

А.Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ

**НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СВАИ
В СУХИХ ГРУНТАХ**

Алматы 2014

УДК 531
ББК 22.251
N98

Тюреходжаев А.Н. Несущая способность свай в сухих грунтах. – Алматы: Издательство «ЭВЕРО», – _____ страниц, _____ рисунков, библиографии из _____ наименований.

ISBN 978-601-228-675-5

В монографии изложены задачи построения несущей способности свай в сухих грунтах в квазистатической и динамической постановках. На практике широко распространено использование динамического метода определения несущей способности свайных фундаментов для различного рода грунтов.

Хронологически раньше появилась формулы несущей способности свай с так называемым вязким сопротивлением, для которого несущая способность свайных фундаментов определяется относительно просто. Значительно сложнее построения решения задачи для грунтов с сухим трением, то-есть, для грунтов с нелинейным механизмом диссипации энергии. Впервые с такого рода задачами встретился основоположник русской школы механики грунтов Н.М. Герсеванов.

В монографии формулы несущей способности, когда диссипация энергии связана с сухим трением, получена для однослойного и многослойного грунта при полностью и частичной забитой свае.

Рекомендовано к печати Ученым советом Казахского национального технического университета имени К.И.Сатпаева.

Рецензенты:

Рысбайұлы Б. – доктор физико-математических наук, профессор

Дюсембаев И.Н. – доктор технических наук, профессор

ISBN 978-601-228-675-5

© Тюреходжаев А.Н., 2014
© Эверо, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
РАЗДЕЛ I.....	20
ГЛАВА I. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВАИ	21
1. Постановка задачи и основные уравнения.....	21
2. Статическое нагружение сваи.....	29
3. Разгрузка сваи	35
4. Повторное нагружение и упругий гистерезис сваи.....	36
5. Несущая способность сваи при постоянном боковом давлении	42
6. Извлечение сваи	45
7. Об определении параметров грунта	49
ГЛАВА II. КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ И ПОГРУЖЕНИЯ СВАИ.....	50
1. Постановка задач	50
2. Закон погружения свай при квазистатической постановке	52
3. Несущая способность сваи.....	68
РАЗДЕЛ II. ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ СВАИ.....	71
ГЛАВА III. ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ СВАИ ПО ОТКАЗУ (СВАЯ, ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННАЯ В ГРУНТ).....	72
1. Условия удара по упругой свае. Постановка задачи и основные уравнения.....	73

2. Сопротивление упругой сваи при наличии одного лобового сопротивления.....	80
3. Сопротивление упругой сваи при наличии одного бокового давления.....	91
4. Несущая способность упругой сваи при наличии бокового и лобового сопротивлений	103
5. Выдергивание сваи, полностью заглубленной в грунт	118
ГЛАВА IV. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВАИ.....	
1. Определение несущей способности сваи по отказу с учетом влияния свободного участка	123
2. Определение несущей способности сваи по отказу при произвольном законе распределения касательных напряжений ...	147
3. Несущая способность сваи, забитой в многослойный грунт	153
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	177
Литература.....	179

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое исследование несущей способности и деформативности свай, назначение которой состоит в передаче нагрузки от сооружения грунту в общем случае боковой поверхностью и нижним концом представляет актуальную проблему для расчета свайных оснований, являющихся наиболее распространенными конструкциями в различного рода сооружениях, в частности, эстакадах, ведущих к месторождению нефти.

Ставится вопрос о более широком внедрении свайных оснований в промышленное, сельскохозяйственное, гражданское и военное строительство. Это объясняется многими общеизвестными преимуществами свайных оснований перед другими: дешевизной, значительно меньшим объемом работ, возможностью возведения их в различных грунтовых условиях, широкого развития фронта работ, быстротой устройств, гибкостью, что исключительно важно для сейсмических районов и т. д.

Несущая способность и деформативность свай связаны, прежде всего, со свойствами грунта. Свойства грунта существенно меняются с погружением в него свай. Известный в практике факт, что упругие осадки свай ограничены малыми пределами, говорит о том, что упругие деформации системы «свая-грунт» такие же как и вообще деформации твердых тел. Из этого факта проф. Н.М. Герсегонов заключил, что уплотнение грунта, происходящее в период неупругих осадок свай есть процесс постепенного

превращения из землистого состояния в состояние, близкое к твердому телу. Таким образом, пока система «свая-грунт» работает в упругих пределах на увеличение давления, производимого на верхнее сечение сваи, реагируют исключительно уплотненные части грунта. Следовательно, для того, чтобы осадки сооружений не превышали деформации того порядка малости, как и деформации твердых тел, к которым относятся и сооружения, необходимо, чтобы допускаемая на каждую сваю нагрузка не превосходила предела упругих осадок свай.

В последнее время появились весьма дорогие типы свай, что связано как с материалом так и длиной свай, применение которых выгодно, но может быть оправдано лишь при полном использовании их подъемной силы. Обстоятельство это опять-таки требует, возможно, полного определения несущей способности свай.

Таким образом, проблема определения несущей способности фундаментных свай и совокупность явлений в окружающем сваю грунте и самой свае, принадлежит к тем задачам механики грунтов и строительства фундаментов, которое представляет актуальную тему теоретических и экспериментальных исследований.

Наиболее надежным способом определения сопротивления свай считается испытание ее пробной статической нагрузкой [25-35], [28-40]. Такой способ практикуется при устройстве крупнейших и дорогостоящих сооружений и может быть использован лишь для одной или нескольких свай. Однако этот способ сложен для осуществления и дорог по стоимости. К тому

же определив с помощью пробной нагрузки несущую способность одиночной свай, трудно еще судить о работе всего свайного основания.

Метод пенерации (зондирования) привлекает исследователей, [41-43], значительно меньшими затратами сил и средств, однако, по эффективности результатов, безусловно, уступает, натурным испытаниям.

Наиболее распространен способ определения сопротивления сваи по их отказам контрольным ударам [3, 4; 14-24]. Он имеет большое значение для расчета свайных оснований, так как этот способ определения свай, являясь одновременно и способом производства работ по устройству свайного основания, дает возможность применения этого способа ко всем сваям, забитым в основание, что имеет существенное значение, так как грунт под всей площадью основания редко имеет одинаковую сопротивляемость, особенно в гидротехнических сооружениях, где строение грунта бывает очень сложным. При рассмотрении забивки свай получается полная картина сопротивляемости по всей площади основания. Это дает возможность своевременно принять меры с одной стороны к усилению основания в тех частях, где при забивке свай грунт оказался слабее предполагаемой нормы. А с другой – к облегчению основания, где грунт оказался сильнее предполагаемой нормы.

Достоинство этого метода заключается также в том, что он является одновременно и способом производства работ по

устройству свайных оснований, не требует дополнительного времени и особых затрат для осуществления.

Метод определения сопротивления свай по отказу исключительно важен при производстве работ в условиях военного времени, когда никакие испытания статической нагрузкой невозможны по условиям военной обстановки и срочности выполнения работ.

Однако формулы для определения несущей способности свай по отказу, будучи построены в основном на общих энергетических соображениях страдают качественными недостатками. Как пример можно отметить, что почти все они дают бесконечно большое значение сопротивления свай при нулевом отказе. На основании этих формул нельзя разработать основные явления, сопровождающие забивку или контрольные удары по определению сопротивления свай.

Когда свая погружена, непосредственно окружающий ее грунт отличен от нетронутого и взаимодействие боковой поверхностью сваи с грунтом может осуществляться двояко. Если имеет место прилипание частиц грунта на боковую поверхность сваи и образование грунтовой оболочки на ней, то при осадке сваи имеет место срез по грунту. В том случае, когда нет прилипания частиц, имеет место скольжение свай по грунту.

Грунтовая оболочка сваи имеет малую толщину. Обстоятельство это является косвенным доказательством того, что, хотя при погружении сваи происходит уплотнение грунта, однако резкое его уплотнение происходит в непосредственной близости от

боковой поверхности, а далее следует резкое стремление плотности к обычному его значению.

Если производить плановое нагружение ранее забитой сваи, то выявляется следующая картина. С ростом нагрузки начнет увеличиваться осадка сваи, но закон осадки (система координат: нагрузка – осадка) до определенного значения нагрузки будет иметь вид очень пологой, близкой к прямой, кривой, примыкающей к оси нагрузки. Далее с увеличением нагрузки закон осадки меняется – наблюдается сравнительно значительный рост осадки, и, наконец, третий этап, когда свая садится без заметного приращения нагрузки.

Указанная картина объясняется следующим образом. На первом этапе нагружения имеет место упругая деформация сваи и грунта. Деформации на этом этапе малы. Во втором этапе нагружения наряду с упругими деформациями грунта и сваи имеет место неупругая деформация грунта. Однако, возрастание сопротивления сваи по мере ее осадки не беспредельно, но и по достижению некоторого критического значения нагрузки свая «проваливается». Это означает, что свая, забитая на данную глубину исчерпала свою несущую способность – грунт не держит и свая получает недопустимые перемещения. Если сваю забить на глубину большую, чем прежде, то вновь построенная диаграмма осадки покажет, что возросли участки и упругой и неупругой осадок и, естественно, значение критической нагрузки будет также другое. Такое изменение характеристик грунта сопровождается как

сжатием грунта в области, прилегающей к боковой поверхности свай, так и некоторым выжиманием его из-под лобового конца.

В свайной литературе, в частности, в известной работе Н.М. Герсегонова «Определение сопротивления свай» (Собрание сочинений, том I. М., 1948) конец первого этапа называют пределом упругости осадки свай, а конец второго этапа называют временным сопротивлением свай.

При определении сопротивлений свай встает вопрос, что же взять за величину несущей способности свай, то ли предел упругости осадки, то ли временное сопротивление свай? Очевидно, на вопрос будет дан ответ, если уметь четко определить предел упругости осадки свай. Именно это сопротивление следует искать, если желательно добиться статичности возводимых на свайных основаниях сооружений. Однако, как будет показано в настоящей работе, вовсе необязательно будь то при статическом нагружении или при контрольных ударах точно угадывать предел упругости; так в способе определения сопротивления свай по отказу, оказывается, достаточно знание времени остановки и величины отказа свай.

Описанный выше процесс осадки соответствует основной схеме осадки свайных фундаментов. Сравнение этой схемы осадки с кривыми, полученными в данной работе, говорят о хорошем качественном соответствии.

При исследовании круга задач, связанных с определением сопротивления свай, выступает ряд других проблем. Назовем основные из них.

При забивке свай в зависимости от рода грунтов имеет место в соответствующей степени их растрескивание, которые, однако, с течением времени восстановив сваи прочностные качества, успокаиваются.

В некоторых грунтах, в частности, в глинистых имеет место осадка свай со временем и т. п.

Эти проблемы в данной работе не рассматриваются, они могут служить самостоятельными темами теоретических исследований.

Вопросу определения несущей способности свай уделялось большое внимание на международных конгрессах по механике грунтов и фундаментостроению в Цюрихе (1952 г.), в Лондоне (1957 г.), в Париже (1961 г.), в Канаде (1965 г.) и других.

В целом исследованию в области определения несущей способности свай посвящена большая литература. Существенный вклад представляет выше цитированная работа члена-корреспондента АН СССР Н.Н. Герсеванова. Полученная в этой работе свайная формула широко применяется в Советском Союзе. Основной смысл ее заключается в следующем.

Работа падающего молота приравнивается сумме трех работ: работе на осадку свай как жесткого целого, работе упругих деформаций грунта и свай, работе на неупругие деформации самой свай.

Работа на осадку свай как жесткого целого записывается как произведение сопротивления свай, что, вообще говоря, и разыскивается, на величину ее осадки. Такой записью как раз объясняется то обстоятельство, что сопротивление свай стремится

к бесконечности при стремлении к нулю осадки, так как при выписывании в явном виде выражения для сопротивления вся правая часть равенства делится на осадку.

Работы на упругие деформации грунта и сваи и неупругие деформации сваи определяются через неизвестные поначалу коэффициенты, означающие соответствующие доли от полной работы - работы падающего молота. В конечном счете, дело сводится к установлению значения некоторых параметров связанных со свайей.

Почти в каждой стране имеется своя формула для расчета свай. В России обязательной считается формула Н.М.Герсеванова. В Англии - формула Хиллея, рекомендованная Лондонским институтом инженеров-строителей и считающаяся лучшей в той стране. Она имеет некоторое применение в США и в странах Западной Европы. В Канаде функционирует Канадская свайная формула, в странах Западной Европы - формулы Вольтмана, Вейсбаха, Ранкина, Редтенбахера и др., в США - формулы Велинктона, Челлиса, "Бюро строительства гаваней и доков", Рабе, "Единого устава строительства Тихоокеанского побережья".

Такое многообразие формул - а упомянута здесь только часть их - говорит о том, что нет полной уверенности в существующих формулах и что процесс исследования вопроса несущей способности сваи далеко не завершен. Осторожность и интерес к рассматриваемому вопросу станет тем более понятней, если иметь в виду, что стоимость свайного основания уменьшается во столько же раз во сколько раз уменьшается коэффициент запаса по

отношению к несущей способности сваи или количество потребных свай.

Упомянутые выше формулы носят весьма приближенный и полуэмпирический характер. Они основываются обычно или на рассмотрении свободного соударения тел, или на допущении, что сопротивление целиком приложено к нижнему концу сваи, или на предположении, что свая является абсолютно жестким телом. Они представляют частный случай энергетической формулы Н.М. Герсегова [4]. Все эти формулы, включая последнюю содержат эмпирические коэффициенты.

Таким образом, расчет фундаментов на сваях остается до сих пор мало разработанным теоретически.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию несущей способности и деформативности, а также забивке и выдергиванию свай.

Свая в работе моделируется упругим стержнем, и исследование проводится в динамической постановке на основе волновой теории. Ряд задач рассматривается в статической и квазистатической постановках.

Привлечение волновой теории дает возможность более детально рассмотреть процесс осадки и выдергивания сваи, а также определить напряженное и деформированное состояния сваи и время.

Существует огромная литература, посвященная экспериментальному определению сопротивления сваи. Однако, теории посвящено сравнительно мало работ [3,4; 14-25; 30].

Отметим, что попытки рассмотрения задачи о несущей способности и деформативности свай на основе волновой теории предпринимались и раньше. Из немногочисленных работ такого направления выделим основополагающее исследование проф. Н.М. Герсегонова "Теория продольного удара с применением к определению сопротивления свай" (Собр. соч. т. I. М., 1948), где фактически даны постановки рассматриваемых в данной работе задач о сваях. К сожалению, допущенный досадный просчет не дал ему возможности получить адекватные результаты.

В разделе II используются и развиваются идеи Н.М. Герсегонова о применении теории продольного удара к определению сопротивления свай.

Монография состоит из двух разделов. В разделе I, содержащем две главы и составляющем примерно 1/3 часть работы, исследуются статические и квазистатические задачи погружения и несущей способности свай. При этом получены закон погружения и выражения для несущей способности, а также зависимость смещений и напряжений для произвольного сечения от усилий, прикладываемых на верхнем конце свай, характеристик грунта, площади поперечного сечения, длины, периметра и материала свай.

В главе I в статической постановке рассмотрена следующая задача.

К свободному концу свай, погруженной на данную глубину приложена статически возрастающая нагрузка, а на боковую

поверхность её действует давление грунта, изменяющееся линейно с глубиной.

Предельное лобовое сопротивление грунта, при котором начинает садиться нижний конец сваи принимается линейно зависящим от глубины погружения.

Предполагается, что боковая поверхность сваи взаимодействует с грунтом по закону сухого трения Кулона. В случае, когда грунт прилипает к поверхности сваи, осуществляется срез по грунту, вдоль которого имеет место условие предельного равновесия Кулона.

В §1 главы I дается постановка задачи, и вводятся безразмерные величины.

В §2 исследуются три этапа погружения сваи: первый этап, когда деформация охватывает только часть длины сваи; второй этап, когда деформируется вся свая и действует лобовое сопротивление, не достигающее предельного значения и третий этап, когда лобовое сопротивление исчерпано, и свая начинает погружаться.

Здесь получены формула для несущей способности сваи, выражения для напряжения, смещения, зоны деформации и закон погружения сваи.

В §3 исследуется разгрузка, когда сечения сваи, начиная с верхнего, перемещаются в направлении, противоположном первоначальному, образуя зону, где силы трения меняют направление на противоположное. Определены напряжения и смещения и закон возвратного движения.

В §4 осуществляется повторное нагружение. При этом появляется новая зона с первоначальным направлением сил трения.

В результате нагрузки, разгрузки и повторного нагружения получены петля гистерезиса и формулы для вычисления упругой, пластической и полной работ.

В §5 результаты §§I-4 записаны для постоянного по длине сваи давления грунта.

В §6 исследуется извлечение сваи из грунта.

В главе II рассматривается квазистатическая задача об ударе по верхнему концу сваи молотом известной массы. Задача решается на основе энергетических соображений. Установленная зависимость осадки сваи от высоты падения и массы молота сводится к исследованию алгебраического уравнения третьей степени,

В разделе II, содержащем следующие две главы, исследуются динамические задачи несущей способности и деформативности свай.

В главе III дается решение задачи, поставленное Н.М. Герсевановым в упомянутой выше работе. Решения даются для диапазона времени, в течение которого практически заканчивается осадка свай.

Задача состоит в следующем. Пусть свая данной длины заглублена в грунт и известен закон для бокового давления. Следуя Н.М. Герсеванову, в этой главе мы приняли его для простоты постоянным. Считаем, что, если напряжение на нижнем конце не достигает некоторого критического значения, то нижний конец покоится, а в противном случае происходит осадка сваи при

постоянном противодействии. В начальный момент времени по верхнему сечению сваи осуществляется удар молотом, известной массы, летящем с данной скоростью. При этом возможно как проскальзывание сваи по грунту, так и срез по грунту.

Тогда задача определения несущей способности сваи сведется к исследованию неоднородного волнового уравнения, правая часть которого представляет произведение величины, соответствующей касательному напряжению на боковой поверхности сваи, на функцию Хевисайда.

Уравнение решается при нулевых начальных и следующих граничных условиях: на верхнем конце имеет место условие совместного движения молота и верхнего сечения, а также условие, что в момент удара скорость верхнего сечения известна, на нижнем конце - условие о том, что движение этого конца подчиняется жестко-пластической схеме.

В §1 главы III рассматриваются условия удара по свае, постановка задачи и основные уравнения.

В §2 исследуются сопротивление и закон осадки сваи при наличии одного лобового сопротивления.

В §3 исследуются сопротивление сваи и закон её осадки при наличии одного бокового сопротивления.

В §4 исследуются сопротивление и закон осадки сваи при наличии одновременно бокового и лобового сопротивлений. При этом наряду с выражениями для несущей способности и закона осадки определяются также напряжения и скорости для произвольного сечения сваи, и в частности, скорость на верхнем

конце в момент отскока молота. Устанавливаются области справедливости полученных решений, приводятся кривые осадок, которые качественно хорошо согласуются с натурными наблюдениями других авторов.

Глава IV посвящена некоторым обобщениям задачи динамической теории определения несущей способности и деформативности свай. Исследование проводится с помощью операционного исчисления. В частности, решается задача несущей способности и деформативности сваи со свободным участком. Анализ решения показывает, что свободный участок существенно влияет на величину отказа. Эта задача рассматривается в §1 и сводится к исследованию неоднородного волнового уравнения с правой частью, представляющей произведение величины, соответствующей касательному напряжению на множитель, содержащий две функции Хевисайда с различными аргументами, совместно с упомянутыми выше граничными и начальными условиями.

Решение уравнения получено для произвольного момента времени. Выписываются закон осадки и сопротивление сваи для конкретных, практически интересных промежутков времени.

В §2 исследуется решение задачи для полностью погруженной сваи при произвольном законе распределения бокового давления по длине сваи. Задача эта исследовалась В.С.Скуратовым ("К вопросу об определении отказа сваи на основе терпи упругого удара". Новые методы расчета свай, ст. №8 Гидролого-

гидротехнического института ДПТЭУ ШШС. М., 1930), однако при решении допущено ряд неточностей.

В §3 исследуются вопросы несущей способности и деформативности свай, забитых в многослойный грунт. Подробно исследуется случай, когда число слоев равно 2. Анализ решения показывает, что осадки двух свай, имеющих одинаковые сопротивления, но забитые одна в однослойный грунт, другая – в двухслойный грунт, имеют разные значения.

РАЗДЕЛ I

В разделе исследуются вопросы погружения и несущей способности сваи в статической и квазистатической постановках. Задачи решаются при предположениях, что при осаживании сваи имеет место срез по грунту либо скольжение между грунтом и сваей, которые могут формироваться как по всей длине сваи, так и на части ее в зависимости от величины плавно возрастающей продольной нагрузки. Указанные случаи взаимодействия сваи с грунтом соответственно описываются условием предельного равновесия и законом сухого трения Кулона.

В главе I для статической задачи изучаются законы и зоны распределения трения при нагрузке, разгрузке и повторной нагрузке и извлечения сваи и связанные с последними распределения напряжений смещений и несущая способность сваи.

В главе II при квазистатической постановке исследуется задача определения отказа сваи при ударе молотом. Сопротивление сваи определяется как функция параметров грунта, работы падающего молота и упругих свойств самой сваи.

ГЛАВА I. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВАИ

В настоящей главе исследована задача несущей способности и погружения в грунт сваи с учетом упругих свойств при статическом нагружении. При этом кривые осадки, построенные по формулам, полученным в настоящей работе, качественно хорошо согласуются с кривыми осадки, построенными на основе натурных и экспериментальных исследований.

1 Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается свая, заглубленная в грунт на расстояние l , к свободному концу которой приложена статически возрастающая нагрузка P , по боковой поверхности действует распределенное давление $q(x)$, изменяющееся по закону $q(x) = \xi x$. Отметим, что более общий закон распределения давления не вызовет принципиальных затруднений в решении задачи.

На погружаемой конце сваи пусть имеет место сопротивление R , которое примем линейно зависящим от глубины погружения l , то-есть $R = \eta Sl$, где S - площадь поперечного сечения сваи, а ξ и η - параметры грунта.

Начало координат выберем на поверхности грунта, и ось X направим вдоль сваи в направлении погружения (рисунок 1).

Если на боковой поверхности сваи имеет место прилипание частицы грунта и образование грунтовой оболочки, то при

погружении сваи происходит срез по грунту, вдоль которого считаем справедливым условие предельного равновесия Кулона, следовательно, на поверхности среза для касательного напряжения имеем выражение

$$\tau = \operatorname{tg} \varphi \cdot q(x) + k, \quad (1.1)$$

где φ - угол внутреннего трения, k - коэффициент сцепления грунта.

В случае, когда имеет место скольжение на границе свая-грунт указанное напряжение будет иметь вид

$$\tau = f q(x),$$

где f - коэффициент трения.

Исследуем задачу для первой ситуации, то-есть, когда имеет место образование на поверхности сваи грунтовой рубашки и как следствие, срез по грунту; случай, когда нет прилипания грунта на сваю и имеет место скольжение между грунтом и сваем, получается как частный из предыдущего, если положить $k = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = f$.

Для дальнейшего удобно вместо p ввести величину βp_1 , где p_1 - значение нагрузки p , при котором деформация сваи достигает ее нижнего конца, β - безразмерная величина характеризующая изменение нагрузки p .

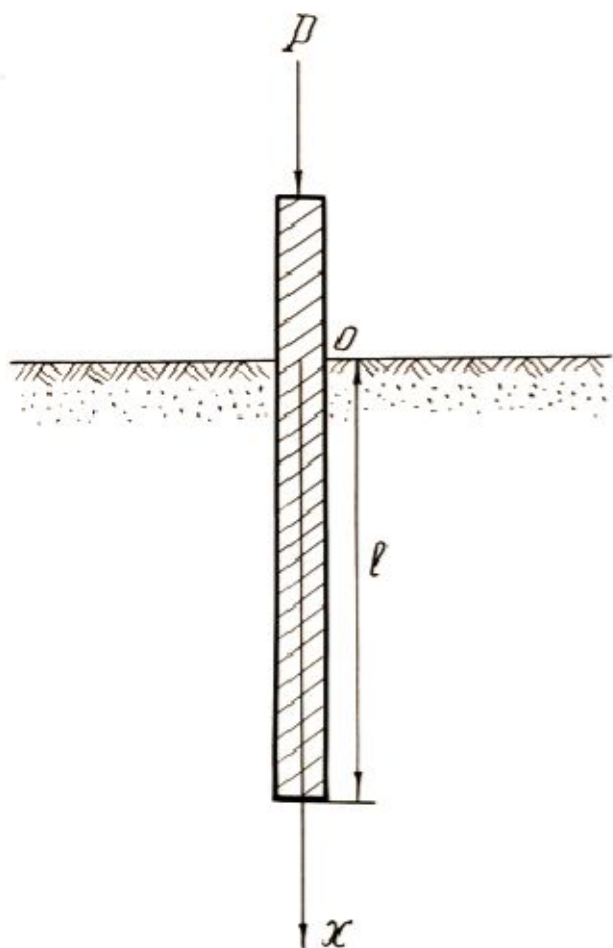


Рисунок 1

Составим дифференциальное уравнение равновесия, заглубленной в грунт сваи, принимая ее за упругий стержень. Для этого, считая справедливым гипотезу плоских сечений, рассмотрим равновесие элемента сваи dx . Пренебрегая весом сваи, как величиною малой по сравнению с величиною ее несущей способности, и складывая со знаком действующие на этот элемент силы и приравнивая затем эту сумму нулю, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp(x)}{dx} = c[k + tg\varphi \cdot q(x)],$$

где $p(x)$ - сила, нормальная к текущему поперечному сечению, c - периметр поперечного сечения сваи, или, если записать это уравнение через напряжение, будем иметь

$$\frac{d\sigma_I(x)}{dx} = \frac{c}{S}[k + tg\varphi \cdot q(x)], \quad (1,2')$$

где σ_I - нормальное к поперечному сечению сваи напряжение.

Считая деформацию сваи малой и, следовательно, используя в качестве зависимости между напряжением и деформацией закон Гука

$$\sigma(x) = E \frac{du(x)}{dx}$$

уравнение равновесия сваи запишем в смещениях:

$$\frac{d^2 u_I(x)}{dx^2} = \frac{c}{ES} (k + \operatorname{tg} \varphi \cdot \zeta x), \quad (1.2)$$

где E - модуль упругости сваи.

Перейдем к выяснению граничных условий задачи. Если нагрузка p меняется в пределах $0 \leq p \leq p_I$, то зона деформации ζ изменяется соответственно в пределах $0 \leq \zeta_I \leq l$. На границе этой зоны $\zeta_I(\beta p_I)$ имеет место условие

$$\sigma_I(\zeta_I, \beta p_I) = 0, \quad 0 \leq \beta \leq 1; \quad (1.3)$$

в сечении же сваи $x = 0$ напряжение равно заданной величине

$$\sigma_I(0, \beta p_I) = \beta \frac{p_I}{S}, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (1.4)$$

Для смещения на конце зоны деформации для указанного предела изменения p справедливо условие

$$u_I(\zeta_I, \beta p_I) = 0, \quad 0 \leq \beta \leq 1; \quad (1.5)$$

Последнее справедливо до тех пор, пока сила в сечении сваи $x = l$ не достигает величины лобового сопротивления R . При

дальнейшем росте β свая будет осаживаться и на конце $x=l$ условия на напряжение и смещение будут иметь вид

$$\sigma_1(l+e, \beta p_1) = -\eta(l+e), \quad u_1(l+e, \beta p_1) = 0, \quad (1.6)$$

где e - величина осадка сваи, отвечающая значению

$$\beta = 1 + \frac{l}{p_1} \eta(l+e). \quad (1.7)$$

Если, наоборот, нагрузка $p = \beta p_1$ будет убывать, начиная с некоторого значения параметра $\beta = \beta_0$, то появится зона «обратных» смещений $\zeta_2(\beta p_1)$, а равновесие сваи станет описываться двумя уравнениями, а именно, на части свай будет справедливо уравнение (2), а на другой части – новое уравнение

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = -\frac{c}{ES} (k + \operatorname{tg} \varphi \cdot \zeta x), \quad \beta \leq 1 + \frac{l}{p_1} \eta(l+e_0), \quad (1.8)$$

где e_0 - значение осадки, соответствующее началу разгрузки.

Зона обратных смещений или зона, где справедливо уравнение (8) растет с дальнейшим падением значения параметра β , однако с обращением β в нуль зона еще не захватит всю длину стержня. Последнее будет иметь место при некотором значении $\beta < 0$.

На границе двух зон деформаций $\zeta_1(\beta p_1)$ и $\zeta_2(\beta p_1)$ напряжения и смещения непрерывны [13], [9], то-есть

$$\begin{aligned}\sigma_2(\zeta_2, \beta p_1) &= \sigma_1[\zeta_2, p_1 + \eta(l + e_0)] \\ u_2(\zeta_2, \beta p_1) &= u_1[\zeta_2, p_1 + \eta(l + e_0)] \\ 0 \leq \beta &\leq 1 + \frac{l}{p_1} \eta(l + e_0),\end{aligned}\tag{1.9}$$

а на верхнем конце сваи, напряжение равно заданной величине

$$\sigma_2(0, \beta p_1) = -\beta \frac{p_1}{S}, \quad 0 \leq \beta \leq 1 + \frac{l}{p_1} \eta(l + e_0).\tag{1.10}$$

При повторном нагружении сваи появится новая зона «прямых» смещений $\zeta_3(\beta p_1)$ и для равновесия сваи необходимо теперь равновесие трех ее участков $\zeta_1(\beta p_1)$, $\zeta_2(\beta p_1)$ и $\zeta_3(\beta p_1)$: участки ζ_1 и ζ_3 будут описываться уравнением (2), а участок ζ_2 - уравнением (8).

Аналогичная картина будет наблюдаться при работе сваи на статическую нагрузку, когда взаимодействие ее с грунтом подчиняется закону сухого трения. Уравнение равновесия для этого случая имеет вид

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = \chi \frac{cf}{ES} q(x), \quad \chi = \operatorname{sgn} \tau, \quad (1.11)$$

положительный знак χ соответствует росту нагрузки, отрицательный – разгрузке и далее росту нагрузки с обратным знаком.

Для простоты параметры задачи $\xi, \eta, l, S, c, k, \varphi$ примем постоянными и, кроме того, для упрощения записи введем безразмерные величины

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma S}{p_1}, \quad \tilde{u} = \frac{ckSE}{p_1^2} u, \quad \tilde{x} = \frac{ck}{p_1} x, \quad \tilde{l} = \frac{ck}{p_1} l, \quad (1.12)$$

$$\tilde{\xi} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{p_1 \xi}{ck^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{S\eta}{ck}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{ck}{p_1} \zeta, \quad \tilde{R} = \frac{R}{p_1}.$$

В дальнейшем знак тильда над безразмерными величинами опустим. В безразмерных обозначениях уравнение (2) и (8) запишутся так:

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = \chi(1 + \xi x). \quad (1.13)$$

Уравнения (13) будем решать совместно с граничными условиями (3) – (6), (9) и (10), записанными в безразмерных

величинах. Последние будем выписывать ниже там, где это будет вызываться необходимостью исследовать ту или иную задачу, связанную с установлением несущей способности и закона погружения сваи в грунт.

При решении задачи параметры грунта ξ и η считаем известными. В § 4 даются два возможных способа определения их из эксперимента с пробными сваями.

Перейдем непосредственно к решению рассматриваемых задач. Начнем с процесса нагружения сваи, который удобно исследовать в три этапа.

2 Статическое нагружение сваи

1 этап. Нагрузка β изменяется в промежутке от нуля до единицы. При этом деформация охватывает лишь часть сваи. На границе зоны деформации $\zeta_1(\beta)$ смещение и напряжение отсутствуют, а на поверхности грунта $x = 0$ напряжение известно. Эти условия соответственно дают

$$u_1(\zeta_1, \beta) = 0, \quad \sigma_1(\zeta_1, \beta) = 0 \quad \sigma_1(0, \beta) = -\beta. \quad (1.14)$$

Решая уравнение (13) при $\chi = 1$ совместно с первыми двумя условиями (14), получим выражение для напряжения и смещения для указанного предела изменения нагрузки

$$\begin{aligned}
\sigma_I(x, \beta) &= \frac{\xi}{2} [x^2 - \zeta_I^2(\beta)] + [x - \zeta_I(\beta)], \\
u_I(x, \beta) &= \frac{\xi}{\sigma} [x^3 + 2\zeta_I^3(\beta)] + \frac{1}{2} x^2 - \\
&\quad - \left[\frac{\xi}{2} \zeta_I(\beta) + 1 \right] \zeta_I(\beta) \cdot x + \zeta_I^2(\beta).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Для установления закона распространения зоны деформации, соответствующего первому этапу, решаем уравнение (13) совместно с последним условием (14), в результате которого имеем

$$\zeta_I(\beta) = -\frac{1}{\xi} + \left(\frac{2}{\xi} \beta + \frac{1}{\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \tag{1.16}$$

Если записать теперь напряжение и смещение через безразмерную нагрузку β , определяемую на данном этапе выражением (1.16), то будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_I(x, \beta) &= \frac{\xi}{2} \left\{ x^2 - \left[\left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \beta \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\xi} \right]^2 + \left[x + \frac{1}{\xi} - \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \beta \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \\
u_I(x, \beta) &= \frac{\xi}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left[x^3 - \left(\left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \beta \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\xi} \right) \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\xi} x^2 - \frac{2}{\xi} \beta x + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \beta \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\xi} \right]^2.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Заметим, что значение β , равное 1, соответствует достижению зоны деформации ζ_l нижнего конца $x = l$ сваи.

2 этап. Нагрузка β изменяется в промежутке $l \leq \beta \leq l + R$. На этом этапе в работу вступает лобовое сопротивление R и при крайнем значении β общее сопротивление сваи на данной глубине l исчерпывается и в следующий момент начинается ее погружение.

На нижнем конце $x = l$ сваи до того как напряжение не достигнет значения предельного удельного лобового сопротивления смещение равно нулю,

$$u_l(l, \beta) = 0, \quad (1.18)$$

а в сечении $x = 0$ справедливо последнее условие (14) поэтому уравнение (13) на этом этапе имеет решение

$$\begin{aligned} \sigma_l(x, \beta) &= \frac{l}{2} \zeta x^2 - x - \beta, \\ u_l(x, \beta) &= \frac{l}{\sigma} \zeta (x^3 - l^3) + \frac{l}{2} (x^2 - l^2) - (x - l) \beta, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$l \leq \beta \leq l + \eta l.$$

Предельное состояние для сваи наступит, когда напряжение на нижнем конце достигает величины удельного лобового сопротивления. Тогда значение предельной нагрузки на сваю получим из первого выражения (19)

$$\beta = \frac{l}{2}\xi l^2 + (l + \eta)l. \quad (1.20)$$

Переходя по формулам (12) к размерным величинам и обозначая предельную нагрузку в размерных величинах через Q , получим для нее искомую формулу

$$Q = \frac{l}{2}tg\varphi \cdot \xi l^2 + (ck + \eta S)l. \quad (1.21)$$

В том случае, когда на границе свая - грунт имеет место проскальзывание, вместо формулы (21) имеем

$$Q = \frac{l}{2}fc\xi c^2 + \eta Sl. \quad (1.22)$$

3 этап. Как только лобовое сопротивление будет исчерпано, свая станет погружаться. Если при этом e есть величина, на которую вдавливается свая, то на нижнем ее конце имеют место условие

$$\sigma_l(l + e, \beta) = -\eta(l + e), \quad u_l(l + e, \beta) = 0 \quad (1.23)$$

Тогда из уравнения равновесия (13) и условий (23) имеем

$$\sigma_l(x, \beta) = \frac{l}{2}\xi \left[x^2 - (l + e)^2 \right] + x - (l + \eta)(l + e)$$

$$u_l(x, \beta) = \frac{\xi}{\partial} \left[x^3 - 3(l+e)^2 x + 2(l+e)^3 \right] + \frac{l}{2} x^2 - (1+\eta)(l+e)x + \left(\frac{l}{2} + \eta \right) (l+e)^2. \quad (1.24)$$

Из третьего условия (14), справедливого для любого этапа нагружения сваи, получаем закон ее погружения

$$(l+e)^2 + \frac{2}{\xi}(l+\eta)(l+e) - \frac{2}{\xi}\beta = 0, \quad (1.25)$$

где величина осадки e нижнего конца $x = l$ дается формулой

$$e = \left[\left(\frac{l+\eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi}\beta \right]^{\frac{l}{2}} - \left(\frac{l}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \right)^{\frac{l}{2}} - \frac{\eta}{\xi}, \quad \beta > l + \eta l \quad (1.26)$$

осадка же верхнего конца, которую обозначим через e^* имеет следующие выражения

$$e_l^* = \begin{cases} \frac{\xi}{3}\zeta_l^3(\beta) + \frac{l}{2}\zeta_l^2(\beta), & 0 \leq \beta \leq l; \\ l\beta - \frac{l}{2}l^2 - \frac{l}{\sigma}l^3, & l < \beta \leq l + R; \\ \left[\frac{l}{3}\xi(l+e) + \eta\frac{l}{2} \right] (l+e)^2, & l + R < \beta \leq l + R + e\eta. \end{cases} \quad (1.27)$$

На рисунках 2 и 3 приведены кривые осадки по формулам (27) соответственно без учета и с учетом лобового сопротивления.

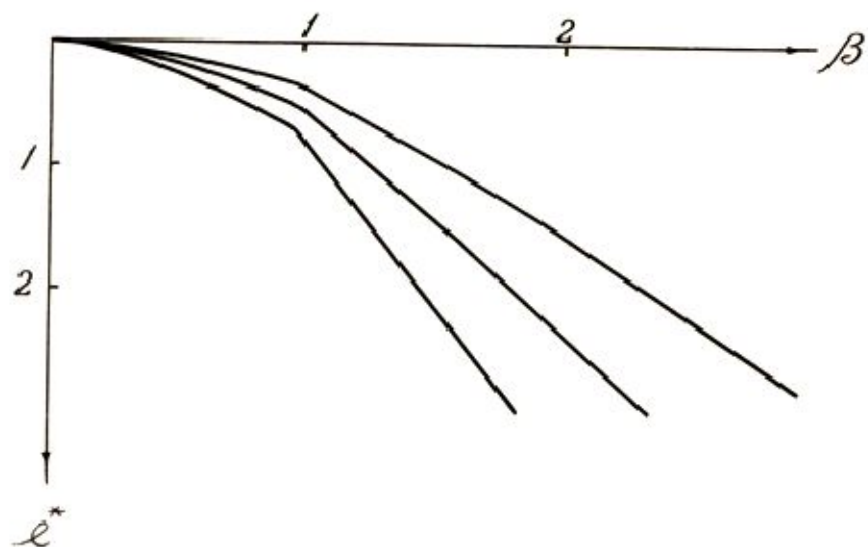


Рисунок 2 – Кривые осадки сваи без учета лобового сопротивления.

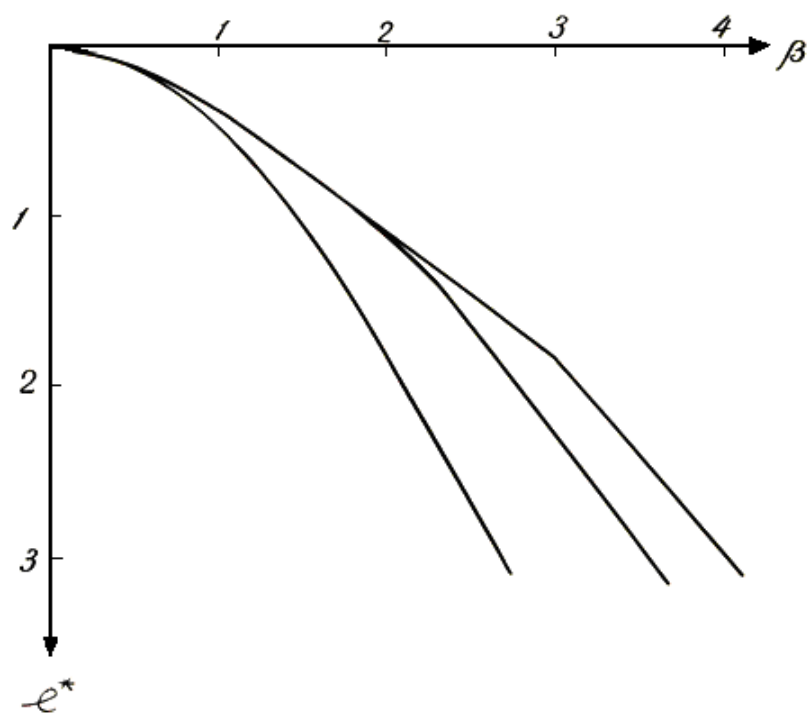


Рисунок 3 – Кривые осадки с учетом лобового сопротивления.

3 Разгрузка сваи

Пусть нагрузка β , достигнув некоторого максимального значения $\beta_{max} = 1 + \eta(l + e_0)$ убывает до нуля. При этом сечения, начиная с $x = 0$, перемещаются в направлении противоположном первоначальному движению; силы трения также перераспределяются и в пределах проявившейся зоны обратных смещений $\zeta_2(\beta)$ меняет направление также на противоположное.

Равновесие сваи на части $l - \zeta_2(\beta)$ будет описываться уравнением (13) при прежнем знаке χ , а на части $\zeta_2(\beta)$ будет описываться тем же уравнением, однако χ будет теперь иметь знак отрицательный.

На границе смещений разных направлений имеет место непрерывность смещений и напряжений, то-есть

$$u_2(\zeta_2, \beta) = U_1(\zeta_2, \beta_{max}), \quad \sigma_2(\zeta_2, \beta) = \sigma_1(\zeta_2, \beta_{max}), \quad (1.28)$$

где u_2 - смещение разгрузки, σ_2 - напряжение разгрузки, нормальное к поперечному сечению сваи.

Решая уравнение (13) с указанным знаком χ совместно с условиями (28) будем иметь:

$$\sigma_2(x, \beta) = -\frac{\xi}{2}x^2 - x + \frac{\xi}{2}[2\zeta_2^2(\beta) - (l + e_0)^2] + 2\zeta_2(\beta) - (1 + \eta)(l + e_0),$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, \beta) = & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \xi x + l \right) x^2 + \left\{ \frac{\xi}{2} \left[2\zeta_2^2 - (l - e_0)^2 \right] + \right. \\
& + 2\zeta_2 - (1 + \eta) \cdot (l + e_0) \Big\} x + \frac{1}{2} \xi \left[-\frac{4}{3} \zeta_2^3 + \frac{2}{3} (l - e_0)^3 \right] + \\
& + \left(\frac{1}{2} + \eta \right) (l - e_0)^2 - \zeta_2^2.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Зона обратных смещений дается формулой

$$\begin{aligned}
\zeta_2 = & \left[\frac{1}{2} (l + e_0)^2 + \frac{1}{\xi} (1 + \eta) (l + e_0) + \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi} \beta \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\xi}, \\
& 0 \leq \beta \leq 1 + \eta(l + e_0)
\end{aligned} \tag{1.30}$$

а осадки e и e^* концов $x = l$ и $x = 0$ сваи будут подчиняться законам

$$\begin{aligned}
e = e_0, \quad e_2^* = & \frac{1}{2} \xi \left[-\frac{4}{3} \zeta_2^3 + \frac{2}{3} (l + e_0)^3 \right] + \\
& + \left(\frac{1}{2} + \eta \right) (l + e_0)^2 - \zeta_2^2, \quad 0 \leq \beta \leq 1 + \eta(l + e_0).
\end{aligned} \tag{1.31}$$

4 Повторное нагружение и упругий гистерезис сваи

При повторном росте нагрузки появляется новая зона прямых смещений и уравнение равновесия следует писать уже для трех различных участков деформирования сваи.

На границе обратной и повторной зоны $\zeta_3(\beta)$ смещений имеет место непрерывность смещения и первой его производной, то-есть на этой границе справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_3(\zeta_3, \beta) &= \partial_2(\zeta_3, 0), \\ u_3(\zeta_3, \beta) &= u_2(\zeta_3, 0) \\ 0 \leq \beta &\leq 1 + \eta(l + e_0).\end{aligned}\tag{1.32}$$

где $u_3(x, \beta)$ - смещение повторного нагружения, $\sigma_3(x, \beta)$ - нормальное к поперечному сечению сваи напряжение повторного нагружения.

Решая уравнение (13) при χ , соответствующем знаку плюс, совместно с условиями (32) для σ_3 и u_3 получим

$$\begin{aligned}\sigma_3(x, \beta) &= \frac{l}{2}\xi x^2 + x + \frac{l}{2}\xi \left[2(\zeta_{2m}^2 - \zeta_3^2) - (l + e_0)^2 \right] \\ &+ 2(\zeta_{2m} - \zeta_3) - (1 + \eta)(l + e_0), \\ u_3(x, \beta) &= \frac{l}{2}\xi(1 + \eta) \left\{ \frac{l}{3}x^3 + x^2 + \left[2(\zeta_{2m}^2 - \zeta_3^2) - (l + e_0)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{4}{\xi}(\zeta_{2m} - \zeta_3) - \frac{l}{2\xi}(1 + \eta)(l + e_0)x \right\} +\end{aligned}\tag{1.33}$$

$$+ \frac{l}{2} \xi \left[\frac{4}{3} (\zeta_3^3 - \zeta_{2m}^3) + \frac{2}{3} (l + e_0)^3 \right] +$$

$$(\zeta_3^2 - \zeta_{2m}^2) + \left(\frac{l}{2} + \eta \right) (l + e_0)^2,$$

где ζ_{2m} - максимальное значение зоны обратного смещения. Зона деформации $\zeta_3(\beta)$ распространяется по закону

$$\zeta_3 = \left[\left(\zeta_{2m} + \frac{l}{\xi} \right)^2 + \frac{l}{2} (l + e_0)^2 + \frac{l + \eta}{\xi} (l + e_0) - \frac{l}{\xi} \beta \right]^{\frac{l}{2}} - \frac{l}{\xi}, \quad (1.34)$$

а осадки концов $x = l$, $x = 0$ будут иметь выражения

$$e = e_0,$$

$$e_3^* = \frac{l}{2} \xi \left[\frac{4}{3} (\zeta_3^2 - \zeta_{2m}^2) + \frac{2}{3} (l + e_0)^3 \right] + \quad (1.35)$$

$$+ (\zeta_3^2 - \zeta_{2m}^2) + \left(\frac{l}{2} + \eta \right) (l + e_0).$$

На рисунке 4 показана кривая осадки верхнего сечения $x = 0$ в результате нагрузки, разгрузки и повторного нагружения. Здесь отчетливо видна замкнутая петля гистерезиса. Площадь петли

представляет собою необратимую часть работы, совершаемой силой β за цикл нагрузка-разгрузка-нагрузка. Величина ее будет

$$\begin{aligned}
A_l &= \int_0^{l+\eta(l+e_0)} [e_2^*(\beta) - e_2^*(\beta)] d\beta = \\
&= \frac{4}{15} \xi^2 \left\{ \left[\left(\zeta_{2m} + \frac{2}{\xi} \right) \zeta_{2m} + \frac{l}{\xi} (l+e_0)^2 + \frac{l}{\xi} \left(\frac{l}{\xi} - l \right) \right]^{\frac{5}{2}} - \right. \\
&- 2 \left[\left(\zeta_{2m} + \frac{2}{\xi} \right) \cdot \zeta_{2m} + \frac{l}{2} (l+e_0)^2 + \frac{l}{\xi} (l+\eta)(l+e_0) + \frac{l}{\xi^2} \right]^{\frac{5}{2}} + \\
&+ 2 \left[\frac{l}{2} (l+e_0)^2 - \frac{l}{\xi} (l+e_0) \right] + \frac{l}{\xi} \left(\frac{l}{\xi} - l \right)^{\frac{5}{2}} - \\
&- \left[\frac{l}{2} (l+e_0)^2 + \frac{l}{\xi} (l+\eta)(l+e_0) \right]^{\frac{5}{2}} - \frac{l}{\xi} [l+\eta(l+e_0)]^2 + \quad (1.36) \\
&+ \frac{4}{3} \left\{ \left[\left(\zeta_{2m} + \frac{2}{\xi} \right) \zeta_{2m} + \frac{l}{2} (l+e_0)^2 + \frac{l}{\xi} \left(\frac{l}{\xi} - l \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \right. \\
&- \left[\frac{l}{2} (l+e_0)^2 + \frac{l}{\xi} (l+\eta) \cdot (l+e_0) \right]^{\frac{3}{2}} \left. \right\} + \\
&+ \frac{2}{3} \zeta_{2m}^3 + 2 \zeta_{2m}^2 + \frac{2}{\xi} \zeta_{2m} + \frac{l}{2} (l+e_0)^2 + \left. \right] \\
&+ \frac{l}{\xi} (l+\eta)(l+e_0) + \frac{l}{\xi} \left(\frac{l}{\xi} - 2 \right) [l+\eta(l+e_0)].
\end{aligned}$$

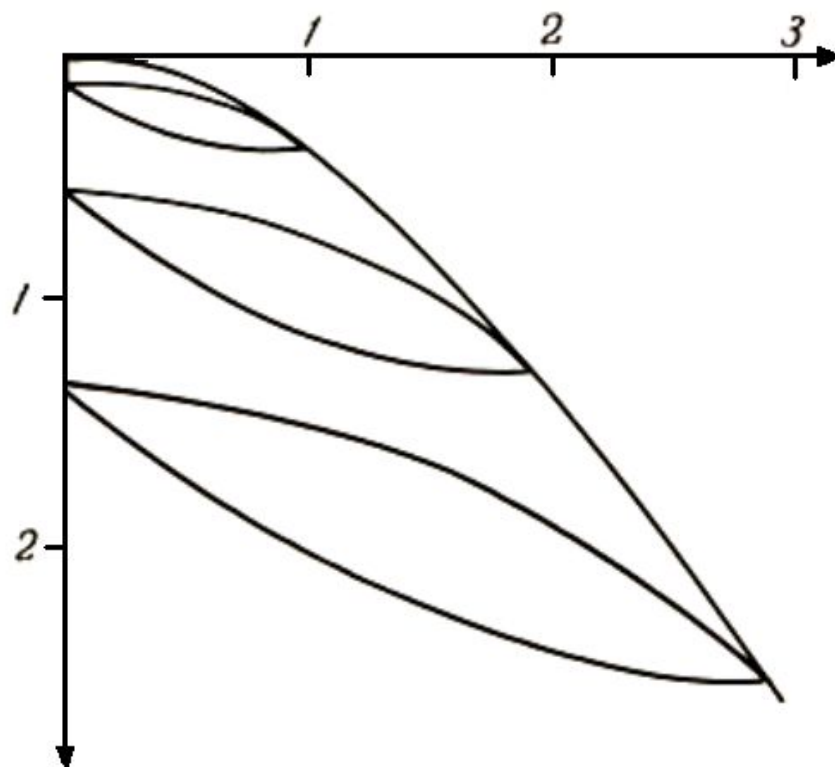


Рисунок 4.

Осадка сваи без учета лобового сопротивления
при повторных нагрузках.

Полная работа A имеет величину

$$\begin{aligned}
A &= e^*(\beta_{max}) \cdot [I + \eta(l + e_0)] - \int_0^{I+\eta(l+e_0)} e_l^0(\beta) d\beta = \\
&= [I + \eta(l + e_0)] \left\{ \frac{1}{2} \xi \left[\frac{4}{3} (\zeta_3^3 - \zeta_{2m}^3) + \frac{2}{3} (l + e_0)^3 \right] + \right. \\
&\quad \left. + (\zeta_3^2 - \zeta_{2m}^2) + \left(\frac{l}{2} + \eta \right) \cdot (l + e_0) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{15} \xi^2 \left\{ \left[\frac{l}{\xi} + (l + \eta e) \cdot \frac{2}{\xi} \right]^{\frac{5}{2}} - \left[\frac{l}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} (l + \eta(l + e_0)) \right]^{\frac{5}{2}} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{l}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \right)^{5/2} + \frac{5}{6} \left\{ \left[\frac{l}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} (l + \eta l)^{\frac{3}{2}} \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[\frac{l}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} (l + \eta(l + e_0)) \right]^{\frac{5}{2}} \right\} + \frac{l}{3} (\xi - l) \left(\frac{l}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \right)^{\frac{3}{2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{7}{8} \xi \left(\frac{l}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} \right)^2 - \left(\frac{l}{2} - \xi + \eta \right) \left\{ \frac{4}{\xi} e_0 + \frac{4\eta}{\xi^2} [e_0 + \eta(2le_0 + e_0^2)] \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l}{2} \left[l + l^2 \eta \left(l + \frac{l}{3} \xi l \right) - (l + \eta l)^2 \right] - \frac{5}{24\xi} - \frac{2e_0}{\xi^2} \eta \right\}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Работа упругого восстановления A свай вычисляется следующим образом.

$$\begin{aligned}
A_2 = e_3^*(\beta_{max}) \cdot [I + \eta(l + e_0)] - \int_0^{I + \eta(l + e_0)} e_l^*(\beta) d\beta = [I + \eta(l + e_0)] \times \\
(1.38) \\
\times \left\{ \frac{1}{2} \xi \left[\frac{4}{3} (\zeta_3^3 - \zeta_{2m}^3) + \frac{2}{3} (l + e_0)^3 \right] + (\zeta_3^2 - \zeta_{2m}^2) + \left(\frac{1}{2} + \eta \right) \cdot (l + e_0) \right\} + \\
+ \frac{1}{15} \xi^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} (l + e_0) + \frac{1}{\xi} (I + \eta)(l + e_0) + \frac{1}{\xi^2} \right]^{\frac{5}{2}} - \left[\frac{1}{2} (l + e_0) + \frac{1}{\xi^2} \right]^{\frac{5}{2}} - \right. \\
\left. - \frac{1}{2\xi} [(I + \eta)(l + e_0)]^2 + \left[\frac{1}{2} (l + e_0)^2 + \frac{1}{\xi} (I + \eta)(l + e_0) + \frac{2}{3\xi^2} \right] [I + \eta(l + e_0)] \right\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что при e стремящейся к нулю в пределе формулы (36)-(38) дают величину соответствующих работ, когда разгрузка производится с критического значения нагрузки; при разгрузке же для более ранней стадии нагружения указанные работы находятся аналогичным образом.

5 Несущая способность свай при постоянном боковом давлении

При расчете на несущую способность многие исследователи часто берут иные законы распределения давления по длине свай, в частности постоянный. В этом параграфе займемся исследованием задачи при предположении, что давление грунта на боковую поверхность свай постоянно по длине. Уравнение равновесия в этом случае будет

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \chi(1 + \xi). \quad (1.39)$$

Здесь χ имеет тот же смысл, что и выше, а именно указывает на направления сил трений.

При выписывании напряжений и смещений для разобранных выше трех этапов нагружения, а также для разгрузки и повторного нагружения справедливы граничные условия, использованные в предыдущих параграфах для соответствующих решений.

Для получения напряжений и смещений, например, для первого этапа уравнение (39) решаем с первыми двумя условиями (14) и получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_l(x, \beta) &= (1 + \xi)[x - \zeta_l(\beta)], \\ u_l(x, \beta) &= \frac{l}{2}(1 + \xi)(x^2 - \zeta_l^2) - (1 + \xi)\zeta_l x, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где зона деформации $\zeta_l(\beta)$ устанавливается при совместном решении (40) с последним условием (14):

$$\zeta_l = \frac{l}{1 + \xi} \beta. \quad (1.41)$$

При вступлении в работу лобового сопротивления R уравнение (40) решается совместно с условиями $\sigma_l(l, \beta) = -\theta \eta l$, $0 \leq \theta \leq 1$ и (18). Тогда для $\sigma_l(x, \beta)$ и $u_l(x, \beta)$ получим

$$\sigma_l = (1 + \xi)x - (1 + \xi + \theta\eta)l, \quad (1.42)$$

$$u_l = \frac{l}{2}(1 + \xi)x^2 - (1 + \xi + \theta\eta)lx + \frac{l}{2}(1 + \xi + 2\theta\eta)l^2.$$

Предельное состояние наступает, когда напряжение на нижнем конце $x = l$ достигает величины удельного лобового сопротивления ($\theta = 1$). Выражение предельной нагрузки β получим из первого выражения (42),

$$\beta = (1 + \xi + \eta)l. \quad (1.43)$$

В размерных величинах критическое сопротивление сваи имеет вид

$$Q = (tg\varphi \cdot \xi c + ck + \eta S)l. \quad (1.44)$$

Для третьего этапа нагружения справедливы

$$\sigma_l(x, \beta) = (1 + \xi)x - (1 + \xi + \eta)(l + e),$$

$$u_l(x, \beta) = \frac{l}{2}(1 + \xi)x^2 - (1 + \xi + \eta)(l + e)x + \frac{l}{2}(1 + \xi + 2\eta)(l + e)^2. \quad (1.45)$$

Из первого выражения (45) получаем закон погружения сваи

$$e = \frac{l}{1 + \xi + \eta} \beta - l. \quad (1.46)$$

Разгрузка дает

$$\begin{aligned}\sigma_2(x, \beta) &= (1 + \xi)(-x + 2\zeta_2) - (1 + \xi + \eta)(l + e), \\ u_2(x, \beta) &= -\frac{l}{2}(1 + \xi)x^2 + [2(1 + \xi)\zeta_2 - (1 + \xi + \eta) \times \\ &\times (l + e)]x - (1 - \xi)\zeta_2^2 + \frac{l}{2}(1 + \xi + \eta)(l + e)^2,\end{aligned}\quad (1.47)$$

где зона обратных деформаций $\zeta_2(\beta)$ распространяется по закону

$$\zeta_2 = [(1 + \xi + \eta)(l + e) - \beta] \frac{l}{2(1 + \xi)}. \quad (1.48)$$

Рассматривая повторное нагружение сваи, для $\sigma(x, \beta)$ и $u(x, \beta)$ имеем

$$\begin{aligned}\sigma_3(x, \beta) &= (1 + \xi)[x + 2(\zeta_{2m} - \zeta_3)] - (1 + \xi + \eta)(l + e), \\ u_3(x, \beta) &= \frac{l}{2}(1 + \xi)x^2 + [2(1 + \xi)(\zeta_{2m} - \zeta_3) - (1 + \xi + \eta)x + \\ &+ (1 + \xi)(\zeta_3^2 - \zeta_{2m}^2) + \frac{l}{2}(1 + \xi + 2\eta)(l + e)^2(l + e)].\end{aligned}\quad (1.49)$$

6 Извлечение сваи

При извлечении сваи происходит дальнейшее перераспределение давления зон деформации. Равновесие сваи при

этом описывается в зависимости от закона распределения давления по длине сваи либо дифференциальным уравнением (13), или уравнениями (40) при $\chi = -1$.

На границе зоны обратных смещений $\zeta_4(\beta)$ справедливы условия

$$\begin{aligned}\sigma_4(\zeta_4, \beta) &= \sigma_l[\zeta_4, \quad l + \eta(l + e)], \\ u_4(\zeta_4, \beta) &= u_l[\zeta_4, \quad l + \eta(l + e)],\end{aligned}\tag{1.50}$$

а в сечении $x = 0$ напряжение задано

$$\sigma_4(0, \beta) = \beta.\tag{1.51}$$

Решая уравнения (13) и (40) совместно с условиями (50) для постоянного и линейного законов распределения давлений на сваю соответственно будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_4(x, \beta) &= -\frac{\xi}{2}x^2 - x + \frac{l}{2}\xi[2\zeta_4^2 - (l + e)^2] + 2\zeta_4 - (l + \eta)(l + e), \\ u_4(x, \beta) &= -\frac{l}{6}\xi x^3 - \frac{l}{2}x^2 + \left\{ \frac{l}{2}\xi[2\zeta_4^2 - (l + e)^2] + 2\zeta_4 - \right. \\ &\quad \left. - (l + \eta)(l + e) \right\} x + \frac{l}{2}\xi \left[-\frac{4}{3}\zeta_4^3 + \frac{2}{3}(l + e)^3 \right] + \left(\frac{l}{2} + \eta \right) (l + e)^2 - \zeta_4^2;\end{aligned}\tag{1.52}$$

$$\sigma_4(x, \beta) = -(1 + \xi)(x - 2\zeta_2) - (1 + \xi + \eta)(l + e),$$

$$u_2(x, \beta) = -\frac{l}{2}(1 + \xi)(x^2 - 2\zeta_4) + [2(1 + \xi)\zeta_4 - (1 + \xi + \eta)(l + e)\zeta_4]x + \frac{l}{2}(1 + \xi + \eta)(l + e), \quad (1.53)$$

где зона деформации $\zeta_4(\beta)$ для указанных случаев бокового давления грунта соответственно имеет выражения

$$\zeta_4 = \begin{cases} \left[\frac{l}{2}(l + e)^2 + \frac{l}{\xi}(1 + \eta)(l + e) + \frac{l}{\xi^2} - \frac{l}{\xi}\beta \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{l}{\xi}, & q(x) = \xi x \\ \frac{l}{2(1 + \xi)}[(1 + \xi + \eta)(l + e) + \beta], & q(x) = \xi = const. \end{cases} \quad (1.54)$$

При разгрузке зона обратных трений $\zeta_2(\beta)$ не охватывает всю длину сваи и напряжения остаются еще сжимающими. Значение нагрузки β , при котором зона обратных трений достигает сечения $x = l + e$, определяется из выражения $\zeta_4(\beta) = l + e$.

Растягивающие напряжения появляются при приложении к свае нагрузки с противоположным знаком и поскольку в пределах различных зон деформаций, включая и их границы, напряжение непрерывно, то на границе $x = x(\beta)$ положительных и

отрицательных смещений оно равно нулю. Из этого условия находится закон распространения указанной зоны:

$$x(\beta) = \begin{cases} \left[2\zeta_4^2 - 2\zeta_4 + (l + \eta)(l + e) + \frac{l}{\zeta} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{l}{\zeta}, & q(x) = \zeta x; \\ 2\zeta_4 - \frac{l}{1 + \zeta} (l + \zeta + \eta)(l + e), & q(x) = \zeta = \text{const.} \end{cases} \quad (1.55)$$

Движение же сваи вверх начинается с момента $x(\beta) = l + e$.

Отсюда для силы извлечения имеем

$$\beta = \begin{cases} \frac{\zeta}{2} (l + e)^2 + (l + e), & q(x) = \zeta x; \\ (l + \zeta)(l + e), & q(x) = \zeta. \end{cases} \quad (1.56)$$

или, переписывая последнее в размерных величинах, получим

$$Q^I = \begin{cases} \frac{l}{2} \text{tg} \varphi \cdot c \xi (l + e)^2 + ck(l + e), & q(x) = \zeta x; \\ c(\text{tg} \varphi \cdot \xi + k)(l + e), & q(x) = \zeta. \end{cases} \quad (1.57)$$

7 Об определении параметров грунта

Если параметры грунта ξ и η заранее неизвестны, то силы Q и Q' определены с точностью до этих параметров. Их можно приближенно установить из эксперимента с типичными сваями. Погрузив пробную сваю на некоторую глубину $l_0 < l$ и затем ее, одновременно замечая значения Q и Q' , из выражения (21) и первого выражения (57) получим

$$\xi = \frac{Q'_0 - ckl_0}{\frac{l}{2} \operatorname{tg} \varphi \cdot cl_0^2}, \quad \eta = \frac{Q_0 - Q'_0}{Sl_0}, \quad q(x) = \xi x,$$

где Q_0 и Q'_0 - соответствующие l_0 значения Q и Q' .

Для определения параметром ξ и η сваю можно и не вытаскивать. Заметив значения силы Q при погружении пробной сваи на глубины l_1 и l_2 , $l_1 < l_2 < l$, из (21) получим

$$\xi = 4 \frac{Q - Q_2 + ck(l_2 - l_1)}{\operatorname{tg} \varphi \cdot c(l_1^2 - l_2^2)},$$

$$\eta = \frac{l}{S(l_2 - l_1)} [Q_1 - Q_2 + ck(l_2 - l_1)],$$

$$q(x) = \xi x,$$

где Q_1 и Q_2 - соответствующие l_1 и l_2 значения нагрузки Q .

ГЛАВА II. КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ И ПОГРУЖЕНИЯ СВАИ

В настоящей главе исследуется задача несущей способности и погружения свай при квазистатической постановке. Задача исследуется при известной величине работы падающего молота, как для постоянной так и для переменной в связи с погружением сваи.

Полученные результаты качественно согласуются с рядом экспериментальных работ.

1 Постановка задач

Рассматривается свая, заглубленная на некоторую глубину l , предполагается, что по боковой поверхности сваи действует давление $q(x) = \xi x$, а на погружаемом конце имеет место сопротивление R , которое принимается линейно зависящим от глубины погружения l , $R = \eta Sl$.

Считаем, что смятие головы сваи при ударе молотом отсутствует.

Начало координат и направление оси выберем так же как это было выполнено выше.

Задачу будем решать в напряжениях. При этом если, рассматривать такой случай взаимодействия с грунтом, когда при осадке сваи имеет место срез по грунту, то равновесие сваи будем

описываться уравнением (12). Случай, когда имеет место проскальзывание свай по грунту, получается из предыдущего как частный.

На концах свай $x = 0$ и $x = \sum_{i=1}^k l_i$ будут иметь условия

$$\sigma_i(0, P'_i) = -\frac{P'_i}{S}, \quad \sigma_i\left(\sum_{i=1}^k l_i, P'_i\right) = -\eta \sum_{i=1}^k l_i, \quad (2.1)$$

где P'_i и l_i - сопротивление грунта и осадка, соответствующие i - тому удару. Здесь и ниже индексы $\sigma, \dots$ указывают на номер удара.

Ниже параметры $f, E, S, k, c, \varphi, \xi, \eta$ будем считать постоянными и вместе с тем для упрощения записи введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{k}, \quad \tilde{x} = \frac{c}{S} x, \quad \tilde{l}_i = \frac{c}{S} l_i, \quad \tilde{\xi} = \operatorname{tg} \varphi \frac{S}{ck} \xi, \\ \tilde{\eta} &= \frac{S}{ck} \eta, \quad \tilde{P}_i = \frac{P'_i}{kS}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{kS}, \quad \tilde{A} = \frac{c}{kS^2} A, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\tilde{A}$ представляет собою безразмерную работу молота на единичную площадку головы свай, $\tilde{R}$ - безразмерное удельное лобовое сопротивление.

В дальнейшем знак тильда над безразмерными величинами опустим. При переходе к безразмерным величинам (1,2') и (1) примут вид

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = l + \xi x, \quad (2.3)$$

$$\sigma_i \left(\sum_{i=1}^k l_i, P'_i \right) = -\eta \sum_{i=1}^k l_i, \quad (2.4)$$

$$\sigma_i(0, P'_i) = -P_i.$$

2 Закон погружения свай при квазистатической постановке

Исследуем закон погружения свай в зависимости от количества ударов, производимых молотом, предполагая, что параметры грунта ξ и η и работа молота для любого удара известны. Погружение свай указанной в параграфе 1 настоящей главы постановке можно исследовать, начиная с первого удара молота, хотя, как будет показано ниже это вовсе не обязательно.

Итак, пусть произведен первый удар и необходимо найти осадку от этого удара как функцию работы и параметров ξ и η .

Решая уравнение (3) совместно с первым условием (4), получим

$$\sigma_l = \frac{\xi}{2} (x^2 - l_l^2) + x - (l + \eta) l_l. \quad (2.5)$$

Применяя к (5) второе условие (4), получим связь между сопротивлением первому удару P_I и отказом l_I

$$l_I = \left[\left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} P_I \right]^{\frac{l}{2}} - \frac{l + \eta}{\xi}. \quad (2.6)$$

Приравнявая работу молота A на единичную площадку головы сваи, работе на осаживание сваи на такую же площадку, то-есть

$$A = \int_0^{l_I} \sigma_I(0, l) dl \quad (2.7)$$

получим искомый закон погружения сваи для первого удара

$$\frac{l}{3} l_I^3 + \frac{l + \eta}{\xi} l_I^2 - \frac{2}{\xi} A = 0. \quad (2.8)$$

Используя обозначение

$$y = l_I + \frac{l + \eta}{\xi}, \quad (2.9)$$

приведем уравнение (7) к удобному для анализа виду

$$y^3 + 3\gamma_I y + 2\delta_I = 0, \quad (2.10)$$

Для анализа решений уравнения (10) исследуем его дискриминант

$$D = \gamma_l^3 + \delta_l^3 = \frac{3}{\xi} A \left[\frac{3}{\xi} A - 2 \left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^3 \right]. \quad (2.11)$$

Положим, что $D = 0$. При этом A имеет два значения:

$$1. \quad A = 0 \quad (\delta_l > 0), \quad (2.12)$$

а уравнение (10) принимает вид

$$y^3 - 3 \left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^2 y + 2 \left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^3 = 0. \quad (2.13)$$

Последнее имеет один положительный и два отрицательных корня

$$y_l^{(1,2)} = -2 \frac{l + \eta}{\xi}; y_l^{(3)} = \frac{l + \eta}{\xi}, \quad (2.14)$$

где верхние значки y здесь и далее относятся к номеру корня.

Соответствующая осадка имеет значения

$$l_l^{(1,2)} = -3 \frac{l + \eta}{\xi}, \quad l_l^{(3)} = 0, \quad (2.15)$$

то-есть, как и следовало ожидать в этом случае свая не имеет осадки.

$$2. \quad A = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{\xi^2} (l + \eta)^3 \quad (\delta_l < 0), \quad (2.16)$$

Уравнение (10) при этом имеет вид

$$y^3 - 3 \left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^2 y - 2 \left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^3 = 0, \quad (2.17)$$

корни которого

$$y_l^{(1)} = 2 \frac{l + \eta}{\xi}; \quad y_l^{(2,3)} = \frac{l + \eta}{\xi}, \quad (2.18)$$

соответствующая работе (16) осадка l_l имеет величину

$$l_l = \frac{l + \eta}{\xi}. \quad (2.19)$$

Два другие корня уравнения (10) отрицательны.

Пусть теперь дискриминант D больше нуля, то-есть

$$0 < A < \frac{2}{3} \frac{(l + \eta)^3}{\xi^2}. \quad (2.20)$$

При изменении A в пределах (20) δ_l меняет положительное

значение через нуль на отрицательное, а уравнение (10) может быть записано в виде

$$y^3 - 3\left(\frac{1+\eta}{\xi}\right)^2 y + 2(1-\theta)\left(\frac{1+\eta}{\xi}\right)^3 = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2, \quad (2.21)$$

которое при указанном пределе изменения θ имеет шесть тригонометрических корней

$$y_1^{(1)} = -2\frac{1+\eta}{\xi} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(1-\theta)\right], \quad (2.22)$$

$$y_1^{(2,3)} = 2\frac{1+\eta}{\xi} \cos\frac{1}{3}[\pi \pm \arccos(1-\theta)] \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq 1;$$

$$y_1^{(1)} = 2\frac{1+\eta}{\xi} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(\theta-1)\right], \quad (2.23)$$

$$y_1^{(2,3)} = -2\frac{1+\eta}{\xi} \cos\frac{1}{3}[\pi \pm \arccos(\theta-1)] \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta \leq 2.$$

Легко видеть, что соответствующая работе (20) осадка l_1 , будет описываться двумя выражениями

$$l_1 = \frac{1}{\xi}(1+\eta) \left\{ 2\cos\frac{1}{3}[\pi - \arccos(1-\theta)] - 1 \right\}, \quad 0 \leq \theta \leq 1; \quad (2.24)$$

$$l_1 = \frac{1}{\xi}(1+\eta) \left[2\cos\frac{1}{3}\arccos(1-\theta) - 1 \right], \quad 1 < \theta < 2.$$

Остальные корни уравнения (8) отрицательны.

И наконец, пусть дискриминант уравнения (10) больше нуля. Этому знаку дискриминанта соответствует значение работы молота

$$A > \frac{2}{3} \frac{l}{\xi} (1 + \eta)^3. \quad (2.25)$$

Соответствующую осадку найдем, решая уравнение (21) при $\theta < 2$. При этом значении θ (21) имеет три трансцендентных корня:

$$\begin{aligned} y_l^{(1)} &= 2 \frac{1 + \eta}{\xi} ch \left[\frac{1}{3} arch(\theta - 1) \right], \\ y_l^{(2,3)} &= - \frac{1 + \eta}{\xi} ch \left[\frac{1}{3} arch(\theta - 1) \right] \pm \\ &\pm i \sqrt{3} ch \left[\frac{1}{3} arch(\theta - 1) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Искомая величина l_l определяется по формуле

$$l_l = \frac{l}{\xi} (1 + \eta) \left[2 ch \left(\frac{1}{3} arccos(1 - \theta) \right) - 1 \right]. \quad (2.27)$$

Остальные два значения l_l комплексные.

При следующем падении молота граничные условия изменяются:

$$\begin{aligned}\sigma_2[l_1 + l_2, P_1(l_1 + l_2)] &= -\eta(l_1 + l_2), \\ \sigma_2[0, P_2(l_1 + l_2)] &= -P_2\end{aligned}\tag{2.28}$$

и новое напряжение будет

$$\sigma_2(x, P_2) = \frac{l}{2}\xi[x^2 - (l_1 + l_2)^2] + x - (1 + \eta)(l_1 + l_2).\tag{2.29}$$

Осадку l_2 , отвечающую второму удару молота, получаем из выражения (29) при учете второго условия

$$l_2 = \left[\left(\frac{1 + \eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} p_2 \right]^{\frac{l}{2}} - \left[\left(\frac{1 + \eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} p_1 \right]^{\frac{l}{2}}.\tag{2.30}$$

Аналогично для третьего удара получим

$$l_3 = \left[\left(\frac{1 + \eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} p_3 \right]^{\frac{l}{2}} - \left[\left(\frac{1 + \eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} p_2 \right]^{\frac{l}{2}}.\tag{2.31}$$

Для n - го удара выражение осадки l_n на основании (2.30) и (2.31) можно записать по аналогии

$$l_n = \left[\left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} P_n \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} P_{n-1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.32)$$

где

$$P_n = \frac{l}{2} \xi (l_1 + l_2 + \dots + l_n)^2 + (l + \eta)(l_1 + l_2 + \dots + l_n). \quad (2.33)$$

Сопротивления сваи P_n связано с работой падения молота равенством

$$A = \int_0^{l_n} P_n (l_1 + \dots + l_{n-1} + l) dl, \quad (2.34)$$

которая для более общего случая, когда с погружением сваи высота падения молота, меняется, будет иметь вид

$$A = \int_0^{l_n} P_n \left(l_1 + \sum_1^{n-1} l_i \right) dl - \sum_1^n A_{i-1}, \quad (2.35)$$

где A_{i-1} - приращение работы падения молота за счет осадки сваи при i - том ударе; причем A_0 равно нулю. Для свободного падающего молота (35) примет вид

$$A = \int_0^{l_n} P_n dl - M \sum_1^n l_{i-1}, \quad (2.36)$$

где M – безразмерная масса молота, равная $\frac{m}{kS}$; m - масса молота.

Для нахождения закона погружения в зависимости от работы падения молота, которую сейчас считаем постоянной, из равенства (34) при учете (33) получим алгебраическое уравнение

$$\frac{1}{3} \left(\sum_l^n l_i \right)^3 + \frac{1+\eta}{\xi} \left(\sum_l^n l_i \right)^2 - \frac{2}{\xi} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) = 0, \quad (3.37)$$

где

$$\int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} \left(l + \sum_l^{n-2} l_l \right) dl = \frac{1}{\sigma} \xi \left(\sum_l^{n-1} l_i \right)^3 + \frac{1+\eta}{\xi} \left(\sum_l^{n-1} l_i \right)^2. \quad (2.38)$$

Производя замену

$$y = \sum_l^n l_i + \frac{1+\eta}{\xi}, \quad (2.39)$$

получим уравнение, аналогичное уравнению (10)

$$y^3 + 3\gamma_n y + 2\delta_n = 0, \quad (2.40)$$

где

$$\gamma_n = \gamma_l = - \left(\frac{1+\eta}{\xi} \right)^2, \quad \delta_n = \left(\frac{1+\eta}{\xi} \right)^3 - \frac{3}{\xi} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right). \quad (2.41)$$

Число действительных решений уравнения (40) будет зависеть от знака дискриминанта

$$D = \frac{3}{\xi} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl \right) \left[\frac{3}{\xi} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl \right) - 2 \left(\frac{l + \eta}{\xi} \right)^3 \right]. \quad (2.42)$$

Пусть $D = 0$, то-есть

$$A = \frac{2}{3} \frac{l}{\xi^2} (l + \eta)^3 - \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl \quad (\delta_n < 0). \quad (2.43)$$

Уравнение (40) имеет три действительных решения, два из которых совпадают:

$$y_n^{(l)} = 2 \frac{l + \eta}{\xi}; \quad y_n^{2,3} = -\frac{l + \eta}{\xi}. \quad (2.44)$$

Соответствующие решения основного уравнения (37) получим из (39)

$$l_n = \frac{l + \eta}{\xi} - \sum_l^{n-1} l_i; \quad (2.45)$$

два другие корня отрицательны.

Пусть дискриминант (42) меньше нуля, то-есть

$$0 < A < \frac{2}{3} \frac{(l + \eta)^3}{\xi^2} - \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl. \quad (2.46)$$

При этом δ_n меняет положительный знак через нуль на отрицательный и уравнение (40) для этого случая можно записать в виде

$$y^3 - 3\left(\frac{l+\eta}{\xi}\right)^2 y + 2\left(\frac{l+\eta}{\xi}\right)^3 - \frac{3}{\xi}\left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl\right) = 0. \quad (2.47)$$

В зависимости от знака δ_n уравнение (47) будет иметь две группы решений: первая

$$y_n^{(1)} = -2\frac{l+\eta}{\xi} \cos \frac{l}{3} \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl \right) \right], \quad (2.48)$$

$$y_n^{(2,3)} = 2\frac{l+\eta}{\xi} \cos \frac{l}{3} \left\{ \pi \pm \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl \right) \right] \right\},$$

которая справедлива для

$$0 < A \leq \frac{2}{3} \frac{l}{\xi^2} (l+\eta)^3 - \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl$$

и вторая

$$y_n^{(l)} = 2 \frac{l+\eta}{\xi} \cos \frac{l}{3} \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right], \quad (2.49)$$

$$y_n^{(2,3)} = -2 \frac{l+\eta}{\xi} \cos \frac{l}{3} \left\{ \pi \pm \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right] \right\},$$

которая справедлива при

$$l < \frac{3\xi^2}{(l+\eta)^3} \cdot \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \leq 2$$

При величине работы молота, находящегося в пределах (46) осадка сваи n -го удара будет

$$l_n = 2 \frac{l+\eta}{\xi} \cos \frac{l}{3} \left\{ \pi - \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right] \right\} - \quad (2.50)$$

$$- \frac{l+\eta}{\xi} + \sum_l^{n-l} l_i \quad \text{при} \quad \delta_n > 0;$$

$$l_n = 2 \frac{l+\eta}{\xi} \cos \frac{l}{3} \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right] - \quad (5.51)$$

$$- \frac{l+\eta}{\xi} + \sum_l^{n-l} l_i \quad \text{при} \quad \delta_n > 0.$$

При $\delta_n = 0$ уравнение (47) имеет три простейших корня

$$y_n^{(1)} = 0, \quad y_n^{(2,3)} = \mp \sqrt{3} \frac{l + \eta}{\xi}. \quad (2.52)$$

Первые два корня соответствуют двум отрицательным корням (37), а третий дает

$$l_n = \sqrt{3} \frac{l + \eta}{\xi} - \sum_l^{n-1} l_i. \quad (2.53)$$

Такую осадку при n -ом ударе получаем при величине работы молота

$$A = \frac{l}{3\xi^2} (l + \eta)^3 - \int_0^{l_{n-1}} P_{n-l} dl. \quad (2.54)$$

Если дискриминант уравнения (40) положителен, что возможно, когда имеет значения большие чем правая часть (46), то уравнение (47) будет иметь трансцендентные решения

$$y_n^{(1)} = 2 \frac{l + \eta}{\xi} ch \frac{l}{3} arch \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l + \eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-l} dl \right) \right], \quad (2.55)$$

$$y_n^{(2,3)} = -\frac{l + \eta}{\xi} \left\{ ch \frac{l}{3} arch \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l + \eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-l} dl \right) \right] \right.$$

$$\left. \pm i\sqrt{3} ch \frac{l}{3} arch \left[1 - \frac{3\xi^2}{(l + \eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-l} dl \right) \right] \right\}.$$

Соответствующая указанному пределу изменения работы осадка имеет выражение

$$l_n = \frac{l}{\xi}(1+\eta) \left\{ ch \frac{l}{3} arch \left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl \right) \right] - l \right\} - \sum_1^{n-1} l_i. \quad (2.56)$$

Кривая квазистатического осаживания в зависимости от номера удара при данной величине работы приведена на рисунок 5.

Для более общего характера работы уравнение осадки будет иметь вид

$$\frac{l}{3} \left(\sum_1^n l_i \right)^3 + \frac{l+\eta}{\xi} \left(\sum_1^n l_i \right) - \frac{2}{\xi} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl - M \sum_1^n l_{i-1} \right) = 0. \quad (2.57)$$

Производя замену (39), получим уравнение (40), где коэффициент при неизвестной первой степени и свободный член будут иметь выражения

$$\gamma_n = \left(\frac{l+\eta}{\xi} \right)^2, \quad \delta_n = \left(\frac{l+\eta}{\xi} \right)^3 - \frac{3}{\xi} \left(A + \int_0^{l_{n-1}} P_{n-1} dl - M \sum_1^n l_{i-1} \right) = 0. \quad (2.58)$$

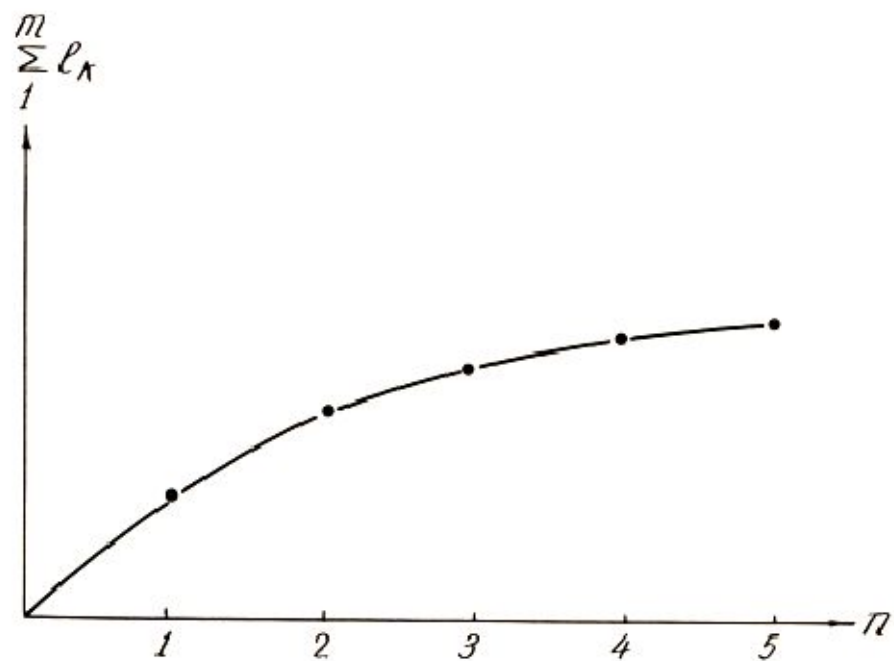


Рисунок 5

Кривая осадка в зависимости от номера удара (при заданной величине работы A).

На основании анализа дискриминанта преобразованного уравнения для (57) имеем следующие решения

$$l_n = \frac{2}{\xi}(1+\eta)\cos\frac{l}{3}\left\{\pi - \arccos\left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3}\left(A + M\sum_l^n l_{i-l} + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl\right)\right]\right\} - \quad (2.59)$$

$$-\left(\frac{1+\eta}{\xi} + \sum_l^{n-l} l_i\right) \text{ при } A \leq \frac{l}{3\xi^2}(1+\eta)^3 - M\sum_l^n l_{i-l} + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl,$$

$$l_n = \frac{l}{\xi}(1+\eta)\left\{2\cos\frac{l}{3} - \arccos\left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3}\left(A + M\sum_l^n l_{i-l} + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl\right)\right]\right\} - \quad (2.60)$$

$$-l\left\{\sum_l^{n-l} l_i \quad \text{при } 1 < \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3}\left(A + M\sum_l^n l_{i-l} + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl\right) \leq 2,\right.$$

$$l_n = \frac{l}{\xi}(1+\eta)\left\{2\operatorname{ch}\frac{l}{3} - \operatorname{arccch}\left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3}\left(A + M\sum_l^n l_{i-l} + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl\right)\right] - l\right\} - \sum_l^{n-l} l_i \quad (2.61)$$

$$\text{при } \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3}\left(A + M\sum_l^n l_{i-l} + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl\right) < 2.$$

3 Несущая способность сваи

Несущая способность сваи $P_n = P_n(P_{n-1}, A)$, как легко видеть из (33) и (34), определяется выражением

$$A = \frac{1}{\xi} \int_{P_{n-1}}^{P_n} \frac{P dp}{\left[\left(\frac{1+\eta}{\xi} \right)^2 + \frac{2}{\xi} P \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.62)$$

которое после выполнения операции интегрирования в правой части сводится к алгебраическому уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{8}{\xi^3} P_n^3 - \frac{12}{\xi^2} \left(\frac{1+\eta}{\xi} \right)^2 P_n^2 + 4 \left(\frac{1+\eta}{\xi} \right)^6 - \\ & - \left[\frac{6}{\xi} A + \frac{8}{\xi^3} P_{n-1}^3 - \frac{12}{\xi^2} \left(\frac{1+\eta}{\xi} \right)^2 P_{n-1}^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Тогда для первого удара при $A = \frac{\theta}{2\xi^2} (1+\eta)^3$ имеем следующие решения

$$P_1 = \frac{1}{2\xi} (1+\eta)^2 \left\{ \cos^2 \frac{1}{3} [\pi - \arccos(1-\theta)] - 1 \right\} + \frac{1}{\xi} (1+\eta)^2 \quad (2.64)$$

$$\left[\cos \frac{1}{3} (\arccos(1-\theta)) - \sqrt{3} \sin \frac{1}{3} \arccos(1-\theta) \right] \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq 1;$$

$$P_l = \frac{l}{2\xi}(1+\eta)^2 \left[4\cos^2 \left[\frac{l}{3} \arccos(l-\theta) - l \right] \right] \quad \text{при } 1 < \theta \leq 2; \quad (2.65)$$

$$P_l = \frac{l}{2\xi}(1+\eta)^2 \left[4ch^2 \frac{l}{3} \operatorname{arch}(\theta - l) - l \right] \quad \text{при } \theta > 2. \quad (2.66)$$

Пользуясь выражением напряжения для n -го удара

$$\sigma_n = \frac{l}{\xi} \left[x^2 - \left(\sum_l^n l_i \right)^2 \right] + x - (1+\eta) \sum_l^n l_i \quad (2.67)$$

в точке $x = 0$ с учетом (59), (60) и (61) получим сопротивление сваи P_n для любого номера удара n :

$$\begin{aligned} P_n = & \frac{l}{2\xi}(1+\eta)^2 \cos^2 \frac{l}{3} \left\{ \pi - \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right] \right\}^2 + \\ & + \frac{l}{\xi}(1+\eta) \left\{ \cos \frac{l}{3} - \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right] - \right. \\ & \left. - \sqrt{3}sh \frac{l}{3} \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) - l \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$A \leq \frac{l}{3\xi^2}(1+\eta)^3 - \int_0^{l_{n-l}} l_{n-l} dl;$$

$$P_n = \frac{l}{2\xi}(1+\eta)^2 \left\{ 4\cos^2 \frac{l}{3} \arccos \left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right] - l \right\}, \quad (2.69)$$

$$l < \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \leq 2;$$

$$P_n = \frac{l}{2\xi}(1+\eta)^2 \left\{ 4ch^2 \frac{l}{3} \operatorname{arcch} \left[1 - \frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) \right] - l \right\}, \quad (2.70)$$

$$\frac{3\xi^2}{(1+\eta)^3} \left(A + \int_0^{l_{n-l}} P_{n-l} dl \right) > 2.$$

РАЗДЕЛ II. ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ СВАИ

Настоящий раздел включает в себе следующие две главы. В главе III исследуется вопрос определения сопротивления сваи в динамической постановке. При этом предполагается, что свая либо целиком забита в грунт, либо, если забита неполностью, то влиянием свободного участка на величину осадка можно пренебречь. Задача рассматривается как при наличии одного лобового и одного бокового сопротивления, так и для общего случая.

В конце главы III решается динамическая задача извлечения.

Задачи главы IV исследуются методом операционного исчисления. Здесь проводится в динамической постановке исследование задачи определения отказа и сопротивления сваи со свободным участком. Результаты показывают, что молчаливое допущение исследователей, что свободная часть сваи не оказывает никакого влияния на величину отказа не обосновано, наоборот, при всех прочих равных условиях отказ сваи со свободным участком может значительно отличаться от отказа полностью зажатой в грунте сваи и тем существеннее, чем больше эта часть. Рассмотрена также задача для общего закона распределения давления по длине сваи.

В конце главы IV исследуется задача определения отказа и сопротивления сваи, зажатой в многослойном грунте. Более подробно исследуется случай, когда число слоев грунта равно двум.

ГЛАВА III. ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ СВАИ ПО ОТКАЗУ (СВАЯ, ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННАЯ В ГРУНТ)

Содержание динамического метода определения сваи по отказу состоит в практическом определении величины отказа и некоторых параметров, связанных со свайей и в воспользовании затем энергетической формулой.

Более полный подход к выявлению явлений, сопровождающих забивку или контрольные удары по свае возможен при исследовании вопроса с точки зрения волновой теории.

Проблемы распространения волн в деформируемых телах развиваются в работах Х.А. Рахматулина, В.В. Сокловского, Л.В.Никитина и ряда других исследователей.

В 1930 году Н.М. Герсевановым была опубликована работа «Теория продольного удара с применением к определению сопротивления свай». «Данная работа,- писал об этом труде Н.М. Герсеванов,- представляет собою первый опыт разрешения вопроса об определении сваи на основе точной теории упругости. До настоящего времени этот вопрос в такой постановке никем еще не был затронут и разрешен. Преимущество примененного метода перед остальными, более грубыми заключается в том, что он дает полное освещение явлений при забивке свай».

Постановка задач по определению сопротивления динамическим методом, приводимых в настоящей главе, фактически принадлежит Н.М. Герсеванову. К сожалению,

некоторые досадные упущения не дали ему возможность получить адекватные результаты.

Из работ, имеющих прямое отношение к динамическому методу отметим работы О.Я. Шехтер [15, 18], Д.Д.Баркана [18,19].

Результаты настоящей и следующей глав в известной мере основаны на работах Л.В. Никитина [1,2].

1 Условия удара по упругой свае. Постановка задачи и основные уравнения

При ударе молотом по свае удар в первую очередь воспринимается верхним сечением сваи, а затем он распространяется в виде волны со скоростью звука в материале сваи. С момента удара происходит совместное движение молота и верхнего сечения сваи. При этом возможны два случая: первый – скорости молота и верхнего сечения сваи одинаковы; второй – скорость молота больше скорости смещения упомянутого сечения сваи. Так как в начальный момент $t = 0$ удар воспринимается только верхним сечением, в то время как другие сечения еще не «ощущают» происшедшего удара, то ясно, что вся энергия от разности скоростей тратится на определенный эффект вблизи головы сваи, а именно, если напряжение на голове сваи превосходит предел упругости материала сваи, то указанный эффект выразится в развитии неупругих явлении; в противном случае деформация головы сваи будет упругой и не будет никаких тенденций к разрушению. В связи с этим для дальнейшего примем

следующие допущения: первое – напряжение головы сваи при ударе не превышает предела упругости материала сваи, второе – соприкосновение молота и верхнего сечения сваи в момент удара полное, сами соприкасающиеся поверхности гладкие.

Во всем дальнейшем будем считать также, что плоские до деформации поперечные сечения остаются плоскими после деформации.

Далее, предположим, что свая длины l целиком заглублена в грунт с известным законом давления грунта по длине сваи. Начало координат расположено в нижнем сечении стержня, положительная ось x направлена по оси стержня вверх.

Пусть теперь по концу $x=l$ в момент $t=0$ происходит удар жестким телом массы M , летящим со скоростью v_0 . Будем считать при этом, что боковая поверхность будет взаимодействовать с окружающим грунтом по закону сухого трения Кулона. Тогда, если между грунтом и сваем имеет место проскальзывание, то касательное напряжение на боковой поверхности будет равно $f \cdot N(x)$, где $N(x)$ – боковое давление на сваю f – коэффициент трения между материалами среды и сваи, который вообще говоря, может зависеть от скорости, однако в первом приближении ему можно приписать некоторое постоянное динамическое значение. Если имеет место срез по грунту, то касательное напряжение на боковой поверхности можно характеризовать условием предельного равновесия Кулона и оно будет равно $c + N \tan \varphi$, где c – сцепление грунта, а φ – угол внутреннего трения.

Сопротивление на нижнем конце считаем не превышает некоторого критического значения R , причем, если сила на нижнем конце не достигает этого значения, то нижний конец покоится, а в противном случае происходит погружение стержня при постоянном противодействии на этом конце, то-есть движение нижнего конца подчиняется жестко-пластической схеме.

Для вывода дифференциального уравнения движения достаточно рассмотреть стержень с единичной площадью поперечного сечения. Выделим в стержне элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz . На верхней и нижней поверхностях его будут действовать напряжения $\sigma(x, t)$ и $\sigma(x, t) + \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t}$. Для удобства рассмотрения вопроса будем предполагать, что сила трения выступает как объемная сила, приложенная к материалу сваи. Последнее утверждение не окажет заметного влияния на результат в виду малости поперечного размера по сравнению с длиной сваи. Тогда на указанный элемент будет действовать сила $f \frac{NL}{S} dx dy dz$, направленная в сторону противоположную движению сваи, где L - периметр контакта поперечного сечения сваи с грунтом. По принципу Даламбера на элементарный параллелепипед будет действовать также сила инерции $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy dz$, возникающая от движения этого параллелепипеда, где u - смещение произвольного сечения сваи, t - время, ρ - плотность материала сваи.

Суммируя силы, действующие на указанный элемент стержня, получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \chi \frac{fNL}{S} \quad (3.1)$$

или записывая это уравнение через смещение $\left(\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \chi \frac{fNL}{Sp}, \quad (3.2)$$

где $a = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ - скорость распространения возмущения в материале сваи. Величина χ в случае движения совпадает со знаком скорости ($\chi = \text{sgn } v$), а случае покоя принимает любое значение в пределах от -1 до +1. Для определенности будем рассматривать сжимающий удар. Тогда при наличии движения $\chi = -1$.

Запишем начальные и граничные условия задачи, которыми придется пользоваться в дальнейшем. На верхнем конце сваи имеем условие совместного движения верхнего сечения сваи $\chi = 1$ и молота, определяющееся началом Даламбера

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = - \frac{M}{S} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} \quad (3.3)$$

а так же скорость этого сечения в момент

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x = l/a. \quad (3.4)$$

На нижнем конце задано напряжение

$$\sigma = -R \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > l. \quad (3.5)$$

Последнее условие означает, что лобовое сопротивление вступает в работу с того момента, когда прямая волна напряжения достигает сечения $x = 0$.

В начальный момент времени сваю считаем ненапряженным и покоящимся, то-есть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad 0 \leq x < l, \quad (3.6)$$

$$U = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Для простоты параметры задачи E, L, l, c, S считаем постоянными и, кроме того, для упрощения записи введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{at}{l}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{a\rho v_0}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \tilde{u} = \frac{au}{v_0 l},$$

$$\gamma = \frac{f l L N}{S a v_0 \rho}, \quad m = \frac{M}{\rho l S}, \quad \tilde{R} = \frac{a R}{E v_0 S}. \quad (3.7)$$

В отличие от статических задач (раздел I, глава I) в динамических задачах (раздел II, глава III, IV) будем считать, что сила трения не меняет знака.

Знак скорости χ в области, где возникло движение, как отмечено выше, является отрицательным, а область покоя от области движения во всяком случае в первые моменты после удара отделяется характеристикой $\tau + \xi = l$. поэтому для χ имеем

$$\chi = -H(\tau + \xi - l), \quad (3.8)$$

где $H(z)$ есть единичная функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z \geq 0$. Если принять во внимание участок сваи, выступающий над грунтом, то касательное напряжение на боковой поверхности сваи будет носить явно разрывный характер. Обозначая через l_1 заглубленную часть сваи, а через l_2 общую длину сваи для χ будем иметь следующее выражение

$$\chi = [1 - H(\xi - l_1)] H(\tau + \xi - l_2). \quad (3.9)$$

Для параметров l_1 и l_2 введем безразмерные обозначения

$$\tilde{l}_i = \frac{l_i}{l_1} \quad (i = 1, 2).$$

В дальнейшем знак тильда над безразмерными величинами опустим. Тогда в безразмерных обозначениях имеем следующие уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \gamma(\xi)H(\tau + \xi - l), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \gamma(\xi)[l - H(\xi - l_1)]H(\tau + \xi - l_2), \quad (3.11)$$

Первое есть уравнение движения полностью забитой сваи, второе – уравнение движения сваи со свободным участком, которые следует решать совместно со следующими условиями, записанными также в безразмерных величинах:

условия на конце $\xi = 0$ и ударяемом конце $\xi = l$ ($\xi = l_2$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -R \cdot H(\tau - l) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} = -R \cdot H(\tau - l_2) \right); \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \text{при} \quad \xi = l \quad (\xi = l_2), \quad \tau > 0; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -l \quad \text{при} \quad \xi = l \quad (\xi = l_2), \quad \tau = 0.$$

и начальные условия

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad 0 \leq \xi < l \quad (0 \leq \xi < l_2), \quad (3.13)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (0 \leq \xi \leq l_2),$$

Прежде рассмотрим наиболее простой случай, когда $\gamma(\xi) \ll R$, а поэтому при нахождении отказа сваи $\gamma(\xi)$ полагаем равным нулю, принимая во внимание одно лобовое сопротивление R .

2 Сопротивление упругой сваи при наличии одного лобового сопротивления

Исследуем продольный удар по свае, которую рассматриваем как упругий стержень. Исследуя процесс распространения упругой волны, определим в этом параграфе отказ сваи-стойки, нижний конец которой полагаем неподвижным до тех пор, пока давление в нем остается ниже определенной величины R , равной сопротивлению грунта.

Пусть в начальный момент $t = 0$ по сечению $x = 0$ происходит удар молотом массы M , падающим со скоростью $-v_0$. При этом по достижению волны нижнего конца $\xi = 0$ напряжение в нем удвоится, если только удельное сопротивление осаживанию на этом конце больше, чем удвоенное напряжение. В этом случае осаживание не может произойти в течение первой прямой и отраженной волны, а может последовать лишь при повторной волне. Предположим, что осаживание сваи начинается с первой волной, то-есть удельное сопротивление меньше, чем удвоенное напряжение на указанном конце. Тогда при условии, что в начальный момент времени свая является ненапряженной и покоящейся, найдем зависимость между осадкой сваи $u(T, 0) = u_0$,

моментом остановки $t = T$, коэффициентом m и скоростью молота $|v_0|$ в момент $t = 0$.

Для этого частного случая решение Н.М.Герсеванова верно. Мы же расширим пределы применимости последнего, а также получим новые решения для других пределов изменения времени.

При $\gamma(\xi)$, равной нулю, дифференциальное уравнение движения сваи, как это вытекает из (10) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \quad (3.14)$$

Как известно, функция $u(\tau, \xi)$ уравнения (14) выражается через две неизвестные функции

$$u(\tau, \xi) = f(\tau - \xi) + \varphi(\tau + \xi). \quad (3.15)$$

Воспользовавшись условием на напряжение на нижнем конце сваи (12), имеем

$$u(\tau, \xi) = f(\tau - \xi) + f(\tau + \xi) - R(\tau + \xi - l)H(\tau + \xi - l). \quad (3.16)$$

Скорость и напряжение будут иметь выражения

$$\begin{aligned} v(\tau, \xi) &= f'(\tau - \xi) + f'(\tau + \xi) - RH(\tau + \xi - l), \\ \sigma(\tau, \xi) &= -f'(\tau - \xi) + f'(\tau + \xi) - RH(\tau + \xi - l). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из начальных условий следует, что при $\tau = 0, \quad \xi < l \quad \sigma = v = 0$, то-есть

$$f'(-\xi) = f'(\xi) = 0. \quad (3.18)$$

Следовательно, если учесть еще, что в указанной области $(\tau = 0, \quad \xi < l) \quad u = 0$, то

$$f(z) \equiv 0 \quad \text{при} \quad -l < z < l. \quad (3.19)$$

Принимая во внимание выражение (16), из условия совместного движения молота с верхним сечением сваи $\xi = l$ после простых формальных преобразований получим уравнение

$$\begin{aligned} f''(z) + \frac{l}{m} f'(z) = & -f''(z-r) + \\ & + \frac{l}{m} f'(z-r) + \frac{l}{m} R \cdot H(z-l), \quad z = \tau + \xi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

определяющее функцию $f(z)$ для значений аргумента $z > l$. При изменении z в пределах $l < z < 3$ из (20) при учете (19) следует

$$f''(z) + \frac{l}{m} f'(z) = \frac{l}{m} R \cdot H(z-l). \quad (3.21)$$

Решение этого уравнения при начальных условиях (13) дает

$$f(z) = me^{-\frac{z-l}{m}} + R(z-l) - m. \quad (3.22)$$

Значения функции $f(z)$ при $z < l < 3$ дают возможность построить решение (16) в любом сечении стержня до момента прихода волны, возникающей при отражении от конца $\xi = l$. область I (рисунок 7) где $0 < \tau < l - \xi$, является областью покоя. В области II, где $l - \xi < \tau < l + \xi$, решение для скорости и напряжения имеют вид

$$v(\tau, \xi) = \sigma(\tau, \xi) = -e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}. \quad (3.23)$$

В области III, для которой $l + \xi < \tau < 3 - \xi$, решения записываются следующим образом

$$v(\tau, \xi) = -\left(e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} \right) + R, \quad (3.24)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} - e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} \right) - R.$$

Смещение u_0 конца $\xi = 0$, остановка которого происходит в момент времени $\tau = T$, $l < T < 3$, имеет выражение

$$u_0 = m \left[R \left(1 + \ln \frac{2}{R} \right) - 2 \right]. \quad (3.25)$$

Момент остановки T определяется по формуле

$$T = m \ln \frac{2}{R} + 1. \quad (3.26)$$

Неравенство $T \geq 1$ при условии неотрицательности скорости в области зависимости $\xi = 0$, $\tau = T$ дает ограничение

$$R \leq 2. \quad (3.27)$$

Для $T \leq 3$ имеет место неравенство

$$R \leq 2e^{-\frac{2}{m}}. \quad (3.28)$$

На рисунке 6 приведена кривая зависимости отказа u_0 от сопротивления R при различных значениях параметра m . На рисунке 8 показана область (заштрихована) изменения параметров R и m , где полученное решение (25) справедливо.

Построение решения (14) для $z > 3$ связано с рассмотрением уравнения (20). Положим, что требуется найти решение (14) для $3 < z < 5$. Для этого прежде запишем уравнение (20), подставляя в его правую часть выражение (22):

$$f''(z) + \frac{1}{m} f'(z) = \frac{2}{m} R. \quad (3.29)$$

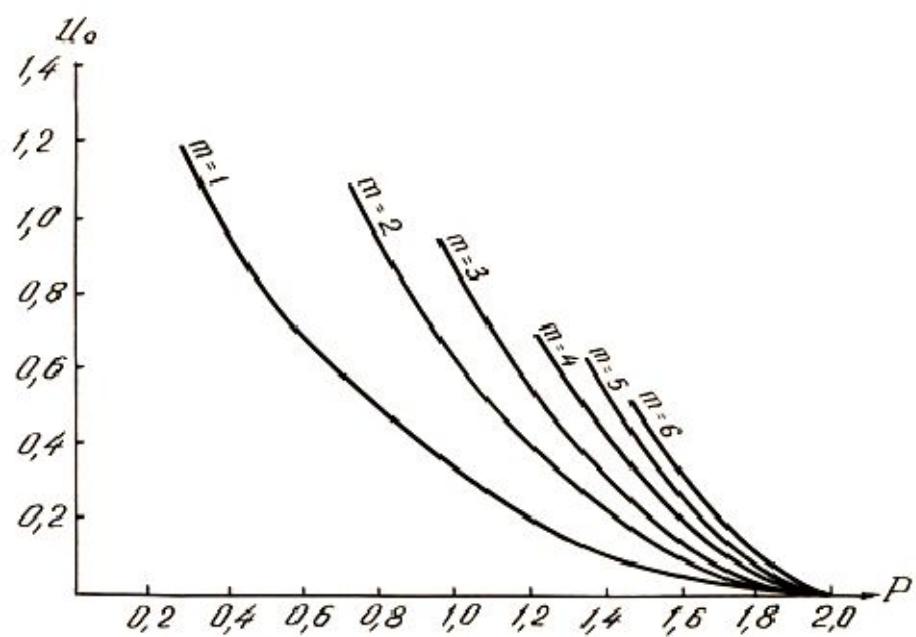


Рисунок 6

Кривые осадки при отсутствии бокового сопротивления.

Решая (29) совместно с условиями непрерывности скорости и смещения в точке $\xi = 2$, $\tau = 1$ и подставляя полученное решение в (16), получим выражение смещения сваи в области IV:

$$\begin{aligned}
 u(\tau, \xi) = & R \left\{ 2 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4} \right) [(\tau - 3)^2 + \xi^2] + (\tau - \xi - 1) \right\} + \\
 & + m \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} - 2 \right) + 2 \left[(\tau + \xi + m - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + \right. \\
 & \left. + (\tau - \xi + m - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Скорости и напряжения в этой области будут

$$\begin{aligned}
 v(\tau, \xi) = & R \left[4 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4} \right) (\tau - 1) + 1 \right] - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) - \\
 & - \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) - \frac{2}{m} \left[(\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + \right. \\
 & \left. + (\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} \right],
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma(\tau, \xi) = & -R \left[4 \left(1 - \frac{4}{m} \right) \xi + 1 \right] + \left(e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} \right) + \\
 & + \frac{2}{m} \left[(\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} + (\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Момент остановки будет определяться из трансцендентного уравнения

$$\left[\frac{2}{m}(T-3)l^{\frac{2}{m}} + l \right] l^{-\frac{T-1}{m}} + R \left[\left(\frac{l}{m} - \frac{l}{4} \right) (T-1) + l \right] = 0, \quad (3.33)$$

а смещение нижнего конца (отказ) сваи будет следовать закону

$$u_0 = R \left[\left(\frac{2}{m} - \frac{l}{2} \right) (T-3) + l \right] (T-1) + 2ml^{-\frac{T-1}{m}} + 4(T+m-3)l^{-\frac{T-1}{m}}. \quad (3.34)$$

Если характеристики грунта и сваи таковы, что остановка конца $\xi = 0$ происходит в момент

$$5 < T < 7 \quad (\text{область V}) \quad (3.35)$$

то решение в этой области, также как и для последующих областей, строится аналогично тому, как это делалось для области IV. При этом для смещения произвольного сечения сваи будем иметь

$$u(\tau, \xi) = \left[\frac{2}{m}(\tau + \xi - 5)^2 + 4(\tau + \xi - 5 + m) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} + \quad (3.36)$$

$$+ \left[\frac{2}{m}(\tau - \xi - 5)^2 + 4(\tau - \xi - 5 + m) \right] e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[(\tau + \xi - 3 + m) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + (\tau - \xi - 3 + m) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} \right] + \\
& + R \left\{ \frac{4}{3} m^2 \left[(\tau - 5)^3 - 3(\tau - 5) \xi^2 \right] + \right. \\
& \left. + \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{2} \right) (2\tau^2 - 19\tau + 2\xi^2 + 36) + \tau - \xi - 1 \right\},
\end{aligned}$$

а скорость и напряжение, как легко видеть, будут соответственно следующими

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) = & -\frac{2}{m} \left\{ \frac{1}{m} \left[(\tau + \xi - 5)^2 e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} + (\tau - \xi - 5)^2 e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} \right] + \right. \\
& + (\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + (\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} - \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) \left. \right\} + \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$+ R \left\{ 4m^2 \left[(\tau - 5)^2 - \xi^2 \right] + \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{2} \right) (4\tau - 19) \right\},$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau, \xi) = & \frac{2}{m} \left\{ \frac{1}{m} \left[(\tau - \xi - 5) e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} - (\tau + \xi - 5) e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} \right] + \right. \\
& + (\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} - (\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} \left. \right\} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} - e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$+ R \left\{ -\frac{24}{3} m^2 \left[(\tau - 5) \xi + \left(\frac{16}{m} - 5 \right) \right] \right\}.$$

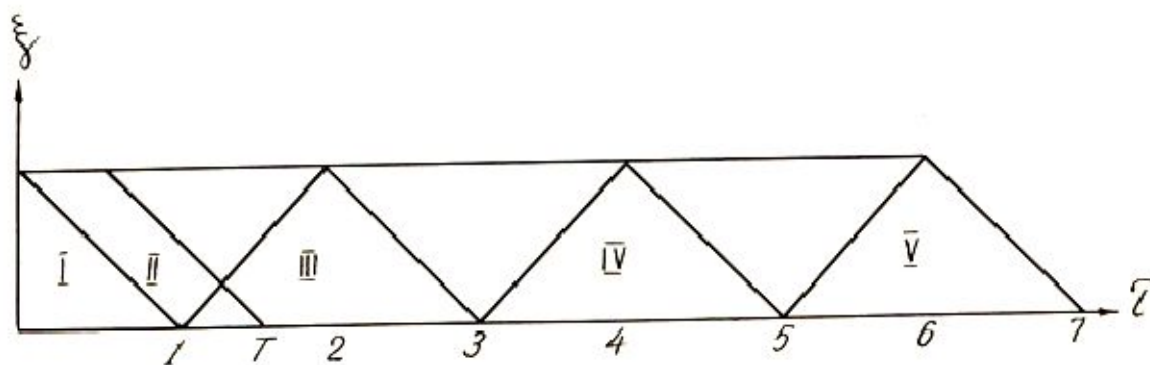


Рисунок 7

Область определения решений.

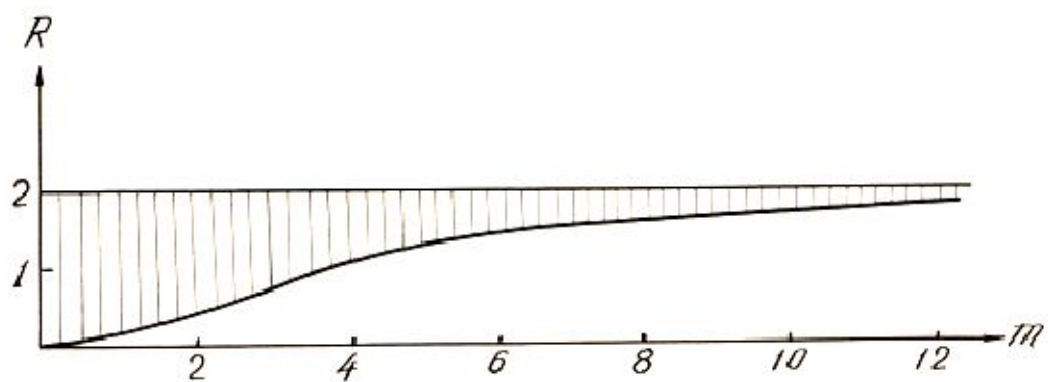


Рисунок 8

Область значений параметров R и m , где скорость в области зависимости точки $\xi = 0, \tau = T$ не меняет знака.

Величина u_0 для области V будет дана формулой

$$\begin{aligned}
 u_0 = & 2 \left\{ \left[\frac{1}{m} (T-5)^2 + 4(T-5+m) \right] e^{-\frac{T-5}{m}} + \right. \\
 & + 2(T-3+m) e^{-\frac{T-3}{m}} + m \cdot \left(e^{-\frac{T-1}{m}} - 1 \right) + \\
 & \left. + R \left\{ \frac{4}{3} m^2 (T-5)^3 + \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{2} \right) (T-3)^2 + \left(\frac{2}{m} - \frac{3}{2} \right) (T-5) + 4 \right\} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Время T определяется из трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{m} \left[\frac{2}{m} (T-5) e^{-\frac{T-5}{m}} + (T-3) e^{-\frac{T-1}{m}} \right] + \\
 & + e^{-\frac{T-1}{m}} R \left[2m^2 (T-5) + \left(\frac{4}{m} - 1 \right) (T-4) - 1 \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Указанным образом, решение задачи может быть построено для любого конечного номера последующих областей полосы $\xi = 1$, $\tau = 0$. Однако, мы здесь не приводим этих решений поскольку они очень громоздки и тем более, что в следующей главе будет дано решение значительно общей задачи, откуда легко будет

выписать как для частного случая общее решение настоящей задачи.

3 Сопротивление упругой сваи при наличии одного бокового давления

Пусть по упругой свае, забитой в грунт на глубину l , осуществляется удар молотом массы M , скорости в момент соприкосновения с верхним сечением - v_0 . Боковая поверхность сваи взаимодействует с грунтом по закону сухого трения Кулона. Из принятого закона взаимодействия следует, что на боковой поверхности сваи действует касательное напряжение fN . Величины f и N для простоты считаем постоянными. При этом уравнением движения будем иметь вид (10), которое решаем совместно с граничными условиями (12) и начальными условиями (13).

Общее решение уравнения (10) можно записать в виде

$$u(\tau, \xi) = f(\tau - \xi) + \varphi(\tau + \xi) + \frac{\gamma}{4}(\tau + \xi - l)(\tau - \xi - c)H(\tau + \xi - l), \quad (3.41)$$

где f и φ - произвольные функции своих аргументов, а c - некоторая константа.

Воспользовавшись условием в сечении $\xi = 0$ (12), можем выразить одну неизвестную функцию через другую

$$f'(\tau) - \varphi'(\tau) + \frac{\gamma(c-1)}{4}(z-1)H(z-1) = 0. \quad (3.42)$$

Следовательно,

$$\varphi(z) = f(z) + \frac{\gamma(c-1)}{4}(z-1)H(z-1) \quad (3.43)$$

или

$$u(\tau, \xi) = f(\tau - \xi) + f(\tau + \xi) + \frac{\gamma}{4}[(\tau - 1)^2 - \xi^2]H(\tau + \xi - 1), \quad (3.44)$$

откуда для скорости и напряжения соответственно имеем

$$V(\tau, \xi) = f'(\tau - \xi) + f'(\tau + \xi) + \frac{\gamma}{4}(\tau - 1)H(\tau + \xi - 1), \quad (3.45)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = -f'(\tau - \xi) + f'(\tau + \xi) - \frac{\gamma}{2}\xi H(\tau + \xi - 1).$$

Из начальных условий (13) следует, что при $\tau = 0$ $\sigma = v = 0$, то-есть

$$f'(-\xi) + f'(\xi) + \frac{\gamma}{4}H(\xi - 1) = 0, \quad (3.45)$$

$$-f'(-\xi) + f'(\xi) - \frac{\gamma}{2}\xi H(\xi - 1) = 0.$$

При $\xi < l$ из этих равенств следует, что $f'(-\xi) = f'(\xi)$ и, следовательно, если учесть еще, что $U = 0$ при $\tau = 0$,

$$f(z) \equiv 0 \quad \text{при} \quad -l < z < l. \quad (3.47)$$

Чтобы найти $l - \xi < \tau < l + \xi$ для других значений аргумента, нужно воспользоваться вторым граничным условием (12), которое после соответствующей замены аргументов дает

$$V(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}(\tau - m) - \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) l^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}, \quad (3.48)$$

При изменении z в пределах $l < z < 3$ из (48) с учетом (47) следует

$$mf''(z) + f'(z) = \frac{\gamma}{2}(l - m). \quad (3.49)$$

Решение этого уравнения при втором условии (13) и третьем условии (12) дает

$$f(z) = \frac{\gamma}{2}(l - m)(z - l) - m \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{\frac{-z - l}{m}} - 1 \right). \quad (3.50)$$

Для других значений аргумента функция $f(z)$ может быть найдена из уравнения (48) аналогичным образом.

Значения функции $f(z)$ в диапазоне $l < z < 3$ дают возможность построить решения в любом сечении сваи до момента прихода волны, возникшей при отражении от конца $\xi = 0$. Нетрудно видеть, что область I, (рисунок 7), есть область покоя. В области II, где $l - \xi < \tau < l + \xi$, решения для скорости и напряжения имеют вид

$$v(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}(\tau - m) - \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}, \quad (3.51)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}(-\xi + l - m) - \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}.$$

В области III, для которой $l + \xi < \tau < 3 - \xi$, решения записываются следующим образом

$$v(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}(\tau + l - 2m) - \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} \right), \quad (3.52)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}\xi + \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} + e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} \right).$$

Решения (51) и (52) справедливы лишь для точек плоскости, в области зависимости которых скорость не меняет знака, т.е. в данной задаче не становится положительной. В противном случае решение нужно искать с учетом того, что в некоторой части плоскости $\tau\xi$ наступает состояние покоя.

Займемся теперь нахождением смещения u_0 конца $\xi = 0$, т.е. отказом сваи. Предположим, что конец $\xi = 0$ останавливается в момент T , удовлетворяющий неравенству $1 \leq T \leq 3$. Это означает, что остановка конца $\xi = 0$ происходит до прихода отраженной волны. Выражение для смещения u_0 в случае, когда в области зависимости точки $\xi = 0$, $\tau = T$ скорость неположительна, имеет вид

$$u_0 = \frac{\gamma}{2} \left[\frac{1}{2} T^2 + (1-m)T + \frac{3}{2}(2m-1) \right] - 2m, \quad (3.53)$$

а момент времени T определяется из трансцендентного уравнения

$$2(2-\gamma m)l^{-\frac{T-1}{m}} \gamma(T-1) + 2\gamma(m-1) = 0. \quad (3.54)$$

Неравенство $T \geq 1$ дает следующее ограничение

$$\gamma \leq 2, \quad (3.55)$$

причем можно показать, что при $\gamma = 2$ и $m \leq 2$ смещение конца $\xi = 0$ отсутствует. Из условия $T \geq 3$ следует, что должно выполняться неравенство

$$\gamma \geq \frac{2}{m + (2-m)e^{\frac{2}{m}}}. \quad (3.56)$$

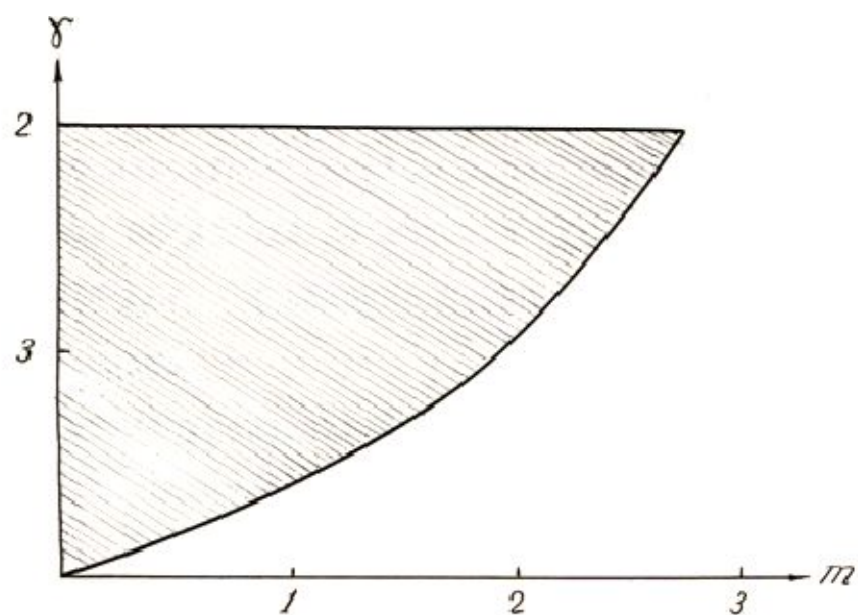


Рисунок 9

область значений параметров γ и m , где скорость в области зависимости точки $\xi = 0, \tau = T$ нигде не меняет знака.

На рисунке 9 приведена область (заштрихована), для которой выполняется неравенство $(1 < T < 3)$. Как показывает анализ для значений параметров γ и m в указанной области скорость в области зависимости $\xi = 0$, $\tau = T$ нигде не становится положительной. Кривая зависимости отказа от сопротивления показана на рисунке 10.

Отметим, что формула (53) не охватывает все случаи остановки конца $\xi = 0$ при $1 < T < 3$ и справедлива лишь при предположении, что скорость в области зависимости точки $\xi = 0, \tau = T$ неположительная. Так например, при $\gamma > 2$ возможен случай, когда остановка произойдет в диапазоне изменения $(1 < T < 3)$. Однако при этом передний фронт возмущения не доходя до сечения $\xi = 0$, отойдет от характеристики $\tau + \xi = 1$ и решение нужно строить с учетом неизвестной границы.

Найдем решение уравнения (10) для промежутка времени с момента первого отражения от конца $\xi = 0$ волны до прихода к концу $\xi = 0$ волны после вторичного отражения от конца $\xi = 1$. В этом случае функция $f(z)$ определяется из уравнения

$$f''(z) + \frac{1}{m} f'(z) = (\gamma m - 2) e^{-\frac{z-3}{m}} + \gamma(m-1), \quad (3.57)$$

которое получено из (48) при учете (50). Решая (57) совместно с условием непрерывности скорости и смещения в точке $\tau = 2$, $\xi = 1$,

и подставляя полученное решение в (44), получим выражение смещения для области IV

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & \left[(2 - \gamma m)(\tau + \xi - 3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m \right) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} \\
& + \left[(2 - \gamma m)(\tau - \xi - 3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m \right) \right] e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} + \\
& + \gamma \left\{ \frac{l}{6m} [(\tau - 3)^3 - 3(\tau - 3)\xi^2] + \left(\frac{l}{m} - \frac{l}{4} \right) \times \right. \\
& \times [(\tau - 3)^2 + \xi^2] + \frac{l}{4} [(\tau - l)^2 - \xi^2] + (l - 2m)(\tau - l) \Big\} + \\
& + m \left(l - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} - 2 \right) + 2\gamma m(l - m).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Скорость и напряжение для этой области будут

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) = & \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) \left[(\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + (\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} \right] - \left(l - \frac{\gamma m}{2} \right) \times \\
& \times \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} \right) + \left\{ \frac{l}{2m} [(\tau - 3)^2 + \xi^2] + \frac{2}{m} (\tau - 3) + l \right\},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

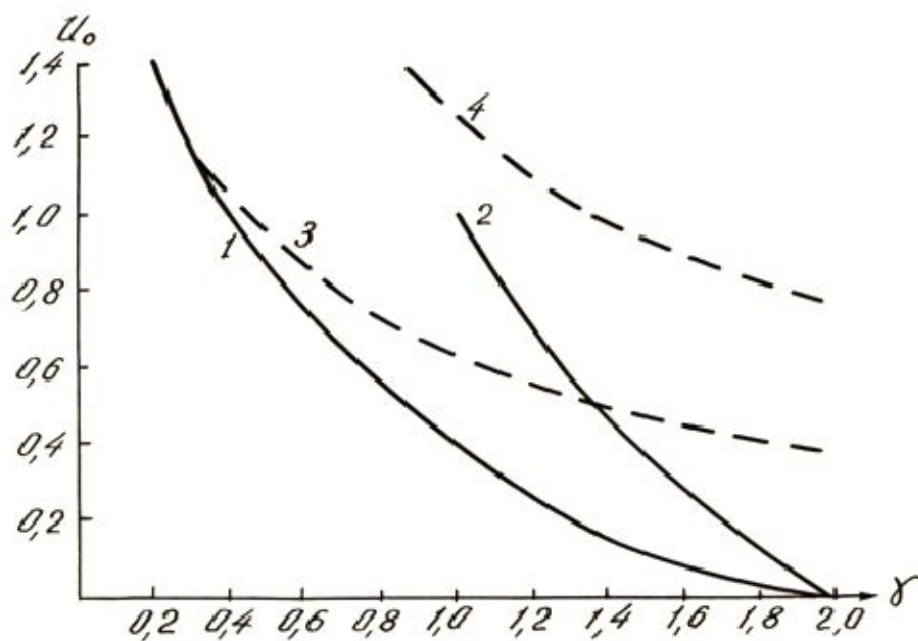


Рисунок 10 – Кривые осадки при отсутствии лобового сопротивления. Кривые 1 и 2 построены по формуле (53) соответственно для $m = 1$ и $m = 2$. Соответствующие кривые 3 и 4 Н.М. Герсевича [3] обозначены пунктирными линиями.

$$\begin{aligned} \sigma(\tau, \xi) = & \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) \left[(\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} - (\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} \right] - \\ & - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} - e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) + \gamma \left[\frac{1}{m} (\tau - 1) + 1 \right] \xi, \end{aligned} \quad (3.60)$$

Момент остановки T , изменяющийся в пределах $3 < T < 5$ будет определяться из трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} & 2 \left[\left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (T - 3) l^{-\frac{T-3}{m}} + \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) l^{-\frac{T-1}{m}} \right] + \\ & + \gamma \left\{ \frac{1}{m} \left[\frac{1}{2} (T - 3)^2 + (T - 3) \right] - 1 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

а смещение (отказ) u_0 будет определяться формулой

$$\begin{aligned} u_0 = & 2 \left[(2 - \gamma m) (T - 3) e^{-\frac{T-3}{m}} + \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) e^{-\frac{T-1}{m}} \right] + \\ & + \gamma \left[\frac{1}{6m} (T - 3)^3 + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4} \right) (T - 3)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (T - 1)^2 + (1 - 2m) (T - 1) + 2m(1 - m) \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Если остановка конца $\xi = 0$ происходит в момент $5 < T < 7$, область V, (рисунок 7), то решение в этой области, так же как и для последующих областей, строится аналогично тому, как это делалось для области IV. В результате для области V получим решение

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & \left\{ \left(\frac{2}{m} - \gamma \right) (\tau + \xi - 5)^2 + [(4 - 3\gamma m) \times \right. \\
& \times (\tau + \xi - 2 + m)] - \gamma m^2 (\tau + \xi - 5) - \gamma m^2 \left. \right\} e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} + \\
& + \left\{ \left(\frac{2}{m} - \gamma \right) (\tau - \xi - 5)^2 + [(4 - 3\gamma m)(\tau + \xi - 5 + m) - \gamma m^2] \times \right. \\
& \times (\tau - \xi - 5) - \gamma m^2 \left. \right\} e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} + \left[(2 - \gamma m)(\tau + \xi - 3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m \right) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + \\
& + \left[(2 - \gamma m)(\tau - \xi - 3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m \right) \right] e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} + m \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \times \\
& \times \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} - 2 \right) + \frac{\gamma}{3m} \left\{ \frac{1}{8m} [(\tau + \xi - 5)^4 + (\tau - \xi - 5)^4] + \right. \\
& + \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{2} \right) [(\tau - 5)^3 - 3(\tau - 5)\xi^2] + \frac{1}{2} [(\tau - 3)^3 - 3(\tau - 3)\xi^2] + \\
& + \gamma \left\{ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4} \right) [(\tau - 3)^2 - \xi^2] + \frac{1}{4} [(\tau - 1)^2 - \xi^2] + \right. \\
& + [\gamma(1 - 8m) + R](\tau - 1) - R\xi + 2\gamma m(13 - m). \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Напряженное и состояние и поле скоростей в этой области будут соответственно определяться выражениями

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau, \xi) = & \left[\frac{1}{m} \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (\tau + \xi - 5)^2 + \gamma(\tau + \xi - 5) \right] \times \\
& \times e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} - \left[\frac{1}{m} \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (\tau - \xi - 5)^2 + \gamma(\tau - \xi - 5) \right] \times \\
& \times e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} + \left[\frac{1}{m} (2 - \gamma m) (\tau - \xi - 3) - \frac{1}{2} \gamma m \right] \times \\
& \times e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} - \left[\frac{1}{m} (2 - \gamma m) (\tau + \xi - 3) - \frac{1}{2} \gamma m \right] \times \\
& \times e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} - e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) + \frac{\gamma}{3m} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{2m} \left[(\tau + \xi - 5)^3 - (\tau - \xi - 5)^3 \right] - 3 \left(\frac{4}{m} - 1 \right) (\tau - 5) \xi \right\} - \\
& - 3\gamma m \left[\frac{1}{m} (\tau - 1) - 1 \right] \xi \Big\} - R.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\nu(\tau, \xi) = & \left[\frac{1}{m} \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (\tau + \xi - 5)^2 + \gamma(\tau + \xi - 5) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} - \\
& - \left[\frac{1}{m} \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (\tau - \xi - 5)^2 + \gamma(\tau - \xi - 5) \right] e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} + \\
& + \left[\frac{1}{m} (\gamma m - 2) (\tau + \xi - 3) + \frac{1}{2} \gamma m \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + \left[\frac{1}{m} (\gamma m - 2) \times \right. \\
& \times (\tau - \xi - 3) + \frac{1}{2} \gamma m \Big] e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) + \frac{\gamma}{3m} \times
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\times \left\{ \frac{l}{2m} [(\tau + \xi - 5)^3 - (\tau - \xi - 5)^3] + 3 \left(\frac{2}{m} - \frac{l}{2} \right) [(\tau - 5)^2 - \xi^2] \right\} \times \\ \times \frac{3}{2} [(\tau - 3)^2 - \xi^2] + \gamma \left(\frac{2}{m} - l \right) (\tau - l) + \gamma \left(l - 8m - \frac{2}{m} + 2 \right) + R.$$

4 Несущая способность упругой сваи при наличии бокового и лобового сопротивлений

Рассмотрим сваю, заглубленную на расстояние l , закон взаимодействия боковой поверхности которой с грунтом такой же, как в задаче §3. Нижний конец сваи, предполагается, работает в такой ситуации, когда напряжение в нем не превышает некоторого предельного значения R , равного удельному сопротивлению грунта на этом конце; причем, если напряжение не достигает R , то нижний конец покоится, а в противном случае, происходит осадка сваи при постоянном противодействии на указанном конце.

Пусть по сечению сваи $x = l$ осуществляется удар молотом, массы M и скорости в момент соприкосновения с верхним сечением сваи - v_0 . Тогда исследуя процесс распространения упругой волны, найдем несущую способность сваи, работающей в указанных условиях. Задача сводится к исследованию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \gamma H(\tau + \xi - l) \quad (3.10)$$

совместно с граничными условиями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= -RH(\tau - l) \text{ при } \xi = 0; \\
m \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} \text{ при } \xi = l, \tau \geq 0; \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= -l \text{ при } \xi = l, \quad \tau = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

и начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0, \quad 0 \leq \xi < l; \tag{3.13}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \tau = 0, \quad 0 \leq \xi < l.$$

Общее решение (10) имеет вид (41). Воспользовавшись первым условием (12), получим следующее решение уравнения

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) &= f(\tau - \xi) + f(\tau + \xi) + (\tau + \xi - l) \times \\
&\times \left[\frac{\gamma}{4} (\tau - \xi - l) - R \right] H(\tau + \xi - l).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Из начальных условий (13) следует, что

$$f(z) \equiv 0 \text{ при } -l < z < l. \tag{3.67}$$

Чтобы определить $f(z)$ для других значений аргумента воспользуемся условием совместного движения ударника и верхнего конца сваи $\xi = l$, которое дает

$$f''(z) + \frac{l}{m} f'(z) = -f''(z-2) + \frac{l}{m} f'(z-2) + \left[\frac{l}{m} R + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{l}{m} - 1 \right) \right] H(z-1). \quad (3.68)$$

При изменении z в пределах $l < z < 3$ при учете (67) из (68) следует

$$mf''(z) + f'(z) = R + \frac{\gamma}{2}(l-m). \quad (3.69)$$

Решая (69) при втором условии (13) и третьем условии (12), имеем

$$f(z) = \left[R + \frac{\gamma}{2}(l-m) \right] (z-1) + m \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{z-l}{m}} - 1 \right). \quad (3.70)$$

Значения функции $f(z)$ в указанном диапазоне изменения аргумента дают возможность построить решение (66) в любом сечении сваи до момента возвращения волны, отраженной от конца $\xi = l$. На плоскости τ, ξ решение будет лежать в полосе $0 \leq \xi \leq l$, $\tau \geq 0$. Область $0 < \tau < l - \xi$ - область покоя. В области $l - \xi < \tau < l + \xi$ решение для скорости и напряжения имеют вид

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) &= \frac{\gamma}{2}(\tau - m) - \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) l^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}, \\
\sigma(\tau, \xi) &= \frac{\gamma}{2}(-\xi + l - m) - \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) l^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

В области $l + \xi < \tau < 3 - \xi$ решение записывается следующим образом

$$v(\tau, \xi) = R + \frac{\gamma}{2}(\tau + l - 2m) - \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(l^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} + l^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} \right), \tag{3.72}$$

$$\sigma(\tau, \xi) = -\left(\frac{\gamma}{2}\xi + R\right) + \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(l^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}} - l^{-\frac{\tau + \xi + l}{m}} \right).$$

Определим отказ сваи $u_0 = u|_{\xi=0}$, если конец $\xi = 0$ останавливается в момент $\tau = T$, удовлетворяющий неравенству $l < T < 3$. Последнее предположение означает, что остановка конца $\xi = 0$ происходит до прихода отраженной от конца $\xi = l$ волны. Тогда смещения u_0 при условии, что в области зависимости $\xi = 0, \tau = T$ скорость неположительная, будет иметь вид

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{\gamma}{4}T^2 + \left[R + \frac{\gamma}{2}(l - m) \right] T + \\
&+ \frac{3}{2}\gamma(2m - l) + (m - l)R - 2m.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Момент остановки определяется из уравнения

$$2(2 - \gamma m)e^{-\frac{T-l}{m}} - \gamma(T-l) + 2(m-l)\gamma - 2R = 0. \quad (3.74)$$

Неравенство $1 \leq T \leq 3$ при условии, что в области зависимости $\xi = 0, \tau = T$ скорость не меняет своего знака, дает два ограничения на параметры

$$R + r \leq 2, \quad \gamma \geq \frac{2 - Rl^{\frac{2}{m}}}{m + (2 - m)e^{\frac{2}{m}}}. \quad (3.75)$$

Отметим, что формула (73) не охватывает все случаи остановки конца $\xi = 0$ при $1 \leq T \leq 3$ и справедлива в указанной области изменения параметров (75). Эта область показана на рисунке 11. Кривая зависимости отказа от сопротивлений показана на рисунке 12.

Если в процессе удара установлены величина отказа u_0 и момент остановки сваи T , то для определения параметров грунта R и γ имеем два уравнения вида (73) и (74). При $1 \leq T \leq 3$ для γ и R имеем

$$\gamma = \frac{2(T-l) - u_0}{m(T+m-l)e^{-\frac{T-l}{m}} + \frac{1}{4}T^2(m-2)T + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} - 5m\right) + (m-l)^2}, \quad (3.76)$$

$$R = \frac{1}{2} \frac{\left[2(T-l) - u_0\right] \left(2me^{-\frac{T-l}{m}} + T + l - 2m\right)}{m(-T+l-m)e^{-\frac{T-l}{m}} - \frac{1}{4}T^2 + (u-m)T + \frac{1}{2}\left(5m - \frac{7}{5}\right) + (m-l)^2} + 2.$$

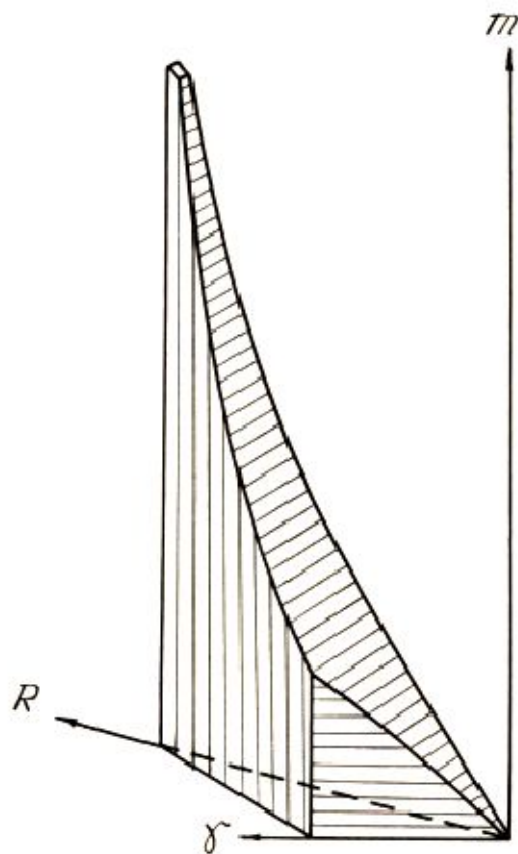


Рисунок 11 Область значений параметров R, γ и m ,
где скорость в области зависимости точки $\xi = 0, \tau = T$ не
меняет знака.

Получим решение уравнения (10) для последующих областей полосы $0 \leq \xi \leq 1$, $\tau > 0$. Для области IV функция $f(z)$ будет определяться из уравнения

$$mf''(z) + f'(z) = \left(\frac{2}{m} + m\right) \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{-\frac{z-3}{m}} + e^{-\frac{z-1}{m}} - 1\right) + \left[R - \frac{\gamma}{2}(1-m)\right]z + \frac{\gamma}{2} \left(m - \frac{1}{m}\right). \quad (3.77)$$

Решая (10) с учетом непрерывности смещения и скорости в точке (2,1), и подставляя полученное значение $f(z)$ в (66), получим следующее решение для смещения

$$\begin{aligned} u(\tau, \xi) = & \left[(2 - \gamma m)(\tau + \xi - 3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m\right) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + \\ & + \left[(2 - \gamma m)(\tau - \xi - 3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m\right) \right] \times \\ & \times e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} + m \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} - 2\right) + \\ & + \frac{\gamma}{6m} \left[(\tau - 3)^3 + 3(\tau - 3)\xi^2 \right] + \gamma \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{2R}{\gamma} + 1\right) \times \\ & \times \left[(\tau - 3)^2 + \xi^2 \right] + \frac{\gamma}{4} \left[(\tau - 1)^2 - \xi^2 \right] + \\ & + [\gamma(1 - 2m) + R](\tau - 1) - R\xi + 2\gamma m(1 - m). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\nu(\tau, \xi) = & \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) \left[(\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + (\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} \right] - \\
& - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) + \gamma \left\{ \frac{1}{2m} [(\tau - 3)^2 + \xi^2] + \right. \\
& + \left[\left(\frac{4}{m} - 1 \right) \frac{R}{\gamma} + \frac{2}{m} \right] (\tau - 1) + 2 \left(1 - m - \frac{2}{m} \right) \Big\} + R \left(1 - \frac{8}{m} \right); \quad (3.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau, \xi) = & \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) \left[(\tau + \xi - 3) e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} - (\tau - \xi - 3) e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} \right] - \\
& - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) + \\
& + \gamma \left[\frac{1}{m} (\tau - 1) + \left(\frac{4}{m} - 1 \right) \frac{R}{\gamma} - 1 \right] \xi - R.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что из формул (66)-(79) в предельных случаях, когда $\gamma \rightarrow 0$ или $R \rightarrow 0$, будем получать результаты соответственно §§2 и 3.

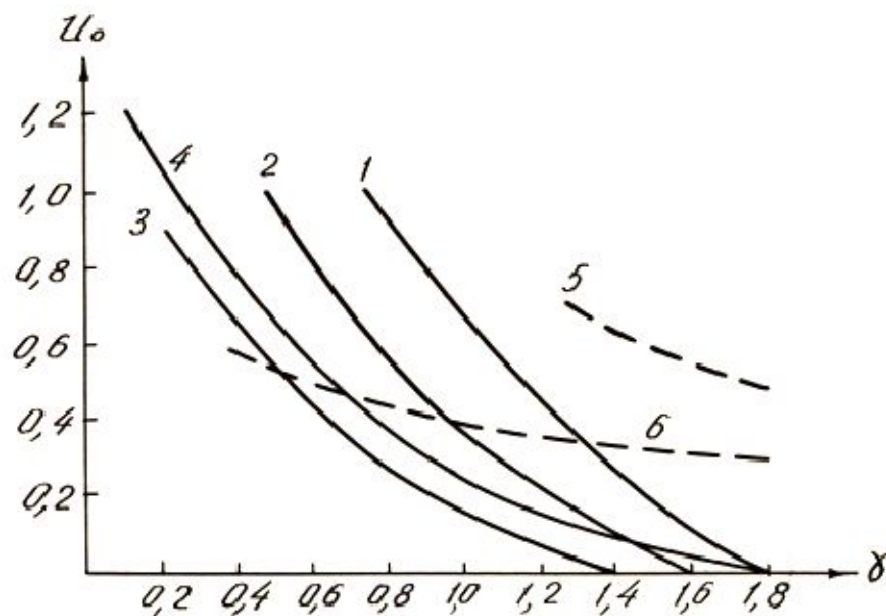


Рисунок 12

Кривые осадки при наличии одновременно бокового и лобового сопротивлений. Кривые 1 и 4 построены при $R = 0,2$ и соответственно $m = 2, m = 1$; для кривых 2 и 3 $m = 2$ и соответственно $R = 0,4, R = 0,6$. Линии 5 и 6, соответствующие 1 и 4 - кривые Н.М.Герсевича [3].

Найдем теперь величину отказа сваи u_0 и момент ее остановки T , если последнее лежит в пределах (35). Приравнивая скорость (79) в точке $\xi = 0$ к нулю, получим уравнение для определения времени T

$$2 \left[\left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (T-3) e^{-\frac{T-3}{m}} - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) e^{-\frac{T-1}{m}} \right] + \gamma \left\{ \frac{1}{2m} (T-3)^2 + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{4}{m} - 1 \right) \frac{R}{\gamma} + \frac{2}{m} \right] (T-1) + 2 \left(1 - m - \frac{2}{m} \right) \right\} + R \left(1 - \frac{8}{m} \right) = 0, \quad (3.80)$$

а из выражения (78) – формулу отказа

$$u_0 = 2 \left\{ \left[(2 - \gamma m)(T-3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m \right) \right] e^{-\frac{T-3}{m}} + \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{T-1}{m}} - 1 \right) \right\} + \\ + \gamma \left[(\tau-3)^3 + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{2R}{\gamma} + 1 \right) (\tau-3)^2 + \frac{1}{4} (T-1)^2 \right] + \\ + [\gamma(1-2m) + R](T-1) + 2\gamma m(1-m). \quad (3.81)$$

Отметим, что пользуясь формулами (71), (72) и (79) без затруднений можно найти сжимающее напряжение σ в ударяемом конце. На рисунке 13 это напряжение для случая $\gamma = 0$ при $2 < \tau < 4$ представлено графически. В конце промежутков $\tau = 2n$ ($n = 1, 2, \dots$) оно меняется скачками.

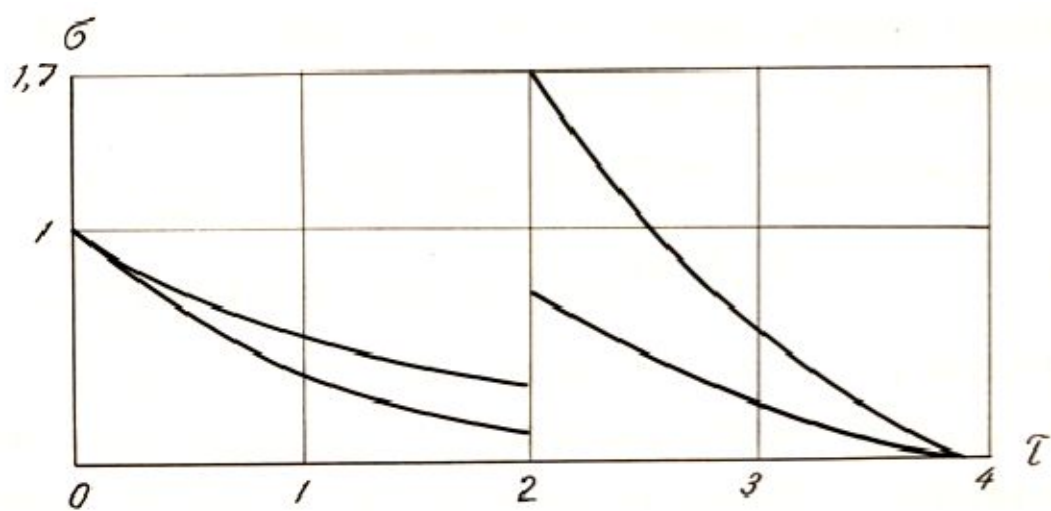


Рисунок 13

Момент $\tau = T^0$, когда напряжение обращается в нуль [36] указывает на окончание удара.

Продолжительность удара T^0 при T^0 , изменяющемся в диапазоне $2 < T^0 < 4$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{4m}(T^0 - 2)^2 + (2R + \gamma)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4}\right)(T^0 - 2) - (R + \gamma m) + \\ & + \left\{ \left[\frac{1}{m}(\gamma m - 2)(T^0 - 2) + 1 \right] e^{\frac{2}{m}} - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \right\} e^{-\frac{T^0}{m}} = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Скорость же ударяемого конца в момент отскока молота T^0 , изменяющегося в указанном диапазоне времени имеет значение

$$\begin{aligned} v = & \frac{\gamma}{4m}(T^0 - 2) + \left[R\left(\frac{2}{m} - \frac{1}{2}\right) + \gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{4}\right) \right](T^0 - 2) + R + \gamma\left(\frac{3}{2} - 2m\right) + \\ & + \left\{ \left[\frac{1}{m}(\gamma m - 2)(T^0 - 2) + (m\gamma - 1) \right] e^{\frac{2}{m}} - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \right\} e^{-\frac{T^0}{m}}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

При других значениях параметров R, γ, m , когда продолжительность удара лежит в другом диапазоне времени, исследование отскока молота и определение скорости в сечении проводятся аналогичным образом.

Если характеристики грунта и сваи таковы, что остановка сваи $\xi = 0$ происходит в момент $5 < T < 7$, то решение строится так же, как и выше. При этом для произвольного сечения сваи будем иметь

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & \frac{\gamma}{24m^2} [(\tau + \xi - 5)^4 + (\tau - \xi - 5)^4] + \\
& + \frac{\gamma}{3m} \left[\frac{2}{m} \left(\frac{2R}{\gamma} + I \right) - \frac{I}{2} \right] [(\tau - 5)^3 - 3(\tau - 5)\xi^2] + \\
& + \frac{\gamma}{6m} [(\tau - 3)^3 - 3(\tau - 3)\xi^2] + \gamma \left(\frac{I}{m} - \frac{I}{4} \right) \left(\frac{2R}{\gamma} + I \right) \times \quad (3.84) \\
& \times [(\tau - 3)^2 + \xi^2] + \frac{\gamma}{4} [(\tau - I)^2 - \xi^2] + \\
& + [\gamma(1 - 8m) + R](\tau - I) - R\xi + 2\gamma m(13 - m) + \\
& + \left\{ \left(\frac{2}{m} - \gamma \right) (\tau + \xi - 5)^2 + [(4 - 3\gamma m)(\tau + \xi - 5 + m) + \gamma m^2] \right\} e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} + \\
& + \left\{ \left(\frac{2}{m} - \gamma \right) (\tau - \xi - 5)^2 + [(4 - 3\gamma m)(\tau - \xi - 5 + m) + \gamma m^2] \right\} e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} + \\
& + \left[(2 - \gamma m)(\tau + \xi + 3) - m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m \right) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + \\
& + \left[(2 - \gamma m)(\tau - \xi - 3) + m \left(2 - \frac{3}{2} \gamma m \right) \right] \times \\
& \times e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} + m \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} - 2 \right).
\end{aligned}$$

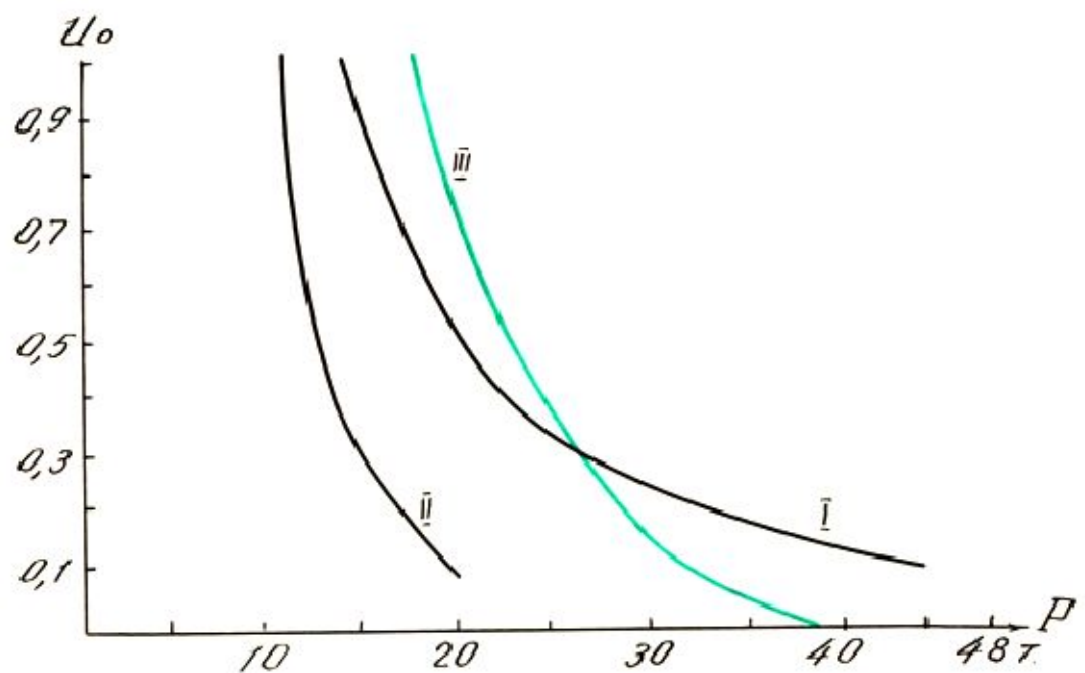


Рисунок 14 – Сравнительные кривые осадки. Кривая III построена по формуле (73) для деревянной сваи длиной 6 м диаметром 32 см при высоте падения молота 1.35 м. Линии I и II – кривые осадки для этой же сваи, построенные соответственно по формуле Герсеванова [4] и Озерова [22].

Для скорости и напряжения соответственно имеем

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) = & \left[\frac{1}{m} \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (\tau + \xi - 5)^2 + \gamma (\tau + \xi - 5) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} + \\
& + \left[\frac{1}{m} \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (\tau - \xi - 5)^2 + \gamma (\tau - \xi - 5) \right] e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} + \\
& + \left[\frac{1}{m} (\gamma m - 2) (\tau + \xi - 3) + \frac{1}{2} \gamma m \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} + \\
& + \left[\frac{1}{m} (\gamma m - 2) (\tau - \xi - 3) + \frac{1}{2} \gamma m \right] e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} - \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \times \\
& \times \left(e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} \right) + \frac{\gamma}{3m^2} [(\tau - 5)^3 - 3(\tau - 5)\xi^2] + \\
& + \frac{\gamma}{m} \left[-\frac{1}{2} + \frac{2}{m} \left(\frac{2R}{\gamma} + 1 \right) \right] [(\tau - 5)^2 - \xi^2] + \frac{\gamma}{2m} \times \\
& \times [(\tau - 3)^2 - \xi^2] + \left[\left(\frac{4}{m} - 1 \right) R + 2\gamma \left(\frac{1}{m} + \frac{3}{4} \right) \right] \times \\
& \times (\tau - 3) + 2\gamma(1 - 4m) + R, \\
\sigma(\tau, \xi) = & \left[\frac{1}{m} \left(\gamma - \frac{2}{m} \right) (\tau + \xi - 5)^2 + \gamma (\tau + \xi - 5) \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 5}{m}} + \\
& + \left[\frac{1}{m} \left(\frac{2}{m} - \gamma \right) (\tau - \xi - 5)^2 + \gamma (\tau - \xi - 5) \right] \times \\
& \times e^{-\frac{\tau - \xi - 5}{m}} + \left[\frac{1}{m} (\gamma m - 2) (\tau + \xi - 3) + \frac{1}{2} \gamma m \right] e^{-\frac{\tau + \xi - 3}{m}} +
\end{aligned} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{m} (\gamma m - 2) (\tau - \xi - 3) + \frac{1}{2} \gamma m \right] e^{-\frac{\tau - \xi - 3}{m}} + \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \times \\
& \times \left(e^{-\frac{\tau - \xi - 1}{m}} + e^{-\frac{\tau + \xi - 1}{m}} \right) + \gamma \left\{ \frac{1}{6m^2} [3(\tau - 5)^3 + \xi^2] \xi - \right. \\
& \left. - \left[(\tau - 3) - 2 \frac{\gamma}{m} + R \left(1 - \frac{4}{m} \right) \right] \xi \right\} - R.
\end{aligned}$$

5 Выдергивание свай, полностью заглубленной в грунт

Пусть имеем сваю, погруженную в грунт и взаимодействующую с ним при выдергивании по закону предельного равновесия Кулона либо по закону сухого трения.

Координатную ось выберем так же как и в предыдущих параграфах этой главы.

Пусть теперь в момент $t = 0$ по свае осуществляется продольный удар жестким телом массы M , скорости v_0 , вызывающий в свае растягивающее напряжение, противоположное тому, какое имело при забивке свай, то-есть. $\chi = H(\tau + \xi - 1)$.

Мы будем рассматривать удар с такими параметрами, при которых обязательно имеет место движение всего стержня как целого или по крайней мере движение всех сечений за исключением быть может только одного $\xi = 0$.

Решение задачи проведем в безразмерных величинах.

При указанных допущениях движение свай, сопровождающееся распространением в ней упругих волн, будет

подчинено уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \gamma H(\tau + \xi - l). \quad (3.86)$$

Условие совместного движения верхнего сечения и ударника записывается

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = m \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad \text{при } \xi = l, \tau > 0. \quad (3.87)$$

Скорость верхнего сечения в начальный момент времени будет

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = l \quad \text{при } \xi = l, \tau > 0. \quad (3.88)$$

На нижнем конце напряжение отсутствует:

$$\sigma = 0 \quad \text{при } \xi = l, \tau \geq 0. \quad (3.89)$$

В начальный момент времени имеет место условие $\sigma = 0, v = 0, u = 0$. Общее решение уравнения (86) можно записать в виде

$$u(\tau, \xi) = -\frac{\gamma}{4}(\tau + \xi - l)(\tau - \xi - c) \times \\ \times H(\tau + \xi - l) + f(\tau + \xi) + \varphi(\tau - \xi). \quad (3.90)$$

Принимая во внимание условие на нижнем конце (89), получим

$$u(\tau, \xi) = -\frac{\gamma}{4}[(\tau - l)^2 - \xi^2]H(\tau + \xi - l) + f(\tau - \xi) + f(\tau + \xi);$$

$$v(\tau, \xi) = f'(\tau - \xi) + f'(\tau + \xi) - \frac{\gamma}{2}(\tau - l)H(\tau + \xi - l); \quad (3.91)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = -f'(\tau - \xi) + f'(\tau + \xi) + \frac{\gamma}{2}\xi H(\tau + \xi - l).$$

Из условий (13) следует

$$f'(\xi) + f'(-\xi) + \frac{\gamma}{2}H(\xi - l) = 0, \quad (3.92)$$

$$f'(\xi) - f'(-\xi) + \frac{\gamma}{2}H(\xi - l) = 0$$

или

$$f(z) \equiv 0 \quad \text{при} \quad -l < z < l. \quad (3.93)$$

Условие (87) после некоторых формальных преобразований дает

$$mf''(z) + f'(z) = -mf''(z - 2) + f'(z - 2) + \frac{\gamma}{2}(m - l). \quad (3.94)$$

Решая последнее уравнение при условиях

$$u = 0 \text{ при } \xi = 0, \tau = l$$

и (88), получим

$$f(z) = \frac{\gamma}{2}(m-1)(z-l) - m \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{-\frac{z-l}{m}}\right). \quad (3.95)$$

Зная теперь значения функции $f(z)$ в диапазоне изменения аргумента $-l < z < 3$, можем построить решение задачи выдергивания сваи до момента времени, когда волна возвратится от конца $\xi = l$. В плоскости $\tau\xi$ решения будут лежать в полосе $0 \leq \xi < l$, $\tau \geq 0$. Область I этой полосы – область покоя (рисунок 7):

$$u(\tau, \xi) = 0. \quad (3.96)$$

В области II для скорости и напряжения получим

$$v(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}(-\tau + m) + \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}, \quad (3.97)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}(\xi + m - l) + \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}}.$$

В области III

$$v(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}(-\tau + 2m - l) + \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}}\right), \quad (3.98)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2}\xi + \left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right) \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l}{m}}\right).$$

Заметим, что предположение о неизменности направления перемещения сваи или о неизменности направления касательных напряжений, сделанное выше, имеет место и здесь. Следовательно, все рассуждения настоящего параграфа приводятся имея в виду, что скорость сваи в области зависимости точки $\xi = 0$, $t = T$, где T - как и прежде, момент остановки конца $\xi = 0$, неотрицательна.

Определим смещение u_0 нижнего конца $\xi = 0$, от одного удара. Оно строится, так же как и решения (97) или (98). В результате получим

$$u_0 = -\frac{\gamma}{4}T^2 + \frac{\gamma}{2}(m-1)T - \frac{3}{4}\gamma(2m-1) + 2m, \quad (3.99)$$

где момент остановки T определяется из уравнения

$$2\left(1 - \frac{\gamma m}{2}\right)e^{-\frac{T-1}{m}} - \frac{\gamma}{2}T + \gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.100)$$

Формула (99) охватывает не все случаи остановки конца $\xi = 0$ при $1 < T < 3$ и, как легко видеть, справедлива при следующих ограничениях на параметры γ и m

$$2 \geq \gamma \geq \frac{2}{m + (2-m)e^{\frac{2}{m}}}. \quad (3.101)$$

ГЛАВА IV НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВАИ

В этой главе исследуются некоторые общие задачи динамической теории определения несущей способности сваи. Рассматривается задача определения сопротивления сваи со свободным участком, задача об отказе сваи при общем законе распределения касательных сил, задача об отказе сваи, забитой в многословный грунт. Исследование проводится методом операционного исчисления.

1 Определение несущей способности сваи по отказу с учетом влияния свободного участка

Занимаясь исследованием задачи, указанной в названии параграфа, отметим, что заглубленная часть l_1 сваи может взаимодействовать с окружающей ее средой по законам, о которых неоднократно говорилось в предыдущих главах. Свободный участок сваи $l_2 - l_1$, где l_2 - вся длина сваи, естественно, свободен от касательных напряжений на боковой поверхности. Нижний конец сваи $\xi = 0$ работает так же как и в предыдущих задачах, то есть работа его подчиняется жестко-пластической схеме с пределом жесткости в точке $\sigma = -R$.

По забитой таким образом свае, которую всюду в данной работе рассматриваем как упругий стержень, осуществляется удар с параметрами M и v_0 .

Уравнение движения сваи, работающей в описанных выше условиях будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \gamma [1 + H(\xi - l_1)] H(\tau + \xi - l_2). \quad (4.1)$$

Последнее будем решать при следующих граничных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= -RH(\tau - l_2), \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} \text{ при } \xi = l_2, \tau > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} &= -I \text{ при } \xi = l_2, \tau = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

и начальных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= 0 \text{ при } \tau = 0, 0 \leq \xi < l_2, \\ u &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \tau = 0, 0 \leq \xi \leq l_2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

условиях задачи.

Решение поставленной задачи существенно упростится и значительно уменьшится объемом изложения, если для этой цели привлечь метод операционного исчисления.

Применим к уравнению движения (1) и начальным условиям (3) преобразование Лапласа-Карсона.

$$\bar{u}(\xi, p) = p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} u(\tau, \xi) d\tau, \quad (4.4)$$

где p - параметр преобразования.

При этом уравнение (1), записанное в изображениях будет иметь вид

$$\frac{d^2 \bar{u}(\xi, p)}{d\xi^2} - p^2 \bar{u}(\xi, p) = -\gamma [1 - H(\xi - l_1)] e^{p(\xi - l_2)}, \quad (4.5)$$

а граничные условия (2) –

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d\bar{u}(\xi, p)}{d\xi} - p^2 \bar{u}(\xi, p) - p \text{ при } \xi = l_2, \quad \tau > 0, \\ \frac{d\bar{u}(\xi, p)}{d\xi} = -Re^{-l_2 p} \text{ при } \xi = 0, \quad \tau > l_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Общее решение (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\tau, \xi) = & C_1(p)e^{-\xi p} + C_2(p)e^{\xi p} + \\
& + \frac{\gamma}{4p^2} \left[\left(e^{(\xi-l_2)p} - e^{-(\xi+l_2)p} \right) - \left(e^{(\xi-l_2)p} - e^{-(\xi+2l_1-l_2)p} \right) \right] \times \\
& \times H(\xi - l_1) - \frac{\gamma}{2p} \left[\xi - (\xi - l_1) H(\xi - l_1) \right] e^{(\xi-l_2)p}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Воспользовавшись граничными условиями (6), для $C_1(p)$ и $C_2(p)$ получим

$$\begin{aligned}
C_1(p) = & \frac{\frac{\gamma}{2p} \left[l_1 + \frac{2R}{\gamma} - \frac{l}{2p} (1 - e^{2l_1 p}) e^{-2l_2 p} \right] \left(p + \frac{l}{m} \right)}{\left(p - \frac{l}{m} \right) e^{-l_2 p} + \left(p + \frac{l}{m} \right) e^{l_2 p}} + \\
& + \frac{\frac{\gamma}{2p} (1 - e^{2l_1 p}) e^{-2l_2 p} - l}{\left(p - \frac{l}{m} \right) e^{-l_2 p} + \left(p + \frac{l}{m} \right) e^{l_2 p}}, \quad C_2(p) = C_1(p) - \frac{R}{p} e^{l_2 p}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Таким образом, для изображения $\bar{u}(\xi, p)$ из уравнения (5) и условий (6) имеем

$$\bar{u}(\xi, p) = \left\{ \frac{\frac{\gamma}{2p} \left[\left(l_1 + \frac{2R}{\gamma} \right) - \frac{l}{2p} (1 - e^{2l_1 p}) e^{-2l_2 p} \right] \left(p + \frac{l}{m} \right)}{\left(p + \frac{l}{m} \right) e^{l_2 p} + \left(p - \frac{l}{m} \right) e^{-l_2 p}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{\gamma}{2p} \left(l - e^{2l_1 p} \right) e^{-2l_2 p} - l}{\left(p + \frac{l}{m} \right) e^{-l_2 p} + \left(p - \frac{l}{m} \right) e^{-l_2 p}} \left\{ \left(e^{-\xi p} + e^{\xi p} \right) + \frac{\gamma}{4p^2} \times \right. \\
& \times \left[\left(e^{(\xi - l_2)p} - e^{-(\xi + l_2)p} \right) + \left(e^{(-\xi + 2l_1 - l_2)p} - e^{(\xi - l_2)p} \right) H(\xi - l_1) \right] - \\
& \left. - \frac{\gamma}{2p} \left[\xi - (\xi - l_1) H(\xi - l_1) + \frac{2R}{\gamma} \right] e^{(\xi - l_2)p} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Следуя методу нахождения оригинала, изложенному в работе [37], представляем выражение (9) в виде

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\xi, p) = & \left\{ \frac{l}{2p} \left[\left(l - e^{2l_1 p} \right) e^{-2l_2 p} \cdot \left(\frac{l}{p + \frac{l}{m}} - l \right) + \left(\frac{2R}{\gamma} + l_1 \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{l}{p + \frac{l}{m}} \right\} \left[e^{-(\xi + l_2)p} + e^{(\xi - l_2)p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-l)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p - \frac{2}{m}} \right)^n \times \right. \\
& \times \left(e^{-p[\xi + (2n+1)l_2]} + e^{p[\xi - (2n+1)l_2]} \right) \left. \right] + \frac{\gamma}{4p^2} \left[\left(e^{(\xi - l_2)p} - e^{-(\xi + l_2)p} \right) - \right. \\
& \left. - \left(e^{(\xi - l_2)p} - e^{(-\xi + 2l_1 - l_2)p} \right) H(\xi - l_1) \right] - \\
& - \frac{\gamma}{2p} \left[\xi - (\xi - l_1) H(\xi - l_1) + \frac{2R}{\gamma} \right] e^{(\xi - l_2)p}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Оригинал функции $\left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p}\right)^n$ имеет вид

$$\left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p}\right)^n \rightarrow l_n\left(\frac{l}{m}\tau\right), \quad (4.11)$$

где $l_n(z)$ - полином Лягерра n -ой степени.

Используя соотношение (11), теоремы смещения и запаздывания, переходим от (10) к оригиналам

$$u(\tau, \xi) = 0, \quad \tau < \xi;$$

$$\begin{aligned} u(\tau, \xi) = & \frac{\gamma}{4} \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-l)^n \int_0^{\tau+\xi-2(n+3)l_2} \int_0^{\tau+\xi-2(n+3)l_2} \left[l_n \frac{2}{m} (z + 2l_1) \times \right. \right. \\ & \times H(z + 2l_1) - l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) \Big] dz dz + \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-l)^n \times \\ & \times \int_0^{\tau-\xi-2(n+3)l_2} \int_0^{\tau-\xi-2(n+3)l_2} \left[l_n \left(\frac{2}{m} (z + 2l_1) \right) H(z + 2l_1) - \right. \\ & \left. \left. - l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) \right] dz dz \right\} + \frac{\gamma}{2} \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-l)^n \times \right. \\ & \times \left[\int_0^{\tau+\xi+2l_1-(2n+3)l_2} \int_0^{\tau+\xi+2l_1-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz dz - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l_2} \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz dz \Bigg] + \sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2} \right]} (-1)^n \times \\
& \times \left[\int_0^{\tau-\xi+2l_1-(2n+3)l_2} \int_0^{\tau-\xi+2l_1-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz dz - \right. \\
& \left. - \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l_2} \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l_2} e^{\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz dz \right] \Bigg\} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2R}{\gamma} + l_1 \right) \times \\
& \times \left[\sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2} \right]} (-1)^n \int_0^{\tau+\xi-(2n+1)l_2} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz + \sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2} \right]} (-1)^n \times \right. \\
& \times \int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l_2} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz \Bigg] - \sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2} \right]} (-1)^n \int_0^{\tau+\xi-(2n+1)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) \times \\
& \times H(z) dz - \sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2} \right]} (-1)^n \int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz - \frac{\gamma m^2}{2} \times \\
& \times \left[\left(e^{-\frac{\tau+\xi+2l_1-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \left(e^{-\frac{\tau-\xi+2l_1-3l_2}{m}} - 1 \right) \times \right. \\
& \times H(\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2) - \left(e^{\frac{\tau+\xi-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - 3l_2) - \left(e^{\frac{\tau-\xi-3l_2}{m}} - 1 \right) \times \\
& \times H(\tau - \xi - 3l_2) \Bigg] + m \left[\left(e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - l_2) + \left(e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}} - 1 \right) \times \right. \\
& \times H(\tau - \xi - l_2) \Bigg] + \frac{\gamma}{4} \left\{ \left[\frac{1}{2} (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - 2m(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \right] \times \right.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \left[\frac{l}{2}(\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - 2m(\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2) \right] \times \\
& \times H(\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2) + \left[\frac{l}{2}(\tau + \xi - 3l_2)^2 - 2m(\tau + \xi - 3l_2) \right] H(\tau + \xi - 3l_2) + \\
& + \left[\frac{l}{2}(\tau - \xi - 3l_2)^2 - 2m(\tau - \xi - 3l_2) \right] H(\tau - \xi - 3l_2) + \\
& + \frac{\gamma}{8} [1 - H(\xi - l_1)] (\tau + \xi - l_2) (\tau - 3\xi + 4l_1 - l_2) H(\tau + \xi - l_2) + \\
& + \frac{\gamma}{4} \left\{ \frac{l}{2}(\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) - \right. \\
& \left. - \left[\frac{l}{2}(\tau - \xi - l_2)^2 - 2\left(\frac{2R}{\gamma} + l_1\right)(\tau - \xi - l_2) \right] H(\tau - \xi - l_2) \right\}, \quad \tau > \xi.
\end{aligned}$$

Поле скоростей и поле напряжений будут иметь вид:

$$v(\tau, \xi) = 0, \quad \tau < \xi;$$

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) = & \frac{\gamma}{2} \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2} \right]} (-l)^n \left[\int_0^{\tau+\xi+2l_1-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}l_n} \left(\frac{2}{m}z \right) H(z) dz - \right. \right. \\
& - \left. \int_0^{\tau+\xi+(2n-3)l_2} e^{-\frac{z}{m}l_n} \left(\frac{2}{m}z \right) H(z) dz \right] + \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2} \right]} (-l)^n \left[\int_0^{\tau-\xi+2l_1-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} \times \right. \\
& \times l_n \left(\frac{2}{m}z \right) H(z) dz - \left. \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}l_n} \left(\frac{2}{m}z \right) H(z) dz \right] + \frac{l}{4} \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2} \right]} (-l)^n \times \\
& \times \left. \left[\int_0^{\tau+\xi+2l_1-(2n+3)l_2} e_n \left(\frac{2}{m}z \right) H(z) dz - \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l_2} l_n \left(\frac{2}{m}z \right) H(z) dz \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{l}{4} \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n \left[\int_0^{\tau-\xi+2l_1-(2n+3)l_2} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz - \right. \\
& \left. - \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l_2} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz \right] - \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-1)^n e^{-\frac{\tau+\xi-(2n+1)l_2}{m}} \times \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times l_n \left\{ \frac{2}{m} [\tau + \xi - (2n+1)l_2] H[\tau + \xi - (2n+1)l_2] - \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n \times \right. \\
& \times e^{-\frac{\tau-\xi-(2n+1)l_2}{m}} l_n \left\{ \frac{2}{m} [\tau - \xi - (2n+1)l_2] \right\} H[\tau - \xi - (2n+1)l_2] + \\
& + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2R}{\gamma} + l_1 \right) \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-1)^n l_n \frac{2}{m} [\tau + \xi - (2n+1)l_2] H[\tau + \xi - (2n+1)l_2] + \right. \\
& + \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n l_n \frac{2}{m} [\tau - \xi - (2n+1)l_2] H[\tau - \xi - (2n+1)l_2] + \frac{\gamma m}{2} \times \\
& \times \left[\left(e^{-\frac{\tau+\xi+2l_1-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \left(e^{-\frac{\tau-\xi+2l_1-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2) - \right. \\
& - \left(e^{-\frac{\tau+\xi-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - 3l_2) - \left(e^{-\frac{\tau-\xi-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau - \xi - 3l_2) - \\
& - e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) - e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}} H(\tau - \xi - l_2) \Big] + \frac{\gamma}{4} [(\tau + \xi + l_1 - 3l_2) \times \\
& \times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + (\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2) H(\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2) + \\
& - (\tau + \xi - 3l_2) H(\tau + \xi - 3l_2) - (\tau - \xi - 3l_2) H(\tau - \xi - 3l_2) + \frac{\gamma}{4} [1 - H(\xi - l_1)] \times \\
& \times (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\tau + \xi - l_2) + \frac{\gamma}{4} [(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2)] -
\end{aligned}$$

$$-\left(\tau - \xi + 2l_1 - l_2 - \frac{4R}{\gamma}\right)H(\tau - \xi - l_2)\Big], \quad \tau > \xi;$$

$$\sigma(\tau, \xi) = 0, \quad \tau < \xi,$$

$$\begin{aligned} \sigma(\tau, \xi) = & \frac{\gamma}{2} \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-1)^n \left[\int_0^{\tau+\xi+2l_1-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) H(z) dz - \right. \right. \\ & - \int_0^{\tau+\xi+(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) H(z) dz \Big] - \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n \left[\int_0^{\tau-\xi+2l_1-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) dz - \right. \\ & - \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l_2} e^{-\frac{z}{m}} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) H(z) dz \Big] - \frac{l}{2} \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-1)^n \left[\int_0^{\tau+\xi+2l_1-(2n+3)l_2} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) H(z) dz - \right. \\ & - \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l_2} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) H(z) dz \Big] - \frac{l}{2} \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n \left[\int_0^{\tau-\xi+2l_1-(2n+3)l_2} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) H(z) dz - \right. \\ & - \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l_2} l_n\left(\frac{2}{m}z\right) H(z) dz \Big] \Big\} - \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-1)^n e^{-\frac{\tau+\xi-(2n+1)l_2}{m}} \times \\ & \times l_n \frac{2}{m} \left[\tau + \xi - (2n+1)l_2 \right] H\left[\tau + \xi - (2n+1)l_2 \right] + \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n e^{-\frac{\tau-\xi-(2n+1)l_2}{m}} \times \\ & \times l_n \frac{2}{m} \left[\tau - \xi - (2n+1)l_2 \right] H\left[\tau - \xi - (2n+1)l_2 \right] + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2R}{\gamma} + l_1 \right) \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-1)^n \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times l_n \frac{2}{m} [\tau + \xi - (2n+1)l_2] H[(\tau + \xi) - (2n+1)l_2] - \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n \times \quad (4.14) \\
& \times e^{-\frac{\tau-\xi-(2n+1)l_2}{m}} l_n \left\{ \frac{2}{m} [\tau - \xi - (2n+1)l_2] \right\} H[\tau - \xi - (2n+1)l_2] + \\
& + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2R}{\gamma} + l_l \right) \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2}\right]} (-1)^n l_n \frac{2}{m} [\tau + \xi - (2n+1)l_2] H[\tau + \xi - (2n+1)l_2] - \right. \\
& - \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2}\right]} (-1)^n l_n \frac{2}{m} [\tau - \xi - (2n+1)l_2] H[\tau - \xi - (2n+1)l_2] + \frac{\gamma m}{2} \times \\
& \times \left[\left(e^{-\frac{\tau+\xi+2l_l-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_l - 3l_2) + \left(e^{-\frac{\tau-\xi+2l_l-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau - \xi + 2l_l - 3l_2) - \right. \\
& - \left(e^{-\frac{\tau+\xi-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - 3l_2) - \left(e^{-\frac{\tau-\xi-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau - \xi - 3l_2) - \\
& - e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) - e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}} H(\tau - \xi - l_2) \left. \right] + \frac{\gamma}{4} \{ (\tau + \xi + l_l - 3l_2) \times \\
& \times H(\tau + \xi + 2l_l - 3l_2) - (\tau - \xi + 2l_l - 3l_2) H(\tau - \xi + 2l_l - 3l_2) - \\
& - (\tau + \xi - 3l_2) H(\tau + \xi - 3l_2) + (\tau - \xi - 3l_2) H(\tau - \xi - 3l_2) - \\
& - (\tau + 3\xi + 2l_l - l_2) [1 - H(\xi - l_l)] H(\tau + \xi - l_2) - (\tau - \xi + 2l_l - l_2) \times \\
& \times H(\xi - l_l) H(\tau - \xi + 2l_l - l_2) - \left(\tau - \xi + 2l_l - l_2 - \frac{4R}{\gamma} \right) H(\tau - \xi - l_2) \}.
\end{aligned}$$

Наибольшее значение, которое принимает индекс суммирования n , представляет целую часть числа, стоящего в квадратных скобках.

Выпишем решения уравнения (1) для нескольких первых областей полосы $0 \leq \xi \leq l_2, \tau \geq 0$ (рисунок 15) и установим область изменения параметров m, γ и R , где полученные решения будут справедливы.

Из (12) легко получить решения для смещения. Ясно, что области I и II являются областями покоя. В области III, где $l_2 - \xi < \tau < l_2 - 2l_1 - \xi$, имеем

$$u(\tau, \xi) = m \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right). \quad (4.15)$$

Для областей IV и V - $l_2 - \xi < \tau < l_2 + \xi$, $l_2 - 2l_1 - \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 - \xi$ - решение может быть записано следующим образом

$$\begin{aligned} u(\tau, \xi) = & m \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - l_2) + \frac{\gamma}{2} [1 - H(\xi - l_1)] \times \\ & \times (\tau + \xi - l_2) (\tau - 3\xi + 4l_1 - l_2) H(\tau + \xi - l_2) + \\ & + (\tau - 3\xi + 2l_1 - l_2)^2 H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

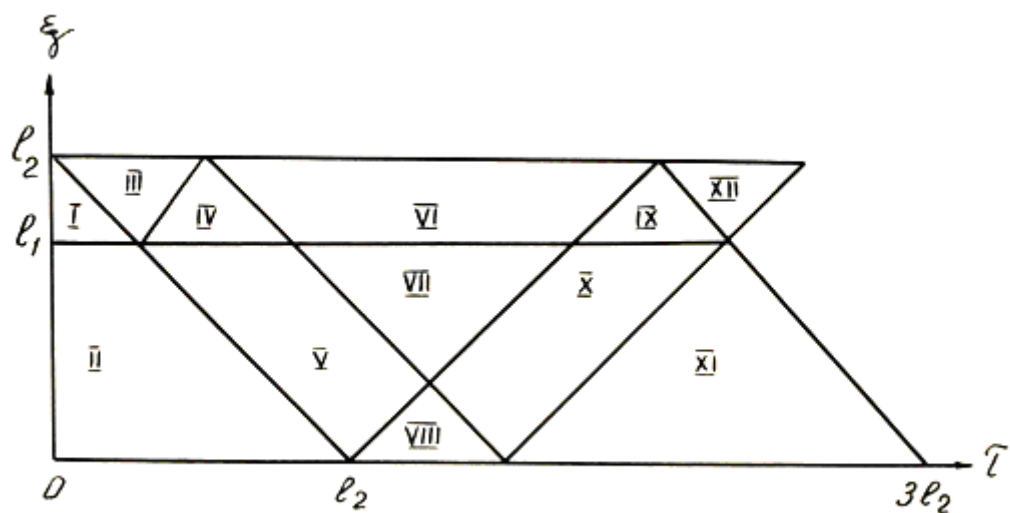


Рисунок 15

Область определения решений для случая, когда
часть сваи не контактирует с грунтом.

Выражения смещения отдельно для областей IV и V соответственно будут

$$u(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{8} (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 + m \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right); \quad (4.17)$$

$$u(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{2} (\tau + \xi - l_2) (\tau - 3\xi + 4l_1 - l_2) + m \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right).$$

Для областей VII и VIII, для которых $3l_2 - 2l_1 - \xi < \tau < l_2 - \xi$, решения имеют вид

$$u(\tau, \xi) = m \left[-\frac{\gamma}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) \times \right.$$

$$\times H(\tau + \xi - l_2) \left. \right] + \frac{\gamma}{8} \{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - 4m(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \} \times$$

$$\times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + [1 - H(\xi - l_1)] (\tau + \xi - l_2) H(\tau - 3\xi + 4l_1 - l_2) \times \quad (4.18)$$

$$\times H(\tau + \xi - l_2) + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) \}.$$

Конкретно для каждой из этих областей смещения соответственно будут

$$u(\tau, \xi) = m \left[\left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) - \frac{\gamma}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{8} [(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 + (\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - 4m(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)].$$

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left[-\frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) + e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right] + \\
& + \frac{\gamma}{8} \left[(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 + (\tau + \xi - l_2)(\tau - 3\xi + 4l_1 - l_2) - \right. \\
& \left. - 4m(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \right]. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

В области VIII, для которой $l_2 + \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 - \xi$,

$$u(\tau, \xi) = m \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - 2 \right) - \quad (4.20)$$

$$-\frac{\gamma}{2} \xi^2 + (\gamma l_1 + R)\tau - R\xi - (\gamma l_1 + R)l_2.$$

В областях IX и X — ($l_2 + \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 - \xi$,

$3l_2 - 2l_1 - \xi < \tau < 3l_2 - \xi$ — $u(\tau, \xi)$) будет дано выражением

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left[-\frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \right. \\
& + \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - l_2) \left. \right] + \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau - \xi - l_2) + \\
& + \frac{\gamma}{8} \left\{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - 4m(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \right\} \times \\
& \times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + [1 - H(\xi - l_1)] (\tau + \xi - l_2) \times \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\tau - 3\xi + 4l_1 - l_2)H(\tau + \xi - l_2) + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 \times \\
& \times H(\xi - l_1)H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) - [(\tau - \xi - l_2)^2 - \\
& - 4\left(l_1 + \frac{2R}{\gamma}\right)(\tau - \xi - l_2)]H(\tau - \xi - l_2).
\end{aligned}$$

Приведем решение (1) еще для двух областей. В области XI, где $3l_2 - 2l_1 < \tau < 3l_2 - \xi$, оно имеет вид

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left[-\frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 2 \right) + \right. \\
& \left. + \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - 2 \right) \right] + \frac{\gamma}{4} [(\tau + 2l_1 - 3l_2)^2 - \xi^2] + \\
& + [R + \gamma(l_1 - m)]\tau - \left(R + \frac{3}{2}\gamma \right) \xi - Rl_2 + \gamma [m(3l_2 + 2l_1) - l_1 l_2].
\end{aligned} \tag{4.22}$$

в области XII ($3l_2 - \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 + \xi$) -

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left[-\frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau + \xi - 3l_2}{m}} - 2 \right) + \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - 2 \right) \right] + \frac{\gamma}{4} (\tau + 2l_1 - 3l_2)^2 + \left[\gamma \left(\frac{3}{2}l_1 - m \right) + R \right] \tau - \\
& - \left[\left(\frac{1}{2}l_1 + m \right) + R \right] \xi + \gamma \left[l_1(l_1 - m) + \left(3m - \frac{3}{2}l_1 - \frac{R}{\gamma} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Наличие затухания делает ненужным анализ поля смещения, равно как полей скорости и напряжений, для больших промежутков времени.

При необходимости же легко выписать решения (1) для последующих областей.

Скорости и напряжения для областей I-XII будут следующими. В области I и II напряжения и скорости равны нулю. В области III

$$v(\tau, \xi) = \sigma(\tau, \xi) = -e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}}. \quad (4.24)$$

В областях IV и V $v(\tau, \xi)$ и $\sigma(\tau, \xi)$ имеют общие для обеих областей выражения

$$\begin{aligned} v(\tau, \xi) = & -e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) + \frac{\gamma}{4} (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) \times \\ & \times \{ [1 - H(\xi - l_1)] H(\tau + \xi - l_2) + H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) \}; \\ \sigma(\tau, \xi) = & -e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) - \\ & - \frac{\gamma}{4} [(\tau - 3\xi + 2l_1 - l_2) [1 - H(\xi - l_1)] H(\tau + \xi - l_2) + \\ & + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2)]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Последнее означает, что в области IV для ν и σ имеем

$$\begin{aligned}\nu(\tau, \xi) &= -e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} + \frac{\gamma}{4}(\tau - \xi + 2l_1 - l_2), \\ \sigma(\tau, \xi) &= -e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} - \frac{\gamma}{4}(\tau - \xi + 2l_1 - l_2),\end{aligned}\quad (4.26)$$

а в области V

$$\begin{aligned}\nu(\tau, \xi) &= -e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} + \frac{\gamma}{4}(\tau - 3\xi + 2l_1 - l_2), \\ \sigma(\tau, \xi) &= -e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}} - \frac{\gamma}{4}(\tau - 3\xi + 2l_1 - l_2).\end{aligned}\quad (4.27)$$

Для областей VII и VIII решения уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\nu(\tau, \xi) &= \frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau+\xi+2l_1-3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) - e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} \times \\ &\times H(\tau + \xi - l_2) + \frac{\gamma}{4} \{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \\ &+ [1 - H(\xi - l_1)] (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\tau + \xi - l_2) + \\ &+ H(\xi - l_1) (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) \};\end{aligned}\quad (4.28a)$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau, \xi) = & \frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) - e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} \times \\
& \times H(\tau + \xi - l_2) + \frac{\gamma}{4} \left\{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \right. \\
& + 2 \left[1 - H(\xi - l_1) \right] (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\tau + \xi - l_2) + \\
& \left. + H(\xi - l_1) (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.28б}$$

В области VIII

$$\begin{aligned}
\nu(\tau, \xi) = & (\gamma l_1 + R) - \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} \right), \\
& \tag{4.29}
\end{aligned}$$

$$\sigma(\tau, \xi) = - \left(\frac{\gamma}{2} \xi + R \right) + \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} \right),$$

в областях IX и X

$$\begin{aligned}
\nu(\tau, \xi) = & \frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) - \\
& - e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} H(\tau - \xi - l_2) + \frac{\gamma}{4} \left\{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \times \right. \\
& \times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \left[1 - H(\xi - l_1) \right] (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\tau + \xi - l_2) + \\
& + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) - \\
& \left. - \left(\tau - \xi + 2l_1 - l_2 + \frac{4R}{\gamma} \right) H(\tau + \xi - l_2) \right\};
\end{aligned} \tag{4.30a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau, \xi) = & \frac{\gamma m}{2} \left(e^{\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) - \\
& - e^{\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) e^{\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} H(\tau - \xi - l_2) + \\
& \frac{\gamma}{4} \left\{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) - 2[l - H(\xi - l_1)](\tau - 2\xi + 2l_1 - l_2) \right\} \times \\
& \times H(\tau + \xi - l_2) - (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) + \\
& + H(\tau + \xi - l_2) \};
\end{aligned} \tag{4.30б}$$

в области XI

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) = & \frac{\gamma m}{2} \left(e^{\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} + e^{\frac{\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} \right) - \\
& - \left(e^{\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} \right) + \frac{\gamma}{2} (\tau + 4l_1 - 3l_2 - 2m) + R, \\
\sigma(\tau, \xi) = & \frac{\gamma m}{2} \left(e^{\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - e^{\frac{\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} \right) + e^{\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - \\
& - e^{\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - \left(\frac{3}{2} \gamma \xi + R \right),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

в области XII

$$v(\tau, \xi) = \frac{\gamma m}{2} \left(e^{\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} + e^{\frac{\tau + \xi - 3l_2}{m}} \right) -$$

$$-\left(e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}}\right) + \frac{\gamma}{2}(\tau + \xi + 3l_1 - 3l_2 - 2m) + R, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\tau, \xi) = & \frac{\gamma m}{2} \left(e^{-\frac{\tau+\xi+2l_1-3l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau+\xi-3l_2}{m}} \right) + \\ & + \left(e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}} - e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} \right) - \frac{\gamma}{2}(\tau + \xi - 3l_2 - l_1 - 2m) - R. \end{aligned}$$

Полученные решения (15) - (32) справедливы для свай, забитых в грунт более, чем на половину длины. В противном случае расположение области на рисунке 16 изменятся, и решение будут записываться несколько иначе. Решения эти легко выписать, однако их здесь приводить не будем, имея в виду исследовать случай $l_2 < 2l_1$ как более интересный для расчета свай и свайных оснований.

Теперь, при предположении, что скорость свай в области зависимости $\xi = 0, \tau = T$ неположительна, займемся нахождением отказа свай, считая, что остановка конца $\xi = 0$ имеет место в момент, удовлетворяющий неравенству

$$l_2 < T < 3l_2. \quad (4.33)$$

Последнее означает, что остановка конца свай $\xi = 0$ может произойти либо в момент

$$l_2 < T < 3l_2 - 2l_1, \quad (4.34)$$

либо в момент

$$3l_2 - 2l_1 < T < 3l_2. \quad (4.35)$$

В первом случае смещение (отказ) сваи следует закону

$$u_0 = (\gamma l_1 + R)(T + m - l_2) - 2m, \quad (4.36)$$

а момент остановки T определяется из уравнения

$$e^{-\frac{T-l_2}{m}} - \frac{1}{2}(\gamma l_1 + R) = 0. \quad (4.37)$$

При T , лежащем в диапазоне (35), отказ сваи находится по формуле

$$u_0 = \frac{\gamma}{2}T^2 + \left[R + \frac{\gamma}{2}(4l_1 - 3l_2 - m) \right]T - \\ - \gamma \left[\frac{1}{4}(3l_2 - 2l_1)^2 + \frac{3}{2}ml_2 - l_1l_2 \right] + (m - l_2)R - 2m, \quad (4.38)$$

где T определяется уравнением

$$\gamma m e^{-\frac{T+2l_1-3l_2}{m}} - 2e^{-\frac{T-l_2}{m}} + \frac{\gamma}{2}(T + 2l_1 - 3l_2) + \gamma(l_1 - m) + R = 0. \quad (4.39)$$

Полученные формулы (36) и (38) справедливы соответственно при следующих ограничениях на параметры

$$2 < \gamma l_1 + R < e^{-\frac{2(l_2 - l_1)}{m}}, \quad (4.40)$$

$$\frac{2 - R}{m \left(e^{-\frac{2(l_2 - l_1)}{m}} - 1 \right) + 2l_1 - l_2} > \gamma > \frac{2 - R e^{\frac{2l_2}{m}}}{(2l - m) e^{\frac{2l_2}{m}} + m e^{-\frac{2(l_2 - l_1)}{m}}}. \quad (4.41)$$

На рисунке 16 приводятся сравнительные графики для свай различных длин, но зажатых на одинаковых глубинах, в частности, - сравнение не полностью зажатых в грунте свай со свай целиком зажатой в грунте. Кривые построены для формулы (38). Графики показывают, что участок, выступающий над грунтом, заметно влияет величину отказа, и это обстоятельство должно быть принято во внимание при определении несущей способности.

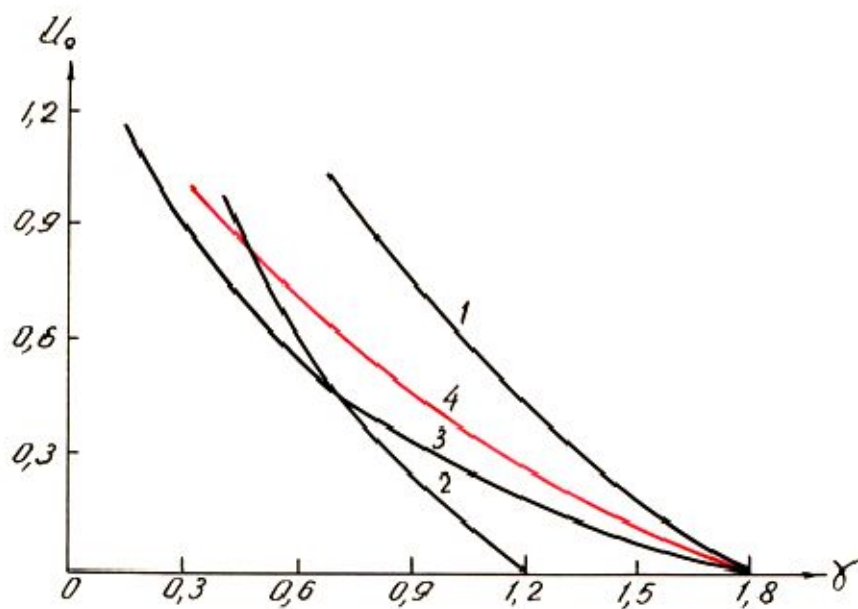


Рисунок 16

Линия 4 – кривая осадки для сваи со свободным участком при $l_1 = 1, l_2 = 1,4, m = 2, R = 0,2$. Для сравнения приведены кривые осадки сваи, полностью забитой в грунт. Кривые 1 и 3 построены: при $R = 0,2$ и соответственно $m = 2$ и $m = 1$; 2 – при $m = 3, R = 0,8$.

2 Определение несущей способности сваи по отказу при произвольном законе распределения касательных напряжений

Рассмотрим продольный удар по свае, когда давление на боковую поверхность носит общий характер $\gamma = \gamma(\xi)$. На функцию $\gamma(\xi)$ налагается одно лишь требование конечности ее в области $0 \leq \xi \leq l$, что, вообще говоря, всегда выполняется.

Сопротивление сваи на конце $\xi = 0$ может носить также общий характер, что не внесет никаких принципиальных затруднений в решения задачи; поэтому для простоты на конце $\xi = 0$ возьмем наиболее тривиальный случай: сопротивление грунта на этом конце равно нулю.

Легко видеть, что уравнение движения сваи будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \gamma(\xi)H(\tau + \xi - l), \quad (4.42)$$

если свая зажата в грунт по всей длине l или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \gamma(\xi)[l - H(\xi - l_1)]H(\tau + \xi - l_2), \quad (4.43)$$

если свая зажата на участке l_1 , а участок ее $l_2 - l_1$ свободен от касательных напряжений.

Граничные и начальные условия - прежние.

Задачу будем решать операционным методом. Применяя к уравнению (42) преобразование Лапласа-Карсона (4) при учете начальных условий (3), получим

$$\frac{d^2 \bar{u}(\xi, p)}{d\xi^2} - p^2 \bar{u}(\xi, p) = -\gamma(\xi) e^{(\xi - l_2)p}. \quad (4.44)$$

Граничное условие после применения преобразования (4) будет иметь вид (6) и

$$\frac{d^2 \bar{u}(\xi, p)}{d\xi^2} = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad \tau > l_2. \quad (4.45)$$

Общее решение уравнения (4.44) будет

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, p) = & C_1(p) e^{-p\xi} + C_2(p) e^{p\xi} + \\ & + \frac{1}{2p} \left[e^{-\xi p} \int_0^\xi \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)p} d\xi - e^{(\xi - l_2)p} \int_0^\xi \gamma(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

где $C_1(p)$ и $C_2(p)$ - произвольные пока функции параметра преобразования p , относительно которых условия на нижнем конце $\xi = 0$ - (45), дает зависимость

$$C_1(p) = C_2(p), \quad (4.47)$$

а условие совместного движения верхнего сечения сваи $\xi = l$ и молота – равенство

$$\begin{aligned}
 p^2 C_1(p) e^{-l_2 p} + p^2 C_2(p) e^{l_2 p} + \frac{p}{2} \left[e^{l_2 p} \int_0^{l_2} \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)p} d\xi - \right. \\
 \left. - \int_0^{l_2} \gamma(\xi) d\xi \right] + p = -\frac{l}{m} \left\{ -p C_1(p) e^{-l_2 p} + p C_2(p) e^{-l_2 p} - \right. \\
 \left. - \frac{l}{2} \left[e^{-l_2 p} \int_0^{l_2} \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)p} d\xi + \int_0^{l_2} \gamma(\xi) d\xi \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Из (48) и (47) легко видеть, что

$$C_1(p) = C_2(p) = \frac{\int_0^{l_2} \gamma(\xi) \left[\frac{l}{2} (1 + e^{2(\xi - l_2)}) \left(\frac{p + \frac{l}{m}}{p} \right) - l \right] d\xi - l}{\left(p + \frac{l}{m} \right) e^{l_2 p} + \left(p - \frac{l}{m} \right) e^{-l_2 p}}. \tag{4.49}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(\xi, p) = \frac{l}{p} \left\{ \frac{l}{2} \left[\Gamma_2(l_2, p) - \Gamma_1(l_2) - \Gamma_2(0, p) e^{-2l_2 p} - \Gamma_1(0) \right] - \right. \\
 \left. - \left[l + \Gamma_2(l_2, p) - \Gamma_2(0, p) e^{-2l_2 p} \right] \frac{l}{l + \frac{l}{m}} \right\} \times
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\times \left[e^{-2l_2 p} + \sum (-l)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n e^{-(2n+1)l_2 p} \left(e^{-p\xi} + e^{p\xi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{l}{2p} \left[e^{-p\xi} \int_0^\xi \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)} d\xi - l^{(\xi - l_2)p} \int_0^\xi \gamma(\xi) d\xi \right] \right],$$

где

$$\Gamma_1(l_2) - \Gamma_1(0) = \int_0^{l_2} \gamma(\xi) d\xi,$$

$$\Gamma_2(l_2, p) - \Gamma_2(0, p) e^{-2l_2 p} = \int_0^{l_2} \gamma(\xi) e^{2(\xi - l_2)p} d\xi.$$

Оригинал сомножителя

$$\left(e^{-p\xi} + e^{p\xi} \right) \left[e^{-p\xi} + \sum_l^\infty (-l)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n e^{-(2n+1)l_2 p} \right] \quad (4.52)$$

легко находится и имеет вид

$$H(\tau + \xi - l_2) + H(\tau - \xi - l_2) + \sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau + \xi}{2} \right]} (-l)^n l_n \frac{2}{m} \times \\ \times [\tau + \xi - (2n+1)l_2] + \sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau - \xi}{2} \right]} (-l)^n l_n \frac{2}{m} [\tau - \xi - (2n+1)l_2]. \quad (4.53)$$

Нахождение оригинала самой $\bar{u}(\xi, p)$ связано с конкретизацией вида функции $\gamma = \gamma(\xi)$. При этом указанная операция сведется к известным преобразованиям, связанным с действием на (53) оператора $\Gamma(p)$, где $\Gamma(p) = \Gamma_2(l_2, p)$.

Приведенная задача в свое время (1930 г.) была исследована при $l_2 < T < 3l_2$ В.С.Скуратовым, как обобщение задачи Н.М.Герсевича (глава III 3). Мы не будем останавливаться на анализе решения, полученного В.С.Скуратовым [14].

Отметим только, что им при решении задачи допущен ряд неточностей.

Для уравнения (43), имея в виду, что условия (3) выполняются, применяя преобразование Лапласа-Карсона, будем иметь

$$\frac{d^2 \bar{u}(\xi, p)}{d\xi^2} - p^2 \bar{u}(\xi, p) = -\gamma(\xi) [1 - H(\xi - l_1)] e^{(\xi - l_2)p}, \quad (4.54)$$

решение которого представимо в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, p) = & C_1(p) e^{-p\xi} + C_2(p) e^{p\xi} + \frac{1}{2p} \left\{ e^{-\xi p} \int_0^\xi \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)p} d\xi - \right. \\ & \left. - \int_0^\xi \gamma(\xi) d\xi e^{(\xi - l_2)p} \right] - H(\xi - l_1) \left[e^{-\xi p} \int_{l_1}^\xi \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)p} d\xi - \int_0^\xi \gamma(\xi) d\xi \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Первое из граничных условий (6) и граничные условие (45) дают

$$C_1(p) = C_2(p) = \frac{\int_0^{l_1} \gamma(\xi) \left[l + \frac{1}{2} \frac{p + \frac{l}{m}}{p} \left(l + e^{2(\xi - l_2)p} \right) d\xi - l \right]}{\left(p - \frac{l}{m} \right) e^{-l_2 p} + \left(p + \frac{l}{m} \right) e^{l_2 p}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, p) = & \frac{l}{p} \left\{ \frac{l}{2} \left[\Gamma_2(l_1, p) - \Gamma_1(l_1) - \Gamma_2(0, p) e^{-2l_2 p} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Gamma_1(0) \right] - \left[l + \Gamma_2(l_1, p) - \Gamma_2(0, p) e^{-2l_2 p} \right] \frac{l}{p + \frac{l}{m}} \right\} \times \\ & \times \left[e^{-l_2 p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n e^{-(2n+1)l_2 p} \left(e^{-l_2 p} + e^{l_2 p} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{l}{2p} \left\{ \left[e^{-\xi p} \int_0^{\xi} \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)p} d\xi - e^{(\xi - l_2)p} \int_0^{\xi} \gamma(\xi) d\xi \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - H(\xi - l_1) \left[e^{-l_2 p} \int_{l_1}^{\xi} \gamma(\xi) e^{(2\xi - l_2)p} d\xi - \int_{l_1}^{\xi} \gamma(\xi) d\xi \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Для каждого конкретного выражения функции $\gamma(\xi)$ легко найти оригинал (56).

На этом пока закончим наше изучение несущей способности сваи, зажатой в однослойном грунте, и связанных с ней задачи забивки и задачи выдергивания и перейдем к исследованию соответствующих задач для сваи, зажатой в многослойном грунте.

3 Несущая способность сваи, забитой в многослойный грунт

В практике сооружения свайных оснований, пожалуй, гораздо более имеют дело с многослойным грунтом, чем однослойным. Подробное исследование вопроса заняло бы много страниц. Поэтому ограничимся здесь исследованием некоторых основных моментов, связанных с установлением несущей способности сваи, зажатой в многослойном грунте. Несколько подробнее исследуем вопрос для двухслойного грунта.

Составим уравнение движения сваи, зажатой в многослойном грунте. В безразмерных величинах, введенных выше; оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left[\gamma_1(\xi)H(\xi) + \sum_{k=2}^n \gamma_k(\xi)H(\xi - l_{k-1}) \right] H(\tau + \xi - l_n), \quad (4.57)$$

где индекс $k = 1, 2, \dots, n$ указывает на номер слоя; величина l_k означает толщину k первых слоев, причем нумерация слоев

начинается с конца $\xi = 0$ так, что величина γ_1 соответствует безразмерному давлению на боковую поверхность сваи первого слоя, γ_2 - разности давлений первого и второго слоев, γ_3 - разности давлений второго и третьего слоев и т.д.

Уравнение (57) описывает движение сваи любым образом зажатой в грунте; в частности, имеющая место зависимость для $\gamma_k(\xi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\gamma_1(\xi) - \sum_{k=2}^n \gamma_k(\xi) = 0, \quad (4.58)$$

означает, что свая зажата не по всей длине и $n - 1$ слоями грунта, а величина свободного участка равна $l_n - l_{n-1}$. В том случае, когда зависимость (58) не имеет места, уравнение (57) описывает только движение сваи, зажатой по всей длине. Поэтому наиболее общим уравнением, описывающим движение сваи, часть которой зажата в грунте, а часть является свободной, будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \{ \gamma_1(\xi) [1 - H(\xi - l_{n-1})] + \\ + \sum_{k=2}^n \gamma_k(\xi) [H(\xi - l_{n-1}) - H(\xi - l_{k-1})] \} H(\tau + \xi - l_n), \end{aligned} \quad (4.59)$$

В дальнейшем будем заниматься уравнением (59). Применяя к нему вместе с условием (3), упоминавшееся в предыдущих

параграфах настоящей главы преобразование Лапласа-Карсона, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}(\xi, p)}{\partial \xi^2} - p^2 \bar{u}(\xi, p) = & \left\{ \gamma_l(\xi) [H(\xi - l_{n-l}) - 1] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^n \gamma_k(\xi) [H(\xi - l_{k-l}) - H(\xi - l_{n-l})] \right\} e^{(\xi - l_n)p}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Нетрудно видеть, что решение (60) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, p) = & \frac{1}{2p} \left\{ \int_0^{l_n} L(p, \xi) \left[p + \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m} - p \right) e^{2(\xi - l_n)p} \right] d\xi + \right. \\ & + \left[R \left(1 + \frac{1}{mp} \right) - 1 \right] \frac{e^{-\xi p} + e^{\xi p}}{\left(p + \frac{1}{m} \right) e^{l_n p} + \left(p - \frac{1}{m} \right) e^{-l_n p}} + \\ & \left. + e^{-(\xi + l_n)p} \int_0^{\xi} L(p, \xi) e^{2\xi p} - e^{(\xi - l_n)p} \left[\int_0^{\xi} L(p, \xi) d\xi + 2R \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где

$$\begin{aligned} L(\xi, p) = & \gamma_l(\xi) [1 - H(\xi - l_{n-l})] - \\ & - \sum_{k=2}^n \gamma_k(\xi) [H(\xi - l_{k-l}) - H(\xi - l_{n-l})], \end{aligned} \quad (4.62)$$

которое для нахождения оригинала удобно записать

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p, \xi) = & \frac{1}{2p} \left\{ \int_0^{l_n} L(p, \xi) \left[l - \frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} e^{2(\xi - l_n)p} \right] d\xi + \left(R - \frac{l}{p + \frac{l}{m}} \right) \right\} \times \\
& \times \left[e^{-l_n p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-l)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n e^{-(2n+1)l_n p} \left(e^{-\xi p} + e^{\xi p} \right) + \frac{l}{2p} \times \right. \\
& \times \left. \left\{ e^{(\xi + l_n)p} \int_0^{\xi} L(p, \xi) e^{2\xi p} d\xi - e^{(\xi - l_n)p} \cdot \left[\int_0^{\xi} L(p, \xi) d\xi + 2R \right] \right\} \right]. \quad (4.63)
\end{aligned}$$

Нахождение оригинала $\bar{u}(p, \xi)$ связано с конкретизацией вида функции $\gamma_k(\xi)$ ($k = 1, \dots, n$).

Рассмотрим случай, когда касательные напряжения $\gamma_1(\xi), \gamma_2(\xi), \dots, \gamma_n(\xi)$ представляют собою последовательность постоянных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Тогда (61) получит простой вид

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p, \xi) = & \frac{1}{2p} \left\{ \gamma_1 [l_n - (l_n - l_{n-1})H(\xi - l_{n-1})] - \right. \\
& - \sum_{k=2}^n \gamma_k [(l_n - l_{k-1})H(\xi - l_{k-1}) - (l_n - l_{n-1})H(\xi - l_{n-1})] + \\
& + 2R + \frac{l}{2p} \left[\gamma_1 \left((1 - e^{-2l_n p}) - (1 - e^{2(l_{n-1} - l_n)p}) H(\xi - l_{n-1}) \right) - \right. \\
& - \sum_{k=2}^n \gamma_k \left((1 - e^{2(l_{k-1} - l_n)p}) H(\xi - l_{k-1}) - (1 - e^{2(l_{n-1} - l_n)p}) \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H\left(\xi - l_{n-l}\right) \left[\frac{\frac{l}{m} - p}{\frac{l}{m} + p} - \frac{l}{p + \frac{l}{m}} \right] \left\{ e^{-l_n p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n \right. \\
& \times \left(e^{-[\xi + 2(n+l)l_n]p} + e^{[\xi - (2n+l)l_n]p} \right) \left. + \frac{l}{4p^2} \left\{ \gamma_l \left[-l + H\left(\xi - l_{n-l}\right) e^{2l_{n-l}p} \right] + \right. \right. \\
& + \sum_{k=2}^n \gamma_k \left[H\left(\xi - l_{k-l}\right) e^{2l_{k-l}p} - H\left(\xi - l_{n-l}\right) e^{2l_{n-l}p} \right] \left. \right\} e^{-(\xi + l_n)p} + \frac{l}{2p} \times \\
& \times \left\{ \frac{l}{2p} \left[\gamma_l \left(l - H\left(\xi - l_{n-l}\right) \right) + \sum_{k=2}^n \gamma_k \left(H\left(\xi - l_{k-l}\right) - H\left(\xi - l_{n-l}\right) \right) \right] - \right. \\
& - \gamma_l \left[\xi - \left(\xi - l_{n-l} \right) H\left(\xi - l_{n-l}\right) \right] + \sum_{k=2}^n \gamma_k \left[\left(\xi - l_{k-l} \right) H\left(\xi - l_{k-l}\right) - \right. \\
& \left. \left. - \left(\xi - l_{n-l} \right) H\left(\xi - l_{n-l}\right) \right] - 2R \right\} e^{(\xi - l_n)p}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Заметим, что первые пять строк (64) соответствуют той части решения (60), которая конкретизируется граничными условиями задачи и в эти строки, вообще говоря, не должны явно входить функции Хевисайда – они здесь принимают значение единица. Мы же сохраняем здесь их только для удобства. Например, при такой записи из (64) очень просто выписывается соответствующее решение для сваи полностью зажатой в грунте. В последующих строках (64) $H(z)$ присутствуют по праву.

Оригинал (64) находится очень легко, но имеет громоздкое выражение. Поэтому для сокращения записи оригиналы будем выписывать для конкретного числа слоев. Прежде для них запишем выражения для изображений. Так, например, для $k = l$ имеем

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p, \xi) = & \left\{ \frac{\gamma}{2p} \left[\left(l + \frac{2R}{\gamma} \right) - \frac{l}{2p} (e^{-2lp} - l) \right] + \left[\frac{\gamma}{2p} (e^{-2lp} - l) - l \right] \frac{l}{p + \frac{l}{m}} \right\} \times \\
& \times \left[e^{-(\xi+l)p} + e^{(\xi-l)p} + \sum_{n=l}^{\infty} (-l)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n (e^{-p[\xi+(2n+l)l]} + e^{p[\xi-(2n+l)l]}) \right] + \\
& + \frac{\gamma}{2p} \left[\left(\frac{l}{2p} - \xi \right) e^{(\xi-l)p} - \frac{l}{2p} e^{-(\xi+l)p} - \frac{2R}{\gamma} \right]. \tag{4.65}
\end{aligned}$$

При $k = 2$ изображение смещения имеет вид (10).

При $k = 3$ (число слоев два, а 3-й участок свай является свободным)

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p, \xi) = & \left\{ \frac{l}{2p} [2R + \gamma_1 l_2 + \gamma_2 (l_2 - l_1)] + \frac{l}{2p} (\gamma_1 (e^{2l_2 p} - l) + \right. \\
& + \gamma_2 (e^{2l_2 p} - e^{2l_1 p})) e^{-2l_3 p} \left. \right] \frac{l}{p + \frac{l}{m}} \left\{ e^{-(\xi+l_3)p} + e^{(\xi-l_3)p} + \right. \\
& + \sum_{n=l}^{\infty} (-l)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n (e^{-p[\xi+(2n+l)l_3]} + e^{p[\xi-(2n+l)l_3]}) \left. \right] + \frac{\gamma}{4p^2} \times \\
& \times \left\{ \gamma_1 [H(\xi - l_2) e^{2l_2 p} - l] + \gamma_2 [H(\xi - l_2) e^{2l_2 p} - H(\xi - l_1) e^{2l_2 p}] \right\} \times \\
& \times e^{-(\xi+l_3)p} + \frac{l}{2p} \left\{ \frac{l}{2p} [\gamma_1 (l - H(\xi - l_2)) + \gamma_2 (H(\xi - l_1) - H(\xi - l_2))] - \right. \\
& - \gamma_1 [\xi - (\xi - l_2) H(\xi - l_2)] + \gamma_2 [(\xi - l_1) H(\xi - l_1) - (\xi - l_2) H(\xi - l_2)] \left. \right\} e^{(\xi-l_3)p}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Для сваи, забитой целиком в двухслойный грунт, имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p, \xi) = & \left\{ \frac{l}{2p} [2R + \gamma_1 l_2 - \gamma_2 (l_2 - l_1) + \right. \\
 & + \left. \frac{l}{2p} (\gamma_1 (1 - e^{2l_2 p}) - \gamma_2 (1 - e^{2(l_1 - l_2)p})) \right] - \left[\frac{l}{2p} (\gamma_1 - e^{-2l_2 p}) - \right. \\
 & - \left. \gamma_2 (1 - e^{2(l_1 - l_2)p}) \right] + l \left] \frac{l}{p + \frac{l}{m}} \left\{ e^{-(l_2 + \xi)p} + e^{(\xi - l_2)p} + \right. \right. \\
 & + \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-l)^n \left(\frac{p - \frac{l}{m}}{p + \frac{l}{m}} \right)^n \left(e^{-p[\xi + (2n+1)l_3]} + e^{p[\xi - (2n+1)l_3]} \right) \right] - \\
 & - \frac{l}{4p^2} [\gamma_1 - \gamma_2 \cdot H(\xi - l_1) e^{2l_1 p}] e^{-(\xi + l_2)p} + \frac{l}{2p} \times \\
 & \times \left\{ \frac{l}{2p} [\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1)] - [\gamma_1 \xi - \gamma_2 (\xi - l_1) H(\xi - l_1) - 2R] \right\} e^{(\xi - l_2)p}.
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Используя соотношение (11), теоремы смещения и запаздывания, перейдем к нахождению оригиналов. В результате для (65) получим

$$u(\tau, \xi) = 0, \quad \tau < \xi,$$

$$u(\tau, \xi) = \frac{\gamma}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{\left[\frac{\tau + \xi}{2} \right]} (-l)^n \left[\int_0^{\tau + \xi - (2n+1)l} \int_0^{\tau + \xi - (2n+1)l} l_n \left(\frac{l}{m} z \right) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times H(z) dz dz - \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l} \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz dz \Big] + \\
& + \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2} \right]} (-I)^n \left[\int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l} \int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz - \right. \\
& - \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l} \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz \Big] + \frac{\gamma}{2} \left\{ \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2} \right]} (-I)^n \times \right. \\
& \times \left[\int_0^{\tau+\xi-(2n+1)l} \int_0^{\tau+\xi-(2n+1)l} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{1}{m} z \right) H(z) dz - \right. \\
& - \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l} \int_0^{\tau+\xi-(2n+3)l} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz \Big] + \\
& + \sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau-\xi}{2} \right]} (-I)^n \left[\int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l} \int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz - \right. \\
& - \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l} \int_0^{\tau-\xi-(2n+3)l} e^{-\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz \Big] + \\
& + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2R}{\gamma} + l \right) \left[\sum_{n=l}^{\left[\frac{\tau+\xi}{2} \right]} (-I)^n \int_0^{\tau+\xi-(2n+1)l} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz + \right. \quad (4.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\left\lceil \frac{\tau+\xi}{2} \right\rceil} (-1)^n \int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz \left] - \sum_{n=1}^{\left\lceil \frac{\tau+\xi}{2} \right\rceil} (-1)^n \times \right. \\
& \times \int_0^{\tau+\xi-(2n+1)l} e^{\frac{z}{m}} l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz - \sum_{n=1}^{\left\lceil \frac{\tau-\xi}{2} \right\rceil} (-1)^n \int_0^{\tau-\xi-(2n+1)l} e^{-\frac{z}{m}} \times \\
& \times l_n \left(\frac{2}{m} z \right) H(z) dz + \left\{ \left(1 - \frac{\gamma m}{2} \right) \left[\left(e^{-\frac{\tau+\xi-l}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - l_2) + \right. \right. \\
& + \left. \left(e^{-\frac{\tau-\xi-l}{m}} - 1 \right) H(\tau - \xi - l_2) \right] - \frac{\gamma m}{2} \left[\left(e^{-\frac{\tau+\xi-3l}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi - 3l) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(e^{-\frac{\tau-\xi-3l}{m}} - 1 \right) H(\tau - \xi - 3l) \right] \right\} + \frac{\gamma}{4} \left\{ \left[\frac{1}{2} (\tau + \xi - 3l)^2 - \right. \right. \\
& - 2m(\tau + \xi - 3l)] H(\tau + \xi - 3l) + \left[\frac{1}{2} (\tau - \xi - 3l)^2 - \right. \\
& - 2m(\tau - \xi - 3l)] H(\tau - \xi - 3l) + [(\tau + \xi - l)^2 - \\
& - 2(\xi - l_1 + m)(\tau + \xi - l)] H(\tau + \xi - l) + \\
& + 2 \left(\frac{2R}{\gamma} + l_1 - m \right) (\tau - \xi - l_1) H(\tau - \xi - l_1) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем займемся сваем, забитой в двухслойный грунт. Для сокращения записи не будем выписывать оригинал (67) для произвольного момента времени. Получение теперь общих выражений для скорости, напряжения и смещения не представляет затруднений и делается подобно тому, как это было в § 1 настоящей главы.

Здесь же выпишем оригинал смещений для нескольких областей полосы $0 \leq \xi \leq l_2, \tau \geq 0$ для получения отказа и напряженно-деформированного состояния в некоторых практически интересных промежутках времени, для чего при этом используем теоремы запаздывания и смещения [37].

Как и прежде, область $\tau < l_2 - \xi$ лежит впереди фронта волны, следовательно, представляет область покоя. В области, где $l_2 - \xi < \tau < l_2 - 2l_1 + \xi$ для смещения будем иметь

$$\begin{aligned}
 u(\tau, \xi) = & m \left[\frac{l}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + l \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) + \\
 & + \frac{l}{8} \{ 2\gamma_1 - \gamma_2 [1 + H(\xi - l_1)] \} (\tau + \xi - l_2)^2 - \\
 & - \frac{l}{2} \{ (\xi - l_1) [\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1)] + m(\gamma_1 - \gamma_2) \} (\tau + \xi - l_2).
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Для области $l_2 - \xi < \tau < l_2 + \xi, \quad l_2 - 2l_1 + \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 - \xi$ решение записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & \left\{ m \left[\frac{1}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + 1 \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) + \right. \\
& + \frac{1}{8} [2\gamma_1 - \gamma_2 (1 + H(\xi - l_1))] (\tau + \xi - l_2)^2 - \\
& - \frac{1}{2} [(\xi - l_1) [\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1)] + m(\gamma_1 - \gamma_2)] (\tau + \xi - l_2) \Big\} \times \quad (4.69) \\
& \times H(\tau + \xi - l_2) + \frac{1}{8} \gamma_2 (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 \times \\
& \times H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2).
\end{aligned}$$

Смещения в пределах верхнего и нижнего слоев в рассматриваемой области $l_2 - \xi < \tau < l_2 + \xi$, $l_2 - 2l_1 + \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 - \xi$ соответственно имеют выражения

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left[\frac{1}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + 1 \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) + \\
& + \frac{1}{4} (\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2)^2 + \frac{1}{8} (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 - \quad (4.70) \\
& - \frac{1}{2} (\xi + m - l_1) (\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2);
\end{aligned}$$

$$u(\tau, \xi) = m \left[\frac{1}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - I \right) + \\ + \frac{1}{2} \{ (\gamma_2 - \gamma_1) (\tau + \xi - l_2)^2 + [m \gamma_2 - \gamma_1 (\xi + m - l_1)] (\tau + \xi - l_2) \}.$$

Для области, где $3l_2 - 2l_1 < \tau < l_2 + \xi$ решение имеет вид

$$u(\tau, \xi) = \frac{1}{8} \{ \gamma_2 [(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - 4m(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)] \times \\ \times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 H(\xi - l_1) \times \\ \times H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) + [2\gamma_1 - \gamma_2 (1 - H(\xi - l_1))] \times \\ \times (\tau + \xi - l_2)^2 - \frac{1}{2} [(\xi - l_1)(\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1)) + m(\gamma_1 - \gamma_2)] \times \\ \times (\tau + \xi - l_2) + 8m \left[\frac{1}{2} m (\gamma_1 - \gamma_2) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - I \right) \} \times \\ \times H(\tau + \xi - l_2) - \frac{1}{2} m^2 \gamma_2 \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - I \right) \times \\ \times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \quad (4.71)$$

Конкретно, в пределах верхнего и нижнего слоев при решении соответственно имеет вид

$$u(\tau, \xi) = m \left[\frac{1}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - I \right) - \frac{1}{2} m^2 \gamma_2 \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - I \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_2}{8} \left[(\tau + \xi + 2l_1 - l_2)^2 + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 - 4(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \right] - \\
& - \frac{I}{2} \left[\frac{I}{2} (2\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2)^2 - (\xi + m - l_1) (\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2) \right]; \\
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) - \frac{I}{2} m^2 \gamma_2 \left(e^{\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) + \\
& + \frac{I}{8} \left\{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - (2\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2)^2 + \right. \\
& \left. + 4[2\gamma_2 m (l_1 - l_2) - \gamma_1 (\xi + m - l_1)] (\tau + \xi - l_2) \right\}.
\end{aligned}$$

В области, для которой $l_2 + \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 - \xi$

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left[\frac{m}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - 1 \right) + \\
& + \frac{I}{2} \left\{ (2\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2)^2 - \frac{I}{4} (\tau - \xi - l_2)^2 \times \right. \\
& \times [(\xi - l_1) \gamma_1 + m(\gamma_1 - \gamma_2)] (\tau + \xi - l_2) + \\
& \left. + [2R + \gamma_1 (l_2 - m) - \gamma_2 (m + l_2 - l_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

В области $l_2 + \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 + \xi$, $3l_2 - 2l_1 - \xi < \tau < 3l_2 - \xi$

решение имеет вид

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & -\frac{I}{2} m^2 \gamma_2 \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - 1 \right) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \\
& + \frac{I}{8} \left\{ 8m \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) + \right.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
& + [2\gamma_1 - \gamma_2 (1 - H(\xi - l_1))] (\tau + \xi - l_2)^2 - 4(\xi - l_1) \times \\
& \times [\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1) + m(\gamma_2 - \gamma_1)] (\tau + \xi - l_2) H(\tau + \xi - l_2) + \\
& + \frac{I}{8} \gamma_2 \{ (\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2)^2 - 4m(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) \} \times \\
& \times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)^2 \times \\
& \times H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) \Big] + \frac{I}{2} \left\{ -\frac{\gamma_2}{4} (\tau - \xi - l_2)^2 + \right. \\
& + [2R + \gamma_1 (l_2 + m) - \gamma_2 (m + l_2 - l_1)] (\tau + \xi - l_2) + \\
& + m [m(\gamma_2 - \gamma_1) - 2 \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - 1 \right)] \Big\} H(\tau - \xi - l_2).
\end{aligned}$$

В области, для которой $3l_2 - 2l_1 + \xi < \tau < 3l_2 - \xi$ имеем

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & m \left\{ -\frac{1}{2} m \gamma_2 \left(e^{-\frac{\tau+\xi+2l_1-3l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau-\xi+2l_1-3l_2}{m}} - 2 \right) + \right. \\
& + \left[\frac{1}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}} - 2 \right) \Bigg\} + \\
& + 6 \frac{I}{4} \gamma_2 [(\tau + 2l_1 - 3l_2)^2 - \xi^2] + \\
& + \frac{I}{8} [(2\gamma_1 - \gamma_2)(\tau + \xi - l_2)^2 - \gamma_2(\tau - \xi - l_2)^2] - \\
& - \frac{I}{2} [(\xi - l_1) \cdot \gamma_1 + m(\gamma_1 - \gamma_2)](\tau + \xi - l_2) + \\
& + \frac{I}{2} [2R + \gamma_1(l_2 - m) + \gamma_2(m + l_1 - l_2)](\tau - \xi - l_2) - \\
& - m \gamma_2 (\tau + 2l_1 - 3l_2).
\end{aligned} \tag{4.75}$$

При $3l_2 + \xi < \tau < 3l_2 - 2l_1 + \xi$ решение имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
u(\tau, \xi) = & \frac{1}{2} m^2 \left[\gamma_1 \left(e^{-\frac{\tau+\xi-3l_2}{m}} - 1 \right) - \gamma_2 \left(e^{-\frac{\tau+\xi+2l_1-3l_2}{m}} - 1 \right) \right] + \\
& + m \left[\frac{1}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau-\xi-l_2}{m}} - 2 \right) + \frac{I}{4} (\gamma_1 - \gamma_2) \times \\
& \times (\tau + \xi - l_2)^2 + \frac{I}{2} \{ [(\xi - l_1)(\gamma_1 - \gamma_2) + \gamma_1 l_2 + \gamma_2(l_1 - l_2)] \times
\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\times (\tau + \xi - l_2) + [2R + \gamma_1(l_1 + l_2 - m) + \gamma_2(m + l_2 - l_1)] \times \\ \times (\tau - \xi - l_2) - \gamma_1 l_2^2 + \gamma_2(2l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2) \}.$$

При необходимости легко выписать законы смещения и для последующих областей. Однако, наличие затухания делает ненужным анализ поля смещений, так же как и полей скоростей и напряжений, приводимых ниже, для больших промежутков времени.

Скорости v и напряжения σ для областей I и II (рисунок 15) имеют нулевые значения, как это имело выше место и для смещений. В области же III они имеют следующие выражения

$$v(\tau, \xi) = - \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + \\ + \frac{I}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2) - \frac{I}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) (\xi + m - l_1), \quad (4.77)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = - \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - \frac{I}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) (\xi + m - l_1).$$

Для областей IV и V имеем

$$v(\tau, \xi) = - \left\{ \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + \right.$$

$$+\frac{I}{4}[\gamma_1-\gamma_2(1-H(\xi-l_1))](\tau+\xi-l_2)+ \quad (4.78)$$

$$+\frac{I}{2}[(\xi-l_1)(\gamma_1-\gamma_2 H(\xi-l_1))+m(\gamma_1-\gamma_2)]\Big\}\times$$

$$\times H(\tau+\xi-l_2)+\frac{I}{4}\gamma_2(\tau-\xi+2l_1+l_2)\times$$

$$\times H(\xi-l_1)H(\tau-\xi+2l_1-l_2),$$

$$\sigma(\tau,\xi)=-\left\{\left[\frac{I}{2}m(\gamma_2-\gamma_1)+I\right]e^{-\frac{\tau+\xi-l_2}{m}}+\right.$$

$$+\frac{I}{4}[\gamma_2(1-H(\xi-l_1))-\gamma_1](\tau+\xi-l_2)+$$

$$+\frac{I}{2}[(\xi-l_1)(\gamma_1-\gamma_2 H(\xi-l_1))+m(\gamma_1-\gamma_2)]\Big\}\times$$

$$H(\tau+\xi-l_2)-\frac{I}{4}\gamma_2(\tau-\xi+2l_1+l_2)\times$$

$$H(\xi-l_1)H(\tau-\xi+2l_1-l_2).$$

Для областей VI и VII поле напряжений и поле скоростей имеют следующий вид

$$v(\tau,\xi)=\frac{I}{4}\gamma_2[(\tau+\xi+2l_1+3l_2-2m)\times$$

$$\times H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + (\tau - \xi + 2l_1 - l_2) \times \quad (4.79)$$

$$\times H(\xi - l_1) H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2) +$$

$$+ \frac{I}{4} \{ \gamma_1 - \gamma_2 (1 + H(\xi - l_1)) \} (\tau + \xi - l_2) -$$

$$- 2 \{ (\xi - l_1) (\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1)) + m(\gamma_1 - \gamma_2) \} -$$

$$- 4 \left[\frac{I}{2} m(\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} - 1 \right) \times$$

$$H(\tau + \xi - l_2) + \frac{I}{2} m \gamma_2 e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2),$$

При τ , изменяющегося в области VIII и $0 \leq \xi \leq l_1$ скорость и напряжение будут следующими

$$\begin{aligned} v(\tau, \xi) = & - \left[\frac{I}{2} m(\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} \right) + \\ & + \frac{I}{2} \{ (\gamma_1 - \gamma_2) (\tau - l_2) + 2R + \gamma_1 (l_1 + l_2) - \gamma_2 (l_2 - l_1) \} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\sigma(\tau, \xi) = \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} \right) - \frac{I}{2} [(\gamma_1 + \gamma_2) \xi + \gamma_2 m - \gamma_1 (l_1 + m)].$$

Для областей IX и X имеем

$$\begin{aligned} \nu(\tau, \xi) = & -\frac{I}{2} m \gamma_2 e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) - \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \\ & \times \left[e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} H(\tau - \xi - l_2) \right] + \\ & + \frac{I}{2} \left\{ \frac{I}{2} [2\gamma_1 - \gamma_2 (l + H(\xi - l_1))] (\tau + \xi - l_2) - \right. \\ & - [(\xi - l_1) (\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1) + m (\gamma_2 - \gamma_1))] \times \\ & \times H(\tau + \xi - l_2) + \frac{I}{2} \left[-\frac{I}{2} \gamma_2 (\tau - \xi - l_2) + 2R + \right. \\ & + \gamma_1 (l_2 + m) + \gamma_2 (l_1 - l_2 - m) \big] H(\tau - \xi - l_1) + \\ & + \frac{I}{4} \gamma_2 [(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2 - 2m) H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) + \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$+ (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)H(\xi - l_1)H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2)],$$

$$\sigma(\tau, \xi) = -\frac{l}{2}m\gamma_2 e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) -$$

$$- \left[\frac{l}{2}m(\gamma_2 - \gamma_1) + l \right] \left[e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} H(\tau + \xi - l_2) - e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} H(\tau - \xi - l_2) \right] -$$

$$- \frac{l}{2} \left\{ \frac{l}{2} [\gamma_1 - \gamma_2 (1 - H(\xi - l_1))] (\tau + \xi - l_2) + \right.$$

$$+ (\xi - l_1) [\gamma_1 - \gamma_2 H(\xi - l_1)] + m(\gamma_1 - \gamma_2) \} \times$$

$$\times H(\tau + \xi - l_2) + \frac{l}{2} \left\{ \frac{\gamma_2}{2} (\tau - \xi - l_2) + \right.$$

$$\times [\gamma_2 (m + l_2 - l_1) - \gamma_1 (m - l_2) - 2R] H(\tau - \xi - l_2) +$$

$$+ \frac{l}{4} \gamma_2 [(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2 - 2m)H(\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2) -$$

$$- (\tau - \xi + 2l_1 - l_2)H(\xi - l_1)H(\tau - \xi + 2l_1 - l_2)]$$

В области, IX где $3l_2 - 2l_1 < \tau < 3l_2 - \xi$

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) = & \frac{I}{2} m \gamma_2 \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} \right) - \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \times \\
& \times \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} \right) - \frac{I}{2} \gamma_1 (\tau + l_1 - 2m) + \frac{I}{2} [2R + 3\gamma_2 (l_1 - l_2)], \\
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau, \xi) = & \frac{I}{2} m \gamma_2 \left(e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - e^{-\frac{\tau - \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} \right) - \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \times \\
& \times \left(e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} \right) - \frac{I}{2} [(\gamma_1 + 2\gamma_2)\xi + \gamma_1 (l_1 - l_2) + \gamma_2 (l_1 - l_2 - 2m)] - R.
\end{aligned}$$

В области XII

$$\begin{aligned}
v(\tau, \xi) = & \frac{I}{2} m \left(\gamma_2 e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - \gamma_1 e^{-\frac{\tau + \xi - 3l_2}{m}} \right) - \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \times \\
& \times \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} + e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} \right) - \frac{I}{4} (\gamma_1 - \gamma_2) (\tau + \xi - l_2) + \\
& + \frac{I}{2} [(\xi - l_1)(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1 (l_2 - l_1 + m) - \gamma_2 (m - l_1)] + R, \\
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\sigma(\tau, \xi) = \frac{I}{2} m \left(\gamma_2 e^{-\frac{\tau + \xi + 2l_1 - 3l_2}{m}} - \gamma_1 e^{-\frac{\tau + \xi - 3l_2}{m}} \right) + \left[\frac{I}{2} m (\gamma_2 - \gamma_1) + I \right] \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{\tau - \xi - l_2}{m}} - e^{-\frac{\tau + \xi - l_2}{m}} \right) + \frac{I}{2} \left[\frac{I}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) (\tau + \xi - l_2) + \right. \\ \left. + (\xi - l_1) (\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_2 (l_1 - m) - \gamma_2 m - 2R \right].$$

Займемся теперь нахождением отказа сваи, забитой, как было сказано, в двухслойный грунт, считая, что остановка конца $\xi = 0$ имеет место в момент, удовлетворяющий неравенству (33) при предположении, что скорость сваи в области зависимости $\xi = 0, \tau = T$ неположительна. Тогда остановка упомянутого конца может произойти либо в момент (34), либо в момент (35). И, если остановка происходит в момент $l_2 < T < 3l_2 - 2l_1$, то отказ сваи будет дан формулой

$$u_0 = \frac{I}{4} \gamma_1 (T - l_2)^2 + \frac{I}{2} [2R + \gamma_1 (m + 2l_1 - l_2) - \gamma_2 (m + l_2)] \times \\ (T - l_2) + \frac{I}{2} m [2R + (\gamma_1 - \gamma_2) (l_2 - l_1 - 2m) - 4]. \quad (4.86)$$

Время T определяется из уравнения

$$[m(\gamma_2 - \gamma_1) - 2] e^{-\frac{T - l_2}{m}} + \frac{I}{2} [(\gamma_2 - \gamma_1) (T - l_2) - \\ - 2R + \gamma_2 (l_2 - l_1) - \gamma_1 (l_2 + l_1)] = 0. \quad (4.85)$$

При T , лежащем в диапазоне (35), отказ сваи находится по формуле

$$u_0 = \frac{l}{4}\gamma_1(T-l_2)^2 + \frac{l}{2}[\gamma_1(l_1+l_2)+3\gamma_2(l_1-l_2)+2R](T-l_2)+$$

$$+ \frac{l}{2}m[2R+\gamma_1(l_1+l_2)+\gamma_2(3l_2-l_1)-4]+\gamma_2(l_2-l_1)^2. \quad (4.86)$$

Момент остановки T определяется уравнением

$$m\gamma_2 e^{-\frac{T+2l_1-3l_2}{m}} - 2\left[\frac{l}{2}m(\gamma_2-\gamma_1)+l\right]e^{-\frac{T-l_2}{m}} + \frac{l}{2}\gamma_1(T-l_2)+$$

$$+ \frac{l}{2}[2R+\gamma_1(l_1+l_2-2m)+3\gamma_2(l_1-l_2)]=0. \quad (4.87)$$

Полученные формулы отказов справедливы соответственно при следующих ограничениях на параметры

$$2 - \frac{l}{2}[\gamma_1(l_1+l_2-m)+\gamma_2(l_2-l_1+m)] > R > [2 - m(\gamma_1-\gamma_2)]e^{-\frac{2(l_2-l_1)}{m}} -$$

$$- \frac{l}{2}[\gamma_1(l_2-3l_1)-3\gamma_2(l_2-l_1)]. \quad (4.88)$$

$$2\left[\frac{l}{2}m(\gamma_2-\gamma_1)+l\right]e^{-\frac{2(l_2-l_1)}{m}} - \frac{l}{2}[\gamma_1(3l_2-l_1+2m)+\gamma_2(l_1-l_2)] > R >$$

$$2\left[\frac{l}{2}m(\gamma_2 - \gamma_1) + l\right]e^{-\frac{2l_2}{m}} - m\gamma_2 e^{-\frac{2l_2}{m}} - \frac{l}{2}[\gamma_1(3l_2 + l_1 - 2m) + 3\gamma_2(l_1 - l_2)].$$

Анализ решений (84) и (86) показывает, что осадки двух свай, имеющих одинаковые сопротивления, но забитые одна в однослойной грунт, другая – в двухслойный грунт, имеют разные значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для определения сопротивления сваи, работающей при статической и динамической нагрузках, получен ряд формул, которые качественно хорошо совпадают с экспериментальными и натурными результатами других исследователей.

Формулы, полученные в статических задачах, в частности, могут облегчить задачу испытаний свай пробными нагрузками, так как, испытывая пробную сваю на глубину, меньшую проектной, можно судить о несущей способности рабочих свай. Результаты статических задач могут помочь также перспективному методу пенерации, который считается предпочтительным трудоемкому и дорогому методу пробных испытаний.

Н.М. Герсеванов возлагал большие надежды на результаты своих теоретических исследований по динамике свай. Только, повторяем, некоторые досадные упущения не дали возможность получения адекватных результатов. Теперь, когда результаты Н.М.Герсеванова исправлены (глава III) и кривые качественно совпадают с натурными динамические формулы принесут пользу, которую от них ожидали.

В работе показано, что свободный участок сваи значительно влияет на ее отказ и тем существеннее при всех прочих равных условиях, чем больше этот участок. Следовательно, влияние это должно быть принято в расчет при определении несущей способности. Считаем, что при определении несущей способности сваи прежде следует обратиться к формуле для сваи со свободным

участком и только в том случае, когда оценка покажет, что указанное влияние мало, можно перейти к расчету по формуле для сваи, полностью зажатой в грунте.

Полученные в разделе II формулы отказов дают конкретные значения для сопротивления сваи, в частности, при нулевом отказе. Как известно, почти все существующие формулы для этого случая для сопротивления дают бесконечное значение. Только некоторые формулы освобождаются от такой неопределенности в результате известных дополнительных допущений.

Ряд результатов получен для многослойного грунта. Более подробно исследована работа сваи в двухслойном грунте.

Литература

1. Л.В. Никитин. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения. "Инженерный журнал", т.Ш, вып.І, 1963.
2. Л.В. Никитин. Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением. Инженерный журнал "Механика твердого тела", № 2, 1967.
3. Н.М. Герсеванов. Теория продольного удара с применением к определению сопротивления свай. Собрание соч., т.І. М. Стройвоенмориздат, 1948.
4. Н.М. Герсеванов. Определение сопротивления свай. Собрание сочинений, т.І. М. Стройвоенмориздат, 1948.
5. Л.В. Никитин, А.Н. Тюреходжаев. Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт. Проблемы механики горных пород. Материалы Первой всесоюзной научной конференции по механике горных пород. Алма-Ата, изд. "Наука" 1966.
6. А.Н.Тюреходжаев. Продольный удар по упругому конечному стержню. Материалы отчетно-научной конференции по математике и механике. АН КазССР, Ин-т математики и механики. Алма-Ата, Изд. "Наука", 1967.
7. А.Н.Тюреходжаев. Удар по упругой свае, заглубленной в грунт. Тезисы докладов на IV Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. М., изд. "Наука", 1967.

8. А.Н.Тюреходжаев. Движение и несущая способность стержня, частично заглубленного в среду с сопротивлением. Материалы Первой научной конференции молодых ученых АН КазССР, Алма-Ата, Изд. "Наука", 1968.
9. А.Н.Тюреходжаев. Конструкционный гистерезис в стержне с учетом бокового расширения. Сб. "Исследования по дифференциальным уравнениям и их применению". Алма-Ата. Изд. "Наука", 1965.
10. А.Н.Тюреходжаев, Погружение и несущая способность упругой сваи. Известия АН КазССР, сер. физ.-мат. Алма-Ата. Изд. "Наука", № 3, 1966.
11. А.Н.Тюреходжаев. Удар по упругому стержню, заглубленному в грунт. Сб. "Дифференциальные уравнения и их применение ". АН КазССР. Институт математики и механики, Изд-во "Наука", КазССР. Алма-Ата, 1969
12. А.Н.Тюреходжаев. Удар по упругому стержню, заглубленному в грунт. Сб. «Дифференциальные уравнения и их применение». АН КазССР. Институт математики и механики. Изд-во «Наука», КазССР. Алма-Ата, 1969 (в печати).
13. Я.Г. Пановко. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., 1960.
14. В.С.Скуратов. Новые методы расчета свай. Сб. № 8, Гидрагеолого-Гидротехнического ин-та ЛПТЭУ НКПС.М.,1930.
15. О.Я.Шехтер. Распространение волн в полубесконечном упругом стержне при ударе по его верхнему концу с учетом

боковых демперирующих реакций грунта. Сб. трудов НИИ О. и ПС № 54, 1964.

16. О.Я. Шехтер. Исследование распространения волн от нагрузки приложенной к верхнему концу бесконечно длинного стержня. Сб. трудов НИИ О. и ПЗ № 53, 1963.

17. О.Л.Шехтер. Определение параметров между напряжением и перемещением при ударном испытании свай, Сб. трудов НИИ О. и ПС, № 55, 1964.

18. Д.Д.Баркан, О.Я.Шехтер. Об осадках, вызываемых действием динамических нагрузок. Сб. № 44. Динамика грунтов НИИ О.СП, АС и А СССР, Госстройиздат. М., 1961.

19. Д.Д.Баркан. Динамика оснований и фундаментов. М., Строй-военмориздат, 1948.

20. Б.П.Попов. Определение несущей способности сваи по результатам динамических испытаний. М., Военмориздат, 1949.

21. П.Р.Тикунов. Определение сопротивления свай по данным забивки с учетом упругих перемещений грунта и свай. Сб. № 36. Искусственные основания и сооружения НИИ осн., АС и А СССР. Госстромиздат, М., 1959.

22. Б.А.Патолеев, Расчет сваи и свайных оснований. Реч. издат. 1949.

23. В.В.Кречмер. Исследование прочности железобетонных свай при забивке. Сб. № 10 трудов НИИ Сектора треста глубинных работ, М.-Л., 1939.

24. Г.А.Русанов. Определение сопротивления свай динамическим методом с учетом упругой деформации. Автореферат. М., 1961.
25. В.Г.Березанцев, ГО-НИИ Н. К вопросу об определении несущей способности свай. Научно-технический бюлл. "Основания и фундаменты", № 22, 1959.
26. В.А.Луга. К нормам расчетных сопротивлений свай по грунту. Труды Всесоюзн. научн. исл. ин-та транспорта, строительства, вып. 56, 1965.
27. С.М.Рак. Исследование работы свай. М., 1950.
28. П.О.Янковский. Сопротивление свай. "Журнал Министерства путей сообщения", № 8, 1887.
29. Е.В.Близняк. К вопросу о нормах для расчета сопротивления свай. Выпуск 124 НИИ сектора ЦП ТЭУ НКПС, 1930 г.
30. М.И.Горбунов-Посадов. О вытеснении и уплотнении грунта забивной сваей, Ж.Основания, ф. и МГ, № 5, 1968.
31. Ю.Г.Трофименков, А.А. Ободовский, Некоторые вопросы определения несущей способности свай. Основания фундаменты и механика грунтов", № 3, 1966.
32. Р.И.Колмогоров. Определение сопротивления элементов одиночной висячей сваи вертикальным нагрузкам. Автореферат, 1955.
33. В.Н.Морозов. Некоторые вопросы несущей способности свай. Автореферат на соискание ученой степени канд. технич. наук. Л. 1962.

34. Б.Н.Голубков. Экспериментальные исследования работы свай на вертикальную нагрузку, 1939.
35. Д.А.Романов. Методы статических испытаний и оценка несущей способности свай. Киев "Будовельник", 1967.
36. С.П.Тимошенко. Теория упругости. ОНТЧ ГТИ, 1934.
37. А.И.Лурье. Операционное исчисление, М.-Л., 1950
38. A. Kezdi. Bearing Capacity of Piles and Pile Yzoups. Труды IV Международного конгресса по механике грунтов и фундаментосроению. Лондон, 1957
39. K. Flaate. An Investigation of the Validity of three Pile Driving Formulae in Cohesionless Material Norges geotechniske institutt, publukasjon №56, 1962
40. A. Tejchmen. Badanurodzialu nosnosi pala pograzonego w sypkin osrodku gruntowgu Na jego ostrze I pobocznicie. Archiwum Hydrotechniki. том XIII, 1966
41. С.А.Шашков. Определение сопротивления сваи комбинированным зондированием. Основания фундаменты и механика грунтов, № 2, 1965
42. E. Menzenbach. The determination of the permissible pointload of piles by means of static penetration tests. Prac. V Intern. Conf. soil Mech. and Found, vol. II, Paris, 1961
43. Л.Д.Мартынова. Исследования зависимости удельного лобового сопротивления и удельного трения от сечения. Основания, фундаменты и механика грунтов, 2, 1967.