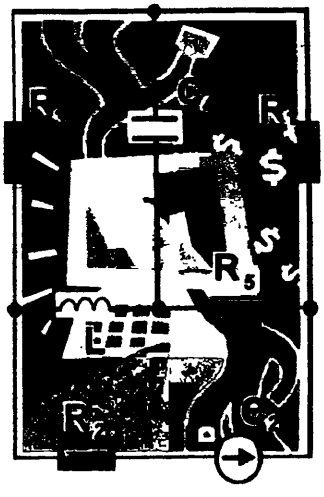
Т.Д.Иманбекова

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ



Посвящается 70-летию
КазНТУ им. К.И. Сатпаева



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический
университет имени К.И.Сатпаева

Т.Д.Иманбекова

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

Рекомендовано Республиканским учебно-методическим
объединением в качестве учебного пособия

Алматы 2003

УДК 621.372.05
ББК 31.211я73
И 50

И 50 **Иманбекова Т.Д.**

Теория электрических цепей. Упражнения и задачи: Учебное пособие. - Алматы: КазНТУ, 2003. – 102 с.
ISBN 9965-673-01-2

Учебное пособие представляет собой краткое изложение курса «Теория электрических цепей» в упражнениях и задачах и направлено на развитие самостоятельных навыков использования теоретических положений для решения практических задач. Большое внимание уделяется методам анализа электрических цепей в установившемся и переходном режимах.

Учебное пособие предназначено для студентов электротехнических специальностей как дневной, так и заочной форм обучения.

Ил. 136. Библиогр. – 11 назв.

ББК 31.211я73

Рецензенты. *С.Е.Соколов*, зав. каф. «Электроснабжение электрофикаций» КаЗАТиК, д.т.н., проф.;
Т.М.Жошпараева, доц. кафедры «Электроники и вычислительной аппаратуры».

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2003 г.

ISBN 9965-673-01-2

© КазНТУ, 2003

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Теория электрических цепей» является основной теоретической дисциплиной в системе подготовки инженеров-электриков.

Основная задача курса – дать необходимую теоретическую подготовку по вопросам исследования и расчета электрических цепей.

Усвоение курса невозможно без решения многочисленных задач, без выполнения лабораторных, практических работ, без самостоятельной проработки материала, тем более что в настоящее время в системе подготовки современных специалистов большое внимание уделяется самостоятельной работе студента. Поэтому решение задач и примеров имеет первостепенное значение в процессе усвоения курса и способствует более глубокому пониманию материала.

Учебное пособие представляет собой краткое изложение курса «Теория электрических цепей» в упражнениях и задачах, и направлено на развитие самостоятельных навыков использования теоретических положений для решения практических задач. С учетом этого, основной задачей данного пособия является оказание помощи студентам в их практической и самостоятельной работе по освоению курса. Приведена последовательность усвоения материала: от анализа простейших линейных электрических цепей до сложных разветвленных. Кратко изложены основные положения теории и методы анализа электрических цепей в установившемся и переходном режимах, приводится решение большого числа типовых задач. К задачам даны подробные решения и пояснения. Предложены задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов электротехнических специальностей.

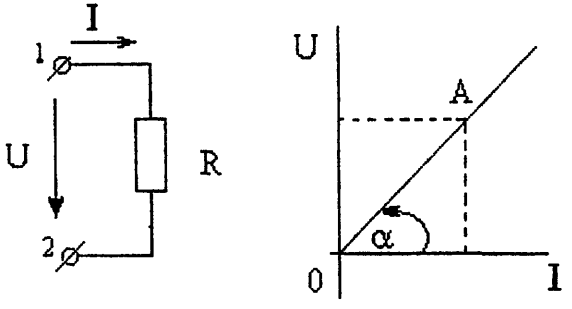
1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. Основные элементы электрических цепей постоянного тока

К основным пассивным элементам линейной электрической цепи относятся резистивный, индуктивный, емкостный элементы.

В данной главе рассматривается резистивный элемент электрической цепи, индуктивный и емкостный элементы рассматриваются в 3 разделе.

Резистивным элементом или сопротивлением называется идеализированный элемент электрической цепи, в котором происходит только необратимое преобразование электромагнитной энергии в тепло или в другой вид. Символическое изображение резистивного элемента показано на рис.1.1.а.



а б

Рис. 1.1

Основное уравнение, связывающее ток I и напряжение U определяется законом Ома:

$$U = RI, \qquad I = UG, \qquad G = 1/R, \tag{1}$$

где R - сопротивление, G – проводимость.

Сопротивление R измеряется в системе СИ в омах (Ом), проводимость G в сименсах (См).

Линейные алгебраические соотношения (1) можно представить графически в виде прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом, равным значению сопротивления $R \approx tg\alpha$ рис. 1.1.б.

Мощность, выделяемая в виде тепла в резисторе является квадратичной функцией тока или напряжения, т.е. не может принимать отрицательных значений; это означает, что энергия всегда поступает от источника в элемент:

$$P = I^2R = GU^2.$$

К активным элементам электрической цепи относятся источники электрической энергии. Источники могут быть идеальными и реальными.

Идеальный источник электродвижущей силы – активный двухполюсный элемент электрической цепи, напряжение на выводах которого не зависит от величины его тока (рис. 1.2.а):

$$U = E. \qquad (2)$$

Вольт-амперная характеристика идеального источника представлена на рис. 1.2.б.

Мощность, развиваемая идеальным источником э.д.с. $P = EI$ является мощностью, отдаваемой источником во внешнюю цепь.

Реальный источник электродвижущей силы (рис.1.2.в) имеет внутреннее сопротивление. Напряжение на его выводах определяется как:

$$U = E - Ir, \qquad (3)$$

где r - внутреннее сопротивление реального источника э.д.с.

Вольт-амперная характеристика реального источника представлена на рис.1.2.г. Мощность, развиваемая источником, равна мощности отдаваемой источником во внешнюю цепь и мощности потерь внутри источника:

$$P = EI - I^2r = UI. \qquad (4)$$

Уравнения баланса мощностей источника э.д.с.: $EI = UI + I^2r$, где UI – мощность, отдаваемая во внешнюю цепь.

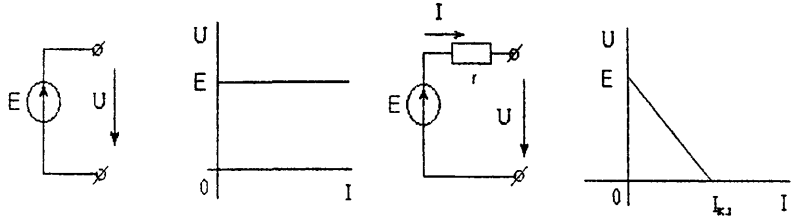


Рис. 1.2.

Идеальный источник тока – активный двухполюсный элемент электрической цепи, ток которого не зависит от его напряжения (рис.1.3.а). Вольт-амперная характеристика идеального источника изображена на рис.1.3.б. Такой источник также в состоянии отдавать неограниченную мощность. Мощность, развиваемая идеальным источником тока $P = JU$.

Реальный источник тока может быть изображен в виде параллельной схемы, содержащей источник тока J и проводимости g (рис.1.3.в). Мощность, развиваемая источником, равна мощности отдаваемой источником во внешнюю цепь и мощности потерь внутри источника. Баланс мощностей для реального источника:

$$UJ = UI + U^2g, \qquad (5)$$

где UI – мощность, отдаваемая источником во внешнюю цепь,
U^2g – мощность потерь внутри источника.

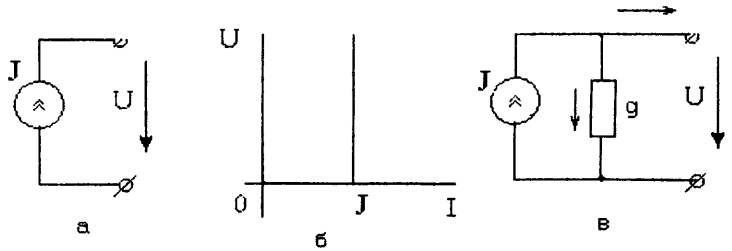


Рис.1 3.

1.2. Закон Ома

1. Для пассивного участка цепи (рис.1.1.а):

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \tag{6}$$

где φ_1, φ_2 - потенциалы точек 1 и 2;

U - разность потенциалов или напряжение между точками 1 и 2.

При написании закона Ома прежде всего необходимо выбрать положительное направление тока.

2. Для участка цепи содержащей э.д.с. (для активного участка цепи) рис.1.4.а:

$$I = \frac{E + \varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{E + U}{R}. \tag{7}$$

Аналогично, можно записать формулу для тока неразветвленного участка сложной электрической цепи с произвольным числом э.д.с., сопротивлений и заданной разностью потенциалов на концах этого участка (рис.1.4.б):

$$I = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k + U}{\sum_{k=1}^{n} R_k}, \tag{8}$$

где $\sum_{k=1}^{n} E_k$ - алгебраическая сумма э.д.с., действующих на участке 1-2;

со знаком плюс берутся э.д.с., направления которых совпадают с выбранным положительным направлением тока, а со знаком минус э.д.с. с противоположным направлением;

$\sum_{k=1}^{n} R_k$ - арифметическая сумма сопротивлений на участке 1- 2.

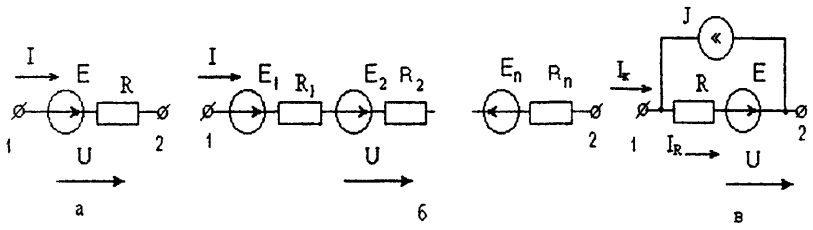


Рис.1 4.

3. Для обобщенной ветви (рис.1.4.в):

$$I_k = \frac{U + E}{R} - J, \tag{9}$$

где J – ток источника тока.

Закон Ома также применяется для одноконтурной замкнутой цепи (не имеющей разветвлений):

$$I = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k}, \tag{10}$$

где $\sum_{k=1}^{n} E_k$ - алгебраическая сумма э.д.с. в одноконтурной цепи;

$\sum_{k=1}^{n} R_k$ - арифметическая сумма сопротивлений в одноконтурной цепи.

Со знаком плюс берутся те э.д.с., направления которых совпадают с выбранным положительным направлением тока, а со знаком минус э.д.с. с противоположным направлением.

1.3. Законы Кирхгофа

Для написания законов Кирхгофа необходимо ввести следующие понятия: узел, ветвь, контур.

Узел – место соединения, в котором сходятся три и более ветвей.

Ветвь – участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же ток.

Контур – любой замкнутый путь, образованный ветвями и узлами.

Первый закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле равна нулю:*

$$\sum_k I_k = 0. \qquad (11)$$

Для написания законов Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов каждой ветви. Токам, вытекающим от узла приписывают знак плюс, а токам втекающим в узел – знак минус (условно). Можно наоборот. Количество независимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа равно числу узлов схемы без единицы: $n_y - 1$, где n_y – количество узлов схемы.

Второй закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма э.д.с. замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений в нем:*

$$\sum_k E_k = \sum_k I_k R_k. \qquad (12)$$

Направление обхода контура выбирают произвольно. При этом соблюдается следующее правило знаков: э.д.с., направления которых совпадают с выбранным направлением обхода входят в уравнение со знаком плюс, э.д.с., направления которых не совпадают с направлением обхода входят в уравнение со знаком минус. При записи правой части равенства – со знаком плюс берутся падения напряжения в тех ветвях, в которых выбранное положительное направление тока совпадает с направлением обхода, а со знаком минус падения напряжения в тех ветвях, в которых положительное направление тока не совпадает с направлением обхода. Количество независимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа $n_в - n_y + 1$, где $n_в$ - число ветвей схемы.

Законы Кирхгофа выполняются для любого момента времени.

1.4. Баланс мощностей

Для любой электрической цепи выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{n} E_k I_k + \sum_{k=1}^{n} U_k J_k = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 R_k, \qquad (13)$$

где: $\sum_{k=1}^{n} E_k I_k$ - суммарная мощность генерируемая источниками э.д.с.;

$\sum_{k=1}^{n} U_k J_k$ - суммарная мощность генерируемая источниками тока;

$\sum_{k=1}^{n} I_k^2 R_k$ - суммарная мощность потребляемая в цепи.

Равенство (13) представляет собой математическую форму записи баланса мощностей; суммарная мощность, генерируемая источниками электрической энергии, равна суммарной мощности, потребляемой в цепи. Правило знаков показано на рис. 1.5.:

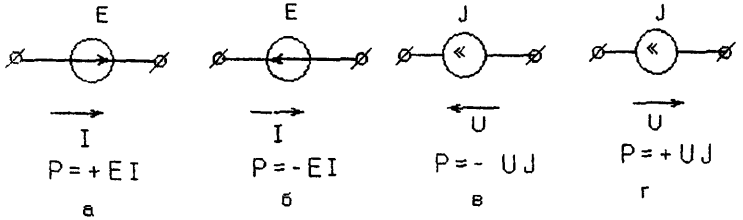


Рис.1 5.

1.5. Эквивалентные преобразования электрических схем

1 Последовательное соединение.

Рассмотрим электрическую цепь из последовательно соединенных элементов с сопротивлениями $R_1, R_2, ..., R_n$. Через элементы протекает один и тот же ток; напряжение на входе равно сумме напряжений на элементах (рис.1.6.).

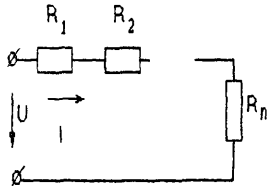


Рис.1.6

Эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из n последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений:

$$R_{экв} = \sum_{k=1}^{n} R_k .$$

Напряжение на элементах:

$$U_1 = IR_1, U_2 = IR_2, ... U_n = IR.$$

Напряжение на сопротивлениях распределяется прямо пропорционально этим сопротивлениям: $U_1 : U_2 .... : U_n = R_1 . R_2 .... : R_n$. Рассмотрим частный случай. Цепь состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений (рис.1.7.).

Ток в цепи: $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$.

Напряжение на элементах:

$$U_1 = IR_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_1, U_2 = IR_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2, \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

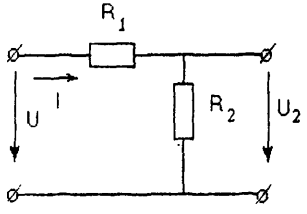


Рис.1.7.

Если выходное напряжение снимать с сопротивления R_2, то получим схему делителя напряжения: $U_2 = \dfrac{U}{R_1 + R_2} R_2$. Выходное напряжение всегда меньше входного.

При этом отношение U_2 к U является коэффициентом передачи напряжения:

$$H_u = \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Этот коэффициент служит мерой передачи сигнала от входа к выходу. Из выражения видно, что доля переданного к выходу напряжения равна отношению сопротивления выходной ветви к общему сопротивлению цепи. Величину обратную H_u для данной цепи называют коэффициентом деления напряжения.

2. Параллельное соединение.

Рассмотрим цепь из параллельно соединенных элементов с сопротивлениями $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (рис.1.8.). На всех элементах имеем одно и то же напряжение, ток на входе цепи равен сумме токов элементов:

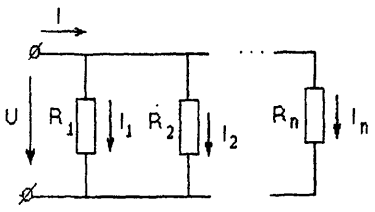


Рис.1.8.

$$U = U_1 = U_2 = ... = U_n,$$

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n} =$$

$$= U(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}) = U\frac{1}{R_{экв}} = UG_{экв},$$

где $G_{экв}$ - эквивалентная проводимость цепи.

При параллельном соединении: $\frac{1}{R_{экв}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_k}$, $G_{экв} = \sum_{k=1}^{n} G_k$.

При параллельном соединении n сопротивлений токи в них распределяются обратно пропорционально их проводимостям:

$$I_1 : I_2 : ... : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : ... : \frac{1}{R_n} = G_1 : G_2 : ... : G_n.$$

Ток в ветви – L, вычисляется через ток I в неразветвленной части цепи:

$$I_L = I\frac{G_L}{\sum_{k=1}^{n} G_k}.$$

Рассмотрим частный случай : параллельное соединение двух сопротивлений R_1 и R_2 (рис.1.19.). Ток в неразветвленной части: $I = \frac{U}{R_{экв}}$, где $R_{экв} = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ - эквивалентное сопротивление цепи. Токи в параллельных ветвях:

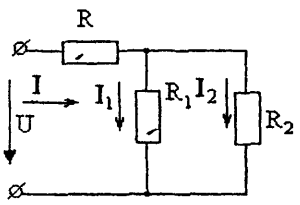


Рис.1.9.

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (14)$$

Если на входе действует источник тока с током J, то напряжение: $U = \frac{J}{G_{экв}} = JR_{экв}$. Отношение тока выходной ветви к току входа является коэффициентом передачи тока: $H_I = \frac{I_2}{J}$. Величина обратная H_I, т.е. отношение входного тока к выходному, называется коэффициентом деления тока.

3 Смешанное соединение.

Это сочетание последовательного и параллельного соединения сопротивлений (рис. 1.10).

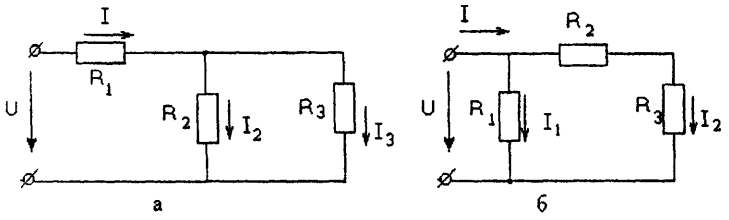


Рис.1.10.

Эквивалентное сопротивление для последовательно-параллельного соединения элементов (рис.1.10.а):

$$R_{экв} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Эквивалентная проводимость для параллельно-последовательного соединения элементов (рис.1.10.б):

$$G_{экв} = G_1 + G_{23} = G_1 + \frac{1}{R_2 + R_3}.$$

4. Преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду сопротивлений.

Рассмотрим преобразование в виде треугольника ветвей с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 в эквивалентную трехлучевую звезду (рис.1.11.).

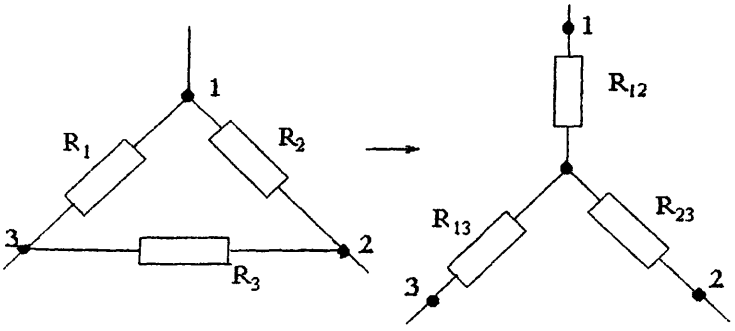


Рис.1.11.

Формулы преобразования имеют следующий вид:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

5. Преобразования ветвей трехлучевой звезды в эквивалентный треугольник. Формулы преобразования имеют следующий вид:

$$R_1 = R_{12} + R_{13} + \frac{R_{12} R_{13}}{R_{23}}, \quad R_2 = R_{12} + R_{23} + \frac{R_{12} R_{23}}{R_{13}}, \quad R_3 = R_{13} + R_{23} + \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12}}$$

6. Преобразование источников.

Источник напряжения может быть преобразован в эквивалентный источник тока (рис.1.12.). Формулы преобразования источника напряжения в эквивалентную схему источника тока, и наоборот, имеют следующий вид.

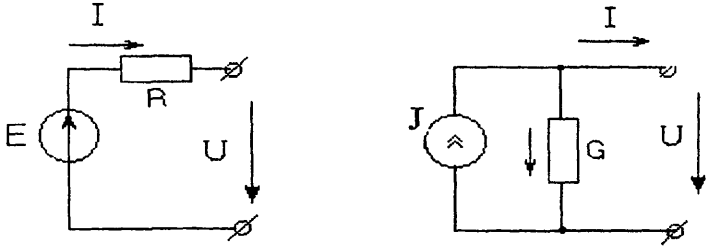


Рис.1.12.

$$J = \frac{E}{R}, \quad E = \frac{J}{G}; \quad R = \frac{1}{G}.$$

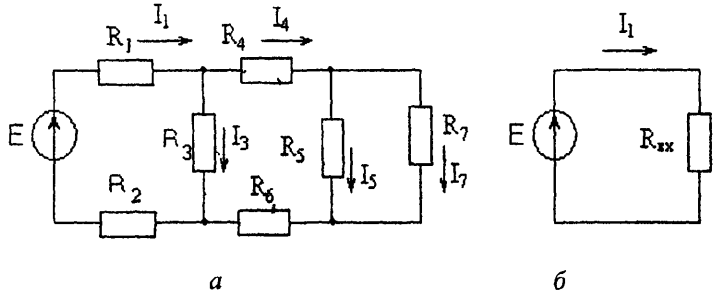
1.6. Анализ простейших электрических цепей постоянного тока

Анализ цепей с одним источником энергии проводится двумя методами. методом свертывания схемы и методом пропорциональных величин (метод подобия).

При методе свертывания схемы определяется входное или эквивалентное сопротивление путем преобразования сопротивлений: параллельного соединения в последовательное и обратно, треугольника в звезду и обратно и т.д., что упрощает отдельные участки схемы и

приводит к одному эквивалентному (входному) сопротивлению относительно зажимов источников питания. В результате схема упрощается. Расчет такой схемы можно произвести, используя закон Ома

П р и м е р . К источнику э.д.с. E = 48 В (рис.1.13.) подключены резисторы с сопротивлениями: R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 12 Ом, R_4 = 1 Ом, R_5 = 3 Ом, R_6 = 1 Ом, R_7 = 6 Ом. Определить все токи и составить баланс мощности.



а *б*

Рис. 1.13.

Р е ш е н и е. Задачу решаем методом свертывания схемы. Находим входное сопротивление схемы относительно зажимов источника э.д.с.

$$R^{I} = R_4 + R_6 + \frac{R_5 R_7}{R_5 + R_7} = 1 + 1 + \frac{3 \cdot 6}{9} = 4 \text{ Ом},$$

$$R_{вх} = R_1 + R_2 + \frac{R^{I} \cdot R_3}{R^{I} + R_3} = 1 + 2 + \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 6 \text{ Ом}.$$

Преобразованная схема представлена на рис. 1.13,б, ток в которой определяется с помощью закона Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_{вх}} = \frac{48}{6} = 8 \text{ А}.$$

По известному току I_1, используя формулу (14), можно найти токи I_3, I_4

$$I_3 = I_1 \frac{R^{I}}{R_3 + R^{I}} = 8 \frac{4}{12 + 4} = 2 \text{ А},$$

$$I_4 = I_1 \frac{R_3}{R_3 + R^{I}} = 8 \frac{12}{12 + 4} = 6 \text{ А}.$$

Аналогично, можно найти токи I_5 , I_7:

$$I_5 = I_4 \frac{R_7}{R_5 + R_7} = 6\frac{6}{3+6} = 4\ A,$$

$$I_7 = I_4 \frac{R_5}{R_5 + R_7} = 6\frac{3}{3+6} = 2\ A.$$

Все токи найдены. Проверим баланс мощностей. Уравнение баланса мощностей отражает равенство мощностей, отдаваемой источником и расходуемой приемниками, т е.:

$E\ I_1 = I_1^2 \cdot R_1 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2\ R_5 + I_7^2 \cdot R_7 + I_4^2 \cdot R_6 + I_1^2 \cdot R_2,$

$P_I = P_K$

$P_I = 48 \cdot 8 = 384\ Bm.$

$P_K = 64 + 48 + 36 + 48 + 24 + 36 + 128 = 384\ Bm.$

Баланс мощностей выполняется, задача решена верно.

Рассмотрим второй метод решения – метод пропорциональных величин Метод основан на принципе линейности цепи и применим только для расчета линейных цепей, и позволяет производить расчеты, вводя любой удобный масштаб для величин токов или напряжений.

Если под действием э.д.с. E ток в к-той ветви цепи $I_к$, то под действием э.д.с. $n \cdot E$ ток в ветви к в n раз больше и равен $n \cdot I_k$

Сущность метода: задаемся значением тока I_k в самой удаленной от источника питания ветви. По заданному току находим э.д.с. E. Эта э.д.с. отличается от действительной в n раз $\frac{E}{E_k} = n.$ Тогда действительные токи будут отличаться от расчетных тоже в n раз.

$I_k = n \cdot I_k'$

Решим задачу методом пропорциональных величин.

Примем ток $I_7' = 1A$, тогда $U_7 = I_7 \cdot R_7 = 1 \cdot 6 = 6B,$

$$I_5' = \frac{U_7}{R_5} = \frac{6}{3} = 2\ A,\ I_4' = I_5' + I_7' = 1 + 2 = 3\ A,$$

$$U_3' = U_4' + U_5' + U_6' = 6 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 12\ B,$$

$$I_3' = \frac{U_3'}{R_3} = \frac{12}{12} = 1\ A,\ I_1' = I_3' + I_4' = 1 + 3 = 4\ A,$$

$$E' = U_3' + I_1' \cdot R_1 + I_1' \cdot R_2 = 12 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 24\ B.$$

Коэффициент пропорциональности $n = \frac{E}{E} = \frac{48}{24} = 2.$

Действительные значения тока: $I_1 = 8$ А, $I_3 = 2$ А, $I_4 = 6$ А, $I_5 = 4$ А, $I_7 = 2$ А.

Метод пропорциональных величин особенно эффективен при расчете разветвленных линейных электрических цепей с одним источником энергии.

1.7. Упражнения и задачи для СРС

П р и м е р № 1. Определить токи ветвей в цепи питаемой источником тока (рис.1.14.), если J = 120 мА. Сопротивления отдельных элементов цепи R_1 =10 кОм, R_2 = 12 кОм, R_3 = 6 кОм, R_4 = 0,5 кОм, R_5 = 1,5 кОм.

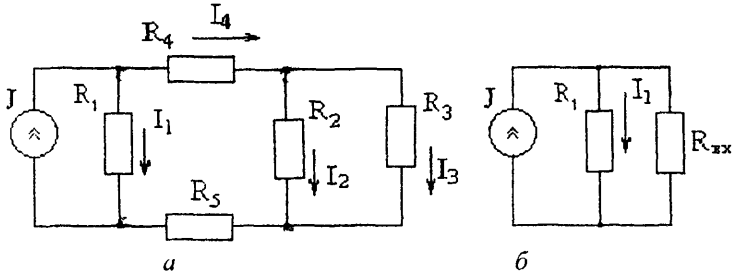


Рис 1.14.

Р е ш е н и е. Данную цепь преобразуем в эквивалентную (рис.1.14.б.), где $R_{экв}$- эквивалентное сопротивление:

$$R_{экв} = R_4 + R_5 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 2 + \frac{12 \cdot 6}{18} = 6 \ кОм$$

Токи в параллельных ветвях :

$$I_1 = J \frac{R_{экв}}{R_1 + R_{экв}} = 120 \frac{6}{10 + 6} = 120 \frac{6}{16} = 45 \ мА,$$

$$I_4 = J \frac{R_1}{R_1 + R_{экв}} = 120 \frac{10}{18} = 75 \ мА.$$

Зная I_4, можно определить токи I_2, I_3:

$$I_2 = I_4 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 75\frac{6}{18} = 25 \ мА,$$

$$I_3 = I_4 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 75\frac{12}{18} = 50 \ мА.$$

Правильность расчета токов можно проверить по балансу мощностей.

Составим баланс мощностей. Мощность развиваемая источником тока:

$$P_J = J \cdot U = J \cdot I_1 \cdot R_1 = 120 \cdot 10^{-3} \cdot 45 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3 = 54 \ Вт.$$

Мощность рассеиваемая на сопротивлениях:

$$P_R = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \ R_5 = \left(45\ 10^{-3}\right)^2 \cdot 10 \cdot 10^3 + \left(25 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 12 \cdot 10^3 +$$
$$+ \left(50 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 6 \cdot 10^3 + \left(75 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3 + \left(75 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 = 54 \ Вт$$

Баланс мощностей соблюдается ($P_J = P_R$), следовательно, токи рассчитаны верно.

П р и м е р № 2. Для цепи с параметрами $R_1 = R_2 = R_3 = 2$ Ом, $R_4 = R_5 = R_6 = 6$ Ом, I = 30 А (рис.1.15.). Определить Е.

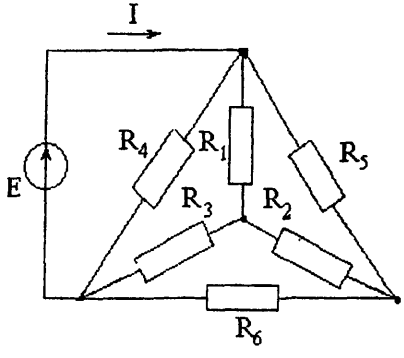


Рис. 1.15.

Р е ш е н и е. Ветви трехлучевой звезды R_1-R_2-R_3 преобразуем в эквивалентный треугольник с сопротивлениями:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = 4 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 6 \ Ом,$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = 4 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 6 \ Ом,$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} = 4 + \frac{2 \cdot 2}{2} = 6 \ Ом.$$

После преобразования схема примет следующий вид.

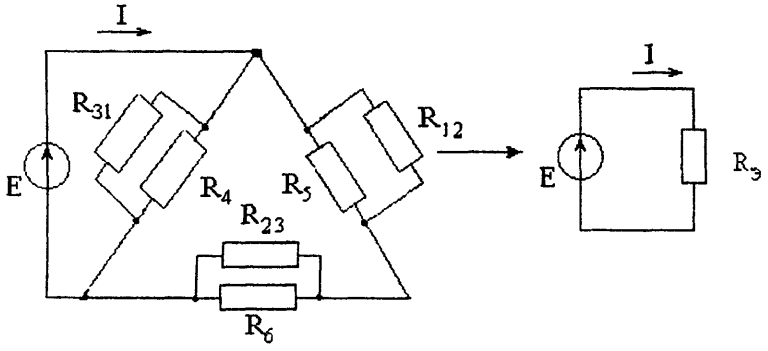


Рис. 1.16.

$$R_5' = \frac{R_5 \cdot R_{12}}{R_5 + R_{12}} = \frac{6 \cdot 6}{6+6} = 3 \ Ом, \ R_6' = \frac{R_6 \cdot R_{23}}{R_6 + R_{23}} = \frac{6 \cdot 6}{6+6} = 3 \ Ом,$$

$$R_4' = \frac{R_4 \cdot R_{31}}{R_4 + R_{31}} = \frac{6 \cdot 6}{6+6} = 3 \ Ом, \ R_э' = R_5' + R_6' = 3+3 = 6 \ Ом,$$

$$R_э = \frac{R_э' \cdot R_4'}{R_э' + R_4'} = \frac{6 \cdot 3}{6+3} = 2 \ Ом, \qquad E = I \cdot R_э = 30 \cdot 2 = 60 \ В.$$

П р и м е р № 3. Найти напряжение на зажимах заданного источника тока для цепи (рис. 1.17), если: $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ Ом, $R_4 = R_5 = R_6 = 3$ Ом, $J = 10$ А.

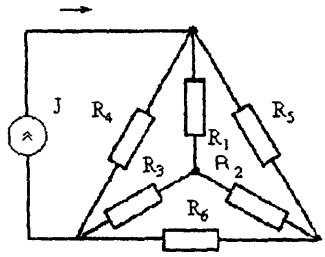


Рис.1.17.

Р е ш е н и е. Ветви трехлучевой звезды R_1 - R_2 - R_3 преобразуем в эквивалентный треугольник с сопротивлениями:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_3} = 1 + 1 + \frac{1 \cdot 1}{1} = 3 \ Ом,$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 + R_3}{R_1} = 1 + 1 + \frac{1 \cdot 1}{1} = 3 \ Ом,$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 + R_3}{R_2} = 1 + 1 + 1 + \frac{1 \cdot 1}{1} = 3 \ Ом.$$

После преобразования схема примет следующий вид.

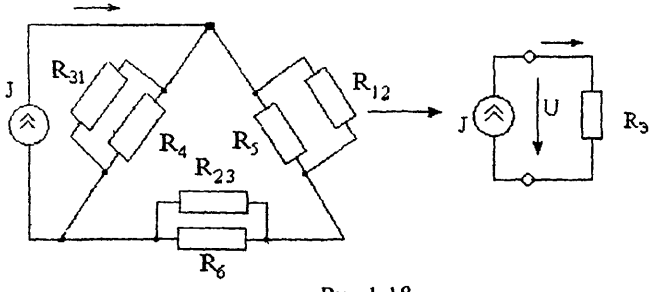


Рис.1.18

Используя формулы эквивалентных преобразований (15), получим $R_э = 1 \ Ом$. Напряжение на зажимах источника тока: $U = J \cdot R_э = 10 \cdot 1 = 10 \ В$.

П р и м е р № 4.Определить показание приборов (рис.1.19.), если $U = 10\ В, R_1 = 7\ Ом,\ \ R_2 = 8\ Ом, R_3 = R_5 = 2\ Ом, R_4 = 4\ Ом.$

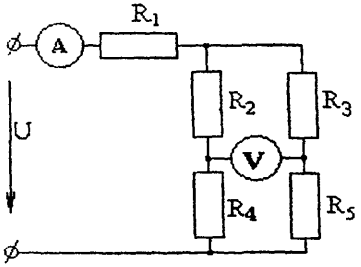


Рис.1.19

Р е ш е н и е. Используя эквивалентные преобразования преобразуем схему в следующий вид.

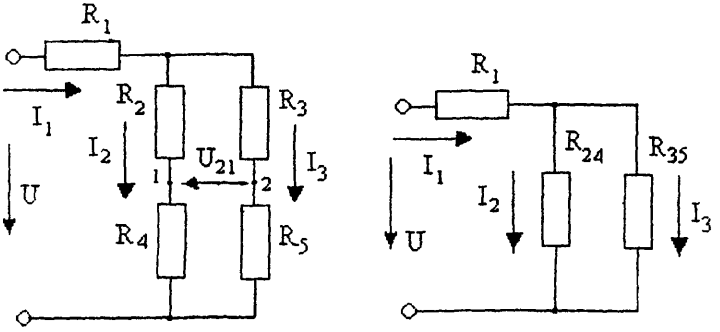


Рис.1.20.

где: $R_{24} = R_2 + R_4 = 8 + 4 = 12\ Ом,$

$R_{35} = R_3 + R_5 = 2 + 2 = 4\ Ом,$

$$R_э = R_1 + \frac{R_{24} \cdot R_{35}}{R_{24} + R_{35}} = 7 + \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = 10\ Ом.$$

Входной ток: $I_1 = \frac{U}{R_э} = \frac{10}{10} = 1\ А.$ Токи в параллельных ветвях:

$$I_2 = I_1 \frac{R_{35}}{R_{35} + R_{24}} = 1 \cdot \frac{4}{4+12} = 0{,}25\ A,\ I_3 = I_1 \frac{R_{24}}{R_{24} + R_{35}} = 1 \cdot \frac{12}{12+4} = 0{,}75\ A.$$

Чтобы определить показание вольтметра, необходимо определить напряжение на R_2 и R_3 или напряжение на R_4 и R_5:

$$U_2 = I_2 R_2 = 0{,}25 \cdot 8 = 2\ B, U_3 = I_3 \cdot R_3 = 0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5\ B.$$

Показание вольтметра определяется напряжением между точками 2 и 1 U_{21}.

$$U_{21} = U_2 - U_1 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5\ B.$$

Следовательно, амперметр показывает 1 А, вольтметр показывает 0,5 В.

П р и м е р № 5. Определить ток I_5, если

$E_2 = 20\ B,\ R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\ Ом,\ R_5 = 3\ Ом.$

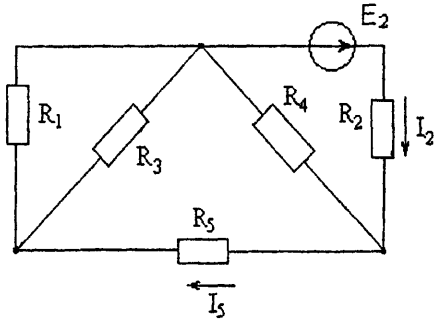


Рис.1.21.

Р е ш е н и е. Используя эквивалентные преобразования, определим $R_Э$:

$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{2 \cdot 2}{2+2} = 1\ Ом,\ R_4' = \frac{R_4 \cdot (R_5 + R_{13})}{R_4 + R_5 + R_{13}} = \frac{2 \cdot (3+1)}{2+3+1} = \frac{8}{6}\ Ом.$$

$$R_Э = R_2 + R_4' = 2 + \frac{8}{6} = \frac{20}{6} = 3{,}33\ Ом.$$

Зная эквивалентное сопротивление, можно определить ток I_2:

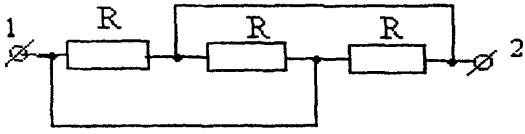
$$I_2 = \frac{E_2}{R_Э} = \frac{20 \cdot 6}{20} = 6\ A.$$

Ток I_5 можно определить, используя формулу (14):

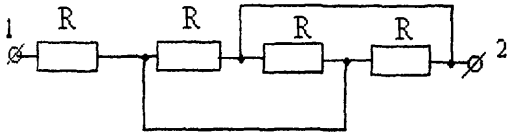
$$I_5 = I_2 \frac{R_4}{R_5 + R_{13} + R_4} = 6\frac{2}{4+2} = 2\ A.$$

Задачи на СРС

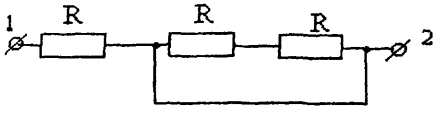
1.Определить эквивалентное сопротивление R_{12} цепи, представленной на схеме.



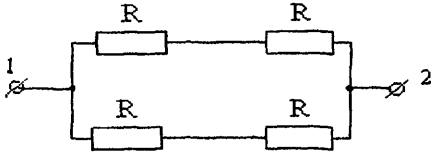
2. Определить эквивалентное сопротивление R_{12} цепи, представленной на схеме.



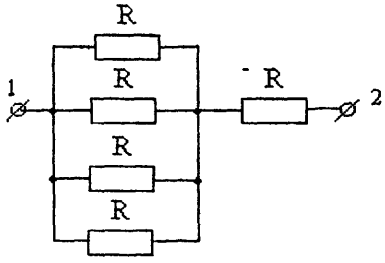
3. Определить эквивалентное сопротивление R_{12} цепи, представленной на схеме.



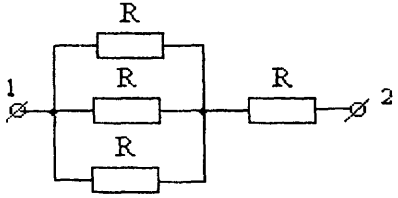
4. Определить эквивалентное сопротивление R_{12} цепи, представленной на схеме.



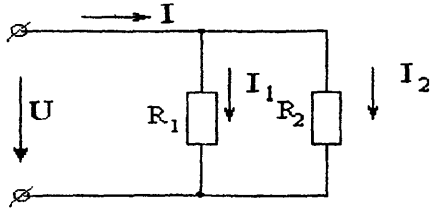
5. Определить эквивалентное сопротивление R_{12} цепи, представленной на схеме.



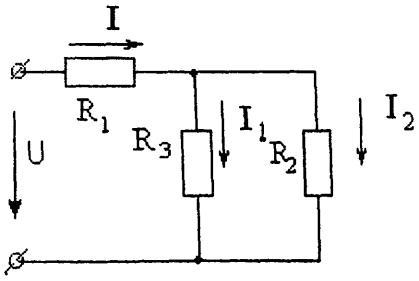
6. Определить эквивалентное сопротивление R_{12} цепи, представленной на схеме.



7. Определить токи во всех ветвях и проверить баланс мощностей, если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $U = 20$ В.

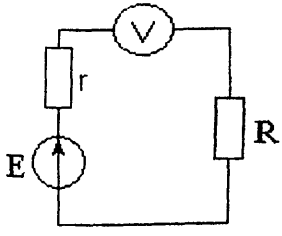


8. Определить токи во всех ветвях электрической цепи и проверить баланс мощностей, если U = 20 В, R_1 = 5 Ом, $R_2 = R_3$ = 10 Ом.

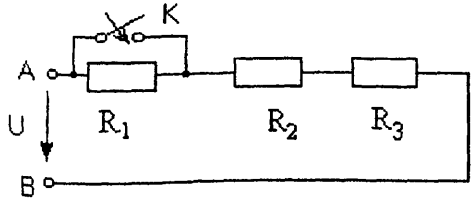


9. Для цепи изображенной на схеме : E = 204 В; r = 1 Ом; R = 50 Ом. Параллельно сопротивлению R подключается идеальный амперметр. Что он покажет?

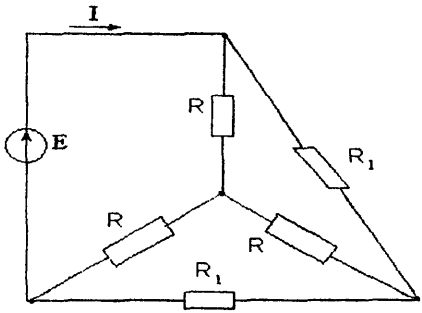
10. Что покажет вольтметр с бесконечно большим внутренним сопротивлением, включенный в цепь, как показано на рисунке?



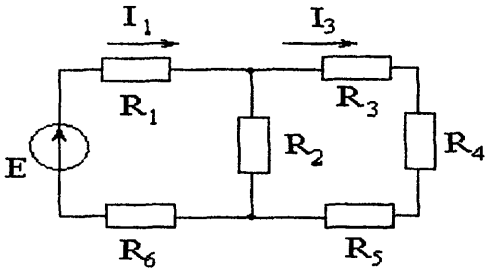
11. Как изменится напряжение на участках R_2 и R_3 при замыкании ключа К?



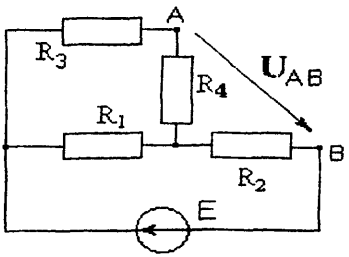
12. Определить ток I в цепи, если E = 60 В, R = 1 Ом, R_1 = 3 Ом.



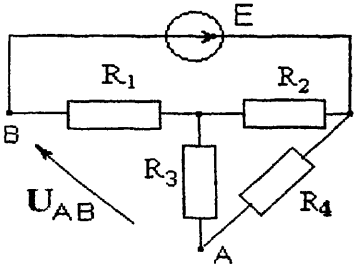
13. В цепи изображенной на схеме, найти токи I_1 и I_3, если E = 108 В, R_1 =4 Ом, R_2 = 12 Ом, R_3 = 12 Ом, R_4 = 6 Ом R_5 = 6,2 Ом, R_6 = 6 Ом.



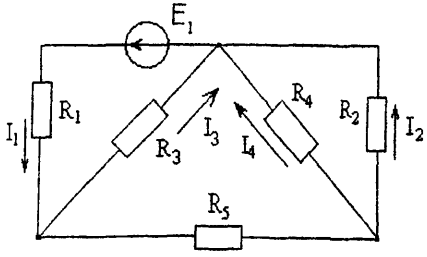
14. Определить напряжение U_{AB}, если E = 9 В, R_1 = 6 Ом, R_2 = 4 Ом, R_3 = 1 Ом, R_4 = 2 Ом.



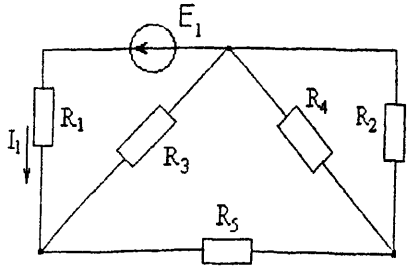
15. Определить напряжение U_{AB}, если E = 27 В, R_1 = 12 Ом, R_2 = 18 Ом, R_3 = 6 Ом, R_4 = 3 Ом.



16.Определить ток I_1 в ветви электрической цепи, если $E_1 = 80\ B$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\ Ом$, $R_5 = 3\ Ом$.

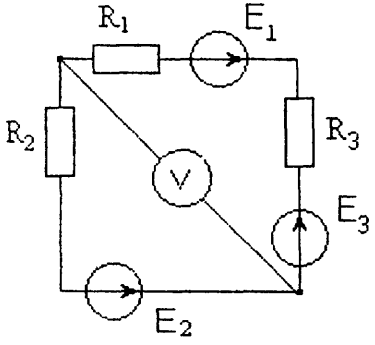


17. Определить ток I_2 в схеме, если $E_2 = 20B, R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\ Ом$ $R_5 = 3Ом$.



18. Условия задачи № 17. Определить ток I_4.

19. Определить показание вольтметра в схеме электрической цепи, если $E_1 = 10\,B, E_2 = 10\,B, E_3 = 30\,B, R_1 = R_2 = R_3 = 10\,Ом$.



2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основной задачей этого раздела является овладение методами расчета сложных электрических цепей с несколькими источниками. Классическим методом расчета таких цепей является непосредственное применение законов Кирхгофа. Все остальные методы расчета исходят из этих фундаментальных законов электротехники.

2.1. Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей

При расчете электрических цепей с применением законов Кирхгофа необходимо:

- выбрать положительное направления токов во всех ветвях;
- составить уравнения по законам Кирхгофа, общее число уравнений равно числу ветвей в схеме;
- полученную систему уравнений решают относительно неизвестных токов.

Рассмотрим применения законов Кирхгофа для расчета сложных электрических цепей.

П р и м е р. Определить токи в ветвях схемы, изображенной на рис. 2.1, параметры которой $E_1 = 25$ В, $E_2 = 10$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 11$Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 12$ Ом, $R_5 = 7$ Ом, $R_6 = 8$ Ом.

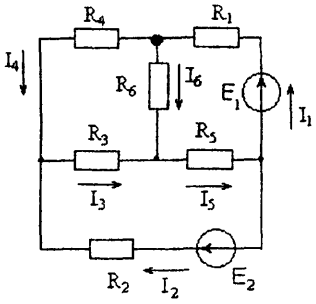


Рис. 2.1.

Р е ш е н и е: Данная схема имеет четыре узла и шесть ветвей. Система уравнений по законам Кирхгофа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 + I_6 = 0, \\ -I_2 + I_3 - I_4 = 0, \\ -I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ -I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 = 0, \\ -I_1 \cdot R_1 - I_5 \cdot R_5 - I_6 \cdot R_6 = -E_1, \\ I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_5 \cdot R_5 = E_2. \end{cases}$$

Имеем систему из шести уравнений с шестью неизвестными. Выразив токи I_1, I_2, I_5 через I_4, I_6, I_3, получим:

$$I_1 = I_4 + I_6,$$

$$I_2 = I_3 - I_4,$$

$$I_5 = I_6 + I_3.$$

$$-I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 = 0,$$

$$-(I_4 + I_6) \cdot R_1 - (I_6 + I_3) \cdot R_5 - I_6 \cdot R_6 = -E_1,$$

$$-(I_3 - I_4) \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + (I_6 + I_3) \cdot R_5 = E_2.$$

Подставив числовые значения параметров, получим:

$$\begin{cases} -5 \cdot I_3 - 12 \cdot I_4 + 8 \cdot I_6 = 0, \\ -7 \cdot I_3 - 4 \cdot I_4 - 19 \cdot I_6 = -25, \\ 23\ I_3 - 11 \cdot I_4 + 7 \cdot I_6 = 10. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -12 & +8 \\ -7 & -4 & -19 \\ 23 & -11 & +7 \end{vmatrix} = 7193,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} +0 & -12 & +8 \\ -25 & -4 & -19 \\ 10 & -11 & +7 \end{vmatrix} = 2700,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & +0 & +8 \\ -7 & -25 & -19 \\ 23 & +10 & +7 \end{vmatrix} = 3965,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -12 & +0 \\ -7 & -4 & -25 \\ 23 & -11 & +10 \end{vmatrix} = 7635$$

$$I_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2700}{7193} = 0{,}375 \quad A,$$

$$I_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3965}{7193} = 0{,}551 \ A,$$

$$I_6 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7635}{7193} = 1{,}0614 \ A.$$

Токи в остальных ветвях схемы:

$$I_1 = I_4 + I_6 = 0{,}551 + 1{,}061 = 1{,}6122 \ A,$$

$$I_2 = I_3 - I_4 = 0{,}375 - 0{,}551 = -\ 0{,}176 \ A,$$

$$I_5 = I_6 + I_3 = 1{,}0614 + 0{,}3775 = 1{,}4364 \ A.$$

Правильность расчета токов проверим по балансу мощностей.

Мощность, генерируемая источниками:

$$P_E = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 = 25 \cdot 1{,}6122 + 10 \cdot (-0{,}176) = 38{,}545 \ Вт.$$

Мощность, рассеиваемая на сопротивлениях:

$$P_R = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = (1{,}0614)^2 \cdot 4 + (-0{,}176)^2 \cdot 11 +$$

$$+ (0{,}375)^2 \cdot 5 + (0{,}551)^2 \cdot 12 + (1{,}436)^2 \cdot 7 + (1{,}0614)^2 \cdot 8 = 38{,}531 \ Вт.$$

Баланс мощностей соблюдается ($P_E = P_R$), следовательно, токи рассчитаны верно.

Число совместно решаемых уравнений равно числу ветвей схемы (числу неизвестных токов ветвей), поэтому в общем случае, расчет сложных электрических цепей с помощью законов Кирхгофа является достаточно громоздким и его применение не всегда целесообразно.

Количество совместно решаемых уравнений сокращается при использовании метода контурных токов и узловых потенциалов и задача значительно упрощается.

2.2. Метод контурных токов

В качестве переменных в методе контурных токов принимаются контурные токи. В схеме выделяют независимые контуры. Для того чтобы контур был независимым, в него должна входить хотя бы одна

ветвь, которая не входит в рассмотренные ранее контуры. В каждом контуре произвольно выбирают направление контурных токов; в каждом контуре замыкается свой контурный ток. За контурные токи удобно принять токи внешних ветвей схемы, которые входят только в данный контур.

Для каждого контура составляют уравнения по второму закону Кирхгофа, выражая токи ветвей через контурные токи. Число уравнений по методу контурных токов равно числу независимых контуров.

Решив систему уравнений, определяют контурные токи, а по известным контурным токам определяют истинные токи ветвей.

П р и м е р. Определить токи в ветвях схемы, изображенной на рис.2.2, методом контурных токов, если $E_1 = 25$ В, $E_2 = 10$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 11$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 12$ Ом, $R_5 = 7$ Ом, $R_6 = 8$ Ом.

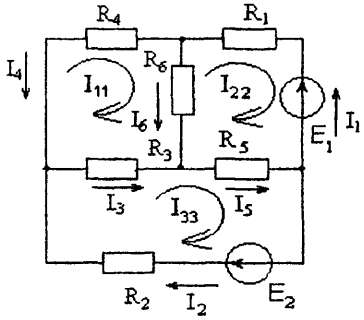


Рис.2.2.

Р е ш е н ие. Число независимых контуров три. Будем считать, что в контурах 1, 2, 3 замыкаются контурные токи соответственно I_{11}, I_{22}, I_{33}, направления которых выбирается произвольно.

Составим контурные уравнения:

$$I_{11} \cdot (R_3 + R_4 + R_6) - I_{22} \cdot R_6 - I_{33} \cdot R_3 = 0,$$

$$-I_{11} \cdot R_6 + I_{22} \cdot (R_1 + R_5 + R_6) - I_{33} R_5 = E_1,$$

$$-I_{11} \cdot R_3 - I_{22} \cdot R_5 + I_{33} \cdot (R_3 + R_2 + R_5) = E_2.$$

После подстановки числовых значений, получим:

$$25 \cdot I_{11} - 8 \cdot I_{22} - 5 \cdot I_{33} = 0,$$

$$-8 \cdot I_{11} + 19 \cdot I_{22} - 7 \cdot I_{33} = -25,$$

$$-5 \cdot I_{11} - 7 \cdot I_{22} + 23 \cdot I_{33} = 10.$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & -8 & -5 \\ -81 & +9 & -7 \\ -5 & -7 & +23 \end{vmatrix} = 7193,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -5 \\ -25 & +9 & -7 \\ 10 & -7 & +23 \end{vmatrix} = -3965,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 25 & +0 & -5 \\ -81 & -25 & -7 \\ -5 & +10 & +23 \end{vmatrix} = -11600,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 25 & -8 & +0 \\ -81 & +9 & -25 \\ -5 & -7 & +10 \end{vmatrix} = -1265.$$

Значения контурных токов:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3965}{7193} = -0{,}551\ A,$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{-11600}{7193} = -1{,}613\ A,$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{-1265}{7193} = -0{,}176\ A.$$

Истинные токи во всех ветвях:

$I_1 = -I_{22} = 1{,}613$ A,
$I_2 = I_{33} = -0{,}176$ A,
$I_3 = I_{33} - I_{11} = -0{,}176 + 0{,}551 = 0{,}375$,
$I_4 = -I_{11} = 0{,}551$ A,
$I_5 = I_{33} - I_{22} = -0{,}176 + 1{,}613 = 1{,}437$ A,
$I_6 = I_{11} - I_{22} = -0{,}551 + 1{,}613 = 1{,}062$ A.

Таким образом, решение значительно упрощено, за счет сокращение числа совместно решаемых уравнений (вместо системы из шести уравнений решаем систему из трех уравнений).

2.3. Метод узловых потенциалов

Число совместно решаемых уравнений уменьшается, если в качестве переменных применяются потенциалы узлов. Знание потенциалов узлов позволяет найти токи всех ветвей. Метод узловых потенциалов является наиболее общим и широко применяется для анализа цепей любой конфигурации.

При расчете электрических цепей методом узловых потенциалов потенциал одного из узлов принимается равным нулю. Для всех остальных узлов составляют уравнения по первому закону Кирхгофа.

Решив систему уравнений, определяют потенциалы узлов. Затем по закону Ома определяют токи ветвей.

П р и м е р. Определить токи в ветвях схемы, изображенной на рис.2.3, методом узловых потенциалов, если E_1 = 25 В, E_2 = 10 В, R_1 = 4 Ом, R_1 = 4 Ом, R_2 = 11 Ом, R_3 = 5 Ом, R_4 = 12 Ом, R_5 = 7 Ом, R_6 = 8 Ом.

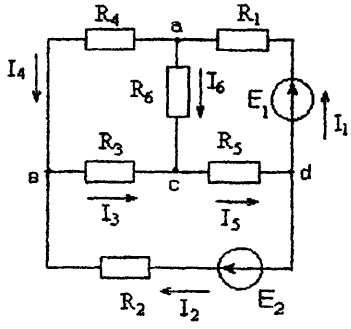


Рис.2.3.

Р е ш е н и е. Примем потенциал узла d равным нулю, т.е. $\varphi_d = 0$ и составим узловые уравнения:

$$\varphi_a(g_1+g_4+g_6)-\varphi_n\cdot g_4-\varphi_c g_6=E_1\cdot g_1,$$
$$-\varphi_a g_4+\varphi_n(g_2+g_3+g_4)-\varphi_c g_3=E_2\cdot g_2,$$
$$-\varphi_a\cdot g_6-\varphi_n\cdot g_3+\varphi_c(g_6+g_3+g_5)=0.$$

где:

$$g_1=\frac{1}{R_1}=\frac{1}{4}=0{,}25Cм,$$

$$g_2=\frac{1}{R_2}=\frac{1}{11}=0{,}091Cм,$$

$$g_3=\frac{1}{R_3}=\frac{1}{5}=0{,}2Cм,$$

$$g_4=\frac{1}{R_4}=\frac{1}{12}=0{,}083Cм,$$

$$g_5=\frac{1}{R_5}=\frac{1}{7}=0{,}143Cм,$$

$$g_6=\frac{1}{R_6}=\frac{1}{8}=0{,}125Cм.$$

Подставляя числовые значения в уравнения, получим:

$$0{,}458\cdot\varphi_a-0{,}083\cdot\varphi_n-0{,}125\cdot\varphi_c=6{,}25$$
$$-0{,}083\cdot\varphi_a+0{,}374\cdot\varphi_n-0{,}2\cdot\varphi_c=0{,}91$$
$$-0{,}125\cdot\varphi_a-0{,}2\cdot\varphi_n+0{,}468\cdot\varphi_c=0.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем $\varphi_a,\varphi_n,\varphi_c$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0{,}458 & -0{,}083 & -0{,}125\\ -0{,}083 & +0{,}374 & -0{,}2\\ 0{,}125 & -0{,}2 & 0{,}468\end{vmatrix}=4{,}863\cdot10^{-2},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}6{,}25 & -0{,}083 & -0{,}125\\ 0{,}91 & 0{,}374 & -0{,}2\\ 0 & -0{,}2 & 0{,}468\end{vmatrix}=0{,}902,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}458 & 6{,}25 & -0{,}125 \\ -0{,}083 & 0{,}91 & -0{,}2 \\ 0{,}125 & 0 & 0{,}468 \end{vmatrix} = 0{,}58,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0{,}458 & -0{,}083 & +6{,}25 \\ -0{,}083 & +0{,}374 & -0{,}91 \\ 0{,}125 & -0{,}2 & +0 \end{vmatrix} = 0{,}489,$$

$$\varphi_a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0{,}902}{4{,}863 \cdot 10^{-2}} = 118{,}548 \ B,$$

$$\varphi_c = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0{,}58}{4{,}863 \cdot 10^{-2}} = 11{,}927 \ B,$$

$$\varphi_c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0{,}489}{4{,}863 \cdot 10^{-2}} = 10{,}056 \ B.$$

По закону Ома определяются токи ветвей:

$$I_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_a + E_1}{g_1} = (-18{,}548 + 25) \cdot 0{,}25 = 1{,}613 \ A,$$

$$I_2 = \frac{\varphi_d - \varphi_a + E_2}{R_2} = (-11{,}927 + 10) \cdot 0{,}091 = -0{,}1754 \ A,$$

$$I_3 = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{R_3} = (11{,}927 - 10{,}056) \cdot 0{,}2 = 0{,}3742 \ A,$$

$$I_4 = \frac{\varphi_d - \varphi_a}{R_4} = (18{,}548 - 11{,}927) \cdot 0{,}083 = 0{,}5495 \ A,$$

$$I_5 = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{R_5} = (10{,}056 - 0) \cdot 0{,}1438 = 1{,}438 \ A,$$

$$I_6 = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{R_6} = (18{,}548 - 10{,}056) \cdot 0{,}125 = 1{,}062 \ A.$$

Токи в ветвях имеют те же значения, что и ранее, т.е. практически одинаковые результаты что и в 2.1 и 2.2.

2.4. Метод наложения

Рассмотренные выше методы расчета линейных электрических цепей связаны с решением систем уравнений с несколькими неизвестными. Однако, в некоторых случаях при расчете разветвленных цепей с несколькими источниками электрической энергии удается обойтись без решения системы уравнений, если применить метод наложения.

Сущность метода наложения: реакция цепи (ток, напряжение) при одновременном действии нескольких независимых источников равна сумме реакций при действии каждого источника в отдельности.

При большом числе независимых источников расчет электрической цепи методом наложения усложняется.

П р и м е р. Рассчитать токи в ветвях схемы, изображенной на рис.2.4., методом наложения, если E_1 = 25 В, E_2 = 10 В, R_1= 4 Ом, R_2= 11 Ом, R_3 = 5 Ом, R_4= 12 Ом, R_5 = 7 Ом, R_6= 8 Ом.

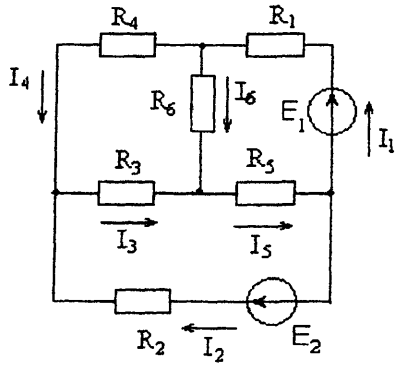


Рис.2.4.

Р е ш е н и е. В цепи действуют два источника E_1 и E_2. Токи в ветвях при одновременном действии двух источников э.д.с. будут равны алгебраической сумме токов от действия каждого источника в отдельности:

$$I_1 = I_1' + I_1'', \quad I_2 = I_2' + I_2'', \quad I_3 = I_3' + I_3'',$$

$$I_4 = I_4' + I_4'', \quad I_5 = I_5' + I_5'', \quad I_6 = I_6' + I_6''.$$

где: $I_1', I_2', I_3', I_4', I_5', I_6'$ – токи в ветвях при действии источника E_1, $E_2 = 0$,

$I_1'', I_2'', I_3'', I_4'', I_5'', I_6''$ – токи в ветвях схемы при действии источника E_2,

$E_1 = 0$.

Рассмотрим действие первого источника: $E_1 = 25$ В, $E_2 = 0$. Схема примет следующий вид.

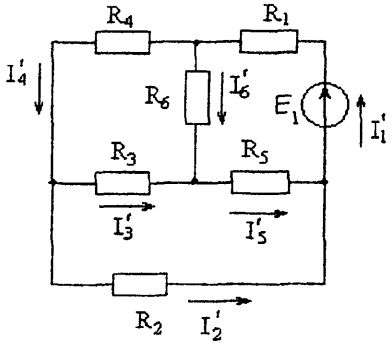


Рис.2.5.

В цепи действует один источник, чтобы рассчитать токи от действия источника E_1, применяется метод свертывания схемы. Для этого преобразуем ветви R_3, R_5, R_2, образующие треугольник сопротивлений, в эквивалентную трехлучевую звезду с сопротивлениями:

$$R_{52} = \frac{R_5 \cdot R_2}{R_5 + R_2 + R_3} = \frac{7 \cdot 11}{7+11+5} = 3{,}348 \ \text{Ом},$$

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_5 + R_2 + R_3} = \frac{5 \cdot 7}{7+11+5} = 1{,}522 \ \text{Ом},$$

$$R_{32} = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_5 + R_2 + R_3} = \frac{5 \cdot 11}{7+11+5} = 2{,}391 \ \text{Ом},.$$

$$R_4' = R_4 + R_{32} = 12{,}391 = 14{,}391 \ \text{Ом},$$

$$R_6' = R_6 + R_{35} = 8 + 1{,}522 = 9{,}522 \ \text{Ом},$$

$$R_1' = R_1 + R_{25} = 4 + 3{,}348 = 7{,}348 \ \text{Ом},$$

$$R_{вх} = \frac{R_4' \cdot R_6'}{R_4' + R_6'} + R_1' = \frac{14{,}391 \cdot 9{,}522}{14{,}391 + 9{,}522} + 7{,}348 = 13{,}078 \ \text{Ом}$$

Определим токи ветвей: $I_1' = \dfrac{E_1}{R_{вх}} = \dfrac{25}{13{,}078} = 1{,}9116 \ A,$

$$I_4' = I_1' \frac{R_6'}{R_6' + R_4'} = 1{,}912 \frac{18{,}2206}{23{,}915} = 0{,}7612 \ A,$$

$$I_6' = I_1' \frac{R_4'}{R_6' + R_4'} = 1{,}912 \frac{14{,}391}{23{,}915} = 1{,}1504 \ A.$$

Для нахождения тока I_3', необходимо определить U_{12}':

$$U_{12}' = I_6' \cdot R_6 - I_4' \cdot R_4 = 1{,}1504 \cdot 8 - 0{,}7612 \cdot 12 = 0{,}0688 \ B,$$

$$I_3' = \frac{U_{12}'}{R_3} = \frac{0{,}0688}{5} = 0{,}01376 \ A.$$

Для нахождения тока I_5', необходимо определить U_{23}':

$$U_{23}' = E - I_1' \cdot R_1 - I_6' \cdot R_6 = 25 - (1{,}91155 \cdot 4) - (1{,}1504 \cdot 8) = 8{,}1506 \ B,$$

$$I_5' = \frac{U_{23}'}{R_5} = \frac{8{,}1506}{7} = 1{,}16437 \ A.$$

Для нахождения тока I_2', необходимо определить U_{31}':

$$U_{31}' = -U_{12}' - U_{23}' = -0{,}0688 - 8{,}1506 = -8{,}2194 \ B,$$

$$I_2' = \frac{U_{31}'}{R_2} = -\frac{8{,}2194}{11} = -0{,}7472 \ A.$$

Токи в ветвях:

$I_1' = 1{,}91155\ A,\quad I_2' = -0{,}7472\ A,\quad I_3' = 0{,}01376\ A,$

$I_4' = 0{,}7612\ A,\quad I_5' = 1{,}16437\ A,\quad I_6' = 1{,}1504\ A.$

Теперь необходимо рассмотреть действие источника $E_2 = 10$ В, $E_1 = 0$.

Схема примет следующий вид.

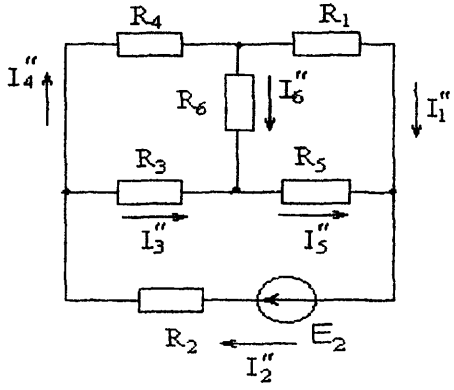


Рис.2.6.

Расчет данной цепи производится методом свертки. Преобразуем ветви треугольника сопротивлений R_1-R_6-R_5 в эквивалентную звезду (рис.2.7.).

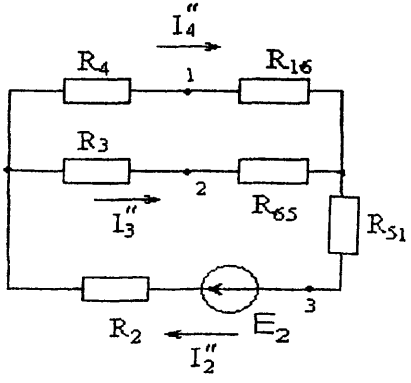


Рис.2.7.

$$R_{16} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_6 + R_5} = \frac{4 \cdot 5}{4+8+7} = 1{,}684 \; Ом,$$

$$R_{65} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_1 + R_6 + R_5} = \frac{7 \cdot 8}{4+8+7} = 2{,}947 \; Ом,$$

$$R_{15} = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_6 + R_5} = \frac{4 \cdot 7}{4+8+7} = 1{,}474 \; Ом,$$

$$R_4' = R_4 + R_{16} = 12 + 1{,}684 = 13{,}684 \quad Ом,$$

$$R_3' = R_3 + R_{65} = 5 + 2{,}947 = 7{,}947 \quad Ом,$$

$$R_2' = R_2 + R_{51} = 1{,}474 + 11 = 12{,}474 \quad Ом,$$

$$R_{43}' = \frac{R_4' \cdot R_3'}{R_4' + R_3'} = \frac{13{,}684 \cdot 7{,}947}{13{,}684 + 7{,}947} = 5{,}024 \quad Ом,$$

$$R_{ab} = R_{43}' + R_2' = 5{,}024 + 12{,}47 = 17{,}497 \quad Ом.$$

Токи в ветвях схемы на рис.2.7.:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_{ab}} = \frac{10}{17{,}494} = 0{,}5716 \quad A,$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_4'}{R_4' + R_3'} = 0{,}5716 \frac{13{,}684}{13{,}684 + 7{,}947} = 0{,}3615 \quad A,$$

$$I_4'' = I_2'' \frac{R_3'}{R_3' + R_4'} = 0{,}5716 \frac{7{,}95}{21{,}63} = 0{,}210 \quad A.$$

Для нахождения тока I_6'', необходимо определить U_{12}'':

$$U_{12}'' = I_3'' \cdot R_3 - I_4'' \cdot R_4 = 0{,}3615 \cdot 5 - 0{,}210 \cdot 12 = -0{,}7125 \quad B,$$

$$I_6'' = \frac{U_{12}''}{R_6} = -\frac{0{,}7125}{8} = -0{,}0891 \quad A.$$

Для нахождения тока I_5'', необходимо определить U_{23}'':

$$U_{23}'' = E_2 - I_2'' \cdot R_2 - I_3'' \cdot R_3 = 10 - 0{,}5716 \cdot 11 - 0{,}3615 \cdot 5 = 1{,}9049 \quad B,$$

$$I_5'' = \frac{U_{23}''}{R_5} = \frac{1{,}9049}{7} = 0{,}272 \quad A.$$

Для нахождения тока I_1'', необходимо определить напряжение U_{13}'':

$$U_{13}'' = I_6'' \cdot R_6 + I_5'' \cdot R_5 = -0{,}0891 \cdot 8 + 0{,}272 \cdot 7 = 1{,}1912 \quad B,$$

$$I_1'' = \frac{U_{13}''}{R_1} = \frac{1{,}1912}{4} = 0{,}2978 \quad A.$$

Токи в ветвях:

$I_1'' = 0{,}2978\ A$, $I_2'' = 0{,}5716\ A$, $I_3'' = 0{,}3615\ A$,

$I_4'' = 0{,}210\ A$, $I_5'' = 0{,}272\ A$, $I_6'' = -0{,}0891\ A$.

Токи исходной схемы (рис.2.4.):

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 1{,}91155 - 0{,}2978 = 1{,}614\ A,$$

$$I_2 = -I_2' + I_2'' = -0{,}7472 + 0{,}5716 = -0{,}176\ A,$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 0{,}01376 + 0{,}361115 = 0{,}375\ A,$$

$$I_4 = I_4' - I_4'' = 0{,}7612 - 0{,}210 = 0{,}551\ A,$$

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 1{,}16437 + 0{,}272 = 1{,}436\ A,$$

$$I_6 = I_6' + I_6'' = 1{,}1504 - 0{,}0891 = 1{,}0613\ A.$$

Ответы совпали со значениями токов в ветвях полученными ранее.

2.5. Метод активного двухполюсника

Для определения тока в какой-либо одной ветви сложной электрической цепи применяется метод активного двухполюсника. Метод основывается на теореме об активном двухполюснике, которая формулируется следующим образом: если любую линейную активную цепь по отношению к одной из ветвей заменить одним эквивалентным

источником э.д.с., э.д.с. которой равно напряжению на зажимах разомкнутой ветви и сопротивлением, равным входному сопротивлению пассивной цепи, то ток в этой ветви не изменится.

Рассмотрим применение теоремы об активном двухполюснике для расчета разветвленных электрических цепей.

П р и м е р. Определить ток I_1 методом активного двухполюсника (рис.2.8.), если $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 11$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 12$ Ом, $R_5 = 7$ Ом, $R_6 = 8$ Ом, $E_1 = 25$ В, $E_2 = 10$ В.

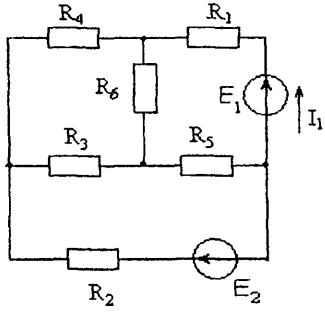


Рис.2.8.

Р е ш е н и е. Согласно данного метода: $I_1 = \dfrac{U_{xx} + E_1}{R_{ax} + R_1}$, U_{xx} – напряжение холостого хода и R_{ax} – входное сопротивление относительно зажимов 1–2.

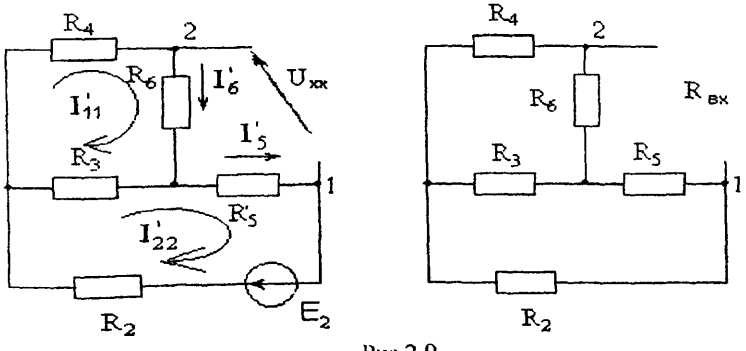


Рис.2.9.

По второму закону Кирхгофа: $U_{xx} + I_6' \cdot R_6 + I_5' \cdot R_5 = 0$, отсюда:

$U_{xx} = -\left(I_6' \cdot R_6 + I_5' \cdot R_5\right)$. Токи I_6' и I_5' определим по методу контурных токов:

$$\begin{cases} I_{11}' \cdot (R_1 + R_4 + R_6) - I_{22}' \cdot R_3 = 0 \\ -I_{11}' \cdot R_3 + I_{22}' \cdot (R_2 + R_3 + R_5) = E_2 \end{cases}.$$

$$25 \cdot I_{11}' - 5 \cdot I_{22}' = 0,$$

$$-5 \cdot I_{11}' + 23 \cdot I_{22}' = 10.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 23 \end{vmatrix} = 550; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 10 & 23 \end{vmatrix} = 50; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 250,$$

$$I_{11}' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{50}{550} = 0{,}0909\ A, \quad I_{22}' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{250}{550} = 0{,}4545\ A.$$

Ток $I_6' = I_{11}' = 0{,}0909\ A$, $I_5' = I_{22}' = 0{,}4545\ A$.

Следовательно, $U_{xx} = -(0{,}0909 \cdot 8 + 0{,}4545 \cdot 7) = -3{,}909\ B$.

Для определения R_{ex}, преобразуем звезду сопротивлений $R_2 - R_3 - R_4$ в эквивалентный треугольник:

$$R_{14} = R_1 + R_4 + \frac{R_1 \cdot R_4}{R_2} = 5 + 12 + \frac{5 \cdot 12}{11} = 22{,}454\ Ом,$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_3 \cdot R_2}{R_4} = 11 + 5 + \frac{11 \cdot 5}{12} = 20{,}583\ Ом,$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_3} = 11 + 12 + \frac{11 \cdot 12}{5} = 49{,}4\ Ом.$$

С учетом этого преобразования, схема примет следующий вид.

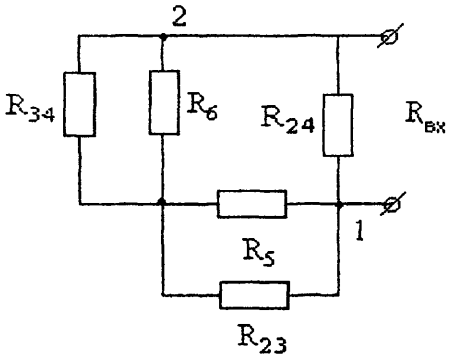


Рис.2.10.

$$R_7 = \frac{R_6 \cdot R_{34}}{R_6 + R_{34}} = \frac{8 \cdot 22{,}454}{8 + 22{,}454} = 5{,}898\ Ом,$$

$$R_8 = \frac{R_5 \cdot R_{23}}{R_5 + R_{23}} = \frac{7 \cdot 20{,}583}{7 + 20{,}583} = 5{,}223\ Ом,$$

$$R_9 = R_7 + R_8 = 5{,}898 + 5{,}223 = 11{,}121\ Ом,$$

$$R_{вх} = \frac{R_9 \cdot R_{24}}{R_9 + R_{24}} = \frac{11{,}121 \cdot 49{,}4}{11{,}121 + 49{,}4} = 9{,}077\ Ом.$$

Искомый ток: $I_1 = \dfrac{U_{вх} + E_1}{R_{вх} + R_1} = \dfrac{-3{,}909 + 25}{9{,}077 + 4} = 1{,}613\ А.$

Как видно, полученный результат совпадает с тем, что мы имели по методу контурных токов и по методу узловых потенциалов.

2.6. Упражнения и задачи для СРС

П р и м е р №1. Для цепи, изображенной на рис.2.11. Определить токи, применяя законы Кирхгофа, проверить баланс мощностей, если: R_1= 12 Ом, R_2 = 18Ом, R_3 = R_4 = 12 Ом, R_5 = R_6 = 6 Ом, E_1 = 24 В, E_2= 42 В.

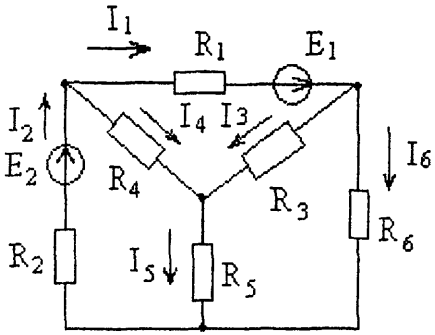


Рис. 2.11.

Р е ш е н и е. Схема имеет четыре узла и шесть ветвей. Составляются три уравнения по первому закону и три уравнения по второму закону. Общее количество уравнений шесть; неизвестных тоже шесть. Число уравнений равно числу неизвестных токов:

$$I_1 + I_4 - I_2 = 0,$$
$$I_3 + I_6 - I_1 = 0,$$
$$I_2 - I_5 - I_6 = 0,$$
$$\begin{cases} I_1R_1 + I_3R_3 - I_4R_4 = E_1, \\ I_6R_6 - I_5R_5 - I_3R_3 = 0, \\ I_5R_5 + I_2R_2 + I_4R_4 = E_2. \end{cases}$$

Выразим токи I_3, I_5, I_4 через I_1, I_2, I_6.:

$$I_4 = I_2 - I_1;$$
$$I_3 = I_1 - I_6;$$
$$I_5 = I_2 - I_6.$$

$$\begin{cases} I_1R_1 + (I_1 - I_6)R_3 - (I_2 - I_1)R_4 = E_1; \\ I_6R_6 - (I_2 - I_6)R_5 - (I_1 - I_6)R_3 = 0; \\ (I_2 - I_6)R_5 + I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_4 = E_2 \end{cases}$$

После подстановки числовых значений уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} 36I_1 - 12I_2 - 12I_6 = 24; \\ -12I_1 - 6 - I_2 + 24I_6 = 0; \\ -12I_1 + 36I_2 - 6I_6 = 42. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3I_1 - I_2 - I_6 = 2; \\ -2I_1 - I_6 + 4I_6 = 0; \\ -2I_1 + 6I_2 - I_6 = 7. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдём токи I_1, I_2, I_6:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-81}{-45} = 1{,}8\ A;$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-90}{-45} = 2\ A;$$

$$I_6 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{63}{45} = 1{,}4\ A.$$

Остальные токи:

$$I_3 = I_1 - I_6 = 1{,}8 - 1{,}4 = 0{,}4\ A,$$

$$I_4 = I_2 - I_1 = 2 - 1{,}8 = 0{,}2\ A,$$

$$I_5 = I_2 - I_6 = 2 - 1{,}4 = 0{,}6\ A.$$

Баланс мощностей.

Мощность, генерируемая источниками:

$$P_I = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 = 24 \cdot 1{,}8 + 42 \cdot 2 = 43{,}2 + 84 = 127{,}2\ Вт.$$

Мощность потребляемая:

$$P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = (1{,}8)^2 \cdot 12 + 2^2 \cdot 18 + (0{,}4)^2 \cdot 12 + (0{,}2)^2 \cdot 12 +$$

$$+ (0{,}6)^2\ 6 + (1{,}4)^2 \cdot 6 = 3388 + 72 + 111{,}92 + 0{,}48 + 2{,}16 + 11{,}776 = 1272\ Вт$$

Получаем $P_E = P_R$; 127,2 Вт = 127,2 Вт. Баланс мощностей соблюдается.

П р и м е р № 2. Для цепи, изображенной на рис.2.12. Определить токи методом узловых потенциалов, если: E_1 = 10 В, E_2 = 24 В, E_3 = 30 В, E_5 = 20 В, E_6 = 40 В, $R_2 = R_3$ = 2 Ом, R_4 = 10 Ом, R_5 = 5 Ом.

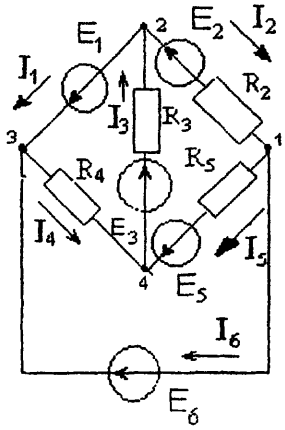


Рис.2.12.

Р е ш е н и е. Примем потенциал узла один равным нулю: $\varphi_1 = 0$, тогда

$$\varphi_3 = \varphi_1 + E_6 = 40\ B,$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 - E_1 = 40 - 10 = 30\ B.$$

С учетом этого, уравнения для узла 4 имеет следующий вид:

$$\varphi_4\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)-\varphi_3\frac{1}{R_4}-\varphi_2\frac{1}{R_3}-\varphi_1\frac{1}{R_5}=E_5\frac{1}{R_5}-E_3\frac{1}{R_3},$$

$$\varphi_4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)-\frac{40}{10}-\frac{30}{2}=20\frac{1}{5}-30\frac{1}{2},$$

$$\varphi_4 = 10\ B.$$

По известным потенциалам узлов находим токи, используя закон Ома для участка цепи:

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - E_2}{R_2} = \frac{30-24}{2} = 3\ A,$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_3}{R_3} = \frac{10-30+30}{2} = 5\ A,$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_4} = \frac{40-10}{10} = 3\ A,$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4 + E_5}{R_5} = \frac{-10+20}{5} = 2\ A,$$

$$I_6 = I_2 - I_5 = 3-2 = 1\ A,$$

$$I_1 = I_3 - I_2 = 5-3 = 2\ A.$$

П р и м е р № 3. Для цепи рис. 2.13. определить токи в ветвях методом контурных токов и проверить баланс мощностей, если: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 0{,}5$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 3{,}5$ Ом, $R_5 = 1$ Ом, $E_1 = 50$ В, E_2 40 В, J = 5 А.

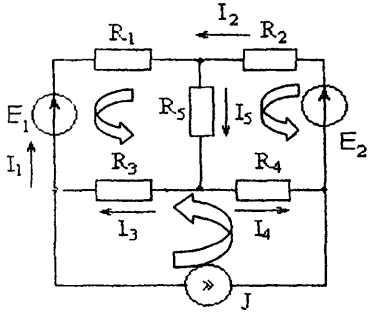


Рис.2.13.

Р е ш е н и е. Составим систему уравнений по методу контурных токов:

$$\begin{cases} I_{11}\left(R_1 + R_5 + R_3\right) - I_{22}R_5 - I_{33}R_3 = -E_1, \\ -I_{11}R_5 + I_{22}\left(R_2 + R_4 + R_5\right) - I_{33}R_4 = E_2, \\ I_{33} = J. \end{cases}$$

После подстановки числовых значений уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} 5 \cdot I_{11} - I_{22} = -40, \\ -I_{11} + 5 \cdot I_{22} = 57{,}5. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, имеем:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-142{,}5}{24} = -5{,}9375\ A,$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{247{,}5}{24} = 10{,}3125\ A.$$

Действительные токи в ветвях схемы:

$$I_1 = -I_{11} = 5{,}93375 = 5{,}94\ A,$$
$$I_2 = I_{22} = 10{,}3125 = 10{,}31\ A,$$
$$I_5 = I_1 + I_2 = 16{,}25\ A,$$
$$I_3 = J - I_{11} = 5 + 5{,}9375 = 10{,}94\ A,$$
$$I_4 = I_2 - J = 10{,}31 - 5 = 5{,}31\ A.$$

Баланс мощностей. Мощность генерируемая источниками:

$$P_I + P_J = E_2 \cdot I_2 + E_1 I_1 + J \cdot U_{12} = E_2 \cdot I_2 + E_1 \cdot I_1 + J(I_3 \cdot R_3 - I_4 R_4) =$$
$$= 40 \cdot 10{,}31 + 50 \cdot 5{,}94 + 5 \cdot 3{,}28 = 725{,}8\ Bm.$$

Мощность потребляемая потребителями:

$$P_R = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 = (5{,}94)^2 \cdot 2 + (10{,}31)^2 \cdot 0{,}5 + (10{,}94)^2 \cdot 2 +$$
$$+ (5{,}31)^2 \cdot 3{,}5 + (16{,}25)^2 \cdot 1 = 70{,}567 + 53{,}148 + 239{,}367 + 98{,}686 + 264{,}0625 = 725{,}8\ Bm;$$

$$P_E + P_J = P_R.$$

Получено тождество: 725,8 Вт =725,8 Вт.

Пример № 4. Методом наложения определить токи в ветвях электрической цепи, изображенной на рис.2.14., $E_1 = 10\ B$, $E_2 = 20\ B$, $R_2 = R_3 = 10$ Ом.

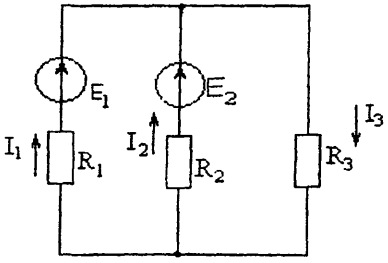
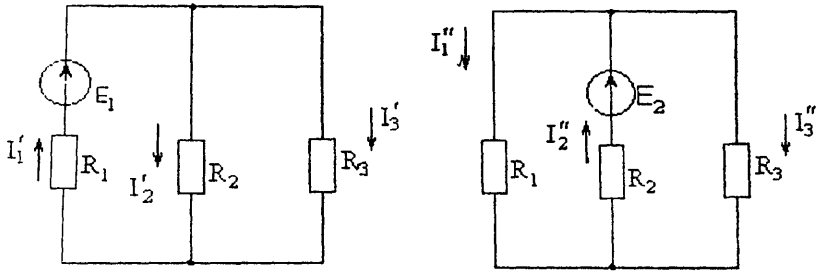


Рис. 2.14.

Решение. Согласно методу наложения, токи исходной схемы равны алгебраической сумме токов от действия каждого источника в отдельности, т.е.: $I_1 = I_1' + I_1''$, $I_2 = I_2' + I_2''$ $I_3 = I_3' + I_3''$, где I_1', I_2', I_3' - токи в ветвях от действия источника E_1, I_1'', I_2'', I_3'' - токи от действия источника E_2.



а *б*

Рис.2.15.

Полагаем, что $E_2 = 0$, в цепи действует только E_1 рис. 2.15.а.:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_{экв}} = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{10}{50 + \frac{100}{220}} = 0{,}1\ A,$$

$$I_2' = I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0{,}1 \frac{10}{20} = 0{,}05\ A,$$

$$I_3' = I_1' \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0{,}1 \frac{10}{20} = 0{,}05\ A.$$

Полагаем,что $E_1 = 0$, в цепи действует только E_2 рис. 2.15.б.:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{20}{10 + \frac{500}{60}} = 1{,}09\ A,$$

$$I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 1{,}09 \frac{10}{60} = 0{,}182\ A,$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 1{,}09 \frac{50}{60} = 0{,}908\ A.$$

Истинные значения токов:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 0{,}1 - 0{,}182 = -0{,}082\ A,$$

$$I_2 = -I_2' + I_2'' = -0{,}05 + 1{,}09 = 1{,}04\ A,$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 0{,}05 + 0{,}908 = 0{,}958\ A.$$

Правильность решения можно проверить по первому закону Кирхгофа:

$I_2 + I_1 = I_3$.

1,04 – 0,082 = 0,958 *А*.

Отсюда можно сделать вывод, что токи найдены правильно.

П р и м е р № 5. Найти ток через сопротивление R_5 методом активного двухполюсника, для цепи изображенной на рис. 2.16, если E =18 В, J =10 А, R_1 = 3 Ом, , $R_2 = R_3 = R_4$ = 2 Ом, R_5 = 1 Ом.

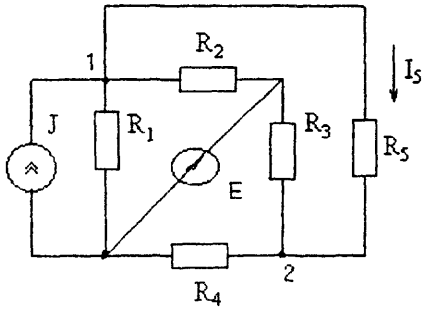


Рис. 2.16.

Р е ш е н и е. На основании теоремы об активном двухполюснике цепь можно представить эквивалентной схемой (рис. 2.17.а), ток в которой: $I_5 = \frac{E_1}{R_{вх} + R_5}$, где: $E_1 = U_{xx}$, U_{xx} - напряжение в режиме холостого хода между точками 1–2 рис. 2.17.б; $R_{вх}$ – входное сопротивление между точками 1–2 пассивной цепи, т.е. E =0, J = 0.

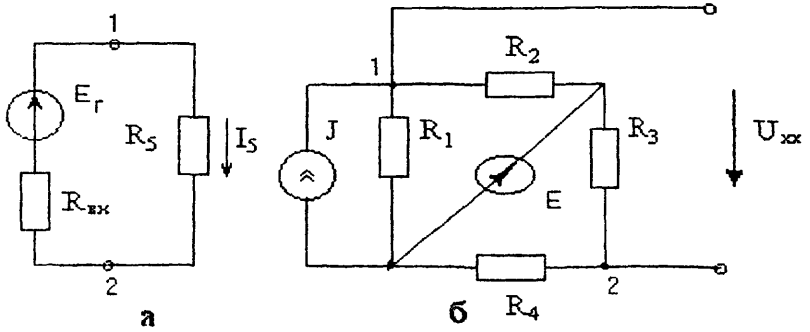


Рис 2.17.

Напряжение холостого хода определяется методом наложения (рис.2.18.):

$U_{xx} = U_{xx}' + U_{xx}''$, где U_{xx}', напряжение между точками 1–2 от действия только источника J, U_{xx}'' - напряжение между точками 1-2 от действия только источника E.

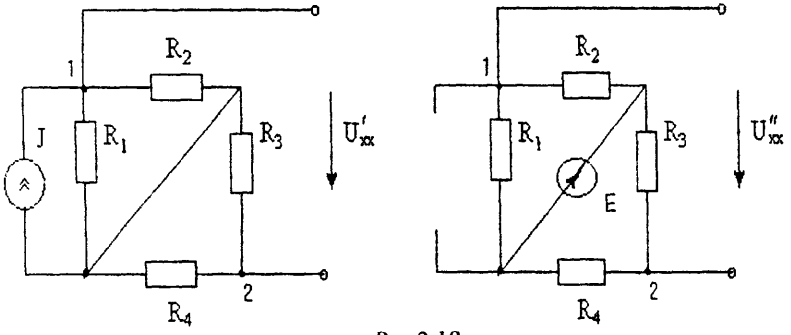


Рис 2.18.

Напряжение холостого хода U_{xx}:

$$U_{xx}' = J\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 10\frac{3 \cdot 2}{5} = 12B, \quad U_{xx}'' = I_3'' \cdot R_3 - I_2'' \cdot R_2.$$

$$I_3'' = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{18}{4} = 4{,}5A, \qquad I_2'' = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{18}{5} = 3{,}6A,$$

$$U_{xx}'' = 4{,}5 \cdot 2 - 3{,}6 \cdot 2 = 9 - 7{,}2 = 1{,}8B, \quad U_{xx} = U_{xx}' + U_{xx}'' = 12 + 1{,}8 = 13{,}8\ B.$$

Схема

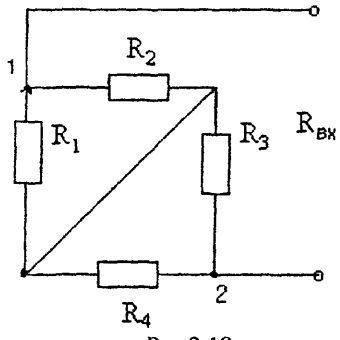


Рис.2.19.

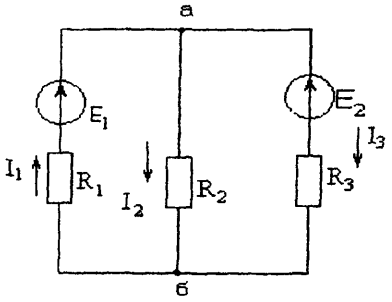
Определим R_{ax} (рис.2.19).

$$R_{ax} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{6}{5} + 1 = 2{,}2Ом.$$

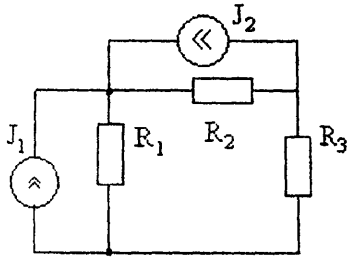
Ток: $I_{\text{ч}} = \frac{13{,}8}{2{,}2 + 1} = 4{,}31A.$

Задачи для СРС

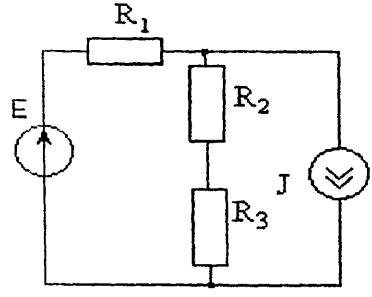
1.Определить методом узлового напряжения $U_{аб}$, если $E_1 = E_2 = 3$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ Ом.



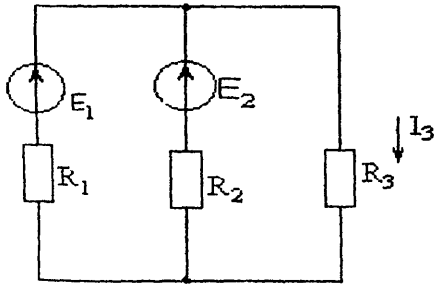
2.Определить токи ветвей в схеме и составить баланс мощностей, если $J_1 = 3A$, $J_2=1,5A$. $R_1=R_2=R_3= 1$ Ом.



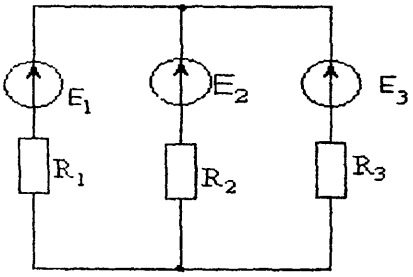
3.Определить токи всех ветвей в цепи, если E= 6В, J = 3А, $R_1= R_2=R_3= 1$ Ом.



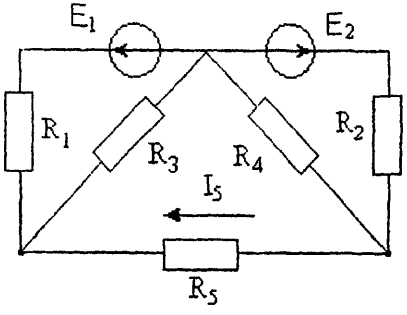
4 Заданы э.д.с. и сопротивление. $E_1=5$ В; $E_2=10$ В; $R_1=R_2=R_3=2$ Ом. Найти ток I_3 в ветви с сопротивлением R_3 методом эквивалентного генератора.



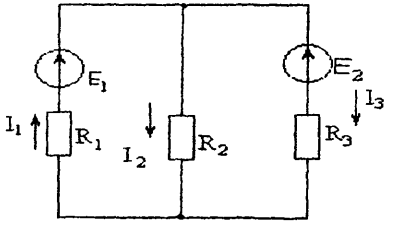
5. Определить, какие из трех источников э.д.с. генерируют энергию, а какие - потребляют, если $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 3$ Ом; $E_1 = 10$ В; $E_2 = 30$ В; $E_3 = 30$ В.



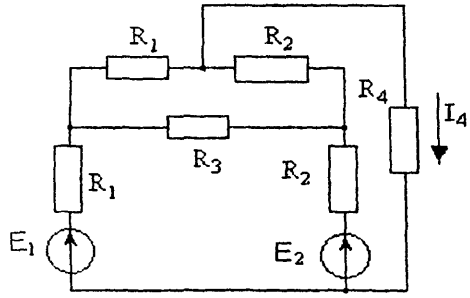
6.Определить ток I_5 в схеме электрической цепи методом наложения, если $E_1 = 80\,В, E_2 = 20\,В, R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\,Ом, R_5 = 3\,Ом$.



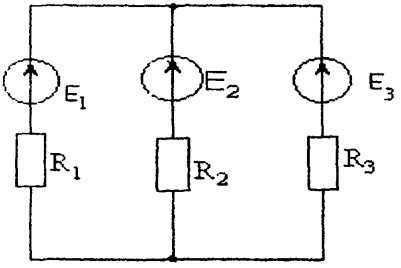
7.Определить ток I_1 методом наложения, если $E_1 = 30$ В, $E_2 = 20$ В, $E_3 = 10$ В, $R_1 = 6$ Ом; $R_2 = 8$ Ом; $R_3 = 3$ Ом.



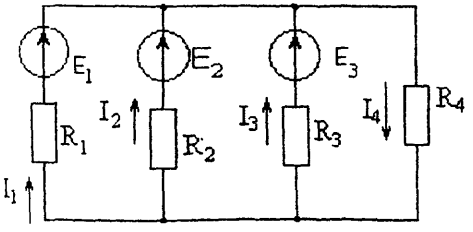
8. Определить ток I_4 в схеме электрической цепи методом эквивалентного генератора, если $E_1 = 35\,B, E_2 = 90\,B$, $R_1 = 1\,Ом,\ R_2 = R_3 = 2\,Ом, R_4 = 9{,}5\,Ом$.



9. Определить токи методом контурных токов в схеме, если $E_1 = 36\,B, E_2 = 16\,B, E_3 = 4\,B,\ R_1 = 1\,Ом, R_2 = 2\,Ом, R_3 = 4\,Ом$.

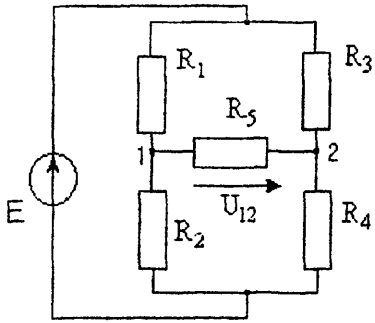


10. Определить токи в схеме методом двух узлов и составить баланс мощностей, если $E_1 = 16\,B, E_2 = 36\,B, E_3 = 4\,B, R_1 = 1\,Ом, R_2 = 2\,Ом, R_3 = R_4 = 4\,Ом$.

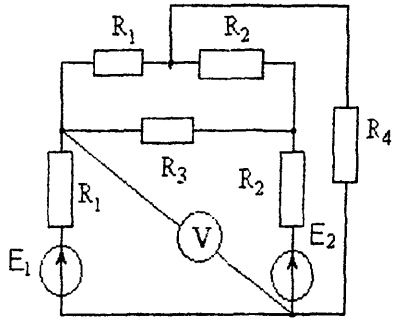


11. Определить напряжение между точками 1–2 U_{12} в схеме электрической цепи, если

$E = 120\,В, R_1 = 60\,Ом, R_2 = 15\,Ом, R_3 = 90\,Ом, R_4 = 60\,Ом, R_5 = 12\,Ом.$

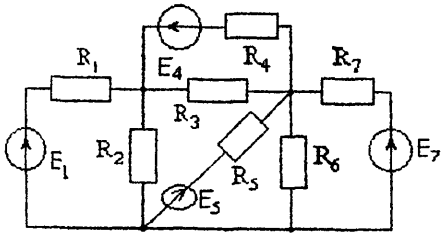


12. Определить показание вольтметра в схеме электрической цепи если $E_1 = 35\,В, E_2 = 90\,В$, $R_1 = 1\,Ом$, $R_2 = R_3 = 2\,Ом, R_4 = 9{,}5\,Ом$.



13. Определить токи методом узловых потенциалов в схеме электрической цепи, если

$E_1 = 25\,B, E_4 = 70\,B, E_5 = 70\,B, E_7 = 15\,B, R_1 = 5\,Ом, R_2 = R_3 = R_4 = 10\,Ом,$
$R_5 = 5\,Ом, R_6 = 15\,Ом, R_7 = 3\,Ом.$



3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Задачей этого раздела является изучение методов анализа линейных электрических цепей при гармонических или синусоидальных воздействиях. Анализ режима гармонических колебаний является важной составной частью в процессе изучения курса «Теория электрических цепей», так как методику анализа электрических цепей при гармонических воздействиях можно распространить на цепи при произвольных воздействиях, как периодических так и непериодических.

3.1. Основные элементы цепи при гармонических воздействиях

Основными параметрами характеризующими гармонические колебания являются период, амплитуда, частота и начальная фаза.

Для синусоидального тока мгновенное значение записывается в виде:

$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, где:

I_m – максимальное значение или амплитуда тока,

$\omega t + \varphi_i$ - фаза тока,

φ_i - начальная фаза тока,

ω - угловая частота.

Период T, частота f связаны соотношением:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T},\ f = \frac{1}{T}.$$

Аналогичные понятия можно ввести для напряжения и э.д.с.:

$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, $e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$,

где: u - мгновенное значение напряжения,

e - мгновенное значение э.д.с.,

U_m - максимальное значение или амплитуда напряжения,

E_m - максимальное значение или амплитуда э.д.с.,

$\omega t + \varphi_u$ - фаза напряжения,

φ_u - начальная фаза напряжения,

$\omega t + \varphi_e$ - фаза э.д.с.,

φ_e - начальная фаза э.д.с.

В системе СИ частота измеряется в герцах (Гц), угловая частота измеряется в радиан в секунду (рад/с), период измеряется в секундах (с), фаза измеряется в радианах (рад) или в градусах. (°).

Важными параметрами синусоидального колебания являются действующее и среднее значения.

Действующим значением тока I называется среднеквадратичное значение электрического тока за период:

$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$. Среднее значение гармонического тока: $I_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T idt$. Аналогичные определения можно ввести для напряжения и э.д.с.:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2}\quad,\quad E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt},\ U_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt,\quad E_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T e\,dt.$$

Действующие значения этих величин связаны с амплитудными значениями следующим соотношением: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$.

Действующие значения токов, напряжений измеряются приборами электромагнитной, электродинамической, электростатической системы.

При изучении электрических цепей переменного тока необходимо учитывать кроме резистивного элемента индуктивный и емкостный элементы.

Сопротивление R в цепи переменного тока называется активным сопротивлением. Активное сопротивление проводника в общем случае больше чем его сопротивление в цепи постоянного тока за счет поверхностного эффекта. При низких частотах поверхностный эффект незначителен и в большинстве случаев не учитывается.

При прохождении через сопротивление синусоидального тока напряжение на нем определяется по закону Ома: $u_R = R i_R$. Амплитуда напряжения $U_m = I_m R$. Начальная фаза напряжения и тока равны $\varphi_u = \varphi_i$. Сдвиг фаз: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$. Активная мощность $P = RI_R^2$.

Индуктивным элементом электрической цепи называется пассивный идеализированный элемент, в котором происходит накопление энергии магнитного поля.

Основной **параметр** - индуктивность L. Условное изображение показано на рис.3.1.а. Напряжение и ток в индуктивности связаны соотношением $u = L\frac{di}{dt}, i = \frac{1}{L}\int u dt.$

При протекании синусоидального **тока** через индуктивность амплитуда напряжения $U_m = X_L I_m$, где X_L -индуктивное сопротивление, I_m – амплитуда тока. Начальная фаза напряжения опережает по фазе ток на угол $\frac{\pi}{2}$. Сдвиг фаз: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$. Произведение действующих значений напряжения и тока называется реактивной мощностью: $Q_L = U_L I_L$. Энергия, запасенная в магнитном поле: $W_L = \frac{Li^2}{2}$.

Емкостным элементом электрической цепи называется пассивный идеализированный элемент, в котором происходит накопление энергии электрического поля. Основной параметр – емкость С. Условное изображение показано на рис.3.1.б.

Ток в емкостном элементе определяется скоростью изменения заряда: $i = \frac{du}{dt} = C\frac{du}{dt}$. Напряжение $u = \frac{1}{C}\int i dt$. **При** соединении емкости к синусоидальному напряжению, амплитуда **тока** $I_m = B_C U_m$, где B_C – емкостная проводимость, $B_C = \omega C$. Величина обратная B_C называется емкостным сопротивлением $X_C = \frac{1}{B_C} = \frac{1}{\omega C}$. Начальная фаза тока $\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$, т.е. ток опережает по фазе напряжение на угол $\frac{\pi}{2}$. Произведение действующих значений напряжения и тока называется реактивной мощностью: $Q = U_C I_C = I_C^2 X_C$.

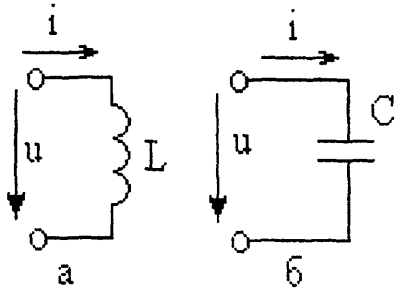


Рис 3.1.

3.2. Метод комплексных амплитуд

Расчет электрических цепей при синусоидальных воздействиях упрощается, если представить данные функции векторами или комплексными числами. Эти представления лежат в основе символического метода расчета электрических цепей - метода комплексных амплитуд.

Векторное представление синусоидальных функций основано на том, что каждой функции в соответствии ставится вращающийся вектор на комплексной плоскости. Этот вектор на комплексной плоскости является геометрическим изображением комплексного числа. Поэтому синусоидальным функциям соответствуют комплексные числа.

Мгновенному значению напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ в любой момент времени соответствует комплексное число, которое называется комплексным мгновенным напряжением. Оно изображается вектором на комплексной плоскости, длина которого равна амплитуде U_m и который образует с вещественной осью угол $\omega t + \varphi_u$:

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) + jU_m \sin(\omega t + \varphi_u) = U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}. \qquad (3.1)$$

В начальный момент времени $t = 0$, получается начальное положение вектора, который образует с вещественной осью угол φ_u. Такой вектор обозначается $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ и называется комплексной амплитудой. Модулем комплексной амплитуды является вещественная амплитуда синусоидального напряжения, а аргументом – начальная фаза, т.е. комплексная амплитуда включает оба параметра синусоиды:

амплитуду и фазу. Это очень важное свойство комплексной амплитуды. Вектор $\underline{U}_m$ неподвижен (рис.3.2.). Множитель $e^{j\omega t}$ является оператором вращения. Любая комплексная величина будучи умноженная на нее получает свойства вращающегося вектора, поэтому вектор $\underline{U}_m e^{j\omega t}$ - вращающийся вектор с угловой скоростью ω в направлении противоположном направлению вращения часовой стрелки.

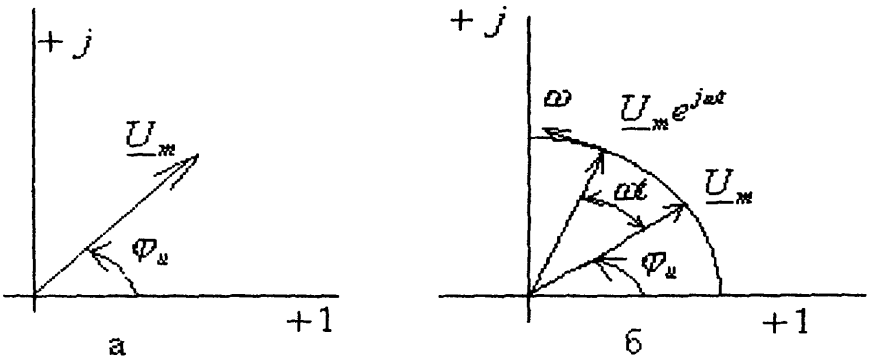


Рис 3.2.

Из выражения (3.1.) следует, что напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ можно рассматривать как проекцию вращающегося вектора $\underline{U}_m e^{j\omega t}$ на ось мнимых чисел: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Im}\left[U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}\right] = \mathrm{Im}\left[\underline{U}_m e^{j\omega t}\right]$, а напряжение $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ как проекцию вектора $\underline{U}_m e^{j\omega t}$ на ось вещественных чисел:

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Re}\left[U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_m e^{j\omega t}\right]$$

Вместо комплексных амплитуд часто рассматривают комплексные действующие величины:

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}}, \quad \underline{E} = \frac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}} \cdot$$

Обычно при расчетах цепей синусоидального тока наибольший интерес представляют соотношения между действующими значениями и относительные расположения векторов, а не мгновенные значения. Поэтому в комплексных значениях множитель $e^{j\omega t}$ опускается и рассматриваются в основном действующие значения.

Переход от синусоидальных функций к комплексным действующим значениям позволяет упростить действия с синусоидальными

функциями: сложение и вычитание, дифференцирование и интегрирование.

Введение комплексных значений напряжения и тока позволяет ввести понятие комплексного сопротивления:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + jX,$$

где. Z – модуль комплексного сопротивления, называется полным сопротивлением $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$,

φ - аргумент комплексного сопротивления, равен углу сдвига фаз между напряжением и током,

R - активное сопротивление,

X - реактивное сопротивление.

Величину, обратную комплексному сопротивлению $\underline{Z}$, называют комплексной проводимостью:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\varphi_i}}{U e^{j\varphi_u}} = Y e^{-j\varphi} = Y(\cos\varphi - j\sin\varphi) = G - jB,$$

где: Y -модуль комплексной проводимости, называется полной проводимостью $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$,

G - активная проводимость,

B – реактивная проводимость.

Комплексное сопротивление идеальных двухполюсников: для сопротивления R $\underline{Z} = R$ (активное), для индуктивности L комплексное сопротивление $\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$, где X_L - реактивное сопротивление индуктивности; комплексное сопротивление емкостного элемента $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, где X_C - реактивное сопротивление емкостного элемента.

В цепи синусоидального тока вводится понятие комплексной мощности:

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \overset{*}{I} = I^2 \cdot Z = I^2 \cdot (R + jX) = I^2 \cdot R + jI^2 \cdot X = P + jQ = S e^{j\varphi},$$

где S = $\left|\tilde{S}\right| = U \cdot I$ - полная мощность,

P = Re $\tilde{S} = U \cdot I \cdot \cos$ - активная мощность,

Q = Im $\tilde{S} = U \cdot I \cdot \sin\varphi$ - реактивная мощность.

Баланс мощностей источников и приемников в комплексной форме:

$$\tilde{S}_u = \tilde{S}_u,$$

$$\tilde{S}_u = \sum_{k=1}^{n} (\underline{E}_k \cdot \dot{I}_k + \underline{U}_k \cdot \dot{J}_k) = P_u + jQ_u,$$

$$\tilde{S}_u = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 \ \underline{Z}_k = P_u + jQ_u,$$

$$P_u = P_u, Q_u = Q_u.$$

При расчете электрических цепей символическим методом используются все виды эквивалентных преобразований и методы анализа электрических цепей, применяемых в цепях постоянного тока, т.е. методы расчета линейных электрических цепей при постоянных токах и напряжениях распространяются на электрические цепи при синусоидальных воздействиях. При этом необходимые уравнения записываются в комплексной форме, а соответствующие величины. токи, напряжения, сопротивления, проводимости должны быть записаны в комплексной форме. С учетом этого, можно записать основные законы электрических цепей в символической или в комплексной форме.

Закон Ома:

- для пассивного участка цепи с сопротивлением $\underline{Z}$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}};$$

- для участка цепи содержащей э.д.с.

$$\underline{I} = \frac{\pm \underline{U} \pm \underline{E}}{\underline{Z}}$$

Законы Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа для мгновенных и соответственно для комплексных значений токов имеет следующий вид

$$\sum_k i_k = 0, \qquad \sum_k \underline{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа для мгновенных и соответственно для комплексных падений напряжения и э.д.с. имеет следующий вид:

$$\sum_k \left(R_k i_k + u_{Lk} + u_{ck}\right) = \sum_k e_k, \qquad (3.2.)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k \cdot \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k .$$

Уравнение второго закона Кирхгофа для мгновенных значений напряжения и тока для одноконтурной цепи, состоящей из последовательно соединенных R, L, C элементов имеет следующий вид:

$$u = u_R + u_l + u_c = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt.$$

Учитывая, что $\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega t, \int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega t} e^{j\omega t}$, запишем уравнение в комплексной форме:

$$\underline{I}\, e^{j\omega t} R + j\omega \underline{I} e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t};$$

$$\underline{I}(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) = \underline{U};$$

$$\underline{I}\underline{Z} = \underline{U}, \qquad \underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(X_l - X_c) = R + jX.$$

В зависимости от сочетания X_L и X_C в цепи может быть индуктивный характер ($X_l > X_c$), емкостный характер $X_L < X_C$.

3.3. Упражнения и задачи для СРС

Пример 1. Определить значения токов методом эквивалентных преобразований в ветвях электрической цепи, изображенной на рис. 3.1., если $R = X_l = X_c = 21$ *Ом*, $e_2 = 210\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)$ *В*. Проверить баланс мощностей. Определить ток в индуктивном элементе методом активного двухполюсника.

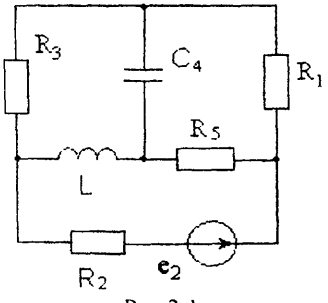


Рис.3.1

Решение. Для удобства расчетов представим заданную схему в виде комплексной схемы замещения, в которой каждому элементу соответствует его комплексное сопротивление, а источнику э.д.с. соответствует комплексное э.д.с. $\underline{E}_2 = 210e^{j90^\circ} = j210$ *В*, рис. 3.2.

Комплексные сопротивления ветвей:

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_5 = R = 21\ Ом,$

$\underline{Z}_4 = -jX_c = -j21 = 21 \cdot e^{-j90^\circ}\ Ом,$

$\underline{Z}_6 = jX_L = j21 = 21 \cdot e^{j90^\circ}\ Ом,$

$\underline{E}_2 = j210 = 210 \cdot e^{j90^\circ}\ В.$

Используя эквивалентные преобразования, "свернем" схему к одному эквивалентному комплексному сопротивлению $\underline{Z}_Э$. Для этого преобразуем звезду сопротивлений $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_3 - \underline{Z}_4$ в эквивалентный треугольник с комплексными сопротивлениями:

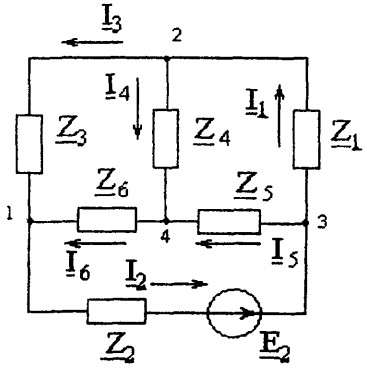


Рис. 3.2.

$$\underline{Z}_{14} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1} = 21 - j21 - \frac{j21 \cdot 21}{21} = 21 - j42 = 46{,}96 e^{-j63{,}4^\circ}\ Ом$$

$$\underline{Z}_{43} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3} = 21 - j21 - \frac{j21 \cdot 21}{21} = 21 - j442 = 46{,}96\ e^{-j63{,}4^\circ}\ Ом.$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} = 21 + 21 + \frac{21 \cdot 21}{-j21} = 42 + j21 = 46{,}96\ e^{j26{,}6^\circ}\ Ом.$$

С учетом данных преобразований схема примет следующий вид.

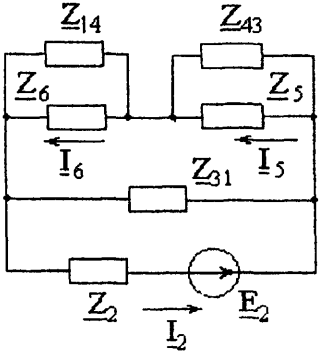


Рис 3.3.

Дальнейшие эквивалентные преобразования позволяют преобразовать схему в следующий вид.

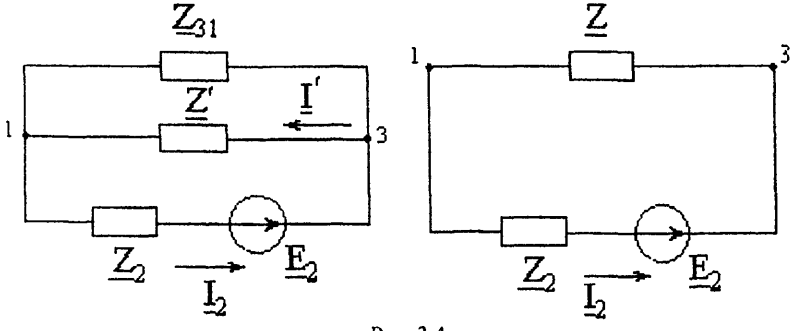


Рис. 3.4.

Значения эквивалентных сопротивлений:

$$\underline{Z}_7 = \frac{\underline{Z}_6 \cdot \underline{Z}_{14}}{\underline{Z}_6 + \underline{Z}_{14}} = \frac{21e^{j90^\circ} \cdot 46{,}96e^{-j63{,}4^\circ}}{21 - j21} = \frac{986{,}16e^{j26{,}6^\circ}}{29{,}7e^{-j45^\circ}} = 33{,}2e^{j71{,}6^\circ} = (10{,}48 + j31{,}5)\ Ом$$

$$\underline{Z}_8 = \frac{\underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_{43}}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_{43}} = \frac{21 \cdot 46{,}96e^{j63{,}4^\circ}}{42 - j42} = \frac{986{,}16e^{-j63{,}4^\circ}}{59{,}4e^{-j45^\circ}} = 16{,}6e^{-j18{,}4^\circ} = (15{,}75 - j5{,}24)\ Ом$$

$$\underline{Z}' = \underline{Z}_7 + \underline{Z}_8 = 26{,}23 + j26{,}23 = 37e^{j45^\circ}\ Ом$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}' \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}' + \underline{Z}_{31}} = \frac{37e^{j45^\circ} \cdot 46{,}96e^{j26{,}6^\circ}}{26{,}23 + j26{,}23 + 42 + j21} = \frac{1174{,}97e^{j71{,}6^\circ}}{68{,}23 + j47{,}23} = \frac{1174{,}97e^{j71{,}6^\circ}}{82{,}98e^{j34{,}6^\circ}} = 21e^{j37^\circ} =$$

$$= (16{,}8 + j12{,}64)\ Ом$$

$$\underline{Z}_э = \underline{Z}_2 + \underline{Z} = 21 + 16{,}8 + j12{,}64 = 37{,}8 + j12{,}64 = 39{,}86e^{j18{,}5^\circ}\ Ом$$

По закону Ома

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_э} = \frac{210e^{j90^\circ}}{39{,}86e^{j18{,}5^\circ}} = 5{,}27e^{j71{,}5^\circ} = (1{,}67 + j5)\ A.$$

Ток $\underline{I}'$ определяется формулой разброса:

$$\underline{I}' = \underline{I}_2 \frac{\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}' + \underline{Z}_{31}} = \frac{5{,}27e^{j71{,}5^\circ} \cdot 46{,}96e^{j26{,}6^\circ}}{82{,}98e^{j34{,}6^\circ}} = 3e^{j63{,}5^\circ} = (1{,}33 + j2{,}67)\ A,$$

$$\underline{U}_{34} = \underline{I}' \cdot \underline{Z}_8 = 3e^{j63{,}5^\circ}\ 16{,}6e^{-j18{,}4^\circ} = 49{,}5e^{j45^\circ}\ B,$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{34}}{\underline{Z}_5} = \frac{49{,}5e^{j45^\circ}}{21} = 2{,}36e^{j45^\circ} = (1{,}67 + j1{,}67)\ A,$$

$$\underline{U}_{41} = \underline{I}' \cdot \underline{Z}_7 = 3e^{j63{,}5^\circ} \cdot 33{,}2e^{j71{,}6^\circ} = 99{,}6e^{j135^\circ}\ B,$$

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{U}_{41}}{\underline{Z}_6} = \frac{99{,}6e^{j135^\circ}}{21e^{j90^\circ}} = 4{,}74e^{j45^\circ} = (3{,}35 + j3{,}35)\ A.$$

Остальные токи определим по первому закону Кирхгофа:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 - \underline{I}_5 = 11{,}67 + j5 - 1{,}67 - j11{,}67 = j3{,}33 = 3{,}33e^{j90^\circ}\ A,$

$\underline{I}_3 = \underline{I}_2 - \underline{I}_6 = 1{,}67 + j5 - 3{,}35 - j3{,}35 = -1{,}68 + j1{,}68 = 2{,}38e^{j135^\circ}\ A,$

$\underline{I}_4 = \underline{I}_6 - \underline{I}_5 = 3{,}35 + j3{,}35 - 1{,}67 - j1{,}67 = 1{,}68 + j1{,}68 = 2{,}38e^{j45^\circ}\ A.$

Правильность расчета тока проверяется по балансу мощностей.

Комплексная мощность источника:

$\tilde{S} = \underline{E}_2 \cdot \underline{I}_2 = 210e^{j90^\circ} \cdot 5{,}27e^{-j71{,}5^\circ} = 1106{,}7e^{j18{,}5^\circ} = 1049{,}5 + j351{,}2 = P_u + jQ_u,$

$P_u = 1049{,}5\ Bm, \quad Q_u = 351{,}2\ BAp.$

Комплексная мощность приемников:

$\tilde{S}_n = I_1^2\underline{Z}_1 + I_2^2\underline{Z}_2 + I_3^2\underline{Z}_3 + I_4^2\underline{Z}_4 + I_5^2\underline{Z}_5 + I_6^2\underline{Z}_6 = \left(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_5^2\right)R + j\left(I_6^2 - I_4^2\right)X_L =$

$= \left(3{,}33^2 + 5{,}27^2 + 2{,}38^2 + 2{,}36^2\right)21 + j\left(4{,}74^2 - 2{,}38^2\right)21 = 1052 + j3529 = P_n + jQ_n.$

$P_u = 1052\ Bm, \quad Q_u = 352{,}9\ BAp.$

Баланс мощностей выполняется, следовательно, токи рассчитаны верно.

Определить ток в ветви с индуктивностью методом активного двухполюсника.

Согласно методу активного двухполюсника: $\underline{I}_6 = \dfrac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_{ex} + \underline{Z}_6}$,

где. $\underline{U}_{xx}$ и $\underline{Z}_{ex}$ - напряжение холостого хода и входное сопротивление относительно зажимов 4–1 выделенной ветви с L_6 (рис. 3.5.)

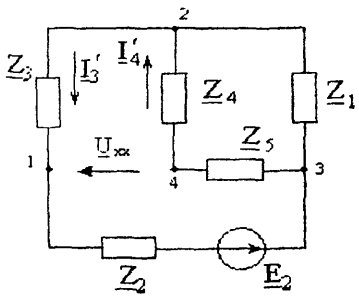


Рис. 3.5.

Определим $\underline{U}_{xx}$ и $\underline{Z}_{ex}$

По второму закону Кирхгофа: $\underline{U}_{xx} = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3' + \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4'$.

Используя эквивалентные преобразования "свернем" схему в одноконтурную:

$$\underline{Z}_{45} = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 = 21 - j21 = 29{,}7\, e^{-j45^\circ}\ Ом,$$

$$\underline{Z}_{32} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_{45}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{45}} = \frac{21 \cdot 29{,}7\, e^{-j45^\circ}}{42 - j21} = \frac{623{,}7\, e^{-j45^\circ}}{46{,}96\, e^{-j26{,}6^\circ}} = 13{,}3\, e^{-j18{,}4^\circ} = (12{,}6 - j4{,}2)\ Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{32} = 21 + 21 + 12{,}6 - j42 = 54{,}6 - j4{,}2 = 54{,}76\, e^{-j4{,}4^\circ}\ Ом$$

По закону Ома

$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_э} = \frac{210\, e^{j90^\circ}}{54{,}76\, e^{-j4.4^\circ}} = 3{,}83\, e^{j94{,}4^\circ} = (-0{,}29 + j3{,}82)\ A.$$

Ток $\underline{I}_4$ определяется формулой разброса:

$$\underline{I}_4' = \underline{I}_3' \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{45}} = \frac{3{,}83\, e^{j94{,}4^\circ} \cdot 21}{46{,}96\, e^{-j26{,}6^\circ}} = 1{,}71\, e^{j121^\circ} = (-0{,}88 + j1{,}47)\ A.$$

Определив токи $\underline{I}_3'$ и $\underline{I}_4'$, можно найти $\underline{U}_{xx}$.

$$\underline{U}_{xx} = [0{,}29 + j3{,}82 - j(-0.88 + j1{,}47)] \cdot 21 = 24{,}78 + j98{,}7 = 101{,}76\, e^{j76^\circ}\ B.$$

Теперь определим $\underline{Z}_{вх}$ относительно зажимов 4–1. Для этого преобразуем звезду $\underline{Z}_3 - \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1$ в эквивалентный треугольник сопротивлений, это было сделано в п. 3, воспользуемся этими результатами:

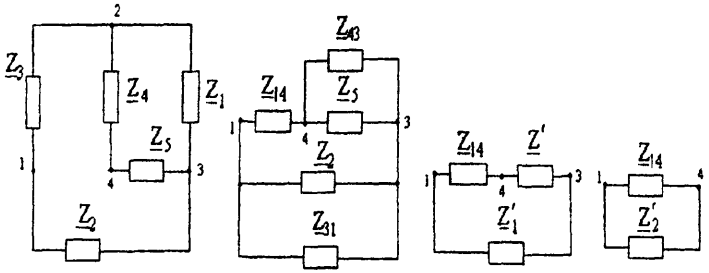


Рис. 3.6.

$$\underline{Z}_1' = \frac{\underline{Z}_2\,\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_{31}} = \frac{21\cdot 46{,}96e^{j26{,}6^\circ}}{63+j21} = \frac{986{,}16e^{j26{,}6^\circ}}{66{,}4\,e^{j18{,}4^\circ}} = 14{,}85e^{j8{,}2^\circ} = (14{,}7+j2{,}12)\,Ом,$$

$$\underline{Z}_2' = \underline{Z}_1' + \underline{Z}' = 14{,}7+j2{,}12+15{,}75-j5{,}24 = 30{,}22-j3{,}12 = 30{,}38e^{-j5{,}9^\circ}\ Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{Z}_{14}\cdot\underline{Z}_2'}{\underline{Z}_{14}+\underline{Z}_2'} = \frac{46{,}96e^{-j63{,}4^\circ}\cdot 30{,}38e^{-j5{,}9^\circ}}{21-j42+30{,}22-j3{,}12} = \frac{1426{,}64e^{-j69{,}3^\circ}}{51{,}22-j45{,}12} = \frac{1426{,}64e^{-j69{,}3^\circ}}{68{,}26e^{-j41{,}3^\circ}} = 20{,}9\,e^{-j28^\circ} =$$

$$= (18{,}45-j9{,}8)\,Ом$$

Искомый ток:

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_{вх}+\underline{Z}_6} = \frac{101{,}76\,e^{j76^\circ}}{18{,}45-j9{,}8+j21} = \frac{101{,}76\,e^{j76^\circ}}{18{,}45+j11{,}2} = \frac{101{,}76\,e^{j76^\circ}}{21{,}58\,e^{j31^\circ}} = 4{,}72\,e^{j45^\circ}\ A.$$

Полученный результат совпадает с тем, что мы имели в п.3.

Пример 2. Определить токи методом контурных токов в ветвях электрической цепи изображенной на рис. 3.7, если E_{1m} =170 В, E_{2m} = 141 В, $\varphi_{e_1} = -30^\circ, \varphi_{e_2} = 0$, R_2 = 40 Ом, R_3 = 30 Ом, L_1 = 127,2 мГн, L_3 =159,2 мГн, C_1 = 63,6 мкФ, C_3 = 106 мкФ, f = 50 Гц.

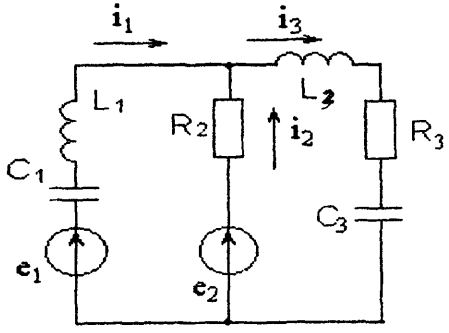


Рис.3.7.

Решение. Индуктивные сопротивления:

$$X_{l1} = \omega\cdot L_1 = 314\cdot 127{,}2\cdot 10^{-3} = 40Ом,$$

$$X_{l2} = \omega\cdot L_2 = 314\cdot 159{,}2\cdot 10^{-3} = 50Ом.$$

Емкостные сопротивления:

$$X_{c1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{10^6}{314 \cdot 63{,}6} = 50 Ом,$$

$$X_{c3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3} = \frac{10^6}{314 \cdot 106} = 30 Ом.$$

Для удобства расчетов составим комплексную схему замещения. в которой каждому элементу соответствует комплексное сопротивление, а э.д.с. - комплексное э.д.с. (рис.3.8.):

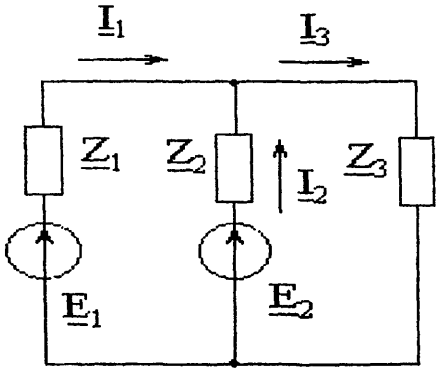


Рис.3.8.

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = j(X_{l1} - X_{c1}) = j(40 - 50) = -j10 = 10e^{-j90^\circ} Ом,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 40 Ом,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j(X_{l3} - X_{c3}) = 30 + j(50 - 30) = 30 + j20 = 36e^{j33.7^\circ} Ом.$$

Составим уравнения по методу контурных токов, направив их по часовой стрелке:

$$\underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \underline{I}_{22} \cdot \underline{Z}_2 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2,$$

$$-\underline{I}_{11} \cdot \underline{Z}_2 + \underline{I}_{22} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \underline{E}_2.$$

Собственные комплексные сопротивления контуров и контурные э.д.с.:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = -j \cdot 10 + 40 = 40 - j \cdot 10 = 41{,}23e^{\,j14^\circ}\ Ом,$$

$$\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 40 + 30 + j \cdot 20 = 70 + j \cdot 20 = 72{,}8e^{\,j16^\circ}\ Ом,$$

$$\underline{E}_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_e} = \frac{170}{\sqrt{2}} e^{-j30^\circ} = 120{,}6e^{-j30^\circ} = (104{,}4 - j60{,}3)\ B,$$

$$\underline{E}_2 = \frac{E_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 100\ B,$$

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = 104{,}4 - j60{,}3 - 100 = 4{,}4 - j60{,}3 = 60{,}46e^{-j85^\circ}\ B.$$

Подставив числовые значения в уравнения, получим:

$$\underline{I}_{11} \cdot 41{,}23e^{-j14} - \underline{I}_{22} \cdot 40 = 60{,}46e^{\,j85.8^\circ},$$

$$-\underline{I}_{11} \cdot 40 + \underline{I}_{22} \cdot 72{,}8e^{\,j16} = 100.$$

Решим систему уравнений с помощью определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 41{,}23e^{-j14^\circ} & -40 \\ -40 & 72{,}8e^{\,j16^\circ} \end{vmatrix} = 3001{,}544e^{\,j2^\circ} - 1600 = 1399{,}72 + j\ 104{,}75 = 1403{,}63\,e^{\,j4.3^\circ},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 60{,}46e^{-j85.8^\circ} & -40 \\ 100 & 72{,}8e^{\,j16^\circ} \end{vmatrix} = 4401{,}5\,e^{-j69.8^\circ} + 4000 = 5519{,}825 - j4130{,}78 = 6894{,}3\,e^{-j36.8^\circ}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 41{,}23e^{-j14^\circ} & 60{,}46e^{-j85.8^\circ} \\ -40 & 100 \end{vmatrix} = 41{,}23e^{-j14^\circ} + 2418{,}4e^{\,j85.8^\circ} = 4000{,}53 - j997{,}4 + 177{,}1 - j2411{,}9 =$$

$$-4177{,}64 - j3409{,}3 = 5392{,}2\,e^{\,j39.2^\circ}$$

Контурные токи:

$$\underline{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6894{,}3e^{-j36.8^\circ}}{1403{,}63e^{\,j4.3^\circ}} = 4{,}91e^{-j41{,}1^\circ} = (3{,}7 - j3{,}23)\ A,$$

$$\underline{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5392{,}2e^{-j39.2^\circ}}{1403{,}63e^{\,j4.3^\circ}} = 3{,}84e^{\,j43.5^\circ} = (2{,}8 - j2{,}64)\ A.$$

Токи в ветвях:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 3{,}7 - j3{,}23 = 4{,}91e^{-j41{,}1^\circ}\ A,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{22} - \underline{I}_{11} = 2{,}8 - j2{,}64 - j3{,}7 + j3{,}23 = -0{,}9 + j0{,}59 = 1{,}08e^{j146{,}7^\circ}\ A,$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = 2{,}8 - j2{,}64 = 3{,}84e^{-j43{,}5^\circ}\ A.$$

Мгновенные значения токов:

$$i_1 = 4{,}91 \cdot \sqrt{2}\ \sin\left(\omega t - 41{,}1^\circ\right) A,$$

$$i_2 = 1{,}08 \cdot \sqrt{2}\ \sin\left(\omega t + 146{,}7^\circ\right) A,$$

$$i_3 = 3{,}84 \cdot \sqrt{2}\ \sin\left(\omega t - 43{,}5^\circ\right) A.$$

Правильность расчета токов проверим по балансу мощностей.

Комплексная мощность источников:

$$\widetilde{S}_I = \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 = \underline{E}_1 \cdot \overset{\bullet}{\underline{I}}_1 + \underline{E}_2 \cdot \overset{\bullet}{\underline{I}}_2 = 120{,}6e^{j11{,}1^\circ} \cdot 4{,}91e^{j41{,}1^\circ} + 100 \cdot 11{,}08e^{-j146{,}7^\circ} =$$

$$+ 592{,}146e^{j11{,}1^\circ} + 108e^{-j146{,}7^\circ} = 581{,}07 + j114 - 90{,}27 - j59{,}3 = 490{,}8 + j54{,}7 =$$

$$= P_I + jQ_I.$$

Следовательно, $P_E = 490{,}8$ Вт, $Q_E = 54{,}7$ Вар.

Комплексная мощность приемников:

$$\widetilde{S}_n = I_1^2 \cdot \underline{Z}_1 + I_2^2 \cdot \underline{Z}_2 + I_3^2 \cdot \underline{Z}_3 = 4{,}91^2 \cdot (-j10) + 1{,}08^2 \cdot 40 + 3{,}84^2(30 + j20) =$$

$$= 489 + j53{,}83 = P_n + jQ_n.$$

Следовательно, $P_n = 489\ Вт$, $Q_n = 53{,}83\ Вар$. Баланс мощностей соблюдается, задача решена верно.

П р и м е р 3. Определить токи в цепи, изображенной на рис. 3.9., если $e_2 = 10\sqrt{2}\ \sin \omega t\ B$, $\underline{j} = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ) A$, $R = 2 \cdot X_1 = X_C = 10\ Ом$. Проверить баланс мощностей.

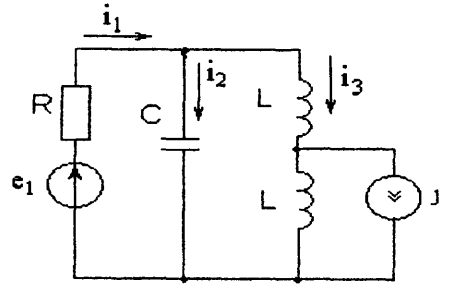


Рис. 3.9.

Р е ш е н и е. Составим комплексную схему замещения:

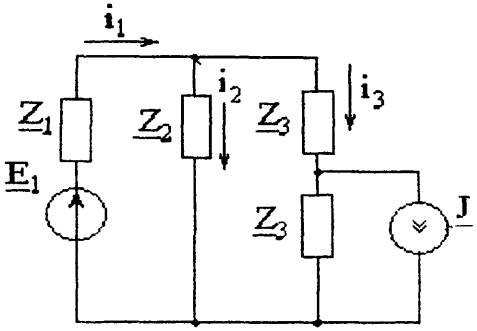


Рис. 3.10.

Комплексные сопротивления ветвей и комплексные э.д.с. ветвей:

$\underline{Z}_1 = R = 10\,Ом$,

$\underline{Z}_2 = \dfrac{1}{j\omega C} = -j\dfrac{1}{\omega C} = -jX_c = -j10\,Ом$,

$\underline{Z}_3 = j\omega L = jX_L = j5\,Ом$,

$\underline{E}_1 = 10\,B$,

$\underline{J} = j2 = 2e^{j90^\circ}\,A$

Источник тока преобразуем в источник э.д.с.:

$$\underline{E}_2 = \underline{J} \cdot jX_1 = 2e^{j90^\circ} \cdot j5 = j10\,e^{j90^\circ} = 10\,e^{j180^\circ} = -10\,B.$$

С учетом этого, схема примет следующий вид.

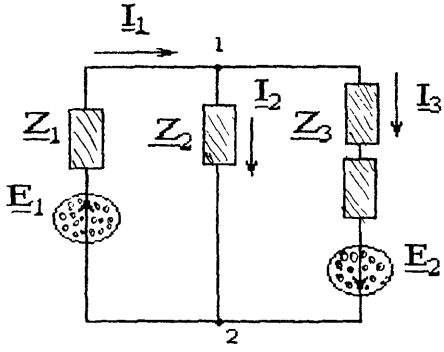


Рис.3.11.

Используя метод двух узлов и приняв потенциал узла 2 равным нулю, найдем токи в ветвях схемы:

$$\underline{\varphi}_1\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}\right)=\underline{E}_1\frac{1}{R}-\underline{E}_2\frac{1}{\underline{Z}_2},$$

$$\underline{\varphi}_1=\frac{\underline{E}_1\frac{1}{\underline{Z}_1}-\underline{E}_2\frac{1}{\underline{Z}_2}}{\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}}=\frac{10\frac{1}{10}+10\frac{1}{j10}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{j10}+\frac{1}{j10}}=\frac{\left(1+\frac{1}{j}\right)}{\frac{1}{10}}=\frac{(1+j)10}{j}=\frac{10-j10}{1}=10-j10\ B$$

Токи в ветвях:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{E}_1-\underline{\varphi}_1}{\underline{Z}_1}=\frac{10-10+j10}{10}=j=e^{j90^\circ}\ \ A,$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{\varphi}_1}{\underline{Z}_2}=\frac{(10-j10)}{-j10}=j+1=\sqrt{2}\ e^{j45^\circ}\ \ A,$$

$$\underline{I}_3=\frac{\underline{\varphi}_1+\underline{E}_2}{j2X_l}=\frac{10-j10-10}{j10}=-1=e^{j180^\circ}\ \ A.$$

Мгновенные значения токов:

$$i_1=\sqrt{2}\sin(\omega t+90^\circ)\ A,$$

$$i_2=2\sin(\omega t+45^\circ)\ \ A,$$

$$i_3=\sqrt{2}\sin(\omega t+180^\circ)\ A.$$

Баланс мощностей. Мощность, генерируемая источниками:

$$\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = \underline{E}_1 \cdot \dot{\underline{I}}_1 + \underline{E}_2 \cdot \dot{\underline{I}}_3 = 10 \cdot (-j) + (-10)(-1) = 10 - j10 = P_u + jQ_u ,$$

$$P_u = 10\ Bm , \quad Q_u = -10\ BAp.$$

Мощность, генерируемая потребителями:

$$\tilde{S}_u = I_1^2 R + jI_3^2 \cdot 2X_1 + I_2^2(-jX_c) = 1 \cdot 10 + j \cdot 10 + 2(-j10) = 10 - j10,$$

$$P_u = 10\ Bm, \quad Q_u = -10\ BAp.$$

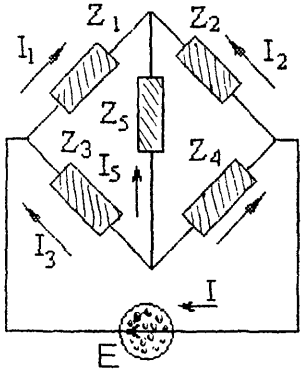
Баланс мощностей выполняется.

Задачи для СРС.

1. Найти токи в схеме и построить топографическую диаграмму для схемы электрической цепи, если

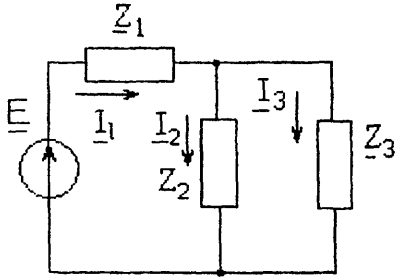
$$\underline{Z}_1 = 10 Ом, \underline{Z}_2 = j5 Ом, \underline{Z}_3 = j10 Ом, \underline{Z}_4 = 5 Ом,$$

$$\underline{Z}_5 = -j10 Ом, \underline{E} = 130\ B.$$



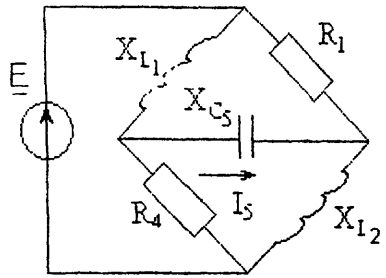
2 Определить комплексные и мгновенные значения токов в ветвях электрической схемы, если:

$$\underline{E} = 120\ B, \underline{Z}_1 = 3 + j2 Ом, \underline{Z}_2 = 10 - j15 Ом,.$$

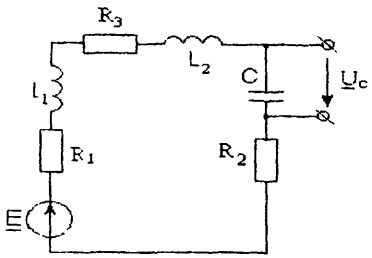


$\underline{Z}_3 = 2 + j6\,Ом.$

3. Определить ток $\underline{I}_5$ методом эквивалентного генератора в схеме электрической цепи, если:
$E = 130\,В, R_1 = 10\,Ом, X_{L2} = 5Ом, X_{L3} = 10\,Ом, R_4 = 5\,Ом, X_{C5} = 10\,Ом$

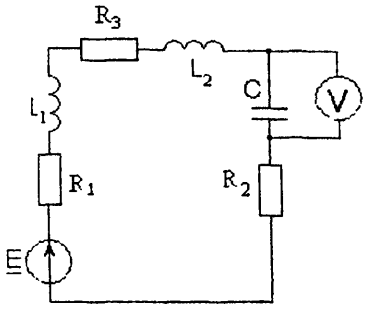


4. Задана цепь синусоидального тока и ее параметры $E = 200\,В$, $X_{L1} = 5\,Ом, R_2 = 10\,Ом, X_{L2} = 17\,Ом, R_3 = 1{,}5\,Ом, X_C = 7{,}5\,Ом$. Определить комплексное действующее напряжение на конденсаторе $\underline{U}_C$.



5. Задана цепь синусоидального тока и ее параметры $\underline{E} = 200e^{j60^\circ}\ B$,

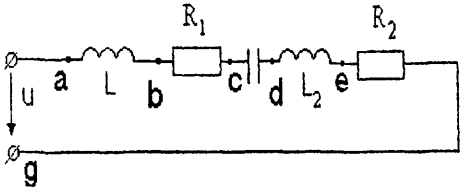
$R_1 = 8{,}66\ Ом,\ X_{L1} = 5\ Ом,\ R_2 = 10\ Ом,\ X_{L2} = 17{,}32\ Ом,\ X_C = 7{,}32\ Ом,\ R_3 = 2\ Ом.$



Определить показание вольтметра электродинамической системы

6.Построить топографическую векторную диаграмму для цепи, параметры которой

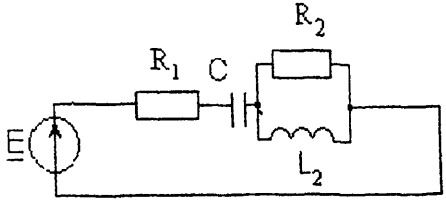
$R_1 = R_2 = 10\ Ом,\ L_1 = 31{,}8\ мГн,\ L_2 = 20\ мГн,\ C = 159\ мкФ,\ f = 50\ Гц,\ U = 100 B.$



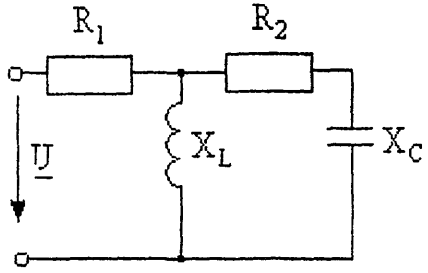
7 Рассчитать токи методом контурных токов, если

$R_1 = 10\ Ом,\ R_2 = 15\ Ом,$

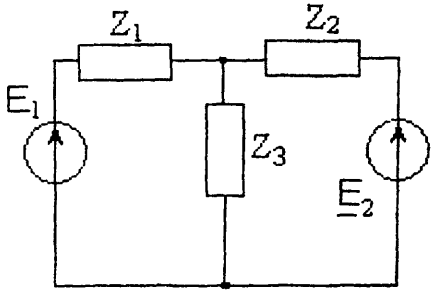
$L = 31{,}8 мГн,\ C = 200\ мкФ,\ f = 50\ Гц,\ \underline{E} = j100\ B.$



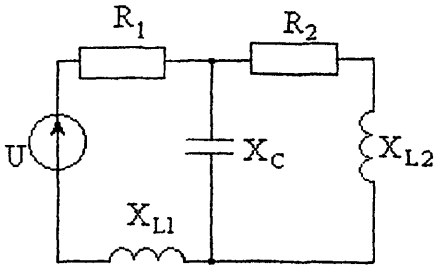
8. Определить токи в схеме электрической цепи, если
$R_1 = 10\,Ом, R_2 = 20\,Ом,$
$X_{L} = 40\,Ом, X_{C} = 20\,Ом, \underline{U} = j120\,В.$



9. Определить ток I_3 методом эквивалентного генератора в схеме, если $E_1 = 127\,В, E_2 = 127e^{j120^\circ}\,В, \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 1 + j3\,Ом, \underline{Z}_3 = 4 + j3\,Ом.$

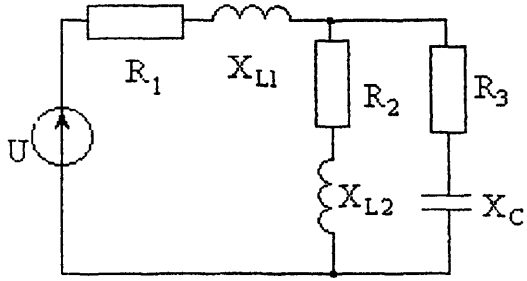


10. Построить топографическую диаграмму и из нее определить U, если: $R_1 = 20\,Ом, R_2 = 40\,Ом,$
$X_{L1} = 60\,Ом, X_{L2} = 30\,Ом, X_{C} = 50\,Ом.$



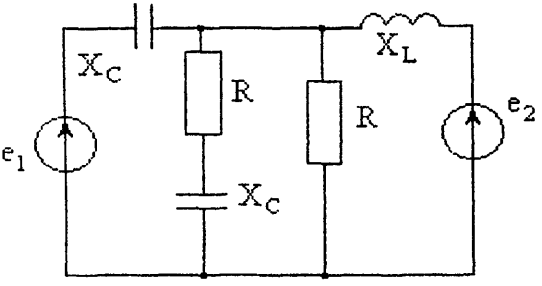
11. Определить токи и построить топографическую диаграмму, если

$R_1 = 5Ом, X_{L1} = 6Ом, R_2 = 10Ом, R_3 = 5Ом, X_{L2} = 20Ом, X_C = 40Ом, U = 100В.$



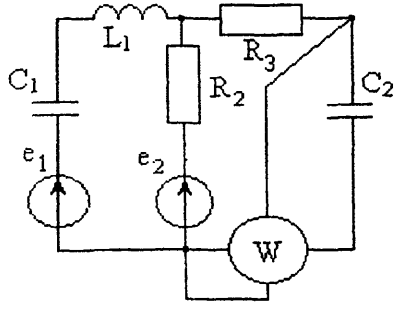
12. Определить токи в схеме электрической цепи, если:

$R = 10Ом, X_C = 10Ом, X_L = 20Ом, e_1 = 20\sqrt{2}\sin\omega t\ В, e_2 = 100\sin(\omega t + 45°)\ В.$

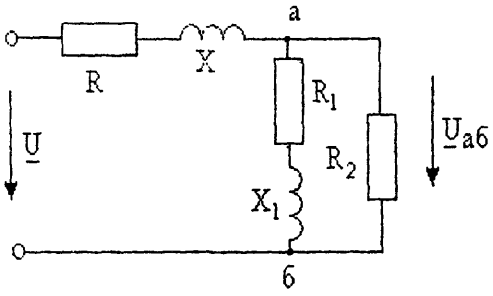


13. Найти показание ваттметра в схеме электрической цепи, если

$e_1 = 170\sin(\omega t - 30°)В, e_2 = 141\sin\omega t\ В, L_1 = 127{,}2мГн, C_1 = 60мкФ, R_2 R_3 = 40Ом, C_2 = 106мкФ$



14. Определить напряжение $U_{аб}$ в схеме электрической цепи, если $R = 5Ом, R_1 = 10Ом, X_1 = 25Ом, X = 11Ом, R_2 = 5Ом, \underline{U} = j120\ В$.



4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В предыдущих разделах рассматривали анализ линейных электрических цепей при постоянных и гармонических воздействиях.

Однако на практике, как правило, используются негармонические (несинусоидальные) воздействия. Отличительной чертой указанных воздействий является сложный негармонический характер. Во многих электротехнических и радиотехнических устройствах негармонический режим работы цепи является нормальным режимом.

Настоящий раздел посвящен анализу линейных электрических цепей, находящихся под воздействием негармонических периодических сигналов.

4.1. Основные понятия и определения

В основе методов анализа линейных электрических цепей при несинусоидальных периодических или почти периодических сигналов лежат спектральные представления несинусоидальных воздействий с помощью математического аппарата рядов и интеграла Фурье.

Из математики известно, что любую периодическую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega_1 t + в_k \sin k\omega_1 t\right),$$
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(k\omega_1 t + \psi_k\right). \qquad (4.1)$$

Коэффициенты ряда Фурье равны

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_1 t\,dt,$$

$$в_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\,\omega_1 t\,dt,$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + в_k^2}, \quad tg\psi_k = \frac{a_k}{в_k},$$

где Т – период несинусоидальной функции,

ω_1 - основная частота пульсации,

k - номер гармоники.

Выражение (4.1.) следует понимать как представление периодической несинусоидальной функции $f(t)$ в виде суммы постоянной составляющей a_0 и гармонических составляющих с частотами $k\omega_1$, амплитудами c_k.

Если периодическая кривая обладает каким-либо видом симметрии, то при ее разложении в ряд Фурье некоторые составляющие отсутствуют.

1. Если функция $f(t)$ - четная, т.е. симметрична относительно оси ординат $f(t)=f(-t)$, то она содержит только постоянную составляющую и косинусоидальные составляющие: $f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega_1 t$.

2. Если функция $f(t)$ - нечетная, т.е. симметрична относительно начала координат $f(t)=-f(-t)$, то она содержит только синусоидальные составляющие: $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\omega_1 t$.

3. Если функция $f(t)$ симметрична относительно оси абцисс при совмещении двух полупериодов во времени, т.е. $f(t)=-f(t+\pi)$., то она содержит только нечетные гармоники.

Периодически изменяющаяся несинусоидальная величина характеризуется действующим значением. Действующее значение периодического несинусоидального тока $i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{mk}\sin(k\omega_1 t+\psi_k)$:

$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_{mk}^2}{2}}=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}.$$

Аналогично, вводится понятие и для напряжения и э.д.с.

$$U=\sqrt{U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2},\ E=\sqrt{E_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}E_k^2}.$$

Активная мощность периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник:

$$P=\sum_{k=0}^{\infty}U_k I_k\cos\varphi_k=\sum_{k=0}^{\infty}P_k.$$

Аналогично вводится понятие реактивной мощности в цепи с периодическими несинусоидальными величинами: реактивная мощность

равна сумме реактивных мощностей отдельных гармоник: $Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$.

Полная мощность равна произведению действующих значений напряжений и тока: $S = U I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$. Содержание в одной из кривых напряжения и тока гармоник , отсутствующих в другой кривой, не отражается на величинах активной и реактивной мощностей, но повышает действующее значение той функции, которая содержит эти гармоники, поэтому сумма квадратов активной и реактивной мощностей в цепи с периодическими несинусоидальными величинами не равна квадрату полной мощности: $S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$, $S^2 + T^2 = P^2 + Q^2$,

где Т – мощность искажения.

Мощность искажения характеризует степень различия в формах кривых напряжения и тока. Если сопротивление в цепи активное. то кривые напряжения и тока подобны; при этом $Q = 0, T = 0$.

4.2. Методика расчета электрических цепей при негармонических воздействиях

Расчет цепей с несинусоидальными э.д.с. и токами на входе необходимо проводить в следующей последовательности.

1 Разложить заданные э.д.с. и токи источников в ряд Фурье.

2. Применяя принцип наложения, рассчитать токи и напряжения в цепи для каждой гармоники в отдельности. Для каждой составляющей э.д.с. или тока составляется эквивалентная схема замещения, причем индуктивное сопротивление для k-гармоники в k-больше, а емкостное k-раз меньше, чем для первой гармоники:

$$X_{Lk} = k\omega_1 L = kX_{L1},$$

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega_1 C} = \frac{X_{C1}}{k}.$$

3. Результирующий ток или напряжение находятся путем наложения полученных частичных токов и напряжений от каждой гармоники в отдельности, например, для тока в какой-либо ветви:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + ... + i_n.$$

П р и м е р 1. Найти показание амперметра тепловой системы, если

$e = 15 + 100\sin\omega_1 t + 10\sin 3\omega_1 t + \sin 5\omega_1 t \ \ B,$

$R_1 = 5\ Ом, L = 1\ мГн, C = 1\ мкФ,$

$f_1 = 1000\ Гц.$

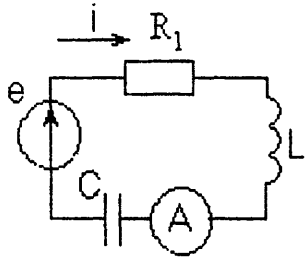


Рис 4.1.

Р е ш е н и е. 1. Расчет для постоянной составляющей: $E_{(0)} = 15$ В, ток $I_{(0)} = 0$.

2.Расчет для первой гармоники: $e_{(1)} = E_{m(1)}\sin\omega_1 t = 100\sin\omega_1 t\ B.$

$\underline{E}_{m(1)} = 100\ B.$ Комплексное входное сопротивление:

$\underline{Z}_{(1)} = R + jX_{L(1)} - jX_{c(1)},$

$X_{L(1)} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = 6{,}28\cdot 1000\cdot 10^{-3} = 6{,}28\ Ом,$

$$X_{c(1)} = \frac{1}{\omega_1 C_1} = \frac{1}{2\pi f_1 C_1} = \frac{1}{6{,}28\cdot 1000\cdot 10^{-6}} = 159{,}24\ Ом,$$

$$\underline{Z}_{(1)} = R + jX_{L(1)} - jX_{c(1)} = 5 + j6{,}28 - j159{,}96 = 153{,}04\,e^{-j88^\circ}\ Ом.$$

Ток: $$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{E}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{100}{153{,}04}\,e^{j88} = 0{,}653\,e^{j88^\circ}\ A.$$

Мгновенное значение тока: $i_{(1)} = 0{,}653\sin\left(\omega_1 t + 88^\circ\right) A.$

4.Расчет для третьей гармоники:

$e_{(3)} = \underline{E}_{m(3)}\sin 3\omega_1 t = 10\sin 3\omega_1 t\ B.$ $\underline{E}_{m(3)} = 10\ B.$ Комплексное входное сопротивление:

$$\underline{Z}_{(3)} = R + jX_{L(3)} - jX_{c(3)} ,$$

$$X_{L(3)} = 3\,X_{L(1)} = 3 \cdot 6{,}28 = 18{,}84\ Ом,$$

$$X_{c(3)} = \frac{X_{c(1)}}{3} = \frac{159{,}24}{3} = 53{,}08\ Ом,$$

$$\underline{Z}_{m(3)} = 5 + j18{,}84 - j53{,}08 = 5 - j34{,}24 = 34{,}60\, e^{\,j81^\circ} ,$$

$$\underline{I}_{m(3)} = \frac{\underline{E}_{m(3)}}{\underline{Z}_{m(3)}} = \frac{10}{34{,}603}\, e^{\,j81^\circ} = 0{,}2889\, e^{\,j81^\circ}\ A.$$

Мгновенное значение тока: $i_{(3)} = 0{,}2889 \sin\left(3\omega_1 t + 81^\circ\right) A.$

5. Расчет для пятой гармоники: $e_{(5)} = \sin 5\omega_1 t\ \ B.$

Комплексное входное сопротивление: $\underline{Z}_{(5)} = R + jX_{L(5)} - jX_{c(5)}$,

$$X_{L(5)} = 5\ X_{L(1)} = 5 \cdot 6{,}28 = 31{,}4\ Ом,$$

$$X_{c(5)} = \frac{X_{c(1)}}{5} = \frac{159{,}24}{5} = 31{,}84\ Ом,$$

$$\underline{Z}_{(5)} = 5 + j31.4 - j31.84 = 5 - j0{,}448 = 5{,}02\, e^{\,j5^\circ}\ Ом.$$

Ток для пятой гармоники: $\underline{I}_{(5)} = \dfrac{\underline{E}_{(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \dfrac{1}{5{,}02}\, e^{\,j5^\circ} = 0{,}199\, e^{\,j5^\circ}\ A.$

Мгновенное значение тока: $i_{(5)} = 0{,}199 \sin\left(5\omega_1 t + 5^\circ\right) A.$

Ток

$$i = I_0 + i_{(1)} + i_{(3)} + i_{(5)} = 0{,}653 \sin\left(\omega_1 t + 88^\circ\right) + 0{,}2889 \sin\left(3\omega_1 t + 81^\circ\right) + 0{,}199 \sin\left(5\omega_1 t + 5^\circ\right) A.$$

Амперметр тепловой системы показывает действующее значение тока.

$$I = \sqrt{\left(I_{(1)}\right)^2 + \left(I_{(3)}\right)^2 + \left(I_{(5)}\right)^2} = \sqrt{\frac{I_{m(1)}^2}{2} + \frac{I_{m(3)}^2}{2} + \frac{I_{m(5)}^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(0.4264 + 0{,}08346 + 0{,}0396\right)} = 0{,}524\ A$$

П р и м е р 2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию напряжения на рис. 4.2.

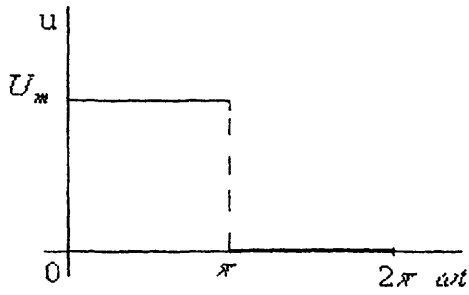


Рис. 4.2.

Р е ш е н и е. Уравнение заданной кривой в интервале от нуля до π $u = U_m = 50\ B$, в интервале от π до 2π $u = 0$.

Ряд Фурье: $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} e_k \sin k\omega_1 t.$

Коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u\, d\omega t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} U_m d\omega t = \frac{U_m}{2\pi}\omega t \Big|_0^{\pi} = \frac{U_m}{2} = 25\ B.$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u\cos k\omega t\, d\omega t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} U_m \cos k\omega t\, d\omega t = \frac{U_m}{\pi k}\sin k\omega t \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$e_k = \frac{2}{T}\int u \sin k\omega t\, d\omega t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} U_m \sin k\omega t\, d\omega t = \frac{U_m}{\pi k}\left(-\cos k\omega t \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{U_m}{\pi k}\left(-\cos k\pi + 1\right) =$$

$$= \frac{2U_m}{\pi k}, (k - нечетное).$$

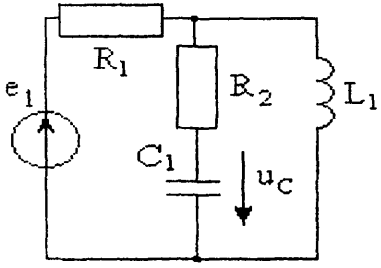
Искомый ряд:

$$u = \frac{U_m}{2} + \sum_{k=1\,3,5}^{\infty} \frac{2U_m}{\pi k}\sin k\omega t = 25 + 31{,}84\sin\omega_1 t + 10{,}62\sin 3\omega_1 t + 6{,}369\sin 5\omega_1 t \ldots \quad B$$

Задачи для СРС.

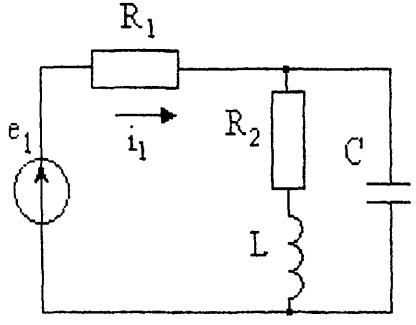
1.Определить напряжение u_C в схеме, если $e_1 = 30 + 15\sin\omega t + 10\sin 3\omega t\ B$,

$R_1 = 10\,Ом,\ R_2 = 20\,Ом, \omega L = 10\,Ом, \frac{1}{\omega C} = 9\,Ом.$

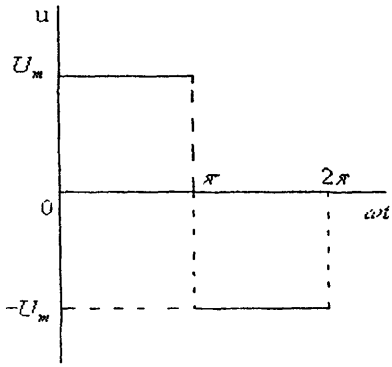


2. Определить ток i_1 в схеме электрической цепи, если $R_1 = 20\,Ом, R_2 = 30\,Ом,$

$\omega L = 12\,Ом, \frac{1}{\omega C} = 3\ Ом, e_1 = 100 + 200\sin\omega_1 t + 30\sin\left(3\omega_1 t - 90^\circ\right)B.$



3. Разложить кривую напряжения в ряд Фурье.



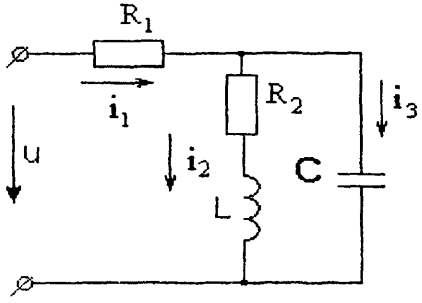
4.К зажимам цепи, параметры которой

$R_1 = R_2 = 20\,Ом$, $L = 60\,мГн$, $C = 1\,мкФ$.

приложено напряжение $u = 100 + 200\sin\omega_1 t + 40\sin\left(3\omega_1 t + 180^\circ\right)\,В$.

Частота основной гармоники $f_1 = 50\ Гц$.

Определить действующее значение токов; мощность, расходуемую в цепи.

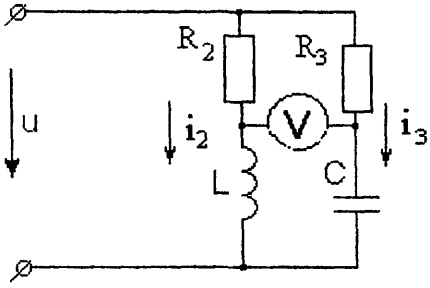


5. Найти показание вольтметра электромагнитной системы в цепи, если к цепи приложено напряжение

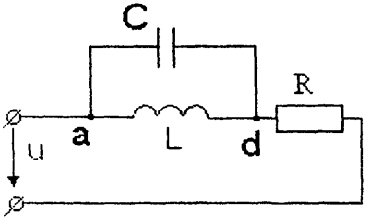
$u = 100\sin\omega_1 t + 30\sin 2\omega_1 t \quad В.$

Параметры цепи

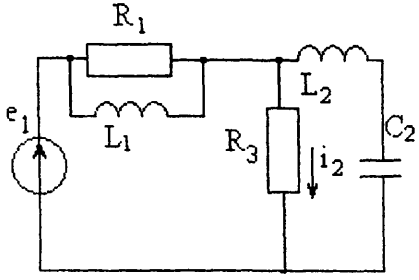
$R_2 = 10\,Ом$, $R_3 = 20\,Ом$, $L = 10\,мГн$, $C = 100\,мкФ$.



6. Найти напряжение на зажимах U_{ad} в цепи, если приложено напряжение $u = 40 + 120\sin 1000t + 60\sin(2000t - 60^{\circ}) + 50\sin(5000t - 30)$ *В*. Параметры цепи: $R = 50$ *Ом*, $L = 10$ *мГн*, $C = 5$ *мкФ*.



7. Определить ток i_2, в цепи если: $e_1 = 100 + 50\sin\omega t + 30\sin(3\omega t + 30^{\circ})$ *В*, $R_1 = 60$ *Ом*, $R_3 = 20$ *Ом*, $\omega L_1 = 60$ *Ом*, $\omega L_2 = 10$ *Ом*, $\dfrac{1}{\omega C_2} = 90$ *Ом*.



5. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Электрические цепи с элементами, накапливающими энергию, существенно отличаются от цепей, содержащих только резистивные элементы. В резистивных цепях при отключении независимых источников все напряжения и токи мгновенно становятся равными нулю. В цепях с индуктивными и емкостными элементами могут существовать токи и напряжения даже после отключения независимых источников. Эти напряжения и токи затухают по собственному для данной цепи закону. Переходной процесс длится до тех пор, пока вся накопленная энергия не рассеется в сопротивлениях.

В одних случаях переходной процесс представляет собой нормальный режим работы цепи, в других – выбросы напряжения и тока при переходных процессах нежелательны и опасны. Поэтому необходимо изучение переходных процессов и овладение методами их расчета. В этом разделе рассмотрим методику расчета переходных процессов классическим методом.

5.1. Основные понятия

Сущность классического метода расчета переходных процессов состоит в составлении систем линейных дифференциальных уравнений для токов и напряжений и их решений непосредственно во временной области с применением теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного уравнения.

В теории цепей общее решение однородного уравнения называют свободной составляющей - $i_{св}$, $u_{св}$; а вторую составляющую – вынужденной (принужденной) составляющей - $i_{пр}$, $u_{пр}$. С учетом этого, любое решение можно записать в виде:

$i = i_{св} + i_{пр}$, $u = u_{св} + u_{пр}$.

Следует отметить, что в цепях, содержащих индуктивный накопитель, целесообразно в качестве реакции цепи (переменной) выбирать ток в индуктивном элементе - i_L . В цепях, содержащих емкостной накопитель, целесообразно в качестве переменной выбирать на-

пряжение на емкостном элементе - u_c . Это связано с тем, что начальные независимые условия задаются в виде непрерывного тока в индуктивности $i_l(0)$ и непрерывного напряжения на емкости $u_c(0)$.

Если начальные независимые условия нулевые, т.е. к моменту коммутации на конденсаторе и катушке индуктивности не было запаса энергии $u_c(0_-)=u_c(0)=0$, $i_l(0_-)=i_l(0)=0$, то в первый момент после коммутации участок цепи, содержащий емкостной элемент, равносилен короткому замыканию $u_c(0)=0$, а участок цепи, содержащий индуктивный элемент, равносилен разрыву цепи $i_l(0)=0$ (рис.5.1.).

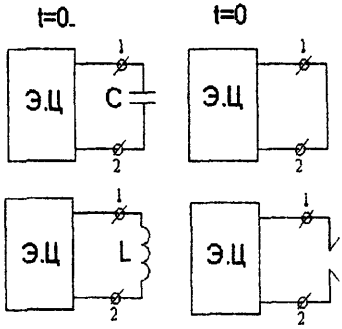


Рис. 5.1.

Если начальные независимые условия ненулевые, т.е. имеется начальный запас энергии: $u_c(0_-)=u_c(0)\neq 0$, $i_l(0_-)=i_l(0)\neq 0$, то в первый момент после коммутации емкостной элемент равносилен источнику э.д.с. с напряжением $u_c(0)$ и действует в сторону , противоположному зарядному току до коммутации, а индуктивный элемент равносилен источнику тока с током $i_l(0)$ (рис.5.2.).

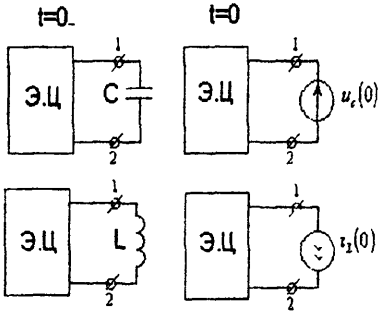


Рис. 5.2.

Порядок дифференциального уравнения определяется количеством индуктивных и емкостных элементов, в которых можно задавать независимые друг от друга начальные условия. Под порядком цепи понимают наибольший порядок дифференциальных уравнений, которыми описываются ее переменные.

5.2. Общая методика анализа переходных процессов в разветвленных цепях первого порядка

Классический метод анализа переходных процессов в разветвленных цепях первого порядка сводится к следующему.

1. Расчет режима до коммутации. Определяются начальные независимые условия $i_L(0)$, $u_c(0)$.

2. Составление системы дифференциальных уравнений Кирхгофа относительно интересующих нас переменных после коммутации.

3. Решение системы уравнений относительно неизвестной переменной. Решение находится в виде

$$i_l = i_{l\,св} + i_{l\,пр},$$

$$u_c = u_{c\,св} + u_{c\,пр}.$$

4. Определение свободной составляющей искомой переменной.

5. Расчет установившегося режима после коммутации. Определение принужденной составляющей искомой переменной.

6. Определение постоянной интегрирования. Постоянная интегрирования определяется из начальных условий.

7. По найденным переменным i_L или u_c определяются остальные величины.

8. Построение графиков изменения искомой переменной.

П р и м е р 1. Определить токи в цепи после коммутации (рис.5.3.), если $E = 240\ В$, $L = 1\ Гн$, $R_1 = 50\ Ом$, $R_2 = R_3 = R_4 = 20\ Ом$.

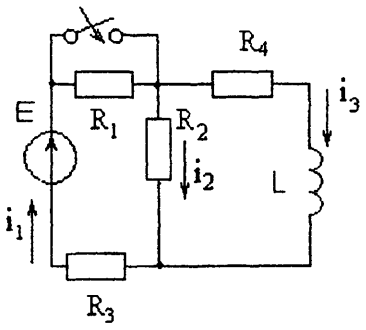


Рис. 5.3.

Р е ш е н и е. Решение необходимо начать с нахождения тока i_3 в ветви с индуктивным элементом.

1.Расчет цепи до коммутации (ключ разомкнут). Определение начальных независимых условий $i_L(0)$. По первому закону коммутации $i_L(0_-) = i_L(0)$.

$$i_1 = \frac{E}{R_{вх}} = \frac{E}{\frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} + R_1 + R_3} = \frac{240}{\frac{20 \cdot 20}{20 + 20} + 50 + 20} = \frac{240}{80} = 3\ А,$$

$$i_3 = i_1 \frac{R_2}{R_2 + R_4} = 3 \frac{20}{20 + 20} = 1{,}5\ А,$$

$$i_2 = i_1 \frac{R_4}{R_2 + R_4} = 3 \frac{20}{40} = 1{,}5\ А.$$

2. Составление системы уравнений после коммутации.

$$i_1 = i_2 + i_3,$$

$$i_1 \cdot R_3 + i_3 \ R_4 + L \frac{di_3}{dt} = E,$$

$$i_2 \cdot R_2 = i_3 \cdot R_4 + L \frac{di_3}{dt}.$$

3. Решение системы уравнений относительно неизвестной i_3.

$$(i_2 + i_3)\cdot R_3 + i_3 \cdot R_4 + L\frac{di_3}{dt} = E,$$

$$i_2 = \frac{i_3 \cdot R_4 + L\dfrac{di_3}{dt}}{R_2},$$

$$\left(\frac{i_3 \cdot R_4 + L\dfrac{di_3}{dt}}{R_2} + i_3\right)\cdot R_3 + i_3 \cdot R_4 + L\frac{di_3}{dt} = E,$$

$$i_3\frac{R_4 \cdot R_3}{R_2} + \frac{R_3 \cdot L}{R_2}\frac{di_3}{dt} + i_3 \cdot R_3 + i_3 \cdot R_4 + L\frac{di_3}{dt} = E,$$

$$\frac{di_3}{dt}\left(\frac{R_3 \cdot L}{R_2} + L\right) + i_3\left(R_3 + R_4 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_2}\right) = E,$$

$$(1+1)\frac{di_3}{dt} + i_3\left(20 + 20 + \frac{400}{20}\right) = 240,$$

$$2\frac{di_3}{dt} + 60i_3 = 240,$$

$$\frac{di_3}{dt} + 30i_3 = 120.$$

4. Решение находится в виде:

$$i_3 = i_{3св} + i_{3пр}.$$

5.Определение свободной составляющей $i_{3св}$. Свободная составляющая является решением однородного дифференциального уравнения.

$$\frac{di_{3св}}{dt} + 20 \cdot i_{3св} = 0,$$

$$\frac{di_{3св}}{dt} = -20 \cdot i_{3св},$$

$$\frac{di_{3св}}{i_{3св}} = -20 \cdot t,$$

$$i_{3св} = A \cdot e^{-20t}.$$

6. Определение принужденной составляющей $i_{3пр}$. Принужденная составляющая определяется из установившегося режима после коммутации.

$$i_1 = \frac{E}{R_3 + \dfrac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4}} = \frac{240}{20 + \dfrac{20 \cdot 20}{40}} = \frac{240}{30} = 8\ A,$$

$$i_{3пр} = i_{1пр} \frac{R_2}{R_2 + R_4} = 8 \frac{20}{40} = 4\ A.$$

7. Определение постоянной интегрирования. Для определения постоянной интегрирования рассматривается момент времени $t = 0$:

$i_3 = A \cdot e^{-20t} + 4$,

$i_3(0) = A + 4$,

$1{,}5 = A + 4$,

$A = -4 + 1{,}5 = -2{,}5$.

$i_3 = -2{,}5 \cdot e^{-20t} + 4\ A$.

По известному току i_3 определяются остальные токи:

$$u_1 = L \frac{di_3}{dt} = 1 \cdot (-2{,}5)(-20) e^{-20t} = 50\, e^{-20t}\ B,$$

$$u_4 = i_3 \cdot R_4 = \left(-2{,}5\, e^{-20t} + 4\right) \cdot 20 = -50\, e^{-20t} + 80\ B,$$

$$u_2 = u_4 + u_1 = 50\, e^{-20t} - 50\, e^{-20t} + 80 = 80\ B,$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{80}{20} = 4\ A,$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 4 + 4 - 2{,}5\, e^{-20t} = -2{,}5\, e^{-20t} + 8\ A.$$

Следует обратить внимание на пункты 2 и 3. Итогом этих действий является получение однородного дифференциального уравнения и нахождение его решения.

Как известно, решение однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет следующий вид:

$$i_{св} = A \cdot e^{pt}, \quad u_{св} = B \cdot e^{pt}, \quad p = \frac{1}{\tau},$$

где p – корень характеристического уравнения,

τ - постоянная времени цепи,

A, B – постоянные интегрирования.

Следовательно, характеристическое уравнение можно получить любыми методами. Один из наиболее простых методов получения характеристического уравнения – по фиктивному сопротивлению $Z(p)$. Он состоит в следующем: записывают входное сопротивление цепи в комплексной форме $Z(p)$ (пассивной цепи) относительно любой ветви цепи и приравнивают его к нулю $Z(p)=0$, при $p=j\omega$. Поэтому пункты 2,3 можно опустить. Например, для рассматриваемой задачи

$$Z(p)=R_1+\frac{R_2(R_4+pL)}{R_2+R_4+pL}=0,$$

$$20+\frac{20(20+pL)}{40+pL},$$

$$20(40+pL)+20(20+pL)=0,$$

$$800+20pL+400+20pL=0,$$

$$40\cdot pL=-1200,$$

$$p=-\frac{1200}{40}=-30.$$

С учетом этого, свободный процесс можно записать в виде $i_{3св}=A\,e^{pt}=A\,e^{-30t}$. Так как $p=\frac{1}{\tau}$, то можно найти постоянную времени цепи τ. Постоянная времени цепи определяется из цепи свободного процесса после коммутации. Любую разветвленную цепь необходимо свести к R-L или R-C цепи. Для цепи R-L $\tau=\frac{L}{R}$, для цепи R-C $\tau=R\cdot C$.

Для рассматриваемой задачи $\tau=\frac{L}{R_{экв}}$,

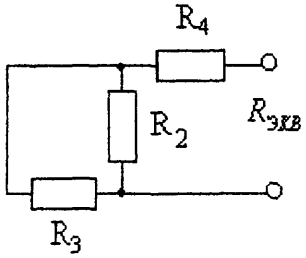


Рис.5 4.

где $R_{ЭКВ}$ - эквивалентное сопротивление относительно зажимов индуктивного накопителя:

$$R_{экв} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} + 20 = 30\ Ом,$$

$$\tau = \frac{1}{30}\ сек, \quad p = \frac{1}{\tau} = 30.$$

При анализе переходных процессов можно использовать любой из методов получения характеристического уравнения.

П р и м е р 2. Найти закон изменения во времени напряжения на конденсаторе и токов во всех ветвях схемы после коммутации (рис.5.5.), если $E = 50\ В$,

$C = 1670\ мкФ$, $R_1 = 1\ Ом$, $R_2 = 2\ Ом$, $R_3 = 2\ Ом$, $R_4 = 4\ Ом$.

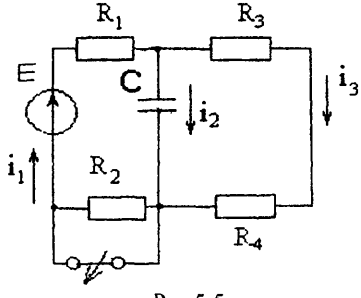


Рис.5.5.

Р е ш е н и е. 1. Определение начальных независимых условий из режима до коммутации (ключ замкнут):

$$u_c(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_4}(R_3 + R_4) = \frac{50}{1+2+4}\,6 = \frac{50}{7}\,6 = 42{,}86\ B.$$

2. Получение характеристического уравнения

$$Z(p) = R_1 + R_2 + \frac{\frac{1}{pC}\cdot(R_3 + R_4)}{\frac{1}{pC} + R_3 + R_4} = 0,$$

$$18 \cdot pC = -9,$$

$$p = -\frac{900}{3{,}006} = -299{,}4.$$

3. Напряжение на конденсаторе ищется в виде $u_c = u_{cвн} + u_{cпр}$.

4. Определение свободной составляющей $u_{cвн}$:

$$u_{cвн} = A\,e^{pt} = A\,e^{-299{,}4t}.$$

5. Определение принужденной составляющей $u_{cпр}$.

$$u_{cпр} = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_4 + R_2}(R_3 + R_4) = \frac{50 \cdot 6}{9} = 33{,}33\ B.$$

6. Нахождение постоянной интегрирования.

$$u_c = u_{cвн} + u_{cпр} = A\,e^{-299{,}4t} + 33{,}33,$$

$$u_c(0) = A + 33{,}33,$$

$$42{,}86 = A + 33{,}33,$$

$$A = 42{,}86 - 33{,}33 = 9{,}53.$$

7. $u_c = 9{,}53\,e^{-299{,}4t} + 33{,}33\ B$.

Ток через конденсатор

$$i_2 = C\frac{du_c}{dt} = 1670 \cdot 10^{-6} \cdot (-299{,}4) \cdot 9{,}53\,e^{-299{,}4t} = -4{,}764\,e^{-299{,}4t}\ A.$$

$$u_{34} = u_c = 9{,}53e^{-299.4t} + 33{,}33\ B,$$

$$i_3 = \frac{u_{34}}{R_3 + R_4} = \frac{9{,}53e^{-299.4t} + 33{,}33}{6} = 1{,}59e^{-299.4t} + 5{,}56\ A.$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = -4{,}764e^{-299.4t} + 1{,}59e^{-299.4t} + 5{,}56 = 3{,}174e^{-299.4t} + 5{,}56\ A.$$

5.3. Общая методика анализа переходных процессов в цепях выше первого порядка

Цепи второго порядка имеют два независимых накопителя энергии, которые определяют порядок цепи и порядок дифференциального уравнения.

Для определения постоянных интегрирования необходимо знать не только начальные значения искомых функций, но и их первые производные при t=0.

В зависимости от сочетания параметров цепи возможны три случая свободного процесса: апериодический процесс (корни характеристического уравнения различные и отрицательные), колебательный процесс (корни комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью) и критический процесс (корни отрицательные и кратные).

Расчет переходных процессов в цепях выше первого порядка усложняется в связи с повышением порядка дифференциального уравнения и вытекающими отсюда трудностями.

Общая методика расчета переходных процессов в цепях выше первого порядка сводится к следующему.

1. Определение независимых начальных условий $i_l(0)$, $u_c(0)$.
2. Составление системы уравнений Кирхгофа относительно интересующих реакций.
3. Решение системы относительно какой-либо одной неизвестной реакции (как правило, i_L или u_c).
4. Получение характеристического уравнения.
5. Нахождение корней характеристического уравнения.
6. Общий вид решения уравнения ищется в виде $i_l = i_{l\,св} + i_{l\,пр}$, $u_c = u_{c\,св} + u_{c\,пр}$.
7. Определение свободной составляющей искомой реакции.
8. Определение принужденной составляющей искомой реакции.
9. Определение производных от начальных значений искомых реакций в момент времени $t = 0$.

10. Определение постоянных интегрирования A_k.

11. Запись результатов и построение графиков.

Рассмотрим приведенную методику расчета переходных процессов для цепи второго порядка.

П р и м е р. Найти закон изменения во времени тока через индуктивность после замыкания ключа, если $E = 200\ В$, $L = 1\ мГн$, $C = 10\ мкФ$, $R_1 = 10\ Ом$, $R_2 = 10\ Ом$, $R_3 = 50\ Ом$, $R_4 = 30\ Ом$, (рис. 5.6.).

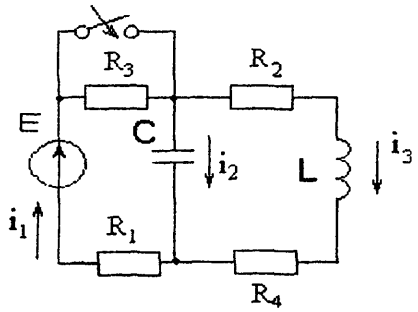


Рис. 5.6.

Р е ш е н и е. 1. Расчет режима до коммутации. Определение начальных независимых условий.

$$i_3(0) = i_3(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_2 + R_4} = \frac{200}{10 + 50 + 10 + 30} = 2\ A,$$

$$u_c(0) = u_c(0_-) = i_1(0) \cdot (R_2 + R_4) = 2(10 + 30) = 80\ B.$$

2. Составление системы дифференциальных уравнений Кирхгофа после коммутации.

$$i_1 = i_2 + i_3 = C\frac{du_c}{dt} + i_3,$$

$$i_1 \cdot R_1 + i_3 \cdot R_2 + i_3 \cdot R_4 + L\frac{di_3}{dt} = E,$$

$$i_3 \cdot R_2 + L\frac{di_3}{dt} + i_3 \cdot R_4 = u_c.$$

3. Решение данной системы уравнений относительно i_3.

$$\left(C\frac{du_c}{dt} + i_3 \right)\cdot R_1 + i_3(R_2 + R_4) + L\frac{di_3}{dt} = E,$$

$$\left(C\frac{du_c}{dt} + i_3 \right)\cdot R_1 + 40\cdot i_3 + L\frac{di_3}{dt} = E,$$

$$\left(C\cdot R_2\frac{di_3}{dt} + C\cdot L\frac{d^2i_3}{dt^2} + C\cdot R_4\frac{di_3}{dt} + i_3 \right)\cdot R_1 + 40\cdot i_3 + L\frac{di_3}{dt} = E,$$

$$C\cdot L\cdot R_1\left(\frac{d^2i_3}{dt^2}\right) + \frac{di_3}{dt}\left(C\cdot R_2\cdot R_1 + C\cdot R_4\cdot R_1 + L\right) + 40\cdot i_3 + i_3\cdot R_1 = E,$$

$$\frac{d^2i_3}{dt^2} + \frac{di_3}{dt}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{R_4}{L} + \frac{1}{C\cdot R_1}\right) + \left(\frac{40 + R_1}{C\cdot L\cdot R_1}\right) i_3 = E,$$

$$\frac{d^2i_3}{dt^2} + 5\cdot 10^4\frac{di_3}{dt} + 5\cdot 10^8 i_3 = 200.$$

4 Получение характеристического уравнения и нахождение его корней.

$$p^2 + p\cdot 5\cdot 10^4 + 5\cdot 10^8 = 200,$$

$$p_{1,2} = -2{,}5\cdot 10^4 \pm \sqrt{6{,}25\cdot 10^8 - 5\cdot 10^8} = -2{,}5\cdot 10^4 \pm 1{,}12\cdot 10^4,$$

$$p_1 = -2{,}5\cdot 10^4 + 1{,}12\cdot 10^4 = -1{,}38\cdot 10^4,$$

$$p_2 = -2{,}5\cdot 10^4 - 1{,}12\cdot 10^4 = -3{,}62\cdot 10^4.$$

5 Общий вид решения

$$i_3 = i_{3св} + i_{3пр} = A_1\cdot e^{p_1 t} + A_2\cdot e^{p_2 t} + i_{3пр} = A_1\cdot e^{-1{,}38\,10^4 t} + A_2\ e^{-3\,62\,10^4 t} + i_{3пр}$$

6. Определение принужденной составляющей $i_{3пр}$.

$$i_{3пр} = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{200}{10+10+30} = \frac{200}{50} = 4\ A.$$

$$i_3 = A_1 \cdot e^{-1,38\,10^4 t} + A_2 \cdot e^{-3,62\,10^4 t} + 4.$$

7. Определение постоянных интегрирования.

$i_3(0) = A_1 + A_2 + 4,$

$i_3'(0) = -1,38 \cdot 10^4 \cdot A_1 - 3,62 \cdot 10^4 \cdot A_2,$

$i'(0) = ?$

$i_1(0) \cdot R_1 + u_c(0) = E, \quad i_1(0) = \frac{E - u_c(0)}{R_1} = \frac{200-80}{10} = 12\ A,$

$i_1(0) \cdot R_1 + i_3(0) \cdot 40 + L \cdot i_3'(0) = 200,$

$12 \cdot 10 + 80 + 10^{-3} \cdot i_3'(0) = 200,$

$200 + i_3'(0) \cdot 10^{-3} = 200,$

$i_3'(0) = 0.$

$A_1 + A_2 + 4 = 2, \quad A_1 = -2 - A_2,$

$-A_1 \cdot 1,38 \cdot 10^4 - A_2 \cdot 3,62 \cdot 10^4 = 0,$

$-1,38(-2 - A_2) - 3,62 \cdot A_2 = 0,$

$2,76 + 1,38 \cdot A_2 - 3,62 \cdot A_2 = 0,$

$A_2 = 1,232,$

$A_1 = -3,232.$

8. Ответ: $i_3 = -3,232e^{-1,38\,10^4 t} = 1,232e^{-3\,62\,10^4 t} + 4\ A.$

5.4. Упражнения и задачи для СРС

Пример 1. Определить токи в ветвях схемы изображенной на (рис.5.7.)
после коммутации, если
$E = 100\ B,\ R_1 = 100\ B,\ R_2 = R_3 = 200\ B,\ L = 0,1\ Гн.$

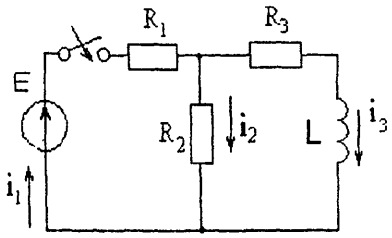


Рис. 5.7.

Р е ш е н и е. 1. Расчет режима до коммутации. Определение начальных независимых условий.

$i_1(0) = i_2(0) = i_3(0\ ) = 0.$

2. Составление системы дифференциальных уравнений на основании законов Кирхгофа после коммутации.

$$i_1 = i_2 + i_3,$$

$$E = i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2,$$

$$E = i_1 \cdot R_1 + i_3\ \ R_3 + L\frac{d\,i_3}{d\,t}.$$

3 Решение системы уравнений относительно i_3.

$$i_2 = \frac{E - i_1 \cdot R_1}{R_2},$$

$$i_1 = \frac{E - i_1 \cdot R_1}{R_2} + i_3,$$

$$i_1 \cdot R_2 = E - i_1 \cdot R_1 + i_3 \cdot R_2,$$

$$i_1(R_2 + R_1) = E + i_3 \cdot R_2.$$

$$i_1 = \frac{E + i_3 \cdot R_2}{R_2 + R_1},$$

$$E = \left(\frac{E + i_3 \cdot R_2}{R_2 + R_1} \right) \cdot R_1 + i_3 \cdot R_3 + L \frac{d i_3}{d t},$$

$$L \frac{d i_3}{d t} + i_3 \left(\frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1} + R_3 \right) = E - \frac{E \cdot R_1}{R_2 + R_1},$$

$$0{,}1 \frac{d i_3}{d t} + i_3 \left(\frac{200}{3} + 200 \right) = 100 - \frac{100 \cdot 100}{200 + 100},$$

$$0{,}1 \frac{d i_3}{d t} + i_3 \cdot \frac{800}{3} = \frac{200}{3},$$

$$\frac{d i_3}{d t} + 2666{,}7 \cdot i_3 = 666{,}7.$$

4. Решение ищется в виде $i_3 = i_{3св} + i_{3пр}$. Нахождение свободной составляющей $i_{3св}$.

$$\frac{d i_{3св}}{d t} + 2666{,}7 \cdot i_{3св} = 0,$$

$$\frac{d i_{3св}}{i_{3св}} = -2666{,}7\, dt,$$

$$i_{3св} = A e^{-2666{,}7t}.$$

5. Нахождение принужденной составляющей $i_{3пр}$.

$$i_{1пр} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{100}{100 + \dfrac{200 \cdot 200}{400}} = \frac{100}{200} = 0{,}5\, A,$$

$$i_{3пр} = 0{,}25\, A.$$

6. Нахождение постоянной интегрирования.

$$i_3 = A e^{-2666{,}7t} + 0{,}25,$$

$$i_3(0) = A + 0{,}25,$$

$$A = -0{,}25.$$

Запись результата : $i_3 = -0{,}25 e^{-2666{,}7t} + 0{,}25\, A.$

7. Нахождение токов ветвей:

$$u_L = L\frac{di_3}{dt} = 0{,}1(-0{,}25)(-2666{,}7)e^{-2666{,}7t} = 66{,}67e^{-2666{,}7t}\ B,$$

$$i_2 = \frac{i_3 R_3 + u_L}{R_2} = \frac{(-0{,}25e^{-2666{,}7t} + 0{,}25)\ 200 + 66{,}67e^{-2666{,}7t}}{200} = 0{,}083e^{-2666{,}7t} + 0{,}25\ A,$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 0{,}083e^{-2666{,}7t} + 0{,}25 - 0{,}25e^{-2666{,}7t} + 0{,}25 = -0{,}167e^{-2666{,}7t} + 0{,}5\ A.$$

П р и м е р 2. Найти ток через конденсатор в цепи, изображенной на рис. 5.8. после коммутации, если
$E = 100\ B, C = 10\ мкФ, R_1 = 50\ Ом, R_2 = R_3 = 25\ Ом.$

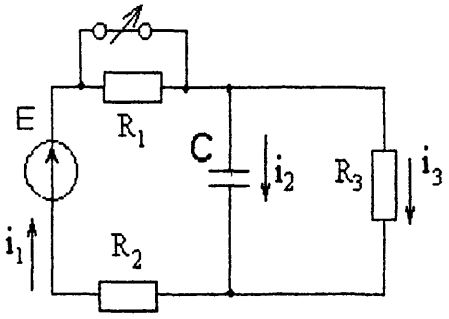


Рис. 5.8.

Р е ш е н и е. 1. Расчет режима до коммутации. Нахождение начальных независимых условий.

$$u_c(0) = u_c(0_-) = \frac{E}{R_3 + R_2} \cdot R_3 = \frac{100}{50} \cdot 25 = 50\ B.$$

2. Получение характеристического уравнения и нахождение его корней. Корни характеристического уравнения находим из условия $Z(p) = 0$.

$$Z(p) = R_1 + R_2 + \frac{R_3 \cdot \frac{1}{pC}}{R_3 + \frac{1}{pC}} = 0,$$

$$75 + \frac{R_3}{R_3 pC + 1} = 0,$$

$75(R_3 pC + 1) + R_3 = 0,$

$18750 \cdot 10^{-6} \cdot p + 75 + 25 = 0,$

$p = -5{,}33 \cdot 10^3.$

3. Общий вид решения: $u_c = u_{своб} + u_{пр}$.

4. Нахождение свободной составляющей $u_{своб}$.

$u_{своб} = Ae^{-5{,}33\,10^3 t}$.

5 Нахождение принужденной составляющей $u_{пр}$.

$$u_{пр} = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_3 = \frac{100}{50 + 25 + 25} \cdot 25 = 25\ В.$$

6. Нахождение постоянной интегрирования.

$u_c(0) = A + u_{пр}$.

$50 = A + 25. \quad A = 25.$

7. Запись результата: $u_c = 25e^{-5\,33\,10^3 t} + 25\ В.$

Ток

$$i_2 = C\frac{du_c}{dt} = 10 \cdot 10^{-6}\left(-5{,}33 \cdot 10^3 \cdot 25\right)e^{-5{,}33\,10^3 t} == 1{,}332e^{-5{,}33\,10^3 t}\ А.$$

Пример 3. Найти закон изменения напряжения на конденсаторе в цепи, изображенной на рис. 5.9. после коммутации, если $E = 100\,В$, $R_1 = 10\,Ом$, $R_2 = 20\ Ом$, $C = 100\,мкФ$, $L = 0{,}01\ Гн$.

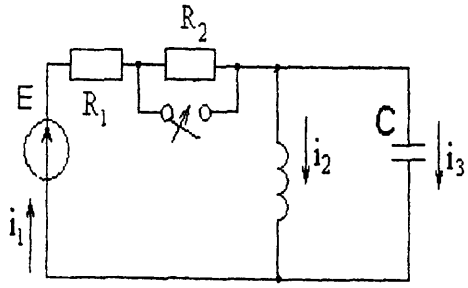


Рис. 5 9.

Решение. Расчет режима до коммутации. Нахождение начальных независимых условий.

$$i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{30} = 3{,}3\,A,$$

$$u_c(0\ ) = 0.$$

2. Получение характеристического уравнения и нахождение его корней. Корни характеристического уравнения находятся из условия $Z(p) = 0$.

$$R_1 + \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = 0,$$

$$p^2 R_1 LC + pL + R_1 = 0,$$

$$p^2 + 10^3 p + 10^6 = 0,$$

$$p_{12} = -500 \pm \sqrt{2500 - 10^6} = -500 \pm j865 = \alpha \pm j\omega.$$

3. Общий вид решения ищется в виде: $u_c = u_{ccn} + u_{cnp}$. Нахождение свободной составляющей u_{ccn}.

$$u_{ccn} = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \psi) = A e^{-500t} \sin(865t + \psi).$$

4. Нахождение принужденной составляющей u_{cnp}.

$$u_{cnp} = 0.$$

5. Нахождение постоянных интегрирования.

$$u_c = A e^{-500t} \sin(865t + \psi),$$

$$\frac{du_c}{dt} = -500 A e^{-500t} \sin(865t + \psi) + A e^{-500t} \cos(865t + \psi) \cdot 865,$$

Подставляем момент времени t=0.

$$u_c(0) = A \sin\psi,$$

$$u_c'(0) = -500 A \sin\psi + 865 A \cos\psi,$$

Нахождение производной в нуле.

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) = i_2(0) + C\frac{du_c}{dt} = i_2(0) + C\,u_c'(0),$$

$$u_c'(0) = \frac{i_1(0) - i_2(0)}{C}, \quad i_1(0) = \frac{E - u_c(0)}{R_1} = \frac{100}{10} = 10\,A.$$

$$u_c'(0) = \frac{(10 - 3{,}3)\cdot 10^6}{10} = 6{,}7\cdot 10^4,$$

$$A\sin\psi = 0,\ \sin\psi = 0, \quad \psi = \pi\cdot n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

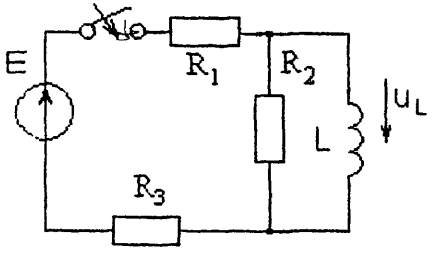
$$865A = 6{,}7\cdot 10^4,$$

$$A = 77{,}4.$$

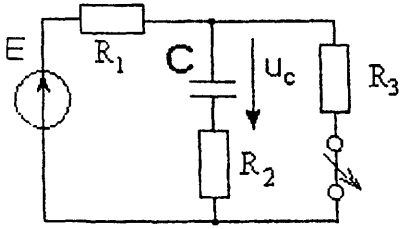
Ответ: $u_c = (\ 77{,}4e^{-500t}\sin 865t\ )\,B.$

Задачи для СРС

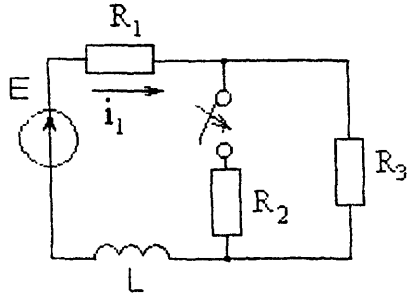
1. Определить напряжение на индуктивном элементе u_L после коммутации, если $E = 100\,B$, $L = 5\,мГн$, $R_1 = 3\,Ом$, $R_2 = 8\,Ом$, $R_3 = 5\,Ом$



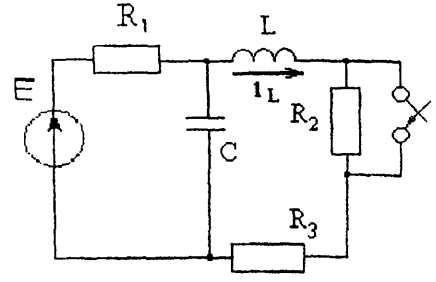
2. Определить напряжение на конденсаторе u_c после коммутации, если $E = 200\ В, C = 10\ мкФ, R_1 = R_2 = R_3 = 50\ Ом$.



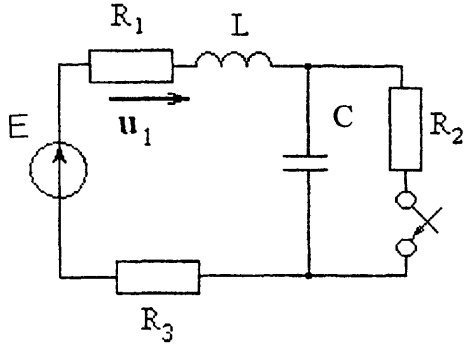
3. Определить ток i_1 после коммутации, если $E = 100\ В, L = 1\ мГн, R_1 = 20\ В, R_2 = R_3 = 15\ Ом$.



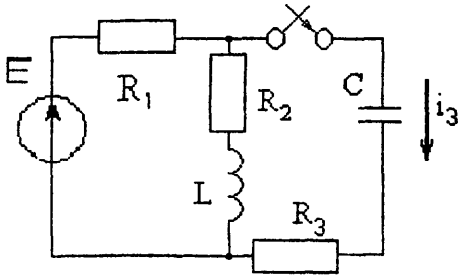
4. Найти закон изменения тока i_L после коммутации, если $E = 200\ В,\ L = 1\ мГн, C = 10\ мкФ, R_1 = 10\ Ом, R_2 = 20\ Ом, R_3 = 50\ Ом$.



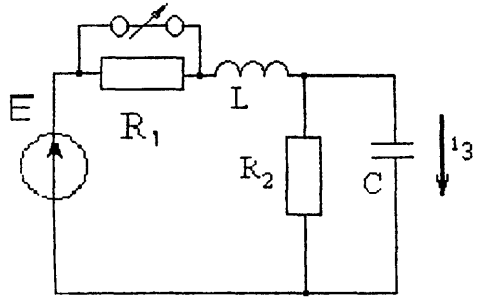
5. Найти закон изменения u_1, если $E = 200\ В$, $R_1 = R_2 = R_3 = 20\ Ом$, $C = 20\ мкФ$, $L = 10\ мГн$.



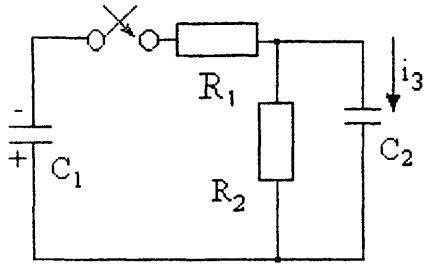
6. Определить закон изменения i_3, если $C = 200\ мкФ, R_1 = 50\ Ом, R_2 = 30\ Ом, L = 0{,}1\ Гн$. $E = 200\ В, R_3 = 30\ Ом$.



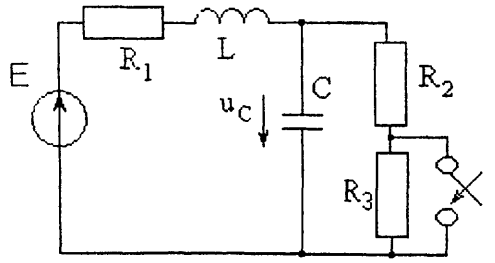
7. Определить ток i_3 в схеме электрической цепи,если $E = 20\ В, R_1 = 10\ Ом, L = 0{,}6\ Гн$, $R_2 = 10\ Ом, C = 1\ мкФ$.



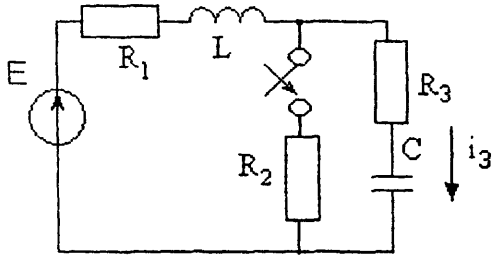
8.Определить закон изменения тока i_3 в схеме электрической цепи, если $R_1 = R_2 = 100 Ом, C_1 = C_2 = 1 мкФ, u_{C1}(0_-) = 120 В, u_{C2}(0_-) = 0.$



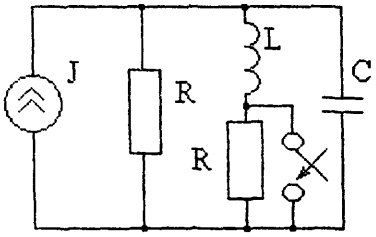
9. Определить закон изменения u_C в схеме электрической цепи если: $R_1 = 30 Ом, R_2 = R_3 = 10 Ом, L = 0{,}02 Гн, C = 200 мкФ, E = 150 В.$



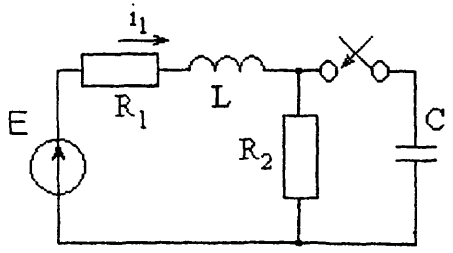
10. Определить i_2 после коммутации в схеме электрической цепи, если $E = 100\,B, R_1 = R_2 = 20\,Ом,\ R_3 = 30\,Ом, L_1 = 0{,}1\,Гн, C = 10\,мкФ$.



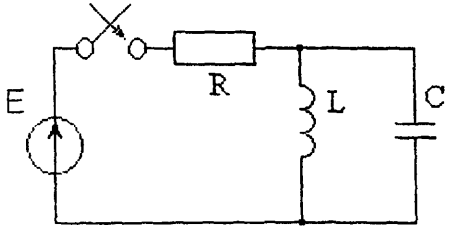
11. Найти закон изменения напряжения на емкости после коммутации u_C, в схеме электрической цепи,
если $J = 2\,A, R = 100\,Ом, C = 0{,}1\,мкФ, L = 4\,мГ$.



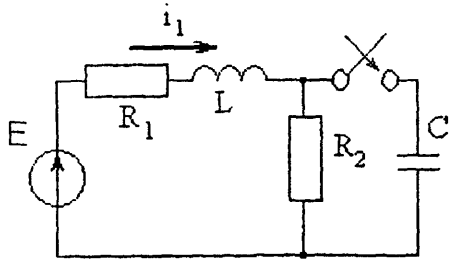
12. Найти закон изменения тока i_2 после коммутации в схеме, если: $E = 100\,B,\ R_1 = R_2 = 10\,Ом, L = 5\,Гн, C = 10\,мкФ$.



13. Определить закон изменения напряжения u_L после коммутации в схеме, если $E = 100\,В, R = 10\,Ом, L = 0{,}1\,Гн, C = 100\,мкФ$.



14. Найти закон изменения тока i_1 после коммутации в схеме, если $E = 100\,В$, $L = 5\,Гн, C = 10\,мкФ, R_1 = R_2 = 10\,Ом$.



6. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Широкое применение в инженерной практике получил операторный метод расчета переходных процессов.

Основная трудность расчета переходных процессов классическим методом состоит в определении постоянных интегрирования по начальным условиям, нахождение начальных значений функции и ее производных.

В операторном методе расчета отпадает необходимость определения постоянных интегрирования по начальным условиям, т.к. начальные условия учитываются при составлении алгебраических уравнений для изображений искомых величин. Этим и объясняется широкое применение этого метода.

6.1. Основные понятия

Сущность операторного метода расчета переходных процессов состоит в том, что функцию $f(t)$ вещественной переменной t, называемую оригиналом, заменяют функцией $F(p)$ комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$, называемой изображением. Комплексное число p называется оператором.

Операторное изображение $F(p)$ и оригинал связаны с помощью преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}.$$

Функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. на любом конечном промежутке времени функция $f(t)$ должна быть непрерывной и иметь конечное число максимумов и минимумов. Практически все функции, встречающиеся в теории электрических цепей, удовлетворяют условиям Дирихле.

Переход от изображения $F(p)$ к оригиналу $f(t)$ может осуществляться при помощи обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(p) dp,$$

где σ - вещественная часть оператора p.

Таким образом, в результате преобразований получается пара однозначных соответствий:

$$F(p) = f(t), f(t) = L^{-1}[F(p)].$$

Для многих функций такие соответствия найдены и сведены в таблицы.

Как было показано в разделе 5, переходные процессы в линейных цепях описываются системой интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При применении операторного метода система интегро-дифференциальных уравнений относительно оригиналов $f(t)$ заменяется системой алгебраических уравнений относительно их изображений $F(p)$. Таким образом, производится алгебраизация исходной системы дифференциальных уравнений. Отсюда вытекает и очевидное преимущество операторного метода.

В результате решения полученной системы алгебраических уравнений находят изображения $F(p)$ искомых электрических величин – токов и напряжений переходного процесса. Затем при помощи обратного преобразования или специальных таблиц соответствия оригиналов и их изображений находятся оригиналы $f(t)$, т.е. искомые функции времени.

Рассмотрим наиболее важные свойства преобразования Лапласа, представляющих интерес для анализа электрических цепей.

Применение преобразования Лапласа к решению линейных интегро-дифференциальных уравнений основано на свойстве линейности и преобразованиях операций дифференцирования и интегрирования во временной области. Свойство линейности записывается следующим образом:

$$L[af(t)] = aL[f(t)] = aF(p), \text{ где а – постоянная,}$$

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p),$$

т е. при умножении оригинала на постоянную величину, изображение также умножается на эту величину, а изображение суммы равно сумме изображений.

Операциям дифференцирования и интегрирования оригиналов (в t-области) соответствуют более простые операции умножения и деления их изображений (в р – области):

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0), \quad L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p},$$

где $f(0)$ - начальное значение функции, при $t = 0$.

Свойства преобразования Лапласа позволили в теории цепей ввести понятие операторных функций (сопротивления и проводимости) и операторных передаточных функций цепи. При этом оказалось возможным составлять схему замещения электрической цепи в операторной форме, а по ней сразу составлять уравнения для изображений, минуя составление интегро-дифференциальных уравнений для оригиналов.

Операторные уравнения для элементов электрической цепи получают из соответствующих уравнений, связывающих мгновенные значения напряжений и токов.

Резистор с сопротивлением R характеризуется уравнением $u = Ri$, переходя к изображению, получим операторное уравнение:

$$U(p) = R\,I(p), \quad \text{где} \quad I(p) = L[i(t)], \quad \text{или} \quad I(p) = \frac{1}{R}U(p) = GU(p).$$

Резистор характеризуется операторным сопротивлением R или проводимостью G.

Напряжение и ток в индуктивности связаны соотношением $u = L\dfrac{di}{dt}$, переходя к изображениям, получим операторное уравнение:

$$U(p) = pL\,I(p) - Li_L(0), \quad \text{или} \quad I_L(p) = \frac{1}{pL}U(p) + \frac{i_L(p)}{p},$$

где $i_l(0)$ - значение тока в момент времени $t = 0$.

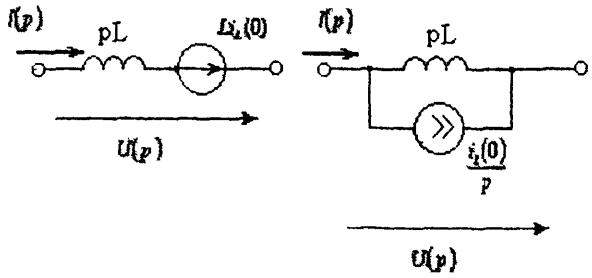


Рис 6 1

Этим выражениям соответствуют операторные эквивалентные схемы индуктивности на рис.6.1. Индуктивность характеризуется операторным сопротивлением pL (проводимостью $1/pL$), а

начальное значение тока $i_L(0)$ учитывается в виде последовательного источника э.д.с. $Li_l(0)$ или параллельного источника тока $i_l(0)/p$.

Напряжение и ток на емкости связаны соотношением $i = C\frac{du_C}{dt}$. Для изображений получаем:

$$I(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0); \quad U_C(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p},$$

где $u_C(0)$ - начальное значение напряжения, в момент t=0.

Операторные схемы замещения для емкости представлены на рис.6.2.

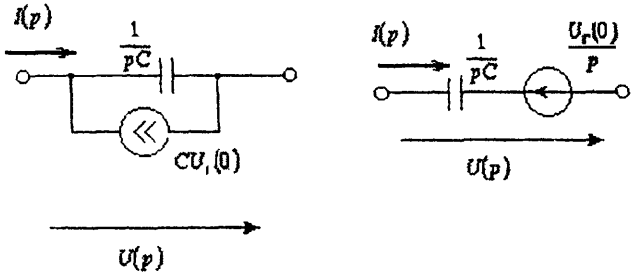


Рис. 6 2.

Емкость характеризуется операторным сопротивлением $\frac{1}{pC}$ (проводимостью pC), а начальное значение напряжения $u_C(0)$ учитывается в виде параллельного источника тока $Cu_C(0)$ или последовательного источника э.д.с. $u_C(0)/p$.

Источникам э.д.с. e(t) и тока j(t) соответствуют источники с операторным напряжением $E(p) = L[e(t)]$ и током $J(p) = L[e(t)]$.

6.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Для цепи содержащей последовательно соединенные элементы R, L,C с источником $e(t)$ закон Ома в операторной форме имеет следующий вид:

$$I(p)=\frac{E(p)+Li_L(0)-\frac{u_C(0)}{p}}{R+pL+\frac{1}{pC}}=\frac{E(p)+Li_L(0)-\frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)},$$

где: $I(p)$- изображение тока, E(p)-изображение источника э.д.с, $i_L(0), u_C(0)$ – начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости, $Z(p)=R+pL+\frac{1}{pC}$ – операторное сопротивление ветви, $Y(p)=\frac{1}{Z(p)}$ – операторная проводимость ветви.

Если $i_l(0)=0$, $u_C(0)=0$, тогда закон Ома имеет следующий вид: $I(p)=\frac{E(p)}{Z(p)}$.

Первый закон Кирхгофа в операторной форме: $\sum_k I_k(p)=0$.

Второй закон Кирхгофа в операторной форме:

$\sum_{k=1}^{n} Z_k(p)I_k(p)=\sum_{k=1}^{n}\left[E_k+L_k i_{l_k}(0)-\frac{u_{C\,k}(0)}{p}\right]$, если $i_l(0)=0, u_C(0)=0$, то второй закон Кирхгофа имеет следующий вид: $\sum_{k=1}^{n} Z_k(p)I_k(p)=\sum_{k=1}^{n} E_k(p)$.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме аналогичны по форме тем же законам в комплексной форме; при ненулевых начальных условиях, т.е. при $i_l(0)\neq 0, u_C(0)\neq 0$ действует не только внешняя э.д.с. $E(p)$, но еще и внутренняя или расчетная э.д.с., положительное направление которой выбрано совпадающим с положительным направлением тока в этой ветви.

6.3. Общая методика анализа переходных процессов операторным методом

Операторный метод анализа переходных процессов можно свести к следующему:

1) составление операторной схемы замещения с учетом начальных условий и по ней составление алгебраических уравнений для изображений по тому или иному методу расчета;

2) решение их относительно изображений искомых реакций;

3) нахождение оригиналов искомых функций по их найденным изображениям.

Расчет сложных электрических цепей операторным методом не всегда можно свести к известным табличным формулам. Использование же обратного преобразования Лапласа для отыскания оригинала по известному изображению может оказаться трудной задачей. В таких случаях используется теорема разложения.

В теории цепей очень часто операторное изображение искомой функции (тока или напряжения) имеет вид рациональной дроби:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p)$ и $B(p)$ - многочлены различных степеней p.

Переход от изображения к функции времени производят с помощью формулы:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A(p)}{B'(p_k)} e^{p_k t},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - корни уравнения $B(p) = 0$, $k = 1,2,\ldots n$.

Таким образом,

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} - f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Формулу называют теоремой разложения.

В частном случае, когда один из корней знаменателя $B(p) = 0$, например, $p_1 = 0$, то формула разложения примет следующий вид:

$$F(p) - f(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=2}^{k=2} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Выделенный постоянный член представляет собой установившиеся ток и напряжение в цепи. Есть другая форма записи этого случая:

$$F(p) = \frac{A(p)}{pB(p)},$$

где в составе $B(p)$ уже нет нулевого корня. Предполагая, что уравнение $B(p)=0$ имеет n различных и не равных нулю корней p_k $(k=1,2,...,n)$, получим следующую формулу записи:

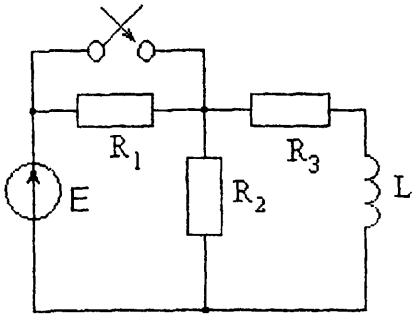
$$F(p)-f(p)=\frac{A(0)}{B(0)}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Если $B(p)$ имеет пару сопряженных мнимых корней $p_1=j\omega, p_2=-j\omega$, то

$$F(p)-f(t)=\frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}e^{j\omega t}+\frac{A(-j\omega)}{B(-j\omega)}e^{-j\omega t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Два первых выделенных членов определяют синусоидальный ток и напряжение установившегося режима.

П р и м е р № 1 Рассчитать токи переходного процесса в ветвях электрической цепи, если: $E=100\,В, R_1=R_2=R_3=10\,Ом, L=0{,}1\,Гн$.



Р е ш е н и е. Расчет ведется в следующем порядке.

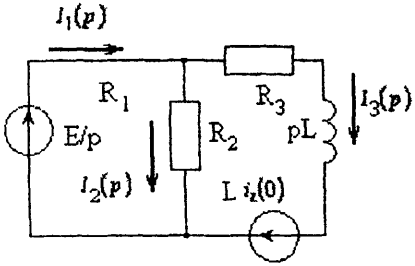
Нахождение изображение оригинала источника э.д.с.:

$$L[E]=\frac{E}{p}=\frac{100}{p}.$$

1.Составление операторной схемы замещения. Для составления операторной схемы замещения определяем начальные условия в ветви с индуктивным накопителем энергии

$$i_3(0\ ) = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_3 + R_2} = \frac{100 \cdot 10}{15 \cdot 20} = 3{,}3\ A.$$

С учетом этого операторная схема замещения имеет следующий вид.



2. Применив метод наложения, находим изображение тока $I_3(p)$

$$I_3(p) = \frac{E}{p(R_3 + pL)} + \frac{Li_L(0)}{R_3 + pL} = \frac{E + pLi_3(0)}{p(R_3 + pL)}.$$

Изображение тока $I_2(p) = E(p)/R_2 = \dfrac{E}{(pR_2)}$.

Изображение тока $I_1(p)$ определим как сумму

$$I_1(p) = I_3(p) + I_2(p) = \frac{E}{pR_2} + \frac{E + pLi_3(0)}{p(R_3 + pL)}.$$

3. Нахождение оригиналов искомых функций по их изображениям.

Для определения оригиналов искомых токов применим теорему разложения

$$f(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Корни знаменателя $I_3(p)$; $p_1 = 0$, $p_2 = -\dfrac{R_3}{L} = -\dfrac{10}{0{,}1} = -100$,

тогда

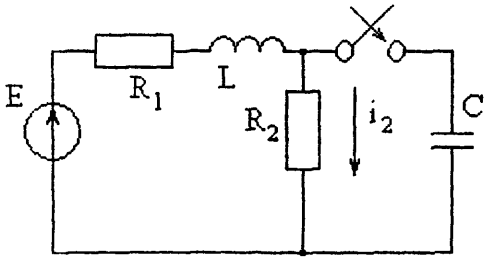
$$i_3(t) = \frac{E}{R_3} + \frac{E}{\dfrac{-R_3}{L} L} e^{-\frac{R_3}{L} t} + L \frac{i_3(0)}{L} e^{\frac{-R_3}{L} t} = (10 - 6{,}66\, e^{-100t})\ A.$$

Оригинал тока $I_2(p)$: $i_2(t) = \frac{E}{R_2} = 10\ A.$

Оригинал тока $I_1(p)$:

$$i_1(t) = f(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t} = 20 - 6{,}66\, e^{-100t}\ A.$$

Пример № 2. Определить закон изменения тока i_2 операторным методом после коммутации в цепи если $E = 100\ B, R_1 = R_2 = 10\ Ом, L = 5\ мГ, C = 100 мкФ.$

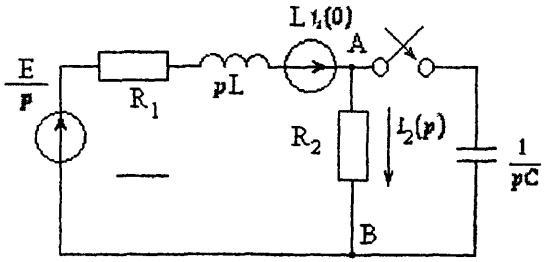


Решение. Изображение заданного воздействия: $L[E] = \frac{E}{p}$

Составление операторной схемы замещения с учетом начальных значений тока и напряжения:

$$i_1(0) = i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{20} = 5\ A, u_C(0) = u_C(0_-) = 0.$$

2.Методом двух узлов определяется напряжение $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$.



$$U_{AB}(p)=\frac{\frac{E}{p}+L\cdot i_1(0)\left[\frac{1}{R_1+pL}\right]}{\frac{1}{R_1+pL}+\frac{1}{R_2}+pC}$$

Изображение тока $I_2(p)=\frac{U_{AB}}{R_2}$.

$$I_2(p)=\frac{\left[\frac{E}{p}+Li_1(0)\right]\left[\frac{1}{R_1+pL}\right]}{\left[\frac{1}{R_1+pL}+\frac{1}{R_2}+pC\right]R_2}=\frac{\left[\frac{E}{p}+Li_L(0)\right]\left[\frac{1}{R_1+pL}\right]}{\left[R_2+R_1+pL+pCR_2(R_1+pL)\right]R_2}=$$

$$=\frac{\frac{E}{p}+Li_1(0)}{R_1+R_2+pL+R_1R_2Cp+p^2LCR_2}=\frac{100+5\cdot10^{-3}\cdot5}{p\left[20+p5\cdot10^{-3}+p\cdot10^{-3}\left(10+p5\cdot10^{-3}\right)\right]}$$

$$=\frac{100+2{,}5\cdot10^{-2}p}{p(0{,}5\cdot10^{-6}p^2+6\cdot10^{-3}p+20)}=\frac{F_1(p)}{pF_3(p)}$$

Нахождение корней уравнения

$F_3(p)=0$, $0{,}5\cdot10^{-6}p^2+6\cdot10^{-3}p+20=0$.

$$p_{1,2}=\frac{-6\cdot10^{-3}\pm\sqrt{36\cdot10^{-6}-40\cdot10^{-6}}}{10^{-6}}=\frac{-6\cdot10^{-3}\pm j2\cdot10^{-3}}{10^{-6}}=-6\cdot10^{3}\pm j2\cdot10$$

$p_1=-6\ 10^3+j2\cdot10^3$, $p_2=-6\cdot10^3-j2\cdot10^3$

Нахождение значение функции $F_1(p)$ в точке p_1.

$F_1(p_1)=100+2{,}5\cdot10^{-2}(-6\cdot10^3+j2\cdot10^3)=100-150+j50=50+j50$

Нахождение производной $F_3'(p)$ в точке p_1.

$F_3'(p)=10^{-6}p+6\cdot10^{-3}$, $F_3'(p_1)=10^{-6}\left(-6\cdot10^3+j2\cdot10^3\right)+6\cdot10^{-3}=j2\ 10^{-3}$

$F_1(0)=100$, $F_2(0)=20$

Ток $i_2(t)$:

$$i_2(t)=\frac{F_1(0)}{F_3(0)}+2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_1)}{p_1F_3'(p_1)}e^{p_1t}\right]=\frac{100}{20}+2\,\mathrm{Re}\left[\frac{(-50+j50)e^{(-6\cdot10^3+j2\cdot10^3)t}}{(-6\ 10^3+j2\cdot10^3)j2\cdot10^3}\right]=$$

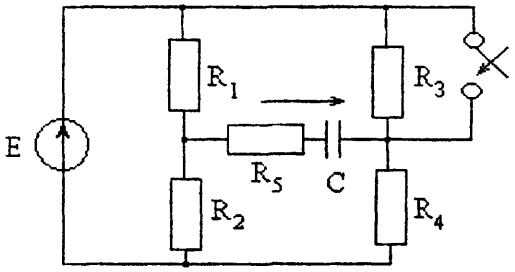
$$= 5 + 2\,\mathrm{Re}\left[\ 5{,}57e^{-6\cdot10^3 t}e^{j(2\cdot10^3 t-116^\circ)}\ \right] = 11{,}2e^{-6\cdot10^3 t}\cos\left(2000t - 116^\circ\right) =$$

$$= 5 + 11{,}2e^{-6000t}\sin\left(2000t - 26^\circ\right) A.$$

Пример №3. Рассчитать ток в ветви с конденсатором в схеме электрической цепи после коммутации, если

$E = 100\,В$, $R_1 = R_4 = 200\,Ом$, $R_2 = R_3 = 300\,Ом$,

$C = 20\,мкФ$, $R_5 = 250\,Ом$.



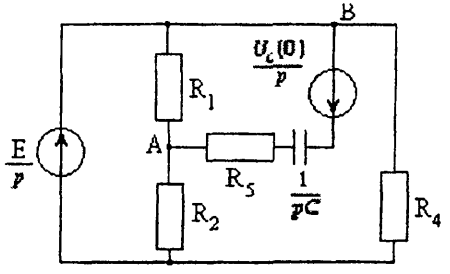
Решение. Изображение заданного воздействия $L[E] = \dfrac{E}{p} = \dfrac{100}{p}$.

1. Составление операторной схемы замещения с учетом начальных значений.

Определение начальных условий $u_{C_-}(0)$:

$$u_{C_-}(0) = u_{C_-}(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2}R_2 - \frac{E}{R_3 + R_4}R_4 = \frac{100}{500}300 - \frac{100}{500}200 = 20\,В.$$

С учетом этого операторная схема замещения имеет следующий вид.



2. Изображение тока $I_C(p)$ находится методом наложения:

$$I_C(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_2 + \frac{R_1\left(R_5 + \frac{1}{pC}\right)}{R_1 + R_5 + \frac{1}{pC}}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_5 + \frac{1}{pC}} + \frac{\frac{u_C(0)}{p}}{\frac{1}{pC} + R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Выполнив соответствующие алгебраические преобразования, получим:

$$I_C(p) = \frac{ER_1C + u_C(0)(R_1 + R_2)C}{(R_1R_2 + R_2R_5 + R_1R_5)pC + R_1 + R_2} = \frac{0{,}6}{3{,}7p + 500} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

По формуле разложения оригинал тока: $i_C(t) = 0{,}164\,e^{-135t}$ *А*.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 *Бакалов В.П., Воробиенко П П., Круг Б.И* Теория электрических цепей: Учебник для вузов. М.· Радио и связь,1998. – 444 с.

2. *Воробиенко П П* Теория линейных электрических цепей: Учеб. пособие для вузов – М.: Радио и связь, 1989. – 328 с.

3 *Шебес М Р, Каблукова М В* Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб пособие для вузов. 4-е изд. – М.: Высш.шк.,1990. – 544 с.

4.*Матханов П Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи: Учебник для вузов 2-е изд. – М.: Высш.шк.,1981. – 333 с.

5.*Лосев А.К* Теория линейных электрических цепей: Учебник для вузов. - М.: Высш шк.,1987 - 512 с.

6 *Ионкин Л Р, Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники: Т.1 Учебник для вузов. 2-е изд. – М.: Высш.шк.,1976.–520с

7.*Бессонов Л А.* Теоретические основы электротехники· Учебник для вузов. – М : Высш шк., 1978 – 420 с.

8 *Белецкий А Ф* Теория линейных электрических цепей. Учебник для высших учебных заведений. М.: Радио и связь, 1986.–450с.

9 *Мустафаева Н М, Неспаева Т Д., Нурпеисов Б.Н, Ермагамбетов С Б.* Классический и операторный методы расчета переходных процессов в линейных цепях. – Алма-Ата: КазПТИ, 1991. – 30 с.

10 *Атабеков Г И.* Теоретические основы электротехники: Т.1.- М.· Энергия, 1978. – 592 с.

11.*Поливанов К М* Теоретические основы электротехники.- М: Энергия,1975. – 352 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	3
1	ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА	4
1.1.	Основные элементы электрических цепей постоянного тока	4
1.2.	Законы Ома	7
1.3.	Законы Кирхгофа	8
1 4.	Баланс мощностей	9
1.5.	Эквивалентные преобразования электрических схем	10
1 6	Анализ простейших электрических цепей постоянного тока	14
1 7	Упражнения и задачи для СРС	17
2.	МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА	29
2.1	Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей	29
2.2.	Метод контурных токов	31
2 3.	Метод узловых потенциалов	34
2.4.	Метод наложения	37
2.5.	Метод активного двухполюсника	42
2.6.	Упражнения и задачи СРС	46
3.	АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ	60
3 1	Основные элементы цепи при гармонических воздействиях	60
3.2.	Метод комплексных амплитуд	63
3.3	Упражнения и задачи для СРС	67
4	АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ	85
4 1.	Основные понятия и определения	85
4 2.	Методика расчета электрических цепей при негармонических воздействиях	87
5.	КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	94
5 1.	Основные понятия	94
5 2	Общая методика анализа переходных процессов в разветвленных цепях первого порядка	96
5 3.	Общая методика анализа переходных процессов в цепях выше первого порядка	103

5 4. Упражнения и задачи для СРС 106
6. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ 118
6.1 Основные понятия 118
6.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме 121
6 3 Общая методика анализа переходных процессов операторным методом 122
Библиографический список 130
Содержание 131

Учебное издание

Иманбекова Тохтабуби Джумадиловна

Теория электрических цепей. Упражнения и задачи

Учебное пособие

Зав. РИО *З А Губайдулина*
Редактор *Ж А Нурмаганбетова*
Техн. редактор *Н.Н.Передереева*
Корректор *А Г Бегимбекова*
Компьютерный набор
и верстка *Д М Акубаева*

Подписано в печать 20.02.2003
Тираж 500 экз. Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. № 1.
Объем 6,0 уч.-изд.л. Заказ N.....Цена договорная.

Издание Казахского национального технического
Университета им.К.И.Сатпаева
Издательский центр КазНТУ, Алматы, Ладыгина, 32