ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ. И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

Б. Ж. Сағындықов

АЛГЕБРА

Университеттің Ғылыми-әдістемелік
кеңесі оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2016

ӘОЖ 512 (075.8)
КБЖ 22.14 я73
С 14

Пікір жазғандар:
Шакенов Қ. Қ., физ.-мат. ғыл. док., проф., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;
Досанбай П., физ.-мат. ғыл. канд., доц., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;
Дәулетқұлова А., пед. ғыл. канд., доц., ҚазМҚПУ

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2016 жылғы басылым жоспары бойынша басылды

Сағындықов Б. Ж.
С14 Алгебра: Оқу құралы./ Б. Ж. Сағындықов – Алматы: Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ, 2016. –139 б. Сурет 22. Кесте 10. Библиогр.–13 атау.

ISBN 978-601-228-943-5

Оқу құралы кредиттік оқыту жүйесі бойынша "Алгебра" пәнінің оқу бағдарламасына сәйкес жазылған және университеттің "Математикалық және компьютерлік модельдеу", "Ақпараттық жүйелер", "Техникалық физика" және "Машиналар динамикасы мен беріктігі" мамандықтарына арналған.

Сонымен қатар оқу құралы техникалық және педагогикалық оқу орындарының студенттері мен магистранттарының білімдерін жетілдіруге ықпал етеді.

ӘОЖ 512 (075.8)
КБЖ 22.14 я73

ISBN 978-601-228-943-5

© Сағындықов Б. Ж., 2016
© Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ, 2016

АЛҒЫ СӨЗ

Оқу құралы педагогикалық университеттердің математика, информатика және техникалық университеттердің математикалық және компьютерлік модельдеу, ақпараттық жүйелеу және техникалық физика мамандықтарына арналған. Оқу құралының теориялық желісі ҚР Білім және ғылым министрлігі бекіткен мемлекеттік стандартына және оның негізінде қабылданған типтік оқу бағдарламаларына сәйкестендірілген қазіргі кредиттік оқу жүйесінің талаптарына сай жазылды.

Оқу құралы «Жиындар теориясы мен математикалық логиканың бастапқы ұғымдары», «Комплекс сандар алгебрасы», «Негізгі алгебралық құрылымдар», «Көпмүшеліктер» және «Сандар теориясы» деп аталатын 5 тараудан тұрады.

Теориялық мазмұндау практикалық есептерді шығарумен ұштастырылып, математикалық талдау, геометрия, дифференциалдық теңдеулер және көптеген басқа да пәндерді түсінуге үлес қосатын материалдар сұрыпталды.

Барлық тарауларда теориялық материалдар тәжірибелік сабақтарда шығарылған есептердің шығару үлгілерімен және әдістері мысалдармен қамтылды. Алгебраның фундаментальды түсініктері мен аппараты жан-жақты және жеткілікті түрде түсіндірілген.

Анықтамалар мен теоремалардың болмысын ашу үшін түсініктемелер мен ескертулер келтіріліп, әрбір тақырыптың соңында өтілетін сабаққа байланысты есеп шығару жолдары көрсетілген. Сонымен қатар, теориялық материалдарды толық тексеру үшін студенттерге әрбір тақырып соңында өзіндік тапсырма ретінде қажетті сұрақтар мен тапсырмалар келтірілді.

1. ЖИЫНДАР ТЕОРИЯСЫ. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЛОГИКАНЫҢ БАСТАПҚЫ ҰҒЫМДАРЫ

Кіріспе. Математика пәндерінің ішінде өте қарқынды дамып келе жатқан бағыттың бірі – жиындар теориясы. Оның пайда болуы 1874–1884 жж. аралығында жиындар теориясына қатысты ғылыми еңбектері жарық көрген неміс ғалымы Георг Кантормен тығыз байланысты.

Математиканың алғашқы ұғымдарының ішінде негізгісі – жиын және оның элементтері туралы ұғым.

Өкінішке орай, «жиын» ұғымына қатаң дәл анықтама беру мүмкін емес. Әлбетте жиын деп біртұтас түрде қарастырылатын, қандай да бір ортақ қасиеттермен біріктірілетін бірнеше ақырлы немесе ақырсыз нысандардың «жиынтығын», «үйірін» немесе «класын» айтуға болады. Қайсыбір ұғымды анықтау үшін алдымен ол қандай жалпы ұғымның дербес жағдайы болатынын көрсетуіміз керек. Математикада жиыннан артық жалпы ұғым жоқ, сондықтан оған анықтама беру мүмкін емес.

Сонымен, қайсыбір элементтердің жиынтығын жиын деп түсінуіміз үшін тәжірибеде келесі шарттардың орындалуы қажет:

- қарастырылып отырған элемент берілген жиынтыққа тиісті екенін анықтайтын ереже табылуы керек;
- жиынтықтың элементтерін бір-бірінен ажырата алатын ереже табылуы керек (бұл жиынның ішінде бірдей элементтердің болуын жоққа шығарады).

Жиын және оның элементтері, жиындардың берілу тәсілдері. Жиындарды үлкен латын әріптері арқылы белгілейміз: A, B, C, L, M, N, т.б. Жиынды құрайтын нысандар (объектілер) осы ***жиынның элементтері*** деп аталады. Жиын элементтері кіші латын әріптерімен белгіленеді: *a, b*, *c*, *l*, *m*, *n,* т.б. Қажет болған жағдайда (көбінесе тензорлық талдауда) төменгі немесе жоғарғы индекстер еркін қолданылады. Сонда $a \in A$ таңбасы «*a* элементі A жиынына тиісті (A жиынында жатады)» деп оқылады. Керісінше $x \notin X$ таңбасын «*x* элементі *X* жиынына тиісті емес» деп оқимыз. Кіріспеде жиындарды олардың элементтерінің тізімі немесе элементтеріне ортақ қасиеттерді көрсету арқылы беруге болатынын атап өттік. A ={дүйсенбі, сейсенбі, сәрсенбі, бейсенбі, жұма, сенбі, жексенбі} жиынын қарастырайық. Сонда бұл жиынның элементтеріне ортақ

қасиет – апта күндері. Сонымен $A - \{апта\ күндері\}$ жиыны болса, онда сәрсенбі $\in A$, ал қаңтар $\notin A$. XX ғасырда «математиканы жиыннан тұрғызу» дәстүрі қалыптасқан, яғни әрбір жаңадан енгізілген нысанды (объектіні) кейбір жиын түрінде анықтаған.

$A = \{a, b, c\}$ – А жиыны a, b және c элементтерінен тұрады.

$A \ni x$ — A жиыны x элементін қамтиды.

$x \in A \leftrightarrow A \ni x$ екені айқын.

$A = \{x|$ x-ке қатысты шарттар жазылады$\}$. Тек тік жақшадан кейінгі шартты қанағаттандыратын элементтер ғана A жиынының құрамына енеді.

«Қалыпты» сандық жиындар үшін келесі белгілеулер қолданылады:

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – натурал сандар жиыны.

$Z = \{0, 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3, 4, -4, \dots\}$ – бүтін сандар жиыны.

$Q = [x|\exists m \in Z\ , \exists\ n\ \in N\colon\ x = \frac{m}{n}\ \}$ – рационал сандар жиыны.

$R -$ нақты сандар жиыны.

$C - \{\ x + \ iy\ |x \in R\ ,\ y \in R\ \} -$ комплекс сандар жиыны.

Бірде бір элементі болмайтын жиынды ***бос жиын*** деп атаймыз. $\emptyset -$ *бос жиын белгісі*. Мысалы, барлық x үшін $P(x)$ ұйғарымы жалған болса, онда $\emptyset = \{\ x|P(x)$ *орын алады*$\}$.

$A \subseteq B$ қатынасы A жиынының әрбір элементі B жиынына тиісті дегенді білдіреді, яғни A жиыны B жиынының ішкі жиыны. Егер $A \subseteq B$ және $A \neq B$ болса, онда A жиынын B жиынының ***меншікті ішкі жиыны*** деп атайды. Бұл қатынас $A \subset B$ арқылы белгіленеді (1.1-сурет).

Мысал. Бабаларымыз ауа райы, жер бедері мен жайылымдағы шөп құрамы ерекшеліктеріне сай отар-отар қой-ешкі, үйір-үйір жылқы, келе-келе түйе, табын- табын сиыр өсіру мәселелерін ұтымды ұйымдастыра білді.

Төрт түлік малды $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ жиыны арқылы белгілейік, мұнда $B_1 = \{$отар-отар қой-ешкі $\}$, $B_2 = \{$үйір-үйір жылқы$\}$, $B_3 = \{$келе-келе түйе$\}$ және $B_4 = \{$табын-табын сиыр$\}$. Сонда B_1, B_2, B_3, B_4 элементтері B жиынының меншікті ішкі жиындары болады.

Егер $A \cap B = \emptyset$ болса, онда A және B жиындары қиылыспайды. Кері жағдайда, яғни $A \cap B \neq \emptyset$ қатынасы A және B жиындарының қиылысуын білдіреді. Қиылысудан пайда болған жиын A жиынына

да және B жиынына да тиісті элементтерден тұрады. Сонымен, $A \cap B = \{x | x \in A$ *және* $x \in B\}$ (1.2-сурет).

A және B жиындарының ең болмағанда біреуіне тиісті элементтерден тұратын жиынды A және B жиындарының бірігуі деп атаймыз. Оны $A \cup B$ таңбасы арқылы белгілейміз. Сонымен, $A \cup B = \{x |\ x \in A$ *немесе* $x \in B\}$. Олай болса A және B жиындары $A \cup B$ жиынының ішкі жиындары болады, яғни $A \subseteq A \cup B$ *және* $B \subseteq A \cup B$ арақатынастары орындалады (1.3-сурет).

X және $\emptyset$ жиындары әрбір X жиынының ішкі жиындары. Бұл ішкі жинындар X жиынының меншікті емес ішкі жиындары деп аталады. Ал қалған ішкі жиындар – оның меншікті ішкі жиындары. X жиынының бүкіл ішкі жиындарының жиынын $2^X = \{A | A \subseteq X\}$ арқылы белгілейді. Бұл X жиыны ақырлы n элементтерден тұратын болса, онда 2^X жиынының элементтерінің саны 2^n элементтерден тұратынын көрсетеді.

A және B жиындарының айырмасы деп A жиынына тиісті, ал B жиынына тиісті емес элементтерден құралған жиынды айтамыз. Оны $A \setminus B$ таңбасы арқылы белгілейміз (1.4-сурет). Сонымен

$$A \setminus B = \{ x | x \in A \text{ және } x \notin B\}.$$

A және B жиындарының симметриялық айырмасы деп $A \setminus B$ *және* $B \setminus A$ жиындарының бірігуін айтамыз. Оны $A \triangle B$ таңбасы арқылы белгілейміз. Сонымен $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (1.5-сурет).

N, Z, Q, R, C сандық жиындар тізбегі үшін $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ арақатынастарын жазуға болады. Бұдан комплекс сандар жиынының құрамына бүкіл сандық жиындар кіретінін көруге болады.

Математикалық зерттеудің аясында қарастырылатын бүкіл жиындарды қамтитын жиынды ***универсал жиын*** деп атайық. Осы тұрғыда сандық жиындар үшін комплекс сандар жиыны – универсал жиын. Көбінесе универсал жиынды U арқылы белгілейді.

Егер A жиыны U жиынының меншікті ішкі жиыны болса, онда A жиынының U-ға дейінгі толықтауышы U жиынының A-ға тиісті емес элементтерінен құралады. Оны $\bar{A}$ таңбасы арқылы белгілейміз. Сонымен

$$\bar{A} = \cup \setminus A = \{x | x \in U \text{ және } x \notin A\}.$$

Жиындарға қолданылатын амалдардың негізгі қасиеттері

1. $A \cup B = B \cup A$;	1^0. $A \cap B = B \cap A$;
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;	2^0. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;	3^0. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
4. $A \cup \emptyset = A$;	4^0. $A \cap U = A$;
5. $A \cup \bar{A} = U$;	5^0. $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
6. $A \cup U = U$;	6^0. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
7. $\bar{\emptyset} = U$;	7^0. $\bar{U} = \emptyset$;
8. $A \cup A = A$;	8^0. $A \cap A = A$;
9. $A \cup (A \cap B) = A$;	9^0. $A \cap (A \cup B) = A$;
10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.	10^0. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Бұл қасиеттер қосарлас арақатынастар арқылы көрсетілген. Қосарлас сөзінің мағынасы жоғарыдағы қасиеттерде сәйкес арақатынастарға көшу үшін $\cup$ бірігу таңбасын $\cap$ қиылысу таңбасына, $\emptyset$ бос жиынды U универсалды жиынға және керісінше алмастыруға болады дегенді білдіреді. Амалдардың ауыстырымдылық және терімділік қасиеттеріне сай жиындарды біріктірген кезде жақшаларды алып тастауға болады және жиындардың орналасу тәртібі нәтижеге әсер етпейді. Демек, бірнеше жиындардың бірігуін келесі арақатынас арқылы өрнектеуге және көрсетуге болады.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Осы сияқты қиылысу да сол заңдылықтарға бағынады. Сондықтан бірнеше жиындардың қиылысуын төмендегі түрде жазуға болады.

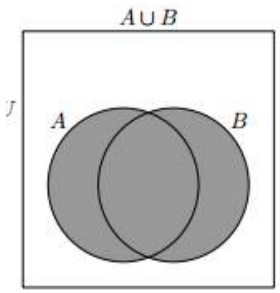
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Жоғарыда көрсетілген арақатынастарды пайдалана отырып алда қарастырылатын есептерді шығару үшін қажетті жалпылама де Морган формуласын жазайық:

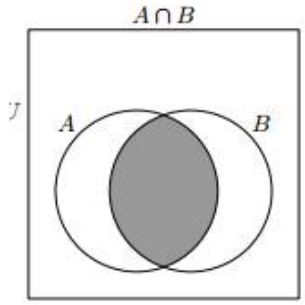
$$\overline{\bigcup_{\iota=1}^{n} A_\iota} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{\iota=1}^{n} A_\iota} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_\iota}.$$

Ескерту. Бірігетін жиындардың саны ақырсыз болған жағдайдың өзінде осыған ұқсас арақатынастарды жазуға болады. Әдетте бұл жағдайда $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ орнына $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ жазылады.

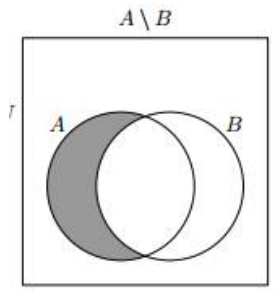
Жиындар алгебрасының графиктік сипаттамалары Эйлер дөңгелектері мен Венн диаграммаларына негізделген. Жиындарға қолданылатын амалдардың көркемдік иллюстрациясы төмендегі Эйлер дөңгелектері арқылы бейнеленген.



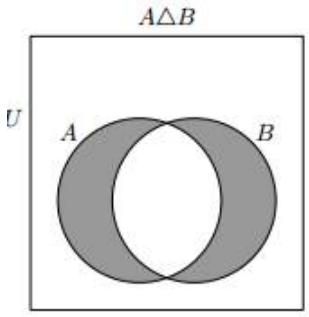
1-сурет



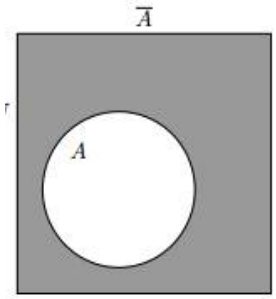
1.2-сурет



1.3-сурет

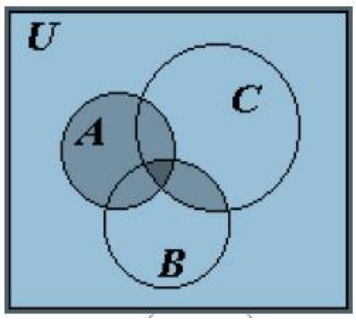


1.4-сурет

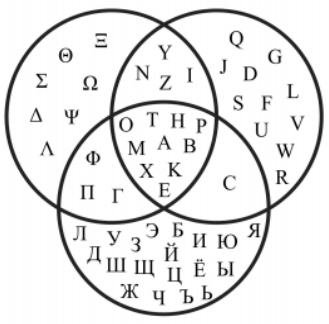


1.5-сурет

Венн диаграммасын тұрғызу n фигураның көмегімен (тұйық сызықтар) жазықтықты 2^n ұяшықтарға бөлуден басталады. Сонда әрбір келесі тұрғызылатын фигура алдында тұрғызылған фигуралардың әрқайсысымен бір және тек бір ғана ортақ облысы болуы қажет. Мұндай бөлуді Венн бейнесі немесе кескіндеуі (символы) деп атайды. 1.6-суретте n = 3 үшін Венн кескіндеуі (символы) көрсетілген. Жазықтық 8 ұяшыққа бөлінген (сыртқы облыс та ұяшық болып саналады). Мысалы орыс, латын және грек алфавиттерінің ортақ әріптері 1.7-суретте бейнеленгенін Венн диаграммасынан көруге болады.



1.6-сурет



1.7-сурет

Теорема. Бір мезгілде $A \subseteq B$ және $B \subseteq A$ болғанда және тек сонда ғана $A = B$ (яғни, A = B $\Leftrightarrow$ A$\subseteq B$ және $B \subseteq A$).

Мысал. Бүкіл жұп сандардан тұратын, бірақ әрқайсысы 98 санынан артпайтын A жиынының берілуін әртүрлі тәсілдермен жаз.

Шешуі. 1. Санап шығу: $A = \{2, 4, 6, \dots, 98\}$;

2. Сипаттау: $A = \{x \mid x \in N$ және $x/2 \in N, N \leq 98\}$; ($N -$ натурал сандар жиыны);

3. Рәсімдеу тәртібі бойынша: а) $2 \in A$; б) егер $x \in A$, онда $x + 2 \in A$; в) $x \leq 98$.

Мысал. 1) $\{\{1,2\},\{2,3\}\} = \{1,2,3\}$ және 2) $\{\{1,2\}\} = \{1,2\}$ теңдіктерінің дұрыстығын тексер.

Шешуі. 1) Теңдік дұрыс емес, өйткені бірінші жиынның элементтері $\{1,2\}$ және $\{2,3\}$ болатын ішкі жиындар, ал екінші жиынның элементтері 1, 2, 3.

2) Екінші теңдік те дұрыс емес, өйткені бірінші жиын бір элементтен, ал екіншісі екі элементтен тұрады.

Мысал. Келесі жиындардың элементтерін санап шық:

1) $A = \{x \mid x \subseteq B, B = \{1,2,3\}\}$; 2) $A = \{x \mid x \in B, B = \{1,2,3\}\}$.

Шешуі. Берілуі бойынша $B -$ үш элементтен тұратын жиын. Демек оның ішкі жиындарының саны $2^3 = 8$ тең және $x \subseteq B$ болғандықтан:

$$A = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\}\,\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}.$$

2) $x \in B$ тиістілігінен $A = B = \{1,2,3\}$ теңдігі шығады.

Мысал. Жиындар алгебрасының тепе-теңдіктерін пайдалана отырып

$$A \cup (B \backslash A) = A \cup B$$

теңдігін дәлелде.

Шешуі. $A \cup (B \backslash A) = A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$.

Жиындардың декарттық көбейтіндісі. Сәйкестік

Рене Декарт жазықтықтың әрбір нүктесіне реттелген қос нақты сандарды сәйкес қойды. Сонда көптеген геометриялық фигуралардың қасиеттері алгебралық теңдеулердің көмегімен анықталды. Мұндай геометриялық фигуралардың бойында жатқан әрбір нүктенің координаталары өзіне сәйкес алгебралық теңдеуді қанағаттандырады да, ал жазықтықтың барлық басқа нүктелері бұл теңдеуді қанағаттандырмайды. Сонымен көптеген геометриялық есептер алгебра тіліне көшіріледі де алгебралық құралдар арқылы шешіледі.

Декарттың қарастырған бүкіл реттелген қос нақты сандар жиыны нақты сандар жиынын өзіне-өзін көбейту болып табылады. Белгіленуі: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Жалпы жағдайда жиынның көбейтіндісін анықтау үшін қос-қостан реттелген элементтер ұғымы қажет. $\{a,b\}$ және $\{b,a\}$ жиындарының теңдігінен a,b элементтерінің қайсысы бірінші, ал қайсысы екінші екенін анықтау мүмкін емес. Бұл өте маңызды жағдай, өйткені координаталары (1,2) және (2,1) болатын жазықтықтағы нүктелер әртүрлі нүктелер, ал екінші жағынан жиындар ретінде (1,2) және (2,1) өзара тең.

Анықтама: $a \in A$, $b \in B$ дейік. Сонда $\{\{a\},\{a,b\}\}$ жиынын (a,b) ***реттелген қосағы*** деп атаймыз, демек a реттелген қосақтың бірінші, ал b екінші элементі деп аталады.

Теорема. $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ және $b = d$.

Дәлелдеуі. $a = c$ және $b = d$ болғанда $(a,b) = (c,d)$ теңдігінің орындалуы айқын. Енді $\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ дейік те, екі жағдай қарастырайық.

1-жағдай. $a = b$. Сонда $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Демек $\{a\} = \{c\} = \{c,d\} \Rightarrow a = c = d$.

2-жағдай. $a \neq b$. Жиындардың теңдігінен

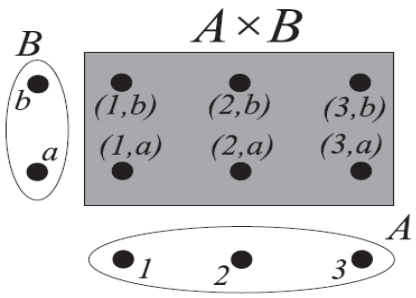
$\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a\} = \{c\}$ немесе $\{a\} = \{c,d\}$.

а) $\{a\} = \{c\}$. Сондықтан $a = c$ және $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$. $\{a,b\} \neq \{a\}$ екенін ескерейік, әйтпесе $a = b$. Демек, $\{a,b\} \neq \{a,d\} \Rightarrow b = d$.

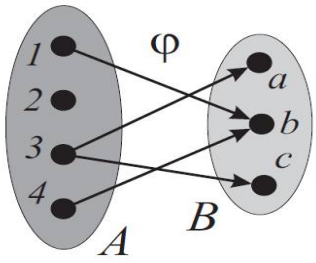
б) $\{a\} = \{c,d\} \Rightarrow c = d = a \Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\}\} \Rightarrow \{a,c\} = \{a\} \Rightarrow a = b$. Бұл ұйғаруымызға қайшы.

Анықтама. Бірінші элементі A жиынынан, екінші элементі B жиынынан алынатын бүкіл реттелген қосақтан тұратын $A \times B$ жиыны A және B жиындарының көбейтіндісі деп аталады. 1.10-суретте $A \times B$ көбейтіндісі кескінделген.

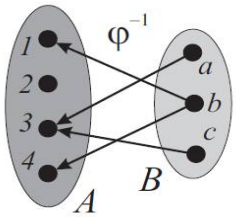
Сонымен $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.



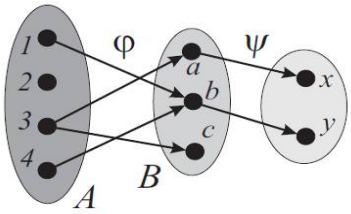
1.8-сурет



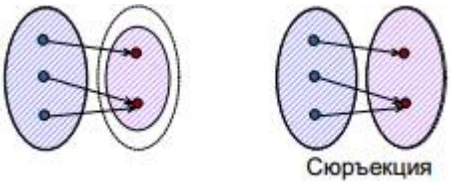
1.9-сурет



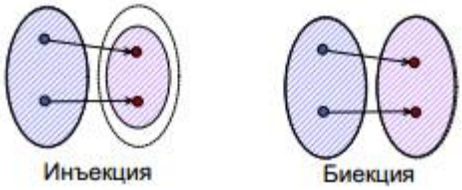
1.10-сурет



1.11 - сурет



1.12-сурет



1.13-сурет

Екі A және B жиындарының көбейтіндісін көбінесе ***декарттық көбейтінді*** деп те атайды. $A = B$ жағдайында $A \times A$ көбейтіндісі A жиынының декарттық квадраты деп аталады және A^2 арқылы белгіленеді.

Сонымен қатар декарттық көбейтіндінің коммутативтік заңдылыққа бағын байтынын ескерте кетейік, яғни $A \times B \neq B \times A$.

Анықтама. Егер $A_1, A_2, \dots, A_n$ жиындары берілсе, онда олардың декарттық көбейтіндісі деп

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | \; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

жиынын айтады. Сондай – ақ A жиынының декарттық n - ші дәрежесі деп

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | \; a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_n \in A\}$$

жиынын айтады.

X және Y жиындары берілсін дейік. Сонда X жиынының әрбір элементіне Y жиынынан бірмәнді анықталған жалғыз элементті сәйкестендіру ережесін функция немесе бейнелеу деп атау қабылданған (белгілеуі $f : X \to Y$).

Ескерту. Математикада көбінесе сандық жиындардың бір-біріне бейнелеуін функция деп атайды.

f бейнелеуінде Y жиынының y элементі X жиынына тиісті x элементінің бейнесі дегенді әртүрлі тәсілдермен жазуға болады:

$$f(x) = y,\ xf = y,\ x^f = y.$$

Бейнелеудің анықтамасынан X жиынының әрбір элементі үшін оның бейнесінің міндетті түрде болуы талап етіледі. Кері пайымдау әр уақытта дұрыс деп айтуға болмайды, өйткені Y жиынының кейбір элементтері үшін X жиынынан түпнұсқа болатын элементтер табылмауы мүмкін. Мұндай жағдайлар үшін арнайы атаулар қолданылады.

Анықтама. Егер Y жиынының әрбір $y \in Y$ элементі үшін $y = f(x)$ (немесе $y = xf$) теңдігі орындалатындай $x \in X$ элементі (немесе элементтері) табылатын болса, онда $f : X \to Y$ бейнелеуін сюрективті бейнелеу деп атайды.

Бейнелеудің анықтамасынан, егер $xf = y_1$ және $xf = y_2$ болса, онда $y_1 = y_2$. Керісінше жалпы жағдайда мұндай тұжырым дұрыс емес: Y жиынының қайсыбір элементінің X жиынынан табылатын бірнеше түпнұсқалары болуы мүмкін. Мысалы, егер $xf = x^2$ ережесі бойынша әсер ететін $f : \mathbb{R} \to R$ бейнелеуін қарастыратын болсақ, онда 4 санының 2 және (-2) болатын екі түпнұсқасы бар. Келесі қадамда мұндай жағдай мүмкін болмайтын бейнелеулерді бөліп қарастырайық.

Анықтама. Егер кез келген $x_1, x_2 \in X$ элементтері үшін $x_1 f = x_2 f$ теңдігінен $x_1 = x_2$ теңдігі шығатын болса, онда $f : X \to Y$ бейнелеуін инъективті бейнелеу деп атайды.

Анықтама. Бір мезгілде сюрективті және инъективті болатын $f : X \to Y$ бейнелеуін биекция немесе өзара бірмәнді сәйкестілік деп атайды.

Егер $f : X \to Y$ бейнелеуі биекция болса, онда оның $f^{-1} : Y \to X$ бейнелеуі де биекция болады.

Мысал. $f_i : \mathbb{R} \to R,\quad i = 1, 2, 3$ бейнелеуімен анықталған үш функцияны қарастырайық:

1) $f_1(x) = e^x$ функциясы инъективті, бірақ сюрективті емес;

2) $f_2(x) = x \cdot \sin x$ функциясы сюрективті, бірақ инъективті емес;

3) $f_3(x) = 3x - 2$ функциясы биекция.

Анықтама. $A \times B$ декарттық көбейтіндісінің кез келген меншікті ішкі жиыны A және B жиындарының арасындағы φ сәйкестігін анықтайды (яғни, $\varphi \subseteq A \times B$).

Сонымен сәйкестік элементтері реттелген қосақтан тұрады. Берілген φ сәйкестігінде әрбір $(a, b) \in \varphi$ қосақ $a \in A$ элементіне $b \in B$ элементі сәйкес қойылатынын көрсетеді. 1.11-суретте $\varphi = \{(1, b), (3, a), (3, c), (4, b)\}$ сәйкестігінің бейнесі көрсетілген.

Кейде сәйкестікті вектордың ұшы арқылы бейнелеу өте ыңғайлы. Мұнда реттелген қосақтың бірінші элементі вектордың бастапқы, ал екінші элементі соңғы нүктелерін көрсетеді.

Анықтама. $Dom\varphi = \{a \in A | (a, b) \in \varphi$ сәйкестігінде жататындай $b \in B$ элементі табылады$\}$ жиынын φ сәйкестігінің ***анықталу облысы*** деп атаймыз.

Анықтама. $Jm\varphi = \{ b \in B \mid (a, b) \in \varphi$ сәйкестігінде жататындай $a \in A$ элементі табылады$\}$ жиынын φ сәйкестігінің *мүмкін мәндер облысы* деп атаймыз.

A және B жиындарының арасындағы φ сәйкестікті белгілеу үшін $A \overset{\varphi}{\to} B$ немесе $\varphi: A \to B$ таңбаларын пайдаланады.

Сәйкестіктің кейбір түрлеріне тоқталайық.

Анықтама.

1) Егер $Dom\varphi = A$ болса, онда сәйкестік φ барлық жерде анықталған;

2) Егер $Jm\varphi = B$ болса, онда сәйкестік φ тұтас (сьюректитві);

3) Егер әрбір $a \in Dom\varphi$ элементіне B жиынынан тек бір элемент сәйкес қойылса, сәйкестік бірмәнді (яғни $(a, b) \in \varphi$ және $(a, b_1) \in \varphi \Rightarrow b = b_1$);

4) Егер $Dom\varphi$- дің әртүрлі элементіне B жиынынан әртүрлі элементтер сәйкес қойылса (яғни, $(a, b) \in \varphi$ және $(a_1, b) \in \varphi \Rightarrow a = a_1$), сәйкестік әрмәнді (инъективті) деп аталады.

Анықтама. Барлық жерде анықталған және бірмәнді сәйкестік ***бейнелеу*** деп аталады (1-ші және 3-қасиеттер орындалады).

Анықтама. Барлық жерде анықталған, сьюректитві, бірмәнді және инъективті сәйкестік ***бірге - бір сәйкестік (биекция)*** деп аталады.

Анықтама. $\varphi^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \varphi\}$ сәйкестігі $\varphi \subseteq A \, x \, B$ сәйкестігіне *кері* деп аталады (1.12-сурет).

Анықтама. $\varphi \subseteq A \, x \, B$ және $\psi \subseteq B \, x \, C$ сәйкестіктерінің ***композициясы*** деп $(a, b) \in \varphi$, $(b, c) \in \psi$ болатындай $b \ni B$ элементі табылатын $X \subseteq A \, x \, C$ сәйкестігін айтады ($X = \varphi \circ \psi$ композицияның белгіленуі) (1.13-сурет).

Бейнелеулердің негізгі қасиеттерін тағайындайық.

Теорема. Екі жиынның бірігуінің түпнұсқасы олардың түпнұсқаларының бірігуіне тең:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Теорема. Екі жиынның қиылысуының түпнұсқасы олардың түпнұсқаларының қиылысуына тең:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Теорема. Екі жиынның бірігуінің бейнесі олардың бейнелерінің бірігуіне тең.

Жаттығулар

1.Үш анықталмайтын геометриялық ұғымды атаңыз.

2.Жиын ұғымының дәл анықтамасын білетін математиктер жиыны қанша элементтерден тұрады?

3.Бос жиын кез келген жиынның құрамына кіретінін дәлелде.

4.Бос жиынның тек жалғыз екенін дәлелде.

5.$\{a, b\} = \{b, a\}$ теңдігін дәлелде.

6.Демалыс кезінде 12 күн жаңбыр жауды, 8 күн қатты дауыл соқты, ал 4 күн суық болды. Сонда, егер:

- 5 күн жаңбырлы және дауылды;
- 3 күн жаңбырлы және суық;
- 2 күн дауылды және суық;
- 1 күн жауынды, дауылды және суық болса, демалыстың қанша күні жайсыз болғанын Эйлер-Венн диаграммасы арқылы талдаңдар.

7.n элементтен тұратын жиынның неше ішкі жиыны болады?

8. A *және* $\bar{B}$ жиындары берілсін және $A \subseteq I, B \subseteq I$ дейік. Мұнда I - қайсыбір жиын және $A \cap B = \emptyset$. Венн диаграммасының көмегімен келесі жиындарды кескіндеңіздер: $\overline{AB}$; $A \cap \overline{B}$; $\bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cup B}$; $\bar{A} \cup B$; $\bar{A} \setminus B$; $A \setminus \bar{B}$.

9.Егер:

а) $A = B$;

б) $A \cup C = B \cup C (C -$ қайсыбір жиын);

в) $A \cap C = B \cap C$ $(C -$ қайсыбір жиын);

г) $A \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup B)$; д) $A \cap (A \setminus B) = B \cap (B \setminus A)$;

е) $A \cap (A \setminus B) = B \cap (A \setminus B)$; ж) $A \setminus B = \emptyset$ жиындарының беттесуі міндетті ме?

10. Егер A және B берілген қайсыбір жиындар болса, онда

$(\overline{X \cup A}) \cup (\overline{X \cup \bar{A}}) = B$ теңдеуінен бүкіл X жиындарын табыңыз.

11. Кез келген A және B жиындары үшін

$$A \subseteq B,\ \bar{A} \supseteq \bar{B},\ A \cup B = B\ ,\ A \cap B = A,\ A \backslash B = \emptyset$$

арақатынастарының пара-пар екенін дәлелде.

12. Жазықтықтағы нүктелердің жиынын универсалды жиын дейік, яғни $U = R \times R$.

Келесі жиындардың толықтауыштарын жазып, кескіндерін көрсетіңдер:

а) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$;

б) $A = \{(x, y) \mid x^2 + 3x + 2 \leq 0\}$;

в) $A = \{(x, y) \mid 3x + 4y + 5 > 0\}$;

г) $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 3\}$;

д) $A = \left\{(x, y) \middle| \begin{cases} (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}\right\}$.

13. A = {желтоқсан, қаңтар, ақпан}, B = {наурыз, сәуір, мамыр}, C = ={маусым, шілде, тамыз} және D = {қыркүйек, қазан, қараша} жиындары берілсін дейік. Бұл жиындардың әрқайсысы және бірігуі қалай аталады?

14. Топта 12 ұл бала бар. Олардың 10-ы бос уақытында футбол ойнағанды ұнатады, ал 8-і шахмат ойнағанды ұнатады. Бұл ойындарға топтағы барлық ұл балалар қатысады. Топтағы қанша студент бос уақытында футбол ойнағанды да, шахмат ойнағанды да ұнатады?

15. Ойын сауыққа барлығы 38 жас жігіттер мен қыздар жиналған. Олардың 16-сы ән салады, 17-сі би билейді, ал 18-і домбырада ойнайды. Ал олардың төртеуі ән де салады, би де билейді, үшеуі ән де салады, домбыра да тартады, бесеуі би де билейді, домбыра да тартады. Тек үшеуі ғана ән де салмайды, би де билемейді, домбыра да тартпайды. Сонда қанша жастың бойында үш өнер де бар және қанша жастың бойында тек бір ғана өнер бар?

Комбинаторикаға кіріспе. Ақырлы жиындар. Дирихле принципі

Біртұтас түрде қарастырылатын әртүрлі нысандардың жиынтығын жоғарыда ***жиын*** деп атау қабылданған.

A жиынының элементтерінің санын оның қуаты деп атайды және $|A|$ арқылы белгілейді.

$|A| = n$ теңдігі A жиыны ақырлы және оның элементтерінің саны n-ға тең дегенді білдіреді. Ақырлы A және B жиындарының элементтерінің санын өзара салыстыру қарапайым есептің қатарына жатады. Жиындар теориясының өзекті мәселесінің бірі, ақырсыз жиындарды сандық түрде салыстыру мүмкіндігі, екі жиынның арасындағы өзара бірмәнді сәйкестік ұғымына негізделген.

Анықтама. Егер ақырсыз A және B жиындарының арасында өзара бірмәнді (бірге-бір) сәйкестік орнатуға болса, онда A және B жиындарын *тең қуатты жиындар* деп атайды. Белгілеуі: $A \sim B$. Ақырсыз жиындардың ішінде ең қарапайымы *натурал сандар жиыны*. Натурал сандар жиынымен тең қуатты болатын жиындарды *саналымды жиындар* деп атау қабылданған. Басқаша айтқанда – элементтерін $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ шексіз тізбек арқылы нөмірлеуге болатын жиын *саналымды жиын*.

Саналымды жиындардың қайсыбір жалпы қасиеттерін тағайындайық.

- Саналымды жиынның кез келген ішкі жиыны ақырлы немесе саналымды.
- Кез келген ақырлы немесе саналымды жиындардың саналымды қосындылары да саналымды жиын.
- Саналымды болмайтын ақырсыз жиын *саналымсыз* жиын деп аталады.
- Кез келген ақырсыз жиынның саналымды ішкі жиыны болады.

Анықтама. Егер A және B жиындарының арасында биекция орнатуға болатын болса, онда олар тең қуатты жиындар деп аталады. Белгілеуі : $A \sim B$

(яғни, φ *биекцил үшін* $A \xrightarrow{\varphi}$ табылады).

Лемма. A, B және C – қайсыбір жиындар дейік. Сонда

1. $A \sim A$.

2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

3. $A \sim B$ және $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Анықтама. $n \in N$ дейік. Сонда $N_{\leq n} = \{1,2,\dots,n\}$ жиынын натурал қатардың бастапқы кесіндісі деп атайды.

Лемма. $N_{\leq n} \sim N_{\leq m} \Leftrightarrow n = m$.

Анықтама. Егер қайсыбір A жиыны үшін $n \in N$ натурал саны табылып, $A \sim N_{\leq n}$ биекциясы тағайындалса, онда A ақырлы жиын

және A жиынының қуаты n-ға тең ($|A| = n$). Мысалы, A қазақ алфавитінің бүкіл әріптерінің жиыны болсын, онда $|A| = 42$.

Теорема. Қуаттары $|A| = n$ және $|B| = m$ болатын ақырлы жиындар берілсін дейік. Сонда

1. Егер $A \cap B = \emptyset$ болса, онда $|A \cup B| = |A| + |B|$.
2. Егер $C \subseteq B$ болса, онда $|B \backslash C| = |B| - |C|$.
3. Егер $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Теорема. $A_1, A_2, \dots, A_n$ – ақырлы жиындар болсын дейік. Сонда

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = (|A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) + \dots +$$

$$+(-1)^{k-1}(|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| + \dots + |A_{n-k+1} \cap \dots \cap A_n|) + \dots +$$

$$+(-1)^{n-1}(|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|).$$

Жоғарыдағы теоремаларды дәлелдеусіз қабылдайық.

Салдар:

1. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$.
2. $|\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}| = (|\overline{A_1}| + |\overline{A_2}| + |\overline{A_3}|) - (|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| + |\overline{A_1} \cap \overline{A_3}| + |\overline{A_2} \cap \overline{A_3}|) + (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$.

Терулер. Орналастырулар және алмастырулар

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен k элемент бойынша құралған терулер деп әрқайсысы тек құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияларды айтады.

Ескерту. Комбинация деп берілген жиыннан алынатын элементтердің жиынтығын айтамыз. Басқаша айтқанда n элементтен тұратын $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ақырлы жиынынан k элемент бойынша құралған теру деп кез келген k элементтен тұратын A жиынының ішкі жиынын айтады.

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен k элемент бойынша құралған орналастырулар деп әрқайсысы бір-бірінен не құрамы бойынша, не орналасу реті бойынша ажыратылатын комбинацияларды (топтарды) айтады.

Анықтама. Берілген әртүрлі n элементтен n элемент бойынша құралған алмастырулар деп әрқайсысы бір-бірінен тек орналасу реті бойынша ғана ажыратылатын комбинацияларды (топтарды) айтады.

Келесі белгілеулерді енгізейік:

C_n^k немесе $\binom{n}{k}$ – n элементтен k бойынша анықталған әртүрлі терулердің саны;

A_n^k немесе $(n)_k$ – n элементтен k бойынша анықталған әртүрлі орналастырулардың саны;

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (n факториал деп оқылады); $0! = 1$.

P_n – n элементтен n бойынша анықталған алмастырулардың саны.

Теорема. Кез келген k және $n \geq k$ натурал сандары үшін келесі теңдіктер орынды:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad P_n = n!, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Салдар. $k \leq n$ немесе $1 \leq k < n$ шарттарын қанағаттандыратын кез келген k, $n \in N_0$ сандары үшін а) $C_n^k = C_n^{n-k}$, б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ теңдіктері орындалады.

Теорема. Кез келген n натурал саны және кез келген a, b сандары үшін Ньютон биномы орынды:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n.$$

Дәлелдеуін n саны бойынша толық математикалық индукция тәсілі арқылы жүргізейік. $n = 1$ болғанда теңдік әлбетте дұрыс. Енді барлық $n \leq k$ үшін Ньютон биномы дұрыс деп ұйғарып, оның дұрыстығын $n = k + 1$ үшін дәлелдейік, мұндағы $k \in N$. Сонда

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \cdots + C_k^k b^k\right).$$

C_n^k терулер саны үшін б) теңдігін пайдаланып, соңғы теңдіктің оң жағындағы өрнектерді көбейтіп, ашып жазайық:

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^1 + C_k^0) a^k b + (C_k^2 + C_k^1) a^{k-1} b^2 +$$

$$+ \cdots + \left(C_k^k + C_k^{k-1}\right) a b^k + C_k^k b^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{k+1} b +$$

$$+ C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Бұдан $n = k + 1$ үшін теңдіктің дұрыстығын көреміз.

Ескерту. Ньютон биномының формуласы қос мүшенің немесе $a + b$ биномының бүкіл натурал дәрежесін айқын түрде табады. Осыған байланысты C_n^k сандарын биномдық коэффициенттер деп атайды.

1-салдар. Кез келген $n \in N$ үшін

в) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$;

г) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$;

д) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

арақатынастары орындалады.

2-салдар. $C_n^k - n$ элементтен тұратын жиыннан k элемент бойынша құралған ішкі жиындардың жалпы санын көрсететінін ескерсек, онда n элементтен тұратын жиынның бүкіл ішкі жиындарының саны 2^n тең.

Әдетте n элементтен тұратын $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ жиынынан k элемент бойынша құралған топтарды $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ түрінде жазады. Бұл топтардың жалпы саны $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Демек орналастырулардың жалпы саны бастапқы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ жиынының элементтерінің табиғатына байланыссыз анықталады. Олай болса $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ жиынының орнына $A = \{1, 2, \dots, n\} = \overline{1, n}$ жиынын қарастыруға болады.

$\overline{1, n}$ жиынынан құралатын бүкіл түрлі-түрлі алмастыруларды қарастырайық. Сонда n элементтен барлығы $P_n = n!$ алмастырулар құруға болады.

Анықтама. Қайсыбір $S = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ алмастыру берілсін дейік. Егер бұл алмастыруда үлкен i_l саны кіші i_k санынан кейін орналасатын болса, яғни $l < k$; онда бұл сандар инверсия (ретсіздік) құрайды деп айтамыз.

Мысал. $(3, 2, 5, 1, 7, 4, 6)$ алмастыруында инверсия саны 7-ге тең.

Анықтама. Егер инверсия саны жұп болса, онда алмастыруды жұп, ал кері жағдайда тақ деп атайды. Мысалы (1, 2, 3, ... , n) алмастыруында инверсия саны 0, демек ол жұп. Осы алмастыруда 1 және 2 сандарының орындарын ауыстырсақ, онда инверсия саны бірге тең болады, демек $(2, 1, 3, \dots, n)$ алмастыруы тақ.

Анықтама. Алмастырудағы кез келген екі элементтің бір-бірімен орын ауыстыруын ***транспозиция*** деп атаймыз.

Теорема. Егер S' алмастыруы S алмастыруынан бір транспозицияның көмегімен алынса, онда S және S' алмастыруларының жұптылықтары әртүрлі.

Екі жағдай қарастырайық.

1. α және β элементтері іргелес орналасқан $S = (s_1, \alpha, \beta, s_2)$ алмастыруын қарастырайық. Келесі қадамда α және β элементтерін бір-бірімен орындарын ауыстырайық, сонда транспозициядан кейін $S' = (s_1, \beta, \alpha, s_2)$ алмастыруын аламыз. Мұнда s_1 мен s_2 - α және β элементтерінің сәйкес сол және оң жақтарында орналасқан

элементтерден құралған алмастыруларды көрсетеді. s_1 және s_2 алмастырулары транспозициядан кейін де жұптылықтарын сақтайды. Сондықтан S' алмастыруында инверсия саны S алмастыруындағы инверсия санынан не бірге артық немесе бірге кем. Демек, бұл алмастырулардың біреуі жұп, ал екіншісі тақ.

2. Енді жалпы жағдайды қарастырайық. α және β элементтері қатар орналаспаған $S = (s_1, \alpha, i_1, i_2, \dots, i_k, \beta, s_2)$ алмастыруын қарастырайық.

Бұл жағдайда α, β элементтерінің транспозициясын келесі түрде іске асырамыз. Алдымен α-ны біртіндеп $i_1, i_2, \dots, i_k$ элементтерінің орындарымен ауыстырамыз, содан кейін β-ны кері бағытта біртіндеп α, $i_k, \dots$, i_2, i_1 элементтерінің орындарымен ауыстырамыз. Сонда қатар орналасқан элементтер арқылы жүргізілген транспозицияның жалпы саны $2k+1$, демек S алмастыруынан $S' = (s_1, \beta, i_1, i_2, \dots, i_k, \alpha, s_2)$ алмастыруына көшкенде жұптылық $2k+1$ рет өзгереді. Бұдан S және S' алмастыруларындағы жұптылық әртүрлі болатыны шығады, өйткені $2k+1$ саны тақ.

Салдар. Егер $n > 1$ болса, онда $\overline{1,n}$ жиынындағы жұп алмастырулардың саны осы жиындағы тақ алмастырулардың санына тең және $n!/2$ тең.

$P(A) = P(\overline{1,n})$ жиынында $\delta(s) = (-1)^{\gamma(s)}$ формуласымен анықталатын жұптылық функциясын енгізейік, мұнда $\gamma(s) -$ S алмастыруындағы инверсия саны. $\delta(s)$ функциясының қайсыбір қасиеттерін атап өтейік.

1-тұжырым. Егер $A = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ кестесі $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & n \end{pmatrix}$ кестесінен бағандарды алмастырулар арқылы алынса, онда $\delta(j_1, j_2, \dots, j_n) =$ $= \delta(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Мұнда $(i_1, i_2, \dots, i_n) - (\overline{1,n})$ жиынының алмастыруын көрсетеді.

2-тұжырым. Егер $S = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in P(\overline{1,n})$ және $k \in \overline{1,n}$ болса, онда $\delta(s) = \delta(i_1, i_2, \dots, i_k)\delta(i_{k+1}, \dots, i_n)(-1)^r$, мұнда $r = i_1 + \dots + i_k - (1 + \dots + k)$.

Жаттығулар

Теңдіктерді дәлелдеңдер:

1. $\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k;\ m, n, k \in N;\ k \le m;\ k \le n.$

2. $\sum_{i=0}^{n} iC_n^i = n \cdot 2^{n-1}.$

3. $s_1,\ s_2 \in P(\overline{1,n})$ дейік. $s_1,\ s_2$ алмастыруларының құрамындағы инверсия сандары сәйкес $t_1,\ t_2$. s_1 алмастыруынан s_2 алмастыруына көшу $t_1 + t_2$ транспозициясының көмегімен жасалғанын дәлелде.

Логика элементтері. Жиындар теориясы ұғымдарымен қатар қазіргі математикада математикалық логика элементтері де кеңінен қолданылады. Арнайы курстарда математикалық логика түпкілікті түрде толықтай беріледі. Бұл жерде біз тек негізгі логикалық амалдардың белгілеулеріне тоқталамыз және оларды тұжырымдауды қысқаша жазу үшін пайдаланамыз.

Логика – бұл адам ойлауының түрлері мен заңдары туралы, оның ішінде дәлелдеуге болатын мағыналы математикалық сөйлемдердің, яғни пікірлердің заңдылықтары туралы ғылым.

Математикалық логиканың басты заңдарын Аристотель жүйеледі. Ал Джордж Буль алғашқылардың бірі болып ғылыми еңбектерінде бұл заңдылықтарды пайдаланды. Ол өз алдына ерекше алгебраны – барлық объектілерге, атап айтқанда сандар, әріптерден бастап сөйлемдерге дейін қолдануға болатын белгілеулер мен ережелердің жүйесін ойлап тапты. Пікірлер математикалық логиканың негізгі объектілерін (нысандарын) құрайды.

Әдетте пікір ұғымы деп бір мезгілде ақиқат және жалған болуы мүмкін емес кез келген тұжырымды айтады. Демек пікір не ақиқат, не жалған мәндердің бірін қабылдайды.

$\wedge$ немесе $\&$ конъюнкция, $\vee$ дизъюнкция, $\Rightarrow$ импликация және $\neg$ теріске шығару логикалық амалдар жиыны пікірлер алгебрасының негізгі амалдары болып саналады. Алғашқы үшеуі қазақ тілінде екі тұжырымды біріктіретін “және’’, “немесе’’, “егер ..., онда’’ жалғаулықтарына сәйкес келеді, ал теріске шығару “жоқ’’ демеулік қосымшасына сәйкес. Сонда қос тұжырымды біріктіретін пікірлер кестесі бастапқы пікірлердің мәндері бойынша анықталады (1-кесте).

1-кесте

A	B	$A\&B$	$A\vee B$	$A \Rightarrow B$	$\bar{A}$
а	*а*	*а*	*а*	*а*	*ж*
а	*ж*	*ж*	*а*	*ж*	*ж*
ж	*а*	*ж*	*а*	*а*	*а*
ж	*ж*	*ж*	*ж*	*а*	*а*

Ескерту. $A \Rightarrow B$ импликациясына ерекше назар аударыңыз. Ол A ақиқат B жалған болғанда, тек сонда ғана жалған болады.

Дербес жағдайда, егер $A \equiv a$ болса, онда $A \Rightarrow B$ пікірі ақиқат, бірақ бұл A пікірінің ақиқат екенін білдірмейді, ол әртүрлі болуы мүмкін. Мұндайда қазақтар “өтірік өрге баспайды” деп тұжырымдайды.

I. $\vee$ дизъюнкция ережесі: $P\vee Q$ пікірі (“P немесе Q” деп оқылады) P және Q пікірлерінің ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда және тек сонда ғана ақиқат.

II. $\wedge$ конъюнкция ережесі: $P \wedge Q$ пікірі ("P және Q" деп оқылады) P және Q пікірлерінің екеуі де ақиқат болғанда және тек сонда ғана ақиқат.

III. $\neg$ теріске шығару: $\neg P$ ("P-ға кері" деп оқылады) P жалған болғанда және тек сонда ғана ақиқат.

IV . $\Rightarrow$ импликация ережесі: $P \Rightarrow Q$ пікірі ("егер P, онда Q" немесе "P-дан Q шығады" деп оқылады) Q пікірі ақиқат немесе екі пікір де жалған болғанда, тек сонда ғана ақиқат.

V. $\Leftrightarrow$ эквиваленттілік (немесе парапарлық, баламалылық) ережесі: $P \Leftrightarrow Q$ пікірі екеуі де бір мезгілде ақиқат, әлде бір мезгілде жалған болғанда және тек сонда ғана ақиқат.

Көптеген математикалық пайымдауларды талдау үшін пікірлер логикасында қолданылатын амалдар жеткіліксіз. Өйткені логикалық алгебрада пікірдің не құрылымы, не оның мазмұны қарастырылмайды. Бірақ та ғылымда және оның практикалық салаларында пікірлердің құрамы мен мазмұнына байланысты тұжырымдар кеңінен пайдаланылады.

Бұдан пікірлер логикасын кеңейту туралы қажеттілік туындайды. Басқаша айтқанда пікірлер логикасында қарастырылатын элементар пайымдаулардың құрамын және мазмұнын зерттейтін логикалық жүйені құру керек.

Дәстүрлі формальдық логика сияқты элементар пайымдауларды субъектілерге жіктеуді предикаттар логикасы атқарады.

Субъект – айтылған пікірдегі ойды, ал предикат – субъект туралы ойды нақтылау. Қысқаша айтқанда предикат логикалық функцияның рөлін атқарады.

Мысалы "11 – жай сан" пікірінде "11" – субъект, "жай сан" – предикат. Бұл пікір "11" "жай сан" болу қасиетіне ие деп пайымдайды.

Егер қарастырылып отырған мысалда 11 санын натурал сандар жиынынан алынған айнымалы x-пен алмастырсақ, онда "x – жай сан" айтылымы пікірлік форманы береді. x-тің кейбір мәндерінде (мысалы: $x = 3, x = 7$) бұл форма ақиқат пікірді береді, ал $x = 4$ үшін бұл форма жалған пікірді береді.

Анықтама. Қайсыбір M жиынында анықталған және осы жиында $\{a; ж\}$ мәндерінің тек біреуін қабылдайтын бір айнымалының $P(x)$ функциясын бір орынды предикат деп атайды. Мұнда M жиыны предикаттың анықталу облысы деп аталады.

Предикаттың тек ақиқат мәндер қабылдайтын $I_P \subset M$ жиынын $P(x)$ предикатының ақиқаттық облысы деп атайды.

$P(x)$ – "x – жай сан" предикаты M жиынында анықталсын дейік, сонда бүкіл жай сандар жиыны оның I_P ақиқаттық облысы болады.

Анықтама. $M = M_1 \times M_2$ жиынында анықталған және осы жиында $\{a; ж\}$ мәндерінің бірін қабылдайтын екі айнымалының $P(x, y)$ функциясын екі орынды предикат деп атайды.

Екі орынды предикатқа мысал ретінде $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ жиынында анықталған: $Q(x, y) -$ "$x = y$" теңдік предикаты мен $F(x, y) -$ "$x \| y$" x түзуі y түзуіне параллель предикаттарын жатқызуға болады.

n орынды предикаттар да осыған ұқсас мағынада анықталады. Жалпы жағдайда n орынды предикат құрамындағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалыларына нақты мәндер бергенде пікірге айналатын $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ қатынасын түсінеміз.

Күрделі сөйлемдерді логикалық амалдардың көмегімен жазамыз. Ал формуладағы бұл амалдардың орындалу ретін (кезегін) жақшаларға алу қағидасы арқылы анықтаймыз.

Кейде жақшаларды қысқарту мақсатында логикалық амалдардың реттерін тағайындайтын "алғашқылық келісім шарты" қабылданады.

Теріске шығару амалы әрқашан бірінші орындалады, сондықтан оны жақшаға алмайды. Екінші орындалатын амал – конъюнкция, содан кейін – дизъюнкция, артынша – импликация, ең соңында эквиваленттілік орындалады.

Пікірлер сияқты предикаттарға да конъюнкция, дизъюнкция, импликация және теріске шығару логикалық амалдарын қолдануға болады. Нәтижесінде күрделі предикаттар алынады.

Жоғарыда айтылған ережеге сай $\bar{P} \wedge Q \vee \bar{Q} \wedge P \Rightarrow \bar{Q}$ формуласын алғашқы келісім шартқа сүйене отырып келесі түрде жақшаларға аламыз $\big((\bar{P}) \wedge Q\big) \vee \big((\bar{Q}) \wedge P\big)) \Rightarrow (\bar{Q})$.

Күрделі пікірлер тікелей тек логикалық байламдар арқылы құралады екен деген ойдан алшақ болу керек. Предикаттар мен кванторлардың көмегімен де күрделі пікірлерді алуға болады.

Квантор ұғымына тоқталайық. Предикаттың ақиқаттық облысын шектейтін логикалық амал – ***квантор*** ұғымын береді. Көбінесе жалпылық кванторы (белгілеуі – $\forall$, оқылады: "кез келген …", "барлық ... үшін" немесе "әрбір …") және бар болу кванторы (белгілеуі – $\exists$, оқылады: "табылады ..." немесе "қайсыбір ...") қарастырылады.

• $\forall x P(x)$ пікірі $P(x)$ предикатының ақиқаттық облысы мен x айнымалысының қабылдайтын мәндер облысы бірдей дегенді білдіреді ("Барлық x үшін тұжырым дұрыс").

• $\exists x\ P(x)$ пікірі $P(x)$ предикатының ақиқаттық облысы бос емес екенін білдіреді. ("Қайсыбір x үшін тұжырым дұрыс").

Формулаға кванторды таңу математикалық логикада байланыстыру немесе кванторлау деп аталады.

n орынды $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикаты берілсін дейік. Егер $x \in (a_1, a_2, \dots, a_n)$ болса, онда

$$\exists x \ F(x) = F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n),$$

$$\forall x \ F(x) = F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n)$$

теңдіктері кванторлар мен пікірлер алгебрасының амалдарының арасындағы байланысты көрсетеді.

Негізгі парапарлықтар (логика заңдары)

1. $\overline{\forall x \ F(x)} \sim \exists x \ \overline{F(x)}$.
2. $\overline{\exists x \ F(x)} \sim \forall x \overline{F(x)}$.
3. $\forall x \ F_1(x) \ \wedge \forall x \ F_2(x) \sim \forall x \ (F_1(x) \ \wedge F_2(x))$.
4. $\exists x \ F_1(x) \vee \exists x \ F_2(x) \sim \exists x \ \big(F_1(x) \vee F_2(x)\big)$.
5. $\forall \ x_1, x_2 \ F(x_1, x_2) \sim \forall \ x_2, x_1 \ F(x_1, x_2)$.
6. $\exists \ x_1 \ \exists x_2 \ F(x_1, x_2) \sim \exists \ x_2 \ \exists \ x_1 \ F(x_1, x_2)$.

Предикаттар қисабынан шығатын кейбір формулалар

1. $\forall x \ F(x) \Rightarrow F(x)$.
3. $\forall x \ F(x) \Rightarrow \exists x$.
2. $F(x) \Rightarrow \exists x \ F(x)$.
4. $\forall x \ (F(x) \vee \overline{F(x)})$.
5. $\forall x_2 \ \big(F_1(x_1) \ \Rightarrow \ (F_2(x_2) \ \Rightarrow \ F_1(x_1))\big)$.
6. $\forall x_1, x_2 \ \Big(\big(F_1(x_1) \ \Rightarrow \ (F_2(x_2) \ \Rightarrow \ F_1(x_1))\big)\Big)$.
7. $\exists x_1, \forall x_2 \ F(x_1, x_2) \Rightarrow \forall x_2 \ \exists x_1 \ F_1(x_1, x_2)$.

Жалпы жағдайда предикаттың әртүрлі айнымалыларына кванторларды таңу арқылы алынған пікірдің ақиқаттығы осы кванторлардың орналасу реттеріне байланысты екенін естен шығармау керек. Мысалы, “$\forall x \in N, \exists y \in N: (x < y)$” пікірі ақиқат, ал керісінше “$\exists y \in N, \forall x \in N: (x < y)$” пікірі жалған.

Жаттығу

1. $f: A \to B$ бейнелеуі берілсін дейік. Сонда логикалық символдар арқылы берілген шарттар қандай бейнелеулерді анықтайды? $\forall a_1, a_2 \in A: \ \Big((a_1 \neq a_2) \ \Rightarrow \ \big(f(a_1) \neq f(a_2)\big)\Big)$ және $\forall b \in B, \exists a \in A: (f(a) = b)$

2. КОМПЛЕКС САНДАР

Мектеп қабырғасында математика пәнінде натурал, рационал, иррационал және осы аталған жүйелерді біріктіретін нақты сандар жүйесімен таныстық. Әрі қарай математикада бұлардан өзгеше басқа сандар жүйесі қолданыла ма деген заңды сұрақ туады. Қойылған сұраққа жауап ретінде жоғары оқу орындарында көбінесе комплекс айнымалы функциялар теориясын өтеді.

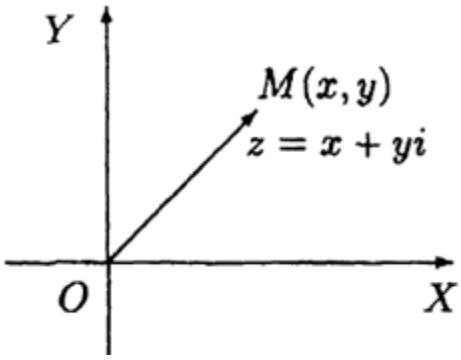
Комплекс айнымалы функциялар теориясын кейбір жаратылыстану есептерінің қойылымында қолдану мүлдем күтпеген жерден есептің шешімін тауып, физикалық тұрғыдан қызықты нәтижелер алуға себеп болды.

Комплекс санды У. Р. Гамильтон белгілі бір ретпен алынған қос $(x; y)$ екі нақты сан ретінде анықтаған. Бұл қос $(x; y)$ екі нақты санды математиктер тұтас бір объект (нысан) ретінде қабылдап, оны комплекс сан деп атап $z = x + iy$ арқылы бір әріппен белгілеген. Мұндағы $''i''$ таңбасы тек қосақтағы бір нақты санды осы қосақтағы екінші нақты саннан бөлектеу үшін қолданылған. Сонда $''+''$ таңбасы қосақтағы екі нақты санды біріктіретін символ ретінде қарастырылады.

Комплекс санның алгебралық формасы және геометриялық кескіні. Комплекс сандар алгебрасы.

Евклид жазықтығында бекітілген XOY тік бұрышты координаталар жүйесіне қатысты қарастырылатын $M(x, y)$ ағымдық нүктесінің орны $z = x + iy$ комплекс саны арқылы анықталсын дейік (2.1-сурет). Мұндағы $x, y -$ нақты сандар, ал i символы $i^2 = -1$ теңдігі орындалатындай және элементар алгебра курсынан белгілі жорамал бірлік. Сондықтан $z = x + iy$ түріндегі бүкіл комплекс сандар жиыны мен евклид жазықтығының барлық $M(x, y)$ нүктелерінің арасында бірмәнділік сәйкестік орнатуға болады, яғни $\{M(x, y)\} \leftrightarrow \{z\} = \{x + iy\}$.

Сонымен $z = x + iy$ комплекс санының геометриялық кескіні ретінде $M(x, y)$ нүктесін немесе осы нүктеге тиісті $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$ радиус-векторын сәйкестендіруге болады. $x + 0 \cdot i = x$ нақты сандары OX осінің бойындағы нүктелер арқылы бейнеленеді, сондықтан OX осін нақты ось деп атайды, ал yi жорамал сандары OY осінің бойындағы нүктелер арқылы бейнеленеді.



2.1-сурет

Комплекс санның бірінші компонентасын оның нақты бөлігі деп атап, $x = Rez$ арқылы белгілейді. Ал екінші компонентасы оның жорамал бөлігі деп аталады және $y = Imz$ арқылы белгіленеді. Егер $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ болғанда және тек сонда ғана $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары өзара тең деп аталады, яғни бұл сандардың жазықтықтағы сәйкес кескіндері беттеседі.

Комплекс санның

$$z = x + iy \tag{2.1}$$

түрінде жазылуын оның алгебралық түрі деп атайды. Комплекс санның алгебралық түрде жазылуынан оның геометриялық интерпретациясы шығады. Сонда берілген комплекс санға сәйкес келетін нүктенің координаталары табылады.

$x - iy$ комплекс саны $z = x + iy$ комплекс санының түйіндесі деп аталады және $\bar{z}$ арқылы белгіленеді:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Кез келген z комплекс саны үшін $\overline{(\bar{z})} = z$ теңдігінің дұрыстығы айқын. Комплекс санның анықтамасынан z комплекс саны нақты болғанда және тек сонда ғана $z = \bar{z}$ теңдігі орындалады. Комплекс жазықтығында z және $\bar{z}$ нүктелері нақты оське қатысты симметриялы, өйткені $\bar{z} = x + i(-y)$.

Комплекс жазықтығы $-\mathbb{C}$ комплекс сандар өрісінде изоморфты екі өлшемді нақты $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ кеңістігін құрайды. Мұндай кеңістіктің әрбір нүктесі (x, y) түріндегі реттелген қосақтардан тұрады.

Комплекс санның нақты және жорамал бөліктері z және $\bar{z}$ арқылы келесі түрде өрнектеледі:

$$Rez = \frac{z+\bar{z}}{2},\quad Imz = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Түйіндес қасиетінің іргелілігі:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$z \cdot z_2 = z_1$ және $\bar{z} \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1$ теңдеулерінің шешімі z_1/z_2 бөліндісі болады, сондықтан

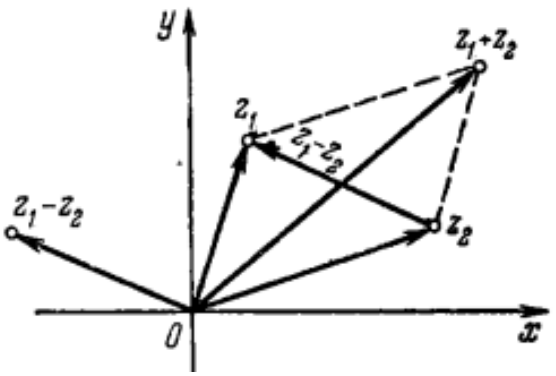
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}.$$

Сонымен қоса, егер $R(z_1, z_2, \dots) - z_1, z_2, \dots$ комплекс сандарынан құралған рационал өрнек болса, онда

$$\overline{R(z_1, z_2, \dots)} = R(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots).$$

Бұдан $c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n = 0$ теңдеуінің түбірі ζ болса, онда $\bar{\zeta}$ комплекс саны $\bar{c}_0 z^n + \bar{c}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{c}_{n-1} z + \bar{c}_n = 0$ теңдеуінің түбірі болады. Дербес жағдайда, егер бұл теңдеулердің коэффициенттері нақты болса, онда ζ және $\bar{\zeta}$ комплекс сандары бір мезгілде теңдеудің түбірлері болады.

Жоғарыда комплекс жазықтығының әрбір ағымдық нүктесіне $\overrightarrow{OM}$ радиус – векторы сәйкестендірілетіні айтылған. Өз кезегінде $\{\overrightarrow{OM}\}$ радиус-векторлар жиыны векторлық қосу мен нөлден өзгеше нақты санға көбейту амалдарына қатысты векторлық кеңістік құрайды. Демек $\mathbb{C}$ комплекс сандар жиыны мен L векторлық кеңістігінің араларында бірмәнділік сәйкестік бар. Бұл бірмәнділік сәйкестік изоморфты болады. Өйткені $z_1 \leftrightarrow \overrightarrow{OM}_1$, $z_2 \leftrightarrow \overrightarrow{OM}_2$ сәйкестіктерінен $z_1 + z_2 \leftrightarrow \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$ және $\lambda z \leftrightarrow \lambda \overrightarrow{OM}$ сәйкестіктері шығады. Бұдан изоморфтылық шартына сүйене отырып, комплекс сандарды қосу және нақты санға көбейту амалдарын анықтаймыз.



2.2-сурет

1. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ дейік (2.2-сурет). z_1 және z_2 комплекс сандарының қосындысы деп $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2)$ комплекс санын айтамыз. Бұл сандардың айырымы деп $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ комплекс саны айтылады. z_1 және z_2 нүктелерінің арақашықтығы $|z_1 - z_2|$ модулінің мәніне тең (2.2-сурет).

$z = x + iy$ комплекс санын нөлден өзгеше λ нақты санына көбейткенде $\lambda z == \lambda x + i\lambda y$ комплекс саны шығады.

Ozz_1 үшбұрышында (2.2-сурет) Oz қабырғасы оның қалған екі қабырғасының қосындысынан артпайды. Демек $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ үшбұрыш теңсіздігі орындалады. Теңдік z_1 және z_2 векторлары бағыттас болғанда және тек сонда ғана орындалады.

2. Комплекс сандарды көбейту амалына тоқталайық. Алдымен $i \cdot i = i^2$ көбейтіндісі қарастырылады. Анықтама бойынша $i^2 = -1$. Бұл анықтаманың түбегейлі маңыздылығына оқырманның назарын аударайық, және неліктен $i^2 = -1$ болу себебін түсіндіруге тырысайық.

Ол үшін алгебралық амал дегеніміз не деген сұраққа жауап іздейік. Егер қайсыбір A жиынының белгілі бір ретпен алынған әрбір қос элементіне осы жиынға тиісті элементті өзара бірмәнді сәйкестілік арқылы анықтайтын заңдылық тағайындалса, онда A жиынында алгебралық амал анықталған деп айтады.

Комплекс сандарды көбейткенде нақты сандарды көбейту және жақшаларды ашу ережелері сақталсын деп ұйғарым жасайық. Сонда

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2.$$

Бұдан теңдіктің оң жағындағы өрнек $\mathbb{C}$ комплекс сандар жиынына тиісті болуы үшін $i^2 = -1$ не $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ теңдіктерінің бірі орындалуы қажет. $i^2 = -1$ болғанда комплекс сандар теориясы, ал $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ болғанда жалпы комплекс сандар теориясы қарастырылады.

Комплекс сандар өрісінің ішкі құрылымы болатын жалпы комплекс сандар теориясынан алғашқы мәліметтерді бере кетейік.

Алғашқы ұғымдар. Элементтері реттелген $z = x + py = (x; y)$ түріндегі G сандар жиынын қарастырайық, мұнда $p -$ қандай да бір арнайы символ және $py = yp$ деп қабылдайық. Осы жиында алгебралық амал енгізетін болсақ, мысалы – көбейту, онда әрбір z_1 және z_2 сандарының көбейтіндісі осы жиында жату үшін $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ түрінде алынады. Өйткені z_1, z_2 сандарының көбейтіндісі

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + py_1)(x_2 + py_2) = x_1x_2 + p(x_1y_2 + y_1x_2) + p^2y_1y_2$$

G жиынына тиісті болуы үшін p символының квадраты $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ сызықтық өрнегі арқылы анықталуы қажетті және жеткілікті.

Неліктен $z = x + py$ саны жалпы комплекс сан деп аталады? Осы сұраққа жауап беру үшін келесі дербес жағдайларды қарастырайық:

1. Егер $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$ болса, онда $z = x + py \equiv x + iy$ комплекс санын анықтайды;

2. Егер $\theta_0 = -1$, $\theta_1 = 0$ болса, онда $z = x + py$ қосарланған санды (двойное число) анықтайды;

3. Егер $\theta_0 = \theta_1 = 0$ болса, онда $z = x + py$ қос санды (дуальное число) анықтайды. Мұнда $p^2 = 0$.

Амалдар қолдану. Жалпы комплекс сандар жиынында арифметикалық амалдарды келесі түрде енгізейік:

Қосу: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + p(y_1 + y_2)$;

Нақты саға көбейту: $\lambda z = \lambda x + p\lambda y$;

Азайту: $z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2 = x_1 - x_2 + p(y_1 - y_2)$;

Көбейту: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - \theta_0y_1y_2) + p(x_1y_2 + y_1x_2 + \theta_1y_1y_2)$.

Егер жалпы комплекс санның түйіндесін $\bar{z} = x + \theta_1y - py$ түрінде алсақ, оның модулінің квадраты төменгі өрнек арқылы беріледі:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + \theta_1xy + \theta_0y^2.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + py_1}{x_2 + py_2} = \frac{x_1x_2 + \theta_0y_1y_2 + \theta_1x_1y_2}{x_2^2 + \theta_1x_2y_2 + \theta_0y_2^2} + p\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + \theta_1x_2y_2 + \theta_0y_2^2};$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x + py} = \frac{x + \theta_1y}{x^2 + \theta_1xy + \theta_0y^2} + p\frac{-y}{x^2 + \theta_1xy + \theta_0y^2.}$$

Әрі қарай комплекс сандар теориясын университеттің оқу бағдарламасына сай қарастырайық.

Сонымен $i^2 = -1$ деп санап, z_1 және z_2 комплекс сандарының көбейтіндісін анықтайық:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Көбейту ережесіне сай комплекс санның модулінің квадраты келесі теңдік арқылы анықталады:

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Комплекс сандардың қосу және көбейту ережелерінен

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

қасиеттері шығады.

3. Комплекс сандарды бөлу көбейтуге кері амал ретінде анықталады. Алгебралық түрде берілген z_1 және z_2 комплекс сандарының z_1/z_2 бөліндісін табу үшін бөлшектің алымын да, бөлімін де бөлімінің $\bar{z}_2$ түйіндесіне көбейтеміз:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Мысал. $z=3-i+\frac{2i}{1+i}$ комплекс санын алгебралық түрде жазыңыз.

Шешуі. Бөлшектің алымын да, бөлімін де бөлімінің түйіндісіне көбейтеміз. Сонда $z=3-i+\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=3-i+\frac{2i(1-i)}{2}=3-i+i+1=4.$

Бұдан $Rez=4, Imz=0.$

Мысал. Комплекс жазықтығында $\left|\frac{2z}{1+z^2}\right|<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелердің жиынын кескіндеңіз.

Шешуі. Комплекс санның модулінің анықтамасы бойынша

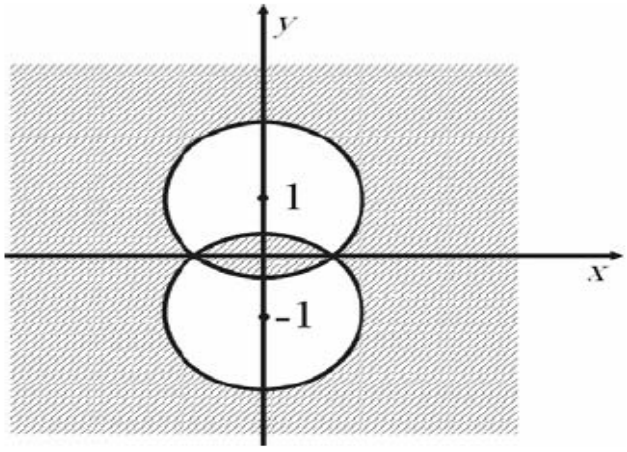
$$\left|\frac{2z}{1+z^2}\right|=\frac{2|z|}{|1+z^2|}=\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}<1.$$

Теңсіздіктің екі жағы да оң шама. Демек екі жағын бірдей квадратқа шығарып, радикалдардан құтылуға болады:

$$4(x^2+y^2)<(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2.$$

Бұдан $(1-x^2-y^2)^2-4y^2>0$ теңсіздігін аламыз. Теңсіздіктің сол жағын $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ формуласы бойынша жіктегенде $[x^2+(y+1)^2-2][x^2+(y-1)^2-2]>0$ теңсіздігі шығады. Сонда ізделініп отырған комплекс жазықтығындағы нүктелердің жиыны екі теңсіздіктер жүйесі арқылы анықталады:

$$\begin{cases}x^2+(y+1)^2>2,\\x^2+(y-1)^2>2\end{cases}$$ және $$\begin{cases}x^2+(y+1)^2<2,\\x^2+(y-1)^2<2.\end{cases}$$



2.3-сурет

2.3-суретте комплекс жазықтығының штрихталған бөліктері жоғарыдағы қос теңсіздіктер жүйесінің шешімдерін көрсетеді.

Комплекс санның модулінің негізгі қасиеттерін атап өтейік. Анықтамадан $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ және

$|\bar{z}| = |z|$ теңдіктері шығады. Комплекс сандардың көбейтіндісінің модулінің квадраты $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$ теңдігімен анықталады. Бұдан $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Егер $z_2 \neq 0$ болса, онда z_1/z_2 бөліндісін келесі түрде жазайық

$$z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = z_1 \Rightarrow |z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|, \qquad \text{сонда} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Келесі қадамда комплекстік талдау курсында жиі қолданылатын бірқатар теңсіздіктерге тоқталайық. Комплекс сандар жиынында элементтерінің арасында бір-бірінен үлкен, кіші ұғымдары анықталмаған. Бір сөзбен айтқанда комплекс сандар жиыны реттелмеген. Сондықтан бүкіл теңсіздіктер нақты сандарға қатысты қарастырылады. Модульдің сипаттамасынан

$$|-z| \leq Rez \leq |z|, \;\; |-z| \leq Imz \leq |z|$$

теңсіздіктері шығады. $Rez = |z|$ теңсіздігі z нақты және ≥ 0 болғанда және тек сонда ғана орындалады. Одан әрі

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) =$$

$$= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + (z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Rez_1 \bar{z}_2 \leq$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Соңғы теңсіздік комплекс сандар үшін үшбұрыштар теңсіздігі деп аталады:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Егер $z_1 \bar{z}_2 \geq 0$ болғанда және тек сонда ғана теңсіздіктің орындалатыны дәлелдеу барысынан көрініп тұр.

$z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$ комплекс санына үшбұрыштар теңсіздігін қолданайық:

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \;\Rightarrow\; |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Осы сияқты $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$ теңсіздігі алынады. Бұл алдындағы теңсіздікпен бірігіп, $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ теңсіздігін береді.

Ең соңында Коши теңсіздігінің комплекстік вариантын дәлелдейік:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right),$$

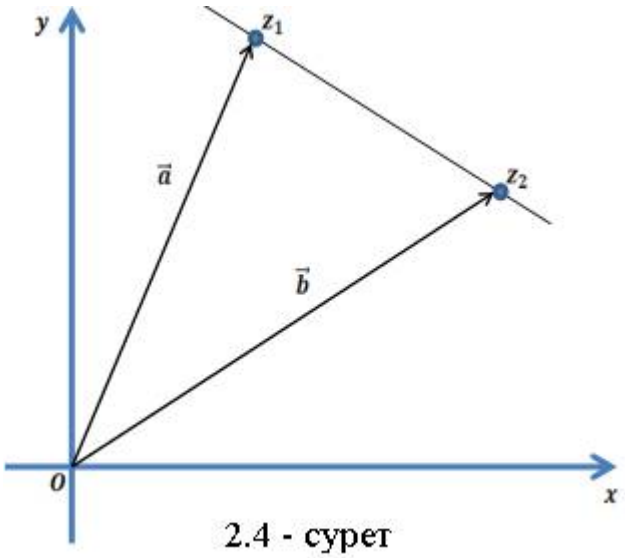
мұнда $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, яғни комплекс сандар.

Коши теңсіздігін дәлелдеу алдында кез келген $\lambda \in \mathbb{C}$ үшін $\sum_{i=1}^{n}|a_i - \lambda b_i|^2 \geq 0$ теңсіздігінің орындалатынын ескереміз. Содан кейін модульдің анықтамасына сүйене отырып қосындыны ашып жазамыз:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\left|a_i - \lambda\bar{b_i}\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \lambda\bar{b_i}\right)\left(\overline{a_\imath - \lambda\bar{b_\imath}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \lambda\bar{b_i}\right)\left(\bar{a_\imath} - \bar{\lambda}b_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 + |\lambda|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\bar{b_\imath}\bar{a_\imath} + \bar{\lambda}a_i b_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 + |\lambda|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 - 2Re\left\{\bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right\}.$$



2.4 - сурет

Мұнда $\lambda = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)/(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2)$ деп алып, Коши теңсіздігінің дұрыстығына көз жеткіземіз.

Мысал. Төбелері $A(z_1)$, $B(z_2)$ және $C(z_3)$ нүктелерінде жататын үшбұрыштың ауданын тап.

Шешуі. $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары берілсін дейік. Комплекс жазықтығында бұл сандар $\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1\}$ және $\boldsymbol{b} = \{x_2, y_2\}$ радиус-векторларымен бейнеленеді (2.4-сурет).

$\bar{z}_1$ және z_2 комплекс сандарының көбейтіндісін құрайық:

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Осы көбейтіндінің нақты бөлігі $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін көрсетеді:

$$Re(\bar{z}_1 z_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Комплекс сандар терминінде $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусы

$$cos\varphi = \frac{Re(\bar{z}_1 z_2)}{|z_1||z_2|}$$

формуласы бойынша табылады.

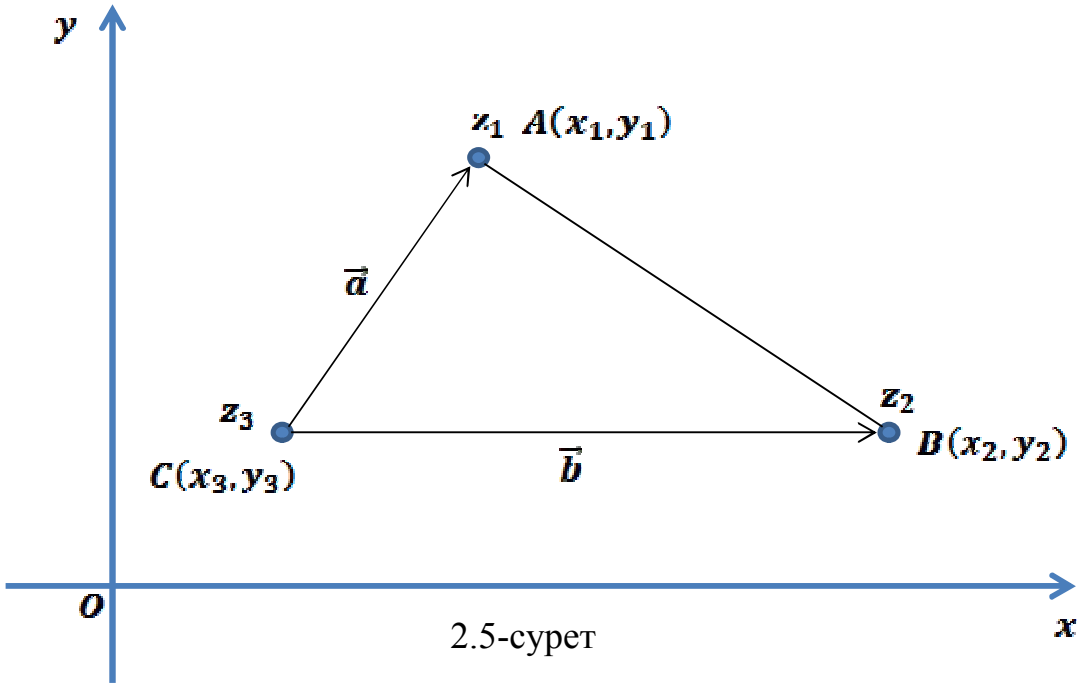
$\bar{z}_1 z$ көбейтіндісінің жорамал бөлігі $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының координаталарынан құралған екінші ретті анықтауышты береді:

$$Im(\bar{z}_1 z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Бұл анықтауыш $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының таңбаға дейінгі дәлдікпен алынған векторлық көбейтіндісінің абсолют шамасына тең.

Өз кезегінде $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісінің абсолют шамасы осы векторлардан тұрғызылған параллелограмның ауданын береді. Демек төбелері $(0,0)$, (x_1, y_1) және (x_2, y_2) нүктелерінде жататын жазық үшбұрыштың ауданы $S = \pm\frac{1}{2} Im(\bar{z}_1 z_2)$ формуласы бойынша анықталады.

Соңғы формуланы төбелері $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ және $C(x_3, y_3)$ нүктелерінде жататын кез келген жазық үшбұрыш үшін де жалпылауға болады (2.5-сурет).



2.5-сурет

Бұл жағдайда C нүктесін $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ векторларының бастапқы нүктесі ретінде қарастырайық. Сонда

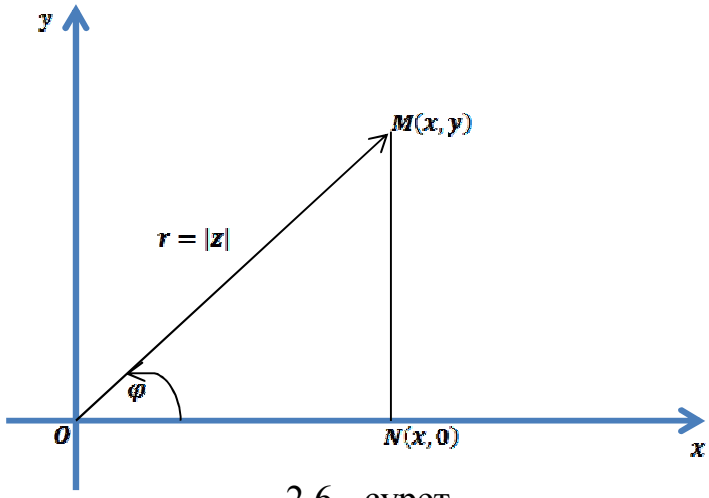
$$\boldsymbol{a} = \{x_1 - x_3, y_1 - y_3\}, \boldsymbol{b} = \{x_2 - x_3, y_2 - y_3\},$$

$$cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{Re(\overline{z_1 - z_3})(z_2 - z_3)}{|z_1 - z_3||z_2 - z_3|},$$

$$S = \pm\frac{1}{2} Im(z_1 - z_3)^*(z_2 - z_3).$$

Комплекс санның тригонометриялық формасы. Аргумент және аргументтің бас мәні

Кейде комплекс санды, яғни комплекс жазықтығында осы санға сәйкес қойылатын нүктенің орнын полярлық координаталар арқылы өрнектеу көп мәселенің шешімін табады. Полярлық координаталар жүйесінің полюсі бас нүктеде, ал полярлық ось OX осінің оң бағытымен бағыттас болсын дейік (2.6-сурет). Сонда OMN тікбұрышты үшбұрышынан $z = x + iy$ комплекс санының геометриялық кескіні болатын $M(x, y)$ нүктесінің координаталарын келесі түрде өрнектейміз: $x = rcos\varphi$, $y = rsin\varphi$. Мұнда комплекс санның $|z| = r$ модулі $M(x, y)$ ағымдық нүктесінен бас нүктеге, яғни полюске дейінгі арақашықтықты білдіреді, ал φ бұрышы $M(x, y)$ ағымдық нүктесінің, яғни $\boldsymbol{OM}$ радиус-векторының полярлық бұрышын көрсетеді.



2.6 - сурет

Комплекс санның полярлық координаталар жүйесінде $z = x + iy = r(cos\varphi + +isin\varphi)$, мұнда $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ түрінде жазылуын оның тригонометриялық формасы деп атайды. Полярлық φ бұрышын z комплекс санының аргументі деп атайды және оны $\varphi = Argz$ арқылы белгілейді.

Комплекс санның модулі $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ теңдігі бойынша бірмәнді анықталады, ал оның аргументі еселігі 2π болатын кез келген қосылғышқа дейінгі дәлдікпен анықталады. Демек комплекс санның аргументі бірмәнді анықталмайды. Сонымен

$$Argz = argz + 2k\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Мұнда $argz$ арқылы $(-\pi, \pi]$ аралығында анықталған аргументтің бас мәні көрсетілген.

Ескерту. Комплекс санның аргументі бірмәнді анықталу үшін нақты ось бойынша $-\infty$ нүктесін координаталар бас нүктесімен қосатын тілік жүргізіледі.

Есеп шығаруға ұтымды құрал ретінде $-\pi < argz \leq \pi$ аралығындағы аргументтің бас мәнін $arctg\frac{y}{x}$ арқылы өрнектейік. Сонда

$$argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{егер } x > 0,\ y \geq 0; \\ \pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{егер } x < 0,\ y \geq 0; \\ -\pi + arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{егер } x < 0,\ y < 0; \\ -arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{егер } x > 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Тригонометриялық түрде берілген комплекс сандардың көбейтуін және бөлуін қарастырайық.

$$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1),\ z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$$

дейік, мұнда $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$. Сонда

$$z_1z_2 = r_1r_2\big((cos\varphi_1cos\varphi_2 - sin\varphi_1sin\varphi_2) + i(sin\varphi_1cos\varphi_2 + cos\varphi_1sin\varphi_2)\big) =$$
$$= r_1r_2\big(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Сонымен комплекс сандарды көбейткенде олардың модульдері көбейтіледі де, ал аргументтері қосылады:

$$\begin{gathered} |z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \\ Arg(z_1z_2) = Argz_1 + Argz_2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

z_1 векторын φ_2 бұрышына бұрып және оның ұзындығын $|z_2|$-ге көбейткенде шығатын z_1z_2 векторы жоғарыдағы формулалардың геометриялық мағынасын білдіреді.

Ақырлы санды комплекс сандар үшін де көбейтудің (2.2) түріндегі қасиеттері орындалады. Мысалы

$$|z_1z_2z_3| = |(z_1z_2) \cdot z_3| = |z_1z_2| \cdot |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|,$$
$$Arg(z_1z_2z_3) = Arg\big((z_1z_2) \cdot z_3\big) = Arg(z_1z_2) + Argz_3$$
$$= Argz_1 + Argz_2 + Argz_3.$$

Дербес жағдайда $|z^n| = \left|\underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n \text{ рет}}\right| = |z|^n = r^n$, $Arg(z^n) = nArgz$.

Сондықтан $z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$.

Тригонометриялық формада берілген z_1, z_2 сандарының z_1/z_2 түріндегі бөліндісін қарастырайық. Егер $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$ болса, онда $\bar{z}_2 = r_2(\cos(-\varphi_2) + isin(-\varphi_2))$.

Сондықтан $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{r_1r_2(cos(\varphi_1-\varphi_2)+isin(\varphi_1-\varphi_2))}{r_2^2},$$

бұдан $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Сонымен комплекс сандардың бөліндісінің модулі олардың модульдерінің бөліндісіне тең, ал бөліндінің аргументі бөлінгіш пен бөлгіштің аргументтерінің айырымына тең:

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, егер $z_2 \neq 0$ болса, онда $Arg\frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2$.

Тригонометриялық түрде берілген комплекс сандардың көбейту анықтамасынан комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару ережесі шығады:

$$z^n = (x + iy)^n = \big(r(cos\varphi + isin\varphi)\big)^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi).$$

Бұдан $$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi \qquad (2.3)$$

теңдігін аламыз. Соңғы теңдік Муавр формуласы деп аталады.

Ескерту. Комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару үшін оны тригонометриялық түрде жазу міндетті емес. Комплекс сандардың көбейту ережесін де пайдаланып табуға болады. Мысалы

$(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - i2xy$; $(x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ т.с.с.

Комплекс санның көрсеткіштік формада жазылуы

Комплекс санның тригонометриялық формасынан оның көрсеткіштік формасына көшу үшін кез келген φ нақты саны үшін

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi \qquad (2.4)$$

теңдігі орындалатын Эйлер формуласының дәлелдеуін қарастырайық.

Айталық e трансценденттік санының $i\varphi$ жорамал дәрежесі қайсыбір $T(\varphi) + iS(\varphi)$ комплекс өрнегіне тең болсын дейік. Яғни

$$e^{i\varphi} = T(\varphi) + iS(\varphi). \qquad (2.5)$$

Мұндағы $T(\varphi)$, $S(\varphi)$ функцияларының аналитикалық түрлері әзірге белгісіз. Оларды анықтау үшін алдымен (2.5) теңдігінің екі жағынан бірдей φ бойынша бірінші және екінші ретті туындыларын табайық:

$$ie^{i\varphi} = T'(\varphi) + iS'(\varphi),$$

$$-e^{-i\varphi} = T''(\varphi) + iS''(\varphi).$$

Бұл екі теңдікті біріктіріп $T''(\varphi) + iS''^{(\varphi)} = -T(\varphi) - iS(\varphi)$ теңдігін жазайық. Соңғы теңдіктен $T(\varphi)$ және $S(\varphi)$ функцияларын анықтау үшін

$$T''(\varphi) + T(\varphi) = 0, \qquad (2.6)$$

$$S''^{(\varphi)} + S(\varphi) = 0 \qquad (2.7)$$

түрлеріндегі біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеулерді аламыз. (2.6), (2.7) теңдеулеріне φ -ге қатысты бастапқы шарттарды анықтайық:

$$T(0) = 1, \quad S(0) = 0;$$
$$T'(0) = 0, \; S'(0) = 1.$$

Сонда (2.6), (2.7) теңдеулерінің жалпы шешімдері келесі түрде жазылады

$$T(\varphi) = c_1 cos\varphi + c_2 sin\varphi,$$
$$S(\varphi) = c_3 cos\varphi + c_4 sin\varphi.$$

Ал бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімдері:

$$T(\varphi) = cos\varphi, \; S(\varphi) = sin\varphi.$$

Табылған өрнектерді (2.5) қойып, Эйлер формуласының дәлелдеуін аяқтаймыз. Сонымен $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$. Демек кез келген нақты φ үшін

$$\varphi = arg e^{i\varphi}, \left|e^{i\varphi}\right| = 1$$

теңдіктері орынды. Дербес жағдайда

$$e^{2\pi i} = 1, \; e^{\pi i} = -1, \; e^{\pi i/2} = i, \; e^{-\pi i/2} = -i.$$

Эйлер формуласынан $e^{-i\varphi} = cos\varphi - isin\varphi$ теңдігін алуға болады. Эйлер формуласы мен соңғы теңдікті мүшелеп қосу және азайту арқылы тригонометриялық функцияларды экспоненталармен өрнектейтін

$$cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

формулаларын аламыз.

Сонымен z комплекс санының $z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi}$ түрінде жазылуын комплекс санның көрсеткіштік түрде жазылуы деп атайды, мұнда $r = |z|$, $\varphi = argz$.

$e^{i\varphi}$ функциясының қайсыбір қасиеттерін атап өтейік:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Экспоненттің бұл қасиеттеріне сүйене отырып, комплекс сандардың көбейту және бөлу формулаларын оңай алуға болады: шынында да

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Комплекс саннан түбір табу

Комплекс саннан бүтін оң дәрежелі түбір табу амалы бүтін оң дәрежеге шығару амалына кері амал ретінде анықталады.

$z^n = a$ биномдық теңдеуін қарастырайық, мұнда $a = \rho e^{i\psi} \neq 0$ комплекс сан, n – натурал бүтін сан. Ал z -ті көрсеткіштік, яғни $z = re^{i\varphi}$ түрінде жазайық. Сонда $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\psi}$ теңдігі $r^n = \rho$, $n\varphi = \psi + 2k\pi$, $k \in z$ теңдіктеріне эквивалентті.

Бұл теңдіктер $z^n = a$ теңдеуінің бүкіл шешімін

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\psi+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\frac{\psi+2k\pi}{n} + isin\frac{\psi+2k\pi}{n}\right], k \in z \qquad (2.8)$$

формуласы түрінде жазуға мүмкіндік береді.

Сонымен биномдық теңдеудің a -ның нөлден өзгеше мәндерінде (2.8) формуласы арқылы табылатын әртүрлі n түбірі бар: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Бұл түбірлердің модульдері бірдей, ал олардың аргументтері бірқалыпты үлестірілген: $\varphi_0 = \frac{\psi}{n}$, $\varphi_1 == \frac{\psi+2\pi}{n}$, …, $\varphi_n = \frac{\psi+2\pi(n-1)}{n}$. Бұл түбірлердің екінші бір ерекшелігі $z_n = z_0$ және сол сияқты $z_{n+1} = z_1$, $z_{-1} = z_{n-1}$ теңдіктері орындалады.

Қорытынды. Комплекс жазықтығында биномдық теңдеудің түбірлері бойынша анықталатын сәйкес нүктелер центрі бас нүктеде радиусы $\sqrt[n]{\rho}$ –ға тең шеңберге іштей сызылған дұрыс n бұрыштың төбелерінде жатады.

Мысал. Келесі қосындыларды табыңыз:

а) $T = cosx + cos2x + \cdots + cosnx$;

б) $S = sinx + sin2x + \cdots + sinnx$.

Шешуі. Екінші теңдікті i - ге көбейтіп, бірінші теңдікке мүшелеп қосайық:

$$T + iS = (cosx + isinx) + (cos2x + isin2x) + \cdots + (cosnx + isinnx).$$

Соңғы теңдікті Эйлер және Муавр формулаларының көмегімен келесі түрде жазайық:

$$T+iS=e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{inx}=\frac{e^{ix}\left(1-e^{inx}\right)}{1-e^{ix}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{Бұл жерде геометриялық прогрессияның қосындысын табу}\\ \text{формуласын пайдаландық}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{e^{ix}e^{i\frac{nx}{2}}\left(e^{i\frac{nx}{2}}-e^{-i\frac{nx}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)}=e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\frac{e^{i\frac{nx}{2}}-e^{-i\frac{nx}{2}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}}=e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{sin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}}.$$

Сонымен $$T+iS=\left(cos\frac{n+1}{2}x+isin\frac{n+1}{2}x\right)\frac{sin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}}.$$

Келесі қадамда $T+iS$ комплекс өрнегінің нақты және жорамал бөліктерін ажыратайық, сонда

$$cosx+cos2x+\cdots+cosnx=cos\frac{n+1}{2}x\frac{sin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}}\quad\text{және}$$

$$sinx+sin2x+\cdots+sinnx=sin\frac{n+1}{2}x\frac{sin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}}$$

қосындыларын табамыз.

Мысал. $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ арақатынасын пайдаланып $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+$ $+y_2^2)=(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+y_1x_2)^2$ тепе-теңдігін дәлелдеңіз.

Шешуі. $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$ дейік. Сонда

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2),\ |z_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2},\ |z_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2},$$
$$|z_1z_2|=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+y_1x_2)^2}.$$

Демек тепе-теңдік орынды.

Мысал. $\sqrt[4]{i}$ немесе $z^4=i$ теңдеуінің барлық түбірлерін табыңыз.

Шешуі. $z^4=i$ теңдеуінің түбірлерін (2.8) формуласы бойынша табамыз. Мұнда $a=i,\ \rho=|a|=1,\ arga=argi=\frac{\pi}{2}=\psi$ және $n=4$. Сонда

$$z_k=cos\frac{\pi/2+2k\pi}{4}+isin\frac{\pi/2+2k\pi}{4},\ k=0,1,2,3.$$

Демек $k=0,1,2,3$ мәндерінде түбірдің әртүрлі төрт мәні алынады:

$$z_0=cos\frac{\pi}{8}+isin\frac{\pi}{8},\ z_1=cos\frac{5\pi}{8}+isin\frac{5\pi}{8}=-cos\frac{3\pi}{8}+isin\frac{3\pi}{8},$$
$$z_2=cos\frac{9\pi}{8}+isin\frac{9\pi}{8}=-cos\frac{\pi}{8}-isin\frac{\pi}{8},$$
$$z_3=cos\frac{13\pi}{8}+isin\frac{13\pi}{8}=cos\frac{3\pi}{8}-isin\frac{3\pi}{8}.$$

Әрі қарай $|cosx| = \sqrt{\frac{1+cos2x}{2}}$, $|sinx| = \sqrt{\frac{1-cos2x}{2}}$ формулаларының көмегімен $cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+cos\pi/4}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-cos\pi/4}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $cos\frac{3\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ мәндерін табамыз. Олай болса

$$z_{0,2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$
$$z_{1,3} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

Мысал. $T = \int_0^\infty e^{-px}\,cosqxdx$ және $S = \int_0^\infty e^{-px}\,sinqxdx$ меншіксіз интегралдарын есептеңіз.

Шешуі. Параметрлердің $p > 0$, $q = \mathbb{R}$ мәндерінде қос интеграл да жинақты.

$$T + iS = \int_0^\infty e^{-px}\,(cosqx + isinqx)dx = \int_0^\infty e^{-px}\cdot e^{iqx}dx = \int_0^\infty e^{(-p+iq)x}\,dx =$$
$$= \frac{e^{(-p+iq)x}}{-p+iq}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-iq} = \frac{p+iq}{p^2+q^2} = \frac{p}{p^2+q^2} + i\frac{q}{p^2+q^2}.$$

Нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, меншіксіз интегралдардың мәндерін табамыз. Сонымен

$$T = \int_0^\infty e^{-px}\,cosqxdx = \frac{p}{p^2+q^2},$$
$$S = \int_0^\infty e^{-px}\,sinqxdx = \frac{q}{p^2+q^2}.$$

Мысал. $\sum_{k=1}^n sin^2kx$ және $\sum_{k=1}^n cos^2kx$ қосындыларын табыңыз.

Шешуі. $\sum_{k=1}^n sin^2kx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(1 - cos2kx) = \frac{1}{2}(n - \sum_{k=1}^n cos2kx)$.

Соңғы қосындыны геометриялық прогрессияға келтіріп, оның қосындысын табумен айналысайық.

$$\sum_{k=1}^n cos2kx = Re\sum_{k=1}^n e^{2ikx} = Re\sum_{k=1}^n \left(e^{2ix}\right)^k =$$
$$= Re\left(e^{2ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2ix}\right)^k\right) = Re\left(e^{2ix}\frac{\left(e^{2ix}\right)^n - 1}{e^{2ix} - 1}\right) =$$
$$= Re\left(e^{2ix}\frac{e^{inx}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)}{e^{ix}(e^{ix} - e^{-ix})}\right) = Re\left(e^{i(n+1)x}\frac{2isinnx}{2isinx}\right) =$$
$$= \frac{sinnx}{sinx}Ree^{i(n+1)x} = \frac{sinnx}{sinx}cos(n+1)x.$$

Сонымен $\sum_{k=1}^{n} sin^2 kx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1 - cos2kx) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{sinnx}{sinx} cos(n+1)x\right)$.
$\sum_{k=1}^{n} sin^2 kx + \sum_{k=1}^{n} cos^2 kx = \sum_{k=1}^{n}(sin^2 kx + cos^2 kx) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$
теңдігінен $\sum_{k=1}^{n} cos^2 kx$ қосындысын табамыз.

Комплекс санның матрицалық формада жазылуы

Жоғарыда айтылғандай екі өлшемді нақты сызықтық кеңістік құрайтын $x + iy$ комплекс сандарына екі өлшемді векторларды, ал соңғысына 2×2 матрицаларды сәйкес қоюға болады.

Матрицаның формасы (тұрпаты) коммутативтік заңы орындалатын комплекс сандардың көбейтінділерінің координаттық түрде жазылуынан шығады.

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сандары және олардың көбейтіндісі $z == z_1 z_2 = x + iy$ саны берілсін дейік. Сонда

$$z = z_1 z_2 = z_2 z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ y = x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Сонымен $z = x + iy \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$. Бұл $\mathbb{C}$ комплекс сандар жиыны мен $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ түріндегі матрица жиындарының арасындағы бірмәнділік сәйкестікті көрсетеді. Мұнда $1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ал $i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Сонда z комплекс санының түйіндесі $\bar{z} = x - iy$ санына сәйкестендірілетін екі өлшемді матрица келесі түрде жазылады:

$$z = x - iy \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Комплекс сандарды қосу және көбейту олардың сәйкес матрицаларын қосу және көбейту арқылы алынады.

z_1 және z_2 комплекс сандарының бөліндісіне

$$z_1 / z_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & -(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

матрицасы сәйкес қойылады. Мұнда $\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}^{-1}$ матрицасы z_2 санына сәйкес қойылатын матрицаның кері матрицасы.

Қорыта айтқанда комплекс санның матрицалық моделі ретінде коммутативтік және ассоциативтік заңдылықтарға бағынатын өлшемі 2×2 болатын $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ матрицасын аламыз, мұнда $x, y \in \mathbb{R}$. Мұндай матрицалар жиыны өріс құрайды. Оны G арқылы белгілейік. Сонда $Z_1, Z_2, \ldots, \in G$ элементтері үшін

1) $Z_1 + Z_2 \in G$; 2) $Z_1 - Z_2 \in G$ 3) $Z_1 \cdot Z_2 \in G$; 4) $Z^{-1} \in G$ шарттары орындалады. Шынында да

1) $Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & -(x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 & x_1 + y_1 \end{pmatrix}$; 2) $Z_1 - Z_2 = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & -(x_2 - y_2) \\ x_2 - y_2 & x_1 - y_1 \end{pmatrix}$;

3) $Z_1 \cdot Z_2 = \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1y_1 - x_2y_2 \end{pmatrix}$; 4) $Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} & -\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$.

Сонымен G өрісінің элементтері арифметикалық төрт амалдан кейін өзінің алғашқы формасын сақтайды. Олай болса G матрицалар өрісі формалық инвариант кеңістігін құрайды. Керісінше формалық инвариант кеңістігі өріс құрайды. Қысқасы $z = x + iy \Leftrightarrow Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ арақатынастары төмендегі кесте арқылы беріледі.

1) $z_1 \pm z_2 \Leftrightarrow Z_1 \pm Z_2$; 2) $\alpha z \Leftrightarrow \alpha Z$;

3) $z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow Z_1 \cdot Z_2$; 4) $z^{-1} \Leftrightarrow Z^{-1}$;

5) $|z|^2 = detZ$; 6) $(z_1 \pm z_2)^2 = det(Z_1 \pm Z_2)$;

7) $(\alpha z)^2 = det(\alpha Z)$; 8) $|z_1 \cdot z_2|^2 = det(Z_1 \cdot Z_2)$;

9) $|z^{-1}|^2 = detZ^{-1}$.

Соңғы теңдіктің дұрыстығына көз жеткізейік:

$$z = x + iy, \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$|z^{-1}| = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Қабылданған ережеге сай $z^{-1} \Leftrightarrow Z^{-1}$.

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

Онда $detZ^{-1} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$. Бұдан теңдіктің дұрыстығы шығады.

Анықтама. $z = x + iy$ комплекс санының спектрі деп Z матрицасының меншікті сандарының жиынтығын айтамыз. Сонда $\begin{vmatrix} x-\lambda & -y \\ y & x-\lambda \end{vmatrix} = 0$ характеристикалық теңдеуінің λ -ға қатысты шешімдерін табу комплекс санның спектрлерін анықтайды. Ол үшін екінші ретті анықтауышты ашып жазып, $x^2 - 2x\lambda + \lambda^2 + y^2 = 0$ алгебралық теңдеуінің түбірлерін табайық

$$\lambda_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2 - x^2 - y^2} = x \pm iy.$$

Сонда кез келген z комплекс саны үшін $|z| = \sqrt{\|z\|} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ теңдіктері дұрыс.

Λ_{z_1} және Λ_{z_2} арқылы z_1 және z_2 комплекс сандарының спектрлерін белгілейік. Қорыта келгенде комплекс сандар үшін төмендегі теңдіктердің дұрыстығы бірден көрінеді, бірақ бұл жерде біз алда кватернион және гиперкомплекс сандарын қарастыратын болғандықтан мұндай әдістемені қазірден бергенді жөн көрдік:

$$z_1 \pm z_2 \;\Leftrightarrow\; \Lambda_{z_1} \pm \Lambda_{z_2};$$
$$z_1 \cdot z_2 \;\Leftrightarrow\; \Lambda_{z_1} \cdot \Lambda_{z_2};$$
$$\alpha z \;\Leftrightarrow\; \alpha \Lambda_z;$$
$$z^{-1} \;\Leftrightarrow\; (\Lambda_z)^{-1}.$$

Жазықтықтағы аналитикалық геометрия есептерін комплекс сандар көмегімен шығару

Аналитикалық геометрияда жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орны x және y координаталары арасындағы арақатынастар түрінде өрнектеледі. Оларды z және $\bar{z}$ комплекс сандар "тіліне" оңай көшіруге болады. Әдетте жазықтықтағы қисықтың комплекстік теңдеуі екі нақты теңдеулерге эквивалентті. Сондықтан алгебралық формада жазылған комплекстік теңдеу нақты теңдеуді бере ме, жоқ әлде бермей ме деген сұрақ тууы мүмкін.

Мысалы $|z - a| = r$ теңдігі центрі $A(a)$ нүктесінде жататын радиусы $r -$ ға тең шеңбердің теңдеуін анықтайды. Оның алгебралық формасын $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$ теңдігі арқылы жазуға болады. Енді соңғы теңдіктің екі жағынан бірдей түйіндесіне көшейік: $\overline{(z - a)(\bar{z} - \bar{a})} = \overline{r^2}$. Жүргізілген амалдан кейін біз бастапқы теңдеудің өзін аламыз, өйткені $\overline{(z - a)(\bar{z} - \bar{a})} = (\overline{z - a})\overline{(\bar{z} - \bar{a})} = (\bar{z} - \bar{a})(z - a) = r^2$. Мұнда $z -$ ағымдық, ал $a -$ тұрақты комплекс сандар.

Тұжырым. Жазық қисықтың алгебралық формада берілген комплекстік теңдеуінен оның түйіндес теңдеуіне көшкенде бастапқы теңдеудің өзі шығатын болса, онда комплекс сандар “тілінде” теңдеу нақты және ол түйіндес амалына қатысты инвариантты болады.

Мысал. $ABCD$ төртбұрышында AC және BD диагональдарының сәйкес ортасы M және N нүктелері болсын дейік.

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|MN|^2$$

теңдігінің дұрыстығын дәлелде (2.7-сурет).

Шешуі. A, B, C, D, M, N нүктелерінің орындары анықтамаға сай a, b, c, d, m, n комплекс сандары арқылы анықталсын дейік. M нүктесі қандай m комплекс санымен өрнектелетінін білу үшін біз алдымен $\boldsymbol{OA}$ және $\boldsymbol{OC}$ радиус – векторларының векторлық қосындысын табамыз, сонда параллелограмм ережесі бойынша $\boldsymbol{OM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OC})$ векторын береді. Демек M нүктесінің комплекстік координатасы $m = \frac{1}{2}(a + c)$ болады. Осыған ұқсас $\boldsymbol{ON} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OD})$, демек N нүктесінің комплекстік координатасы $n = \frac{1}{2}(b + d)$ болады.

Енді төртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарының квадратын және MN кесіндісінің квадратын олардың сәйкес комплекстік координаталары арқылы өрнектейік. Алдымен $\boldsymbol{AB}$ векторының комплекстік координатасын табайық. Векторлық қосу ережесі бойынша $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA}$, мұнда $\boldsymbol{OB}, \boldsymbol{OA}$ векторлары B және A нүктелерінің радиус – векторлары. Радиус – вектордың комплекстік координатасы оның соңғы нүктесінің комплекстік координатасы арқылы анықталады. Олай болса

$$\boldsymbol{AB} = b - a,\ \boldsymbol{BC} = c - b,\ \boldsymbol{CD} = d - c,\ \boldsymbol{DA} = a - d \text{ және}$$
$$\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{ON} - \boldsymbol{OM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OD}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OC}) = \frac{1}{2}(b + d - a - c).$$

Екі вектордың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасына сүйене отырып $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AB}) = |\boldsymbol{AB}|^2$ теңдігін жазайық. Екінші жағынан

$$|\boldsymbol{AB}|^2 = |b - a|^2 = (b - a)\left(\bar{b} - \bar{a}\right) = (a - b)\left(\bar{a} - \bar{b}\right),$$

өйткені $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ теңдігімен анықталады.

Дәлелдейтін теңдіктің оң және сол жақ бөліктерін олардың сәйкес комплекстік координаталары арқылы өрнектейік. Сонда

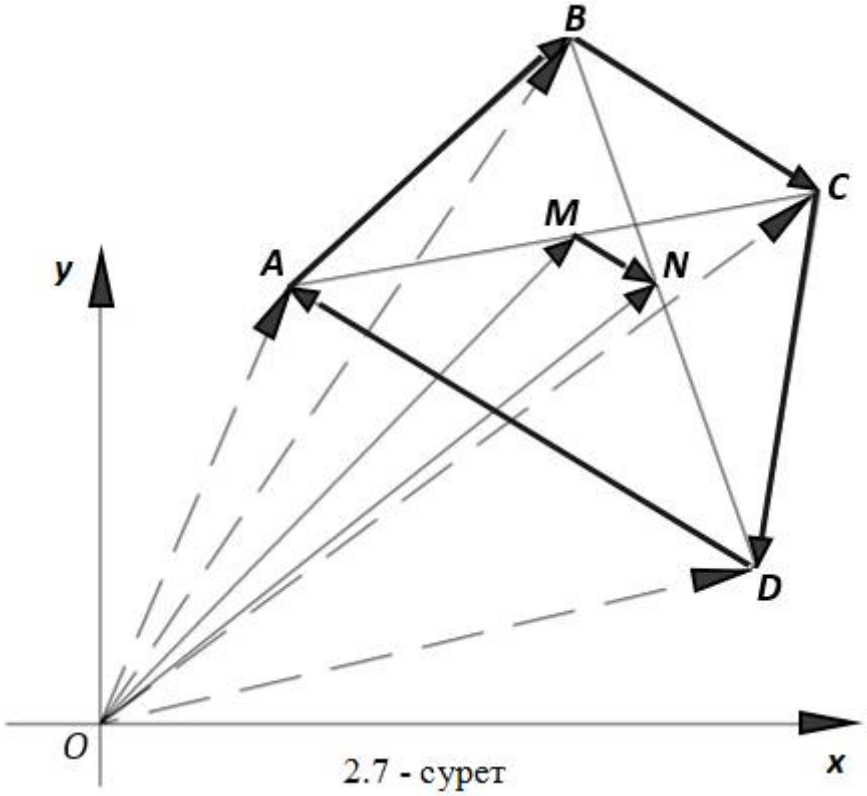
$$|\boldsymbol{AB}|^2 + |\boldsymbol{BC}|^2 + |\boldsymbol{CD}|^2 + |\boldsymbol{DA}|^2 = (a - b)\left(\bar{a} - \bar{b}\right) + (b - c)\left(\bar{b} - \bar{c}\right) +$$
$$+(c - d)\left(\bar{c} - \bar{d}\right) + (d - a)\left(\bar{d} - \bar{a}\right) = 2\left(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}\right) -$$

$$-\left(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{d}+\bar{c}d+d\bar{a}+\bar{d}a\right).$$

$$|\boldsymbol{AC}|^2+|\boldsymbol{BD}|^2+4|\boldsymbol{MN}|^2=(a-c)(\bar{a}-\bar{c})+(b-d)\left(\bar{b}-\bar{d}\right)+$$

$$+(b+d-a-c)\left(\bar{b}+\bar{d}-\bar{a}-\bar{c}\right)=2\left(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d}\right)-$$

$$-\left(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{d}+\bar{c}d+d\bar{a}+\bar{d}a\right).$$



2.7 - сурет

Алынған теңдіктердің оң жақ бөліктерін салыстыра отырып бастапқы теңдіктің дұрыстығына көз жеткіземіз.

Кейбір есеп шығаруға қажетті ұғымдарды, анықтамаларды және теоремаларды комплекс сандар “тіліне” көшірейік.

1. $z=x+iy$ комплекс санына жазықтықта $M(x,y)$ ағымдық нүктесі мен оның $\boldsymbol{OM}$ радиус – векторы сәйкес қойылады. Сонда m саны $M(x,y)$ нүктесінің комплекстік координатасы деп аталады.

2. $z=x-iy$ түйіндес комплекс санына $\bar{M}(x,-y)$ нүктесі мен оның $\boldsymbol{O\bar{M}}$ радиус-векторы сәйкес қойылады. Сонда $\bar{m}$ саны $\bar{M}(x,-y)$ нүктесінің комплекстік координатасы деп аталады.

3. Өзінің түйіндесіне тең, яғни $z=\bar{z}$ комплекс саны нақты сан болады және z, $\bar{z}$ сандарына сәйкес қойылатын $M(z)$, $M(\bar{z})$ нүктелері Ox осіне қарағанда симметриялы болады.

4. $z=-\bar{z}$ теңдігі комплекс санның таза жорамал сан екенін білдіреді.

5. Кез келген z үшін $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$, $z + \bar{z} = 2x$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 == |z|^2$ және $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ теңдіктері орындалады.

6. $\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OC}$ векторлық теңдігінен $c = a + b$ теңдігі алынады, мұнда a, b және c сандары A, B және C нүктелерінің комплекстік координаталары. O нүктесі – полюс.

7. $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$ центрі бас нүктеде жататын бірлік шеңберге қатысты инверсия түрлендіруі, мұнда $|\omega| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|}$, $arg\omega = argz$.

8. $\omega = z_0 + \frac{k^2}{\overline{z - z_0}}$ центрі z_0 нүктесінде жататын радиусы R - ға тең шеңберге қатысты инверсия түрлендіруі.

9. $\omega = z + a$ түрлендіруі жазықтықтың әрбір нүктесін $\boldsymbol{a}$ векторына параллель көшіру деп аталады, мұндағы a – берілген комплекс сан.

10. $\omega = kz$ түрлендіруі центрі полюста жататын коэффициенті k болатын ***гомотетия*** деп аталады, мұнда $k > 0$.

11. $\boldsymbol{AC} = \lambda \boldsymbol{CB}$ векторлық теңдігінен кесіндіні берілген қатынасқа бөлу формуласын комплекстік түрде жаза аламыз:

$$c = \alpha a + \beta b,\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha = \bar{\alpha},\ \beta = \bar{\beta},\ \alpha = \frac{1}{1+\lambda},\ \beta = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

және бұл теңдік $A(a)$, $B(b)$ және $C(c)$ нүктелерінің бір түзудің бойында жатуының жеткілікті шартын көрсетеді.

12. $A(a)$ және $B(b)$ нүктелерінің арақашықтығы $|AB| = |a - b|$ формуласымен анықталады.

13. $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$ теңдігі центрі $A(a)$ нүктесінде жататын радиусы R - ға тең шеңбердің теңдеуі.

14. $\boldsymbol{OA} \cdot \boldsymbol{OB} = \frac{1}{2}\left(a\bar{b} + \bar{a}b\right)$ теңдігі $\boldsymbol{OA}$ және $\boldsymbol{OB}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін анықтайды.

15. $2\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{CD} = (a - b)\left(\bar{c} - \bar{d}\right) + \left(\bar{a} - \bar{b}\right)(c - d)$ теңдігі $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{CD}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін анықтайды.

16. $\frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ немесе $a\bar{b} = \bar{a}b$ теңдігі $A(a)$ және $B(b)$ нүктелерінің коллинеарлық шартын көрсетеді. Өйткені бұл нүктелерге сәйкес қойылатын $\boldsymbol{OA}$ және $\boldsymbol{OB}$ радиус-векторларының коллинеарлық шартынан $arga - argb = arg\frac{a}{b} = 0$ теңдігі шығады.

17. $\boldsymbol{AB} \parallel \boldsymbol{CD} \Leftrightarrow (a - b)\left(\bar{c} - \bar{d}\right) = \left(\bar{a} - \bar{b}\right)(c - d)$. Егер A, B, C, D нүктелері дербес жағдайда $z \cdot \bar{z} = 1$ теңдеуімен анықталатын бірлік шеңбердің бойында жатса, онда $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{c} = \frac{1}{c}$, $\bar{d} = \frac{1}{d}$

арақатынастарынан $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{CD}$ векторларының $\boldsymbol{AB} \parallel \boldsymbol{CD} \Leftrightarrow ab = cd$ коллинеарлық шарты шығады.

18. $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{CD}$ векторларының коллинеарлық шартынан $\frac{a-b}{c-d} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$ теңдігі шығады. Бұдан $\frac{a-b}{c-d}$ бөліндісі нақты өрнекті береді, демек AB және CD түзулері параллель.

19. $\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$ теңдігі $\boldsymbol{AB}$ және $\boldsymbol{AC}$ векторларының немесе A, B, C нүктелерінің коллинеарлық шартын анықтайды.

20. $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$ теңдеуі $A(a)$ және $B(b)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін анықтайды.

21. $z + ab\bar{z} = a + b$ бірлік шеңбердің AB хордасы арқылы өтетін түзудің теңдеуі

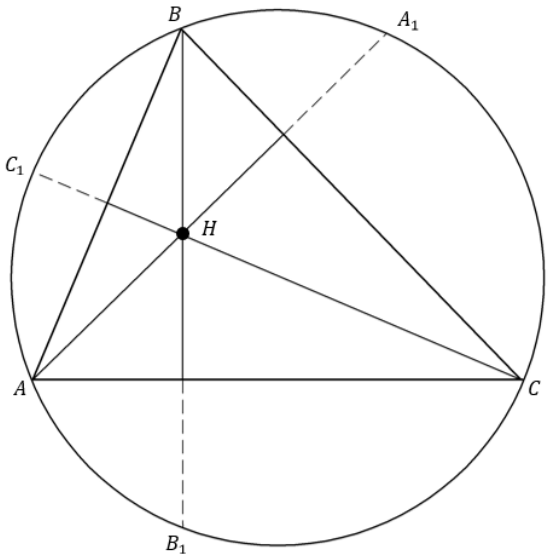
22. $\left(a\bar{b} + \bar{a}b\right) = 0$ теңдігі $\boldsymbol{OA}$ және $\boldsymbol{OB}$ радиус-векторларының перпендикулярлық шартын көрсетеді.

23. $(a-b)\left(\bar{c}-\bar{d}\right) + \left(\bar{a}-\bar{b}\right)(c-d)$ теңдігі AB, CD түзулерінің перпендикулярлық шартын көрсетеді. Дербес жағдайда бірлік шеңбердің бойында жататын A, B, C, D нүктелері үшін AB, CD кесінділерінің перпендикулярлық шарты $ab + cd = 0$ теңдігімен анықталады.

Мысал. ABC үшбұрышының H ортоцентрінің (биіктіктерінің қиылысу нүктесі) h комплекстік координатасын үшбұрыштың A, B, C төбелерінің a, b, c комплекстік координаталары арқылы өрнектейік (2.8-сурет).

Шешуі. Үшбұрыштың AH, BH, CH биіктіктері осы үшбұрышты сырттай сызған шеңберді сәйкес A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиып өтсін дейік. $z \cdot \bar{z} = 1$ теңдеуі осы үшбұрышты сырттай сызылған шеңбердің теңдеуі болсын. Сонда $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ және $CC_1 \perp AB$ шарттарынан $a_1 a + bc = 0$, $b_1 b + ac = 0$ және $c_1 c + ab = 0$ теңдіктері шығады (23-қасиет). Бұлардан $a_1 = -\frac{bc}{a}$, $b_1 = -\frac{ac}{b}$ және $c_1 = -\frac{ab}{c}$ теңдіктерін аламыз. Бірлік шеңбердің AA_1 және BB_1 хордаларының қиылысу нүктесі ізделініп отырған H ортоцентрін анықтайды. Сондықтан алдымен AA_1 және BB_1 хордаларының комплекстік теңдеулерін жазып, содан кейін біріктіріп, жүйенің шешімін табамыз.

$$\begin{cases} z + aa_1\bar{z} = a + a_1 \quad (AA_1 \text{ хордасының комплекстік теңдеуі}), \\ z + bb_1\bar{z} = b + b_1 \quad (BB_1 \text{ хордасының комплекстік теңдеуі}). \end{cases}$$



2.8-сурет

Бірінші теңдеуден екінші теңдеуді мүшелеп шегеріп $\bar{z} = \frac{(a+a_1)-(b+b_1)}{aa_1-bb_1}$ табайық. Сонда ізделініп отырған ортоцентрдің комплекстік координатасының түйіндесі

$$\bar{h} = \frac{(a + a_1) - (b + b_1)}{aa_1 - bb_1} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

өрнегімен анықталады. Бұдан $h = a + b + c$.

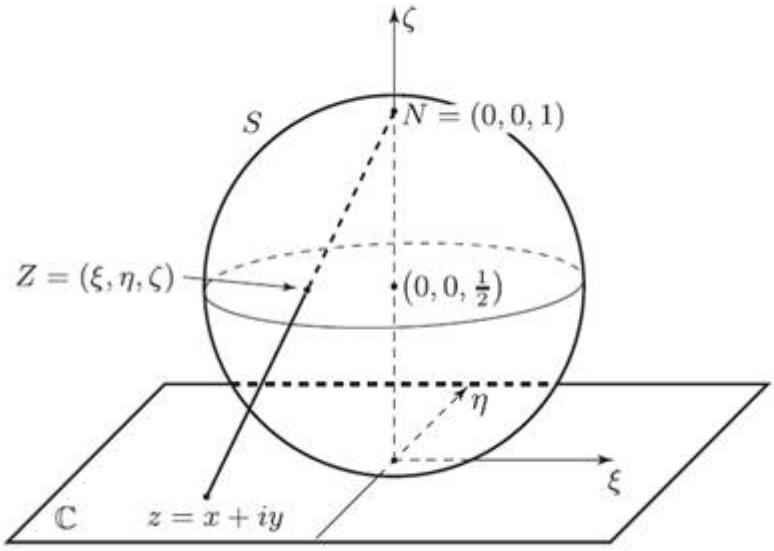
Стереографикалық проекция

Ақырсыз қашық нүкте (∞) енгізу арқылы $\mathbb{C}$ комплекс сандар жүйесін кеңейту әртүрлі себептер бойынша пайдалы. Анықтама бойынша $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығы компакт жиын емес, сондықтан комплекс сандар теориясын дамыту мақсатында ол арнайы нүктемен толықтырылады.

Анықтама. Жаңа ∞ нүктесімен толықтырылатын $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығын $\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығы деп атайық.

Ақырлы a және b комплекс сандары үшін кеңейтілген комплекс жазықтығында $a + \infty = \infty + a = \infty$ және $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$, мұнда $b \neq 0$ арақатынастары орын алады. Алайда арифметиканың ережелерін жоғалтпай $\infty + \infty$ және $0 \cdot \infty$ таңбаларын анықтау мүмкін емес. Соған

қарамастан $a \neq 0$ және $b \neq \infty$ сандары үшін $a/0 = \infty$ және $b/\infty = 0$ жағдайларын арнайы бөліп қарастырамыз.



2.9-сурет

Стереографикалық проекция көмегімен $\mathbb{C}$ жазықтығын $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ кеңейтілген комплекс жазықтығына дейін көрнекі түрде толықтырайық. Ол үшін үш өлшемді кеңістікте центрі $(0, 0, {}^1/_2)$ нүктесінде жататын (2.9-сурет)

$$S = \left\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \colon\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

сфераның теңдеуін қарастырайық.

Үш өлшемді $\mathbb{R}^3$ кеңістігінде $\{\zeta = 0\}$ теңдеуімен анықталатын жазықтықты $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығы деп санайық. Әрі қарай S сферасының $N = (0, 0, 1)$ солтүстік полюсін $\mathbb{C}$ жазықтығының әрбір $z = x + iy$ нүктесімен сәуле арқылы қосайық. Сонда сәуле сфера бетін $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ нүктесінде қиып өтеді. Демек әрбір $z = x + iy \in \mathbb{C}$ нүктесіне сфера бетінен бірмәнді анықталатын $Z = (\xi, \eta, \zeta) \in S$ нүктесі сәйкес қойылады. Басқаша айтқанда $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығы мен S сфера бетінің нүктелерінің арасында бірмәнділік сәйкестік орнатылады. Осы сәйкестікті аналитикалық түрде көрсетейік. Z нүктесінің координаталарын z арқылы өрнектеу үшін сәуленің теңдеуін параметрлік түрде жазайық: $\xi = tx,\ \eta = ty,\ \zeta = 1 - t.$ Ақырғы теңдеу (ξ, η, ζ) координаттар жүйесінде $(0, 0, 1)$ және $(x, y, 0)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуінен алынған.

Келесі қадамда сәуленің теңдеуі мен сфераның теңдеуін жүйеге алып біріктіріп шешеміз. Бұдан біз ізделініп отырған Z нүктесінің координаталарын табуға қажетті t-ның мәні табылады. Сонымен

$$t^2(x^2+y^2)+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$|z|^2t^2+\frac{1}{4}-t+t^2=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{1+|z|^2}.$$

Демек Z нүктесінің координаталары

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\ \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\ \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

формулалары бойынша есептелінеді. Кері түрлендіру $t=1-\zeta$ қатынасының көмегімен табылады, бұдан

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\ y=\frac{\eta}{1-\zeta}.$$

Жоғарыда келтірілген формулалар стереографикалық проекция $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығы мен солтүстік полюс кірмейтін $S\backslash\{N\}$ сфераның нүктелерінің арасындағы $Z\leftrightarrow z$ өзара бірмәнділік сәйкестікті тағайындайды. Сонымен қоса, егер стереографикалық проекцияны N солтүстік нүктесі мен $\infty\in\bar{\mathbb{C}}$ нүктесін салыстыра отырып, сәйкестікті $S\leftrightarrow\mathbb{C}$ дейін жалғастыратын болсақ, онда алынған түрлендіру $\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығы мен S сферасы арасындағы гомеоморфизмді жүзеге асырады. $\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығының мұндай моделін Риман сферасы деп атайды.

Сфералық метрика

Стереографикалық проекцияның көмегімен $\mathbb{C}$ комплекс жазықтығында кез келген $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ үшін

$$|z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

теңдігімен анықталатын евклид метрикасынан бөлек сфералық метриканы енгізейік. Бұл метрика анықтама бойынша $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ нүктелерінің $\rho(z_1,z_2)$ арақашықтығы олардың сфералық бейнелерінің арасындағы евклид арақашықтығына тең.

Мысал. $\rho(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$ теңдігімен анықталатынын көрсетейік.

$\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығының ақырлы бөлігінде (яғни қайсыбір $\{|z| < R\}$ дөңгелегіне тиісті z_1, z_2 нүктелері үшін) евклид және сфералық метрикалары арасында келесі $c_1(R)|z_1 - z_2| \leq \rho(z_1, z_2) \leq c_2(R)|z_1 - z_2|$ (нақтылы: $c_1(R) = 1/(1 + R^2), c_2(R) = 1$) арақатынастары орындалсын дейік. Сонда бұл арақатынастар евклид және сфералық метрикалардың эквиваленттілік мағынасын ашады. Сол кезде сфералық метрика бойынша $z \in \mathbb{C}$ кез келген нүктесінен ∞ нүктесіне дейінгі арақашықтық ақырлы болады:

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} \leq 1.$$

Жаттығулар

1. $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ өрнегінің мәнін есепте.

2. Егер $z = x + iy$ болса, онда z^4, $\frac{1}{z}$, $\frac{z-1}{z+1}$, $\frac{1}{z^2}$ өрнектерінің нақты және жорамал бөліктерін тап.

3. $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ теңдігінің дұрыстығын көрсет.

4. $-2i(3 + i)(2 + 4i)(1 + i)$, $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$ сандарының абсолют шамасын тап.

5. Келесі комплекс сандардың модулі мен аргументін тап:

а) $\frac{-1}{i}$; b) $\frac{1-i}{1+i}$; c) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$.

6. $cos\varphi$ және $sin\varphi$ арқылы $cos3\varphi$ және $sin3\varphi$ өрнекте (Муавр формуласын қолдан).

7. Квадрат теңдеулерді шеш:

а) $z^2 - 2(1 + i)z - 1 + 2i = 0$; б) $z^2 - 4iz - 13 = 0$.

8. а) $\sqrt{1 - i}$; b) $\sqrt[3]{i}$ тап.

9. Теңдеуді шеш $z^6 + 64 = 0$.

10. $\frac{\sqrt{1+a^2}+ia}{a-i\sqrt{1+a^2}}$ өрнегін ықшамда.

11. Келесі қосындыларды тап:

$$T = cos\varphi + cos(\varphi + \alpha) + \cdots + cos(\varphi + n\alpha) = \sum_{k=0}^{n} cos(\varphi + k\alpha),$$

$$S = sin\varphi + sin(\varphi + \alpha) + \cdots + sin(\varphi + n\alpha) = \sum_{k=0}^{n} sin(\varphi + k\alpha).$$

12. Төбелері $P_1(-3,4)$, $P_2(2,5)$ және $O(0,0)$ нүктелерінде жататын жазық үшбұрыштың ауданын тап.

13. Алдыңғы есептің шарты бойынша $\boldsymbol{OP_1}$ және $\boldsymbol{OP_2}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін және осы векторлардың арасындағы φ бұрышын тап.

14. Төбелері $A(7,2)$, $B(3,-1)$ және $C(4,-2)$ нүктелерінде жататын жазық үшбұрыштың ауданын тап.

15. $(4+2i)x+(5-3i)y=13+i$ теңдеуінің нақты шешімін тап.

16. $1 \le |z+i| \le 2$, $\frac{\pi}{4} < argz < \frac{\pi}{2}$ шарттары комплекс жазықтығында қандай нүктелердің жиынын анықтайды.

17. $|z-1| < |z-i|$ шарты комплекс жазықтығында қандай нүктелердің жиынын анықтайды.

18. Паскаль теоремасы. Берілген алтыбұрыштың қабырғаларының созындысының қиылысуынан пайда болған нүктелер бір түзудің бойында жататынын дәлелде.

19. Ньютон теоремасы. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың диагональдарының ортасындағы нүктелер сол шеңбердің центрімен коллинеарлы.

20. Риман сферасының кез келген диаметрінің шеткі нүктелеріне комплекс жазықтығының қандай нүктелері сәйкес келеді.

21. Комплекс жазықтығының $z \mapsto \frac{1}{z}$ түрлендіруіне Риман сферасының қандай түрлендіруі жауап береді.

22. Риман сферасындағы шеңбердің стереографикалық проекциясы $\bar{\mathbb{C}}$ кеңейтілген комплекс жазықтығында қандай қисықты бейнелейді (кескіндейді).

23. $A(z_1)$, $B(z_2)$ және $C(z_3)$ нүктелері арқылы өтетін шеңбердің центрі мен радиусын тап (комплекстік формада).

24. Эллипс, гипербола және параболаның теңдеулерін эллипстік формада жаз.

25. $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ нүктелері $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана тең қабырғалы үшбұрыштың төбелері болатынын дәлелде.

Комплекс сандар тізбегі және қатары

$\mathbb{C}$ комплекс сандар жиынында ең жиі кездесетін ішкі жиындарды атап өтейік:

$|z-z_0|=r-$ центрі z_0 нүктесінде радиусы r-ға тең шеңбер;

$|z-z_0|<\varepsilon$ - z_0 нүктесінің ε маңайы, белгілеуі – $O_\varepsilon(z_0)$;

$0<|z-z_0|<\varepsilon$ - z_0 нүктесінің тесілген ε маңайы, белгілеуі $-\dot{Q}_\varepsilon(z_0)$;

$Imz > 0$, $(Imz < 0)$ – жоғарғы (төменгі) жарты жазықтық;

$Rez > 0$, $(Rez < 0)$ – оң (сол) жарты жазықтық.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n > N$ нөмірлері үшін $|z_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда a комплекс санын $\{z_n\}$ тізбегінің шегі деп атайды. Сонда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ деп жазылады. Басқаша айтқанда $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n - a| = 0$ теңдігінен a саны $\{z_n\}$ тізбегінің шегі болатындығы шығады. Бұл жағдайда $\{z_n\}$ тізбегін a санына жинақталатын немесе a санына ұмтылатын тізбек деп те атайды.

Әрбір $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегіне $x_n = Rez_n$ және $y_n = Imz_n$ екі нақты сандар тізбегі сәйкес келеді.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ болғанда және тек сонда ғана $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ комплекс сандар тізбегі $z = x + iy$ комплекс санына жинақты болады.

Дәлелдеу. $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегінің шегі $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ болсын деп ұйғарайық. Онда $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n - a| = 0$ теңдігі орындалады. Сонда

$$|x_n - x| \le |z_n - a| \text{ және } |y_n - y| \le |z_n - a|$$

теңсіздіктерінен $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ нақты сандар тізбектерінің шектері сәйкес x және y болатыны шығады. Демек $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ және $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Кері тұжырым келесі үшбұрыштар теңсіздігінен шығады:

$$|z_n - a| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Ұсыныс. $x_n = Rez_n$ және $y_n = Imz_n$ тізбектері ақырсыз аз болғанда және тек сонда ғана z_n комплекс сандар тізбегі ақырсыз болады.

Дәлелдеу. z_n тізбегі ақырсыз аз болсын дейік. Сонда кез келген $\varepsilon > 0$ нақты саны үшін N натурал саны табылып, барлық $n > N$ натурал сандары үшін $|z_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Демек $n > N$ болғанда

$$|x_n| < {}^{\varepsilon}/_{2} \quad \text{және} \quad |y_n| < {}^{\varepsilon}/_{2}$$

теңсіздіктері орындалады.

Екінші жағынан x_n және y_n тізбектері ақырсыз аз болсын дейік. Сонда кез келген нақты $\varepsilon > 0$ саны үшін N натурал саны табылып, барлық $n > N$ натурал сандары үшін $|x_n| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ және $|y_n| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ теңсіздіктері орындалады. Демек $n > N$ болғанда $|z_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

Келесі ұсыныста дәлелдеусіз қабылдайық.

Ұсыныс. $\{u_n\}$ және $\{v_n\}$ комплекс сандар тізбектері жинақты болсын деп ұйғарайық, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Сонда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = u \pm v$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = uv$;

3) егер $v \neq 0$ болса, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n/v_n) = u/v$.

Анықтама. Егер $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ тізбегінің әрбір мүшесінің модулі қайсыбір M оң санынан кіші болса, яғни $|z_n| < M$, онда комплекс сандар тізбегі шектелген деп аталады. Кері жағдайда комплекс сандар тізбегі шектеусіз.

Басқаша айтқанда, егер $\{|z_n|\}$ нақты сандар тізбегі шектеулі болса, онда $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі де шектеулі болады.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = \infty$ болса, онда $\{z_n\}$ комплекс сандар тізбегі ақырсыз қашық нүктеге жинақталады:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

Бұл анықтама кез келген $R > 0$ үшін сондай N нөмірі табылып, барлық $n > N$ нөмірлері үшін $|z_n| > R$ теңсіздігінің орындалатынын көрсетеді.

∞ элементімен толықтырылатын комплекс жазықтығын кеңейтілген комплекс жазықтығы деп атайды.

Ақырсыз қашық нүктеге қатысты $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$, $z \cdot \infty = \infty$, $z \neq 0$, $z + \infty == \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$ деп саналады.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \infty$ болса, онда $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ тізбектерінің кемінде біреуі ақырсыз үлкен болатынын ескереміз.

$\alpha_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ тізбегін қарастырайық, мұнда $z = x + iy$ кез келген ақырлы комплекс сан. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ шегінің бар болуын дәлелдеп және табу үшін $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|$ және $\lim\limits_{n\to\infty} Arg\alpha_n$ шектерін қарастырайық. Сонда

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^x$$

(бұл шекті табуда екінші тамаша шек пайдаланылды).

Комплекс санды оң бүтін дәрежеге шығарғанда оның аргументі осы дәрежеге көбейтілетін болғандықтан $Arg\alpha_n = n \cdot arc\tan\frac{y/n}{1+x/n} + 2\pi m$, мұнда m – кез келген бүтін сан. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} Arg\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot arc\tan\frac{y/n}{1+x/n}+2\pi m\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{y/n}{1+x/n}+2\pi m\right)=y+2\pi m$$

(бұл жерде $x\to 0$ ұмтылғанда $arc\tan x \sim x$ эквиваленттілігі ескерілді).

Теорема. φ және φ_n аргументтерінің сәйкес таңдауларынан кейін

$$\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}=\{r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)\}$$

тізбегінің $z=x+iy$ санына жинақтылығынан $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=r$ екені шығады және керісінше.

Сонда жоғарыда аталған теореманың негізінде $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ шегінің бар болуын тұжырымдауға болады. Демек

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Анықтама бойынша $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ түрінде жазылды делік. Соңғы теңдікте $x=0$ болса, $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ теңдігін береді. Бұдан нөлден өзгеше кез келген $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ комплекс санының $z=re^{i\varphi}$ көрсеткіштік түріндегі жазылуын аламыз.

Мысал. $z_n=i^n$, $z_n=(1+i)^n$ тізбектерін шектеулікке зертте.

Бірінші тізбекте кез келген $n\in N$ үшін $|z_n|=|i^n|=|i|^n=1$. Онда тізбек шегінің анықтамасы бойынша $z_n=i^n$ шектеулі. Екінші тізбек үшін модульдің қасиетін пайдаланайық: $|z_n|=|(1+i)^n|=|1+i|^n=\left(\sqrt{2}\right)^n$. Әрі қарай $\left(\sqrt{2}\right)^n>M$ теңсіздігін кез келген M үшін $n-$ ға қатысты шешейік: $n\log\sqrt{2}>\log M$, $n>\frac{2\log M}{\log 2}$. Бұдан N нөмірі ретінде кез келген $N(M)=\frac{2\log M}{\log 2}$ санының бүтін бөлігін алуға болады. Демек $\{z_n\}$ тізбегі ақырсыз қашық нүктеге жинақталады.

Мысал. $\{z_n\}$ тізбегінің шегін табыңыз, мұнда $z_n=\frac{2+i3n}{i-n}$.

Алдымен тізбектің z_n жалпы мүшесінің нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерін табайық:

$$z_n=\frac{2+i3n}{i-n}=\frac{(2+i3n)(n+i)}{-(n-i)(n+i)}=\frac{-n+i(3n^2+2)}{-(n^2+1)}=$$
$$=\frac{n}{n^2+1}-i\frac{3n^2+2}{n^2+1}=x_n+iy_n.$$

Бұдан $x_n=\frac{n}{n^2+1}$, $y_n=-\frac{3n^2+2}{n^2+1}$. Келесі қадамда $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ нақты тізбектерінің шектерін табайық:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{-(3n^2+2)}{n^2+1}=-\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=-3.$$

Сонда $\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+i\lim_{n\to\infty} y_n=-3i$.

Мысал. $\{z_n\}$ тізбегінің шегін табыңыз, мұнда $z_n=\left(1+i\frac{n}{n^2-1}\right)^n$.

$$|z_n|^2=z_n\cdot\bar{z}_n\ argz_n=narc\tan\frac{y}{x}.\ |z_n|=\left(1+\frac{n^2}{(n^2-1)^2}\right)^{n/2},$$
$$argz_n=narc\tan\frac{n}{n^2-1}.$$

Келесі қадамда $\{|z_n|\}$, $\{argz_n\}$ тізбектерінің шегін табайық:

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{n^2}{(n^2-1)^2}\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{n^2}{(n^2-1)^2}}=1,$$
$$\lim_{n\to\infty} argz_n=\lim_{n\to\infty} narc\tan\frac{n}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1}$$

(бұл жерде де ақырсыз аз шамалардың эквиваленттіліктері ескерілді, өйткені $x\to 0$ ұмтылғанда $\ln(1+x)\sim x$ және $arc\tan x\sim x$). Сонда

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}|z_n|e^{iargz_n}=\lim_{n\to\infty}|z_n|e^{i\lim_{n\to\infty} argz_n}=e^i=\cos 1+i\sin 1.$$

Мүшелері комплекс сандар болатын сандық қатарлар

1. $z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ түріндегі өрнекті мүшелері комплекс сандар болатын сандық қатар деп атайды, мұнда $z_n=x_n+iy_n$.

Ескерту. $\lim_{n\to\infty} z_n=0$ шарты сандық қатардың жинақтылығының қажетті шартын көрсетеді.

2. Қатардың алғашқы n мүшесінің $z_1+z_2+\cdots+z_n=\sum_{k=1}^{n} z_k$ қосындысы оның $n-$ші дербес қосындысы деп аталады және S_n арқылы белгіленеді. Сонда $S_1,S_2,\ldots,S_n,\ldots$ тізбегі дербес қосындылардың тізбегін көрсетеді.

3. Егер дербес қосындылар тізбегінің шегі жинақты, яғни $\lim_{n\to\infty} S_n=S<<\infty$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сандық қатары да жинақты.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сандық қатарының мүшелерінің абсолюттік шамаларынан құралған $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ қатары абсолютті жинақты.

Ескерту. $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ сандық қатарының мүшелері оң нақты сандар.

Сонымен қатарды жинақтылыққа зерттеу оның дербес қосындылар тізбегін жинақтылыққа зерттеуге келтіріледі. Дербес жағдайда жинақталатын тізбектердің қасиеттерінен оның келесі қасиеттері шығады:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ қатары жинақты болу үшін $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ қатарларының жинақты болуы қажетті және жеткілікті, мұнда $z_k = x_k + iy_k$. Сонда

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

2. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ қатары жинақты болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty} az_k$ қатары да жинақты, мұнда a – комплекс сан және $\sum_{k=1}^{\infty} az_k = a\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

3. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ қатарлары жинақты болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty}(z_k + +\zeta_k)$ қатары да жинақты және

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \zeta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \,.$$

4. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ қатарлары жинақты және олардың қосындылары сәйкес S және σ болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{k} z_n \zeta_{k-n+1})$ қатары да жинақты және оның қосындысы $S \cdot \sigma$ – ға тең.

5. **Коши критерийі**. Кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N$ және $m > N$ нөмірлері үшін $|\sum_{k=n}^{m} z_k| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалғанда және тек сонда ғана $\sum_{k=1}^{n} z_k$ қатары жинақты болады.

6. Тек абсолютті жинақты қатарларда ғана кез келген мүшелерінің орындарын ауыстырғанмен оның жинақтылығы өзгермейді, ал қосындысы бастапқы қосындысына тең болады.

Мысалы, егер $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары абсолютті жинақты болса, онда осы қатардың мүшелерін топтастыру арқылы алынған $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}$ және $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n-1}$ қатарлары да жинақты және

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}.$$

7. Абсолютті жинақты қатарларды көпмүшеліктерді көбейту ережесі бойынша көбейтуге болады.

Ескерту. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары жинақты болып, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ қатары жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ қатары шартты жинақты деп аталады.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ қатарларын қарастырайық. Оларды сәйкес (A), $(|A|)$, (B), $(|B|)$ таңбаларымен белгілейік.

Теорема. Егер барлық $n > n_0 \geq 1$ нөмірлері үшін $|a_n| \leq |b_n|$ теңсіздігі орындалатын болса, онда $(|B|)$ қатарының жинақтылығынан $(|A|)$ қатарының жинақтылығы шығады, демек (B) қатарының

абсолютті жинақтылығынан (A) қатарының абсолютті жинақтылығы шығады; сондай-ақ $(|A|)$ қатарының жинақсыздығынан $(|B|)$ қатарының жинақсыздығы шығады.

Ескерту. Егер $(|A|)$ жинақсыз болса, онда жоғарыдағы теорема бойынша (B) қатары не жинақты не шартты жинақты болады.

Шектік салыстыру белгісі. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}=q$ бар болсын дейік.

Егер $q\in[0,+\infty)$ және $(|B|)$ қатары жинақты болса, онда $(|A|)$ қатары жинақты. Егер $q>0$ және $(|B|)$ қатары жинақсыз болса, онда $(|A|)$ қатары да жинақсыз.

Ескерту. Егер $q=0$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{|a_n|}=0$. Демек (A) қатарының абсолютті жинақтылығынан (B) қатарының абсолютті жинақтылығы шығады.

Ескерту. Егер $q\neq 0,\ q\neq\infty$ болса, онда $(|A|)$ және $(|B|)$ қатарларының екеуі де бір мезгілде не жинақты, не жинақсыз. Ал (A) және (B) қатарлары үшін қосымша зерттеулер қажет. Бұлардың әрқайсысы бір - бірінен тәуелсіз түрде не шартты жинақты, не жинақсыз болуы мүмкін.

Ақырлы түрдегі Даламбер белгісі

Теорема. Егер қайсыбір n нөмірінен бастап $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le q<1$ теңсіздігі орындалатын болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары абсолютті жинақты. Керісінше $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\ge 1$ теңсіздігі орындалатын болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары жинақсыз.

Шектік түрдегі Даламбер белгісі

Теорема. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=q$ шегі бар болса, онда $q<1$ болғанда (A) қатары абсолютті жинақты, ал $q>1$ болғанда – жинақсыз ($q=1$ болғанда (A) қатарының жинақтылығы туралы ешбір тұжырым жасауға болмайды. Қосымша зерттеулер жүргізу қажет).

Ақырлы түрдегі Кошидің радикалдық белгісі

Теорема. Егер қайсыбір n нөмірінен бастап $\sqrt[n]{|a_n|}\le q<1$ теңсіздігі орындалатын болса, онда (A) қатары абсолютті жинақты. Керісінше $\sqrt[n]{|a_n|}\ge 1$ теңсіздігі орындалатын болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары жинақсыз.

Шектік түрдегі Кошидің радикалдық белгісі

Теорема. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$ шегі бар болса, онда $q<1$ болғанда (A) қатары абсолютті жинақты, ал $q>1$ болғанда – жинақсыз ($q=1$ болғанда қатар жинақты да жинақсыз да болуы мүмкін). Сондықтан $q=1$ болғанда қосымша зерттеулер жүргізу қажет.

Теорема. $\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+iy_n)$ қатарының шартты жинақты болуы үшін $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ қатарларының екеуі де жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\left({}^{i}/_{2}\right)^n$ және $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+i\frac{1}{2^n}\right)$ қатарларын жинақтылыққа зертте; егер жинақты болса қосындысын тап.

Бірінші қатарға Кошидің шектік түрдегі радикалдық белгісін қолданайық. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}={}^{1}/_{2}<1$. Демек қатар жинақты, өйткені

$$|z_n|=\left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right|=\left(\left|\frac{i}{n}\right|\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Қатарлардың қосындысын табайық. Ол үшін анықтамаға сай қатардың $S_1,S_2,\dots,S_n,\dots$ дербес қосындыларының тізбегін құрайық та шекке көшейік. Сонда $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k$ қосындысының құрылымы еселігі $q={}^{i}/_{2}$ тең кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысын көрсетеді. Олай болса

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{i}{2-i}.$$

Екінші қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін оны екі нақты сандық қатардың қосындысына жіктейік:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ және } \sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Бұл қатарлардың әрқайсысы жинақты және олардың қосындылары сәйкес $S_1=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{1/2}{1-1/2}=1$. Сонда берілген бастапқы қатардың қосындысы $S=S_1+iS_2=\frac{1}{2}+i$ комплекс сан болады.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+i3n-1}{i2n^2-\sqrt{3}}$ және $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+i3n-1}{i2n^4-\sqrt{3}}$ қатарларын жинақтылыққа зертте.

Бірінші қатар жинақсыз, өйткені $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2i}\neq 0$. Демек қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды.

Керісінше екінші қатар үшін қажетті шарт $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ орындалады, бірақ $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерінің жалпы мүшелерін табу қиын. Сондықтан берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты жалпы гармоникалық қатармен салыстырамыз.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^4 + i3n^3 - n^2}{i2n^4 - \sqrt{3}}\right| = \left|\frac{1}{2i}\right| = \frac{1}{2}.$$

Демек салыстырудың шектік белгісі бойынша екінші қатар абсолютті жинақты.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

Қатардың жинақтылығына Даламбердің шектік белгісін пайдаланайық:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2i)^{n+1}n!}{(n+1)!\,(2i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2i}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Демек берілген қатар абсолютті жинақты.

Жаттығулар

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{5^n}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{(1+i)n}}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-2i}{1+\sqrt{n}}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3i-1)^n}{5^n}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{i}{2n+1}\right)$ қатарын жинақтылыққа зертте.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{2n}}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{i}{3n}\right]$ қатарын жинақтылыққа зертте.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-i)^n}{10^n}$ қатарын жинақтылыққа зертте.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{(3-i)^{2n}}$ қатарын жинақтылыққа зертте.

3. НЕГІЗГІ АЛГЕБРАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМДАР

Алгебралық амалдар және олардың қасиеттері

Бинарлық амал дегеніміз не деген сұраққа жауап іздейік. Ол үшін элементтерінің табиғаты әртүрлі болып келетін қайсыбір M жиынын қарастырайық. M жиынының белгілі бір ретпен алынған әрбір қос элементіне қандай да бір ереже бойынша осы жиынға тиісті элемент сәйкес қойылсын дейік. Жиындар теориясында дәл осылай анықталған ережені, яғни амалды, ***бинарлық амал*** деп атайды. Көпмүшеліктерді қосу және көбейту, жазықтықтағы (немесе кеңістіктегі) векторларды қосу, нақты сандарды қосу және көбейту амалдары бинарлық амалдардың мысалдары болады. Егер бинарлық амал өзімізге үйреншікті қосу ережесі болса, онда реттелген (a, b) элементтеріне сәйкес қойылатын c элементі осы элементтердің қосындысы деп аталады және $c = a + b$ таңбасымен белгіленеді. Егер бинарлық амал кәдімгі көбейту болса, онда c элементі осы элементтердің көбейтіндісі деп аталады және $c = a \cdot b$ таңбасымен белгіленеді. Жалпы жағдайда бинарлық амалды $*$ не o белгілерінің (таңбаларының) бірімен белгілейміз.

Ескерту. Кәдімгі қосу және көбейту амалдарының өзі де сандық жиындардың бәрінде бірдей бинарлық амалды анықтай бермейді. Мысалы теріс сандар жиынында көбейтуге қатысты бинарлық амал анықталмаған, өйткені екі теріс санның көбейтіндісі оң сан береді. Иррационал сандар жиынында қосу, көбейтуге қатысты бинарлық амалдар анықталмаған, өйткені екі иррационал санның қосындысы және көбейтіндісі рационал сан болуы мүмкін.

Анықтама. A жиынының әрбір элементіне B жиынынан толықтай анықталған (жалғыз) элемент сәйкестендірілетін кез келген ережені A жиынын B жиынына ***бейнелеу*** деп атайды.

Қысқаша A жиынын B жиынына бейнелеу $f\colon A \to B$ түрінде жазылады.

$f\colon A \to B$ бейнелеуінен $a \in A$ элементі үшін B жиынынан тек бір ғана элемент табылатыны шығады, алайда $b \in B$ элементі үшін алғашқы бейне саны көп болуы тіпті болмауы да мүмкін. $b \in B$ элементінің бүкіл алғашқы бейнелерінің жиынын оның толық түпнұсқасы деп атайды және $f^{-1}(b)$ таңбасымен белгілейді. Сонымен $f^{-1}(b) = \{a\colon a \in A,\ f(a) = b\}$.

Кейде $f\colon A \to B$ бейнелеуін ***функция*** деп те атайды.

Сонда f функциясы A жиынында анықталады, ал оның бейнелерінің B жиыны оның мәндер облысы болады. Демек $f(a)-$ функцияның a нүктесіндегі мәні, ал $(a, f(a))$ түріндегі бүкіл парлар жиыны функцияның графигін көрсетеді, мұнда $a \in A$, $f(a) = b \in B$.

Жиындар теориясынан белгілі келесі анықтамаларды еске түсірейік.

Анықтама. Егер B жиынының әрбір элементі A жиынының ең болмағанда бір элементінің бейнесі болса, онда $f: A \to B$ бейнелеуін ***сюръективті бейнелеу*** деп атайды.

Анықтама. Егер f бейнелеуі бойынша A жиынының әртүрлі элементтері B жиынының әртүрлі элементтеріне бейнеленетін болса, онда $f: A \to B$ бейнелеуін ***инъективті бейнелеу*** деп атайды.

Анықтама. Бір мезгілде сюръективті және ***инъективті*** болатын $f: A \to B$ бейнелеуін ***биективті*** немесе ***өзара бірмәнді бейнелеу*** деп атайды.

Бинарлық амалдың анықтамасына қайта оралайық.

$f: M \times M \to M$ бейнелеуі M жиынында бинарлық амалды анықтасын дейік. Сонда $f(a, b)$ немесе afb (мысалы $a + b$, $a \cdot b$ және т.б.) түріндегі бейнелеулер f бинарлық амалының a, b элементтеріне қолданылғандағы нәтижелерін көрсетеді.

Кез келген $a, b \in M$ элементтері үшін бинарлық амалдың мәні бірмәнді анықталатынын және ол міндетті түрде M жиынына тиісті болатынын ерекше атап өтейік.

Мысал. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ жиындарының кез келгенінде кәдімгі қосу және көбейту ережелері бинарлық амалды береді, мұнда

$\mathbb{N}$ – натурал сандар жиыны,

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{o\} -$ теріс емес бүтін сандар жиыны,

$\mathbb{Z}$ – бүкіл бүтін сандар жиыны,

$\mathbb{Q}$ – рационал сандар жиыны,

$\mathbb{R}$ – нақты сандар жиыны.

Мысал. Векторларды қосу және векторларды көбейту амалдары кеңістіктегі векторлар жиынында бинарлық амалды анықтайды. Керісінше екі вектордың скаляр көбейтіндісі санды анықтайды. Демек нәтиже векторлар жиынына тиісті емес. Сондықтан анықтама бойынша скалярлық көбейтінді бинарлық амалдың қатарына жатпайды.

Анықтама. Егер кез келген $a, b, c \in M$ элементтері үшін

$$(a * b) * c = a ** (b * c)$$

теңдігі орындалатын болса, онда M жиынында анықталған $*$ бинарлық амалын ассоциативті (терімді) деп атайды.

Мысал. Бинарлық амал бүтін сандардың айырымы болсын дейік, яғни

$$-:\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ \to\mathbb{Z},\quad (a,b)\mapsto a-b.$$

Сонда бұл амал не ассоциативті, не коммутативті болмайды.

Анықтама. Егер кез келген $a,b\in M$ элементтері үшін $a*b=b*a$ теңдігі орындалатын болса, онда M жиынында анықталған $*$ бинарлық амалын коммутативті деп атайды.

Мысал. Нақты сандар жиынында көбейту амалы коммутативтік заңдылыққа бағынады, яғни $a\cdot b=b\cdot a$. Квадрат матрицалар жиынында жалпы жағдайда $A\cdot B\neq B\cdot A$, яғни матрицаның көбейту амалы коммутативті емес.

Ескерту. Бинарлық амалдың ассоциативтік және коммутативтік қасиеттері бір-біріне тәуелсіз.

Мысал. $*$ бинарлық амалы нақты сандар жиынында сандардың арифметикалық ортасын табуды анықтасын дейік, яғни $a*b=\frac{a+b}{2}$. Қосылғыштардың орындарын ауыстырғанмен қосынды өзгермейді: $\frac{a+b}{2}=\frac{b+a}{2}$. Бұдан $a*b=b*a$ теңдігі шығады. Демек $*$ осылай анықталған бинарлық амалы коммутативтік заңдылыққа бағынады. Керісінше сандардың арифметикалық ортасын табу $*$ бинарлық амалы ассоциативтік заңдылыққа бағынбайды. Өйткені

$$(a*b)*c=\frac{a+b}{2}*c=\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}\ \text{ теңдігі }\ a*(b*c)=a*\frac{b+c}{2}=\frac{a+\frac{b+c}{2}}{2}$$

жалпы жағдайда теңдігіне тең емес, яғни $(a*b)*c\neq a*(b*c)$.

Қарастырылып отырған жиында бірнеше бинарлық амалдар анықталуы мүмкін, сондықтан бұл амалдарды байланыстыратын қасиеттер туралы да айтуға болады.

Анықтама. Егер кез келген a,b,c элементтері $a*(boc)=(a*b)o(a*c)$ немесе $(boc)*a=(b*a)o(c*a)$ теңдіктері орындалатын болса, онда M жиынында анықталған $*$ бинарлық амалын сол жиында анықталған o барлық амалына қатысты сол немесе оң ***дистрибутивті*** деп атайды.

Ескерту. Егер анықтамадағы сол және оң дистрибутивтік бір мезгілде орындалатын болса, онда жай дистрибутивтік туралы айтылады. Дербес жағдайда, егер $*$ амалы коммутативтік болса, онда

$a * (boc) = (boc) * a$ теңдігі орындалады. Демек бұл жерде тек жай дистрибутивтік қасиет туралы айтылады.

Сандар жиынында көбейту амалы қосу амалына қатысты дистрибутивтік болатыны мектеп бағдарламасынан белгілі, яғни $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Керісінше сандар жиынында қосу амалы көбейту амалына қатысты дистрибутивтік болмайтынын көреміз, өйткені жалпы жағдайда $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$.

Бір бинарлық амалдың алгебралық құрылымы. Қайсыбір M жиынының элементтерінің арасында бір бинарлық амал (кейде оны алгебралық амал деп те айтады) анықталсын дейік. Сонда:

Анықтама. M жиыны осы жиынға енгізілген бинарлық амалмен бірге ***алгебралық құрылым*** құрайды.

Қысқаша алгебралық құрылым деп құрамында математикалық амалдар анықталған жиындарды айтамыз.

Анықтама. Құрамында тек бір ғана $*$ бинарлық амал анықталған алгебралық құрылым ***группоид*** деп аталады және $(M;*)$ арқылы белгіленеді.

M жиыны ақырлы, яғни элементтерінің саны шектеулі болған жағдайда группоидқа қатысты бүкіл мағлұматты А. Кэли кестесі арқылы беруге болады. Егер $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ жиыны n элементтен тұрса, онда $(M;*)$ группоиды келесі түрде анықталады (2-кесте):

2-кесте

	a_1	…	a_j	…	a_n
a_1		…	⋮	⋯	
⋮			⋮		⋮
a_i		⋯	$a_i * a_j$	⋯	
⋮			⋮		⋮
a_n		⋯		⋯	

Группоидтың Кэли кестесі түрінде берілуіне сүйене отырып, реті n-ге тең M жиынында қанша әртүрлі амалдар орындауға болатынын есептейік. Кэли кестесіндегі тордың әрбір көзіне n элементтерден тұратын M жиынының кез келген элементін жазуға болады. Бұдан Кэли кестесін n^{n^2} вариант түрінде құруға болатынын көреміз, демек n элементтен тұратын M жиынында бүкіл саны n^{n^2} тең әртүрлі группоидтар табылады.

Анықтама. $(M;*)$ группоиды берілсін және $M_1 \subset M$ дейік. Егер M жиынының кез келген a,b элементтері үшін $\forall\, a,b \in M : (a,b \in M_1 \Rightarrow a * b \in M_1)$ шарты орындалатын болса, онда $(M;*)$ группоидының M_1 ішкі жиынын $*$ амалына қатысты тұйықталған деп атайды. Сонда $(M_1;*)$ группоиды $(M;*)$ группоидының ішкі группоиды болады.

Мысал. $(\mathbb{Z};\ +)$, $(\mathbb{N}_0;\ +)$, $(\mathbb{N};\ +)$ группоидтары $(\mathbb{R};\ +)$ группоидының ішкі группоидтары болады.

Анықтама. Егер барлық $x \in X$ үшін $eox = xoe = x$ теңдігі орындалатындай X жиынынан eoX элементі табылатын болса, онда оны o бинарлық амалына қатысты нейтрал элемент деп атайды.

Ұсыныс. $(X;o)$ алгебралық құрылымында нейтрал элементтердің саны бірден артпайды.

Дәлелдеуі. X жиынында e_1 және e_2 нейтрал элементтері бар дейік. Сонда анықтамадан $e_1 o e_2 = e_1$ және $e_1 o e_2 = e_2$ теңдіктері шығады. Сондықтан $e_1 \equiv e_2$.

Анықтама. Нейтрал элементі e болатын $(X;o)$ алгебралық құрылымы берілсін дейік. Егер X жиынынан $aob = boa = e$ теңдігі орындалатындай $b \in X$ элементі табылатын болса, онда $a \in X$ элементі b элементіне қатысты ***керіленетін элемент*** деп аталады. Ал керісінше b элементі a элементіне қатысты ***керіленетін элемент*** деп аталады. Қарапайым тілмен айтқанда a және b элементтері бір-біріне кері элемент.

Егер b элементі a-ға симметриялы болса, онда a элементі b-ға симметриялы. Бұдан b элементі үшін a элементі кері элемент болатыны шығады.

Анықтама. $(M;o)$ және $(\mathbb{N};*)$ алгебралық құрылымдары берілсін дейік. Егер кез келген $(a,b) \in M$ үшін $f(aob) = f(a) * f(b)$ теңдігі орындалатындай $f: M \to N$ бейнелеуі табылатын болса, онда бұл бейнелеу ***группоидтардың гомоморфизмі*** деп аталады.

Группоидтардың биективтік гомоморфизмін ***группоидтардың изоморфизмі*** деп атайды. Бұл жағдайда $(M;o)$ және $(\mathbb{N};*)$ группоидтарының изоморфтылығын $(M;o) \simeq (\mathbb{N};*)$ түрінде жазады.

Мысал. $x \mapsto 3^x$ бейнелеуін қарастырайық. $(\mathbb{R};\ +)$ группоиды анықтамадағы $(M;o)$ алгебралық құрылымын, ал $(\mathbb{R}_+;\ \bullet)$ группоиды анықтамадағы $(\mathbb{N};*)$ алгебралық құрылымын білдірсін. Сонда $(\mathbb{R};\ +) \simeq (\mathbb{R}_+;\ \bullet)$ группоидтары изоморфты, өйткені $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ теңдігі орындалады. Шынында да кез келген $(x,y) \in \mathbb{R}$ үшін $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$. Олай болса f бейнелеуі $(\mathbb{R};\ +)$ және $(\mathbb{R}_+;\ \bullet)$

группоидтарының арасындағы изоморфизмді анықтайды. Қарастырылып отырған бейнелеудегі 3 негізінің орнына бірден бөлек кез келген оң санды алуға болады. Сонда бұл мысал изоморфты алгебралық құрылымдардың арасында әртүрлі көптеген изоморфизмдер табылатынын көрсетеді.

Түптеп келгенде бір-біріне изоморфты алгебралық құрылымдардың қайсысын зерттемейік олардың барлығы да бір нысанның әртүрлі модельдері болады. Алайда қандай да бір есептің нақтылы шешімі үшін модельді таңдау талғауды қажет етеді.

Лемма. 1) $(M_1; o)$, $(M_2; *)$ және $(M_3; \otimes)$ группоидтары берілсін дейік. f_1 және f_2 осы группоидтардың арасындағы келесі

$$(M_1; o) \overset{f_1}{\to} (M_2; *) \overset{f_2}{\to} (M_3; \otimes)$$

изоморфизмдерді анықтасын. Сонда олардың $f_2 f_1$ көбейтіндісі де төмендегі группоидтардың изоморфизмі болады:

$$f_2 f_1 : (M_1; o) \to (M_3; \otimes), (f_2 f_1)(m_1) = f_2\big(f_1(m_1)\big);$$

2) $f : (M_1; o) \to (M_2; *)$ бейнелеуі осы группоидтардың арасындағы изоморфизмді білдірсін, сонда $f^{-1}: (M_2; *) \to (M_1; o)$ кері бейнелеуі де группоидтардың изоморфизмін анықтайды.

Дәлелдеу. 1) Кез келген $a, b \in M$ үшін

$$(f_2 f_1)(aob) = f_2\big(f_1(aob)\big) = f_2\big(f_1(a) * f_1(b)\big) = f_2\big(f_1(a)\big) \otimes f_2\big(f_1(b)\big) =$$

$$= (f_2 f_1)(a) \otimes (f_2 f_1)(b).$$

2) $g, h \in M_2, g = f(a), h = f(b)$ дейік, мұнда $a = f^{-1}(g), b = f^{-1}(h) \in M_1$. Сонда $(g * h) = f^{-1}\big(f(a) * f(b)\big) = f^{-1}\big(f(aob)\big) = aob = f^{-1}(g) o f^{-1}(h)$.

Салдар. Группоидтар класында "изоморфты болу" қатынасы эквиваленттік қатынасқа жатады:

$$(M, \omega) \simeq M(\omega),$$

мұнда ω таңбасы M жиынында анықталған бинарлық амалды білдіреді;
егер $(M_1; o) \simeq (M_2; *)$ болса, онда $(M_2; *) \simeq (M_1; o)$;
егер $(M_1; o) \simeq (M_2; *)$ және $(M_2; *) \simeq (M_3; \otimes)$ болса, онда $(M_1; o) \simeq (M_3; \otimes)$.

Анықтама. Егер M жиынында анықталған $*: M \times M \to M$ бинарлық амал ассоциативтік болса, онда $(M; *)$ группоиды ***жартылай топ*** құрайды.

Анықтама. Егер $(M; *)$ группоидында e нейтрал элемент бар болып және M жиынында анықталған $*: M \times M \to M$ бинарлық амал

ассоциативтік болса, онда $(M;*)$ группоидын ***моноид*** деп атайды. Белгілеуі: $(M;*;e_m)$.

Салдар. 1) Егер $(M;*;e_m)$ моноидтың m элементі үшін m^{-1} кері элементі табылатын болса, онда $(m^{-1})^{-1}=m$.

2) Егер $(M;*;e_m)$ моноидтың x,y элементтері x^{-1} және y^{-1} кері элементтерімен қайтымды болса, онда

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}.$$

Шынында да $(y^{-1}x^{-1})(xy)=y^{-1}x^{-1}xy=y^{-1}e_my=y^{-1}y=e_m=yy^{-1}=ye_my^{-1}=xyy^{-1}x^{-1}=(xy)(y^{-1}x^{-1})$.

Анықтама. Егер

1) $*$ бинарлық амалы ассоциативтік болса;

2) $(M;*)$ группоидының нейтрал элементі бар болса;

3) әрбір $a\in M$ элементі үшін $a'\in M$ симметриялық элементі табылса, онда осы шарттар орындалған жағдайда және тек сонда ғана $(M;*)$ группоиды топ құрайды.

Егер сонымен қатар $*$ үшін коммутативтік заңдылық орнатылатын болса, онда $(M;*)$ тобын коммутативтік немесе ***абель тобы*** (Н. Х. Абельдің құрметіне) деп атайды.

Группоидтың қасиеті оның бинарлық амалының қалай аталғанына және қалай белгіленгеніне байланыссыз. Осыған байланысты артық таңба және терминді болдырмау мақсатында әдетте группоидтардағы амалдарды қосу және көбейту деп атайды.

Ескерту. Егер топтағы бинарлық амал қосу болса, онда топты аддитивтік топ, ал топтағы бинарлық амал көбейту болса, онда топты мультипликативтік топ деп атайды.

Аддитивтік термині көп жағдайда коммутативтік группоидтар үшін қолданыс табады.

Мұндай терминдердің табиғи өмір сүргіштігін келесі мысал көрсетеді. Өлшемі болатын квадрат матрицалар жиынында матрицалық қосу және көбейту бинарлық амалдары қарастырылсын дейік. Сонда матрицалық қосу амалы ассоциативтік және коммутативтік амал болады, ал матрицалық көбейту ассоциативтік, бірақ коммутативтік амал болмайды.

$(\mathbb{N};+)$, $(\mathbb{N};\bullet)$, $(\mathbb{R};+)$ және $(\mathbb{R};\bullet)$ алгебралық құрылымдары жартылай топтың қарапайым мысалдары болады, мұнда $+$ және $\bullet$ сандардың стандартты қосу және көбейту амалдары.

Жоғарыда алгебралық құрылымның нейтрал элементі туралы анықтама берілген. Енді осы ұғымды кеңейте түсейік.

Анықтама. Егер кез келген $x \in X$ элементі үшін $e_L * x = x$ теңдігі орындалатындай $e_L \in X$ элементі табылатын болса, онда оны $(X; *)$ алгебралық құрылымының ***сол бірлік элементі*** (немесе сол нейтрал элементі) деп атайды. Осыған ұқсас кез келген $x \in X$ үшін $x * e_R = x$ теңдігі орындалатын болса, онда $e_R \in X$ элементін ***оң бірлік*** (немесе оң нейтрал) ***элемент*** деп атайды.

0 саны $(\mathbb{R}; +)$ жартылай тобында сол және оң бірлік элемент болады. Осы сияқты 1 саны $(\mathbb{R}; \bullet)$ жартылай тобының бір мезгілде оң және сол бірлік элементі болады. Сол және оң бірлік элементтер үшін келесі ұсыныстар орындалады.

Ұсыныс. Егер $(X; *)$ алгебралық құрылымында e_L сол бірлік элемент және e_R оң бірлік элемент бар дейік. Сонда $e_L \equiv e_R$. Шынында да сол және оң бірлік элементтердің анықтамасынан $e_R = e_L * e_R = e_L$ теңдігі шығады.

Ұсыныс. Егер $(X; *)$ алгебралық құрылымында бірлік элемент бар болса, онда ол жалғыз.

$(X; *)$ алгебралық құрылымында екі бірлік элемент бар деп санайық, айталық e_1 және e_2. Сонда бірлік элементтің анықтамасы бойынша $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$.

$*$ амалына қатысты X жартылай топ құрсын дейік және X жиынының ішкі жиыны Y осы $*$ амалына қатысты жартылай топ құрайды.

Анықтама. $Y \subset X$ ішкі жиынын X жартылай тобының ***ішкі жартылай тобы*** деп атайды.

$*$ амалына қатысты X бірлік элементі бар жартылай топ (моноид) құрсын дейік, ал $e \in Y$ (мұнда $e - X$ жартылай тобының бірлік элементі) тиістілігі орындалатындай X жиынының ішкі жиыны Y осы $*$ амалына қатысты тұйықталсын. Бұл жағдайда келесі анықтама дұрыс.

Анықтама. Y ішкі жиыны X моноидының ***ішкі моноиды*** деп аталады.

Мысалы $(\mathbb{Z}; \bullet)$ группоиды жартылай топ құрайды, ал $n > 1$ болғанда $(n\mathbb{Z}; \bullet)$ құрылымы ішкі жартылай топ болады. Осы сияқты $(\mathbb{Z}; \bullet)$ моноид, ал $(n\mathbb{Z}; +)$ құрылымы – ішкі моноид.

Ұсыныс. X жиынында $*$ амалы ассоциативтік бинарлық амалды білдірсін дейік. Сонда кез келген $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ элементтері үшін $x_1 *$

$x_2 * \ldots * x_n$ өрнегінің мәнін есептеу амалдардың орындалу ретіне байланыссыз. Демек

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \left(\prod_{k=1}^{m} x_k\right) \cdot \left(\prod_{j=m+1}^{n} x_j\right),$$

мұнда $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, ал $1 \le m \le n$.

Ұсыныс. X моноидының x және y элементтері ауыстырымды, яғни $x * y = y * x$ дейік. Сонда кез келген $n \in \mathbb{Z}_+$ үшін $(x*)^n = x^n * y^n$ теңдігі орынды.

Дәлелдеу. Жоғарыдағы теңдікті индукция тәсілі бойынша тексеру оңай.

$n = 1$ болғанда $x * y = y * x$ теңдігінің дұрыстығы осы элементтердің ауыстырымдылығынан шығады. $n = k$ болғанда теңдік дұрыс деп ұйғарайық.

$n = k + 1$ болғанда теңдіктің дұрыстығы $(x * y)^k = x^k * y^k$ және $x * y == y ** x$ теңдіктерінен шығады. Өйткені

$$(x * y)^{k+1} = (x * y)^k * (x * y) = x^k * y^k * (x * y) =$$
$$= x^k * y^k * y * x = x^{k+1} * y^{k+1}.$$

Анықтама. Егер $(X; *)$ жартылай тобының элементтерінің ішінен $x^2 = x$ теңдігі орындалатындай $x \in X$ элементі табылатын болса, онда бұл элементті ***идемпотенттік*** элемент деп атайды.

Жоғарыда қабылданған топ ұғымының анықтамасын оған эквивалентті басқаша түрде берейік.

Анықтама. Кез келген $x \in X$ элементі үшін оның кері $x^{-1} \in X$ элементі табылатын моноидты топ құрайды деп атайық, сонда $|X|$ саны топтың қанша элементтен тұратынын көрсетеді.

Анықтама. $*$ бинарлық амалына қатысты X тобы және оның $Y \subset X$ ішкі жиыны берілсін дейік. Егер $e \in Y$ бірлік және кез келген $x, y \in Y$ элементтері үшін $x * y \in Y$ және $x^{-1} \in Y$ қатыстары орындалатын болса, онда Y ішкі жиынын X тобының ішкі тобы деп атайды.

Анықтама. Егер X тобының кез келген $g, h \in X$ элементтері үшін $g * h = h ** g$ теңдігі орындалатын болса, онда X тобы коммутативтік топ құрайды.

Ескерту. Коммутативтік топтарды норвег математигі Абельдің құрметіне абель топтары деп атайды.

Анықтама. $[x,y] = x * y * x^{-1} * y^{-1}$ шамасын x және y элементтерінің коммутаторы деп атайды, мұнда x және y элементтері X тобының кез келген элементтері.

“Коммутатор” термині кез келген $x, y \in X$ үшін орындалатын $x * y = [x,y] * y * x$ теңдігінен шығады.

$(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Q}; +)$, $(\mathbb{R}; +)$, $(\mathbb{R}^*; \bullet)$ және $(Q^*; \bullet)$ алгебралық құрылымдары топтар құрайды. Мұнда $Q^* = Q/\{0\}$, $\mathbb{R}^* = R/\{0\}$.

Негізгі матрицалық топтар.

Нақты сандар жиынында анықталған өлшемдері $n \times n$ болатын келесі матрицалардың жиынын қарастырайық

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : detA \neq 0\}.$$

$(GL_n(\mathbb{R}); \bullet\bullet)$ алгебралық құрылымын қарастырайық. Мұнда $\bullet$ бинарлық амалы матрицалық көбейтуді білдіреді. $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ матрицалары үшін $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ матрицалық теңдігі орындалатыны сызықтық алгебрадан белгілі. Демек $\bullet$ бинарлық амалы ассоциативтік болады. Сондықтан $(GL_n(\mathbb{R}); \bullet\ \bullet; E)$ алгебралық құрылымы моноид құрайды, мұнда $E \in M_n(\mathbb{R})$ бірлік матрица. Егер кез келген $A \in M_n(\mathbb{R})$ матрицасы үшін $detA \neq 0$ болса, онда оның кері матрицасы табылатыны жалпы курстан белгілі. Айтылған талдауларды қорыта келе $GL_n(\mathbb{R})$ жиыны матрицалық көбейту амалына қатысты топ құрайды дейміз. Бұл топты рангысы n - ға тең жалпы сызықтық топ деп те атайды.

$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : detA = 1\}$ тобын $GL_n(\mathbb{R})$ тобының рангысы n -ға тең арнайы сызықтық ішкі тобы деп атайды.

Ескерту. Егер $\mathbb{R}$ нақты сандар жиынының орнына $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ және $\mathbb{C}$ сандық жиындарын қарастыратын болсақ, онда $GL_n(\mathbb{Z})$, $GL_n(\mathbb{Q})$, $GL_n(\mathbb{C})$ топтарын және олардың сәйкес $SL_n(\mathbb{Z})$, $SL_n(\mathbb{Q})$, $SL_n(\mathbb{C})$ ішкі топтарын қарастыруға тура келеді.

$GL(R)$ тобынан арнайы сызықтық ішкі топтан басқа бүкіл матрицаларының анықтауыштарының мәндері ± 1 болатын және ***унимодулярлы*** деп аталатын ішкі топты бөліп шығарады.

Сызықтық алгебра мен геометрияда қолданылатын негізгі матрицалық топтардың анықтамасын еске түсірейік.

- $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = A^T A = E\}$ ортогональды топ;
- $SO(n) = \{A \in O(n) : detA = 1\}$ арнайы ортогональды топ;
- $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = A^* A = E\}$ унитарлы топ;

• $SU(n) = \{A \in U(n) : detA = 1\}$ арнайы унитарлы топ, мұнда $n \in N$. Тағы солай

$O(1) = \{\pm 1\}$, $SO(1) = \{1\}$, $U(1) = \{e^{i\theta} : \theta \in [0,2\pi]\}$, $SU(1) = \{1\}$ болатындарын еске түсірейік.

Сақина және өріс. Сақина мен өрістің топтан айырмашылығы бұл алгебралық құрылымдардың әрқайсысының құрамында екі бинарлық амал анықталған. Әдетте оларды қосу және көбейту амалдары деп атайды.

Қайсыбір K жиынында қосу және көбейту амалдары анықталсын дейік. Егер осы жиынның кез келген $a, b, c \in K$ элементтері үшін $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$ арақатынастары орындалатын болса, онда бұл амалдар дистрибутивтік заңдылықпен байланысты деп аталады.

Анықтама. K жиынында анықталған қосу және көбейту амалдарына қатысты

1) қосуға қатысты $(K; +)$ абель тобы;
2) көбейтуге қатысты $(K; \bullet)$ жартылай топ;
3) қосуға қатысты көбейту амалы

дистрибутивтік қасиеттері орындалатын болса, онда K жиыны ***сақина*** құрайды.

Сонда $(K; +, \bullet)$ алгебралық құрылымын K сақинасының аддитивтік тобы деп атайды. Егер көбейту амалы коммутативті болса, онда $(K; +, \bullet\ \bullet)$ сақинасын коммутативтік сақина деп атайды. Егер $(\mathbb{R}; \bullet\ \bullet)$ алгебралық құрылымы бірлік элементі анықталған жартылай топ құрса (моноид), онда $(K; +, \bullet)$ сақинасын бірлік элементі анықталған сақина деп атаймыз.

$(\mathbb{Z}; +, \bullet\ \bullet)$, $(\mathbb{Q}; +, \bullet\ \bullet)$, $(\mathbb{R}; +, \bullet\ \bullet)$ сандық сақиналары бірлік элементі анықталған коммутативтік сақиналардың қатарына жатады.

Көбейтінділері нөлге тең нөлдік емес сақинаның элементтері нөлдің бөлгіштері деп аталады. Мысалы матрицаларды қосу және көбейту амалдарына қатысты анықталатын екінші ретті матрицалар сақинасында $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары нөлдің бөлгіштері, өйткені олардың көбейтіндісі осы сақинаның нөлдік элементі (нөлдік матрица).

Мысал. Нақты сандардың реттелген жұптарының $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ жиынын қарастырайық:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^2$ жиынында қосу және көбейту амалдары келесі түрде анықталсын:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)(c,d)=(ac,bd).$$

Нақты сандардың қасиеттерінен + және • амалдарының $\mathbb{R}^2$ жиынында ассоциативтік және коммутативтік болатыны шығады, ал • көбейту амалы қосуға қатысты дистрибутивтік болады. $\mathbb{R}^2$ жиынында (0,0) жұбы оның нөлдік, ал (1,1) жұбы бірлік элементі болады. Демек $(\mathbb{R}^2;\ +, \bullet\bullet)$ сақинасы бірлік элементі анықталған коммутативтік сақина болады.

Теорема. Кез келген K сақинасының кез келген x, y, z элементтері үшін төмендегі теңдіктер дұрыс:

1) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

2) $-(-x) = x$;

3) $(-x)y = -(xy),\ \ x(-y) = -(xy)$;

4) $(-x)(-y) = xy$;

5) $x(y-z) = xy - xz$;

6) $m(xy) = (mx)y = x(my);\ \ m \in \mathbb{Z}$;

Ескерту. Алгебра курсында ассоциативтік емес сақиналар да зерттеледі. Мысалы, егер сақина анықтамасындағы ассоциативтік шартты барлық $x, y, z \in K$ үшін $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$ Якоби тепе-теңдігімен алмастыратын болсақ және барлық $x, y \in K$ үшін $xy + yx = 0$ теңдігі орындалатын болса, онда мұндай сақинаны Ли сақинасы деп атайды.

Анықтама. Әрбір нөлдік емес элементі қайтымды (яғни, кері элементі табылады) және бірлік элементі бар коммутативтік сақинаны ***өріс*** деп атайды.

Өрістердің мысалдары ретінде келесі алгебралық құрылымдарды жатқызуға болады:

1. Қосу және көбейту амалдарына қатысты бүкіл рационал, бүкіл нақты, бүкіл комплекс сандар жиыны;

2. Қосу және көбейту амалдарына қатысты $a + b\sqrt{3}$ түріндегі бүкіл сандар жиынын, мұнда a және b рационал сандар;

3. $0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0,$

теңдіктерімен берілген қосу және көбейту амалдарына қатысты 0 және 1 элементтерінен тұратын жиын.

Кез келген сандық өрісте оның амалдары мен элементтеріне қатысты келесі қасиеттердің орындалуы өрістің анықтамасынан шығады:

I. P өрісінің әрбір a және b қос элементіне осы өріске тиісті элементін өзара бірмәнді сәйкес қоятын қосу амалы анықталған және де:

1) кез келген $a, b \in P$ үшін $a + b = b + a$, яғни қосу коммутативті;

2) кез келген $a, b, c \in P$ үшін $a + (b + c) = (a + b) + c$, яғни қосу ассоциативті;

3) кез келген $a \in P$ үшін $a + 0 = a$ теңдігі орындалатындай P өрісінен нөлдік жалғыз 0 элементі табылады;

4) кез келген $a \in P$ элементі үшін $a + (-a) = 0$ теңдігі орындалатындай P өрісінен a элементіне қарама-қарсы жалғыз $(-a)$ элементі табылады. Бұл қасиет P өрісінде азайту амалының бар болуын қамтамасыз етеді.

II. P өрісінің әрбір a және b қос элементіне осы өріске тиісті элементін өзара бірмәнді сәйкес қоятын көбейту амалы анықталған және де:

1) кез келген $a, b \in P$ үшін $ab = ba$, яғни көбейту коммутативті;

2) кез келген $a, b, c \in P$ үшін $a(bc) = (ab)c$, яғни көбейту ассоциативті;

3) P өрісінде кез келген $a \in P$ элементі үшін $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ теңдігі орындалатындай жалғыз 1 бірлік элементі табылады;

4) әрбір нөлдік емес $a \in P$ элементі үшін P өрісінде $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ теңдігі орындалатындай $a \in P$ элементіне кері жалғыз $a^{-1} \in P$ элементі табылады.

III. P өрісінде қосу және көбейту амалдары дистрибутивтік заңдылықпен байланысты, яғни кез келген $a, b, c \in P$ үшін $(a + b)c = ac + bc$ арақатынасы орындалады.

Сандық емес өріске мысал қарастырайық. Ол үшін қосу және көбейту амалдары келесі Кэли кестелерімен анықталатын және $\{0, e\}$ элементтерінен тұратын жиынды алайық.

+	0	e
0	0	e
e	e	0

•	0	e
0	0	0
e	0	e

Сонда көрсетілген амалдарға қатысты $\{0, e\}$ өріс құрайтынына көз жеткізу қиындық тудырмайды. Екі элементтен тұратын бұл өрісті Галуа өрісі деп атайды және $GF(2)$ арқылы белгілейді.

Тұжырым. 1) Егер $a, b \in P$ өрісінің элементтері және $a \neq 0$ болса, онда $ax = b$ теңдеуінің P өрісінде тек жалғыз ғана шешімі бар;

2) Кез келген P өрісінде нөлдің бөлгіштері болмайды, яғни

$$\forall\, a, b \in P\colon (ab = 0 \iff a = 0 \text{ немесе } b = 0).$$

Анықтама. $(K; +, \bullet\ \bullet)$ сақинасының K_1 ішкі жиыны K жиынында анықталған $+$, $\bullet$ амалдарына қатысты тұйықталсын дейік. Сонда $(K; +, \bullet\ \bullet)$ сақина құрайды және ол K сақинасының ішкі сақинасы деп аталады.

Жаттығулар

1. Келесі бинарлық амалдардың ассоциативтік және коммутативтік болатынын дәлелде:

а) $+ ; \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a + b$ (натурал сандарды қосу);

б) $\bullet\ \bullet : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto ab$ (натурал сандарды көбейту);

в) M жиынының бүкіл ішкі жиындарының жиынын $P(M)$ арқылы белгілейік, мұнда құр жиын да кіреді. Сонда

$\cap\colon P(M) \times P(M) \longrightarrow P(M)$, $(A, B) \mapsto A \cap B$ (ішкі жиындардың қиылысуы);

г) $\cup\colon P(M) \times P(M) \longrightarrow P(M)$, $(A, B) \mapsto A \cup B$ (ішкі жиындардың бірігуі);

д) $\Delta\colon P(M) \times P(M) \longrightarrow P(M)$, $(A, B) \mapsto A\,\Delta\,B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (ішкі жиындардың симметриялық айырымы).

2. Натурал сандар жиынында $*$ дәрежеге шығару бинарлық амалын білдірсін, яғни $*\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m^n$.

Натурал сандар жиынына енгізілген осы $*$ бинарлық амалдың ассоциативтік не коммутативтік болмайтынын дәлелде.

3. Натурал сандар жиынына енгізілген o бинарлық амалы келесі түрде анықталсын $o : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m^n + n^m$.

Осы бинарлық амалдың коммутативтік болатынын, бірақ ассоциативтік болмайтынын дәлелде.

4. M жиынында $*$ бинарлық амалы ассоциативтік бола ма? Егер

а) $M = \mathbb{N}$, $x * y = x^y$;

б) $M = \mathbb{N}$, $x * y = EYOБ(x, y)$;

в) $M = \mathbb{N}$, $x * y = 2xy$;

г) $M = \mathbb{Z}, \quad x * y = x - y$;

д) $M = \mathbb{Z}, \quad x * y = x^2 + y^2$;

е) $M = \mathbb{R}, \quad x * y = sinx \cdot siny$.

5. M жиынында o амалы $xoy = x$ ережесі бойынша анықталсын дейік. Бұл амал ассоциативтік бола ма? M жиынының нейтрал және қайтымды элементтері туралы не айтуға болады?

6. $M^2 = M \times M$ жиынында $(x, y)o(z, z) = (x, z)$ ережесі бойынша o амалы анықталған, мұнда M қайсыбір жиын. Осы амал ассоциативтік бола ма? $M^2 = M \times M$ жиынында нейтрал элемент табыла ма?

7. $f : (\mathbb{N}; +) \to (\mathbb{N};\bullet\ \bullet), \quad f(n) = 2^n,$

$f_k : (\mathbb{N}; +) \to (\mathbb{N}; +), \quad f_k(n) = kn, \quad k \in \mathbb{N}$

бейнелеулері группоидтардың гомоморфизмі болатынын дәлелде.

8. $f_k : (\mathbb{N}; \bullet\ \bullet) \to (\mathbb{N}; \bullet\ \bullet), \quad f_k(n) = kn, \quad k \neq 1$

бейнелеулері группоидтардың гомоморфизмі болмайтынын дәлелде.

9. $|M| = m, \ |N| = n$ дейік. Сонда $|\{f : M \to N\}| = n^m$ болатынын дәлелде, мұнда $|M| -$ M жиынының қуатын білдіреді.

10. $|M| = m$ дейік, ал $P(M) -$ M жиынының бүкіл ішкі жиындарының жиынтығы болсын (мұнда құр жиын да кіреді). $|P(M)| = 2^m$ тең болатынын дәлелде.

11. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n + 1$ бейнелеуі инъективті, бірақ сюръективті болмайтынын дәлелде.

12. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ f(1) = 1$ және $n > 1$ үшін $f(n) = n - 1$ бейнелеуі сюръективті, бірақ инъективті болмайтынын дәлелде.

4. КӨПМҮШЕЛІКТЕР

Көпмүшелік ұғымы

Мектеп бағдарламасында математика пәнінде $a_k x^k$ түріндегі өрнектер қарастырылады, мұнда $x-$ айнымалы (белгісіз), ал $a_k -$ сандық коэффициент. Және a_k коэффициенті қайсыбір сандық өріске тиісті болады (көбінесе $\mathbb{R}$ немесе $\mathbb{C}$). Элементар алгебрадан мұндай өрнектерді бірмүшелік деп атайды.

Алда дәреже көрсеткіштері бүтін, теріс емес бір x белгісізіне тәуелді бірмүшеліктердің ақырлы қосындыларын қарастырамыз. Егер қайсыбір мұндай өрнекті дәстүрлі түрде $f(x)$ арқылы белгілесек, онда белгісіздің бірдей дәрежелеріне қатысты ұқсас мүшелерін біріктіргеннен кейін, оны әрқашан

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (4.1)$$

түрінде жазуға болады.

Анықтама. (4.1) түріндегі кез келген өрнекті бір x белгісізінен тәуелді ***көпмүшелік*** деп атаймыз, мұнда $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 -$ сандық коэффициенттер.

Көпмүшеліктің құрамына кіретін бірмүшеліктердің ең үлкен дәрежесі көпмүшеліктің дәрежесін көрсетеді.

Егер $a_n \neq 0$ болса, онда $f(x) - n$ дәрежелі көпмүшелік, және де $a_n -$ бас коэффициент, $a_n x^n -$ $f(x)$ көпмүшелігінің бас мүшесі, $a_0 -$ бос мүшесі деп аталады. $f(x)$ көпмүшелігінің дәрежесі $degf$ арқылы белгіленеді. Нөлдік көпмүшеліктің дәрежесі анықталмаған, алайда кейде оны $-\infty$ тең деп алу қолайлы.

$$\deg(f+g) \leq \max(degf, degg),$$

$$degfg = degf + degg$$

арақатынастарының дұрыстығына көз жеткізу қиындық тудырмайды.

Екі көпмүшеліктің қосындысы, айырымы және көбейтіндісі де көпмүшелік болады. Дұрысында да

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0;$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m, \quad b_m \neq 0$$

дейік. Сонда

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + \left(a_p + b_p\right)x^p,$$
$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + \left(a_p - b_p\right)x^p,$$

мұнда $P = max\{n, m\}$ (n, m сандарының ішінде ең үлкені).

Анықтама. $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшеліктерінің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттері өзара тең болса, онда мұндай көпмүшеліктер бір-біріне тең. $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшеліктерінің көбейтіндісі мүмкін болатын барлық uv көбейтінділерінің қосындысына тең, мұнда $u - f(x)$, ал $v - g(x)$ көпмүшелігінің кез келген мүшесі. Ұқсас мүшелерін біріктіргеннен кейін

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$$

көпмүшелігін аламыз, мұнда

$$c_kx^k = a_0b_kx^k + a_1xb_{k-1}x^{k-1} + a_2x^2b_{k-2}x^{k-2} \ldots + a_kx^kb_0 = \\ = (a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0)x^k,$$

сол себептен $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0$.

Көпмүшеліктерді қосу амалы коммутативтік және ассоциативтік заңдылықтарға бағынады:

1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

2) $f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = \big(f(x) + g(x)\big) + h(x)$;

3) $f(x) + O(x) = f(x)$ теңдігі орындалатындай $O(x)$ көпмүшелігі табылады, мұнда $O(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n$;

4) $f(x) + g(x) = O(x)$ теңдігі орындалатындай $g(x)$ көпмүшелігі табылады, мұнда $g(x) = -a_0 - a_1 \cdot x - a_2 \cdot x^2 - \cdots - a_n \cdot x^n$.

Көпмүшеліктердің көбейтуге қатысты келесі қасиеттерін атап өтейік.

1. Көбейту коммутативті: $f(x)g(x) = g(x)f(x)$.

2. Көбейту ассоциативті: $f(x)(g(x)h(x)) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$.

3. Көпмүшеліктерді көбейткенде бірлік элементтің ролін 1 саны атқарады (нолінші дәрежелі көпмүшелік санды білдіреді):

$1 \cdot f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$.

4. Көбейту қосу амалына қатысты дистрибутивті:

$$\big(f(x) + g(x)\big)h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x).$$

Математикалық талдауда көпмүшеліктерді бір айнымалының функциясы ретінде қарастырады және оның коэффициенттері қайсыбір сандық өрістен мәндер қабылдайды деп ұйғарады. Көпмүшеліктерді осы тұрғыда зерттеуді оның аналитикалық тәсілдемесі деп атайды.

Алгебралық құрылымдардан түсінік алғаннан кейін көпмүшеліктерді басқаша көзқараспен зерттеуге уақыт келді.

Көпмүшелік ұғымын алгебралық тәсілдеме арқылы баяндайық. Сонымен бірге біз коэффициенттері кез келген сақинадан алынатын көпмүшеліктерді қарастырамыз. Көпмүшеліктің функция ретінде көрсетілуін уақытша ұмытамыз.

K – кез келген сақина дейік. Коэффициенттері K сақинасынан алынған белгісіз x –тің көпмүшелігі деп

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (4.2)$$

түріндегі формальды өрнекті айтамыз, мұнда $n \in \mathbb{Z}$ және $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициенттері K сақинасының элементтері. (4.2) өрнегін тұтас таңба (символ) ретінде қарастыратынымызды айрықша баса айтамыз; ешқандай қосу амалдары немесе оның жеке дара бөліктеріне көбейту амалдары жүргізілмейді. K сақинасының a_k элементін $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ (4.2) көпмүшелігінің x^k алдындағы коэффициент.

Ескерту. 1) көпмүшелік жазылуындағы x әрпін кез келген басқа әріппен алмастыруға болады. Көпмүшеліктерді қандай әріппен белгілеу мәтіннен түсінікті болады.

2) (4.2) көпмүшелігінің берілуі үшін тек $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициенттері маңызды болғандықтан, көпмүшелікті K сақинасының $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ элементтерінің жай тізбегі деп айтуға болады. Алайда ақыр аяғында көпмүшелікті (4.2) түрінде өрнектеу өзімізге қолайлы болады.

Коэффициенттері K сақинасына тиісті x белгісізіне тәуелді бүкіл көпмүшеліктердің жиынын $K[x]$ арқылы белгілейміз. $K[x]$ жиынында қосу және көбейту амалдары келесі түрде анықталады:

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i,$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \cdot \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = \sum_{k=0}^{n+m} c_kx^k,$$

мұнда $c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j$.

Бұл анықтамадан $< K[x]; +, \bullet\bullet >$ алгебралық құрылымының сақина құрайтындығы шығады. Бұл сақинаны әрі қарай $K[x]$ арқылы белгілейміз. Сонымен қатар

Теорема. 1) Егер K сақина құраса, онда $K[x]$-та сақина. 2) Егер K коммутативтік сақина болса, онда $K[x]$ коммутативтік сақина. 3) Егер $K-$ ның құрамында бірлік элемент бар болса, онда $K[x]$ -тың құрамында да бірлік элемент бар. 4) Егер K-ның нөлдік бөлгіштері болмаса, онда $K[x]$-тың құрамында да нөлдік бөлгіштер жоқ.

Дәлелдеу. $a, b, c \in K[x]$ дейік. Сақинаның аксиомаларын тексерейік.

1.$(a+b)+c = \sum_{i=0}^{n}\big((a_i+b_i)+c_i\big)\,x^i = \sum_{i=0}^{n}\big(a_i+(b_i+c_i)\big)\,x^i = a+$ $+(b+c)$ теңдігінен қосуға қатысты ассоциативтік қасиеті шығады.

2. $a+b = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n}(b_i+a_i)x^i = b+a$ теңдігінен қосуға қатысты коммутативтік қасиеті шығады.

3. Нөлдік көпмүшелік $K[x]$-тың нөлдік элементі болады.

4. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i$ көпмүшелігі үшін

$$-f = \sum_{i=0}^{n}(-a_i)\,x^i$$

көпмүшелігі оның қосуға қатысты қарама-қарсы көпмүшелігі болады.

I. Кез келген $a, b, c \in K[x]$ элементтері, яғни көпмүшеліктері үшін $(ab)c = a(bc)$ теңдігін дәлелдейік.

$ab = d,\ dc = f,\ bc = g$ және $ag = h$ белгілеулерін енгізейік. Сонда $f = h$ теңдігінің орындалатынын дәлелдейік. a, b, c көпмүшеліктерінің сәйкес коэффициенттерін a_i, b_i, c_i арқылы белгілейік. Және де көпмүшелікті көпмүшелікке көбейту ережесі бойынша $f, h \in K[x]$ элементтерінің, яғни көпмүшеліктерінің сәйкес f_i, h_i коэффициенттерін табамыз. Сол кезде

$$f_i = \sum_{k+l=i} d_k\,c_l = \sum_{k+l=i}\left(\sum_{r+s=k} a_r b_s\right)c_l = \sum_{r+s+l=i}(a_r b_s)c_l.$$

Басқа жақтан

$$h_i = \sum_{p+q=i} a_p g_q = \sum_{p+q=i} a_p\left(\sum_{u+v=p} b_u c_v\right) = \sum_{p+u+v=i} a_p\,(b_u c_v).$$

Көпмүшеліктің коэффициенттері сақина құрайтынын ескере отырып, $K[x]$ жиынының элементтері арасында көбейтуге қатысты ассоциативтік заңдылықтың орындалатынын көрсеттік, демек $f_i = h_i$.

Енді кез келген $a, b, c \in K[x]$ үшін $(a+b)c = ac + bc$ теңдігінің дұрыстығын дәлелдейік. $a+b = d,\ dc = f,\ ac = g,\ bc = h$ және $g+h$

белгілеулерін енгізейік. $f = t$ теңдігінің дұрыстығын көрсетейік. Сонда

$$f_i = \sum_{k+l=i} d_k\, c_l = f_i = \sum_{k+l=i} (a_k + b_k)c_l = f_i = \sum_{k+l=i} (a_k\, c_l + b_k c_l) = \\ = \sum_{k+l=i} a_k\, c_l + \sum_{k+l=i} b_k\, c_l.$$

Басқа жақтан $t_i = g_i + h_i = \sum_{k+l=i} a_k\, c_l + \sum_{k+l=i} b_k\, c_l$.

II. Кез келген $a, b \in K[x]$ элементтері үшін $ab = ba$ теңдігінің дұрыстығы көпмүшеліктерді бір-біріне көбейту ережесі мен олардың көбейтуге қатысты коэффициенттерінің коммутативтік заңдылығынан шығады.

III. $K \subset K[x]$ болғандықтан $1 \subset K$ элементі $K[x]$ жиынының бірлік элементі болады. Шындығында $1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i\, x^i = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$.

IV. $K[x]$ -тың құрамында нөлдік бөлгіштердің жоқ екенін дәлелдейік.

$$a \equiv a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0,$$
$$b \equiv b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \qquad b_m \neq 0$$

дейік, мұнда $a, b \in K[x]$. Олардың көбейтіндісін қарастырайық:

$$a \cdot b = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) = \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1)x + \cdots + a_n b_m x^{n+m}.$$

$a \cdot b \in K[x]$ көпмүшелігінің бөлгіштері жоқ және $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, онда $a_n b_m \neq 0$. Демек $a \cdot b \neq 0$. Теорема дәлелденді.

Қалдықпен бөлу

Бүтін сандар жиынында қалдықпен бөлу амалы орын алады. Егер $a, b \in \mathbb{Z}$ сандары үшін $a = bq + r$ теңдігі орындалатындай q және r сандары табылатын болса, онда b саны a санын қалдықпен бөледі деп айтамыз, мұнда r қалдық және $r < b$.

Теорема. P өріс дейік. Әрбір $f, g \in P[x]$ элементтері үшін (яғни көпмүшеліктері үшін)

а) $f = g \cdot q + r$;

б) $r = 0$ немесе $degr < degg$

шарттары орындалатындай бірден-бір $q, r \in P[x]$ элементтері табылады (көпмүшеліктері табылады), мұнда $g \neq 0$. Сонымен бірге q бөлінді, ал r қалдық деп аталады.

Дәлелдеу. Егер $degf < degg$ болса, онда $q = 0, r = f$ тең деп алуға болады. Егер $degf \geq degg$ болса, онда әрбір $i > 0$ үшін

$$f_{i+1} = f_i - \frac{f_i - \text{дің бас коэффициенті}}{g - \text{дың бас коэффициенті}} \cdot gx^{deg(f_i) - \deg(g)}$$

теңдігімен анықталатын f_i көпмүшеліктерінің тізбегін құрамыз, мұнда $f_0 = f$. $h_i = \frac{f_i - \text{дің бас коэффициенті}}{g - \text{дың бас коэффициенті}} \cdot gx^{deg(f_i) - \deg(g)}$ есептейік те жоғарыдағы теңдікті келесі түрде жазайық: $f_{i+1} = f_i - h_i g$. Бұл көпмүшеліктердің дәрежелері төмендейді:

$$degf_0 > degf_1 > degf_2 > \cdots$$

Демек $n = degf$ теңдігімен анықталатын қадамдар санына жетпей-ақ не нөлге тең, не дәрежесі g көпмүшелігінің дәрежесінен кіші болатын f_k көпмүшелігін аламыз.

$$\begin{gathered} f_0 = f, \\ f_1 = f_0 - gh_0, \\ f_2 = f_1 - gh_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k = f_{k-1} - gh_{k-1} \end{gathered}$$

теңдіктерінің барлығын мүшелеп қосып,

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_k = f + f_0 + f_1 + \cdots + f_{k-1} - g(h_0 + h_1 + \cdots + h_{k-1})$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$f = g(h_0 + h_1 + \cdots + h_{k-1}) + f_k.$$

Соңғы теңдіктегі $h_0 + h_1 + \cdots + h_{k-1}$ қосындысын q, ал $f_k = r$ деп алайық. Сонда r және q көпмүшеліктері бастапқы а) және б) шарттарын қанағаттандыратын ізделініп отырған $r, q \in P(x)$ элементтері. Мұндай жіктелудің жалғыздығын дәлелдейік.

Теореманың шартын қанағаттандыратын екі көпмүшеліктің (q_1, r_1) және (q_2, r_2) жұбы берілсін дейік:

$f = g \cdot q_1 + r_1$, мұнда $r_1 = 0$ немесе $degr_1 < degg$;

$f = g \cdot q_2 + r_2$, мұнда $r_2 = 0$ немесе $degr_2 < degg$.

Бұл теңдіктерді бір - бірімен мүшелеп шегерсек

$$g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

теңдігін аламыз.

Егер $r_2 - r_1 \neq 0$ болса, онда $q_1 - q_2 \neq 0$. Бұл көпмүшеліктер нөлден өзгеше болғандықтан олардың дәрежелерін қарастырамыз. Сол жақ бөлігінің дәрежесі $degg + deg(q_1 - q_2) \geq degg$, ал оң жақ бөлігінің дәрежесі $degg$ кіші. Қарама қайшылыққа келдік, ендеше $r_2 - r_1 = 0$, ал онда $q_1 - q_2 = 0$ (өйткені $P[x]$ сақинасында нольдің бөлгіштері жоқ). Теорема дәлелденді.

Мысал. $f \equiv f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$ көпмүшелігін $g = f(x) = x^2 + +5x + 6$ көпмүшелігіне бөлгенде шығатын $q \equiv q(x)$ бөліндіні және $r \equiv r(x)$ қалдық көпмүшеліктерді тап.

Шешуі. "Бұрыштап" бөлу тәсілін қолданайық

$3x^3$	$10x^2$	$2x$	x^2	$5x$
$3x^3$	$15x^2$	$18x$	$3x$	
	$5x^2$	$16x$		
	$5x^2$	$25x$		
		0		
		$9x$		
		7		

Сонымен $q(x) = 3x - 5, \quad r(x) = 9x + 27.$

Көпмүшеліктердің бөлгіштері. Евклид алгоритмі

f элементі $K[x]$ сақинасынан алынған қайсыбір көпмүшелік дейік. Егер қайсыбір $h \in K[x]$ көпмүшелігі үшін $f = dh$ теңдігі орындалатындай $d \in K[x]$ көпмүшелігі табылса, онда $d \in K[x]$ көпмүшелігі f көпмүшелігінің бөлгіші болады. Белгілеуі: $d|f$.

Көпмүшеліктердің бөлінгіштік қасиеттерін атап өтейік:

1) егер $g|f$, ал $h|g$ бөлінсе, онда $h|f$;

2) егер $h|f$ және $h|g$ бөлінсе, онда $h|f \pm g$;

3) егер $h|f$ бөлінсе, онда $h|f \cdot g$, мұнда $g \equiv g(x) \in K[x]$ кез келген көпмүшелік;

4) әрбір көпмүшелік нөлдік дәрежелі кез келген көпмүшелікке бөлінеді.

Анықтама. f және g көпмүшеліктері берілсін дейік. Мұнда $f, g \in K[x]$. Егер $\varphi \in K[x]$ көпмүшелігі осы көпмүшеліктерді бір мезгілде

қалдықсыз бөлсе, онда $\varphi|K[x]$ көпмүшелігі f және g көпмүшеліктерінің ортақ бөлгіші деп аталады.

Анықтама. f және g көпмүшеліктерінің ортақ бөлгіштерінің ішінде дәрежесі жағынан ең үлкені осы көпмүшеліктердің ең үлкен ортақ бөлгіші деп аталады. Белгілеуі: $d = (f, g)$, мұнда $f, g \in K[x]$. басқаша айтқанда f және g көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгіші d төмендегі шарттарды қанағаттандырады:

а) $d|f$ және $d|g$;

б) егер қайсыбір $d' \in K[x]$ көпмүшелігі f және g көпмүшеліктерінің ортақ бөлгіші болса, онда $d'|d$.

Ескерту. Көпмүшеліктердің ең үлкен ортақ бөлгіші бірмәнді анықталмайды, өйткені егер $d = (f, g)$ болса, онда кез келген k саны үшін $kd = (f, g)$ көпмүшелігі де олардың ең үлкен ортақ бөлгіші болады. Мұнда (f, g) символымен f және g көпмүшеліктерінің келтірілген ең үлкен ортақ бөлгіші белгіленген.

Теорема. P өріс дейік. Кез келген нөлдік емес $f, g \in P(x)$ көпмүшеліктері үшін келесі тұжырымдар дұрыс.

1) $P[x]$ өрісінде f және g көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгіші табылады.

2) f және g көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгіші тек жалғыз түрде табылады.

3) Ең үлкен ортақ бөлгіш Евклид алгоритмінің көмегімен табылады.

Дәлелдеуі. f және g көпмүшеліктеріне Евклид алгоритмін қолданамыз. Бұл тәсілдің мәнісі мынада: $g|f$ ($g(x)$ көпмүшелігі $f(x)$ көпмүшелігін қалдықпен бөледі деп оқылады):

$$f = g \cdot q_1 + r_1, \quad degr_1 < degg;$$
$$r_1|g \ : \quad g = r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad degr_2 < degr_1; \quad \text{әрі қарай:}$$
$$r_2|r_1 : r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, \quad degr_3 < degr_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{k-2}|r_{k-3} : r_{k-3} = r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}, \quad degr_{k-1} < degr_{k-2};$$
$$r_{k-1}|r_{k-3} : r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k, \quad degr_k < degr_{k-1};$$
$$r_k|r_{k-1} : r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1} + r_{k-1}.$$

Сол уақытта соңғы нөлдік емес r_k қалдығы ең үлкен ортақ бөлгіш болады.

Сызықтық теңдеу. Шешімділік критерийі

$P[x]$ сақинасында u, v белгісіздеріне қатысты сызықтық $f \cdot u + gv = h$ теңдеуін қарастырайық, мұнда $f, g, h \in P[x]$. Келесі теорема осы теңдеудің шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарттарын береді.

Теорема. f және g көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгіші h көпмүшелігін бөлгенде және тек сонда ғана $f \cdot u + gv = h$ теңдеуінің шешімі табылады.

Дәлелдеу. u_0, v_0 көпмүшеліктері $f \cdot u + gv = h$ теңдеуінің шешімі деп ұйғарайық. Сонда $f \cdot u_0 + g \cdot v_0 = h$ теңдігі орындалады. (f, g) келтірілген ең үлкен ортақ бөлгіш f және g көпмүшеліктерін бөлетін болғандықтан ол алдыңғы теңдіктің оң жағында бөледі. Демек $(f, g)|h$.

Кері. $(f, g)|h$ деп ұйғарайық. Евклид алгоритмін қолдана отырып (f, g) табайық:

$$
\begin{gathered}
f = g \cdot q_1 + r_1, \quad degr_1 < degg; \\
g = r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad degr_2 < degr_1; \\
r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, \quad degr_3 < degr_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{k-3} = r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}, \quad degr_{k-1} < degr_{k-2}; \\
r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k, \quad degr_k < degr_{k-1}; \\
r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1}.
\end{gathered}
$$

Анықтама бойынша r_k ең үлкен ортақ бөлгіш. Әрі қарай r_k көпмүшелігін өзінің бас коэффициентіне бөліп, (f, g) келтірілген ең үлкен бөлгішті табамыз. $\{fa + gb | a, b \in P[x]\}$ жиынын I арқылы белгілейік, яғни $I = \{fa + gb | a, b \in P[x]\}$. Әлбетте I жиыны келесі шарттарды қанағаттандырады:

1) егер $h_1, h_2 \in I$ болса, онда $h_1 - h_2 \in I$;

2) егер $h \in I$, $t \in P[x]$ болса, онда $h \cdot t \in I$ және $t \cdot h \in I$.

1 – 2 шарттарды қанағаттандыратын сақинаның ішкі жиынын идеал деп атайды (немесе сақина идеалы). $f = f \cdot 1 + g \cdot 0$, $g = f \cdot 0 + g \cdot 1$ теңдіктері f және g көпмүшеліктерінің идеалға тиістілігін көрсетеді. Осы себептен евклид алгоритмі бойынша $r_1 \in I$, $r_2 \in I$, …, $r_k \in I$. Бұл тізбектен келтірілген ең үлкен ортақ бөлгіштің идеалға тиістілігі шығады. Демек $h \in I$, өйткені h көпмүшелігі (f, g)-ға бөлінеді.

Сондықтан $P[x]$ сақинасынан $f \cdot u + g \cdot v = h$ теңдігін қанағаттандыратындай $u, v \in P[x]$ көпмүшеліктері табылады.

Өзара жай көпмүшеліктер

Егер f және g көпмүшеліктерінің келтірілген ең үлкен ортақ бөлгіші бірге тең болса, яғни $(f, g) = 1$, онда f және g өзара жай деп айтамыз. Өзара жай көпмүшеліктердің қасиеттерін келесі теорема көрсетеді.

Теорема. Келесі тұжырымдар дұрыс:

а) $f \cdot u + g \cdot v = 1$ теңдігі орындалатындай u және v табылғанда және тек сонда ғана $(f, g) = 1$;

б) егер $(f, \varphi) = 1$ және $(f, \psi) = 1$ болса, онда $(f, \varphi \cdot \psi) = 1$;

в) егер $d|(fg)$ және $(d, f) = 1$ болса,онда $d|g$;

г) егер $d_1|f$, $d_2|f$ және сонымен бірге $(d_1, d_2) = 1$ болса, онда $d_1 d_2|f$.

Дәлелдеу. а) $f \cdot u + g \cdot v = 1$ теңдеуін қарастырайық. Алдыңғы теорема бойынша $(f, g) = 1$ болғанда және тек сонда ғана бұл теңдеудің шешімі болады.

б) $f \cdot u_1 + \varphi \cdot v_1 = 1$ және $f \cdot u_2 + \psi \cdot v_2 = 1$ теңдіктері орындалатындай u_1, v_1 және u_2, v_2 көпмүшеліктері табылады (а) пунктін қара).

Олай болса бұл екі теңдікті бір-біріне көбейтіп

$$f \cdot (f u_1 u_2 + \psi u_1 u_2 + \varphi v_1 u_2) + \varphi\psi \cdot v_1 v_2 = 1$$

теңдігін аламыз. Демек $f \cdot u + \varphi\psi \cdot v = 1$ теңдігін қанағаттандыратындай u, v көпмүшеліктері алынды. Сонда а) пункті бойынша $(f, \varphi\psi) = 1$.

в) қайтадан а) пункті бойынша $d \cdot u + f \cdot v = 1$ теңдігі орындалатындай u, v табылады. Бұл теңдіктің екі жағын бірдей g-ға көбейтіп $d \cdot ug + fg \cdot v = g$ теңдігін аламыз. Бұдан бірінші және екінші қосылғыштардың d-ға бөлінетінін көреміз. Демек қосынды да d-ға бөлінеді, сондықтан $d|g$.

г) тағы да а) пункті бойынша $d_1 \cdot u + d_2 \cdot v = 1$ теңдігі орындалатындай u, v табылады. Екі жағын да f-қа көбейтіп $d_1 \cdot uf + d_2 \cdot vf = f$ теңдігін аламыз. $d_1|f$ бөлетін болғандықтан қайсыбір f_1 көпмүшелігі үшін $f = d_1 f_1$ теңдігі орындалады. Осы сияқты $d_2|f$ бөлуі қайсыбір f_2 көпмүшелігі үшін $f = d_2 f_2$ теңдігін береді деп тұжырымдаймыз. Бұл өрнектерді алдыңғы теңдіктегі f-тің орнына қойып $d_1 d_2 \cdot u f_1 + d_1 d_2 \cdot v_2 = f$ теңдігін аламыз.

Бұл теңдіктен сол жағындағы бірінші және екінші қосылғыштың $d_1 d_2$ бөлінетінін көріп тұрмыз, демек $d_1 d_2 \mid f$. Теорема дәлелденді.

$f \cdot u + g \cdot v = 1$ теңдеуінің жалпы шешімі

$$f \cdot u + g \cdot v = 1, \ (f, g) = 1 \tag{4.3}$$

теңдеуін қарастырайық.

Теорема. (4.3) теңдеуінің жалпы шешімі $(u_0 + gt, v_0 - ft)$ түрінде табылады, мұнда (u_0, v_0) қайсыбір дербес шешім, ал $t - P[x]$ сақинасынан алынған кез келген көпмүшелік. Егер f және g дәрежелері нольден үлкен болса, онда u-дың дәрежесі g-ның дәрежесінен кіші, ал v-ның дәрежесі f-тың дәрежесінен кіші шартын қанағаттандыратын тек жалғыз (u, v) шешімі табылады.

Дәлелдеуі. (4.3) теңдеуіне тікелей қою арқылы $(u_0 + gt, v_0 - ft)$ қосағының теңдеудің шешімі болатынын көреміз. Кез келген алдын-ала берілген шешімнің осы түрде көрсетілетінін тексерейік. (u_*, v_*) – (4.3) теңдеуінің қайсыбір шешімі дейік. Екі теңдік аламыз

$$f \cdot u_* + g \cdot v_* = 1,$$
$$f \cdot u_0 + g \cdot v_0 = 1.$$

Бірінші теңдіктен екіншісін шегеріп

$$f \cdot (u_* - u_0) = g \cdot (v_* - v_0) \tag{4.4}$$

теңдігіне келеміз. Бұл көпмүшеліктің f және g бөлінетінін көріп тұрмыз, яғни $f \mid g(v_0 - v_*)$, $g \mid f(u_* - u_0)$. Теорема бойынша $(f, g) = 1$ шартынан $f \mid (v_0 - v_*)$ шығады, яғни қайсыбір $t \in P[x]$ көпмүшелігі үшін $v_0 - v_* = ft$. Осы сияқты қайсыбір t_1 көпмүшелігі үшін $u_* - u_0 = gt_1$, бірақ (4.4) ескеретін болсақ, $t = t_1$ деп қорытындылаймыз. Демек

$$(u_*, v_*) = (u_0 + gt, v_0 - ft).$$

2) $degf > 0$, $degg > 0$ дейік. (u_0, v_0) – (4.3) теңдеуінің қайсыбір шешімі болсын. u_0 көпмүшелігін g - ға, ал v_0 көпмүшелігін f-қа қалдықпен бөлейік. Сонда

$$u_0 = g \cdot u_1 + u_2, \text{ мұнда } u_2 = 0 \text{ немесе } degu_2 < degg;$$
$$v_0 = f \cdot v_1 + v_2, \text{ мұнда } v_2 = 0 \text{ немесе } degv_2 < degf$$

теңдіктерін аламыз. Мұнда u_2 және v_2 қалдықтарының нөлдік емес екенін байқаймыз. Шынында да егер $u_2 = 0$ болса, онда $f \cdot u_0 + g \cdot v_0 = 1$ теңдігінен $fg \cdot u_1 + g \cdot v_0 = 1$ теңдігі шығады, бірақ бұл теңдіктің

орындалуы мүмкін емес, өйткені теңдіктің сол жағы дәрежесі нөлдік емес g көпмүшелігіне бөлінеді, ал теңдіктің оң жағы бөлінбейді. $v_2 \neq 0$ үшін де осылай тексеріледі.

(u_2, v_2) қосағы (4.3) теңдеуінің шешімі болатынын дәлелдейік.

$$1 = f \cdot u_0 + g \cdot v_0 = f(gu_1 + u_2) + g(fv_1 + v_2) = fg(u_1 + v_1) + fu_2 + gv_2$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$fg(u_1 + v_1) = 1 - fu_2 - gv_2. \qquad (4.5)$$

$1 - fu_2 - gv_2 = 0$ болатынын дәлелдейік. (4.5) теңдігінің екі жағын да бірдей нөлдік емес деп ұйғарайық. Сонда

$$degf + degg + deg(u_1 + v_1) \geq degf + degg$$

болады, ал оң жақ бөлігінің дәрежесі $degf + degg$ кіші болады. Қарама-қайшылық. Демек (4.5) теңдігінің екі жағы бірдей нөлге тең, яғни $1 - fu_2 - -gv_2 = 0$, ал сондықтан $fu_2 + gv_2 = 1$.

1-пункттен басқа кез келген шешімнің жарамсыздығын байқаймыз. Теорема дәлелденді.

Көпмүшеліктердің мәні және түбірлері

Безу теоремасы. Осы уақытқа дейін көпмүшеліктерді қосуға және көбейтуге болатын формальды нақ өрнектер ретінде қарадық. Бірақ $f(x) \in P[x]$ көпмүшелігін $f : P \to P$ функциясы ретінде қарастыратын басқа да көзқарас бар екенін ұмытпайық.

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P[x]$$

функциясы берілсін дейік. Сонда әртүрлі c үшін көпмүшеліктің c нүктесіндегі мәні деп функцияның c нүктесіндегі $f(c) = a_0 + a_1c + \cdots + a_nc^n$ мәнін айтамыз. Егер $f(c) = 0$ болса, онда c нүктесінің сандық мәні $f(x)$ көпмүшелігінің түбірі деп аталады.

Көпмүшеліктердің түбірлерін табу есебі оның сызықтық бөлгіштерін іздеу есебімен пара-пар.

Теорема (Безу). $(x - c)|f(x)$ бөлгенде және тек сонда ғана $c \in P$ элементі $f(x) \in P[x]$ көпмүшелігінің түбірі болады.

Дәлелдеуі. $f(x)$ көпмүшелігін $(x - c)$ - ға қалдықпен бөлейік. Сонда

$$f(x) = (x - c)q(x) + r, \quad q(x) \in P[x], \ r \in P$$

теңдігін аламыз. Бұдан $x = c$ мәнінде $f(c) = r$. Ақырғы теңдіктен қажетті тұжырым шығады.

Ескерту. Бірінші дәрежелі $x-c$ түріндегі бүкіл көпмүшеліктерді сызықтық көпмүшеліктер деп атаймыз, мұнда $c \in \mathbb{C}$ немесе $c \in \mathbb{R}$ кез келген комплекс не нақты сан.

Көпмүшеліктерді сызықтық көпмүшеліктерге бөлудің нәтижелі әдісімен танысайық. Бұл әдіс Горнер әдісі деп аталады.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$(x-c) | f(x) : \quad f(x) = (x-c)q(x) + r.$$

дейік. Әлбетте $q(x)$ көпмүшелігінің дәрежесі $f(x)$ көпмүшелігінің дәрежесінен бірге кем. Егер $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ белгілесек, онда жоғарыдағы теңдіктің екі жағындағы белгісіздің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерді салыстыра отырып келесі теңдіктерді аламыз:

$$\begin{gathered} a_n = b_{n-1}, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = b_0 - cb_1, \\ a_0 = r - cb_0. \end{gathered}$$

Сонымен
$$\begin{aligned} &b_{n-1} = a_n, \\ &b_{n-k} = cb_{n-k+1} + a_{n-k+1}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n, \\ &r = cb_0 + a_0. \end{aligned}$$

Бұл теңдіктер r қалдық пен $q(x)$ бөліндінің коэффициенттерін біртіндеп табуға мүмкіндік береді.

Қорытынды: бөліндінің бас коэффициенті $f(x)$ бөлінгішінің бас коэффициентіне тең. $q(x)$ көпмүшелігінің басқа кез келген коэффициенті алдында алынған коэффициентті c-ға көбейтіп, бөлінгіштің сәйкес коэффициентіне қосқанға тең. Қалдық бөліндінің бос мүшесін c-ға көбейтіп, бөлінгіштің бос мүшесіне қосқанға тең.

Горнер әдісі өте қарапайым және көпмүшеліктердің мәндерін тез есептеуге мүмкіндік береді.

c саны $f(x)$ көпмүшелігінің түбірі болсын дейік. Сонда $f(x) = (x-c)\varphi(x)$.

Егер $f(x) = (x-c)^2\psi(x)$ болса, онда c саны $\varphi(x)$ көпмүшелігінің де түбірі болуы мүмкін.

Артынша c санының $\psi(x)$ көпмүшелігінің түбірі болатынын немесе болмайтынын тексереміз. Осы процесті жалғастыратын болсақ ақырында k-шы қадамда $f(x) = (x-c)^k h(x)$ теңдігін аламыз және де c саны $h(x)$ көпмүшелігінің түбірі болмайды.

Анықтама. Егер $(x-c)^k | f(x)$ қалдықсыз бөлінсе, онда $f(x)$ көпмүшелігінің c түбірінің еселігі k -ға тең деп айтамыз.

Көпмүшеліктің түбір еселігінің ұғымы оның туындысымен тығыз байланысты.

Анықтама. Егер $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P[x]$ қайсыбір көпмүшелік болса, онда $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$ көпмүшелігі оның туындысы (бірінші ретті туындысы) деп аталады.

Туындының туындысын $f''(x)$ арқылы белгілейік және оны $f(x)$ көпмүшелігінің екінші ретті туындысы деп атайық. Жалпы айтқанда кез келген $i > 1$ үшін көпмүшеліктің i-ші туындысы $f^i(x) = \left(f^{(i-1)}(x)\right)'$ ережесімен анықталады.

Бұл жерде математикалық талдаудың шектер теориясын қатыстырмай-ақ көпмүшелік туындысының анықтамасын таза формальды түрде береміз. Соған қарамастан бұл жағдайда да туындылар үшін үйреншікті формулалардың дұрыстығын көрсетуге болады:

1) $(f + g)' = f' + g'$;

2) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$;

3) $(cf)' = cf'$, $c \in P$.

Анықтама. $K -$ өрісті, ал e оның бірлік элементін білдірсін дейік. Егер қайсыбір $n > 0$ үшін $0 = ne = \underbrace{e + \cdots + e}_{n \text{ қосылғыш}}$ теңдігі орындалатындай K өрісі үшін бірмәнді анықталатын оң бүтін немесе 0 саны табылатын болса, онда мұндай сандардың ең кішісі жай сан болады және ол K өрісінің сипаты деп аталады. Егерде мұндай n саны табылмайтын болса, онда K өрісінің сипаты нөлдік деп аталады.

Теорема. P сипатын нөлдік өріс дейік. Егер f элементі $P[x]$ сақинасынан алынған n дәрежелі көпмүшелік болса, онда кез келген $c \in P$ элементі үшін

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x - c)$$

теңдігі дұрыс. Бұл формуланы Тейлор формуласы деп атайды.

Дәлелдеу. $f(x) = b_0 + b_1(x - c) + \cdots + b_n(x - c)^n$ деп алайық. Сонда

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x - c) + \cdots + nb_n(x - c)^{n-1},$$

$$f''(x) = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - c) + \cdots + n(n - 1)b_n(x - c)^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots

Бұл формулаларда $x = c$ мәнінде тек бос мүшелер ғана қалады: $f^{(i)}(c) = i!\, b_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$ Демек $b_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$ Теорема дәлелденді.

Лагранждың интерполяциялық формуласы

Ескерту. Қайсыбір нүктеде функцияны Тейлор қатарына жіктегенде тек осы нүктенің төңірегінде ғана функцияны полиномммен алмастыра аламыз.

Қайсыбір $f(x)$ физикалық шаманың $x_k, \ k = 0, 1, \dots, n$ дискретті нүктелеріндегі өлшеу нәтижелері $f(x_k)$ белгілі болсын дейік. Сонда $y_k = f(x_k), \quad k == 0, 1, \dots, n$ теңдігі орындалатындай $f(x) : P \to P$ функциясын табу – интерполяция есебі болып табылады. Бұл айтқанды көрнекі түрде

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_n

кестесі арқылы көрсетуге болады.

Әрине есептің мұндай қойылымында шексіз шешімдер жиынын алатынымыз түсінікті. Егерде шешімді көпмүшелік арқылы іздейтін болсақ, онда осы есептің шарттарын қанағаттандыратын дәрежесі n-нан артпайтын жалғыз көпмүшелікті табамыз. Шынында да $f(x)$ функциясын a_i коэффициенттері белгісіз $f(x) = a_0 + +a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P[x]$ көпмүшелігі түрінде іздейміз. Сонда есептің шарттарына қатысты $n + 1$ белгісізді $n + 1$ теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Осы жүйені шеше отырып ізделініп отырған көпмүшелікті табамыз.

Ескерту. $f(x) : P \to P$ функциясы ұғымы мен $f(x)$ функциясы $P[x]$ сақинасынан алынған n дәрежелі көпмүшелік ұғымы бір-біріне пара-пар ұғымдар. Сондықтан $f(x) = L_n(x) \in P[x]$ дейік. Интерполяция есебінің қойылымына байланысты интерполяция түйіндерінде $f(x)$ функциясының және $L_n(x)$ көпмүшелігінің мәндері бірдей, яғни:

$$f(x_0) = L_n(x_0),\ f(x_1) = L_n(x_1),\ \ldots,\ f(x_n) = L_n(x_n).$$

Осы теңдіктер орындалатын көпмүшелікті келесі түрде іздейік:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j),$$

мұнда $\prod$ таңбасы (символы) көбейту таңбасы деп аталады, ал $\prod_{j=0}^{n}$ өрнегі $a_0 \cdot\cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ көбейтіндісінің қысқаша жазылуын көрсетеді. Мысалы

$$\sum_{k=0}^{2} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j) = c_0(x - x_1)\,(x - x_2) + c_1(x - x_0)(x - x_2) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

түрінде ашылады.

Интерполяция есебінің формуласын табу үшін $L_n(x)$ көпмүшелігінің коэффициенттерін анықтаймыз. $f(x_i) = y_i = L_n(x_i)$ шарттарын пайдалана отырып

$$y_i = L_n(x_i) = c_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j).$$

Бұдан $c_i = y_i / \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)$. демек ізделініп отырған көпмүшелік

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

түрінде анықталады. Ақырғы формула кез келген түйін нүктелері үшін Лагранждың интерполяциялық формуласы деп аталады.

$n = 1$ болғанда интерполяциялық формула сызықтық деп аталады және де Лагранждың интерполяциялық көпмүшелігі өте қарапайым түрде жазылады:

$$y(x) = L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1.$$

Сызықтық интерполяцияның геометриялық мағынасы берілген (x_0, y_0) және (x_1, y_1) нүктелері арқылы тек бір ғана түзу сызық жүргізуге болатынын білдіреді.

$n = 2$ болғанда интерполяция формуласы параболалық деп аталады, өйткені Лагранждың интерполяциялық көпмүшелігі

$$y(x) = L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

берілген (x_0, y_0), (x_1, y_1) және (x_2, y_2) нүктелері арқылы өтетін параболаны көрсетеді.

Көпмүшеліктің түбірлері

Бір белгісізді n-дәрежелі алгебралық теңдеудің жалпы түрін қарастырайық.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (4.6)$$

мұнда $a_0 \neq 0$. (4.6) теңдеуінде $n = 1$ болсын, сонда біз $a_0x + a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$ сызықтық теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің коэффициенттерінің кез келген мәнінде $x = -\frac{a_1}{a_0}$ түріндегі тек жалғыз ғана шешімі бар.

(4.6) теңдеуінде $n = 2$ болғанда $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ толық квадрат теңдеуін аламыз. Теңдеудің екі жағын бірдей $a \neq 0$ коэффициентіне бөліп,

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (4.7)$$

түріндегі келтірілген квадрат теңдеуін аламыз, мұнда $p = {}^{b}/_{a}$, $q = {}^{c}/_{a}$. (4.7) теңдеуінің шешімдерін табу үшін $x = \bar{x} + \lambda$ алмастыруын жасайық. Сонда (4.7) теңдеу

$$\bar{x}^2 + (2\lambda + p)\bar{x} + \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (4.8)$$

түріне келеді. λ параметрін белгісіз x-тің алдындағы коэффициент нөлге айналатындай етіп таңдап алайық: $2\lambda + p = 0$, бұдан $\lambda = -{}^{p}/_{2}$. λ параметрінің осы мәнінде (4.7) теңдеу келесі түрде жазылады:

$\bar{x}^2 = \frac{p^2}{4} - q$, бұдан $\bar{x}_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Осы жерде $\bar{x} = x - \lambda$ кері алмастыруынан кейін мектеп бағдарламасынан белгілі квадрат теңдеудің шешімін радикал арқылы табу формуласын адамыз

$$x_{1/2} = -{}^{p}/_{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Енді үшінші дәрежелі

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (4.9)$$

түріндегі келтірілген теңдеуді қарастырайық. Бұл теңдеуге $x = y + \lambda$ алмастыруын жасайық, мұндағы λ параметрін кейінірек таңдап аламыз.

Алмастырудан кейін $(y+\lambda)^3 + a(y+\lambda)^2 + b(y+\lambda) + c$ теңдеуіне көшеміз. Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерін біріктіргеннен соң

$$y^3 + (3\lambda + a)y^2 + (3\lambda^2 + 2a\lambda + b)y + (\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

теңдеуін аламыз. Бұл жерде λ параметрін y^2-тың алдындағы коэффициент нөлге айналатындай етіп таңдап алайық: $3\lambda + a = 0$, бұдан $\lambda = -\frac{a}{3}$. Қайта $x = y - {}^{a}/_{3}$ алмастыруынан кейін соңғы теңдеу

$$y^3 + py + q = 0 \tag{4.10}$$

түрінде жазылады, мұнда $p = 3\lambda^2 + 2a\lambda + b = -\frac{a^2}{3} + b$, $q = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$. (4.10) теңдеуін келтірілген кубтық теңдеу деп атайды. y_0 осы кубтық теңдеудің түбірі деп санайық та оны әзірге белгісіз α және β сандарының қосындысы түрінде көрсетейік, яғни $y_0 = \alpha + \beta$. Сонда $\alpha^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta^3 + +p(\alpha+\beta) + q = 0$ және

$$\alpha^3 + \beta^3 + (\alpha+\beta)(3\alpha\beta + p) + q = 0. \tag{4.11}$$

Бұл жерде α және β параметрлерін $\alpha\beta = -{}^{p}/_{3}$ теңдігі орындалатындай етіп таңдап алу құқығы біздің қолымызда. Сонда α және β үшін екі теңдеу алынады

$$\begin{cases} \alpha + \beta = y_0, \\ \alpha\beta = -{}^{p}/_{3}. \end{cases}$$

Виет теоремасы бойынша кез келген y_0 үшін мұндай α және β белгісіздері табылады және $z^2 - y_0 z - {}^{p}/_{3} = 0$ теңдеуінің түбірлері болады.

Демек (4.11) теңдеуі

$$\alpha^3 + \beta^3 + q = 0 \tag{4.12}$$

түрінде жазылады. Әрі қарай $\alpha\beta = -{}^{p}/_{3}$ теңдігінің екі жағын бірдей куб дәрежеге шығарып, (4.12) теңдеуімен біріктіретін болсақ, онда

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha^3 \cdot \beta^3 = -{}^{p^3}/_{27} \end{cases}$$

теңдеулер жүйесіне көшеміз. Виет теоремасы бойынша α^3 және β^3 белгісіздері $z^2 + +qz - \frac{p^3}{27} = 0$ теңдеуінің түбірлері болады. Сонымен $\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ және $\beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, мұнда $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ радикалы екінші дәрежелі түбірдің бір нақ анықталған мәнін көрсетеді. Бұдан (4.10) теңдеуінің түбірлері

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

формуласымен өрнектеледі.

Алынған формула Кардан формуласы деп аталады. Келесі кезекте

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (4.13)$$

түріндегі төртінші дәрежелі келтірілген теңдеуді қарастырайық. Бірден $x = y - -{}^{a}/_{4}$ алмастыруын жасап, (4.13) теңдеуден

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (4.14)$$

түріндегі теңдеуге көшейік, p, q және $r - a, b, c, d$ коэффициенттеріне қатысты анықталатын қайсыбір көпмүшеліктер.

(4.14) теңдеудің шешімін Феррари әдісімен шығарамыз. Ол үшін теңдеудің сол жағын келесі түрде түрлендіреміз: $\left(y^2 + {}^{p}/_{2}\right)^2 + qy + \left(r - \frac{p^2}{4}\right) == 0$ және

$$\left(y^2 + {}^{p}/_{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha\left(y^2 + {}^{p}/_{2}\right) + \alpha^2 - qy + \frac{p^2}{4} - r\right] = 0, \qquad (4.15)$$

мұнда α кез келген сан. α параметрін квадрат жақшаның ішіндегі өрнек толық квадрат болатындай етіп таңдап алайық. Квадрат жақшаның ішіндегі өрнекті ашып жазатын болсақ, ол y-ке қатысты келесі түрдегі екінші дәрежелі көпмүшелік болады: $2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha p + \alpha^2 + \frac{p^2}{4} - r\right)$.

Өз кезегінде квадрат үшмүшелік толық квадрат болу үшін оның дискриминанты нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$q^2 - 8\alpha\left(\alpha p + \alpha^2 + \frac{p^2}{4} - r\right) = 0. \qquad (4.16)$$

Жақшаны ашсақ, α-ны табу үшін үшінші дәрежелі теңдеу аламыз (оны шешу жолдары алдыңғы тақырыпта айтылған). Егер (4.16) теңдеудің бір түбірін α ретінде алсақ, онда квадрат жақшаның

ішіндегі өрнек толық квадрат болады. Бұл жағдайда (4.15) теңдеудің сол жағы квадраттардың айырымын береді және ол y-ке қатысты екінші дәрежелі екі көпмүшеліктің көбейтіндісіне жіктелінеді.

Сонымен төртінші дәрежелі теңдеуді әруақытта шешуге болады және қосу, азайту, көбейту, бөлу, натурал дәрежеге шығару және натурал дәрежелі түбір табу амалдарының көмегімен төртінші дәрежелі жалпы теңдеудің түбірлерін теңдеудің коэффициенттері арқылы өрнектейтін формуланы алуға болады.

Көпмүшеліктердің түбірлеріне қатысты кейбір тұжырымдар

1) $x = a$ тең болғандағы бөлінгіштің мәні $f(x)$ көпмүшелігін $x - a$ айырымына бөлгендегі қалдыққа тең;

2) егер $x = a$ нүктесінде $f(x)$ мәні нөлге тең болса, онда a саны $f(x)$ көпмүшелігінің түбірі деп аталады;

3) $f(x)$ көпмүшелігі $x - a$ айырымына қалдықсыз бөлінгенде және тек сонда ғана a саны $f(x)$ көпмүшелігінің түбірі болады;

4) егер $f(x)$ көпмүшелігі $(x - a)^k$ өрнегіне қалдықсыз бөлінсе, бірақ $(x - a)^{k+1}$ өрнегіне бөлінбесе, онда $f(x)$ көпмүшелігінің $x = a$ түбірі еселігі k – ға тең түбір деп аталады.

5) егер $x = a_1$ және $x = a_2$ сандары $f(x)$ көпмүшелігінің түбірлері болса, онда ол $(x - a_1)(x - a_2)$ көбейтіндісіне қалдықсыз бөлінеді;

6) коэффициенттері бүтін сандар жиынынан алынған n-ші дәрежелі $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ көпмүшелігінің нөлден өзгеше $x = a$ бүтін түбірі оның a_n бос мүшесінің бөлгіштерінің арасынан табылады;

7) егер көпмүшеліктің бас коэффициенті $a_0 = 1$ тең болса, онда оны келтірілген көпмүшелік деп атайды;

8) коэффициенттері бүтін сандар жиынынан алынған n-ші дәрежелі $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ келтірілген көпмүшелігінің барлық рационал түбірлері бүтін сандар болады.

Мысал. $8x^3 - 20x^2 - 2x + 5$ көпмүшелігінің барлық рационал түбірлерін тап.

Шешуі. Көпмүшелікті “келтірілген” түрге алып келу үшін $2x = y$ алмастыруын жасайық. Сонда

$$y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеудің бос мүшесінің бүтін бөлгіштерінің ішінен $y_{1,2} = \pm 1$, $y_3 = 5$ бүтін түбірлерін табамыз. Бұдан $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x_3 = 5$ бастапқы көпмүшеліктің түбірлері болады.

Мысал. $f(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 5x - 5$ көпмүшелігі $x^2 - 1$ көпмүшелігіне қалдықсыз бөлінетіндей a және b параметрлерінің мәндерін тап.

Шешуі. $f(x)$ көпмүшелігі есептің шарты бойынша $x + 1$ және $x - 1$ көпмүшеліктеріне қалдықсыз бөлінеді. Демек Безу теоремасы бойынша $x = -1$ және $x = 1$ мәндері $f(x)$ көпмүшелігінің түбірлері болады. Олай болса $f(1) = 0$, $1 - 3 + a + b - 5 - 5 = 0$, $f(-1) = 0$, $-1 - 3 - a + b + 5 - 5 = 0$. Жүйені шешіп $a = 4, b = 8$ мәндерін табамыз.

Мысал. $2 + \sqrt{3}$ саны $f(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ $(a \in Q, b \in Q)$ көпмүшелігінің түбірі. Оның қалған түбірлерін тап.

Шешуі. Егер $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ саны берілген көпмүшеліктің түбірі болса, онда оның түйіндесі $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ саны да көпмүшеліктің түбірі болады. Сонда $f(x)$ көпмүшелігі $(x - x_1)(x - x_2) = \left(x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(x - 2 + \sqrt{3}\right) = x^2 - 4x + 1$ өрнегіне қалдықсыз бөлінеді:

$$x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - 4x + 1)(x + 8) + (a + 31)x + b - 8.$$

Жоғарыда айтылғандай қалдық нөлге тең, сондықтан

$$(a + 31)x + (b - 8) \equiv 0.$$

Бұдан $a = -31$, $b = 8$. Демек оның үшінші түбірін $x + 8 = 0$ сызықтық теңдеуінен табамыз $x_3 = -8$.

Мысал. Коэффициенттері бүтін сандар жиынынан алынатын $f(x) = a_0x^n + +a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ көпмүшелігі берілсін дейік, сонда әртүрлі кез келген b және c сандары үшін $p(b) - p(c)$ айырымы $b - c$ айырымына қалдықсыз бөлінетінін дәлелде.

Шешуі. $$p(b) = a_0b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b + a_n,$$
$$p(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n.$$

Бұл теңдіктерді бір-бірінен мүшелеп шегерейік:

$$p(b) - p(c) = a_0(b^n - c^n) + a_1(b^{n-1} - c^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(b - c).$$

Мұнда әрбір $b^k - c^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ түріндегі айырым $(b - c)$ бөлінеді. Сондықтан $p(b) - p(c)$ айырымы да $(b - c)$ бөлінеді.

Мысал. Кез келген $f(x)$ көпмүшелігінің барлық коэффициенттерінің қосындысы оның $x = 1$ болғандағы мәніне тең болатынын дәлелде.

Дәлелдеу. $f(x) = a_0x^n + +a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ көпмүшелігінің $x = 1$ болғандағы мәнін табайық: $f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$. Демек тұжырым дұрыс.

Мысал. $f(x) = (cos\varphi + xsin\varphi)^n - cosn\varphi - xsinn\varphi$ көпмүшелігі $x^2 + 1$ көпмүшелігіне бөлінетінін дәлелде.

Шешуі. Алдымен x^2+1 көпмүшелігін сызықтық көбейткіштерге жіктейік:

$x^2+1=\left(x^2-(-1)\right)=x^2-i^2=(x-i)(x+i)$. Сонда $f(i)=(cos\varphi++isin\varphi)^n-cosn\varphi-isinn\varphi=cosn\varphi+isinn\varphi-cosn\varphi--isinn\varphi\equiv 0$ және $f(-i)=(cos\varphi-isin\varphi)^n-cosn\varphi+isinn\varphi=cosn\varphi--isinn\varphi-cosn\varphi+isinn\varphi\equiv 0$. Демек $x=\pm i$ сандары $f(x)$ көпмүшелігінің түбірлері. Олай болса $f(x)$ көпмүшелігі олардың $(x-i)(x+i)=x^2+1$ көбейтіндісіне де қалдықсыз бөлінеді.

Мысал. Тепе-теңдікті дәлелде:

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2xcos\frac{k\pi}{n}+1\right).$$

Шешуі. $x^{2n}-1$ көпмүшелігінің түбірлері

$x_k=\sqrt[2n]{1}=cos\frac{k\pi}{n}+isin\frac{k\pi}{n}$ $(k=0,1,\dots,2n-1)$ сандары. Сондықтан $x^{2n}-1$ көпмүшелігін келесі сызықтық көбейтінділерге жіктеуге болады:

$$x^{2n}-1=(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{2n-1}).$$

Бұл сандардың ішінде тек екеуі ғана нақты. Олар $x_0=1$ және $x_n=-1$, ал қалғандары өзара бір-бірімен түйіндес x_k және x_{2n-k} комплекс сандары. Сонда $(x-x_0)(x-x_n)$ көбейтіндісі x^2-1 көпмүшелігін, ал

$$(x-x_k)(x-x_{2n-k})=\left(x-cos\frac{k\pi}{n}-isin\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-cos\frac{k\pi}{n}+isin\frac{k\pi}{n}\right)=$$

$$=\left(x-cos\frac{k\pi}{n}\right)^2+sin^2\frac{k\pi}{n}=x^2-2xcos\frac{k\pi}{n}+1$$

көпмүшелігін береді. Демек

$$x^{2n}-1=(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{2n-1})=$$

$$=(x^2-1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2xcos\frac{k\pi}{n}+1\right).$$

Мысал. $f=f(x)=x^{474}-1$ және $g=g(x)=x^{342}-1$ көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгішін тап.

Шешуі. Евклид алгоритмін қолданамыз. Алгоритмді “бұрыштап” бөлу тәсілімен жүргізуге болады, бірақ өзімізге есептеу қолайлы болу үшін келесі түрде топтастырамыз:

Бірінші қадам: $x^{474}-1=(x^{342}-1)x^{132}+x^{132}-1,\quad r_1=x^{132}-1.$

Екінші қадам: $x^{342}-1=(x^{132}-1)x^{210}+x^{210}-1=(x^{132}-1)x^{210}+$

$+(x^{132}-1)x^{78}+x^{78}-1,\qquad r_2=x^{78}-1.$

Үшінші қадам: $x^{132}-1=(x^{78}-1)x^{54}+x^{54}-1,\quad r_3=x^{54}-1.$

Төртінші қадам: $x^{78}-1=(x^{54}-1)x^{24}+x^{24}-1,\quad r_4=x^{24}-1.$

Бесінші қадам: $x^{54}-1=(x^{24}-1)(x^{30}+x^6)+x^6-1,\quad r_5=x^6-1.$

Алтыншы қадам: $x^{24}-1=(x^6-1)(x^{18}+x^{12}+x^6+1).$

Демек анықтама бойынша $d = (f, g) = x^6 - 1$.

Мысал. $f = x^3 - 2,\ \ g = x^2 + 2x + 2$ көпмүшеліктерінің ең үлкен ортақ бөлгішінің сызықтық көрсетілімін тап.

Шешуі. Бөлуді "бұрыштап" бөлу тәсілімен жүргізейік:

$f = x^3 - 2 = (x^2 + 2x + 2)(x - 2) + (2x + 2) = (x - 2)g + r_1$, мұнда

$$g = x^2 + 2x + 2 = (2x + 2)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 1.$$

Бұл көпмүшеліктердің ЕҮОБ$(f, g) = 1$ өйткені r_1 көпмүшелігі бірге бөлінеді. Есептеуді қысқарту мақсатында соңғы теңдіктің екі жағын бірдей 2-ге көбейтейік.

$2x^2 + 4x + 4 = (2x + 2)(x + 1) + 2$ немесе $2g = 2(x + 1)r_1 + 2$.

Бұл теңдіктен $2 = 2g - 2(x + 1)r_1$ теңдігі шығады, ал ең бірінші теңдіктен $r_1 = f - (x - 2)g$. Олай болса

$$2 = 2g - 2(x + 1)r_1 = 2g - 2(x + 1)(f - (x - 2)g) =$$
$$= 2g - 2(x + 1)f + 2(x - 2)(x + 1)g = (x^2 - x)g - (x + 1)f.$$

Ақырында $u = -(x + 1)/2$, $v = (x^2 - x)/2$ деп алайық, сонда $1 = fu + gv$ сызықтық көрсетілімін аламыз.

Мысал. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ көпмүшелігін $x + 5$ екі мүшелігіне Горнер схемасын пайдаланып бөлейік.

Шешуі. Горнер схемасы n - ші дәрежелі көпмүшелікті тек екі мүшелікке бөлгенде ғана жұмыс жасайды. $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ көпмүшелігін $x - b$ екі мүшелігіне бөлуді мысал ретінде көрсетейік.

Алдымен жоғарғы жолға көпмүшеліктің коэффициенттерін кему ретімен жазайық та екінші жолдың сол жағынан ең шеткі торына b санын қоялық:

	a_3	a_2	a_1	a_0

Содан кейін екінші жолдың тор көздерін келесі түрде толтырамыз:

	a_3	a_2	a_1	a_0
	a_3	$ba_3 + a_2$	$b(ba_3 + a_2) + a_1$	$b\big(b(ba_3 + a_2)\big) + a_0$

Сонда екінші жолдың оң жақтан санағанда ең бірінші тор көзінде жазылған сан (немесе өрнек) қалдықты көрсетеді. Ал b саны мен қалдықтың аралығында орналасқан сандар бөліндінің кему ретімен жазылған коэффициенттерін көрсетеді. Енді бастапқы есепке қайта оралайық және оның Горнер схемасын құрайық:

	1	2	3	4
-5	1	-3	18	-86

Демек $x^2-3x+18$ бөліндіні, ал -86 қалдықты көрсетеді.

Мысал. $f(x)=ix^3+(1-2i)x^2-2(1-i)x+2$ көпмүшелігінің $1+i$ нүктесіндегі мәнін есепте.

Шешуі. Горнер схемасы бойынша

	i	$1-2i$	$-2+2i$	2
$1+i$	i	$-i$	$-1+i$	0

Сонымен $f(1+i)=0$.

Жаттығулар

1. 1 саны $f(x)=x^5-x^4-6x^3+14x^2-11x+3$ көпмүшелігінің нешінші ретті еселі түбірі?

2. $f(x)=x^n+3x-4$ көпмүшелігі кез келген n натурал санында $x-1$ айырымына бөлінетінін дәлелде.

3. $f(x)=x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+1$ көпмүшелігін $x-1$ айырымына бөлгенде қалатын қалдықты тап.

4. $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ көпмүшелігінің түбірлері $x_1,x_2,\dots,x_n$ болсын дейік. $Q(x)=P(x)P(-x)$ көпмүшелігін қарастырайық.

а) $Q(x)$ көпмүшелігінің дәрежесі $2n$ және құрамында белгісіз x-тің тек жұп дәрежелері болатынын дәлелде;

б) $Q(\sqrt{x})$ функциясы түбірлері $x_1^2,x_2^2,\dots,x_n^2$ болатын көпмүшелік екенін дәлелде.

5. a-ның қандай мәнінде $f(x)=x^{1000}+ax^2+9$ көпмүшелігі $g(x)=x++1$ көпмүшелігіне қалдықсыз бөлінеді.

6. $xf(x-1)\equiv(x-26)f(x)$ тепе-теңдігі орындалатындай барлық $f(x)$ көпмүшеліктерін тап.

7. $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+c$ көпмүшелігі $g(x)=x^3-2x^2-5x+6$ көпмүшелігіне қалдықсыз бөлінетіндей a,b және c коэффициенттерінің бүкіл мәндерін тап.

8. $x=-3$ саны $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ көпмүшелігінің екі еселі түбірі. Көпмүшеліктің a және b коэффициенттерін және оның үшінші түбірін тап.

9. $f(15)=3$, $f(21)=12$ шарттары орындалатындай $f(x)=ax^3+bx^2++cx+d$ түріндегі үшінші дәрежелі көпмүшелік табыла ма? Мұнда $a,b,c,d-$ бүтін сандар және $a\neq0$.

10. $f(x)=(2x^2-2x+1)^{1999}\cdot(x^3-2x^2)^{2001}$ көпмүшелігінің барлық коэффициенттерінің қосындысын тап.

11. $g(x) = x^n sin\varphi - \rho^{n-1} x sinn\varphi + \rho^n sin(n-1)\varphi$ көпмүшелігі $x^2 - -2\rho x cos\varphi + \rho^2$ көпмүшелігіне қалдықсыз бөлінетінін дәлелде.

12. Тепе-теңдіктерді дәлелде:

а) $x^{2n+1} - 1 = (x-1) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 - 2x cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$;

б) $x^{2n+1} + 1 = (x+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 + 2x cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$;

в) $x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1\right)$.

13. f және g көпмүшеліктерінің $d = (f, g)$ ең үлкен ортақ бөлгіштерін тап:

а) $f = x^3 + x - 2$, $g = x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $f = x^3 + 2x^2 - 1$, $g = x^3 + x^2 + x + 1$;

в) $f = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $g = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$;

г) $f = x^3 + 4x^2 + 7x + 4$, $g = x^3 + 5x^2 + 10x + 8$.

14. Көпмүшеліктердің ЕҮОБ және олардың сызықтық көрсетілімдерін тап:

а) $x^3 - 1$ және $x^4 - 1$; б) $x^6 - 1$ және $x^8 - 1$;

в) x^5 және $x^6 - 1$; г) x^6 және $x^8 + 1$.

15. Горнер схемасының көмегімен келесі теңдеулерді шеш:

а) $x^3 + 2x^2 - 40x + 64 = 0$;

б) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 18 = 0$;

в) $x^5 - 12x^4 + 56x^3 - 128x^2 + 144x - 64 = 0$;

г) $3x^3 + 10x^2 + x - 6 = 0$;

д) $48x^4 - 248x^3 + 27x^2 + 63x + 10 = 0$.

16. Горнер схемасы бойынша және “бұрыштап” бөлу тәсілімен көпмүшеліктерді бөл:

а) $3x^3 - 4x^2 - x - 6$ көпмүшелігін $x-1$, $x-2$ және $x-3$ көпмүшеліктеріне бөл;

б) $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5$ көпмүшелігін $x+1$, $x+2$ және $x+3$ көпмүшеліктеріне бөл;

в) $x^4 - 16$ көпмүшелігін $x+2$, $x-2$ және $x+1$ көпмүшеліктеріне бөл.

17. Келесі көпмүшеліктердің қайсысы бір - біріне қалдықсыз бөлінетінін көрсет:

а) $12x^3 - 14x^2 + 2$ көпмүшелігі $x-1$ көпмүшелігіне;

б) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$ көпмүшелігі $x-2$ көпмүшелігіне;

в) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 4$ көпмүшелігі $x-2$ көпмүшелігіне;

г) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 4$ көпмүшелігі $x+1$ көпмүшелігіне.

18. $x = -3$ Нүктесінде $f(x) = 2x^5 + 7x^4 - x^3 + 3x - 2$ көпмүшелігінің және оның барлық туындыларының мәндерін тап. Және $f(x)$ көпмүшелігін $x + 3$ екі мүшелігінің дәрежелері бойынша жікте.

19. $f(x) = 2x^5 - 16x^4 + 45x^3 - 46x^2 - 4x + 24$ көпмүшелігінің бір түбірі $x = 2$. Сонда 2 түбірінің еселік көрсеткіші неге тең?

5. САНДАР ТЕОРИЯСЫ

Сандардың бөлінгіштігі

Екі бүтін санның қосындысы, айырымы және көбейтіндісі әрқашан бүтін сандар береді. Кейде бұл оқиғаны қосу, шегеру және көбейту бинарлық амалдарына қатысты бүтін сандар жиыны тұйықталады деп те атайды.

Ескерту. Бүкіл бүтін сандар жиыны бөлуге қатысты тұйықталмаған.

Сондықтан арифметика бүтін сандарды бір-біріне бөлуге байланысты мәселелерде алгебраның жалпылама әдістеріне сүйенеді.

Сонымен элементар сандар теориясының зерттеу объектісі

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

бүтін сандар жиыны болады.

$\mathbb{Z}$ – бұл нөлдік бөлгіштері жоқ бірлік элементі анықталған коммутативті сақина.

$\mathbb{Z}$ жиынында бүтін сандардың қасиеттерін зерттеуде маңызды рөл атқаратын бөлінгіштік қатынасын анықтайық.

Анықтама. $a, b \in \mathbb{Z}$ дейік. Егер a, b сандары үшін $a = bq$ теңдігі орындалатындай $q \in \mathbb{Z}$ саны табылса, онда a саны b - ға бөлінеді (немесе b саны a санын бөледі) деп айтады. Белгілеуі: $a \vdots b$ немесе $b|a$.

Егер a саны b санына бөлінсе, онда b санын a санының ***бөлгіші***, ал a саны b санының ***еселігі*** деп аталады (қалдықсыз бөлінгіштік қасиеті). Өз кезегінде q санын ***бөлінді*** деп атайды.

Анықтамадан тікелей шығатын бөлінгіштік қатынасының қарапайым қасиеттерін атап өтейік.

1. Кез келген a үшін $a|a$.

2. Егер $b|a$ және $c|b$, онда $c|a$.

Ескерту. Бөлінгіштік қатынасының 1-ші және 2-ші қасиеттері сәйкес рефлексивті және транзитивті болады. Бірақ $b|a$ шартынан $a|b$ шарты шықпайды, демек симметриялық қасиет орындалмайды.

3. Кез келген a, b үшін $\pm 1|a, b|0$.

4. Егер $b|a$, онда $(\pm b)|(\pm a)$.

5. Егер $b|a$, онда $b|(ac)$; мұнда c – кез келген сан.

6. Егер $b|a_1$ және $b|a_2$, онда $b(a_1 \pm a_2)$.

7. Егер $b|a_1$, …, $b|a_n$, онда $b|(a_1c_1 + \cdots + a_nc_n)$; мұнда $c_1, c_2, \dots, c_n$ кез келген сандар.

8. Егер $b|a$ және $a \neq 0$, онда $|a| \geq |b|$.

9. Егер $b|a$ және $a|b$, онда $a = \pm b$.

Мысалы, 8-қасиетті дәлелдейік. Анықтама бойынша қайсыбір $q \in \mathbb{Z}$ үшін $a = bq$ теңдігін аламыз. Мұнда $q \neq 0$, өйткені $a \neq 0$. Демек $|q| \geq 1$. Олай болса $|a| = |b| \cdot |q| \geq |b|$.

Бөлінгіштік қатынасының қалған қасиеттерін дәлелдеуді студенттердің өзіндік жұмысына ұсынамыз.

Бүтін сандар жиынында берілген санның қай бөлгішке бөлінетінін, қайсысына бөлінбейтінін алдын ала анықтауға болатын ережелерді табу зерттеуді едәуір жеңілдетеді.

Жаттығу ретінде бүтін санды 11 санына қалдықсыз бөлу ережесін келтірейік.

11 санына бөлінгіштік белгісі (ережесі): $a \in \mathbb{Z}$ санының барлық тақ орындарындағы цифрларының қосындысынан оның жұп орындарындағы цифрларының қосындысын шегеру керек; егер осы айырмадан 0 немесе 11-ге еселік болатын сан шықса, онда $a \in \mathbb{Z}$ саны 11-ге қалдықсыз бөлінеді.

Келесі қадамда қалдықпен бөлу ұғымын қарастырайық.

Анықтама. $a, b \in \mathbb{Z}$ және $b \neq 0$ дейік. Егер бұл сандар үшін $a = bq + r$ теңдігі орындалатындай $q, r \in \mathbb{Z}$ сандары табылатын болса, онда $b|a$ бөлу қалдықпен бөлінеді дегенді білдіреді. Мұнда $0 \leq r < |b|$.

Жоғарғы теңдікте a саны бөлінгіш, b саны – бөлгіш, q саны – толық емес бөлінді, ал r саны – бөлгеннен қалған қалдық деп аталады.

Мысал. $27 = 13 \cdot 2 + 1$, $-43 = 5 \cdot (-9) + 2$.

Теорема. Кез келген $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ үшін a санын b санына қалдықпен бөлу тек бір түрде ғана көрсетіледі.

Дәлелдеуі. $b > 0$ делік. Сонда $bq \leq a < b(q + 1)$ теңсіздігі орындалатындай $q \in \mathbb{Z}$ саны табылады. $r = a - bq$ деп алайық. Демек $a = bq + r$ және $0 \leq r < b$. Анықтама бойынша бұл a санын b санына қалдықпен бөлуді көрсетеді.

Егер $b < 0$ болса, онда a санын $(-b)$ санына қалдықпен бөлеміз:

$$a = (-b)q + r,$$

мұнда $0 \leq r < -b = |b|$. Бұдан $a = (-b)q + r$ теңдігін $a = b(-q) + r$ түрінде жазу ғана қалды.

Қалдықпен бөлу амалы тек бір түрде ғана көрсетілетінін немесе табылатынын дәлелдейік. Ол үшін $a = bq_1 + r_1$ және $a = bq_2 + r_2$ жіктеулерін алайық, мұнда $0 \leq r_i < |b|$. Сонда $0 = a - a = b(q_1 - q_2) + +(r_1 - r_2)$. Бұл теңдікте 0 саны нөлден өзгеше b санына бөлінеді; өз кезегінде $b(q_1 - q_2)$ саны да b-ға бөлінеді. Теңдік орындалу үшін

$r_1 - r_2$ айырымы да b-ға бөлінуі керек, бірақ $|r_2 - r_1| < |b|$. Демек $r_2 - r_1 = 0$, бұдан екі көрсетілімнің де бір-бірімен беттесетінін көреміз.

Ескерту. Егер қалдық нөлге тең болса, онда бүтіндей бөлінгіштік туралы айтылады.

Барлығы бірдей нөлге тең емес $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ сандары берілсін дейік.

Анықтама. $a_1, a_2, \dots, a_n$ сандарының (шамасы бойынша) ортақ бөлгіштерінің ішінде ең үлкені сол сандардың ***ең үлкен ортақ бөлгіші*** деп аталады. Белгілеуі: ЕҮОБ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші шамалары бойынша ізделінетін болғандықтан

$$\text{ЕҮОБ}\ (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{ЕҮОБ}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|).$$

Демек есептеулерде тек натурал сандармен ғана шектелуге болады.

Алдымен ортақ бөлгішті табуды тек екі сан үшін қарастырайық.

Лемма. Егер $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ сандары үшін $a = bq + r$ теңдігі орындалатын болса, онда a және b сандарының ортақ бөлгіштерінің жиыны b және r сандарының ортақ бөлгіштер жиынымен беттеседі (тең). Дербес жағдайда $\text{ЕҮОБ}(a, b) = \text{ЕҮОБ}(b, r)$.

Дәлелдеуі. d саны a және b сандарының ортақ бөлгіші дейік. Сонда бөлінгіштік қатынасының қасиеттерінен $d|r = a - bq$ шығады. Демек d саны b және r сандарының да бөлгіші болады. Кері пайымдау да осылай дәлелденеді.

Лемма. Егер a саны оң b санына бөлінетін болса, онда олардың $\text{ЕҮОБ}(a, b) = b$. Дербес жағдайда $\text{ЕҮОБ}(0, b) = b$.

Екі бүтін санның ЕҮОБ табуға арналған өте тиімді Евклид алгоритмін қарастырайық.

Теорема. $a \geq b \geq 1$ делік. Егер a саны b санына бөлінсе, онда бұл сандардың $\text{ЕҮОБ}(a, b) = b$. Әйтпесе қайсыбір $n \geq 1$ үшін $r_{-1} = a$, $r_0 = b$ деп алып

$$\begin{gathered} r_{-1} = r_0 q_0 + r_1, \\ r_0 = r_1 q_1 + r_2, \\ r_1 = r_2 q_2 + r_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k, \end{gathered}$$

теңдіктерін қарастырайық. Бұл жерде қалдықпен бөлу анықтамасы негізінде:

$$r_0 = b > r_1 > r_2 > \dots > r_{n-1} > r_n > 0.$$

Сонда нөлден өзгеше соңғы қалдық бізге a және b сандарының ең үлкен ортақ бөлгішін береді: $\text{ЕҮОБ}(0, b) = r_n$.

Евклид алгоритмін талдай отырып екі санның ең үлкен ортақ бөлгішінің келесі маңызды қасиетін ашуға болады:

a және b сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші $\text{ЕҮОБ}(a, b)$ сол сандардың кез келген бөлгішіне бөлінеді.

Мысал. Евклид алгоритмінің көмегімен $a = 64$ және $b = 48$ сандарының ең үлкен ортақ бөлгішін табайық

$$64 = 48 \cdot 1 + 16,$$
$$48 = 16 \cdot 3 + 0,$$

демек $\text{ЕҮОБ}(64,16) = 3.$

Мысал. $\text{ЕҮОБ}(525,231)$ табайық

$$525 = 231 \cdot 2 + 63,$$
$$231 = 63 \cdot 3 + 42,$$
$$63 = 42 \cdot 1 + 21,$$
$$42 = 21 \cdot 2 + 0,$$

демек $\text{ЕҮОБ}(525,231) = 21.$

Лемма. $a \geq b \geq 1$ делік. Сонда a санын b санына бөлгендегі қалдық $r < {}^{a}/_{2}$ теңсіздігін қанағаттандырады.

Дәлелдеу. Қалдықпен бөлу анықтамасы бойынша $a = bq + r$. Егер бұл жерде $r \geq {}^{a}/_{2}$ деп ұйғарым жасайтын болсақ, онда $b < bq = a - r \leq r$ теңсіздігін аламыз, яғни $b \leq r$. Бұл қалдықпен бөлу анықтамасына қарама-қайшы. Демек $r < {}^{a}/_{2}$.

Келесі теоремада Евклид алгоритмінің қадам сандарын жоғарыдан бағалау айтылады.

Теорема. $a \geq b \geq 1$ делік. Егер a саны b санына бөлінбейтін болса, онда Евклид алгоритмінде қалдықпен бөлудегі қадам сандары үшін

$$n < 2\log_2 b + 1$$

теңсіздігі дұрыс.

Дәлелдеу. $r_{-1} = a, r_0 = b$ деп алып, Евклид алгоритмін қайтадан жазайық. Сонда

$r_{-1} = r_0 q_0 + r_1$, анықтама бойынша $r_1 < r_0 = b$;

$r_0 = r_1 q_1 + r_2$, лемма бойынша $r_2 < \frac{r_0}{2} = \frac{b}{2}$;

$r_1 = r_2 q_2 + r_3$, лемма бойынша $r_3 < \frac{r_1}{2} < \frac{b}{2}$;

$r_2 = r_3 q_3 + r_4$, лемма бойынша $r_4 < \frac{r_2}{2} = \frac{b}{2^2}$;

…….....

Әрі қарай осылай пайымдай отырып, индукция бойынша $r_{2s-1} < \frac{b}{2^{s-1}}$, $r_{2s} < \frac{b}{2^s}$ $(s = 1, 2, \dots)$ теңсіздіктерін аламыз. Бұл екі теңсіздікті біріктіретін болсақ, кез келген $k = 1, 2, \dots, n$ үшін $r_k < \frac{b}{2^{(k-1)/2}}$ теңсіздігін аламыз.

Келесі қадамда теореманың тұжырымдамасында айтылған теңсіздікті дәлелдеу үшін бұл жерде $k = n$ деп алайық және бүтін сандар үшін айқын $r_n \geq 1$ теңсіздігін ескерейік. Сонда $1 < \frac{b}{2^{(n-1)/2}}$, бұдан $2^{\frac{n-1}{2}} < b$ немесе $\frac{n-1}{2} < \log_2 b \Rightarrow n < 2\log_2 b + 1$.

Теорема. Егер a және b сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші $\text{ЕҮОБ}(a, b) == d$ болса, онда $ax + by = d$ теңдігі орындалатындай x және y сандары табылады.

Бұл теңдік a және b сандарының сызықтық комбинациясы немесе осы сандардың ең үлкен ортақ бөлгішінің көрсетілімі деп аталады.

Теореманың дәлелдеуі Евклид алгоритміне негізделген.

Қайсыбір $n \geq 1$ үшін $r_{-1} = a$, $r_0 = b$ деп алып, Евклид алгоритмінің жалпы теңдігін жазайық

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k,$$

мұнда $k \in N$.

Енді осы теңдіктер тізбегі бойынша төменнен жоғары қарай көтерілейік:

$$r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_{k-1} = r_{k-2} - (r_{k-3} - r_{k-2}q_{k-2}) \cdot q_{k-1} =$$
$$= \cdots = ax + by = \text{ЕҮОБ}(a, b).$$

Мысал. 1232 және 1672 сандарының ең үлкен ортақ бөлгішінің сызықтық көрсетілімін табайық.

Шешуі. 1. Евклид алгоритмін құрайық:

$$1672 = 1232 \cdot 1 + 440,$$
$$1232 = 440 \cdot 2 + 352,$$
$$440 = 352 \cdot 1 + 88,$$
$$352 = 88 \cdot 4,$$

демек $d = \text{ЕҮОБ}(1232,1672) = 88$.

2. Жоғарыдағы теңдіктерді пайдаланып, толық емес бөлінді және қалдықтар арқылы 88 санының сызықтық көрсетілімін табайық

$$88 = 440 - 352 \cdot 1 = (1672 - 1232) - (1232 - (1672 - 1232)2) =$$
$$= 1672 \cdot 3 - 1232 \cdot 4,$$

демек $88 = 1672 \cdot 3 + 1232(-4)$.

Евклид алгоритмінен тікелей шығатын екі санның ең үлкен ортақ бөлгішінің басқа да қасиеттерін атап өтейік.

1. Кез келген $c \in \mathbb{Z}$ саны үшін $\text{ЕҮОБ}(ac, bc) = c\text{ЕҮОБ}(a, b)$.

2. Егер $c|a$ және $c|b$ болса, онда $\text{ЕҮОБ}(a/c) = \text{ЕҮОБ}(a,b)/c$.

Ескерту. Бірнеше бүтін сандардың ЕҮОБ табу екі бүтін санның ЕҮОБ табуға негізделген.

Теорема. $\text{ЕҮОБ}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = \text{ЕҮОБ}(\text{ЕҮОБ}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

Дәлелдеу. $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ сандарының ортақ бөлгіштерінің жиыны $\text{ЕҮОБ}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ және a_n сандарының ортақ бөлгіштер жиынымен беттесетінін аңғару қиындық туғызбайды.

Бірнеше сандардың ЕҮОБ табудағы тәжірибелік тәсілдің ережесін қарастырайық.

Бірнеше натурал сандар берілсін дейік. Олардың ішінен кез келген екеуін таңдап алайық та үлкен санын кіші санға бөлгендегі қалдықпен алмастырайық (егер қалдық нөлге тең болса, онда үлкен санды өшіріп тастаймыз). Мұндай бірнеше амалдардан соң бастапқы сандардың ЕҮОБ болатын тек бір сан қалады.

Мысал. 6, 48, 3, 59 сандарының ЕҮОБ бірге тең болатынын көрсетейік:

$$\text{ЕҮОБ}(6, 48, 3, 59) = \text{ЕҮОБ}(\boxed{6}, \boxed{48}, 3, 59) = \text{ЕҮОБ}(6, 3, 59) =$$
$$= \text{ЕҮОБ}(\boxed{6}, \boxed{3}, 59) = \text{ЕҮОБ}(3, 59) = \text{ЕҮОБ}(3, 2) = \text{ЕҮОБ}(1,2) = 1.$$

Өзара жай сандар. Ең кіші ортақ еселік. Қалдық туралы қытай теоремасы

Анықтама. Егер $\text{ЕҮОБ}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ болса, онда $a_1, a_2, \dots, a_n$ сандарын өзара жай сандар деп атайды.

Егер $d = \text{ЕҮОБ}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ болса, онда a_1/d, …, a_n/d сандарының өзара жай сан болатындығы анықтамадан шығады.

Теорема. $a, b \in \mathbb{Z}$ сандары $ax_0 + by_0 = 1$ теңдігі орындалатындай $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ сандары табылғанда және тек сонда ғана олар өзара жай сандар болады.

Дәлелдеуі. $a, b \in \mathbb{Z}$ сандарының ЕҮОБ-нің сызықтық көрсетілімінен шығады.

Теорема. Егер $\text{ЕҮОБ}(a, b) = 1$ болса, онда $ax + by = 1$ теңдеуінің бүтін шешімін табу үшін 1 санын a және b сандарының сызықтық комбинациясы арқылы өрнектеу жеткілікті.

Мысал. $15x + 37y = 1$ теңдеуінің бүтін шешімін табайық.

Шешуі. 1. 15 және 37 сандарының ЕҮОБ табайық:

$$37 = 15 \cdot 2 + 7,$$
$$15 = 7 \cdot 2 + 1,$$

демек $\text{ЕҮОБ}(15,37) = 1$.

2. 1 санын 15 және 37 сандарының сызықтық комбинациясы арқылы өрнектеп, теңдеудің бүтін шешімдерін табайық:

$$1 = 15 - 7 \cdot 2 = 15 - (37 - 15 \cdot 2) \cdot 2 = 15 \cdot 5 - 37 \cdot 2 = 15 \cdot 5 + 37(-2),$$

демек $x = 5, y = -2$ теңдеудің бүтін шешімдері.

Теорема. Егер $\text{ЕҮОБ}(a, b) = d > 1$ және d саны c санына бөлінбейтін болса, онда $ax + by = c$ теңдеуінің бүтін сандар жиынында шешімі жоқ.

Теорема. Егер $\text{ЕҮОБ}(a, b) = d > 1$ және $c|d$ болса, онда $ax + by = c$ теңдеуі $\text{ЕҮОБ}(a_0, b_0) = 1$ болатын $ax_0 + by_0 = 1$ теңдеуіне пара-пар.

Теорема. Егер $\text{ЕҮОБ}(a, b) = 1$ болса, онда $ax + by = c$ теңдеуінің бүкіл бүтін шешімдері $x = cx_0 + bt, \quad y = cy_0 + at$ формулалары бойынша анықталады, мұнда x_0, y_0 сандары $ax + by = 1$ теңдеуінің бүтін шешімдері, $t -$ кез келген бүтін сан.

Мысал. $47x - 111y = 89$ түріндегі Диофант теңдеуін ЕҮОБ - тің сызықтық көрсетілімі арқылы шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеудің шешімдерін $47x - 111y = 1$ теңдеуінің шешімдері арқылы табайық. Ол үшін алдымен $\text{ЕҮОБ}(47,111) = 1$ болатынын көрсетейік.

$$111 = 47 \cdot 2 + 17,$$
$$47 = 17 \cdot 2 + 13,$$
$$17 = 13 \cdot 1 + 4,$$
$$13 = 4 \cdot 3 + 1,$$
$$4 = 1 \cdot 4 + 0,$$

демек $\text{ЕҮОБ}(47,111) = 1$.

Келесі қадамда 1 санын 47 және 111 сандарының сызықтық комбинациясы арқылы өрнектеп, теңдеудің бүтін шешімдерін табайық:

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - (17 - 13) \cdot 3 = 13 \cdot 4 - 17 \cdot 3 =$$
$$= (47 - 17 \cdot 2) \cdot 4 - 17 \cdot 3 = 47 \cdot 4 - 17 \cdot 11 =$$
$$= 47 \cdot 4 - (111 - 47 \cdot 2) \cdot 11 = 47 \cdot 26 - 111 \cdot 11,$$

бұдан $x_0 = 26$, $y_0 = 11$. Сонда формула бойынша

$$x = 89 \cdot 26 + 111t, y = 89 \cdot 11 + 47t$$

бастапқы теңдеудің бүтін шешімдерінің жиынын береді.

Соңғы теоремалардың қарапайым дәлелдеулерін студенттердің өзіндік жұмыстарына ұсынамыз.

Өзара жай сандардың ерекше маңызды қасиеттерін дәлелдейік және тұжырымдайық.

Қасиеттері:

1. Егер $a|(b \cdot c)$ және $\text{ЕҮОБ}(a, b) = 1$ болса, онда $a|c$.

2. Егер p – жай сан және $p|(b \cdot c)$, онда не $p|b$, не $p|c$.

3. Кез келген a және k бүтін сандары үшін $\text{ЕҮОБ}(a, ka) = a$; дербес жағдайда $\text{ЕҮОБ}(1, a) = 1$.

4. Егер $\text{ЕҮОБ}(a, c) = 1$ және $\text{ЕҮОБ}(b, c) = 1$ болса, онда $\text{ЕҮОБ}(ab, c) = 1$.

Ескерту. Алда $a \vdots b$ белгілеуі a саны b санына қалдықсыз бөлінеді және a саны b санының еселігі дегенді білдіреді.

Анықтама. a және b сандары оң бүтін сандар делік. Осы сандардың ортақ еселіктерінің ішіндегі ең кішісі олардың ***ең кіші ортақ еселігі*** деп аталады. Белгілеуі: $EKOE(a, b)$.

Бұл анықтаманы $a_1, a_2, \dots, a_n$ сандары үшін де жалпылауға болады, яғни осы сандардың ортақ еселіктерінің ішіндегі ең кішісі олардың ең кіші ортақ еселігі болады. Белгілеуі: $EKOE(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Анықтама. Егер барлық $i \neq j$ үшін $\text{ЕҮОБ}(a_i, a_j) = 1$ болса, онда $a_1, a_2, \dots, a_n$ сандары қос-қостан өзара жай сандар болады.

Егер $m = EKOE(a_1, a_2, \dots, a_n)$ болса, онда $\frac{m}{a_1}$, …, $\frac{m}{a_n}$ сандары өзара жай. Бұл тұжырым тікелей анықтамадан шығады.

$EKOE(a_1, a_2, \dots, a_n) = EKOE(|a_1|, \dots, |a_n|)$ болғандықтан $a_1, a_2, \dots, a_n$ сандарын натурал сандар деп қабылдау есептеулер үшін ұтымды болады.

Алдымен a және b сандарының ең кіші ортақ еселігі туралы сұрақты қарастырайық.

Теорема. a және b сандары үшін ЕҮОБ пен $EKOE$ арасындағы арақатынас келесі формула бойынша анықталады $EKOE(a, b) = \frac{ab}{\text{ЕҮОБ}(a,b)}$.

Дәлелдеу. $d = \text{ЕҮОБ}(a, b)$ және $m = ab/d$ дейік. Сонда

$$m = EKOE(a, b)$$

болатынын дәлелдеуіміз керек.

M оң саны a және b сандарының қайсыбір ортақ еселігі делік, яғни $M = aq_1 = bq_2$, мұнда q_1, q_2 – натурал сандар. a және b сандарының ең үлкен ортақ бөлгішінің анықтамасынан $a = da_1$ және $b = da_2$ теңдіктері шығады. Демек $\text{ЕҮОБ}(a_1, b_1) = 1$, өйткені $d = \text{ЕҮОБ}(a, b) = \text{ЕҮОБ}(da_1, da_2)$.

Теореманың шарты бойынша $(a_1 dq_1) \vdots (db_1)$, өйткені $aq_1 = bq_2$. Бұдан $(a_1 q_1) \vdots b_1$ шығады. Евклид теоремасы бойынша $q_1 \vdots b_1$, демек $q_1 = b_1 t_1 t \in \mathbb{Z}$. Сонда a және b сандарының ортақ еселігі M-ді келесі түрде өрнектеуге болады: $M = ab_1 t = \frac{ab}{d} t_1 t \in \mathbb{Z}$. Осы түрдегі ортақ

еселіктердің ішінде ең кішісі $t = 1$ мәнінде алынады. Олай болса $M|_{t=1} = \frac{ab}{d} = m$. Бұдан

$$EKOE(a, b) = \frac{ab}{\text{ЕҮОБ}(a, b)}$$

формуласының дұрыстығы шығады.

Қасиеттері. 1. $EKOE(a, b)$ a және b сандарының кез келген ортақ еселігін қалдықсыз бөледі. Бұл қасиетті ең кіші ортақ еселіктің анықтамасы деп қабылдауға болады.

2. Кез келген c үшін $EKOE(ac, bc) = cEKOE(a, b)$.

3. Егер $c|a$ және $c|b$ болса, онда $EKOE(a / c, b / c) = EKOE(a, b) / c$.

Ескерту. бірнеше сандардың ең кіші ортақ еселігі келесі формуланың көмегімен анықталады:

$$EKOE(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = EKOE(EKOE(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Келесі бір қызықты есепті қарастырайық.

Қандай да бір бүтін санды $m_1, m_2, \dots, m_k$ сандарына бөлгендегі олардың $r_1, r_2, \dots, r_k$ қалдықтары белгілі болсын дейік. Онда сол санның өзін қалай табуға болады деген сұраққа жауап іздейік.

$I_m = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ ізделініп отырған санның m-ға бөлгендегі мүмкін болатын ақырлы қалдықтар жиынын көрсетсін. Сонда келесі теорема қалдықтар туралы белгілі қытай теоремасын тұжырымдайды.

Теорема. $\text{ЕҮОБ}(m_1, m_2) = 1$ және $m = m_1 m_2$ дейік. Сонда кез келген $r_1 \in I_{m_1}$, $r_2 \in I_{m_2}$ қалдықтары үшін m_1 және m_2 сандарына бөлгенде r_1 және r_2 қалдықтарын беретін әрі жалғыз $r \in I_m$ саны табылады.

Дәлелдеу. $r \mapsto (r_1, r_2)$ ережесімен анықталған I_m жиынының $I_{m_1} \times I_{m_2}$ декарттық жиынына бейнелеуін қарастырайық.

$\text{ЕҮОБ}(m_1, m_2) = 1$ шартынан бұл бейнелеудің инъективті екені шығады. Екінші жағынан бұл жиындар тең қуатты, өйткені

$$|I_m| = m = m_2 = |I_{m_1} \times I_{m_2}|,$$

яғни бейнелеу сюръективті. Демек бейнелеу – биективті, дәлелдеуге керегі де осы еді.

Құрама және жай сандар

Анықтама. Бір мен өзінен басқа ешбір бүтін сандарға қалдықсыз бөлінбейтін бүтін сандар тобын жай сандар деп атайды. Ондай болмаған жағдайда мұндай сандарды құрама сандар деп атайды.

Ескерту. 1 саны жай санның да құрама санның да қатарына кірмейді.

Жай сандар қатары ақырлы немесе ақырсыз ба? Бұл сұрақтың жауабын ежелгі грек математигі Евклид берген.

Алдымен жай сандарға байланысты кейбір кезеңдерді атап өтейік.

1. Бірден өзгеше кез келген $a \in \mathbb{N}$ санының ең кіші бөлгіші – жай сан.

Дәлелдеу. $c|a$, $c \neq 1$ және c саны a санын бөлетін сандардың ішінде ең кішісі дейік. Егер $c_1|c$ бөлетіндей c_1 саны табылса, онда $c_1 \leq c$ және $c_1|a$, демек $c_1 = c$ немесе $c_1 = 1$.

2. Құрама $a \in \mathbb{N}$ санының бірден өзгеше ең кіші бөлгіші $\sqrt{a}$ санынан артпайды.

$a -$ құрама сан, ал p оның ең кіші жай бөлгіші болсын, онда $a = p \cdot a_1$ және $p \leq a_1$. Соңғы теңсіздіктің сол және оң жақ бөліктерін өзара тең pa_1 және a сандарына көбейтейік. Сонда $p^2 a_1 \leq a_1 a$, бұдан $p^2 \leq a$ немесе $p \leq \sqrt{a}$ теңсіздігін аламыз.

Салдар. Егер a саны $\sqrt{a}$ санынан артпайтын ешбір жай санға бөлінбесе, онда $a -$ жай, кері жағдайда $a -$ құрама сан.

Мысал. $a = 137$ дейік. $11 < \sqrt{137} < 12$. 2, 3, 5, 7, 11 жай сандарын қарастырайық. 137 саны бұл сандардың ешқайсысына да бөлінбейді, демек 137 – жай сан.

3. Егер p жай саны қайсыбір a натурал санына бөлінсе, онда $p = a$.

Шынында да, егер $p \neq a$, онда 1, p және a оның бөлгіштері болады. Бұл жай санның анықтамасына қарама - қайшы. Демек $p = a$.

4. Егер p_1 және p_2 әртүрлі жай сандар болса, онда $p_1 \nmid p_2$. Шынында да p_2 жай сан болғандықтан ол 1 - ге және тек өзіне бөлінеді. Тұжырымдаманың шарты бойынша $p_1 \neq 1$ жай сан, демек $p_1 \nmid p_2$.

5. Егер $a -$ натурал, ал p жай сан болса, онда не $p|a$, не n және p өзара жай.

Дәлелдеу. a және p сандарының ең үлкен ортақ бөлгішін $(a, p) = d$ дейік. p жай сан болғандықтан не $d = 1$, не $d = p$. Егер $d = 1$ болса, онда a және p өзара жай сан. Егер $d = p$ болса, онда ең үлкен ортақ бөлгіштің анықтамасына сай $a \vdots p$.

Евклид теоремасы. Жай сандар ақырсыз көп.

Дәлелдеуді қарама-қарсы жору арқылы жүргізейік. Жай сандар жиынын ақырлы жиын деп ұйғарайық. Сонда бұл жиыннан ең үлкен p жай санын табуға болады. Енді $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$ санын қарастырайық. Бұл a санының 2, 3, 5, …, p сандарына бөлгендегі қалдықтары 1-ге тең. Яғни a саны ешбір жай санға бөлінбейді, ал бұл өз кезегінде 1-ден өзгеше кез келген натурал сан үшін жай бөлгіш

табылуы туралы (табылады деген) тұжырымдамаға қарама-қарсы. Демек ұйғарым дұрыс жасалынбаған, яғни жай сандар жиыны ақырсыз.

Жай сандар кестесін құру үшін ежелгі грек математигі Эратосфен «Эратосфен елеуіші» деп аталатын тәртіпті ойлап тапты.

Эратосфен 1, 2, 3, ..., n натурал қатарының кез келген бөлігінен жай сандарды бөліп шығару үшін алдымен 1-ді, содан кейін бүкіл 2-ге еселі, содан кейін 3-ке еселі және т.с.с. сандарды сызып тастайды.

Сонымен $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots,\ p \le \sqrt{a}$ жай сандарына еселі бүкіл сандарды сызып тастау керек.

Мысал. 1, 2, 3, ..., 20 натурал қатар кесіндісінен жай сандарды бөлейік. Ол үшін 2-ден 20-ға дейінгі бүкіл натурал сандарды тізіп жазайық та, жоғарыда айтылған тәсіл бойынша бүкіл құрама сандарды сызып тастайық.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

3, 5, 7, 11, 13, 19 сандары жай сандар.

Арифметиканың негізгі теоремасы және оның салдары

Теорема (арифметиканың негізгі теоремасы). Кез келген натурал $a > 1$ санын жай сандардың көбейтіндісі түрінде көрсетуге болады және мұндай жіктелу көбейткіштердің орналасу ретіне дейінгі дәлдікпен тек жалғыз түрде жүргізіледі.

Дәлелдеу. Келесі үш жағдайды қарастырайық:

1) $a = p$, мұнда $p -$ жай сан. Онда оның жіктелуі тек бір көбейткіштен тұрады және мұндай жіктелу жалғыз.

2) $a -$ құрама сан. Онда оның ең болмағанда бір бөлгіші бар. Бұл бөлгіш берілген a санының ең кіші натурал жай бөлгіші p_1 болады. Демек $a : p_1$, яғни $a = p_1 \cdot q_1$.

Егер $q_1 > 1,\ q_1 \in N$ және жай сан болса, онда оны p_2 арқылы белгілейміз. Сонда a саны p_1 және p_2 жай сандарының көбейтіндісі түрінде жазылады: $a = p_1 \cdot p_2$.

Егер $q_1 > 1$, $q_1 \in N$ және құрама сан болса, онда q_1 санының ең кіші натурал жай бөлгішін p_2 арқылы белгілеп, $a = p_1 \cdot p_2 \cdot q_2$ жіктелуін аламыз. Пайымдауды әрі қарай осы сияқты жалғастырсақ, онда есептің шешімі a санының жай бөлгіштерін табуға келтіріледі және бұл процесс ақырлы, яғни қайсыбір k-шы қадамда жай бөлгіштері болмайтын q_k бөліндісі бірге тең болады. Сонда a саны $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ түрінде жазылады, мұнда $p_i -$ жай сандар.

Енді мұндай жіктелу көбейткіштердің орналасу ретіне дейінгі дәлдікпен тек жалғыз түрде жүргізілетінін дәлелдейік.

Анықтама. m санының $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ түріндегі көрсетілімі оның ***канондық жіктелуі*** деп аталады. Мұнда $p_i -$ әртүрлі жай сандар, $\alpha_i -$ натурал сандар, $i = 1, \dots, t$.

Егер m санының канондық жіктелуі белгілі болса, онда оның бүкіл натурал бөлгіштерін оңай табуға болады. Олар $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$ түрінде табылады, мұнда $(\beta_1, \dots, \beta_t)$ көрсеткіштер жиынтығы $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, $i = 1, \dots, t$ шектеулері арқылы анықталады. Бұл тұжырым арифметиканың негізгі теоремасынан шығады.

Есеп шығару үлгілері. 1. Қатар тұрған төрт натурал сандар ішінде ең болмағанда біреуі 2-ге, 3-ке, 4-ке, 5-ке бөлінетіні туралы не ойлайсыз.

Алдымен натурал санның 4-ке бөлінгіштігін қарастырайық. 4-ке бөлгенде әртүрлі 0, 1, 2 немесе 3 қалдықтары болуы мүмкін. Егер осы сандардың біріншісін төртке бөлгенде қалдық нөлге тең болса, онда ол 4-ке еселі. Егер оның қалдығы бар болса, онда ол келесі санға қалдықсыз бөлінеді. Егер оның қалдығы 2 болса, онда үшінші сан 4-ке еселі. Егер оның қалдығы 3 болса, онда екінші сан 4-ке еселі. Осылайша пайымдап, қатар тұрған төрт натурал сандардың ішінде кем дегенде біреуі 2-ге және 3-ке бөлінетінін дәлелдеуге болады. 5-ке бөлінгіштікті қарастырсақ, бірінші санды беске бөлгенде қалдық 1 болса, онда қатар тұрған төрт санның ешқайсысы 5-ке бөлінбейді, сондықтан жауабы: иә, иә, иә, үнемі бөліне бермейді.

2. 7-ге бөлгенде қалдықта қандай сан болса, бөліндіде де сондай сан болатын бүкіл натурал сандарды тап.

7-ге бөлінетін санның қалдығы 6-дан аспайды.

Қалдыққа бөлу ережесі бойынша $a = q \cdot b + r$, есептің шартынан $a = q \cdot b + q$ немесе $a = (q + 1)q = 8q$. Жауабы: 8, 16, 24, 32, 40, 48.

3. Асан, Арман және Аида кинотеатрға жүйелі түрде барады. Асан онда – әрбір үшінші, Арман – әрбір жетінші, ал Аида әрбір бесінші күні болады. Бүгін балалардың барлығы бірге кино көрді. Енді кинотеатрда келесі рет үшеуі де бірге кездесе алады. Сонда үшеуі қай күні кездеседі?

Шешуі. Есептеуді балалардың бірінші кездескен күнінен бастайық. Асанның киноға баратын күні 3-ке бөлінеді, ал Арман мен Аиданың киноға баратын күндері сәйкес 7-ге және 5-ке бөлінеді. Демек, олардың кездесетін күндерінің нөмірі бір мезгілде 3-ке, 7-ге

және 5-ке қалдықсыз бөлінеді. Сонымен бұл күннің нөмірі 105-ке бөлінеді, яғни 105, 210, 315 т.с.с.

Жауабы: әрбір 105-күнде.

4. Қайсыбір m санын 13-ке және 15-ке бөлгенде бірдей бөлінділер алынды, бірақ 13-ке бөлгендегі қалдық 8, ал 15-ке қалдықсыз бөлінді. Бастапқы m санын тап.

Шешуі. Қалдықпен бөлу ережесіне сай $m = q \cdot 13 + r_1, m = q \cdot 15 + r_2$, мұнда $r_1 = 8, r_2 = 0$. Демек $q \cdot 13 + r_1 = q \cdot 15 + r_2$ теңдігінен $2q = r_1 - r_2 = 8$, бұдан $q = 4$. Олай болса ізделініп отырған сан $m = 4 \cdot 13 + 8 = 60$.

Жауабы: 60.

5. Егер бөлінгіш пен бөліндіні 3 есе арттырса, онда бөлінді мен қалдық өзгере ме?

Шешуі. Қалдықпен бөлу ережесіне сай $a = q \cdot b + r$. Сонда есептің шартынан $3a = b3q + 3r$ теңдігі шығады. Демек қалдық нөлге тең болмаса, онда бөлінді өзгеріссіз, ал қалдық үш есе өседі. Егер қалдық нөлге тең болса, онда ешқандай өзгеріс болмайды.

6. $P(n) = n^2 + n + 41$ көпмүшелігі n-нің барлық натурал мәндерінде жай сандар бере ме?

Шешуі. $n = 0, 1, \dots, 39$ болғанда жай сандар болады, ал $n = 40$ немесе $n = 41$ мәндерінде жай сандар болмайды.

7. Бірінен кейін бірі келетін немесе қатар тұрған k натурал сандардың көбейтіндісі $k!$ бөлінетінін дәлелде және $\forall n \in N$ үшін $n \cdot (n^2 + 5) \vdots 36$ көрсет.

Шешуі. Теру саны $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ натурал сан болғандықтан қатар тұрған k натурал сандардың көбейтіндісі міндетті түрде $k!$ бөлінеді.

Бұл дәлелдеуден $(n-1)n(n+1) = n(n^2-1)$ көбейтіндісінің $3! = 6$-ға бөлінетіні шығады. Демек $n(n^2-1) + 6n = n(n^2+5n)$ өрнегі де 6-ға бөлінеді, өйткені $6n \vdots 6$.

8. $\forall n \in N$ үшін $P(n) = 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 \vdots 25$ бөлінетінін дәлелде.

Шешуі. Дәлелдеуді математикалық индукция бойынша жүргіземіз.

1) $n = 1$ болғандағы тұжырымның дұрыстығын тексерейік

$$P(1) = 2^3 \cdot 3 + 5 - 4 = 25, P(1) \vdots 25.$$

2) $n = k$ $P(k+1) \vdots 25$ $(2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4) \vdots 25$.

$$2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 6 \cdot 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k + 1 = 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - \\ -25(k-1) \vdots 25.$$

Толық математикалық индукция қағидасы бойынша берілген тұжырым кез келген натурал сан үшін дұрыс.

9. Егер $(ax+by)\vdots(a+b)$ болса, онда $(ay+bx)\vdots(a\pm b)$, мұнда $a,b,x,y\in\mathbb{Z}$.

Шешуі. $(ay+bx)=(a+b)(y+x)-(ax+by)\vdots(a+b)$. Өйткені $ay=(a+b)y-by$, ал $bx=(a+b)x-ax$.

10. 17-ге бөлгенде бөлінді 23 болатын ең үлкен бүтін санды тап.

Шешуі. Қалдықпен бөлу ережесіне сай $a=17\cdot 23+r$,

мұнда $0\le r<17$. Сонда $r=16$ болғанда және тек сонда ғана a ең үлкен мәнді қабылдайды, яғни $a=407$.

11. Үшбұрышты іштей сызылған шеңбердің радиусы 1-ге тең, ал оның биіктіктері натурал сандар. Үшбұрыштың қабырғаларын тап.

Шешуі. $S=p\cdot r$, мұнда $p=(a+b+c)/2$ және $v=1$. Екінші жағынан $S=\frac{1}{2}ah_a$, $S=\frac{1}{2}bh_b$, $S=\frac{1}{2}ch_c$. Олай болса $ah_a=a+b+c$, $bh_b=a+b+c$, $ch_c=a+b+c$. Бұдан $h_a=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$, $h_b=1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$, $h_c=1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. Есептің шарты бойынша h_a, h_b, h_c натурал сандар. $a=b$, $a=c$ және $b=c$ болғанда және тек сонда ғана $a|b$, $b|a$, $a|c$, $c|a$, $b|c$ және $c|a$ бөлу натурал санды береді. Демек $a=b=c$, онда $h_a=h_b=h_c=3$. Ал $S=(a+b++c)=3a$ немесе $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3a$.

Жауабы: $a=b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Теорема. a және b сандары өзара жай болу үшін a санының канондық жіктелуіне кіретін жай көбейткіштердің ешбірі b санының канондық жіктелуіне кірмеуі қажетті және жеткілікті.

Теорема. $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$ теңдігі a санының жіктелуі болсын дейік. Сонда $b\vdots a$ бөлінгіштігі үшін $b\vdots p_1^{\alpha_1}$, $b\vdots p_2^{\alpha_2}$, …, $b\vdots p_t^{\alpha_t}$ бөлінгіштік шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теоремалардан берілген санның өзара жай бірнеше сандардың көбейтіндісіне қатысты бөлінгіштік қасиеті шығады.

Мысалы, 12 саны 2 және 3 жай сандарының әрқайсысына бөлінеді. Демек 12 саны осы сандардың $2\cdot 3$ көбейтіндісіне де бөлінеді.

Теорема. m және r натурал сандары берілсін дейік. Сонда m санын $(m_1,r)=1$ теңдігі орындалатындай $m=m_1m_2$ көбейтіндісі түрінде көрсетуге болады және $r^k\vdots m_2$ бөлінгіштігі орындалатындай $k\in\mathbb{Z}$ саны табылады.

Мысал. Екі санның канондық жіктелулері бойынша осы сандардың ең үлкен ортақ бөлгішінің және ең кіші ортақ еселігінің канондық жіктелулерін табудың тәсілін көрсет.

Шешуі. $p_1, p_2, \dots, p_t$ жай сандары a және b сандарының канондық жіктелулеріне кіретін жай сандардың толық тізімін көрсетсін:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t},$$
$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}.$$

Егер бұл жіктелулерде a саны p_i-ге бөлінбесе, онда $\alpha_i = 0$; егер b саны p_i-ге бөлінбесе, онда $\beta_i = 0$ деп алайық. Сонда

$$(a, b) = p_1^{min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_t^{min\{\alpha_t, \beta_t\}}$$
$$[a, b] = p_1^{max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_t^{max\{\alpha_t, \beta_t\}}.$$

Мысал. Кез келген $a, b \in \mathbb{N}$ үшін $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$ теңдігінің дұрыстығын дәлелде.

Шешуі. $a \cdot b = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t + \beta_t}$. Екінші жағынан

$$(a, b) \cdot [a, b] = p_1^{max\{\alpha_1, \beta_1\} + min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_t^{max\{\alpha_t, \beta_t\} + min\{\alpha_t, \beta_t\}}.$$

Олай болса дәлелдеуді қажет етпейтін $max\{\alpha, \beta\} + min\{\alpha, \beta\} = \alpha + \beta$ теңдігінен $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$ теңдігі шығады.

Теорема. a санының әртүрлі бөлгіштерінің санын $\tau(a)$ арқылы белгілейік (мұнда бір және a санының өзі де қоса есептелінеді). Сонда канондық $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ жіктелуі бойынша анықталатын a санының бөлгіштерінің саны $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_t + 1)$ көбейтіндісіне тең екенін дәлелдейік.

Дәлелдеуі. a санының $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ канондық жіктелуінің негізінде $\tau(a)$ санын анықтайтын формуланы қорытып шығайық.

a санының кез келген бөлгіші $c = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$ түрінде табылатыны бізге бұрыннан белгілі, мұнда кез келген j, $1 \le j \le t$ үшін $0 \le \beta_j \le \alpha_j$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан β_1 көрсеткіші жалпы саны $\alpha_1 + 1$ болатын әртүрлі $0, 1, \dots, \alpha_1$ мәндерін, β_2 көрсеткіші жалпы саны $\alpha_2 + 1$ болатын әртүрлі $0, 1, \dots, \alpha_2$ мәндерін, ..., β_t көрсеткіші жалпы саны $\alpha_t + 1$ болатын әртүрлі $0, 1, \dots, \alpha_t$ мәндерін қабылдайды. Басқаша айтқанда $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ кортежінің бірінші координатасы $(\alpha_1 + 1)$ мәндерін, екінші координатасы $(\alpha_2 + 1)$ мәндерін, ..., t - шы координатасы $(\alpha_t + 1)$ мәндерін қабылдауы мүмкін. Сонда комбинациялардың көбейту ережесіне сай мұндай кортеждердің жалпы саны $(\alpha_1 + 1)$ $(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_t + 1)$ көбейтіндісіне тең.

Мысал. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, демек

$$\tau(120) = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Шынында да 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 сандары 120 санының бөлгіштері болады. Олардың саны – 16.

Енді a санының бүкіл натурал бөлгіштерінің қосындысын табатын формуланы қорытып шығарайық. Ол үшін a санының $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ канондық жіктелуін алайық және

$$\left(1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \left(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}\right) \cdot \left(1 + p_t + \dots + p_t^{\alpha_t}\right) \qquad \text{(А)}$$

көбейтіндісін қарастырайық.

Егер бұл жақшаларды бір-біріне көбейтіп, ашып жазатын болсақ, онда $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$ түріндегі мүшелердің қосындысын аламыз. Мұнда кез келген j, $1 \le j \le t$ үшін $0 \le \beta_j \le \alpha_j$ теңсіздігі орындалады.

Қосындыға кіретін мұндай әрбір мүше a санының бөлгіштері болатыны және олардың әрқайсысы қосындыға тек жалғыз түрде кіретіні жоғарыдағы тұжырымдамалардан белгілі. Сондықтан (А) көбейтіндісі a санының бүкіл $\sigma(a)$ бөлгіштерінің қосындысына тең. Сонымен

$$\sigma(a) = \left(1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \left(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}\right) \cdot \left(1 + p_t + \dots + p_t^{\alpha_t}\right).$$

Мұндағы $1 + p_j + \dots + p_j^{\alpha_j}$ түріндегі әрбір көбейткіш еселігі p_j, $j = 1, 2, \dots, t$ болатын геометриялық прогрессияның қосындысын береді. Келесі қадамда геометриялық прогрессияны табу формуласын пайдаланып, $\sigma(a)$ санын табайық:

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \qquad \text{(Б)}$$

Теорема. Егер $a \in \mathbb{Z}$ саны $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ канондық жіктелуі арқылы берілсе, онда $\sigma(a)$ саны (Б) формуласымен анықталады.

Мысал. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ және 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 сандары оның бөлгіштері, демек

$$\sigma(a) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 12 + 15 + 20 + 30 + 60 = 168.$$

Формула бойынша

$$\sigma(60) = \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{1+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = \frac{7}{1} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{24}{4} = 7 \cdot 4 \cdot 6 = 168.$$

Жаттығулар

1. Егер

а) $EKOE(a, b) = 2640$ және ЕҮОБ$(a, b) = 15$;

б) $EKOE(a, b) +$ ЕҮОБ$(a, b) = 35$, ЕҮОБ$(a, b) \ne 1$;

с) $EKOE(a, b) \cdot$ ЕҮОБ$(a, b) = 630$, ЕҮОБ$(a, b) \ne 1$

болса, онда a және b сандарының қандай болулары мүмкін.

2. Келесі қос сандардың ең үлкен ортақ бөлгіштерін тап:

(1035,1105), (611, 676), (8183,1152).

3. Келесі қос сандардың ең үлкен ортақ бөлгіштерінің көрсетілімдерін тап: (93,39), (76,28), (17,101).

4. Ең үлкен ортақ бөлгіштің сызықтық көрсетілімін пайдаланып,

a) $37x - 28y = 11$; b) $59x + 14y = 2$;

c) $63x - 8y = 5$; d) $16x - 28y = 13$

теңдеулерінің бүтін шешімдерін тап.

5. m және n сандары өзара жай сандар. Келесі қос сандардың өзара жай сан болатындарын дәлелде:

a) $m \cdot n$ және $m + n$;

b) $m \cdot n$ және $m^2 + n^2$.

6. m және n сандары өзара жай сандар делік. Сонда

a) $m + n$ және $m - n$;

b) $m + n$ және $m^2 + n^2$

сандарының қандай ортақ бөлгіштері болуы мүмкін?

7. Егер $\text{ЕҮОБ}(a, b) = 1$ және p жай сан болса, онда $\text{ЕҮОБ}(a + b, abp) = 1$ немесе $\text{ЕҮОБ}(a + b, abp) = p$ болатынын дәлелде.

8. Егер a және b сандары өзара жай болса, онда $\text{ЕҮОБ}(ac, b) = \text{ЕҮОБ}(b, c)$болатынын дәлелде.

9. Егер $\text{ЕҮОБ}(a, b) = d$ болса, онда $\text{ЕҮОБ}\big(a + bc, a + b(c - 1)\big) = d$ болатынын дәлелде.

10. Егер $n \geq 2$ болса, онда $2^n - 1$ және $2^n + 1$ сандарының өзара жай сан болатындарын дәлелде.

11. Келесі сандардың канондық жіктелулерін жаз:

а) 14!; б) 16!; в) $\frac{16!}{8!8!}$; г) $\frac{16!}{10!6!}$.

12. Теңдеулерді шеш:

а) $[x] = -3$; б) $[2x] = 2$; в) $[x^2 - 4x + 7] = 3$;

г) $\{x\} = 0{,}2$ д) $\{3x\} = 0{,}9$; е) $\{x^2 + 5\} = 0$;

ж) $\{x\} = [x + 15]$; з) $\{x\} = [x]$; и) $\frac{x-1}{3} = \{x\}$.

13. Теңсіздікті шеш:

а) $[1 - x^2] > -4$; б) $\{1 - x^2\} > 0{,}5$.

14. $f(x) = [x]$ және $f(x) = \{x\}$ функцияларының графиктерін тұрғыз.

15. $\text{ЕҮОБ}(99! + 100!, 101!)$ тап.

16. $\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(a,c)}{(a,b,c)^2} = \frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[a,c]}{[a,b,c]^2}$ теңдікті дәлелде.

17. 232792560 санын көбейткіштерге жікте. Оның 2 және 22 сандарының аралығындағы бүкіл бүтін сандарға бөлінетінін тексер.

18. Кез келген $p > 2$ теңсіздігін қанағатандыратын жай сан үшін $\frac{m}{n} = 1 + + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ бөлшегінің алымы p - ға бөлінетінін дәлелде.

19. Кез келген n бүтін саны үшін $n^4 + 4$ саны құрама сан болатынын дәлелде.

20. Егер $2^n + 1$ жай сан болса, онда міндетті түрде $n = 2^k$ болатынын дәлелде.

Мультипликативті сандық функциялар және олардың қасиеттері

Анықтама. Егер $\theta(n)$ сандық функциясы

1) барлық натурал сандар үшін анықталса және $\theta(1) = 1$ болса;

2) кез келген өзара жай m және n натурал сандары үшін

$$\theta(mn) = \theta(m) \cdot \theta(n)$$

теңдігі орындалса, онда оны ***мультипликативті сандық функция*** деп атайды.

Мультипликативті функцияға мысал ретінде n^s функциясын алуға болады, мұнда $s -$ кез келген сан, ал $n \in N$. Дұрысында $\theta(1) = 1$ және $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$ үшін $\theta(mn) = m^s n^s = \theta(m) \cdot \theta(n)$ теңдігі орындалады.

Теорема. Егер $n_1, n_2, \ldots, n_k$ сандары қос-қостан өзара жай, ал $\theta(n)$ функциясы мультппликативті болса, онда

$$\theta(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k) = \theta(n_1) \cdot \theta(n_2) \cdot \ldots \cdot \theta(n_k).$$

Бұл теореманың дәлелдеуі математикалық индукция тәсілімен жүргізіледі.

Салдар. Егер n саны өзінің $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ канондық жіктелуі арқылы берілсе және $\theta(n)$ функциясы мультипликативті функция болса, онда

$$\theta(n) = \theta\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \theta\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdot \ldots \cdot \theta\left(p_t^{\alpha_t}\right).$$

Шын мәнісінде $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ сандары қос-қостан өзара жай, сондықтан бұл тұжырымның дұрыстығы тікелей анықтамадан шағады.

Теорема. Егер n саны өзінің $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ канондық жіктелуі арқылы берілсе және $\theta(n)$ функциясы мультипликативті функция болса, онда

$$\sum_{d|n} \theta(n) = \left[1 + \theta(p_1) + \cdots + \theta\left(p_1^{\alpha_1}\right)\right] \cdot \ldots \cdot \left[1 + \theta(p_t) + \cdots + \theta\left(p_t^{\alpha_t}\right)\right],$$

(В) мұнда теңдіктің сол жағындағы қосынды санын бүтіндей бөлетін бүкіл α бөлгіштері бойынша алынады.

Дәлелдеу. Егер теңдіктің оң жағындағы жақшаларды бір-біріне көбейтіп, ашып жазатын болсақ, онда біз $\theta(p_1^{\alpha_1}) \cdot \theta(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot \theta(p_t^{\alpha_t})$ түріндегі мүшелердің қосындысын аламыз. Мұнда кез келген j, $1 \leq j \leq t$ үшін $0 \leq \beta_j \leq\leq \alpha_j$ теңсіздігі орындалады. Демек қосындының құрамына кіретін мұндай әрбір мүше $\sum_{d|n} \theta(n)$ санының бөлгіштері болады және осы түрдегі әрбір бөлгіш қосындыға тек бір рет қана кіреді.

$\theta(n)$ – мультипликативті функция болғандықтан

$$\theta\left(p_1^{\beta_1}\right) \cdot \theta\left(p_2^{\beta_2}\right) \cdot \ldots \cdot \theta\left(p_t^{\beta_t}\right) = \theta\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_t^{\beta_t}\right)$$

теңдігі орындалады және $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_t^{\beta_t}$ саны $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ санының бөлгіші болады. Сондықтан жоғарыда қарастырылған $\tau(a)$ және $\sigma(a)$ формулалары (В) формуласының дербес жағдайлары болады.

Шынында да $\tau(a)$ формуласы үшін $\theta(a) = 1$. Сонда (В) формуласының сол жағында a санының бөлгіштерінің санына тең бірлік қосылғыштар, ал оң жағында $(\alpha_1 + 1), (\alpha_2 + 1), \ldots, (\alpha_t + 1)$ сандарының көбейтіндісі тұрады. $\sigma(a)$ формуласы үшін $\sigma(a) = a$ деп алайық. Сонда (В) теңдігінің сол жақ бөлігі a санының бүкіл бөлгіштерінің қосындысын, ал оң жақ бөлігі осы қосындыны есептейтін $\left(1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right)$, $(1 + p_2 + \cdots + p_2^2), \ldots, \left(1 + p_t + + \cdots + p_t^{\alpha_t}\right)$ сандарының көбейтінділерін көрсетеді.

Ескерту. (В) формуласының көмегімен басқа да жаңа формулалар алуға болады. Мысалы $\theta(n) = n^s$ функциясы болсын дейік. Сонда n санының $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ канондық жіктелуі бойынша

$$\sum_{d|n} \theta(n) = \sum_{d|n} d^s = \left(1 + p_1^s + \cdots + p_1^{s\alpha_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + p_t^s + \cdots + p_t^{s\alpha_t}\right) =$$

$$= \frac{p_1^{s(\alpha_1+1)} - 1}{p_1^s - 1} \cdot \frac{p_2^{s(\alpha_2+1)} - 1}{p_2^s - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_1^{s(\alpha_t+1)} - 1}{p_t^s - 1}$$

формуласын аламыз.

Теорема. Егер $\theta_1(n)$ және $\theta_2(n)$ функциялары мультиплакативті функциялар болса, онда олардың $\theta_1(n) \cdot \theta_2(n) = \theta(n)$ көбейтінділері де мультппликативті функция болады.

Дәлелдеу. $\theta(1) = \theta_1(1) \cdot \theta_2(1) = 1 \cdot 1 = 1$ және өзара жай m, n сандары үшін

$$\theta(mn) = \theta_1(mn) \cdot \theta_2(mn) = \theta_1(m)\theta_1(n)\theta_2(m)\theta_2(n) =$$
$$= \theta_1(m)\theta_2(m)\theta_1(n)\theta_2(n) = \theta(m) \cdot \theta(n).$$

$[x]$ және $\{x\}$ функциялары

Сандар теориясында мәндері аргумент n-нің натурал мәндері үшін анықталған және n санының арифметикалық табиғатымен байланысты әртүрлі функциялар қарастырылады. Әдетте мұндай функциялар үшін әрбір функция аргументтің барлық натурал мәндерінде анықталсын деген талап қойылады. Сонымен, егер $f(n)$ мәні кез келген натурал n саны үшін анықталса, онда комплексмәнді $f(n)$ функциясын арифметикалық функция (немесе сандық функция) деп атайды.

Арифметикалық функциялар қатарына санның бүтін бөлігі және санның бөлшек бөлігі деп аталатын функциялар жатады.

Анықтама. Нақты x санының бүтін бөлігі деп $k \le x$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін k санын айтады.

Бұл функция $[x]$ арқылы белгіленеді. Мысалы, $[2{,}5] = 2$, $[\pi] = 3$, $[-4{,}4] = -5$. Анықтамадан кез келген x үшін $[x] \le x < [x] + 1$ теңсіздігінің дұрыстығы шығады. $[x] \le x$ және $[y] \le y$ теңсіздіктерін қосып $[x] + [y] \le$

$\le x + y$ теңсіздігін аламыз. Бұдан анықтамаға сай $[x] + [y] \le [x + y]$ теңсіздігі шығады.

Анықтамадан кез келген натурал n саны үшін $[x + n] = [x] + n$ теңдігі алынады.

Кез келген нақты x және кез келген натурал a сандары үшін $\left[\frac{[x]}{a}\right] = \left[\frac{x}{a}\right]$ теңдігі орындалады.

Мұны түсіндіру үшін $q = \left[\frac{x}{a}\right]$ белгілеуін енгізейік. Сонда

$$aq \le x < a(q + 1) \quad \text{және} \quad aq \le [x] \le x < a(q + 1).$$

Бұл теңсіздіктерді a - ға бөліп, $q \le \frac{[x]}{a} < q + 1$ теңсіздігін алайық. Соңғысы $\left[\frac{[x]}{a}\right] = \left[\frac{x}{a}\right]$ теңдігінің дұрыстығын білдіреді.

Анықтама. Нақты x санының бөлшек бөлігі деп $\{x\} = x - [x]$ функциясын айтады. Сонда $\{x\}$ функциясы $0 \le \{x\} < 1$ теңсіздігін қанағаттандырады және оның периоды 1-ге тең.

Шынында да, $\{x + 1\} = x + 1 - [x + 1] = x - [x] = \{x\}$. Мысалы $\{-2{,}3\} = -2{,}3 - (-3) = 0{,}7$.

$[x]$ және $\{x\}$ функцияларының қасиеттері

1.Кез келген нақты x саны үшін $[x] \le x < [x] + 1$.

2.Кез келген k бүтін және кез келген нақты x сандары үшін $[k+x]=k+[x]$.

3.x нақты сан дейік. $n\le[x]$ теңсіздігі орындалғанда және тек сонда ғана n бүтін саны үшін $n\le x$ теңсіздігі дұрыс.

4.Кез келген оң нақты x және кез келген натурал d сандары үшін $|\{n\in N:\ \ n\le x,\ d|n\}|=[x/d]$.

5.Кез келген нақты x саны үшін $\left[[x]\right]=[x]$.

6.Кез келген оң нақты x және кез келген натурал d сандары үшін $\left[{}^{x}/_{d}\right]=\left[{}^{[x]}/_{d}\right]$.

7.Кез келген нақты x саны үшін $[x]-2\left[{}^{x}/_{2}\right]=0$ немесе 1.

8.$n!=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, мұнда p_i параметрі n санынан артпайтын бүкіл жай сандардың толық тізімін көрсетеді және $\alpha_i=[n/p_i]+[n/p_i^2]+$ $+\left[n/p_i^3\right]+\cdots$.

9.Кез келген нақты x саны үшін $0\le\{x\}<1$.

10. Кез келген нақты x және кез келген k бүтін сандары үшін $\{k+x\}=\{x\}$.

Тұжырым. m және n натурал сандары берілсін дейік. m санына еселі, бірақ n санынан артпайтын натурал сандардың саны $\left[\frac{n}{m}\right]$ болатынын көрсетейік.

Шын мәнісінде, егер $n=mq+r,\ 0\le r<n$ болса, онда $m,2m,\dots,mq$ сандары m санына еселі сандар болады. Олардың барлық саны q-ға тең. Сондай-ақ $n=mq+r$ теңдігінен $\frac{n}{m}=q+\frac{r}{m}$ теңдігі шығады. Олай болса қалдықпен бөлгенде толық емес бөлінді $\left[\frac{n}{m}\right]=q$ формуласымен өрнектеледі, өйткені $0\le\frac{r}{m}<1$. Тұжырым дәлелденді.

Тұжырым. $n!$ санының канондық жіктелуіне кіретін p жай санының көрсеткіші $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\cdots$ санына тең.

Ескерту. Бұл қосындыда тек $n\ge p^k$ шартын қанағаттандыратын мүшелер ғана нөлден өзгеше.

Мысал. 20! факториал санының канондық жіктелуін жаз.

Шешуі. Бұл жіктелуді табу үшін алдымен p параметрінің 20 санынан артпайтын бүкіл жай сандарының толық тізімін құраймыз: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 және 19. Факториалдың жіктелуіне кіретін әрбір p параметрінің α дәрежесі келесі формула бойынша анықталады $\alpha=[20/p]+[20/p^2]+[20/p^3]+\cdots$. $[20/p^k]=[[20/p^k/p]]=[[20/p^{k-1}/p]]$ болғандықтан әрбір келесі қадамда есептеу жеңілденеді.

Атап айтқанда 2 саны үшін есептеу келесі түрде анықталады:

$\alpha_1 = [20/2] + [20/2^2] + [20/2^3] + [20/2^4] + [20/2^5] + \cdots = 10 + 5 + +2 + 1 + 0 = 18.$

3 саны үшін $\alpha_2 = [20/3] + [20/3^2] + [20/3^3] + \cdots = 6 + 2 + 0 = 8.$

5 саны үшін $\alpha_3 = [20/5] + [20/5^2] + \cdots = 4 + 0 = 4.$

7 саны үшін $\alpha_4 = [20/7] + [20/7^2] + \cdots = 2 + 0 = 2.$

11 саны үшін нәтиже $\alpha_5 = [20/11] + [20/11^2] + \cdots = 1 + 0 = 1$ болғандықтан қалған 13, 17 және 19 жай сандары 20! факториал санының жіктелуіне бірінші дәрежелерімен кіреді. Сонымен

$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Анықтама. m натурал және p жай сандары берілсін дейік. $\upsilon_p(m)$ арқылы m санының канондық жіктелуіне кіретін p жай санының көрсеткішін белгілейік (егер p жай саны m санының бөлгіші болмаса, онда анықтама бойынша $\upsilon_p(m) = 0$). Демек m санының $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ канондық жіктелуін

$$m = \prod p^{\upsilon_p(m)}$$

түрінде жазуға болады, мұнда көбейтінді $p_1, p_2, \ldots, p_t$ жай сандары бойынша жүргізіледі.

$\upsilon_p(m)$ функциясының қасиеттері

1.$\forall\, a, b \in N$ сандары мен p жай саны үшін $\upsilon_p(ab) = \upsilon_p(a) + \upsilon_p(b)$ теңдігі орындалады.

2.$\upsilon_p(d) \le \upsilon_p(n)$ теңсіздігі орындалғанда және тек сонда ғана $d|n$.

3.$a, b \in N$ сандары үшін $\upsilon_p(a) = \upsilon_p(b)$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана олар өзара тең, мұнда $p -$ жай сан.

4.Кез келген $a_1, \ldots, a_m$ сандары мен p жай саны үшін

$$\upsilon_p([a_1, \ldots, a_m]) = max\{\upsilon_p(a_1), \ldots, \upsilon_p(a_m)\}$$
$$\upsilon_p(a_1, \ldots, a_m) = min\{\upsilon_p(a_1), \ldots, \upsilon_p(a_m)\}$$

теңдіктері дұрыс.

Теориялық тұрғыда қызығушылық туғызатын екі есеп қарастырайық. Қайсыбір санның канондық жіктелуіне кіретін жай сандардың еселігін анықтайық. Әрбір $x \ge 1$ нақты саны үшін $K(x)$ таңбасымен x-тан артпайтын бүкіл натурал сандардың ең кіші ортақ еселігін белгілейік.

Лемма. Кез келген $x \ge 1$ нақты саны үшін

$$K(x) = \prod_{p \le x} p^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]}.$$

Дәлелдеу. Әрбір p жай саны үшін және

$$\upsilon_p([a_1, \ldots, a_m]) = max\{\upsilon_p(a_1), \ldots, \upsilon_p(a_m)\}$$

теңдігінің көмегімен $v_p\big(K(x)\big) = \max\limits_{1\le u\le x} v_p(u)$ анықтайық. Егер қайсыбір $u \le x$ үшін $k = v_p(u)$ болса, онда $p^k | u$ және $p^k \le u \le x$ болады. Демек $k \le \frac{\ln x}{\ln p}$. Олай болса $v_p(u) = k \le \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]$. Осы бағалаудан және $p^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]} \le p^{\frac{\ln x}{\ln p}} = x$ теңсіздігінен $\max\limits_{1\le u\le x} v_p(u) = \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]$ теңдігі шығады. Сондай-ақ $p > x$ болғанда келтірілген пайымдаулардан $v_p\big(K(x)\big) = 0$ болатыны шығады.

Лемма. Әрбір натурал n саны үшін

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots = \sum_{k\ge 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Ескерту. Қосынды шынында да ақырлы, өйткені $p^k > n$ болғанда, яғни $k > \frac{\ln n}{\ln p}$ шартында қосылғыштар нөлге тең.

Дәлелдеуі. 1, 2, ..., n сандарының ішінде p жай санына тек $p, 2p, \dots, mp$ ғана бөлінеді, мұнда m саны $mp \le n$ теңсіздігін қанағаттандыратын ең үлкен бүтін сан, яғни $m = \left[\frac{n}{p}\right]$. Сондықтан

$$v_p(n!) = v_p(p \cdot 2p \cdot \dots \cdot mp) = v_p(p^m \cdot m!) = m + v_p(m!).$$

Соңғы теңдік математикалық индукция тәсілінің көмегімен қажетті формуланы дәлелдеуге көмектеседі.

$n < p$ болғанда $v_p(n!) = m + v_p(m!)$ теңдігінің екі жағы бірдей нөлге тең. Енді $n \ge p$ ұйғарайық, сонда бұл теңдік n - нан кіші бүкіл натурал сан үшін дұрыс. Демек

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \sum_{l\ge 1}\left[\frac{m}{p^l}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \sum_{l\ge 1}\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p^l}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \sum_{l\ge 1}\left[\frac{n}{p^{l+1}}\right].$$

Мёбиус функциясы және айналдыру формуласы

Анықтама. Жай сандардың дәрежелерінде $\mu(p) = -1$, $\mu(p^k) = 0$, $k \ge 2$ теңдіктері арқылы анықталған $\mu(n)$ функциясын Мёбиустың мультипликативті функциясы деп атайды.

Мёбиус функциясын бүкіл натурал сандар жиынында келесі түрде анықтай түсейік:

1)$\mu(1) = 1$;

2)егер n саны жай санның квадратына бөлінетін болса, онда $\mu(n) = 0$;

3)егер барлық p_1, p_2, …, p_t жай сандары әртүрлі болса, онда $\mu(p_1\, p_2 \dots\, p_t) = (-1)^t$.

Мысалы, $\mu(5) = \mu(7) = -1$; $\mu(6) = \mu(10) = 1$; $\mu(8) = \mu(9) = 0$.

Анықтама бойынша $\mu(n)$ функциясы мультипликативті. Сондықтан мультипликативті функцияның қасиеті бойынша $\theta(n) = \frac{\mu(n)}{n^s}$ функциясы да мультипликативті болады. Әрі қарай $s > 1$ бекітілген нақты сан деп санайық. Сонда $f(n) = \prod_{p|n}\left(1 + \theta(p) + \theta(p^2) + \cdots + \theta\left(p^{\upsilon_p(n)}\right)\right)$ теңдігі $\theta(n) = \frac{\mu(n)}{n^s}$ функциясы үшін $\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^s} = \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ теңдігімен анықталады. Бұл теңдік кез келген натурал n және кез келген нақты s сандары үшін дұрыс.

Лемма. $\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases}1, & \text{егер } n = 1;\\ 0, & \text{егер } n > 1.\end{cases}$

Дәлелдеу. $n = 1$ жағдайында теңдік мультипликативті функцияның анықтамасынан шығады. Әрі қарай $n > 1$ дейік. $\mu(n)$ мультипликативті функция болғандықтан $f(n) = \prod_{p|n}\left(1 + \theta(p) + \theta(p^2) + \cdots + \theta\left(p^{\upsilon_p(n)}\right)\right)$ теңдігі және Мёбиус функциясының анықтамасы бойынша

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \prod_{p|n}\left(1 + \mu(p)\right) = 0.$$

Теорема (Мёбиустың айналдыру формуласы). $f(n)$ – натурал аргументті кез келген функция және $g(n) = \sum_{d|n}f(d)$ дейік. Сонда

$$f(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$$

теңдігі дұрыс.

Дәлелдеу. $n = 1$ болғанда $g(1) = f(1)$ және теңдік орындалады.

Әрі қарай $n \geq 2$ дейік. $g(n)$ функциясының анықтамасына сай

$$\sum_{d|n}\mu(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\mu(d)\sum\nolimits_{c|\frac{n}{d}} f(c) = \sum f(c)\sum_{d|\frac{n}{c}}\mu(d).$$

қосындысы ғана нөлден өзгеше. Соңғы жағдайда оның 1-ге тең екенін ескере отырып, теңдіктің дұрыстығына көз жеткіземіз.

Эйлер функциясы

$m \in N$ саны берілсін дейік. Сонда берілген m санынан артпайтын және m санымен өзара жай болатын натурал сандардың саны $\varphi(m)$ ***Эйлер функциясын*** анықтайды. Мысалы

$$\varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = \varphi(4) = 2,\ \varphi(24) = 8.$$

Басқаша айтқанда $M_d = \{x \in N \mid x \le n$ және $(x,n) = d\}$ жиыны берілсін дейік. Сонда бұл жиынның қуаты, яғни элементтерінің саны, Эйлер функциясымен анықталады және $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ тең.

Теорема. Эйлер функциясы мультипликативті болады.

Дәлелдеуі. $\text{ЕҮОБ}(m_1, m_2) = 1$ және $m = m_1 m_2$ дейік. Сонда R_m және $R_{m_1} \times R_{m_2}$ жиындарының арасындағы биективтік арақатынас (қалдықтар туралы қытай теоремасының дәлелдеуін қара) келесі қасиетке ие:

$$\text{ЕҮОБ}(r_1, m_1) = \text{ЕҮОБ}(r_2, m_2) = 1$$

теңдіктері орындалғанда және тек сонда ғана

$$\text{ЕҮОБ}(r, m) = 1.$$

Соңғы теңдік дербес жағдайда теореманың шартын тағайындайды, яғни

$$\varphi(m) = \varphi(m_1)\varphi(m_2).$$

Егер $p -$ жай , $\alpha -$ натурал болса, онда анықтама бойынша

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$$

болатынын анықтау оңай.

Егер m натурал саны өзінің канондық жіктелуі арқылы берілсе, онда Эйлер функциясының мәнін есептеу үшін келесі формуланы аламыз:

$$\varphi(m) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}\right) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \varphi(p_2^2) \cdot \dots \cdot \varphi\left(p_t^{\alpha_t}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) = m \prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Формуланы қорытып шығарарда Эйлер функциясының мультипликативті қасиеті пайдаланылды.

Ескерту. Көбейтіндіні ашып жазатын болсақ, онда біз комбинаторикадан белгілі қосу және шегеру ережелерінің көмегімен осы формуланы дәлелдеудің тағы бір тәсілін аламыз. Сонымен

$$\Pi_{i=1}^{t}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 1 - \sum_{1 \le i \le t} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i < j < t} \frac{1}{p_i p_j} - \cdots.$$

Есеп шығару үлгілері

1. $\varphi(4500) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4) = 12000.$

2. 89! Саны қанша нөлдермен аяқталады?

Шешуі. Нөлдердің саны 89! саны бөлінетін 16 санының дәрежелері арқылы анықталады, ал ол өз кезегінде 89! санының канондық жіктелуіндегі жай 5 санының дәрежесі бойынша анықталады. Демек 89! саны 20 нөлдермен аяқталады.

3. 2000-нан артпайтын және 300 санымен өзара жай болатын оң бүтін сандардың санын тап.

Шешуі. $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ болғандықтан 300 санымен өзара жай сан болатын сандар 2-ге, 3-ке және 5-ке бөлінбейді. 2000-нан артпайтын және 2-ге, 3-ке және 5-ке бөлінетін сандардың саны сәйкес $\left[\frac{2000}{2}\right]$, $\left[\frac{2000}{3}\right]$ және $\left[\frac{2000}{5}\right]$ тең. 6-ға, 10-ға және 15-ке бөлінетін сандар екі реттен, ал 30-ға бөлінетін сандар үш реттен есептелінеді. Демек ізделіп отырған сан

$$2000 - \left[\frac{2000}{2}\right] - \left[\frac{2000}{3}\right] - \left[\frac{2000}{5}\right] + \left[\frac{2000}{6}\right] + \left[\frac{2000}{10}\right] + \\ + \left[\frac{2000}{15}\right] - \left[\frac{2000}{30}\right] = 534.$$

4. Әртүрлі үш бөлгіші бар және осындай сандардың ішінде ең кішісі болатын натурал санның түрін тап.

Шешуі. Ізделіп отырған a санының канондық жіктелуін қарастырайық: $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$. Сонда оның бөлгіштерінің саны

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + +1) \dots (\alpha_t + 1).$$

Есептің шарты бойынша $\tau(a) = 3$. Демек қайсыбір $i = \{1, 2, \dots, t\}$ үшін $\alpha_i + 1 = 3$ және кез келген $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ үшін $\alpha_j + 1 = 1$. Сондықтан ізделіп отырған a саны $a = p_i^2$ түрінде анықталады. Оның бөлгіштері 1, p_i, p_i^2. Осы түрдегі сандардың ішінде ең кіші сан $2^2 = 4$.

5. Әртүрлі үш бөлгіші бар және бөлгіштерінің қосындысы 31-ге тең натурал сан тап.

Шешуі. Алдыңғы есепте әртүрлі үш бөлгіші бар санның түрі $a = p_i^2$ түрінде анықталатыны дәлелденген. Демек $x^2 + x + 1 = 31$ теңдеуінің түбірі болатын жай p санын табу керек. Мұндай сан 5 болады. Сонда ізделіп отырған сан $5^2 = 25$ болады.

6. $\varphi(n) = 864$ және $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ белгілі болсын. Натурал n санын тап.

Шешуі. 864 санының канондық жіктелуі: $864 = 2^5 \cdot 3^3$. Эйлер функциясын есептеу формуласын пайдаланып $2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta-1} \cdot 1 \cdot 2 = 2^5 \cdot 3^3$ теңдеуін құрайық. Бұдан $\alpha = 5$, $\beta = 4$. Демек ізделіп отырған сан

$$n = 2^5 \cdot 3^4 = 1632.$$

7. 11025 саны үшін Эйлер функциясының мәнін тап.

Шешуі. Егер $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ саны натурал сан болса, онда

$$\varphi(a) = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_t^{\alpha_t - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_t - 1).$$

Берілген санның канондық көрсетілімін табайық: $11025 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Сонда $\varphi(11025) = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 (3 - 1)(5 - 1)(7 - 1) = 5040$.

8. 450 санынан артпайтын және 450 санымен құрайтын ең үлкен ортақ бөлгіші 15 болатын натурал сандардың санын табайық.

Анықтама бойынша $\varphi(450/15) = \varphi(30) = 8$ болғандықтан ізделініп отырған натурал сандардың саны 8 тең.

9. $\upsilon(107; 3; 5; 7) = 50$ тең болатынын дәлелде.

Шынында да $\upsilon(107; 3; 5; 7) = [107] - \left[\frac{107}{3}\right] - \left[\frac{107}{5}\right] - \left[\frac{107}{7}\right] + \left[\frac{107}{3\cdot 7}\right] +$

$= \left[\frac{107}{5\cdot 7}\right] + \left[\frac{107}{3\cdot 5}\right] - \left[\frac{107}{3\cdot 5\cdot 7}\right] = 107 - 35 - 21 - 15 + 7 + 5 + 3 - 1 = 50$

Сонда $\pi(x) = \upsilon(x;\ p_1, p_2, \dots, +t - 1).$

10. $\zeta(1234) = 4$ теңдігінен $\zeta(n)$ функциясының анықтамасын еске түсір.

Жаттығулар

1. Кез келген $\theta(n)$ мультипликативті функциясы үшін $\sum_{d|n} \mu(d)\theta(d) = \prod_{p|n}\big(1 - \theta(p)\big), n > 1$ тепе - теңдігінің орындалатынын дәлелде.

2. $\sum_{d|n} \mu(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = 1, n \geq 1$ тепе-теңдігін дәлелде.

3. $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma_k\left(\frac{n}{d}\right) = n^k, n \geq 1$ тепе-теңдігін дәлелде.

4. $\sum_{d|n} \tau(d)\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sigma(n), n \geq 1$ тепе-теңдігін дәлелде.

5. $\sigma_2(n)$ функциясын n натурал санының барлық натурал бөлгіштерінің квадраттарының қосындысы түрінде анықтайық:

$$\sigma_2(n) = \sum_{d|n} d^2.$$

$\sigma_2\big(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}\big) = \frac{p_1^{2(\alpha_1+1)}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{2(\alpha_2+1)}-1}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_t^{2(\alpha_t+1)}-1}{p_t-1}$ формуласын дәлелде.

6. $\sigma_2(5)$, $\sigma_2(10)$ және $\sigma_2(20)$ мәндерін тап.

7. $\sigma_2(n)$ функциясының мультипликативті функция болатынын дәлелде.

8. $\tau\big(\sigma(12)\big)$-ны есепте.

9. $\sigma(x) = x + 3$ теңдеуін шеш.

10. а) $\tau(n) = 11;$ б) $\tau(n) = 22;$ в) $\tau(n) = 13;$ г) $\tau(n) = 39$ теңдіктерінен ең кіші натурал n санын тап.

11. $\tau(n) = 9$, ал $\sigma(n) = 91$ болатын барлық натурал n сандарын тап.

12. Егер $\tau(n^2) = 15$ болса, онда $\tau(n^3) = ?$

13. 3 - ке бөлінбейтін 240 санының бөлгіштерінің қосындысын тап.

14. а) $\tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(n) = [n/1] + [n/2] + \dots + [n/n];$

б) $\sigma(1) + +\sigma(2) + \dots + \sigma(n) = 1 \cdot [n/1] + 2[n/2] + \dots + n[n/n]$ теңдіктерін дәлелде.

15. $\varphi(12)$, $\varphi(63000)$ есепте.

16. $\varphi(x) = x/3$ теңдеуін шеш.

17. $\varphi(2x) = \varphi(3x)$ теңдеуін шеш.

18. $\varphi(m^2)$ немесе $\varphi^2(m)$ қайсысы үлкен?

19. 875 санынан артпайтын және 175 санымен өзара жай болатын натурал сандарды тап.

20. а) $\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)[n/k] = n(n+1)/2$;

б) $\sum_{d|n} \tau(d)\varphi(n/d) = \sigma(n)$;

в) $\sum_{k=1}^{n} [1/(n,k)] = \varphi(n)$;

г) $\sum_{k=1}^{n} (n,k) = \sum_{d|n} d\varphi(n/d)$

теңдіктерін дәлелде.

Сандық салыстырым

Бүкіл бүтін сандар жиыны ақырсыз. Ақырлы нысандармен жұмыс жасау әрине ыңғайлы. Сондықтан бүтін сандар жиынын қандай да бір ақырлы кластарға бөлу көптеген есептерді шығару үшін ұтымды болады. Мұндай бөлудің қарапайым түрі – бүтін сандарды жұп және тақ сандар класына бөлу.

Салыстыру және олардың қасиеттері

$m \geq 2$ – бүтін сан дейік.

Анықтама. Егер екі бүтін a және b сандарының айырымы m-ға бөлінсе, онда бұл сандар ***m модулі бойынша салыстырымды*** деп аталады.

m саны ***салыстыру модулі*** деп аталады.

Салыстыру қатынасы $a \equiv b(modm)$ таңбасымен белгіленеді және келесі қасиеттерге ие.

1) Кез келген a бүтін саны үшін $a \equiv a(modm)$;
2) Егер $a \equiv b(modm)$ болса, онда $b \equiv a(modm)$;
3) Егер $a \equiv b(modm)$ және $b \equiv c(modm)$ болса, онда $a \equiv c(modm)$.

Мысалы, 3-қасиет $a - c = (a - b) + (b - c)$ теңдігінен шығады, өйткені теңдіктің оң жақ бөлігіндегі екі қосылғыш та m-ға бөлінеді.

4) Егер $a \equiv b(modm)$, $c \equiv d(modm)$ болса, онда

$$a + c \equiv b + d(modm);$$
$$a - c \equiv b - d(modm);$$
$$ac \equiv bd(modm).$$

4-қасиеттен салыстырудың кез келген бөлігіне модульге еселі кез келген санды қосуға, салыстырудың екі жағын бірдей бүтін санға көбейтуге және бірдей натурал дәрежеге шығаруға болады.

Дербес жағдайда, егер $a \equiv b(modm)$ және $P(x)$ коэффициенттері бүтін кез келген көпмүшелік болса, онда $P(a) \equiv P(b)(modm)$.

5) Егер $ab \equiv ac(modm)$ және $(a,m) = 1$ болса, онда $b \equiv c(modm)$.

Шынында да шартқа сай $m|(ab - ac) = m|a(b - c)$ және $(a,m) = 1$, яғни a және m сандары өзара жай. Сондықтан $m|(b - c)$.

6) Салыстырудың екі жағын және модулін нөлден өзгеше кез келген санға көбейтуге болады, яғни a ≡ b(modm) салыстыруынан ad ≡ bd(modmd) шығады. Мұнда d ≠ 0.

7) Салыстырудың екі жағын және модулін олардың ортақ көбейткішіне бөлуге болады, яғни $d \neq 0$ болғанда $ad \equiv bd(modmd)$ салыстыруынан $a \equiv b(modm)$ шығады.

8) Егер a ≡ b(modm) болса, онда $(a,m) = (b,m)$.

9) Егер a ≡ b(modm) және $d|m$, онда a ≡ b(modd).

10) Егер $a \equiv b$ салыстыруы бірнеше модульдер бойынша орындалатын болса, онда бұл салыстыру осы модульдердің ең кіші ортақ еселігі бойынша да орындалады.

Теорема. a ≡ b(modm) салыстыруы келесі шарттардың кез-келгеніне пара - пар:

1) a және b сандары m - ға бөлінгенде бірдей қалдықтар береді;

2) a саны $a = b + mt$ түрінде көрсетіледі, мұнда $t \in \mathbb{Z}$.

Дәлелдеу. a және b сандарын m - ға қалдықпен бөлейік: $a = mq_1 + r_1$, $b = mq_2 + r_2$, $0 \leq r_i < m$. Сонда a ≡ b(modm) салыстыруы $r_1 - r_2$ айырымының m - ға бөлінгіштігіне пара - пар. r_i қалдықтарына қойылған шектеуліктер бойынша бұл бөлінгіштік олардың беттесуін білдіреді.

Екінші шарттан $m|(a - b)$ шығады.

Бір анықтамасынан алуға болады.

$\mathbb{Z}$ жиынында "m модулі бойынша салыстырымды болу" эквиваленттік қатынас болады, яғни рефлексивті, симметриялы және транзитивті шарттарды қанағаттандырады.

11) Егер a ≡ b(modm_1) және $a \equiv b(modm_2)$ болса, онда a ≡ b(modm), мұнда $m = \text{ЕКОЕ}(m_1, m_2)$

12) Егер a ≡ b(modm) болса, онда $\text{ЕҮОБ}(a,m) = \text{ЕҮОБ}(b,m)$.

m модулі бойынша қалындылар сақинасы

Жоғарыда айтылғандай "m модулі бойынша салыстырымды болу" қатынасы бүтін сандар жиынында эквиваленттік қатынасты көрсетеді. Олай болса $\mathbb{Z}$ бүтін сандар сақинасында (m) идеал болады.

Демек бүтін сандар жиыны (m) идеалы немесе басқаша айтқандай m модулі бойынша эквивалентті кластарға бөлінеді. Мұндай кластарды математикада m модулі бойынша алынатын ***қалындылар*** деп атау қалыптасқан. $(a-b) \in (m)$, яғни $(a-b) \vdots m$ болғанда және тек сонда ғана a және b бүтін сандары m модулі бойынша тек бір қалындылар класына тиісті болады.

Сонымен m модулі бойынша бір және тек сол бір қалындылар класына тиісті бүкіл сандар ғана $m-$ ға бөлінгенде бірдей қалдықтар береді. Сондықтан қалындылар класын осы қалдықтардың көмегімен белгілеуге болады.

Анықтама. Өкілі $a \in \mathbb{Z}$ бүтін саны болатын $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a(modm)\}$ жиынын m модулі бойынша алынатын қалындылар класы деп атайды.

Белгілеуі: $[a]_m$ немесе жай $[a]$ түрінде. m - ға бөлінгенде 0, 1, 2, ..., $m-1$ қалдықтарының бірі алынады, онда бұларға сәйкес табылатын қалындылар класы $[0]_m$, $[1]_m$, ..., $[m-1]_m$ арқылы белгіленеді. $[0]_m$ қалындылар класы m-ға еселі сандардан тұрады, $[1]_m$ қалындылар класы m - ға бөлінгенде қалдығы 1 болатын сандардан тұрады және т.с.с.

Ескерту. $[a]_1 = [a]_2$ қалындылар класының теңдігі олардың өкіл сандарының салыстырымдығын білдіреді, яғни $a_1 \equiv a_2(modm)$. Егер a санының m модуліне бөлінгендегі қалдығы r болса, онда $[a] = [r]$.

m модулі бойынша анықталатын қалындылар кластарының жиынын $\mathbb{Z}_m$ арқылы белгілейік. Оны m модулі бойынша анықталатын қалындылар сақинасы деп атайды және кейде оны $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z} / (m)$ арқылы да белгілейді.

Мысал. $m = 2$ делік. Бүтін сандарды екіге бөлгенде біз тек әртүрлі екі қалдық аламыз: 0 және 1. Демек бүтін сандар жиыны екі қалындылар класына бөлінеді: $[0]_2$ және $[1]_2$. $[0]_2$ класының құрамы бүкіл жұп сандардан, ал $[1]_2$ класының құрамы бүкіл тақ сандардан тұрады.

$\mathbb{Z}_m$ сақинасында $[0]_m$ қалындылар класы нөлдің ролін атқарады: кез келген $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ үшін $[a]_m + [0]_m = [a]_m$. Кез келген $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ үшін $[a]_m \cdot [1]_m = [a]_m$, демек $[1]_m$ қалындылар класы $\mathbb{Z}_m$ сақинасында бірдің рөлін атқарады.

Келтірілген қалындылар жүйесі. m модулі бойынша анықталатын бір және тек сол бір қалындылар класының сандарының сол m модулімен құрайтын ең үлкен ортақ бөлгіштері бірдей болады. Басқаша айтқанда, егер $a \equiv b(modm)$ болса, онда $(a, m) = (b, m)$.

Дәлелдеуі. $a \equiv b(modm)$ дейік. Сонда $a = b + mt$, мұнда $t \in \mathbb{Z}$. Бұл теңдіктен $(a, m) = (b, m)$ теңдігі шығады. Теорема дәлелденді.

Анықтама. Егер ЕҮОБ$([a]_m, m) = ([a]_m, m) = 1$ болса, онда $[a]_m$ және m өзара жай.

Мысал. $m = 6$ делік. $[2]_6$ қалындылар класы $\{\dots, -10, -4, 2, 8, \dots\}$ сандарынан тұрады және $([2]_6, 6) = 2$. Ал $([2]_5, 6) = 1$. Демек $[2]_5$ қалындылар класы 6 модулімен өзара жай.

m модулімен өзара жай әрбір қалындылар класынан бір саннан таңдап алайық. Сонда толық қалындылар жүйесінен оның қайсыбір бөлігін құрайтын қалындылар класы алынады. Оны m модулі бойынша анықталатын келтірілген қалындылар жүйесі деп атайды.

Қалындылар кластарының қасиеттері

1.$[a]_m = \{a + nt \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

2.$[a]_m = [b]_m$ болғанда және тек сонда ғана $a \equiv b(mod m)$.

3.m модулі бойынша анықталған қалындылар кластарының саны m-ға тең.

4.Егер $x \in [a]_m$ болса, онда $\forall x \in [a]_m$ үшін $(x, m) = (a, m)$.

5.m модулі бойынша анықталатын және сол m модулімен өзара жай қалындылар кластарының саны $\varphi(m)$ тең, мұнда $\varphi(m) -$ Эйлер функциясы.

6.m модулі бойынша анықталатын және нөлдің бөлгіштері болатын қалындылар кластарының саны $m - \varphi(m) - 1$ тең.

7.m модулі бойынша анықталатын бір $[a]_m$ қалындылар класы $km, k \in \mathbb{N}$ модулі бойынша k қалындылар кластарына бөлінеді:

$$[a]_{kn},\ [a + n]_{kn},\ [a + 2n]_{kn},\ \dots,\ [a + (k - 1)n]_{kn}.$$

Толық және келтірілген қалындылар жүйелерінің қасиеттері

1) $|\text{ТҚЖ}_m| = m$;

2) $|\text{КҚЖ}_m| = \varphi(m)$, мұнда $\varphi(m) -$ Эйлер функциясы; $a, m \geq 2 -$ бүтін өзара жай сандар дейік. Сонда:

3) егер x саны m модулі бойынша анықталған ТҚЖ арқылы өтетін болса, $ax + b$ саны да m модулі бойынша анықталған ТҚЖ арқылы өтеді, мұнда $b -$ кез келген сан;

4) егер x саны m модулі бойынша анықталған КҚЖ арқылы өтсе, онда ax саны да осы модуль бойынша анықталған КҚЖ арқылы өтеді.

Вильсон теоремасы. Кез келген p жай саны үшін $(p - 1)! + 1 \equiv 0$ салыстыруы орындалады.

Эйлер теоремасы. m модулімен өзара жай әрбір бүтін a саны үшін $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod m)$ салыстыруы орындалады.

Ферманың кіші теоремасы. Егер a бүтін саны p жай санына бөлінбесе, онда $a^{p-1} \equiv 1(mod m)$ салыстыруы орындалады.

Есептерді шығару үлгілері

1.27^{41} санын 8-ге бөлгендегі қалдықты тап.

Шешуі. $27^1 \equiv 3(mod 8)$. Әрі қарай салыстыру қасиеттерін пайдаланамыз $27^2 \equiv 9(mod 8)$, $27^{40} \equiv 1(mod 8) \equiv 1(mod 8)$.

Бірінші және соңғы салыстыруларды көбейтіп, $27^{41} \equiv 3(mod 8)$ салыстыруын аламыз. Бұл ізделініп отырған қалдықтың 3-ке тең екенін білдіреді.

2.$5 \cdot 42^{17} + 14$ санын 11-ге бөлгендегі қалдықты тап.

Шешуі. $\text{ЕҮОБ}(42,11) = (42,11) = 1$ болғандықтан Ферманың кіші теоремасынан $42^{10} \equiv 1(mod 11)$ салыстыруы шығады. Қажетті нәтижені алу үшін 42^7 саны қай санмен салыстырымды екенін анықтайық. Алдыңғы есептегі пайымдауларды қайталай отырып, келесі салыстыруларды аламыз: $42^1 \equiv -2(mod 11)$, $42^2 \equiv 4(mod 11)$, $42^4 \equiv 5(mod 11)$, $42^6 \equiv -2(mod 11)$, $42^7 \equiv 4(mod 11)$. Соңғы салыстыруды $42^{10} \equiv 1(mod 11)$ салыстыруымен мүшелеп көбейтіп, $42^{17} \equiv 4(mod 11)$ салыстыруын аламыз. Бұдан $5 \cdot 42^{17} \equiv\equiv -2(mod 11)$, $5 \cdot 42^{17} + 14 \equiv 12(mod 11) = 1(mod 11)$. Сонда ізделініп отырған қалдық 1-ге тең.

3.101 модулі бойынша 23 санымен салыстырымды ең кіші төрт таңбалы натурал санды тап.

Шешуі. Есеп $1000 + t \equiv 23(mod 11)$ салыстыруы орындалатындай ең кіші теріс емес t бүтін санын табуға келтіріледі. Бұл жағдайда $t \equiv 23 - -1000 \equiv 23 + 10 \equiv 33(mod 11)$, яғни $t = 33$. Сонымен ізделініп отырған санымыз 1033 тең.

4.Кез келген теріс емес n бүтін саны үшін $9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv$

$\equiv 0(mod 73)$ салыстыруын дәлелде.

Шешуі. $9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv 9 \cdot 81^n + 64 \cdot 8^n \equiv 9 \cdot 8^n - 9 \cdot 8^n \equiv 0(mod 73)$ болатынын көру қиындық туғызбайды.

5.2^{1037} санын 19-ға бөлгендегі қалдықты тап.

Шешуі. 2^{1037} санын 19-ға бөлгендегі қалдықты табу үшін Эйлер теоремасын пайдаланамыз. $\text{ЕҮОБ}(2,19) = 1$ болғандықтан келесі салыстырулар орын алады: $2^{\varphi(19)} \equiv 1(mod 19)$, $2^{18} \equiv 1(mod 19)$.

$1037 \equiv 11(mod 18)$, онда $1037 = 18 \cdot k + 11$, мұнда $k \in \mathbb{Z}$.

Сонда $2^{1037} \equiv 2^{18 \cdot k + 11}(mod 19) \equiv 2^{18k} \cdot 2^{11}(mod 19) \equiv$

$\equiv (2^{18})k \cdot 2^{11}(mod 19) \equiv 1^k \cdot 2^{11}(mod 19)$.

Демек қалдық 15-ке тең.

Жаттығулар

1.Егер $(a,7)=1$ болса, онда $7|a^{12}-1$.

2.Егер $(a,65)=(b,65)=1$ болса, онда $65|a^{12}-b^{12}$.

3.p жай сан делік. $(a+b)^p \equiv a^p+b^p(modp)$ салыстыруын дәлелде.

4.Егер $\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0(mod30)$ болса, онда $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 \equiv 0(mod30)$ болатынын дәлеледе.

5.Егер $(a,m)=1$ және $\alpha_1 \equiv \alpha_2 mod\big(\varphi(m)\big)$ болса, онда $a^{\alpha_1} \equiv$ $\equiv a^{\alpha_2}(modm)$ болатынын дәлелде.

6. a санын 17-ге бөлгендегі қалдықты тап, мұнда $a=1-4\cdot 121^2+$ $+121^4-4\cdot 121^6+121^8-4\cdot 121^{10}+121^{12}-4\cdot 121^{14}$.

7.Кез келген n натурал саны үшін $2^{4n+1}+2^{4n}-3^{n+1} \equiv 0(mod13)$ салыстыруын дәлелде.

8.Кез келген n натурал саны үшін $3^{3n+2}+2^{n+4} \equiv 0(mod25)$ салыстыруын дәлелде.

9.109 модулі бойынша 60 санымен салыстырымды ең кіші бес таңбалы натурал санды тап.

10. 180 модулі бойынша 14 санымен салыстырымды ең үлкен төрт таңбалы натурал санды тап.

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966.
2. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981.
3. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. – М.: Наука, 1977.
4. *Серр Ж.-П.* Курс арифметики. – М.: Наука, 1965.
5. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.
6. *Боревич З. И.* Теория чисел. – М.: Наука, 1977.
7. *Кудреватов Г. А.* Сборник задач по теории чисел. – М.: Просвещение, 1970.
8. *Александров В. А.*, *Горшенин С. М.* Задачник – практикум по теории чисел. – М.: Просвещение, 1972.
9. *Галочкин А. И.*, *Нестеренко Ю. В.*, *Шидловский А. Б.* Введение в теорию чисел. – М.: Издательство МГУ, 1995.
10. *Сизый С. В.* Лекции по теории чисел. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
11. *Нұрымбетов Ә. Ү.* Алгебра және сандар теориясы: Оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2009. – 158.
12. *Рахметжанов С.* Алгебра және сандар теориясы. Есептік практикум.– Семей.: 2009.
13. *Оразбаев Б. М.* Сандар теориясы. – Алматы.: Мектеп, 1970.

МАЗМҰНЫ

	Алғы сөз	3
1.	Жиындар теориясы. Математикалық логиканың бастапқы ұғымдары	4
	Жиындарға қолданылатын амалдардың негізгі қасиеттері	7
	Жиындардың декарттық көбейтіндісі. Сәйкестік	10
	Жаттығулар	14
	Комбинаторикаға кіріспе. Ақырлы жиындар. Дирихле принципі	15
	Терулер. Орналастырулар және алмастырулар	17
	Жаттығулар	20
	Негізгі парапарлықтар (логика заңдары)	24
	Предикаттар қисабынан шығатын кейбір формулалар	24
	Жаттығу	24
2.	Комплекс сандар	25
	Комплекс санның алгебралық формасы және геометриялық кескіні. Комплекс сандар алгебрасы	25
	Комплекс санның тригонометриялық формасы. Аргумент және аргументтің бас мәні	34
	Комплекс санның көрсеткіштік формада жазылуы	36
	Комплекс саннан түбір табу	38
	Комплекс санның матрицалық формада жазылуы	41
	Жазықтықтағы аналитикалық геометрия есептерін комплекс сандар көмегімен шығару	43
	Стереографикалық проекция	48
	Сфералық метрика	50
	Жаттығулар	51
	Комплекс сандар тізбегі және қатары	52
	Мүшелері комплекс сандар болатын сандық қатарлар	56
	Ақырлы түрдегі Даламбер белгісі	58
	Шектік түрдегі Даламбер белгісі	58
	Ақырлы түрдегі Кошидің радикалдық белгісі	58
	Шектік түрдегі Кошидің радикалдық белгісі	59
	Жаттығулар	60

3.	Негізгі алгебралық құрылымдар.....	61
	Алгебралық амалдар және олардың қасиеттері.....	61
	Негізгі матрицалық топтар.....	70
	Жаттығулар.....	74
4.	Көпмүшеліктер.....	76
	Көпмүшелік ұғымы.....	76
	Қалдықпен бөлу.....	80
	Көпмүшеліктердің бөлгіштері. Евклид алгоритмі.....	82
	Сызықтық теңдеу. Шешімділік критерийі.....	84
	Өзара жай көпмүшеліктер.....	85
	$f \cdot u + g \cdot v = 1$ теңдеуінің жалпы шешімі.....	86
	Көпмүшеліктердің мәні және түбірлері.....	87
	Лагранждың интерполяциялық формуласы.....	90
	Көпмүшеліктің түбірлері.....	92
	Көпмүшеліктердің түбірлеріне қатысты кейбір тұжырымдар.....	95
	Жаттығулар.....	99
5.	Сандар теориясы.....	102
	Сандардың бөлінгіштігі.....	102
	Өзара жай сандар. Ең кіші ортақ еселік. Қалдық туралы қытай теоремасы.....	107
	Құрама және жай сандар.....	110
	Арифметиканың негізгі теоремасы және оның салдары.	112
	Жаттығулар.....	117
	Мультипликативті функциялар және олардың қасиеттері.....	119
	$[\boldsymbol{x}]$ және $\{\boldsymbol{x}\}$ функциялары.....	121
	$[\boldsymbol{x}]$ және $\{\boldsymbol{x}\}$ функцияларының қасиеттері.....	121
	$\upsilon_p(m)$ функциясының қасиеттері.....	123
	Мёбиус функциясы және айналдыру формуласы.....	124
	Эйлер функциясы.....	125
	Есеп шығару үлгілері.....	126
	Жаттығулар.....	128
	Сандық салыстырым.....	129
	Салыстыру және олардың қасиеттері.....	129
	$\boldsymbol{m}$ модулі бойынша қалындылар сақинасы.....	130
	Қалындылар кластарының қасиеттері.....	132

Толық және келтірілген қалындылар жүйелерінің қасиеттері..... 132
Жаттығулар..... 134
Библиографиялық тізім..... 135

Оқулық басылым

Бимұрат Жұмабекұлы Сағындықов

АЛГЕБРА

Оқу құралы

ОБО РБ бастығы *З. А. Ғұбайдулина*
Редакторы *Т. С. Жақсыбаева*
Компьютерде беттеген *А. А. Кадирсизова*

Басуға қол қойылды 18. 04. 2016 ж.
Таралымы 300 дана. Пішімі 60х84х 1/16. № 1 баспаханалық қағаз.
Е.-б.т. 8,7 Ш.б.т. 8,1. Тапсырыс № 701. Бағасы келісімді.

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу
университеті басылымы
Оқу-баспа орталығы,
Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-228-943-5