әр жасаушы өзінше бөліктелінетін болады. Өзіндік жұмыс жасап, 2-есепте конустың бағыттаушысы 98, ә-суреттегі m болсын, жасаушысы 97, а-дан алынады, осының горизонтальдарын анықтаңыз.

3-есеп. Цилиндрдің де айналу және жалпы түрін алуға болады. Айналу цилиндрінің осі вертикаль болса, оның барлық горизонтальдары берілген шеңбермен беттеседі. Осы цилиндрдың осі *көлбеу* болса, оның горизонталдары *эллипс* болуы мүмкін, ол өзінше күрделі есепке айналады (6,7-тараулардан қараңыз.). Ескерту. Егерде цилиндрдың *нормаль* қимасы эллипс болса, оны *эллипстік* цилиндр деп атайды. Цилиндрдің жалпы түрімен қайсыбір кен шоғырларын модельдеуге болады, енді осымен қысқаша түрде танысайық.

98, а-суретінде δ -жалпы түрдегі цилиндрдің минималды сызбасы, оның жасаушысы k_δ -бөліктелген түзу, $m(A,B,C,D,E)$ – бағыттаушысы қисық сызықпен берілген. Оның (цилиндрдің) сызбасы 98, ә-суретінде горизонтальдармен толықтырылған.

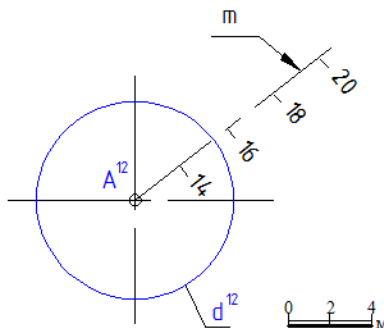
Х мырза: 44-сұрақ. Берілген цилиндрдің горизонтальдары қалай анықталады? Жауап. 38-алгоритм. Бұл есептің шешуі 1-есепке, 37-алгоритмге ұқсас болады. 1. Суретте көрсетілгендей, бағыттаушының A,B,C,D,E нүктелерінен беттің жасаушылары k_δ -ға параллель етіп жүргізіледі.

2. Сол жасаушыларды оның *интервалы* l -мен бөліктеп, белгішелерін қойып, шығу керек.

3. Жасаушылардың деңгейлері тең барлық нүктелерінен бірқалыпты етіп қисық сызықтар – беттің $h^9 - h^5$ горизонтальдары жүргізіледі. Мысалы, A^5 нүктесінен беттің h^5 горизонталі жүргізілген. Алгоритмнің кадамдары осындай.

Х мырзаның ескертуі. Егер де сызбада *эллипстік* цилиндр берілген болса, оның қималарының ішінде *шеңбер* де кездеседі. Егер цилиндрдің осі *көлбеу* және оның горизонталі планда *шеңбер* болса, онда бұл беттің горизонтальдары да *шеңберлер* жиыны болады. Оның бір мысалы 98, б-суретінде берілген.

Сызбада оның осі және шеңбер – жасаушысы (горизонталі) болуы керек.



98, б-сурет

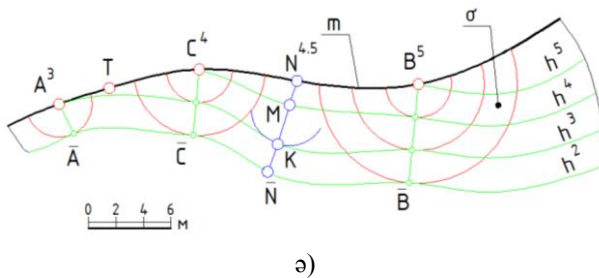
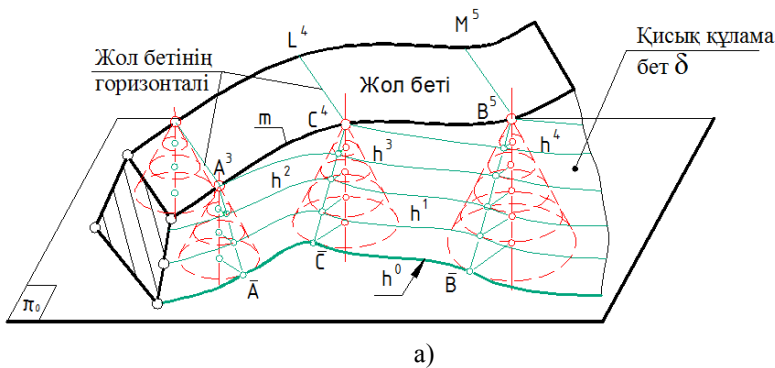
Х мырзаның сұрағы. Осындай эллипстік цилиндрдің Монж эпюрі берілсе, оның шеңбер қимасын қалай табуға болады? Жауап. Центрі цилиндр осінде және онымен қиылысатын, диаметрі эллипстің үлкен осіне тең сфераны жүргізіп, екеуіне ортақ екі шеңбер – қима пайда болады [2].

Х мырзаның кеңесі: Сызба геометрия мен инженерлік графикадан қызықтыратын есептердің біразын [12, 13] кездестіресіз.

12.3. Көлбеулігі тең сызықтық беттер

Тау-кен, геология, құрылыс салаларында *сырғытқысы бірдей*, немесе *көлбеулігі тең сызықтық беттер* кеңінен қолданылады. Мысалы қоршаған беттен жоғары не төмен орналасқан темір, тас жолдарын алайық. Оларды екі жақтан шектейтін құлама (қиябеттер) беттер не жазық, не қисық болуы мүмкін. Мұндағы жазық қиябеттер жолдың түзу бөлігіне сай. Жолдарды қолдану шартына сәйкес сол беттер міндетті түрде *сызықтық* және *көлбеулігі тең* беттер болуы керек. Сол беттердің көлбеулігі олардың *материалдарына сәйкес* алынады. Көлбеулігі тең дегеніміз сол беттердің жасаушы сызықтарының бір жазықтыққа көлбеулігі бірдей болуын талап етеді, жолдар жағдайында жасаушылардың көлбеулігі горизонталь

жазықтыққа бірдей етіп алынады. Көлбеулігі тең беттердің ең қарапайым түрі айналу конусы. Егер осы конустың төбесі бағыттаушы сызық бойымен жылжып, айналу осі горизонталь жазықтыққа үнемі перпендикуляр болып қала берсе, онда сол конустарды *орама жанап өтетін (орайжанауыш)* сызықтық беттің жасаушыларының *көлбеулігі тең* және ол *көлбеулік* конустың көлбеулігіне тең болыпшығады. Осындай беттің бір мысалы ҚазҰТЗУ-дың бас ғимараты алдында тұрған академик Қ. И. Сәтбаевтің ескерткішінен көруге болады. Оның тұғырының астындағы іргетасын шектеуші беттер – көлбеулігі тең сызықтық беттер. Нәтиже: көлбеулігі тең беттер сызбада бағыттаушы сызығымен және көлбеулігі берілген жасаушысымен бірмәнді анықталады. Бұл беттің бағыттаушысы *түзу* болса, *жазық* қиябет пайда болады.



99-сурет

4-есеп. Көлбеулігі тең δ бетінің көрнекі кескіні 99, а-суретінде, ал оның планы 99, ә-суретінде берілген. Көрнекі кескінде δ беті π^0 , ал планда ол π^2 жазықтығына орнатылған. Сызықтық беттің жасаушысының көлбеулігі $i = 1:2$ тең болсын, яғни жасаушы конустың да көлбеулігі $1:2$ тең, m оның бағыттаушы сызығы. Осы беттің горизонтальдарын анықтау әдісімен танысамыз. Шешу. Алдымен көрнекі кескінді талдап көрейік. А нүктесінің белгішесі 3-ке тең, сондықтан жасаушы конустың горизонтальдары h^2_A , h^1_A , h^0_A төменге қарай жүргізілген. Сол сияқты С нүктесінің деңгейі 4-ке тең, одан төменге қарай конустың 3-горизонталі h^3_C , h^2_C , h^1_C , h^0_C жүргізілген. В нүктесімен де осындай жұмыс жасалған. Енді δ бетінің горизонтальдарын жүргізуге мүмкіндік алдық. Қолданайық. Шынында да А нүктесінен h^3_δ – беттің горизонталі өтеді және ол h^3_C -, h^3_B -ларды жанап шығады. Сол сияқты h^2_δ бет горизонталі h^2_A -, h^2_C -, h^2_B -ларды жанап шығады. Қалған горизонтальдар осыған ұқсас құрылады.

Ескерту. 21*_(12.3) есебі. 99, а, ә-суретінде жолдың арғы жағының құлама беті сызбада көрсетілмесе де, оны құруға мүмкіншілік бар. Ол үшін жол бетінің горизонтальдары жүргізіліп, төбесі К, L, М нүктелерінен өтетін оларға сәйкес жасаушы конустар қондырылады. 99, а-суретте жасаушы конус К – нүктесінен жүргізілген. Одан кейін сызбада жоғарыда айтылғандай арғы жағының құлама беттің горизонтальдары жүргізіледі. Осыны жүзеге асырып көріңіздер. СОЗЖ – қатысты сызбада жолдың екі жақ қиябетін салу керек (99, ә-сурет). Егер жол топография бетіне қондырылған болса, сол қиябеттердің сырғытқыларын жүргізіп, позициялық есептерді шығару керек.

Енді план сызбасымен танысып, оны талдаймыз.

39-алгоритм. Жасаушы конустың төбесі бағыттаушы m сызығымен жылжиды және оның жасаушысының көлбеулігі $1:2$ болады (99, ә-сурет).

1. Ең алдымен конус жасаушысының l_k интервалын анықтаймыз. Ол үшін басқа жерге тік бұрышты үшбұрышын салмаса болады, себебі көлбеулікке сәйкес ол $l_k = 2m$ болады (8.1-тармақта, 18-алгоритмді қараңыз).

2. А, В, . . . нүктелерін центр етіп, интервалдың көмегімен конус горизонтальдары – шеңберлер жүргізіледі. Мысалы, A^3 нүктесін центр етіп, радиусы l_k интервалға тең болатын шеңбер жүргізілді, ол жасаушы конустың h^2_A горизонталі болады. Бұл горизонталь план жазықтығы π^2 -ге тиісті, сондықтан А нүктесіне сәйкес конустың басқа горизонтальдары қажетсіз. Осыған ұқсас етіп C^4 нүктесінен екі горизонталь h^3_C, h^2_C жүргізілген. Жоғарғы h^3_C -ның радиусы l_k -ға, төменгі h^2_C -ның радиусы $2 l_k$ -ға тең болады. B^5 -тен сәйкесінше h^4_B, h^3_B, h^2_B шеңберлері жүргізілген.

Х мырза: 45-сұрақ. Бұл h^4_B, h^3_B, h^2_B горизонтальдардың радиустары сәйкесінше $l_k, 2l_k, 3l_k$ бола ма? Жауап. Ия, дәл солай.

3. Тең деңгейлі шеңберлерді жанап өтетін сызықтар көлбеулігі тең δ бетінің $h^2_\delta, h^3_\delta, h^4_\delta, \dots$ горизонтальдары болады.

4. Сызбада осы горизонталдардың жиынымен *орайжанауыш* беті – көлбеулігі тең сызықтық беті беріледі.

Х мырза: 46-сұрақ. Белгішесі басқа горизонталь қалай салынады? Жауап. Оның белгішесі мысалы – 1м болсын, онда А-ға сәйкес радиусы $(3 - (-1)) l_k$ -ға тең h^1_A -, С-ға сәйкес радиусы $(4 - (-1)) l_k$ -ға тең h^1_C -, В-ға сәйкес радиусы $(5 - (-1)) l_k$ -ға тең h^1_B конустың жасаушы шеңберлері – горизонтальдары жүргізіледі. Ол осы шеңберлерді жанап өтетін сызықтық беттің h^1_δ -, көрінбейтін горизонталі болады. Әдістің қадамдары осындай.

Х мырза: 47-сұрақ. Сызбада А, В, С нүктелеріне тиісті беттің $A^3\bar{A}, B^5\bar{B}, C^4\bar{C}$ жасаушылары берілген. Олар конус және орайжанауыш сызықтық беттің ортақ жасаушылары болады. Осы сызықтық беттің кез келген жасаушысын қалай құруға болады? Жауап. Жазықтықтың сырғытқы сызығы оның горизонталіне перпендикуляр болатынын білеміз, сол сияқты (99, а-сурет) осы беттердің де сырғытқы-жасаушылары олардың горизонтальдарына перпендикуляр: $A^3\bar{A} \perp h^2_\delta, h^1_\delta, h^0_\delta, C^4\bar{C} \perp h^3_\delta, h^2_\delta, h^1_\delta, h^0_\delta, \dots$ болу керек. Планда осының дәлелін тексереміз. Сырғытқы-жасаушылар (99, ә-сурет) горизонтальдардың жанасу нүктелерінен оларға перпендикуляр өтеді: $A^3\bar{A} \perp h^2_\delta, C^4\bar{C} \perp h^3_\delta, h^2_\delta, \dots$ Енді сырғытқыны кез келген нүктеден қалай жүргізуге болады, соған тоқталайық. Мысалы, бетке тиісті М нүктесі берілсін. Алдымен М-нен өтетін *сырғытқы*-жасаушыны анықтаймыз, содан кейін бастапқы N нүктесінің *белгішесін*.

40-алгоритм. 1. Центрі М нүктесі болатын h^3_δ -мен К нүктесінде жанасатын шеңбер жүргізілді. МК сызығы $N\bar{N}$ сырғытқының бағытын анықтайды. 2. N нүктесі 4- және 5-ін арасында, оның белгішесі жуықтап алғанда 4,5 м болады. 3. М-ның белгішесі 4м. Х мырзаның ұсынысы: 99, ә-суретте берілген Т нүктесінен δ -ға тиісті сырғытқыны жүргізіп, оның құлау бұрышын анықтыңыз. Бұл $21.1^{*}_{(12,3)}$ СОЗЖ есебі болсын. Бұл түзудің көлбеулігі $A\bar{A}$ -, $B\bar{B}$ -, ... $N\bar{N}$ – ның көлбеулігімен бірдей ме?

12.4. Топографиялық беттер. Жер бөлікшесінің модельдері

Жер бетінің жеке бөлігін бір теңдеумен анықтап, оның түрі мен жасалуын заңдылықпен өрнектеу мүмкін емес екендігі айтылған. Сондықтан оны жуықтатылған түрде, тәжірибе талаптарына сай, дәлдігін жеткілікті етіп *топографиялық беттермен* модельдейді. Топографиялық бетті горизонтальдар жиынтығы деп сипаттаса да болады. Олар нақтылы ауданның жер бедерінің ерекшеліктерін жеткілікті түрде бейнелейді: ойпат не қырат екендігін, сонымен қатар оның әр нүктесіне сәйкес көлбеулігін білуге болады. *Топография* – грекше «топос» орын, жер, «графия» – жазу, яғни жерді бейнелеу деген сөз. 96, а-суретте соның бір түрі берілген. Осы бетті шамалап *оқып* көрейік. Бұл беттің *қима биіктігі* горизонтальдар белгішелерінің айырымына сай 2м-ге тең. Бет оңнан солға қарай еніс орналасқан. Жер бөлікшесінің ауданы жуықтап алғанда 20х20м болады.

Топографиялық беттің сызбасына сәйкес анықтамалар және қойылатын шарттар бар. Олар:

- горизонтальдар бір арақашықтықта алынады, ол арақашықтықты беттің *қима биіктігі* деп атайды;
- көршілес орналасқан горизонтальдардың ең қысқа арақашықтығын *беттің жатысы* деп атайды, жатысына қарап беттің осы аймақтағы көлбеулігін анықтайды. Сызбада мысалы оны екі M,N нүктелері білдіреді. (96, а-сурет).

1. *Ақырлылық (шексіздік)* шарты – беттің кез келген нүктесінің белгішесі шексіз алыста болмауы, белгілі биіктікте

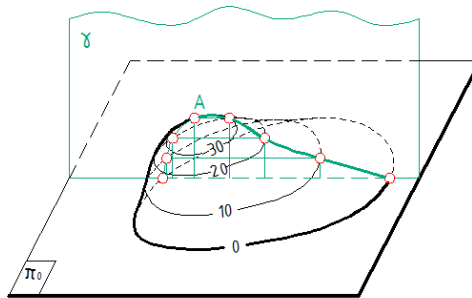
болуы керек. Бұл белгіше өте алыс қашықта және өте кішкене болмау керек.

2. *Бірмәнділік* шарты – кез келген қос x, y координаталар үшін беттің бір ғана нүктесі z координатасымен сәйкес болады, яғни беттің *әр нүктесінің бір проекциясы* болады.

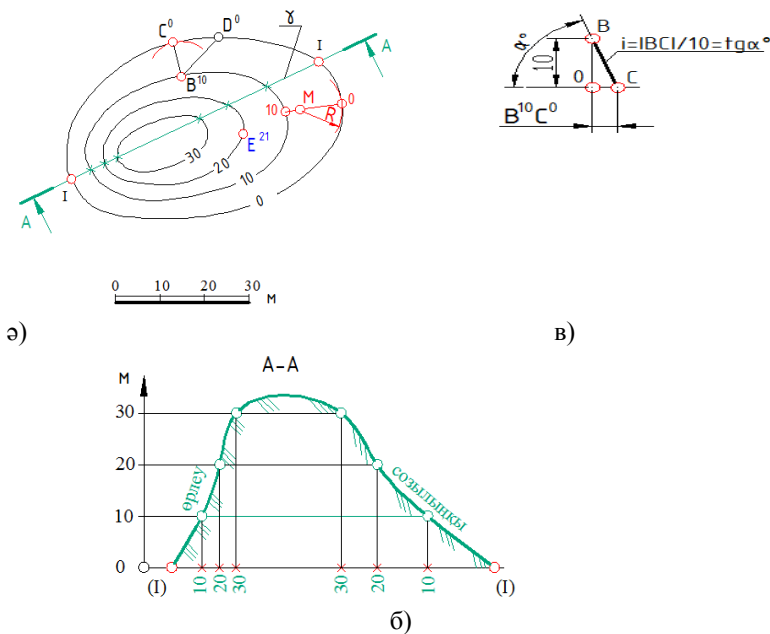
3. *Бірқалыптылық* шарты – беттің барлық горизонтальдары мен қималары *бірқалыпты* сызықтар болуы керек, олар өзара қиылыспай, тоғысу, түйісу, үзілу, тармақталу нүктелерінсіз болуы керек.

4. Картада әртүрлі салуларды жасағанда екі горизонтальдың белгішелер айырымы бірге тең болса, онда екі горизонталь нүктелерін қосатын түзу *кесіндісі* топографиялық бетке *тиісті* болып саналады.

Жалпы айтқанда, топографиялық беттен тәжірибе жүзінде оның бедеріне қатысты жеткілікті түрде барлық мәліметтерді алуға болады. Енді осының бәрін сызбадан көріп, біліп, түсініп алайық.



a)



100-сурет

100, а,б,в-суреттерінде σ топографиялық бетінің аксонометриясы, планы, *профили* берілген. Аксонометриядан түсінетініміз – бұл қырат беті, биіктігі 30 м дейін, бетті *вертикаль* γ жазықтығы қиып, оның қимасын – профилін құрады. Барлық сызықтар бірқалыпты. Аксонометрияда қиманың А нүктесінен кейінгі сол жағы көрінбейді. Беттің қима биіктігі 10 м тең.

Х мырза: 48-сұрақ. B^{10} нүктесіне қатысты аймақтық *бет жатысы* – *бет көлбеулігі* қалай анықталады?

Жауап. 41-алгоритм. 1. Бұл нүктеге көршілес 0 – горизонтальдың ең жақын C^0 нүктесін табуымыз керек (100, а-сурет). Ол үшін В нүктесін центр етіп алып, 0 – горизонтальмен жанасатын шеңбер жүргізіледі.

2. Шеңбердің жанасу нүктесі қажетті C^0 нүктесін белгілейміз.

3. Көлбеуліктің шамасы жеке орында 0-В-С тікбұрышты үшбұрыш (100, в-сурет) арқылы табылады: $|0 - C| = |B C|$, $|0 - B| = 10$ м масштаб бойынша. Осы үшбұрыштың ВС гипотенузасының көлбеулігі беттің *ізделінген* B^{10} нүктесі *аймағының көлбеулігі* болады: $i = |BC|/10 = \operatorname{tg} \alpha^0$.

Қосымша мәлімет: үшбұрыштың $|BC|$ гипотенузасы сызбадағы кесінді $B^{10}C^0$ -дың *нақты шамасы*. Естеріңізде болсын: 0 горизонталінің С нүктесінен басқа нүктелері $|BC|$ -ға қарағанда В нүктесінен алыс орналасады! Сондықтан осы аймақта ВС-ны *көлбеулігі ең үлкен* сызық деп те айтады! Мысалға оны BD-мен *салыстырып* көріңіз: $i_{BC} > i_{BD}$!

Х мырза: 49-сұрақ. Беттің қимасын – *профилін* қалай сызбада құруға болады? Жауап. 42-алгоритм.1. Сызбада қиюшы γ жазықтықтығының ізін, А – А-ны, және оның бет горизонтальдарымен қиылысу нүктелерін «*» таңбалап аламыз. Қиманың бастапқы және соңғы нөл деңгейлік нүктелерін I – I етіп белгілейміз.

2. Профильді жеке орында горизонталь түзудің бойына саламыз, бұл түзуді *профильдің табаны* десе болады. I – I түзуін «*» – таңбаларымен бірге оған көшіреміз.

3. Профильдің сол не оң жағынан вертикаль түзудің бойына 30м-ды масштабпен саламыз.

4. Аралық 10, 20, 30 ... нүктелердің белгішелерін «*» – таңбалардың астына бұрып қояды (100, б-сурет), сонда ол сандардың ұзындыққа қатысы жоқ екені түсінікті болады.

5. Ендігі біздің мақсатымыз: аралық нүктелерді өз деңгейіне сай 10, 20, 30м-лерге көтереміз.

6. Алынған нүктелерді 0-ден бастап бірқалыпты қосамыз. Сызбада қиманы шектеуші *топографиялық беттің профилі* пайда болды. Беттің сол жағы өрлей отырып, көтеріңкі, оң жағы еңкіш (жатық), созылыңқы екендігін қимадан анықтаймыз.

7. Профиль сызығының астынан тіліктің орның білдіретін сызғыштау (штрихтау) сызықтары жүргізілуі керек. Олар үш-үштен, көлбеулігі 45^0 , жіңішке сызықпен, ұзындығы 3–4 мм етіп (стандартқа сәйкес) салынады. Сызбада сызғыштау көлбеулігі 60^0 -қа жуық алынған, себебі қиманың созылыңқы бөлігі 45^0 жуық. Профильді құру жолы осындай.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

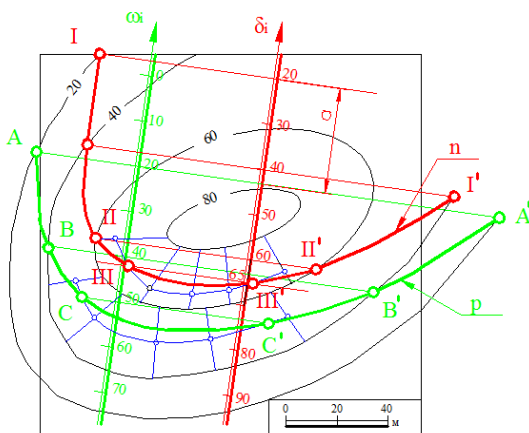
1. Жазық және кеңістіктік қисық сызықтардың аралық нүктелерінің белгішелері қалай анықталады?
2. Жазық қисық сызықтар ең кемінде неше нүктемен анықталады?
3. Заңдылықты жазық сызықтардың мысалын келтіріңіз.
4. Айналу конус пен цилиндрдің горизонтальдары қандай жағдайда шеңбер болады?
5. Айналу конусының (96, ә-суретінде) h^8 , h^0 горизонтальдарын сызыңыз.
6. Жалпы жағдайдағы конус пен цилиндр минималды сызбасы немен анықталады және толықтырылады?
7. 97, ә-суретінде конустың h^8 , h^2 горизонтальдарын сызыңыз.
8. 98, ә-суретінде цилиндрдің h^9 , h^3 горизонтальдарын сызыңыз.
9. Горизонтальдарды салудың 37-, 38-алгоритмдерін айтып шығыңыз (конус пен цилиндр үшін).
10. Көлбеулігі тең беттердің ең қарапайым түрін білсеңіз, атаңыз.
11. Айналу конусының көмегімен көлбеулігі тең беттерді қалай құруға болады?
12. Эллипстік цилиндрдың горизонтальдарын құрыңыз (98, б-сурет).
13. Көлбеулігі тең беттердің негізгі қасиеті қандай және олар тәжірибеде қандай жағдайда қолданылады?
14. Көлбеулігі тең беттердің горизонтальдары қалай анықталады?
15. 99, ә-суреттегі беттің 0-деңгейлік горизонталін салыңыз.
16. Көлбеулігі тең беттің жасаушы-сырғытқысы қалай бағытталады?
17. Көлбеулігі тең беттің (99, ә-суретте) сырғытқысын Т нүктесінен жүргізіңіз.
18. Көлбеулігі тең бетке қатысты 39-, 40-алгоритмдерін айтып шығыңыз.

19. 99, ә-суреттегі Т,N нүктелерінің белгішелерін анықтаңыз.
20. Топографиялық беттер қандай жағдайда қолданылады?
21. Топографиялық беттердің сызбасына қандай талаптар қойылады?
22. Топографиялық беттердің қима биіктігі нені білдіреді?
23. Топографиялық беттердің вертикаль қимасы – профилі қалай анықталады?
24. Топографиялық беттерге қатысты 41-,42-алгоритмдерін айтып шығыңыз.

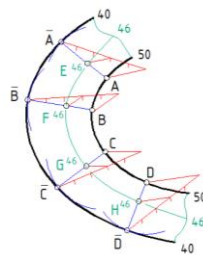
13. ТОПОГРАФИЯЛЫҚ ЖӘНЕ БАСҚА БЕТТЕРГЕ ҚАТЫСТЫ ПОЗИЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Біз тағы да позициялық есептермен жаңа деңгейде кездесіп отырып, олардың жаңа қырларымен танысамыз. Бұл жерде есептер тиістілік және қиылысуға байланысты болып келеді.

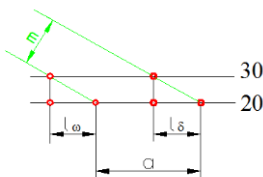
13.1 Тиістілік есептері. 1-есеп. Тиістілік есебінің шешуі бұрынғыдай оңай: егер нүкте бетке тиісті болса, ол міндетті түрде беттің горизонталіне тиісті болуы керек (10.1-тармақты, 1-мыс. қараңыз), бұл шарт беттің түріне тәуелді емес! Өзіндік жұмыс жасап, 99, ә-,100, ә-суреттерінде берілген беттерге тиісті М, N нүктелерінің белгішелерін анықтаңыз, Е-нің тиістілігін тексеріңіз. М нүктесі үшін белгішесін дәлірек анықтау амалы көрсетілген (100, ә-сурет).



а)



ә)



б)

101-сурет

13.2. Қиылысу есептері. Қаттың жер бетіне шығу сызығы

2-есеп. 101, а-суретінде σ -топографиялық беті және ω жазықтығы берілген, осылардың қиылысу сызығын анықтау керек: $\sigma \cap \omega = m$? Шешу. 43-алгоритм. Талдау. Беттің және жазықтықтың горизонтальдары берілген, сондықтан 10.3-тармақтағы 25-алгоритмді (қараңыз!) қолданамыз. Егер де σ мен ω -ның белгішелері тең горизонтальдары сызбада бар болса, онда олар берілген план көлемінде қиылысуы мүмкін.

1. Берілген σ қырат бетінің және ω жазықтығының 20-горизонтальдары екі нүктеде қиылысады: $h^{20}_{\sigma} \cap h^{20}_{\omega} = A, A'$. Мұнда A' нүктесі h^{20}_{σ} -ның жалғасында орналасқан, ол қиылысу p сызығының $A'B'$ бөлігінің бағытын анықтау үшін қажет.

2. Осыған ұқсас 40-горизонтальдардың қиылысу нүктелерін табамыз: $h^{40}_{\sigma} \cap h^{40}_{\omega} = B, B'$.

3. 60-горизонтальдар қиылыспайды екен, сондықтан жазықтықтың 50-горизонталін алып, беттің жуыктатылған түрдегі аралық 50-сін құрамыз: 40-, 60-екі горизонтальдың арасын екіге бөлетін бірнеше нүктені алып, оларды біртіндеп қосып, h^{50}_{σ} -ды табамыз. Осы және h^{50}_{ω} -ның қиылысу нүктелері: $h^{50}_{\sigma} \cap h^{50}_{\omega} = C, C'$. Ескерту. Аралық горизонтальды дәлірек құру әдісімен алда танысамыз.

4. Анықталған A, B, C, C', B', A' нүктелерін біртіндеп қосып, қажетті қиылысу сызығын табамыз: $\sigma \cap \omega = p(A, B, C, C', B', A')$.

Ескерту. Қиылысу p сызығының CC' бөлігі міндетті түрде екі қиылысқан горизонтальдың арасынан өтуі керек. Қажет болған жағдайда екі жақтың қосымша 45-ші горизонтальдарының қиылысуын не жанасуын табу керек. Оның нәтижесі – сызықтың дәлдігі! Есептің шешуі осы.

9-тараудың кіріспесінде айтылғандай (қараңыз!) көлемді пайдалы қазбалардың қаттары шартты түрде екі параллель жазықтықпен шектелген болып алынады. Олай болса жоғарыдағы 2-есепте анықталған $\sigma \cap \omega = p$ сызығын геологияда қаттың жер бетіне шығу сызығы деп айтады. Бұл сызық қаттың табанына тиісті болсын. Олай болса қат жабынын модельдейтін δ жазықтығын сызбаға енгізіп, оның да жер бетіне

шығу сызығын $\delta \cap \sigma = n$ және қат қалыңдығын m -ды ($\omega \parallel \delta$ -ның арақашықтығын!) анықтау мәселесі алға шығады, керек болады. Бұл мәселені біз 11.4-тармақта, 9-есепте кездестіргенбіз (қараңыз!), енді 13.2.2-тармақтың 4-есепінде жаңа әдіспен танысамыз.

13.2.1. Аралық горизонтальдарды анықтау

Х мырза: 50-сұрақ. Беттің аралық горизонталін қалай құруға болады? Жауабы 3-есепте, 101, ә-суретте. *Талдау*. Жоғарыда 43-алгоритмде 50-горизонталь көз мөлшерімен, жуықтатылған түрде салынған, себебі ол көршілес екі горизонтальдың ортасынан өтті. Жалпы жағдайда аралық горизонталь көршілес горизонтальдардың арасын қатынаспен бөлуі мүмкін. Осындай жағдайдағы есепті шығарамыз.

3-есеп. Беттің 40, 50-горизонтальдары берілген болсын (101, ә-сурет). Осы сызбада 46-горизонтальды, яғни ол 50- және 40-горизонтальдар арасын 2:3 қатынаспен бөлетін анықтау керек болсын.

44-алгоритм. 1. 50-горизонталь бойынан бірнеше нүкте аламыз: A, B, C, D.

2. Осы нүктелерге 40 –горизонтальдың ең жақын нүктелерін анықтаймыз: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$. Ол үшін A-ны центр етіп, h^{40} -пен $\bar{A}$ нүктесінде жанасатын шеңбер жүргізіледі.

3. $A\bar{A}$ кесіндісін 2:3 қатынасымен (яғни 4:6) бөліп, 46-горизонтальдың алғашқы E^{46} нүктесін табамыз. Осы әдіспен қалған F^{46} , G^{46} , H^{46} нүктелер анықталады.

4. Табылған EFGH нүктелерін біртіндеп косып, *ізделінген* 46-горизонтальды жүргіземіз.

13.2.2. Қаттың жер бетіне шығу сызықтары және қат қалыңдығы

4-есеп. 101, а-суретте σ -топографиялық бет және қат табаны ω берілген. Осы сызбаны қат жабыны δ -мен толықтырамыз, $\delta \parallel \omega$. Сызбада δ -ның жер бетіне шығу n сызығын және m -қат қалыңдығын анықтау керек болсын. Шешу.

1. Алдымен 43-алгоритмді қолданып, қат жабынының жер бетіне шығу $\delta \cap \sigma = n$ сызығын құрамыз. Мұнда алгоритмнің 3-адымында жер бетінің және қат жабынының аралық 65-горизонтальдарының қиылысу III, III' нүктелері табылған. Осы нүктелерден өтетін n сызығының бөлігі 65-горизонталь-дардың арасынан өтеді. Енді 45-алгоритмді құрамыз. 11.4-тармақтағы 9-есептің шешу жолдарын қолданып (қараңыз!), 101, б-суретінде қаттың m қалыңдығын анықтаймыз, бұл сызба δ мен ω -ның шағын көлденең қимасы болып табылады.

2. Масштабқа сәйкес аралығы 10м-ге тең етіп, белгішелері 30-, 20-тең болсын, екі горизонталь түзуді жүргіземіз.

3.101, а-суретінен екі жазықтықтың, мысалы 20-горизонтальдарының a арақашықтығын өлшеп, оны 101, б-суретіндегі 20- (не 30-шы) горизонтальға саламыз.

4. Енді осы жазықтықтардың $l_\sigma = l_\omega$ тең интервалын a кесіндісінің шектеуші нүктелерінің *сол жағына* (не оң жағына) салып, пайда болған нүктелерді 30-горизонтальға дейін көтереміз. Байқасаңыздар, бұл екі нүкте 30-горизонтальдың бойынан a кесіндісін оқшаулайды.

5. Осының нәтижесінде суретте δ мен ω -ның шағын көлденең қималары δ мен $\bar{\omega}$ анықталады.

6. Осылардың m арақашықтығы ізделінген *қат қалыңдығы*. Оның мәнін масштабпен өлшеп анықтауға болады. *Ескерту*. 101, а-суретінде a кесіндісінің сол жағында жазықтықтың 30-горизонталі өтеді, сондықтан $l_\sigma = l_\omega$ интервалын 4-қадамда 101, б-да a -ның сол жағына орналастырады, керісінше болса, ол есеп шартына сай болмайды.

13.3. Беттің түзумен қиылысу нүктелері

5-есеп. 102, а-суретте PQ түзуі және топографиялық бет φ берілген, осылардың қиылысу нүктелерін анықтау керек: $\varphi \cap PQ = E, F$? Шешу. *46-алгоритм. Талдау*. Бұл есепте алдымен жоғарыдағы 42-алгоритмді (қараңыз!) қолданып, беттің PQ түзуінен өтетін *көмекиі вертикаль* β жазықтығымен қиылысу k сызығын (профилін) табу керек (102, ә-сурет). Осы k сызығының PQ түзуімен қиылысу нүктелері *ізделінген* E, F нүктелері болады.

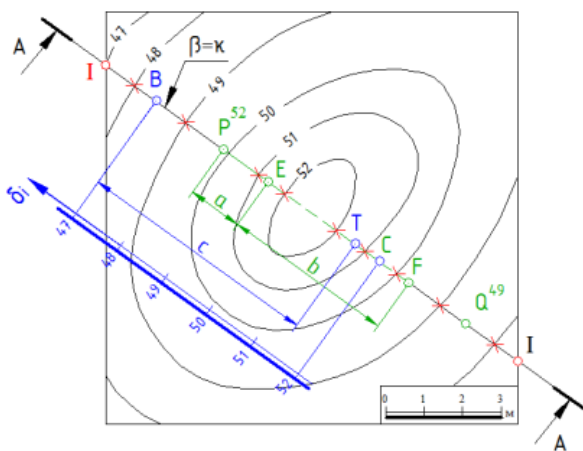
1.1. Көмекші жазықтық β : $PQ \subset \beta \perp \pi^0$.

1.2. $\varphi \cap \beta = k$ – бұл қиылысу сызығы планда β -мен беттеседі. Сондықтан оны алгоритмнен белгілі болғандай, профильде жеке орында құрамыз. Алдымен профильдің табаны – горизонтальға қажетті нүктелерді көшіреміз.

2. Осы профильге PQ түзуін де түсіреміз, себебі бұл түзу β -ға тиісті.

3. Ендігі біздің мақсатымыз анықталған k сызығының берілген PQ түзуімен қиылысу E, F нүктелерін анықтау. Бұлар профильде анық, мен мұндалаған, *ізделінген* нүктелер болып тұр: $k \cap PQ = E, F = \varphi \cap PQ$.

4. Енді осы E, F нүктелерін бастапқы 102, а-суретіне көшіру үшін 102, ә-суретінде профиль табанында көрсетілген a, b өлшемдердің бастапқы сызбадағы β -ға көшіреміз. Есептің шешуі осы.



a)

Х мырзының 52-сұрағы. Профильде Т нүктесі – жабынның жер бетіне шығу нүктесі және оның белгішесі 51,4м анықталды. Осы нүкте бастапқы сызбаға қалай көшіріледі? Жауап. 1. Ол үшін оның профиль табанында орналасу *c* кесіндісін қолданамыз. 2. Сызбаның дәлдігі жеткілікті түрде болса, онда 102, а-суретіндеде Т-ның белгішесі 51,4м болуы керек. Басқаша болса сызбаның дұрыстығын, дәлдігін тексеріп, сызбаны жөндеу керек. Сызбаның дәлдігін тексеріп отырыңыз!

13.4. Беттің қисық сызықпен қиылысуы

Х мырза: 53-сұрақ. Топографиялық беттің қисық сызықпен қиылысу нүктелерін анықтауда 47-алгоритмді қолдануға бола ма? Жауап. Бұл есептер ұқсас, айырмашылығын ескеріп, оны қолдануға болады. Айырмашылығы: түзудің үстінен *проекциялаушы жазықтық* жүргізілсе, қисық сызықтың бойымен *проекциялаушы цилиндр* жүргізіледі. Бұның салдарынан қисық сызық профиль сызбасында *түзуленіп* профиль табанына (горизонтаь түзуіне) қондырылады. Өз кезегінде топографиялық беттің де профилі *нақты түрге сай емес, «хордаланып»* түседі. Осының бәрі ескеріліп, 47-алгоритмді қолдануға болады.

7-есеп. Сызбада (103, а-сурет) қисық сызық *m* және топографиялық бет σ берілсін. Осылардың қиылысу нүктелерін анықтау керек: $\sigma \cap m = M, N, P, \dots$? Шешу. 48-алгоритм.

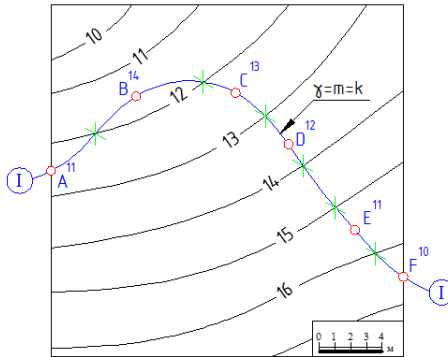
1. Берілген қисық *m* сызықтың үстінен проекциялаушы цилиндр γ жүргізілді: $\gamma = m, \gamma \perp \pi^g$. Бұл цилиндр өз кезегінде топографиялық бетпен *k* сызығы арқылы қиылысады: $\sigma \cap \gamma = k$.

2. Профиль табанын 11м деңгейінде етіп аламыз (103, ә-сурет), оның бойына қисық сызықтың А,В,С,... нүктелерін *түзулетіп* (хордалар арқылы) түсіреміз де, олардың белгішелерін жақшаларға қоямыз.

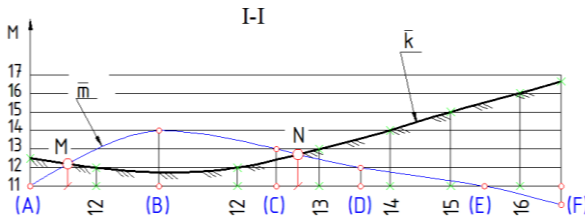
3. Осы нүктелерді өз деңгейлеріне көтеріп, оларды біртіндеп қисық сызықпен қосамыз: бұл профильге түсірілген $\bar{m}$ сызығы, *m*-ға сәйкес.

4. Ендігі мақсатымыз осы профильге топографиялық беттің сызығын түсіру. Ол үшін γ -цилиндр мен σ -беттің

горизонтальдарының қиылысу нүктелерін «*» - мен таңбалап, оларды профиль табанына түсіреміз (хордалап).



а)



ә)

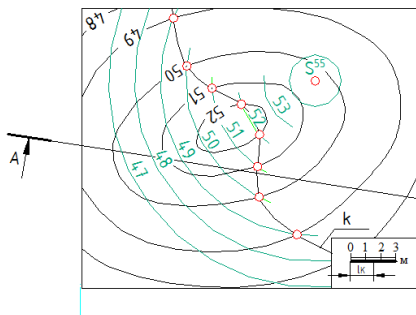
103-сурет

5. Таңбаланған нүктелерді өз деңгейлеріне көтеріп, оларды біртіндеп қисық $\bar{k}$ сызығымен қосамыз. Бұл топографиялық беттің «созылыққы» профилі.

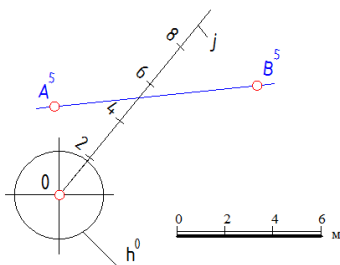
6. Соңғы қадамымыз: беттің «созылыққы» $\bar{k}$ профилі мен «түзулетілген» $\bar{m}$ сызығының қиылысу M, N нүктелерін анықтау. Бұл ізделінген нүктелер.

7. Ақырғы жұмыс: анықталған нүктелерді бастапқы сызбаға көшіру (47-алгоритмді қараңыз!).

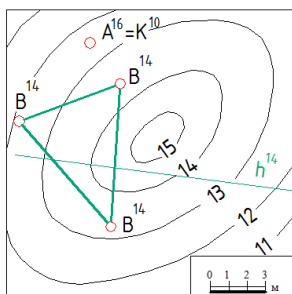
Х мырзаның кеңесі: оларды профиль табанынан мысалы А нүктесінен өлшеп, m сызығына хордалап көшіріңіз.



104-сурет



105-сурет



106-сурет

13.5. Беттердің өзара қиылысуы

Алдыңғы есептердің алгоритмдерін түсінген болсаңыз, келесі есептерді түсіну қиын болмайды, себебі мұнда тең деңгейлі горизонтальдардың қиылысу нүктелері анықталады (25-, 43-алгоритмдерді қараңыз!).

8-есеп (104-сурет). Панда топографиялық бет σ және айналу конус беті β (қож не кендер үйіндісі делік) берілген. Конус – айналу беті, төбесі S^{55} , осі j вертикаль ораласқан, жасаушысының интервалы 1,5 м болсын: $\beta(S^{55}, j \perp \pi_0, l_k = 1,5\text{м})$. Осылардың қиылысу сызығын анықтау керек: $\sigma \cap \beta = k$? Шешу. Бұл есеп тәжірибе жүзінде қож не басқа үйінділердің орнын алдын ала есептеуде қолданылады. 43'-алгоритм.

1. Сызбаға горизонтальдарды – шеңберлер жиыны $h_K^{53} - h_K^{48}$ центрі S^{55} болатын конусты түсіреміз.

2. h_k^{53} , h_k^{54} алғашқы горизонтальдар топографиялық бетпен қиылыспады. Қалғандары қиылысты, қиылысу нүктелерді біртіндеп қосып, сызбада $\alpha \cap \beta = k$ ізделінген сызықты құрамыз. Есептің шешуі осы.

Қорытынды. Бұл тарауда біз әртүрлі позициялық есептермен таныстық, олардың негізгі әдісі бір: қосымша проекциялаушы жазықтық не цилиндрді қолдану және олардың горизонтальдарының берілген беттердің горизонтальдарымен қиылысуын анықтау. Профильдерді, аралық горизонтальдарды құруды, қат қалыңдығын, оның көлбеулігін анықтауды үйрендік. Осының бәрі сіздің жинаған байлығыңыз! Осының негізінде келесі мәселелерді шешеміз. Алға! Іске сәт!

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Беттерге қатысты позициялық есептерде не анықталады?
2. Тиістілік есептің мысалын сызбада келтіріңіз, 99, ә, 100, ә-суреттердегі M,N,E нүктелерімен жұмыс жасаңыз.

3. Қат жабыны мен табаны өзара қалай орналасады?

4. Жер бетіне шығу сызығы деп қандай сызықты атайды?

5. 101, а-суретін қолданып, 43-алгоритмді айтып шығыңыз.

6. 44-алгоритмді қолданып, 101, ә-суретте 1:4 қатынаспен бөлетін аралық горизонтальды құрыңыз.

7. Қабат қалыңдығын 45-алгоритмді қолданып анықтау, 101, б-суретті түсіндіріңіз.

8. 46-алгоритмді қолданып, 102, ә-суретті түсіндіріңіз.

9. 104-суретте көрсетілген беттердің А – А профилін құрыңыз.

10. 105-суретте көлбеу цилиндрінің A^5B^5 түзуімен қиылысу нүктелерін анықтаңыз. Сызбада цилиндрдің бөліктелген көлбеу осі j берілген, табаны h^0 - шеңбер. Ұсыныс: цилиндрдің горизонтальдар қанқасын құрыңыздар.

11. Электр желісінің сымы АВ болсын (105-сурет). Оның қай бөлігі құбырдың ішінде болады, оның ұзындығы қандай?

12. Цилиндрдің минималды сызбасы (105-сурет) неден құралған?

13. Цилиндрдің минималды сызбасында (105-сурет) құбырдың шектеу сызығын (нұсқасын) құрыңыз.

14. 106-суретте АВ вертикаль түзуінің топографиялық бетпен қиылысу С нүктесін анықтаңыз. АВ-ның жер үсті бөлігінің ұзындығы қанша?

15. 106-суретте h^{14} түзуінің топографиялық бетпен қиылысу нүктелерін анықтаңыз. Бұл түзудің қай кесіндісі тоннельді модельдеуге лайық? Оның ұзындығы қанша метр болады?

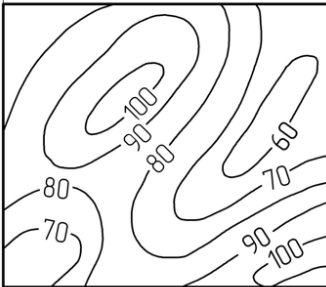
16. 106-суретте α ($K^{14}M^{14}N^{14}$) жазықтығының топографиялық бетпен қиылысу сызығын анықтаңыз.

3-қорытынды жұмыс 14-тарауда ұсынылады (берілгені 3-кестесінен нұсқаға сәйкес алынады). Ол геология, тау-кен саласының мамандарына арналған. 16-тарауда берілген **4-тапсырма жұмысын** құрылыс, жер өңдеу, су ресурстарды пайдалану саласының мамандары орындайды (Оқу бағдарламасына сай).

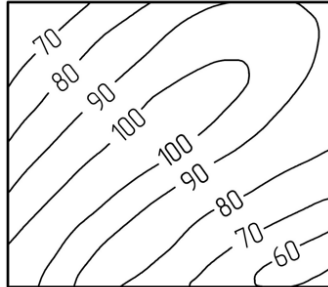
3-қорытынды тапсырмалар: 3.1. «Топографиялық план», 3.2. «Блок –диаграмма», екі А3 пішінде орындалады.

Топографиялық план

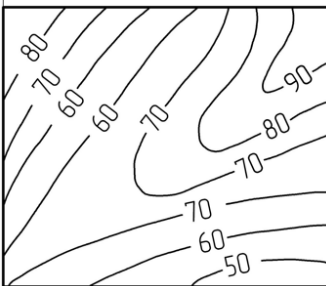
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
1	A	95	80	10
	B	115	40	90
	C	170	105	55
	D	115	40	80



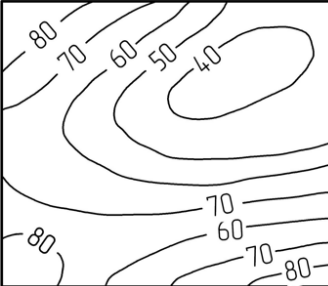
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
2	A	100	80	20
	B	135	40	110
	C	190	90	40
	D	190	90	25



Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
3	A	135	120	60
	B	45	60	80
	C	190	40	50
	D	135	120	30



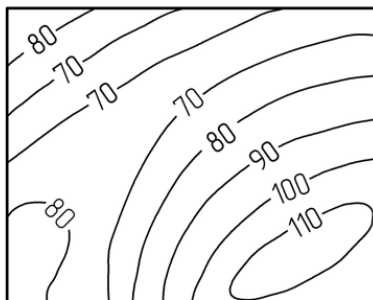
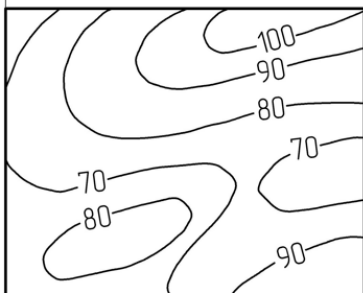
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
4	A	95	80	10
	B	115	40	90
	C	170	105	55
	D	115	40	80



3-кестенің жалғасы

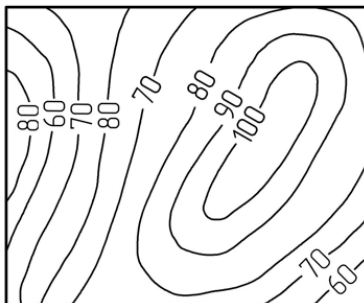
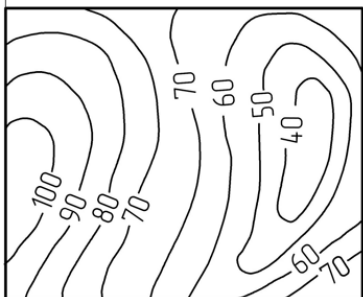
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
5	A	125	190	40
	B	170	70	60
	C	65	0	90
	D	170	70	45

Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
6	A	135	150	20
	B	180	60	30
	C	30	115	80
	D	135	150	0



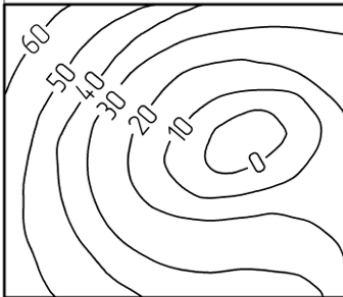
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
7	A	120	30	20
	B	70	90	45
	C	20	60	30
	D	70	90	35

Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
8	A	20	10	25
	B	60	55	5
	C	95	50	65
	D	95	50	55

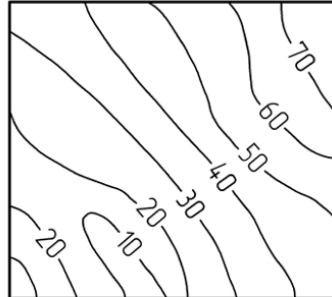


3-кестенің жалғасы

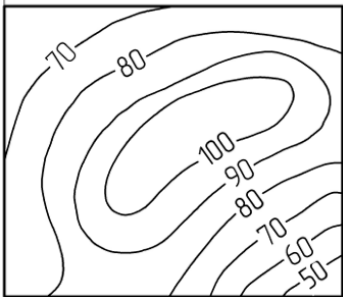
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
9	A	190	70	50
	B	50	170	10
	C	80	0	30
	D	80	0	0



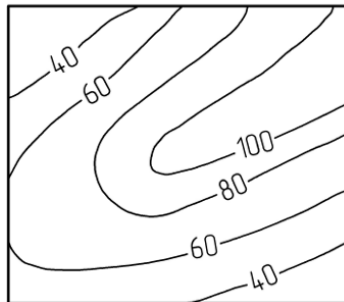
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
10	A	100	40	50
	B	60	100	30
	C	10	10	40
	D	60	100	0



Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
11	A	170	170	10
	B	90	75	80
	C	65	150	50
	D	90	75	40

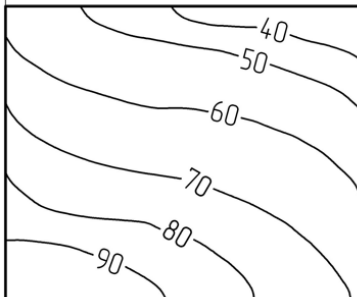


Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
12	A	180	110	20
	B	100	50	60
	C	60	175	10
	D	100	50	20

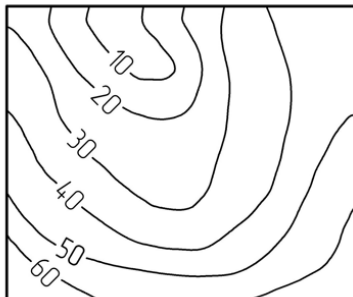


3-кестенің жалғасы

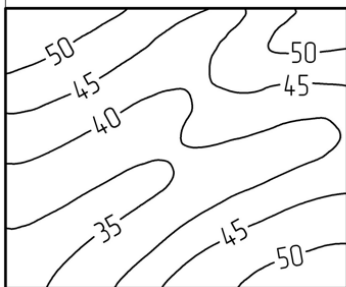
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
13	A	160	10	20
	B	135	175	70
	C	80	50	40
	D	80	50	0



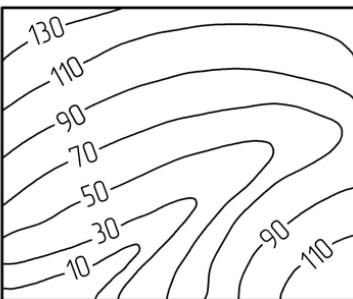
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
14	A	180	0	20
	B	135	140	40
	C	80	30	10
	D	135	140	0



Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
15	A	170	45	30
	B	80	100	35
	C	170	165	15
	D	170	45	-10

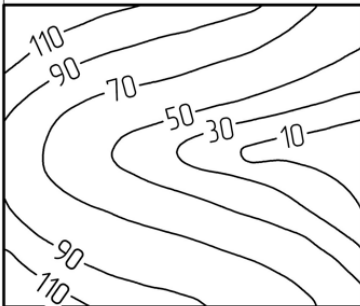


Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
16	A	145	10	20
	B	90	100	0
	C	25	10	90
	D	25	10	50

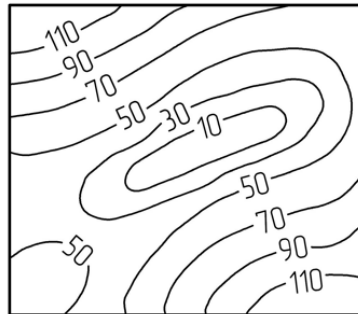


3-кестенің жалғасы

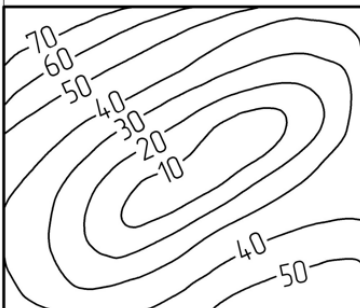
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
17	A	45	20	10
	B	100	0	90
	C	165	90	30
	D	100	0	50



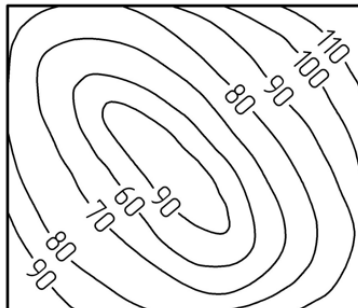
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
18	A	100	135	10
	B	125	0	60
	C	180	60	-10
	D	125	0	10



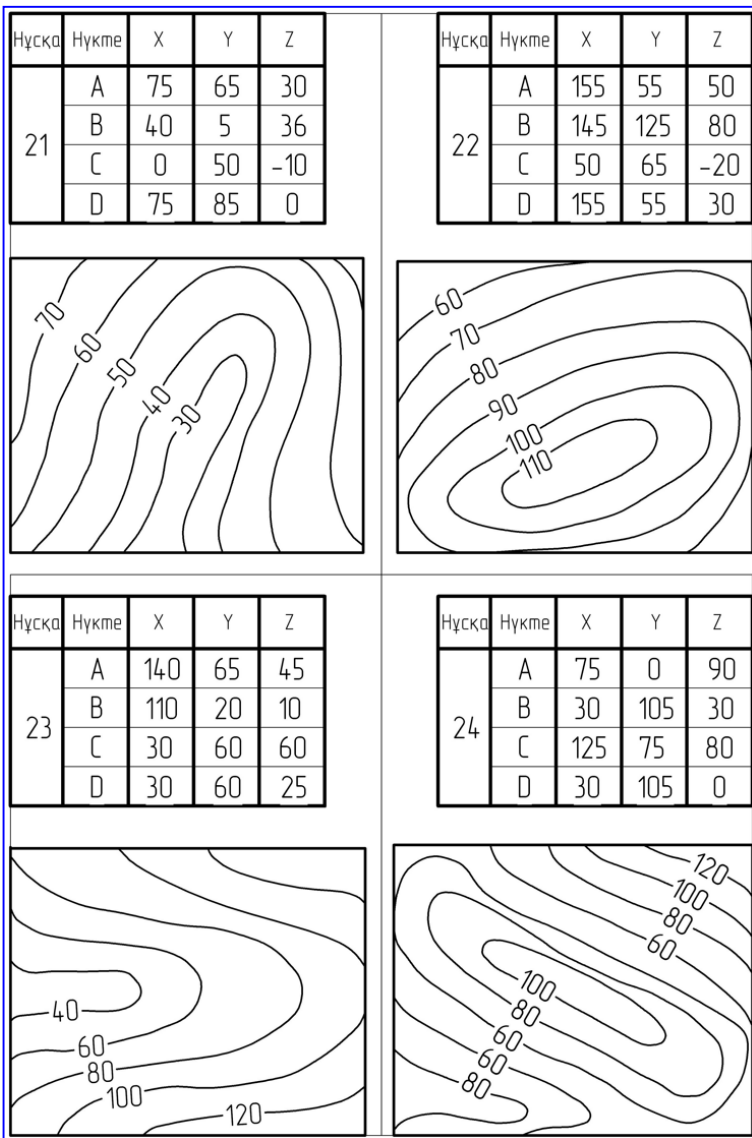
Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
19	A	20	10	-10
	B	45	100	-25
	C	100	30	30
	D	100	30	0

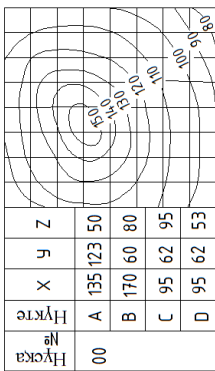


Нұсқа	Нүкте	X	Y	Z
20	A	25	120	0
	B	75	0	50
	C	180	80	70
	D	75	0	15



3-кестенің жалғасы

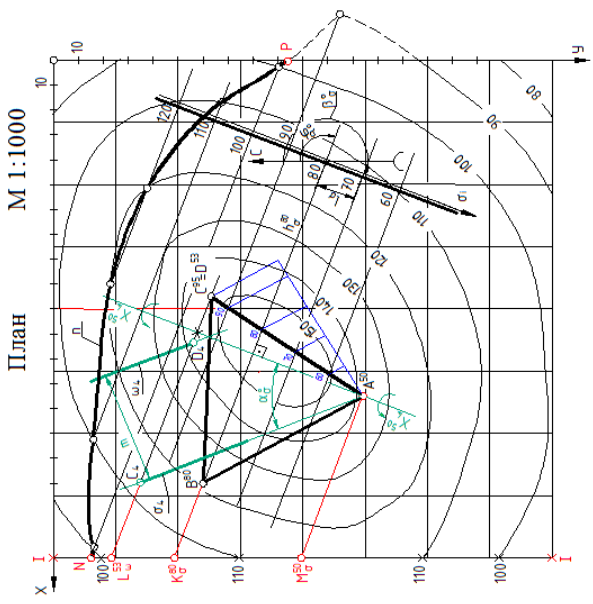




а)

$$\sigma(\alpha = , \alpha_0^0 = , \varphi_0^0 = , \beta_0^0 = , i_0 = , m=3) \text{ км}$$

Негізгі жазу



ә)

107-сурет

14. ТОПОГРАФИЯЛЫҚ ПЛАНДЫ, ОНЫҢ БЛОК-ДИАГРАММАСЫН ҚҰРУ

(Осы тақырыптағы 3.1, 3.2-тапсырмаларды орындау әдістемесі). Бұл тапсырма геология, тау-кен саласына байланысты соңғы *қорытынды* жұмыс болып табылады. Ол екі А3 пішімде орындалады. Мұнда жинаған барлық білімдерді тәжірибе жүзінде қолдана білу талап етіледі. Бұл тапсырмада берілген графикалық-нұсқа сызбадан қажетті сызбаға, үлгіде берілгенге көше білу керек.

Топографиялық план – жер телімінің (участок), топографиялық беттің геометриялық және пайдалы қазба-қат туралы мағлұматымен берілетін кескін (3 – кесте). Пайдалы қазбалар қабат-қабат та болып шөгуі мүмкін, мысалы, көмірдің кені болса, ол қат-қабаттарымен орналасады. Өздеріңе осы қаттың жабыны мен табаны (табанасты) жазықтықпен модельденіп берілетіндігі туралы жоғарыда айтылған. Әзірше, оқу барысында, біз жыныстарға қатысты нақты шарттарды қолданбаймыз. Жоғарыда айтып өткендей, пайдалы қазбаны жазықтықтармен шектелген деп аламыз, яғни пайдалы қазбаның жоғарғы қаты мен табан асты қаты параллель жазықтықтар болады.

3.1-тапсырма «Топографиялық планы» орындауға керекті мағлұматты әрбір студент өзінің нұсқасына сәйкес 3-кестеден алады (107, а-сурет). Тапсырма А3 пішімде, 1:1000 масштабымен орындалады, оның үлгісі 107, ә-суретте (оның ішінде 107, а-суретті қараңыз!).

Берілгені: топографиялық бет, оның горизонталдары 90 м-ден 150 м-ге дейін барады. Пайдалы қазба А, В, С, D нүктелерінен өтетін 4 вертикаль ұңғымамен анықталған. Пайдалы қаттың *жабыны* σ (ABC) – жазықтық деп берілген, пайдалы қаттың *табаны* D нүктесінен өтеді және ол σ (ABC)-ға параллель: $D \subset \omega \parallel \sigma$.

Тапсырмада шығарылатын есептер:

1. Қаттың жабыны σ (ABC)-ның барлық жатыс элементтерін анықтау (9-тарау, 21-, 22-, 23-алгоритмдерді қараңыз!).

2. σ (ABC) жазықтығымен топографиялық беттің қиылысу сызығын анықтау, $\sigma \cap$ (топ. бет φ) = n ? Оны 13.2-тармақтан, 43-алгоритмнен табасыз.

3. Қат табанының ω топографиялық бетпен қиылысу сызығын салу, $\omega \cap$ (топ. бет φ) = k ? Бұл да 43-алгоритммен шешуін табады.

4. Қаттың m қалыңдығын анықтау, ол қаттың жоғарғы және төменгі жазықтықтарының арақашықтығы болып табылады. Бұл 13.2.2-тармақта, 45-алгоритмде және 11.4-тармағының 35'алгоритмінде айтылған.

5. Осыдан кейін топографиялық ланның профилі – вертикаль тілігі салынады, оқытушы оның орналасуын 1, 2, 3, 4-есептер шығарылғаннан кейін сызбада белгілеп береді. Профиль салуды 12.4-тармақтан, 41-, 42-алгоритмдерден көріңіз.

14.1. Пішімде топографиялық бетті салу

Берілген топографиялық бетті *үлкейтіп*, 200x200 мм шаршы түрінде А3 пішімнің сол жағына орналастыру керек, осы жерге 107, а-суреттегі горизонтальдарды көшіреміз. Бұл топографиялық беттің кескініне (107, ә-сурет), бастапқы 107, а-суреттегі горизонтальдарды көшіру үшін, осы екі суретке мысалы, ұзынына, биігіне 8 торды теңдей етіп, жіңішке сызықпен сызамыз. Тор қаншама жиі болса, горизонталь сызықтарын көшіру дәлдігі соншама жоғары болады, бірақ оның машақаты көп, сондықтан осы 8 тор сызық жеткілікті деп аламыз.

Енді бастапқы суреттегі горизонтальдардың тормен қиылысу нүктелерін белгілеп алып, оны 107, ә-суретке біртіндеп көшіреміз. Осы нүктелерді бірқалыпты сызықпен қосып горизонтальдардың 90 м-ден 150 м-ге дейінгі белгішелерін қойып, топографиялық беттің 1:1000 масштабымен салынған кескінің шығарамыз. Енді 107, ә-суретінде, А, В, С, D нүктелерін олардың координаталарының көмегімен көрсетеміз, соның нәтижесінде пайдалы қазбаның жоғарғы және төменгі қаттың кескіні шығады. Есептің берілісі осымен бітті. Енді осы есептерді орындау тәртібіне кірісеміз.

1-есеп. σ (ABC) жазықтығының жатыс элементтерін анықтау. Бұл есеп алгоритмде берілгендей шығарылады. Пішімнің ашық оң жағына осы элементтердің шамасын метрде, градууста жазып көрсету керек.

2-есеп. Қаттың жоғарғы бетінің топографиялық бетпен қиылысу сызығын, қаттың *жер бетіне шығу* сызығы деп білеміз. Бұл есеп алгоритмге сәйкес шығарылады. Нәтижесінде, планда **n** сызығы анықталуы керек.

3-есеп. Бұл есеп 2-есеп сияқты, тек қат табаны ω жазықтығы үшін шығарылады, **k** сызығы анықталады.

4-есеп. Пайдалы қазбаның, қат қалыңдығын анықтау. Бұл есепті де алгоритм бойынша шығарамыз. Осының нәтижесінде планда қалыңдық **m**-ның шамасы метрмен анықталуы керек. Ізделінген қалыңдық σ және ω параллель жазықтықтардың арақашықтығы болады, перпендикулярмен өлшенеді.

5-есеп. Вертикаль тілік– профильді салу оның алгоритміне сәйкес орындалады. Айырмашылығы сол, сәйкес қат жабыны мен табанының тілік жазықтығымен қиылысу $\bar{\sigma} \parallel \bar{\omega}$ сызықтары көрсетілуі керек. Бұл есеп 108-суретте көрсетілген.

Х мырза алгоритмді естеріңе түсіруді жөн көріп, профиль жазықтығы ретінде планның сол жақ шектеуші бетін алды.

Х мырзаның ұсынған *49-алгоритмі*: 1. Горизонталь сызыққа, профильдің табанына (108-сурет) жер бөлікшесінің сол жақ шектеуші профиль жазықтығымен қиылысқан 100, 110, 120, 120, 110, 100 горизонтальдарының нүктелері өлшеніп көшіріледі (олар «+» деп белгіленген).

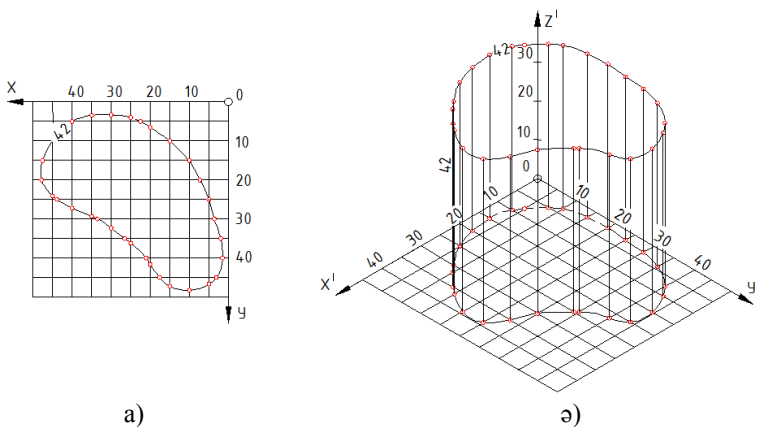
2. Горизонтальдардың осы нүктелеріне сәйкес биіктіктері салынады. Осы нүктелерді бірқалыпты сызықпен қосып, топографиялық беттің сол жақ *шектеуші профилін* аламыз. Айта кету керек, мұнда горизонталь сызықты 0 деңгейден алу міндетті емес, оны есептің берілісіне қарай алса болады, мысалы, 40 м биіктен бастап.

3. Профиль табанына планнан σ -ның екі горизонталінің қиылысу нүктелерін көшіреміз, мысалы h_B^{80} және h_A^{50} , бұларды да өз биіктіктеріне сәйкесінше көтеріміз. Осы нүктелерді қосып, σ жазықтығымен беттің шектеуші профиль жазықтығының қиылысу сызығы $\bar{\sigma}$ -ны аламыз. 4. Сәйкесінше планда ω -ның да

өтеді, осьтері бойында өлшем бірліктері планда және аксонометрияда тең алынған. Жоғарыда айтылғандай, Oz осіне өлшемді 0м деңгейден емес, сызбаны салуға ыңғайлы өлшемнен бастауға болады.

3. Аксонометрияда торды дайындаған соң, пландағы қисық сызығының тор сызықтарымен қиылысу нүктелерін 109, а-суреттен 109, ә-суретке көшіреміз. Белгіленген нүктелерді қосып горизонталдың *горизонталь проекциясын* аксонометрияда аламыз.

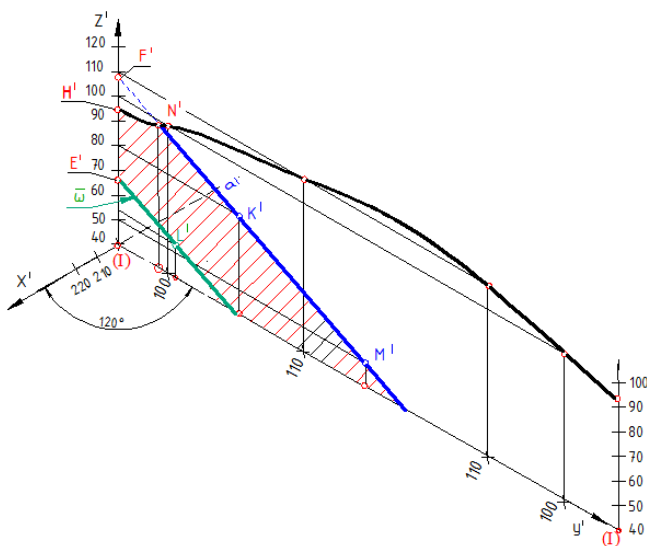
4. Әрі қарай есептің берілген масштабына сәйкес нүктелерді 42 м биіктікке көтеріп, оларды біртіндеп қосып, горизонтальдың *аксонометриядағы* кескінін аламыз. Есептің шешуі осы.



109-сурет

Жалпы айтқанда, тормен құру әдісті кескінді үлкейту не кішірейтуде қолданады. Осы әдісті қолданып, топографиялық беттің аксонометриядағы кескінін, оның горизонтальдарын және басқа да мағлұматтарымен толық салуға болады. Осы ретте телімді шектеген топографиялық беттің *төрт вертикаль профилін* аксонометрияда салу қажет.

2-ілеспе есеп. Аксонометрияда топографиялық беттің профилін салуды 108-суреттегі жер телімінің дайындалған *сол жақ профилінен* бастаймыз. Бұл профиль аксонометрияда 110-суретте кескінделген.



110-сурет

51-алгоритм. 1. Бір-бірімен 120° бұрышпен орналасқан тікбұрышты изометрияның осьтерін салудан бастаймыз, 110-суретте координаталық осьтер орнатылды, Oz профильдің вертикаль шетімен, Oy горизонталь түзумен біріккен. Бұл сызба 111-суретте блок-диаграмманың сол жағын шектеп тұр.

2. Профиль аксонометриясын тұрғызу үшін $O'y'$ осі бойына 108-суретіне сәйкес горизонталь түзудің барлық нүктелері көшіріледі.

3. Одан соң оларды сәйкес биіктігіне көтеріп, бетті жоғарыдан шектеуші қисық сызық жүргізіліп, *бет профилі* – анықталады.

4. Сызбадағы $\bar{\sigma}$, $\bar{\omega}$ қаттың жабыны және табанасты жазықтықтарының профильмен қиылысу сызықтары сәйкесінше K' , M' , E' , L' нүктелерінен өтеді.

5. Осы сызбада N нүктесі ескерілуі керек, ол қат жабынының жер бетіне шығу n сызығының бастапқы нүктесі!

6. Қажет болса профилде қат табанының да жер бетіне шығу нүктесі анықталуы керек. Бұл нүктелер бір-біріне қатысты сызбалардың (108, 110, 111-суреттер) дұрыстығын, дәлдігін бақылауға мүмкіндік береді (110-суреттің өлшем бірлігі 108-ге карағанда кішірейтіп алынған). Есептің шешуі осы.

Сәйкесінше топографиялық беттің қалған үш – алдыңғы, артқы және оң жақ қабырғалары блок-диаграмманы салған кезде құрылады.

14.3. Блок-диаграмманы құру

Бұл 3.2-тапсырмасы А3 пішімінде орындалады. Геологиялық, тау-кен тәжірибесінде блок-диаграмма деп топографиялық планның көрнекі, тік бұрышты изометрияда құрылатын аксонометриялық кескінін айтады. Өндіріс тәжірибесінде блок-диаграмма келесі жағдайларда қажет:

- кен орындарын жергілікті болжауда;
- кен жатыстарын барлауда және игеруде;
- өндіру әдістерін жоспарлауда (ашық, жер асты немесе технологиялық, мысалы, жерасты сілтілеуде);
- тау-кен өндіріс мекемелерінің жер үсті құрылыстарын және оларға қатынайтын жолдарды жобалауда.

Х мырзаның блок-диаграмманың пішінін (формасын) *талдауы* және пайдалы кеңестері. Блок-диаграмма төрт жақтан тікбұрышты призма бетімен шектелгені түсінікті. Оның қабырғалары қос-қостап параллель, қырлары Oz осіне параллель болады. Осы қырлардың төменгідей ортақ нүктелері болуы тиіс: бет профилі үшін Н нүктесі, қаттың жабыны үшін F нүктесі және қаттың табаны үшін Е нүктесі (110-сурет). Осының нәтижесінде блок-диаграммада қат жабыны мен табанына қатысты – екі өзара параллель параллелограмм, топографиялық бетті шектейтін тұйық сынық қисық сызықты төрт бұрыш пайда болады. Осы төртбұрыштардың *төбелері қырларға тиісті*. Осындай нүктелер блок-диаграмманы салу кезінде ескерілуі керек және олар сызбаның дұрыстығын тексеру кезінде қолданылады. Сызбаларды осылай *тексеріп отыруды* ұмытпаңыз.

«Топографиялық план» 3.1-тапсырмасына сәйкес блок-диаграмманы құруды бастаймыз (111-сурет).

«Блок-диаграмманы» әр студент өз нұсқасы бойынша тұрғызады, ол жоғарыда айтылған. Біздің сызбада блок-диаграмма 107, ә-суреттегі топографиялық план үшін салынады А3 пішімінде.

52-алгоритм.1. 111-суретте ең алдымен координаттар $O'x'y'z'$ осьтері 120° градуспен бекітіліп, топографиялық телімнің оң жақ жоғарғы бұрышына пішім ортасына жуық салынады. Ох және Оу, Oz осьтері бойынша өлшем бірліктері сол күйінде қалады.

2. Горизонталь жазықтықта 200×200 м шаршыға сәйкес келетін параллелограммды сызып, оған 107, ә-суреттегі 8×8 торын саламыз.

3. Осыдан кейін торға топографиялық беттің 80-нен 150-ге дейінгі барлық горизонтальдары 15.2-тармақтағы 50-алгоритмдегідей тұрғызылып, нәтижесінде – *аксонометриялық план* пайда болады.

4. Осы планның барлық горизонтальдарын сәйкес биіктікке көтеріп, сол арқылы топографиялық *беттің* аксонометриялық кескінін аламыз.

5. Енді бұл бетті 4 вертикаль профиль-қабырғалармен шектейміз, оны 51-алгоритмнің ізімен орындаймыз.

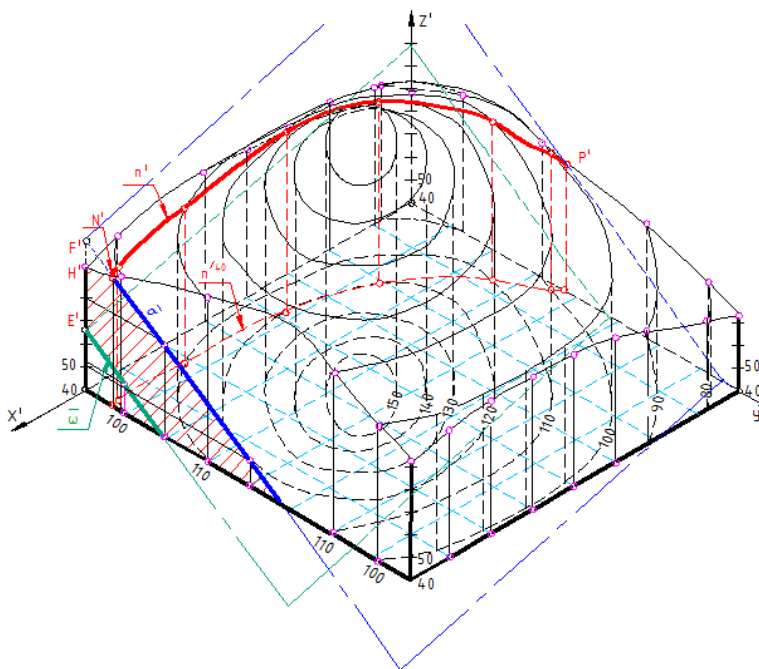
6. Бұл кескінде сонымен қатар қаттың жер бетіне шығу n сызығын құру керек. Ол үшін планнан оның нүктелерін аксонометриялық *планға* көшіріп, оларды сызықпен қосып, оны n'^{40} деп белгілейміз, себебі блок-диаграмма табаны 40 м-лік деңгейде.

7. Осыдан кейін оның горизонталдармен қиылысу нүктелерін сәйкесінше өз биіктіктеріне көтеріп, оларды біртіндеп косудан, n' сызығы пайда болады (50-алгоритмге сәйкес). Бұл сызық дұрыс құрылса, ол профильдерде қат жабынына тиісті N және P нүктелерінен өтеді: $n (N \cup P)$. Сызбаны салғанда, 15.2-тармақтың соңында берілген ерекшеліктерді ескеріңіз.

8. Х мырзаның ұсыныстары. Сызбаны құру жұмысы біткеннен кейін, топографиялық план мен блок-диаграмма арасындағы *сәйкес нүктелер мен сызықтарды анықтау*

жұмысына кірісу керек. Бұл шығарылған есепке кері есеп болады. Мысалы 130 горизонтальға тиісті (111-сурет) T' нүктесіне сәйкес T нүктесін табу (107, ә-сурет).

Қорытынды. Топографиялық беттің аксонометриясы оның горизонтальдары мен профильдері көмегімен салынады. Блок-диаграммада топографиялық телімнің жерасты – қат жабындары мен табандары анық көрсетіледі. Бір-біріне байланысты суреттерде сызықтардың, нүктелердің тиістілігі мен қиылысулары, белгішелері біріне-бірі сай болып, бұзылмауы керек. Осыны бақылап жүруді ұмытпаңыз. Бұл есеп геология, тау-кен саласында жиі кездесетін есептердің біреуі.



111-сурет

Тапсырмаға қатысты (жаттығулар мен өзіндік бақылау) сұрақтар

1.3-тапсырмада не берілді, не анықталуы керек, ненің сызбасын қосымша құру керек?

2. Топографиялық план горизонтальдары қандай белгішелерге ие?

3. Пайдалы қазбаның орналасуы (қат жабыны мен табаны) қалай берілген?

4. Қат жабынының жер бетіне шығу сызығы қалай анықталады?

5. Қат табанының орналасу элементтері қалай анықталды?

6. Қат қалыңдығы ол не, қалай анықталады?

7. Жер телімін шектеуші төрт жақтың профилі қалай құрылады?

9. Профильді құру алгоритмін айтып шығыңыз.

10. Профильде қат орналасуы қалай анықталады?

11. Профильден қат қалыңдығы қайсы жағдайда анықталады?

12. Блок-диаграмма не үшін қолданылады?

13. Топографиялық беттің блок-диаграммасы қалай құрылады?

14. Блок-диаграммада қаттың жер бетіне шығу сызығын қалай құрады?

15. План мен блок-диаграмманың сәйкес нүктелері қалай анықталады?

16. Блок-диаграмманың вертикаль қырларына тиісті қандай нүктелер бақылауға алынуы керек?

17. Қаттың жер бетіне шығу **n**-сызығының ақырлы нүктелері блок-диаграммада қайсы нүктелерге, сызықтарға тиісті болуы керек?

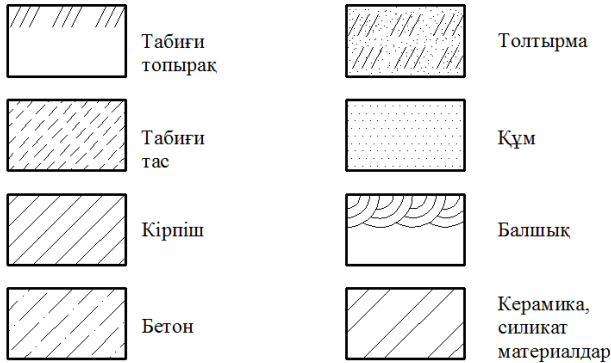
15. СЫЗБАЛАРДЫ ОРЫНДАУ СТАНДАРТТАРЫ. ТАУ-КЕН ГРАФИКАЛЫҚ ҚҰЖАТТАМАСЫНЫҢ СТАНДАРТТАРЫ

(Стандарттардан үзінділер)

Бұл тақырыптың алдыңғы бөлігіндегі стандарттармен бірінші зертханалық сабақта таныстық, ол мектептегі “Сызу” пәнінде де қарастырылған: пішімдер, масштабтар, сызықтар, қарыптар, сызбаға өлшемдерді түсіру. Енді осыларды жүйелі түрде СБП-ға қатысты етіп, тау-кен стандарттарымен бірге қарастырамыз. КҚБЖ – *конструкторлық құжаттаманың бірыңғай жүйесінде* сызбаларды безендіруге арналған барлық стандарттар жиналған. Инженер сызбаларды осы стандарттарға сай еткізіп орындауы керек, сонда сызба, яғни *техникалық құжат* барлық қолданушыларға түсінікті болады. Бұл техникалық стандарттар – халықаралық сызу тілінде сөйлейді. Дамыған елдерде техникалық сызба тілі ортақ (100 % емес), түсінікті десе болады. Бұл тақырыптағы жаңалық – ол тау-кен, құрылыс саласына тиісті стандарттар, олар жоғарыдағыны толықтырады. *Мұның себебі келесі орындалатын сызбалар мен тапсырмалар осы стандарттарға сай етіп орындалуы керек*, керісінше болса сызбаны жылдам оқып, дұрыс түсіну қиынға түседі. Стандарт – заң, заңды бұзуға болмайды.

I. Машина жасаудағы барлық сызбалар – техникалық, конструкторлық құжаттар МСТ 2.305 – 68 сәйкес орындалады. Мұнда кескіндер түрлері тағайындалған: көрініс, тілік, кима. Өз кезегінде олардың да жеке түрлері бар. Сызбаларды орындау Монж эпюріне негізделген. Кескіндерді орындағанда көріністердің, тіліктердің қандай түрлері барын және оларды ажырата білу керек, сонымен қатар сызбалар қатесіз сауатты түрде орындалу керек [3,4]. Сызбаларды орындауда осы стандарттың *негізгі қағидасын* ескеру керек: *кескіндер саны мүмкіндігінше аз, бірақ олар зат жайында толық мағлұмат берулері керек*. Біздің қолданып отырған сызба – СБП-мыз осы қағида сай. Артық кескіндер оқу, үйрену мақсатымен қолданылады.

II. МСТ 2.306 – 68. Материалдарды тілікте, көріністе графикалық кескіндеу (үзінділер). Бұл стандартты құрылыс материалдарының түрін ажырату үшін қолданамыз (112-сурет).



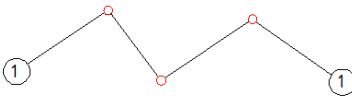
112-сурет

Тілікте материалдарды *сызықшалап* (штрихтап) көрсету керек. *Штрихтау* сызықтарының көлбеулігі 45^0 , жуандығы 0,2мм, сызықтар аралығы 2...3 мм болатынын естеріңізге саламыз. Балшықты сызғышсыз сызықтау керек. Қысқа сызықтардың ұзындығы 5 мм-ден артық болмау керек.

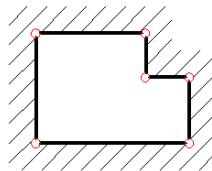
III. МСТ 2.850 – 75 ...2.870 – 75. Тау-кен графикалық құжаттамасы.

Бұл стандарттардан оқу барысында қолданылатын үзінділерді келтіреміз.

1. Панда қиюшы тік жазықтықтардың іздері төмендегі түрде көрсетіледі, сызықтардың жуандығы 0.2мм (МСТ 2.851 – 75, 113-сурет).



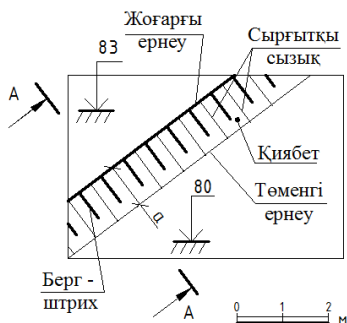
113-сурет



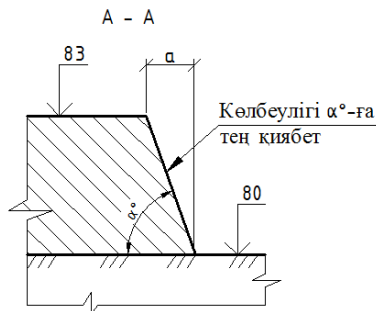
114-сурет

2. Тілікте сызғыштау сызықтарын кескіннің шектеуі бойымен жүргізуге болады (114-сурет).

3. План бас кескін болып саналады (МСТ2.852 – 75).



115-сурет



116-сурет

4. Тау-кен, құрылыс, геология салаларында *князеттер* (115-сурет) жиі кездеседі. Князет (баурай) жер бетіне еңіс, құлама орналасады, жазық немесе қисық бет болуы мүмкін, жасанды немесе табиғи болады. Олардың геометриясымен біз жете танысқанбыз 12.3-тармағында (4-есептің 99, а, ә-суреттері). Бұл өздеріне таныс *көлбеулігі тең беттер* (қараңыз!). 115-, 116-суреттерде жазық князет кескінделген. Князетті стандартқа сай кескіндеу ережелері мынадай:

- планда князеттің *жоғарғы ернеуі жуан, төменгі ернеуі жіңішке* тұтас сызықпен көрсетіледі (115-сурет);

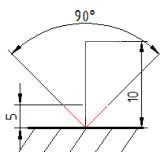
- ернеулердің арасында жіңішке тұтас сызықпен *сырғытқы* (құлама) сызықтар жүргізіледі. Олар үнемі горизонтальдарға (созылымға) перпендикуляр болуы керек (оны 9-тараудан қараңыз). Сырғытқылардың арасы 5...7 мм-ден кем болмау керек;

- жоғарғы ернеуден *төмендеу* бағыты қысқа жуан сызықтармен – *берг-штрихтармен* көрсетіледі. Олар сырғытқылар арасында орналасады, ұзындығы сырғытқының 0,3...0,5 бөлігіне тең болуы керек.

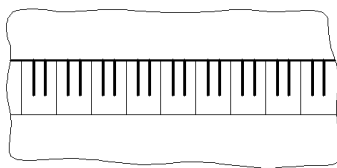
Осының барлығы князет сызбасын *жылдам оқу*, жоғарғы және төменгі ернеулерін *ажырату* үшін керек.

5. 116-суретте қиябеттің А – А тік тілігі берілген. Мұнда планда берілгендей құрылыстың 83 м, 80 м-лік деңгейлері өз белгілерімен, стандарқа сай етіп көрсетілген (117-сурет). Қиябет биіктігі $83 - 80 = 3$ м, ені a -ға тең. Тілікте 80 м-ден төмен *табиғи топырақ*, одан жоғары *кірпіш* қаланғаны көрсетілген.

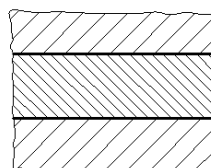
6. Егерде қиябет пайдалы қазындылардың шекарасын (массивін) анықтайтын болса, онда планда жоғарғы ернеуден төменге қарай қатарынан *екі жуан* (берг-штрих) сызықтар сырғытқының арасына салынады (118-сурет).



117-сурет

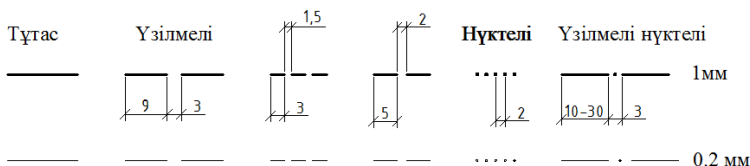


118-сурет



119-сурет

7. Жыныстар туралы нақты деректің қажеті жоқ болса, онда тау-кен қазындыларын сызба шектеуіне 45° көлбеулікпен, аралығы 5...10 мм етіп сызықшалайды, ал *пайдалы қазындыларды* кері бағытпен, аралығы 2,5...5 мм етіп сызықтайды (119-сурет).



120-сурет

IV. *Сызықтар* МСТ 2.303 – 68 негізінде және қосымша МСТ2.853 – 75-пен тағайындалады. Сызықтар түрі: *тұтас, үзілме, үзілме-нүктелі және нүктелі* (120-сурет). Олардың жуандығы 1.2, 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1 мм болады. Компьютерді қолданбай сызғанда жіңішке сызықтарды алдымен жаттығып орындаған дұрыс. Қарындаш қатты болса, сонда сызба таза, сызықтар анық болады. Сызбада карталардың сыртқы

шектеулері, кимадағы бет шекаралары, қиябеттердің жоғарғы ернеулері ең жуан сызықтар болады.

V. *Жазулар* МСТ 2.304 – 81 негізінде және оған қосымша МСТ 2.854 – 75-пен тағайындалады. Картада, планда изосызықтардың сан белгішесі биіктігі 1.6, 2.0 мм, құлау, созылу, көлбеу, азимут бұрыштары – 2.5 мм, күндер – 1.6, 2.0, 2.5 мм қарыштармен жазылу керек.

VI. X мырза ескертеді. Көлбеулікке байланысты төмендегідей заңдылықтар ескерілу керек. Егер қиябеттер жол беткейлерін шектейтін болса, онда олар табиғаттың құбылыстарынан бұзылмай, орнықты, өз қалпында ұзақ мерзімде қалу үшін олардың *көлбеу бұрыштары* материалдарына сәйкес болу керек. Мысалы, *құм* үшін көлбеу бұрышы жуықтап алғанда 30⁰-қа тең, *кірпіш* үшін – 60⁰-қа, *балшық* үшін 40⁰-қа, *бетон* үшін – 60⁰-қа, *табиғи тас* үшін – 45⁰-қа, *толтырма* үшін – 45⁰-қа тең. Бұл бұрыштарды *табиғи көлбеу бұрыштары* деп атайды.

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

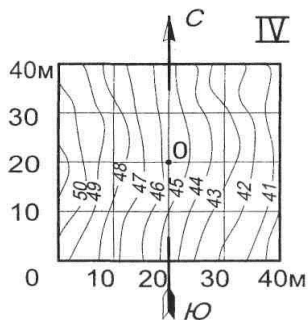
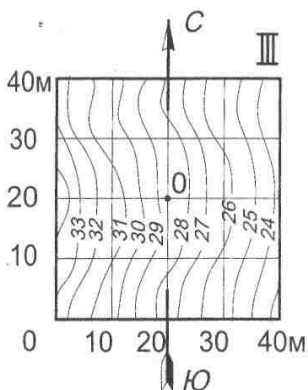
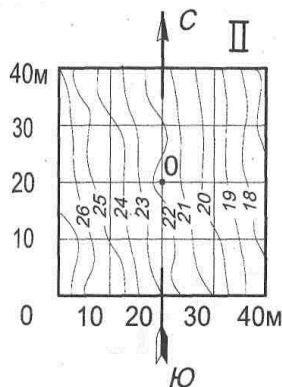
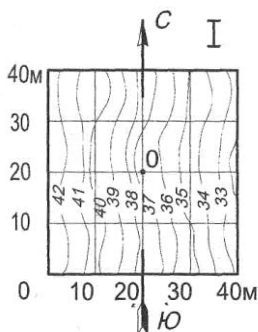
1. Сызбаның негізгі пішімдерінің өлшемдері қандай? Олар қалай аталады?
2. Стандарт бойынша қандай масштабтар белгіленген?
3. МСТ2.303 – 68 стандарты бойынша сызықтардың неше түрі бар?
4. МСТ2.304 – 81 стандарты қандай қаріптерді ұсынған?
5. Қаріп өлшемдері деген не?
6. Тау-кен стандарттарында биіктік белгішелерін қалай көрсетеді?
9. Тау-кен стандарттарында қай көріністі негізгі көрініс деп есептейді?
10. Тау-кен стандарттарында өлшемі қандай қарыштар қолданылады?
11. Қиябет қандай сызықтармен шектеледі?
12. Сызбадағы берг-штрихтар нені білдіреді?
13. Қиябеттің сырғытқы сызығы қалай кескінделеді?
14. Пайдалы қазбаны шектейтін қиябетті сызбада қалай көрсетеді?

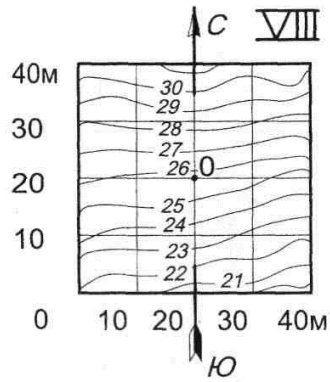
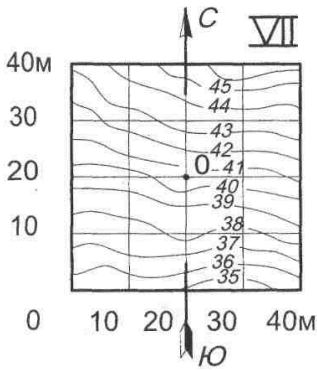
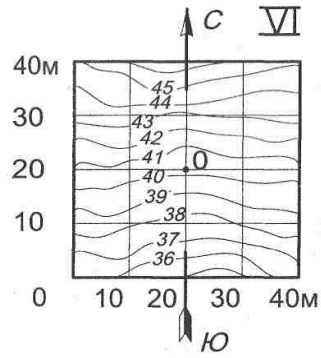
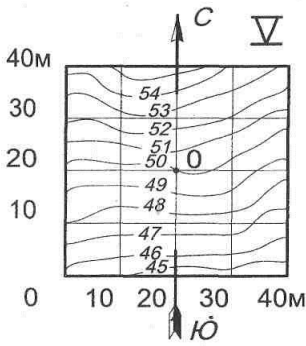
15. *Табиғи көлбеу бұрышы* деп қандай бұрышты атайды? Мысалын келтіріңіз.

4-қорытынды жұмыс 16-тарауда түсіндіріліп, ұсынылады. Берілгендері: 4.1 бөлігі – жер бөлікшесінің планы I–VIII нұсқалармен, 4.2 бөлігі – құрылыс алаңының пішіні, нұсқалары А-дан 3-ға дейін әріппен белгіленген, 4 бөлігі – 4 кесте: одан студенттер өздерінің нұсқалары бойынша жер бөлікшесінің пішінін, алаңның белгішесін алады.

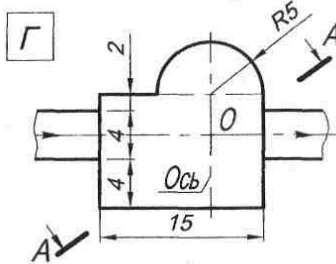
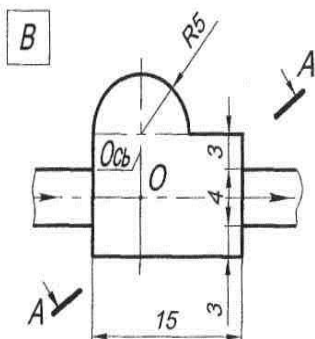
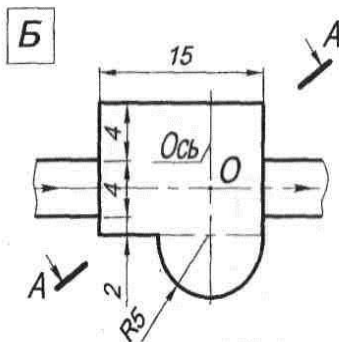
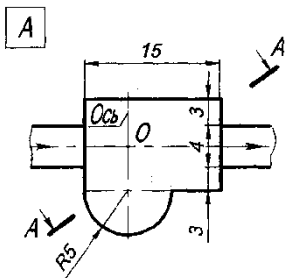
4-ҚОРЫТЫНДЫ ЖҰМЫС. **«ҚҰРЫЛЫС АЛАҢЫНЫҢ ЖЕР ЖҰМЫСТАРЫ** **ШЕКАРАСЫН ҚҰРУДЫҢ» БЕРІЛГЕНДЕРІ**

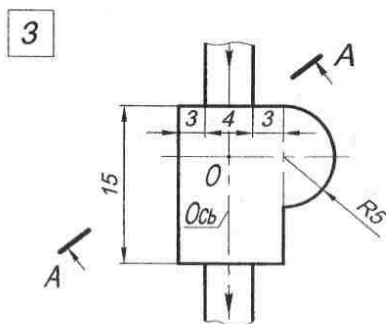
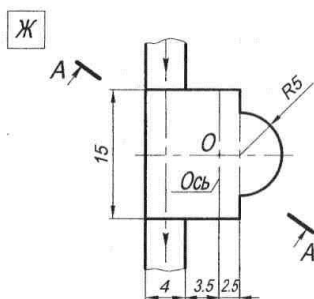
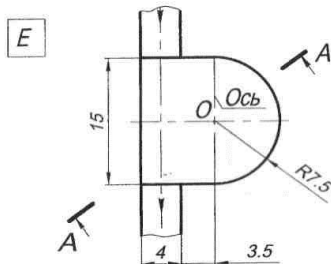
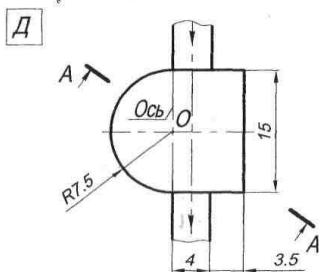
4.1. I–VIII – топографиялық план түрлері.





4.2. Құрылыс алаңының түрлері А-дан З-ға дейін





4-кесте. Тапсырма нұсқалары

Нұсқа	Топографиялық беттің түрі	Құрылыс алаңының түрі	Құрылыс алаңының белгішесі, м
1	I	A	37
2	I	Б	38
3	I	B	36
4	I	Г	37
5	II	A	21
6	II	Б	22
7	II	B	21
8	II	Г	22
9	III	A	28
10	III	Б	29
11	III	B	28
12	III	Г	29
13	IV	A	45
14	IV	Б	46
15	IV	B	45
16	IV	Г	46
17	V	Д	50
18	V	Е	50
19	V	Ж	49
20	VI	З	40
21	VI	Д	40
22	VI	Е	40
23	VIII	Ж	26
24	VIII	З	25
25	VIII	Д	25
26	VII	Е	40
27	VII	Ж	41
28	VII	З	41
29	VII	Д	40
30	VI	Ж	40

16. ҚҰРЫЛЫС АЛАҢЫНЫҢ ЖЕР ЖҰМЫСТАРЫ ШЕКАРАЛАРЫН АНЫҚТАУ

(Осы тақырыпқа қатысты 4-тапсырманы орындау әдістемесі). Бұл тапсырма *тау-кен, құрылыс, су ресурстарын пайдалану* салаларына байланысты, соңғы қорытынды жұмыс болып табылады. Ол А3 пішімінде орындалады. Мұнда оқу барысында жинаған барлық білімдерді тәжірибе түрінде қолдана білуіміз керек. Бұл тапсырмада берілген графикалық-нұсқа сызбадан қажетті сызбаға, үлгіде берілгенге көше білу керек (тапсырма А3 пішімінде, М1:200, нұсқаға сай орындалады). Бұл тапсырмада берілген планға құрылыс алаңын қондырып, жер имаратын шартқа сәйкес *үйінді және қазынды* құрылғыларымен толықтырып, олардың өзара қиылысуларын және берілген беттің сол құрылғылармен қиылысуын анықтау кіреді. Осының бәрі жобалау жұмыстарына қатысты.

Осы сияқты есептер су ресурстарын пайдаланушылар, жерді жақсартушылар және су құрылғыларын салушылар, құрылысшылар тәжірибесінде жиі кездеседі.

16.1. Тапсырма аксонометриясымен танысып, оны орындауға дайындалу

Алдымен 121-суреттегі аксонометрияда берілген үлгіге қарап, ондағы берілгендермен және анықталатындармен жете танысайық.

Үлгіде топографиялық бет есебінде шағын жер телімі берілген, оның горизонталдары 16 м-ден 26 м-ге дейін (121-суретте п. А), құрылыс алаңы 23 м деңгейде, көлбеу орналасқан жол (121-суретте п. В,С), қиябеттердің көлбеулігі $i_k = 1:1$; $i_{үй} = 1:1,5$; $i_{жол} = 1:6$ болсын. Сызбада D әрпімен тапсырма нұсқасының 16 м-лік деңгейдегі аксонометриясы белгіленген. Дүние жақтарына қарағанда құрылыс алаңының бағыты берілсе, мысалы СБ 15°, бұл алаңның вертикаль осі солтүстік батыс бағытына 15°-қа бұрылғанды көрсетеді.

Құрылыс алаңы горизонталь жағдайда беріледі, оның белгішесі қазынды мен үйіндіні жасауға мүмкіндік беріп, жер

шығындары мен жұмыстарының мүмкіндігінше аз болуын көздейді. Нөл деңгейлік жұмыстар (121-суретте п.1) көрсетілгендей I–I нүктелері. Олардың сол жағында қазынды қиябеттері кескінделген (топырақтың бір бөлігі алаң үстінен алынған), оң жағында бұл топырақ алаң және жол астына үюге қолданылып, үйінді қиябеттері пайда болған.

Тапсырма бойынша салу керек: қазынды, үйінді және жол қиябеттерінің горизонталдарын (121-суретте п. 4, 5, 6,7); жер жұмыстары шекараларын қазынды, үйінді және жол қиябеттеріне қатысты (121-суретте п. 10,11,12).

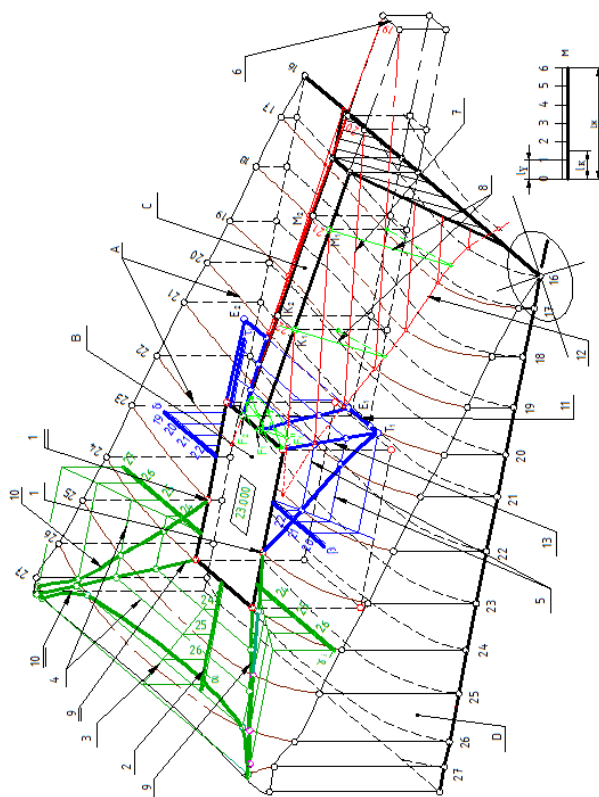
Сызба I – I нөлдік жұмыстар нүктелерін (121-сурет, п.1) анықтаумен басталады. Студенттер өз нұскасы бойынша жер алаңын, құрылыс алаң пішінін, қиябеттер көлбеулігін тандап, берілгенді планға түсіріп, 121-суреттегі 1–12-лерді өз сызбасынан анықтап, тапсырманы 128, а-суреттегі үлгіге сәйкес безендіреді.

Берілгені: А – топографиялық беттің горизонтальдары; В – құрылыс алаңы; С – жол беті; D – план жазықтығы π^{16} -да.

Анықталуы керек: 1 – I – I нөлдік жұмыстар нүктелері; 2 – жазық қиябеттердің көлбеулік масштабтары; 3 – жазық қиябеттердің сырғытқылары; 4 – қазынды қиябетінің горизонтальдары; 5 – үйінді қиябетін горизонтальдары; 6 – жол қиябетінің горизонтальдары; 7 – жол бетінің горизонтальдары; 8 – жол қиябетінің сырғытқысы – ол конустың жол қиябетімен жанасу жасаушысына параллель; 9 – қазынды қиябеттердің қиылысу сызықтары; 10 – қазындыға қатысты жер жұмыстарының шекарасы; 11 – үйіндіге қатысты жер жұмыстарының шекарасы; 12 – жол үйіндісіне қатысты жер жұмыстарының шекарасы; 13 – қиябеттердің өзара қиылысу сызықтары.

Шешу (тапсырманы орындау). *53-алгоритм.*

1. I –I нөлдік жұмыс нүктелерінен бастаймыз – ол 23 м белгішедегі құрылыс алаңы шекарасының 23 м белгішедегі топографиялық беттің горизонталімен қиылысу нүктелері. *Салыстыру:* егер I – I нүктесінен сол жақта беттің белгішесі (24м) құрылыс алаңының (23м) белгішесінен биік болса, онда сол жақта қазынды жұмысы жүргізіледі. Әдетте қазынды



121-сурет. «Құрылыс алаңының жер жұмыстары шекарасын анықтау» тапсырмасының аксонометриялық сызбасы

қиябеттері үйіндіге қарағанда тегістеу болғаны дұрыс ($i_k < i_y$), сонда қиябет уақыт өтісімен алаңға көп шашылмайды. Үйіндінің қиябеттері I–I нүктелерінен алаңның оң жағында және жолдан төмен орналасады.

2. Қазынды, үйінді және жол көлбеуліктеріне сәйкес олардың *интервалдары* анықталады: $\ell_{\text{үй}} = 1/1 = 1\text{ м}$, $\ell_{\text{к}} = 1/1: 1.5 = 1,5\text{ м}$, $\ell_{\text{ж}} = 1/1: 6 = 6\text{ м}$.

3. Құрылыс алаңы шекарасына перпендикуляр (немесе дөңгелек алаңға радиал) қиябеттер көлбеулік масштабтары сәйкесінше бөліктеліп салынады: α_i , γ_i – қазынды үшін, β_i , δ_i , τ_i ... үйінді үшін (бұлар жолға қатысты емес). 121-сурет көрнекі, сондықтан қиябеттің көлбеулік масштабы (п.2) және сырғытқысы (п.3) бөлек, олар өз сызбаларында беттеседі.

4. Осыдан соң қиябеттердің горизонтальдары салынады (121-сурет, п. 4, 5, 6, 7), олардың өзара (121-сурет, п.9) және жер бетімен қиылысулары (121-сурет, п.10, 11, 12) – жер жұмыстарының шекаралары – сынық сызық анықталады. Оның сыну нүктелерінде *үш сызық* қиылысады! Мысалы: E_1, T_1 , I – I нүктелері.

5. *Жол қиябеттерін* құру алаңның қиябеттерінен басқаша болады, себебі жол еңіс орналасқан.

5.1. Назар аударайық: бұрыштағы F_1 және F_2 нүктелерінің биіктігі 23 м, жол жиегіндегі K_1, K_2 нүктелері – төменде, 22 м деңгейде.

5.2. K_1, K_2 нүктелерінен үйіндіге тиісті жол қиябетінің горизонтальдары қалай салынады, сонымен танысайық. Ол үшін F_1, F_2 нүктелерін екі айналу конусының төбесі, ал олардың жасаушысының көлбеулігі үйінді көлбеулігіне тең: $l_{\text{жк}} = l_{\text{үй}} = 1$ м деп қабылдаймыз.

5.3. F_1 нүктесінен 1 м төменде орналасқан бірінші конустың горизонталін (эпюрге шеңберді) сызамыз, оның белгісі 22 м болады, центрі F_1' . Бұл горизонталь 121-суретте эллипс түрінде кескінделген. Сол сияқты екінші конустың 22-горизонталінің центрі F_2' нүктесі болады (сызбада оларды қоюға орын жоқ).

5.4. Бұл горизонтальдарға (шеңберлерге) K_1, K_2 -лерден жанамалар жүргізіліп, *жол қиябеттерінің алғашқы* 22-ші, h_1^{22} ,

h_2^{22} горизонтальдарын, ең бастысы олардың *бағыттарын* (!) табамыз.

5.5. Қиябеттің басқа горизонталдары $M_1, \dots$ нүктелерінен h_2^{22} -ге параллель өтеді, дәл осы сияқты $K_2, M_2, \dots$ нүктелерінен жолдың басқа жақ қиябетінің горизонтальдары салынады.

6. Жолдың қиябеттері үшін жер жұмыстары шекарасы мен осы қиябеттердің көршілес қиябеттермен қиылысу F_1E_1, F_2E_2 сызықтары анықталады.

7. Жол қиябеттерінің *сырғытқылары* қалай орналасады екен (X мырза біраз кідірді!)? Олар жасаушы конустардың жанама жасаушыларына *параллель*: F_1F_1'', F_2F_2'' !

8. Соңғы қадам: өз сызбаңызды 128, а-суретімен салыстырып, безендіріңіз.

Бұл жұмыс жеңілден ауырға қарай 3 деңгейде бағалануы мүмкін.

1. Егер планда тек қана тіктөртбұрышты құрылыс алаңына қатысты жер жұмыстары шекарасы салынса, баға 50–74 % болады (қорғауда).

2. Егер планда алаңның дөңгелек бөлігінің де жер жұмыстары шекарасы анықталса, баға 75 %-дан 89 %-ға дейін болады (қорғауда).

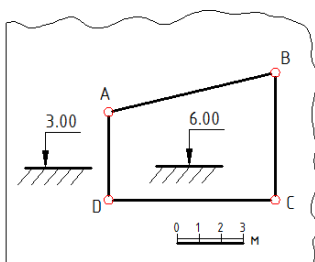
3. Егер планда жер жұмыстарының барлық шекаралары (жолға қатыстысы да) анықталса, баға 90 %-дан 100 %-ға дейін (қорғауда).

16.2. Тапсырманың жеңілдетілген түрі. Аксонометриядан планға кірісу

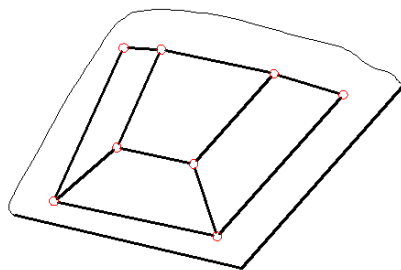
Планда осы есептің шешуін қарапайым 1-ілеспе есептен бастап, танысайық.

1-ілеспе есеп. 3 м белгісімен горизонталь құрылыс алаңы (жер) берілсін. Осы жерде, биіктігі 6 м-ге тең, пішімі қиық пирамида тәрізді болатын төрт бұрышты ABCD бетон имаратын орнату керек (122-сурет). 123-суретте осы ғимараттың көрнекі кескіні берілген. Имараттың үстіне қажетті техника түрі орнатылады делік. Біздің мақсатымыз осы шартқа сай етіп *үйіндіні орнату*. Үйіндіні шектеуші төрт жазық қиябет болуы

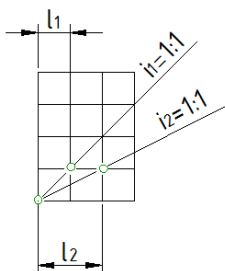
керек. Оның АВ, СД жағының көлбеулігі 1:2, ал АД, ВС жағының қиябет көлбеулігі 1:1 болсын. Қиябеттердің өзара және үйіндінің құрылыс алаңымен қиылысу сызықтарын анықтау керек. Соңғы сызық жер жұмыстарының шекарасы деп аталады.



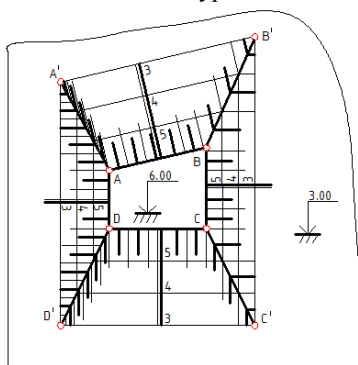
122-сурет



123-сурет



124-сурет



125-сурет

Шешуі. 54-алгоритм. 1. Сызықтық масштабты пайдаланып (123-сурет) қиябет жазықтықтарының *интервалдарын* (124-сурет) табамыз. 1:1 көлбеуліктегі қиябет жазықтары $l_1 = 1$ м аралықтағы көлбеулік масштабына (АД, ВС), ал 1:2 көлбеуліктегі қиябет $l_2 = 2$ м аралықтағы көлбеулік масштабына (АВ, СД) тең.

2. Әрі қарай барлық қиябеттер үшін анықталған *көлбеулік масштабтарын* саламыз (125-сурет). Олар, қиябет жазықтықтарының горизонтальдары болатын АВСД алаң жақтарына перпендикуляр болады.

3. Белгішелері *бірдей* горизонтальдардың қиылысу нүктелері *қиябеттердің өзара қиылысу* сызықтарын анықтайды – олар AA' , BB' , CC' , DD' түзулері.

4. 3 белгішедегі қиябеттер горизонтальдары – олар $A'B'C'D'$ төртбұрышы *жержұмыстары шекарасын* анықтайды. Бұл төртбұрыш қиябеттің *төменгі* жиегі, сондықтан оны стандартқа сәйкес *жіңішке* сызықпен кескіндеңіз!

A, B, C, D және A', B', C', D' нүктелерінде үш сызық қиылысады!

5. $ABCD$ төртбұрышы қиябеттерінің *жоғарғы* жиегі, сондықтан ол тұтас *жуан* сызық болып қала береді.

6. Сонымен бірге сызба анық оқылуы үшін және қиябеттің жоғарғы және төменгі жиегін ажырату үшін сызба *берг-штрихтармен* безендіріледі!

2-ілеспе есеп. Белгішесі 25 м-ге тең жазықтықта орналасқан құрылыс алаңының бөлігі берілсін (126, а-сурет). Оның I–I вертикаль қимасын (тік профилін) құруды, үйренейік.

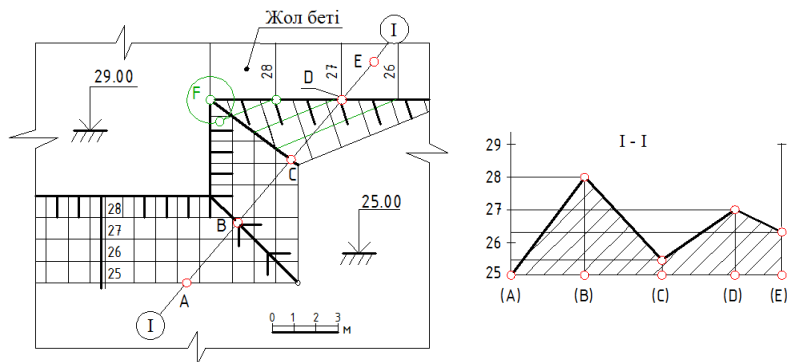
Шешу.55-алгоритм. Талдау. Қима жазықтығы қиябеттің төменгі жиегін A нүктесінде, ал жол қиябетінің жоғарғы жиегін D , қиябетердің қиылысу сызықтарын B және C нүктелерінде қияды. Жол бетіне тиісті E нүктесін де ескерейік.

Ескерту. Сызбада F нүктесі центрі болатын, радиусы қиябет интервалына тең шеңбері арқылы жол қиябеті горизонталінің бағыты анықталды.

1. Бұл нүктелерді жеке қағаз парағының шетіне белгілеп алып, сосын горизонталь түзуге – профиль табанына көшіріп, саламыз (126, ә-сурет).

2. Қиманың ақырлы A және E нүктелерінен өтетін вертикаль түзулердің бойларына 25 м-ден бастап масштаб бойынша 4 м саламыз.

3. Енді қима табанының A, B, C, D, E нүктелерін сәйкесінше (25; 28; 25,2; 27; 26,4 м) биіктіктеріне көтереміз. Оларды қоса отырып I–I қимасының сынық қисығын аламыз. Назар аударыңыз: B, C нүктелерінің белгішелері қиябеттердің қиылысу сызықтарына байланысты, E -нің белгішесі жол бетінің горизонтальдарына тәуелді. Есептің шешуі осы.



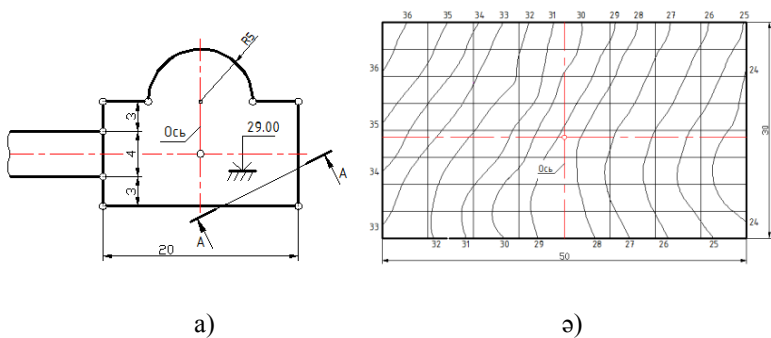
а)

б)

126-сурет

16.3. Тапсырманы нұсқаға сәйкес планда орындау

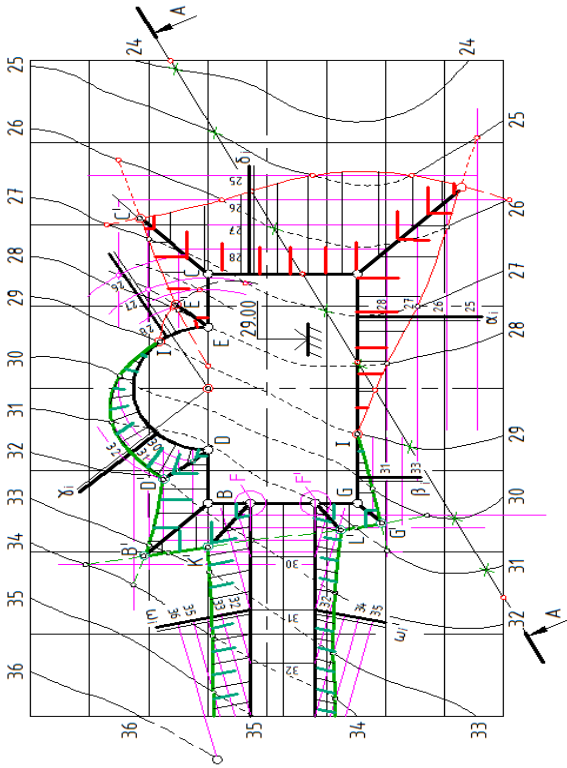
1-есеп. Егер құрылыс алаңының пішіні (127, а-сурет), жер бөлікшесінің планы (127, б-сурет) берілсе және қазынды көлбеулігі 1:1, үйінді көлбеулігі 1:2, жол көлбеулігі 1:4 белгілі болса, онда жер жұмыстарының шекарасын құруға мүмкіндік бар. Құрылыс алаңының биіктігі 29 м, А – А сызығы бойынша құрылыс профилін құру керек. Бұл есеп құрылатын алаңның жер жұмыстарының шекарасын анықтауға 4-тапсырмаға сәйкес.



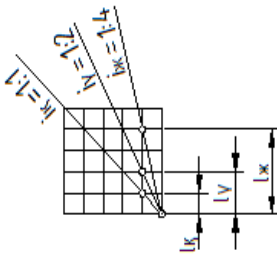
а)

б)

127-сурет



a)



ә)

Негізгі жазу

128-сурет

Шешу. 56-алгоритм. Бұл есеп жоғарыда берілген есептердің 53–55 алгоритмдеріне сәйкес шығарылады, осыларды салыстырып, жұмысты осы тарауға кіріспеде айтылғандай, АЗ пішімде, М1:200 етіп алып, орындаңыз.

1. Құрылыс алаңын (128, а-сурет) топографиялық планға, олардың осьтерін, О-нүктелерін беттестіріп, көшіру керек.

2. Сызықтық масштабты пайдаланып қиябеттердің көлбеуліктеріне сәйкес интервалдарын анықтау керек. Масштабтық торды 5 мм етіп (128, ә-сурет), берілген көлбеуліктер сызықтарын, оларға сәйкес интервалдарды анықтап, қазынды $l_k = 1$ м, үйінді $l_y = 2$ м, жол $l_{ж} = 4$ м салу керек.

3. Жол бетінде 30,31,32, ... белгішедегі горизонтальдарды бір-бірінен 4 м қашықтықта көрсетеміз.

4. I – I нөлдік жұмыс сызығын анықтаймыз, ол алаңның қазынды мен үйінділерін бөлетін беттің 29-горизонталімен өтеді, бұл беттің және алаңның ортақ нүктелері. Сызбадан нөлдік жұмыстың сол жағында қазынды, ал оң жағында үйінді болатыны көрініп тұр. Оның себебі сызбаның сол жағында бет горизонтальдар белгішелері 29-дан жоғары, оң жағында 29-дан төмен.

5. Жер жұмыстары шекараларын анықтауды алаң жақтары бойымен қиябеттердің көлбеулік $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \dots$ масштабтарын, оларға сәйкес қазынды l_k , үйінді l_y интервалдарымен салудан бастаймыз. Олар алаң жақтарына перпендикуляр болады, бірақ шеңбер жағында көлбеулік масштабы γ_i радиалды, яғни оның центрінен өтеді. Жол жағдайы 8 қадамда.

6. Қиябеттер қиылысу сызықтарын олардың белгішелері тең горизонтальдарының қиылысу нүктелері бойынша табамыз. Мұнда ескеретін жағдай: алаң бұрыштарында бұл сызықтар биссектриса бағытымен өтеді ($BB', CC' -$ қараңыз), ал дөңгелек алаңда қисық сызық бойынша ($DD', EE' -$ қараңыз), себебі бұл жерде конус бетімен жазық қиябет қиылысады. Бұл сызықтар парабола, гипербола, эллипс бөліктері болуы мүмкін (7.2.1-тармағын қараңыз!). Ол конустың l_k және жазық қиябеттің $l_{жаз}$ интервалдарының ара қатынастарына байланысты: егер $l_k > l_{жаз}$ болса, онда гипербола; егер $l_k = l_{жаз}$, онда парабола, егер $l_k < l_{жаз}$ онда эллипс пайда болады. Егер сызбаға мұқият қарайтын

болсақ, онда І нүктесінің оң және сол жағында да $l_k = l_{\text{жаз}}$ теңдігі орныққанын көреміз, яғни сол жақта да $l_k = l_{\text{жаз}} = l_k (DD')$, оң жақта да $l_k = l_{\text{жаз}} = l_{\gamma} (EE')$. Нәтиже: қиылысу сызықтары парабола. Ескерту: І нүктесінен төменге қарай екі конус тарайды, себебі олардың интервалдары сол және оң жақта бөлек: $l_{\gamma} > l_k$.

7. Топографиялық беттің қиябеттермен қиылысу сызықтары олардың деңгейлері тең горизонтальдарының қиылысу нүктелерімен анықталады. Сызбада осының арқасында жер жұмыстарының шекарасы салынады. Ол тұйықталған сынық қисық сызық: төбелері B', D', I, E', C' және т.б. Бұл шекаралар, егер байқасаңыздар, жолдың қиябеттері ескерілмей салынды. Сондықтан $B' G'$ қисық сызықтың жол қиябеттерімен қиылысу K', L' нүктелері алдыда анықталады.

8. Жол қиябеттерінің горизонтальдарын салуды бастаймыз. Олар жол бойына параллель болмайды, себебі жол еңіс орналасқан. Сондықтан центрі F, F' нүктелерінде орналасқан және радиусы l_k -ға (l_k –қазынды интервалы) тең шеңберлер саламыз. Бұл төбесі F, F' нүктелерінде орналасқан, еңісі i_k және белгішесі 30м болатын екі айналу конус горизонтальдары. Жол қиябетінің бірінші $h_{\text{жк}}^{30}$ горизонталі жол жиегінің 30 белгішесінен басталып, осы конустар горизонтальдарын жанап өтеді. Қалған $h_{\text{жк}}^{31}, h_{\text{жк}}^{32}, \dots$ горизонтальдары $l_{\text{жк}}$ қашықтығында біріншісіне параллель болып өтеді. Жол қиябеттерінің алаң қиябетімен қиылысу түзу сызықтары $FK', F'L'$ сәйкес болады. Назар аударыңыз: жол қиябеттерінің көлбеулік масштабтары горизонтальдарға перпендикуляр болу керек: $h_{\text{жк}} \perp \omega_i, h'_{\text{жк}} \perp \omega'_i$.

9. Осыдан кейін 128, а-суретке сәйкес етіп берг-штрихтарды дұрыс, жоғарғы ернеулерге тиісті етіп салу керек. Назар аударыңыз: $B, C, D, E, \dots$ және $B', C', D', E', \dots$ нүктелерде үш сызық қиылысады. Сызбаны аяқтаған соң, бақылау сұрақтарына жауап беруді және оқытушыға жұмысты тапсыруға дайындалуды ұмытпаңыз.

10. Енді тапсырмаға сәйкес $A - A$ профилін салу керек болсын.

Оның орналасуы тапсырманың 4.2 бөлігінде құрылыс алаңында көрсетілген. Вертикаль қиманы салу кезінде қима

жазықтығындағы барлық қиылысу нүктелері ескерілу керек, оның ішінде:

- топографиялық беттің горизонтальдарымен;
- берілген құрылыс алаңымен, жолдармен;
- үйінділер, қазындылар қиябеттерінің төменгі және жоғарғы жиегімен;
- қиябеттердің өзара қиылысу сызықтарымен, мысалы, CC' , BB' сызықтарымен.

Мұнда әсіресе соңғы нүктелерді мұқият анықтау керек, себебі олардың белгішелері бет горизонтальдарына емес, қиябеттер горизонтальдарының белгішелеріне байланысты. Қима қисық (топография бетімен) және сынық сызық (қиябеттермен) болады (129-сурет). Бұл жағдаймен 2-ілеспе есепте танысқансыз.

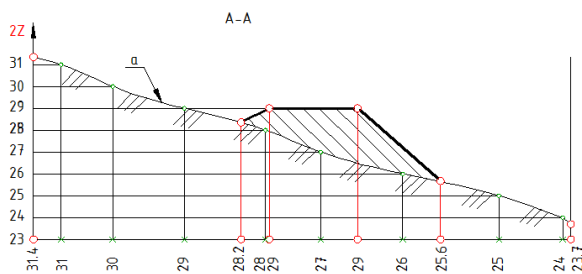
2-есеп. 129-суретте тапсырмада құрылыс алаңының қимасы, $A-A$ профильдің орналасуы көрсетілген. Профильді құру есебі 12.4-тармақтағыдай 41-, 42- және 55-алгоритмдер бойынша шешіледі.

1. Қима жазықтығының топографиялық бет горизонтальдарымен қиылысу нүктелерін, алаңның шеткі нүктелерімен бірге (+ белгісімен белгіленген) қиманың негізі болатын горизонталь түзуіне түсіреміз (129-сурет).

2. Шеткі нүктелер арқылы өтетін вертикаль түзулерге масштабты екі есе үлкейтіп, 23м-ден 31 м дейін белгішелерді саламыз. Сызба түсінікті болу үшін тіліктерді орындағанда вертикаль масштабты үлкейтуге болады.

3. Барлық көшірілген нүктелерді сәйкесінше биіктікке көтеріміз. Оларды қоса отырып топографиялық бет профилінің a сызығын аламыз. Ол еңіс қисық сызық болды.

4. Енді қиябеттермен, құрылыс алаңымен қиманың қиылысу нүктелерін тілік табанына белгілеп көшіреміз және оларды өз биіктіктеріне сай көтеріміз. Оның сол жағында жоғарғы нүктесінің белгішесі 28.2 м, оң жағында төменгі нүктесінің белгішесі 24.9 м, арасында алаңның 29 м белгішедегі сызығы орналасқан. Осы нүктелерді қосып алаңның құрылыс профилін аламыз, ол сынық сызық болды.



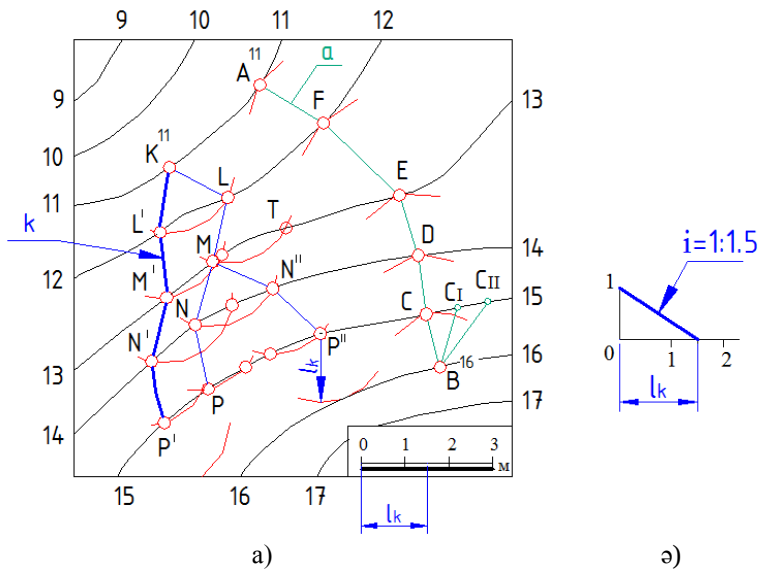
129-сурет

Тапсырмаға қатысты (жаттығулар және өзіндік бақылау) сұрақтар

1. Тапсырмада құрылыс алаңы қалай берілген, оның деңгейі неше метр?
2. Жер телімінің горизонтальдары қандай белгішілерге ие?
3. Сызбада үйінді мен қазындының шекаралары қалай табылды?
4. Қазынды, үйінді және жолдың интервалдарын қалай анықтайды?
5. Дөңгеленген қиябеттің көлбеулік масштабтарын, горизонтальдарын қалай құрады?
6. Көлбеулігімен берілген жолдың горизонталін қалай құрады?
7. Құрылыс имаратының (сооружение) профилін қалай құрады?
8. Құрылыс алаңының профилі қандай сызықтармен, нүктелермен анықталады?
9. Нөлдік жұмыс сызығы, ол қандай сызық?
10. 56-алгоритмді айтып шығыңыз.
11. 129-суреттегі есептің шешу жолын айтып шығыңыз.
12. Қиябеттердің жоғарғы және төменгі жиектерін сызбада қалай ажыратасыз?
13. Сызбада берг-штрихтар не үшін керек, олар қай бағытты білдіреді?
14. Жол қиябеттерінің горизонтальдары қалай анықталады?
15. 121- және 128, а-суреттерді салыстыра оқып шығыңыз.

17. ТОПОГРАФИЯЛЫҚ БЕТТЕРГЕ ҚАТЫСТЫ ЕРЕКШЕ СЫЗЫҚТАР

Өздеріңізге мәлім геологияда, тау-кен саласында, ауыл шаруашылықтарында егіндерді сулауда (мелиорация), құрылыстарды, ғимараттарды салғанда топографиялық беттермен, пландармен қолданады. Топографиялық бет, жер бедерлері осы салаларға сай болу керек. Олардың сәйкестілігі беттің ерекше сызықтарына байланысты. Ерекше сызықтардың ішінде: көлбеулігі ең үлкен және көлбеулігі берілген сызықтар, суайырық және сужинау сызықтары, берілген тереңдіктегі сызықтар деп ажыратуға болады. Осылармен жете танысып, оларды тәжірибеде қолдануға дайын болайық.



130-сурет

17.1. Көлбеулігі ең үлкен және көлбеулігі берілген сызықтар

Көлбеулігі ең үлкен сызықтар жер бетінде көршілес горизонтальдардың арасын *ең қысқа жолмен* қосады. Оның

дәлелі 41-алгоритмде, 100, ә-суретте берілген. Олай болса, бұл сызықтың маңыздылығы жер бөлікшесінде ең қысқа жолды анықтау, яғни бұл есеп материалдарды, уақытты, қаржыны, т.с.с. үнемдеуді көздейді.

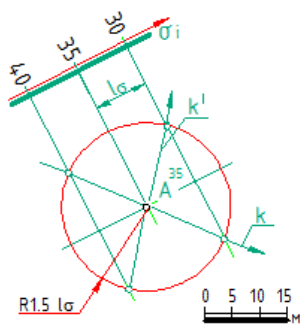
1-есеп. Берілген топографиялық бет және оның А, В нүктелері. В нүктесінен А нүктесіне қарай *көлбеулігі ең үлкен* сызықты жүргізу керек (130, а-сурет). Шешу. 41'-алгоритм. Мұнда осы алгоритмді бірнеше рет қолдану барысында, 5 буынды қисық кеңістіктік *ізделінген* α (BCDEFA) сызығы пайда болады. Осы ізделінген сызықтың негізінде, өндірістік тәжірибеде жол, құбырды салуда көптеген факторлар ескеріледі. Екі (А,В) нүктенің біреуі жалпы жағдайда жуықтатылып алынады, олардың арасын қосатын көлбеулігі ең үлкен сызық біреу ғана болады.

2-есеп. BC_I , BC_{II} сызықтардың көлбеулігін BC -ның көлбеулігімен *салыстырып*, $i_{BC} > i_{C_I}$, $i_{C_{II}}$ теңсіздікті дәлелденіз (130, а-сурет).

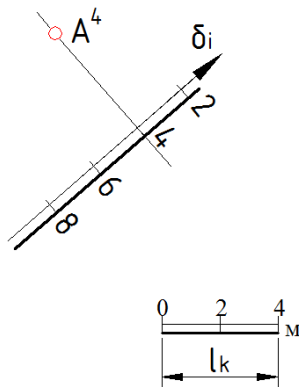
3-есеп. 130, а-суретте K^{11} нүктесінен көлбеулігі берілген $i = 1:1,5$ – тең, k сызығын жүргізу керек болсын. Шешу. Бұл есепті шешу үшін берілген масштаб және интервал l_k қолданылады. 57-алгоритм. 1. 130, ә-суретте l_k интервалы тікбұрышты $0 - 1 - 1,5$ үшбұрышының горизонталь катеті болды.

2. Осы катетті радиус етіп алып, К нүктесінен көршілес горизонтальдармен қиылысатын доғалар тізбектеліп жүргізіледі. *Ізделінген* сызықтар тармақталып, К нүктесінен тарайды. Мысалы оның бір нұсқасы $k(K'L'M'N'P')$ болады. Есептің шешуі осы. Шындығында, тәжірибеде трасса көлбеулігі есепте $i = 1:1,5$ берілгеннен әлдеқайда кіші. Жол көлбеулігі жүк тасымалдауға қолайлы болу үшін, олар қажетті стандарттардан алынады.

$A \in \sigma, A \in k \in \sigma, l_k = 1.5 l_\sigma, k?$



а)



ә)

131-сурет

4-есеп. Ең қарапайым бет ол жазықтық. 131, а-суретте σ жазықтығына тиісті оның A нүктесінен көлбеулігі $1:1,5$ болатын k түзуін жүргізіңіз. 57-алгоритм бойынша k -ның интервалын қолданып, есепті шешуге болады. Осы есептің қанша шешуі болуы мүмкін?

Х мырза: 54-сұрақ. Есеп шешусіз болуы мүмкін бе? Жауап. Ия, мүмкін. Дәлелін осы есептің шешуінен табуға болады, сызбада екі шешу. Басқа шешуілерін оқушылар келтірсін. Берілген δ жазықтығына тиісті A нүктесінен көлбеулігі $1:2$ тең k түзуін жүргізу керек (131, ә-сурет).

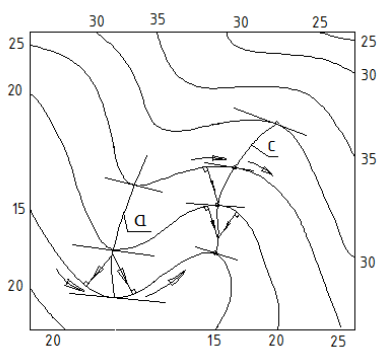
17.2. Топографиялық беттің сужинау және суайырық сызықтары

Жерді пайдалану мақсатына қарай бұл сызықтар алдын ала ескерілуі керек. Қажетті жұмыстар содан кейін жүргізілуі керек. *Сужинау* сызықтары бар жерлер ылғалды болады, оны егін салуда қолдануы дұрыс болар. Ғимаратты салуға құрғақтау жер тиімді болса, онда *суайырық* сызықтары бар жерді таңдау дұрыс болады. Осы сызықтардың жер бетінде пайда болуы неге байланысты? Ол жер горизонтальдарының иірімдеріне, және олардың өзара оналасуына байланысты. Мысалы 130-, 134-260

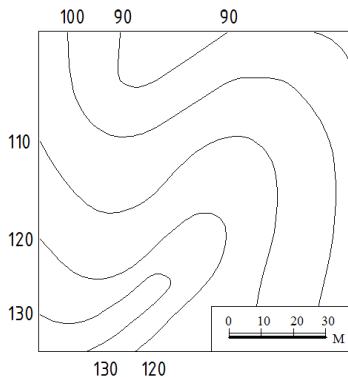
суреттерде олардың иірімдері жоқтың қасы, жер беттері тегіске жуық. 132- суретте иірімдері жиі, сондықтан суайырық, сужинау сызықтары мұнда жиі кездеседі. Мысалы нүкте 15-горизонталь иірімінің бойымен жылжысын (қозғалу бағыты нұсқарлармен көрсетілген), ол оның *қозғалу бағыты кері өзгеретін* нүктеден өтеді. Осындай нүктелер көршілес горизонтальдарда топтасқан болса, олар сужинау не суайырық сызықтарды құрады, сызбада ол *a* және *c* сызықтары. Топтасқан горизонталдар ойпаң не қырат беттерді құрады және ойпаң бетінде сужинау, қырат бетінде суайырық сызық пайда болады. Ендігі мәселе сызбада ойпаң мен қыратты ажыату. Ажыратудың қарапайым ережесі.

Егер көршілес горизонтальдың бір иірімінің радиусы төменен жоғарыға қарай кішірейсе ($R_i, h^{15} > R_i, h^{30}$), онда бұл жер *қырат* беті *суайырық a* сызығымен. *Суайырық a* сызықтары *қырат* беттерге тиісті. Сужинау сызығы сияқты *суайырық* сызығының барлық нүктелерінен жауын – шашындар екі жаққа ағып тарайды, мұнда ағу бағыттары, көлбеулігі ең үлкен сызықтар болады. Жауын-шашындардың ағу бағыттары өздеріне мәлім, жаңа таныс болған *көлбеулігі ең үлкен* сызықтар, өз кезегінде олар бұрыннан белгілі жазықтықтың *сырғытқы* сызықтары.

Егер көршілес горизонтальдың бір иірімінің радиусы жоғарыдан төменге қарай кішірейсе ($R_i, h^{30} > R_i, h^{15}$), онда бұл жер *ойпаң* беті *сужинау c* сызығымен. *Сужинау c* сызықтары *ойпат* беттерге тиісті. Көршілес горизонтальдардың нүктелерінен жауын – шашындар төменге, *сужинау* сызығына қарай ағады, жиналады, солай жыралар пайда болады.



132-сурет



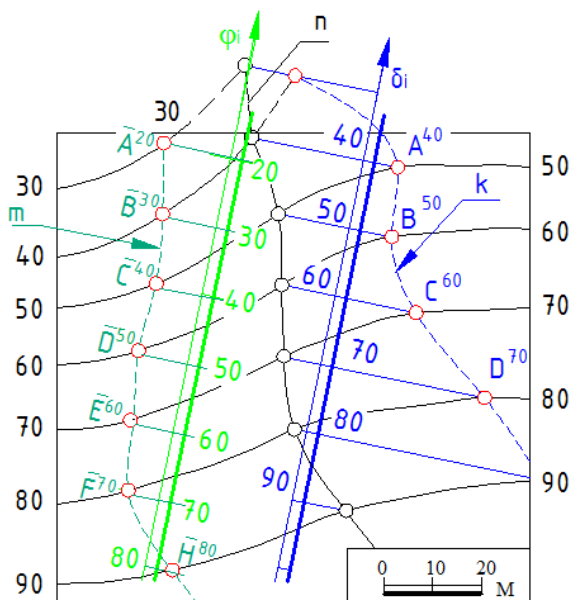
133-сурет

5-есеп. 133-суретте топографиялық бет берілген. Осы бетке тиісті *суайырық* не *сужинау* сызықтарын анықтаңыз. Жауын-шашындардың ағу бағыттарын көрсетіңіз.

Х мырзаның 55-сұрағы. Панда берілген жер телімін өзіңіз қалай қолданар едіңіз?

17.3. Топографиялық бетте тереңдігі берілген сызықтар

Бұл сызықтар геология, тау-кен жұмыстарында жиі кездеседі. Ойлап көріңіз: берілген аймақта кенорыны табылды, оның жер бетіне шығу сызығы анықталды делік. Енді қай тереңдікте оның қат-қабаттары қалай орналасады? Осы сұрақ кенорындарын қолдану кезінде туындайды. Бұл есепте міндетті түрде топографиялық бет және қатың жабыны, табаны белгілі болуы керек.



134-сурет

6-есеп. 134-суретте топографиялық ω беті және қат жабыны – σ жазықтығы берілген. Осы қазба шоғырының жабыны 10 м тереңдікте қалай орналасады? Шешу. 58-алгоритм. 1. Алдымен қаттың жер бетіне шығу n сызығын анықтайық: $\omega \cap \sigma = n$, оны ізделінетін сызықпен салыстыру үшін, 13.2-тармақта 43-алгоритмде айтылғандай оны табамыз.

2. Топография бетінен 10 м төмен орналасқан қабат жабынының сызығын құрамыз. Ол үшін айырымы 10 м болатын беттің және жазықтық горизонтальдарының сызбада қиылысу нүктелерін табамыз. Мысалы $h_{\omega}^{50} \cap h_{\sigma}^{40} = A_{\sigma}^{40}$ нүктесі *ізделінген* сызықтың 1-нүктесі болсын. Бұл нүктенің, байқасаңыздар, белгішесі 40м болып, ол сызбада беттің 50-горизонталінде орналасты! Осы әдіспен сызықтың басқа нүктелерін құрамыз: $B_{\sigma}^{50} = h_{\omega}^{60} \cap$.

$$h_{\sigma}^{50}, C_{\sigma}^{60} = h_{\omega}^{70} \cap h_{\sigma}^{60}, D_{\sigma}^{50} = h_{\omega}^{60} \cap h_{\sigma}^{50}, \dots$$

3. Анықталған нүктелерді үзілме сызықпен біртіндеп қосып, $k = (A^{40} B^{50} C^{60} D^{50})$ – 10м тереңдікте орналасқан, қат жабынына

тиісті сызықты аламыз, ол сызбадан анық көрініп тұр. Есептің шешуі осы.

7-есеп. 134-суретте ϕ жазықтығы – қат табаны да берілсін. Қат табаны 10м тереңдікте қалай орналасады? Шешуі – 58-алгоритм: $\omega \cap (\phi - 10 \text{ м}) = m$. Енді сіз тау-кен инженері болып, сызбадағы k және m аралығын ескеріп, 10 м тереңдіктегі жұмыс көлемін болжай аласыз. Барлығын қадағалайтың Х мырзаның соңғы ұсынысы. Осы есепке ілесуші 8-есептің шешуін табыңыз: берілген топографиялық бетке қатысты $A - A$ профиль жазықтығын 134-суретте қалай орналастырасыз, егер қаттың көлбеу бұрышын анықтау керек болса? Оны менің 48-сұрағыма жауаптан, 42-алгоритмінен табасыз. Сызбада көрсетіңіз. Сіз дұрыс шешімге қол жеткізе аласыз!

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары

1. Топография беттердің қандай ерекше сызықтары бар?
2. Сызбада көлбеулігі ең үлкен сызықты қалай құруға болады?
3. Қандай жағдайда бұл сызықты қолданады?
4. Көлбеулігі берілген сызықты құру алгоритмін айтып шағыңыз.
5. Жазықтықтың көлбеулігі ең үлкен сызығы – ол қандай сызық?
6. 131, ә-суретте көлбеулігі 1:2.5 тең сызықты жазықтықтың кез келген нүктесінен құрыңыз. Есептің қанша шешуі бар?
7. Сызбада сужинау және суайырық сызықтар беттің қай нүктелерінен өтеді?
8. Бұл сызықтар (7-сұрақ) қандай беттерге тиісті, қалай қолданылады?
9. Суайырық сызығынан жауын-шашынның екі жаққа ағып тарау бағытын көрсетіңіз.
10. Сужинау сызыққа қарай жауын-шашынның ағу бағытын анықтаңыз.
11. Тереңдігі берілген сызықты анықтау алгоритмін айтып шығыңыз.
12. Сызбада 8-ілеспе есептің шешуін беріңіз.

ГЛОССАРИЙ

Азимут (арабша ас – сумут – жол, бағдар) – геологияда бұрыш, ол түзудің, жазықтықтың, немесе басқа объектінің жер бетіндегі меридианның солтүстік ұшына қатысты бағдарын көрсетеді.

АксонOMETрия (грекше аксон – ось, метрео – өлшеу) – көрнекі кескіннің бір түрі. А. стандартты түрлері – изометрия, диметрия, т.б.

Алгоритм – есеп шығару ережелерінің дәйектілігі, берілген шарттан шешу нәтижесіне апаратын нұсқаулар. Лат. algoritmi – араб ғалымы 9 ғ. Әл-Хорезмиге сілтеме жасаудан шықты.

Бет (ор.поверхность) – геометриялық дене, мысалы – сфера, цилиндр, конус, нүктелер не түзулердің, не қарапайым беттердің жиыны. Беттің ең қарапайым түрі жазықтық, оның қисықтығы нөлге тең.

Беттің анықтаушысы – берілген бетті басқа беттерден ажыратушы шарттар. Б.а. екі бөліктен тұрады. *Геометриялық* бөлігі сызда ең аз мөлшердегі сызықтармен, минималды сызба түрінде беріледі. *Алгоритмдік* бөлігі – ол геометриялық бөлігі негізінде беттің жасалу шартын мәтін түрінде білдіреді.

Бөліктеу түзуді (ор. градуировка) – түзудің пландағы проекциясының бүтін санды белгішелері бар нүктелерін анықтау (мысалы, A^5B^{10} түзуінің проекциясында белгішелері 6,7,8,9 болатын нүктелерін анықтау).

Бұрама сызықтың, беттің адымы – олардың айналу осіне қатысты өлшенген бір айналудан пайда болған ұзындық.

Бұрама сызықтың, беттің орамы – олардың бір айналудан пайда болған бөлігі.

Геодезиялық сызық – бетке тиісті екі нүктені қосатын ең қысқа сызық. Мысалы, цилиндр бетіне тиісті бұрама сызық, сфера бетіндегі екі нүктені қосатын, радиусы сфера радиусына тең шеңбер.

Горизонт – (грекше – горизо – шектеймін, көкжиек) тау-кен саласында қабат, бір деңгейде орналасқан тау-кені орындарының жиынтығы.

Горизонталь (көкжиек, еңістенбейтін сызық) – түзу немесе қисық сызық, оның нүктелерінің деңгейлері бірдей (мысалы, h^5 – 5м деңгейдегі горизонталь сызығы).

Горизонталь жазықтық – оның нүктелерінің деңгейлері, z координаталары бірдей ($z=a$ – оның өрнегі).

Горизонталь проекциялаушы түзу, жазықтық – горизонталь жазықтығына тік, перпендикуляр орналасқандығын білдіреді. Түзудің горизонталь проекциясы – нүкте, жазықтықтың проекциясы – түзу.

Горизонтальдар – изогипстер (грекше изос – тең, гипсос – биіктік), геологияда жер бедері туралы анықтаманы беретін, нүктелері бір деңгейде болатын сызықтар жиынтығы.

Дирекциондық (нұсқаулық) бұрыш (французша – директео – бағдар) – созылу азимутын қараңыз.

Жазықтықтың орналасу элементтері – жазықтықтың жер бетінде орналасуына және план жазықтығына қатысты сипаттары – олар h_σ – горизонталі, l_σ – интервалы, σ_i – көлбеулік масштабы, α^0 – құлау бұрышы, β^0 – құлау азимуты, φ^0 – созылу азимуты (қараңыз).

Түзудің жатысы – түзу кесіндісінің пландағы проекциясы.

Қиябеттің жоғарғы ернеуі – қиябетті (қараңыз!) жоғарғы жақтан шектейтін сызық, стандартқа сәйкес ол сызбада жуан сызық болады.

Интервал – (латынша интер – арасында) – аралық, сызбада түзу жатысының бір бірлікке көтерілуіне қатысты бөлігі.

Қайтымды сызба – объектіні оның кескіні бойынша кеңістікте қайта құруға мүмкіндік беретін сызба. Мысалы Монж эпюрі, аксонометрия, сандық белгішелері бар проекциялар – қайтымды сызбалар.

Қат жабыны және табаны – геологияда мысалы пайдалы қазбаны, қатты (денені) шектеуші беттер. Шартты түрде Қ.ж.,т. – екі өзара параллель жазықтық.

Қиябет (құлама, еніс, баурай, ор. откос) – жер бетінде құлама орналасатын жазық немесе қисық бет. Ол жасанды не табиғи болуы мүмкін. Жасанды Қ. жолдардың екі жақ беткейін қоршайтын бет.

Көлбеулігі тең бет – түзусызықтық беттің бір түрі. Оның жасаушы – түзулері горизонталь жазықтығына үнемі бір бұрышпен көлбейді. Көлбеулігі тең беттің ең қарапайым түрі осі вертикаль орналасқан айналу конусы.

Түзудің көлбеулігі – интервалға кері шама $i_a = 1/l_a = \operatorname{tg} \alpha$, α^0 – түзудің проекциялар жазықтығына құлау бұрышы.

Көлбеулік масштабы жазықтықтың – түзу сызық, жазықтықтың *сырғытқы (сырғыма)* сызығының бөліктелген проекциясы, белгіленуі σ_i – σ жазықтығының к.м., ол б-ның горизонтальдарына перпендикуляр сызық.

Құлау (еңістену, ор. азимут падения) азимуты жазықтықтың – бұрыш, жазықтықтың дүние жақтарына қарағанда орналасуын көрсетеді. Меридианның солтүстік ұшынан бастап көлбеулік масштабтың құлау бағытына дейін сағат тілі бағытымен өлшенетін бұрыш.

Түзудің құлау (еңістену) бағыты – түзудің төмендеу бағыты, проекцияда нұсқармен (бағытша) көрсетіледі.

Жазықтықтың құлау бағыты – жазықтықтың төмендеу бағыты, оны нұсқамен көлбеулік масштабында көрсетеді.

Түзудің құлау(еңістік) бұрышы – түзу мен проекциялар жазықтығының арасындағы бұрыш.

Жазықтықтың құлау (еңістік) бұрышы – жазықтық пен проекциялар жазықтығының арасындағы бұрыш, ол оның сырғытқысы және көлбеулік масштабының арасындағы бұрышпен өлшенеді.

Метрикалық есептер – сызбада берілген геометриялық элементтерге, денелерге қатысты өлшеумен анықталатын есептер, мысалы перпендикуляр жүргізу, арақашықтықты, бұрыштарды, ұзындықты, аудан мен көлемді анықтау.

Меридиан – бойлық (латынша – меридианус – талтүс, ор. полуденный) –жорамалдағы сызық, жер бетінде солтүстік және оңтүстік полюстерді қосатын ең қысқа сызық (қарапайым түсінік).

Монж эюрі (французша эюр – сызба, Монж – сызба геометрияны жүйелі түрге келтірген француз математигі), М.э. – қайтымды сызба, фронталь және горизонталь проекциялар жазықтығына тік бұрыштап проекциялаумен пайда болады

(мысалы $A(A_1A_2)$) – A нүктесінің A_1 – фронталь, A_2 – горизонталь проекциялары).

Нұсқар, бағдарша – бағытты көрсететін белгі (ор. стрелка).

Нысан – объект, зат, сызбада геометриялық дене.

Беттің очеркі (нұсқасы) – (ор. очеркнуть – сызық жүргізу) – сызбада беттерді, денелерді шектейтін сызықтар. Мысалы, сфераның очерктері – шеңберлер, горизонталь проекциясында ол экватор, фронталь проекциясында ол бас меридиан.

План – сандық белгішелері бар проекцияларда бас кескін, негізгі горизонталь проекциялар жазықтығы.

Позициялық есептер – сызбада берілген геометриялық элементтердің, денелердің өзара орналасуын анықтау, мысалы олардың тиістілігін, параллельдігін, қиылысуын.

Проекция (латынша – проектио – алдыға тастау) – проекциялау әдісімен нысанның, геометриялық заттың жазықтықтағы кескіні, мысалы Монж эпюріnde A_1 , A_2 – кеңістіктегі A нүктесінің проекциялары.

Проекциялар жазықтығы – проекциялау әдісімен салынған кескіндер жазықтығы. Мысалы, π_1 – фронталь п.ж., π_2 – горизонталь п.ж., π_3 – профиль п.ж., π_0 – план жазықтығы – сандық белгішелері бар п.ж., π' – аксонометриялық п.ж. болып ажыратылады.

Проекциялаушы түзу, жазықтық – проекциялар жазықтығына перпендикуляр орналасқан түзу, жазықтық. Олардың сол жазықтықтағы проекциялары нүкте, түзу болады.

Топографиялық беттің профилі – беттің вертикаль жазықтығымен қиылысу сызбасы.

Жазықтықтың созылу азимуты – бұрыш, меридианның солтүстік ұшынан бастап сағат тілінің бағытымен жазықтықтың горизонтальдарына дейін өлшенетін бұрыш, ол екі бұрыш $\bar{\varphi}^0 = \varphi^0 + 180^0$.

Жазықтықтың созылымы – оның горизонтальдарының жер бетінде жайылуы, нұсқармен көрсетіледі.

Суайырық сызық – қырат бетіне тиісті, горизонтальдардың бойымен қозғалу бағыты кері өзгертін нүктелерінен өтетін сызық. С.с. жауын-шашынды қыраттың екі жақ бетіне бөліп ағызады.

Сужинау сызығы – ойпат бетіне тиісті, горизонтальдардың бойымен қозғалу бағыты кері өзгертін нүктелерінен өтетін сызық. С.с. жауын-шашынды өзіне жинап ағызатын сызық.

Жазықтықтың *сырғытқы (сырғыма) сызығы* – ол оның горизонтальдарына үнемі перпендикуляр орналасатын сызық. Жауын-шашындар, т.с.с. сол сызық бойымен төмендейді, ағады, домалайды.

Сызықтық масштаб (немісше мас – өлшем, штаб – таяқ) – объектінің (нысанның) сызбадағы сызықтық өлшемдерімен олардың нақты өлшемдерінің арасындағы қатынасты көрсетеді (мысалы, М1:2 – екі есе кішірейтілген сызбаның масштабы).

Табиғи қиябет бұрышы – (ор. естественный угол откоса) құрылыс материалдардың табиғат құбылыстарынан бұзылмай, орнықты, өз қалпында ұзақ мерзімде сақталатын олардың үймелерінің көлбеу бұрыштары.

Топография (грекше – топос – орын, жер, графия – жазу) –

1) жер бетін планда кескіндеу әдістерін зерттейтін ғылыми пән, 2) жер беті.

Топографиялық бет – жер бөлікшесінің бетін, т.с.с. беттерді модельдейтін бет. Жер бедерлері оның горизонтальдарымен анықталады.

Қиябеттің төменгі ернеуі – қиябеттің жер (топографиялық) бетімен қиылысу ең төменгі сызығы, сызбада стандартқа сай ол жіңішке сызық.

Түзудің азимуты – түзудің жер бетінде орналасу бағытын көрсетеді, меридианның солтүстік ұшынан бастап сағат тілі бағытымен түзудің құлау бағытына дейін өлшенетін бұрыш.

Түзудің ізі – түзудің проекциялар жазықтығымен қиылысу нүктесі. Мысалы, $AB \cap \pi_0 = C^0$ – АВ түзуінің план (π_0) жазықтығымен қиылысу нүктесі C^0 .

Ізі жазықтықтың – жазықтықтың проекциялар жазықтығымен қиылысу сызығы. Мысалы, $\sigma \cap \pi_0 = h^0$ – σ жазықтығының план (π_0) жазықтығымен қиылысу сызығы h^0 – горизонталь болады.

А қосымшасы

Тақырыптарға сәйкес СОЗЖ есептері, алгоритмдер, суреттер тізбесі

Тарау №	Алгоритмдер	Суреттер
Кіріспе		1
1-тарау. Проекциялау әдістері...		2
1.1. Центрілік проекциялар		
1.2. Параллель проекциялау әдісі		3
1.3. Тікбұрышты проекциялар		4
2-тарау. Аксонометрия...		
2.1. Аксонометрия, оның негізгі теоремасы, ...		5, 6
2.2. Нүктелер сызбасы. $1^{*(2.2)}$ – СОЗЖ есебі		7, 8,
2.3. Түзулер сызбасы, іздері. $2^{*(2.3)}$ – СОЗЖ есебі		9, 10, 11, 12
2.4. Түзулер: деңгейлік, проекц., жалпы түрдегі. $3^{*(2.4)}$, $3.1^{*(2.4)}$ – СОЗЖ есептері		
2.5. Жазықтықтар сызбалары		13, 14
2.6. Деңгейлік, проекциялаушы, жалпы жағдайда орналасқан, оның іздері. $3.2^{*(2.6)}$ – СОЗЖ есебі		15, а, ә, б
3. Нүкте, түзу, жазықтың Монж эпюрі		6, б, 16
3.1. Нүкте эпюрі		
3.2. Түзудің эпюрі, іздері		8, а, 17
3.3. Деңгейлік, проекциялаушы түзулер. $4^{*(3.3)}$ – $6^{*(3.3)}$ – СОЗЖ есебі		18, а, ә, б, 19, а, ә
3.4. Жазықтықтың эпюрі, деңгейлік, проекциялаушы жазықтықтар		20, а, ә, б, 21, а, ә, б,
3.5. Жазықтықтың іздері		22, а, ә, 23, а, ә,
4-тарау. Негізгі позициялық есептер Монж эпюрінде	1	24, а, ә, 25, а, ә, б
4.1. Тиістілік есептері: 1, 2-есеп		

4.2. Қиылысу, параллельдік есептері 7* _(4.2) -12* _(4.2) – СОЗЖ есептері	1 – қ ... 5 – қ, 2, 3, 4	26, а, ә, б,30,31 27, 28, 29
1.1-қорытынды жұмыс «Аксонетрия және Монж эпюрін салыстыру»		1.1,а,ә, б,в 1.1.1, 1.1.2
5-тарау. Көпжақтар эпюрі, позициялық есептер		32, 33
5.1. Позициялық есептер		
5.1.1.Тиістілік есептері:1, 2. 13* _(5.1.1) – СОЗЖ есебі	1а , 1ә	32, а,ә,б, 33
5.1.2. Қиылысу есптері: 3,4,5	2а,	34, 35, а,ә,36, а
5.2. Конуска, цилиндрге іштей не сырттай сызылған көпжақтар		
5.2.1. Шеңбер мен эллипс		37, а,ә, 38
5.2.2. Шеңберге іштей не сырттай сызылған дұрыс көпбұрыш		39, а, ә, б,
5.3.1.Дұрыс призма, пирамида эпюрі және қимасы		40, а, ә, б
5.3.2. Призма, пирамиданың аксонетриясы	5, 6, 7,	41, а, 41,ә, б
5.4.Призмаға сырттай сызылған цилиндрдің аксоном.	8 цил/акс	42, 43
5.5.Пирамидаға сырттай сызылған конустың аксонетриясы		44, а, ә, б
6-тарау. Монж эпюрінде қисық сызықтар, беттер.	9а, 9ә,	
6.1. Бұрама сызықтар, беттер. 14* _(6.1) , 14.1* _(6.1) – СОЗЖ есептері		45, 46, 47
6.2. Айналу беттер	10а, ә	48–51
7-тарау. Айналу, бұрама беттерге қатысты позиц. ес.	11, 12, 13	49, а, ә, 50, а, ә, 51
7.1.Тиістілік есептері.1,2,3		
7.2. Қиылысу есептері 7.2.1. Қималар. 15* _(7.2.1) – СОЗЖ есебі	14, 14 – іш., 15	52, а,ә, 53
7.2.2. Беттердің түзулермен (сызықтармен) қиылысуы.16* _(7.2.2) – СОЗЖ есебі	7конус, 16 , 17	54–56, а, ә, б, 57, а, ә, б, 58

1.2-қорытынды жұмыс. «Қөпжақтың кимасы»		1.2, а, в, 1.2.1, 1.2.2.
8-тарау. Сандық белгішелері бар проекциялар (СБП)		
8.1. Нүкте мен түзудің СБП-сы	18	59, а, ә, б, 60
8.2. Түзудің жатыс элементтері	19, 20,	61, а, ә, 64
9-тарау. Жазықтықтың СБП, оның жатыс элементтері. 17* ₍₉₎ – СОЗЖ есебі	21, 22, 23	65, а, ә, 66, 67, 68, а, ә, б, в, 69, а, ә
10-тарау. СБП-дағы позициялық есептер		
10.1. Тиістілік есептері. Нүкте, түзу, жазықтық		70, а, ә
10.2. Түзулердің өзара орналасуы. 18* _(10.2) – СОЗЖ есебі	24	71, а, ә, 72, а, ә, 73, а, ә, б, в, 74, 75
10.3. Жазықтықтардың өзара орналасуы. 19* _(10.3) – СОЗЖ есебі	25	76, 77, а, ә
10.4. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы	26, 27, 28	78–82
11-тарау. СБП-дағы метрикалық есептер		
11.1. Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтық	29	83, а, ә, 84, а, ә, б
11.2. Өзара перпендикуляр жазықтықтар	30, 31	85, 86, а, ә, б, 87
11.3. Бұрыштардың нақты шамасын айналдыру әдісімен анықтау. 20* _(11.3) , 20.1* _(11.3) – СОЗЖ есептері	32, 33, 34	88, 89, а, ә, 90, 91
11.4. Арақашықты түрлендіру әдісімен анықтау	35, 36	92–94
2-қорытынды жұмыс. «Позициялық және метрикалық есептер СБП-да»		2.1-, 2.1-, 2.3
12-тарау. Қисық сызықтар мен беттердің СБП-сызбасы		
12.1. Қисық сызықтар		95, а, ә
12.2. Айналу және жалпы түрдегі конус, цилиндр	37, 38	96–98

12.3. Көлбеулігі тең сызықтық беттер. 21* _(12.3) , 21.1* _(12.3) – СОЗЖ есептері	39,40	99, а, ә
12.4.Топографиялық беттер – жер бөлікшесінің моделі.Профильдер.	41,42	100, а, ә, б, в
13-тарау. Топографиялық және басқа беттерге қатысты позициялық есептер		
13.1.Тиістілік есептері. 1-ес.		99ә, 100ә
13.2. Қиылысу есептері. Қаттың жер бетіне шығу сызығы	43	101, а
13.2.1. Аралық горизонтальды анықтау	44	101, ә
13.2. 2. Жер бетіне шығу сызығы және қат қалыңдығы	45	101, б
13.3. Беттің түзумен қиылысу нүктелері	46,47	102, а, ә
13.4. Беттің қисық сызықпен қиылысуы	48	103, а, ә
13.5. Беттердің өзара қиылысуы.	43'	104–106
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары		105, 106, а,ә
3-қорытынды жұмыстар. «3.1.Топографиялық план»,«3.2. Блок-диаграмма», 1–5 есептер		14-тарауда
14-тарау. Топографиялық планды, оның блок-диаграммасын құру		107, а,ә
14.1. Пішімде үлкейтіп топографиялық бетті салу	49	107, а,ә,108
14.2. Горизонтальдардың, топографиялық бет профилінің аксонометриясы, 1–2 – ілес. ес.	50 51	109 110
14.3. Блок-диаграмманы құру	52	111
Тапсырмаға қатысты сұрақтар		
15-тарау. Сызбаларды орындау стандарттары. Тау-кен графикалық құжаттамасының стандарттары		112–116, 117, 118, 119, 120

Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары		
4-қорытынды жұмыс. «Құрылыс алаңының жер жұмыстары шекарасын құру»		16- тараудағы суреттер
16-тарау. Құрылыс алаңының жер жұмыстары шекарасын анықтау 16.1. Тапсырманың аксонометриясы. Есеп. 16.2. 1-, 2-ілес .ес. 16.3.Тапсырманы нұсқаға сәйкес планда орындау	53 54,55 56	121 122–126 127–129
Тапсырмаға қатысты сұрақтар		
17-тарау. Топографиялық беттерге қатысты ерекше сызықтар		
17.1. Көлбеулігі ең үлкен сызықтар. Көлбеулігі берілген сызықтар	41' 57	130, а 130, ә, 131
17.2. Топографиялық беттің сужинау және суайырық сызықтары		132, а,ә 133
17.3. Топографиялық беттің тереңдігі берілген сызықтары. 6,7ес.	58	134, а 134, ә

Ә. Аналитикалық геометридан қысқаша мәліметтер. Түзу, жазықтықтың, т.б. математикалық өрнектері

Бұл қосымшада берілген материал СОЗЖ есептерін шығару үшін қажет. Тарауларда ұсынылған бұл есептердің сызбасынан қажетті нүктелердің x , y , z координаталарын анықтап, оларды есептің шартына сай төмендегі теңдеулерге алмастырып, есептің шешуін аналитикалық жолымен тексеру керек. Мысалы түзу екі нүктесімен π_2 жазықтығында берілсін: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Бұл түзудің теңдеуі $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ болады. Осы теңдіктің шешуі: $y(x_2 - x_1) = x(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)$. Егер $A(2;5)$, $B(11;8)$ болса, онда нақты шешу: $9y = 3x - 3 \times 3 + 5 \times 9 = 3x + 36$. Осыдан $y = (x+12)/9$. Бұл түзу Ox не Oy осіне параллель емес және ол координаталар басынан өтпейді (төменде айтылған). Осы түзудің фронталь F ізі $y=0$ шартына сай: $0 = (x+12)/9$, $x+12=0$, $x=-12$. Оның горизонталь H ізі $x=0$, $y=4/3$. Қорытынды: AB түзуінің іздерінің координаталары $F(-12; 0)$, $H(0; 4/3)$, сызбасына сай болып шықты. Осындай әдіспен басқа есептерді де шешуге, тексеруге болады. Х мырза: соңғы нәтижеден тағы қандай мәлімет алуға болады? Жауап. Ия, әрине ол $|AB|$ -ның нақты шамасы және түзудің көрінбейтін бөлігі:

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, түзудің H нүктесінен кейінгі оң жағы көрінбейді.

1. Жазықтықтағы геометрия

1.1. Нүкте екі координатасымен анықталады: $A(x, y)$.

1.2. Түзудің жалпы теңдеуі:

$$Ax + By + C = 0.$$

Егер $A=0$, онда түзу Ox осіне параллель, егер $B=0$, онда түзу Oy осіне параллель, егер $C=0$, онда түзу координаталар басынан өтеді. Қайсыбір Oy осіне параллель емес түзудің теңдеуі төмендегідей:

$$y = kx + b,$$

мұнда k – түзудің бұрыштық коэффициенті, ол $\text{tg}\delta$ -ға тең; δ – Ox осінің оң бағытымен түзудің арасындағы бұрыш; b – түзудің Oy осінен қиған кесіндісі (оның белгісі ескеріледі).

$A(x_1, y_1)$ нүктесінен берілген бағытта өтетін түзудің теңдеуі:

$y - y_1 = k(x - x_1)$, мұнда $k = \text{tg}\delta$.

1.3. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуі:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

1.4. *Түзудің кесінділер теңдеуі.* Егер түзу координаталар осьтерінен a және b кесінділерін қиған болса (олардың белгілері ескеріледі), ондай түзудің теңдеуі:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

мұнда a – x осін-, b – y осін қию кесінділері.

1.5. Екі $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ нүктенің *арақашықтығы*:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

1.6. *Түзудің нормаль теңдеуі:*

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

мұнда p – түзудің координаталар басынан арақашықтығы, α – координаталар басынан түзуге жүргізілген перпендикулярдың Ox осіне көлбеу бұрышы ($p > 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$). Бұл теңдеуді түзудің жалпы теңдеуінен алуға болады, егер

$Ax + By + C = 0$ теңдеуін нормалаушы көбейткіш μ -ге көбейтсе: $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, μ -дың белгісі C -ның белгісіне кері болу керек.

1.7. $A(x_1, y_1)$ нүктесінен түзуге дейін *арақашықтық*:

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$$

Бұл теңдеу бойынша $d > 0$, егер A нүктесі және түзу координаталар басына қарағанда екі жақта орналасса, қарсы жағдайда $d < 0$.

1.8. *Түзулердің қиылысу нүктесі.* Бұл нүктенің координаталары (x_0, y_0) екі түзудің теңдеулерін бірге шығарса анықталады. Егер олардың теңдеулері

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ болса, онда 2 – дәрежедегі анықтауышпен қолданып, қиылысу нүктесі:

$$x_0 = (B_1C_2 - C_1B_2) : (A_1B_2 - B_1A_2), y_0 = (C_1A_2 - A_1C_2) : (A_1B_2 - B_1A_2).$$

Егер $A_1B_2 - B_1A_2=0$, онда берілген түзулер өзара *параллель*, дербес жағдайда, яғни $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 0$ тең болса, түзулер *беттеседі*.

Егер үшінші түзу $A_3x+B_3y+C_3=0$ алғашқы екі түзудің қиылысу нүктесінен өтсе, онда төмендегі шарт орындалуы керек: $A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_1B_3C_2 - A_2B_1C_3 = 0$.

1.9. Екі түзудің қиылысу нүктесінен өтетін әрбір түзудің теңдеуі, яғни түзулер *шоғының* теңдеуі:

$$(A_1x+B_1y+C_1) + \lambda (A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Мұнда λ -ны $-\infty$ -тен $+\infty$ -е дейін өзгертіп, шоқтың кез келген түзуін алуға болады. Егер екі түзудің теңдеуі нормаль түрінде берілсе, онда $\lambda = \pm 1$ жағдайда жоғарыдағы теңдеу сол түзулердің бұрыштарының биссектрисаларын анықтайды.

1.10. Екі түзудің арасындағы бұрыш. Егер түзулердің теңдеуі жалпы түрде берілсе, онда: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$, $\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, $\sin \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Егер түзулердің бұрыштық коэффициенттері k_1 , k_2 белгілі болса, онда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}},$$

мұнда φ бұрышы бірінші түзуден екіншіге дейін сағат тіліне кері өлшенеді.

1.11. Егер $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, не $k_2 = k_1$ болса, онда түзулер өзара *параллель*.

1.12. Егер $A_1A_2 + B_1B_2=0$, не $k_2 = -1/k_1$ болса, онда түзулер өзара *перпендикуляр*.

1.13. Кесіндіні берілген қатынаспен бөлу. С нүктесі АВ кесіндісін $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = \lambda$ қатынаспен бөлетін болса, оның координаталары: $x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$. АВ кесіндісінің ортасы үшін $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Егер АС және СВ кесінділерін АВ-ның бағытына сәйкес

оң не кері бағытта деп алынса, онда $\lambda < 0$ болғанда жоғарыдағы теңдеулерді АВ кесіндісін сырттай бөлетін нүктені анықтау үшін қолданады.

1.14. Декарт координаталарымен берілген, радиусы R, центрі координаталар басында *шеңбердің* теңдеуі:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Радиусы R, центрі $C(x_0, y_0)$ нүктесінде *шеңбердің* теңдеуі:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

1.15. Екінші дәрежедегі қисықтың *жалпы теңдеуі*:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Бұл теңдеу шеңберге сай болады, егер $b=0$ және $a=c$ болғанда және тек сонда ғана. *Жалпы теңдеуден* шыққан шеңбердің теңдеуі: $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0$. Мұнда

$R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$ және центрдің координаталары: $x_0 = -m, y_0 = -n$. Егер $q > m^2 + n^2$ болса, онда теңдеу ешқандай нақты сызыққа сай емес, егер $q = m^2 + n^2$, онда теңдеуді бір нүкте $M(x_0, y_0)$ ғана қанағаттандырады.

1.16. Екінші дәрежедегі қисықтың *жалпы теңдеуі эллипс* (шеңбер), *парабола* не *гиперболаны*, не екі түзуге ажыраған қисық сызықты анықтайды (7-тарауды қараңыз, [2, 14]).

1.17. 2-дәрежедегі қисық сызықтың *инварианттары*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad S = a + e.$$

Бұл шамалар тұрақты. Түрлендіруден кейін қисықтың теңдеуі $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0$ болып шықса, Δ, δ, S – дың мәндері өзгермейді.

1.18. Жалпы түрдегі теңдеуден *қисықтың түрін анықтау*.

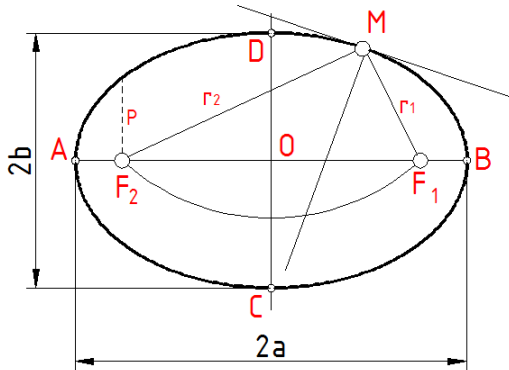
Эллипс: $\delta > 0, \Delta \neq 0$, егер $\Delta \times S < 0$, онда ол *нақты* түрде, егер $\Delta \times S > 0$, онда ол *жорамал* түрде.

Гипербола: $\delta < 0, \Delta \neq 0$, егер $\Delta = 0$, онда ол екі қиылысқан түзу.

Парабола: $\delta = 0, \Delta \neq 0$, егер $\Delta = 0$, онда ол үш түрде орналасқан екі түзу, а) *параллель*, егер $d^2 - af > 0$, ә) *беттескен*, егер $d^2 - af = 0$, б) *жорамал*, егер $d^2 - af < 0$.

1.19. *Эллипстің теңдеуі. Канондық* теңдеуі: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, егер оның осьтері координаталық осьтерімен беттесе, *параметрлік түрі* $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1.20. *Эллипстің элементтері.* АВ – үлкен осі ($2a$), CD – кіші осі ($2b$). А, В, С, D – төбелері, О – центрі, F_1, F_2 – фокустары (үлкен оське тиісті, центрден екі жақта $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ қашықтықта орналасқан нүктелер (сурет 1, парабола, гиперболоға қатысты суреттерді [2,14] алуға болады).



1-сурет

1.21. *Эллипстің фокалдық қасиеті* (анықтамасы). Эллипс геометриялық нүктелердің орны болады, егер оның кез келген нүктесі үшін оның екі фокустан арақашықтығының қосындысы тұрақты шама ($=2a$) болса.

1.22. *Эллипстің жанама және нормаль түзуі.* М (x_0, y_0) нүктесінен өтетін жанама түзуінің теңдеуі: $xx_0/a + yy_0/b = 1$. М (x_0, y_0) нүктесінен өтетін эллипске жанама мен нормаль түзулері $F_1 M, F_2 M$ түзулерінің ішкі және сыртқы бұрыштарының биссектрисалары болады. $Ax + By + C = 0$ түзуі эллипспен жанасады, егер $A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 = 0$ болса.

2. Жазықтық пен түзудің кеңістіктегі геометриясы

2.1. Нүкте кеңістікте 3 координатасымен беріледі: $A(x, y, z)$.

2.2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Егер $D=0$, онда ол координаталар басынан өтеді; егер $A=0$ (не $B=0$, не $C=0$), онда жазықтық Ox осіне (не Oy , не Oz осіне сәйкесінше) параллель болады; егер $A=B=0$ (немесе $A=C=0$, не $B=C=0$), онда жазықтық Oxy , яғни π_2 жазықтығына (сәйкесінше Oxz , не Oyz -ке) параллель орналасады.

2.3. Жазықтықтың кесінділер теңдеуі:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Мұнда a, b, c – жазықтықтың координаталар осьтерінен a, b, c кесінділерін қиғаны (олардың белгілері ескеріледі).

2.4. Кеңістіктегі бағыт бірлік векторымен $t^0(l, m, n)$ не бағыттауыш косинустарымен анықталады: $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

2.5. Екі $P_1(x_1, y_1, z_1)$ және $P_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктенің арақашықтығы: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2.6. 1. Үш нүкте $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ -ден өтетін жазықтық теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.6.2. Екі нүкте $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ -ден бағыттауыш вектор $R(l, m, n)$ -ге параллель өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

2.6.3. $P_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктеден екі бағыттауыш $R(l_1, m_1, n_1)$, $R(l_2, m_2, n_2)$ вектормен берілген түзуге параллель өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. *Есмұхан Ж. М., Есмұханова Ж. Ж.* Сызба геометрия. – Алматы: Қаз ҰТУ, 2000. – 262 б.
2. *Иванов Г. С.* Начертательная геометрия. – М.: Изд МГУЛ, 2008. – 337с.
3. *Нәби Ы. А.* Сызба геометрия және инженерлік графика. – Алматы: Бастау, 2010. – 277 б.
4. *Ыбраев А. М.* Инженерлік графика. – Алматы: Білім. 2005, 2011. – 222 б.
5. *Есмұханов Ж. М., Калинов В. А.* Инженерно-геологическая графика. – Алматы: Изд. КазПТИ, 1985. – 92с.
6. *Ысқақова С. Д., Рахметова Ш. Т.* Инженерлік графикадан есептер минимумы. Сандық белгілері бар проекциялар. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. –113 б.
7. *Искакова С. Д.* Методическое указание по курсу инженерной графики и начертательной геометрии. Раздел «Проекция с числовыми отметками». – Алма-Ата: Научно-методический кабинет МВ и ССО Каз ССР, 1980. – 20с.
8. Общие правила выполнения чертежей. Стандарты ЕСКД. ГОСТ 2.301-68...2.320- 68. – М.: Изд. Стандарт, 1984. – 210с.
9. ГОСТ 2.850-75...2. 857-75. Горная графическая документация. – М.: Изд. Стандарт, 1983. – 220 с.
10. *Нұрмаханов Б. Н., Бектыбаева З. Қ., Бәйдібеков Ә. К., т.б.* Құрылыстық сызу. – Алматы, 2011. – 238 б.
11. *Ысқақова С. Д., Ахметова М. Қ., Рахметова Ш. Т., Ғабжалилова С. М.* Инженерлік-геометриялық графикадан курстық жұмыс. – Алматы: ҚазҰТУ, 1997. – 20 б.
12. *Искакова С. Д., Зубарева Л. К.* Олимпиада по инженерной графике. – Алма-Ата: КазПТИ, 1985. – 26с.
13. *Ысқақова С. Д., Ахметова М. Қ.* Инженерлік графикадан олимпиада. –А.: ҚазПТИ, 1987. – 25 б.
14. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1953. – 608с.
15. *Ысқақова С. Д., Шынғысова Р. К., Маубекова Ә. Ш.* Негізгі позициялық есептерді тектес сәйкестікпен зерттеу. – А.: КазНТУ, Сатпаевские чтения. Сборник трудов, 2014.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз.....	3
Қолданылған белгіленулер, негізгі ұғымдар мен аксиомалар.....	8
Кіріспе.....	12
1. Проекциялау әдістері, олардың негізгі қасиеттері. Сызбаларға қойылатын талаптар. Қайтымды кескіндер-сызбалар.....	14
1.1. Центрлік проекциялар.....	14
1.2. Параллель проекциялау әдісі.....	16
1.3. Тікбұрышты проекциялар.....	18
1.4. Сызбаларға қойылатын талаптар.....	19
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	20
2. Аксонометрия, оның негізгі теоремасы. Нүкте, түзу, жазықтықтың аксонометриясы. Координатталған сызба...	21
2.1. Аксонометрия, оның қасиеттері, негізгі теоремасы	21
2.2. Нүктелер сызбасы. $1^{*}_{(2.2)}$ – СОЗЖ есебі.....	26
2.3. Түзулер сызбасы, іздері. $2^{*}_{(2.3)}$ – СОЗЖ есебі.....	28
2.4. Түзулердің орналасуы: деңгейлік, проекциялаушы, жалпы түрде. $3^{*}_{(2.4)}$, $3.1^{*}_{(2.4)}$ – СОЗЖ есептері.....	30
2.5. Жазықтықтар сызбалары.....	34
2.6. Деңгейлік, проекциялаушы, жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтар және олардың іздері. $3.2^{*}_{(2.6)}$ – СОЗЖ есебі.....	35
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	39
3. Нүкте, түзу, жазықтықтың Монж эпюрі.....	40
3.1. Нүкте эпюрі.....	43
3.2. Түзудің эпюрі, іздері.....	41
3.3. Деңгейлік және проекциялаушы түзулер. $4^{*}_{(3.3)}$ – $6^{*}_{(3.3)}$ – СОЗЖ есебі.....	44
3.4. Жазықтықтың эпюрі. Деңгейлік және проекциялаушы жазықтықтар.....	47
3.5. Жазықтықтың іздері.....	51
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	54

4. Негізгі позициялық есептер Монж эпюріңде.....	55
4.1. Тиістілік есептері.....	55
4.2. Қиылысу, параллельдік есептері. $7^{*(4,2)}$ — $12^{*(4,2)}$ — СОЗЖ есептері.....	59
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	70
 <i>1.1-қорытынды жұмыс. «Аксонетрия және Монж эпюріңің байланысы».....</i>	 71
Тапсырмаға қатысты сұрақтар, үлгілері 1.1.1, 1.1.2- суреттерде.....	76
5-тарау. Көпжақтардың эпюрі, оларға қатысты позициялық есептер.....	77
5.1. Көпжақтарға қатысты позициялық есептер.....	77
5.1.1. Тиістілік есептері. $13^{*(5,1,1)}$ —СОЗЖ есебі	78
5.1.2. Қиылысу есептері.....	82
5.2. Конуска, цилиндрге іштей не сырттай сызылған көпжақтар.....	85
5.2.1. Шеңбер мен эллипс.....	85
5.2.2. Шеңберге іштей не сырттай сызылған дұрыс көпбұрыш.....	87
5.3.1. Дұрыс призма, пирамиданың эпюрі және кимасы.....	89
5.3.2. Призма, пирамиданың аксонетриясы.....	91
5.4. Призмаға сырттай (іштей) сызылатын цилиндрдің аксонетриясы.....	93
5.5. Пирамидаға сырттай сызылатын конустың аксонетриясы.....	95
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	96
6. Монж эпюріңде қисық сызықтар, айналу және бұрама беттер.....	98
6.1. Бұрама сызықтар мен беттер. $14^{*(6,1)}$, $14.1^{*(6,1)}$ — СОЗЖ есептері.....	98
6.2. Айналу беттер	103
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	107

7. Айналу, бұрама бетерге қатысты позициялық есептер...	108
7.1. Тиістілік есептері.....	108
7.2. Қиылысу есептері.....	110
7.2.1. Қималар. 15* _(7.2.1) – СОЗЖ есебі	111
7.2.2. Беттердің түзулермен (сызықтармен) қиылысуы. 16* _(7.2.2) – СОЗЖ есебі.....	115
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	123
1.2-қорытынды жұмыс. «Көпжақтың қимасы».....	124
Тапсырмаға қатысты сұрақтар. Үлгілері 1.2.1, 1.2.2- суреттерде.....	126
8. Сандық белгішелері бар проекциялар (СБП).....	129
8.1. Нүкте мен түзудің сандық белгішелері бар проекциялар.....	130
8.2. Түзудің жатыс элементтері.....	132
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	138
9. Жазықтықтың СБП-сы, оның жатыс элементтері. 17* ₍₉₎ – СОЗЖ есебі	139
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	148
10. СБП-дағы позициялық есептер: нүкте, түзу, жазықтықтың өзара орналасуы	149
10.1. Тиістілік есептері. Нүкте мен түзу, жазықтық.....	149
10.2. Түзулердің өзара орналасуы. 18* _(10.2) – СОЗЖ есебі.....	150
10.3. Жазықтықтардың өзара орналасуы. 19* _(10.3) – СОЗЖ есебі.....	155
10.4. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы.....	158
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	163
11. СБП-да метрикалық есептер(өлшемдеу) есептер.....	164
11.1. Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтық.....	164
11.2. Өзара перпендикуляр жазықтықтар.....	167
11.3. Бұрыштардың нақты шамасын айналдыру әдісімен анықтау. 20* _(11.3) , 20.1* _(11.3) – СОЗЖ есептері	169
11.4. Арақашықтықты түрлендіру әдісімен анықтау.....	174
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	178
2-қорытынды жұмыс. «СБП-дағы позициялық және метрикалық есептер», үлгілері 2.1-2.3-суреттерінде.....	180

2.1-есепке түсініктеме және сұрақтар.....	187
2.2-есепке түсініктеме және сұрақтар.....	188
2.3-есепке түсініктеме және сұрақтар.....	188
12. Қисық сызықтар мен беттердің СБП-дағы сызбасы. Айналу және көлбеулігі тең беттер. Топографиялық беттер.....	191
12.1. Қисық сызықтар.....	191
12.2. Айналу және жалпы түрдегі конус пен цилиндр.....	192
12.3. Көлбеулігі тең сызықтық беттер. 21* _(12.3) , 21.1* _(12.3) – СОЗЖ есептері.....	196
12.4. Топографиялық беттер. Жер бөлікшесінің модельдері.....	200
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары	204
13. Топографиялық және басқа беттерге қатысты позициялық есептер.....	206
13.1. Тиістілік есептері.....	206
13.2. Қиылысу есептері. Қаттың жер бетіне шығу сызығы	207
13.2.1. Аралық горизонтальдарды анықтау.....	208
13.2.2. Қаттың жер бетіне шығу сызығы және қат қалыңдығы.....	208
13.3. Беттің түзумен қиылысу нүктелері.....	209
13.4. Беттің қисық сызықпен қиылысуы.....	212
13.5. Беттердің өзара қиылысуы.....	214
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары	215
3-қорытынды жұмыс: 3.1-тапсырма. «Топографиялық план», 3.2- тапсырма. «Блок-диаграмма», үлгілері 107, а-, 111- суреттерде.....	216
14. Топографиялық планды, оның блок-диаграммасын құру. (Осы тақырыптағы 3.1, 3.2-тапсырмаларды орындау әдістемесі).....	224
14.1. Пішімде топографиялық бетті салу.....	225
14.2. Горизонтальдардың, топографиялық бет профилінің аксонометриясы.....	227
14.3. Блок-диаграмманы құру.....	230
Тапсырмаға қатысты (жаттығулар мен өзіндік бақылау) сұрақтар.....	233

15. Сызбаларды орындау стандарттары. Тау-кен графикалық құжаттамасының стандарттары.....	234
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	238
4-қорытынды жұмыс. « Құрылыс алаңының жер жұмыстары шекараларын анықтау», үлгілері 128, а-, 129-суреттерде.....	240
16. Құрылыс алаңының жер жұмыстары шекараларын анықтау (Осы тақырыпқа қатысты 4-тапсырманы орындау әдістемесі).....	245
16.1. Тапсырма аксонометриясымен танысып, оны орындауға дайындалу.....	245
16.2. Тапсырманың жеңілдетілген түрі. Аксонометриядан планға кірісу.....	249
16.3. Тапсырманы нұсқаға сәйкес планда орындау.....	252
Тапсырмаға қатысты (жаттығулар мен өзіндік бақылау) сұрақтар.....	257
17. Топографиялық беттерге қатысты ерекше сызықтар.....	258
17.1. Көлбеулігі ең үлкен және көлбеулігі берілген сызықтар.....	258
17.2. Топографиялық беттің сужинау және суайырық сызықтары.....	260
17.3. Топографиялық бетте тереңдігі берілген сызықтар	262
Жаттығулар және өзіндік бақылау сұрақтары.....	264
Глоссарий.....	265
А қосымшасы. Тақырыптарға сәйкес СОЗЖ есептері, алгоритмдер, суреттер тізбесі.....	270
Ә қосымшасы. Аналитикалық геометриядан қысқаша мәліметтер. Нүкте, түзу, жазықтықтың, т.б. математикалық өрнектері.....	275
Библиографиялық тізім.....	281

Оқулық басылым

Софья Дінісламқызы Ысқақова
Раушан Күзенбайқызы Шыңғысова

СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ

Сандық белгішелері бар проекциялар

БДДБ бастығы

Л. Т. Қасжанова

Редакторы

Т. С. Жақсыбаева

Компьютерде беттеген

Л. Т. Қасжанова

Басуға 12.06.2017 ж. қол қойылды

Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84 1/16

№ 1 баспаханалық қағаз.

Көлемі 17,8 есепті-баспа табақ. 16,6 шартты баспа табақ.

Тапсырыс № 810. Бағасы келісімді

Қ. И. Сәтбаев атындағы

Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті басылымы,

Маркетинг және коммуникациялар департаменті

Баспа басқармасы

Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-323-082-5

