ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті

Ү. Б. Жаңбырбаева

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА КУРСЫ БОЙЫНША ЕСЕПТІК – ПРАКТИКУМ

Республикалық оқу-әдістемелік бірлестігі оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2003

УДК 519.2 (076)
ББК 22.171 я7
Жаңбырбаева У.Б. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика курсы бойынша есептік – практикум. Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. - 77 бет.
ISBN 9965-585-99-7

Бұл оқу құралы ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика курсы бойынша 32-36 сағат көлемінде практикалық сабақтардан барлық мамандықтар үшін күндізгі және сырттай оқитын студенттердің өз бетінше есептер шығаруына арналған.

Оған қоса оқу құралында әр бір тақырып бойынша жекелеген тапсырмалар үшін 30 вариант берілген. Бұл варианттарды сабақта да, үйге де беруге болады. Студенттің нақты білімін анықтау үшін өте қолайлы.

Оқу құралы есептер шығаруға қажетті формулалармен қамтамасыз етілген, сол сияқты жекелеген тапсырмаларды орындауға көмектесетін шығарылған есептер берілген.

Осы айтылғандар ықтималдық теориясы мен математикалық статистиканы оқу үшін барлық факультет студенттеріне пайдалы деп үміттенеміз.

ББК 22.171 я7
Сурет – 4. Кесте – 34. Әдебиеттер тізімі – 10
Пікір жазғандар: М.К. Шуакаев – т.ғ.д., профессор,
Қ.Ж. Наурызбаев – физ.мат.-ғ.к., профессор.
© Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2003 жылғы басылым жоспары бойынша басылды.

Ы $\frac{4310020000}{00(05)-04}$

ISBN 9965-585-99-7
© ҚазҰТУ,2003

КІРІСПЕ

Ұсынылып отырған оқу құралы үш бөлімнен тұрады:

1. Ықтималдылықтар теориясы;
2. Математикалық статистика;
3. Типтік есептер.

Бұл бөлімдердің әр қайсысында әр түрлі 30 вариантан тұратын есептер берілген. Демек, бұлар практикалық сабақтарда жеке-жеке студенттермен дербес жұмыс жасауға, үйге тапсырма беруге және жеке студенттің рейтинг балын анықтауға мүмкіндік береді.

Ықтималдылықтар теориясы бөлімінде комбинаторикаға (қосылыстарға) арналған есептерге көбірек көңіл бөлінген. Себебі комбинаторика жайында көптеген оқулықтарда оның мазмұны толық ашылмай қалған.

Математикалық статистика бөлімінде арнайы техникалық пәндермен байланысты болатын есептер келтірілген.

Бұл оқу құралының студенттердің өз бетінше жұмыс жүргізуі үшін пайдасы бар, өйткені мұнда қажетті теориялық материалмен қатар, типтік есептерді шешудің үлгілері келтірілген. Ал бұның әсіресе, сырттай оқитын студенттер үшін пайдасы мол. Әрбір бөлім бойынша типтік есептердің 30 варианты құрылған және оларды орындау үшін нұсқаулар берілген.

Оқу құралы қазақ тілінде алғаш рет жазылып отыр. ҚазҰТУ-де барлық мамандықтар бойынша оқитын студенттерінің пайдалану мүмкіншілігі де ескерілді.

№ 1 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
КОМБИНАТОРИКА МЕН ЖИЫНДАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ БОЙЫНША СҰРАҚТАР

1. Таңдамалар туралы түсініктер.
2. Теру, алмастыру және орналастыру сандары үшін формулалар.
3. Қосу, көбейту және шекті жиындар үшін біріктіру, сол сияқты осы жиындар элементтерінің сандары үшін формулалар.

Формулалар

n элементтен, әрқайсысы m элементтен алынған терулер саны:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1.2...m}.$$

m бойынша n-нен жасалған орналастырулар саны:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)...(n-m+1).$$

n элементтен жасалған алмастырулар саны:

$$P_n = n! = 1.2...n.$$

Мысалдар

1. А.В.С.Д төрт адамнан қанша әдіспен екеуін бөліп алуға болады?

Шешуі: Екі адамды бөліп алу үшін реті роль атқармайды, терулер саны үшін келесі формуланы пайдаланамыз:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6 - \text{әдіспен}.$$

2. Әртүрлі цифрдан тұратын автомобильдің қанша нөмірі болады?

Шешуі: Автомобильдің нөмірі 4 цифрдан тұрады және олардың реті маңызды роль атқарады, сондықтан 4 бойынша 10 цифрдан тұратын орналастырулар санына есептеу формуласын пайдаланамыз:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Цифрға қоса нөмірде үш әріп болады, оның екеуі белгілі бір территорияға бекітілген, ал үшіншісі 29-әріптің (ь,ъ,ы,й-нөмірге алынбайды)

кез-келген біреуі болуы мүмкін. Сондықтан автомобиль нөмірі әрбір 29 үштік орынды әріптерге A_{10}^4 санын көбейткеннен шығады

$$29 \cdot A_{10}^4 = 146160 \text{ нөмірлер.}$$

3. Әр түрлі түптелген 5 кітапты сөреге неше әдіспен қоюға болады?

Шешуі: алмастыру санын, есептеу формуласын пайдаланамыз

$$P_5 = 5! = 120.$$

4. Дүкенде Ә. Нүрпейісовтың "Қан мен тер" романының үш басылымы, "Соңғы 'парыз" повестінің екі басылымы, ал М. Әуезовтың "Абай жолы" романының төрт басылымы бар.

Бұдан басқа "Соңғы парыз" бен "Қан мен тер" шығармаларынан тұратын 22 кітап, ал "Абай жолы" мен "Қан мен тер" романдарынан тұратын 8 кітап бар. Әрбір шығарманың бір-бір данасы болатындай етіп, қанша әдіспен кітаптар сатып алуға болады?

Шешуі: 3 кітапты әр шығармадан бір-бір дана етіп сатып алу керек. Сондықтан, $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ тәсілмен сатып алуға болады.

22 кітаптың ішінде екі шығарма болғандықтан "Абай жолы" кітабын бөлек сатып алу керек

$$22 \cdot 4 = 88 \text{ тәсіл.}$$

Сол сияқты, 8 кітап екі шығармадан тұрғандықтан "Соңғы парыз" кітабын жеке сатып алу керек

$$8 \cdot 2 = 16 \text{ тәсіл.}$$

Сөйтіп, барлығы

$$88 + 16 + 24 = 128 \text{ тәсіл.}$$

(Бұл есепті шығару барысында оқиғаларды қосу және көбейту ұғымдарына сәйкес қосылғыштар мен көбейткіштер элементтерінің сандарын есептеуге сәйкес теоремалар қолданылды).

5. Төрт сұрақтың әрқайсысына төрт жауап көрсетілген. Ал әрбір сұрақтағы жауаптардың ішінде біреуі дұрыс, қалғандары қате. Студент әрбір сұраққа жауапты жаза салған. Сөйтіп, тексере келгенде ол барлық сұраққа дұрыс жауап бермеген. Осындай жағдайлардың саны қанша?

Шешуі. Бірінші сұраққа үш жауап, екінші сұраққа үш жауап, үшінші сұраққа үш жауап және төртінші сұраққа үш жауап қате берілген. Демек, студенттің берген жауаптарының саны

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81.$$

Мұндай комбинатериканы қайталанатын орналастырулар дейді. Әдетте қайталанатын орналастырулар санын $\widetilde{A}_n^k$ деп белгілейді. Бұл $\widetilde{A}_n^k = n^k$ формуласымен есептеледі.

6. Бір комитет 9 адамнан сайланған. Бұлардан хатшыны және оның орынбасарын сайлау керек. Мұны қанша әдіспен жүргізуге болады?

Шешуі. Әр түрлі 9 элементтен тұратын жиыннан 2 элементті таңдап алу керек. Ретінің маңызы бар (мысалы, a_1-хатшы, a_2-орынбасар және a_2– хатшы, a_1-орынбасар таңдамалары бірдей элементтерден тұр, бірақ айырмасы бар). Элементтер қайталанбайды. Демек, тоғыз элементтен әрқайсысы екі элементтен тұратын қайталанбайтын орналастырулардың санын, яғни A_9^2 - ні табу керек. Олай болса, хатшы мен оның орынбасарын $A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$ тәсілдермен сайлауға болады.

7. Бір шеңберде жатқан 6 нүкте арқылы қанша хорда жүргізуге болады?

Шешуі. Әр түрлі 6 элементтен тұратын жиыннан 2 элемент таңдалады, өйткені шеңберде жатқан екі нүкте хорданы бір мәнді анықтайды. Элементтер тәртібінің ролі жоқ. Мысалы, [АВ] және [ВА] – бір ғана хорда. Олай болса, алты элементтен екіден терулер санын табу керек, яғни C_6^2–ні.

Демек, әр түрлі $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$ хорда жүргізуге болады.

8. 1-ден 30-ға дейінгі натурал сандары берілген. Қосындысы жұп болатындай етіп, үш санды қанша тәсілдермен таңдауға болады?

Шешуі. Үш санның қосындысы жұп болу үшін барлық қосылғыштар жұп немесе бір қосылғыш жұп және екі қосылғыш тақ болуы керек. Олай болса, 15 жұп сандарының ішінен 3 санды C_{15}^3 түрлі әдістермен таңдауға болады, өйткені қосылғыштардың реті ескерілмейді. Оның үстіне, 15 тақ сандардың ішінен 2 санды C_{15}^2 түрлі әдістермен таңдауға болады және әрбір мұндай таңдаудан кейін бір жұп санды 15-тің ішінен C_{15}^1 тәсілдермен таңдауға болады. Екі тақ және бір жұп саннан тұратын таңдамалар саны көбейтінді ережесі бойынша $C_{15}^2 C_{15}^1$–ге тең. Қосу ережесін қолданып, шартты

қанағаттандыратын таңдамалардың жалпы санын табамыз $C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^1 = 2030$.

9. Шахмат тақтасының бірінші жолында ақ жақтың фигураларын (2 ладья, 2 піл, 2 ат, ферзь және король) қанша тәсілдермен қойып шығуға болады?

Шешуі. Шахмат тақтасының бірінші жолында 8 шаршы орын бар. Оған бес түрлі (2 ладья, 2 піл, 2 ат, 1 ферзь және 1 король) фигураны орналастыру керек (шахмат ережесі бойынша). $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$ полиномының жіктелуіндегі

$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! .. k_m!}$, $k_1 + k_2 + \ldots k_m = n$, коэффициент изделетін санды береді. Демек,

$$P_8(2,2,2,1,1) = \frac{8!}{2!2!2!1!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5040.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. Неше әдіспен 5 адамнан екеуін таңдап №1, №2 орындарға орналастыруға болады?
2. A, B, C, D, E, F әріптерінен, 3 әріптен тұратын неше сөз құрауға болады?
3. 20 адамы бар ұжымда басқарушыны және оның орынбасарын қанша әдіспен сайлап алуға болады?
4. 15 түрлі конфеттен әр қайсысында 10 түрлі конфет болатындай қанша сыйлық дайындауға болады?
5. Абонент қоңырау нөмірінің соңғы екі цифрын ұмытып қалған, бірақ олар әр түрлі цифр екені есінде. Адреске дәл түсу үшін оған қанша вариант іріктеу керек?
6. 4 символдан тұратын құлып үшін, неше түрлі төрт таңбалы шифр болады?
7. 8 адам қанша әдіспен кезекке тұра алады?
8. Екі-екіден алынған 8 әр түсті жалаушадан қанша түрлі сигнал құрауға болады?
9. 2 бірдей цифрдан басталатын, қанша 6 орынды қоңырау(телефон) нөмірлері болады?
10. Жәшіктегі 15 әр түрлі бұйымнан неше әдіспен 3 бұйым алуға болады?

11. СПРИНТ деген сөздегі әріптердің орнын неше әдіспен ауыстыруға болады?

12. 6 адамнан конференцияға қатысу үшін, үшеуін қанша әдіспен таңдап алуға болады?

13. 6 символдан қанша түрлі шифр құрастыруға болады?

14. 3 суретті бір қатарға қанша түрлі әдіспен ілуге болады?

15. Қанша әдіспен 3 қара және 2 ақ шары бар жәшіктен 2 әр түрлі шар алуға болады?

16. Тақ цифрлардан қанша 4 орынды сан құруға болады? Мұнда цифрлар қайталануы да мүмкін.

17. Алты студент емтихан тапсырады. Олардың еш қайсысына қанағаттанғысыз деген баға қойылмайтыны белгілі болса, оларға қанша әдіспен баға қойылуы мүмкін?

18. Бір дөңгелектің ішінде жатқан әртүрлі 8 нүкте арқылы қанша хорда жүргізуге болады?

19. Кез-келген бес тілдің: орыс, ағылшын, француз, неміс, италия тілдерінің біреуінен тікелей аударма жасау үшін қанша сөздік алу керек?

20. "Конус" деген сөздің әріптерінен әр қайсысы бес түрлі әріптерден тұратын қанша "сөз" құруға болады?

21. Логарифм сөзіндегі әріптерді екінші, төртінші және алтыншы орында дауысты әріптер болатындай етіп, қанша әдістермен алмастыруға болады?

22. Егер әрбір цифрды бірден артық пайдалануға болмаса, 3694 санының цифрларынан қанша төрт орынды тақ сандар құрастыруға болады?

23. Логарифм сөзінен қанша әдіспен екі дауыссыз, бір дауысты дыбысты таңдап алуға болады?

24. Үш тере және екі нүкте коды арқылы жазылған бес әріптен тұратын қанша сөз шығаруға болады?

25. Әр пәннің кітаптары бірдей болғанда, ықтималдықтар теориясының 5 кітабын, ойындар теориясының 3 кітабын және математикалық логиканың 2 кітабын кітапхананың кітап сөресіне қанша әдіспен қоюға болады?

26. "Статистика" және "парабола" сөздеріндегі әр түрлі алмастырулардың санын табыңыз?

27. Әженің қолында 2 алма, 3 алмұрт және 4 апельсин бар. Әжесі баласына тоғыз күн бойы бір жемістен беріп тұрады. Мұны қанша әдіспен орындауға болады?

28. Почта бөлімшесінде 10 түрлі открытка сатылады. Әр түрден кем дегенде открытканың 8 данасы болса, 8 открыткадан тұратын жинақты қанша әдіспен сатып алуға болады?

29. Автомобильдің нөмірлері бір, екі немесе үш әріптерден және төрт цифрдан тұрады. Орыс алфавитінің 24 әрібі және 10 цифры (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) қолданылса, осындан нөмірлердің санын табыңыз.

30. Жарнама сөзіндегі әріптерді 4 "а" әріптері қатар тұрмайтындай етіп қанша әдіспен алмастыруға болады?

№ 2 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒАЛАР. ЖИІЛІК ЖӘНЕ ЫҚТИМАЛДЫҚ. ЫҚТИМАЛДЫЛЫҚТЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ АНЫҚТАМАСЫ

Теориядан сұрақтар

1. Кездейсоқ, мүмкін емес және ақиқат оқиғалар жайында түсінік.
2. Кездейсоқ оқиғалардың пайда болу жиілігі.
3. Кездейсоқ оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасы.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

А оқиғасы пайда болуының салыстырмалы жиілігі

$$W(A)=\frac{\nu}{n}, \qquad (1)$$

мұндағы n-жүргізілген тәжірибенің жалпы саны, ν- n рет тәжірибе жүргізгендегі А оқиғасының пайда болу саны. А оқиғасының пайда болу ықтималдығы

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (2)$$

мұндағы n-барлық жағдайлар саны, m-А оқиғасына қолайлы, оқиғалар саны.

Мысалдар

1. Жәшікте 3 ақ, 4 қара шар бар. Бір шар жәшіктен кездейсоқ алынғанда, оның

а) ақ шар; б) қара шар болу ықтималдығы қандай?

Шешуі: А арқылы ақ шар, ал Қ арқылы қара шар алыну оқиғаларын белгілейік. Сонда оқиға ықтималдығының анықтамасы бойынша:

$$P(A)=\frac{3}{7};\ P(K)=\frac{4}{7}.$$

2. 2000 лотерея билеті бар. Бір билетке 1000 теңге, 4 билетке 500 теңге, 10 билетке 200 теңге, 20 билетке 100 теңге, 165 билетке 50 теңге, 400 билетке 10 теңгеден ұтыс шығады. Сатып алынған 1 билетке шығатын ұтыс, 100 теңгеден кем болмау ықтималдығы қандай?

Шешуі: $n=2000$- барлық билеттер саны

$m=1+4+10+20=35$ ұтыс 100 теңгеден кем болмау саны.

$$P(A)=\frac{35}{2000}=0.0175.$$

3. "Лото" карточкесіндегі 49 нөмірдің алтауына ұтыс шығады. Кездейсоқ сызылған алты нөмірдің бәріне ұтыс шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі: $n=C_{49}^{6}$ – 49 нөмірден алтауы сызылған жағдайлардағы барлық саны.

$m=C_{6}^{6}=1$-қолайлы жағдайлар саны (біреу ғана).

$$P(A)=\frac{1}{C_{49}^{6}}=\frac{6!43!}{49!}.$$

4. «Лақтырылған» нүкте қабырғасы a-ға тең квадратқа міндетті түрде түседі. Квадратқа іштей дөңгелек сызылған. Кездейсоқ "лақтырылған" нүктенің дөңгелек ішіне түсу ықтималдығы қандай?

Шешуі:

$$P(A)=\frac{S_{дон}}{S_{квад}}=\frac{\pi r^2}{a^2}=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}=\frac{\pi a^2}{4a^2}=\frac{\pi}{4}.$$

5. Он бес жігіттен және бес қыздан тұратын туристер тобы жеребе тастап, төрт адамнан тұратын шаруашылық командасын сайлаған. Осы команданың құрамында екі жігіт пен екі қыздың болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Тәжірибе жиырма адамның ішінен 4 адамды таңдап алудан тұрады. Таңдау жеребе бойынша жүргізілгендіктен тәжірибе нәтижелері тең ықтималды. Тәжірибе нәтижелерінің саны $n = C_{20}^4$, өйткені таңдама төрт элементтен тұрады және олардың орналасуы таңдамада ескертілмейді. А оқиғасы таңдалғандардың құрамында екі жігіт пен екі қыз барлығын білдірсін. Екі жігітті 15-тің ішінен C_{15}^2 тәсілімен таңдауға болады және осындай әрбір таңдамадан кейін екі қызды C_5^2 әдіспен таңдауға болады. Көбейтінді ережесі бойынша A оқиғасына тәжірибенің $C_{15}^2 C_5^2$ нәтижелері қолайлы. Іздеген ықтималдық (2) формула бойынша есептеледі

$$P(A) = \frac{C_{15}^2 C_5^2}{C_{20}^4} \approx 0{,}217.$$

6. Кітап сөресінде ықтималдықтар теориясының 4 кітабы және жиындар теориясының 3 кітабы ретсіз қойылған. Бір пәннің кітаптарының қатар тұру ықтималдығы қандай?

Шешуі. Тәжірибе-7 кітапты сөреге қою. Олар сөреге әйтеуір орналастырыла салынғандықтан тәжірибенің нәтижелері теңмүмкінді. Демек, барлық жағдайлар саны $n = 7!$. Бір пәннің қатар тұрып қалуы A оқиғасына $2.4!.3!$ қолайлы жағдайлар болады. Шынында да, ықтималдықтар теориясының кітаптар жинағын $4!$ тәсілдермен, ал жиындар теориясының кітаптарын $3!$ тәсілдермен реттеуге болады. Оның үстіне, кітаптардың екі түрлі томдарын екі тәсілмен реттеуге болады. Сонымен, A оқиғасының ықтималдығы

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2!4!3!}{7!} \approx 0{,}057.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. Жәшіктің ішінде 20 бұйым бар, олардың екеуі жарамсыз. Қалай болса солай алынған бұйымның жарамды болу ықтималдығы қандай?

2. 0000, 0001, 0002,...,9999 сандарының (бұлардың саны 10^4) ішінен теңықтималды етіп біреуі алынған. Мына оқиғалардың ықтималдығы қандай:

а) барлық цифрлар әр түрлі;

б) барлық цифрлар бірдей.

3. Үш таңбалы сандардың жиынынан кездейсоқ және теңықтималды үш таңбалы сан алынады. Оның

а) 3-ке,

б) 5-ке

қалдықсыз бөліну ықтималдығын табыңдар.

4. Ұзындығы бойынша бірқалыпты стержень кездейсоқ бір нүктеде екіге бөлініп сынған. Кіші сынықтың ұзындығы, стерженнің толық ұзындығының 1/3 бөлігінен аспау ықтималдығын табыңдар.

5. Преферанс ойынында "прикупта" екі тұз болу ықтималдылығы қандай? (32 картадан ойнайды).

6. ТББ (техникалық бақылау бөлімі) бақылауға алған 100 бұйымның бесеуінің ақауы барын анықтады. Жарамсыз бұйымның пайда болуының салыстырмалы жиілігін табыңыздар.

7. Екі ойын сүйегі лақтырылды. Түскен ұпайдың қосындысы 6-ға тең болу ықтималдығын анықтаңыз.

8. Қорапта 5 нөмірленген жетон бар. Кездейсоқ 5 нөмірлі жетон суырып алыну ықтималдылығы қандай?

9. Жәшіктегі 10 кубиктің төртеуі боялған. Кездейсоқ суырылған 3 кубиктің боялмаған болу ықтималдығын табыңдар.

10. Цехта 7 ер және 15 әйел жұмыс жасайды. Кездейсоқ табельдік нөмірі бойынша 8 адам таңдап алынған. Солардың арасында төртеуі әйел болу ықтималдығы қандай?

11. Құрылғы 6 элементтен тұрады, оның екеуі тозған. Кездейсоқ 3 элемент іске қосылады. Солардың бәрінің тозбаған болу ықтималдығы қандай?

12. ТББ будадағы 100 кітаптың 3 бракқа шығарылғанын анықтады. Брактың пайда болуының салыстырмалы жиілігі қандай?

13. 58 фотосуреттің біреуі іздеуде жүрген болып шықты. Кездейсоқ алынған 10 фотосуреттің ішінде сол іздеудегі суреттің болу ықтималдылығы қандай?

14. Қоймада 15 теледидар бар, олардың бесеуінің киноскопы сыртқы фирмалардікі. Кездейсоқ алынған 4 теледидардың үшеуінің киноскопы сыртқы фирмалардікі болуының ықтималдығын табыңыз.

15. Вокзалдағы жүк сақтайтын орынның кілтінің шифрын тергенде адам соңғы екі цифрын ұмытып қалған. Ол кездейсоқ тергенде жәшіктің ашылып кету ықтималдығын табыңдар (шифр әріп 3 цифрдан тұрады).

16. Кітап сөресіне еркінше төрт кітап ықтималдықтар теориясынан және 3 кітап жиындар теориясынан қойылған. Бір пәннің кітаптары қатар қойылу ықтималдылығы қандай?

17. Кездейсоқ таңдап алынған n орынды санның тек қана тақ цифрдан тұру ықтималдығын табыңыз.

18. Қорапта m қызыл және n жасыл қарындаш бар. Одан L қарындаш түсіп қалды. Оның ішінде К қарындаштың қызыл болу ықтималдығы қандай?

19. Билет партерге 50 теңге, бельэтажға 40 теңге және ярусқа 30 теңге тұрады. Кездейсоқ алынған екі билеттің құны 80 теңгеден қымбат болмау ықтималдығы қандай?

20. Емтиханға енгізілген 60 сұрақтың студент 50-іне дайындалған. Студенттің берілген үш сұрақтың екеуін білу ықтималдығы қандай?

21. Жеті орынды бір қатарға кездейсоқ түрде 7 оқушы отырғызылған. Белгілі-бір үш оқушының қатар отыру ықтималдығын табыңыздар.

22. Кездейсоқ таңдап алынған екі орынды санда, бірде-бір екіліктің болмау ықтималдығы қандай?

23. Автоматта тұрған бес түрлі открыткалардан кездейсоқ 3-уі таңдап алынған. Алынған открыткалардың әр түрлі болу ықтималдылығы қандай?

24 Спорт ойыны кезінде жүргізушінің "тұрыңдар" жарлығы бойынша 10 оқушы кездейсоқ тәртіппен бір сап түзеген. А мен В оқушының арасын үш оқушы бөліп қалу ықтималдығы қандай?

25. 5 жігіт және 7 қыздан тұратын топ, театрға 4 билетті жеребе бойынша бөліскен. Алынған билеттердің ішінде қыздар саны жігіттердің санынан артық болу ықтималдығы қандай?

26. Бір жәшіктің ішінде 12 бір типті бұйымдар бар. Олардың төртеуі стандарт емес, ал екінші жәшікте 15 бұйым бар. Олардың үшеуі стандарт емес. Әрбір жәшіктен кездейсоқ 2 бұйымнан алынған. Бірінші жәшіктен 2

стандарт емес, ал екіншісінен 2 стандарт бұйымның алыну ықтималдығы қандай?

27. 9 ақ, 9 қара, 9 қызыл және 9 көк шары бар жәшіктен 3 шар алынған. Алынған шарлардың қара немесе ақ болу ықтималдығын табыңыздар.

28. К қабатты үйдің бірінші қабатынан лифтіге n адам кірген. Әр қайсысының кез келген қабатта лифтіден шығу ықтималдығы бірдей. Оқиғаның ықтималдығын табыңдар.

А - "барлығы лифтіден L - қабатта шықса",

В - "барлығы лифтіден әр түрлі қабатта шықса",

29. 10 шар қалай болса'солай 4 жәшікке салынды. Бірінші жәшікте 1 шар, екінші жәшікте екі шар, үшіншіде–3, төртіншіде–4 шар болу ықтималдығын табыңыз.

30. Телефон нөмірі 5 цифрдан тұрады. Кездейсоқ алынған нөмірлердің барлық цифрлары әртүрлі болуының ықтималдылығы қандай?

№ 3 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
ЫҚТИМАЛДЫЛЫҚТАРДЫ ҚОСУ, КӨБЕЙТУ ТЕОРЕМАСЫ

1. Екі (бірнеше) кездейсоқ оқиғалардың қосындысы деген не?
2. Қарама - қарсы оқиға деген не?
3. Екі (бірнеше) оқиғалардың көбейтіндісі деген не?
4. Оқиғаның шартты ықтималдығы деген не?
5. Екі оқиға үшін ықтималдықтарды қосу теоремасы мен көбейту теоремасын жазу керек.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. Өзара үйлесімсіз оқиғалар үшін, яғни $A_i A_j = \varnothing$ болса, онда

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_{1)}) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

2. Тәуелсіз екі оқиға үшін:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

3. Кез келген екі А мен В оқиғалары үшін қосу теоремасы мына түрде жазылады:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

4. А мен В оқиғалары үшін ықтималдықтарды көбейту теоремасы:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \text{ немесе } P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы $P(A/B)$-А оқиғасының В оқиғасы пайда болғандағы шартты ықтималдығы. Ықтималдықтарды көбейту теоремасы жалпы түрде былай жазылады:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Мысалдар

1. 10 ақ және 4 қара шары бар урнадан біртіндеп кездейсоқ 3 шар алынған. Көбейту теоремасын пайдаланып қара, ақ, қара шарлар шығу ықтималдығын табу керек.

Шешуі:

$$P(\text{ҚАҚ})=\frac{4}{14}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12}\approx 0.055.$$

2. Екі мерген нысанаға оқ атқан. Олардың тигізу ықтималдықтары сәйкес – 0,7 және 0,9. Екеуі бір кезде оқ атқанда олардың ең болмағанда біреуінің нысанаға тигізу ықтималдығы қандай?

Шешуі: А- бірінші мергеннің нысанаға тигізу оқиғасы, В-екінші мергеннің нысанаға тигізуі деп белгілесек, екі мергеннің ең болмағанда біреуінің тигізу оқиғасы А + В болады:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,9-0,63=0,97.$$

Бұл жерде мергендердің бір-біріне тәуелсіз оқ ататындығы ескерілді.

Басқа тәсілмен шығарсақ:

$$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0,03=0,97.$$

3. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Пайда болған ұпайлар қосындысы үштен аспау ықтималдығы қандай?

Шешуі: барлық жағдайлардың саны 36-ға тең, өйткені бірінші сүйектегі әрбір ұпайға, екінші сүйектегі барлық ұпайлар сәйкес келеді. Ал ұпайлар қосындысының үштен аспау жағдайлары мынандай: (1,1), (1,2), (1,3). Демек,

$$P(n\le 3)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}.$$

4. Екі қорапта мөлшері және формасы бірдей, бірақ түстері әртүрлі қарындаштар жатыр. Бірінші қорапта 4 қызыл және 6 қара, екіншісінде 3 қызыл, 5 көк және 2 қара қарындаштар бар. Әр қораптан бір-бірлеп қарындаш алынған. Екі қарындаштың да қызыл болу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Тәжірибе әрбір қораптан бір-бірден қарындаш алудан тұрады. A оқиғасы бірінші қораптан алынған қарындаш қызыл, B оқиғасы екінші қораптан алынған қарындаш та қызыл екендігін көрсететін болсын. Сонда AB оқиғасы алынған екі қарындаш қызыл болғанын көрсетеді. А мен B оқиғалары тәуелсіз болғандықтан $P(AB) = P(A)P(B)$. A және B оқиғаларының ықтималдығы сәйкес $P(A) = 0{,}4;\quad P(B) = 0{,}3$ тең. Демек, екі қарындаштың қызыл болу ықтималдығы мынаған тең $P(AB) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

5. Мерген өзіне қарай қозғалып келе жатқан нысанаға оқ жаудырған. Бірінші рет атқанда нысанаға тию ықтималдығы 0,4 және келесі атқан сайын ол 0,1-ге өсіп отырады. Тәуелсіз үш атқанда екі рет тигізу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Тәжірибе нысанаға үш рет оқ атуды көрсетеді. A_1, A_2, A_3 оқиғалары сәйкес бірінші, екінші және үшінші атқанда тигізуді белгілесін. Сонда $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ тигізбеу оқиғалары болады. Осы оқиғаларды пайдаланып, үш рет атқанда екі рет тигізу оқиғасын өрнектелік: $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$. $A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3$ оқиғалары қиылыспайды және $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ оқиғалары тәуелсіз. Демек, ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары бойынша:

$$p(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2)p(\overline{A}_3) + p(A_1)p(\overline{A}_2)p(A_3) + p(\overline{A}_1)p(A_2)p(A_3).$$

Есептің шартында $p(A_1) = 0{,}4;\ p(A_2) = 0{,}5;\ p(A_3) = 0{,}6$. Демек, $p(\overline{A}_1) = 0.6$, $p(\overline{A}_2) = 0{,}5$, $p(\overline{A}_3) = 0{,}4$. Олай болса, ізделінді ықтималдық $p(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3) = 0{,}38$.

6. Бір ракетамен нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7-ге, ал екіншісімен – 0,8-ге тең. Екі ракета бір –біріне тәуелсіз жіберілсе, ең болмағанда бір ракетаның нысанаға тигізу ықтималдығы қандай?

1-шешуі. Тәжірибе екі ракетаның нысанаға оқ жіберілуінен тұрады. А оқиғасы бірінші ракетаның нысанаға тигізуін, ал В оқиғасы екінші ракетаның нысанаға тигізуін көрсететін болсын. Сонда А+В оқиғасы ең болмағанда бір

ракета нысанаға тигізуін білдіреді. А мен В оқиғалары үйлесімді. Сондықтан, p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB). Оның үстіне, есептің шартынан А мен В-нің тәуелсіздігі шығады. Демек,

$$p(A+B)=0,7+0,8-0,7\cdot 0,8=0,94.$$

2-шешуі. С оқиғасы ең болмағанда бір ракета нысананы зақымдағанын көрсететін болсын. Сонда оған қарама-қарсы $\overline{C}$ оқиғасы екі ракетаның нысанаға дарымай кеткенін көрсетеді. Демек, $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$ мұндағы $\overline{A}$ бірінші ракетаның тимегенін, $\overline{B}$-екінші ракетаның тимегенін білдіреді. Бірақ, $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - p(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - p(\overline{A})p(\overline{B})$, өйткені $\overline{A}$ мен $\overline{B}$ оқиғалары тәуелсіз. $p(\overline{A}) = 0,3$ және $p(\overline{B}) = 0,2$ болатынын ескереміз. Олай болса, $p(C) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94$.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. Аудиторияда 10 қыз бала және 14 ұл бала отыр. Қоңыраудан кейін үзілісте бірінші болып:

а) үш қыз бала бірден,

б) бір қыз, 2 ұл бала

шығу ықтималдығы қандай?

2. Үш ұшақтың түн мезгілінде бомба тастағандағы нысанаға тигізу ықтималдығы, сәйкес – 0,5; 0,6; 0,7.

Мына оқиғалардың ықтималдығы қандай:

а) бір снаряд ;

ә) екі снаряд ;

б) үш снаряд;

в) ең болмағанда бір снаряд нысанаға тиеді.

3. 50 лотерея билетінің ішінде 6 ұтыс бар. Кездейсоқ алынған екі билетке де ұтыс шығу ықтималдығы қандай?

4. Техникалық бақылау бөлімі (ТББ) бұйымдардың стандартты болуын тексереді. Бұйымның стандарт болу ықтималдығы–0,9. Алынған екі бұйымның:

а) екеуі де стандарт болуы;

ә) біреуі стандарт болмау ықтималдығы қандай?

5. Бұйымдар тобынан тек жоғарғы сортты бұйым таңдалады. Бұйымның стандартты болмау ықтималдығы – 0,2. Алынған 3 бұйымның екеуі жоғарғы сортты болу ықтималдығы қандай?

6. Екі мерген нысанаға оқ атқан. Олардың бір оқ атқандағы тигізу ықтималдықтары сәйкес –0,8 және 0,75. Екеуі бірдей нысанаға оқ атқанда, нысанаға тек бір рет оқ тию ықтималдығы қандай?

7. Апат кезінде үш сигнализатордың хабарлау ықтималдықтары – 0,9; 0,8 және 0,7. Апат кезінде олардың тек екеуінің жұмыс істеу ықтималдығын табыңыз.

8. Кітап сөресінде сегіз оқулық тұр, олардың бесеуі түптелген. Кездейсоқ алынған үш оқулықтың түптелген болу ықтималдығы қандай?

9. Жәшікте 6 бұйым бар, олардың екеуі жарамсыз. Кездейсоқ екі бұйым алынған. Олардың екеуі де жақсы сапалы болу ықтималдығы қандай?

10. 3 ойын сүйегі лақтырылған. Олардың ұпайлар қосындысы алтыға тең болу ықтималдығы қандай?

11. Студент берілген 20 тапсырманың 15-ін біледі. Студенттің билеттегі үш сұраққа жауап беру ықтималдығы қандай?

12. Студент берілген 20 тапсырманың 15-ін біледі. Студенттің билеттегі үш сұраққа жауап бере алмай қалу ықтималдығы қандай?

13. Тиын екі рет лақтырылған. Екеуінде де "елтаңба" түсу ықтималдығы қандай?

14. Урнада 4 қызыл және 2 ақ шар бар. Кездейсоқ алған 3 шардың қызыл болу ықтималдығы қандай?

15. Урнада 4 қызыл және 2 ақ шар бар. Кездейсоқ алған 3 шардың біреуі ақ болу ықтималдығы қандай?

16. Бірінші қорапта K қызыл және n қара қарындаш, ал екінші қорапта *l* қызыл, m көк және t қара қарындаш бар. Екі қораптың әр қайсысынан бір-бір қарындаш алынған. Сол алынған қарындаштардың екеуі де қызыл болу ықтималдығы қандай?

17. Мерген өзіне қарсы келе жатқан нысанаға оқ жаудырған. Оның бірінші рет атқандағы тигізу ықтималдығы 0,4 және әр бір оқ атқан сайын ықтималдық 0,1-ге өседі. Бір - біріне тәуелсіз үш рет оқ атқанда, екі рет тигізу ықтималдығы қандай?

18. Бір ракетамен нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7 - ге тең, ал екіншісі үшін - 0,8. Егер екі ракета бір - біріне тәуелсіз атылған болса, ең болмағанда бір ракетаның нысанаға тигізу ықтималдығы қандай?

19. Оқушы бес сұрақтың әр қайсысына "ия" немесе " жоқ " деп жауап береді. Егер оқушы жауапты қалай болса солай бере салса, оның барлық сұраққа дұрыс жауап беру ықтималдығы қандай?

20. Бақылау жұмысының үш есебі алгебрадан және 3 есебі геометриядан берілген. Алгебра есебін дұрыс шығару ықтималдығы 0,8 тең, ал геометрия бойынша –0,6. Ең болмағанда бір пән бойынша барлық үш есептің дұрыс шешімін табу ықтималдығы қандай?

21. Спорт мектебіндегі 30 оқушының 12 адамы баскетбол, 15-і волейбол, 5-уі волейбол және баскетбол, ал қалғандары басқа спорт түрлеріне қатысады. Кездейсоқ алынған бір спортшы тек қана волейболмен немесе тек қана баскетболмен айналысу ықтималдығы қандай?

22. Әрбір өлшеу жүргізгенде оң немесе теріс қате жіберулері тең ықтимал екені белгілі. Үш рет тәуелсіз өлшеулер жүргізгенде барлық қателердің оң болу ықтималдығы қандай?

23. $\mathrm{P}(AB)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$ және $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ берілген. $P(A+B)$ ықтималдығын табыңдар.

24. Студенттің бірінші емтиханды тапсыру ықтималдығы 0,9 - ға тең, екінші емтихан үшін -0,85. Осы студенттің кемінде екі емтиханды тапсыру ықтималдығы қандай?

25. Библиотекада 10 әртүрлі кітап бар. 5 кітаптың әр қайсысы 240 теңгеден, 3 кітап 120 теңгеден және 2 кітап 110 теңгеден тұрады. Кездейсоқ алынған бір кітаптың бағасы 120 теңгеден асып кетпеу ықтималдығы қандай?

26. Бақылау жұмысы есептер мен мысалдарды орындаудан тұрады. Кездейсоқ алынған бір жұмыстағы есептің дұрыс шығарылу ықтималдығы 0,8 -ге тең. Ал ең болмағанда бір дұрыс жауап алу ықтималдығы -0,9. Мысалдың дұрыс шешуі болу ықтималдығы қандай?

27. Жүгері собығы 12 қатардан тұру ықтималдығы 0,49-ға, 14 қатардан - 0,37 және 16-18 қатардан -0,14 тең. Кездейсоқ алынған собықтағы қатар саны 12 немесе 14 болу ықтималдығы қандай?

28. Бір - біріне тәуелсіз 4 рет оқ атылған. Әрбір атқандағы оқтың нысанаға тию ықтималдығы - Р. Алғашқы екі рет атқанда тию, ал кейінгі екі рет атқанда тимеу ықтималдығы қандай?

29. Студенттер тобының 0,9 бөлігі емтихан тапсырған. Студенттердің 0,4 бөлігі "өте жақсы" баға алған. Кез келген бір студенттің "жақсы" не "қанағаттанарлық" баға алу ықтималдығы қандай?

30. Екі мерген бір-біріне тәуелсіз, нысанаға оқ атқан. Бірінші мергеннің тигізу ықтималдылығы 0,9 тең, ал екіншісі үшін-0,75. Ең болмағанда бір мергеннің нысанаға тигізу ықтималдылығы қандай?

№ 4 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ ФОРМУЛАСЫ. БАЙЕС ФОРМУЛАСЫ

Теориядан сұрақтар

1. Оқиғалардың толық тобы туралы түсінік.
2. Гипотеза жайында түсінік.
3. Қандай жағдайда толық ықтималдық формуласы (оның жазылу түрі) және Байес формуласы (оның жазылу түрі) қолданылады?

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Егер А оқиғасы оқиғалардың толық тобын құрайтын бірнеше оқиғалардың $(H_1, H_2, ..., H_n)$ біреуімен біріге пайда болса, онда А оқиғасының пайда болу ықтималдығы:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

формуласымен табылады. Бұл толық ықтималдық формуласы.

Егер А оқиғасы пайда болған болса, онда гипотеза ықтималдығы Байес формуласы бойынша есептеледі:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)},$$

мұндағы $i=\overline{1,n}$, P(A)- толық ықтималдық.

Мысалдар

1. Автобуста 20 әйел және 32 ер жолаушы болған. Аялдамада автобустан ешкім шықпаған, бірақ екі адам кірген.

а) Келесі аялдамада бірінші болып ер адам түсу ықтималдығы қандай?

в) Егер екі әйел кірген болса, келесі аялдамада ер адамның шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі:

а) Есеп толық ықтималдық формуласына, гипотезаларға арналған:

H_1 – 2 әйел кірген ; $P(H_1)=\frac{1}{3}$,

H_2 – екі ер адам кірген; $P(H_2)=\frac{1}{3}$,

H_3 – 1 ер адам және 1 әйел адам кірген; $P(H_3)=\frac{1}{3}$.

Гипотезаларды тең ықтималды деп есептейміз. Өйткені автобус күтіп тұрған жолаушылар жайында ешбір ақпар айтылмаған.

А арқылы келесі аялдамада түсетін жолаушы ер адам деп белгілейік.

$$P(A/H_1)=\frac{32}{54}\ ;$$

$$P(A/H_2)=\frac{34}{54}\ ;$$

$$P(A/H_3)=\frac{33}{54}.$$

Сонда

$$P(A)=\frac{32}{54}\cdot\frac{1}{3}+\frac{34}{54}\cdot\frac{1}{3}+\frac{33}{54}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{99}{54}=\frac{33}{54}.$$

ә) Мұнда Байес формуласын қолданамыз:

$$P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)\cdot P(H_1)}{P(A)}=\frac{1/3\cdot 32/54}{33/54}=\frac{32}{99}.$$

2. Радист "нүкте", "сызықша" арқылы 3:5 қатынасындай етіп сигнал береді. Сигнал қабылдағанда "нүкте" өзгермеуі 80% жағдайда, "сызықша" сигналының өзгермеуі 70% жағдайда болатындығы байланыс жолының ақауынан болады.

а) "Нүкте" сигналы қабылдану ықтималдылығы қандай?

ә) Егер "сызықша" сигналы қабылданса, "сызықша" сигналы берілу ықтималдылығы қандай?

Шешуі :

а) Есеп толық ықтималдылық формуласына, гипотезаларға арналған

H_1- "нүкте" беріледі $P(H_1) = \frac{3}{8}$;

H_2 - "сызықша" беріледі $P(H_2) = \frac{5}{8}$;

A - "нүкте" қабылданды.

$P(A/ H_1)=0,8$.

$P(A/ H_2)= 0,3$

$$P(A) = 0,8 \cdot \frac{3}{8} + 0,3 \cdot \frac{5}{8} \approx 0,49 .$$

ә) Есеп Байес формуласына арналған

H_1- "нүкте" беріледі $P(H_1) = \frac{3}{8}$;

H_2 - "сызықша" беріледі $P(H_2) = \frac{5}{8}$;

A - "сызықша" сигналы қабылданады.

$P(A/ H_1) = 0,2;$

$P(A/ H_2) = 0,7.$

$$P(H_2 / A) = \frac{P(A/H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot \frac{5}{8}}{0,2 \cdot \frac{3}{8} + 0,7 \cdot \frac{5}{8}} = \frac{0,7 \cdot 5}{0,2 \cdot 3 + 0,7 \cdot 5} = \frac{35}{6 + 35} \approx 0,85.$$

3. Оқушы емтиханда берілген 34 билеттен бір-бірлеп екі билет алған. Егер ол тек 30 билетке дайындалған болса және бірінші ретте білмейтін билет алса, оқушының емтиханды тапсырып шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі: Тәжірибе екі рет кездейсоқ бір билеттен алу, бірақ бірінші алынған билет кейін қайтарылмайды.

А оқиғасы бірінші алынған билеттің "білмейтін", ал В оқиғасы екінші алынған билеттің "білетін" екендігін көрсететін болсын. Бірінші алынған билет "білмейтін", ал екінші алынған билет "білетін" екендігін көрсететін АВ оқиғасының ықтималдығын есептеу керек. А мен В оқиғалары тәуелсіз, бірінші алынған билет барлық билеттер санына қосылмайды. Сондықтан, $p(AB) = p(A)p(B/A)$. Есептің шартынан табамыз: $p(A) = \frac{4}{34}$. Егер А оқиғасы пайда болса, онда емтихан алушының столында 33 билет қалғаны, олардың 30-ын "біледі". Олай болса, $p(B/A) = \frac{30}{33}$ және іздеген ықтималдық $p(AB) = \frac{4}{34} \cdot \frac{30}{33} \approx 0{,}107$.

4. Радиолампалардың үш партиясы бар, олардың әрқайсысында сәйкес 20, 30 және 50 лампа бар. Осы партиялардағы радиолампаның белгілі уақыт ішінде жұмыс істеу ықтималдылықтары – сәйкес 0,7 және 0,8 және 0,9. Берілген жүз лампалардың ішінен кездейсоқ таңдалған лампаның белгілі уақыт ішінде жұмыс істеу ықтималдылықтары қандай?

Шешуі. Тәжірибе – 100 лампаның ішінен кездейсоқ біреуін алу. Ықтималдығын іздеп отырған А оқиғасы, алынған лампаның белгілі уақыт ішінде жұмыс істеуін көрсетеді: гипотезалары кездейсоқ таңдап алынған лампаның сәйкес бірінші, екінші, үшінші партияларға кіретінін білдірсін $p(A) = \frac{m}{n}$.

Формула бойынша $p(H_1) = 0{,}2 \quad p(H_2) = 0{,}3$ және $p(H_3) = 0{,}5$.

Есептің шарты бойынша $p(A/H_1) = 0{,}7,\ p(A/H_2) = 0{,}8,\ p(A/H_3) = 0{,}9$.

Толық ықтималдылықтың формуласы бойынша А оқиғасының ықтималдығын табамыз, ол мынаған тең:

$$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + p(H_3)p(A/H_3) = 0{,}83.$$

5. Бұрынғы мысалдың шартына өзгеріс енгізілген: кездейсоқ алынған бір радиолампа белгілі уақыт жұмыс істеген. Осы радиолампаның бірінші партияға жату ықтималдығы қандай?

Шешуі. Есептің шартынан кездейсоқ таңдалған радиолампа белгілі уақыт бойы жұмыс істеген, яғни А оқиғасы пайда болып кеткен. Осындай қосымша информация алғаннан кейін, біз гипотезалардың ықтималдығы

қалай өзгергендігін анықтауымыз керек. Гипотезаның А оқиғасы пайда болғандағы ықтималдығын есептеу керек. Байес формуласы бойынша:

$$p(H_1 / A) = \frac{p(H_1)p(A/H_1)}{p(A)} = 0{,}169$$

яғни тәжірибе жүргізгеннен кейін лампаның бірінші партияға жату ықтималдығы азаяды және 0,169-ға тең болады.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

№1-5. Ақ және қара түсті n шары бар урнаға m ақ шар салынған. Содан кейін кездейсоқ бір шар алынған. Сол алынған шардың ақ болу ықтималдылығы қандай?

1. n = 2, m = 1.
2. n = 2, m = 2.
3. n = 3, m = 1.
4. n = 3, m = 2.
5. n = 3, m = 3.

№6-10. Үш урнаның әр қайсысында n ақ және m қара шар бар. Бірінші урнадан кездейсоқ бір шар алынған және сол екіншісіне салынған. Содан кейін екінші урнадан бір шар алынып, үшіншісіне салынған. Үшінші урнадан кездейсоқ алынған шардың қара болу ықтималдылығы қандай?

6. n = 5, m = 3.
7. n = 4, m = 6.
8. n = 6, m = 3.
9. n = 7, m = 4.
10. n = 3, m = 7.

N11-15 Дүкенге кірген әйелдер санының еркектер санына қатынасы a:b қатынасындай. Әйелдің зат сатып алу ықтималдылығы p_1, ал мұндай ықтималдылық ерлер үшін p_2. Дүкенге келген адам зат сатып алған. Осы адамның ер болу ықтималдылығы қандай?

11. a =3, b =1, p_1= 0,5; p_2= 0,8.
12. a =4, b =1, p_1= 0,4; p_2= 0,9.
13. a =6, b =1, p_1= 0,1; p_2= 0,8.

14. a =5, b =2, p_1= 0,7; p_2= 0,9.

15. a =5, b =3, p_1= 0,3; p_2= 0,8.

16. 1000 лампаның n_i лампасы і-ші топқа жатады. і =1,2,3. $\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$.

Бірінші топта 6%, екіншісінде - 5%, ал үшіншісінде - 4% жарамсыз лампалар бар. Кездейсоқ бір лампа таңдалған. Сол алынған лампаның жарамсыз болу ықтималдығын анықтандар.

1- кесте

n_1	100	430	170	520	360	700	240	80	630
n_2	250	180	540	390	600	90	610	710	230

17. Дүкенге үш зауыттан бір типтес бұйымдар түседі және і-ші зауыт m_i % бұйым береді, і=1,2,3. і-ші зауыт берген бұйымдардың n_i% бірінші сортты. Бір бұйым сатып алынған, ол бірінші сортты болған. Сатып алынған бұйым j-ші зауыт шығарғандығының ықтималдылығын анықтаңдар.

2- кесте

m_1	50	50	60	60	40	40	40	50	40	70	60	60	50	50
m_2	30	30	20	20	30	30	20	30	20	20	30	10	20	30
m_3	20	20	20	20	30	30	40	40	40	10	40	30	30	40
n_1	70	70	70	70	80	70	90	80	90	70	30	80	90	70
n_2	80	80	80	80	80	90	90	90	90	80	80	90	80	70
n_3	90	90	90	90	90	90	80	90	80	90	90	80	90	80
J	1	2	1	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3

№ 5-6 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚТАР
ҚАЙТАЛАНАТЫН ТӘЖІРИБЕЛЕР. БЕРНУЛЛИ ФОРМУЛАСЫ. ПУАССОН ЗАҢЫ. ЛАПЛАСТЫҢ ТӨҢІРЕКТІК ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕОРЕМАЛАРЫ

Теориядан сұрақтар

1. Қайталанатын тәжірибелердің сұлбасының (схема) мағынасы неде, қандай шамалар берілуі керек және нені табу қажет?
2. Бернулли формуласын, Лапластың төңіректік және интегралдық теоремаларын, Пуассон заңын жазыңдар.
3. Осы формулалар n, m және p-лардың қандай мәндерінде қолданылады? Олардың айырмашылықтары қандай және оларға не ортақ?

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

n - тәжірибелердің жалпы саны;

p - А оқиғасының бір тәжірибедегі пайда болу ықтималдығы;

$q = 1 - p$ _ А оқиғасының бір тәжірибеде пайда болмау ықтималдығы;

k _ А оқиғасының пайда болу саны.

Бернулли формуласы

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Лапластың төңіректік теоремасы

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\varphi(x)$ функциясының $x > 0$ болғандағы мәндерінің кестесі бар. Бұл функция жұп.

Лапластың интегралдық теоремасы.

Егер А оқиғасының пайда болу саны k_1 – ден кем болмаса және k_2 – ден артық болмаса, онда

$$P_n(k_1, k_2) = \phi(x'') - \phi(x'),$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\phi(x)$ – Лаплас функциясы, оның мәндерін табу үшін оқулықтарда кестесі беріледі. Функция тақ.

Пуассон заңы:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \lambda^{-\lambda}}{k!},$$

мұндағы $\lambda = np$, бұл $p << 0{,}1$ және n тым үлкен болғанда қолданылады. Қайталанатын тәжірибелердегі А оқиғасының пайда болуының ең ықтимал саны k_0 мына қосарлы теңсіздіктерден табылады: $np - q \le k_0 \le np + p$, әрине k_0 - бүтін сан.

Мысалдар

1. Екі тең ойнайтын теннисші теннис ойнаған. 6 партиядан 3 партия ұту ықтималдығы қандай? Мұнда ойыншылардың тең ұтыста болуы есептелмейді.

Шешуі: Берілгені n=6, k=3, p =1/2, q=1/2. Бернулли формуласын қолдансақ

$$P_6(3) = C_6^3 P^3 q^3 = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

2. 100 тәжірибеден тұратын бір-біріне тәуелсіз сынақтар жүргізілген. Әр сынақта оқиғаның пайда болу ықтималдығы-0,8. Табыңыздар:

а) 100 тәжірибенің ішінде оқиғаның 75 рет пайда болу ықтималдығын;

ә) пайда болу саны 90-нан асып кетпеу және 60-тан кем болмау ықтималдығын.

Шешуі: а) Мұнда n мейлінше үлкен, p аз емес. Сондықтан Лапластың төңіректік теоремасын қолданамыз:

$$n=100,\ k=75,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2.$$

$$P_{100}(75) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 0{,}8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-5}{4} = -1{,}25.$$

$\varphi(x)$ мәнін №33 кесте бойынша іздейміз (Гмурман В. Е. "Руководство к решению задач ТСО и МС"). $\varphi(x)$ - жұп:

$$\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826, \quad P_{100}(75) \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 \approx 0{,}04565.$$

ә) Лапластың интегралдық теоремасын қолданамыз

$\Phi(x)$ мәнін №34 кесте бойынша іздейміз (Гмурман В. Е. "Руководство к решению задач ТСО и МС").

Ескерту: $\varphi(x)$ және $\phi(x)$ функцияларының мәндерін басқа оқулықтар бойынша да табуға болады.

$$P_{100}(60 \le k \le 90) = \phi(x_2) - \phi(x_1),$$

$$x_2 = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{10}{4} = 2{,}5;$$

$$x_1 = \frac{60 - 0{,}8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{20}{4} = -5,$$

$$P_{100}(60 \le k \le 90) = \phi(2{,}5) + \phi(5) = 0{,}4938 + 0{,}4999 \approx 0{,}9937.$$

3. Оқулық 100000 данамен басылған. Әр оқулықтың дұрыс түптелмеу ықтималдығы 0,00001. Оқулық данасының ішінде 3 кітаптың жарамсыз болу ықтималдығын табыңдар.

Шешуі:

P = 0,00001 өте аз, ал $n = 100000$ тым үлкен болғандықтан Пуассон заңын қолданамыз. Бұл заңды кейде сирек оқиғалар заңы деп те атайды:

$$k = 3, \quad p = 10^{-5}, n = 10^5, \lambda = np = 1.$$

$$P_{100000}(3) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}0613.$$

4. Ақшалай-заттық лотереяның бір билетіне ұтыс шығу ықтималдығы 0,2-ге тең. Сатып алынған алты билеттің екеуіне ұтыс шығу ықтималдығы қандай?

Шешуі. Эксперимент–6 билетті біртіндеп тексеру, яғни тәуелсіз 6 қайталанған тәжірибе жүргізіледі. Әр тәжірибенің екі нәтижесі бар: ұтатын билет, ұтпайтын билет. Ұтыс ықтималдығы әр тәжірибеде тұрақты. Демек, Бернулли схемасы орындалады. (m=2) оқиғасы екі билетке ұтыс шығатындығын көрсетсін. Сонда Бернулли формуласы бойынша

$$p_6(m=2)=C_6^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^4\approx 0{,}246.$$

5. Прибор тізбекке параллель қосылған және бір-біріне тәуелсіз жұмыс істейтін алты элементтен тұрады. Әр элементтің t уақыт ішінде тоқтаусыз жұмыс істеу ықтималдығы 0,6-ға тең. Прибор авариясыз жұмыс істеу үшін, ең болмағанда бір элемент түзу болу керек. Прибордың t уақыт ішінде тоқтаусыз жұмыс жасау ықтималдығы қандай?

Шешуі. Эксперимент қайталанған тәуелсіз, әрқайсысының екі нәтижесі бар алты тәжірибені жүргізуден тұрады. Элементтің t уақыт ішінде жұмыс істемей қалу ықтималдығы q=0,4-ке тең. Демек, Бернулли схемасы орындалады. $m\geq 1$ оқиғасы ең болмағанда бір элемент түзу екендігін көрсетсін. Сонда формула бойынша қарастырылып отырған оқиғаның пайда болу ықтималдығы мынаған тең

$$p_6(m\geq 1)=1-0{,}4^6\approx 0{,}9959.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

№1-5. Бір лотерея билетіне ұтыс шығу ықтималдығы p-ге тең. Ең болмағанда бір билетке ұтыс шығу ықтималдығы p_1-ден кем болмау үшін, қанша билет сатып алу керек?

1. $p=0{,}01;\quad p_1=0{,}95.$
2. $p=0{,}001;\quad p_1=0{,}8.$
3. $p=0{,}001;\quad p_1=0{,}7.$
4. $p=0{,}02;\quad p=0{,}9.$
5. $p=0{,}002;\quad p_1=0{,}8.$

№6-10. Жанұяда 6 бала бар. Егер қыз бала туу ықтималдығы 0,49 болса, жанұяда n ер бала болу ықтималдығын табыңдар.

6. $n=2.$
7. $n=3.$
8. $n=4.$
9. $n=5.$
10. $n=6.$

11. Егер А оқиғасының бір тәжірибедегі пайда болу ықтималдығы $p=0,6$ болса, А оқиғасының 2400 рет тәжірибе жүргізгендегі пайда болу саны дәл $k=1400$ болу ықтималдығы қандай?

12. №11 есепті қарандар: $k=1200$; $p=0,4$.

13. Нысананың бүліну ықтималдығы -0,7. Нысанаға 243 рет оқ атқанда оның 70 рет бүліну ықтималдығын табыңдар.

14. Тиын 5 рет лақтырылған. "Герб" түсу саны 2-ден кем болмау және 4-тен асып кетпеу ықтималдығын табыңдар.

15. ТББ 475 бұйымның жарамдылығын тексереді. Бір бұйым жарамсыз болу ықтималдығы -0,05. Тексерілген топтағы жарамсыз бұйымдардың саны 5-тен кем және 10-нан артық болмау ықтималдығын табыңдар.

№16-20. n тауардың үлгісі тексерілген. Әрбір үлгінің сатуға жарамды болу ықтималдығы - p. k үлгінің сатуға жарамды болу ықтималдығын табыңдар.

16. $n=24$; $p=0,6$; $k=14$.

17. $n=36$; $p=0,5$; $k=18$.

18. $n=90$; $p=0,9$; $k=80$.

19. $n=24$; $p=0,4$; $k=15$.

20. $n=21$; $p=0,7$; $k=8$.

№20-25. Типографияда n кітапша түптелген, ал кететін кемшіліктің ықтималдығы- p. Түптелген кітапшалардың дұрыс шығуының ең ықтимал санын табыңдар.

20. $n=19$; $p=0,1$.

21. $n=24$; $p=0,6$.

22. $n=10$; $p=0,75$.

23. $n=15$; $p=0,9$.

24. $n=10$; $p=0,7$.

25. $n=15$; $p=0,8$.

№26-30. Егер А оқиғасының пайда болуының n тәуелсіз тәжірибелердегі ең ықтимал саны k_0 болса, онда әрбір тәжірибедегі А-ның пайда болу p ықтималдығы неге тең болады?

26. $n=49$; $k_0=30$.

27. $n=39;\quad k_0=25.$

28. $n=63;\quad k_0=25.$

29. $n=15;\quad k_0=14.$

30. $n=100;\quad k_0=30.$

№ 7 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
ДИСКРЕТ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР. ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ. ДИСКРЕТ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢДАРЫ

1. Дискрет кездейсоқ шаманың анықтамасын беріңдер.
2. Дискрет кездейсоқ шаманың үлестірім заңы деген не?

Мысал келтіріңдер.

3. Дискрет кездейсоқ шамалар үшін қандай үлестірім заңдары бар? Жазыңдар.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Дискрет кездейсоқ шаманың үлестірім заңын кесте түрінде жазуға болады, оның бір жолында кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері x_i тұрады, ал екінші жолында олардың пайда болу сәйкес ықтималдықтары тұрады:

3- кесте

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

мұндағы $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Дискрет кездейсоқ шаманың математикалық үміті: $\mathrm{M}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Дискрет кездейсоқ шаманың дисперсиясы:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Орта квадраттық ауытқуы: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Биномдық үлестірімінің математикалық үміті: $M(X) = np$.

Биномдық үлестірімінің дисперсиясы: $D(X) = npq$.

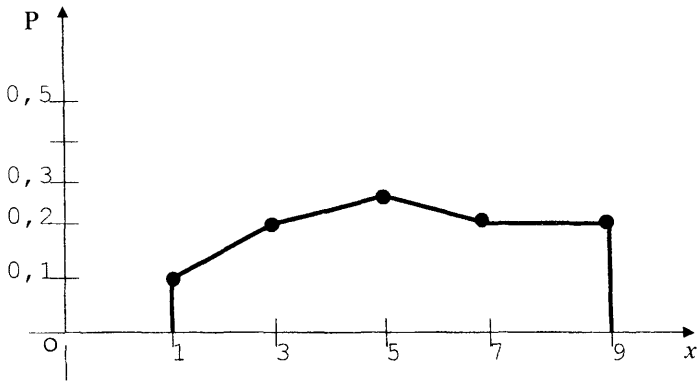
Мысалдар

1. Үлестірімнің мына заңы бойынша дискрет кездейсоқ шаманың үлестірім көпбұрышын салыңдар:

4- кесте

x	1	3	5	7	9
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Шешуі:



1-сурет

2. Тиын 6 рет лақтырылған. "Герб" түсу санының үлестірім заңын құрыңдар.

Шешуі: Алты рет тәжірибе жүргізгенде "герб" түсуінің саны -0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 болады. Пайда болу ықтималдығы Бернулли формуласы бойынша есептеледі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

мұндағы $n = 6, \quad p = q = \frac{1}{2}$, ал $k = 0,1,2,3,4,5,6$.

3. Бір лотерея билетіне ұтыс шығу ықтималдығы $p=0{,}01$. Ең болмағанда бір билетке ұтыс шығу ықтималдығы $P \geq 0{,}95$ болу үшін қанша билет сатып алу керек?

Шешуі: p аз, ал билеттер саны тым көп болатындықтан, Пуассон заңын пайдаланамыз $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda = np \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ болғандықтан $P + p_0 = 1$ теңдігі орындалатындығы айқын. Ендеше $P = 1 - P_n(0) = 1 - e^{-\lambda} \geq 0{,}95$. Бұдан $e^{-\lambda} \leq 0{,}05$. Ал $\lambda > 3$ болғандықтан $np \geq 3$. Бұдан $n \geq 300$.

4. Мына заң бойынша дискрет кездейсоқ шамасы үшін M(X) және D(X) мәндерін табыңдар:

5- кесте

X	-4	6	10
P	0,3	0,5	0,2

Шешуі: $M(X)=(-4)\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}5+10\cdot 0{,}2=3{,}8$.

$D(X)=16\cdot 0{,}3+36\cdot 0{,}5+100\cdot 0{,}2-(3{,}8)^2=28{,}36$.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

№1-5. n бұйымнан тұратын топ ішінде m бұйымдар стандартты емес. Кездейсоқ k бұйым алынған. Жарамды бұйымдар саны X кездейсоқ шама болсын. Осы шаманың үлестірім заңын құрыңдар. M(X) және D(X) мәндерін табыңдар

1. $n=6,\quad m=2,\quad k=4.$
2. $n=6,\quad m=2,\quad k=3.$
3. $n=6,\quad m=2,\quad k=2.$
4. $n=7,\quad m=4,\quad k=3.$
5. $n=7,\quad m=3,\quad k=4.$

№6-10. Дискрет кездейсоқ шама мүмкін болатын x_1, x_2, x_3 үш мәнін p_1, p_2, p_3 ықтималдықтарымен қабылдайды. $M(X)$ мәні белгілі болғанда x_3 және p_3 сандарын табыңдар.

6. $x_1=4,\quad x_2=6,\quad p_1=0{,}5,\quad p_2=0{,}3,\quad M(X)=8.$

7. $x_1 = -4$, $x_2 = 6$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $M(X) = 6$.

8. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $M(X) = 1{,}05$.

9. $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}25$, $M(X) = 4$.

10. $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}2$, $M(X) = 3$.

№11-15. Бір лотерея билетіне ұтыс шығу ықтималдығы - 0,001. n билеттер ішінен k билет сатып алынғандағы ұтыс шығатын билеттер саны кездейсоқ шама X болсын. Кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

11. $n = 1000$, $k = 3$.

12. $n = 1000$, $k = 4$.

13. $n = 1000$, $k = 2$.

14. $n = 2000$, $k = 3$.

15. $n = 2000$, $k = 2$.

№16-20. N жетон 1-ден n-ге дейінгі бүтін сандар арқылы белгіленген. Кездейсоқ k жетон алынған. Нөмірлері m санына еселі болатын таңдалған жетондардың саны үшін ықтималдықтардың үлестірім кестесін құрыңдар.

6- кесте

N	n	k	m
16	15	3	5
17	16	3	3
18	13	4	3
19	18	3	5
20	18	3	6

21. Ойын сүйегін бір рет лақтырғанда жоғарғы жағында түскен, кездейсоқ ұпай санының ықтималдықтар үлестірім кестесін құрыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

22. Бір бағытқа және бір жол желісімен (реис), әрбір күнде үш ұшақ ұшып тұрады. Әрбір ұшақ кесте бойынша қонып тұру ықтималдығы -0,7. Кестеден ауытқыған ұшақтардың саны үшін ықтималдықтардың үлестірім кестесін құрыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

23. 600 бұйым тексерілген. Әр бұйымның сынақтан өту ықтималдығы -0,005. Сынақтан өткен бұйымдардың саны үшін ықтималдықтардың үлестірім кестесін құрыңдар. $M(X)$ мәнін табыңдар.

24. Тексеруге алынған кітап 800 беттен тұрады. Әр бетте қате кету ықтималдығы-0,0025. Қатесі бар беттер санының ықтималдықтарының үлестірім кестесін құрыңдар. $M(X)$ мәндерін табыңдар.

25. Театрға 6 билет бар, олардың 4 билеті бірінші қатардағы орындарға сай келеді. Кездейсоқ 3 билет алынған. Олардың ішіндегі бірінші қатарға келетін билеттер санының ықтималдықтар үлестірім кестесін құрыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

N26-30. n бақылау жұмыстарының ішінде k жұмысы "өте жақсы" деп бағаланған. Барлық бақылау жұмыстарынан кездейсоқ m жұмыс алынған. Алынған жұмыстардың ішіндегі "өте жақсы" деп бағаланғандар санының үлестірім кестесін құрыңдар.

7- кесте

N	n	k	m
26	25	5	3
27	24	6	3
28	28	4	2
29	20	5	2
30	30	6	3

№ 8,9 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚТАР
ҮЗДІКСІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР. ҮЗДІКСІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ. ҮЛЕСТІРІМ ЗАҢДАРЫ

Теориядан сұрақтар

1. Үздіксіз кездейсоқ шаманың анықтамасын беріңдер;
2. Үлестірім функциясы және ықтималдық тығыздығы жайында түсінік; Олардың арасындағы байланыс;
3. $F(x)$ және $f(x)$ қасиеттері;

4. M_x, D_x, σ_x мәндерін есептеу формулалары;

5. Бірқалыпты үлестірім, оның сипаттамалары;

6. Қалыпты үлестірім, оның сипаттамалары;

7. Көрсеткіштік үлестірім, оның сипаттамалары.

Есептер шығару үшін формулалар

1. X кездейсоқ шаманың x-тен кіші мән қабылдау ықтималдығын үлестірім функциясы деп атайды:

$$F(x) = P(X < x)$$ және де $0 \le F(x) \le 1$; $x_1 < x_2$ болғанда $F(x_1) \le F(x_2)$.

2. X кездейсоқ шамасының (а,в) аралығына тиісті болу ықтималдығы:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

3. Үлестірім функциясының туындысын үздіксіз кездейсоқ шаманың ықтималдықтар үлестірімінің тығыздығы деп атайды:

$$f(x) = F'(x)$$ және керісінше $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ және де $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

4. Үздіксіз кездейсоқ шаманың математикалық үміті мына формуламен есептеледі:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Мұндағы интеграл абсолютті жинақты болу керек.

5. Дисперсия:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 dx = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

6. (а,в) аралығындағы X кездейсоқ шаманың бірқалыпты үлестірімі бар дегеніміз - үлестірім (а, в) аралығында тұрақты мәнін сақтайды, ал оның сыртындағы мәні нөлге тең:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{егер} \quad x \in (a,b); \\ 0, & \text{егер} \quad x \notin (a,b). \end{cases}$$

7. Қалыпты үлестірім тығыздығы мынадай:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

мұндағы $a = M(X)$ және $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

8. Көрсеткіштік үлестірім тығыздығы мынандай:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & егер \quad x > 0, \end{cases}$$

мұндағы λ тұрақты және $\lambda > 0$. $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Мысалдар

1. Х кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы берілген:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x < 1; \\ \frac{x-1}{2}, & егер \quad 1 \le x \le 3; \\ 1, & егер \quad x > 3. \end{cases}$$

Табу керек: $f(x)$, $P(1{,}5 < X < 3{,}5)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Шешуі:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x < 1; \\ \frac{1}{2}, & егер \quad 1 \le x \le 3; \\ 0, & егер \quad x > 3. \end{cases}$$

$$P(1{,}5 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(1{,}5) = 1 - \frac{1{,}5 - 1}{2} = 0{,}75.$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^3 = 2.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = \int_1^3 x^2 \frac{1}{2} dx - 4 = \frac{x^3}{6}\Big|_1^3 - 4 = \frac{26}{6} - 4 = \frac{1}{3}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}25.$$

2. Бірқалыпты үлестірімді кездейсоқ шаманың барлық мәндері [а,в] кесіндісіне тиісті. $M(X)$, $D(X)$ үшін формуланы қорытып шығындар.

Шешуі:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & егер \quad a \le x \le b; \\ 0, & егер \quad x > b. \end{cases}$$

$$M(X)=\int_a^b xdx=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

3. Қалыпты үлестірімді X кездейсоқ шаманың математикалық үміті 3-ке тең, ал $\sigma=2$. Ықтималдықтың тығыздығын жазыңдар.

Шешуі:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}. \qquad (*)$$

4. Кездейсоқ шаманың тығыздық функциясы (*) болғанда, оның мәні (1,2) интервалында жату ықтималдығын табыңдар.

Шешуі: Аралықта жату ықтималдық формуласын пайдалансақ:

$$P(1<X<2)=\phi\left(\frac{2-3}{2}\right)-\phi\left(\frac{1-3}{2}\right)\approx 0{,}1498.$$

5. Үздіксіз кездейсоқ шаманың үлестірімі көрсеткіштік заң арқылы берілген:

$$f(x)=3e^{-3x},\ \ x>0.$$

Табу керек:

$$P(0{,}13<X<0{,}7).$$

Шешуі:

$$P(0{,}13<X<0{,}7)=\int_{0\,13}^{0{,}7}3e^{-3x}dx=-e^{-3x}\Big|_{0{,}13}^{0{,}7}=-e^{-2{,}1}+e^{-0\,39}\approx 0{,}48.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. X кездейсоқ шаманың барлық Ox өсі бойындағы үлестірім функциясы берілген:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{arctgx}{\pi}.$$

Тәжірибе нәтижесінде кездейсоқ шаманың мәні (0,1) интервалына тиісті болу ықтималдығын табыңдар.

2. X кездейсоқ шаманың барлық ось бойындағы үлестірім тығыздығы берілген:

$$f(x)=\frac{2C}{(1+x^2)}.$$

C тұрақтысын табыңдар.

3. Берілгені $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha>0$, $x\in(0,+\infty)$.

Табыңдар: $P(1<X<2)$.

4. Берілгені: $f(x)=3\sin 3x$, мұнда x айнымалысы $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ аралығында өзгереді.

Табыңдар: $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Берілгені: $f(x)=\begin{cases} C\sin 2x, & егер \quad x\in(0,\frac{\pi}{2}); \\ 0, & егер \quad x\notin(0,\frac{\pi}{2}). \end{cases}$

Табыңдар: C тұрақтысын.

6. Берілгені: $f(x)=\begin{cases} 2x, & егер \quad x\in(0,1); \\ 0, & егер \quad x\notin(0,1). \end{cases}$

Табыңдар: $M(X)$, $D(X)$.

7. Берілгені: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x, & егер \quad x\in(0,2); \\ 0, & егер \quad x\notin(0,2). \end{cases}$

Табыңдар: $M(X)$, $\sigma(X)$.

8. Қайсыбір сапарда жүргенде автобус кесте бойынша дәл жүреді. Қозғалыс аралығы $t=5$ минут. Аялдамаға келген жолаушы келесі автобусты 3 минут күту ықтималдығын табыңдар.

9. (2,5) аралығында бірқалыпты үлестірімі бар X кездейсоқ шаманың $M(X), D(X)$ мәндерін табыңдар.

10. X кездейсоқ шамасының қалыпты үлестірімі $M(X)=20$, $\sigma(X)=5$ бар.

Табыңдар: $P(15<X<25)$.

11. №10-ды қараңыз.

$$M(X)=10,\quad \sigma(X)=2.$$

Табу керек: $P(12<X<14)$.

12. Х кездейсоқ шамасының үлестірімі көрсеткіштік заң бойынша:

$$f(x)=0{,}04e^{-0{,}04x}.$$

Табу керек: $P(1<X<2)$.

13. Х кездейсоқ шамасының үлестірімі қалыпты заң болғанда және үлестірім функциясы $F(x)=1-e^{-0{,}1x}$ берілгендегі, оның математикалық үмітін табыңдар.

14. Дайындалатын бұйымның диаметрін өлшегенде кездейсоқ жіберілетін қате қалыпты заң бойынша үлестірімді және $\sigma(x)=10$ мм. Өлшеу қатесі абсолют шамасы бойынша 15 мм-ден асып кетпеу ықтималдығын табыңдар.

15. Қалыпты үлестірімді кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы берілген:

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\cdot\lambda^{\frac{-(x-1)^2}{50}}.$$

Табыңдар: $M(X), D(X)$.

№16-20. Х кездейсоқ шамасының $f(x)$ үлестірім тығыздығы берілген. γ параметрін, $M(x)$ математикалық үмітін, $D(x)$ дисперсиясын, Х кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын және $P(x_1<X<x_2)$ ықтималдығын табыңдар.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & егер \quad x\in(a,b);\\ 0, & егер \quad x\notin(a,b).\end{cases}$$

8-кесте

N	a	b	x_1	x_2
16	2,5	4	3	3,3
17	1,5	3	2	2,6
18	1,5	2,5	2	2,3
19	1	3,5	2	2,8
20	-1	2	-0,7	1,1

№21-25. Есептің шарты №20-шы есептегідей:

$$f(x)=\begin{cases} a, & егер \quad x\in[\gamma,b]; \\ 0, & егер \quad x\notin[\gamma,b]. \end{cases}$$

9-кесте

N	a	b	x_1	x_2
21	1	1,8	1,3	1,6
22	1	2,4	1,5	2
23	2	3,5	2,5	3
24	2	2,8	2,1	2,5
25	1	2,8	-1	3

№26-30. Есептің шарты №20-шы есептегідей:

$$f(x)=\begin{cases} \gamma, & егер \quad x\in[a,b]; \\ 0, & егер \quad x\notin[a,b]. \end{cases}$$

10-кесте

N	a	b	x_1	x_2
26	-4	-2	-1	0
27	-3	-1	-2	0
28	2	4	0	3
29	1	3	0	2
30	1	1,5	0	0,5

№ 10 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ БОЙЫНША БАҚЫЛАУ ЖҰМЫСЫ

(4 вариант, 2 сағ. арналған)

Вариант 1-3	Вариант 2-4
Есеп №1	
"Лото" карточкасындағы ойындарға сәйкес ұтыс ықтималдығын табыңдар: 1-вариант: 5 нөмірден 4-і ұтады, егер 36 нөмірден 5 нөмірге ұтыс шығатын	Карта ойынында әрбір ойыншыға 6 картадан үлестірілген. Бір ойыншыға: 2-вариант: бір түсті мәннен 6 карта келуі;

3-вариант: 6 нөмірден 5-і ұтады, егер 49 нөмірдің 6 нөміріне ұтыс шығатын болса.	табыңдар. Карта колодасы 36 картадан тұрады деп алыңдар.
Есеп №2	
Урнада: 1-вариант: 3 ақ және 2 қара шар 3-вариант: 4 ақ және 3 қара шар болғанда 2 шар екінші урнаға ауыстырылған.	Жәшікте 20 теннис добы бар. Олардың ішінде: 2-вариант: 12 жаңа және 8 ойналған доп; 4-вариант: 15 жаңа және 5 ойналған доп.
Екінші урнада: 1-вариант: 4 ақ және 4 қара шар 3-вариант: 2 ақ және 3 қара шар болған. Ауыстырылғаннан кейін екінші урнадан 1-вариант: ақ шар 3-вариант: қара шар Суырып алу ықтималдығын табыңдар.	Жәшіктен қалай болса солай 2 доп алып, ойнағаннан кейін жәшікке қайта салынған. Содан кейін келесі ойынға 2 доп алынған. Кейінгі алынған доптың: 2-вариант: екеуі де жаңа; 4-вариант: екеуі де ойналған доп болу ықтималдығын табыңдар.
Есеп №3	
Егер орта есеппен алғанда “солақайлар ” 1% құратын болса: 1-вариант: 200 адамның ішінде 4 “солақай” болу ықтималдығы қандай? 3-вариант: 300 адамның арасында 6 “солақай” кездесу ықтималдығы қандай?	Қайсы бір жанұяда 10 бала бар. Ер бала мен қыз бала туу ықтималдықтарын бірдей деп, ол 1/2 деп алсақ, жанұяда: 2-вариант: 5 ұл және 5 қыз бала болу; 4-вариант: ер балалар саны 3 пен 8 арасында болу ықтималдығын табыңдар.

Есеп №4

Дискрет кездейсоқ шаманың ықтималдықтар үлестірімі мынандай:

1-вариант

11-кесте

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

2-вариант

X	-1	-0,5	0	0,1	0,2
P	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

3-вариант

12- кесте

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2

4-вариант

X	-3	-2	-1	0	1
P	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1

Есеп №5

Қайсыбір кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы берілген. а сандық коэффициентін, кездейсоқ шаманың үлестірім функциясын, математикалық үмітін және дисперсиясын табыңдар:

1-вариант

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x<0;\\ ax, & егер \quad 0<x<2;\\ 0, & егер \quad x>2.\end{cases}$$

2-вариант

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x<0;\\ ax^2, & егер \quad 0<x<2;\\ 0, & егер \quad x>2.\end{cases}$$

3-вариант

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x<0;\\ ax, & егер \quad 0<x<4;\\ 0, & егер \quad x>4.\end{cases}$$

4-вариант

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x<0;\\ ax^2, & егер \quad 0<x<4;\\ 0, & егер \quad x>3.\end{cases}$$

Үйге тапсырма: Типтік есептеулерді беріңіздер, ықтималдықтар теориясының 1-бөлімін орындаңдар.

№ 11 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА. НЕГІЗГІ АНЫҚТАМАЛАР ЖӘНЕ ҰҒЫМДАР

Теориядан сұрақтар

1. Математикалық статистика пәні.
2. Статистикалық зерттеулердің негізгі кезеңдері.
3. Үлестірімнің эмпирикалық функциясы.
4. Таңдаманың орта мәні және дисперсиясы жайында түсінік.
5. Гистограмма, полигон, мода, медиана.

Есептер шығару үшін формулалар

Таңдама ортасы:

$$\overline{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

мұндағы: x_i-таңдама варианты; n_i- і-ші варианттың жиілігі; n-таңдама көлемі.

Таңдама дисперсиясы:

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_T)^2}{n} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n}\right]^2.$$

Жөнделген таңдама дисперсиясы:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_T.$$

Мысалдар

1. 50 бұйым салмағын бақылауға алғанда мынандай нәтижелер (кг есебімен) шыққан:

83, 85, 81, 82, 84, 82, 79, 84, 80, 81
82, 82, 80, 82, 80, 82, 83, 84, 79, 79
83, 82, 83, 85, 82, 82, 81, 80, 82, 82
83, 80, 82, 85, 81, 83, 81, 81, 83, 82

81, 85, 83, 79, 81, 85, 81, 84, 82, 81 .

Тапсырма:

1. Вариация қатарын құрыңдар.

2. $\bar{x}_T$ және D_T сипаттамаларын, салыстырмалы жиіліктерін табыңдар, салыстырмалы жиіліктердің полигонын құрыңдар, вариация қатарының модасы мен медианасын табыңдар.

Шешуі:

1. 13-кесте

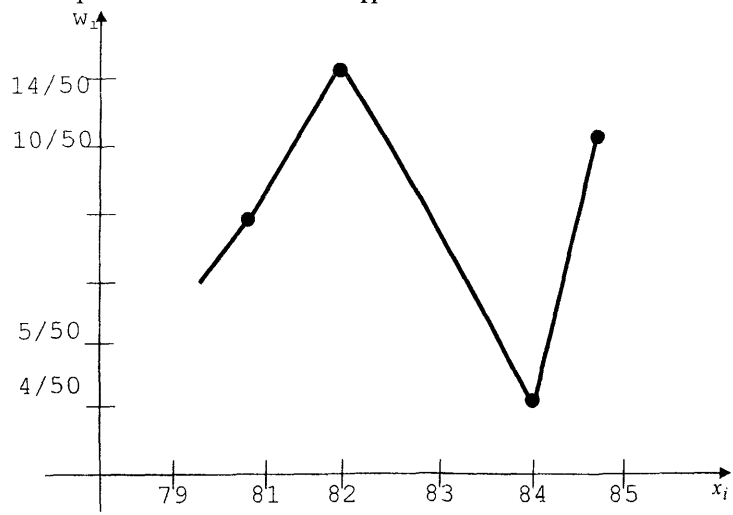
x_i	79	80	81	82	83	84	85
n_i	4	5	10	14	8	4	5
w_i	4/50	5/50	1/5	14/50	8/50	4/50	1/10

2. $\bar{x}_T = \frac{\sum x_i n_i}{n} \approx 81{,}98$; $D_T \approx (1{,}66)^2 \approx 2{,}7$.

Мода $M_0 = 82$ (ең үлкен жиілік-14).

Медиан $m_e = 82$ (вариация қатарындағы варианттарды тең екі бөлікке бөледі).

w_i салыстырмалы жиілігі бойынша құрылған полигон мынандай:



2 – сурет

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. 1890 жылы 1000 ересек ер адамдардың бойының ұзындығын бақылағанда мынандай нәтижелер белгілі болған:

Бойы (см- мен)	Ерлер саны	Бойы (см-мен)	Ерлер саны
143-146	1	167-170	170
146-149	2	170-173	120
149-152	8	173-176	64
152-155	26	176-179	28
155-158	65	179-182	10
158-161	120	182-185	3
161-164	181	185-188	1
164-167	201		

Берілген кесте бойынша ер адамдар бойының таңдама дисперсиясын және таңдаманың орта мәнін табыңдар. Жиіліктер полигонын құрыңдар, моданы табыңдар.

2. Берілген таңдама үлестірімі бойынша эмпирикалық функция құрыңдар:

14-кесте

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

$$\sum n_i = 60.$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x < 2; \\ \dfrac{12}{60} = 0{,}2, & егер \quad 2 < x < 6; \\ \dfrac{30}{60} = 0{,}5, & егер \quad 6 < x < 10; \\ 1, & егер \quad x > 10. \end{cases}$$

3. Кейбір шамаларды құралдармен 5 рет өлшеген кездегі нәтижелері мына кестеде берілген:

15-кесте

Өлшеу нөмірі	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2763	2858

Өлшеу қатесінің таңдама дисперсиясын табыңдар, мұнда шаманың дәл мәні x=2800.

Жауабы: $S^2 = 1287{,}8$.

Гмурман: 450, 453, 454, 455, 456.

Үйге: 451, 459, 457.

№ 12 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
ҮЛЕСТІРІМ ПАРАМЕТРЛЕРІНІҢ СТАТИСТИКАЛЫҚ БАҒАЛАРЫ

Теориядан сұрақтар

1. Статистикалық баға жайында түсінік.
2. Нүктелік және интервалдық бағалар.
3. Ығыспайтын және тиімді бағалар.
4. Бас жиынтықтың бағалары. Есептеу формулалары.

Таңдама ортасы. Таңдама дисперсиясы.

Интервалдық бағалар. Сенімділік интервал.

Есептер шығару үшін формулалар (қалыпты үлестірімді кездейсоқ шама үшін барлық формулалар):

1. γ сенімділігі бойынша σ (шама қалыпты үлестірімді болғанда) белгілі болғанда, белгісіз a математикалық үмітінің бағасы үшін сенімділік интервал:

$$\bar{x}_T - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}_T + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

мұндағы: σ-орта квадратты ауытқу, n-таңдама көлемі, γ-сенімділік.

t мәнін $\phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ теңдеуінен табады, мұндағы $\phi(t)$-Лаплас функциясы (кестесі бар).

2. Егер σ белгісіз болса, онда $\bar{x}_T - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$,

мұндағы: S-жөнделген таңдама ортасы, t_γ - көбейтіндісінің мәнін n және γ бойынша кестеден табамыз.

3. σ бағасы үшін сенімділік интервал:

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q), \quad q < 1;$$

$$0 < \sigma < S(1+q), \quad q > 1;$$

q мәнін n және γ бойынша кестеден табамыз.

Есептер

1. Бас жиынтықтан көлемі 50 таңдама алынған. Бас таңдаманың орта мәні үшін ығыспайтын бағаны табыңдар:

16-кесте

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Бас ортаның ығыспайтын бағасы мынандай:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 5{,}76.$$

2. Бас жиынтықтың қалыпты үлестірімі бар X сипатының 0,95 сенімділікпен белгісіз математикалық үмітінің бағасы үшін, сенімділік интервалын табыңдар:

Берілгені:

$\sigma = 5, \quad \bar{x}_T = 10, \qquad n = 36.$

Шешуі:

$$\bar{x}_T - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

t-ның мәнін $\phi(t) = 0{,}475$ теңдеуінен кесте арқылы табамыз:

$t = 1{,}96$. Сонда

12,04<a<15,96.

Гмурман В. Е. N502, 505, 509, 452.

Үйге: 458, 507, 506.

13-ШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
ПИРСОННЫҢ КЕЛІСІМ КРИТЕРИЙ. БАС ЖИЫНТЫҚТЫҢ ҚАЛЫПТЫ ҮЛЕСТІРІМІ ЖАЙЫНДАҒЫ ЖОРАМАЛДЫ ТЕКСЕРУ

Теориядан сұрақтар

1. Статистикалық жорамалдар: нөлдік және конкуренттік; жай және күрделі.
2. 1-ші және 2-ші текті қателер.
3. Нөлдік жорамалды статистикалық критерий арқылы тексеру. Критеридің бақыланған мәні. Сыналатын аймақ.
4. Пирсон критериі. Қалыпты үлестірімнің теориялық жиіліктерін есептеу методикасы.

1-ші есеп

Эмпирикалық және теориялық жиіліктер n_1 және n_1' берілгенде бас жиынтықтың қалыпты үлестірімі жайындағы жорамалды 0,05 мәнділік деңгейінде тексеру.

17-кесте

n_1	6	13	38	74	106	65	30	14
n_1'	3	14	42	82	99	76	37	13

Пирсон критериінің бақыланған $\chi^2_{бақыл}$ мәнін есептеу үшін 18- ші есептеу кестесін құрамыз. Еркіндік дәрежесі k=8-3=5 және $\alpha = 0{,}05$ мәндерін пайдаланып $\chi^2_{бақыл}$ мәнін табамыз: $\chi^2_{сынақ} = 11{,}1$.

18-кесте

1	2	3	4	5	6	7	8
1	n_1	n_1'	$n_1 - n_1'$	$(n_1 - n_1')^2$	$\frac{(n_1 - n_1')^2}{n_1'}$	m^2	$\frac{m^2}{n_1'}$

1	6	14	3	9	3	36	12
2	13	14	-1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	-4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	-8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	-7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{бақыл}=7$,19		373,19

Тексеру: $\chi^2_{бақыл}=7,19$

$$\left[\sum n_i^2 / n_i'\right] - n = 373,19\text{-}366 = 7,19.$$

$\chi^2_{бақыл} < \chi^2_{сынақ}$ болғандықтан нөлдік жорамалды жоққа шығаруға негіз жоқ, басқаша айтқанда, эмпирикалық пен теориялық жиіліктердің алшақтығы аз ғана. Сондықтан да бақыланған нәтижелер бас жиынтықтың қалыпты үлестірім жайындағы жорамалмен сай келеді.

2-ші есеп

Таңдаманың эмпирикалық үлестірімі және χ^2 критериесі бойынша қалыпты үлестірім жайындағы жорамал белгілі болғанда, қалыпты үлестірімнің теориялық n_i' жиілігін табу керек.

Шешуі:

Табамыз: $\bar{x}_T = 12,63;$ $\sigma_T = 4,695;$

$n = 2,$ $n = 200.$

19-кесте

1	x_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_T}{\sigma_T}$	$\varphi(u_i)$	$n_i^1 = \frac{n \cdot h}{\sigma_T} \cdot \varphi(u_i)$
1	5	-1,62	1074	9,1
2	7	-1,20	0,1942	16,5
3	9	-0,77	0,2966	25,3
4	11	-0,35	0,3752	32
5	13	-0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7

Әрі қарай $\chi^2_{бақ.ыл} = 22,2$ үшін есептеу кестесін құрамыз және $\alpha = 0,05$ үшін мыналарды табамыз:

$$k = 9\text{-}3 = 6; \qquad \chi^2_{бақыл} = 12,6.$$

Қалыпты үлестірім жайындағы жорамал теріске шығарылады.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер (статистика бойынша)

Барлық варианттарға тапсырма бірдей

1. Гистограмма құрыңдар.
2. Табыңдар: $\bar{x}_T$ және $\overline{D}_T$, σ_T және S.
3. Кездейсоқ шаманың үлестірімі қалыпты деп алып, а мен σ парамертлері үшін сенімдік интервалдар құрыңдар.
4. Пирсон критериі бойынша кездейсоқ шаманың қалыпты үлестірімі жайындағы жорамалды тексеріңдер.

1-вариант: Еліміздің түрлі өңіріндегі мұнай жабдықтарын құрастыруға жұмсалған ақша млн теңге есебімен мынандай болған:

4,7; 7,2; 6,2; 6,7; 7,2; 5,7; 5,2; 7,7; 8,2; 6,2; 7,2; 5,7;
6,2; 5,7; 8,2; 5,7; 6,7; 6,2; 5,7; 6,2; 6,7; 5,2; 7,7; 6,2;
7,2; 6,7; 7,7; 6,2; 7,2; 8,2; 6,2; 5,7; 6,2; 6,7; 7,2; 5,7;
6,7; 7,7; 8,2; 7,7; 8,2; 4,7; 8,7; 4,2; 4,7; 8,7; 6,2; 6,7.

2-вариант. Еліміздің түрлі өңірлерінде кейбір өндіріс орнының 1т. жүк тасуға кететін шығындары (мың теңге есебімен) мынандай болған:

14, 11, 13, 12, 10, 17, 15, 9, 7, 6, 9, 15, 14, 15, 17, 19,
9, 6, 16, 14, 7, 17, 15, 14, 11, 12, 8, 17, 14, 17, 16, 8,
5, 17, 13, 18. 16, 14, 15, 17, 16, 18, 19, 15, 14, 16, 18,
16, 14, 15.

3-вариант. Еліміздің түрлі мұнай аудандарында 1 м бұрғылау жұмыстарына кететін энергия шығындары (млн теңге есебімен) мынандай болған:

14, 13, 18, 15, 12, 13, 14, 12, 13, 16, 15, 15, 12,
13, 15, 15, 14, 16, 18, 13, 15, 14, 16, 14, 13, 15,
12, 18, 12, 14, 16, 12, 13, 15, 15, 15, 13, 14, 15,
18, 16, 12, 15, 13, 13, 13, 15, 15, 17, 17.

4-вариант. Еліміздің түрлі өңірлерінде мұнай ұңғысын бұрғылауда 1 м тереңдеу үшін кеткен өзіндік құн (млн теңге есебімен) мынандай болған:

50, 52, 140, 138, 165, 162, 210, 165, 170, 142, 150,
170, 168, 163, 63, 68, 83, 85, 105, 110, 112, 131,
125, 126, 135, 148, 92, 99, 102, 110, 115, 118, 125,
121, 118, 130, 133, 141, 182, 199, 205, 127, 132, 135,
98, 105, 119, 115, 125, 124.
Интервал ұзындығы 20 тең.

5-вариант. Еліміздің түрлі мұнай аудандарында ұңғы бұрғылау арқылы барлау жүргізгенде, 1м-ге тереңдеу үшін жұмсалған шығын (млн теңге есебімен) мынандай болған:

11, 15, 20, 25, 29, 34, 19, 25, 16, 21, 29, 20,
28, 35, 21, 22, 23, 26, 28, 30, 18, 13, 17, 22,

29, 26, 33, 36, 39, 14, 18, 24, 27, 25, 31, 32,
23, 37, 23, 27, 34, 37, 36, 42, 32, 34, 39, 38, 44.
Интервал ұзындығы 5-ке тең.

6-вариант. Ұңғыны бақылағанда тәуліктік өнім (тонна/тәулік) мынандай болған:

16, 13, 11, 15, 18, 19, 21, 18, 17, 15, 13, 16, 18, 17, 19,
15, 13, 12, 14, 16, 17, 20, 17, 17, 20, 19, 18, 22, 24, 18,
15, 14, 10, 12, 16, 18, 18, 19, 21, 23, 20, 22, 24, 17, 16,
14, 15, 18, 15, 11, 16, 17, 15, 13, 16, 17, 18, 14, 15, 19,
17, 18, 16, 13, 15, 17, 21, 23, 26, 19, 22, 24, 25, 20, 21,
24, 19, 22, 23, 20, 25, 21, 20, 22, 26, 19, 22, 23, 25, 28,
20, 21, 27, 19.
Интервал ұзындығы 2-ге тең.

7-вариант. Еліміздің түрлі мұнай аудандарында 1 тонна мұнайды айдау және сақтау үшін кеткен шығын (млн теңге есебімен) мынандай болған:

1,03; 1,06; 1,09; 1,12; 1,01; 1,06; 1,06; 1,05; 1,10;
1,09; 1,13; 1,20; 1,04; 1,08; 1,10; 1,15; 1,11; 1,02;
1,04; 1,04; 1,07; 1,11; 1,14; 1,05; 1,07; 1,10; 1,13;
1,14; 1,08; 1,06; 1,08; 1,09; 1,13; 1,12; 1,16; 1,09;
1,17; 1,10; 1,15; 1,11; 1,13; 1,10; 1,09; 1,14; 1,19;
1,21; 1,11; 1,18; 1,23; 1,10; 1,19; 1,03.
Интервал ұзындығы 0,03-ке тең.

8-вариант. Еліміздің түрлі мұнай аудандарында 1 тонна мұнайдың және мұнайлы газдың өзіндік құны (млн теңге есебімен) мынандай болған:

3, 4, 8, 12, 14, 19, 18, 23, 27, 3, 5, 9, 12,
10, 13, 6, 10, 10, 7, 11, 15, 6, 12, 10, 14, 16,
5, 11, 11, 10, 13, 10, 8, 11, 7, 9, 12, 9, 14,
13, 16, 18, 11, 10, 12, 9, 9, 15, 13, 11, 12.
Интервал ұзындығы 4-ке тең.

9-вариант. Ұңғыны бақылағанда тәуліктік газ өнімі ($м^3$/тәулік) мынандай болған:

30, 19, 21, 23, 26, 27, 29, 31, 24, 25, 28, 28, 27,
23, 26, 32, 34, 26, 24, 22, 19, 23, 27, 30, 29, 25,
18, 18, 5, 20, 22, 24, 28, 31, 33, 25, 18, 21, 26,
30, 32, 34, 29, 26, 21, 20, 23, 25, 27, 30, 32.

10-вариант. Еліміздің түрлі мұнай аудандарында мұнай ұңғысын бұрғылауды барлағанда 1 м тереңдікке кететін көлік шығындары (млн теңге есебімен) мынандай болған:

17, 27, 12, 23, 32, 39, 50, 57, 68, 78, 82, 13, 23,
47, 80, 28, 37, 22, 18, 12, 33, 48, 58, 71, 12, 26,
85, 30, 42, 44, 19, 13, 31, 34, 55, 72, 14, 25, 46,
52, 65, 14, 15, 24, 35, 45, 54, 62, 56, 53.

Интервал ұзындығы 10-ға тең.

11-вариант. Еліміздің аудандарының бірінде мұнайды тәуліктік өндіру (тонна есебімен) мынандай болған:

85, 76, 80, 84, 88, 89, 91, 88, 84, 85, 75, 82, 86, 89,
88, 84, 90, 89, 85, 91, 87, 81, 78, 85, 88, 91, 89, 87,
74, 81, 87, 90, 88, 86, 76, 88, 77, 82, 85, 84, 74, 80,
84, 91, 93, 90, 88, 87, 77, 83, 89, 89, 91, 92, 88, 94,
90, 88, 81, 83, 89, 94, 96, 88, 95, 99, 90, 86, 78, 81,
86, 90, 92, 93, 90, 83, 79, 86, 90, 79, 82, 87, 85, 91,
97, 88, 85, 87, 90, 89, 95, 89, 84, 91, 89, 90, 98, 91,
88.

Интервал ұзындығы 4-ке тең.

12-вариант. Түрлі мұнай ұңғыларын бақылау үшін, бұрғыланған 1 м тереңдікке кеткен нақты өзіндік құн (теңге есебімен) мынандай болған:

160, 210, 260, 285, 310, 330, 85, 190, 230, 290, 305, 325,
351, 405, 247, 265, 308, 345, 360, 410, 130, 165, 170, 240,
272, 292, 348, 370, 200, 225, 280, 340, 390, 180, 190, 232,
250, 253, 263, 380, 420, 340, 325, 310, 400, 240, 220, 290,
350, 333, 405, 295, 450, 285, 225, 300, 355, 310, 385, 348,
245, 305, 335, 392, 381.

Интервал ұзындығы -50.

13-вариант. Геологиялық басқарманың біреуіне тиісті түрлі обьектілердегі, бір жұмысшыға тиетін бір айлық орташа еңбек ақы (мың теңге есебімен) мынандай болған:

147, 154, 156, 157, 159, 160, 187, 164, 183, 176, 172, 174,
161, 177, 163, 173, 171, 174, 161, 184, 160, 177, 161, 171,
173, 162, 178, 164, 172, 163, 174, 172, 171, 168, 172, 174,
164, 166, 172, 163, 166, 174, 173, 162, 167, 162, 161, 172,
167, 171.

Интервал ұзындығы 5-ке тең.

14-вариант. Еліміздің түрлі мұнай аудандарында ұңғы насостарын пайдалану коэффициенттері мынандай болған:

0,90; 0,79; 0,84; 0,86; 0,88; 0,90; 0,92; 0,89; 0,85; 0,91;
0,98; 0,91; 0,80; 0,87; 0,89; 0,88; 0,84; 0,78; 0,81; 0,85;
0,88; 0,94; 0,86; 0,80; 0,86; 0,91; 0,91; 0,78; 0,86; 0,91;
0,95; 0,97; 0,88; 0,79; 0,82; 0,84; 0,90; 0,81; 0,87; 0,91;
0,90; 0,82; 0,85; 0,90; 0,96; 0,98; 0,89; 0,87; 0,99; 0,85.

Интервал ұзындығы 0,04-ке тең.

15-вариант. Атқылаған ұңғыны бақылағанда пайдалану коэффициенті мынандай болған:

0,90; 0,93; 0,88; 0,91; 0,89; 0,93; 0,96; 0,98; 0,96;
0,90; 0,92; 0,93; 0,91; 0,86; 0,92; 0,91; 0,94; 0,90;
0,88; 0,90; 0,93; 0,95; 0,99; 0,91; 0,94; 1,00; 0,87;
0,93; 0,97; 0,86; 0,99.

Интервал ұзындығы-0,02.

№ 14-15 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚТАР
КОРРЕЛЯЦИЯ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ. РЕГРЕССИЯНЫҢ ТАҢДАМА ТЕҢДЕУЛЕРІ. КОРРЕЛЯЦИЯНЫҢ ТАҢДАМА КОЭФФИЦИЕНТІ, КОРРЕЛЯЦИЯЛЫҚ ҚАТЫНАС. ЕҢ КІШІ КВАДРАТТАР ӘДІСІ. СЫЗЫҚТЫҚ РЕГРЕССИЯНЫҢ ТЕҢДЕУІН ҚҰРУ

Теория бойынша сұрақтар

1. Функционалдық, статистикалық және корреляциялық тәуелділіктер ұғымы.
2. Корреляция коэффициентін және регрессияның таңдама коэффициентін есептеу формулалары.
3. Көптік корреляция жайында түсінік.
4. Бір өлшемді регрессияның теңдеулерін құру.

Есептер

1. Мына шамалардың арасында тәуелділіктің қандай түрі барлығын анықтаңдар:

1) $y = x^2 + 3$-функционалды.

2) Егер X кездейсоқ шама болса және ол z_1, w_1, υ кездейсоқ факторлардан тәуелді болса, ал Y кездейсоқ шама болса, әрі ол z_1, w_1, w_2 кездейсоқ шамаларына тәуелді болса?

Жауабы: X пен Y шамалары тәуелді болатын оларға ортақ z_1 және w_1 кездейсоқ шамалары бар. Сондықтан X пен Y арасында статистикалық тәуелділік бар.

3) Y шамасы егілген егістен түсетін өнім болсын, X егіске берілген тыңайтқыш мөлшері болсын. Бұлардың арасында қандай байланыс бар?

Жауабы: Егер тең көлемді учаскеге тең мөлшерлі тыңайтқыштар бергенде түрлі егіс жиналса, онда Y шамасының X пен функционалды тәуелділігі жоқ. Бірақ та орта есеппен алғанда астық X-тің функциясы болады, сондықтан да бұлардың арасында корреляциялық тәуелділік жайында айтылады.

2. Каданск руднигіндегі руданың 296 тексеруге алғанда, рудада қорғасын мен күмістің қанша проценті болатындығы жайында мәлімет алынған. Бұл 20-кестеде берілген.

а) Күмістің және қорғасынның барлығында процентік (ζ және ξ) корреляцияның таңдама коэффициентін табыңдар және ζ-ның ξ-ге регрессиясының таңдама коэффициентін есептеңдер.

ә) ζ-ң ξ-ге регрессиясының сызықтық таңдама теңдеулерін жазыңдар.

Шешуі: ζ мен ξ-дің таңдама үлестірімдері x пен y болсын делік. Сонда:

$$\bar{x} = 9{,}88;$$

$$\bar{y} = 7{,}63;$$

$$S_x = 8{,}526;$$

$$S_y = 7{,}742;$$

$$r_{xy} = 0{,}865;$$

$$I_{x/y} = 0{,}78.$$

Регрессия теңдеуі: y-7,63=0,78 (x-9,38).

20-кесте

Рудадағы қорғасын (% есебімен)									
0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	Рудадағы күміс (% есебімен)
119	9	-	-	-	-	-	-	-	0-4
9	59	7	-	-	-	-	-	-	4-8
1	4	28	3	-	-	-	-	-	8-12
-	-	8	12	4	-	-	-	-	12-16
-	-	1	6	7	1	1	-	-	16-20
-	-	-	1	1	8	3	-	-	20-24
-	-	-	-	-	2	1	-	-	24-28
-	-	-	-	-	-	3	2	1	28-32
-	-	-	-	-	-	-	-	-	32-36
-	-	-	-	-	-	-	-	1	36-40

3. Мақта талшығының мықтылығын, талшық қалыңдығына байланысты тексеру үшін 60 рет сынақ жүргізілген. Алынған мәліметтер төмендегі кестеде берілген, мұнда х арқылы қалыңдыққа кері пропорционал болатын шартты шама (талшық "нөмірі") белгіленген, ал у шамасы граммен өлшенген ең жоғарғы жүк көтеруді көрсетеді. х пен у шамалары арасындағы корреляция коэффициентін табыңдар. Орта квадраттық ауытқуды бағалаңдар. у-тің х бойынша регрессиясы таңдама теңдеуін жазыңдар. у-тің х-ке тәуелділігін сипаттаңдар.

21-кесте

y	x							
	4100	4300	4500	4700	4900	5100	5300	5500
6,75	-	1	-	-	-	-	-	-
6,25	1	2	2	1	-	-	-	-
5,75	-	1	3	4	2	3	-	-
5,25	-	3	5	7	1	1	-	-
4,75	-	-	2	5	5	3	2	-
4,25	-	-	-	-	1	2	2	-
3,75	-	-	-	-	-	-	-	1

Шешуі: $r = 0{,}63$; $S_r = 0{,}08$. $y - 5{,}23 = 0{,}0015(x - 4747)$.

$$z = y - Ix;\ S_z = 0{,}79.$$

Корреляция коэффициенті едәуір үлкен болғандықтан у-тің х-пен байланысы едәуір күшті. Корреляция коэффициенті 1-ден алшақ болғандықтан у-тің х бойынша регрессия коэффициенті тым аз, ал $z = y - Ix$ айырмасының квадраттық орта ауытқуы, яғни у-тің х-тен сызықтық болмайтын тәуелділігі у шамасының орта квадраттық ауытқуымен салыстырғанда ($S_y = 0{,}617$) үлкен болғандықтан, у-тің х-тен тәуелділігі сызықтық емес екендігі шығады.

4. "Азотсталь" зауытында түрлі шлак температурасында, шойында кремний барлығы өлшенген. Нәтижелері мына кестеде берілген:

22-кесте

t^0C	1330	1340	1345	1365	1375	1380	1385	1390
S,%	0,27	0,42	0,32	0,28	0,37	0,38	0,40	0,51

23-кесте

t^0C	1395	1400	1405	1410	1415	1420	1425	1430
S,%	0,40	0,52	0,33	0,44	0,52	0,47	0,53	0,43

24-кесте

t^0C	1440	1445	1455	1460	1470	1475	1480	1485
S,%	0,55	0,65	0,92	0,70	0,80	0,90	1,68	1,80

Кремний мен шлак температурасы ξ арасындағы корреляцияның таңдама коэффициентін (η) табыңдар. Бұл тәуелділікті сызықты деп айтуға бола ма?

Шешуі:

r_{xy}=0,792. Егер $\zeta = 1 - \lambda\xi$ десек, мұндағы λ- η-ның ξ-ге регрессия коэффициенті, онда $z = y - lx$ айырмасы ζ-ның таңдама үлестірімі болады.

Табамыз: $S_x = \sqrt{1 - r^2}$, $\sigma_y = 0{,}25$. Корреляция коэффициенті $r_{xy} \approx 0{,}8$ болғандықтан, ал S_x стандарттық ауытқуы у мәнімен салыстырғанда көп болғандықтан η-ның ξ-ге тәуелділігі сызықтыққа жақын деп жобалауға болады. (Дәлірек айтқанда ол тәуелділік η-ның ξ бойынша, параболалық регрессиясы арқылы жуықталады).

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

1. Эмпирикалық берілгендері бойынша график салу.
2. Сызықтық регрессияның $y = kx + b$ теңдеуін құру.

$x_i = i \cdot 0{,}1$, $i = 1,2,...,20$ мәндері барлық вариантар үшін бірдей.

25-кесте

№	Вариант 1, 7	Вариант 2, 8	Вариант 3, 9, 13	Вариант 4, 10, 14	Вариант 5, 11	Вариант 6, 12, 15
1	5,998	6,030	5,850	6,310	5,650	6,323
2	5,820	6,072	5,619	6,308	5,431	6,523
3	5,754	6,297	5,569	6,546	5,250	6,646
4	5,828	6,428	5,426	6,855	5,000	7,256
5	5,627	6,425	5,237	7,073	4,790	7,487
6	5,597	6,473	5,025	7,770	4,569	7,827
7	5,693	6,592	4,988	7,225	4,296	8,133
8	5,469	6,815	5,037	7,739	4,065	8,402
9	5,413	6,786	4,586	7,995	3,837	8,581
10	5,526	6,925	4,575	8,063	3,519	9,014
11	5,344	7,116	4,445	8,247	3,281	9,049
12	5,304	7,053	4,353	8,472	2,926	9,571
13	5,325	7,224	3,933	8,627	2,801	9,891
14	5,301	7,439	3,899	8,936	2,546	10,073
15	5,424	7,302	3,793	9,082	2,232	10,406
16	4,996	7,426	3,473	9,076	2,016	10,821
17	5,080	7,797	3,551	9,363	1,794	11,151
18	5,256	7,871	3,171	9,679	1,663	11,232
19	5,090	7,929	3,330	9,846	1,375	11,655
20	5,053	8,060	3,044	10,013	1,217	11,957

№ 16 ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ
ШОЛУ САБАҒЫ

40 мин. - өткенді қайталау;
40 мин. - статистика бойынша екі вариантан тұратын өз бетінше жұмыс.

1- вариант

Цех дайындаған бұйымдардың әрбір жүз бұйымынан орта есеппен алғанда стандарт емес 2 бұйым шығады. Әр қайсысы 100 бұйымнан тұратын 10 партия тексерілген. Әрбір сынақта жарамсыз бұйымдар санының орта мәндерінен ауытқуы 25-кестеде келтірілген.

1. Вариациялық қатарды құрыңдар.
2. Үлестірім функциясын салыңдар.
3. Таңдама ортасын және таңдама дисперсиясын табыңдар.

25-кесте

Партия N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ортадан ауытқу	1	0	1	1	-1	1	0	-2	2	1

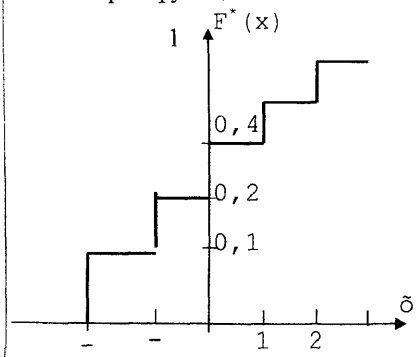
Жауабы:

Вариациялық қатар

26-кесте

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

2. Үлестірім функциясы:



4-сурет

2- вариант

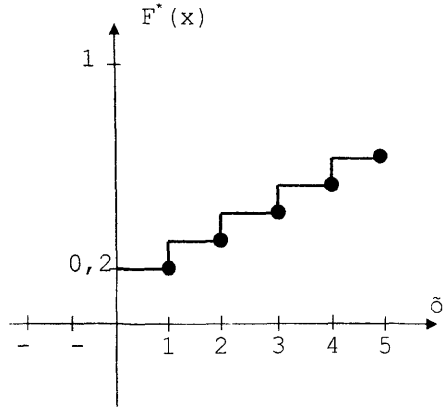
Қайсыбір кездейсоқ шамалардың мынандай вариациялық қатары берілген:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

1. Үлестірім функциясын салыңдар.
2. Таңдама ортасын және "түзетілген" орта квадраттық ауытқуын табыңдар.

Жауабы:

1. Үлестірім функциясы:



3-сурет

2. $\bar{x}_T = 2;$

$S = 2{,}4$

3. $\bar{x} = 0,2$ $S^2 = 1,52$	

2-есеп

X белгісі бас жиынтықта қалыпты үлестірімді болғанда, белгісіз a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын табыңдар, квадрат ауытқудың бас орта мәні берілген.

$\sigma = 5$ $\bar{x}_T = 14$ n=25 Сенімділік деңгейі $\gamma = 0,95$ Жауабы: $a \in (12,04;\ 15,96)$	$\sigma = 4$ $\bar{x}_T = 10,2$ n=16 $\gamma = 0,99$ Жауабы: $a \in (7,36;\ 12,77)$

Өткен материалды қайталау үшін мына есептер ұсынылады: N470, 511, 536(а).

ТИПТІК ЕСЕПТЕУЛЕР

№1 есеп

n адамнан тұратын студенттер тобынан конференцияға m адамды делегат етіп жіберу үшін, қанша тәсілмен таңдама жасауға болады?

1-вариант. n=25, m=3.
2-вариант. n=26, m=4.
3-вариант. n=24, m=5.
4-вариант. n=20, m=3.
5-вариант. n=22, m=4.

Құпия шифр n орынды саннан тұрады. Осы шифрдан, n әріптен тұратын түрлі қанша құлып жасап шығуға болады?

6-вариант. n=4.
7-вариант. n =5.
8-вариант. n =6.
9-вариант. n =7.
10-вариант. n =8.

n адам поездың n орындық вагонында қанша әдіспен орналаса алады?

1-вариант. n=21.

2-вариант. n=11.

3-вариант. n=19.

4-вариант. n=31.

5-вариант. n=28.

Әртүрлі n карталардан m картаны қанша әдіспен таңдап алуға болады?

6-вариант. n=52, m=13.

7-вариант. n=52, m=14.

8-вариант. n=52, m=12.

9-вариант. n=36, m=6.

10-вариант. n=36, m=4.

Көпбұрыштың төбелері латын әріптерімен белгіленген (латын алфавитінде 26 әріп бар), m-бұрышты қанша тәсілмен белгілеуге болады?

1-вариант. m=3.

2-вариант. m=4.

3-вариант. m=5.

4-вариант. m=6.

5-вариант. m=7.

Егер темір жол бойында барлығы n бекет болса, темір жол кассасы үшін баратын және шығатын бекеттерді көрсететін қанша билет дайындау керек?

6-вариант. n=50.

7-вариант. n=60.

8-вариант. n=40.

9-вариант. n=100.

10-вариант. n=80.

№2 есеп

Егер студент n сұрақтардың к-сын білетін болса, студенттің қатарынан m сұраққа жауап беру ықтималдылығын табыңдар.

1-вариант. m=3, n=20, к=15.

2-вариант. m=3, n=25, к=20.

3-вариант. m=3, n=30, к=25.

4-вариант. m=2, n=20, к=15.

5-вариант. m=2, n=15, к=12.

6-вариант. m=2, n=22, к=18.

7-вариант. m=3, n=20, к=16.

8-вариант. m=4, n=25, к=20.

9-вариант. m=4, n=25, к=22.

10-вариант. m=4, n=30, к=28.

Урнада к қызыл шарлар және бір ақ шар бар. Кездейсоқ m шар суырып алынады. Солардың бәрі бір түс болу ықтималдылығы қандай?

11-вариант. к=6, I=4, m=3.

12-вариант. к=6, I=4, m=2.

13-вариант. к=6, I=4, m=4.

14-вариант. к=7, I=5, m=3.

15-вариант. к=7, I=5, m=4.

16-вариант. к=7, I=5, m=2.

17-вариант. к=8, I=4, m=3.

18-вариант. к=8, I=4, m=2.

19-вариант. к=8, I=4, m=4.

20-вариант. к=8, I=5, m=3.

"Лото" карточкасындағы n нөмірде m-де ұтыс бар. Сызылған m нөмірдің ішінен к-да ұтыс болу ықтималдылығы қандай?

21-вариант. n=36, m=5, к=1.

22-вариант. n=36, m=5, к=2.

23-вариант. n=36, m=5, к=3.

24-вариант. n=36, m=5, к=4.

25-вариант. n=36, m=5, к=5.

26-вариант. n=49, m=6, к=1.

27-вариант. n=49, m=6, к=2.

28-вариант. n=49, m=6, к=3.

29-вариант. n=49, m=6, к=4.

30-вариант. n=49, m=6, к=5.

№3 есеп

Нысанаға n рет оқ атылған. Бір рет атылған оқтың тию ықтималдығы р. Нысанаға к оқ тию ықтималдығын табыңдар.

1-вариант. n=5, к=3, p=0,9.
2-вариант. n=5, к=2, p=0,9.
3-вариант. n=5, к=4, p=0,9.
4-вариант. n=4, к=2, p=0,8.
5-вариант. n=4, к=3, p=0,8.
6-вариант. n=4, к=2, p=0,8.
7-вариант. n=4, к=3, p=0,7.
8-вариант. n=3, к=2, p=0,9.
9-вариант. n=3, к=1, p=0,9.
10-вариант. n=3, к=2, p=0,8.

Факультетте n студент бар. Әрбір студенттің белгілі бір күнде туу ықтималдылығы 1/365 тең. Бір күнде к студенттің туу ықтималдылығын табыңдар.

11-вариант. n=730, к=3.
12-вариант. n=1095, к=5.
13-вариант. n=1095, к=4.
14-вариант. n=730, к=4.
15-вариант. n=1460, к=5.
16-вариант. n=1460, к=6.
17-вариант. n=1460, к=7.

Солақай орта есеппен 1%. n адамның ішінен к-сы солақай болу ықтималдылығы қандай?

18-вариант. n=200, к=3.
19-вариант. n=200, к=2.
20-вариант. n=300, к=3.
21-вариант. n=300, к=2.
22-вариант. n=400, к=3.

23-вариант. n=400, к=2.

e^{-x} мәндері үшін кестені пайдаланамыз:

$x=2$, $e^{-2}=0{,}1353$;

$x=3$, $e^{-3}=0{,}0498$;

$x=4$, $e^{-4}=0{,}01832$.

Кейбір өңірде 100 қарбыздың ішінен орташа есеппен біреуінің салмағы >10кг. n қарбыздан тұратын бір топтың (партия) ішінен салмағы m_1-ден m_2-ге дейін >10кг үлкен болатын қарбыздар болу ықтималдығын табыңдар.

24-вариант. n=4000, m_1=50, m_2=60.

25-вариант. n=4000, m_1=60, m_2=80.

26-вариант. n=4000, m_1=75, m_2=80.

27-вариант. n=4000, m_1=65, m_2=75.

28-вариант. n=4000, m_1=45, m_2=50.

29-вариант. n=4000, m_1=48, m_2=52.

30-вариант. n=4000, m_1=51, m_2=64.

№4 есеп

Аудиторияда n ер балалар, m қыз балалар бар. Үзілістен кейін тағы к адам кірді. Тақтаға кездейсоқ шақырылған бірінші жас баланың ер бала болу ықтималдығы қандай?

1-вариант. n=10, m=15, k=2.

2-вариант. n=11, m=15, k=2.

3-вариант. n=12, m=16, k=2.

4-вариант. n=15, m=12, k=2.

5-вариант. n=15, m=15, k=2.

6-вариант. n=18, m=12, k=2.

7-вариант. n=13, m=17, k=2.

8-вариант. n=12, m=18, k=2.

9-вариант. n=13, m=19, k=2.

10-вариант. n=14, m=14, k=2.

Жәшікте жатқан n бұйымның ішінде жарамсызы болуы мүмкін. Суырып алған бұйым жарамды болды. Жәшікте к жарамсыз бұйым болуы мүмкін ықтималдығын анықтаңдар?

11-вариант. n=3, k=0.

12-вариант. n=3, k=1.

13-вариант. n=2, k=1.

14-вариант. n=2, k=0.

15-вариант. n=4, k=0.

16-вариант. n=4, k=1.

Екі станок-автомат бірдей бұйымдарды штамптайды. Біріншісінің жарамсыз бұйым шығару ықтималдығы P_1, ал екіншісінікі-P_2. Мұнда бірінші станок 100 бұйымнан m бұйым дайындайды. Кездейсоқ алынған бұйым жарамсыз болды. Соны бірінші станоктың дайындау ықтималдығы қандай?

17-вариант. P_1=0,08, P_2=0,07,m=60.

18-вариант. P_1=0,08, P_2=0.07,m=50.

19-вариант. P_1=0,08, P_2=0,07,m=40.

20-вариант. P_1=0,09, P_2=0,08,m=40.

21-вариант. P_1=0,09, P_2=0,08,m=50.

22-вариант. P_1=0,09, P_2=0,08,m=60.

23-вариант. P_1=0,09, P_2=0,08,m=70.

24-вариант. P_1=0,06, P_2=0,05,m=40.

25-вариант. P_1=0,06, P_2=0,05,m=50.

26-вариант. P_1=0,06, P_2=0,05,m=60.

27-вариант. P_1=0,06, P_2=0,05,m=70.

28-вариант. P_1=0,04, P_2=0,05,m=40.

29-вариант. P_1=0,07, P_2=0,09,m=50.

30-вариант. P_1=0,07, P_2=0,09,m=60.

№5-есеп

Ойын сүйегі n рет лақтырылған. Алты ұпай түсу санының үлестірім заңын жазыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

1-вариант. n=3.

2-вариант. n=4.

3-вариант. n=5.

4-вариант. n=6.

Тиын n рет лақтырылған. "Герб" түсу санының үлестірім заңын жазыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

5-вариант. n=5.

6-вариант. n=6.

7-вариант. n=4.

8-вариант. n=7.

Мерген нысанаға n рет оқ атқан. Бір рет оқ атқанда тигізу ықтималдығы-Р. Нысанаға тигізу санының үлестірім заңын жазыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

9-вариант. n=5. p=0,5.

10-вариант. n=4, p=0,3.

11-вариант. n=6, p=0,7.

12-вариант. n=5, p=0,4.

13-вариант. n=5, p=0,6.

14-вариант. n=5, p=0,7.

15-вариант. n=6, p=0,4.

16-вариант. n=6, p=0,5.

17-вариант. n=6, p=0,2.

18-вариант. n=4, p=0,5.

19-вариант. n=4, p=0,6.

20-вариант. n=4, p=0,4.

Кітаптың бір бетін басқанда кететін қатенің ықтималдығы p. n беттен тұратын кітаптың қатесі бар беттер санының үлестірім заңын жазыңдар.

21-вариант. p=0,1; n=10.

22-вариант. p=0,1; n=20.

23-вариант. p=0,2; n=10.

24-вариант. p=0,2; n=20.

25-вариант. p=0,3; n=10.

Құрылым бір-біріне тәуелсіз жұмыс істейтін n элементтен тұрады. Бір тәжірибеде элементтің әр қайсысының жұмыс істемеу ықтималдығы p. Бір тәжірибеде жұмыс істемейтін элементтер санының үлестірім заңын жазыңдар. $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар.

26-вариант. n=3, p=0,1.

27-вариант. n=4, p=0,2.

28-вариант. n=5, p=0,5.

29-вариант. n=4, p=0,2.

30-вариант. n=5, p=0,1.

№6-есеп

Кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы былай берілген: ол (α,β) аралығында $f(x)$ функциясына тең, ал (α,β) аралығының сыртында 0-ге тең. a параметрін, $M(X)$ және $D(X)$ мәндерін табыңдар, мұндағы X кездейсоқ шамасының үлестірім заңы $f(x)$ тығыздық функциясымен берілген.

1-вариант. $f(x)$=ax функциясы (0, 2) аралығында.

2-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-1, 0) аралығында.

3-вариант. $f(x)$=ax функциясы (0, 1) аралығында.

4-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (1, 3) аралығында.

5-вариант. $f(x)$=ax^3 функциясы (2, 4) аралығында.

6-вариант. $f(x)$=ax^3 функциясы (0, 1) аралығында.

7-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (2, 3) аралығында.

8-вариант. $f(x)$=ax функциясы (3, 4) аралығында.

9-вариант. $f(x)$=ax функциясы (4, 5) аралығында.

10-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (0, 4) аралығыда.

11-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (0, 2) аралығында.

12-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-1, 0) аралығында.

13-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-2, 0) аралығында.

14-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-3, 0) аралығында.

15-вариант. $f(x)=a\sqrt{x}$ функциясы (0, 1) аралығында.

16-вариант. $f(x)=\sqrt[a]{x}$ функциясы (0, 2) аралығында.

17-вариант. $f(x)=\sqrt[a]{x}$ функциясы (0, 3) аралығында.

18-вариант. $f(x)$=ах функциясы (1, 2) аралығында.

19-вариант. $f(x)$=ах функциясы (2, 3) аралығында.

20-вариант. $f(x)$=ах функциясы (2, 3) аралығында.

21-вариант. $f(x)$=ах функциясы (2, 5) аралығында.

22-вариант. $f(x)$=ах функциясы (2, 4) аралығында.

23-вариант. $f(x)$=ах функциясы (1, 7) аралығында.

24-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (1, 3) аралығында.

25-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-1, 5) аралығында.

26-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-1, 2) аралығында.

27-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-1, 3) аралығында.

28-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-1, 8) аралығында.

29-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (0, 9) аралығында.

30-вариант. $f(x)$=ax^2 функциясы (-5, 0) аралығында.

№7 есеп

Бас жиынтықтан алынған X кездейсоқ белгісінің қалыпты үлестірімі бар. γ сенімділігімен, белгісіз а математикалық үміт бағасы үшін сенімділік интервалын табыңдар. Таңдама көлемі n, бас таңдама ортасы $\bar{x}_T$, орта квадраттық ауытқу σ берілген.

1-вариант. γ=0,95; σ=3,5; $\bar{x}_T$=10,1; n=16.

2-вариант. γ=0,95; σ =3,4; $\bar{x}_T$=14,2; n=16.

3-вариант. γ =0,95; σ =3,2; $\bar{x}_T$=10,3; n=16.

4-вариант. γ =0,95; σ =4,1; $\bar{x}_T$=14,1; n=16.

5-вариант. γ =0,95; σ =4,2; $\bar{x}_T$=8,7; n=16.

6-вариант. γ =0,99; σ =4,3; $\bar{x}_T$=6,5; n=16.

7-вариант. γ =0,99; σ =4,5; $\bar{x}_T$=2,3; n=25.

8-вариант. γ =0,99; σ =2,1; $\bar{x}_T$=7,8; n=25.

9-вариант. γ =0,99; σ =2,2; $\bar{x}_T$=3,4; n=25.

10-вариант. γ =0,999; σ =2,3; $\bar{x}_T$=4,3; n=25.

11-вариант. γ =0,999; σ =2,4; $\bar{x}_T$=5,1; n=25.

12-вариант. γ =0,999; σ =2,1; $\bar{x}_T$=5,3; n=36.

13-вариант. γ =0,999; σ =2,2; $\bar{x}_T$=5,2; n=36.

14-вариант. γ =0,999; σ =2,5; $\bar{x}_T$=7,3; n=36.

15-вариант. γ =0,999; σ =2,3; $\bar{x}_T$=7,4; n=36.

Бас жиынтықтан алынған, X белгісінің сан мәнінің қалыпты үлестірімі бар. "Түзетілген" орта квадраттық ауытқу S, сенімділік γ, таңдама көлемі n берілген жағдайда, орта квадраттық σ ауытқу бағасы үшін сенімділік интервалын табыңдар.

16-вариант. γ=0,95; S=1,1; n=15.

17-вариант. γ =0,95; S=1,2; n=16.

18-вариант. γ =0,95; S=1,3; n=19.

19-вариант. γ =0,95; S=1,4; n=14.

20-вариант. γ =0,95; S=1,5; n=100.

21-вариант. γ =0,99; S=1,5; n=10.

22-вариант. γ =0,99; S=1,4; n=11.

23-вариант. γ =0,99; S=1,3; n=12.

24-вариант. γ =0,99; S=1,2; n=13.

25-вариант. γ =0,99; S=1,1; n=80.

26-вариант. γ =0,999; S=0,99; n=90.

27-вариант. γ =0,999; S=0,9; n=60.

28-вариант. γ =0,999; S=0,8; n=50.

29-вариант. γ =0,999; S=0,7; n=30.

30-вариант. γ =0,999; S=0,9; n=200.

№8 есеп

α маңыздылық деңгейіндегі Пирсон критериін пайдаланып, X бас жиынтығының қалыпты үлестірім жайындағы жорамалды тексеріңдер, мұнда эмпирикалық үлестірімінің таңдама көлемі n деп алынған.

1-5 вариантар үшін

28-кесте

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

1-вариант. α=0,01 болғанда.

2-вариант. α =0,025 болғанда.

3-вариант. α =0,05 болғанда.

4-вариант. α =0,95 болғанда.

5-вариант. α =0,975 болғанда.

6-вариант. α =0,99 болғанда.

2-12 вариантар үшін

29-кесте

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
n_i	2	4	6	10	18	20	16	11	7	5	1

7-вариант. α=0,99 болғанда.

8-вариант. α =0,975 болғанда.

9-вариант. α =0,95 болғанда.

10-вариант. α =0,05 болғанда.

11-вариант. α =0,025 болғанда.

12-вариант. α =0,01 болғанда.

13-18 вариантар үшін

30-кесте

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18
n_i	10	6	10	14	20	14	12	10	4

13-вариант. α =0,01 болғанда.

14-вариант. α =0,025 болғанда.

15-вариант. α =0,05 болғанда.

16-вариант. α =0,95 болғанда.

17-вариант. α =0,975 болғанда.

18-вариант. α =0,99 болғанда.

19-24 вариантттар үшін

31-кесте

x_i	8	13	18	23	28	33	38	43	48
n_i	7	8	15	18	23	35	40	45	50

19-вариант. α =0,99 болғанда.

20-вариант. α =0,975 болғанда.

21-вариант. α =0,95 болғанда.

22-вариант. α =0,05 болғанда.

23-вариант. α =0,025 болғанда.

24-вариант. α =0,01 болғанда.

25-30 вариантттар үшін

32-кесте

x_i	1	3	5	7	9	11	13	15
n_i	2	6	20	25	23	22	8	4

25-вариант. α =0,01 болғанда.

26-вариант. α =0,025 болғанда.

27-вариант. α =0,05 болғанда.

28-вариант. α =0,95 болғанда.

29-вариант. α =0,975 болғанда.

30-вариант. α =0,99 болғанда.

ҚОСЫМШАЛАР

1-қосымша

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

функциясының мәндері (қалыпты үлестірім тығыздығы)

33-кесте

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,0	0,398942	2,0	0,053991	4,0	0,000134
0,1	0,396952	2,1	0,043984	4,1	0,000089
0,2	0,391042	2,2	0,035475	4,2	0,000059
0,3	0,381389	2,3	0,028327	4,3	0,000038
0,4	0,368270	2,4	0,022394	4,4	0,000025
0,5	0,352065	2,5	0,017528	4,5	0,000016
0,6	0,333225	2,6	0,013583	4,6	0,000010
0,7	0,312254	2,7	0,010421	4,7	0,000006
0,8	0,289691	2,8	0,007915	4,8	0,000003
0,9	0,266085	2,9	0,005952	4,9	0,000002
1,0	0,241971	3,0	0,004332		
1,1	0,217852	3,1	0,003267		
1,2	0,194186	3,2	0,002384		
1,3	0,171369	3,3	0,001723		
1,4	0,149727	3,4	0,001232		
1,5	0,129518	3,5	0,000873		
1,6	0,110921	3,6	0,000612		
1,7	0,094049	3,7	0,000425		
1,8	0,078950	3,8	0,000292		
1,9	0,065616	3,9	0,000199		

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

функциясының мәндері (Лаплас функциясы)

34-кесте

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,000000	1,5	0,433193	3,0	0,498650
0,1	0,039828	1,6	0,445201	3,1	0,499032
0,2	0,079260	1,7	0,455435	3,2	0,499313
0,3	0,117911	1,8	0,464070	3,3	0,499717
0,4	0,155422	1,9	0,471283	3,4	0,499663
0,5	0,191462	2,0	0,477250	3,5	0,499767
0,6	0,225747	2,1	0,482136	3,6	0,499891
0,7	0,258036	2,2	0,486097	3,7	0,499892
0,8	0,288145	2,3	0,489276	3,8	0,499928
0,9	0,315940	2,4	0,491802	3,9	0,499952
1,0	0,341345	2,5	0,493790	4,0	0,499968
1,1	0,364334	2,6	0,495339	4,1	0,499979
1,2	0,384930	2,7	0.496533	4,2	0,499987
1,3	0,403200	2,8	0,497445	4,3	0,499991
1,4	0,419243	2,9	0,498134	4,4	0,499995
				4,5	0,499997

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по ТВ и МС, М.: Высшая школа, 1979.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Высшая школа, 1977.
3. Теория вероятностей. Справочная математическая библиотека, М.: Наука, 1967.
4. Емельянов Г. В. Задачник по ТВ и МС, Л.: Издательство Ленинградского университета, 1967.
5. Савельев Л. Я. Комбинаторика и вероятность, Новосибирск: Наука, 1975.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., Высшая математика в примерах и задачах, ч. III, М.: Высшая школа, 1971.
7. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А., Теория вероятностей и ее инженерные приложения, М.: Наука, 1986.
8. Жаңбырбаев Б. С., Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері, Алматы: Мектеп, 1988.
9. Бектаев Қ., Ықтималдықтар теориясының курсы, Алматы: Мектеп, 1995.
10. Саханов Е. С., Жаңбырбаев Б. С., Жоғары математика, Алматы: Қайнар, 1993.

Мазмұны

Кіріспе 3

1-сабақ. Комбинаторика мен жиындар теориясының элементтері.... 4

2-сабақ. Кездейсоқ оқиғалар. Жиілік және ықтималдық..... 9

3-сабақ. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары..... 14

4-сабақ. Толық ықтималдық формуласы. Байес формуласы..... 20

5-6-сабақтар. Қайталанатын тәжірибелер. Бернулли формуласы. Пуассон заңы. Лапластың төңіректік және интегралдық теоремалары.. 26

7-сабақ. Дискретті кездейсоқ шамалар. Олардың сандық сипаттамалары. Дискрет кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары. 31

8-9-сабақтар. Үздіксіз кездейсоқ шамалар. Үздіксіз кездейсоқ шамалардың сипаттамалары. Үлестірім заңдары..... 35

10-сабақ. Ықтималдық теориясы бойынша бақылау жұмысы..... 41

11-сабақ. Математикалық статистика. Негізгі анықтамалар және ұғымдар..... 44

12-сабақ. Үлестірім параметрлерінің статистикалық бағалары..... 47

13-сабақ. Пирсонның келісім критериі. Бас жиынтықтың қалыпты үлестірімі жайындағы жорамалды тексеру..... 49

14-15-сабақтар. Корреляция теориясының элементтері. Регрессияның таңдама теңдеулері. Корреляцияның таңдама коэффициенті, корреляциялық қатынас. Ең кіші квадраттар әдісі. Сызықтық регрессияның теңдеуін құру..... 56

16-сабақ. Шолу сабағы..... 60

Типтік есептеулер..... 62

Қосымшалар..... 74

Әдебиеттер тізімі..... 76

Оқулық басылым

Жаңбырбаева Үміт Бегалиевна

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА КУРСЫ БОЙЫНША ЕСЕПТІК – ПРАКТИКУМ

Оқу құралы

РББ меңгерушісі З.А. Ғұбайдулина

Редакторы Т.О. Бекмағамбетова

Техникалық редакторы Ж.К. Еланова

Басылымға қол қойылды 29.12.2003ж.

Таралымы 100 дана. Пішімі 60x84 1x16 №1. Баспаханалық қағаз.
Көлемі 5 оқу – баспа табақ. Бағасы келісімді.

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университетінің басылымы
ҚазҰТУ – дың Баспа орталығы, Алматы, Ладыгина көшесі, 32