

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный исследовательский
технический университет имени К. И. Сатпаева

М. Б. Нурпеисова, Г. М. Кыргызбаева

ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан в качестве учебного пособия для PhD
докторантов высших учебных заведений, обучающихся
по специальности «Геодезия и картография»

Алматы 2016

УДК 528.2 (075.8)
ББК 26.12 я73
Н 90

Рецензенты:

Жаркимбаев Б. М., канд. техн. наук, проф. КазННТУ
имени К. И. Сатпаева

Юсупов Х. А., д-р. техн. наук, проф., Горнорудная компания
«Казахстанские минеральные ресурсы»

Касымканова Х. М. – д-р. техн. наук, проф. КазНУ
имени аль-Фараби

Печатается по плану издания Министерства образования и науки
Республики Казахстан на 2016 год

Нурпеисова М. Б.
Н 90 Физическая геодезия: Учеб. пособие / М. Б. Нурпеисова, Г. М. Кыргызбаева. –
Алматы: КазННТУ имени К. И. Сатпаева, 2016. – 230 с. Ил. 51. Табл. 2.
Библиогр. – 20 назв.

ISBN 978-601-228-901-5

В пособии, состоящем из девяти глав, изложены основы курса «Физическая геодезия». Приведены основные понятия и определения, внутреннее строение и напряженное состояние Земли, о методах определения внешнего потенциала силы тяжести Земли, даны выводы уклонов отвесных линий и вычисления высот точек поверхности Земли в различных системах. А также даны основные сведения о решении задач физической геодезии из наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ).

Учебное пособие создано на основе обобщения учебных планов ведущих вузов, в которых осуществляется подготовка специалистов по геодезии и картографии, многолетнего опыта преподавания курсов геодезии, высшей геодезии, космической геодезии и физической геодезии в Казахском национальном техническом университете имени К.И.Сатпаева и практики проведения геоинформационных и геомеханических исследований в различных регионах Республики Казахстан.

Содержание учебного пособия соответствует требованиям программы дисциплины «Физическая геодезия».

Учебное пособие предназначено для магистрантов PhD докторантов геодезических специальностей, а также географических и землеустроительных специальностей высших учебных заведений.

УДК 528.2 (075.8)
ББК 26.12 я73

ISBN 978-601-228-901-5

© Нурпеисова М. Б., Кыргызбаева Г. М. 2016
© КазННТУ им. К. И. Сатпаева, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано соответственно программе курса «Физическая геодезия», принятого для геодезических специальностей.

Содержание курса «Физическая геодезия» разделено на три части:

- проблемы изучения гравитационного поля Земли при помощи измерений силы тяжести;
- проблемы решения основных задач высшей геодезии на основе использования видов наземных геодезических, астрономических и гравитметрических измерений.
- проблемы использования ИСЗ при определении параметров гравитационного поля и фигуры Земли в целях создания единой системы координат.

Учитывая назначение учебника, содержание учебного пособия в известной мере носит ознакомительный характер, хотя некоторые его вопросы имеют важное практическое значение, например, системы высот, редукционная проблема, использование искусственных спутников Земли (ИСЗ) и некоторые другие. Эти вопросы изложены с большой подробностью.

Главное внимание уделено теоретическим вопросам использования ИСЗ для решения геодезических задач. В учебной литературе этот новый и важный раздел современной геодезической науки освещается впервые.

Авторы выражают глубокую благодарность сотрудникам кафедры высшей геодезии МИИГАиК помощь, ценные советы и внимание к работе, своим коллегам и сотрудникам кафедры маркшейдерского дела и геодезии КазННТУ.

Казахстанские ученые-геодезисты были в числе первых, применивших теоретические методы физической и космической геодезии для решения конкретных вопросов высшей геодезии. И в настоящее время исследования в области геодинамики в нашей стране и за рубежом продолжаются. Для успешного

ведения исследований в геодезии, в том числе для управления геодинамическими процессами, происходящими в недрах Земли, Вам – будущим геодезистам, картографам, землеустроителям необходимо знать основы физической геодезии и методы изучения фундаментальных параметров Земли.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Предмет физической геодезии. Сведения о методах определения фигуры Земли и гравитационного поля

«Физическая геодезия» изучает фигуры Земли как физического и геометрического тела на основе законов механики и опытных данных – результатов геодезических, гравиметрических и астрономических измерений. Если в сфероидической геодезии устанавливаются математические зависимости между элементами поверхности эллипсоида, считая его параметры известными, то физическая геодезия рассматривает методы определения параметров земного эллипсоида и методы изучения действительной фигуры Земли обычно относительно выбранного эллипсоида как поверхности относимости или сравнения.

К физической геодезии относятся также вопросы использования геодезических данных для изучения деформации земной поверхности и внутреннего строения Земли как физического тела, вопросы определения фундаментальных геодезических постоянных. Основными методами изучения фигуры Земли являются:

1. Астрономо-геодезический метод, основанный на использовании геодезических и астрономических измерений на поверхности Земли.

2. Гравиметрический метод, использующий измерение ускорения силы тяжести в различных точках земной поверхности.

3. Методы космической геодезии, основанные на использовании наблюдений искусственных и естественных космических объектов, а также далеких космических аппаратов.

Астрономо-геодезический метод. Астрономо-геодезический метод является геометрическим методом изучения фигуры Земли и базируется на так называемых градусных измерениях (основные геодезические работы), заключающихся в точном определении длин дуг меридианов и параллелей. Кроме того, на концах этих дуг выполняются астрономические определения широт и долгот. Для определения формы и размеров эллипсоида вращения, принимаемого за фигуру Земли, необходимо определить два его элемента: либо обе полуоси a и b , либо одну полуось и сжатие α , либо полуось a и эксцентриситет e .

Гравиметрический метод относится к физическим методам определения фигуры Земли. Первоначально задача изучения фигуры Земли этим методом сводилась к определению сжатия земного эллипсоида. В настоящее время она заключается в использовании измерений ускорения силы тяжести для определения гравитационного поля Земли и ее полярного сжатия.

В гравиметрическом методе эллипсоид рассматривается как физическое тело, распределение силы тяжести на поверхности которого наилучшим образом приближает реальные гравиметрические измерения. Причем эллипсоид, масса которого равна массе реальной Земли и который обладает таким свойством распределения силы тяжести на поверхности, называется *нормальным земным эллипсоидом*. Отличия значений ускорения силы тяжести в любой точке реальной Земли от «нормального значения» называются *аномалиями силы тяжести*, их геодезисты получают из гравиметрических измерений.

Методы космической геодезии. Появление спутников и новых возможностей исследования гравитационного поля существенно расширило круг задач определения фигуры Земли.

С целью определения параметров внешнего гравитационного поля и фигуры Земли в космической геодезии используются динамические методы, заключающиеся в использовании теории движения искусственных спутников Земли (ИСЗ), космических летательных аппаратов и Луны в поле притяжения Земли и изучении возмущений их орбит.

Эти методы основаны на том, что движение вышеперечисленных объектов происходит по орбитам, определяемым земным гравитационным полем, которое в свою очередь зависит от формы Земли и распределения масс в ее теле.

Через физическую геодезию, в первую очередь, геодезия в целом входит в состав науки о Земле как совокупности знаний, даваемых геофизикой, геологией и другими науками.

Под общей фигурой Земли практически понимается эллипсоид вращения, максимально приближающийся к общему земному эллипсоиду.

Под действительной фигурой Земли будем понимать физическую поверхность на суше и невозмущенную поверхность воды океанов и морей. При необходимости из измерений глубин

дна в океанах и морях всегда легко можно определить поверхность океанического и морского дна.

Действительная фигура Земли – физическая земная поверхность – определяется координатами каждой ее точки в выбранной системе. Однако практически такого определения положения всех точек поверхности Земли методами высшей геодезии не требуется. Достаточно определять пространственные координаты X , Y , Z , геодезические – B , L и H отдельных точек, равномерно расположенных на земной поверхности. Такими точками на суше могут быть пункты астрономо-геодезической сети 1-го и 2-го классов и реперы нивелирования I и II классов. Координаты других точек можно получить с необходимой точностью путем развития геодезических сетей, следующих по точности классов, а также методами топографии. Изучение действительной фигуры Земли на водной поверхности заключается в определении высот ее точек относительно эллипсоида. Выбор этих точек, их густота вытекают из требований к точности и подробности изучения формы данной водной поверхности.

1.2. Краткий очерк развития знаний о фигуре земли и методах ее изучения

Планета Земля изучается с разных позиций. Состав, строение и эволюцию нашей планеты исследует наука «Геология», которая в своих выводах опирается на данные других наук – астрономии и географии, минералогии и петрографии, кристаллографии и палеонтологии. Исследованием физических свойств Земли в целом занимается геофизика, представляющая собой комплекс таких наук, как сейсмология, метеорология, гидрология и др.

Геодезия изучает геометрию Земли, ее размеры и форму. В ряде вопросов ей помогает гравиметрия – наука о силе тяжести в разных точках земной поверхности. Главной научно-технической задачей геодезии как науки является определение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли и их изменение с течением времени.

Вопрос о том, какую форму имеет Земля, привлекал внимание многих мыслителей еще в глубокой древности. К мысли о том, что фигура Земли представляет собой тело, близкое по форме к шару, и, далее, к эллипсоиду, пришли, конечно, не сразу.

Современные знания о Земле, её форме, строении и месте во Вселенной формировались в процессе долгих исканий. Ещё в глубокой древности делалось много попыток дать общее представление о форме Земли. Пифагор, живший в VI в. до н. э., считал Землю шаром, придя к подобному решению умозрительным путем. Представления о шарообразности Земли складывались постепенно и потребовались века, чтобы сформулировать важнейшие доказательства того, что мы живем на шаре.

1. Всюду, где бы не находился наблюдатель, видимый горизонт имеет форму круга, если он не загорожен какими-то предметами.

2. При поднятии наблюдателя над земной поверхностью дальность горизонта увеличивается.

3. Постепенное появление из-за видимого горизонта приближающихся предметов. С приближением корабля к берегу сначала из-за горизонта появляется его мачта, а затем корпус.

4. Возможность кругосветных путешествий. Подвиг Магеллана и его спутников был расценен их современниками как очень веское доказательство шарообразности Земли.

5. Круговая форма земной тени на диске Луны во время лунных затмений.

Известно, что первым, кто пришел к выводу о шарообразности Земли, был знаменитый греческий философ и математик Пифагор (VI в. до н. э.). Попытки определить размеры земного шара относятся к временам глубокой древности.

Измерения на земной поверхности для определения радиуса Земли с давних пор называют *градусными измерениями*. Это название происходит от того, что в то время Земля принималась за шар, и определение ее размеров заключалось в выводе отрезка дуги большого круга земного шара, соответствующего одному градусу.

Допустим, что из непосредственных измерений на поверхности Земли получена длина некоторой дуги меридиана AB , равная s (рис. 1.1).

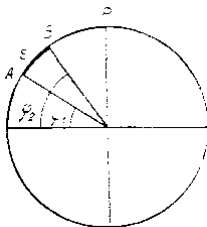


Рис. 1.1

Пусть определены из астрономических наблюдений широты конечных точек этой дуги φ_1 и φ_2 , причем $\varphi_1 > \varphi_2$, тогда, принимая Землю за шар, имеем

$$\frac{s}{s_1^\circ} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1^\circ}, \quad (1.1)$$

где s_1° – длина дуги в 1° .

Из последнего выражения получаем

$$s_1^\circ = \frac{s}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (1.2)$$

и

$$R = s_1^\circ \rho^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} s_1^\circ, \quad (1.3)$$

где R – радиус Земли.

Рассмотрим основные этапы развития знаний о форме и размерах Земли. Последовательное более подробное изложение истории градусных измерений и, вообще, работ по определению формы и размеров Земли дано в ряде сочинений по высшей геодезии [1–[3] и других, куда мы и отсылаем читателей, желающих более детально ознакомиться с этим вопросом.

Заметим лишь, что история развития градусных измерений – важнейшая часть истории геодезии как одной из областей естествознания. Проблемой изучения фигуры Земли, начиная с древних времен, занимались гениальные ученые и мыслители, обогатившие науку замечательными открытиями и выдающимися исследованиями в разных ее областях. Постановка и выпол-

нение градусных измерений непрерывно сопровождалось разработкой новых теорий, методов точных геодезических измерений и математической обработки их результатов, использованием достижений смежных областей знания – математики, механики, физики, инструментостроения и т. д.

Первое исторически достоверное определение размеров Земли принадлежит Эратосфену (III в. до н. э.). В первом столетии нашей эры греки и арабы дали несколько определений размеров Земли.

В средние века представления о шарообразности Земли и её движении вокруг Солнца отрицались как противоречащие священному писанию и объявлялись ересью. Но, несмотря на это, постановка и исполнение градусных измерений до конца XV в. происходили в обсерватории Улугбека. Обсерватория Улугбека – одна из наиболее значительных обсерваторий средневековья, построенная Улугбеком на холме в окрестностях Самарканда в 1424–1428 годы.

Остатки обсерватории были найдены и исследованы археологом В. Л. Вяткиным в 1908 году. В 1948 г. экспедиция Института истории и археологии Академии наук Узбекской ССР, руководимая археологом В. А. Шишкиным (1893–1966), завершила последний этап раскопок, обнажив фундаменты обсерватории и фрагменты здания вплоть до их основания на природной скале.

Обсерватория имела вид трёхэтажной цилиндрической постройки высотой 30,4 м и диаметром 46,40 м и вмещала ориентированный с севера на юг [4] грандиозный угломер – секстант (или квадрант) радиусом 40,21 м [5], на котором проводились измерения высоты небесных светил над горизонтом при прохождении их через небесный меридиан (рис. 1.2). Дуга инструмента ограничена двумя барьерами, облицованными мрамором. На каждом градусе круга по мрамору вырезаны деления и цифры. Каждому градусу соответствует интервал в 70 см. Вдоль барьеров идут кирпичные лестницы (рис. 1.2, б).



Рис. 1.2: а – макет обсерватории Улугбека;
б – секстант для измерения меридиана

Азимутальные наблюдения могли проводиться на горизонтальном круге на крыше здания. В обсерватории имелись и другие инструменты (звездные, астрономические часы, астролябия для измерения азимута), которыми пользовался сам великий ученый Улугбека (рис. 1.3).

В обсерватории Улугбека работали крупные астрономы того времени, и здесь к 1437 г. был составлен Гурганский каталог звёздного неба, в котором были описаны 1018 звёзд. Там же была определена длина звёздного года: 365 дней, 6 часов, 10 минут, 8 секунд (с погрешностью + 58") [6].

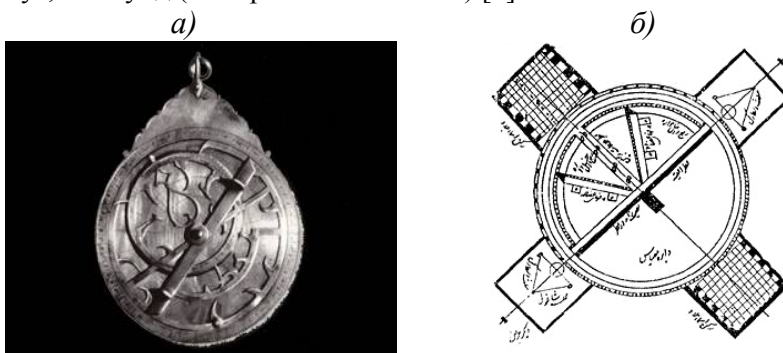


Рис. 1.3: а – астролябия Улугбека;
б – двухсторонний квадрант для измерения азимута

В средние века сведения о шарообразности Земли и ее размерах были почти забыты и лишь в XVI в., ознаменовавшемся выдающимися морскими путешествиями и открытиями, начинаются новые работы по определению размеров и формы Земли. К этому же времени относится и применение метода триангуляции в геодезических работах, которое составило эпоху в развитии и постановке градусных измерений. Трудности, связанные с преодолением естественных препятствий при непосредственных измерениях дуг на земной поверхности, отпали, резко повысилась точность измерений; появилась возможность измерения больших расстояний на земной поверхности. В Голландии и Франции в XVII в. были проведены первые градусные измерения с применением метода триангуляции. Изобретателем этого метода был голландский ученый Снеллиус (1615).

Новая эпоха в изучении фигуры Земли началась после открытия гениальным Ньютоном закона всемирного тяготения. Исходя из предположения, что наша планета была некогда в огненно-жидком состоянии, Ньютон теоретически пришел к выводу, что Земля должна иметь форму эллипсоида, сжатого по направлению полюсов.

Рассуждения Ньютона были таковы: если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то все частицы ее, будучи подвержены взаимному притяжению, должны образовать тело, имеющее форму шара. Вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси в каждой точке возникает центробежная сила, действующая перпендикулярно к оси вращения и стремящаяся растянуть Землю по направлению экватора. Очевидно, эта сила будет наибольшей во всех точках экватора, а на полюсах равна нулю. Отсюда следует, по Ньютону, что Земля вследствие суточного вращения должна принять форму, близкую к фигуре эллипсоида вращения, сплюснутого у полюсов.

Для проверки теории Ньютона следовало определить длину дуги меридиана в один градус под разными широтами. Если бы длина градуса меридиана под северной широтой получилась больше, чем под южной, то это доказывало бы сплюснутость Земли у полюсов.

Первая попытка подтвердить теорию Ньютона не увенчалась успехом. Выполненное под руководством Кассини градус-

ное измерение во Франции, вследствие ошибок измерений и методических недочетов в постановке работ, привело к противоположным результатам, т. е. из этого измерения получился вывод, что Земля представляет собой фигуру, вытянутую в направлении полюсов.

Для окончательной проверки теории Ньютона Французская академия наук организовала две экспедиции: одну – в Перу (1735–1742), где была измерена дуга, пересекая экватор; другую – в Лапландию (1736–1737), где были выполнены градусные измерения под широтой около 66° . Результаты обработки материалов этих экспедиций полностью подтвердили теорию Ньютона.

Вопрос о фигуре Земли привлекал в это время чрезвычайно большое внимание ученых всего мира.

Профессор Красовский в своем «Руководстве по высшей геодезии» [7] пишет: «...в эту эпоху успехи геодезии были необходимым обоснованием больших движений мысли в области физики, механики и астрономии».

С подтверждением теории Ньютона об эллипсоидальности Земли начался новый этап в развитии знаний о фигуре Земли.

Этот этап характерен тем, что в основу научных изысканий были положены два метода изучения фигуры Земли – геометрический и физический.

В принципе геометрический метод остался прежним, за исключением того, что для вывода земного эллипсоида возникла необходимость определять числовые значения двух его параметров, например большой полуоси a и сжатия a ; следовательно, минимально необходимое число уравнений градусных измерений стало равным двум.

Геометрический метод определения фигуры Земли иллюстрируется формулой (1.3). Входящий в нее угол – разность широт $\varphi_2 - \varphi_1$ – представляет собой разность направлений отвесных линий в точках A и B или, иначе, направлений силы тяжести. Следовательно, в геометрическом методе используются направления силы тяжести. В физическом методе используется напряжение силы тяжести, выражающееся в сообщаемом ею телам ускорении.

С открытием Ньютоном закона всемирного тяготения стало возможным рассматривать вопрос о форме Земли в целом как физическую задачу равновесия жидкого или вязкого вращающе-

гося тела, все частицы которого взаимно притягиваются по этому закону. Из элементарных рассуждений следует, что в этом случае внешняя фигура Земли должна определяться функцией величины силы тяжести как равнодействующей силы притяжения и центробежной силы.

Центробежная сила зависит от скорости вращения Земли и расстояния от данной точки до оси вращения; следовательно, при постоянной скорости вращения она закономерно убывает от некоторого максимума на экваторе до нуля на полюсах пропорционально радиусу параллели.

Если бы центробежной силы не было, то при однородной массе Земли сила тяжести во всех ее точках была бы постоянной. Таким образом, изменение силы тяжести зависит от изменения действия центробежной силы. Чем дальше земная поверхность отстоит от оси вращения, тем сильнее влияние центробежной силы, тем больше изменение силы тяжести соответственно изменяется форма поверхности. Отсюда приходим к выводу о зависимости фигуры Земли от значений силы тяжести на ее поверхности. Сила же притяжения, являющаяся главной составляющей силы тяжести, зависит и от распределения масс в теле Земли, т. е. от распределения плотности вещества внутри Земли. Поясним это обстоятельство несколько подробнее.

Закон тяготения гласит, что две материальные точки притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними; направление этой силы совпадает с прямой, соединяющей эти точки. В случае тел конечных размеров закон сохраняет свою силу, тогда взаимодействуют все точки гравитирующих тел. Равнодействующая притяжения складывается из притяжения всех элементарных частиц, составляющих тела, а направление совпадает с прямой, соединяющей центры масс.

Совокупность сил притяжения элементарными частицами тела в окружающем его пространстве образует поле тяготения данного тела.

Суммарное действие поля тяготения Земли и центробежной силы образует поле силы тяжести.

Изложенные соображения и сведения позволяют сделать важный вывод, что сила тяжести на земной поверхности – ее

величина и направление – зависит от распределения масс внутри Земли; следовательно, и фигура Земли зависит от распределения плотностей вещества, составляющего Землю.

Отсюда следует и другой весьма важный вывод, что теоретически нельзя определить фигуру Земли как планеты; необходимо наличие опытных данных, в той или иной форме определяющих гравитационное поле Земли.

Ньютон, не располагая данными о внутреннем строении Земли, для определения фигуры Земли, т. е. сжатия земного эллипсоида, сделал допущение, что Земля однородна, т. е. плотность ее во всех точках одинакова. Приняв вычисленное им отношение центробежной силы к силе притяжения на экваторе $q = \frac{1}{288}$, он для однородной Земли получил сжатие α , равным $\frac{5}{4}q$, т. е. $\alpha = \frac{1}{230}$.

Голландский ученый – физик Гюйгенс получил значение сжатия Земли, применив в общем тот же путь рассуждений, что и Ньютон. Однако, в отличие от вывода Ньютона, Гюйгенсом был рассмотрен случай крайне неоднородной плотности Земли; именно он принял, что вся масса Земли сосредоточена в ее центре. Иначе говоря, если Ньютон полагал, что притяжение Земли складывается из действия всех частиц, то Гюйгенс положил, что сила притяжения во всех точках поверхности Земли постоянна и направлена к центру планеты, к точке, имеющей массу всей Земли. При этом условии Гюйгенс получил выражение для сжатия $\alpha = \frac{1}{2}q$, т. е. $\alpha = \frac{1}{576}$.

В обоих выводах сжатия Земли в качестве исходных условий взяты крайние гипотезы об ее внутреннем строении. В действительности, плотность Земли в целом возрастает от поверхности к ее центру. Следовательно, и действительное значение сжатия должно лежать где-то между полученными Ньютоном и Гюйгенсом значениями [8].

После окончательного установления факта эллипсоидальной формы Земли во многих странах получили большое развитие работы по градусным измерениям и выводам размеров земного эллипсоида. Так, например, в XIX в. было сделано более 20 выводов размеров земного эллипсоида. Этому способствовали, с одной стороны, большой интерес, проявлявшийся учеными всех стран к проблеме фигуры Земли, новые возможности измерения

больших дуг, открывшиеся в результате применения метода триангуляции, совершенствование методов геодезической астрономии и, с другой стороны, возраставшие требования к развитию геодезических работ в целях картографирования территорий, одновременно доставлявших данные для определения размеров и формы Земли.

Определения размеров и формы Земли из градусных измерений и после открытия сфероидичности Земли долгое время основывались на чисто геометрическом решении задачи.

Как уже отмечалось, если для определения радиуса Земли, принимаемой за шар, необходимо измерить одну дугу и определить астрономические координаты ее концов, то для вывода фигуры Земли, принимаемой за эллипсоид, нужно измерить две дуги по числу параметров.

Используя закон всемирного тяготения и другие законы механики, можно при известном условии определить фигуру Земли.

Из рассмотрения работ Ньютона и Гюйгенса вытекало, что для этого нужно знать распределение плотностей в теле Земли. Эти данные, конечно, могут получаться только эмпирически, т. е. из соответствующих видов измерений; они не были известны во времена Ньютона, неизвестны с достаточной подробностью и до сих пор. Но масса Земли и ее строение, зависящие от внутреннего распределения плотностей, определяют однозначно земное притяжение; это взаимосвязанные величины. Отсюда следует, что, зная силу тяжести во всех точках поверхности Земли (ее величину и направление), можно определить ее фигуру.

Основа теории определения формы Земли по результатам измерения силы тяжести была заложена французским математиком Клеро – участником лапландской экспедиции Французской академии наук, который доказал замечательную теорему, устанавливающую изменение силы тяжести на поверхности сфероида в зависимости от широты места и сжатия Земли.

В начале XIX в. была выдвинута гипотеза изостатической компенсации, или просто изостазии, согласно которой уже принимался иной закон распределения масс в земной коре. Уже в XIX в. геометрический метод определения фигуры Земли в первоначальном виде постепенно перестает применяться; при обра-

ботке градусных измерений начинают принимать во внимание факторы, связанные с физикой Земли, путем вычисления и введения так называемых изостатических поправок в астрономические координаты. Использование гипотезы изостатической компенсации во многих случаях устранило или существенно уменьшило аномальные влияния неравномерного распределения масс в земной коре, но не всегда применение теории изостазии давало удовлетворительные результаты.

Изостатическая компенсация остается предположением, справедливым в той или иной степени. Использование этой теории при обработке астрономо-геодезических сетей показало, что она в какой-то мере и при известных условиях справедлива; но, несомненно, и то, что ее применение во всех случаях давало возможность учитывать влияние неравномерностей в строении земной коры всегда приближенно, причем степень достоверности и точности вывода из изостатических редукций оставалась неизвестной.

При таких условиях математическая обработка результатов астрономогеодезических измерений не могла осуществляться с необходимой строгостью и точностью.

В связи с этим следует отметить, что даже в первой четверти XX в. высшая геодезия еще не располагала строгой математической теорией обработки всех видов геодезических сетей высокой точности (астрономо-геодезических, нивелирных и гравиметрических) и решения главных научных и научно-технических задач.

Такая строгая теория была создана советской научной школой.

Переходя к краткому описанию научных и научно-технических работ в области высшей геодезии начиная со второй четверти XX в., следует, во-первых, отметить получение в 1928 г. голландским ученым Венинг-Мейнесом формул для вычисления уклонений отвесных линий как функции аномалий силы тяжести. Эти формулы были получены принципиально просто путем нахождения соответствующих производных от формулы Стокса для расстояния от геоида до эллипсоида.

Этим самым был сделан серьезный шаг в области теории изучения фигуры Земли. Но вопросы практического использования этих формул автором не были решены. Для вычисления уклонений отвесной линии по формулам Венинг-Мейнеса необходимо знать

аномалии силы тяжести для всей поверхности Земли. Следует заметить, что выполнение работ по измерению силы тяжести на Земле существенно отставало от успехов теории. В СССР, в соответствии с постановлением Совета Труда и Оборона, с 1932 г. началась планомерная общая гравиметрическая съемка на территории страны. Гравиметрические работы на море в начале второй четверти XX в., по существу, имели опытный характер.

Кроме того, поскольку формулы Венинг-Мейнеса получены из формул Стокса, то условие, поставленное при выводе формулы Стокса, что сила тяжести должна быть измерена на поверхности геоида и что вне поверхности геоида нет внешних притягивающих масс, остается и для формул Венинг-Мейнеса. Поскольку для реальной земной поверхности это не соблюдается, то применение формул Венинг-Мейнеса так же, как и формулы Стокса для определения фигуры геоида, продолжало оставаться недостаточно строгим.

В связи с большим развитием геодезических работ на такой огромной территории, какой обладает СССР, перед советскими учеными-геодезистами встала задача разработки теории и методов точной математической обработки результатов геодезических измерений. Эллипсоид Бесселя, оказавшийся не подходящим для территории СССР, заменен в 1944 г. эллипсоидом Красовского, вывод числовых параметров которого осуществлен на основании наиболее обширных материалов геодезических измерений. Обстоятельно получены координаты исходного геодезического пункта в Пулково, что определило положение эллипсоида в теле Земли.

Для обеспечения строгости обработки триангуляции проф. Красовский предложил все результаты измерений на местности точно проектировать на поверхность референц-эллипсоида. В связи с этим возникла необходимость точного решения редуccionной проблемы, в которой наиболее сложным, нерешенным вопросом было нахождение величин, определяющих редуccion за переход от непосредственных измерений на земной поверхности к соответствующим элементам на поверхности референц-эллипсоида. Этими величинами являются: расстояния от точек земной поверхности до поверхности эллипсоида по нормальям к последнему и уклонения отвесной линии в каждом геодезическом пункте. Для решения этой задачи М. С. Молоденский по идее

Ф. Н. Красовского разработал метод астрономо-гравиметрического нивелирования, позволяющий с заданной точностью вычислять названные величины на основе совместного использования результатов астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и без знания аномалий силы тяжести для всей поверхности Земли. Этим самым, казалось бы, непреодолимые трудности, вызванные отсутствием мировой гравиметрической съемки, были устранены.

Научные работы Молоденского определили новый этап в развитии теории фигуры Земли. Он показал, что определение фигуры геоида только по одним астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным без применения гипотез о строении Земли невозможно. Следовательно, невозможно и точное решение редукционной проблемы путем проектирования на геоид, а с геоида на референц-эллипсоид, тогда как такой путь решения задачи до работ Молоденского считался единственно возможным. Молоденский по-новому поставил и решил проблему изучения фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля.

Разработанная теория определяет непосредственно *фигуру физической поверхности Земли и внешнее гравитационное поле Земли*. Изучение фигуры геоида, считавшееся ранее одной из основных задач высшей геодезии, становится необязательным.



Разработанное Молоденским строгое построение теории изучения фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля обеспечивает строгое решение научных и практических задач высшей геодезии без привлечения каких-либо гипотез. Как следствие этого, точность и достоверность решения геодезических задач стали зависеть только от ошибок и полноты непосредственных геодезических измерений, но не от приближенности и слабых мест теории, как это было до работ Молоденского.

Теория Молоденского и разработанные на ее основе конкретные методы изучения фигуры Земли предусматривают совместное использование в качестве опытных данных всех видов наземных измерений: угловых, линейных нивелирных, гравиметрических и астрономических. Каждый из указанных видов измерений стал обязательной составной частью комплекса основных геодезических работ. В последние годы сюда присоединились методы космической геодезии. Таким образом, современный этап научных исследований и практических работ по определению фигуры Земли характеризуется органическим сочетанием и взаимосвязью геометрического и физического методов решения всех геодезических задач на основе общей математически строгой теории.

После окончательного установления факта эллипсоидальной формы Земли большое развитие получили работы по градусным измерениям и выводам размеров земного эллипсоида. В XIX в. было сделано более 20 выводов размеров земного эллипсоида. Приведем некоторые результаты таких определений (табл. 1.1).

Таблица 1.1
Параметры референц-эллипсоидов

Ученые	Государство	Год	a , м	a
Деламбр	Франция	1800	6 375 653	1:334,0
Бессель	Германия	1841	6 377 397	1:299,2
Кларк	Великобритания	1866	6 378 206	1: 94,98
Хейфорд	США	1910	6 378 388	1:297
Красовский	СССР	1940	6 378 245	1:298,3

Понятие геоид ввел немецкий физик И. Листинг в 1873 г. для обозначения формы Земли. Итак, геоид – это геометрическое тело, ограниченное уровневой поверхностью, которая совпадает с поверхностью морей и океанов при спокойном состоянии водных масс и мысленно продолжиться под материками так, чтобы направления сил тяготения пересекали ее под прямым углом. Отклонения физической поверхности Земли от геоида видны на рис. 1.4.

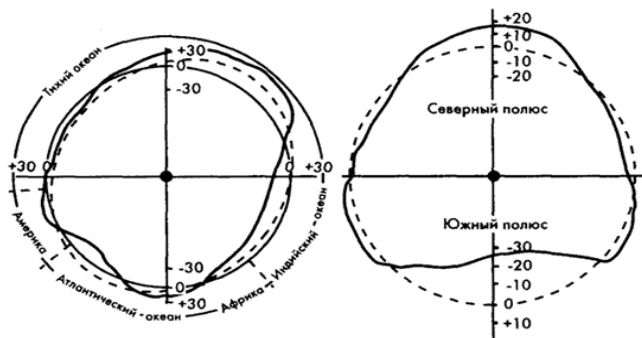


Рис. 1.4. Условные сечения Земли по нулевому (Гринвичскому) меридиану и экватору:

Пунктир – эллипсоид. Сплошная линия на первом сечении – геоид.
На шкалах показаны отклонения физической поверхности
Земли от геоида в километрах

Поверхность геоида замкнута, всюду выпукла, не имеет складок или каких-либо выделяющихся поверхностей. В то же время она (как и отвес) чутко «реагирует» не только на тяготение Земли и центробежную силу, но и на любые аномалии силы тяжести, вызванные, например, неоднородностью земной коры (в частности, залежами полезных ископаемых).

Поверхность геоида нельзя описать ни одной из математических формул. Из-за неравномерного размещения масс внутри Земли поверхность геоид имеет сложную, неправильную форму. Поэтому за математическую фигуру для Земли принимают эллипсоид вращения (сфероид), наиболее приближенный к геоиду (рис. 1.5).

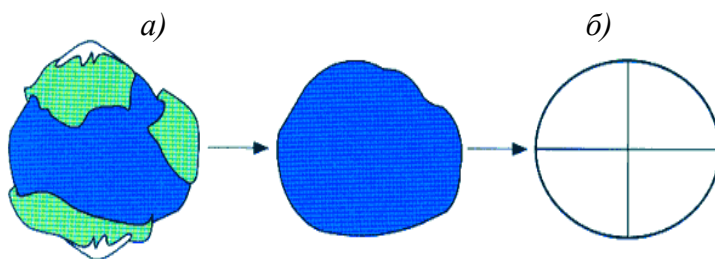


Рис. 1.5. Формы Земли:

а) поверхность планеты; б) геоид; в) эллипсоид вращения

Изучение формы геоида составляет главную задачу высшей геодезии. Эта задача состоит из двух частей: определения параметров эллипсоида, близкого к геоиду, и положения отдельных точек геоида по отношению к эллипсоиду. В решении этих задач используются и гравиметрические данные. При этом они позволяют определять только форму, но не размеры геоида. Вот почему сочетание геодезических и гравиметрических методов при изучении фигуры Земли совершенно необходимо.

Теоретически форму геоида можно представить следующим образом. В каждой точке Земли существует так называемый потенциал силы тяжести – величина, характеризующая интенсивность, «напряженность» этой силы. Потенциал силы тяжести математически можно представить как сумму бесчисленного множества слагаемых, называемых *гармониками*. Чем больше слагаемых известно, тем точнее выразится потенциал силы тяжести, который и определяет форму геоида.

Создаваемые ныне цифровые модели планетарного геоида строятся на основе анализа возмущения (уклонения от расчетных) орбит искусственных спутников Земли и данных наземных гравиметрических измерений.

Эллипсоид вращения, форма и размеры которого близки к форме и размерам геоида, называется *земным*. Размеры и форма эллипсоида вполне определяются двумя параметрами: большой полуосью a и сжатием α (или эксцентриситетом e).

$$\alpha = \frac{a - b}{a}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (1.4)$$

где b – малая полуось эллипсоида вращения.

Для практической реализации земной эллипсоид необходимо ориентировать в теле Земли определенным образом. При этом выдвигается общее условие: ориентирование должно быть выполнено таким образом, чтобы разности астрономических и геодезических координат были минимальными. Земной эллипсоид может подбираться так, чтобы данное условие было выполнено в некоторой области, стране или даже в группе стран (например, СНГ). В этом случае ориентирование эллипсоида подчиняется следующим требованиям:

1. Малая полуось эллипсоида должна быть параллельна оси вращения Земли.

2. Поверхность эллипсоида должна находиться ближе к поверхности геоида в пределах данной страны.

Эллипсоид, удовлетворяющий этим требованиям и принятый для обработки геодезических измерений законодательно, называется *референц-эллипсоидом*.

Для закрепления референц-эллипсоида в теле Земли необходимо задать геодезические координаты B_0, L_0, H_0 начального пункта геодезической сети и начальный азимут A_0 на соседний пункт. Совокупность этих величин называется *исходными геодезическими датами*.

Если подбирать эллипсоид для Земли в целом, то он должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Малая полуось должна совпадать с осью вращения Земли.
2. Центр эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли.
3. Высоты геоида над эллипсоидом h (так называемые *аномалии высот*) должны подчиняться условию.

$$\sum_1^{\infty} h_i^2 = \min .$$

Эллипсоид, удовлетворяющий этим требованиям, называется *общим земным эллипсоидом*.

Поскольку требования к общему земному эллипсоиду на практике удовлетворяются с некоторыми допущениями, а выполнение последнего в полном объеме вообще недопустимо, то в геодезии и смежных науках могут использоваться различные реализации общих земных эллипсоидов, параметры которых очень близки, но неодинаковы.

При ориентировании общего земного эллипсоида в теле Земли (в отличие от референц-эллипсоида) нет необходимости вводить исходные геодезические даты.

Параметры общеземных эллипсоидов приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Параметры общеземных эллипсоидов

Название эллипсоида	Год	Большая полуось a , м	Полярное сжатие α	Метод определения параметров эллипсоида
WGS-84	1984	6 378 137	1:298,257 223 563	Спутниковые измерения
ПЗ-90	1990	6 378 136	1:298,257 839 303	Спутниковые измерения

Наиболее широкое использование в настоящее время получил геоцентрический (глобальный) эллипсоид WGS-84. Он служит основой для измерения местоположений во всем мире.

Поддержка параметров общеземных и референцных эллипсоидов и установленных на их основе координатных систем осуществляется с помощью пунктов опорных геодезических сетей, постоянными наблюдениями за спутниками, определением их эфемерид, службой времени и др. В последние годы (конец XX и начало XXI вв.) параметры фигуры Земли и внешнего гравитационного потенциала определены с использованием космических объектов и применением астрономо-геодезических и гравиметрических методов исследований так надежно, что теперь речь идет об оценке их измерений во времени.

1.3. Сведения о строении Земли

Определение фигуры Земли зависит от внутреннего строения и распределения масс, составляющих нашу планету.

Изложим некоторые весьма краткие сведения о внутреннем строении Земли.

Строгой теории, основанной на непосредственных экспериментальных данных о внутреннем строении Земли, ее происхождении, еще нет, а имеющиеся суждения носят характер гипотез, основанных на изучении факторов, связанных со строением Земли и различно объясняющих наблюдаемые явления и факты. Можно сказать, что почти все гипотезы по этому вопросу основаны на использовании и анализе косвенных данных, к которым относятся гравитационное и магнитное поля Земли, скорость распространения сейсмических волн, колебания земных полюсов, приливные деформации земной поверхности, изучение тепловых потоков Земли, электропроводность и многие другие.

Эти косвенные данные допускают различные толкования, позволяют иметь по различным вопросам различные точки зрения, вплоть до диаметрально противоположных. Поэтому дальнейшие исследования могут внести существенные коррективы в современные представления о строении Земли и приводимые ниже сведения. Дополнительно отметим, что многое в отношении наружной части Земли – земной коры может быть окончательно установлено

в результате сверхглубокого бурения, проекты которого находятся в стадии разработки и осуществления [9].

Информацию о внутреннем строении планеты получают, исследуя закономерности распространения сейсмических волн по земной поверхности при землетрясениях; строение метеоритов, являющихся остатками *«строительного материала»* планеты; химический состав редких пород, формирующих мантию; гравитационное и магнитное поля Земли; колебание земных полюсов; тепловые потоки Земли и т. д. Эти данные позволяют сделать вывод о том, что Земля состоит из четырех различных концентрических слоев: земной коры, мантии, внешнего и внутреннего ядра.

Изучение путей и скорости распространения в недрах Земли сейсмических волн позволили разработать сейсмическую модель её внутреннего строения. Широко известная модель внутреннего строения Земли (деление ее на ядро, мантию и земную кору) разработана сейсмологами Г. Джеффрисом и Б. Гутенбергом еще в первой половине XX века. Решающим фактором при этом оказалось обнаружение резкого снижения скорости прохождения сейсмических волн внутри земного шара на глубине 2900 км при радиусе планеты 6 371 км (рис. 1.6).

Скорость прохождения продольных сейсмических волн непосредственно над указанным рубежом равна 13,6 км/с, а под ним – 8,1 км/с. Это и есть граница мантии и ядра. Соответственно радиус ядра составляет 3471 км. Верхней границей мантии служит сейсмический раздел Мохоровичича, выделенный югославским сейсмологом А. Мохоровичичем (1857–1936) еще в 1909 году. Он отделяет земную кору от мантии. На этом рубеже скорости продольных волн, прошедших через земную кору, скачкообразно увеличиваются с 6,7–7,6 до 7,9–8,2 км/с, однако происходит это на разных глубинных уровнях. Под континентами глубина раздела (то есть подошвы земной коры) составляет первые десятки километров, причем под некоторыми горными сооружениями (Памир, Анды) может достигать 60 км, тогда как под океанскими впадинами, включая и толщу воды, глубина равна лишь 10–12 км. Вообще же земная кора в этой схеме вырисовывается как тонкая скорлупа, в то время как мантия распространяется в глубину на 45 % земного радиуса.

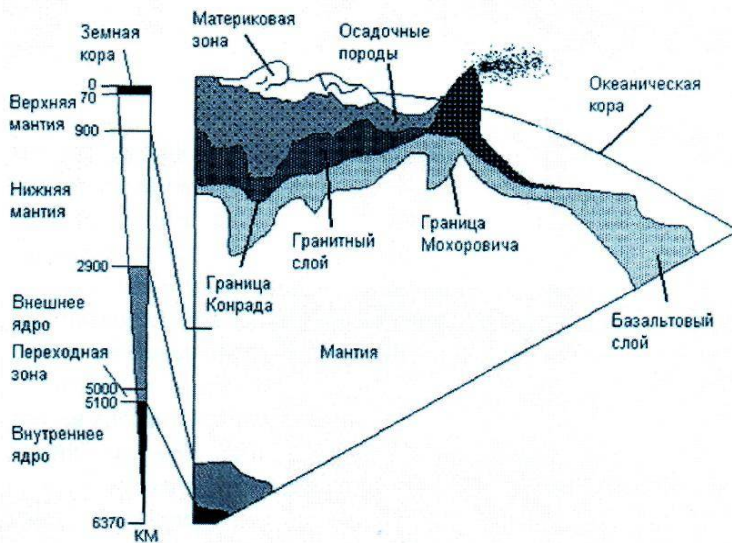


Рис. 1.6. Схематическое внутреннее строение Земли

Твердую оболочку Земли называют *литосферой*. Ее можно сравнить со "*скорлупой*", охватывающей всю поверхность Земли. Но эта "*скорлупа*" как бы растрескалась на части и состоит из нескольких крупных литосферных плит, медленно перемещающихся одна относительно другой. По их границам концентрируется подавляющее большинство очагов землетрясений. Верхний слой литосферы — эта земная кора, минералы которой состоят преимущественно из окислов кремния и алюминия, окислов железа и щелочных металлов. Земная кора имеет неравномерную толщину: 35–65 км на континентах и 6–8 км под дном океанов [10].

Земная кора — самая неоднородная и сложно построенная. Из нескольких типов земной коры преобладающее распространение имеют материковая и океаническая; в строении первой различают три слоя: верхний — осадочный (от 0 до 20 км), средний, называемый условно «*гранитным*» (от 10 до 40 км), и нижний — «*базальтовый*» (от 10 до 70 км), отделяющийся от «*гранитного*» поверхностью Конрада.

Мантия составляет 67 % всей массы Земли. Выше границы 660 км находится верхняя мантия, а ниже, соответственно, нижняя. Возможно и то, что эти две части мантии имеют разный состав и физические характеристики. Теплоперенос в мантии происходит методом медленной конвекции, средством пластической деформации минералов. Скорости движения вещества при мантийной конвекции составляют порядка пары см/год.

На глубине 120–250 км под материками и 60–400 км под океанами залегает слой мантии, называемой *астеносферой*. Здесь вещество находится в близком к плавлению состоянию, вязкость его сильно понижена.

Все литосферные плиты как бы плавают в полужидкой астеносфере, как льдины в воде. Более толстые участки земной коры, а также участки, состоящие из менее плотных пород, поднимаются по отношению к другим участкам коры. В то же время дополнительная нагрузка на участок коры, например, вследствие накопления толстого слоя материковых льдов, как это происходит в Антарктиде, приводит к постепенному погружению участка. Такое явление называется *изостатическим выравниванием*.

Ниже астеносферы, начиная с глубины около 410 км, "упаковка" атомов в кристаллах минералов уплотнена под влиянием большого давления. Резкий переход обнаружен сейсмическими методами исследований в 1906 г. на глубине 2880–2920 км. Выше этой отметки плотность вещества составляет $5\,560\text{ кг/м}^3$, а ниже ее – $10\,080\text{ кг/м}^3$. Здесь начинается земное ядро, или, точнее говоря, внешнее ядро, так как в его центре находится еще одно – внутреннее ядро, радиус которого 1250 км. С существованием жидкого внешнего ядра связывают происхождение магнитного поля Земли.

Граница раздела внешнего ядра характерна тем, что на ней резко падает скорость продольной волны от 13,6 до 8,1 км/с. Поперечная волна, вообще, через внешнее ядро не проходит, что говорит о том, что оно жидкое. Твердое, внутреннее ядро обнаружила Леман (Дания) в 1936 году. Она показала, что оно расположено на глубине приблизительно равной 5 000 км.

С глубиной в Земле изменяются значения плотности, давления, силы притяжения, упругих свойств вещества, вязкости и температуры (рис. 1.7).

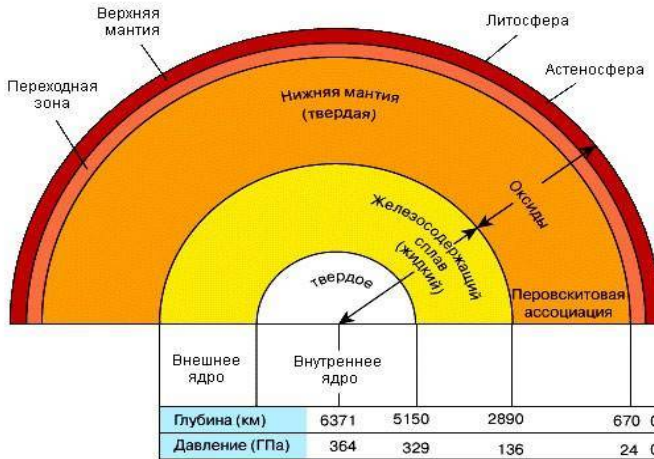


Рис. 1.7. Строение Земли и изменение давления с глубиной

Средняя плотность земной коры в целом – $2,8 \text{ т/м}^3$. Средняя плотность осадочного слоя коры – $2,4\text{--}2,5 \text{ т/м}^3$, «гранитного» – $2,7 \text{ т/м}^3$, «базальтового» – $2,9 \text{ т/м}^3$. На границе земной коры и мантии (поверхность Мохоровичича) плотность увеличивается скачком от значений $2,9\text{--}3,0$ до $3,1\text{--}3,5 \text{ т/м}^3$. Далее она плавно растет до $12,5 \text{ т/м}^3$ в центре Земли.

Ускорение силы тяготения в Земле не изменяется скачком. До глубины 2500 км оно отклоняется от значения 10 м/с^2 менее чем на 2 %, на границе ядра равно $10,7 \text{ м/с}^2$ и далее плавно убывает до нуля в центре Земли.

По данным о плотности и ускорении гравитации вычисляется давление, которое непрерывно растёт с глубиной. Зная плотность и скорости сейсмических волн, вычисляют величины, характеризующие упругие свойства материала Земли. В земной коре и верхней мантии температура повышается с глубиной. В

мантии температура под материковой корой предполагается близкой к 600–700 °С. Оценка температур для более глубоких слоев мантии и ядра Земли носит весьма предположительный характер. По-видимому, в ядре она не превышает 4000–5 000 °С.

При такой температуре и давлении вышележащих слоев до 4 млн. атмосфер в центре упругость внутренних частей ядра в 2,5 раза больше упругости стали. При этих условиях вещество в ядре Земли находится в особом «металлическом» состоянии. Плотность в центре Земли – 13 г/см³.

Земная кора – единственная из внутренних геосфер, доступная непосредственному изучению.

Геодезия играет важную роль в изучении строения Земли, получая высокоточные измерения для количественной фиксации и характеристики происходящих деформаций на земной поверхности. Неправильности в распределении масс земной коры отражают отступление реального гравитационного поля от нормального. При этом земная кора составляет незначительную часть от объема Земли. Отсюда следует, что отступления геоида от земного эллипсоида и, соответственно, отклонения отвесных линий являются малыми величинами, что облегчает их изучение.

Отметим характеристики Земли, достаточно хорошо согласующиеся с наблюдениями.

1. С точностью до малых величин порядка сжатия Земля в целом имеет эллипсоидальную форму, совпадающую с фигурой равновесия тела, состоящего из вещества, по своим свойствам близкого к вязкой жидкости.

2. Результаты обработки наблюдений искусственных спутников Земли показали, что сжатие Земли не вполне соответствует фигуре равновесия вращающегося тела. Это означает, что в теле Земли существуют долговременные напряжения, вызывающие отклонения от равновесного состояния. Отсюда следует, что земное вещество обладает прочностью, отличающей его по свойствам от жидких и вязких тел. В то же время на основе изучения ряда явлений (приливы, колебания полюса) следует, что земное вещество довольно близко по своим свойствам к идеально упругому телу. Общий вывод, который делают геофизики, заключается в том, что вещество Земли обладает и вязкостью, и

твердостью и, следовательно, оно не может быть признано ни идеальной жидкостью, ни идеально упругим телом. Такое вещество называют *упруговязким*. Тело из такого вещества обладает тем свойством, что при воздействии на него силы оно в течение некоторого времени реагирует как упругое; если же действие силы происходит в течение времени, значительно большего, то тело начинает реагировать как вязкое. Время τ называется *периодом релаксации вещества*. Земное вещество, вероятно, обладает этим интересным свойством [11].

3. Некоторые постоянные Земли, установленные в настоящее время, имеют следующие значения (размеры эллипсоида Красовского):

- а) масса – $6 \times 10^{+27}$ г;
- б) средняя плотность – 5,52 г/см³;
- в) момент инерции – 0,331 М а²;
- г) объем – 1 083 320 млн. км³;
- д) длина экватора — 40 076 км;
- е) длина меридиана — 40 008 км;
- к) поверхность Земли — 510 млн. км²;
- л) поверхность Мирового океана — 361 млн. км²;
- и) поверхность суши — 149 млн. км²;
- к) ускорение силы тяжести на экваторе — 978 500 мгал.

Известный интерес в плане настоящего учебника могут представлять и следующие характеристики Земли как планеты:

- среднее расстояние от Земли до Солнца — 149 509 000 км;
- длина земной орбиты — 939 120 000 км;
- средняя скорость движения Земли по орбите — 29,70 км/с;
- скорость движения точки экватора вследствие суточного вращения Земли – 465 м/с;
- среднее расстояние от Земли до Луны – 384 395 км.

4. Плотность вещества в теле Земли возрастает от поверхности к центру, подтверждается (§2) величиной сжатия. Этот вывод определенно вытекает из приведенных выше значений моментов инерции, полученных из обработки наблюдений за движением искусственных спутников Земли. Это, наконец, следует из приведенного значения средней плотности Земли. Наибольшая плотность горных пород, находящихся на земной

поверхности (в верхнем ее слое, доступном для человека), не превышает $3,3 \text{ г/см}^3$. Поэтому превышение более чем в полтора раза средней плотности Земли над плотностью самых твердых поверхностных горных пород свидетельствует о значительном увеличении плотности ее в центре.

В толще земной коры плотность составляющих ее пород на одинаковых глубинах резко различается; кроме того, сама физическая поверхность имеет неправильную форму, вызывающую в разных частях избытки и недостатки масс. В этом смысле приходится говорить о неравномерном распределении масс внутри земной коры. Если бы не было этих неравномерностей, то фигура Земли совпала бы с эллипсоидом с точностью до первой степени сжатия. Очевидно, в этом случае и направления отвесной линии совпали бы с направлениями нормалей к эллипсоиду при условии, конечно, правильных его размеров и ориентировки в теле Земли.

Сжатие Земли в целом, как мы видели, зависит от распределения масс внутри всей Земли; отступления от общей фигуры Земли, которой является эллипсоид вращения, вызываются неравномерностями размещения масс внутри земной коры. Учитывая это обстоятельство, сообщим некоторые дополнительные сведения о строении земной коры.

Земная кора отличается сложным строением вследствие того, что она представляет собой граничную область между твердой Землей, гидросферой и атмосферой; она принимает на себя энергию, поступающую от Солнца. Без каких-либо внешних препятствий на ней могут происходить перемещения пород как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Происходящие процессы внутри Земли непрерывно воздействуют на строение земной коры, изменяя ее; само вещество земной коры непрерывно пополняется за счет недр Земли.

Земная кора по структуре делится на два вида: *континентальный и океанический*.

Континентальный вид имеет, как указывалось, толщину в среднем 30–40 км. Земную кору на континентах разделяют на три основных слоя: верхний слой – осадочный, средний – гранитный, нижний слой, называемый *базальтовым* (см. рис. 1.6). Плотность гранитного слоя $\rho_m \approx 2,7 \text{ г/см}^3$, плотность базальтового $\rho_m \approx 3,0$

г/см³. Океаническая кора характерна значительно меньшей толщиной: она по составу и свойствам ближе к веществу базальтового слоя континентальной коры. Как правило, чем больше внешний рельеф Земли (горные районы), тем глубже нижняя граница земной коры. Описанный выше континентальный тип строения коры наиболее ярко проявляется именно в горных областях. Обратная картина наблюдается в океаническом типе. В платформенных областях и в районах прогиба земной коры толщина ее имеет некоторое среднее значение. Самые верхние слои земной коры состоят преимущественно из пластов осадочных горных пород. Толщина этих пластов в редких случаях достигает 15–20 км, а в отдельных районах их нет совсем.

Таким образом, можно говорить о наличии трех слоев земной коры: *осадочного, гранитного и базальтового*.

Наконец отметим, что земная кора находится в непрерывном движении. Часть этих движений имеет ясно выраженный периодический характер, например приливные деформации. Другая часть движений земной коры отличается однообразием в течение длительного периода времени. Установлено, что любая часть земной коры испытывала или испытывает вертикальные движения, имеющие колебательный характер.

Различают два типа колебательных движений, характерных для платформенных и геосинклинальных областей земной поверхности.

Платформенным свойственны медленные вертикальные движения, охватывающие территории протяженностью в сотни тысячи километров; геосинклинальным – большой размах и большая скорость движений, происходящих как на значительных, так и коротких расстояниях. Наряду с вертикальными перемещениями, разрывами, складками и другими изменениями вертикального направления в геосинклинальных областях выявляются горизонтальные перемещения вещества земной коры, надвиги одних пород на другие и т. п. Большинство этих явлений связано с процессами, происходящими внутри Земли. Поэтому изучение и правильная научная интерпретация этих явлений имеет чрезвычайно большое значение для познания строения, развития, структуры и состава недр Земли, являющихся богатейшей сокровищницей человечества.

Выше приведено весьма схематическое и очень обобщен-

ное описание внутреннего строения Земли; существует огромное число промежуточных состояний ее внутреннего строения и конечно, других физических и геометрических характеристик как материального тела. Это естественно; за миллиарды лет существования нашей планеты она непрерывно испытывала воздействие многообразных внешних и внутренних влияний, вызывающих непрерывный процесс различных по характеру и интенсивности изменений. Это и определяет сложность внутреннего состояния Земли и невозможность представления ее строения простой схемой без существенных обобщений.

Геодезия играет важную роль в решении проблемы изучения строения Земли; ее задача – точнейшие измерения для количественной фиксации и характеристики происходящих деформаций на земной поверхности по особым программам, учитывающим современные взгляды и знания о строении коры и происходящих в ней процессах.

Чрезвычайно важным обстоятельством, благоприятным для решения основной научной задачи геодезии, является то, что земная кора, в которой сосредоточены неправильности в распределении масс, непосредственно определяющие отступления реального гравитационного поля от нормального, составляет около 1 % объема Земли и по массе – около 0,5 % массы Земли. Отсюда следует, что вызываемые неправильностями земной коры отступления геоида от земного эллипсоида и, соответственно, отклонения отвесных линий являются малыми величинами. Это, конечно, облегчает их изучение как при теоретических исследованиях, так и при постановке и выполнении измерений на земной поверхности.

2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Гравитационное поле Земли, поле силы тяжести, силовое поле, обусловленное притяжением (тяготением) Земли и центробежной силой, вызванной её суточным вращением. Оно зависит также (незначительно) от притяжения Луны, Солнца и других небесных тел и масс земной атмосферы.

Гравитационное поле Земли характеризуется силой тяжести, потенциалом силы тяжести и различными производными от него. Потенциал имеет размерность $2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. За единицу измерения первых производных потенциала, в том числе силы тяжести, в гравиметрии принимается миллигал (мгл), равный $10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$, а вторых производных – этвеш (Е), равный 10^{-9} с^{-2} . Часть потенциала силы тяжести, обусловленная только притяжением масс Земли, называется *потенциалом земного притяжения*, или *геопотенциалом* [12].

Потенциал силы тяжести используется при изучении фигуры Земли, близкой к уровенной поверхности гравитационного поля Земли, а также в аэродинамике при изучении движения искусственных спутников Земли (уровенной называется поверхность, во всех точках которой потенциал имеет одинаковое значение; сила тяжести направлена к ней по нормали). Одна из уровенных поверхностей, которая совпадает с невозмущённой средней поверхностью океанов, называется *геоидом*. По направлению силы тяжести устанавливается отвес и определяется положение астрономического зенита. Поскольку отклонения отвеса приближённо равны отношению горизонтальной составляющей притяжения к силе тяжести, то знание их величин в определённом смысле позволяет судить и о гравитационном поле Земли.

Вторые производные потенциала силы тяжести применяются при решении геологоразведочных и геодезических задач. Вертикальный градиент силы тяжести, соответствующий нормальной части гравитационного поля Земли, от полюса к экватору изменяется всего на 0,1 % от его полной величины, равной в среднем для всей Земли 3086 этвеш.

Намного меньше по абсолютной величине нормальные горизонтальные градиенты силы тяжести и вторые производные потенциала силы тяжести, характеризующие кривизну уровенной поверхности Земли. Аномальная часть вторых производных потенциала позволяет судить о плотностных неоднородностях в

верхних частях земной коры. По величине она достигает в равнинных местах десятков, а в горных – сотен этвеш. В гравиметрической разведке, помимо вторых производных потенциала силы тяжести, используются третьи производные потенциала, получаемые путём пересчёта по аномалиям силы тяжести. Сила тяжести измеряется гравиметрами и маятниковыми приборами, а вторые производные потенциала силы тяжести – гравитационными вариометрами [13].

Изучение реального гравитационного поля Земли на основе результатов геодезических измерений позволяет решать основную задачу геодезии – определение фигуры Земли.

Внешним гравитационным полем Земли называют совокупность сил тяжести $\vec{g}$ в окружающем Землю пространстве и на ее поверхности. На материальную точку поверхности Земли действуют две силы: сила земного притяжения F и центробежная сила Q , направленная перпендикулярно оси вращения. Равнодействующая этих сил называется *силой тяжести*.

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{Q}; \quad (2.1)$$

$$F = f \frac{mM}{R^2}; \quad (2.2)$$

$$Q = m\omega^2 \rho, \quad (2.3)$$

где m – масса точки A ; M, R – масса и радиус Земли, $f = 6.7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная тяготения; ρ – расстояние точки от оси вращения; ω – угловая скорость вращения Земли.

Основная ориентирная линия при всех видах геодезических измерений – отвесная линия, т. е. направление силы тяжести.

Значение силы тяжести определяется главным образом силой притяжения, даже на экваторе, где центробежная сила достигает максимума, отношение центробежной силы к силе притяжения равно 1/288. Поэтому изучение гравитационного поля Земли фактически сводится к изучению силы притяжения Земли.

В основе теории изучения гравитационного поля Земли лежат основные законы динамики и закон всемирного тяготения.

Сила тяжести характеризуется ускорением, которое приобретает свободно падающее тело. Единица ускорения 1 гал = 1 см/с^2 .

Приборы, служащие для измерения силы тяжести называются *гравиметрами*.

Свойства пространства вокруг масс и их взаимодействие можно изучать, вводя понятие потенциальной энергии. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, сила взаимного притяжения точечных масс m и M составляет

$$F = f \frac{mM}{R^2}. \quad (2.4)$$

Если расстояние между двумя массами увеличится на бесконечно малую величину, то будет совершена элементарная работа. С другой стороны, эта работа равна потере потенциальной энергии при $m=1$ $V = fM/r$. Согласно второму закону механики $F = mW$, тогда ускорение $W = -dV/dr$.

Таким образом, градиент потенциала, взятый с обратным знаком равен ускорению, приобретаемому единичной массой вследствие взаимного притяжения с массой M на расстоянии r . По определению потенциальной энергии ее бесконечно малое приращение, взятое с обратным знаком, численно равно работе, совершаемой силой притяжения при бесконечно малом перемещении единичной массы в заданном направлении.

Потенциал силы тяжести равен сумме потенциалов притяжения и центробежной силы

$$W = V + U. \quad (2.5)$$

Если силу тяжести или ускорение обозначим через g , то составляющие по осям координат будут $g_x = -\frac{\partial W}{\partial x}$, а модуль вектора ускорения силы тяжести и его направление вычисляются по формулам $g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$; $\cos(g, x) = \frac{g_x}{g}$

Распределение силы тяжести внутри, на поверхности и вблизи Земли зависит от ее внутреннего строения.

Поскольку скалярные функции W и V зависят только от координат точки пространства массы M , можно для любой объемной массы задать поверхность, для точек которой потенциал будет постоянным – это изопотенциальная или уровенная поверхность

Физическая фигура Земли имеет сложный вид, а распределение плотностей масс неравномерное. Поэтому уровенные поверхности Земли представлены такими сложными поверхностями, что приходится их изучать последовательными приближениями, разделяя на классы по уровню сложности.

Уровенные поверхности не могут пересекаться или касаться друг друга. Каждой поверхности соответствует единственное значение потенциала $W = \text{const} = C$, а работа при перемещении единичной массы по этой поверхности равна нулю, таким образом, во всех точках уровенной поверхности потенциальная сила направлена по нормали к уровенной поверхности.

Земля имеет нестационарное потенциальное поле, изменяющееся во времени. Это обусловлено притяжением ее другими планетами и Солнцем. Фигура Земли изменяется (приливы, дрейф континентов, движения земной поверхности, изменения уровней морей и океанов, движения полюсов, неравномерность вращения, сезонные явления и другие деформации) вызывают возмущение потенциального поля вследствие переноса масс с одной уровенной поверхности на другую и изменения их взаимного расположения.

В теоретических исследованиях целесообразно иметь уровенную поверхность, которая была бы внешней по отношению ко всем притягивающим массам и менее чувствительной к незначительным вариациям гравитационного поля Земли. Это поверхность геоида. Для научного и практического использования необходима более простая фигура – общеземной трехосный эллипсоид.

В геодезии сила тяжести определяется прямыми измерениями; таким образом, задача изучения фигуры планеты состоит в том, чтобы определить возмущающий потенциал на земной поверхности и над ней.

Ирландский математик Дж. Стокс в 1849 г. первым решил геодезическую краевую задачу при условии, что ускорение силы тяжести известно в любой точке поверхности геоида (рассматриваемой в данном случае как граничная поверхность). Однако определить силу тяжести на всей земной поверхности очень нелегко, а измерять силу тяжести на поверхности геоида на суше, вообще, невозможно.

Единственно возможное решение состоит в том, чтобы рассчитать ускорение силы тяжести для геоида, используя данные измерений на земной поверхности и вводя поправку за аномалию высоты. Этот метод требует также учета гравитационного

воздействия масс земной коры, находящихся между топографической поверхностью и поверхностью геоида.

В конце 1950-х годов советский геодезист М. С. Молоденский нашел решение, пригодное для любой произвольной поверхности. Эта поверхность может быть описана по гравиметрическим данным без знания внутреннего строения Земли.

Строение земной коры более или менее отчетливо выражается в аномалиях силы тяжести (гравитационных). Эти аномалии соответствуют разности между наблюдаемой силой тяжести и ее теоретическим значением в тех же точках земной поверхности, т. е. отражают различия в строении идеальной и реальной Земли. При этом гравитационные аномалии отличаются не только по величине, но и по направлению силы тяжести (вызывают отклонения отвеса от вертикали).

Поскольку определение силы тяжести проводится на поверхности Земли, не совпадающей, за исключением поверхности Мирового океана, с уровнем геоида, гравитационные аномалии обычно приводятся к поверхности геоида и выражаются в так называемых *аномалиях Буге*, вычисленных с поправками за высоту точки наблюдения и притяжение промежуточного слоя.

Выделяют *региональные* и *местные* аномалии. Первые распространяются на десятки и сотни тысяч квадратных километров и отличаются большой интенсивностью (многие десятки и сотни миллигалов). На фоне региональных аномалий проявляются местные аномалии разного масштаба и характера, связанные с особенностями строения самых верхних горизонтов земной коры. Местные аномалии широко используются в поисково-разведочной практике (при поисках нефти, газа и других полезных ископаемых).

Гравитационное поле Земли неоднородно. В нем отчетливо выделяются следующие типы. Спокойная картина гравитационного поля просматривается на огромных пространствах поверхности материков со спокойным рельефом (платформы), которые характеризуются чередованием небольших положительных и отрицательных аномалий, охватывающих сравнительно незначительные по площади районы. Гравитационное поле горно-складчатых областей неоднородно и сложно. В океанах гравитационное поле спокойно и меняется более плавно, чем на материках.

Вычисленное значение силы тяжести называют *нормальным*, а наблюдаемое – *аномальным*. Гравитационные аномалии на Земле, как правило, меньше 100 мГал, их среднеквадرا-

тическая вариация по Земле составляет величину около 20 мГал. Следовательно, гравитационное поле Земли достаточно гладкое.

Для экстремальных условий (островные дуги, глубоководные впадины) гравитационные аномалии достигают величины 400 мГал, что в 12,5 раз меньше разницы в значениях силы тяжести на полюсе и экваторе и составляют всего 0,04 % от величины силы тяжести.

Ускорение силы тяжести измерено повсюду – и на материках, и на океанах. Полученные результаты противоречили здравому смыслу. Оказалось, что на одной и той же широте ускорение свободного падения в среднем почти одинаково и на океанах, и на материках, хотя, судя по различным данным, толщина континентальной земной коры (в среднем 35–40 км) значительно больше толщины океанической коры (около 5 км).

Геодезические работы в Индии близ горного массива Гималаев показали, что координаты астрономических пунктов из-за отклонений отвесной линии отличаются от геодезических на 5,2", тогда как вычисленное отклонение, связанное с притяжением гор, составляет 27,9", т. е. притяжение отвеса получилось гораздо меньше, чем можно было ожидать.

О том, что ускорение свободного падения повсюду на Земле примерно одинаково, свидетельствует форма геоида и его почти совершенно гладкая поверхность. Если бы сравнительно высокая плотность материковых масс ничем не компенсировалась в районе океанов, то, во-первых, геоид имел бы гораздо неровную, чем на самом деле, поверхность и, во-вторых, неровности соответствовали бы распределению океанов и материков. Значит, внутри Земли действует какой-то компенсационный механизм, создающий наблюдаемую картину.

Для объяснения этого явления английский геодезист Пратт (1854) предположил, что возвышенные части земной коры оказываются приподнятыми благодаря своей малой плотности. Иными словами, если все породы разбить на блоки, то плотность этих блоков должна зависеть от их толщины: чем толще блок, тем меньше плотность. При этом вес всех блоков на некоторой поверхности, называемой *поверхностью компенсации*, один и тот же. Вся земная кора, таким образом, находится в равновесии. Эта гипотеза Пратта получила название *изостатической*.

Гравитационное поле Земли принято разделять на две части: *нормальное гравитационное поле и оста-*

точное аномальное поле. В физической геодезии оперируют в основном с аномальным гравитационным полем.

Основное преимущество такого подхода состоит в том, что аномальное поле гораздо слабее действительного гравитационного поля Земли и поэтому его характеристики легче определить. Нормальное гравитационное поле характеризуется четырьмя параметрами: общей массой Земли; формой и размерами эллипсоида, наиболее близко соответствующего геоиду в глобальном масштабе; скоростью вращения Земли. Его определение вытекает из условия, что поверхность эллипсоида – это уровенная поверхность в нормальном гравитационном поле, а поверхность геоида представляет собой уровенную поверхность в действительном гравитационном поле.

При этом предполагается, что центр нормального эллипсоида (или референц-эллипсоида) совпадает с центром масс Земли. В любой точке разность высот геоида и референц-эллипсоида, называемая *ондуляцией геоида*, прямо пропорциональна возмущающему потенциалу. Таким образом, определение аномального гравитационного поля (путем гравиметрических измерений) позволяет определить положение поверхности геоида по отношению к эллипсоиду и отсюда – форму Земли.

Накопился достаточно большой материал для определения модели гравитационного поля Земли как планеты. По мере накопления новых данных производилась ревизия этих моделей. Настоящую революцию в определении гравитационного поля планеты произвели первые запуски искусственных спутников Земли.

Сейчас построено достаточно много моделей гравитационного поля Земли разной детальности и точности. Гравитационное поле Земли до 1957 г. было известно с точностью до третьего коэффициента в разложении гравитационного потенциала, т. е. с точностью до сжатия Земли ($1/298$).

Первые детальные модели гравитационного поля Земли, построенные по результатам наблюдений спутников с использованием дополнительной информации из высотомерных и наземных гравиметрических измерений, содержали около 150 коэффициентов в разложении гравитационного потенциала. Наиболее детальная из известных моделей, получившая шифр EGM-96, имеет 360 коэффициентов в разложении гравитационного потенциала.

3. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

3.1. Некоторые сведения о силе тяжести. Понятие о методах измерения силы тяжести

Рассмотрим на поверхности Земли некоторую материальную точку A (рис. 3.1), на которую действуют две силы: сила земного притяжения AF и центробежная сила AQ , направленная перпендикулярно к оси вращения PO . Равнодействующая этих двух сил называется *силой тяжести*. Если обозначить через F силу земного притяжения, через Q – центробежную силу, возникающую вследствие вращения Земли, и через g – силу тяжести, то последняя выразится векторной суммой

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{Q}. \quad (3.1.1)$$

Если принять Землю за шар и ввести обозначения: m – масса точки A ; M – масса Земли; R – радиус Земли; f – постоянная тяготения, т. е. $f = 6.7 \times 10^{-8}$ в единицах CGS, то, согласно Ньютоновскому закону всемирного тяготения, сила притяжения Земли на некоторую материальную точку A , находящуюся на поверхности Земли, выразится формулой

$$F = f \frac{mM}{R^2}. \quad (3.1.2)$$

Центробежная сила Q выражается формулой

$$Q = \frac{v^2}{\rho}, \quad (3.1.3)$$

где v – линейная скорость точки; ρ – расстояние ее от оси вращения; m – масса точки A .

Если через ω обозначить угловую скорость вращения Земли, то $v = \omega \rho$.

Поэтому

$$Q = m\omega^2 \rho.$$

Примем $m = 1$, тогда

$$Q = \omega^2 \rho. \quad (3.1.4)$$

Угловая скорость вращения Земли ω определится так:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}, \quad (3.1.5)$$

где 86 164 – число средних секунд в звездных сутках.

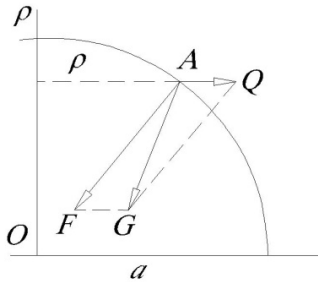


Рис. 3.1

Сила тяжести характеризуется ускорением, которое приобретает свободно падающее тело. За единицу ускорения принимается гал, определяемый соотношением

$$1 \text{ гал} = 1 \text{ см/с}^2.$$

Это ускорение, которое сообщает массе в один грамм сила в одну дину. Изменение силы тяжести от полюсов до экватора составляет всего около 5 гал.

Измерения ускорения силы тяжести в настоящее время проводятся с большой точностью – до тысячных долей гала. Поэтому для удобства единицу ускорения силы тяжести обычно принимают одну тысячную долю гала, которую называют *миллигалом*, а в некоторых случаях даже о миллионную долю гала, называемую *микрогалом*.

Итак,

$$1 \text{ мгал} = 0,001 \text{ гал.}$$

$$1 \text{ мкгал} = 0,000001 \text{ гал.}$$

В последующем для краткости ускорение силы тяжести будем называть *силой тяжести*.

Знание значений силы тяжести как и результатов других видов геодезических измерений необходимо для решения основных задач геодезии.

Основная ориентирная линия при всех видах геодезических измерений – отвесная линия, т. е. направление силы тяжести.

Заметим, что, кроме силы притяжения Земли F и центробежной силы Q на материальную точку A действуют силы при-

тяжения небесных тел, в первую, очередь Солнца и Луны и притяжение массы атмосферы, окружающей Землю. Эти влияния не постоянны: они малы, зависят от расположения светил относительно точки A и изменяющегося распределения воздушных масс вокруг земного шара и при необходимости могут учитываться путем введения соответствующих поправок в значения силы тяжести Поэтому силу тяжести g можно рассматривать только как равнодействующую двух сил F и Q согласно (3.1)

Строго говоря, составляющие силы тяжести F и Q не постоянны. Они изменяются вследствие приливно-отливных явлений на материках и океан, колебаний земных полюсов, перераспределения масс Земли, изменения скорости вращения Земли, упоминавшегося перераспределения воздушных и т. д. При современной точности измерения силы тяжести эти влияния следует считать незначительными, но не настолько, чтобы ими пренебрегать. В дальнейшем будем считать Землю абсолютно твердым телом, вращающим вокруг неизменной оси с постоянной угловой скоростью. Тогда в каждой точке поверхности Земли сила тяжести будет постоянной и определяться выражением (3.1.1), в котором для данной точки силы F и Q постоянны.

Внешним гравитационным полем Земли называют совокупность сил тяжести в окружающем Землю пространстве и на ее поверхности. Следовательно, будем полагать внешнее гравитационное поле Земли постоянным.

Значение силы тяжести g определяется главным образом силой притяжения Земли F ; даже на экваторе, где центробежная сила, согласно (1.3), достигает максимума, отношение $\frac{Q_{\text{ЭКВ}}}{F_{\text{ЭКВ}}}$ равно приблизительно $\frac{1}{288}$, т. е. величине порядка сжатия Земли. Кроме того, угловая скорость вращения Земли ω , определяющая центробежную силу, весьма точно измерена из астрономических наблюдений. Поэтому изучение гравитационного поля Земли фактически сводится к изучению поля притяжения Земли.

В основе теории изучения гравитационного поля Земли, и в частности поля притяжения, лежат основные законы динамики и закон всемирного тяготения.

Силы взаимного тяготения обладают замечательными свойствами: они действуют всюду, где есть материя. Силы при-

тяжения зависят от массы тел и не зависят от их физических или химических свойств.

Силы взаимного притяжения между отдельными частицами, рассеянными во Вселенной, являются основными в формировании небесных тел; закон всемирного тяготения в свое время был самым совершенным примером научного обобщения, охватывающим одной простой формулой бесчисленное множество фактов и положившим научные основы объяснению бесконечного и многообразного движения тел во Вселенной.

Формирование внешнего вида Земли происходило под действием гравитационных сил. Поэтому изучение гравитационного поля Земли и его свойств имеет очень важное научное и практическое значение. В высшей геодезии изучение реального гравитационного поля Земли на основе результатов геодезических измерений позволяет решать основную задачу геодезии – определение фигуры и формы Земли. Знание гравитационного поля Земли необходимо при расчетах, связанных с запуском и вычислением орбит искусственных спутников Земли и траекторий полетов межконтинентальных ракет.

Результаты измерений силы тяжести совместно с результатами других видов геодезических измерений широко используются в геологии, астрономии и в некоторых других науках.

Созданная Эйнштейном теория тяготения, основанная на теории относительности, внесла принципиальные изменения во взгляды на силы тяготения. Использование этой теории приводит к поправкам к движениям, рассчитанным на основе закона Ньютона; однако в применении к рассматриваемым далее вопросам высшей геодезии эти поправки столь ничтожны, что практически еще не имеют никакого значения. Поэтому теория изучения гравитационного поля Земли, излагаемая ниже, исходит из законов Ньютона в их первоначальном виде.

Изучение гравитационного поля Земли основывается на одном из разделов математической физики – *теории потенциала* (§ 5 и далее).

В заключении настоящего параграфа дадим понятие о методах измерения силы тяжести.

Методы измерения силы тяжести основаны на наблюдении и количественной фиксации разнообразных физических явле-

ний, совершающихся под действием силы тяжести. В принципе любое из указанных явлений может быть использовано для измерения силы тяжести; выбор того или иного явления и соответствующего ему метода определяется из условия обеспечения наибольших удобств практики измерений и точности.

Первым произвел определение ускорения силы тяжести итальянский физик и астроном Галилей (XVI–XVII вв.).

Представим себе свободное падение тела в пространстве с некоторой высоты. Если измерять длину пути, проходимого этим телом в определенные промежутки времени, например в 1 с, то получим непосредственно значение ускорения силы тяжести. Известные опыты Галилея заключались в измерении длины пути, пройденного падающим телом в течение первой секунды падения. Согласно законам равномерно ускоренного движения, этот путь равен $1/2g$.

Главное затруднение при использовании этого метода для точного измерения ускорения силы тяжести заключалось в сложности измерения с высокой точностью, необходимой в этом случае, расстояний и малых промежутков времени. В настоящее время указанная трудность преодолена, и этот метод стал практически применим только в последнее время. Для характеристики требований к точности измерений достаточно указать, что длину пути падения тела надо знать до 0,1 мкм, а время – до 2×10^{-8} с.

Современные методы измерения ускорения силы тяжести делятся на динамические и статические.

Динамические способы основаны на измерении времени движения различных тел. В статических методах тело, участвующее в измерениях, находится в момент измерения, т. е. в момент фиксации соответствующего отсчета, в покое; измеряются смещение тела или давление, вызванное весом тела.

Динамические способы измерения силы тяжести могут заключаться в измерении времени течения процессов движений при различных физических явлениях, например:

- а) периода колебаний свободного маятника, качающегося под действием силы тяжести;
- б) периода колебания маятника, совершающего колебания под действием силы тяжести и упругой силы подвеса;
- в) скорости падения тел;
- г) частоты колебания струны, натянутой телом с постоян-

ным весом, и др.

Большое применение на практике получил динамический способ, основанный на измерении периода качания свободного маятника. Устройства, служащие для измерения силы тяжести и основанные на этом принципе, называются *маятниковыми приборами*.

Статические методы могут быть различные; для примера и иллюстрации укажем на механический метод, основанный на измерении изменений положения физического тела, находящегося в равновесии под действием силы тяжести и упругой силы пружины; основную идею этого метода поясним далее.

Приборы, служащие для измерения силы тяжести статическим методом, называются *гравиметрами*.

Следует заметить, что измерения ускорения силы тяжести относятся к числу весьма точных измерений, требующих исключительно внимательного подхода при их выполнении и учете воздействия разнообразных факторов, которые могут оказывать влияние на точность результатов наблюдений.

Изложим идею определения силы тяжести из наблюдений колебаний свободного маятника.

Известно, что при малых амплитудах период качания маятника S выражается следующей зависимостью от длины маятника l и ускорения силы тяжести g в данной точке:

$$S = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.1.6)$$

Периодом колебания маятника S в гравиметрии называется время, за которое маятник из одной крайней точки переместится в другую, или время между двумя последовательными его прохождениями через положение равновесия. Угол отклонения маятника от его положения равновесия a называется *амплитудой качания маятника*.

Из формулы (3.1.6) легко получаем

$$g = \frac{\pi^2 l}{S^2}. \quad (3.1.7)$$

Таким образом, зная длину маятника и период качания, можно вычислить искомое ускорение силы тяжести g . Такое определе-

ние ускорения силы тяжести называется *абсолютным*, так как оно не зависит от определений силы тяжести в других пунктах.

Формула (3.1.7) справедлива для *математического* маятника, т. е. маятника, представляющего собой материальную точку, подвешенную на нерастяжимой и невесомой нити. В действительности употребляется физический маятник; при использовании формулы (3.1.7) для *физического* маятника необходимо определить так называемую *приведенную длину* маятника, т. е. длину математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и данный физический маятник. Определение приведенной длины маятника с необходимой точностью представляет большие практические трудности. Кроме того, для получения силы тяжести указанным выше способом должны быть исключены сложные систематические влияния. Все это вместе взятое, делает задачу *абсолютного* определения силы тяжести весьма сложной и тонкой. Выполнить ее можно только в стационарных условиях; каждое такое определение представляет собой, по существу, ответственную научно-исследовательскую работу.

Задача сильно упрощается, если поставить целью определение *относительного ускорения силы тяжести*, т. е. разности ускорений силы тяжести в данном и каком-либо другом пункте, значение силы тяжести для которого известно. Такие пункты, относительно которых определяется сила тяжести в других пунктах, называются *исходными*. Определение относительного ускорения силы тяжести заключается в следующем: находят период колебания маятника в исходном пункте, для которого ускорение силы тяжести известно, затем измеряют периоды того же маятника в других пунктах, в которых должно быть определено ускорение силы тяжести.

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{на исходном пункте} \quad S_0 &= \pi \sqrt{\frac{l}{g_0}} \\ \text{на первом определяемом пункте} \quad S_1 &= \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} \\ \text{на втором определяемом пункте} \quad S_2 &= \pi \sqrt{\frac{l}{g_2}} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{S_0^2}{S_1^2} &= \frac{g_1}{g_0}, \\ \frac{S_0^2}{S_2^2} &= \frac{g_2}{g_0}, \\ &\dots\dots\dots \\ \text{следовательно,} \quad g_1 &= \frac{S_0^2}{S_1^2} g_0 \\ g_2 &= \frac{S_0^2}{S_2^2} g_0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Формулы (3.1.9) позволяют определять ускорение силы тяжести g_1 , g_2 и т. д. без знания приведенной длины маятника; тем самым влияние систематической ошибки, зависящей от незнания точной длины маятника, исключается. Важно отметить, что при относительном определении силы тяжести довольно полно исключаются и другие постоянные систематические ошибки, присущие прибору данной конструкции. Точность определения относительного ускорения силы тяжести в этом случае зависит только от случайных ошибок в определении периода качания маятников и изменений систематических ошибок и постоянных прибора, которые могут произойти после наблюдений на исходном пункте.

Применением соответствующей методики и конструкции прибора ослабляется влияние и этих ошибок.

Точность окончательного вывода периода качания маятника после учета всех поправок характеризуется ошибкой около $\pm 0,00000004$ с; соответствующая ошибка в определении ускорения силы тяжести равна приблизительно ± 0.2 мгал.

Для уяснения идеи статического метода изложим принципиальную схему измерения силы тяжести прибором, в котором используется упругая сила пружины.

Пусть имеем тело с некоторой постоянной массой; вес этого тела определяется силой тяжести. Определим вес этого тела P в некотором исходном пункте, для которого известно значение силы тяжести g_0 .

Вес этого тела в другой точке, для которой требуется опре-

делить силу тяжести, будет иной; назовем его через p_1 , а искомую силу тяжести в определяемой точке – через g_1 . Очевидно, изменение веса тела $(p_1 - p) = \Delta p$ является следствием изменения силы тяжести $(\Delta g) = g_1 - g_0$.

Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned}(\Delta g) &= f(\Delta p), \\ g_1 &= g_0 + (\Delta g).\end{aligned}$$

Простейшая возможная зависимость между (Δg) и (Δp) имеет вид

$$(\Delta g) = \alpha \Delta p + b.$$

Определение постоянных a и b может быть произведено посредством измерения веса тела в трех точках A , B и C сила тяжести для которых известна.

Если обозначить:

$$\begin{aligned}g_B - g_A &= (\Delta g_1) \text{ и } p_B - p_A = \Delta p_1; \\ g_C - g_B &= (\Delta g_2) \text{ и } p_C - p_B = \Delta p_2,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}(\Delta g_1) &= \Delta p_1 + b;, \\ (\Delta g_2) &= \alpha \Delta p_2 + b,\end{aligned}$$

из которых легко находятся неизвестные коэффициенты a и b .

Измерение веса тела должно быть произведено при помощи прибора, работа которого не зависит от силы тяжести; таким прибором могут служить пружинные весы, так как упругая сила пружины не зависит от силы тяжести.

Определение силы тяжести при помощи гравиметров занимает мало времени и производится с высокой точностью.

3.2. Потенциал силы притяжения

Пусть в пространстве имеем две материальные точки A и B с координатами a , b , c и x , y , z (рис. 3.2). Обозначим массу точки A через m , массу точки B примем равной единице. Расстояние между точками обозначим через r .

Согласно закону всемирного тяготения сила взаимного

притяжения точек A и B выразится формулой

$$F = f \frac{m}{r^2}. \quad (3.2.1)$$

Расстояние r равно

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2. \quad (3.2.2)$$

Обозначим составляющие силы F по осям координат через F_x, F_y, F_z , а углы, образуемые вектором BA с осями координат, α, β, γ .

Очевидно, F_x, F_y, F_z будут проекциями вектора F на оси координат ox, oy, oz .

Из рис. 3.3

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

(на рис. 3.2 для простоты построения начало координат совмещено с одним из концов вектора F без изменения направления осей).

Но

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a-x}{r} \\ \cos \beta &= \frac{b-y}{r} \\ \cos \gamma &= \frac{c-z}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.4)$$

Подставляем (3.2.3) в (3.2.4), получаем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha = f_m \frac{a-x}{r^3} \\ F_y &= F \cos \beta = f_m \frac{b-y}{r^3} \\ F_z &= F \cos \gamma = f_m \frac{c-z}{r^3} \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.5)$$

Сила притяжения и создаваемое ею напряжение является вектором, который определяется как величиной, так и направлением в пространстве. Поэтому характеристика силового поля в пространстве выражается тремя уравнениями (3.2.5).

Однако при определенных условиях поле сил может быть выражено одной функцией от координат x, y, z , как независимых переменных.

Возьмем функцию

$$V = f \frac{m}{r} \quad (3.2.6)$$

и найдем частные производные ее по координатам x , y и z , явно входящим в нее через r .

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -f \frac{m}{r^2} \frac{dr}{dx}.$$

Производная $\frac{dr}{dx}$ вычисляется путем дифференцирования выражения

Основные свойства потенциала притяжения (3.2.7)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{a-x}{r}, \quad (3.2.7)$$

следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = fm \frac{a-x}{r^3},$$

аналогично этому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= fm \frac{b-y}{r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= fm \frac{c-z}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

Сравнивая (3.2.7) и (3.2.8), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

Функция V , частные производные которой по прямоугольным координатам притягиваемой точки равны составляющим силы притяжения по осям координат, называется *потенциальной функцией* или *просто потенциалом притяжения*.

Рассмотрим более общий случай, когда точка притягивает-

ся некоторым телом. На рис. 3.10 изображено τ , создающее вокруг себя силовое поле притяжения.

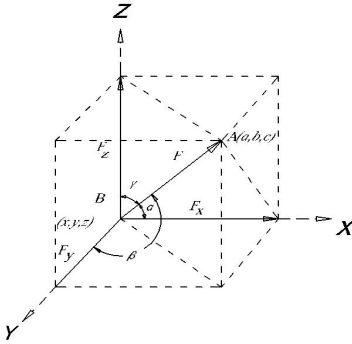


Рис. 3.2

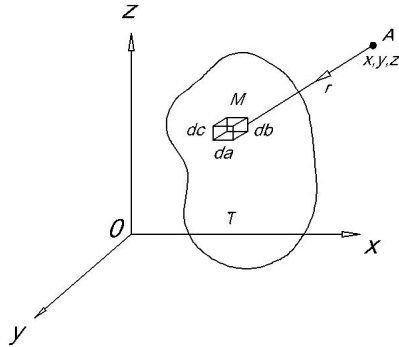


Рис. 3.3

Определим напряжение этого поля в точке A . Разобьем объем тела τ на элементарные объемы

$$d\tau = da db dc. \quad (3.2.10)$$

Обозначим через δ плотность в единице массы текущей точки M , т.е.

$$\delta = \frac{dm}{d\tau}. \quad (3.2.11)$$

Тогда будем иметь

$$\delta m = \delta da db dc. \quad (3.2.12)$$

Аналогично с (3.2.12) проекциями силы притяжения элементарной массы в точке M на точку A будут:

$$\begin{aligned} dF_x &= f \frac{(a-x)}{r^3} dm = f \frac{\delta(a-x)}{r^3} da db dc \\ dF_y &= f \frac{(b-y)}{r^3} dm = f \frac{\delta(b-y)}{r^3} da db dc \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$dF_z = f \frac{(c-z)}{r^3} dm = f \frac{\delta(c-z)}{r^3} da db dc$$

Суммируя действие элементарных масс по всему объему

тела, получаем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= f \iiint \frac{\delta(a-x)}{r^3} da db dc \\ dF_y &= f \iiint \frac{\delta(b-y)}{r^3} da db dc \\ dF_z &= f \iiint \frac{\delta(c-z)}{r^3} da db dc \end{aligned} \right\} \quad (3.2.14)$$

Потенциал притяжения тела M на точку A выразится формулой

$$V = f \iiint \frac{\delta}{r} da db dc . \quad (3.2.15)$$

До сих пор полагали, что притгиваемая точка находится вне притягивающего тела. Допустим теперь, что притгиваемая точка расположена внутри притягивающего тела. Тогда величина τ в выражении (3.24) может принять малые значения и стремиться к нулю.

Отсюда вытекает существенный вывод: *потенциал притяжения Земли и его первые производные всюду конечны и однозначны*, т. е. они будут также непрерывными.

3.3. Разложение потенциала земного притяжения в ряд

Использование выражения для потенциала j силы земного притяжения в виде

$$V = f \int \frac{dm}{r}$$

встречает известные трудности. Более удобное выражение для потенциала V можно получить путем разложения $1/r$ в ряд.

Примем систему пространственных прямоугольных координат с началом в центре Земли и с осью совпадающей с осью вращения Земли (рис. 3.4). Тогда плоскость xy совпадает с плоскостью земного экватора.

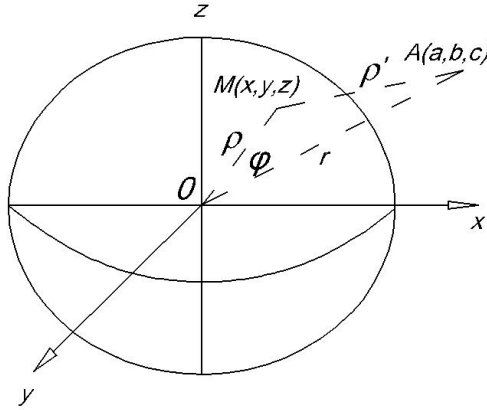


Рис. 3.4

Напишем выражение для потенциала притяжения

$$V = f \int \frac{dm}{\rho'}, \quad (3.3.1)$$

где ρ' – расстояние притягиваемой точки $A(a, b, c)$ от текущей точки $M(x, y, z)$ элементарной массой dm .

Обозначим расстояния от точек A и M до начала координат O соответственно r и ρ .

С введенными обозначениями имеем

$$\rho'^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ax + by + cz) + x^2 + y^2 + z^2, \quad (3.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

Тогда

$$\rho'^2 = r^2 - 2r\rho \frac{ax+by+cz}{r\rho} + \rho^2 = r^2 \left(1 - \frac{2\rho}{r} \frac{ax+by+cz}{r\rho} + \frac{\rho^2}{r^2} \right). \quad (3.3.4)$$

Из треугольника OMA (см. рис. 3.4).

$$\rho'^2 = r^2 - 2r\rho \cos\psi + \rho^2. \quad (3.3.5)$$

Сравнивая (3.3.4) с (3.3.3), находим

$$\frac{ax+by+cz}{r\rho} = \cos\psi. \quad (3.3.6)$$

Подставляя (3.3.6) в (3.3.1), получаем,

$$\rho'^2 = r^2 \left(1 - 2\frac{\rho}{r}\cos\psi + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \quad (3.3.7)$$

Для получения выражения $\frac{1}{\rho'}$, входящего в (3.3.5), возведем (3.3.7) в степень $-\frac{1}{2}$ и разложим правую часть по биному Ньютона, тогда получим ряд по возрастающим степеням $\frac{\rho}{r}$.

Ограничиваясь членом $c\frac{\rho^2}{r^2}$, получаем

$$\frac{1}{\rho'} = \left\{1 + \frac{\rho}{r}\cos\psi + \frac{\rho^2}{2r^2}(3\cos^2\psi - 1) + \dots\right\}. \quad (3.3.8)$$

Попутно укажем, что коэффициенты при степенях $\frac{\rho}{r}$ являются так называемыми сферическими функциями, применяемыми в теории потенциала. Подставляя найденное значение в (3.3.6), находим

$$V = \frac{f}{r} \int dm + \frac{f}{r^2} \int \rho \cos\psi dm + \frac{f}{2r^3} \int \rho^2 (3\cos^2\psi - 1) dm + \dots \quad (3.3.9)$$

Первый интеграл, распространенный на весь объем притягивающего тела будет равен его массе M .

Второй интеграл, принимая во внимание (3.3.7), можно представить так:

$$\frac{f}{r^2} \int \rho \cos\psi dm + \frac{f}{r^3} \int \rho \frac{ax}{r\rho} dm + \frac{f}{r^2} \int \rho \frac{by}{r\rho} dm + \frac{f}{r^2} \int \rho \frac{cz}{r\rho} dm. \quad (3.3.10)$$

Но координаты центра массы тела (центра инерции) определяются формулой

$$x' = \frac{\int x dm}{\int dm}. \quad (3.3.11)$$

Аналогичные выражения получаются для других осей координат.

Так как начало координат было принято в центре массы Земли, то $x' = 0$. Принимая во внимание, что

$$\int dm = M, \quad (3.3.12)$$

получаем

$$\int dm = 0. \quad (3.3.13)$$

Аналогичные формулы получаются по другим осям координат. Тогда первый интеграл правой части будет

$$\frac{f}{r^2} \int \rho \frac{ax}{rp} dm = \frac{f}{r^3} \int ax dm = \frac{fa}{r^3} \int x dm = 0.$$

По тем же соображениям будут равны нулю и остальные два интеграла (3.3.12).

Следовательно,

$$\int \rho \cos \psi dm = 0. \quad (3.3.14)$$

Таким образом, второй член разложения потенциала силы притяжения в ряд равен нулю.

Рассматривая третий интеграл выражения (3.3.14)

$$\int \rho^2 (3 \cos^2 \psi - 1) dm = \int \left\{ \frac{3}{r^2} (ax + bx + cz)^2 - \rho^2 \right\} dm, \quad (3.3.15)$$

замечаем, что при возведении в квадрат трехчлена $(ax + by + cz)$ появится, в частности, интеграл вида

$$\int ax by dm = ab \int xy dm. \quad (3.3.16)$$

Интегралы вида $\int xy dm$ называются *произведениями инерции*. При расположении координатных осей, совпадающих с главными осями инерции, они равны нулю. Поэтому (3.31) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int \left\{ \frac{3}{r^2} (ax + bx + cz)^2 - \rho^2 \right\} dm &= \frac{1}{r^2} \int \{3(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - \\ &\rho^2 r^2\} dm = \frac{1}{r^2} \int \{3(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - \rho^2 (a^2 + b^2 + c^2)\} dm. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Соединяя вместе члены, содержащие a^2 , затем b^2 и c^2 , разбиваем интеграл на три части, из которых первую напомним так:

$$\frac{1}{r^2} \int a^2(3x^2 - \rho^2) dm = \frac{a^2}{r^2} \int (2x^2 - y^2 - z^2) dm. \quad (3.3.18)$$

Аналогично две другие части представляются интегралами:

$$\begin{aligned} & \frac{b^2}{r^2} \int (2y^2 - x^2 - z^2) dm, \\ & \frac{c^2}{r^2} \int (2z^2 - x^2 - y^2) dm. \end{aligned}$$

Из механики известно, что главные моменты инерции A , B , C относительно осей координат выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm \\ B &= \int (x^2 + z^2) dm \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\} \quad (3.3.19)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \int (2x^2 - y^2 - z^2) dm &= B + C - 2A \\ \int (2y^2 - x^2 - z^2) dm &= C + A - 2B \\ \int (2z^2 - x^2 - y^2) dm &= A + B - 2C \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Поэтому, принимая во внимание (3.3.18) и (3.3.20), интеграл (3.3.15) примет вид

$$\frac{1}{r^2} [a^2(B + C - 2A) + b^2(C + A - 2B) + c^2(A + B - 2C)]. \quad (3.3.21)$$

Введем теперь геоцентрические координаты – широту Φ и долготу L , отсчитываемую от плоскости xz .

Широта Φ определяется по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = \rho \cos \Phi; \quad y = \rho \sin \Phi. \quad (3.3.22)$$

А долгота L определяется по формулам

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos L \\ Y &= x \sin L \\ Z &= y \\ x &= \sqrt{X^2 + Y^2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.23)$$

Тогда на основании (3.3.22) и (3.3.23) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a &= r \cos \Phi \cos L \\ b &= r \cos \Phi \sin L \\ c &= r \sin \Phi \end{aligned} \right\} \quad (3.3.24)$$

Далее, заменяя $\cos^2 L$ и $\sin^2 L$ через косинусы кратных дуг, получаем

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \Phi (1 + \cos 2L) \\ b^2 &= \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \Phi (1 - \cos 2L) \\ c^2 &= r^2 \sin^2 \Phi \end{aligned} \right\} \quad (3.3.25)$$

Заменяя в (3.3.21) величины a^2 , b^2 и c^2 через их выражения (3.3.25), группируя члены, содержащие $\cos 2L$, после некоторых преобразований получаем выражения для третьего интеграла в (3.3.9)

$$\left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{3}{2} (B - A) \cos^2 \Phi \cos 2L. \quad (3.3.26)$$

Принимая во внимание (3.3.24), а также (3.3.14), получаем разложение потенциала V в ряд по (3.3.9) в окончательном виде

$$V = \frac{fM}{r} = \frac{f}{2r^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{3f}{4r^3} (B - A) \cos^2 \Phi \cos 2L. \quad (3.3.27)$$

Первый член полученного выражения (3.3.27) представляет собой потенциал шара с массой, равной массе Земли.

Второй член, зависящий от широты, представляет собой влияние сжатия Земли или, иначе говоря, влияние возрастания масс от полюса к экватору. Третий член представляет собой влияние неравномерного распределения масс по долготе.

Таким образом, полученная формула (3.3.27) справедлива и для трехосной Земли.

Если рассматривать Землю как тело вращения и моменты инерции относительно осей, расположенных в плоскости экватора, положить равными между собой, т. е. $A = B$, то третий член в формуле (3.3.25) пропадает; соответственно изменится в этой формуле и второй член, и для данного случая формула (3.3.27) переписывается

$$V = \frac{fM}{2} + (C - A)(1 - 3\sin^2\Phi). \quad (3.3.28)$$

Выше были упомянуты сферические функции, которые находят себе широкое применение во многих вопросах математической физики, в частности, в теории потенциала и решении основных задач высшей геодезии на основе астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и спутниковых наблюдений.

Перепишем (3.3.27) так:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\rho}{r} \cos\psi + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\psi - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\psi) + \dots \right]. \quad (3.3.29)$$

Ряд (3.3.29) сходится при $\rho < r$. $P_n(\cos\psi)$ – выражение, являющееся функцией $\cos\psi$ порядка n , представляет собой один из видов сферических функций; это многочлены степени n от $\cos\psi$. Они называются *многочленами Лежандра*.

В более общем виде формула (3.3.29) переписывается таким образом:

$$\frac{1}{\rho'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi). \quad (3.3.30)$$

Выражение для потенциала притяжения, принимая во внимание (3.3.1) и (3.3.28), в общем виде напишется так:

$$V = f \int \frac{dm}{r} = f \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi) dm \quad (3.3.31)$$

или, учитывая выражения для первых трех членов ряда, данные формулой (3.3.31):

$$V = f \int \frac{dm}{r} + f \int \frac{\rho'}{r^2} \cos \psi \, dm + f \int \frac{\rho^2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) dm + \\ + f \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\rho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi) dm \quad (3.3.32)$$

Интегрируя первые три члена, получим формулу (3.3.32), конечно, без последнего члена, т. е.

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{1}{2r^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \cos^2 \Phi) + \frac{3f}{4r^3} (B - A) \sin^2 \Phi \cos 2l. \quad (3.3.33)$$

Последовательное изучение вопросов программы данного курса дается без использования сферических функций. Приведенные самые начальные и элементарные понятия об этом виде специальных функций и их применение даются для общего ознакомления, которое может быть полезно при более детальном изучении теоретических вопросов геодезии по первоисточникам и специальным трудам (например, [15, 16, 17] и мн. др.).

3.4. Основные свойства потенциала притяжения

Пусть задана материальная точка B с координатами x, y, z ; на бесконечно, малом расстоянии ds от B возьмем другую материальную точку B_1 с координатами $x + dx, y + dy$ и $z + dz$.

Очевидно,

$$BB_1 = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \quad (3.4.1)$$

но

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cos(s, x) \\ dy &= ds \cos(s, y) \\ dz &= ds \cos(s, z) \end{aligned} \right\}, \quad (3.4.2)$$

где (s, x) , (s, y) и (s, z) — углы, образуемые направлением ds с осями координат x, y, z .

Тогда потенциал V силы притяжения, как функция координат x, y, z , получит приращение при перемещении из точки B в точку B_1 , равное полному дифференциалу

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz. \quad (3.4.3)$$

Или, имея в виду (3.2.9),

$$dV = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.4.4)$$

Принимая во внимание (3.4.2), (3.4.3) и (3.4.4),

$$dV = F ds \{ \cos(s, x) \cos(F, x) + \cos(s, y) \cos(F, y) + \\ + \cos(s, z) \cos(F, z) \}. \quad (3.4.5)$$

Но выражение, стоящее в фигурных скобках, есть косинус угла между направлением силы тяжести F и направлением элемента ds , т. е. $\cos(F, s)$.

Поэтому

$$dV = F ds \cos(F, s). \quad (3.4.6)$$

Так как $F \cos(F, s) = F_s$ – составляющая силы F по направлению элемента ds , то

$$dV = F_s ds. \quad (3.4.7)$$

Из равенств (3.4.6) и (3.4.7) вытекает ряд важных свойств потенциальной функции.

Как известно из механики, элементарная работа силы F при перемещении точки на расстояние ds будет $F ds$; отсюда следует, что бесконечно малое приращение потенциала есть работа, которую совершает сила F при перемещении единицы массы на расстояние ds .

При конечном перемещении единицы массы между некоторыми точками M и N работа R , совершаемая силой F , будет равна разности потенциалов в этих точках, т. е.

$$R = \int_N^M F ds \cos(F, ds) = \int_N^M dV = V_M + V_N = \Delta V. \quad (3.4.8)$$

Предположим теперь, что точка V_N удаляется в бесконечность. Потенциал будет стремиться к нулю, а работа R будет равна потенциалу в точке M . т. е.

$$R = V_M. \quad (3.4.9)$$

Иными словами, *потенциал силы притяжения в данной точке равен работе, которую необходимо совершить силе притяжения при перемещении единичной массы из бесконечности в данную точку.*

На основании (3.4.7) можно написать

$$\frac{dV}{ds} = F_s, \quad (3.4.10)$$

т. е. *производная от потенциала притяжения любому направлению равна составляющей силы; действующей в этом направлении. Следовательно, из потенциала силы может быть получена ее слагающая по любому направлению.*

Из уравнения (3.4.6) следует, что dV зависит от косинуса угла между направлением силы тяжести и направлением перемещения точки; отсюда следует, что потенциал V может получать приращение положительное, отрицательное и равное нулю.

Рассмотрим два предельных случая:

1. Если $\cos(F, s) = 0$, что соответствует перемещению точки под прямым углом к направлению F , то и работа силы будет равна нулю, т. е.

$$dV = 0. \quad (3.4.11)$$

Интегрируя (3.4.1), находим

$$V = \text{пост.} = C, \quad (3.4.12)$$

но V – функция координат x, y, z , поэтому (3.4.12) представляет собой уравнение поверхности, точнее семейство поверхностей, которые мы будем получать, давая C различные значения. Очевидно, эта поверхность может быть получена, если представить себе, что точка с единичной массой будет перемещаться во всех направлениях под прямым углом к направлению силы тяжести; в этом случае будет описана поверхность, обладающая свойством, что потенциал будет всюду сохранять постоянное значение.

Следовательно, *поверхности, удовлетворяющие уравнению (3.4.12), обладают тем свойством, что сила притяжения в любой точке будет направлена по нормали к этой поверхности, а составляющие сил по касательной к поверхности в любой точке равны нулю. Такие поверхности называются уровнями.*

2. Если $\cos(F, s) = 1$, то это значит, что перемещение точки происходит по направлению действия силы, потенциал получает максимальное приращение, его выражение имеет вид

$$dV = F ds. \quad (3.4.13)$$

Если же перемещение происходит в направлении, противоположном действию силы, то, очевидно, в этом случае

$$\cos (F, s) = -1$$

и

$$dV = -F ds. \quad (3.4.14)$$

Следовательно, знак приращения потенциала зависит от направления перемещения точки; в одном случае потенциал будет увеличиваться (приращение положительное), а в другом случае уменьшаться (приращение потенциала отрицательное).

Рассмотрим две бесконечно близкие уровенные поверхности, определяемые уравнениями $V = C$ и $V + dV = C_1$ (рис. 3.5).

Допустим, что единичная масса переместилась из B в B_1 по направлению силы F . Тогда на основании (3.4.14) напомним

$$dV = F ds, \quad (3.4.15)$$

но в данном случае ds представляет собой расстояние между взятыми уровенными поверхностями.

Обозначая это расстояние через dh , получаем

$$\frac{dV}{dh} = F; \quad dV = F dh; \quad dh = \frac{dV}{F}. \quad (3.4.16)$$

Полученные выражения (3.4.16) соответствуют случаю перемещения точки по нормали к центру тела, т. е. когда

$$\cos (F, s) = +1.$$

При перемещении точки в обратном направлении, т. е. при $\cos (F, s) = -1$, выражения (3.4.16) примут вид:

$$-\frac{dV}{dh} = F; \quad dV = -F dh; \quad dh = -\frac{dV}{F} \quad (3.4.17)$$

Из равенств (3.4.16) и (3.4.17) следует, что расстояния между двумя близкими уровенными поверхностями в общем случае не равны в разных точках, а обратно пропорциональны силе, действующей в этих точках.

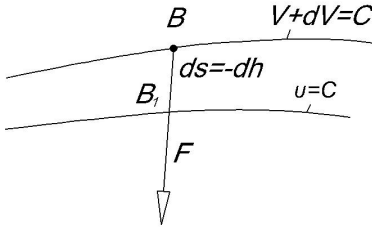


Рис. 3.5

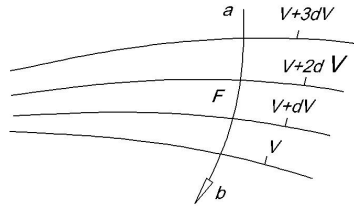


Рис. 3.6

Из изложенного свойства потенциальной функции вытекает еще существенное обстоятельство. Пусть рис. 3.6 изображает сечение уровенных поверхностей, соответствующих уравнениям:

$$V + d, \quad V + 2dV, \quad V + 3dV;$$

конечно, они, согласно (3.4.16), изобразятся кривыми, «не-параллельными» между собой.

Кривая ab , пересекающая уровенные поверхности ортогонально, называется *силовой линией*. Иначе, силовыми линиями называются *кривые, касательные к которым совпадают с направлением векторов F , представляющих силу притяжения*.

Выше установлены свойства, присущие потенциальным функциям числе потенциалу силы притяжения.

Потенциалы силы притяжения объемных масс, кроме указанных выше, обладают еще иными важными свойствами; некоторые из них будут указаны далее, после рассмотрения потенциалов притяжения некоторых тел.

Таким образом, основными свойствами потенциала притяжения являются:

1. Из потенциала функции V может быть получена ее слагающая по любому направлению.
2. dV зависит от косинуса угла между направлением силы притяжения и направлением перемещения точки.

3. Если $F_{(s)} = 0$, точка перемещается под прямым углом к F , работа равна нулю и $dV = 0$; Интегрируем выражение и получаем $V = \text{пост.} = cV$ функция координат x, y, z , поэтому это уравнение

поверхностей. Поверхности, удовлетворяющие уравнению, обладают тем свойством, что сила притяжения направлена под прямым углом, а ее составляющие по касательной к поверхности в любой точке равны 0. Это уровенные поверхности.

4. Знак приращения потенциала зависит от направления перемещения точки.

5. Расстояние между двумя близкими уровенными поверхностями не равно в разных точках, а обратно пропорционально силе, действующее в этих точках.

Определение внешнего потенциала Земли и изучение ее фигуры основываются на интегрировании уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Функции, их первые и вторые производные, удовлетворяющие уравнению Лапласа, являются гармоническими. Дважды дифференцируемая функция является гармоничной, если сумма ее вторых частных производных равна 0.

Первые производные от потенциала по осям координат – проекции силы притяжения на составляющие оси. Они определяют направление нормали к данной уровенной поверхности. Вторые производные определяют форму или кривизну уровенной поверхности в данной точке.

Из уравнения Пуассона следует, что если плотность имеет скачкообразное изменение, то и кривизна изменяется скачком $\Delta_2 V = -4\pi / \delta$.

Δ_2 – оператор Лапласа.

3.5. Потенциал притяжения некоторых простейших тел

Найдем потенциал притяжения некоторых простейших тел.

1. Потенциал притяжения материальной точки выражается функцией (3.5.1), т. е.

$$V = f \frac{m}{r}. \quad (3.5.1)$$

2. Потенциал притяжения простого слоя на внешнюю материальную точку.

Допустим, что притягивающие массы заключены между двумя очень близкими поверхностями σ и σ_1 произвольной формы (рис. 3.7), расстояние между которыми равно h . Если $d\sigma$ — элементарная площадка на поверхности то элементарный объем Δt выразится

$$\Delta\tau = h \, d\sigma. \quad (3.5.2)$$

Обозначая по-прежнему через δ – плотность масс в этом элементарном объеме, получаем выражение его массы Δm

$$\Delta m = \delta h \, d\sigma. \quad (3.5.3)$$

Потенциал объемных масс, заключенных между поверхностями σ и σ_2 , приближенно представится так:

$$V = f \int \frac{\delta h}{r} d\sigma, \quad (3.5.4)$$

где r – расстояние элемента $d\sigma$ поверхности до притягиваемой точки.

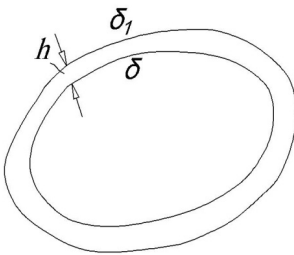


Рис. 3.7

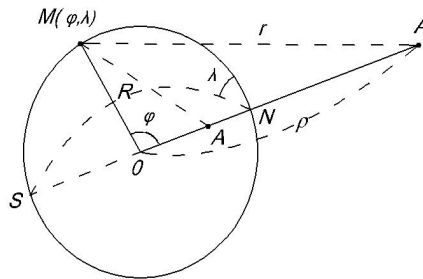


Рис. 3.8

Будем неограниченно приближать поверхность σ_1 к поверхности σ изменяя при этом массу Δm внутри каждого элемента объема Δt . В результате такого перехода на каждом элементе $d\sigma$ будет сконденсирована dm

Отношение $\frac{dm}{d\sigma}$ называется *плотностью простого слоя* и обозначается μ .

Таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta h = \mu. \quad (3.5.5)$$

Тогда потенциал простого слоя выразится следующей формулой:

$$V = f \int \frac{\mu}{r} d\sigma. \quad (3.5.6)$$

3. Потенциал притяжения однородного простого сферического слоя на материальную точку (внешнюю и внутреннюю).

Пусть имеем сферу радиуса R , поверхность которой соответствует условиям, определяющим простой слой (рис. 3.8).

Возьмем две точки A и A_I : одну находящуюся вне сферы (точка A) и другую – внутри сферы (точка A_I).

Для определения положения точек на сфере воспользуемся системой сферических координат. За полярную ось примем диаметр сферы, совпадающий с направлением из центра сферы O на точку A (или A_I). Точки N и S назовем *северным* и *южным полюсами* соответственно.

Положение некоторой точки M определится сферическими координатами ψ и λ .

Согласно (3.5.6), потенциал однородного простого сферического слоя равен

$$V = f \int \int \frac{\mu}{r} d\sigma; \quad (3.5.7)$$

в данном случае следует принять:

для внешней точки A

$$r = MA = r,$$

для внутренней точки A_I

$$r = MA_I = r_I,$$

а также

$$d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi d\lambda. \quad (3.5.8)$$

Расстояние от центра сферы до точки A обозначим через ρ , а для точки A_I – через ρ_I .

Из рис. 3.8 следует, что

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}, \quad (3.5.9)$$

с учетом (3.5.8) и (3.5.9) выражение (3.5.7) примет вид

$$V = f\mu \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \psi d\psi d\lambda}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (3.5.10)$$

Заметим, что пределы интегрирования, распространяющиеся на всю поверхность сферы, устанавливаются от 0 до π для полярного расстояния ψ и от 0 до 2ψ по долготе λ , Интегрируя по λ , получаем

$$V = 2\pi f\mu \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \psi \, d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (3.5.11)$$

Из (3.5.9) дифференцированием по ψ находим

$$dr = \frac{R^2 \sin \psi \, d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}} \quad (3.5.12)$$

Помножив обе части последнего выражения на R/ρ , получим

$$\frac{R}{\rho} dr = \frac{R^2 \sin \psi \, d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (3.5.13)$$

Учитывая (3.5.13), выражение (3.5.11) переписываем так:

$$V = 2\pi f\mu \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{R}{\rho} dr = 2\pi f\mu \frac{R}{\rho} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr = 2\pi f\mu \frac{R}{\rho} (r_{\max} - r_{\min}). \quad (3.5.14)$$

Установленные пределы интегрирования $r_{\max}$ и $r_{\min}$ соответствуют $\psi = \pi$ и $\psi = 0$, что легко усматривается из рис. 3.8:
для внешней точки A

$$\left. \begin{aligned} r_{\max} &= \rho + R \\ r_{\min} &= \rho - R \\ r_{\max} - r_{\min} &= 2R \end{aligned} \right\} \quad (3.5.15)$$

для внутренней точки A

$$r'_{\max} - r'_{\min} = 2\rho \quad (3.5.16)$$

На основании (3.5.14) и (3.5.15) получим окончательное выражение для потенциала однородного простого сферического слоя на внешнюю точку

$$V = 2\pi f\mu \frac{R^2}{\rho} \quad (3.5.17)$$

на внутреннюю точку

$$V = 2\pi f\mu R. \quad (3.5.18)$$

Введем в полученные формулы массу сферического слоя

$$M = 4\pi R^2 \mu. \quad (3.5.19)$$

Получим для внешней точки

$$V = \frac{fM}{\rho}. \quad (3.5.20)$$

Сравнивая (3.5.20) с выражением потенциала точечной массы (3.2.6), делаем вывод, что однородный сферический слой создает во внешнем пространстве такой же потенциал, который был бы создан массой ***M***, сосредоточенной в центре сферы.

Из соображений симметрии следует, что притяжение слоя будет направлено от притягиваемой точки ***A*** по направлению к центру сферы ***O***, т. е. по ρ .

Дифференцируя (3.5.20) по ρ , получаем

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{fM}{\rho^2}, \quad (3.5.21)$$

т. е. однородный сферический слой притягивает во внешнем пространстве по закону Ньютона, как точечная масса, расположенная в центре сферы.

Знак в правой части (3.5.21) показывает, что ***F*** и ρ направлены в противоположные стороны.

Вводя массу ***M*** сферического слоя в выражение для потенциала на внутреннюю точку, на основании (3.5.18) и (3.5.19) получим

$$V = f \frac{M}{R}. \quad (3.5.22)$$

Последнее выражение при данной массе сферического слоя и радиусе ***R*** постоянно и не зависит от положения внутренней точки, которое определяется расстоянием ρ . Дифференцируя это выражение по ρ , находим силу притяжения слоем внутренней точки

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0. \quad (3.5.23)$$

Таким образом, *сферический слой внутренней точки притягивает.*

4. Потенциал притяжения точки материальным шаром. Здесь также рассмотрим два случая: материальная точка находится вне шара и материальная точка расположена внутри шара.

Предварительно исследуем притяжение однородного слоя конечной толщины, который будем рассматривать как сумму бесконечного числа бесконечно тонких concentрических слоев.

При рассмотрении потенциала простого слоя мы имели дело с поверхностной плотностью μ , которая определялась из выражения

$$\mu = \frac{dm}{d\sigma}, \quad (3.5.24)$$

dm – элемент массы, приходящейся на элемент поверхности $d\sigma$.

Объемная плотность σ определится

$$\delta = \frac{dm}{d\tau}, \quad (3.5.25)$$

где $d\tau$ – элемент объема.

Если dR – толщина взятого сферического слоя, то

$$d\tau = d\sigma dR. \quad (3.5.26)$$

Поэтому, принимая во внимание (3.5.5) и (3.5.26),

$$dm = \mu d\sigma \delta dR, \quad (3.5.27)$$

$$\mu = \delta dR. \quad (3.5.28)$$

Рассмотрим первый случай: потенциал притяжения простого слоя на внешнюю точку. согласно (3.5.17), имеет вид

$$V = 4\pi f \mu \frac{R^2}{\rho}.$$

Допустим, что притягивающие массы объемной плотности δ заключены внутренней сферой радиуса R_1 и внешней сферой, радиус которой R .

Тогда, учитывая соотношения (3.5.17) и (3.5.28) и интегрируя в пределах от R_1 до R , получаем для потенциала слоя

$$V = 4\pi f \mu \frac{\delta}{\rho} \int_{R_1}^R R^2 dR = \frac{4}{3} \pi f \frac{\delta}{\rho} (R^3 - R_1^3). \quad (3.5.29)$$

Введем в последнее выражение массу слоя. Масса слоя M выразится как произведение его объема на плотность

$$M = \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_1^3) \delta. \quad (3.5.30)$$

Тогда для потенциала слоя получим

$$V = f \frac{M}{\rho}. \quad (3.5.31)$$

Потенциал шара получится, если в (3.103) положить $R_I = 0$,

тогда

$$V = \frac{4}{3} \pi f \frac{\delta}{\rho} R^3 \quad (3.5.32)$$

или, принимая во внимание, что масса шара равна

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta \quad (3.5.33)$$

приходим к формуле (3.5.31).

Сила притяжения выразится формулой

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{4}{3} \pi f \frac{\delta}{\rho^2} R^3. \quad (3.5.34)$$

Итак, шар, состоящий из концентрических однородных слоев, притягивает так, как будто вся его масса сосредоточена в центре. Иначе говоря, шар создает во внешнем пространстве потенциал, равный потенциалу точки с массой M , расположенной в его центре.

Теперь допустим, что притягивающая точка A расположена внутри шара на расстоянии ρ от центра O (рис. 3.9). Проведем через A концентрическую сферу, которая разделит массу на две части: массу слоя s_0 , имеющего потенциал V_0 , и массу шара s_1 , имеющего потенциал V_1 . Очевидно, слой s_0 , по отношению к которому точка A является внутренней, не притягивает точку.

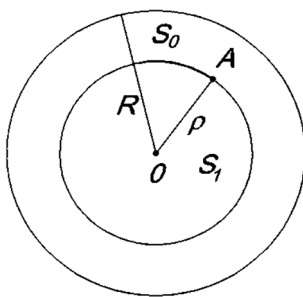


Рис. 3.9

На основании (3.108) и (3.105) получим

$$V_0 = 4\pi f\delta \int_{\rho}^R R \, dR = 2\pi\delta(R^2 - \rho^2). \quad (3.5.35)$$

Согласно (3.103),

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi f \frac{\delta}{\rho}(\rho^3 - R_1^3).$$

Потенциал слоя получится так:

$$V = V_0 + V_1 = \frac{2}{3}\pi f\delta \left(3R^2 - \rho^2 - 2\frac{R_1^3}{\rho} \right). \quad (3.5.36)$$

Для шара $R_1 = 0$ и тогда

$$V = \frac{2}{3}\pi f\delta(3R^2 - \rho^2). \quad (3.5.37)$$

Дифференцируя (3.5.37) по ρ , получаем силу притяжения F

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{4}{3}\pi f\delta\rho. \quad (3.5.38)$$

Масса m шара, ограниченного сферической поверхностью радиуса ρ , равна

$$m = \frac{4}{3}\pi\delta\rho^3.$$

Поэтому выражение для силы притяжения F (3.5.38) примет вид

$$F = -f \frac{m}{\rho^2}. \quad (3.5.39)$$

Следовательно, на основании (3.113) можно сделать вывод, что и в случае внутренней точки притяжение действует по закону Ньютона, т. е. обратно пропорционально квадрату расстояния и прямо пропорционально притягивающей массе с той только оговоркой, что в данном случае притягивает не вся масса шара, а только та, которая расположена внутри сферической поверхности, проходящей через точку L . Точка A притягивается при этом так, как если бы вся масса внутреннего слоя (радиуса ρ) была сосредоточена в центре шара.

Из (3.5.38) очевидно, что притяжение массы всего шара действует по другому закону, т. е. прямо пропорционально расстоянию ρ от точки A до центра O в центре шара $\rho = 0$ и, следовательно, сила притяжения также равна нулю.

Получим выражения для потенциала притяжения V и силы притяжения для случая, когда притягиваемая точка расположена на поверхности шара. Очевидно, в этом случае в соответствующих формулах следует положить ρ равным R .

Делая указанную подстановку в формулы для потенциала (3.5.32) и (3.5.37) и в формулы для силы притяжения (3.5.34) и (3.5.38), получаем одинаковый результат, т. е.

$$V = \frac{4}{3}\pi f\delta R^2,$$

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{4}{3}\pi f\delta R. \quad (3.5.40)$$

Отсюда можно сделать вывод, что потенциал силы притяжения и его первая производная (составляющая силы притяжения) при пересечении границы тела однозначны и меняются непрерывно, без разрыва.

Вычислим вторые производные от потенциала для точки на поверхности шара, используя его выражения, полученные для положения точки вне и внутри шара.

Из (3.5.34) имеем

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \frac{dV}{d\rho} = -\frac{d}{d\rho} \frac{4}{3}\pi f\delta \frac{R^2}{\rho^2} = \frac{8}{3}\pi f\delta \frac{R^3}{\rho^3} \quad (3.5.41)$$

или, при $\rho = R$,

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} = \frac{8}{3}\pi f\delta. \quad (3.5.42)$$

Из (3.5.38) получаем

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \frac{dV}{d\rho} = -\frac{d}{d\rho} \frac{4}{3}\pi f\delta \rho = -\frac{4}{3}\pi f\delta. \quad (3.5.43)$$

Таким образом, значения вторых производных от потенциала при выходе притягиваемой точки на поверхность шара из внешнего пространства и изнутри различаются по величину $4\pi f\delta$.

Это значит, что вторая производная от потенциала, взятая по направлению нормали, при прохождении через поверхность шара имеет разрыв и изменяется скачком на величину $4\pi f\delta$. Исследования показали, что и в более общем случае, когда на поверхности, разделяющей две среды, плотность δ меняется скачком, вторые производные потенциала также испытывают скачок. Это свойство вторых производных от потенциала имеет важное принципиальное значение.

3.6. Уравнения Лапласа и Пуассона

Напишем потенциал силы притяжения

$$V = f \int \frac{dm}{r}. \quad (3.6.1)$$

Образуем вторые производные по координатам

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Дифференцируя выражение (3.2.13)

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = f \int \frac{a-x}{r^3} dm, \quad (3.6.2)$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = -f \int \left[\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(a-x)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right] dm. \quad (3.6.3)$$

Так как

$$\frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{(a-x)}{r},$$

то находим окончательно

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -f \int \left[\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(a-x)^2}{r^5} \right] dm. \quad (3.6.4)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -f \int \left[\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(b-y)^2}{r^5} \right] dm \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -f \int \left[\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(c-z)^2}{r^5} \right] dm \end{aligned} \right\}. \quad (3.6.5)$$

Складывая полученные вторые производные, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (3.6.6)$$

Уравнение (3.6.6) называется *уравнением Лапласа*.

Символически уравнение Лапласа пишется так:

$$\Delta_2 V = 0 \quad (3.6.7)$$

Обычно символ

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называют *оператором Лапласа*.

Уравнение Лапласа справедливо для точек пространства, расположенных вне притягивающего тела. Это следует из того, что если притягиваемая точка лежит внутри тела, то разности $(a - x)$, $(b - y)$ и $(c - z)$, а следовательно, и g могут стремиться к нулю. В этом случае подынтегральное выражение в (3.6.4) в пределе обращается в 0/0.

Приведем вывод более общего уравнения Пуассона для случая, когда притягиваемая точка находится внутри тела.

Допустим, что вокруг притягиваемой точки, расположенной внутри тела, описана малая сфера конечного радиуса, но столь малого, что плотность вещества внутри этой сферы можно было бы считать одинаковой. Заметим, что притягиваемая точка должна располагаться внутри этой сферы, но необязательно в центре: сама сфера должна полностью находиться внутри тела.

Обозначим:

V_1 , – потенциал притяжения тела на притягиваемую точку, по без выделенной в теле сферы; V_2 – потенциал притяжения сферы.

Тогда полный потенциал V всего тела выразится формулой

$$V = V_1 + V_2, \quad (3.6.8)$$

а оператор Лапласа для V – формулой

$$\Delta_2 V = \Delta_2 V_1 + \Delta_2 V_2, \quad (3.6.9)$$

но для V_1 будет справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta_2 V_1 = 0, \quad (3.6.10)$$

так как для него значение расстояния r нигде в нуль обращаться не может. Потенциал V_2 сферы, очевидно, представляет собой потенциал притяжения шара на внутреннюю точку, полученный в § 8. Поэтому, согласно (3.5.37), имеем

$$V_2 = \frac{2}{3} \pi f \delta (3R^2 - \rho^2).$$

Для нашего случая R – постоянный радиус сферы, а ρ определяется как функция координат из выражения

$$\rho^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2, \quad (3.6.11)$$

δ – плотность вещества внутри выделенной в теле сферы.

Для вычисления $\Delta_2 V_2$ первоначально находим первую производную

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi f\delta\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Из (3.6.11) легко вычисляем

$$\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} = -(a-x).$$

Поэтому

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{4}{3}\pi f\delta(a-x).$$

Дифференцируя еще раз по x , получаем

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi f\delta. \quad (3.6.12)$$

Так как правая часть полученного выражения не зависит от x , то по аналогии можем написать

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi f\delta.$$

Суммируя все три вторые производные, получаем

$$\Delta_2 V_2 = -\frac{4}{3}\pi f\delta. \quad (3.6.13)$$

Теперь принимая во внимание (3.6.9) и (3.6.10), находим искомое уравнение Пуассона

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi f\delta, \quad (3.6.14)$$

где под δ следует понимать плотность тела в малой окрестности вокруг притягиваемой точки. Если в исследуемой точке нет притягивающих масс, т. е. $\delta=0$, уравнение Пуассона обращается в уравнение Лапласа. Иначе говоря, уравнение Лапласа можно рассматривать как частный случай уравнения Пуассона, когда $\delta = 0$.

Уравнения Лапласа и Пуассона являются фундаментальными в теории потенциала.

Определение внешнего потенциала Земли и изучение ее фигуры основываются на интегрировании уравнения Лапласа при дополнительных условиях, вытекающих из существа конкретной задачи.

Функции, непрерывные во всех точках данной области вместе с их первыми и вторыми производными и удовлетворяющие уравнению Лапласа (57.6), называются гармоническими функциями в этой области.

Потенциал притяжения для точек в области, не занятой притягивающими массами, будет всегда гармонической функцией; иначе говоря, в любой точке пространства вне притягивающего тела потенциальная функция F всегда будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta_2 V = 0$.

В каждой точке внутри притягивающего тела потенциал силы притяжения будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta_2 V = -4\pi f\delta.$$

Если первые производные от потенциала по осям координат представляют собой проекции силы на соответствующие оси или, иначе говоря, определяют направление нормали к данной уровенной поверхности, то вторые производные потенциала притяжения определяют форму или кривизну уровенной поверхности в данной точке.

Из уравнения Пуассона следует, что если плотность имеет скачкообразное изменение, то и кривизна уровенной поверхности изменяется скачком; это бывает, в частности, в том случае, если данная уровенная поверхность пересекает физическую поверхность тела.

3.7. Потенциал силы тяжести, его основные свойства

Напишем известное выражение для силы тяжести

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{Q}.$$

Потенциал силы притяжения найден в § 5; для получения силы тяжести найдем потенциал центробежной силы Q . Центробежная сила при $m = 1$ выражается уравнением

$$Q = \omega^2 r.$$

Если во взятой системе прямоугольных координат ось z совместить с осью вращения, то центробежная сила будет параллельна плоскости xu , и составляющая этой силы по оси z будет равна нулю. Определим составляющие ее по осям x и y . Центробежная сила направлена по радиусу r (рис. 3.10).

Имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha, \\ y &= \rho \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.1)$$

Проекции центробежной силы Q на оси x и y будут равны:

$$Q_x = Q \cos \alpha = \omega^2 \rho \cos \alpha, \quad (3.7.2)$$

$$Q_y = Q \cos \beta = \omega^2 \rho \cos \beta. \quad (3.7.3)$$

Определяя из (3.7.1) значения $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ и подставляя их в (3.7.2) и (3.7.3), получаем составляющие центробежной силы:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \omega^2 x \\ Q_y &= \omega^2 y \\ Q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7.4)$$

Эти составляющие являются частными производными по прямоугольным координатам функции

$$U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (3.7.5)$$

которая, следовательно, является потенциальной функцией центробежной силы.

Действительно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x = Q_x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y = Q_y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 0 = Q_z \end{aligned} \right\} \cdot, \quad (3.7.8)$$

Далее проекция силы тяжести на оси координат будет

$$\left. \begin{aligned} g_x + F_x + Q_x &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ g_y + F_y + Q_y &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ g_z + F_z + Q_z &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (7.7)$$

Возьмем функцию

$$W = V + U = f \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (3.7.8)$$

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = g_x \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = g_y \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = g_z \end{aligned} \right\} \quad (3.7.9)$$

Отсюда заключаем, что функция W , определяемая уравнением (3.7.8), является потенциалом силы тяжести. Потенциал силы тяжести равен сумме потенциалов силы земного притяжения и центробежной силы.

Обозначая (g, x) , (g, y) , (g, z) углы, которые образует направление силы тяжести с осями координат, находим

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \cos(g, x) \\ g_y &= g \cos(g, y) \\ g_z &= g \cos(g, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.7.10)$$

Выражение для потенциала W может быть написано и в виде

$$W = V = U = f \int_{\tau} \frac{\delta d\tau}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (3.7.11)$$

где $d\tau$ – элемент объема, δ – объемная плотность.

Остановимся подробнее на свойствах потенциальной функции, изложенных в § 7, применительно к потенциалу силы тяжести.

1. Согласно (3.4.6), можем написать, что

$$\frac{\partial W}{\partial s} = g \cos(g, s) = g_s, \quad (3.7.12)$$

т. е. производная потенциала силы тяжести по любому направлению равна проекции силы на это направление.

2. На основании (3.4.12) при $\cos(g, s) = 0$, т. е. при перемещении материальной точки в направлении, перпендикулярном силе тяжести, будем иметь

$$W = \text{пост.} = C. \quad (3.7.13)$$

Полученное выражение (3.7.13) является общим уравнением уровенных поверхностей силы тяжести. В каждой точке такой поверхности сила тяжести направлена по нормали к этой поверхности, а составляющие силы тяжести – по касательной к поверхности в любой точке равны нулю.

Поверхность жидкости в спокойном состоянии представляет собой уровенную поверхность, поверхность равновесия, или, как принято говорить, горизонтальную поверхность, слагающая сила тяжести по касательной к которой в любой точке и в любом направлении равна нулю.

Меняя в (3.7.13) значение C , получаем разные уровенные поверхности.

Уровенная поверхность, совпадающая с невозмущенной поверхностью океанов, называется *поверхностью геоида*.

3. Выражения (3.4.17) для потенциала силы тяжести примут вид

$$-\frac{dW}{dh} = g; \quad \partial W = -gdh, \quad dh = -\frac{dW}{g}. \quad (3.7.14)$$

Эти зависимости соответствуют случаю, когда в выражении (3.7.12) $\cos(g,s) = -1$, т. е. когда перемещение точки происходит в направлении, противоположном направлению силы тяжести, а dh представляет собой расстояния между уровенными поверхностями W и $W + dW$.

Последнее уравнение из (3.7.14) показывает, что расстояния между двумя близкими уровенными поверхностями не равны в разных точках, а обратно пропорциональны силе тяжести, действующей в этих точках. На полюсе, где сила тяжести имеет максимальное значение, уровенные поверхности сближаются, а на экваторе расходятся.

Из последних уравнений также следует, что dh – величина одного порядка с dW и ни при каких условиях dh не может обратиться в нуль, если $dW \neq 0$ (так как g – конечная величина), поэтому уровенные поверхности между собой не пересекаются.

Из тех же формул следует, что уровенные поверхности не «параллельны» между собой.

Непараллельность уровенных поверхностей влияет на определение высот точек земной поверхности, получаемых из геометрического нивелирования.

Интегрируя второе из уравнений (3.7.14), получаем

$$\int g dh = -\int dW, \quad (3.7.15)$$

где под dh можно понимать измеренное превышение, определяемое как разность отсчетов по задней и передней рейкам с одной установки нивелира.

Если это суммирование превышений выполнено между некоторыми двумя точками физической земной поверхности A и B (рис. 3.10), расположенными на конечном расстоянии и на разных уровнях поверхностей, то будем иметь

$$\int_A^B g dh = \bar{g}(H_B - H_A) = W_A - W_B \quad (3.7.16)$$

или

$$(H_B - H_A) = \frac{W_A - W_B}{\bar{g}}, \quad (3.7.17)$$

где g – некоторое значение силы тяжести:

$H_B - H_A = \Delta H$ – превышение точки B над точкой A .

Разность потенциалов $W_A - W_B$ постоянна. Отсюда следует, что разность высот точек A и B будет получать различные значения при разном выборе величины g .

Из (3.7.16) следует, что разность потенциалов может быть определена из данных нивелирования при условии измерения силы тяжести вдоль линии нивелирования.

Если принять, что точка A находится на уровне, на котором значение потенциала силы тяжести равно W_0 , то

$$W_B = W_0 - \int_0^B g dh. \quad (3.7.18)$$

Из (3.7.17) можно также написать так:

$$H_B = \frac{W_0 - W_B}{\bar{g}}. \quad (3.7.19)$$

Для последнего принято, что $H_A = 0$, а $\bar{g}$ – по-прежнему некоторое значение силы тяжести.

Из (3.7.18) следует, что, зная значение потенциала силы тяжести в исходном пункте, можно получить из результатов нивелирования значение потенциала для любой точки земной поверхности. При этом, учитывая современную высокую точность нивелирования и измерений силы тяжести, ошибка определения потенциала

W_B будет зависеть от ошибки, с которой известна постоянная W_0 . Заметим также, что разность потенциалов $W_A - W_B$, при вычислении ее по формуле (3.7.16), не зависит от пути нивелирования.

Непараллельность уровненных поверхностей можно доказать, не прибегая к общей теории потенциала.

Рассмотрим две уровненные поверхности ab и a_1b_1 (см. рис. 3.10) и допустим, что они весьма близки одна к другой. Ускорение силы тяжести в точках a и b обозначим через g_1 и g_2 , а отрезки нормали к уровненной поверхности aa_1 и bb_1 – через Δh_1 и Δh_2 . Из механики известно, что материальная точка, перемещаясь из одной уровненной поверхности на другую, производит механическую работу, выражаемую произведением gh , причем эта работа не зависит от пути перемещения, а только от положения конечных точек. Следовательно, материальная точка, перемещаясь по нормали aa_1 и bb_1 произведет одинаковую работу. Поэтому можно написать равенство

$$g_1 \Delta h_1 = g_2 \Delta h_2.$$

Так как в разных точках ускорения силы тяжести в общем случае различны, то для сохранения написанного равенства должно быть $\Delta h_1 \neq \Delta h_2$, что и определяет непараллельность уровненных поверхностей.

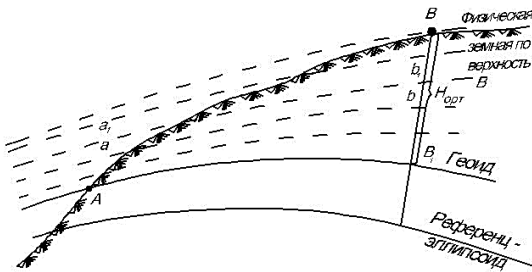


Рис. 3.10

4. Фигура Земли, определяемая в общем виде уравнением $W = V + U = C$, зависит главным образом от силы притяжения, так как влияние центробежной силы мало. Действительно, взяв наибольшее значение центробежной силы, которое она достигает на экваторе $\omega^2 \alpha$, вычислим отношение

$$q = \frac{\omega^2 a}{g_0}, \quad (3.7.20)$$

где g_0 – значение силы тяжести на экваторе.

Принимая $g_0 = 978\,049$ мгл, $a = 6\,378\,245$ и (ω – согласно (3.1.5)), получаем

$$q = \frac{1}{288,4}. \quad (3.7.21)$$

Следовательно, величина q одного порядка со сжатием Земли a .

При последующих выводах формул величины a и q будут приниматься малыми величинами первого порядка. Если удерживать члены только с a или q и пренебрегать членами с a^2 и q^2 , то будем допускать ошибку порядка

$$\left(\frac{1}{300}\right)^2 = 0,00001.$$

Такая точность формул даст ошибку в ускорении силы тяжести около 10 мгл. Поскольку ускорение силы тяжести вычисляют с ошибкой до сотых частей миллигала, то в соответствующих формулах необходимо удерживать величины до второго порядка малости включительно, т. е. до a^2 или q^2 .

Величина центробежной силы и ее направление, как и закон ее изменения на земной поверхности, хорошо известны. Отметим, что центробежная сила действует только на материальные точки, жестко связанные с телом Земли. Если не принимать во внимание атмосферу, вращающуюся вместе с Землей, то можно сказать, что для точек, не связанных с Землей, центробежная сила равна нулю, а сила тяжести обращается в силу притяжения. В действительности, атмосфера в пределах некоторого расстояния от 3 мли будет передавать на материальные тела действие центробежной силы.

Найдем оператор Лапласа для потенциала силы тяжести. Для этого предварительно определим оператор Лапласа для центробежной силы. Напишем вторые производные из (3.7.6):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (3.7.22)$$

Тогда

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad (3.7.23)$$

Оператор Лапласа для потенциала силы тяжести тогда выразится формулами:

для внешней точки

$$\Delta_2 W = \Delta_2 V + \Delta_2 U = 2\omega^2; \quad (3.7.24)$$

для внутренней точки

$$\Delta_2 W = -4\pi f\delta + 2\omega^2. \quad (3.7.25)$$

Поскольку $\Delta_2 U = 2\omega^2$ постоянно, то все соображения, изложенные в § 9 относительно функций $\Delta_2 V$, остаются в силе и для $\Delta_2 W$.

Как уже отмечалось, вторые производные потенциала характеризуют кривизну уровенной поверхности, и там, где плотность меняется скачкообразно, кривизна уровенной поверхности также претерпевает скачкообразные изменения. Этот вывод имеет большое значение для изучения фигуры геоида. Его поверхность пересекает массы разной плотности; в этих местах кривизна поверхности геоида также меняется скачкообразно. Резкие изменения плотностей происходят и на самих материках в зависимости от структуры и состава земной коры и формы земной поверхности. В этом случае они вызывают скачкообразные изменения кривизны геоида.

Кривизна геоида меняется скачком, прежде всего на берегах морей и океанов, а также там, где геоид пересекает горные породы разной плотности.

Вместе с тем все уровенные поверхности и геоид как одна из этих поверхностей нигде не терпят никаких разрывов; это вытекает из непрерывности потенциала силы тяжести.

Первые производные потенциала силы тяжести так же, как и сила притяжения, всюду непрерывны. Поскольку первые производные определяют направление векторов силы, т. е. силовых линий, то и последние также непрерывны.

3.8. Теорема Клеро

Клеро дал вывод своей теоремы, основываясь на исследованиях фигур равновесия тел с неоднородной массой. При этом он предположил, что Земля по форме — эллипсоид вращения с малым сжатием, состоящий внутри из эллипсоидальных слоев,

имеющих общий центр и совпадающие главные оси инерции; каждый слой однороден по плотности, но закон изменения плотностей при переходе от слоя к слою произволен.

Приведем один из выводов теоремы Клеро, основанный на теории потенциала и, в частности, на использовании выражения для потенциала силы тяжести в виде ряда.

Напишем на основании (3.3.25)

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3\sin^2\Phi \cos^2\Phi \, 2\lambda). \quad (3.8.1)$$

Так как для эллипсоида вращения моменты инерции в плоскости экватора между собой равны, т. е. $A = B$, то (3.8.1) примет вид

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} (C - A)(1 - 3\sin^2\Phi). \quad (3.8.2)$$

Разность $C-A$ имеет размерность массы, помноженной на квадрат расстояния.

Положим

$$C - A = \mu a^2, \quad (3.8.3)$$

где a – большая полуось земного эллипсоида, μ – некоторая воображаемая добавочная масса, расположенная вдоль экватора, обуславливающая различие C от A и B .

Тогда

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f\mu a^2}{2r^3} (1 - 3\sin^2\Phi). \quad (3.8.4)$$

Теперь получим выражение для потенциала силы тяжести W ,

Так как $W = V + Q$, то будем иметь

$$W = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} (1 - 3\sin^2\Phi) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2\Phi. \quad (3.8.5)$$

Преобразуем выражение для потенциала центробежной силы, т. е. последний член формулы (3.8.5).

Возьмем отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, т.е.

$$q = \frac{\omega^2 a}{g_0}. \quad (3.8.6)$$

Так как q – малая величина первого порядка, можем заменить g_0 через $\frac{fM}{a^2}$, т. е.

откуда притяжением шара массы M на точку земного экватора. Получим

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{fM}, \quad (3.8.7)$$

$$\omega^2 = \frac{fMq}{a^3}. \quad (3.8.8)$$

Тогда потенциал Q примет вид

$$Q = \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \Phi = \frac{fM}{2a^3} q r^2 \cos^2 \Phi. \quad (3.8.9)$$

Подставляя (3.8.9) в (3.8.5), находим

$$W = \frac{fM}{r} \left[1 + \frac{\mu}{2M} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{q}{2} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \Phi \right]. \quad (3.8.10)$$

Пользуясь полученным приближенным выражением для потенциала силы тяжести, напомним уравнение уровенной поверхности, отклонения которой от поверхности геоида не превосходили бы величин первого порядка малости. Это уравнение имеет вид

$$W = C_0.$$

Для определения искомой постоянной C_0 поставим условие, чтобы на экваторе, т. е. при $\Phi = 0^\circ$, радиус поверхности равнялся большой полуоси a . Подставив эти значения для r и Φ в (3.8.10), получим выражение для C_0

$$\frac{fM}{a} \left(1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2} \right) = C_0. \quad (3.8.11)$$

Таким образом,

$$\frac{fM}{r} \left[1 + \frac{\mu}{2M} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{q}{2} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \Phi \right] = \frac{fM}{a} \left(1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2} \right) \quad (3.8.12)$$

или

$$\frac{f}{a} = \frac{1 + \frac{\mu}{2M} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{qr^3}{2a^3} \cos^2 \Phi}{1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2}}. \quad (3.9.13)$$

Сохраняя лишь малые величины порядка $\frac{\mu}{M}$ и q , последнее выражение можем переписать

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{\mu}{2M} (1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{q}{2} \cos^2 \Phi - \frac{\mu}{2M} - \frac{q}{2}$$

или

$$\frac{r}{a} = 1 - \left(\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2} \right) \sin^2 \Phi \quad (3.8.14)$$

Но на основании (4.16 его нет) с удержанием членов порядка e^2 и a для эллипсоида вращения

$$\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \Phi}} = 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \Phi = 1 - \alpha \sin^2 \Phi. \quad (3.8.15)$$

Сравнивая (3.8.14) и (3.8.15), приходим к заключению, что уравнение (3.8.14) является эллипсоидом вращения со сжатием

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2}. \quad (3.8.16)$$

Этот вывод получен на основе теории потенциала силы тяжести на Земле; в процессе вывода принята только одна гипотеза, что Земля – тело вращения, по форме незначительно отступающее от шара.

Существенно заметить, что полученный вывод справедлив только в том случае, если все массы находятся внутри геоида, так как только при этом условии можно разложить потенциал силы тяжести в ряд. Это понятно, так как мы уже установили, что в пересечении геоидом материков, когда притягивающие массы оказываются вне геоида, его кривизна меняется скачком, а поверхность геоида под материками выражается другой аналитической функцией, чем на море. Отступления от допущенного условия распределения масс в теле Земли по долготе также вызывают соответствующие отклонения фигуры геоида от поверхности эллипсоида вращения. Эти замечания должны приниматься во внимание при детальном изучении фигуры Земли; в то же время влияние этих отступлений от реальных условий выражается величинами, хотя далеко не пренебрегаемыми, но не могущими изменить сделанный вывод о том, что фигура геоида близка к фигуре эллипсоида вращения.

Эллипсоид вращения, поверхность которого выражается уравнением (3.8.14), иногда называют «идеальным геоидом».

Теперь перейдем к получению выражения для величины силы тяжести на уровне поверхности, определяемой уравнением (3.8.14), т. е. на «идеальном геоиде». Из (3.7.14) имеем

$$g = - \frac{\partial W}{\partial h} \quad (3.8.17)$$

(знак минус взят потому, что сила тяжести направлена внутрь, а производная берется по направлению внешней нормали).

В (3.8.17) значение силы тяжести выражается как производная от потенциала по нормали «к *идеальному геоиду*» с точностью до малых величин первого порядка, имеющему форму эллипсоида вращения. Однако в (3.8.5), выражающем потенциал силы тяжести, направление нормали не входит; определим, какую ошибку мы допустим, взяв вместо $\frac{\partial W}{\partial h}$ производную $\frac{\partial W}{\partial r}$

Различие направлений нормали h и радиуса-вектора r выражается разностью геодезической и геоцентрической широт, которая максимально достигает значения $11,8'$. На основании (3.7.12) можно сказать, что, дифференцируя по r , а не по h , мы вместо g получим $g \cos(\varphi - \Phi)$, т. е.

$$g \cos(\varphi - \Phi) = -\frac{\partial W}{\partial r},$$

где φ — широта, образованная нормалью к поверхности земного эллипсоида.

Так как $\cos(\varphi - \Phi) = \cos 11,8' = 0,999995$, то с точностью $5 \cdot 10^{-6}$ можем написать

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r}.$$

Дифференцируя (3.8.10) по r , получаем

$$g = \frac{fM}{r^2} + \frac{3f\mu a^2}{2r^4}(1 - 3\sin^2\Phi) - fMq \frac{r}{a^3} \cos^2\Phi. \quad (3.8.18)$$

Полученная формула позволяет с указанной выше степенью приближения вычислять значения ускорения силы тяжести для внешней точки, вращающейся вместе с Землей и определяемой координатами r и Φ .

Чтобы получить g для точек рассматриваемой поверхности, заменим r в главном члене его выражением согласно (3.8.14), а в остальных членах, вследствие их малости, положим $r = a$, тогда

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[1 - \left(\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2} \right) \sin^2\Phi \right]^{-2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} (1 - 3\sin^2\Phi) - q \cos^2\Phi \right]. \quad (3.8.19)$$

После разложения в ряд по биному Ньютона с удержанием лишь членов первого порядка малости получим

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[1 - \left(\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2} \right) \sin^2 \Phi \right] \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} (1 - 3 \sin^2 \Phi) - q \cos^2 \Phi \right] \quad (3.8.20)$$

или

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} - q + \left(2q - \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} \right) \sin^2 \Phi \right]. \quad (3.8.21)$$

Из (3.8.16) имеем

$$\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} = \alpha - \frac{q}{2}.$$

После подстановки (3.8.2) $\alpha - \frac{q}{2}$ вместо $\frac{3}{2} \frac{\mu}{M}$ получим

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[1 + \alpha - \frac{3}{2} q + \left(\frac{5}{2} q - \alpha \right) \sin^2 \Phi \right]. \quad (3.8.22)$$

Обозначая через g_0 ту часть (3.8.22), которая не зависит от широты, т. е.

$$\frac{fM}{a^2} \left(1 + \alpha - \frac{3}{2} q \right) = g_0, \quad (3.8.23)$$

получаем

$$g = g_0 \left(1 + \frac{\frac{5}{2} q - \alpha}{1 + \alpha - \frac{3}{2} q} \sin^2 \Phi \right). \quad (3.8.24)$$

По-прежнему, удерживая члены первого порядка малости, последнее выражение перепишем таким образом:

$$g = g_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} q - \alpha \right) \sin^2 \Phi \right]. \quad (3.8.25)$$

Вводя обозначение

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha \quad (3.8.26)$$

и пренебрегая различием геоцентрической широты Φ от геодезической φ , получаем окончательно с принятой точностью

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi). \quad (3.8.27)$$

Для определения физического смысла коэффициента β напишем (3.8.27) для точки полюса ($\varphi = 90^\circ$). Тогда получим

$$g_{90^\circ} = g_0 (1 + \beta),$$

откуда

$$\beta = \frac{g_{90^\circ} - g_0}{g_0}. \quad (3.8.28)$$

Следовательно, коэффициент β – разность ускорения силы тяжести на полюсе и экваторе, выраженная в относительной форме.

Таким образом, в результате вывода мы получили формулы:

$$r = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi); \quad (3.8.29)$$

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi); \quad (3.8.30)$$

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha. \quad (3.8.31)$$

Уравнения (3.8.30) и (3.8.31) и составляют так называемую *теорему Клеро*. Напишем последние две формулы еще и в такой форме:

$$g = g_0 + (g_{90^\circ} - g_0) \sin^2 \varphi, \quad (3.8.32)$$

$$\frac{g_{90^\circ} - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} q - \alpha. \quad (3.8.33)$$

Так как

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi,$$

и

$$g_{45^\circ} = g_0 \left(1 + \frac{1}{2} \beta\right),$$

то формулу (3.8.30) можно переписать так:

$$g_0 = g_{45^\circ} \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi\right). \quad (3.8.34)$$

Полученные формулы имеют чрезвычайно важное научное и практическое значение.

Формула (3.8.30) выражает зависимость ускорения силы тяжести на земной поверхности от географической широты. Она выражает в общем виде нормальное распределение силы тяжести.

Формула (3.8.31) устанавливает зависимость между сжатием, величиной центробежной силы и значениями силы тяжести на экваторе и на полюсе. Она позволяет определить сжатие Земли из результатов определений силы тяжести.

Порядок использования этих формул для определения сжатия Земли состоит в следующем.

Пусть на земной поверхности в точках, имеющих широты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, из непосредственных измерений получены значения ускорения силы тяжести.

Согласно формуле (3.8.34), для этих точек могут быть написаны уравнения:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= g_0 + (g_{90}^0 - g_0) \sin^2 \varphi_1 \\ g_2 &= g_0 + (g_{90}^0 - g_0) \sin^2 \varphi_2 \\ g_3 &= g_0 + (g_{90}^0 - g_0) \sin^2 \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.8.35)$$

В этих уравнениях неизвестны g_{90}^0 и g_0 . Решая уравнения по способу наименьших квадратов, находим значения неизвестных, после чего по формуле (3.8.33) вычисляем сжатие a . Чем больше произведено определений силы тяжести и чем больше территория, по которой размещены эти определения, тем достовернее и надежнее вывод значения сжатия a . Значительное количество определений силы тяжести нужно не для уменьшения влияния случайных ошибок измерений силы тяжести (при существующей ныне технике измерений они малы), а для уменьшения влияния местных неравномерностей в распределении масс в земной коре.

Найденные значения g_{90}^0 и g_0 дают возможность вычислить по формуле (3.8.30) ускорение силы тяжести для любой точки земной поверхности. Вычисленное таким образом значение силы тяжести для какой-либо точки называется *нормальным значением силы тяжести*.

Условимся в дальнейшем применять следующие общие обозначения для нормального значения силы тяжести:

γ_e, γ_p – нормальные значения силы тяжести на экваторе и на полюсе соответственно; γ_0 – нормальное значение силы тяжести на эллипсоиде в данной точке (геодезическая высота $H = 0$); γ – нормальное значение силы тяжести в данной точке, вне эллипсоида ($H \neq 0$).

Полученная выше формула нормального распределения силы тяжести точна до малых величин порядка первой степени сжатия. Более точная формула с учетом принятых обозначений имеет вид

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi), \quad (3.8.36)$$

где $\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$, коэффициент β_1 вследствие его малости предпочтительнее определять не из решения уравнений вида (3.8.36), а из иных соображений.

Применяемая в настоящее время в СССР формула нормальной силы тяжести с числовыми значениями коэффициентов имеет вид

$$\gamma_0 = 978,030(1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi). \quad (3.8.37)$$

Эта формула была выведена Гельмертом в 1901–1908 гг. на основании результатов измерения силы тяжести на 1603 пунктах. Значение сжатия Земли, выведенное на основании результатов этих измерений, равно 1:298,2.

Значение коэффициента $\beta_1 = 0,000007$ получено Гельмертом на основании имевшихся данных о внутреннем строении Земли.

Кроме формулы (3.8.37), существует еще много формул, полученных разными учеными на основании использования различных материалов.

В заключение дадим весьма упрощенный вывод основной формулы Клеро.

Рассмотрим поверхность абсолютно твердого однородного шара, вращающегося около неизменной оси с угловой скоростью ω . Для всех точек поверхности такого шара сила притяжения F одинакова, а центробежная сила имеет максимальное значение на экваторе, а на полюсе равна нулю.

Следовательно, будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \text{на полюсе шара } g_{90}^0 = F \\ \text{на экваторе } g_{90}^0 = F - R\omega^2 \end{array} \right\} \quad (3.8.38)$$

где R — радиус шара.

Из (3.8.38) центробежная сила на экваторе получится таким образом:

$$Q_0 = R\varphi^2 = (g_{90}^0 - g_0^0). \quad (3.8.39)$$

В некоторой точке A (рис. 3.11), имеющей широту φ , центробежная сила будет

$$Q_\varphi = Q_0 \cos \varphi.$$

Проектируя центробежную силу в точке A по направлению силы тяжести, за которое примем радиус OA , получаем

$$Q \cos \varphi = Q_0 \cos^2 \varphi.$$

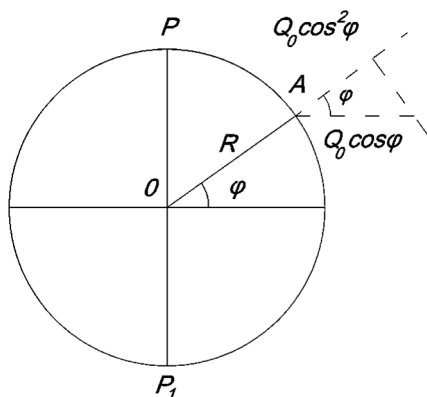


Рис. 3.11

Следовательно, сила тяжести в точке A как равнодействующая силы притяжения и центробежной силы будет выражена

$$g_{\varphi} = g_{90^{\circ}} - Q_0 \cos^2 \varphi = g_{90^{\circ}} - (g_{90^{\circ}} - g_{0^{\circ}}) \cos^2 \varphi = g_{90^{\circ}} - (g_{90^{\circ}} - g_{0^{\circ}})(1 - \sin^2 \varphi) = g_{0^{\circ}} + (g_{90^{\circ}} - g_{0^{\circ}}) \sin^2 \varphi \quad (3.8.40)$$

$$g_{\varphi} = g_{90^{\circ}} \left(1 + \frac{g_{90^{\circ}} - g_{0^{\circ}}}{g_{0^{\circ}}} \sin^2 \varphi \right),$$

или

$$g_{\varphi} = g_{90^{\circ}} (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (3.8.41)$$

где по-прежнему

$$\beta = \frac{g_{90^{\circ}} - g_{0^{\circ}}}{g_{0^{\circ}}}.$$

Отметим здесь, что результаты астрономо-геодезических и гравиметрических измерений позволяют определять массу Земли непосредственно в абсолютных единицах – в граммах, тогда как все астрономические способы дают значение массы Земли с большой точностью, но в относительных единицах, например, отнесенное к массе Солнца.

4. ВНЕШНИЙ ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ

4.1. Нормальный и возмущающий потенциалы. Решение внешней краевой задачи в постановке Стокса. Решение Молоденского

Гравитационное поле Земли принято разделять на две части: нормальное гравитационное поле и остаточное аномальное поле. В физической геодезии оперируют в основном с аномальным гравитационным полем. Основное преимущество такого подхода состоит в том, что аномальное поле гораздо слабее действительного гравитационного поля Земли, и поэтому его характеристики легче определить.

Нормальное гравитационное поле характеризуется четырьмя параметрами: общей массой Земли; формой и размерами эллипсоида, наиболее близко соответствующего геоиду в глобальном масштабе; скоростью вращения Земли. Его определение вытекает из условия, что поверхность эллипсоида – это уровенная поверхность в нормальном гравитационном поле, а поверхность геоида представляет собой уровенную поверхность в действительном гравитационном поле (нормальное поле объясняет также существование негравитационной, центробежной, силы, которая возникает вследствие вращения Земли вокруг своей оси). При этом предполагается, что центр нормального эллипсоида (или референц-эллипсоида) совпадает с центром масс Земли. В любой точке разность высот геоида и референц-эллипсоида, называемая *ондуляцией геоида*, прямо пропорциональна возмущающему потенциалу (потенциал силы тяжести – одна из важнейших характеристик гравитационного поля Земли).

Таким образом, определение аномального гравитационного поля (путем гравиметрических измерений) позволяет определить положение поверхности геоида по отношению к эллипсоиду и отсюда – форму Земли. Если нам известна форма геоида, то известно и направление силы тяжести, которое в каждой точке перпендикулярно к поверхности геоида. Следовательно, можно найти уклонение отвесной линии, т. е. угол между направлением силы тяжести и перпендикуляром к поверхности эллипсоида.

В математической физике существуют так называемые граничные, или краевые задачи, формулируемые примерно следующим образом. Если изменения некоторой величины, например, возмущающего потенциала, подчиняются какому-то закону и эта величина (или связанная с ней) принимает определенное значение на какой-то граничной поверхности, то можно определить значение этой величины в любой точке пространства. В геодезии сила тяжести определяется прямыми измерениями; таким образом, задача состоит в том, чтобы определить возмущающий потенциал на земной поверхности и над ней.

Однако в геодезии краевая задача осложняется тем, что граничная поверхность (в данном случае физическая поверхность Земли), определяемая относительно геоида, представляет собой искомую величину, которая определяется в последнюю очередь; поэтому это еще одна неизвестная величина, входящая в задачу. С теоретической точки зрения, это одна из самых трудных проблем в геодезии, для которой получены пока только приближенные решения.

Нормальная Земля – это тело отсчета для построения карт высот, глубин морей и т. д. Причём это тело должно описываться достаточно простыми математическими формулами и, кроме того, достаточно хорошо аппроксимировать физическую поверхность планеты.

Общепризнано, что наиболее удобным геометрическим телом для модели Земли является общеземной эллипсоид (ОЗЭ) – уровенный эллипсоид вращения. Его гравитационный потенциал (потенциал тяжести) U называют *нормальным потенциалом*. Условие для выбора параметров нормальной Земли:

1. Центр масс и ось вращения нормальной Земли совпадают соответственно с центром масс и осью вращения реальной Земли.
2. Угловая скорость вращения эллипсоида и реальной Земли совпадают.
3. Масса эллипсоида равна массе Земли.
4. Зональный коэффициент разложения потенциала второй степени реальной Земли равен соответствующему коэффициенту нормальной Земли.

Возмущающий потенциал – разность реального и нормального потенциалов тяжести или притяжения взятых в одной и той же точке.

Возьмём точку P на поверхности геоида – уровенной поверхности – с координатами N, B, L , где N – геодезическая высота точки (расстояние от уровенной поверхности до эллипсоида) Другими словами, это высота геоида в точке P . Две другие координаты – B и L – соответственно геодезические широта и долгота. На поверхности эллипсоида точку с такими же значениями широты и долготы будем обозначать буквой Q . Понятно, что высота этой точки равна нулю.

Итак, задача определения фигуры геоида (поверхности уровня относительно эллипсоида) сводится к определению гармонической функции T – возмущающего потенциала, который линейно связан с высотой геоида. Проблема интегрирования уравнения Лапласа при условии, что на заданной поверхности искомая функция подчиняется некоторому условию, которое называют *краевым условием*, принадлежит к большому классу краевых задач.

Впервые задачу определения фигуры Земли поставил и теоретически решил Стокс. Принципиальная возможность определения уровенной поверхности по гравитационному полю, т. е. возможность определения нормального потенциала доказывалась теоремой Стокса (1849).

Если известны внешняя уровенная поверхность потенциала силы тяжести, масса тела и угловая скорость вращения его вокруг неизменной оси, то потенциал силы тяжести, как и его производные, определяются однозначно, как на самой поверхности, так и во всем внешнем пространстве независимо от распределения плотностей масс внутри поверхности S .

Символически это утверждение можно записать так: $g = F(S, M, \omega)$. Наша задача – определение фигуры Земли – является обратной: требуется определить S по заданным M , g и ω .

Терема Стокса устанавливает принципиальную возможность определения потенциала силы тяжести, если известна форма внешней уровенной поверхности и общая масса тела, без привлечения каких-либо гипотез о его внутреннем строении. Определение потенциала по этим условиям составляет проблему или задачу Стокса.

Задача Стокса неразрешима в конечном виде для произвольной поверхности, однако для простейших поверхностей, как сфера, эллипсоид, она решена строго и в замкнутой форме.

Дж. Г. Стокс доказал разрешимость этой задачи и дал приближённое решение для сжатого сфероида с относительной ошибкой порядка квадрата его сжатия как *первой краевой задачи теории потенциала*.

В классическом решении задачи Стокса, предполагается, что масса эллипсоида равна массе реальной Земли, т. е. $M = M_0$, а начало координат совпадает с центром масс планеты $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Отсюда следует, что разложение возмущающего потенциала начинается с $n = 2$:

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{\rho^{n+1}}. \quad (4.1.1)$$

Пренебрегая квадратом сжатия, мы снова дифференцирование по нормали заменим дифференцированием по радиус-вектору

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{2T}{R} \approx \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} + \frac{2T}{R} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n}{R^{n+2}} Y_n(\theta, \lambda). \quad (4.1.2)$$

Следовательно,

$$g_n(\theta, \lambda) = \frac{n-1}{R^{n+2}} Y_n(\theta, \lambda). \quad (4.1.3)$$

Заметим, что при $n = 0$, должно быть

$$g_0(\theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \Delta g d\Sigma = 0, \quad (4.1.4)$$

а при $n = 1$, имеет вид

$$g_1(\theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \Delta g \cos \psi d\Sigma = 0. \quad (4.1.5)$$

Применение формулы Стокса для определения высот геоида относительно общего земного эллипсоида наталкивается на серьёзные трудности. Во-первых, для интегрирования необходимо, чтобы гравитационные аномалии были известны по всей поверхности Земли, более двух третей которой покрыта морями и океанами. Измерение силы тяжести на поверхности океанов стало возможно лишь в XX столетии.

Вторая проблема – более серьёзная. Теория Стокса требует, чтобы все массы лежали под уровенной поверхностью, называемой *геоидом*. Кроме того, измерения силы тяжести выполняются на физической поверхности, не совпадающей с геоидом. Задача состоит в том, чтобы в измеренное значение внести такие поправки, которые бы перенесли все массы под уровень моря, не изменяя самой уровенной поверхности, а сила тяжести оказалась бы отнесённой к уровню моря (геоиду). Эта проблема широко обсуждалась в научной литературе и получила название *проблемы регуляризации Земли*.

Оказалось, что для успешного решения проблемы регуляризации необходимо знать внутреннее строение Земли.

В геодезии и геофизике основной характеристикой гравитационного поля являются гравитационные аномалии, полученные как разность между наблюдаемым значением удельной силы тяжести и предвычисленным. Однако сравнивать эти значения можно только, в случае, когда наблюдаемое и нормальное значения относятся к одной и той же точке пространства.

В действительности же нормальную силу тяжести относят к общему земному эллипсоиду, а наблюдаемое – к физической поверхности Земли. Такие аномалии в геодезии именуют *смешанными аномалиями*. Иногда наблюдаемое значение редуцируют, т. е. вносят поправки, позволяющие вычислить значение силы тяжести в другой точке или на другой поверхности. При этом используют ту или иную гипотезу о строении верхних слоёв Земли.

Итак, нормальное значение силы тяжести относят к общему земному эллипсоиду, которое можно вычислить по строгой формуле. Эта формула строгая лишь в том случае, когда поверхность эллипсоида есть поверхность уровня, чего в действительности нет. На практике в задачах геодезии и геофизики

применяют приближенную формулу для нормальной силы тяжести. Причём численные значения коэффициентов, входящие в эту формулу, утверждают на Генеральной ассамблее Международного Союза геодезии и геофизики.

В научный спор о том, как решать проблему регуляризации, в 50-х годах вмешался М. С. Молоденский, который доказал, что различные варианты решения практически эквивалентны, но они не решают задачу вполне строго. Молоденский. Он нашел решение, пригодное для любой произвольной поверхности (в том числе топографической); эта поверхность может быть описана по гравиметрическим данным. Хотя это решение также приближенное, оно представляет шаг вперед, так как не требует знания плотностной структуры верхней части земной коры, как это требовалось в решении Стокса. В обоих случаях величина ускорения силы тяжести вблизи той точки, где должна быть определена поверхность геоида, оказывает гораздо более сильное влияние, чем в более удаленных областях. Отсюда следует, что требования к точности измерений силы тяжести в глобальном масштабе могут быть не столь строгими.

Он предложил строгое решение задачи определения фигуры Земли. При этом определяются высоты не поверхности, которую мы называем геоидом, а другой поверхности, достаточно близкой к геоиду, которую он назвал квазигеоидом

М. С. Молоденский разработал теорию построения квазиеоида, предложил алгоритмы приближённого решения проблемы. Во-первых, редукция (перенос) силы тяжести или потенциала выполняется в линейном приближении. Во-вторых, хотя все измерения и редукции относятся к физической поверхности или к эллипсоиду, интегрирование малых функций, где это требуется, выполняется по сфере (сферическое приближение). Конечно, теория Молоденского не окончательная. Она постоянно совершенствуется его учениками. В Советском Союзе возникла школа Молоденского, которая широко известна не только у нас, но и за рубежом.

Основная трудность решения этой задачи связана с определением g на поверхности уровня. На практике можно измерять удельную силу тяжести только на физической поверхности.

Возникает задача переноса этого значения (редукции) с физической поверхности на геоид (не на эллипсоид!).

Над проблемой редукции работало много учёных. Доминирующую роль в этой теории сыграли наши учёные. Основная трудность заключалась в том, как «отправить» все массы, лежащие выше поверхности геоида, под эту поверхность, при этом не исказив саму поверхность уровня. Эта проблема получила название *проблемы регуляризации Земли*. Последнюю точку в этой задаче поставил М. С. Молоденский. Он доказал, что фигуру Земли можно изучать и без регуляризации. Достаточно все измерения выполнять на физической поверхности, но кроме силы тяжести необходимо знать и приращение потенциала, для чего должны быть выполнены и геодезические работы.

4.2. Теория потенциала силы тяжести. Аппаратура и методы определений силы тяжести на суше и на море

Центробежная сила зависит от скорости вращения Земли и расстояния от данной точки до оси вращения; следовательно, при постоянной скорости вращения она закономерно убывает от некоторого максимума на экваторе до нуля на полюсах пропорционально радиусу параллели.

Если бы центробежной силы не было, то при однородной массе Земли сила тяжести во всех ее точках была бы постоянной. Таким образом, изменение силы тяжести зависит от изменения действия центробежной силы. Чем дальше земная поверхность отстоит от оси вращения, тем сильнее влияние центробежной силы, тем больше изменение силы тяжести соответственно изменяется форма поверхности. Отсюда приходим к выводу о зависимости фигуры Земли от значений силы тяжести на ее поверхности. Сила же притяжения, являющаяся главной составляющей силы тяжести, зависит и от распределения масс в теле Земли, т. е. от распределения плотности вещества внутри Земли. Поясним это обстоятельство несколько подробнее.

Закон тяготения гласит, что две материальные точки притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними; направление этой силы совпадает с прямой, соединяющей эти

точки. В случае тел конечных размеров закон сохраняет свою силу, тогда взаимодействуют все точки гравитирующих тел. Равнодействующая притяжения складывается из притяжения всех элементарных частиц, составляющих тела, а направление совпадает с прямой, соединяющей центры масс.

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{Q}; \quad (4.3.1)$$

$$F = f \frac{mM}{R^2}; \quad (4.3.2)$$

$$Q = m\omega^2 \rho, \quad (4.3.3)$$

где m – масса точки А; M, R – масса и радиус Земли; $f = 6.7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная тяготения; ρ – расстояние точки от оси вращения; ω – угловая скорость вращения Земли.

Значение силы тяжести определяется главным образом силой притяжения, даже на экваторе, где центробежная сила достигает максимума, отношение центробежной силы к силе притяжения равно 1/288. Поэтому изучение гравитационного поля Земли фактически сводится к изучению силы притяжения Земли.

В основе теории изучения гравитационного поля Земли лежат основные законы динамики и закон всемирного тяготения.

Сила тяжести характеризуется ускорением, которое приобретает свободно падающее тело. Единица ускорения 1 гал = 1 см/с².

Приборы, служащие для измерения силы тяжести называются гравиметрами.

Свойства пространства вокруг масс и их взаимодействие можно изучать, вводя понятие потенциальной энергии. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, сила взаимного притяжения точечных масс m и M составляет

$$F = f \frac{mM}{R^2}. \quad (4.3.4)$$

Если расстояние между двумя массами увеличится на бесконечно малую величину, то будет совершена элементарная работа. С другой стороны, эта работа равна потере потенциальной

энергии при $m=1$ $V = fM/r$. Согласно второму закону механики $F = mW$, тогда ускорение $W = -dV/dr$. Таким образом, градиент потенциала, взятый с обратным знаком, равен ускорению, приобретаемому единичной массой вследствие взаимного притяжения с массой M на расстоянии r . По определению потенциальной энергии ее бесконечно малое приращение, взятое с обратным знаком, численно равно работе, совершаемой силой притяжения при бесконечно малом перемещении единичной массы в заданном направлении.

Потенциал силы тяжести равен сумме потенциалов притяжения и центробежной силы

$$W = V + U. \quad (4.3.5)$$

Если силу тяжести или ускорение обозначим через g , то составляющие по осям координат будут $g_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \dots$, а модуль вектора ускорения силы тяжести и его направление вычисляются по формулам

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}; \quad \cos(g, x) = \frac{g_x}{g} \dots \quad (4.3.6)$$

Распределение силы тяжести внутри, на поверхности и вблизи Земли зависит от ее внутреннего строения.

Поскольку скалярные функции W и V зависят только от координат точки пространства массы M , можно для любой объемной массы задать поверхность, для точек которой потенциал будет постоянным – это изопотенциальная или уровенная поверхность

Физическая фигура Земли имеет сложный вид, а распределение плотностей масс – неравномерное. Поэтому уровенные поверхности Земли представлены такими сложными поверхностями, что приходится их изучать последовательными приближениями, разделяя на классы по уровню сложности.

Уровенные поверхности не могут пересекаться или касаться друг друга. Каждой поверхности соответствует единственное значение потенциала $W = \text{const} = C$, а работа при перемещении единичной массы по этой поверхности равна нулю, таким обра-

зом, во всех точках уровенной поверхности потенциальная сила направлена по нормали к уровенной поверхности. Земля имеет нестационарное потенциальное поле, изменяющееся во времени. Это обусловлено притяжением ее другими планетами и Солнцем. Фигура Земли изменяется (приливы, дрейф континентов, движения земной поверхности, изменения уровней морей и океанов, движения полюсов, неравномерность вращения, сезонные явления и другие деформации), вызывает возмущение потенциального поля вследствие переноса масс с одной уровенной поверхности на другую и изменения их взаимного расположения.

Результаты измерений силы тяжести совместно с результатами других видов геодезических измерений широко используются в геологии, астрономии и в некоторых других науках.

Изучение гравитационного поля Земли основывается на одном из разделов математической физики – теории потенциала.

В заключении настоящего параграфа дадим понятие о методах измерения силы тяжести.

Методы измерения силы тяжести основаны на наблюдении и количественной фиксации разнообразных физических явлений, совершающихся под действием силы тяжести. В принципе любое из указанных явлений может быть использовано для измерения силы тяжести; выбор того или иного явления и соответствующего ему метода определяется из условия обеспечения наибольших удобств практики измерений и точности.

Первым произвел определение ускорения силы тяжести итальянский физик и астроном Галилей (XVI–XVII века).

Теперь проведем следующие рассуждения.

Допустим, что действительная поверхность Земли уровенная и совпадает с уровенным эллипсоидом нормального потенциала силы тяжести; иначе говоря, допустим, что $W_0 = U_0$ и возмущающий потенциал $T = 0$. В этом случае во всех точках такой «Земли» направление вектора действительной силы тяжести, определяемое астрономическими координатами, совпадало бы с направлением силовых линий нормального гравитационного поля, определяемых на эллипсоиде геодезическими координатами B, L , т. е. получилось бы, что $\varphi = B$ и $\lambda = L$. Тогда отклонения отвесных линий, как углы между направлениями векторов действительного и нормального направлений силы тяжести, бы-

ли бы равны нулю. При условии равенства нормального и реального потенциалов измеренные значения силы тяжести g во всех точках Земли равнялись бы нормальным γ , т. е. вычисленным по нормальной формуле силы тяжести. В этом случае высоты точек Земли H также везде были бы равны нулю.

В действительности описанной картины по результатам измерений не наблюдается. Сопоставление астрономических и геодезических координат даже при самой хорошей ориентировке референц-эллипсоида выявляет отклонения отвесных линий, по величине значительно превосходящие ошибки астрономических и геодезических измерений. Измеренные значения силы тяжести g не совпадают с нормальными γ на величины, во много раз превосходящие ошибки гравиметрических наблюдений. Эти расхождения $g-\gamma$ называются *аномалиями силы тяжести*; они, как увидим далее, играют важнейшую роль при изучении фигуры Земли наравне с результатами геодезических и астрономических измерений. Теперь нетрудно сделать вывод, что получающиеся расхождения в астрономических и геодезических координатах, расхождения в измеренных и нормальных значениях силы тяжести являются результатом неравенства действительного и нормального потенциалов силы тяжести Земли, т. е. действия *возмущающего потенциала T* .

Однако возмущающий потенциал T непосредственному измерению не поддается. Поэтому естественно поставить задачу – по отклонениям отвесных линий или по аномалиям силы тяжести, как опытным данным, определить возмущающий потенциал Земли T и затем получить действительный потенциал W силы тяжести Земли. Зная W , можно далее на основе теоретических зависимостей определять различные характеристики и величины действительного гравитационного поля Земли, необходимые для теории и практики, как, например, определение геодезических высот точек поверхности Земли, вычисление поправок в астрономические координаты за влияние отклонений отвесной линии в любой точке земной поверхности, определение влияния силы тяжести на Земле при расчете полетов ракет и искусственных спутников Земли и др.

Возникает вопрос, чему отдать предпочтение: *укло-
нениям отвесной линии или аномалиям*

силы тяжести. Теоретически аномалия силы тяжести Δg и отклонения отвесной линии (ξ , η) пригодны для определения возмущающего потенциала T . Но практически следует отдать предпочтение аномалиям силы тяжести по следующим соображениям:

1. Отклонения отвесной линии с необходимой точностью определяются из сопоставления результатов геодезических и астрономических наблюдений, которые требуют на каждом пункте во много раз больше времени и труда, чем гравиметрические измерения. Определение на какой-либо территории отклонений отвесных линий с заданной частотой потребовало бы в десятки раз больше труда, средств и времени, чем вывод аномалий силы тяжести из гравиметрических наблюдений.

2. Гравиметрические наблюдения могут проводиться не только на суше, но и на море. Это преимущество имеет большое принципиальное значение, так как теоретические предпосылки требуют, чтобы измерения проводились на *всей поверхности Земли*. Отклонения же отвесных линий при существующих методах и средствах измерений могут быть выведены на суше, т. е. только примерно на $\frac{3}{8}$ всей земной поверхности.

Таким образом, приходим к заключению, что для определения возмущающего потенциала следует использовать аномалии силы тяжести, для получения которой необходима гравиметрическая съемка.

Следовательно, дальнейшей целью должно быть установление зависимостей, существующих между возмущающим потенциалом T и аномалиями силы тяжести. Так как задача высшей геодезии – изучение действительной фигуры Земли, то далее должны быть установлены зависимости между величинами, характеризующими форму Земли, и возмущающим потенциалом. Отметим, что такими величинами являются расстояния точек земной поверхности и отклонения отвесной линии относительно принятого референц-эллипсоида. Имея в виду указанный общий путь – определение возмущающего потенциала T по аномалиям силы тяжести, а по T – высот точек Земли и отклонений отвесной линии, имеется возможность непосредственного выражения последних величин через аномалии силы тяжести.

4.3. Аномалии силы тяжести

Так как аномалии силы тяжести служат исходными данными для определения возмущающего потенциала Земли, остановимся подробнее на вычислениях аномалий силы тяжести. Выше аномалия силы тяжести была определена как разность между измеренным и нормальным значениями силы тяжести, т. е. $\Delta g = g - \gamma$. Разумеется, при этом считалось, что обе величины g и γ относятся к одной точке. В действительности нормальное значение силы тяжести γ относится к точке M_0 уровенного эллипсоида, а измеренное g — к точке M , расположенной на земной поверхности на расстоянии H_M по нормали к эллипсоиду, представляющей собой геодезическую высоту точки M . При этом положение точки M_0 (рис. 4.1) на эллипсоиде определяется известными геодезическими координатами B, L .

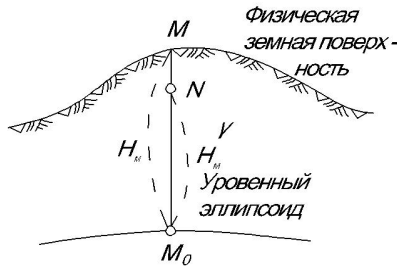


Рис. 4.1

Естественно потребовать приведения обоих значений силы тяжести к какой-либо одной точке. Очевидно, для этой цели нам необходимо было бы в первую очередь знать геодезическую высоту H_M точки M ,

Для высоты H некоторой точки M ранее была получена общая формула (3.7.19)

$$H_M = \frac{W_0 - W_M}{\bar{g}}, \quad (4.4.1)$$

где разность

$$W_0 - W_M = \int g dh$$

определяется из нивелирования, а $\bar{g}$ — некоторое значение силы тяжести, которое может, как увидим в § 24, выбираться различно.

Вычислим для точки M высоту по формуле

$$H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m^M}, \quad (4.4.2)$$

где под γ_m^M будем понимать среднее нормальное значение силы тяжести для отрезка MM_0 , которое можно вычислить точно; иначе говоря, положим в формуле (4.4.2) $g = \gamma_m^M$. Заметим, что высоты H^γ , вычисляемые по формуле (4.4.2), называются *нормальными*.

Подробнее о системах высот будет сказано в § 24; здесь ограничимся изложением сведений, необходимых для освещения вопроса о выводе аномалий силы тяжести.

Если вычисленную по (4.4.2) высоту H_M отложить вверх от уровенного эллипсоида (см. рис.4.1, то получим некоторую точку N , близкую к точке M ; на основании опытных данных установлено, что для Земли различие высот H_M и H_M^γ , т. е. отрезок MN , нигде не превышает 150 м; иначе говоря, различие в высотах точек M и N становится приблизительно на порядок меньше, чем геодезическая высота точки M , которая может достигать сотен и тысяч метров. Если вычислить нормальную силу тяжести γ_N для точки N и использовать ее для вычисления аномалий силы тяжести, то последние, определяемые как $g - \gamma_N$, также будут на порядок меньше, чем $g - \gamma_0$. Это обстоятельство будет иметь весьма существенное значение для упрощения ряда последующих теоретических выводов.

Итак, для следующего положим, что аномалии силы тяжести вычисляют по формуле

$$\Delta g = g_M - \gamma_N, \quad (4.4.3)$$

где g_M можно рассматривать как

$$y_N = y_0 + (y_N - y_0). \quad (4.4.4)$$

Величину $\Delta g = g_M - \gamma_N$ называют *смешанной аномалией силы тяжести*, имея в виду, что g и y относятся к разным точкам пространства.

Поправку $(\gamma_N - \gamma_0)$ обычно называют *редукцией силы тяжести* в свободном воздухе, поэтому величина Δg также называется *аномалией силы тяжести с редукцией в свободном воздухе* или просто аномалией силы тяжести в свободном воздухе.

Если нормальную силу тяжести вычислить для точки M , то разность $g_M - \gamma_N$ принято называть *чистой аномалией силы тяжести*; однако чистая аномалия силы тяжести в настоящее время в высшей геодезии не используется.

Теперь получим формулу для вычисления редукции силы тяжести в свободном воздухе. Задача заключается в определении изменения силы тяжести при переходе из точки M_0 в точку N на расстояние по нормали, равное H^γ . Применяя строку Тейлора, можем написать

$$\gamma_N = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial n} H^\gamma + \dots \quad (4.4.5)$$

Частная производная называется *вертикальным градиентом силы тяжести*.

Высота H^γ по сравнению с радиусом Земли – величина второго порядка малости, поэтому в ряде Тейлора удержан только первый поправочный член.

При вычислении $\frac{\partial \gamma}{\partial n}$ ограничимся членами только первого порядка, т. е. примем Землю за шар; тогда ошибка произведения $\frac{\partial \gamma}{\partial n} H^\gamma$ будет величиной третьего порядка малости, которой можно пренебречь.

В этом случае, положив

$$\gamma = \frac{fM}{R^2},$$

получим

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{2fM}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R}. \quad (4.4.6)$$

Следовательно, окончательно

$$\gamma_N = \gamma_0 - \frac{2\gamma}{R} H^\gamma. \quad (4.4.7)$$

Подставив в (4.4.7) числовые значения среднего значения силы тяжести и среднего радиуса Земли, получим формулу для вычислений

$$\gamma_N = \gamma_0 - 0,3086 H^\gamma \frac{\text{мГЛ}}{\text{м}}. \quad (4.4.8)$$

Таким образом, рабочая формула для вычисления смешанной аномалии силы тяжести примет вид

$$\Delta g = g_M - \gamma_N = g_M - (\gamma_0 - 0,3086H^\gamma). \quad (4.4.9)$$

Аномалии силы тяжести характеризуют отступления действительного потенциала Земли от нормального. Эти аномалии дают также указания о распределении масс внутри Земли, но не определяют последние; теоретически можно допустить множество вариантов распределения масс, при которых аномалии на всей поверхности Земли будут иметь одно и то же значение.

Положительные аномалии силы тяжести, т. е. когда $g > \gamma$, соответствуют избытку притягивающихся масс в исследуемом районе; наоборот, отрицательные аномалии силы тяжести соответствуют недостатку этих масс. Положительные аномалии силы тяжести соответствуют, вообще говоря, возвышениям геоида, а отрицательные аномалии – его понижениям. Но это соответствие справедливо только приблизительно и в общем: рельеф геоида зависит от аномалий силы тяжести на всей поверхности Земли.

Значения аномалий, как правило, даются в специальных каталогах, там же приводятся значения силы тяжести. Для практических целей значительно удобнее пользоваться картами изоаномал. Эти карты составляют следующим образом: строят географическую сетку, затем по координатам наносят точки, на которых исполнены измерения силы тяжести и для которых вычислены аномалии. Путем интерполяции по нанесенным точкам строят кривые, соединяющие точки с одинаковыми значениями аномалий; эти кривые и называются *и з о а н о м а л а м и*. Наличие карт изоаномал обеспечивает возможность удобного использования результатов гравиметрической съемки в различных целях. Карты составляют на картографической основе в различных масштабах.

При специальном использовании результатов гравиметрических измерений (разведка ископаемых, изучение внутреннего строения Земли) возникает необходимость учета поправок за притяжение топографического рельефа земной поверхности.

Аномалии силы тяжести зависят от влияния наружных топографических масс, расположенных выше уровня океанов, и от действия аномальных масс, находящихся внутри Земли. Разделение влияния этих двух причин в указанных целях приобретает существенное значение. Аномалии силы тяжести, из которых

исключено влияние притяжения внешних форм рельефа, будут зависеть только от действия аномальных масс, расположенных внутри Земли. Знание таких аномалий весьма полезно и ценно для выявления плотностей различных слоев и частей земной коры и позволяет в сочетании с геологическими и геофизическими данными с большим успехом выявлять различные полезные ископаемые.

Топографические редукции подразделяются на следующие:

а) полные топографические редукции, когда учитывают влияние топографических масс всей Земли;

б) неполные топографические редукции, когда учитывается влияние топографических масс в некоторой области, обычно в радиусе порядка 400 км;

в) редукции за промежуточный слой, когда притяжение топографических масс заменяется притяжением бесконечной пластины, толщина которой равна высоте пункта.

При вычислении первых двух редукций учитывается сферичность Земли; при вычислении поправок за промежуточный слой поверхность Земли принимается за плоскость.

Топографические редукции представляют собой поправки за влияние притягивающих масс Земли, расположенных между уровнем моря и физической земной поверхностью. Следовательно, в результате введения топографических редукций получаются значения силы тяжести, освобожденные от влияния указанных топографических масс в учитываемой области.

Кроме топографических редукций, существуют еще редукции или поправки за рельеф. Поправки за рельеф выражают влияние топографических масс, расположенных выше уровня данной точки, и недостатков масс, расположенных ниже этого уровня (впадины). В результате введения поправки за рельеф получается значение силы тяжести, которое было бы в данной точке, если бы поверхность Земли в рассматриваемой ее области была горизонтальной (на уровне данной точки). Нетрудно видеть, что поправка за рельеф равна разности топографической редукции и редукции за промежуточный слой. Во всех случаях поправки за рельеф положительны.

Из опытных данных установлено, что аномалии силы тяжести с редукцией в свободном воздухе в сильной степени зависят

от влияния топографического рельефа окружающей земной поверхности. Поэтому, когда возникает необходимость интерполирования аномалии силы тяжести, то интерполированное значение силы тяжести для точек, расположенных между гравиметрическими пунктами, получается точнее, если из аномалий силы тяжести предварительно исключить возмущающий эффект притяжения масс, расположенных между уровнем океана и физической земной поверхностью.

Принципиально вывод формул для вычисления топографических редукций весьма простой. Он заключается в определении влияния на аномалию притяжения элементарной массы, расположенной на текущем расстоянии r , и интегрировании этого влияния по объему в пределах взятой области.

Из топографических редукций наиболее часто вводится редукция за промежуточный слой, которая входит основным слагаемым во все виды топографических редукций. Эта редукция получила название редукции Буге. Не приводя вывода формул для вычисления этой редукции, напомним ее в окончательном виде

$$\Delta g_T = 2\pi f \delta H \left(1 - \frac{H}{2a}\right), \quad (4.4.10)$$

где H – высота данного гравиметрического пункта; a – радиус учитываемой области притяжения; δ – плотность поверхностных пород, принимаемая постоянной.

Плотность δ обычно известна с ошибкой 10 % и более; поэтому, если $\frac{H}{2a} < \frac{1}{20}$, вторым членом формулы (4.4.10) можно пренебречь. Тогда

$$\Delta g_T = 2\pi f \delta H. \quad (4.4.11)$$

Последняя формула и представляет собой влияние притяжения плоского слоя толщины H и бесконечного простираения.

Если Землю принять за шар, то приближенно

$$\gamma = \frac{fM}{R^2} \frac{4}{3} \pi \delta_0 R^3 = \frac{4}{3} \pi f \delta_0 R,$$

$$\text{откуда } 2\pi f = \frac{3\gamma}{2R\delta_0}.$$

Полагая $R = 6371$ км, $\gamma = 980$ гл и $\delta_0 = 5,52$ (средняя плотность Земли), получаем

$$\Delta g_T = -0,0418\delta H. \quad (4.4.12)$$

Плотность δ верхних пород колеблется, как правило, от 2,5 до 2,8; если возьмем $\delta = 2,6$, то $0,0418\delta = 0,109$; таким образом, редукция за притяжение промежуточного слоя составляет приблизительно одну треть от редукции в свободном воздухе.

Результаты вычислений по формулам (4.4.10) и (4.4.12) всегда будут приближенными, поскольку точно не известна плотность δ верхних слоев Земли.

5. УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

5.1. Общие сведения

Уклонение отвесной линии в первом приближении можно определить как угол между направлением нормали к поверхности эллипсоида и направлением отвесной линии в исследуемой точке (точное определение этого понятия дано в § 17).

Уточним это понятие.

Если уклонение отвесной линии определяется как угол между нормалью к поверхности общего земного эллипсоида и направлением отвесной линии, то оно называется *абсолютным*.

Если уклонение отвесной линии определяется как угол между нормалью к поверхности референц-эллипсоида и направлением отвесной линии, то такое уклонение называют *относительным*.

Абсолютное уклонение отвесной линии зависит только от распределения масс Земли. Относительное уклонение отвесной линии зависит от распределения масс Земли и принятых размеров и ориентировки референц-эллипсоида. Чем значительнее отступает референц-эллипсоид от общего земного эллипсоида, тем больше в среднем относительные уклонения отвесных линий. При этом влияние отступления референц-эллипсоида от общего земного эллипсоида на величину относительных уклонений отвесных линий будет носить систематический характер и, как правило, проявляться тем заметнее, чем обширнее область земной поверхности, к которой относятся эти уклонения отвесных линий.

Направление отвесной линии определяется на земной поверхности из астрономических наблюдений путем вывода астрономических координат φ и λ . Направление нормали на поверхности референц-эллипсоида определяется геодезическими координатами B и L . Отсюда следует, что относительные уклонения отвесных линий могут практически определяться из соответствующего сопоставления астрономических и геодезических координат. Поэтому относительные уклонения отвесной линии называют также астрономо-геодезическими.

Можно дать и несколько иное определение уклонения отвесной линии. Поскольку направление отвесной линии совпадает с действительным направлением вектора силы тяжести g , а направление нормали к эллипсоиду может определяться нормалью к по-

верхности уровенного эллипсоида, то уклонение отвесной линии можно определить как угол между направлениями векторов действительного и нормального полей силы тяжести. Если за уровенный эллипсоид нормальной силы тяжести взять общий земной эллипсоид, то угол (g, γ) выразит абсолютное уклонение отвесной линии, а если референц-эллипсоид, то относительное.

Отметим значение уклонений отвесных линий.

1. Уклонения отвесных линий – удобные виды характеристик отступлении действительного гравитационного поля Земли от некоторого другого, называемого нормальным; уклонения отвесных линий так же, как и высоты геоида (или квазигеоида) над референц-эллипсоидом, непосредственно используются для изучения фигуры Земли.

2. Используя уклонения отвесных линий, решают многие редуccionные задачи высшей геодезии. Это следует из того, что непосредственные измерения связаны с отвесной линией, тогда как математическая обработка результатов геодезических измерений проводится на эллипсоиде, на котором основная координатная линия – нормаль к поверхности эллипсоида. Например, горизонтальные углы треугольников триангуляции измеряют двугранниками, ребрами которых служат отвесные линии, так как вертикальные оси инструментов устанавливают при помощи уровня, фиксирующего положение уровенной поверхности и нормали к ней – отвесной линии. Естественно, что для строгой математической обработки результатов измерений на поверхности эллипсоида необходимо учитывать несовпадения непосредственно измеренных величин с соответствующими геометрическими элементами эллипсоида путем введения редуccion в измеренные величины. Все эти редуccion вычисляются сравнительно просто, если известны уклонения отвесных линий.

Через уклонение отвесных линий устанавливается простая связь между астрономическими и геодезическими координатами. Это позволяет, зная уклонения отвесных линий, переходить от астрономических координат φ и λ к геодезическим B и L при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} B &= \varphi + \Delta\varphi \\ L &= \lambda + \Delta\lambda \end{aligned} \right\}, \quad (5.1.1)$$

где $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ – весьма простые функции слагающих уклонений отвесных линий в меридиане и первом вертикале.

Соотношение (5.1.1) имеет и другое принципиальное значение: если оба слагаемых правой части вывести из измерений, то тем самым можно определить две координаты точек поверхности Земли, изучение которой составляет главную задачу высшей геодезии.

Возможность перехода от астрономических координат к геодезическим крайне важна, в частности при использовании астрономических пунктов как опорных, при топографических съемках.

Посредством уклонения отвесных линий осуществляется точный переход от измеренного астрономического азимута к геодезическому азимуту при помощи уравнения Лапласа (см. § 19). Этим самым, как увидим далее, создается возможность существенного повышения точности астрономо-геодезических сетей.

Уклонение отвесных линий в какой-либо точке определяется как разность двух векторных направлений; поэтому оно должно определяться двумя параметрами – величиной угла, обозначаемого обычно u и называемого *полным уклонением отвесной линии*, и *азимутом плоскости*, в которой расположен этот угол, обозначаемый Θ . Однако чаще уклонения отвесных линий определяются двумя другими величинами: проекцией полного уклонения отвесной линии и на плоскости меридиана и первого вертикала данной точки. Проекция на плоскость меридиана называется *обычно слагающей уклонения в меридиане* и обозначается через ξ и проекция на плоскость первого вертикала – *слагающей уклонения в первом вертикале* и обозначается через η .

Если астрономический зенит отклоняется от геодезического на северо-восток или, что то же самое, направление вектора действительной силы тяжести отклоняется от нормального на юго-запад, то слагающие уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале (ξ и η) считаются положительными.

При выполнении геодезических работ влияние уклонений отвесных линий в геометрическом смысле может рассматриваться как влияние некоторых ошибок систематического характера, подлежащих соответствующему анализу и учету.

Физическая причина, вызывающая отклонения отвесных линий, — одна, и она заключается в отступлении действительного гравитационного поля Земли от нормального. С этой точки зрения, различные формулы, при помощи которых могут быть выражены отклонения отвесных линий, должны давать один и тот же результат, если только взята единая отсчетная поверхность тела, создающего нормальный потенциал, и выполнены с необходимой полнотой и точностью измерения, определяющие реальный потенциал силы тяжести Земли, или возмущающий потенциал. Нетрудно установить единую отсчетную поверхность; современные средства геодезических измерений позволяют получать результаты, ошибки которых малы и их влияние для практики в большинстве случаев пренебрегаемо. Главное, что еще отдаляет нас от единого вполне достоверного результата в решении ряда вопросов высшей геодезии различными методами, в том числе и задачи определения отклонения отвесной линии, это незавершенность различных видов геодезических измерений на всей поверхности Земли. Это в первую очередь следует отнести к гравиметрическим определениям, так как только они, при современном уровне измерительной техники, могли бы быть выполнены на всей земной поверхности, в том числе и на океанах.

При неравномерности размещения и несвязанности астрономо-геодезических и гравиметрических работ физический (гравиметрический) и геометрический (астрономо-геодезический) методы вывода отклонений отвесных линий дают не совпадающие между собой результаты. Различия между этими результатами значительны и почти во всех случаях теории и практики не пренебрегаемы. В то же время ни тот, ни другой метод не имеют такого преимущества, чтобы можно было использовать один и отвергнуть другой. Наоборот, ни гравиметрический, ни астрономо-геодезический методы, применяемые самостоятельно, по разным причинам непригодны в настоящее время для вывода отклонений отвесных линий на всей поверхности Земли или на отдельных ее значительных частях.

Но решение основных задач высшей геодезии потребовало знания отклонений отвесных линий, вычисляемых однозначно и точно по научно обоснованному методу, без существенных дополнительных затрат труда и времени.

Этим требованиям удовлетворяет астрономо-гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий, основанный на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и широко использованный в практике геодезических работ в СССР.

В последующих параграфах будут рассмотрены гравиметрический, астрономо-геодезический и получивший, как указано выше, широкое применение астрономо-гравиметрический метод.

В заключение заметим, что использование наблюдений искусственных спутников Земли позволяет исключить или ослаблять влияние незавершенности наземных геодезических измерений на всей поверхности Земли, а также позволяет связать отдельные геодезические сети, в том числе расположенные на разных материках.

5.2. Гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий

Уклонения отвесных линий и аномалии силы тяжести – следствие несовпадения действительного и нормального потенциалов Земли, т. е. функция возмущающего потенциала T .

В § 14 найдено выражение возмущающего потенциала через аномалии силы тяжести, т. е.

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin d\psi dA. \quad (5.2.1)$$

Наша цель состоит в получении формул, выражающих компоненты уклонений отвесных линий в функции аномалий силы тяжести. Очевидно, это будет достигнуто, если получим выражения составляющих отвесных линий через возмущающий потенциал T . Подставив в найденные выражения его значение по (5.2.1), получим искомые формулы уклонений отвесных линий через аномалии силы тяжести.

Следуя намеченному пути, получаем сначала выражения для ξ и η через возмущающий потенциал.

В исследуемой точке M земной поверхности (рис. 5.2) построим местную систему координат, положив: направление оси z совпадающим с вектором нормальной силы тяжести $\vec{g}$; направление оси x – с касательной к меридиану на север; направление оси y – на восток.

Направление вектора действительной силы тяжести – отвесной линии обозначим $\overline{g}$.

Из рис. 5.2 следует, что

$$\left. \begin{aligned} tg\xi &= -\frac{g_x}{g_z} \\ tg\eta &= -\frac{g_y}{g_z} \end{aligned} \right\}. \quad (5.2.2)$$

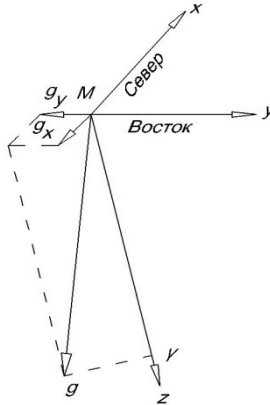


Рис. 5.2

Далее имеем

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (5.2.3)$$

Но вследствие перпендикулярности вектора u к плоскости Mxu получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \gamma_x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \gamma_y = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.2.4)$$

Поэтому

$$g_x = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{и} \quad g_y = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.2.5)$$

Имея в виду, что угол (g, γ) не превышает $1'$, можно положить, что $g_z = \gamma$ тогда из (5.2.2) и (5.2.5) окончательно напомним

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \right\} . \quad (5.2.6)$$

Формулы (5.2.6) легко можно выразить в функции производных

$$\frac{\partial T}{\partial B} \text{ и } \frac{\partial T}{\partial L} .$$

Полагая с достаточной для нас точностью dx и dy как элементы дуг меридиана и параллели

$$dx = R \, dB,$$

$$dy = R \cos B \, dL,$$

находим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{R\gamma} \frac{\partial T}{\partial B}, \\ \eta &= -\frac{1}{R\gamma \cos B} \frac{\partial T}{\partial L}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.7)$$

Формулы (5.2.6) и (5.2.7) дают выражения для ξ и η через возмущающий нал T .

Переходя ко второй части вывода, на основании (62.24 его нет) найдем производные $\frac{\partial T}{\partial B}$ и $\frac{\partial T}{\partial L}$ подставим их в (5.2.7). Не приводя подробностей вывода, напомним его результат:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g Q \cos A \, dA \, d\psi, \\ \xi'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g Q \sin A \, dA \, d\psi \end{aligned} \right\} \quad (5.2..8)$$

где ψ – по-прежнему сферическое расстояние от исследуемой точки до текущей точки; A – азимут направления, по которому взято ψ ; Δg – аномалии силы тяжести; Q – функция от ψ , определяемая выражением

$$Q = \frac{\rho''}{2\gamma} \cos^2 \frac{\psi}{2} \times$$

$$\times \left[\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right]. \quad (5.2.9)$$

Выражения (5.2.8) называются *формулами Венинг-Мейнеса*, по имени голландского ученого, давшего их вывод в 1928 г. Величину Q также называют *функцией Венинг-Мейнеса*.

При применении формул (5.2.8) предполагается, что аномалии силы тяжести известны для всей поверхности Земли, т. е. что выполнена мировая гравиметрическая съемка. В этом случае был бы возможен вывод общего земного эллипсоида, а формулы (5.2.8) давали бы значения абсолютных уклонений отвесной линии.

Однако в настоящее время гравиметрическая съемка еще не завершена, общий земной эллипсоид не установлен, в разных континентах и отдельных государствах приняты различные поверхности относимости – референц-эллипсоиды с различающимися параметрами и ориентировкой. Пока еще даже выполненные гравиметрические измерения не сконцентрированы и не приведены в единую систему.

Вследствие использования в качестве поверхности относимости референц-эллипсоида в практических целях необходимо определять относительные или астрономо-геодезические уклонения отвесных линий. Учитывая изложенное, полученные в этом параграфе формулы для ζ и η не решают поставленную задачу.

Следовательно, чисто гравиметрический метод не может быть применен для точного вывода относительных уклонений отвесных линий.

Если при вычислении составляющих уклонений отвесных линий ограничиться интегрированием в пределах зоны определенного радиуса, например, 1000 км ($\psi \approx 9^\circ$), то нельзя установить величину допущенной ошибки; она будет зависеть от особенностей распределения аномальных масс в данном районе, густоты пунктов гравиметрической съемки, наклона поверхности референц-эллипсоида к поверхности общего земного эллипсоида. Во всяком случае эта ошибка легко может достигать нескольких секунд и даже десятков секунд и, следовательно, она будет недопустимой.

Даже при достаточно полной густоте мировой гравиметрической съемки вычисление уклонений отвесной линии чисто гравиметрическим методом представляло бы практически трудную задачу. Необходимо было бы для вычисления уклонений в каждом пункте триангуляции учитывать влияние аномалий по всей поверхности Земли. Это составило бы в целом трудоемкую работу, хотя сейчас и разработаны новые методы учета аномалий дальних зон, существенно облегчающие вычисления.

5.3. Астрономо-геодезический метод вывода уклонений отвесных линий

Рассмотрим некоторую точку A_0 (рис. 5.3) на земной поверхности, за которую первоначально примем поверхность референц-эллипсоида. Пусть эта точка – пункт триангуляции, для которого вычислены геодезические координаты B и L и геодезический азимут A_m на какой-либо предмет M . Пусть на этом пункте A_0 выполнены астрономические определения, в результате которых получены астрономические координаты φ и λ и астрономический азимут α_m на тот же предмет M . Далее возьмем вспомогательную сферу с центром в точке A_0 и с радиусом, равным единице. Продолжим направление нормали к поверхности эллипсоида в точке A_0 до пересечения со вспомогательной сферой. Пусть нормаль пересечет нашу сферу в точке z , которая называется геодезическим зенитом в точке A_0 . Поскольку выше мы допустили, что земная поверхность совпадает с поверхностью референц-эллипсоида, то направление нормали к последней совпадает с направлением касательной к силовой линии нормального поля (γ), проходящей через точку A_0 . Аналогично этому продолжим до пересечения со вспомогательной сферой направление отвесной линии. Очевидно, это направление совпадает с направлением вектора силы тяжести g .

Точка z_1 пересечения этого направления с небесной сферой будет астрономическим зенитом точки A_0 . Далее из точки A_0 проведем прямую, параллельную оси Мира (оси вращения Земли), которая пересечет сферу в точке P . Через m обозначим точку пересечения визирной линии со вспомогательной сферой при наведении трубы теодолита на предмет M . Соединим дугами большого круга точки z и z_1 с точками P и m . Тогда, вводя обозначения, будем иметь:

$m z_l = z$ – измеренное зенитное расстояние на точку M ; $A_0 z_l m$ – вертикальная плоскость в точке A_0 , проходящая через M ; $mz = Z$ – «геодезическое» зенитное расстояние, т. е. зенитное расстояние, которое получили бы, если бы вертикальную ось теодолита направить по нормали к поверхности референц-эллипсоида; $A_0 z m$ – плоскость прямого нормального сечения в A_0 , проходящая через M ; $zP = 90^\circ - B$ – дуга, измеряющая угол между полюсом и зенитом.

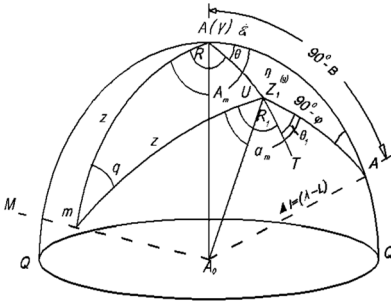


Рис. 5.3

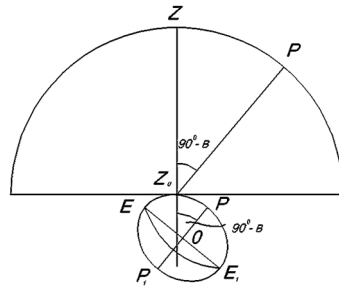


Рис. 5.4

Нетрудно доказать, что эта дуга действительно равна $90^\circ - B$. Пусть эллипсоид, изображенный на рис. 5.4, представляет собой Землю, тогда EE_1 – большая полуось, лежащая в плоскости экватора; A_0 – точка на земной поверхности, служившая исходной для построения рис. 5.3. На рис. 5.4 угол EOA_0 равен широте B точки A_0 , а угол A_0OP равен $90^\circ - B$. Так как A_0z – продолжение линии OA_0 , а A_0P параллельна малой полуоси эллипсоида (оси Мира), то угол zA_0P также равен $90^\circ - B$.

Возвращаясь к рис. 5.3, отмечаем, что дуга zP измеряет угол между нормалью к эллипсоиду и направлением на точку P , поэтому выражение $90^\circ - B$ соответствует геодезической широте точки A_0 . Плоскость A_0zP – плоскость геодезического меридиана точки A_0 ; $z_l P = 90^\circ - \varphi$ – дуга, связанная с направлением отвесной линии, поэтому $90^\circ - \varphi$ соответствует астрономической широте точки A_0 .

$A_0 z_l P$ – плоскость астрономического меридиана точки A_0 , угол $zPz_l = \Delta l$ – угол между астрономическим и геодезическим меридианами точки A_0 .

Так как астрономические и геодезические долготы отсчитываются от одного начального меридиана, то

$$\Delta l = \lambda - L;$$

$zz_1 = u$ – дуга, измеряющая угол между направлением нормали к поверхности эллипсоида и направлением отвесной линии в точке A_0 и выражающая полное уклонение отвесной линии в точке A_0 ; $Pzz_1 = \Theta$ – геодезический азимут плоскости $A_0 zz_1$, в которой находится полное уклонение отвесной линии в точке A_0 ; $Pz_1T = \Theta_1$ – астрономический азимут той же плоскости.

Проведем из z_1 дугу $z_1 z_2$, перпендикулярную геодезическому меридиану Pz , т. е. соответствующую сечению первого вертикала на эллипсоиде.

$zz_2 = \xi$ – слагающая (проекция) полного уклонения отвесной линии в меридиане; $z_1 z_2 = \eta$ – слагающая (проекция) полного уклонения отвесной линии в первом вертикале; $Pzm = \alpha_m$ – геодезический азимут плоскости $A_0 z_1 m$, т. е. прямого нормально-го сечения из A_0 на M ; $Pz_1 m = \alpha_m$ – астрономический азимут плоскости $A_0 z_1 m$, т. е. вертикального сечения из A_0 на $z_1 z_2$.

Из сферического прямоугольного треугольника $z_1 z_2 P$ (см. рис. 5.4) имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos(\lambda - L) &= tg\varphi ctg(B + \xi) \\ \sin\eta &= \sin(\lambda - L)\cos\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1)$$

Раскладывая $\sin(\lambda - L)$, $\cos(\lambda - L)$ и $\sin\eta$ в ряды и пренебрегая по малости величинами $(\lambda - L)^2$ и η^2 , получаем искомые выражения слагающих уклонения отвесной линии через астрономические и геодезические координаты:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L)\cos\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2)$$

Решая треугольник $zz_1 z_2$, который по малости элементов можно рассматривать как плоский, находим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u \cos\Theta \\ \eta &= u \sin\Theta \\ tg\Theta &= \frac{\eta}{\xi} \\ u &= \frac{\xi}{\cos\Theta} = \frac{\eta}{\sin\Theta} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3)$$

или, на основании формул (5.3.2) и (5.3.3),

$$\left. \begin{aligned} tg\theta &= \frac{(\lambda-L)\cos\varphi}{\varphi-B} \\ u &= \frac{\varphi-B}{\cos\theta} = \frac{(\lambda-L)\cos\varphi}{\sin\theta} \\ u &= \sqrt{(\varphi-B)^2 + (\lambda-L)^2 \cos^2\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4)$$

Найдем проекцию ϑ_A полного уклонения отвесной линии и на вертикальную плоскость, имеющую азимут A_m . Из треугольника m_1zz_1 (рис. 5.5), на котором оставлены обозначения, соответствующие рис. 5.3, получаем

$$\vartheta_{A_m} = u \cos R = u \cos(A_m - \theta) = u \cos A_m \cos\theta + u \sin A_m \sin\theta$$

или, принимая во внимание (65.3),

$$\vartheta_{A_m} = \xi \cos A_m + \eta \sin A_m. \quad (5.3.5)$$

Полученные формулы (5.3.2) и (5.3.3) астрономо-геодезического метода вывода уклонений отвесной линии соответствуют сделанному допущению, что земная поверхность совпадает с референц-эллипсоидом или в данной точке пересекается с референц-эллипсоидом. Рассмотрим общий случай, когда точка земной поверхности A не лежит на референц-эллипсоиде, а имеет высоту H . В этом случае непосредственно наблюдаемые астрономические координаты φ и λ определяют направление отвесной линии в точке A , которое не совпадает с направлением отвесной линии в пересечении ее с поверхностью референц-эллипсоида в точке A_0 (рис. 5.6).

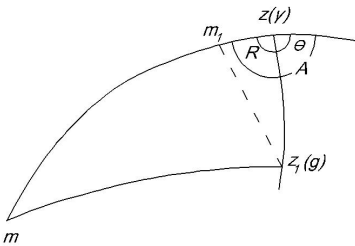


Рис. 5.5

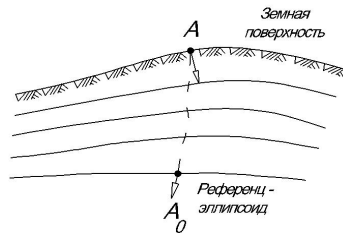


Рис. 5.6

Естественно, возникает мысль редуцировать астрономические координаты на поверхность референц-эллипсоида или геоида по отвесной линии, с тем, чтобы вершину угла, определяющего уклонение отвесной линии, иметь на поверхности эллипсоида. В этом случае уклонение отвеса выразит наклон геоида относительно референц-эллипсоида. Но реальная отвесная линия AA_0 , проходящая через точку A внутрь Земли, – линия двойной кривизны. Ее кривизна меняется не только под действием нормального поля Земли, но и вследствие неизвестных нам аномальных масс, причем изменение кривизны силовой линии может происходить скачкообразно.

Таким образом, точное редуцирование астрономических координат на референц-эллипсоид невозможно, так как неизвестны плотности внешнего (по отношению к эллипсоиду) слоя Земли. Поэтому в настоящее время принято за вершину угла, измеряющего уклонение отвесной линии, считать соответствующую точку физической поверхности Земли, а уклонение отвесной линии понимать как угол между направлением действительной силы тяжести и направлением нормальной силы тяжести в этой точке. Иначе говоря, уклонение отвесной линии в данной точке земной поверхности – угол между нормалью к уровенной поверхности и нормалью к поверхности сферопы, проходящих через данную точку поверхности Земли. Именно указанное понятие об уклонении отвесной линии имелось в виду в § 16 при выводе формул уклонений отвесной линии гравиметрическим методом.

При таком определении уклонения отвесной линии никаких поправок в астрономические координаты вводить не следует, так как их непосредственно наблюдаемые значения дают направление вектора силы тяжести в данной точке поверхности Земли. Однако другой вектор, образующий уклонение отвесной линии, – направление нормали к сферопе, или, что все равно, направление касательной к силовой линии нормального поля, отличается от направления нормали на поверхности эллипсоида; это отличие учитывается путем введения поправки в геодезическую широту.

Геометрический смысл этой поправки заключается в том, что геодезические координаты переносятся с поверхности эл-

липсоида на поверхность сферопа, проходящего через данную точку A по силовой линии нормального поля, или иначе: от геодезической широты на поверхности референц-эллипсоида осуществляется переход к геодезической широте, отнесенной к поверхности сферопа точки A . Но силовая линия нормального поля – плоская кривая, расположенная в плоскости меридиана, своей вогнутостью направлена к полюсу. Поэтому поправка вводится только в широту.

Согласно сделанному определению, уклонение отвесной линии ξ представляется углом $(\bar{\gamma}, \bar{g})$; $\bar{g}$ – направление силы тяжести в точке Земли A , составляющее с плоскостью экватора угол φ , равный наблюдаемой астрономической широте в точке A ; $\bar{\gamma}$ – направление нормали к сферопу точки A , иначе, направление касательной к силовой линии нормального поля, проходящей через точку A и составляющей с плоскостью экватора угол B_n . Точка A_0 – проекция точки A на эллипсоид по силовой линии AA_0 ; γ_0 – направление касательной силовой линии AA_0 в точке A_0 , практически совпадающее с направлением прямой A_n – нормали к эллипсоиду и образующее, согласно определению сфероидической геодезии, с плоскостью экватора угол B – геодезическую широту точки A . Различие в направлениях A_n и $\bar{\gamma}_0$ составляет при $H = [8\ 000\ \text{м}]$ величину $0,0008'' \sin 2B$ [12, с. 80]. Следовательно, на рис. 5.7 его можно положить $B = B_0$.

С учетом сделанных пояснений можем написать

$$\xi = (\bar{\gamma}, \bar{g}) = \varphi - B_n. \quad (5.3.6)$$

Так как из геодезических вычислений определяется геодезическая широта B , то для вывода величины ξ по (65.2) необходимо знать разность $(B - B_n)$. Найдем эту величину как разность направлений касательных к силовой линии AA_0 в точках A и A_0 .

Проведем через точку A бесконечно малый отрезок AO , параллельный касательной к эллипсоиду в точке A_0 ; угол при точке A в малом треугольнике AOO_1 , очевидно, выразит искомую разность направлений касательных, т. е. $(B - B_n)$.

Из треугольника AOO_1 ,

$$(B - B_n) = \frac{OO_1}{AO_1}. \quad (5.3.7)$$

В этом выражении:

OO_1 – изменение расстояния между уровнями поверхностями при изменении широты на $(B - B_n)$, которое обозначим через ΔH ; AOO_1 – с достаточной точностью определится как элемент дуги меридиана, равный $M(B - B_n)$.

Следовательно,

$$(B - B_n) = \frac{\Delta H}{M(B - B_n)}. \quad (5.3.8)$$

Для двух близких уровней поверхностей можем написать

$$\gamma dH = dW = dc, \quad (5.3.9)$$

где dH – расстояние между рассматриваемыми уровнями поверхностями. Из (5.3.9) следует, что

$$\gamma d^2H + d\gamma dH = 0. \quad (5.3.10)$$

В (5.3.10) d^2H – изменение dH вследствие непараллельности уровней поверхностей.

Из (5.3.10) получим

$$d^2H = \frac{d\gamma}{\gamma} dH. \quad (5.3.11)$$

Из уравнения Клеро (3.8.34)

$$\gamma = \gamma_{45^\circ} \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos 2B \right)$$

можем написать

$$\frac{d\gamma}{\gamma_{45^\circ}} = \beta \sin 2B dB. \quad (5.3.12)$$

С учетом (5.3.12) выражение (5.3.11) с достаточной точностью перепишем так:

$$d^2H = -\beta \sin 2B dH, \quad (5.3.13)$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\Delta H = -H\beta \sin 2B dB. \quad (5.3.14)$$

Считая широту B постоянной и пренебрегая малыми величинами третьего порядка, после подстановки (5.3.14) в (5.3.8) получаем окончательно

$$(B - B_n)'' = -\frac{H}{M}\beta \sin 2B\rho'' . \quad (5.3.15)$$

Если выразим H в километрах, возьмем числовое значение для $B = 45^\circ$, положим $\beta = 0,0053$, а поправку $(B - B_n)''$ обозначим через ε'' , то получим рабочую формулу

$$(B - B_n)'' = \varepsilon'' = 0,171H \sin 2B . \quad (5.3.16)$$

При $H = 1$ км и $B = 45^\circ$ $(B_n - B) = 0,17''$. Следовательно, рассматриваемая поправка не пренебрегаема.

Таким образом, окончательные формулы для вычисления астрономо-геодезических уклонений отвесных линий $\xi_{ар}$ и $\eta_{ар}$ будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ар}'' &= \varphi - B - 0,171''H \sin 2B \\ \eta_{ар}'' &= (\lambda - L)\cos B \end{aligned} \right\} . \quad (5.3.17)$$

Если обозначим:

$\vartheta_{ар}$ – составляющая уклонения отвесной линии в произвольной плоскости азимута A ; $\Theta_{ар}$ – составляющая угла между нормалью к поверхности референц-эллипсоида и отвесной линией той же плоскости, то

$$\vartheta_{ар} = \xi_{ар} \cos A + \eta_{ар} \sin A, \quad (5.3.18)$$

$$\Theta_{ар} = (\xi_{ар} + 0,171''H \sin 2B)\cos A + \eta_{ар} \sin A \quad (5.3.19)$$

откуда

$$\Theta_{ар} - \vartheta_{ар} = \varepsilon = 0,171''H \sin 2B \cos A. \quad (5.3.20)$$

Из формул (5.3.17), как и формул (5.3.18) (5.3.19), следует, что для определения астрономо-геодезических уклонений по рассматриваемому методу в каком-либо пункте триангуляции должны быть известны также точные астрономические координаты – широта и долгот φ_A и λ_A . Как увидим далее, для строгого решения редуционных задач и вычисления высот точек Земли над референц-эллипсоидом уклонения отвесной линии должны быть известны для каждого пункта триангуляции 1-го класса, а в горных районах – и для пунктов триангуляции 2-го класса. Следовательно, для применения астрономо-геодезического метода уклонений отвесных линий необходимо на каждом пункте триангуляции 1-го класса, а в указанных особых районах и на пунк-

тах триангуляции 2-го класса определить астрономические координаты. Это требование делает практически неосуществимым применение астрономо-геодезического метода вывода уклонений отвеса на значительных территориях.

Итак, оба рассмотренных метода вывода уклонений отвесных линий, взятые отдельно, не могут быть практически применены по разным причинам, указанным выше.

Достаточно точное решение рассматриваемой задачи дает астрономогравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий, основанный на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

5.4. Влияние уклонение отвесных линий на астрономические азимуты – уравнение Лапласа

Обратимся вновь к рис. 5.3, из которого следует

$$\begin{aligned} A_m &= R + \theta, \\ \alpha_m &= R_1 + \theta_1. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Из треугольника zz_1P , в котором угол при z_1 равен $180^\circ - \theta_1$, имеем

$$-\cos\theta_1 = -\cos\theta(\lambda - L) + \sin\theta\sin(\lambda - L)\sin B. \quad (5.4.2)$$

Полагая, что $\cos(\lambda - L) = 1$, $\sin(\lambda - L) = (\lambda - L)$ и $\sin B = \sin\varphi$, т. е. пренебрегая членами порядка $(\lambda - L)^2$, $(\lambda - L)^3$ и $(\lambda - L)\xi$, получаем

$$-\cos\theta_1 = -\cos\theta + (\lambda - L)\sin\theta \sin\varphi$$

или

$$\cos\theta - \cos\theta_1 = (\lambda - L)\sin\theta \sin\varphi; \quad (5.4.3)$$

учитывая формулу (5.3.2), получаем

$$\cos\theta - \cos\theta_1 = \eta \operatorname{tg} \varphi \sin\theta,$$

$$-2\sin\frac{1}{2}(\theta + \theta_1)\sin\frac{1}{2}(\theta - \theta_1)\eta \operatorname{tg} \varphi \sin\theta.$$

Полагая, что

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta) = \theta \quad \text{и} \quad \sin\frac{1}{2}(\theta - \theta_1) = \frac{1}{2}(\theta - \theta_1),$$

получаем

$$\theta_1 - \theta = \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (5.4.4)$$

или

$$\theta_1 - \theta = (\lambda - L) \sin \varphi. \quad (5.4.5)$$

Сферический треугольник mzz_1 аналогичен треугольнику zz_1P : вершине P соответствует вершина m , углу $(\lambda - L)$ – угол q , сторонам $(90^\circ - B)$ и $(90^\circ - \varphi)$ – стороны Z и z , величине $\Theta_1 - \Theta$ – величина $-R_1 - R$.

Формулу (5.4.5) перепишем так:

$$\theta_1 - \theta = (\lambda - L) \cos(90^\circ - \varphi),$$

аналогичное выражение для треугольника mzz_1 будет

$$R_1 - R = q \cos z. \quad (5.4.6)$$

Из треугольника mzz_1 имеем

$$\sin q = \sin u \frac{\sin R}{\sin z},$$

поэтому

$$R_1 - R = \frac{u \sin R}{\operatorname{tg} z}. \quad (5.4.7)$$

Складывая (5.4.7) и (5.4.4), получаем

$$(R_1 - R) + (\theta_1 - \theta) = \frac{u \sin R}{\operatorname{tg} z} + \eta \operatorname{tg} \varphi$$

или, принимая во внимание (5.4.1)

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{u \sin (A_m - \theta)}{\operatorname{tg} z}, \quad (5.4.8)$$

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{u \sin A_m \cos \theta - u \cos A_m \sin \theta}{\operatorname{tg} z}. \quad (5.4.9)$$

Так как и $\cos \theta = \xi$ и $u \sin \theta = \eta$, то

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{\xi \sin A_m - \eta \cos A_m}{\operatorname{tg} z}, \quad (5.4.10)$$

но $\eta = (\lambda - L) \cos \varphi$, тогда

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z} \quad (5.4.11)$$

Пользуясь уравнением (5.4.11), можно перейти от астрономических азимутов к геодезическим.

В триангуляции 1-го класса астрономические определения азимута выполняют на пунктах выходных сторон базисных сетей. Зенитные расстояния по выходным сторонам в большинстве случаев весьма близки к 90° ; поэтому в правой части уравнения (5.4.11) значение tgz достаточно велико (не менее 150 – 200) по сравнению с числителем, равным нескольким секундам, т. е. значение этого второго члена обычно не превосходит $0,02 - 0,03''$. Следовательно, вторым членом в уравнении (5.4.11) можно пренебречь.

Тогда уравнение (5.4.11) примет вид

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi \\ A_m &= \alpha_m - \eta \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.4.12)$$

Последнее уравнение называется *уравнением Лапласа*. Геодезический азимут, вычисленный по формуле (5.5.12), называется *азимутом Лапласа*.

Таким образом, разность астрономического и геодезического азимутов некоторого направления в данной точке равна разности астрономической и геодезической долгот, умноженной на синус широты этой точки.

Возвратимся к уравнению (5.4.11). В правую часть этого уравнения входят два поправочных члена:

$$(\lambda - L) \sin \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z}.$$

Первый главный член постоянен в данной точке, так как он зависит только от координат и не зависит от направления. Этот член выражает собой влияние на азимут направления несовпадения плоскостей астрономического и геодезического меридианов. Второй член уравнения выражает влияние на измеренное направление несовпадения вертикальной оси инструмента с нормалью к поверхности эллипсоида. Поэтому его можно рассматривать как поправку за уклонение вертикальной оси инструмента от нормали к поверхности принятого референц-эллипсоида, которую следует вносить в измеряемые горизонтальные направления. Иначе говоря, второй член можно рассматривать как редукцию измеренных горизонтальных направлений за переход к референц-эллипсоиду.

Докажем, что Лапласовы азимуты, полученные в различных пунктах Триангуляции, можно практически считать независимыми. Представим себе звено триангуляции 1 класса, на обоих концах которого определены Лапласовы азимуты. Из формул (5.5.12) следует, что ошибка Лапласова азимута m_a зависят от ошибок определения астрономического азимута m_a , астрономической долготы m_λ и геодезической долготы m_L . Обычно в триангуляции 1 класса $m_a = \pm 0,5''$; $m_\lambda^s = \pm 0,03''$ или $m_\lambda'' = \pm 0,45''$. Для определения m_L исходим из ошибок передачи геодезических координат по ряду, так как долготы определяют последовательным вычислением координат вдоль ряда. Вспомним, что продольный и поперечный сдвиги в звене триангуляции 1 класса характеризуются в линейной мере величиной порядка 0,7 м. Соответствующая ошибка в долготе, выраженная в секундах дуги, будет равна для средних широт $0,04''$; таким образом, m_L в десять раз меньше ошибок m_a и m_L поэтому можно написать

$$m_a = \pm \sqrt{m_a^2 + m_\lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Значения астрономического азимута a и долготы λ на разных пунктах независимы. Следовательно, и геодезические азимуты, полученные по формуле (5.5.12), на разных пунктах можно считать практически независимыми.

Средняя ошибка таких азимутов с учетом ошибки астрономической долготы на пунктах 1-го класса будет равна приблизительно $\pm 0,7''$.

При развитии триангуляции азимуты Лапласа имеют весьма большое значение, а именно:

1. Обеспечивают ориентировку всех звеньев и рядов триангуляции с ошибкой одного порядка;
2. Не допускают распространения и в значительной мере исключают систематические ошибки, столь опасные в большой триангуляции; ошибки в ориентировке триангуляции, появившиеся в одном звене, перестают оказывать влияние в другом, если на стыке обоих звеньев расположен пункт Лапласа.

Кроме того, азимуты Лапласа позволяют путем соответствующей обработки материалов триангуляции и анализа результатов исследовать величины и характер систематических ошибок и причины их возникновения. Малая величина система-

тических ошибок на каждом пункте, в то же время существенное влияние их на точность триангуляции в целом делают задачу исследования этих ошибок весьма сложной, но актуальной;

3. Доставляют триангуляции твердые азимуты, которые позволяют вводить при уравнивании азимутальные условные уравнения, способствующие получению более точных значений всех элементов, в том числе и координат пунктов;

4. Дают возможность осуществлять надежный контроль угловых измерений в триангуляции, в частности, обнаруживать такое накопление ошибок, которое другими путями не может быть выявлено. Действительно, свободный член азимутального условного уравнения включает в себя сумму ошибок углов ходовой линии по всему ряду. В определенных случаях отдельные крупные ошибки и во всех случаях малые ошибки, но действующие систематически и однообразно, не выявляются в свободных членах других условных уравнений – фигур, боковых и базисных. Таким образом, о многих существенных недостатках в постановке угловых измерений и о действии систематических ошибок можно судить только по свободному члену азимутального условного уравнения.

5.5. Влияние уклонений отвесной линии на измеряемые зенитные расстояния

Обратимся к рис. 5.3. Нужно определить разность зенитных расстояний $Z - z$, которая получается от несовпадения отвесной линии Az_1 с нормалью к поверхности эллипсоида Az . Для этого в треугольнике mzz_1 из точки z проведем дугу перпендикулярно к mz_1 . Учитывая современную точность измерения зенитных расстояний и малую величину уклонения u , можем написать

$$z - Z = u \cos(180^\circ R_1) = -u \cos R_1. \quad (5.5.1)$$

Имея в виду (5.5.1), получаем

$$z - Z = -u \cos(a_m - \Theta_1) = -u \cos(A_m - \Theta),$$

или

$$z - Z = -u \cos A_m \cos \Theta - u \sin A_m \sin \Theta,$$

а на основании формул (5.3.3)

$$z - Z = \eta \cos A_m - \xi \sin A_m. \quad (5.5.2)$$

Формула (5.6.2) позволяет перейти от измеренного зенитного расстояния к геодезическому. Если вычисления превышений выполнять, пользуясь этим геодезическим зенитным расстоянием, то, очевидно, можно было бы получить превышения относительно поверхности эллипсоида. Так как высоты точек земной поверхности вычисляют относительно квазигеоида, то практически поправку $Z - z$ вводить в измеренные зенитные расстояния при вычислении высот пунктов не следует. Однако на точность геодезического нивелирования уклонения отвесных линий могут иногда существенно влиять.

При выводе формул тригонометрического нивелирования участвует радиус дуги ab (рис.5.7). Дуга ab представляет собой сечение геоида, но принимается за дугу окружности с радиусом R . Прямые AC и BC совпадают с направлением отвесных линий

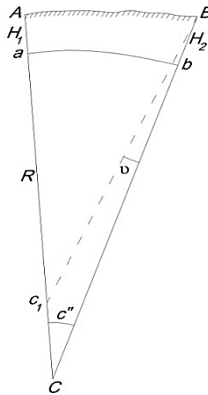


Рис. 5.7

При вычислении поправочного члена в формуле

$$H_2 - H_1 = s \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2R} s^2, \quad (5.5.3)$$

где k – коэффициент земного преломления, значение радиуса R берется равным среднему радиусу кривизны. Но это было бы справедливо, если бы AC и BC совпадали с нормальными к поверхности эллипсоида, кривизне которой и соответствует значение радиуса R , используемого при вычислении превышений из

геодезического нивелирования. Вследствие уклонения отвесных линий кривизна дуги ab в общем случае не соответствует средней кривизне поверхности эллипсоида, поэтому, используя указанное значение R , мы допускаем ошибку.

Пусть отвесная линия AC совпадает с нормалью в точке A , в точке же B имеем уклонение отвесной линии ϑ , которая на рис. 5.7 изображена прямой BC_1 . Следовательно, при вычислении высот фактически берется значение радиуса $R = aC$, тогда как нужно было бы брать $R_1 = aC_1$. Нетрудно видеть, что допуская при этом ошибка равна $\Delta R = \frac{\vartheta}{c} R$. Если $\vartheta = 5''$, $c = 1000''$ (что соответствует $s = 30$ км) и $R = 6\,000$ км, то $\Delta R = 30$ км и $\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{200}$.

В этом случае значение члена $\frac{1-k}{2R} s^2$ в формуле одностороннего нивелирования изменится на $s^2 \frac{1-k}{2R} dR$. При принятых числовых данных значение этой погрешности в $H_2 - H_1$ будет приблизительно равно $\frac{1}{3}$ м.

Необходимо иметь в виду, что могут быть изменения уклонений отвесных линий и более $5''$ (см. примеры § 25). В этом случае рассматриваемая погрешность соответственно увеличится.

Однако такая ошибка в передаче высот будет при одностороннем нивелировании. При двустороннем, а также одностороннем нивелировании на расстоянии до 15 км влиянием уклонений отвесных линий можно пренебречь.

В формуле двустороннего нивелирования поправочный член за кривизну Земли и рефракцию имеет вид

$$s^2 \frac{k_1 - k}{4r}.$$

Положим $k_1 - k = 0,06$; $s = 30$ км, $\vartheta = 5''$, тогда получим ошибку около 0,01 м. Следовательно, в двустороннем нивелировании указанное влияние делается пренебрегаемо малым.

5.6. Учет влияния уклонений отвесных линий при топографических и инженерно-геодезических работах

Уклонения отвесной линии при съемочных работах вообще могут не учитываться. При топографических работах возникает

необходимость считаться с уклонениями, когда в качестве опорных используются астрономические пункты. Рассмотрим обстоятельства, которые возникают в этом случае.

Пусть на планшете топографической съемки даны в качестве опорных два астрономических пункта; для простоты положим, что они расположены на одном меридиане. Расстояние s между этими пунктами на поверхности принятого референц-эллипсоида как основа для развития съемочного обоснования определится по формуле

$$s = M \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}, \quad (5.6.1)$$

где B_1 и B_2 – геодезические широты указанных двух пунктов, которые в данном случае неизвестны.

Имея в виду, что

$$B = \varphi - \xi, \quad (5.6.2),$$

и подставляя в (5.6.1) вместо геодезических широт B_1 и B_2 их значения согласно (5.6.2), получаем

$$s = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} M + \frac{(\xi_1 - \xi_2)''}{\rho''} M. \quad (5.6.3)$$

Если слагающие уклонений отвесных линий в меридиане ξ_1 и ξ_2 неизвестны, то использование астрономических широт вместо геодезических по формуле (5.6.1) вызывает ошибку в расстоянии s , равную

$$\frac{\xi_1'' - \xi_2''}{\rho''} M. \quad (5.6.4)$$

Величина $(\xi_1 - \xi_2)$, представляющая собой изменение слагающих уклонений отвесных линий, в границах трапеции карты масштаба 1:100 000 нередко может достигать значения 5–6". В горных районах, а также в отдельных районах со спокойным рельефом величина $(\xi_1 - \xi_2)$ может иметь значительно большие значения (см. примеры § 25).

Полагая $(\xi_1 - \xi_2) = 5''$, получаем ошибку во взаимном положении астрономических пунктов, равную 150 м. Таким образом, при $s = 30$ км относительная ошибка расстояния, вычисленного

по астрономическим координатам, составит 1:200. Отсюда следует, что при указанном расстоянии между астрономическими пунктами последние не могут контролировать ходы съёмочного обоснования – теодолитные и тахеометрические ходы и фототриангуляционные ряды, точность проложения которых характеризуется меньшими относительными ошибками.

При увеличении расстояния между астрономическими пунктами относительная ошибка в их взаимном положении будет становиться меньше. Так, при $s = 100$ км относительная ошибка расстояния, определенная по астрономическим координатам, будет равна около 1:700. В этом случае астрономические пункты уже имеют известное контролирующее значение и могут быть использованы как опорные для увязки простейших ходов съёмочного обоснования – тахеометрических ходов, фототриангуляционных рядов. Поэтому расстояния между астрономическими пунктами как опорными для топографической съёмки не должны быть меньше 70–100 км.

Но все же ошибки в положении точек съёмочного обоснования относительно опорных астрономических пунктов будут достигать значения порядка 100 м. Поэтому астрономические пункты могут служить геодезическим обоснованием только для тех топографических съёмок, которые не предназначены для использования при детальном инженерных изысканиях и составлении технических проектов объектов промышленного строительства. Именно астрономические опорные пункты используются как основа для съёмок с целью общего топографического изучения территории и создания топографических планов, для разработки общих предварительных проектов строительства, эксплуатации природных ресурсов и т. п.

В труднодоступных районах при создании карты масштаба 1:100 000 выполнение геодезических работ встречает большие затруднения. В этом случае определение опорных пунктов астрономическими методами имеет большие организационные и экономические преимущества перед геодезическими. Ошибка даже в 150 м во взаимном положении опорных пунктов, если они расположены на расстоянии 100 км, будучи равномерно распределенной на указанном протяжении, не вызовет графически заметных ошибок во взаимном расположении контуров в любой отдельно взятой части трапеции масштаба 1:100 000.

Методы картографирования отдельных районов СССР предусматривали Юответствующее использование астрономических пунктов в качестве опорных, определяемых на расстоянии от 80 до 120 км, между которыми развивается фототриангуляция. Такое использование астрономических пунктов возможно в районах с достаточно медленными изменениями уклонений отвесных линий.

Однако изменения уклонений отвесных линий неизвестны без специального изучения района. Поэтому при использовании астрономического метода обоснования топографических съемок необходимо предварительно провести гравиметрические работы, чтобы определить изменения уклонений отвесных линий.

Но, помимо этих изменений, уклонения отвесных линий имеют некоторую постоянную, систематическую часть для всего района съемки, которая, согласно (5.7.3), не влияет на взаимное положение пунктов. Но она вызывает смещение всех пунктов на некоторую постоянную величину, в результате чего рамки съемочной трапеции оказываются соответственно смещенными на местности.

Эта систематическая часть уклонений отвесных линий зависит от многих причин и в первую очередь от ориентировки референц-эллипсоида и может достигать заметных размеров – 10" и более. Поэтому, если координаты опорных астрономических пунктов не исправлять поправками за уклонения отвесных линий, то при стыке планшетов съемок, выполненных на основе астрономических пунктов и пунктов государственной триангуляции, могут иметь место значительные расхождения контуров по рамкам трапеций.

Ошибки самих астрономических наблюдений малы по сравнению с влиянием уклонений отвесных линий; поэтому, говоря о точности опорных астрономических пунктов, главным образом приходится иметь в виду неучтенное влияние уклонений отвесных линий.

Наилучшее решение задачи по использованию астрономических пунктов (как опорных при съемке) при отсутствии опорной геодезической сети – своевременная постановка гравиметрических работ и вывод уклонений отвесных линий с последующим исправлением астрономических координат по формулам 5.1.1). При этом

следует иметь в виду, что ошибки поправок, выводимых из гравиметрических наблюдений, в зависимости от района и густоты гравиметрических пунктов обычно колеблются от 0,5 до 2".

В практике может возникнуть необходимость выполнения топографических работ и более крупного масштаба, чем 1:100 000, в районе, значительно удаленном от государственной опорной геодезической сети. В этом случае, если по условию задания не представляется возможность осуществить связь с государственной опорной геодезической сетью, приходится развивать опорную сеть с местным началом координат.

При таких обстоятельствах целесообразно для установления координат начального пункта выполнять астрономические определения широт, долгот и азимутов, хотя бы на одном, а лучше на нескольких пунктах, и после осуществления геодезических связей между ними устанавливать для одного из таких пунктов исходные координаты и азимут. Если в таком (районе имеется гравиметрическая съемка хотя бы в радиусе нескольких сотен километров, то целесообразно ее использовать для приближенного вывода уклонений отвесных линий и последующего исправления астрономических координат.

Использование астрономических данных для определения системы координат и ориентировки локальной опорной геодезической сети позволит с меньшими затруднениями в дальнейшем и большими удобствами использовать результаты топографо-геодезических работ в общегосударственных целях.

Что касается влияния уклонений отвесной линии и учета действительного гравитационного поля Земли в инженерно-геодезических работах, то надо иметь в виду, что быстрое развитие науки и техники, наблюдающееся в современный период, резко изменило масштабы инженерно-строительных сооружений и обусловило повышенные требования к точности и объему геодезических работ, необходимых для проектирования и строительства этих сооружений.

И если при прежних формах, масштабах и габаритах сооружений инженерно-геодезические работы представляли собой измерительные действия, направленные, по существу, на решение чрезвычайно простых по идее, чисто геометрических задач, притом обычно на плоскости, то сейчас становится необходи-

мым в ряде случаев, при строительстве современных крупных сооружений учитывать влияние соответствующих элементов гравитационного поля Земли.

Современное строительство больших гидротехнических сооружений, связанных с созданием или использованием водоемов большого протяжения, требует учета непараллельности уровенных поверхностей. При выполнении геодезических работ, связанных с проложением тоннелей значительного протяжения в горных районах, необходимо учитывать аномальные влияния, вызванные притяжением масс горного рельефа. В последнее время выявилась необходимость достижения точности конечных результатов инженерно-геодезических работ на один порядок выше, чем ранее, например, при установке магнитов при строительстве больших ускорителей (синхрофазотронов). При определенных условиях некоторые редукции, считавшиеся ранее пренебрегаемыми, уже должны учитываться.

Общее указание по учету гравитационного поля Земли при выполнении точных инженерно-геодезических работ состоит в том, что необходимо анализировать величины редуций и учитывать их, сообразуясь с условиями задания и особенностями техники исполнения измерений и, конечно, гравиметрической характеристикой района работ.

В среднем для всей Земли отклонения отвесных линий составляют величину порядка $\pm 4''$. Однако в отдельных районах и при не вполне удачно выбранном референц-эллипсоиде они достигают нескольких десятков секунд. Значительные отклонения отвеса наблюдаются не только на территориях горного типа, но и в районах со спокойным и равнинным характером рельефа. Это надо учитывать при использовании астрономических пунктов в качестве опорных точек для топографических съемок.

5.7. Топографические и топографо-изостатические отклонения отвесной линии

Изложенный выше метод позволяет с необходимой точностью вычислять отклонения отвесной линии по результатам измерений; при этом ошибки определения зависят от полноты и точности самих измерений. Но может оказаться, что один из ви-

дов измерений, например, гравиметрические определения соответствующего радиуса в районе геодезических работ, отсутствуют. В этом случае, поскольку отклонения отвесных линий вызываются неравномерным распределением масс в наружном слое Земли, естественно предположить, что непосредственная причина отклонений – притяжение избыточных масс на материках и недостаточность притягивающих масс в океанах. Но изменчивость внешних форм Земли – не главная причина отклонений отвесной линии; таковой является изменение плотностей пород, образующих земную кору. Тем не менее, формы наружного рельефа Земли оказывают известное влияние на знак и величину отклонений отвеса. Поэтому первоначально получим формулы для вычислений отклонений отвесной линии, вызванных влиянием только внешнего топографического рельефа, предполагая плотность вещества его одинаковой.

Пусть имеем некоторую точку A на земной поверхности. Если бы окружающая ее местность по рельефу совпадала с уровнями поверхности точки A (равнина, плоскогорье), то, очевидно, влияние топографического рельефа отсутствовало бы.

Но точку A окружают некоторые формы рельефа, не совпадающие с уровнями поверхности, например горы, имеющие значительные высоты над уровнем океана, или впадины, имеющие отрицательные высоты. Притяжение этих масс сказывается на направлении отвесной линии. Определим величину этого влияния.

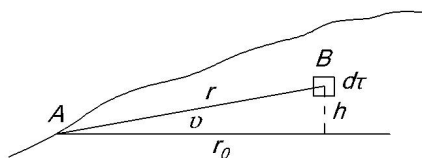


Рис. 5.8

Возьмем в окружающем точку A рельефе в некоторой точке B элементарный объем dt , имеющий плотность δ (рис. 5.8). Тогда элементарная масса dm этого объема получится

$$dm = \delta dt. \quad (5.7.1)$$

Сила притяжения dF в точке A , вызванная массой dm , будет

$$dF = f \frac{\delta d\tau}{r^2}. \quad (5.7.2)$$

Горизонтальная составляющая силы dF_0 определится таким образом:

$$dF_0 = dF \cos \nu = \frac{f \delta d\tau}{r^2} \cos \nu. \quad (5.7.3)$$

Проекция горизонтальной составляющей dF_0 на меридиан выразится так:

$$dF_x = f \frac{\delta d\tau}{r^2} \cos \nu \cos A, \quad (5.7.4)$$

где A – азимут направления с точки A на точку B .

Принимая во внимание, что

$$r^2 = r_0^2 + h^2 \quad (5.7.5)$$

и

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{h}{r_0} \quad \text{и} \quad \cos \nu = \frac{\sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2 + h^2}}}{1}, \quad (5.7.6)$$

выражение (5.7.4) примет вид

$$dF_x = f \frac{\delta d\tau}{r_0^2 + h^2} \sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2 + h^2}} \cos A. \quad (5.7.7)$$

Составляющая силы притяжения рельефа в меридиане получится таким образом:

$$F_x = f \delta \int \int \int \sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2 + h^2}} \sqrt{\frac{\cos A}{r_0^2 + h^2}} r_0 dr_0 dA dh \quad (5.7.8)$$

или

$$F_x = f \delta \int \int \int \frac{\cos A}{r_0} \frac{dr_0 dA dh}{\left(1 + \frac{h^2}{r_0^2}\right)^{3/2}}. \quad (5.7.9)$$

При h малом по сравнению с r_0 можно принять $\frac{h}{r} = 0$ и последнее выражение примет вид

$$F_x = f \delta \int \int \int \frac{dr_0}{r_0} \cos A dA dh. \quad (5.7.10)$$

Вычисление F_x по формуле (5.7.9) или (5.7.10) производят методом численного интегрирования. Для этого вообразим вокруг точки A (рис. 5.9) вертикальные цилиндрические поверхности разных радиусов Ab, Ac, Ad и т. д. и вертикальные плоскости Aa_1, Aa_2, Aa_3 и т. д., составляющие с направлением меридиана азимуты A_1, A_2, A_3 и т. д. Таким образом, окружающая точку A местность разобьется на призмы. Высоту h каждой призмы будем считать постоянной. Для определения притяжения какой-либо призмы, например $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, очевидно необходимо вычислить интеграл (5.7.9) или (5.7.10) при пределах интегрирования A_{n-1} и A_n , соответствующих азимутам направлений Aa_2 и r_i и r_k , соответствующих радиусам окружностей ii и kk .

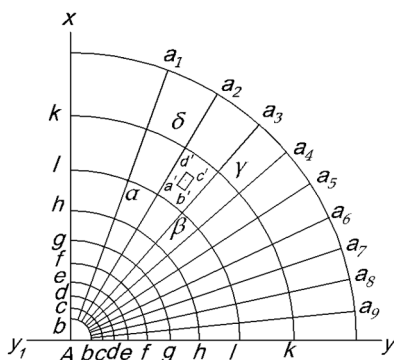


Рис. 5.9

В результате интегрирования (5.7.9) получим притяжение F_x взятой призмы

$$F_x = f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2}}. \quad (5.7.11)$$

Интегрируя (5.7.10), получаем

$$F_x = f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k}{r_i}. \quad (5.7.12)$$

Продолжим вывод, взяв за исходное выражение (5.7.10).

Подберем азимуты радиальных плоскостей и радиусы цилиндрических поверхностей таким образом, чтобы

$$(\sin A_n - \sin A_{n-1}) = \text{пост.} = L$$

$$\ln \frac{r_k}{r_l} = \text{пост.} = K. \quad (5.7.13)$$

Тогда выражение для F_x примет вид

$$F_x = f \delta_0 K L h. \quad (5.7.14)$$

Составляющая притяжения, располагающаяся в плоскости меридиана для всех призм, лежащих к северу от точки A , которую обозначим F_x^N , будет равна

$$F_x^N = \sum F_x = f \delta_0 K L \sum h_n \quad (5.7.15)$$

где $\sum h_n$ – сумма высот всех призм, лежащих к северу от точки A .

Аналогичное действие F_x^S призм, лежащих к югу от точки A , будет

$$F_x^S = f \delta_0 K L \sum h_s \quad (5.7.16)$$

где $\sum h_s$ – сумма высот призм, лежащих к югу от точки A .

Суммарное притяжение в плоскости меридиана выразится так:

$$\left. \begin{aligned} F_{NS} &= F_x^N - F_x^S \\ F_{NS} &= f \delta_0 K L \{ \sum h_n - \sum h_s \} \end{aligned} \right\} \quad (5.7.17)$$

От притяжения в меридиональном направлении F_{NS} окружающего точку A рельефа перейдем к составляющей уклонения отвесной линии в плоскости меридиана, вызванной этим притяжением. Обозначим это уклонение через ξ_l .

На рис. 5.10: AN – проекция на плоскость меридиана направления отвесной линии без учета влияния топографического рельефа. Это влияние представляет собой дополнительную горизонтальную слагающую уклонения отвесной линии в меридиане, которая очень мала по сравнению с влиянием притяжения всей Земли. Под влиянием силы F_{NS} , направление отвесной линии AN изменится и пойдет по равнодействующей AN_l угол NAN_l и будет выражать влияние топографического рельефа на уклонение отвесной линии в меридиане в точке A .

Притяжение Земли F_0 выражается формулой

$$F_0 = \pi f R_0^3 \frac{D_0}{R_0^2} = \frac{4}{3} f D_0 \pi R_0, \quad (5.7.18)$$

где R_0 – радиус Земли в километрах, D_0 – средняя плотность Земли. Тогда по малости угла имеем

$$\xi_1'' = \frac{F_{NS}}{F_0} \rho'' \quad (5.7.19)$$

или, принимая во внимание (5.7.17) и (5.7.18),

$$\xi_1'' = 0,00773 \frac{\delta_0}{D_0} KL \{ \sum h_N - \sum h_S \} \quad (5.7.20)$$

или так как $\frac{3}{4} \frac{\rho''}{\pi R_0} = 0,00773$.

Формулу для влияния рельефа на слагающую в первом вертикале получим аналогично

$$\eta_1'' = 0,00773 \frac{\delta_0}{D_0} KL_1 \{ \sum h_E - \sum h_W \}, \quad (5.7.22)$$

где

$$L_1 = \text{пост.} = \cos A_n - \cos A_{n-1} \quad (5.7.23)$$

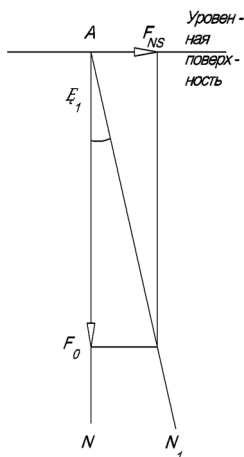


Рис. 5.10

и $\sum h_E$ и $\sum h_W$ – суммы высот призм, расположенных соответственно в восточной и западной частях от меридиана точки A .

Для вычисления влияний масс рельефа на отклонения отвесных линий по формулам (5.8.21) и (5.7.22) используется специальная диаграмма – палетка и выполняется численное интегрирование. При вычислениях плотность земной коры в среднем можно положить $\delta_0 = 2,7$; плотность Земли $D_0 = 5,52$.

Значения h для возвышенностей будут положительными, а для впадин (например, морей) – отрицательными. В последнем случае необходимо учитывать и массу воды.

Так, например, на пункте Калиана, расположенном на севере Индии, вблизи подножия Гималайского хребта, астрономо-геодезическое отклонение, полученное из измерений как $\varphi - B$, оказалось равным $\pm 5,2''$; значение же отклонения отвеса за притяжения Гималайских гор, вычисленное по формулам (5.75), оказалось $\pm 27,9''$.

Еще более это несоответствие проявляется вдоль береговых линий океанов, если к ним примыкают районы с горным рельефом. Если, например, на берегу океана расположены горные образования с высотами – 800 м, а глубина океанического дна равна 4000 м, то для такого внешнего рельефа Земли для береговой полосы по

формулам (5.8.25) получаются отклонения отвеса величиной порядка 30–40", в то время как фактически, по данным измерений, его величина, как правило, колеблется в пределах 5–8". Картина изменений отклонений отвеса в общем хотя и соответствует рельефу, но получается сильно сглаженной. Для объяснения этого явления была выдвинута гипотеза изостатической компенсации, или гипотеза изостазии (рис. 5.11).

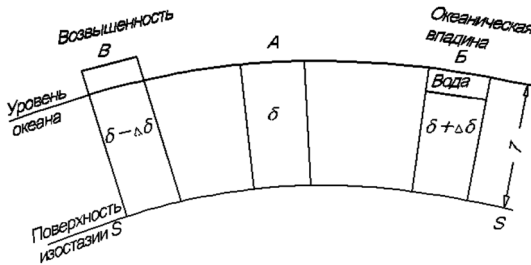


Рис. 5.11

Схем гипотез изостазии несколько; изложим в общих чертах гипотезу, предложенную в середине XIX в. англичанином Джоном Праттом.

Согласно этой гипотезе, масса вертикальных блоков земной коры с равными основаниями одинакова и постоянна в любой части Земли. Блоки, имеющие меньший объем и соответствующие впадинам земной поверхности, должны иметь большую плотность и, наоборот, блоки, имеющие большой объем и соответствующие возвышенностям на материках, должны иметь меньшую плотность.

Иначе говоря, различие в объемах таких блоков компенсируется соответствующим изменением плотностей вещества, из которого они состоят.

Подобная компенсация происходит в пределах постоянной глубины земной коры T , ниже которой располагаются слои одинаковой плотности. Поверхность, выше которой происходит указанная компенсация и давление на которую расположенных выше слоев одинаково и постоянно, называется поверхностью изостазии, или поверхностью изостатической компенсации. Очевидно, веса столбов наружного слоя Земли над поверхностью изостазии, имеющих равные основания, одинаковы и постоянны.

На рис. 5.11 показаны три столба A , B , B , имеющие в основании одинаковую площадь. Столб A соответствует некоторому району, в котором поверхность геоида проходит вблизи земной поверхности; столбы B и B – океанической впадине и возвышенности на материке. По гипотезе изостазии столбы A , B , расположенные выше поверхности изостазии SS , должны иметь одинаковую массу. Разница в объемах этих столбов компенсируется соответствующим различием плотностей пород, составляющих эти столбы. Если плотность столба A , имеющего некоторый средний объем, обозначить через δ , то плотность столбов B и B будет $\delta + \Delta\delta$ и $\delta - \Delta\delta$ соответственно.

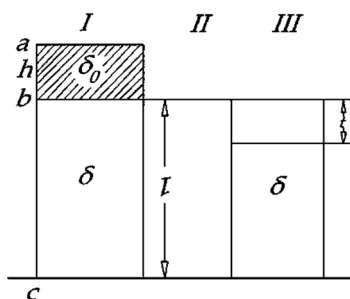


Рис. 5.12

Следовательно, основное уравнение гипотезы Пратта для всех частей земной коры имеет вид

$$\delta_i(T + h_i) = \text{пост.} = a \quad (5.7.24)$$

где h_i – высота точки i .

Если взять два столба 1 и 2, то

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{T + h_2}{T + h_1}. \quad (5.7.25)$$

Следовательно, согласно данной гипотезе, плотность отдельных участков земной коры обратно пропорциональна их толщине.

Для определения постоянной в уравнении (5.7.26) возьмем точку, имеющую $h = 0$.

Тогда
$$\delta_0 T = \text{пост.} = a. \quad (5.7.26)$$

По геофизическим данным, δ_0 – средняя плотность земной коры равна 2,67. Поэтому

$$a = 2,67T. \quad (5.7.27)$$

Глубина изостатической поверхности должна быть получена из опытных данных. Поясним в самых общих чертах путь ее определения. Принципиально он состоит в выборе такой глубины компенсации T , при которой наилучшим образом согласовывались бы непосредственные наблюдения с результатами вычислений, основанных на гипотезе изостатической компенсации.

Допустим, что в каком-либо районе имеются совмещенные астрономические и геодезические пункты, для которых, следовательно, легко вычислить отклонения отвесной линии. Теперь, принимая гипотезу изостазии, вычисляем отклонения отвесных линий для этих пунктов при разных глубинах изостатической компенсации T . Очевидно, за глубину поверхности изостазии следует принять то значение, при котором вычисленные отклонения отвесных линий окажутся наиболее близкими к определенному их значению из астрономо-геодезических измерений. Аналогично можно определить глубину поверхности изостазии, если известны для ряда пунктов измеренные значения силы тяжести. Определяемая таким путем величина T получается равной примерно 100 км. При выводе размеров эллипсоида Красовского для части астрономо-геодезической сети отклонения отвесной линии определялись на основе гипотезы изостазии Пратта; при этом глубина изостатической компенсации припята 96 км.

Применение изостатического метода для вывода отклонений отвеса в этом случае было вызвано отсутствием необходимых гравиметрических данных.

Изложим один из методов вывода отклонений отвесных линий, основанный на использовании гипотезы изостазии Пратта.

Представим себе три столба, имеющие одинаковую площадь в основании и построенные между поверхностью изостатической компенсации и физической темной поверхностью (рис. 5.12). Первый столб соответствует материке, второй – поверхности, для которой высота h равна нулю, и третий – океанической впадине.

Положим, что плотность пород, расположенных над уровнем моря, везде одинакова и равна $\delta_0 = 2,67$. Тем самым принимаем, что массы гор компенсируются только в той части столба, которая расположена ниже уровня моря, т. е. от b до c . Такое исходное положение гипотезы соответствует следующей физической трактовке: те массы, которые возвышаются над уровнем моря, выдвинуты из глубины Земли; они образуют излишек, который в точности равен недостатку, образовавшемуся внизу – ниже уровня моря. Поэтому вес столбов остается прежним и земная кора находится в равновесии.

Из изложенного следует, что для вычисления изостатического уклонения отвесной линии необходимо вычислить влияние на уклонение отвесной линии:

а) топографического рельефа по формулам (5.7.25),

б) компенсирующих масс части земной коры, расположенной между уровнем океана и поверхностью изостатической компенсации.

Сумма полученных таким образом величин и будет изостатическим уклонением отвеса.

Влияние некоторой призмы топографического рельефа на уклонение отвесной линии, согласно (5.7.24), выражается формулой (при $\frac{h}{r} = 0$).

$$\Delta\xi_T = \frac{3}{4} \frac{\rho''\delta_0}{\pi R_0 D_0} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k}{r_i}. \quad (5.7.28)$$

Имеются более сложные схемы построения гипотезы изостазии, в которых исключаются отдельные возражения. Так, например, в гипотезе Эри, появившейся почти одновременно с гипотезой Пратта, предполагается, что земная кора всюду имеет одинаковую плотность. Отдельные части земной коры плавают в мантии и погружены в нее тем больше, чем больше их высота над уровнем океана. Погруженная в мантию каждая глыба по закону Архимеда вытесняет массу мантии, равную массе всей этой глыбы.

По гипотезе Венинг-Мейнеса, земная кора имеет двусторонние прогибы в горных районах (вверх и вниз), вследствие чего изостатическая компенсация осуществляется в региональ-

ном масштабе в пределах всего района, а не на отдельных малых частях, как это должно быть по гипотезе Пратта.

Однако при использовании различных гипотез в геодезических целях не получается существенных изменений во влиянии на результаты геодезических измерений. Это естественно, так как при любой схеме гипотезы сохраняется ее основное условие – постоянство массы в вертикальных колоннах земной коры выше поверхности изостатической компенсации. По существу, предложенные разными учеными гипотезы изостазии отличаются между собой допускаемыми закономерностями в распределении притягивающих масс земной коры в отдельных ее вертикальных колоннах.

В настоящее время считается, что гипотеза изостазии в большинстве геологических районов согласуется с выполненными геодезическими и гравиметрическими измерениями, что компенсация плотностей вещества в вертикальных столбах земной коры в целом существует, а давление земной коры на некоторой глубине в большинстве исследованных районов примерно постоянно. Иначе говоря, имеющиеся фактические данные подтверждают в целом существование изостазии, т. е. равновесия масс в земной коре.

В связи с большим развитием, которое получили гравиметрические работы, гипотеза изостазии перестает играть существенную роль в решении задач высшей геодезии, которое сейчас может уже осуществляться на основе точных измерений и строгой теории; гипотеза же изостазии все еще остается пока гипотезой, хотя и согласующейся в среднем с данными наблюдений.

Изостазия или изостатическая компенсация масс в некотором поверхностном слое Земли – одна из важнейших особенностей строения Земли в целом.

Гипотеза изостазии была предложена на основании геодезических данных; доказательство ее справедливости основано в первую очередь на анализе и научной обработке результатов астрономо-геодезических и гравиметрических работ, как и выявление отдельных районов, где гипотеза изостазии не получает подтверждения. Тем самым геодезия дает геофизике и геологии ценнейший фактический материал для дальнейшей разработки теории о строении Земли и проникновения в тайны ее структуры и развития.

6. СИСТЕМА ВЫСОТ

6.1. Общие сведения

Высота точек земной поверхности H – одна из координат, определяющих фигуру Земли и отдельные ее точки относительно исходной отсчетной поверхности. Если геодезические координаты B_M и L_M определяют положение проекции точки M на референц-эллипсоиде, то высота H_M определяет отстояние точки M от эллипсоида по нормали к нему. Тем самым высоты всех точек Земли определяют фигуру физической поверхности Земли относительно принятого референц-эллипсоида.

Кроме того, высоты необходимы для определения работы, совершающейся при движении в гравитационном поле Земли.

Разности высот точек земной поверхности, получаемые из нивелирования, определяют разность потенциалов силы тяжести между этими точками. Если известно значение потенциала W_0 в исходном футштоке, то в результате нивелирования легко вычислить значения потенциалов силы тяжести в соответствующих точках поверхности Земли по известной формуле (3.7.18).

Практическая роль, которую играют высоты, заключается в следующем.

Высоты точек земной поверхности определяют рельеф, который необходимо изобразить на топографических картах. Точное значение разностей высот отдельных точек поверхности Земли совершенно необходимо для проектирования и строительства различных сооружений, для различных расчетов, в которых надо учитывать положение точек в пространстве.

Знание высот необходимо для вычисления редуций в непосредственно измеренные на земной поверхности величины (углы, базисы) при переходе на поверхность относимости, без чего не может осуществляться строгая математическая обработка геодезических измерений на эллипсоиде.

Требования к точности определения высот в различных целях колеблются в очень больших пределах, но многие из них весьма высокие и могут быть обеспечены лишь при теоретически строгом решении возникающих вычислительных задач. Однако вопрос о точном вычислении высот точек Земли долгое

время не был решен с необходимой строгостью; только исследования и предложения Молоденского внесли полную ясность в этот вопрос и дали строгое его решение.

Из непосредственных измерений получаются разности высот точек Земли. Поэтому для вычисления высот необходимо знать высоту точки, принимаемой за начальную или исходную. Примем, что высота начальной точки известна (см. главу XIII).

Геодезические высоты H принято получать из измерений как сумму двух слагаемых: расстояния от референц-эллипсоида до поверхности геоида, или квазигеоида и расстояния от одной из этих поверхностей до соответствующей точки поверхности Земли.

Оба указанных выше слагаемых должны быть отрезками нормали к поверхности референц-эллипсоида. Поясним это геометрически (рис. 6.1) и приведем главные и заключительные выводы, а подробное рассмотрение и доказательства этих выводов дадим в последующих параграфах этой главы.

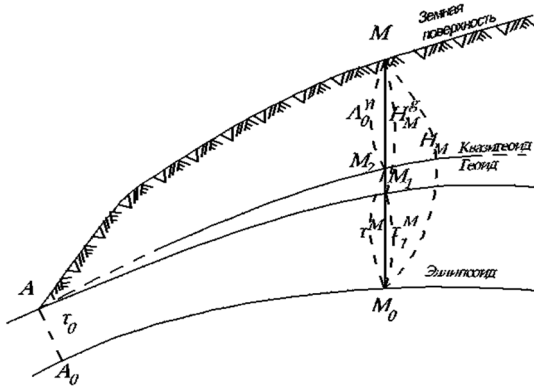


Рис. 6.1

Из рис. 6.1 для геодезической высоты точки M имеем:

$$H_M = H_M^g + \zeta_1^M, \quad (6.1.1)$$

$$H_M = H_M^y + \zeta^M. \quad (6.1.2)$$

В формуле (6.1.1) H_M^g – ортометрическая высота и ξ_1^M – высота точки M над поверхностью геоида. Именно при помощи этих величин до последнего времени вычислялись геодезические высоты. Исследования Молоденского показали, что принципиально строго, без привлечения гипотез о внутреннем строении Земли, оба слагаемых правой части выражения (6.1.1) не могут быть вычислены. Зато могут быть вычислены точно оба слагаемых выражения (6.1.2) H_M^y – нормальная высота и ξ^M – аномалия высоты, высота квазигеоида над поверхностью референц-эллипсоида. Поэтому для вычисления геодезических высот H в СССР в настоящее время применяется формула (6.1.2), предусматривающая использование системы нормальных высот H^y и аномалий высот ξ .

Расчленение высоты H на два слагаемых вызывается практической необходимостью иметь высоты от уровня моря. В системе ортометрических высот поверхностью уровня моря служит поверхность геоида; в системе нормальных высот роль поверхности моря играет вспомогательная поверхность квазигеоида.

Принятие поверхности «уровня моря» в качестве отсчетной поверхности для высот, используемых на практике, имеет определенный физический смысл, который заключается в том, что за исходную поверхность принимается уровенная или горизонтальная поверхность или поверхность, весьма близкая к ней. Если не принимать во внимание непараллельность уровенных поверхностей (а это всегда возможно при изображении рельефа на топографических картах и во многих случаях использования высотных данных для практических расчетов), то поверхность, проходящая через точки, имеющие одинаковые высоты H^g или H^y , будет горизонтальной. Это вполне согласуется с общепринятыми представлениями о высотах точек Земли и рельефе ее поверхности. Например, в пределах некоторой области (при таком выборе рабочей отсчетной поверхности для высот) точки, имеющие одинаковые высоты, могут практически считаться находящимися на одной водной поверхности (при ее спокойном состоянии). Преимущество такого выбора отсчетной поверхности практически состоит также в независимости определения высот от референц-эллипсоида – его размеров и ориентировки. По указанным соображениям, в публикуемых каталогах приводятся нормальные высоты H^y реперов и центров триангуляций.

Из сказанного следует, что при вычислении высот практически приходится иметь дело с двумя отсчетными поверхностями: 1) референц-эллипсоида для вычисления геодезических высот H , определяющих по высоте точки земной поверхности относительно поверхности относимости, и 2) квазигеоида для вычисления нормальных высот, используемых в практических расчетах и показываемых на картах при изображении топографического рельефа.

Для решения научных и практических задач геодезии необходимо знать высоту H как сумму двух слагаемых H^v и ξ с неизменным выделением значений каждого из них для любой точки Земли.

Теперь укажем способы их определения.

Точно высоту H^v определяют методом геометрического нивелирования. Влияние непараллельности уровенных поверхностей поверхности квазигеоида учитывается по гравиметрическим данным. Метод тригонометрического нивелирования практически для точного определения высот непригоден вследствие незнания коэффициента земного преломления в моменты измерений.

Для вычисления аномалии высоты ξ принципиально могла бы быть применена формула (6.14 нет), т. е.

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (6.1.3)$$

или

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int_{\sigma} (\Delta g + \delta g) S(\psi) d\sigma. \quad (6.1.4)$$

Этот метод однако практически неприменим вследствие неполноты и незавершенности мировой гравиметрической съемки, так как интегрирование по формуле (6.1.4) необходимо производить по всей поверхности Земли. Кроме того, даже при наличии материалов мировой гравиметрической съемки, используя формулы (6.1.3) или (6.1.4), мы получили бы высоты ξ относительно общего земного эллипсоида, а не от принятого референц-эллипсоида. Поэтому аномалии высот определяют иначе – путем последовательного вычисления малых разностей аномалий высот ($\xi_n - \xi_{n-1}$) по выбранным профилям, аналогично тому как определяют высоты при геометрическом нивелирова-

нии. Эти разности определяют особыми методами астрономического и астрономо-гравиметрического нивелирования. Как и при выводе уклонений отвесных линий, наилучшее решение задачи по определению аномалий высот ξ дает метод астрономо-гравиметрического нивелирования, основанный на совместном использовании результатов астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

Геодезические высоты H_M без выделения слагаемых H^V и ξ можно получить геометрически, т. е. только по астрономо-геодезическим измерениям.

Действительно, пусть заданы как исходные два пункта: A (B_A, L_A, H_A) и B (B_B, L_B, H_B). Указанные в скобках координаты определяют положение двух пунктов относительно поверхности референц-эллипсоида. Представим себе, что земная поверхность покрыта пунктами триангуляции, на которых произведены измерения горизонтальных направлений и зенитных расстояний на смежные пункты. Допустим, что на каждом пункте также определены астрономические координаты φ и λ . Тогда для пунктов триангуляции легко получить составляющие уклонений отвесных линий ξ и η по формулам (5.3.17).

Теперь от измеренных зенитных расстояний перейдем к геодезическим по формуле $Z = Z + (Z - z)$. Поправка $(Z - z) = \xi \cos A_m + \eta \sin A_m$ (см. § 68).

Вычисляя превышения пунктов триангуляции по полученным таким образом Z (по формулам тригонометрического нивелирования) и используя известную высоту начальной точки A , получаем геодезические высоты B всех пунктов триангуляции. Иначе говоря, на основании измерений только геометрических элементов определится поверхность Земли относительно принятого референц-эллипсоида.

Практически такой путь изучения фигуры Земли неосуществим с достаточной точностью вследствие ошибок в измерении вертикальных углов, вызванных действием вертикальной рефракции.

Могут быть предложены и другие схемы геометрического метода изучения физической земной поверхности. Однако практически все они уступают по точности, или по затратам труда методу, основанному на использовании формулы

$$H_M = H_M^Y + \zeta^M. \quad (6.1.5)$$

6.2. Системы счета высот

Как отмечено, для точного определения разности высот точек поверхности Земли применяется метод геометрического нивелирования, основанный на использовании горизонтального луча визирования, т. е. луча, направленного по касательной к уровенной поверхности в точке наблюдения. Положение этого луча определится при помощи уровня, фиксирующего касательную как перпендикулярную к направлению силы тяжести, т. е. отвесной линии в данной точке. Разность высот между заданными точками в геометрическом нивелировании определяется как сумма превышений Δh между близкими точками по ходу нивелирования. В дальнейшем будем считать, что методы точного нивелирования известны, а ошибки полевых измерений отсутствуют. Лишь при рассмотрении вопросов о достаточной точности формул и необходимости учета малых поправочных членов и редукций будут приниматься во внимание средние квадратические ошибки измерений Земли и неравномерного распределения

Вследствие непараллельности уровенных поверхностей идеальная и простая схема геометрического нивелирования, употребляемая на первой стадии изучения этого метода и иллюстрируемая рис. 6.4, нарушается и становится сравнительно сложной, требующей учета на каждой станции наблюдений влияний эллипсоидальности плотности внутри ее.

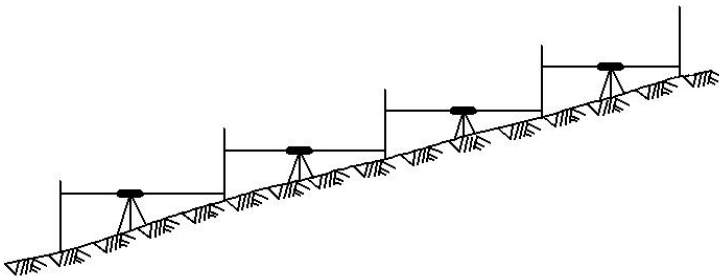


Рис. 6.2

Действительная схема геометрического нивелирования показана на рис.40, на котором приведены обозначения: u_0 – отсчетная поверхность, которую примем за эллипсоид вращения; Mn – нормаль к этой поверхности, Mk – прямая, параллельная касательной к поверхности u_0 . Пусть u – уровенная поверхность нормального поля Земли, проходящая через точку нивелирования (горизонт инструмента), и Mn_1 – нормаль к этой поверхности.

Если бы действительное кавитационное поле Земли совпадало с нормальным, то направление отвесной линии совпадало бы с нормалью Mn_1 а визирный луч представлял бы касательно Mk_1 к поверхности u ; в этом случае непараллельность уровенных поверхностей выразилась бы в отсчете по рейке влиянием угла между Mk и Mk_1 . Но вследствие влияния аномальных масс действительное направление отвесной линии представляется направлением отрезка $\overline{Mn_2}$, перпендикулярным к реальной уровенной поверхности W ; тогда действительное направление визирного луча с нивелирной станции определится направлением отрезка $\overline{Mk_2}$, как касательной к поверхности W , проходящей через станцию наблюдений.

Если влияние непараллельности уровенных поверхностей u_0 и u , т. е. угол между нормалями к ним $\overline{Mn}$ и $\overline{Mn_2}$ бможет быть учтено сравнительно просто, по одной из формул теории нормального потенциала силы тяжести, то влияние отклонения уровенной поверхности действительного потенциала, выражающееся в отклоне Ожа действительного направления отвесной линии Mn_2 от нормалей Mn_1 или Mn , таким простым способом учтено быть не может, так как оно зависит от аномального распределения масс внутри Земли. Природа этого отклонения требует дополнительных измерений на каждой установке нивелира для учета действительного направления визирного луча – измерения силы тяжести.

В принципе можно представить себе и другой путь определения угла между касательными к уровенным поверхностям, проходящим через начальную точку и точку наблюдения: если на каждой станции нивелирования получить астрономические и геодезические координаты, то надлежаще вычисленные уклонения отвесной линии и будут углом между названными касательными; однако такой путь вычисления поправок нереален.

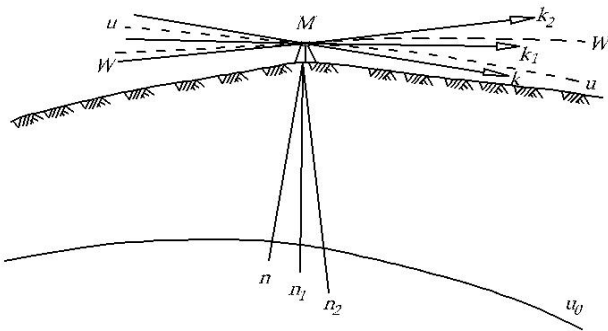


Рис. 6.3

Следовательно, процесс геометрического нивелирования, простой по идее в первом приближении, существенно осложняется при более строгом его рассмотрении.

Непосредственно измеряемые превышения нивелированием при помощи горизонтального визирного луча, перпендикулярного направлению отвесной линии, представляют собой превышения относительно плоскости, касательной уровенной поверхности, проходящей через горизонт инструмента. Для получения превышения относительно отсчетной поверхности должна быть введена поправка за непараллельность этой уровенной поверхности и поверхности отсчитываемости, представляющая собой влияние угла между касательными к этим поверхностям по линии нивелирования; эта поправка определяется по данным геометрических измерений. Таким образом, при определении разности высот точек земной поверхности производятся измерения превышений при помощи горизонтального визирного луча и измерения силы тяжести вдоль нивелирного хода.

Пусть на рис. 6.4 изображен профиль земной поверхности, пересекающий точку O , служащую началом счета высот. Из геометрического нивелирования обходимо определить высоту точки M .

Пусть отрезки Δh – превышения, полученные из наблюдений на последовательных нивелирных станциях вдоль нивелируемой линии OM . Тогда сумма Δh вдоль выбранной линии даст некоторую величину, которую обозначим через $H_{изм}$, т. е.

$$H_M = \sum_0^M \Delta h, \quad (6.2.1)$$

или, приняв Δh за элементарное превышение dh ,

$$H_{изм} = \int_0^M dh; \quad (6.2.2)$$

$H_{изм}$ зависит от пути нивелирования.

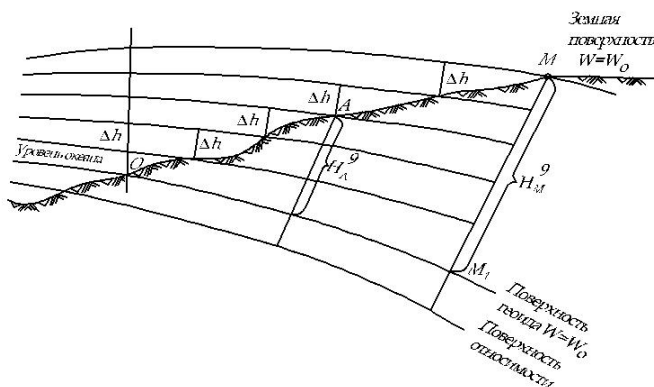


Рис. 6.4

Действительно, пусть от O к M нивелирование выполняется по двум путям: 1) от точки O до K и от точки K по уровенной поверхности к точке M и от точки O вдоль поверхности геоида к точке M_1 и от точки M_1 к точке M .

Нетрудно видеть, что в первом пути нивелирования величина $H_{изм}$ определится отрезком OK , а во втором – отрезком MM_1 , причем вследствие непараллельности уровенных поверхностей $OK \neq MM_1$. Выбирая какой-либо иной путь нивелирного хода, получаем третье значение величины $H_{изм}$, не равное двум предыдущим.

Если бы уровенные поверхности были параллельны, т. е. представляли собой концентрические сферы, то величина $H_{изм} = \sum \Delta h$ представляла бы высоту точки M как расстояние от M до геоида по нормали к последнему, т. е. до точки M_1 . Такое допущение возможно только в работах малой точности (техническое нивелирование, нивелирование IV и III классов) или в точных нивелировках при очень малой протяженности нивелирного хода.

Указанная выше неопределенность в выводе высоты $H_{изм}$, т. е. зависимость значения высоты точки от пути нивелирования, недопустима в точных нивелирных работах на значительной территории.

Дальнейшая наша задача – изложение теории определения высот, учитывающей непараллельность уровенных поверхностей нормального поля Земли, влияния аномальных масс Земли и позволяющей однозначно определить значения высот независимо от пути нивелирования.

Напишем как исходную одну из основных формул, т. е.

$$dW = g dh, \quad (6.2.3)$$

откуда для нашего случая (рис. 6.6), используя принятые обозначения,

$$\int_{OM} dW = W_0 - W_M = \Delta W = \int_{OM} g dh \quad (6.2.4)$$

где W_0 и W_m – значения потенциалов силы тяжести для уровенных поверхностей, проходящих через точку O и через точку M ;
 g – значения силы тяжести в пунктах нивелирного хода;
 dh – элементарное превышение.

Потенциалы W_0 и W постоянны для каждой уровенной поверхности, поэтому постоянно и $\Delta W = \int g dh$. Отсюда следует, что значение $\int_{OM} g dh$ не зависит от пути нивелирования, а только от положения начальной и конечной его точек.

На основании (3.7.19) можем написать

$$H_M = \frac{W_g - W_M}{\bar{g}} = \frac{\int_{OM} g dh}{\bar{g}}, \quad (6.2.5)$$

где $\bar{g}$ – некоторое значение силы тяжести.

Приращение потенциала силы тяжести в данной точке относительно начального футштока, взятое с обратным знаком, называется *геопотенциалом*.

Существуют четыре системы геопотенциальных высот: *приближенные, ортометрические, нормальные и динамические*.

Рассмотрим последовательно теории этих систем и получим формулы для их вычислений.

Приближенные высоты

Приближенные высоты получатся, если не принимать во внимание реальное гравитационное поле силы тяжести Земли.

К вычислению приближенных высот приходится прибегать в том случае, если вдоль линии нивелирования не производились измерения силы тяжести. Выявляющие влияние действительного поля силы тяжести Земли; вычисление приближенных высот используется и как промежуточный этап при вычислении высот в других системах.

Из определения приближенных высот следует, что измеренные величины $H_{изм}$ следует исправить только за непараллельность уровенных поверхностей реального поля.

Обозначая Δu – разность потенциалов уровенных поверхностей, т.е. исходной и проходящей через данную точку; γ – силу тяжести нормального потенциала и $H_{приб}$ – искомую высоту, на основании (6.2.5) напомним

$$H_{приб}^M = \frac{u_0 - u_M}{\gamma_m^M} = \frac{\Delta u}{\gamma_m^M} = \frac{\int_0^M \gamma dh}{\gamma_m^M} \quad (6.2.6)$$

где γ_m^M – среднее значение нормальной силы тяжести на отвесной линии MM_1 .

Ортометрические высоты

Ортометрическими высотами называются расстояния от поверхности геоида до точек земной поверхности, считаемые по отвесным линиям, проходящим через эти точки. Для точки M (рис. 6.6) ортометрическая высота выразится расстоянием MM_1 .

Для применения формулы (6.2.5) определим несколько иначе разность потенциалов $W_0 - W^M$. Так как точки O и M_1 лежат на одной уровенной поверхности, то

$$W_0 - W_M = W_{M_1} - W_M = \int_0^M g dh = \int_{M_1}^M g dh. \quad (6.2.9)$$

Применив теорему Лагранжа о среднем значении функции, напомним

$$\int_{M_1}^M g dh = g_m^M \int_{M_1}^M dh = g_m^M H_{M_1}^g, \quad (6.2.10)$$

где g_m^M – среднее значение действительной силы тяжести на отрезке отвесной линии M_1M ., а $H_m^g = \int_{M_1}^{M_2} dh$, согласно определению, – ортометрическая высота точки M .

Тогда для ортометрической высоты H_m^g получим

$$H_m^g = \frac{W_0 - W_M}{g_m^M} = \frac{\int_0^M g dh}{g_m^M}. \quad (6.2.11)$$

Из (6.2.11) следует, что ортометрические высоты H_m^g не зависят от пути нивелирования и ортометрические высоты точек, расположенные на одной уровенной поверхности, будут иметь разные значения, так как расстояния от геоида до уровенной поверхности точки M не остаются постоянными и будут зависеть от g_m , значения которых будут различными в разных точках.

Ортометрические высоты имеют крупный недостаток принципиального характера – они не могут быть вычислены точно, так как входящая в формулу для H^g величина g_m сложным образом зависит от распределения плотностей внутри Земли, которые в настоящее время неизвестны. Величину H^g можно вычислить, задаваясь той или иной гипотезой распределения масс Земли. В этом случае точность вычисления H^g будет зависеть от степени достоверности примененной гипотезы строения Земли. Вследствие этого не представляется возможным в полной мере оценить точность получаемых высот H^g .

Если применять ортометрическую систему высот, то геодезическая высота ξ_1^M точки M , показанная на рис. 6.3 отрезком MM_0 определится

$$H_M = H_m^g + \xi_1^M, \quad (6.2.12)$$

где ξ_1^M – высота геоида над поверхностью относимости, которая, как показали специальные исследования, также не может быть вычислена точно. Поэтому при применении системы ортометрических высот задача по вычислению геодезических высот не получает точного и строгого решения.

От этого весьма существенного недостатка свободны нормальные высоты, которые ввел Молоденский при разработке общей теории исследования фигуры Земли.

В практике геодезических работ СССР применялись ортометрические высоты; во многих странах они применяются и сейчас. В СССР и социалистических странах перешли к системе нормальных высот.

Нормальные высоты

Изложим теорию нормальных высот несколько подробнее, чем в § 13, получим удобные рабочие формулы для их вычислений. Обратимся к рис. 6.5.

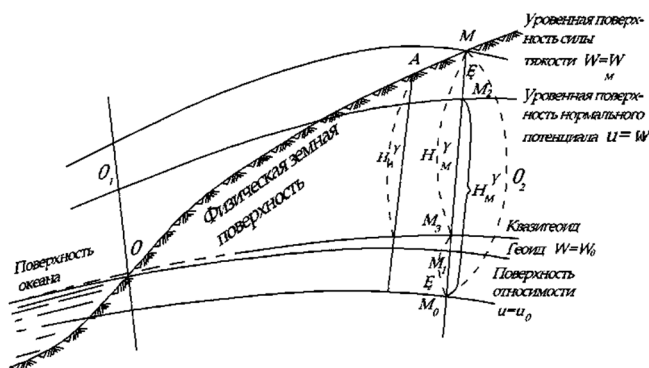


Рис. 6.5

Пусть основная уровенная поверхность – геоид определяется уравнением $W = W_0 = \text{const}$, и за поверхность относимости принят уровенный эллипсоид ормального потенциала, для которого $u = u_0$.

Потенциал на уровенной поверхности силы тяжести (действительной), проходящей через данную точку земной поверхности M , обозначим через W_m . Изобразим сечение уровенной поверхности нормального потенциала, для которой $u = W_m$; пусть это будет кривая O_1M_2 ,

тогда

$$W_0 - W_M = u_0 - u_{M_2}. \quad (6.2.13)$$

Обозначая через dH^r элементарное превышение между уровенными поверхностями нормального поля на отвесной линии MM_0 и имея в виду, что

$$W_0 - W_M = \int_{OM} g \, dh \quad \text{и} \quad u_0 - u_{M_2} = \int_{M_0 M_2} \gamma \, dH^\gamma, \quad (6.2.14)$$

можем написать

$$\int_{OM} g \, dh = \int_{M_0 M_2} \gamma \, dH^\gamma = \gamma_m H_M^\gamma, \quad (6.2.15)$$

где γ_m – среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке отвесной линии $M_0 M_2$.

Из (6.2.15) и получим основную формулу для нормальной высоты

$$H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m^M} = \frac{\int_{OM} g \, dh}{\gamma_m^M}. \quad (6.2.16)$$

Эта формула была получена В. Ф. Еремеевым.

Значение γ_m^M , т. е. нормальной силы тяжести на высоте $\frac{1}{2} H_M^\gamma$ от эллипсоида, с достаточной точностью легко получится из (4.2.8), т. е.

$$\gamma_m^M = \gamma_0^M - 0,308 \cdot \frac{1}{2} H_{изм} = \gamma_0^M - 0,154 H_{изм}, \quad (6.2.17)$$

где γ_0^M нормальная сила тяжести на поверхности относимости, вычисленная по нормальной формуле как функция широты B_m .

Из (6.2.15) следует, что нормальная высота однозначно определяется независимо от пути нивелирования. Точки, расположенные на одной уровенной поверхности, в общем случае будут иметь различные высоты, так как $(W_0 - W_M)$ постоянно, но γ_m изменяется с изменением широты; в частном случае при расположении точек на одной параллели высоты будут одинаковыми.

Выражение (6.2.15) для нормальной высоты позволяет установить и физический смысл его: из непосредственных измерений получается значение $\int_{OM} g \, dh$, равное $W_0 - W_M$, т. е. разности потенциалов; по измеренной разности действительных потенциалов силы тяжести вычисляют высоты, но в нормальном гравитационном поле Земли, не принимая во внимание возмущающего потенциала и связанных с ним величин аномалий силы тяжести или уклонов отвесной линии.

Следствием этого получается несовпадение геодезической высоты H_M с нормальной H_M^Y на величину

$$\zeta = H_M - H_M^Y, \quad (6.2.18)$$

которая таким образом получает смысл аномалии высоты.

Нормальная высота H_M^Y точки M на рис. 6.5 изображается отрезком отвесной линии M_0M_2 , аномалия высоты MM_2 , а геодезическая высота H_M как расстояние MM_0 , определится

$$H_M - H_M^Y + \zeta, \quad (6.2.19)$$

Оба слагаемых в правой части последнего выражения для H_M могут быть вычислены совершенно точно, не прибегая к использованию каких-либо гипотез; ошибка вычислений H_M^Y и ζ зависит только от ошибок непосредственных измерений.

В этом состоит главное и важное преимущество нормальных высот перед ортометрическими.

Если аномалии высоты ζ в каждой точке уровенного эллипсоида ($u = u_0$) отложить от его поверхности вверх по нормальям, то геометрическим местом концов этих отрезков будет некоторая вспомогательная поверхность, которую Молоденский назвал *квазигеоидом*. Тогда нормальные высоты можно рассматривать как отрезки нормалей к эллипсоиду, отложенные от поверхности квазигеоида до физической земной поверхности (на рис. 6.7 для точки M – расстояние MM_3). Для поверхности океанов в формуле (6.2.15) выражение $W_0 - W_m = 0$ и, следовательно, $H^* = 0$.

Поэтому на основании (6.2.19) геодезические высоты океанической поверхности равны аномалиям высот, т. е.

$$H_M = \zeta. \quad (6.2.20)$$

Иначе говоря, на поверхности океанов геоид и квазигеоид совпадают, а аномалии высот выражают высоту геоида или квазигеоида над поверхностью уровенного эллипсоида.

Из сравнений (6.2.11) и (6.2.15) следует также, что квазигеоид совпадает с геоидом и на суше, в местах, где значения g_m и γ_m окажутся равными.

Нетрудно заключить, что квазигеоид приближенно выражает фигуру геоида.

Путем преобразований выражения (6.2.15) для H' получим более удобную формулу для практических вычислений, предложенную В. Ф. Еремеевым [22]

Цель преобразований исходной формулы (6.2.15) будет заключаться в выделении (в виде отдельных членов) трех слагаемых: высоты, получаемой из нивелирования, поправки за непараллельность уровенных поверхностей нормального поля и поправки за отклонения действительного поля от нормального. Геодезически такое преобразование формулы будет приближенно соответствовать схеме нивелирования, приведенной в начале этого параграфа.

Напишем:

$$\begin{aligned} H_M^\gamma &= \frac{1}{\gamma_m^M} \int dh = \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (g - \gamma_m^M + \gamma_m^M - \gamma + \gamma) dh \\ H_M^\gamma &= \int_{OM} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int (\gamma_0 - \gamma_0^M) dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int (g - \gamma) dh, \quad (6.2.21) \end{aligned}$$

Легко видеть, что первый член представляет собой сумму непосредственно полученных превышений из нивелирного хода, т. е. $H_{\text{изм}}$; первые два члена, взятые вместе, представляют высоту точки M , вычисленную с учетом непараллельности уровенных поверхностей нормального поля, т. е. $H_{\text{прибл}}$, последний член представляет собой поправку за отклонение действительного гравитационного поля Земли от нормального.

Путем сравнительно несложных преобразований В. Ф. Еремеев приводит формулу (6.2.21) к виду, более удобному для практических вычислений

$$H_M^\gamma = \int_{OM} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int (\gamma_0 - \gamma_0^M) dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int (g - \gamma) dh, \quad (6.2.22)$$

где γ_0 – нормальное значение силы тяжести на уровенном эллипсоиде в переменной точке; γ_0^M – то же, но в точке, лежащей на отвесной линии, проходящей через M , т. е. в M_0 .

Или, принимая во внимание (6.2.8),

$$H_M^\gamma = H_{\text{прибл}}^M + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (g - \gamma) dh. \quad (6.2.23)$$

Формулу для разности нормальных высот двух точек, например M и A , получим как разность $H_M^\gamma - H_A^\gamma$, т. е.

$$H_M^\gamma - H_A^\gamma = H_{\text{прибл}}^M - H_{\text{прибл}}^A + \frac{1}{\gamma_m} \int_{AM} (g - \gamma) dh. \quad (6.2.24)$$

Сравним значения нормальных и ортометрических высот. Имеем

$$W_0 - W_M = \gamma_m^M H_M^\gamma = g_m^M H_M^\gamma - (g_m^M - \gamma_m^M) H_M^\gamma, \quad (6.2.25)$$

разделим его на g_m^M , тогда

$$\frac{W_0 - W_M}{g_m^M} = H_M^g = H_M^\gamma - \frac{(g_m^M - \gamma_m^M)}{g_m^M} H_M^\gamma. \quad (6.2.26)$$

или, на основании (6.2.26), окончательно

$$H_M^g = \int_{OM} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (\gamma_0 - \gamma_0^M) dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (g - \gamma) dh - \frac{g_m^M - \gamma_m^M}{g_m^M} H_M^\gamma \quad (6.2.27)$$

Таким образом, ортометрическая высота отличается от нормальной последним членом

$$H_M^g - H_M^\gamma = \frac{g_m^M - \gamma_m^M}{g_m^M} H_M^\gamma. \quad (6.2.28)$$

Рис. 6.5 показывает, что (6.2.27) выражает отступление квазигеоида от геоида, т. е. отрезок M_1M_3 .

Если взять максимальное значение $g_m - \gamma_m = 500$ млг, $H = 4$ км, то $H^g - H^\gamma = 2$ м; при $(g_m - \gamma_m) = 50$ млг и $H = 500$ м, $H^g - H^\gamma = 2,5$ см.

Отсюда следует, что максимальное отступление квазигеоида от геоида не превосходит 2 м, а в большинстве районов характеризуется величиной порядка нескольких сантиметров.

Если ход нивелирования представляет замкнутый полигон $ABCD A$, то должно соблюдаться равенство

$$\int_A dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_A (\gamma_0 - \gamma^A) dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_A (g - \gamma) dh = 0. \quad (6.2.29)$$

Если под суммой превышений понимать непосредственно получаемую сумму превышений $\int_A dh$, то в этом случае теоретическая невязка полигона f определится криволинейным интегралом, т. е.

$$f = \int_A dh = -\frac{1}{\gamma_m} \int_A (\gamma - \gamma_0^A) dh - \frac{1}{\gamma_m} \int_A (g - \gamma) dh. \quad (6.2.30)$$

Следовательно, при вычислении невязок замкнутого нивелирного полигона за теоретическую сумму превышений в них следует принимать не нуль, а величину.

Динамические высоты

Нормальные высоты точек (так же, как и ортометрические) одной и той же уровенной поверхности будут в общем случае в разных местах отличаться одна от другой, что в практике инженерно-геодезических работ может вызвать затруднения, а иногда и просчеты, если инженер-строитель при использовании геодезических данных для проектирования крупных инженерных сооружений не будет учитывать этого обстоятельства.

Инженеры-строители разных специальностей, не имеющие специального геодезического образования, обычно считают, например, что точки земной поверхности, имеющие одинаковые отметки, находятся «на одном уровне» и соответственно ведут свои расчеты при разработке проектов тех или иных сооружений. Приведем простейшие примеры.

Допустим, что инженер, проектирующий железную дорогу, задается целью проложить ее в данном участке пути без уклонов, с тем чтобы сила локомотива не тратилась на их преодоление, а расходовалась только для преодоления тормозящих сил трения. Для этого, очевидно, трасса дороги должна располагаться на одной уровенной поверхности, для которой потенциал силы тяжести $W = \text{пост.}$; расположение дороги на разных уровенных поверхностях не соответствует условиям поставленной задачи, однако проектировщик, сохраняющий одинаковые высоты трассы (нормальные, ортометрические), получит проект дороги на разных уровенных поверхностях. Для достижения поставленной цели было бы необходимо предварительно вычислить нормальные высоты точек на той

уровенной поверхности, на которой намечено проложить проектируемый путь железной дороги.

Рассмотрим частный пример из практики гидротехнического строительства. Необходимо запроектировать по данным нивелирования границу затопления при создании нового большого водоема. Не учитывая непараллельности уровней поверхностей, можно сделать ошибочный вывод, что такой границей будет горизонталь, соответствующая единому числовому значению нормальной высоты. В действительности граница затопления будет представлять на земной поверхности контур, имеющий в разных частях различные нормальные (или ортометрические) высоты. Ошибочно также принимать, что уровень какого-либо водного бассейна в спокойном состоянии имеет одинаковые нормальные высоты, и урезы воды на берегах везде имеют равные высоты.

6.3. Астрономическое и астрономо-гравиметрическое нивелирование

Астрономическое и астрономо-гравиметрическое нивелирование – методы определения превышений точек квазигеоида (геоида) относительно поверхности референц-эллипсоида.

Для уяснения сущности обоих методов нивелирования рассмотрим следующий простейший случай, на котором наряду с освещением основной идеи данного вида нивелирования просто покажем и различие между обоими методами.

Пусть A (рис. 6.6) – начальная точка триангуляции, для которой $\xi_0 = 0$. Для получения приближенной формулы допустим, что профиль земной поверхности совпадает с некоторой уровенной поверхностью $W_A = C$, т. е. $H' \cong \text{пост.}$ Возьмем точку A_1 , бесконечно близкую к точке A . Прямая A_1n_1 – нормаль к эллипсоиду, прямая A_1n_2 – отвесная линия.

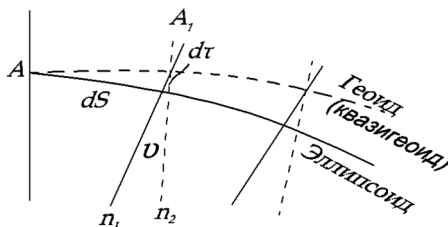


Рис. 6.6

Обозначим:

ϑ – уклонение отвесной линии в азимуте сечения AA_1 , тогда угол при точке A между сечением уровенной поверхности $W_A = C$ и эллипсоидом также ϑ ; $d\xi$, – превышение точки A_1 над точкой A относительно эллипсоида; ds – расстояние AA_1 .

Таким образом,

$$d\xi = -\vartheta ds. \quad (6.3.1)$$

Геодезическая высота уровенной поверхности $W_A = C$ над эллипсоидом в точке B , находящейся на конечном расстоянии s от точки A , изменится на величину

$$\xi_B - \xi_A = -\int_{AB} \vartheta ds. \quad (6.3.2)$$

Это и будет искомая формула нивелирования, практически точная при $H' \cong \text{const}$. Для общего случая $H' \neq \text{const}$ интеграл $\int_{AB} \vartheta ds$ будет главным членом формулы астрономического нивелирования; поправочный член будет выражать влияние непараллельности уровенных поверхностей.

Как видно, принципиальная схема нивелирования данного вида чрезвычайно проста; существенные затруднения возникают при вычислении интеграла $\int \vartheta ds$, на чем и остановимся подробнее.

Практически при вычислении превышений под последними можно понимать превышения $\Delta\xi = \xi_i - \xi_{i-1}$ между точками, расположенными на конечном, но достаточно близком расстоянии s .

Но, согласно формуле (6.3.2) для вычисления ξ уклонение ϑ должно быть известно в каждой точке нивелирования; поэтому, если расстояние между точками нивелирования принимается конечным, а закон изменения ϑ неизвестен, то приходится задаться некоторым условием или предположением о характере изменения ϑ в пределах этого расстояния s . Наиболее простым и важным условием будет линейность изменения ϑ из этого условия одновременно следует, что смежные точки нивелирования должны быть достаточно близки.

Опытные данные позволили установить, что поставленное условие во многих случаях будет выполняться с некоторой приемлемой точностью, если расстояние s между смежными точками нивелирования будет порядка 10 – 20 км в равнинной мест-

ности с плавными и равномерными изменениями уклонов отвесных линий и 3 – 5 км в горных и аномальных районах.

Однако и при таких расстояниях могут быть заметные отступления от предположенного закона линейного изменения уклона ϑ , снижающие точность, нивелирования.

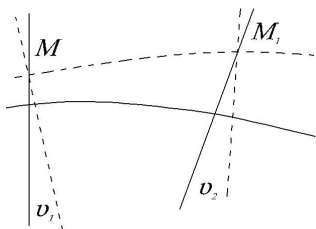
Рабочие формулы для вычисления превышений точек квазигеоида при некотором конечном значении s в рассматриваемом случае получатся следующим образом.

Возьмем некоторую линию астрономического или астрономо-гравиметрического нивелирования от прежней начальной точки A до некоторой точки B . Пусть MM_1 – две произвольные смежные точки этой линии нивелирования (рис. 6.7).

Введем обозначения:

ϑ_1'' и ϑ_2'' – уклоны отвесных линий в точках M и M_1 ; s_M – расстояние MM_1 .

Учитывая предположенную линейность измерения ϑ , можем написать:



$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_M + ks \\ \vartheta_{M_1} &= \vartheta_M + ks_M \\ k &= \frac{\vartheta_{M_1} - \vartheta_M}{s_M} \end{aligned} \right\} \quad (6.3.3)$$

Рис. 6.7

Тогда на основании формулы (6.3.1) получим для интервала MM_1

$$\zeta_1 = - \int_0^{s_M} \left(\vartheta_{M''} + \frac{\vartheta_{M_1}'' - \vartheta_{M''}}{s_M} \right) ds = - \frac{s_M}{2} (\vartheta_M'' + \vartheta_{M_1}''). \quad (6.3.4)$$

Рассматривая линию AB , состоящую из отрезков, аналогичных MM_1 , получаем для нее

$$\begin{aligned} \zeta &= - \frac{1}{\rho''} \int_{AB} \vartheta'' ds = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots) = \\ &= - \frac{\vartheta_1'' + \vartheta_2''}{2\rho''} s_1 - \frac{\vartheta_2'' + \vartheta_3''}{2\rho''} s_2 - \frac{\vartheta_3'' + \vartheta_4''}{2\rho''} s_2 - \dots \end{aligned} \quad (6.3.5).$$

Остановимся на специфических особенностях и различии обоих методов, нивелирования.

В методе астрономического нивелирования уклонения получаются из астрономических и геодезических измерений, т. е. по формуле

$$\vartheta = \xi_{\text{ар}} \cos A + \eta_{\text{ар}} \sin A, \quad (6.3.6).$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{\text{ар}}'' &= \varphi - B - 0,171'' H \sin 2B, \\ \eta_{\text{ар}}'' &= (\lambda - L) \cos B. \end{aligned}$$

A – азимут вертикальной плоскости, в которой расположен данный отрезок линии нивелирования.

Отсюда следует, что в каждой точке хода астрономического нивелирования должны быть известны астрономические и геодезические координаты. Иначе говоря, если ход астрономического нивелирования расположен по ряду триангуляции 1-го класса, то на каждом пункте, а в большинстве районов и между ними, на пунктах 2 и даже 3-го класса должны выполняться точные астрономические определения широт и долгот.

При астрономо-гравиметрическом нивелировании уклонения отвесных линий ϑ при вычислении интеграла $\int \vartheta ds$ определяются по методу, изложенному в § 18. Для этого необходимо иметь сравнительно редкую сеть совмещенных астрономических и геодезических пунктов, для которых величины $\xi_{\text{ар}}$, $\eta_{\text{ар}}$ и $\Theta_{\text{ар}}$ вычисляют по формулам (5.3.17) и (5.3.19). Тогда уклонения отвесных линий в точках, расположенных между астрономо-геодезическими пунктами, получаются путем интерполирования с привлечением результатов гравиметрической съемки. В этом случае уклонения отвеса между астрономо-геодезическими пунктами могут быть вычислены как угодно часто. Точнее говоря, уклонения отвесных линий в этом случае могут быть весьма точно проинтерполированы между редкими астрономо-геодезическими пунктами. Поэтому для астрономо-гравиметрического нивелирования интеграл $\int \vartheta ds$ может быть вычислен точно, без какого-либо предположения о характере изменений ϑ .

Из сказанного ясно вытекает преимущество астрономо-гравиметрического метода нивелирования по сравнению с астрономическим методом. Метод астрономо-гравиметрического нивелирования позволяет без существенных дополнительных затрат труда получать высоты квазигеоида с достаточной строгостью и точностью. Ошибки определения высот по этому методу могут быть (при соответствующей, реально выполнимой программе полевых измерений) доведены до весьма малых величин.

Идея астрономо-гравиметрического нивелирования была предложена Ф. Н. Красовским и разработана М. С. Молоденским, под руководством которого выполнены обширные теоретические исследования по обоснованию и анализу различных сторон этого метода.

7. РЕДУКЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ГЕОДЕЗИИ

7.1. Общие сведения

Под редукционной проблемой в высшей геодезии условимся понимать совокупность задач по переходу от непосредственно измеренных величин на поверхности Земли к соответствующим им величинам на поверхности относимости – обычно на поверхности принятого референц-эллипсоида.

В отдельных случаях может возникать и обратная задача: переход от известных величин на поверхности относимости на какую-либо другую поверхность и, в частности, на земную. По существу, если известны необходимые исходные данные, нет различий между прямой и обратной задачами.

Редуцирование непосредственных измерений на поверхность эллипсоида необходимо для того, чтобы иметь возможность выполнить совместную математическую обработку результатов измерений, пользуясь свойствами и геометрическими зависимостями, существующими между элементами поверхности эллипсоида. Эта математическая обработка включает: уравнивательные вычисления с целью получения вероятнейших значений уравниваемых величин, решение различного рода математических задач по определению необходимых для практики функций величин, измеряемых непосредственно. Примером таких задач могут служить: решение сферических и сфероидических треугольников, вычисление площадей, геодезических координат пунктов и т. п.

Условимся, что поверхность, на которую должны редуцироваться непосредственные измерения, известна, т. е. заранее определена; определено также и положение этой поверхности в теле Земли.

Математически не имеет значения, какая поверхность и, если говорить об эллипсоиде, какие его размеры приняты в качестве поверхности относимости; но практически важно, чтобы поверхность относимости имела наименьшие отступления от реальной Земли и была, по возможности, параллельна уровням поверхностям реальной Земли. Тогда вычисленные на поверхности относимости величины будут мало отличаться от их

значений на земной поверхности. При малости расхождений между обеими поверхностями будут меньше (по числовой величине) и редукции. Это весьма существенно, так как при малости редукций упрощаются выводы формул, облегчаются практические вычисления; исходные аргументы для вычисления редукций могут определяться менее точно.

Заметим попутно, что редуцирование непосредственно измеренных величин на поверхность эллипсоида является способом упрощения вычислений, позволяющим уменьшить число независимых аргументов с трех (B, L, H) до двух (B, L). Можно построить теорию вычислений геодезических сетей, выражая Положение каждой точки функцией трех координат (B, L и H) или прямоугольных пространственных координат (X, Y, Z). Тогда необходимость решения большинства редукционных задач отпала бы, но зато уравнительные вычисления и решение различных вычислительных геодезических задач существенно усложнились бы. Поэтому проще и удобнее проводить редуцирование измеренных величин на поверхность эллипсоида и выполнять последующую математическую обработку результатов измерений на этой поверхности, особенно при малых по сравнению с радиусом Земли величинах H – геодезических высот.

К решению редукционных задач, составляющих в совокупности редукционную проблему, предъявляются некоторые общие требования. Они вытекают из условия сохранения в редуцированных величинах той же точности, которая была достигнута в непосредственных измерениях. Следовательно, ошибки редукций и их влияние должны быть меньше в 5–10 раз ошибок самих измерений.

Для этого необходимо знать с достаточной точностью величины, характеризующие отступления реальной Земли от принятой поверхности относимости, т. е. аргументы для вычисления соответствующих редукций: высоты точек поверхности Земли, уклонения отвесных линий, аномалии силы тяжести. Эти величины должны определяться только по результатам измерений, но не на основе каких-либо гипотетических данных. Без этого соответствующие редукционные задачи не могут решаться точно. Выполнение этого условия представляло серьезную проблему. До исследований Молоденского мы не имели метода

строгого определения указанных величин. Существовавшие ранее методы либо были практически невыполнимы, либо основывались на привлечении данных о плотности и строении Земли, которые с необходимой достоверностью неизвестны и до настоящего времени. И сейчас по поводу определения тех или иных величин можно высказать пожелания о необходимости повышения точности, но это следствие не слабой разработки теории, а результат незавершенности или неполноценности выполненных на Земле измерений (например, незавершенности мировой гравиметрической съемки, несвязанности геодезических сетей разных континентов, малой плотности гравиметрической съемки в горных районах и т. п.).

Выше приведены основы теории и соответствующие формулы, определяющие исходные величины, необходимые для точного вычисления редукций. Поэтому будем считать исходные величины для редуцирования с необходимой точностью известными.

При получении формул для вычисления редукций необходимо обеспечивать их точность, которая должна соответствовать точности непосредственных измерений. При этом ошибки в значениях редукций, вызванные неточностью формул, должны быть практически пренебрегаемыми по сравнению с ошибками измерений. При этом важно учитывать и характер (систематический или случайный) влияния ошибок редукций на редуцированные элементы геодезической сети.

Если влияние редукций, пренебрегаемо малое для единичного редуцирования какой-либо величины, вносит систематические искажения в геодезическую сеть в целом, то решение об учете редукций данного вида должно быть сделано с учетом этого обстоятельства. Например, поправка в направление за высоту наблюдаемого пункта для отдельного направления обычно пренебрегаемо мала, но для геодезического ряда, у которого стороны имеют примерно одинаковый азимут, эта редукция будет иметь один знак. Поэтому пренебрежение этой редукцией будет равносильно действию систематической ошибки, влияние которой в целом может быть заметным. Поэтому указанная редукция в триангуляции 1-го класса почти всегда должна учитываться.

Существуют два метода редуцирования результатов непосредственных измерений на поверхность референц-эллипсоида – метод проектирования и метод развертывания.

По методу проектирования непосредственно измеренные величины математически редуцируются точно с поверхности Земли на поверхность эллипсоида. Редукции за переход от непосредственно измеренных величин к их проекциям вычисляются по формулам, выражающим указанные поправки в функции величин, определяющих взаимное положение земной поверхности и поверхности референц-эллипсоида, т. е. геодезических высот и уклонов отвесных линий.

Длины измеренных базисов проектируются на поверхность референц-эллипсоида нормальными к нему. В измеренные направления вводятся поправки за уклоны отвесных линий относительно нормалей к эллипсоиду. При вычислении поправки за высоту наблюдаемой точки принимают расстояние от объекта визирования до поверхности эллипсоида по нормали к нему и т. д.

По методу развертывания непосредственно измеренные величины редуцируются на поверхность геоида. В этом случае редукции вычисляют в функции величин, определяющих взаимное положение земной поверхности и геоида. Так, например, при редуцировании длин измеренных базисов вносят поправки за высоты, отсчитанные от уровня моря, т. е. от геоида, причем редуцирование производится по нормальным к последнему, т. е. при помощи направлений отвесных линий. В измеренные углы никаких поправок не вводится.

Редуцированные на поверхность геоида геодезические величины считаются как бы редуцированными на поверхность референц-эллипсоида; иначе говоря, при методе развертывания пренебрегают несовпадением геоида с референц-эллипсоидом. Исследования показывают, что отступления геоида даже от наилучшего выбранного референц-эллипсоида могут достигать 150 м. Отсюда легко сделать вывод, что пренебрегать несовпадением геоида и референц-эллипсоида нельзя.

Геометрически метод развертывания можно представить так: редуцированные на поверхность геоида величины как бы укладываются, развертываются на другой поверхности – поверхности эллипсоида, откуда и возникло название метода.

Сравнение обоих методов редуцирования позволяет сделать следующие общие выводы.

1. Метод проектирования – строгий метод перехода от измеренных геодезических величин к их проекциям на поверхность референц-эллипсоида, сохраняющий взаимное положение точек земной поверхности и создающий возможность строгой обработки сколь угодно обширной астрономогеодезической сети. Для применения этого метода необходимо предварительно установить размеры референц-эллипсоида и его ориентировки в теле Земли.

При этом не требуется использования наилучше установленного референц-эллипсоида. Принципиально метод обеспечивает возможность строгой математической обработки и при значительных отклонениях референц-эллипсоида от наиболее подходящего эллипсоида, но из практических соображений, указанных в начале настоящего параграфа, необходимо, чтобы референц-эллипсоид был лишь достаточно близок к наилучше подходящему эллипсоиду.

2. Метод развертывания – нестрогий метод; его применение вызывает искажения (систематического характера) элементов астрономо-геодезических сетей при их обработке, вызванные приближенностью результатов решения редуцированных задач. Величина этих искажений зависит от размера астрономо-геодезической сети и ошибочности принятых при вычислениях параметров референц-эллипсоида. Для достижения возможно точных результатов обработки материалов астрономо-геодезической сети при методе развертывания необходимо, чтобы референц-эллипсоид в пределах астрономо-геодезической сети был наилучше подходящим к геоиду. Однако и в этом случае искажения уменьшатся, но не исчезнут, так как останутся влияния отступлений геоида от этого эллипсоида. Таким образом, для вполне точной математической обработки обширных астрономо-геодезических сетей метод развертывания не пригоден.

Точное редуцирование измеренных величин на поверхность геоида требует знания плотностей Земли вне геоида; эти данные неизвестны, поэтому, строго говоря, точное редуцирование на геоид невозможно. Впрочем, ошибки, возникающие вследствие приближенности решения этой задачи, будут

несравненно меньше искажений, обусловленных нестрогостью метода развертывания.

Из изложенного следует, что для обработки астрономо-геодезических сетей следует применять метод проектирования, что и осуществляется в СССР в настоящее время.

7.2. Редукция базиса на поверхность референц-эллипсоида

Пусть на земной поверхности измерен базис между точками A и B (рис. 7.1) Наша задача – определить его проекцию на поверхность референц-эллипсоида нормальми к последнему в конечных точках базиса.

Если AA_X и BB_X – нормали к референц-эллипсоиду, то требуется найти длину кривой A_XB_X как дуги нормального сечения поверхности эллипсоида, имеющего азимут A .

Возьмем некоторый малый отрезок измеренного базиса dl (рис. 7.2), за который примем один пролет, равный длине инварной проволоки (24-метровой), и поставим себе целью найти его проекцию на референц-эллипсоид.

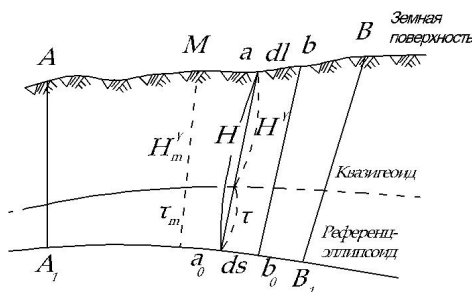


Рис. 7.1

Искомая редукция этого отрезка составит из трех слагаемых редукций:

а) за переход к проекции отрезка на уровенную поверхность горизонта инструмента (поправка за приведение к горизонту); б) за непараллельность уровенной поверхности горизонта инструмента и поверхности эллипсоида; в) за высоту базиса над референц-эллипсоидом.

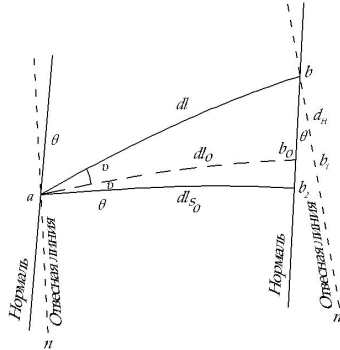


Рис. 7.2

На рис. 7.2:

dl – длина непосредственно измеренного отрезка ab , dl_0 – проекция отрезка dl на урovenную поверхность, проходящую через точку a , т. е. горизонт инструмента; отрезок dl_0 перпендикулярен направлениям отвесных линий mn и $m_x n_x$

ds_0 – проекция отрезка dl на кривую ab_2 , параллельную нормальному сечению поверхности эллипсоида в плоскости базиса; ν – угол наклона отрезка dl к горизонту точки a ; Θ – относительное уклонение отвесной линии в вертикальной плоскости базиса; dH – превышение одного конца пролета над другим, получаемое из нивелирования целиков.

Из рис. 7.4 непосредственно следует, что

$$dl_0 = dl \cos \nu \quad (7.2.1)$$

и

$$ds_0 = dl_0 - \Theta dH. \quad (7.2.2)$$

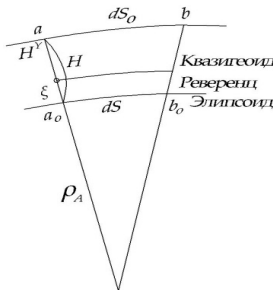


Рис. 7.3

Для получения проекции отрезка dl на поверхность референц-эллипсоида, т. е. ds , обратимся к рис. 7.3, из которого

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\rho_A}{\rho_A + H}, \quad (7.2.3)$$

где ρ_A – радиус кривизны нормального сечения a_0b_0 вычисляемый по формуле (6.8) и $H = H' + \zeta$

Составим производную пропорцию

$$\frac{ds_0 - ds}{ds_0} = \frac{H}{\rho_A + H}. \quad (7.2.4)$$

Далее

$$ds_0 - ds = \frac{H}{\rho_A + H} ds_0 = \frac{H}{\rho_A \left(1 + \frac{H}{\rho_A}\right)} ds_0 = \frac{H}{\rho_A} ds_0 - \frac{H^2}{\rho_A^2} ds_0. \quad (7.2.5)$$

Заменяя ds_0 в (7.2.5) через его выражение (7.2.2) и пренебрегая малыми величинами третьего элемента, получаем

$$dl_0 - \Theta dH - ds = \frac{H}{\rho_A} dl_0 - \frac{H^2}{\rho_A^2} dl_0, \quad (7.2.6)$$

откуда, принимая во внимание (7.2.1),

$$ds = dl \cos \nu - \frac{H}{\rho_A} dl_0 + \frac{H^2}{\rho_A^2} dl_0 - \Theta dH_{\text{изм}}, \quad (7.2.7)$$

$$s = \int ds \quad (7.2.8)$$

Учитывая требования, предъявляемые к профилю базиса, значения H можно заменить средним значением высоты базиса H_m .

Тогда (7.2.8) окончательно примет вид

$$s = l_0 + \frac{H_m}{\rho_A} l_0 + \frac{H_m^2}{\rho_A^2} l_0 - \int_{AB} \Theta dH. \quad (7.2.9)$$

Для расчета требуемой точности определения H из (7.2.9) напомним

$$\frac{\Delta s}{l_0} = \frac{\Delta H}{\rho_A}.$$

Для того чтобы относительная ошибка редукции базиса на поверхность референц-эллипсоида была меньше 1:2 000 000, необходимо, чтобы

$$\Delta H = \Delta H' + \Delta \zeta$$

было меньше трех метров.

7.3. Поправка в измеренные горизонтальные направления за высоту наблюдаемых пунктов

Эта поправка вытекает из геометрических соображений и обусловлена высотой точки визирования H над референц-эллипсоидом.

Пусть с пункта A (рис. 7.4) наблюдается предмет B , имеющий геодезическую высоту H_2 над поверхностью эллипсоида; пусть a и b – проекции точек A и B на поверхность эллипсоида. Если бы точка B находилась непосредственно на поверхности эллипсоида ($H_2 = 0$), т. е. в точке b , то азимут направления, который обозначим $A_{ист}$, был бы равен углу между плоскостью меридиана

Pan_a и плоскостью, проходящей через точки a, b, n_a . Однако благодаря тому, что наблюдаемый предмет B не находится на поверхности эллипсоида, а расположен на высоте H_2 , визирная плоскость при наведении на предмет B займет положение $ABb'n_a$. Измеренный азимут направления AB будет равен углу между плоскостью меридиана $AaPn_a$ и плоскостью $AaBb'n_a$. Обозначим его $A_{изм}$. Таким образом, малый угол bab' , равный $A_{ист} - A_{изм}$, будет выражать погрешность в направлении AB , обусловленную несовпадением визирных плоскостей, проходящих через действительный объект визирования – точку B и через проекцию этой точки на эллипсоид по нормали b .

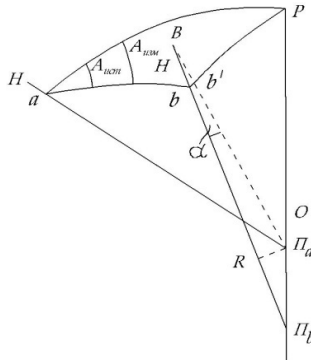


Рис. 7.4

Чтобы от измеренного на земной поверхности направления AB перейти к проекции этого направления ab на поверхности эллипсоида, необходимо ввести в измеренное направление поправку δ

$$\delta = A_{\text{ист}} - A_{\text{изм.}} \quad (7.3.1)$$

Из (15.1) напомним

$$n_a n_b = ae^2 (B_2 - B_1) \cos B_m. \quad (7.3.2)$$

Согласно (26.37), приближенно

$$B_2 - B_1 = \frac{s \cos A_{1.2}}{M_m}, \quad (7.3.3)$$

следовательно,

$$n_a n_b = ae^2 \frac{s}{M_m} \cos A_{1.2} \cos B_m, \quad (7.3.4)$$

где s – длина дуги ab .

Опустив из n_a перпендикуляр $n_a R$ на нормаль в точке B , будем иметь

$$R n_a - n_a n_b \cos B_2 \quad (7.3.5)$$

или

$$R n_a = ae^2 \frac{s}{M_m} - \cos A_{1.2} \cos^2 B_2, \quad (7.3.6)$$

где B_m заменили через B_2 ввиду малой величины искомой поправки.

Определим угол $n_b B n_a$, который обозначим через α ,

$$\alpha = \frac{ae^2 s \cos A_{1.2} \cos^2 B_2}{M_m BR} \quad (7.3.7)$$

или, полагая $BR \approx a$,

$$\alpha = e^2 \frac{s}{M_m} \cos A_{1.2} \cos^2 B_2. \quad (7.3.8)$$

Зная угол α и высоту H_2 , определяем дугу bb_1

$$bb_1 = H_2 e^2 \frac{s}{M_m} \cos A_{1.2} \cos^2 B_2. \quad (7.3.9)$$

Из треугольника $bb'a$, в котором угол при точке b равен $A_{1.2} - 180^\circ$. находим искомую поправку δ

$$\frac{\sin \delta}{\sin(A_{2.1} - 180^\circ)} = \frac{bb_1}{s}. \quad (7.3.10)$$

Отсюда

$$\delta'' = \frac{H}{M_m} e^2 \rho'' \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} \cos^2 B_2, \quad (7.3.11)$$

где положено, что

$$\sin(A_{2.1} - 180^\circ) = \sin A_{1.2}.$$

Окончательно имеем

$$\delta'' = H_2[1]_m \frac{e^2}{2} \sin 2A_{1,2} \cos^2 B_2. \quad (7.3.12)$$

Геодезическая высота H по-прежнему вычисляется по формуле $H = H'' + \xi$.

Если $B_2 = 45^\circ$, то

при $H_2 = 1000$ м

$$\delta \leq 0,05'',$$

при $H_2 = 200$ м

$$\delta \leq 0,008''.$$

Отсюда следует, что данной поправкой нельзя пренебрегать, особенно в всхолмленных и горных районах; она, как правило, должна учитываться при вычислении направлений в триангуляции 1-го и 2-го классов.

Из формулы (7.3.12) следует, что поправка за высоту наблюдаемой точки не зависит от расстояния s между пунктами A и B . Следовательно, эта поправка подлежит учету при развитии точной триангуляции независимо от расстояния между пунктами.

7.4. Редукция измеренных горизонтальных направлений при переходе к поверхности референц-эллипсоида

Формула для вычисления настоящей редукции получена при выводе уравнения Лапласа (см. § 19).

Она имеет вид

$$\Delta M = \frac{u \sin(A - \theta)}{tg^z} = \frac{\eta \cos A - \xi \sin A}{tg^z}. \quad (7.4.1)$$

Поясним геометрический смысл этой редукции.

Непосредственно измеренный угол на земной поверхности определяется двугранным углом, ребром которого является линия, совпадающая с вертикальной осью инструмента, т. е. отвесная линия. Угол в соответствующей точке на поверхности эллипсоида измеряется двугранным углом, гранями которого служат нормальные плоскости, а ребром – нормаль к поверхности эллипсоида. Угол между отвесной линией и нормалью, т. е. уклонение отвесной линии, вызывает необходимость введения в измеренные направления рассматриваемой редукции.

Эта редукция аналогична поправке за наклон J горизонтальной оси теодолита $x = \frac{l}{\operatorname{tg} z}$; очевидно, в этом случае J соответствует величине $(\eta \cos A - \xi \sin A)$.

Числовое значение редукции ΔM мало, оно выражается обычно в сотых долях секунды. Если положить уклонение отвесной линии $u = 10''$, $\sin(A - \Theta) = 1$ и $z = 89^\circ 30'$ ($\operatorname{tg} 89^\circ 30' = 120$), то $\Delta M = 0,08''$, т. е. на порядок меньше ошибки измерения направления ($0,6 - 0,7''$).

Следовательно, при небольших углах наклона и средних по величине уклонениях отвесной линии этой редукцией, казалось бы, можно пренебречь. Так следует поступать и при учете редукций в одиночные направления, например при вычислении азимута Лапласа на отдельных пунктах. Но в измеренные горизонтальные направления триангуляционных рядов 1-го класса (или полигонометрии 1-го класса) рассматриваемая редукция, как правило, должна вводиться, так как накопление влияния ее может носить систематический характер. В этом случае пренебрежение настоящей редукцией заметно скажется на точности вычисления элементов ряда (в первую очередь на величине ошибки в азимутах направлений сторон и поперечном сдвиге ряда). При этом неудачно установленные размеры эллипсоида и его ориентировка вызовут постоянную систематическую часть в уклонениях отвесных линий. Но даже если размеры эллипсоида и его ориентировка установлены достаточно правильно, приходится иметь в виду, что отступления эллипсоида от геоида (или квазигеоида), вызывающие уклонения отвеса, носят двоякий характер: отступления местные, случайные и отступления, охватывающие значительную площадь и характеризующие собой крупные волны квазигеоида относительно референц-эллипсоида. Эти крупные волны квазигеоида будут обуславливать в редукциях систематическую часть, пренебрегать которой нельзя.

Поэтому рассматриваемая редукция ΔM , вычисляемая по формуле (7.4.1), вводится в направления в триангуляции 1 класса.

В горных районах, где уклонения отвесной линии достигают нескольких десятков секунд, а зенитные расстояния могут иметь значительные отклонения от 90° , учет этой редукции

должен быть особо тщательным. В частности, в таких районах редукции рассматриваемого вида должны вводиться и в измеренные направления с пунктов триангуляции 2-го класса.

7.5. Редукции, вызываемые кривизной силовой линии

По ходу изложения вопросов, рассмотренных выше, влияние кривизны силовой линии на результаты непосредственных измерений, выполненных на поверхности Земли, уже показано.

Не повторяя доказательств, изложим для полноты картины основные выводы.

1. Силовая линия – кривая двойкой кривизны, однако изложенная выше теория решения основных задач высшей геодезии требует учета кривизны силовой линии в нормальном поле силы тяжести, т. е. как плоской кривой, расположенной в плоскости меридиана.

Практически пренебрегаемы:

а) разность длины силовой линии, как кривой от данной точки M до поверхности эллипсоида и геодезической высоты H ;

б) различие между напряжениями силы тяжести по касательной к силовой линии (отвесной линии) и направлению нормали к эллипсоиду;

в) различие между направлениями нормалей к поверхности эллипсоида, проведенных из точки с высотой H и из точки пересечения силовой линией поверхности эллипсоида.

Кривизну силовой линии практически необходимо учитывать при вычислении слагающей уклонения отвеса в меридиане из сравнения астрономической и геодезической широт путем введения поправки $-0,171''$, $H \sin 2B$.

Тогда

$$\xi = \varphi - B - 0,171'' H \sin 2B. \quad (7.5.1)$$

При решении задач высшей геодезии на основе теории Молденского возникает по существу одна редукционная задача по переносу нормального значения силы тяжести по нормали во внешнем пространстве относительно притягивающих масс – это редукция в свободном воздухе, вычисляемая просто по формуле (см. § 13)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} H = -0,308H \text{ мЛг.} \quad (7.5.2)$$

До появления работ Молоденского по изучению фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля редуccionная проблема гравиметрии была одной из труднейших, не получившей и до настоящего времени точного решения. При прежних взглядах на задачу изучения фигуры Земли как на изучение геоида возникала необходимость редуccionирования силы тяжести с поверхности Земли на геоид, т. е. через пространство, занятое притягивающими массами. Кроме того, при применении теории Стокса для определения фигуры геоида должно быть выполнено условие – отсутствие притягивающих масс вне поверхности геоида. Это требование ставило задачу так называемой регуляризации Земли, т.е. удаления внешних масс, но без нарушения физических параметров реальной Земли – ее массы, фигуры, центра тяжести и вообще внешнего реального гравитационного поля. Эта задача точно не решена и до сих пор, так как она требует знания плотностей всех внешних масс по отношению к геоиду. Попытки решения задачи по определению геоида без регуляризации Земли на основе только выполненных измерений также не привели к положительному результату, так как требовались дополнительные сведения о внутреннем гравитационном поле Земли.

Теория Молоденского полностью освобождает от необходимости решения редуccionной задачи в описанном плане; в этом, в частности, ее важное научное и практическое достоинство. Изложенная в общем виде прежняя постановка редуccionной проблемы гравиметрии для геодезии сейчас не представляет практического интереса. Понятие о ней приводится для сведения, как об одном из трудных рубежей в истории развития науки, который преодолен школой советских геодезистов.

7.6. Редуccionная задача при линейных измерениях свето- и радиогеодезическими приборами

Характерная особенность измерения расстояний свето- и радиогеодезическими приборами заключается в том, что расстояние между заданными точками измеряют непосредственно, а не путем измерения и суммирования отдельных отрезков измеряемой линии. Кроме того, расстояния между заданными точками

ми определяют безотносительно какой-либо уровенной поверхности. Иначе говоря, измеренные свето- и радиогодезическими приборами расстояния, или как еще их называют, «наклонные дальности» в процессе измерения не связаны с направлениями

отвесной линии (в отличие от измерений базисными приборами старого типа, когда длина каждого пролета приводится к соответствующей уровенной поверхности). Поэтому для редуцирования непосредственно измеренных свето- и радиодальномерами расстояний на поверхность референц-эллипсоида необходимы дополнительные данные. Пусть, например, измерено расстояние d между точками A и B (рис. 7.5).

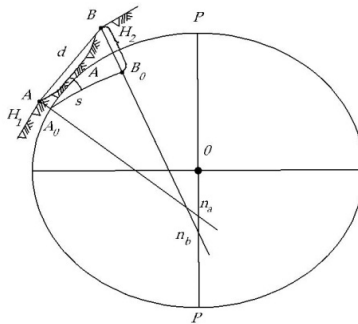


Рис. 7.5

Из простых геометрических соображений следует, что для перехода от измеренной наклонной дальности d к геодезической линии s между точками A_0 и B_0 – проекциями точек A и B на эллипсоид – необходимо дополнительно знать геодезические высоты этих точек H_1 и H_2 и, кроме того, приближенно широту одной точки и азимут A направления AB . Эти дополнительные данные должны быть получены заранее из других видов геодезических измерений. Таким образом, редуцированная задача сводится к вычислению разности $(d - s)$, определяемой из геометрической зависимости.

Как известно, в настоящее время свето- и радиогодезические приборы для измерения расстояний подразделяются по классу точности и дальности действия на два основных типа:

- а) светодальномеры и радиодальномеры,
- б) радиогодезические системы (РГС).

8. ГРАДУСНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

8.1. Общие сведения

Под градусными измерениями обычно понимают совокупность астрономических, геодезических и гравиметрических работ, предназначенных для определения фигуры Земли.

Задача градусных измерений заключается в определении:

1) параметров референц-эллипсоида как рабочей координатной поверхности, необходимой для решения многих задач геодезии и картографии;

2) вспомогательной поверхности – квазигеоида, весьма близкой к поверхности геоида на суше и совпадающей с ней на морях и океанах;

3) действительной фигуры Земли, т. е. ее физической поверхности;

4) параметров земного эллипсоида, наилучшим образом представляющего фигуру Земли в целом, – общего земного эллипсоида.

При рассмотрении вопросов, составляющих содержание предшествующих глав, считалось, что поверхность референц-эллипсоида определена, т. е. известна. Поэтому в первую очередь здесь рассмотрим решение первой задачи, т. е. вывод параметров референц-эллипсоида.

При оценке выводов параметров референц-эллипсоида обычно принимается во внимание степень близости его к эллипсоиду, наилучшему подходящему для всей Земли, т. е. к общему земному эллипсоиду. Это в свою очередь зависит от территории, на которой исполнены астрономо-геодезические и гравиметрические измерения, результаты которых были использованы при выводе параметров референц-эллипсоида. Чем больше территория, на которой произведены градусные измерения определенной густоты, тем больше эллипсоид, выведенный на основе этих измерений, приближается к общему земному эллипсоиду. Поэтому задача определения референц-эллипсоида непосредственно примыкает к задаче определения эллипсоида, наилучшим образом представляющего фигуру Земли в целом.

Изучение поверхности квазигеоида выполняется путем

определения аномалий высот ζ (или уклонений отвесных линий ξ и τ)) относительно референц-эллипсоида методом астрономо-гравиметрического нивелирования.

Изучение формы физической земной поверхности осуществляется путем определения нормальных высот H' относительно поверхности квазигеоида или геодезических высот H относительно референц-эллипсоида; для этого, помимо астрономо-гравиметрического нивелирования, необходимо выполнять геометрическое нивелирование.

Методы решения второй и третьей задач изложены в главах X и XI, поэтому будем считать их известными.

Вывод общего земного эллипсоида требует наличия градусных измерений всей поверхности Земли или значительной ее части. Ранее указывалось, что фигура геоида, помимо случайных, местных волн, имеет общие волны, охватывающие территории материков, влияющие на фигуру Земли в целом. Поэтому для решения этой задачи и необходимо градусными измерениями охватить поверхность всех материков. Эти градусные измерения в отдельных и даже крупных частях поверхности Земли должны охватывать возможно большую поверхность земного шара. Водные пространства не позволяют равномерно покрыть градусными измерениями всю поверхность земного шара, но на морях и океанах могут проводиться работы по измерению силы тяжести.

Исследования показывают, что градусные измерения, позволяющие надежно определить размеры большой полуоси, в соединении с гравиметрическими наблюдениями на суше и на море, надежно определяющими сжатие эллипсоида, дают возможность успешно решать задачу определения общего земного эллипсоида. В настоящее время градусными измерениями еще не охвачены все материки, а имеющиеся не связаны между собой; измерения силы тяжести на океанах исполнены не полностью, поэтому вывод общего земного эллипсоида пока еще дело будущего. Современная постановка задачи по выводу общего земного эллипсоида и метод ее решения изложены в § 87.

Установим, какими параметрами определяется референц-эллипсоид. Напомним его определение: референц-эллипсоидом называется эллипсоид с определенными размерами и опреде-

ленным образом ориентированный (расположенный) в теле Земли.

Размеры эллипсоида определяются двумя параметрами – полуосями a и b или большой полуосью a и сжатием α .

Ориентирование эллипсоида в теле Земли выполняется путем установления исходных геодезических дат, определяющихся значениями геодезических координат, принимаемых в исходном пункте триангуляции. Эти координаты B_0, L_0, A_0, H_0 , т. е. геодезические широта, долгота, азимут и высота в точке триангуляции, принимаемой за начальную. Они определяются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 - 0,171'' H_0 \sin 2B_0 \\ L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi \\ A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi \\ H_0 &= H' + \zeta_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1.1)$$

Таким образом, исходными величинами, позволяющими определить параметры референц-эллипсоида, являются

$$a, b, \varphi_0, \lambda_0, \alpha_0, H'_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0.$$

Значения $\varphi_0, \lambda_0, \alpha_0$ определяются непосредственно из астрономических наблюдений; методы этих наблюдений рассматриваются в геодезической астрономии, поэтому будем считать их известными. Нормальная высота H' определяется из результатов геометрического нивелирования; методы вычисления нормальных высот изложены в главе XI, § 72. Поэтому в этой главе рассмотрены методы определения величин a и b (или a и α), характеризующих размеры земного эллипсоида, и ξ_0, η_0, ζ_0 – слагающих уклонений отвесных линий и аномалии высоты в начальном пункте триангуляции, позволяющих по формулам (8.1.1) перейти к значениям исходных геодезических дат. Тем самым будут определены размеры и ориентировка референц-эллипсоида в теле Земли.

Перечисленные параметры определяют под условием возможной геометрической близости поверхности референц-эллипсоида к поверхности геоида (квазигеоида), так как референц-эллипсоид является вспомогательной или рабочей координатной поверхностью, заменяющей при обработке геодезических измере-

ний уровенную поверхность Земли; поэтому естественно потребовать возможной близости между этими поверхностями.

Математическое условие геометрической близости референц-эллипсоида к уровенной поверхности реальной Земли обычно выражают так:

$$\Sigma(\xi^2 + \eta^2) = \min \quad (8.1.2)$$

$$\Sigma \zeta^2 = \min \quad (8.1.3)$$

В выражении (8.1.2) суммирование распространяется на астрономические пункты, входящие в данную астрономо-геодезическую сеть; в выражении (8.1.3) – на всю территорию, для которой известны аномалии высоты. При указанном выборе параметров, независимо от их значений, и выполнении зависимостей (8.1.1) малая ось референц-эллипсоида и плоскость экватора будут всегда параллельны оси вращения Земли и плоскости земного экватора. В общем случае центр референц-эллипсоида не будет совпадать с центром тяжести Земли.

Принципиально возможны два метода определения параметров земного эллипсоида: геометрический, основанный на использовании астрономо-геодезических измерений, и физический, основанный на использовании гравиметрических измерений. Как и при выводе уклонений отвесных линий и высот, наилучшее решение дает совместное использование обоих методов.

При выводе размеров и ориентировки эллипсоида геометрическим методом, т. е. из астрономо-геодезических измерений, различают метод дуг и метод площадей.

Метод дуг основан на использовании измеренных длин дуг на земной поверхности и астрономических определений широт и долгот на концах этих дуг. Определение размеров и ориентировки земного эллипсоида из измерений дуг по меридианам и параллелям называют градусными измерениями по меридиану и градусными измерениями по параллели. Дуги могут быть связаны между собой и не иметь между собой связи. Из результатов определений по методу дуг определяют размеры эллипсоида и ориентировку эллипсоида, наилучше подходящего не к фигуре геоида на какой-либо площади, а наилучше подходящего к профилю геоида по использованным дугам градусных измерений.

Метод дуг был использован в § 50 для пояснения идеи вывода размеров эллипсоида из градусных измерений.

Метод площадей основан на использовании астрономогеодезической сети, по возможности равномерно покрывающей территорию, притом с некоторой определенной густотой. Густота пунктов астрономо-геодезической сети для применения метода площадей должна удовлетворять основному требованию – возможности вывода размеров и ориентировки эллипсоида, наилучше подходящего к поверхности геоида на принятой территории, и одновременно выявлению формы, «*рельефа*» геоида на этой территории. Согласно исследованиям проф. Красовского, астрономо-геодезическая сеть, отвечающая требованиям обработки ее по методу площадей, необязательно должна представлять собой сплошную сеть; по его исследованиям достаточно, если астрономо-геодезическая сеть будет состоять из связанных между собой рядов триангуляции по меридианам и параллелям, расположенным между смежными рядами одного направления, на расстоянии около 200–300 км, с определением астрономических пунктов по рядам примерно через 70 км (исключая горные районы).

Метод дуг применялся ранее, когда градусные измерения представляли собой разрозненные отдельные ряды триангуляции; примером такого ряда является знаменитая дуга Струве. В настоящее время астрономо-геодезические сети строятся с густотой, обеспечивающей применение метода площадей. В частности, вывод размеров эллипсоида Красовского был произведен по методу площадей.

Однако и в настоящее время целесообразно при выводе параметров референц-эллипсоида использовать при обработке астрономо-геодезической сети отдельные значительные дуги по меридианам и параллелям. Поясним эту мысль при помощи рис. 48. Пусть заштрихованный прямоугольник $ABCD$ схематически представляет собой территорию, на которой развита значительная астрономо-геодезическая сеть, пригодная для обработки по методу площадей. К этой большой сети примыкают по меридианным направлениям три дуги ab , cd и ef значительного протяжения. Несомненно, присоединение этих дуг к астрономо-геодезической сети $ABCD$ существенно расширит данные для

вывода размеров эллипсоида и при надлежащей обработке приблизит этот вывод к размерам общего земного эллипсоида.

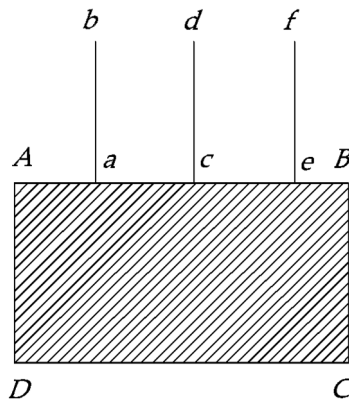


Рис. 8.1

Как метод дуг, так и метод площадей представляют собой по существу один метод – астрономо-геодезический, позволяющий определять параметры местного референц-эллипсоида, т. е. земного эллипсоида, наиболее подходящего к квазигеоиду для территории, на которой расположены выполненные астрономо-геодезические измерения.

Физический метод, т. е. метод, основанный на использовании одних гравиметрических измерений для определения всех параметров эллипсоида, не применяется; этот метод не позволяет с достаточной точностью определить линейный или масштабный параметр эллипсоида, например длину большой полуоси.

Определив независимо от геодезических измерений массу Земли, можно было бы получить из гравиметрических измерений и значение большой полуоси. Однако с необходимой точностью независимо от геодезических и гравиметрических данных масса Земли в настоящее время не определяется. Поэтому линейный параметр эллипсоида всегда выводится с использованием материалов геодезических измерений.

Второй параметр, определяющий форму земного эллипсоида, – сжатие может быть определен из одних гравиметрических

измерений, притом с большей достоверностью, чем астрономо-геодезическим методом. При этом весьма важным обстоятельством является возможность получения и, следовательно, использования гравиметрических данных для всей поверхности Земли, т.е. и на суше, и на океанах. Этот метод определения сжатия непосредственно вытекает из второй формулы Клеро (см. § 10).

С большой точностью определяется сжатие также из наблюдений искусственных спутников Земли. Сведения об этом методе приведены в гл. XVII.

Существуют решения задачи по определению всех параметров земного эллипсоида, основанные на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических данных.

Приведем основные характеристики программы градусных измерений, осуществляемой в СССР.

Градусными измерениями в СССР являются ряды триангуляции 1 класса, прокладываемые по меридианам и параллелям на расстоянии около 200 км и образующие полигоны периметром 800–1000 км. Длины базисных сторон определяют в местах пересечения рядов, т. е. через 200 км; астрономические определения (широты, долготы и азимуты) – на двух пунктах каждой базисной стороны. Через каждые 60–100 км в промежутках между базисными сторонами на пунктах триангуляции определяют широты и долготы. Гравиметрические пункты определяют в порядке производства общей гравиметрической съемки со средней густотой один пункт на 1000 км², обеспечивающей выполнение астрономо-гравиметрического нивелирования по всем рядам астрономо-геодезической сети СССР. Кроме того, вдоль отдельных рядов триангуляции 1 класса производят дополнительное сгущение гравиметрической съемки. Одновременно в геодезических целях используют результаты специальных гравиметрических измерений, выполняемых, например, при разведке полезных ископаемых.

Ряды, по которым с большей точностью производят астрономо-гравиметрическое нивелирование, называются *главными дугами градусных измерений СССР* или основными линиями астрономо-гравиметрического нивелирования.

На всех пунктах астрономо-геодезических сетей определя-

ют нормальные высоты. Программная точность измерений астрономо-геодезической сети СССР 1-го класса характеризуется показателями, приведенными на с. 7.

Постановка работ по градусным измерениям в СССР имеет ряд важных достоинств: они охватывают громадную территорию, проведены в весьма короткий срок, что обеспечило однообразие выполнения программных требований и их, высокую точность; в состав градусных измерений на территории СССР входят работы по астрономо-гравиметрическому нивелированию.

Совместная постановка астрономо-геодезических и гравиметрических работ является весьма существенной особенностью градусных измерений в СССР, которая при высоком уровне технического исполнения позволяет отнести последние к наиболее современным. Эта программа градусных измерений впервые стала осуществляться в СССР.

Отметим, что с конца сороковых годов началось развитие триангуляции 2-го класса внутри полигонов 1-го класса с точностью, близкой к триангуляции 1-го класса.

Градусные измерения не являются отдельной частью основных астрономо-геодезических и гравиметрических работ, выполняемых в стране. Они представляют органическую часть и следствие исполнения первоклассных триангуляционных работ для создания опорной геодезической сети в государстве, необходимой для картографирования его территории и для других практических нужд. Запросы практики и науки не вступают в противоречие, а, наоборот, взаимно дополняют друг друга, обеспечивая в комплексе наилучшее разрешение обеих задач.

8.2. Градусные измерения по меридиану и параллели, метод дуг

Идея определения размеров и сжатия земного эллипсоида из градусных измерений по меридиану и параллели освещена в § 2. Хотя метод дуг в настоящее время применяется мало, он имеет методическое значение и в наиболее простом виде иллюстрирует решение задачи по выводу параметров земного эллипсоида на основании астрономо-геодезических измерений.

Пусть имеем ряд триангуляции 1-го класса, на концах которого исполнены астрономические определения широт, долгот и азимутов (рис. 8.2), проложенный между точками A и B приблизительно по направлению меридиана.

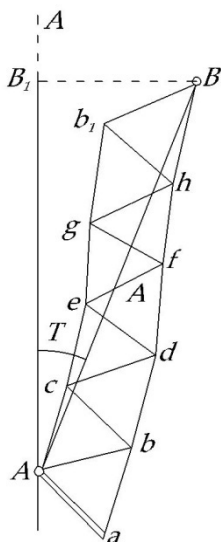


Рис. 8.2

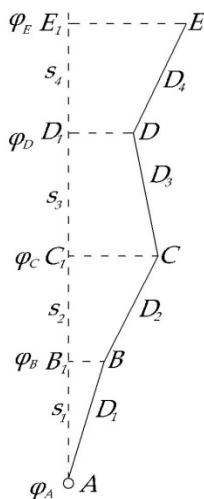


Рис. 8.3

Для дальнейшего составления уравнений градусных измерений по меридиану необходимо определить длину и азимут геодезической линии, соединяющей конечные точки звена, и затем получить проекцию этой линии на меридиан, проходящий через одну из ее конечных точек, например через точку A , т. е. получить длину дуги меридиана между параллелями, имеющими широты

Для указанной цели произведем следующие предварительные вычисления:

1. Уравнивание ряда за условия фигур, базисов и, если возможно, азимутов и окончательное решение треугольников.
2. Вычисление длины D и азимута T геодезической линии, соединяющей конечные точки ряда A и B .

Вывод длины и азимута геодезической линии может производиться путем последовательного вычисления полярных координат точек $b, c, d, \dots, B$ с началом координат в точке A . Полярными координатами будут азимуты и длины линий $Ab, Ac, Ad, \dots, AB$. Очевидно, полярные координаты точки B и будут искомыми значениями $D = AB$ и $T = \angle PAB$.

Длину и азимут геодезической линии дуги можно получить также из решения обратной геодезической задачи по дуге AB после вычисления координат пунктов ряда.

3. Проектирование на меридиан AP дуги D при помощи параллели точки B или вычисление расстояния $AB_1 = s$ между параллелями точек A и B . Будем иметь

$$s = D \cos T_m + \Delta s,$$

где Δs – поправочный член,

$$T_m = \frac{T_{AB} + T_{BA} \pm 180^\circ}{2}. \quad (8.2.1)$$

Обычно дуга, по которой производится градусное измерение, состоит из нескольких частных дуг AB, BC, CD и т. д. (рис. 8.3). Тогда соответственно получаем длины дуг меридианов s_1, s_2, s_3, s_4 и т. д., которые в дальнейшем будем рассматривать как непосредственно измеренные.

8.3. Исходные геодезические даты и фундаментальные постоянные Земли

Исследования проф. Ф. Н. Красовского, основанные на анализе и обработке материалов триангуляций, исполненных к 1930 г., показали, что эллипсоид Бесселя заметно отстает от размеров эллипсоида, наилучшим образом подходящего для территории СССР. Профессор Ф. Н. Красовский пришел к выводу, что большая полуось эллипсоида Бесселя преуменьшена; это полностью подтвердилось последующими исследованиями, когда было установлено, что большая полуось по Бесселю ошибочна на величину 850 м.

Исходя из большого научного значения исследований по установлению размеров и формы Земли, проф. Ф. Н. Красовский в начале тридцатых годов приступил к работе по выводу размеров эллипсоида на основании имеющихся материалов градусных измерений. Сначала эта работа выполнялась лично Ф. Н. Красовским, затем под его руководством продолжалась научными работниками ЦНИИГАиК. Непосредственное участие в этой большой работе принимал проф. А. А. Изотов. Исследования, продолжавшиеся почти 10 лет, позволили в 1940 г. рекомендовать для вычислений триангуляции новые размеры эллипсоида, вполне подходящие для территории СССР. После обсуждения результатов работы в научных и производственных кругах эти размеры эллипсоида были утверждены Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г., а эллипсоиду было присвоено имя Красовского. Размеры этого эллипсоида следующие:

большая полуось $a = 6\,378\,245$ м,

полярное сжатие $a - 1:298,3$.

При получении указанных размеров земного эллипсоида были использованы градусные измерения СССР, Западной Европы и США. Материалы градусных измерений СССР, протяженность дуг которых составляла к тому времени около 40 000 км, были впервые использованы для вывода размеров эллипсоида. Таким образом, для вывода новых значений размеров земного эллипсоида были использованы более обширные материалы, чем для всех других выводов. Это уже дает основание утверждать, что размеры эллипсоида Красовского в то время были наиболее приближающимися к размерам общего земного эллипсоида. При составлении уравнений градусных измерений применен «метод площадей»; при этом использованы результаты гравиметрической съемки для исключения местных волн геоида – для предварительного его «выравнивания». Такое привлечение гравиметрических данных для обработки градусных измерений было осуществлено впервые; оно оказалось возможным благодаря применению разработанного в СССР метода астрономо-гравиметрического нивелирования и наличию общей гравиметрической съемки. Лишь для незначительной части астрономо-геодезической сети СССР, использованной для вывода размеров эллипсоида, вместо гравиметрических поправок вво-

дились топографо-изостатические редукции. К использованию теории изостазии пришлось прибегнуть в отдельных районах, где гравиметрическая съемка еще не была закончена.

При вычислении размеров эллипсоида Красовского были применены различные варианты обработки имеющихся материалов градусных измерений; указанные выше значения размеров эллипсоида Красовского получены из варианта, признанного наилучшим. Анализ результатов вычислений размеров эллипсоида из различных вариантов решения задачи позволил сделать ряд выводов и заключений, имеющих большую научную ценность в деле изучения общей фигуры Земли. Проведенные исследования дают основания считать, что размеры эллипсоида Красовского определены с ошибками в большой полуоси около ± 60 м и в полярном сжатии не более одной единицы в знаменателе.

Указанную точность вывода размеров земного эллипсоида следует считать высокой, отвечающей научным и практическим требованиям.

Надлежащее установление исходных геодезических дат для астрономо-геодезической сети СССР (вследствие чрезвычайно большой протяженности территории СССР) имеет также большое практическое значение. Порядок работ, выполненных в 1942–1943 гг. по установлению исходных геодезических дат, в общих чертах заключался в следующем.

Из обработки материалов градусных измерений в СССР были установлены широта B_0 , долгота L_0 и азимут A_0 для исходного пункта, за который принят центр круглого зала Пулковской обсерватории. Для решения этой задачи (в отличие от задачи вывода размеров референц-эллипсоида) были использованы только материалы триангуляции СССР. Для вывода исходных геодезических дат необходимо, чтобы исходный пункт имел непосредственную надежную связь с используемыми градусными измерениями. Так как триангуляции Западной Европы и США такой связи с триангуляцией СССР не имели, то градусные измерения этих стран и не могли быть использованы при решении настоящей задачи.

Кроме того, для контроля и независимого получения иным путем исходных геодезических дат был применен астрономо-гравиметрический метод, для чего в центральных районах стра-

ны, на специально выбранном пункте были выполнены с высокой точностью астрономические определения. Для обеспечения надежного вывода уклонений отвесных линий по гравиметрическим данным вокруг этого пункта выполнена гравиметрическая съемка сгущения.

Астрономические координаты пункта и азимут направления исправлены поправками, вычисленными по гравиметрическим данным. Полученные таким путем геодезические координаты сопоставлены с геодезическими координатами, переданными из Пулково; их сходимость получилась в пределах ошибок определений.

Указанный метод вывода исходных геодезических дат осуществлен впервые в Советском Союзе.

Таким образом, вывод параметров референц-эллипсоида Красовского был основан на применении методов, описанных в § 82–84. Методы, изложенные в последующих параграфах, были разработаны позднее; они не могли быть применены также и вследствие отсутствия в тридцатых годах необходимых данных, в первую очередь достаточных материалов гравиметрических съемок. Следовательно, характерными чертами вывода размеров эллипсоида Красовского являются:

1) раздельный вывод размеров эллипсоида и исходных геодезических дат;

2) применение астрономо-геодезического *«метода площадей»*;

3) установление размеров эллипсоида из несвязанных значительных астрономо-геодезических сетей и вывод исходных геодезических дат из триангуляции СССР – из всех астропунктов;

4) использование имеющихся гравиметрических материалов для исправления астрономических координат за местные уклонения отвеса, а при отсутствии этих материалов для этой цели – гипотезы изостазии.

Последние выводы параметров земного эллипсоида, основанные на использовании новейших материалов и методов, дают результаты, близкие к значениям параметров референц-эллипсоида Красовского. Это позволяет сделать важное заключение, что параметры эллипсоида Красовского установлены удачно, близки к параметрам общего земного эллипсоида и от-

вечают требованиям, предъявляемым к референц-эллипсоиду, как основной координатной поверхности.

Некоторые постоянные Земли, установленные в настоящее время, имеют значения (размеры эллипсоида Красовского, см. § 2):

- а) масса – 6×10^{27} г;
- б) средняя плотность – $5,52 \text{ г/см}^3$;
- в) момент инерции – $0,331 M \times a^2$;
- г) объем – $1\,083\,320$ млн. км^3 ;
- д) длина экватора – $40\,076$ км;
- е) длина меридиана – $40\,008$ км;
- к) поверхность Земли – 510 млн. км^2 ;
- л) поверхность Мирового океана – 361 млн. км^2 ;
- и) поверхность суши – 149 млн. км^2 ;
- к) ускорение силы тяжести на экваторе – $978\,500$ мгал.

Известный интерес в плане настоящего учебника могут представлять и

следующие характеристики Земли как планеты:

- среднее расстояние от Земли до Солнца – $149\,509\,000$ км;
- длина земной орбиты – $939\,120\,000$ км;
- средняя скорость движения Земли по орбите – $29,70$ км/с;
- скорость движения точки экватора вследствие суточного вращения Земли – 465 м/с;
- среднее расстояние от Земли до Луны – $384\,395$ км.

9. РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

9.1. Общие сведения

С момента запуска (4 октября 1957 г.) в СССР первого искусственного спутника Земли началось активное освоение человеком космического пространства. Последующее бурное развитие ракетной техники и космонавтики поставило перед геодезией достаточно сложные и своеобразные задачи. Так, например, возникла чисто практическая необходимость в развитии единой системы координат на всю Землю, повысились требования к точности совмещения начала и направления осей государственной геодезической системы координат с центром масс Земли и ее осями инерции. Движение ракет и ИСЗ происходит в поле тяготения Земли и, следовательно, изучение характеристик этого поля становится особенно важным. Большие скорости движения ракет и ИСЗ привели к необходимости создания новых средств измерений и методов их обработки. С другой стороны, сами спутники открыли большие возможности для решения чисто геодезических задач. В итоге возникло новое направление геодезии – *космическая геодезия*.

Космическая геодезия изучает взаимное расположение точек земной поверхности и космических аппаратов, движущихся в гравитационном поле Земли, а также характеристики этого поля с помощью космических средств. Решение задач космической геодезии основывается на определении координат космических аппаратов, по результатам измерения (в основном) направлений, расстояний и относительных скоростей. Измерение направлений производится фотографическими и радиотехническими средствами. Расстояния и относительные скорости измеряются радиотехническими средствами и лазерами.

Проводя фотографирование ИСЗ на фоне звездного неба и фиксируя время наблюдения, определяют известными астрономическими методами прямое восхождение α и склонение δ ИСЗ. Некоторое отличие от обычных в астрономии способов возникает в связи с различием угловой скорости движения ИСЗ и звезд. В итоге при фотографических способах измеряются углы между

направлениями на звезду и на спутник. Роль углового эталона играет звездное небо, так как угловые расстояния между звездами известны. Такой способ измерения углов не связан с отвесной линией, и в этом его большое преимущество.

Из радиотехнических методов наибольшее применение получили методы измерения радиальных скоростей $\bar{r}$ и дальностей r . Измерение радиальных скоростей основано на эффекте Допплера. Передатчик, установленный на спутнике, излучает определенную эталонную частоту f_0 . Принимаемая на наземной станции частота f на основании эффекта Допплера испытывает сдвиг частоты Δf , зависящий от относительной скорости r спутника и наземной станции наблюдения. Если c – скорость света, а r – расстояние до спутника, то сдвиг частоты, вызванный эффектом Допплера, составляет

$$\Delta f = f - f_0 = \frac{f_0}{c} \cdot r \quad (9.1.1)$$

где f – наблюдаемая частота и r – производная от дальности по времени.

В непосредственно измеренные величины необходимо вводить различные поправки (за рефракцию, аберрацию, сдвиг частоты и т. п.). Точность наблюдений зависит от применяющихся измерительных средств и от правильности введения в результаты измерений этих поправок. Принципиально точность наблюдений может быть доведена до дециметров в дальности и 1" в углах.

Определяя координаты спутников Земли со станций, координаты которых известны, и со станций, координаты которых не известны, можно определить координаты последних. И так как движение ИСЗ происходит в гравитационном поле Земли, то изучение в координатной форме этого движения дает информацию о гравитационном поле Земли.

Математическое решение геодезических задач из наблюдений искусственных спутников достаточно сложно. Здесь первоначально дадим лишь общие понятия об этом методе, а более подробное – в последующих параграфах.

Если бы Земля была шаром, то действие силы ее притяжения на материальные тела было бы равно, согласно выводам § 56, действию силы притяжения материальной точки, имеющей мас-

су Земли и расположенной в ее центре. Это предположение означает, что мы пренебрегаем вторым и третьим членами формулы для потенциала V в виде ряда (3.3.25), которые выражают влияние сжатия Земли и неравномерности распределения масс по долготе, т. е. полагаем, что

$$V = f \frac{M}{R}. \quad (9.1.2)$$

В этом случае движение спутника, после вывода его на орбиту, должно было бы совершаться по закону Кеплера, т. е. по плоской кривой – эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр Земли. Однако вследствие эллипсоидальности Земли орбита спутника претерпевает возмущения – отклоняется от плоской кривой; если использовать понятие «мгновенной орбиты», то можно сказать, что спутник движется по плоской орбите, но сама плоскость орбиты непрерывно вращается и параметры ее изменяются. Эти отклонения – возмущения поддаются аналитическому выражению на основе закона всемирного тяготения, если учесть второй, третий и последующие члены разложения потенциала в ряд (54.25). Этим самым определяется математическая зависимость между сжатием и эллиптичностью земного экватора, с одной стороны, и характеристиками действительной орбиты спутника, с другой. Определяя эти характеристики из непосредственных наблюдений и используя указанные зависимости, получаем возможность вычислить сжатие Земли и эллиптичность ее экватора.

Для определения сжатия Земли из непосредственных наблюдений движения спутника необходимо иметь: скорость вращения орбиты, полуось орбиты и наклон ее к плоскости экватора. По этим данным, а также по значениям большой полуоси земного эллипсоида, силе тяжести на экваторе (определяемым из геодезических и гравиметрических измерений) и вычисляется сжатие Земли.

Выведенное из наблюдений искусственных спутников сжатие характеризует эллипсоидность Земли в целом, т. е. должно рассматриваться как сжатие общего земного эллипсоида, а не сжатие, наилучшее подходящее к какой-либо части поверхности

Земли, определяемое из градусных измерений и из гравиметрических наблюдений (при незавершенности мировой гравиметрической съемки).

Оказывается, что вывод сжатия Земли из наблюдений искусственных спутников совершается с весьма большой точностью; это – следствие того, что сжатие Земли вызывает весьма значительное влияние на орбиту спутника. Можно указать, что влияние сжатия Земли на скорость вращения мгновенной орбиты спутника в 10 000 раз больше воздействия притяжения Луны и Солнца. Поэтому влияние сжатия на орбиту спутника определяется из наблюдений уверенно и достаточно точно, а вычисляемое из этих наблюдений значение сжатия Земли по точности должно быть поставлено на первое место. Вычисления сжатия из наблюдений спутников Земли определили его значение, равное $\frac{1}{298,26}$.

При помощи искусственных спутников может осуществляться геодезическая связь между точками, расположенными на больших расстояниях, например, между геодезическими пунктами разных материков.

9.2. Методы космической геодезии

Основными задачами космической геодезии являются:

- определение фундаментальных постоянных, характеризующих форму, размеры и суточное вращение Земли, Луны и планет и их изменение во времени;
- создание геоцентрических и планетоцентрических систем координат путем построения специальных сетей опорных точек;
- изучение внешнего гравитационного поля планет;
- решение прикладных задач, связанных с координатно-временной привязкой космических съемок Земли и планет, выполняемых для различных целей.

Задачи космической геодезии совпадают с задачами физической геодезии в целом. Преимущество космической геодезии заключается в решении традиционных задач в сжатые сроки с большой точностью.

Данные, полученные при решении задач методами космической геодезии, имеют большое значение для геофизики и геодинамики, поскольку позволяют получить сведения об эволюции фигуры Земли, ее гравитационного поля во времени. Эти данные способствуют установлению закономерностей движения материков, протекания тектонических процессов.

Задачи космической геодезии решаются двумя методами. Первый метод называется геометрическим и основан он на синхронном фотографировании ИСЗ на фоне звездного неба минимум с двух пунктов на поверхности Земли. Это позволяет определить направление вектора, соединяющего эти пункты. Сеть таких векторов образуют космическую триангуляцию. Длина вектора определяется измерением расстояния от фотографической камеры до ИСЗ с помощью дальномера. Космическая триангуляция со сторонами до 2000 км позволяет связать материки и острова в единую геодезическую сеть на поверхности Земли.

Достоинством геометрического метода является возможность исключения при решении задач КГ теории движения ИСЗ, которая требует учета таких трудноучитываемых факторов, как возмущение орбит, вызванные различными факторами. Недостатком метода является то, что определяется относительное положение новых пунктов, в системе исходных координат. Отсутствует привязка КГ к центру масс Земли.

Динамический метод решения задач КГ основан на изучении эволюции движения ИСЗ во времени. Математическая модель движения ИСЗ имеет вид системы трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. В этих уравнениях содержатся члены, учитывающие влияние всех сил, воздействующих на ИСЗ полете: силы тяжести, сопротивление атмосферы, притяжения Луной, Солнцем, планетами, солнечное излучение и ряд других. На точность динамического метода влияет точность учета возмущающих ускорений, вызванных этими силами. При динамическом методе производится совместное определение координат наземных пунктов, элементов орбиты ИСЗ, уточнение параметров моделей возмущающих сил. Уточнение последних производится методом последовательных приближений.

Динамический метод позволяет получать координаты пунктов в единой для всей планеты системе координат с началом в центре

масс Земли, с определением внешнего гравитационного поля Земли в этой же системе координат. Этот фактор является главным преимуществом динамического метода. Недостатком метода является сложность расчетов, необходимость создания моделей движения ИСЗ, измерений и сил, действующих на ИСЗ в процессе полета по орбите. Проблемы решаются по мере развития компьютерных технологий. В связи с резким развитием последних особое значение в настоящее время приобретает орбитальный метод, являющийся частным случаем динамического.

В орбитальном методе на основании измерений, выполненных на наземных пунктах или непосредственно со спутника, совместно определяются координаты пунктов и элементы орбит. Поскольку последние в настоящее время определяются с большой точностью, неизвестными являются координаты пунктов, которые и определяются путем обратных пространственных засечек. Решение этой задачи называется упрощенным орбитальным методом и применяется для решения навигационных задач. Именно этот метод положен в основу создания спутниковых радионавигационных сетей (глобальных систем позиционирования) GPS и ГЛОНАСС. Использование этих систем внесли революционные изменения в решение задач геодезии, связанных с определением координат пунктов на поверхности Земли.

Под геометрическими методами спутниковой геодезии понимаются методы решения задач по определению координат пунктов земной поверхности на основе соотношений аналитической геометрии и использования спутников в качестве визирной цели. При использовании геометрического метода для целей построения пространственных геодезических сетей не требуется знания законов движения ИСЗ. Связь положения ИСЗ с наземным пунктом показана на рис. 9.1, из которого следует выражение

$$R_i = r - \rho_i, \quad (9.2.1)$$

где R_i – радиус-вектор наземного пункта наблюдения ИСЗ; r – радиус-вектор ИСЗ; ρ_i – топоцентрический вектор ИСЗ; ΔR хордовый вектор, соединяющий два наземных пункта.

Выражение (9.2.1) называют *основным уравнением КГ*.

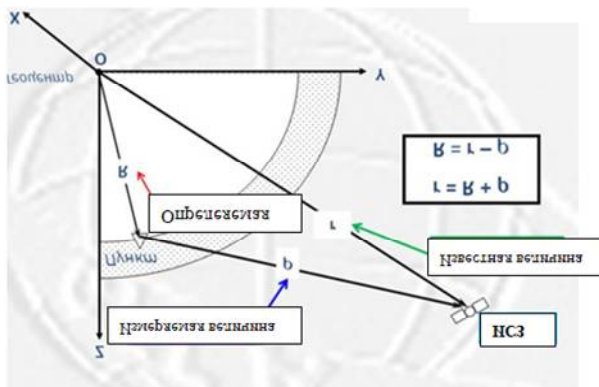


Рис. 9.1. Принцип построения спутниковых геодезических сетей

Из уравнения следует, что если известны векторы g и p , то можно определить вектор R , т. е. положение наземного пункта.

При *динамическом методе* определения координат наземных пунктов подразумевается, что наблюдения ИСЗ произведены синхронно или только с одного пункта. В этом случае для решения основного уравнения КГ необходимо иметь значение радиус-вектора спутника r , который определяется с использованием теории движения ИСЗ.

Орбитальный метод построения космических сетей триангуляции является частным случаем динамического метода. Суть его заключается в том, что модели гравитационного поля Земли и других действующих на ИСЗ сил известны или заданы и выступают как исходные данные. В этом случае дело сводится к определению элементов орбиты и координат наземных пунктов.

Объясним идею двух методов геодезической связи материков из наблюдений искусственных спутников.

Первый метод, называемый *синхронным*, основан на использовании одновременных наблюдений искусственного спутника с конечных точек базисов, расположенных на разных материках

Второй метод, называемый *орбитальным*, заключается в следующем.

Из одновременных наблюдений с нескольких пунктов триангуляции на каждом материке определяются пространственные координаты положения спутника в какой-либо точно фиксируе-

мый определенный момент времени. Если известны параметры орбиты, то указанными наблюдениями устанавливается определяемая геодезическая связь между пунктами триангуляции, расположенными на разных материках

Существуют и иные методы использования искусственных спутников для геодезических связей материков. При соответствующих параметрах спутников и программе наблюдений их с Земли специальной аппаратурой могут определяться и координаты точек земной поверхности.

9.3. Методы построения спутниковой триангуляции

Спутниковой триангуляцией называется пространственная геодезическая сеть, элементы которой получены по измеренным синхронно с разных наземных станций сферическим координатам направлений на ИСЗ. Особенностью спутниковой триангуляции является отсутствие связи между исходным и определяемыми пунктами. Связь между ними происходит через некоторое фиксированное положение ИСЗ на орбите. Для определения какого-либо пункта необходимо установление нескольких таких связей. По этому принципу различают способы построения спутниковой триангуляции с синхронизацией на двух, трех и более пунктах.

Способ засечек (рис. 9.2). Суть способа заключается в том, что по наблюдениям с исходных пунктов А, В определяются методом прямых пространственных засечек координаты ИСЗ. Далее положения ИСЗ S_1 и S_2 рассматриваются как исходные пункты и используются для определения положения пункта Р обратной засечкой.

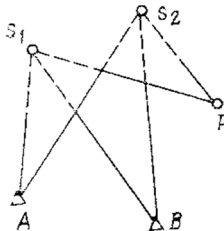


Рис. 9.2. Способ засечек

Способ хорд (рис. 9.3). Наблюдения двух положений ИСЗ синхронно производятся с двух пунктов, исходного и определяемого. Причем минимальное количество исходных пунктов должно быть две. Направления As_1 и Ps_2 , измеренные синхронно, фиксируют в пространстве плоскость Q_1 , называемую *плоскостью синхронизации*. Направление на положение спутника S_2 измеренные с пунктов A и P позволяют получить плоскость Q_2 . Пересечение двух плоскостей определяют хорду AP , лежащую в теле Земли и соединяющую исходный пункт A с определяемым пунктом P . аналогичные наблюдения с пунктов B и P дают хорду BP . Таким образом положение пункта P определяется засечкой из пунктов A и B хордами AP и BP .

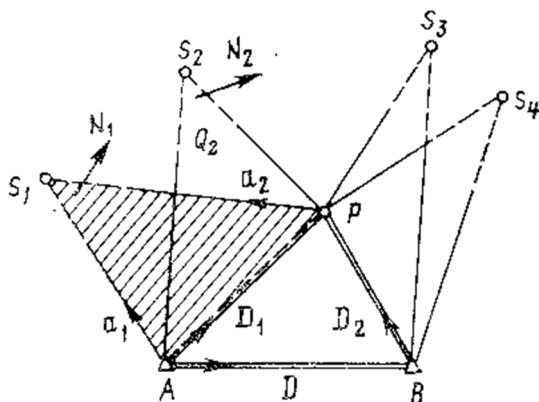


Рис. 9.3. Способ хорд

Способ плоскостей (рис. 9.4). В данном способе с исходного A и определяемого P пунктов наблюдается одно положение спутника S_1 . По этим наблюдениям составляется уравнение плоскости. Наблюдения на двух других исходных пунктах B, C , выполненные синхронно с измерениями на определяемом пункте P , дают возможность составления еще двух уравнений плоскостей. Положение пункта в пространстве определяется как точка пересечения трех плоскостей.

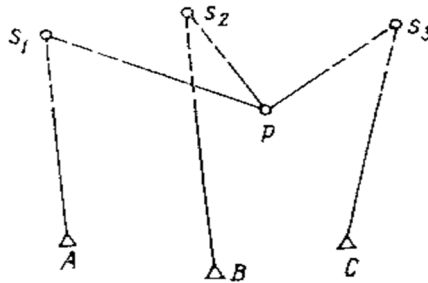


Рис. 9.4. Способ плоскостей

Величины, измеряемые на пунктах по наблюдениям ИСЗ:

- топоцентрические склонения δ_{KS} ИСЗ;
- топоцентрические прямые восхождения ИСЗ α_{KS} в звездной или общеземной системе координат $\gamma_{KS} = \alpha_{KS} - S$, где S звездное время (Гринвичское), K – наземный пункт;
- топоцентрические расстояния ρ_{KS} ;
- разности расстояний от пункта K до двух положений ИСЗ (S_1, S_2) или от спутника S до двух наземных пунктов K_1, K_2 ;
- радиальные составляющие скорости ИСЗ (проекции модуля вектора скорости на направление KS);
- высота ИСЗ над уровнем моря H_s .

Объясним идею двух методов геодезической связи материков из наблюдений искусственных спутников.

Первый метод, называемый *синхронным*, основан на использовании одновременных наблюдений искусственного спутника с конечных точек базисов, расположенных на разных материках

Второй метод, называемый *орбитальным*, заключается в следующем.

Из одновременных наблюдений с нескольких пунктов триангуляции на каждом материке определяются пространственные координаты положения спутника в какой-либо точно фиксируемый определенный момент времени. Если известны параметры орбиты, то указанными наблюдениями устанавливается определяемая геодезическая связь между пунктами триангуляции, расположенными на разных материках

Существуют и иные методы использования искусственных спутников для геодезических связей материков. При соответствующих параметрах спутников и программе наблюдений их с Земли специальной аппаратурой могут определяться и координаты точек земной поверхности.

9.4. Спутниковое нивелирование

Принципы спутникового нивелирования. Посредством радиовысотомера или лазерного дальномера (лидара) измеряется разность высот двух поверхностей – средней уровенной поверхности морей и океанов и уровенной поверхности ИСЗ.

Геометрия спутникового нивелирования представлена на рис. 9.5,

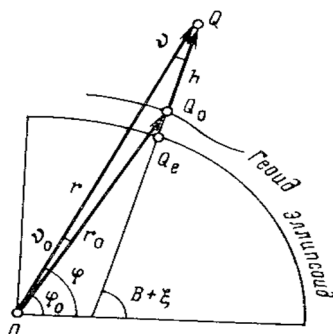


Рис. 9.5. Спутниковое нивелирование

где r, φ – геоцентрические радиус и широта ИСЗ (Q); r_0, φ_0 – геоцентрические радиус и широта подспутниковой точки Q_0 на геоиде; B – геодезическая широта ИСЗ; ξ – составляющая уклонения силы тяжести; $h = Q_0Q$ – высота ИСЗ над геоидом; $\zeta = Q_eQ_0$ – высота геоида над эллипсоидом.

Из рис. 9.5 следует, что векторное уравнение спутникового нивелирования имеет вид

$$r = r_0 + h . \quad (9.4.1)$$

При известном r и измеренном h определяется геоцентрический радиус-вектор геоида r_0 , при известном r_0 и измеренном h определяется геоцентрический радиус-вектор ИСЗ.

Особое значение при решении различных задач геодезии, геофизики имеет вариант, когда известны геоцентрические радиус-векторы геоида r_0 и ИСЗ r . В этом случае представляется возможность предвычислить вектор h и измерить его h' . Наличие подобных статистических данных позволяет определять амплитуду волн, исследовать метеоусловия над океаном, оценить точность прогнозного расчета орбит ИСЗ.

Ошибки определения высоты ИСЗ над геоидом, измеренные радиовысотомером составляют порядка 0,5 м, современными оптическими лазерами – 0,03 м. Таким образом, производится нивелирование профиля геоида, изучение топографии Мирового океана, решается задача определения внешнего гравитационного поля Земли, изучение изменения геоида со временем.

Длиннобазисная радиоинтерферометрия.

Принцип использования радиоинтерферометрических наблюдений далеких радиоисточников (квазаров) представлен на рис. 9.6.

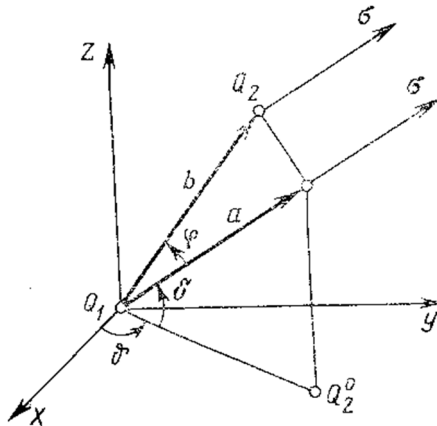


Рис. 9.6. Принцип длиннобазисной радиоинтерферометрии

Q_1, Q_2 – антенны радиотелескопов, расположенных на концах базиса, и далеко разнесенные друг от друга. Радиосигнал от квазара σ поступает на эти антенны с некоторым опозданием во времени τ , связанной с расстоянием между антеннами базиса и квазаром. Разность эта меняется со временем в зависимости от угла φ между базисом и направлением на квазар, вследствие суточного вращения Земли. Наблюдения ведутся синхронно с двух пунктов. Разность расстояний от базисных пунктов Q_1 и Q_2 до квазара составляет

$$a = c\tau, \quad (9.4.2)$$

где c – скорость распространения электромагнитных волн.

Скалярное произведение векторов a, b дает уравнение связи величины τ , топоцентрических координат радиотелескопа Q_2 , склонения δ и гринвичского часового угла ϑ квазара.

$$c\tau = X \cos \delta \cos \vartheta + Y \cos \delta \sin \vartheta + Z \sin \delta. \quad (9.4.3)$$

Выражение (9.4.3) является первым уравнением базы, где часовой угол квазара вычисляется как разность прямого восхождения α и гринвичского звездного времени S момента наблюдения квазара.

Уравнение вида

$$c\dot{\tau} = (-X \cos \delta \sin \vartheta + Y \cos \delta \cos \vartheta)\omega_z, \quad (9.4.4)$$

представляющее собой производную по времени величины $c\tau$ и обусловленную суточным вращением Земли ω_z , является вторым уравнением базы.

Экваториальные координаты квазара α, δ постоянны, используемая шкала атомного времени равномерна, поэтому данные об уклонении функции (70) за несколько суток дают возможность определить неравномерность вращения Земли, за определенный период времени.

Если радиоисточник поместить в ИСЗ, то имеет место спутниковая радиоинтерферометрия. Ее особенностями являются: сокращение длины базы Q_1Q_2 вследствие необходимости од-

новременной видимости ИСЗ с концов базы; непараллельность направлений $Q_1\sigma$ и $Q_2\sigma$, из-за близости к Земле ИСЗ; спутниковый радиомаяк подвержен колебаниям в собственном движении. Поэтому в спутниковой радиоинтерферометрии необходимы сложные редуccionные вычисления и знание теории движения ИСЗ. Влияние ошибок элементов орбиты ИСЗ исключаются накоплением большого количества измерений. При наличии нескольких баз радиоинтерферометрии с точно определенным пространственным положением, их можно использовать для эталонирования орбиты ИСЗ с радиомаяком. В свою очередь ИСЗ с радиомаяком, элементы орбиты которого точно известны, используется как транслятор для определения новых баз радиоинтерферометрии. Таким образом, строится сеть хорд, пространственное положение которых определено в единой системе отсчета.

Таким образом, область использования искусственных спутников Земли для геодезических целей достаточно обширна.

9.5. Геодинамические задачи в геодезии

Геодинамические задачи в геодезии. Геодинамика – научная дисциплина о динамических процессах, происходящих в системе «планета Земля», и о силовых полях, вызывающих эти процессы. Основная задача геодинамики состоит в определении характера динамических процессов, происходящих под воздействием силового поля, параметры которого известны в теле, литосфере и атмосфере Земли. Изучая динамику Земли, возможно решение обратной задачи – определение характера и параметров силовых полей и изменения их во времени.

Составляющими материалами при изучении динамики Земли являются данные о фигуре Земли, внутреннем строении, литосфере, гидросфере, атмосфере Земли; силовые поля: солнечно-земное, лунно-земное, геогравитационное, геомагнитное, геотермическое; суточное и годовое движения Земли.

Для решения задач геодинамики используется единая система отсчета, представляющая собой систему геодезических координат и отсчета времени.

В целом рельеф планеты Земля определяется планетарным рельефом Мирового океана, поскольку оно покрывает три четверти твердой оболочки Земли и динамику фигуры Земли определяют процессы, обуславливающие изменения рельефа Мирового океана. В общем очертании Земли наблюдается асимметрия, обусловленная тем, что две трети суши находится в северном полушарии, а одна треть в южном.

Физическая фигура Земли образуется поверхностью материков, морей и океанов. Объектом изучения является и фигура твердой оболочки Земли – поверхность суши, дна морей и Мирового океана. Физическая фигура Земли имеет сложную форму. Для точного его описания необходимо разделение поверхности на элементарные площадки с присвоением каждой значения высоты рельефа, пространственных координат X_i , Y_i , Z_i .

Появление космических систем ДЗЗ, оснащенных оптико-электронными сканерами, позволили решить проблему создания цифровой модели рельефа Земли в планетарном масштабе.

Динамика Земли. Литосфера Земли подразделяется на 6 плит: Евразийскую, Американскую, Африканскую, Тихоокеанскую, Индийскую, Антарктическую. Литосферная плита представляет собой блок земной коры (внешняя сфера «*твердой*» Земли, включающая земную кору и часть верхней мантии – субстрат), включающий континентальную и сопряженную с ней океаническую кору, ограниченную со всех сторон сейсмически и тектонически активными зонами разломов. Оценка взаимного движения плит производится посредством повторных геодезических измерений в зонах разломов и границах плит. Например, установленная скорость смещения Американской плиты относительно Тихоокеанской составляет около 4 см/г.

Посредством периодически повторяемых нивелирования и уровнемерных наблюдений на специальных геодинамических полигонах устанавливаются вертикальные движения земной коры. В районе г. Алматы зарегистрированы вертикальные движения коры 10 см/год.

Помимо движения плит за счет их потенциальной энергии и наличия аномальной мантии, происходит их движение вследствие техногенных воздействий. Причем воздействие последнего фактора умиляется со временем. Динамика Земли прослежи-

вается и через движение полюсов Земли и неравномерности ее вращения. Определением параметров движения полюсов занимается Международная служба движения полюсов, включающая работу широтных станций: Карлофорте, Китаб, Мидзусава, Гейтерсберг, Юкайя. Сущность работы широтных станций заключается в наблюдении звезд с целью определения широты станции с заданной периодичностью. Движение полюсов вызывает периодическое изменение широты пункта, уменьшение их значений на одном полушарии и одновременное увеличение на противоположной стороне земного шара.

Разделяют три вида изменения скорости вращения Земли: вековое замедление, периодические сезонные колебания, нерегулярные скачкообразные изменения. Вековое замедление вызвано действием приливных сил притяжения Луны и Солнца и составляет 0,0014 с в столетие. Периодические колебания скорости вращения Земли объясняются периодическими изменениями момента инерции Земли вследствие сезонных изменений происходящих в атмосфере. Продолжительность суток меняется в течение года на 0,001с. Вращение Земли ускоряется в июле–августе, замедляется в марте. Характер случайных колебаний скорости еще мало изучен.

Определение фундаментальных постоянных Земли посредством сети хорд, покрывающих всю планету, позволяет проследить динамику их изменений со временем, что в свою очередь дает возможность изучать историю эволюции Земли и прогнозировать ее будущее.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Изотов А. А.* Определение размеров Земли для геодезических работ СССР. Сборник статей ГУГК / *А. А. Изотов.* – М.: Геодезиздат, 1948. – Вып. 20. – С. 3–46.
2. *Красовский Ф. Н.* Избранные сочинения / *Ф. Н. Красовский.* – М.: Геодезиздат, 1932. – Т.1–4. – 492 с.
3. *Изотов А. А.* Форма и размеры Земли по современным данным / *А. А. Изотов.* – М.: Геодезиздат, 1950. – 204 с.
4. *Алескеров Ю. Н.* Обсерватория Улугбека / *Ю. Н. Алескеров.* – Ташкент: Фан, 1970. – 22 с.
5. *Житомирский С.* Самаркандская обсерватория – великое детище Улугбека // *Наука и жизнь / Житомирский С.* – 1995. – № 3. – С.26–30.
6. *Турсунов О. С.* Астрономические инструменты в обсерватории Улугбека // *Природа / О. С. Турсунов.* – 2002. – № 2. – С.37–39.
4. *Красовский Ф. Н.* Руководство по высшей геодезии. Ч. 2 / *Ф. Н. Красовский.* – М.: Геодезиздат, 1942. – 560 с.
5. *Закатов П. С.* Курс высшей геодезии / *П. С. Закатов.* – М.: Недра, 1984. – 400 с.
6. *Магницкий В. А.* Основы физики Земли / *В. А. Магницкий.* – М.: Геодезиздат, 1953. – 290 с.
7. *Магницкий В. А.* Внутреннее строение Земли // *Знание. Сер. 12 / В. А. Магницкий.* – 1981. – № 7. – 40 с.
8. *Молоденский М. С.* Современные задачи изучения фигуры Земли // *Геодезия и картография / М. С. Молоденский.* – 1958. – № 7. – С. 3–5.
9. *Жонголович И.* Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним // *Тр. института теоретической астрономии, 1952.*
10. *Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П.* Теория фигуры Земли / *В. В. Бровар, В. А. Магницкий, Б. П. Шимбирев.* – М., 1961.
11. *Мигаль Н. К.* Об определении аномалий силы тяжести // *Докл. АН СССР / Н. К. Мигаль.* – 1948. – Т.21. – № 5. – 357 с.
12. Изб. соч.– М.: Геодезиздат, 1932. – Т.1–4. – 492 с.
13. *Магницкий В. А.* Основы физики Земли / *В. А. Магницкий.* – М.: Геодезиздат, 1953. – 290 с.

14. *Магницкий В. А.* Внутреннее строение Земли // Знание. Сер. 12 / *В. А. Магницкий*. – 1981. – № 7. – 40 с.
15. *Молоденский М. С.* Современные задачи изучения фигуры Земли // Геодезия и картография / *М. С. Молоденский*. – 1958. – № 7. – С. 3–5.
16. *Земцова А. В.* Высшая геодезия / *А. В. Земцова*. – Алматы: КазНТУ, 2000. – 200 с.
17. *Нурпеисова М. Б.* Космическая геодезия / *М. Б. Нурпеисова*. – Алматы: АВ, 2012. – 248 с.
18. *Баранов В. Н., Бойко Е. Г.* Космическая геодезия / *В. Н. Баранов, Е. Г. Бойко*. – М.: Недра, 1986. – 200 с.
19. *Глушков В. В.* Космическая геодезия / *В. В. Глушков и др.* – М.: Недра, 2002. – 152 с.
20. Космические исследования в Казахстане. – Алматы: РОННД, 2002. – 400 с.

ГЛОССАРИЙ

Космическая геодезия (КГ) – раздел геодезической науки, изучающий вопросы использования наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ) и планет для решения научных и научно-технических задач геодезии.

Геометрический метод КГ – основан он на синхронном фотографировании ИСЗ на фоне звездного неба минимум с двух пунктов на поверхности Земли.

Достоинства геометрического метода КГ – возможность исключения при решении задач КГ теории движения ИСЗ, которая требует учета таких трудноучитываемых факторов, как возмущение орбит, вызванные различными факторами.

Недостатки геометрического метода КГ – определение относительного положения новых пунктов космической триангуляции (КТ), в системе исходных координат, отсутствует привязка КТ к центру масс Земли.

Динамический метод решения задач КГ – основан на изучении эволюции движения ИСЗ во времени.

Система отсчета – система координат, дополненная часами, находящимися в каждой точке геометрически твердой среды.

Геометрически твердая среда – бесконечное множество точек, расстояние между которыми фиксированы.

Инерциальная или Галилеева система отсчета – система отсчета, по отношению к которой свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно.

Эпоха – момент времени, для которого заданы направления осей координат и соответствующие величины, изменяющиеся с течением времени.

Топоцентрическая система координат – начало топоцентрической инерциальной системы координат находится в точке физической поверхности земли (обычно пункт наблюдения ИСЗ), а оси параллельны осям инерциальной геоцентрической системы координат.

Основное уравнение космической геодезии – геоцентрический вектор пункта определяется как разность между геоцентрическим и топоцентрическим векторами ИСЗ.

Географическая система координат – общее название геодезической и астрономической систем сферических координат, когда речь идет об определении координат с невысокой точностью и уклонением отвесной линии можно пренебречь.

Геодезическая широта – есть угол между нормалью к эллипсоиду и плоскостью экватора.

Геодезическая долгота – двугранный угол между плоскостью Гринвичского меридиана и меридиана точки.

Физический смысл понятия времени – понимается интервал между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке пространства, начало этого интервала (первое событие) принимается за нуль-пункт шкалы времени, относительно которого определяется положение на шкале второго события.

Местное звездное время S на меридиане наблюдений – часовым углом точки весеннего равноденствия или как сумма часового угла любого светила и его прямого восхождения.

Звездные сутки – промежуток времени между двумя последовательными кульминациями точки весеннего равноденствия.

Истинное солнечное время – время, отсчитываемое от момента нижней кульминации истинного Солнца до другого любого положения, измеряется часовым углом t_0 центра видимого диска Солнца, который отсчитывается от мгновенного меридиана места наблюдения.

Истинные солнечные сутки – промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями центра видимого диска Солнца на одном и том же меридиане.

Истинное Солнце – центр видимого диска Солнца.

Средние солнечные сутки – промежуток времени между двумя последовательными кульминациями среднего экваториального Солнца на одном меридиане.

Среднее солнечное время – время, прошедшее от момента нижней кульминации среднего экваториального Солнца до любого другого положения.

Уравнение времени – связь между истинным солнечным временем и средним солнечным временем.

Всемирное время UT – местное среднее время Гринвичского меридиана.

Всемирное время УТО – среднее время, полученное непосредственно из астрономических наблюдений, образует неравномерную шкалу времени вследствие движения полюсов.

Всемирное время UT1 – шкала времени, образованная путем введения поправки $\Delta\lambda$ за смещение полюсов в шкалу УТО.

Всемирное время UT2 – всемирное время UT1 исправленное поправкой ΔT_C за сезонные неравномерности вращения Земли, вызываемого приливными трениями и флуктуациями угловой скорости вследствие влияния солнечной активности.

Эфемеридное время – равномерно текущее время, в основу которого положено геоцентрическое движение Солнца, и представляет собой шкалу независимой переменной, фигурирующей в дифференциальных уравнениях гравитационных теорий движения небесных тел. Эталоном единицы измерений эфемеридного времени является продолжительность тропического года D в фундаментальную эпоху 1900, январь 0, 12^h эфемеридного времени. Эта эпоха служит нулем шкалы ET и соответствует моменту времени, когда средняя долгота Солнца, отсчитанная от средней точки весеннего равноденствия даты, была равна 279°41'48,04".

Земное динамическое время TDT – используется для вычисления геоцентрических эфемерид небесных тел, за нуль-пункт шкалы времени принята эпоха 1977, январь 1, 00^h00^m00^s TAI в геоцентре

Атомное время (AT) – время, шкала которого реализуется путем использования высокостабильных атомных и молекулярных эталонов частоты в сочетании с высокоточными кварцевыми часами, обладает большой равномерностью на длительных промежутках времени.

Международное атомное время IAT (TAI) – временная опорная координата, устанавливаемая Международным Бюро Времени.

Всемирное координированное (согласованное) время UTC (Universal Coordinated Time) – промежуточная шкала для согласования шкал AT и UT1, связанная с временем IAT решением международного консультативного комитета по радиосвязи начиная с эпохи 1972, январь 1.

Невозмущенное или Кеплерово движение ИСЗ – движение ИСЗ при условии, что поле притяжения Земли совпадает с полем притяжения материальной точки M , масса которой равна массе Земли, а массой ИСЗ можно пренебречь ввиду несопоставимости ее по величине с массой Земли.

Геоцентрическая гравитационная постоянная (гравитационный параметр) – произведение гравитационная постоянная на массу Земли.

Возмущенное движение ИСЗ – описание движения ИСЗ вокруг Земли под действием всех сил, действующих на спутник.

Оскулирующая (соприкасающаяся) орбита – Кеплерова орбита, элементарная дуга которой в любой момент совпадает с элементарной дугой действительной орбиты.

Геометрические методы КГ – методы решения задач по определению координат пунктов земной поверхности на основе соотношений аналитической геометрии и использования спутников в качестве визирной цели.

Орбитальный метод построения космических сетей триангуляции – суть его заключается в том, что модели гравитационного поля Земли и других действующих на ИСЗ сил известны или заданы и выступают как исходные данные, дело сводится к определению элементов орбиты и координат наземных пунктов.

Спутниковая триангуляция (СТ) – пространственная геодезическая сеть, элементы которой получены по измеренным синхронно с разных наземных станций сферическим координатам направлений на ИСЗ.

Динамические задачи космической геодезии – задачи, решение которых основывается на интегрировании дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ.

Потенциальная функция (потенциал, геопотенциал, потенциал притяжения) – функция, частные производные которой по прямоугольным координатам притягиваемой точки, равны составляющим силы притяжения по осям координат.

Геодинамика – научная дисциплина о динамических процессах, происходящих в системе «планета Земля», и о силовых полях, вызывающих эти процессы.

Гравитационная фигура Земли – фигура сравнения (эллипсоид вращения, трехосный эллипсоид, геоид), обладающая наряду с геометрическими параметрами – гравитационными параметрами: массой, угловой скоростью вращения, потенциалом притяжения, потенциалом силы тяжести.

Динамическая фигура Земли – трехосный эллипсоид, представляющий главные центральные моменты инерции Земли.

Фундаментальные постоянные Земли – рекомендуемые XVII Генеральной Ассамблеей Международного союза геодезии и геофизики (МСГГ – декабрь 1979 г., Канберра) размеры двухосного эллипсоида $a = 6\,378\,137$ м, $\alpha = 1:298,257$; скорость света в вакууме $c = 299\,792\,458 \pm 1,2$ м/с; угловая скорость вращения Земли $\omega = 0,7292115 \cdot 10^{-4}$ рад/с; геоцентрическая гравитационная постоянная $fM = 39860047 \cdot 10^7$ м³с⁻²; экваториальная сила тяжести $\gamma_e = 978033 \cdot 10^{-5}$ м·с⁻²; потенциал силы тяжести на геоиде $W_0 = 62\,636\,860$ м²с⁻²; геоцентрическая гравитационная постоянная атмосферы Земли $fM_a = 35 \cdot 10^7$ м³с⁻²; универсальная гравитационная постоянная $f = 6672 \cdot 10^{-14}$ м³с⁻²кг⁻¹.

Литосферная плита – представляет собой блок земной коры (внешняя сфера «твердой» Земли, включающая земную кору и часть верхней мантии – субстрат), включающий континентальную и сопряженную с ней океаническую кору, ограниченную со всех сторон сейсмически и тектонически активными зонами разломов.

Широтные станции – сущность работы заключается в наблюдении звезд с целью определения широты станции с заданной периодичностью. Движение полюсов вызывает периодическое изменения широты пункта, уменьшение их значений на одном полушарии и одновременное увеличение на противоположной стороне земного шара.

Вековое замедление скорости вращения Земли – замедление, вызванное действием приливных сил притяжения Луны и Солнца.

Периодические колебания скорости вращения Земли – колебания, вызванные периодическими изменениями момента инерции Земли, вследствие сезонных изменений происходящих в атмосфере.

Нормальная Земля – теоретическая модель Земли в виде эллипсоида вращения с полуосями a и b , и массой M такими, что при его вращении вокруг малой оси с угловой скоростью ω , равной скорости вращения Земли, значение нормального потенциала V_0 на его поверхности есть величина постоянная. За Нормальную Землю принимают двухосный эллипсоид, масса, центр инерции, ось и угловая скорость вращения которого совпадают с соответствующими параметрами реальной Земли, а по форме и размеру наиболее приближены к геоиду в планетарном масштабе.

Фундаментальные геодезические параметры Земли – экваториальный радиус геоида a_e , планетоцентрическая гравитационная постоянная fM ; коэффициент нулевого порядка I_2 второй зональной гармоники гравитационного потенциала; угловая скорость вращения Земли.

Сущность наблюдений ИСЗ при решении задач КГ – фиксация, регистрация или измерение величин, используемых для определения положения или скорости движения ИСЗ в определенный момент времени.

Оптические виды наблюдений ИСЗ – фотографические, лазерные, фотоэлектрические, кинотеодолитные, телевизионные методы наблюдений, а также их комбинации. Особенностью оптических методов наблюдений является необходимость наличия непосредственной видимости в направлении наблюдательный пункт – ИСЗ, и ночное время наблюдений (исключая лазерные дальномерные наблюдения).

Радиотехнические методы наблюдений ИСЗ – радиодальномерные, доплеровские и радиоинтерференционные.

Неследящие спутниковые фотокамеры – визирная ось неподвижна, камера установлена на монтажке имеющей две оси вращения. Азимутальная установка для монтажки фотокамеры имеет горизонтальную и вертикальную оси вращения. В экваториальном варианте двухосная установка позволяет отслеживать суточное вращение небесной сферы.

Следящие спутниковые фотокамеры – имеют подвижную при фотографировании визирную ось и устанавливаются на монтажки, имеющие три или четыре оси вращения.

Временной способ измерения расстояний радиодальномером – в основе способа лежит измерение времени прохождения

ния импульса (радиосигнала) удвоенного расстояния ИСЗ – пункт наблюдения.

Фазовый способ измерения расстояний радиодальномером – в основе способа лежит измерение сдвига фазы, приобретенного сигналом на пути ИСЗ – пункт наблюдения, или относительной фазовой задержки двух сигналов, прошедших расстояния различной длины.

Эффект Доплера – сущность заключается в том, что принимаемая частота радиосигнала изменяется при движении источника сигнала относительно приемника.

Радиоинтерференционный метод наблюдений ИСЗ – сущность заключается в использовании интерференции радиоволн, излучаемых передатчиком ИСЗ при приеме их на наземных станциях.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.....	5
1.1. Предмет физической геодезии. Сведения о методах определения фигуры Земли и гравитационного поля.....	5
1.2. Краткий очерк развития знаний о фигуре Земли и методах ее изучения.....	7
1.3. Сведения о строении Земли.....	24
2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ.....	34
3. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ.....	41
3.1. Некоторые сведения о силе тяжести. Понятие о методах измерения силы тяжести.....	41
3.2. Потенциал силы тяжести.....	49
3.3. Разложение потенциала земного притяжения.....	53
3.4. Основные свойства потенциала притяжения.....	60
3.5. Потенциал притяжения некоторых простейших тел.....	65
3.6. Уравнение Лапласа и Пуассона.....	74
3.7. Потенциал силы тяжести, его основные свойства.....	77
3.8. Теорема Клеро.....	84
4. ВНЕШНИЙ ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ.....	94
4.1. Нормальный и возмущающий потенциалы. Решение внешней краевой задачи в постановке Стокса и Молоденского.....	94
4.2. Теория потенциала силы тяжести. Аппаратура и методы определений силы тяжести на суше и на море.....	100
4.3. Аномалии силы тяжести.....	106
5. УКЛОНЕНИЕ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ.....	113
5.1. Общие сведения.....	113
5.2. Гравиметрический метод вывода уклонов отвес- ных линий.....	117
5.3. Астрономо-геодезический метод вывода укло- нов отвесных линий.....	121
5.4. Влияние отклонения отвесных линий на астрономи- ческие азимуты – уравнение Лапласа.....	129
5.5. Влияние отклонений отвесной линии на измеряемые зе- нитные расстояния.....	133
5.6. Учет влияния отклонений отвесных линий при топо- графических и инженерно-геодезических работах.....	135

5.7.	Топографические и топографо-изостатические укло-	
	нения отвесной линии.....	140
6.	СИСТЕМА ВЫСОТ.....	151
6.1.	Общие сведения.....	151
6.2.	Система счета высот.....	156
6.3.	Астрономическое и астрономо-гравиметрическое ни-	
	велирование.....	169
7.	РЕДУКЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ГЕОДЕЗИИ.....	174
7.1.	Общие сведения.....	174
7.2.	Редукция базиса на поверхность референц-	
	эллипсоида.....	179
7.3.	Поправка в измеренные горизонтальные направления за	
	высоту наблюдаемых пунктов.....	182
7.4.	Редукция измеренных горизонтальных направлений	
	при переходе к поверхности референц-	
	эллипсоида.....	184
7.5.	Редукции, вызываемые кривизной силовой линии..	186
7.6.	Редукционная задача при линейных измерениях свето-	
	и радиогеодезическими приборами.....	187
8.	ГРАДУСНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ.....	189
8.1.	Общие сведения.....	189
8.2.	Градусные измерения по меридиану и параллели, метод	
	дуг.....	196
8.3.	Исходные геодезические даты и фундаментальные	
	постоянные Земли.....	198
9.	РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ИЗ НАБЛЮ-	
	ДЕНИЙ ИСККУСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ	
	(ИСЗ).....	203
9.1.	Общие сведения.....	203
9.2.	Методы спутниковой геодезии.	206
9.3.	Методы построения спутниковой триангуляции	210
9.4.	Спутниковое нивелирование.....	213
9.5.	Геодинамические задачи в геодезии.....	216
	Библиографический список.....	219
	ГЛОССАРИЙ.....	221

Учебное издание

Маржан Байсановна Нурпеисова
Гульдана Мейрамбековна Кыргызбаева

ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Нач. РО УИЦ

З. А. Губайдулина

Редактор

З. А. Губайдулина

Компьютерная верстка

А. А. Кадирсизова

Подписано в печать 4. 07. 2016 г.

Тираж 300 экз. Формат 60х84х 1/16. Бумага типогр. № 1.
Уч.-изд.л.14.4 Усл. п.л.13.4 Заказ № 748. Цена договорная.

Издание Казахского национального исследовательского техни-
ческого университета имени К. И. Сатпаева

Учебно-издательский центр КазННТУ имени К. И. Сатпаева,
г. Алматы, ул. Сатпаева, 22