

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический университет
имени К.И.Сатпаева

Б. Х. Айтчанов

**МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рекомендовано в качестве учебника для вузов
Министерством образования и науки Республики Казахстан

Алматы 2003

УДК 681.514 (075)

ББК 32.965 я 73

А 36

- А 36 **Айтчанов Б.Х.** Методы статистических исследований нелинейных динамических систем: Учебник. – Алматы, КазНТУ, 2003. 160 с. ISBN 9965–487–56–1

В книге рассмотрены элементы теории систем, применение функциональных рядов Вольтерра для построения математических моделей и методы статистических исследований нелинейных систем управления. Особое внимание уделено построению структурных моделей непрерывных и цифровых динамических частотно-импульсных модуляторов, разработке математических моделей и методов статистических исследований динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

Предназначается для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области применения математических методов и ЭВМ.

Ил.34. Табл. 5. Библиогр. – 79 назв.

Рецензенты: Б.Х. Хисаров, зав. кафедрой «Инженерная кибернетика», АИЭ и С, канд. техн. наук, проф.

К.С. Сматов, проф. кафедры «Автоматика и телемеханика, КазНТУ, д-р. физ.-мат. наук

ББК 32.965 я 73

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2001 год

А $\frac{2402000000}{00(05) - 03}$

ISBN 9965–487–56–1



КазНТУ, 2003.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной теории управления образовалось довольно много самостоятельных направлений в изучении определенных классов управляемых динамических систем и, прежде всего, непрерывных (систем с непрерывным временем), импульсных (систем с дискретным временем). В каждом из направлений сложился собственный математический аппарат и методическая база для исследования таких систем. С их помощью были обнаружены закономерности и свойства, присущие тем или иным системам, которые проявляются одинаковым образом в управляемых динамических системах различной природы. Это означает, что существуют некоторые общие законы функционирования в непрерывных и импульсных системах. Естественно, что первым шагом на пути выявления этих законов является создание универсального метода описания процессов, происходящих в системах, которые бы в то же время отражал их специфические черты. В данной работе такой метод строится на основе функциональных рядов Вольтерра, являющихся эффективным инструментом исследования управляемых динамических систем.

Целью учебника является систематическое изложение сведений о математических моделях и методах статистических исследований широко распространенного класса нелинейных систем—динамических частотно-импульсных систем управления объектами.

В книге подробно изложены элементы теории систем, методов построения математических моделей нелинейных непрерывных и цифровых динамических систем в классе функциональных рядов Вольтерра и их статистического исследования.

Построены структурные модели различных видов динамических частотно-импульсных модуляторов и с их использованием построены нелинейные и статистически линеаризованные модели рассматриваемых систем. На их основе разработаны различные по точности и вычислительной трудоемкости и методы статистического анализа и синтеза непрерывных и цифровых динамических частотно-импульсных систем.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время курсы управленческого цикла «Основы теории систем», «Теория управления», «Теория информационных систем» и «Модели и методы стохастических систем управления» являются важными курсами изучаемыми в технических университетах. В связи с этим четкое изложение материала является необходимым условием для разработки учебника и он подготовлен в соответствии с типовыми программами названных курсов.

Данная книга структурно состоит из предисловия, введения, шести глав, заключения и списка литературы.

В учебнике рассмотрены элементы математической теории систем, функциональных рядов Вольтерра, применяемых для построения математических моделей и статистического исследования нелинейных динамических систем и приведены сведения о математических моделях и методах статистического исследования нелинейных динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

Особое внимание уделено вопросам построения математических моделей и разработке методов статистического исследования непрерывных и цифровых динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием. Разработаны структурные модели различных видов динамических частотно-импульсных модуляторов и с их использованием построены математические модели рассматриваемых систем в классе функциональных рядов Вольтерра. На основе вольтерровских моделей получены различные по точности и вычислительной трудоемкости линеаризованные модели и методы статистического анализа и синтеза непрерывных и цифровых динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

Модели и методы статистических исследований непрерывных и цифровых динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием использованы при разработке диалоговой системы проектирования и исследования нелинейных динамических систем управления с запаздыванием.

Учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по специальностям группы 3700 (3701–3706) при изучении ряда специальных дисциплин «Основы теории систем», «Теория управления», «Модели и методы стохастических систем управления». Предложенные в учебнике материалы полезны аспирантам и специалистам, разрабатывающим системы управления производственно-технологическими процессами.

I. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Элементы математической теории систем

Понятие системы в математической теории систем является ключевым и может быть введено различными способами [31, 34, 56].

Для пояснения смысла вводимого ниже определения системы рассмотрим физически существующий объект (О), над которым производится эксперимент (Э) с целью описания поведения объекта в заданных условиях. Примеры экспериментов могут служить наблюдения за поведением живого организма, анализ деятельности предприятия, изучение движения летательного аппарата и т. д.

Совокупность физических объектов, взаимодействующих в процессе эксперимента Э с объектом О, составляет окружающую среду. Взаимодействие между объектом и окружающей средой протекает в двух направлениях: среда действует на объект и сам объект оказывает некоторое воздействие на среду. Эксперимент Э заключается в наблюдении и регистрации при помощи некоторых приборов и устройств физических процессов и величин, характеризующих взаимодействие среды и объекта, причем эксперимент должен быть многократным, т. е. в распоряжении экспериментатора имеется любое число тождественных копий объекта О, над каждой из которых можно провести эксперимент Э в тех же условиях.

Дальнейшему рассмотрению подлежат только такие эксперименты, в которых:

- 1) приборы и устройства наблюдения и регистрации данных не вносят существенных искажений в результаты наблюдений;
- 2) все наблюдаемые физические величины и процессы могут быть количественно описаны при помощи функции, определенных на действительной прямой E^1 и со значениями в E^1 , т. е. при помощи действительных (скалярных) функций.

Предположим, что в условиях данного эксперимента воздействия среды на объект определены во всех точках одного и того же непустого множества $T \subseteq E^1$, а ответные действия объекта – во всех точках одного и того же непустого множества $T^* \subseteq E^1$. Множества T и T^* назовем множествами моментов времени. В большинстве рассматриваемых в

теории систем задач T и T^* совпадают. Примеры множества моментов времени: 1) вся прямая E^1 ,

2) множество целых чисел I^1 , полупрямая $[t_0, \infty)$, 4) отрезок $[t_0, T]$. Выбор того или иного типа множеств моментов времени определяется природой объекта и среды, характером эксперимента $\mathcal{E}$, а также устройствами наблюдения, регистрации и обработки экспериментальных данных.

Входными сигналами (воздействиями) назовем функции $x(t)$, определенные на множестве T и со своими значениями в E^1 , описывающие действие среды на объект. А выходными сигналами (реакциями) назовем функции $y(t)$, определенные на множестве T^* и со своими значениями в E^1 , описывающие действие объекта на среду.

Предположим, что все входные сигналы $x(t)$ являются элементами нормированного пространства $A(T)$, все выходные сигналы $y(t)$ – элементами нормированного пространства $B(T^*)$. Пространства $A(T)$ и $B(T^*)$ назовем пространствами входных и выходных сигналов. В дальнейшем будут использоваться пространства сигналов $C[t_0, T]$, $C(E^1)$, l_2 , $L_2(E^1)$ и т. д. Образует декартово произведение пространств сигналов $A(T) \times B(T^*)$. Теперь можно ввести определение системы [31,56].

Системой называется бинарное отношение $R \subset A(T) \times B(T^*)$. Для большинства задач, рассматриваемых в теории нелинейных динамических систем, пространства $A(T)$ и $B(T^*)$ совпадают, и систему можно рассматривать как отношение $R \subset A(T) \times A(T)$.

Систему обычно можно представить как совокупность более простых подсистем, каждая из которых задается бинарным соотношением на своих пространствах сигналов. Тогда вся система в целом задается n -арным отношением. Для определения взаимоотношения подсистем, заданных в n -арным отношением, необходимо ввести алгебраические действия с системами.

Рассмотрим множество систем K , определенных на одном и том же пространстве сигналов $A(T)$, и введем алгебраические действия с системами из этого множества, используя понятия сечения $Rx(t)$ бинарного отношения $R \subset A(T) \times A(T)$.

Сумму $R+S$ систем $R, S \in K$ определим так:

$$(R + S)x(t) = Rx(t) + Sx(t).$$

Сумму систем обладает коммутативным свойством $R + S = S + R$ и ассоциативным свойством $F + (R + S) = (F + R) + S, F \in K$.

Композицию $R * S$ систем $R, S \in K$ введем соотношением

$$(R * S)x(t) = R(Sx(t)) .$$

Композиция ассоциативна: $F * (R * S) = (F * R) * S$, $F \in K$, но в общем случае не коммутативна $R * S \neq S * R$.

Композиция и сумма систем обладают левым дистрибутивным свойством $(F + R) * S = F * S + R * S$, но в общем случае не обладают правым дистрибутивным свойством $F * (S + R) \neq F * S + F * R$.

Произведение RS систем $R, S \in K$ определим

$$(RS)x(t) = (Rx(t)) (Sx(t)) .$$

Произведение ассоциативно и коммутативно, но не обладает дистрибутивными свойствами относительно суммы и композиции.

Бинарное отношение (система) задает собой соответствие между элементами пространств $A(T)$ и $B(T^*)$. Это соответствие может быть описано аналитически. Примером отношения, заданного аналитически, является линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + y = x \quad (1.1)$$

при начальном условии $y(t_0) = s \in E^1$. Другим примером отношения, заданного аналитически, является линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^t h(t, \tau) y(\tau) d\tau . \quad (1.2)$$

Если каждому входному сигналу $x(t) \in A(T)$ соответствует один и только один выходной сигнал $y(t) \in B(T^*)$, то система называется функциональной. Функциональному отношению $R \subset A(T) \times B(T^*)$ можно сопоставить оператор $y(t) = fx(t)$, действующий из пространства $A(T)$ в пространство $B(T^*)$.

Для функциональных систем правила действий с системами совпадают с правилами действий с операторами. Сумма, композиция и произведение систем $F, G \in K$ определяются соответственно формулами

$$(F + G)x(t) = Fx(t) + Gx(t), (F * G)x(t) = F[Gx(t)], \\ (FG)x(t) = F[x(t)] G[x(t)].$$

Определим понятие стационарной системы. Пусть для простоты $T = E^1$. Введем на декартовом произведении $A(T) \times A(T)$ отношение сдвига $\nabla_\sigma, \sigma \in E^1 (\sigma \in [0, \infty))$, соответствующее каждой функции $x(t) \in A(T)$ функцию $x(t + \sigma) \in A(T)$. Отношение ∇_σ , очевидно, функционально.

Систему $R \subset A(T) \times A(T)$ назовем стационарной, если для всех $\sigma \in E^1$ ($\sigma \in [0, \infty)$),

$$\nabla_{\sigma} * R = R * \nabla_{\sigma}.$$

Система (1.1) стационарна в смысле этого определения, а система (1.2) в общем случае стационарной не является.

Из введенных правил действий с системами следует, что сумма, произведение и композиция двух стационарных систем являются стационарными системами. Стационарность суммы и произведения очевидна. Докажем стационарность композиции двух стационарных систем.

$$\nabla_{\sigma} * (F * G) = F * \nabla_{\sigma} * G = (F * G) * \nabla_{\sigma},$$

т.е. композиция стационарна. Функциональная система

$y(t) = fx(t); x(t), y(t) \in A(E^1)$ называется стационарной, если

$$(\nabla_{\sigma} * f)x(t) = (f * \nabla_{\sigma})x(t).$$

Система называется непрерывной (по времени), если пространства ее входных и выходных сигналов являются пространствами функций. Примерами непрерывных систем могут служить уравнения (1.1) и (1.2).

Система называется дискретной (по времени), если хотя бы одно из ее пространств есть пространство последовательностей, т. е. дискретное по времени пространство. Примером дискретной системы является разностное уравнение $\Delta y_k + ay_k = x_k, k = 0, 1, \dots$ при начальном условии $y_0 = s \in E^1$. В этом случае пространства входного и выходного сигналов являются дискретными по времени.

Смысл введенного нами определения был пояснен на примере многократного эксперимента с физически существующим объектом. Однако само это определение имеет более широкий характер и позволяет считать системами математические модели любых представимых объектов нашего сознания, не обязательно существующих физически, если поведение таких объектов может быть описано математически и для них можно определить абстрактные пространства сигналов.

Физически возможный объект обладает свойством причинности, т.е. реакция объекта в любой момент времени определена однозначно, если известны законы, определяющие его поведение и все прошлое до этого момента времени. Условие причинности может быть расчленено на два условия:

1) условие неантисипативной связи (связи без упреждения), если реакция системы в любой текущий момент времени не зависит от будущих значений сигнала;

2) условие антисипативности (с упреждением), реакция системы хотя бы в один из моментов времени зависит от воздействий, которые будут приложены к ней в будущем.

Система чисто антисипативна, если выходной сигнал не зависит от прошлых значений входного сигнала. Очевидно, что системы (1.1) и (1.2) являются неантисипативными.

Дадим математическое определение причинной системы, для которой множества входных и выходных сигналов совпадают, т. е. $R \subset A(T) \times A(T)$. Введем на этом множестве функциональное отношение $P_\tau, \tau \in T$, сопоставляющее каждой функции $x(t) \in A(T)$ функцию

$$x_\tau(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Отношение P_τ назовем отношением сечения. Теперь отношение сечения $P^\tau, \tau \in T$, сопоставляющее каждой функции $x(t) \in A(T)$ функцию

$$x_\tau(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Систему $R \subset A(T) \times A(T)$ назовем неантисипативной, если $P_\tau * R = P_\tau * R * P_\tau$.

Если же $P^\tau * R = P^\tau * R * P^\tau$, то система чисто антисипативна. Из введенных правил действий с системами следует, что сумма, композиция и произведение двух неантисипативных (чисто антисипативных) систем являются неантисипативными (чисто антисипативными). Система, заданная n -арным отношением, неантисипативна, если неантисипативны все ее подсистемы, и антисипативна, если хотя бы одна из подсистем антисипативна.

Если система $R \subset A(T) \times A(T)$ функциональна, то второе условие причинности заведомо выполняется.

Функциональную систему $y(t) = f x(t)$ назовем причинной, если она неантисипативна, т. е. если для всех $x(t) \in A(t)$ и $\tau \in A(t)$

$$(P_\tau * f)x(t) = (P_\tau * f * P_\tau)x(t).$$

Функциональную систему $y(t) = f x(t)$ назовем антипричинной, если она антисипативна, т. е. если для всех $x(t) \in A(t)$ и $\tau \in A(t)$

$$(P^\tau * f)x(t) = (P^\tau * f * P^\tau)x(t).$$

Рассмотрим числовую функцию от двух аргументов $y = f[t, x]$, $t \in T$, $x \in E^1$. Если система определяется оператором $y(t) = f[t, x(t)]$, $t \in T$, $x(t) \in A(T)$, то такая система называется безынерционной. Безынерционная система, очевидно, функциональна. Выходной сигнал безынерционной системы в момент времени $t \in T$ не зависит от прошлых и будущих значений входного сигнала.

Функциональную систему $y(t) = f x(t)$; $x(t), y(t) \in A(T)$ назовем линейной, если оператор f линеен, и нелинейной в противном случае.

Функциональная система $y(t) = f x(t)$; $x(t), y(t) \in A(T)$ называется однородной степени i , если оператор f однороден и имеет степень i . В пространстве $C(T)$ однородная система, как следует из теоремы Фреше, задается формулой

$$y(t) = \int \cdots \int_T h_i(t, \tau_1 \cdots \tau_i) x(\tau_1) \cdots x(\tau_i) d\tau_1 \cdots d\tau_i. \quad (1.3)$$

Однородная система (1.3) причинна тогда и только тогда, когда $h_i(t, \tau_1 \cdots \tau_i) = 0$ при $\tau_j = 1, \dots, i$, т. е. оператор (1.3) является однородным оператором Вольтерра. Установившейся реакцией причинной однородной системы степени i ($i \geq 1$) назовем предел

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^t h_i(t, \tau_1 \cdots \tau_i) x(\tau_1) \cdots x(\tau_i) d\tau_1 \cdots d\tau_i = \int_{-\infty}^t \cdots \int_{-\infty}^t h_i(t, \tau_1 \cdots \tau_i) x(\tau_1) \cdots x(\tau_i) d\tau_1 \cdots d\tau_i. \quad (1.4)$$

Формулу (1.4), учитывая, что система причинна, можно записать в сокращенном виде:

$$y(t) = \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \cdots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}, \quad (1.5)$$

где $dv_{\tau} \equiv d\tau_1 \cdots d\tau_i$, знак $\int_{E^i}$ означает i -интеграл от $-\infty$ до $+\infty$.

Необходимым и достаточным условием стационарности однородного регулярного Вольтерра является зависимость его ядра только от разностей $t - \tau_j$, $j = 1, \dots, i$, т. е.

$$y(t) = \int_{E^i} h_i(t - \tau_1, \cdots, t - \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (1.6)$$

Если оператор f является полиномом степени N , то система называется полиномиальной системой степени N

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E^i} h_i(t - \tau_1, \cdots, t - \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (1.7)$$

Сумма, композиция и произведение двух полиномиальных систем тоже являются полиномиальными системами. Из свойства суммы следует, что для стационарности полиномиальной системы степени N необходимо и достаточно, чтобы все составляющие ее регулярные операторы были бы стационарны.

Функциональная система $y(t) = fx(t)$ называется аналитической, если ее можно представить равномерно сходящимся рядом из однородных систем.

Сумма, композиция и произведение двух аналитических систем тоже являются аналитическими системами, если полученные ряды сходятся.

Формулы (1.3), (1.6), (1.7) определяют непрерывные причинные системы. Нетрудно, записать соответствующие им соотношения для дискретных систем. Так, причинная полиномиальная дискретная система степени N может быть записана в виде

$$y[t] = \sum_{i=0}^N \sum_{I^i} h_i[n, m_1, \dots, m_i] \prod_{r=1}^i x[m_r], \quad (1.8)$$

где знак $\sum_{I^i}$ заменяет i -кратное суммирование по индексам m_i от $-\infty$ до $+\infty$. Из сравнения формул (1.7) и (1.8) следует, что свойства дискретных систем во многом аналогичны свойствам непрерывных систем.

Выше рассматривались свойства функциональных систем. Теперь пусть неантисипативное отношение $R \subset A(T) \times A(T)$ нефункционально, причем множество моментов времени T имеет наименьший элемент t_0 . Предположим, что существует параметр $s \in S$, не зависящий от будущих значений входного и выходного сигналов и такой, что каждому значению этого параметра и каждому входному сигналу соответствует один и только один выходной сигнал.

В этом случае систему R можно описать функциональным по паре $x(t), s(t_0)$ тернарным отношением $R_s \subset A(T) \times S \times A(T)$. Действительное нормированное множество S , обладающее указанным свойством, назовем пространством начальных состояний.

Функциональному тернарному отношению R_s можно сопоставить однопараметрическое семейство операторов $y(t) = f[s, x(t)], s \in S, x(t), y(t) \in A(T)$. Из условия неантисипативности следует, что для всех $\tau \in T, s \in S, x(t) \in A(T)$ $P_\tau f[s, x(t)] = P_\tau f[s, P_\tau x(t)]$.

Нефункциональную неантисипативную систему $R \subset A(T) \times A(T)$, множество элементов времени которой T имеет минимальный элемент t_0 назовем причинной, если для нее существует пространство начальных состояний.

Для неантисипативной системы R построим семейство $P^\tau R$ и рассмотрим для него пространство начальных состояний $S(\tau)$. Пусть для всех $\tau \in T$ эти пространства совпадают. Тогда пространство $S(\tau) = S(t_0) = S$ назовем пространством состояний системы R . Поскольку R неантисипативна, то для нее существуют уравнения состояния:

$$s(\tau) = \phi_1[s(t_0), x_\tau(t)], \quad y(\tau) = \phi_2[s(\tau), x(\tau), \tau].$$

Уравнения состояния могут быть выведены из соотношения $y(t) = f[s(t_0), x(t)]$.

Если пространство S арифметическое пространство E^n , то система $R \subset A(T) \times A(T)$ называется системой с конечномерным пространством состояний, если же пространство S функционально, то система R является системой с бесконечномерным пространством состояний.

Состояние системы $R \subset A(T) \times A(T)$, обозначаемое θ , назовем нулевым, если θ является нулем пространства S .

Если система находится в нулевом начальном состоянии, то ее реакцию на входной сигнал $x(t)$ назовем реакцией в нулевом состоянии $y(t) = f[\theta, x(t)]$. Для системы (1.1) она запишется так

$$y(t) = \int_{t_0}^t \exp[-(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0.$$

Если система находится в нулевом начальном состоянии $s \in S$, то ее реакция на нулевой входной сигнал $\theta(t)$ называется реакцией при нулевом сигнале

$$y(t) = s \exp[-(t - t_0)], \quad t \geq t_0.$$

Условие стационарности системы, заданной однопараметрическим семейством операторов $y(t) = f[s, x(t)]$, выглядит так:

$$\Delta_\sigma f[s, x(t)] = \Delta_\sigma f[s(t_0 + \sigma), \Delta_\sigma x(t)].$$

Систему $y(t) = f[s, x(t)], s \in S, x(t), y(t) \in A(T)$ назовем обладающей свойством разложения, если для любых $s \in S, x(t) \in A(T)$ ее можно представить в виде

$$f[s, x(t)] = f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)].$$

Систему, заданную однопараметрическим свойством операторов $y(t) = f[s, x(t)], s \in S, x(t), y(t) \in A(T)$ назовем линейной [59], если она:

1) обладает свойством разложения, т.е. для любых $s \in S, x(t) \in A(T)$

$$f[s, x(t)] = f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)];$$

2) линейна в нулевом состоянии, т. е. оператор $f[\theta, x(t)]$ линеен по $x(t)$ и при нулевом сигнале оператор $f[s, \theta(t)]$ линеен по s . Любая система, не

удовлетворяющая одновременно этим двум условиям, называется нелинейной.

Нелинейная система $y(t) = f[s, x(t)], s \in S, x(t), y(t) \in A(T)$ называется однородной второй степени, если она:

1) для любых $s \in S, x(t) \in A(T)$ представима в виде

$$f[s, x(t)] = f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)] + 2\phi[s, x(t)];$$

2) однородна второй степени в нулевом состоянии и при нулевом сигнале;

3) функция $\phi[s, x(t)]$ билинейна.

Нелинейная система $y(t) = f[s, x(t)], s \in S, x(t), y(t) \in A(T)$ называется однородной третьей степени, если она:

1) для любых $s \in S, x(t) \in A(T)$ представима в виде

$$f[s, x(t)] = f[\theta, x(t)] + f[s, \theta(t)] + 3\phi_1[s, x(t)] + 3\phi_2[s, x(t)];$$

2) однородна, третьей степени в нулевом состоянии и при нулевом сигнале;

3) функция $\phi_1[s, x(t)]$ однородна, второй степени по $x(t)$ и линейна по $x(t)$, функция $\phi_2[s, x(t)]$ однородна, второй степени по $x(t)$ и линейна по s .

Систему $y(t) = f[s, x(t)], s \in S, x(t), y(t) \in A(T)$ назовем обладающей свойством сохранения нуля, если можно представить в виде

$$f[\theta, \theta(t)] = \theta(t).$$

Как следует из определений, однородные системы степени i обладают этим свойством. Установившейся реакцией однородной системы $f[s, x(t)]$ назовем предел

$$y(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} f[s(t_0), x(t)],$$

если этот предел существует и не зависит от $s \in S, s \in S$

Система $y(t) = f[s, x(t)], s \in S, x(t), y(t) \in A(T)$ является полиномиальной степени N , если она представима в виде суммы однородных систем порядка до N включительно

$$f[s, x(t)] = \sum_{i=0}^N f_i[s, x(t)].$$

Нелинейная система $y(t) = f[s, x(t)], s \in E^n, S, x(t), y(t) \in A(T)$ называется аналитической, если её можно представить в виде равномерно сходящегося ряда из однородных систем

$$y(t) = f[s, x(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} f_i[s, x(t)].$$

1.2. Определение ядер ряда Вольтерра по заданным структурным схемам системы

Широкое распространение в прикладных задачах исследования систем получил графический способ ее представления, основанный на использовании структурных схем. Этот способ особенно удобен для сложных систем, образованных соединением большого числа подсистем.

Для образования соединений между подсистемами вводятся элементарные системы (элементы): сумматор и умножитель. Каждая подсистема $y(t) = f[s, x(t)]$ изображается так, как это показано на рис. 1.1.

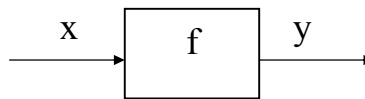


Рис. 1.1. Условное изображение подсистемы

Сумматором называется безынерционная система, имеющая n входов $x_1, \dots, x_n$ и один выход y и описываемая соотношением

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i = \pm 1.$$

Графическое изображение сумматора для различных значений n показано на рис. 1.2. Сумматор является линейной системой.

Умножителем называется безынерционная система, имеющая n входов $x_1, \dots, x_n$ и один выход y и описываемая формулой

$$y = \prod_{i=1}^n x_i.$$

Графически умножитель для случая двух входов изображен на рис. 1.2 г. С помощью этих двух элементарных систем сопоставим введенным в 1.1 действиям с системами соответствующие структурные схемы.

Сумме двух систем соответствует параллельное соединение, структурная схема которого приведена на рис. 1.4.

Композиции соответствует последовательное соединение в соответствии со структурной схемой, показанной на рис. 1.3. На рис. 1.4. приведен еще один вид соединения – обратное, образованное с помощью устройства сравнения.

Возможен и другой вид обратного соединения, когда вместо устройства сравнения вводится сумматор, приведенный на рис. 1.5.

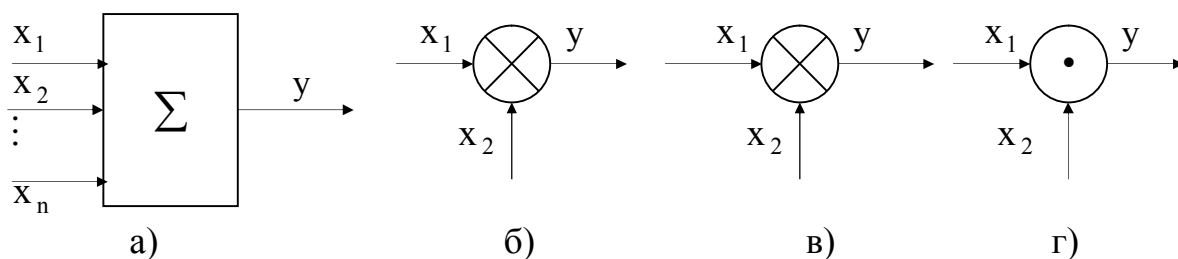


Рис. 1.2. Графическое изображение сумматора

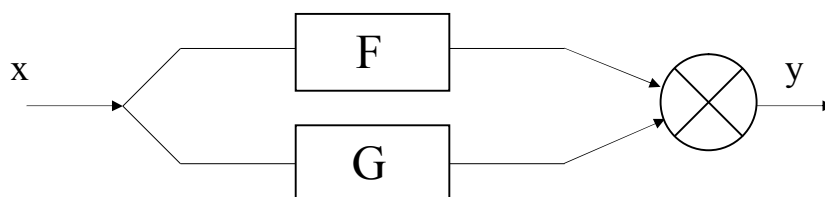


Рис.1.3. Параллельное соединение двух систем

Первый вид обратного соединения соответствует отрицательной обратной связи, а второй— положительной. Если $G \equiv I$, то обратная связь называется жесткой, а при $G \neq I$ -гибкой. Последний вид соединения (рис. 1.5.) соответствует перемножению двух систем.

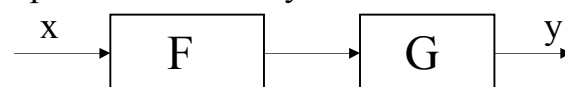


Рис 1.4. Последовательное соединение двух систем

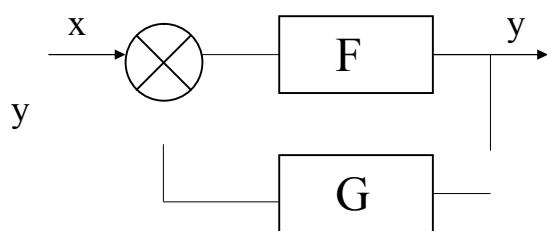


Рис. 1.4. Система с отрицательной обратной связью

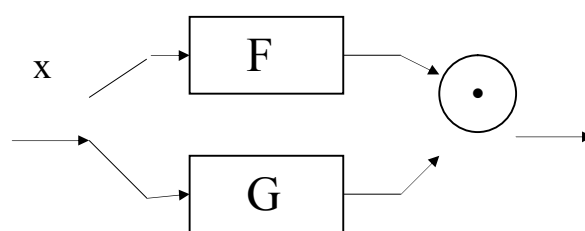


Рис. 1.5. Перемножение

Достоинство структурных схем заключается в их наглядности и простоте методов преобразования, которые служат для перехода от парного отношения, заданного на промежуточных пространствах сигналов, к бинарному, определенному на пространствах входных и выходных сигналов.

Такой переход позволяет описать всю систему единым аналитическим выражением. Методы преобразования структурных схем особенно просты, если все подсистемы линейны.

Пусть подсистемы F и G являются функциональными и линейными. Обозначим ядра линейных операторов Вольтерра $h(t, \tau)$ и $k(t, \tau)$ соответственно. Поскольку параллельное соединение (рис. 1.3) соответствует сумме систем, то

$$y(t) = (F + G)x(t) = \int_{E^1} \{h(t, \tau) + k(t, \tau)\}x(\tau)d\tau = \int_{E^1} g(t, \tau)x(\tau)d\tau.$$

где $g(t, \tau) = h(t, \tau) + k(t, \tau)$. Если же системы соединены последовательно (рис. 1.4), то это соответствует их композиции. Меняя порядок интегрирования, найдем

$$y(t) = (F * G)x(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) \int_E k(\tau, \sigma)x(\sigma)d\sigma d\tau = \int_{E^1} g(t, \sigma)x(\sigma)d\sigma,$$

где $g(t, \sigma) = \int_{E^1} h(t, \tau)k(\tau, \sigma)d\tau$.

Рассмотрим теперь структурную схему, приведенную на рис. 1.5, в предположении, что обратная связь отрицательная и жесткая. Для этой системы имеем такие уравнения:

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - y(t), \\ y(t) &= \int_{E^1} k(t, \tau)e(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно выходного сигнала $y(t)$:

$$y(t) = \int_{E^1} k(t, \tau)x(\tau)d\tau - \int_{E^1} k(t, \tau)y(\tau)d\tau. \quad (1.10)$$

Решение уравнения (1.10) будем искать в виде

$$y(t) = \int_{E^1} \Gamma(t, \tau)x(\tau)d\tau$$

где $\Gamma(t, \tau)$ – резольвента. Подставляя это выражение в уравнение (1.10), находим

$$\int_{E^1} \Gamma(t, \tau)x(\tau)d\tau = \int_{E^1} k(t, \tau)x(\tau)d\tau - \int_{E^1} \left\{ \int_{E^1} k(t, \tau)\Gamma(t, \sigma)d\tau \right\} x(\sigma)d\sigma.$$

Поскольку полученное равенство должно выполняться для любых входных сигналов $x(t)$, то отсюда получаем уравнение (1.10), находим

$$\Gamma(t, \tau) = k(t, \tau) - \int_{E^1} k(t, \tau)\Gamma(t, \sigma)d\tau.$$

Использование для представления линейных систем функций, заданных в явном виде, позволяет построить описание сложной системы по заданной структурной схеме. Для нелинейных аналитических систем такие же преимущества дает применение рядов Вольтерра, которые тоже дают явную связь между входным и выходным сигналами [54, 59].

Покажем, что ряд Вольтерра естественно возникает при описании во временной области функциональной системы, в которой имеется безынерционный нелинейный элемент, представимый рядом Тейлора или полиномом.

Рассмотрим непрерывную нелинейную систему (рис. 1.6), образованную последовательным соединением линейного инерционного и стационарного полиномиального безынерционного звеньев. Для такой системы соотношения между сигналами $x(t)$ и $y(t)$ имеют вид

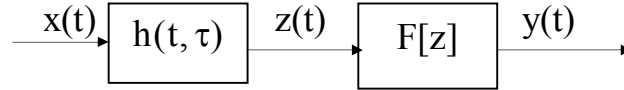


Рис. 1.6. Непрерывная нелинейная система

$$z(t) = \int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1.11)$$

$$y(t) = F[z(t)] = \sum_{i=1}^N a_i z^i(t). \quad (1.12)$$

Общее описание системы можно получить, подставив (1.11) в (1.12)

$$\begin{aligned} y(t) = F\left[\int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau\right] &= \sum_{i=1}^N a_i \left[\int_{E^1} h(t, \tau) x(\tau) d\tau\right]^i = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \prod_{j=1}^i \left[\int_{E^1} h(t, \tau_j) x(\tau_j) d\tau_j\right] = \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^1} \prod_{j=1}^i [h(t, \tau_j) x(\tau_j)] dv_{\tau}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Если обозначить $\prod_{j=1}^i h(t, \tau_j) = h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$, $i = 1, \dots, N$, то соотношение (1.13) примет вид полинома Вольтерра

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^1} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i x(\tau_j) dv_{\tau}. \quad (1.14)$$

Если линейная система стационарна, то ряд (1.14) может быть записан следующим образом:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i \int_{E^1} h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i x(t - \tau_j) dv_{\tau},$$

причем его ядра определяются формулами

$$\prod_{j=1}^i h(\tau_1, \dots, \tau_j) = \prod_{j=1}^i h_i(\tau_j), \quad i = 1, \dots, N.$$

Ядра полинома (1.14) полностью разделимы (сепарабельны), т. е. ядро порядка i представимо в виде произведения i ядер первого порядка. Другой возможный тип ядер — это частично разделимые ядра. Частично

разделимое ядро порядка i представимо в виде произведения j ядер ($j < i$) низших порядков. Например, ядро третьего порядка вида $h_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = h_1(t, \tau_1)h_2(t, \tau_2, \tau_3)$ будет частично делимым.

Если ядра частично или полностью делимы, то это существенно упрощает расчет системы. Однако на практике ядра этого типа встречаются редко.

Приведенные примеры являются иллюстрацией к общему положению, согласно которому любую функциональную нелинейную систему без обратной связи, образованную соединением инерционных линейных систем и аналитических безынерционных нелинейностей, можно описать рядом Вольтерра. Одновременно эти примеры показывают, как это можно сделать практически.

Предположим, что описания систем в виде рядов Вольтерра уже получены. Выведем правила действий с этим рядами. Все выкладки проведем для непрерывных нелинейных систем.

Линейные системы можно рассматривать как частный вид полиномиальных систем, у которых все ядра, кроме ядра первого порядка, тождественно равны нулю. Поэтому формальные правила действий с рядами Вольтерра будут содержать, как частный случай, правила формальных преобразований весовых функций линейных систем.

Пусть имеются две функциональные полиномиальные системы R_n и T_m с ядрами $h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$, $i = 1, \dots, n$, и $k_j(t, \tau_1, \dots, \tau_j)$, $j = 1, \dots, m$, соответственно. Соединим их параллельно (рис. 1.3), что соответствует сумме систем. Согласно определению суммы

$$(R_n + T_m) x(t) = \sum_{i=1}^N \int_{E^1} \{h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) + k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)\} \times \\ \times \prod_{j=1}^i x(\tau_j) dv_\tau = \sum_{i=1}^N \int_{E^1} g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i x(\tau_j) dv_\tau.$$

Рассмотрим теперь произведение систем (рис. 1.4). Имеем

$$(T_m R_n) x(t) = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{E^1} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{E^1} h_j(t, \tau_1, \dots, \tau_j) \prod_{r=1}^j x(\tau_r) dv_\tau \right\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{E^{i+j}} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \times \\ \times h_j(t, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) \prod_{r=1}^{i+j} x(\tau_r) dv_\tau = \sum_{i=2}^N \int_{E^i} g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau,$$

где $N \leq n + m$, а ядра $g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$ определяются соотношениями

$$g_2(t, \tau_1, \tau_2) = k_1(t, \tau_1) h_1(t, \tau_2), \\ g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = k_1(t, \tau_1) h_2(t, \tau_2, \tau_3) + k_2(t, \tau_1, \tau_2) h_1(t, \tau_3) \text{ и т.}$$

д.

Соединим системы R_n и T_m последовательно (рис. 1.4), что соответствует композиции систем. Имеем

$$y(t) = (T_m * R_n) x(t) = \sum_{i=1}^m \int_{E^1} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{l=1}^i \int_{E^j} h_j(\tau_l, \sigma_1, \dots, \sigma_j) \times \\ \times \prod_{r=1}^i x(\sigma_r) dv_{\sigma} = \sum_{i=1}^N \int_{E^1} g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) \prod_{r=1}^i x(\sigma_r) dv_{\sigma},$$

где $N \leq n \cdot m$, а ядра $g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i)$ определяются соотношениями

$$g_i(t, \sigma_1, \dots, \sigma_i) = \int_{E^1} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{l=1}^i h_j(\tau_l, \sigma_1, \dots, \sigma_j) dv_{\sigma}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению функциональной системы с жесткой обратной связью, представленной на рис. 1.7.

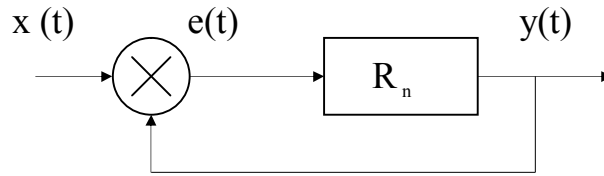


Рис. 1.7. Система с жесткой отрицательной обратной связью

Для этой системы соотношения между сигналами $x(t)$, $e(t)$ и $y(t)$ имеют вид

$$y(t) = R_n e(t), \quad (1.15)$$

$$e(t) = x(t) - y(t). \quad (1.16)$$

Из выражений (1.15) и (1.16) следует, что сигнал ошибки системы $e(t)$

$$e(t) = x(t) - R_n e(t). \quad (1.17)$$

Это уравнение является нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода и перепишем его в виде

$$x(t) = e(t) + R_n e(t). \quad (1.18)$$

Решение уравнения (1.18) будем искать в виде ряда Вольтерра

$$e(t) = Wx(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E^1} k_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (1.19)$$

Подставив (1.19) в соотношение $x(t) = T_n e(t)$, получим

$$x(t) = (T_n * W)x(t). \quad (1.20)$$

Из (1.20) следует, что композиция систем T_n и W дает единичный оператор.

Ядра последовательного соединения двух систем определены в предыдущем примере.

Использование для представления линейных систем функций, заданных в явном виде, позволяет построить описание сложной системы по заданной структурной схеме. Для нелинейных аналитических систем такие же преимущества дает применение рядов Вольтерра, которые тоже дают явную связь между входным и выходным сигналами.

1.3. Статистическое исследование нелинейных динамических систем

Введенное в подразделе 1.1 определение системы можно перенести на системы со случайными сигналами. Функциональной системой со случайными сигналами назовем функциональное бинарное отношение R , определенное на декартовом произведении $A(T) \times B(T^*)$ двух нормированных пространств, на котором по взаимной функции распределения входных и выходных сигналов введена вероятностная мера [57]. Мера, введенная на декартовом произведении $A(T) \times B(T^*)$, индуцирует меры в пространствах $A(T)$ и $B(T^*)$. Очевидно, что основные положения теории детерминированных систем могут быть распространены и на системы со случайными сигналами.

Рассмотрим сначала задачу статистического анализа функциональных систем со случайными сигналами. Задача статистического анализа систем заключается в определении характеристик выходной реакции системы $y(t)$ по известным характеристикам случайного входного сигнала $x(t)$. Пусть имеется полиномиальная система

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_{\tau}. \quad (1.21)$$

Предположим, что входной случайный процесс с вероятностью единица имеет непрерывные выборочные функции. Тогда выражение (1.21) существует как сумма интегралов Римана для почти всех выборочных функций [54].

Обозначим момент порядка n процесса $x(t)$ так:

$$m_x^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = M\left\{\prod_{r=1}^n x(\tau_r)\right\}, \quad (1.22)$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания. Момент порядка n является симметрической функцией n аргументов $\tau_1, \dots, \tau_n$. Для математического ожидания $x(t)$ будем использовать обозначение $m_x(t) = M\{x(t)\}$.

Корреляционную функцию процесса $x(t)$ обозначим

$$K_x(t_1, t_2) = M\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\}.$$

Для полиномиальной системы (1.21) формула для математического ожидания сигнала $y(t)$ получится в таком виде:

$$m_y(t) = M\{y(t)\} = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) M\left\{\prod_{r=1}^i x(\tau_r)\right\} dv_\tau = \sum_{i=1}^N \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) m_x^i(\tau_1, \dots, \tau_i) dv_\tau \quad (1.23)$$

При выводе соотношения (1.23) было использовано свойство линейности оператора $M\{\bullet\}$ и предполагалось, что операции интегрирования и усреднения перестановочны [69].

Момент второго порядка для процесса $y(t)$ определится так:

$$m_y^{(2)}(t_1, t_2) = M\{y(t_1) y(t_2)\} = M\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{E^{i+j}} h_i(t_1, \tau_1, \dots, \tau_i) h_i(t_2, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) \times \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau\right\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{E^{i+j}} h_i(t_1, \tau_1, \dots, \tau_i) h_i(t_2, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) M\left\{\prod_{r=1}^i x(\tau_r)\right\} dv_\tau = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{E^{i+j}} h_i(t_1, \tau_1, \dots, \tau_i) h_i(t_2, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) m_x^{i+j}(\tau_1, \dots, \tau_{i+j}) dv_\tau. \quad (1.24)$$

В формуле (1.24), как и в (1.23), использовалось свойство линейности оператора $M\{\bullet\}$ и менялась последовательность операций интегрирования и усреднения. Вообще момент порядка p сигнала $y(t)$ в (1.21) может быть записан в таком виде:

$$m_y^{(p)}(t_1, \dots, t_p) = M\{y(t_1) \dots y(t_p)\} = \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_p=1}^N \int_{E^{\sum i_p j}} h_{i_1}(t_1, \tau_1, \dots, \tau_{i_1}) \dots h_{i_p}(t_p, \tau_{\sum i_{p-1} j + 1}, \dots, \tau_{\sum i_p j}) m_x^{\sum i_p j}(\tau_1, \dots, \tau_{\sum i_p j}) dv_\tau. \quad (1.25)$$

Из полученной формулы следует, что для того, чтобы выходной сигнал $y(t)$ имел конечный момент порядка p , необходимо и достаточно, чтобы входной сигнал $x(t)$ имел конечные моменты порядка вплоть до $N \cdot p$ и система (1.21) была устойчива в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим теперь аналитическую систему

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{r=1}^i x(\tau_r) dv_\tau.$$

Если почти все выборочные функции входного случайного процесса непрерывны и с вероятностью единица принадлежат области сходимости этого ряда в пространстве непрерывных функций, то ряд Вольтерра

сходится для почти всех выборочных функций и, значит, по нему можно вычислить моменты всех порядков выходного сигнала системы.

Вычисления по формулам (1.23) – (1.25) существенно упрощаются, если $x(t)$ – нормальный случайный процесс с нулевым средним. В этом случае все моменты нечетного порядка процесса $x(t)$ равны нулю:

$$m_x^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) = 0, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (1.26)$$

Моменты четного порядка представимы через корреляционную функцию следующим образом:

$$m_x^{(i)}(\tau_1, \dots, \tau_i) = \sum \prod K_x(\tau_j, \tau_k), \quad i = 2, 4, 6, \dots \quad (1.27)$$

В (1.27) суммирование производится по всем разбиениям величин $x(\tau_1), \dots, x(\tau_i)$ на всевозможные пары, а произведение вычисляется для всех пар в каждом разбиении. Общее число членов суммы равно

$$\frac{i!}{2^{i/2} (i/2)!}.$$

Пусть, в частности, требуется вычислить статистические характеристики выходного сигнала полиномиальной системы второй степени

$$y(t) = v_1[x(t)] + v_2[x(t)], \quad (1.28)$$

при условии, что входной сигнал – это нормальный стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием.

Из формулы (1.23) имеем

$$m_y(t) = \int_{E^1} h_1(t, \tau) M\{x(\tau)\} d\tau + \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) M\{x(\tau_1)x(\tau_2)\} dv_\tau = \int_{E^2} h_2(t, \tau_1, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau.$$

Корреляционная функция процесса $y(t)$ получается в виде

$$K_y(t_1, t_2) = M\{[y(t_1) - m_y(t_1)][y(t_2) - m_y(t_2)]\} = \int_{E^2} h_1(t_1, \tau_1) h_1(t_2, \tau_2) \times \\ \times K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau + 2 \int_{E^4} h_2(t_1, \tau_1, \tau_2) h_2(t_2, \tau_3, \tau_4) K_x(\tau_1, \tau_3) K_x(\tau_2, \tau_4) dv_\tau.$$

Дисперсия $D_y(t)$ согласно определению, может быть получена, если положить в последней формуле $t_1 = t_2 = t$, а именно:

$$D_y(t) = \int_{E^2} h_1(t, \tau_1) h_1(t, \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) dv_\tau + \\ 2 \int_{E^4} h_2(t, \tau_1, \tau_2) h_2(t, \tau_3, \tau_4) K_x(\tau_1, \tau_3) K_x(\tau_2, \tau_4) dv_\tau. \quad (1.29)$$

С помощью рассмотренной методики решаются и более сложные задачи статистического анализа нелинейных систем. Вычисление получившихся выражений производится либо аналитически, либо с применением цифровых вычислительных машин.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Понятие системы и ее состояния.
2. Классификация систем и основные правила действий с ними.
3. Сумма, композиция и произведение систем. Приведите примеры.
4. Понятие функциональной стационарной системы и правила действий с ними.
5. Линейная и нелинейная функциональные системы. Основные свойства суммы и композиции линейных систем.
6. Запишите установившейся реакцию причинной однородной системы степени i и приведите компактную форму её записи.
7. Привести установившейся реакцию полиномиальной системы степени N и покажите, что сумма, композиция и произведение двух полиномиальных систем тоже является полиномиальными системами.
8. Определение аналитической функциональной системы. Сумма, композиция и произведение двух аналитических систем.
9. Пространство состояний системы и уравнения состояния. Вывести выражения для сумм, композиции и произведения систем, заданных однопараметрическим семейством операторов.
10. Применение структурной схемы для системы, заданной рядами Вольтерра. Основные типы соединений элементарных систем (последовательное, параллельное и обратное) и математическое описание их в классе рядов Вольтерра.
11. Понятие функциональной системы со случайными сигналами. Задачи статистического анализа функциональной системы со случайными сигналами.
12. Вывести формулы вычисления моментов стационарного случайного сигнала.
13. Привести формулы вычисления статистических моментов полиномиальной системы, если на входе системы действует случайный процесс с известными характеристиками.

14. Вывести формулы вычисления статистических моментов полиномиальной системы, если на входе системы действует нормальный случайный процесс с нулевым средним.

15. Вычислить статистические характеристики выходного сигнала полиномиальной системы второй степени

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данном разделе рассмотрены вопросы построения математических моделей широко распространенного класса нелинейных систем – динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием. Системы управления данного класса характеризуется наличием нелинейных преобразований сигналов, а также еще параметрическими обратными связями. Выше приведенные особенности системы приводят при их описании к разным типам уравнений, т.е. математические модели системы неоднородны. Для построения однородной математической модели системы использованы структурные модели модулятора в виде эквивалентной нелинейной системы. Для дальнейших исследований к полученным моделям применяется аппарат функциональных рядов Вольтерра.

2.2. Общие сведения и описание принципа действия системы

Динамические частотно-импульсные системы автоматического управления (ДЧИСАУ) объектами с запаздыванием представляют собой замкнутую систему [3, 5, 8, 11], состоящую из динамического частотно-импульсного модулятора (ДЧИМ) и приведенной непрерывной части (ПНЧ) (рис. 2.1).

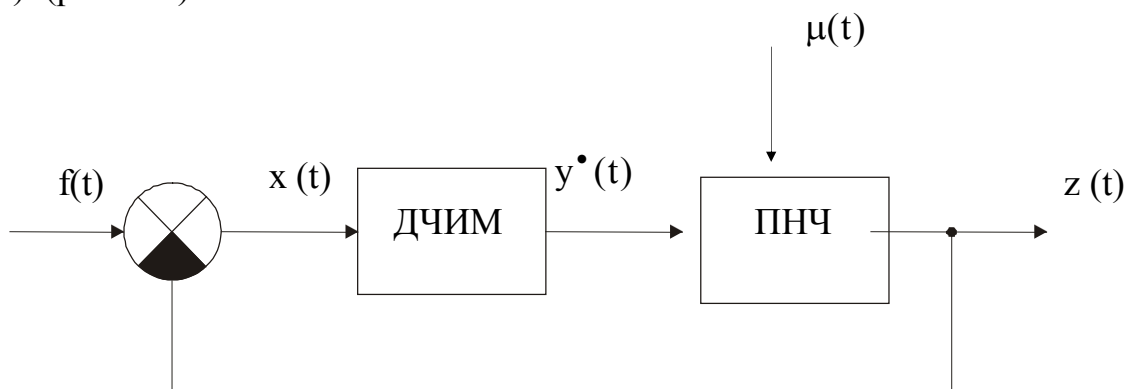


Рис. 2.2. Структурная схема ДЧИСАУ объектами с запаздыванием

На входе системы действует стационарный случайный процесс $f(t)$. Прямая цепь состоит из импульсной и приведенной непрерывной частей. Импульсной частью служит ДЧИМ [9, 39], преобразующий процесс ошибки $x(t)$ в частотно-модулированную последовательность δ -импульсов Дирака $y^*(t)$.

ДЧИМ представляет собой последовательное соединение фильтра Φ и импульсного устройства ИУ [14, 39] (рис. 2.2 а). В фильтре Φ осуществляется некоторое динамическое преобразование непрерывного сигнала $x(t)$ в сигнал $y(t)$, а импульсное устройство ИУ генерирует единичный δ -импульс в тот момент времени, когда $y(t)$ достигает порогового значения $\pm\Delta$ и осуществляет обнуление всех накопителей энергии, которые входят в состав Φ .

Приведенная непрерывная часть ПНЧ состоит из последовательного соединения управляемого объекта с запаздыванием, исполнительного механизма (ИМ) и формирующего элемента (ФЭ), задающего требуемую форму управляющим импульсам (рис. 2.2 б). Объект с запаздыванием подвержен воздействию внешнего белого шума $\mu(t)$. В общем случае ПНЧ характеризуется как нелинейная динамическая система со случайными параметрами и представима некоторым функциональным уравнением следующего вида [40]:

$$z(t) = H[\lambda, \tau_0, z(\tau), g(\tau) / t_0 \leq \tau \leq t], \quad (2.1)$$

где H – непрерывный нелинейный функционал; параметр λ характеризует случайность параметров функционала H ; $g(t)$ – последовательность управляющих случайных импульсов заданной формы; τ_0 – время запаздывания управляемого объекта управления.

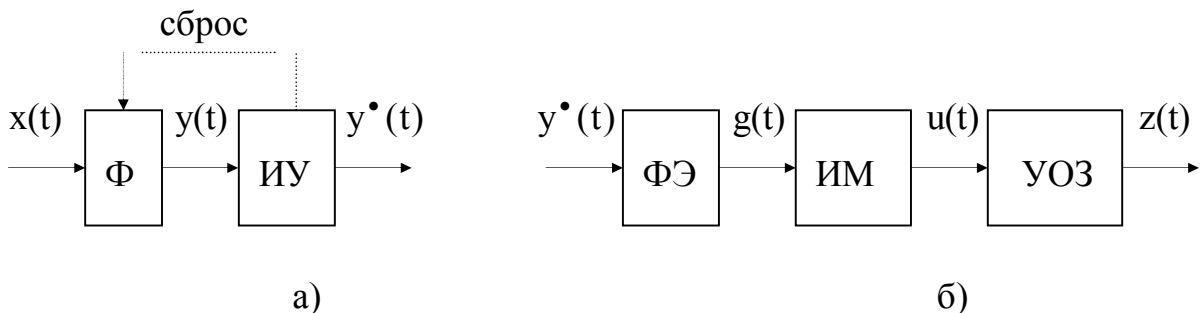


Рис. 2.2. Структурные схемы ДЧИМ (а) и ПНЧ (б)

Уравнение динамики ДЧИМ состоит из уравнения движения фильтра Φ и уравнений, определяющих моменты появления и знак импульсов, и операции сброса. В общем случае фильтр Φ , характеризуется как нелинейная динамическая система с постоянными параметрами и можно представить некоторым функциональным уравнением [39]

$$y(t) = \Phi[y(\tau), x(\tau) / t_0 \leq \tau \leq t], \quad (2.2)$$

где Φ – непрерывный нелинейный функционал с постоянными параметрами.

Решение уравнения (2.2) можно записать в следующем виде:

$$y(t) = W[x(\tau), \bar{y}(t_0) / t_0 \leq \tau \leq t], \quad (2.3)$$

где W – оператор преобразования вход – выход, осуществляемого в фильтре Φ ; $\bar{y}(t_0)$ – вектор начальных условий.

Когда выходной сигнал $y(t)$ достигает порогового значения $\pm \Delta$ импульсного устройства ИУ, генерируется единичный δ -импульс и осуществляется обнуление всех начальных условий.

Допустим, что в некоторый момент времени t_n импульсное устройство ИУ осуществило описанные выше операции. С учетом уравнения (2.3) момент появления t_{n+1} очередного импульса определяется соотношением

$$y(t_{n+1} - 0) = W[x(\tau) / t_n + 0 \leq \tau \leq t_{n+1} - 0] = \lambda_{n+1} \Delta, \quad (2.4)$$

где

$$\lambda_{n+1} = \text{sign } W[x(\tau) / t_n + 0 \leq \tau \leq t_{n+1} - 0], \quad (2.5)$$

Δ – порог импульсного устройства ИУ.

Тогда выходной сигнал ДЧИМ определяется так:

$$y^*(t) = \sum_n \lambda_n \delta(t - t_n). \quad (2.6)$$

Как известно [20, 37, 47, 48], в объектах с запаздыванием влияние управляющего воздействия $y^*(t)$ проявляется на выходе с временной задержкой, равной времени его запаздывания. Исходя из этого, при управлении такими объектами в течение времени запаздывания объекта формировать управляющее воздействие нецелесообразно и неэффективно. Из анализа уравнений ДЧИМ (2.4) и (2.5) следует, что в них не отражены вышеописанные особенности объектов с запаздыванием, т. е. необходимо получить математическое описание ДЧИМ с учетом особенностей объекта с запаздыванием.

Допустим, что в некоторый момент t_n на выходе ИУ появился n -й импульс. Тогда момент появления t_{n+1} $(n+1)$ -го импульса с учетом свойств объекта с запаздыванием будет определяться таким образом:

$$y(t_{n+1} - 0) = W[x(\tau) / t_n + \tau_m \leq \tau \leq t_{n+1} - 0] = \lambda_{n+1} \Delta, \quad (2.7)$$

где

$$\lambda_{n+1} = y(t_{n+1} - 0), \quad (2.8)$$

τ_m – параметр динамического частотно-импульсного модулятора, учитывающий эффект запаздывания управляемого объекта ($\tau_m \geq \tau_0$).

Динамический частотно-импульсный модулятор, описываемый уравнениями (2.6) – (2.8), учитывает особенности и свойства объекта с запаздыванием, и в дальнейшем будем называть его модифицированным ДЧИМ.

Оператор преобразования вход – выход W может быть как линейным, так и нелинейным. В линейном случае его можно описать весовой или передаточной функцией. В этом случае уравнения (2.7) и (2.8) примут вид

$$y(t_{n+1} - 0) = \int_{t_n + \tau_0}^{t_{n+1} - 0} w(t_{n+1} - \tau) x(\tau) d\tau = \lambda_{n+1} \Delta, \quad (2.9)$$

где

$$\lambda_{n+1} = y(t_{n+1} - 0),$$

$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$ – весовая функция этого преобразования; $W(p)$ – передаточная функция фильтра Φ .

В частных случаях, когда передаточная функция фильтра Φ $W(p) = \frac{k_u}{p}$ описывает поведение интегрального частотно-импульсного модулятора (ИЧИМ) [13], если $W(p) = \frac{c_v}{p - p_v}$ – Σ -ЧИМ [4] (c_v, p_v – вещественные числа и $p_v < 0$).

В общем случае передаточная функция фильтра Φ имеет вид

$$W(p) = \frac{G(p)}{D(p)}, \quad (2.10)$$

где $G(p) = \sum_{i=0}^{l_1} b_i p^i$, $D(p) = \sum_{i=0}^l a_i p^i$, $l > l_1$, a_i, b_i – вещественные числа.

В нелинейном случае будут рассматриваться операторы, описываемые рядами Вольтерра [44, 52]:

$$W[x(\tau) / t_0 \leq \tau \leq t] = [w_r \overset{r}{\otimes} x(t)],$$

где символом $[w_r \overset{r}{\otimes} x(t)]$ обозначена r -мерная свертка весовых функций фильтра $w_r(t_1, t_2, \dots, t_r)$ и процесса ошибки $x(t - \tau_i)$, $i = 1, \dots, r$, т.е.

$$[w_r \overset{r}{\otimes} x(t)] = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t w_r(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) \prod_{i=1}^r x(t - \tau_i) d\tau_i,$$

$w_r(t_1, t_2, \dots, t_r)$ – непрерывные, ограниченные весовые функции, равные нулю при $t_j < 0$ ($j = 1, r$).

В частном случае они могут иметь вид

$$w_r(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) = \prod_{j=1}^r w_{r_j}(\tau_j), \quad (2.11)$$

где $w_{\tau_j}(\tau_j) = L^{-1}\{W_{r_j}(p)\}$.

Передаточные функции $W_{r_j}(p)$ определяются в следующем виде, аналогично (2.10):

$$W_{r_j}(p) = \frac{G_{r_j}(p)}{D_{r_j}(p)}, \quad (2.12)$$

$$G_{\tau_j}(p) = \sum_{i=1}^{m_{r_j}} a_{r_j,i} p^i, D_{\tau_j}(p) = \sum_{i=1}^{l_{r_j}} b_{r_j,i} p^i, \quad l_{r_j} > m_{r_j}.$$

Формирующий элемент, входящий в состав приведенной непрерывной части, преобразует последовательность δ -импульсов Дирака $y^*(t)$ в последовательность импульсов $u(t)$ заданной формы $s(t)$.

В частном случае, когда импульсы $s(t)$ имеют прямоугольную форму с амплитудой A и длительностью γ , передаточная функция формирующего элемента имеет вид [17]:

$$W_{\text{фз}}(p) = \frac{A(1 - e^{-\gamma p})}{p}.$$

В общем случае с учетом непрерывности формирующего элемента приведенная непрерывная часть описывается некоторым функционалом $H[\lambda, \tau_0, y^*(t) / t_0 \leq \tau \leq t]$ и представляется рядом Вольтерра

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [h_k^k \otimes y^*(t)]. \quad (2.13)$$

2.2. Структурные модели динамических частотно-импульсных модуляторов системы с запаздыванием

2.2.1. Процедура построения структурной модели динамического частотно-импульсного модулятора

Рассмотрим динамическую частотно-импульсную систему управления объектами с запаздыванием [5, 14], изображенную на рис. 2.2.

Пусть объект O в этой системе описывается некоторым оператором

$$z(t) = H[\lambda, \tau_0, y^*(\tau) | 0 \leq \tau \leq t].$$

Модулятор в этой системе согласно (2.7) и (2.8) характеризуется стационарным оператором $W[\tau_0, x(\tau) / t_0 \leq \tau \leq t]$ и порогом Δ импульсного устройства ИУ. Фильтр Φ , используемый в модуляторе, общем случае представляет нелинейную динамическую систему, и ее состояние в каждый момент времени описывается вектором $\vec{y} = \{y_1'(t), y_2^{(2)}(t), \dots, y_n^{(l-1)}(t)\}$.

Структура и специфические свойства модели динамической частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием определяется видом модели модулятора. Следуя [8, 9] и учитывая особенности уравнений модифицированного ДЧИМ (2.7) и (2.8), его структурную модель можно формировать в виде замкнутой нелинейной системы [13, 14], структурная схема которой изображена на рис. 2.3.

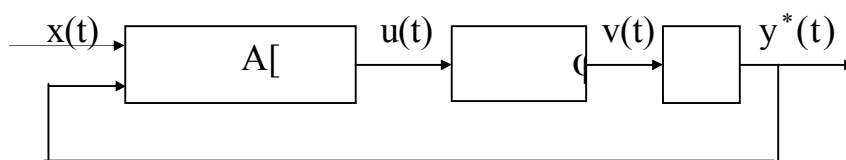


Рис. 2.3. Нелинейная эквивалентная система

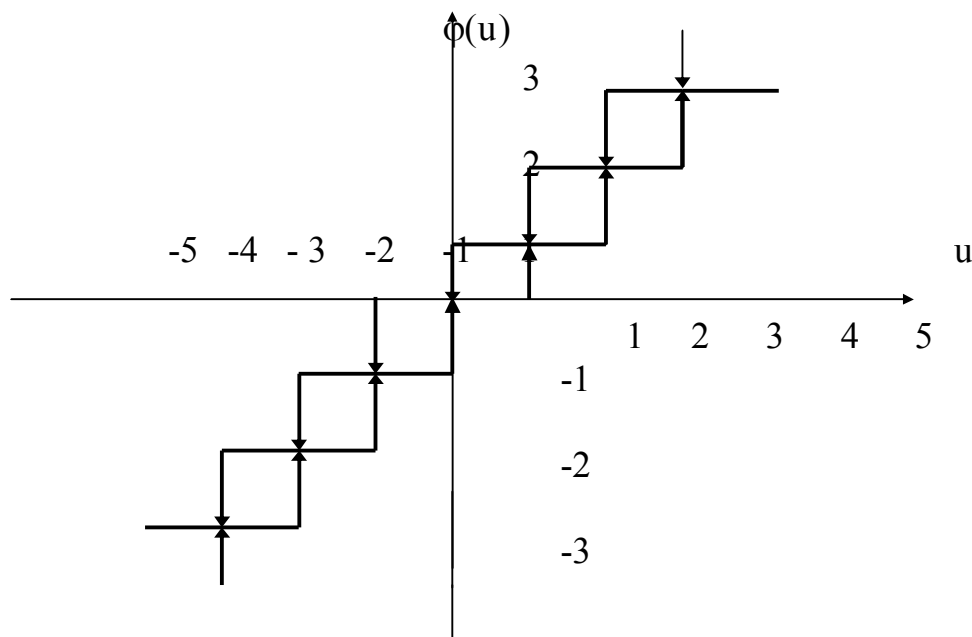


Рис. 2.4. Характеристика релейно-гистерезисного элемента

Она содержит нелинейный фильтр, который характеризуется некоторым оператором $A[\tau_m, x(\tau), y(\tau) / t_0 \leq \tau \leq t]$, релейно-гистерезисный нелинейный элемент $\phi(u)$ [34, 60, 61] (рис. 2.4) с порогом Δ и дифференцирующий элемент с передаточной функцией $W_d(p) = p$.

Задача заключается в определении вида нелинейного оператора A , при котором замкнутая система, показанная на рис. 2.3, генерирует такую же последовательность импульсов, что и ДЧИМ при управлении объектами с запаздыванием и описываемый уравнениями (2.7) и (2.8).

Построение такого нелинейного оператора A вначале рассмотрим для более простейших видов ДЧИМ, используемых для управления объектами с запаздыванием.

Пусть в качестве фильтра Φ модулятора используется интегрирующее звено с передаточной функцией $W(p) = \frac{k_u}{p}$. В дальнейшем такую ДЧИСАУ объектами с запаздыванием назовем интегральной частотно-импульсной системой автоматического управления (ИЧИСАУ) объектами с запаздыванием [3, 10, 13].

В соответствии с выражениями (2.7) и (2.8) для ИЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием, моменты появления $t_{n+1}(n+1)$ -го импульса определяются из уравнения

$$y(t_{n+1} - 0) = k_u \int_{t_n + \tau_m}^{t_{n+1} - 0} x(\tau) d\tau = \lambda_{n+1} \Delta, \quad (2.14)$$

где

$$\lambda_{n+1} = k_u \int_{t_n + \tau_m}^{t_{n+1} - 0} x(\tau) d\tau, \quad (2.15)$$

k_u – коэффициент усиления интегратора.

Допустим, что выходной сигнал интегратора в момент времени t_n равен $y(t_n + 0)$. Тогда момент появления последующего импульса определяется из уравнения

$$\bar{y}(t_{n+1} - 0) = k_u \int_{t_n + \tau_m}^{t_{n+1} - 0} x(\tau) d\tau = \lambda_{n+1} \Delta.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\bar{y}(t_{n+1} - 0) = \bar{y}(t_n + 0) + k_u \left[\int_{t_n + 0}^{t_n + \tau_m} x(\tau) d\tau + \int_{t_n + \tau_m}^{t_{n+1} - 0} x(\tau) d\tau \right]. \quad (2.16)$$

Из сопоставления (2.16) и (2.14) следует, что $y(t_{n+1} - 0) = \bar{y}(t_{n+1} - 0)$, если

$$\begin{aligned} y(t_{n+1} - 0) = \bar{y}(t_n + 0) + k_u \int_{t_n + 0}^{t_n + \tau_m} [x(\tau) - \mu(\tau)] d\tau + \\ + k_u \int_{t_n + \tau_m}^{t_{n+1} - 0} x(\tau) d\tau - k_u \int_{t_n + 0}^{t_{n+1} - 0} \eta(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\eta(t) = k_u \bar{y}(t_n + 0) s(t), \quad (2.18)$$

$$\mu(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t_{n+0} \leq t \leq t_n + \tau_m, \\ 0, & \text{если } t_n + \tau_u \leq t \leq t_{n+1} + 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$s(t) = \delta(t - t_n + 0). \quad (2.20)$$

Из анализа уравнений (2.20) и (2.6) видно, что $s(t)$ явно связан с выходным сигналом модулятора $y^\bullet(t)$.

Тогда, следуя [5, 8], структурную модель модифицированного интегрального ЧИМ будет формировать в виде замкнутой нелинейной системы (рис.2.3).

Для построения структурной модели модифицированного ИЧИМ рассмотрим преобразование сигнала $u(t)$ [3,10], осуществление в релейно-гистерезисном элементе (РГЭ) $v = \varphi(u)$. (рис.2.4).

Если в некоторый момент времени $t_n - 0$ сигнал $u(t)$ имеет значение $u(t_n - 0)$, то следующий момент переключения $t_{n+1} - 0$ определяется уравнением

$$u(t_{n+1} - 0) - u(t_n - 0) = \lambda_{n+1} \Delta, \quad (2.21)$$

где

$$\lambda_{n+1} = \text{sign} [u(t_{n+1} - 0) - u(t_n - 0)]. \quad (2.22)$$

При выполнении условий (2.21) и (2.22) происходит переход сигнала $v(t)$ с одного уровня на другой и производная сигнала $v(t)$ определяется выражением

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lambda_{n+1} \delta(t - t_{n+1} + 0). \quad (2.23)$$

Из сравнения (2.16) и (2.20) можно заключить, что выходной сигнал импульсного устройства ИУ

$$y^\bullet(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lambda_{n+1} \delta(t - t_{n+1} + 0). \quad (2.24)$$

С учетом (2.24) и (2.20) сигнал $s(t)$ можно формировать следующим образом:

$$s(t) = y^\bullet(t) \frac{y(t)}{\Delta} = y^\bullet(t) \frac{y(t_n - 0)}{\Delta}. \quad (2.25)$$

Из сопоставления (2.14), (2.15) и (2.21), (2.22) следует, что

$$y(t) = u(t) - u(t_n - 0), \quad t_n + 0 \leq t \leq t_{n+1} - 0. \quad (2.26)$$

Отсюда, для сигнала $u(t_{n+1})$ получим

$$u(t_{n+1}) = y(t_{n+1} - 0) - u(t_n - 0). \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) описывает дискретный интегратор с переменным интервалом интегрирования. Блок, содержащий релейно-гистерезисный элемент $v = \varphi(u)$ и описываемый уравнениями (2.24)–(2.27), назовем блоком формирования импульсов (БФИ). Структурная схема БФИ изображена на рис. 2.5 а. Путем несложных преобразований в [11] получена эквивалентная схема блока формирования импульсов БФИ (рис. 2.5.б).

Оставшаяся часть оператора А, поведение которого описывается уравнениями (2.16)–(2.20) назовем модифицированным блоком сброса (МБС). Из выражений (2.16)–(2.20) следует, что задача определения структуры модифицированного блока сброса БС сводится к формированию сигналов $\eta(t)$ и $\mu(t)$.

Сигнал $\eta(t)$ с использованием сигнала $s(t)$, определенного по выражению (2.25), легко формируется по соотношению (2.18).

Для формирования сигнала $\mu(t)$ представим его в виде произведения двух сигналов

$$\mu(t) = x(t) \chi(t), \quad (2.28)$$

где

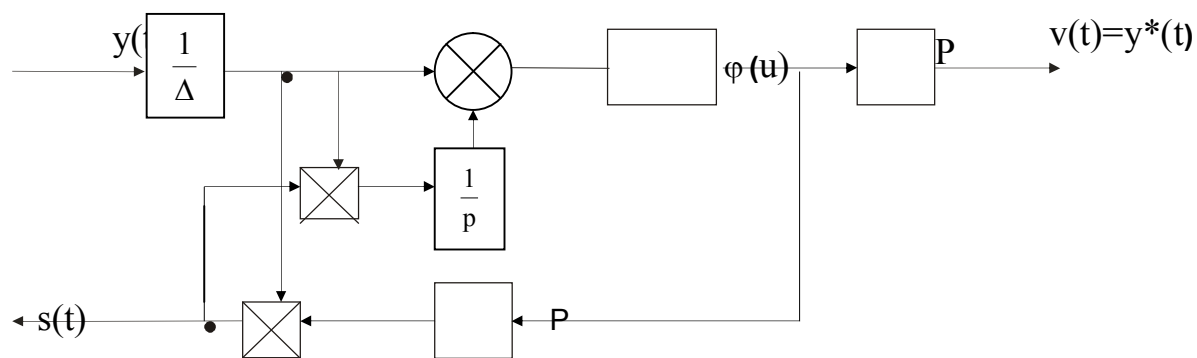
$$\chi(t) = \int_{t_n}^t q_{\tau_m}(t - \tau) d\tau, \quad (2.29)$$

$$q_{\tau_m}(t) = L^{-1} \left[\frac{1 - \exp(-\tau_m \cdot p)}{p} \right] - \text{импульсная переходная функция}$$

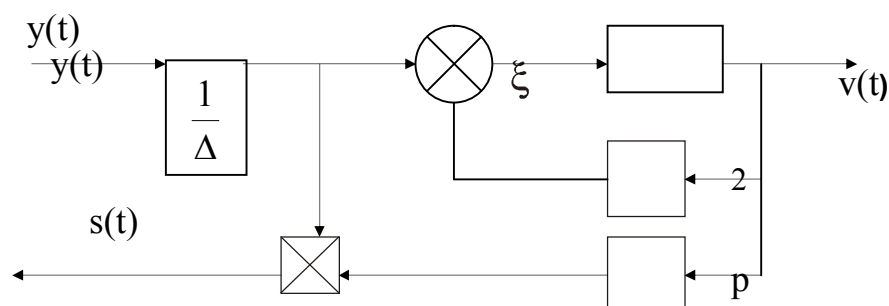
формирующего звена первого порядка.

Уравнения (2.16), (2.17), (2.18), (2.28), (2.29) описывает поведение модифицированного блока сброса МБС. Структурная схема модифицированного МБС изображена на рис. 2.6.

Объединяя структурные схемы блока сброса (рис. 2.6) и блока формирования импульсов (рис. 2.5), получим структурную схему системы (рис. 2.7), эквивалентной модифицированной ИЧИМ, но не содержащий параметрических обратных связей. В дальнейшем ее будем называть структурной моделью модифицированного ИЧИМ [10, 13].



а)



б)

Рис. 2.5. Блок формирования импульсов модели МИЧИМ

Выходной сигнал $y(t)$ модифицированного блока сброса преобразуется блоком формирования импульсов в мгновенные δ -импульсы. Одни импульсы $y^*(t)$ знак и период повторения, которых определяются знаком и интервалом непрерывности сигнала $y(t)$, являются выходными импульсами модулятора, а другие $s(t)$ всегда в эти моменты поступают обратно в МБС. Путем несложных преобразований в [9, 58] получена эквивалентная схема, блока формирования импульсов БФИ (рис. 2.5 б).

Полученная структурная модель модифицированного ИЧИМ (рис. 2.7), как и структурная модель ДЧИМ, состоит из двух блоков – блока формирования импульсов БФИ и модифицированного блока сброса МБС [3, 13].

Блок формирования импульсов БФИ структурной модели МИЧИМ совпадает с соответствующим блоком структурной модели ДЧИМ [9], т.е. он является универсальным для всех видов ДЧИМ.

Рассмотрим модифицированный блок сброса (рис. 2.5) и соответствующий блок структурной модели ИЧИМ [3, 13]. Как видно из рис. 2.5, в структуре модифицированного блока сброса присутствует дополнительный блок формирования сигнала $\mu(t)$, описываемого соотношениями (2.28)–(2.29). Назначение этого дополнительного блока заключается в формировании сигнала, принудительно удерживающего выход интегратора $y(t)$ в нулевом положении после выдачи импульса управления в течение времени запаздывания объекта. Выше указанные особенности модифицированного блока сброса МБС приводят к изменениям свойств системы.

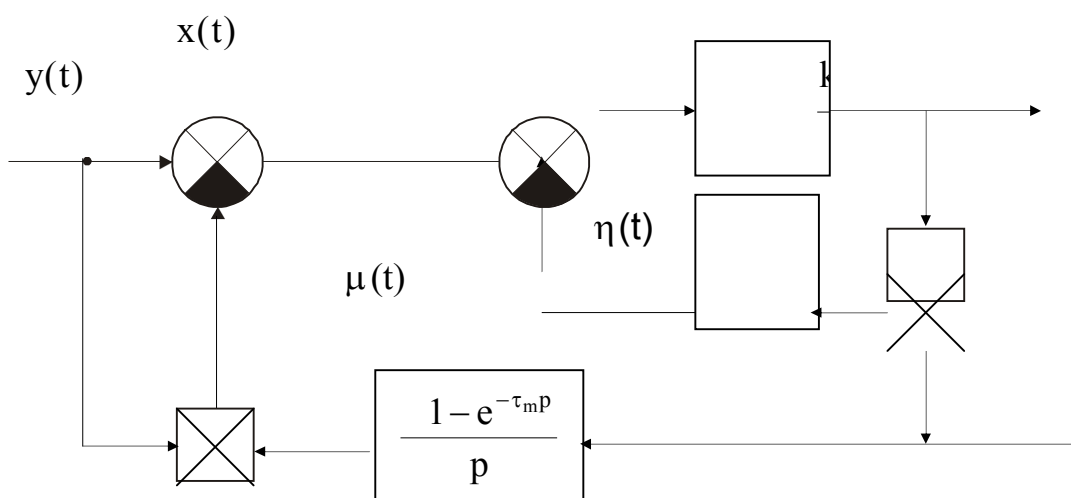


Рис.2.6. Блок сброса модифицированного ИЧИМ

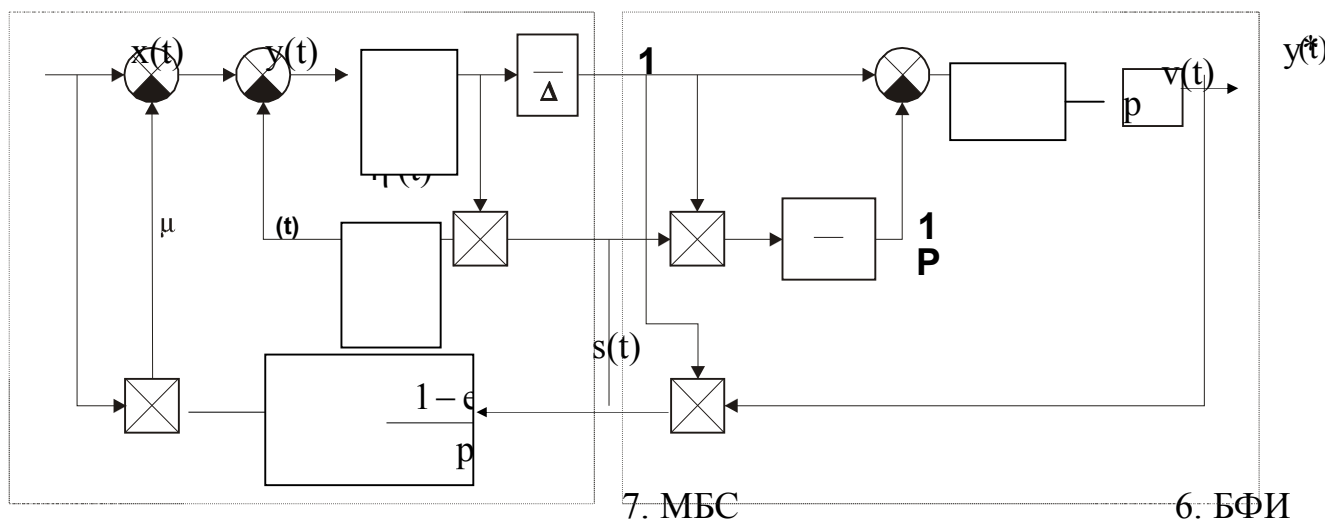


Рис. 2.7. Полная структурная схема модели МИЧИМ

Кроме того, следует заметить, что в структурной модели ИЧИМ только блок сброса БС [3, 13] зависит от свойств фильтра в модуляторе. В связи с этим процедура построения структурной модели других типов модифицированных ДЧИМ будет отличаться от приведенной процедуры только процедурой построения структуры модифицированного блока сброса. Поэтому в дальнейшем рассмотрим только построение блоков сбросов для других типов ДЧИМ, применяемых при управлении объектами с запаздыванием.

2.2.2. Блок сброса Σ -частотно-импульсного модулятора

Рассмотрим случай, когда в качестве управляющего устройства для управления объектами с запаздыванием используется Σ -ЧИМ. В этом случае фильтр Φ модулятора характеризуется передаточной функцией вида [5, 17]

$$W(p) = \frac{c_v}{p + p_v}.$$

В соответствии с уравнениями (2.14) и (2.15) для модифицированного Σ -ЧИМ моменты появления t_{n+1} определяются из уравнения

$$y_v(t_{n+1} - 0) = c_v \int_{t_n + \tau_0}^{t_{n+1} - 0} \exp(-p_v(t_{n+1} - \tau)) x(\tau) d\tau = \lambda_{n+1} \Delta, \quad (2.30)$$

где

$$\lambda_{n+1} = c_v \int_{t_n + \tau_0}^{t_{n+1} - 0} \exp(-p_v(t_{n+1} - \tau)) x(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим произвольный момент времени t_n . Пусть выходной сигнал в этот момент времени равен $y_v(t_n + 0)$.

Тогда для моментов времени $t \geq t_n$

$$\bar{y}_v(t) = e^{-p_v(t-t_n)} y_v(t_n + 0) + c_v \int_{t_n}^t e^{-p_v(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \quad (2.31)$$

где $y_v(t)$ – выход фильтра при начальном условии $y_v(t_n + 0)$.

Уравнение (2.31) перепишем в следующем виде:

$$\bar{y}_v(t) = e^{-p_v(t-t_n)} y_v(t_n + 0) + c_v \left[\int_{t_n + 0}^{t_n + \tau_m} e^{-p_v(t-\tau)} x(\tau) d\tau + \int_{t_n + \tau_m}^{t_{n+1} - 0} e^{-p_v(t-\tau)} x(\tau) d\tau \right]. \quad (2.32)$$

Из сопоставления (2.30) и (2.32) следует, что $\hat{y}_v(t) = y_v(t)$, если

$$y_v(t) = e^{-p_v(t-t_n)} y_v(t_n + 0) + c_v \int_{t_n+0}^{t_n+\tau_m} e^{-p_v(t-\tau)} [x(\tau) - \mu(\tau)] d\tau + \\ + c_v \int_{t_n+\tau_m}^t e^{-p_v(t-\tau)} x(\tau) d\tau - c_v \int e^{-p_v(t-\tau)} \eta(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Сравнивая выражения (2.30) и (2.33) заключаем, что сигнал $\mu(t)$ должен определяться в соответствии по выражениям (2.28) и (2.29). А сигнал $\eta(t)$ формируется по выражению

$$\eta(t) = s(t) \frac{y_v(t)}{c_v}. \quad (2.34)$$

Структурная схема блока сброса Σ -ЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием, приведена на рис. 2.7.

2.2.3. Блок сброса для линейного фильтра общего вида

Как было уже отмечено, линейный фильтр общего вида характеризуется передаточной функцией (2.10). При этом полюсы передаточной функции могут быть простыми или кратными.

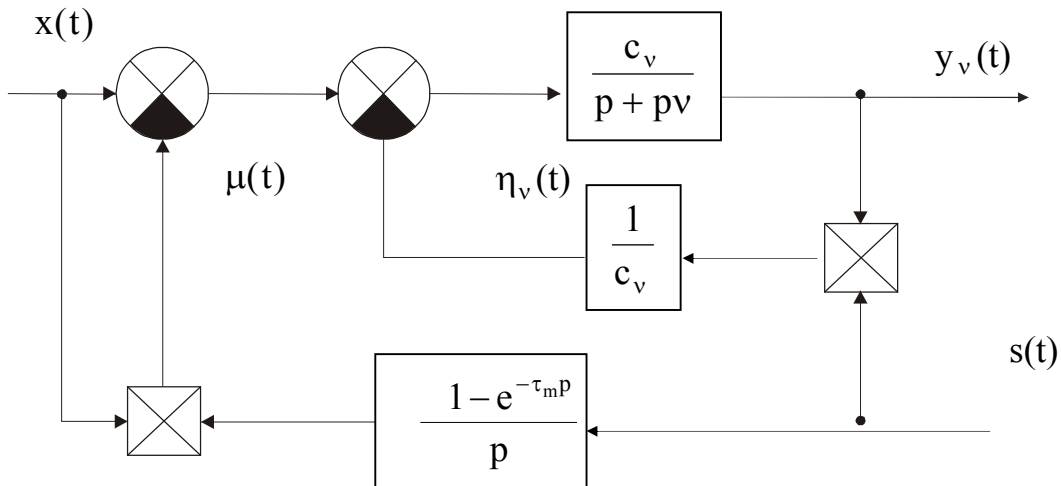


Рис.2.8. Модифицированный блок сброса Σ -ЧИМ

Пусть передаточная функция $W(p)$ (2.10) имеет полюсы p_j ($j = 1, m$)

кратности r_j ($\sum_{j=1}^m r_j = 1$). Тогда ее можно представить в виде:

$$W(p) = \sum_{j=1}^m \sum_{\mu=1}^{r_j} \prod_{i=1}^{r_j-\mu+1} r_j^{-\mu+1} \sqrt{c_{j\mu}} / (p + p_j), \quad (2.35)$$

где

$$c_{j\mu} = \frac{1}{(r_j - \mu)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{r_j-\mu}}{dp^{r_j-\mu}} \left[\frac{G_1(p)}{D_1(p)} (p + p_j) \right].$$

Будем предполагать, что p_j – вещественные и $p_j \leq 0$. Передаточные функции, входящие в (2.35) под знаком произведения, с точностью до обозначений совпадают с передаточной функцией, описывающей фильтр Σ -ЧИМ. Поэтому блок сброса для каждого элементарного звена с

передаточной функцией $W_{j\mu}(p) = \frac{r_j^{-\mu+1} \sqrt{c_{j\mu}}}{p + p_j}$ будет описываться, согласно (2.32), уравнением

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = \bar{c}_{j\mu} \int_{t_n=0}^t e^{-p_j(t-\tau)} \left[x(\tau) - \frac{1}{\bar{c}_{j\mu}} y_{j\mu i}(\tau) s(\tau) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{c}_{j\mu}} y_{j\mu i}(t_n - 0) \delta(t - t_n + 0) - \mu(\tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$\bar{c}_{j\mu} = r_j^{-\mu+1} \sqrt{c_{j\mu}}.$$

В этом случае сигнал $\eta(t)$ имеет вид

$$\eta(t) = \frac{1}{\bar{c}_{j\mu}} y_{j\mu i}(\tau) s(\tau) d\tau,$$

а сигнал $\mu(t)$ определяется по соотношению (2.28).

Как видно из (2.35), система с передаточной функцией $W(p)$ образуется последовательно-параллельным соединением элементарных звеньев с передаточными функциями $W_{j\mu}(p)$ [17], для которых структура уже определена (рис. 2.7). Поэтому нетрудно построить структурную схему блока сброса в этом случае. Она приведена на рис. 2.8.

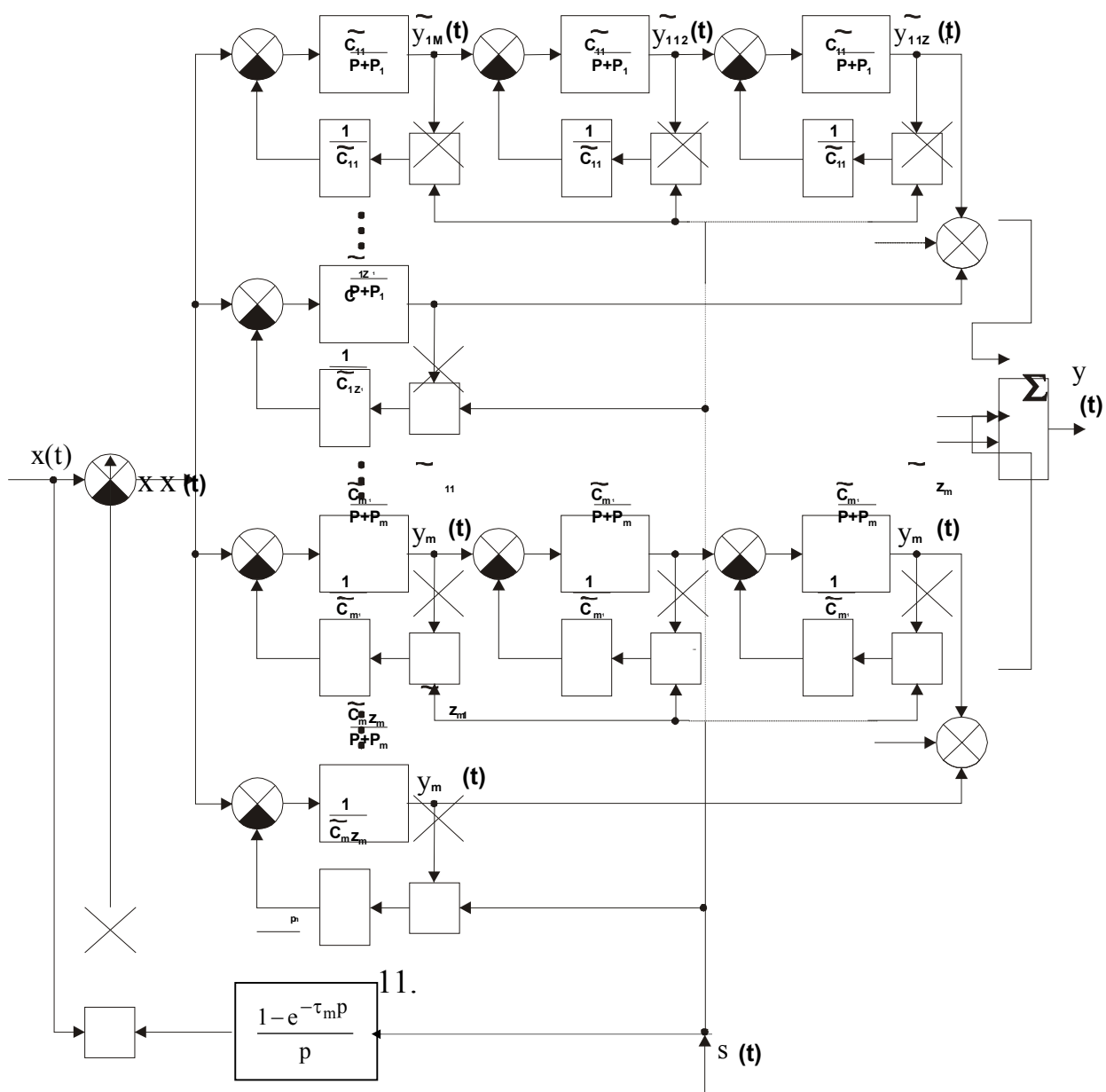


Рис. 2.9. Блок сброса структурной модели модифицированного ДЧИМ с линейным фильтром общего вида

Если полюсы передаточной функции (2.10) простые, то структурная схема блока сброса упрощается (рис. 2.10).

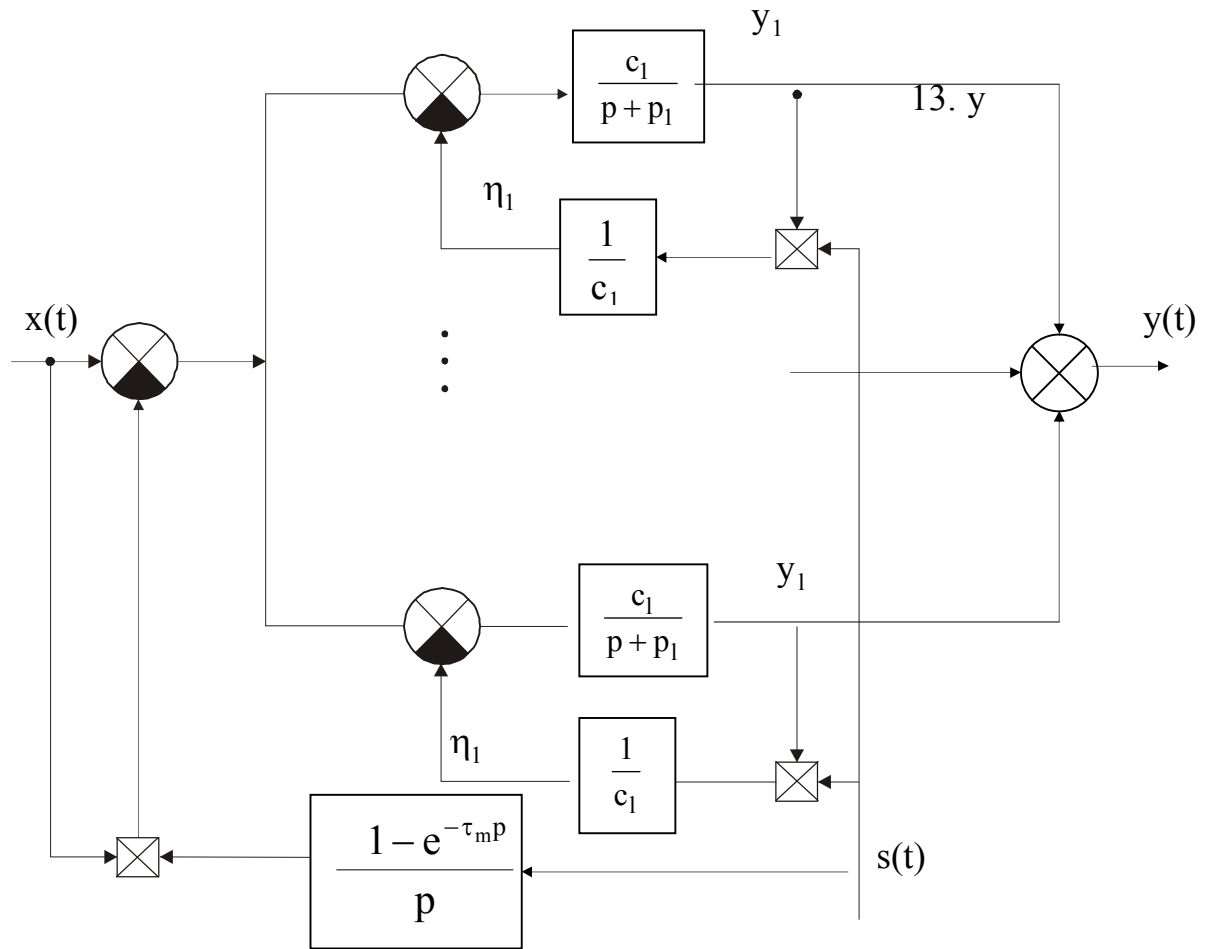


Рис. 2.10. Блок сброса структурной модели ДЧИМ
с запаздыванием и линейным фильтром

2.2.4. Блок сброса для нелинейного фильтра

Рассмотрим ДЧИМ, фильтр в котором описывается нелинейным оператором (2.3) [40, 58]. Если выполняется соотношение (2.7), то фильтр можно структурно представить в виде схемы, изображенной на рис. 2.12. Как видно, из этого рисунка, в таком фильтре линейные динамические элементы с импульсными характеристиками $w_k(t)$ отделены от нелинейных статических элементов. Поэтому достаточно осуществлять сброс начальных условий к моменту $t = t_{n+1} + 0$ на каждом из

динамических элементов, и в течение времени запаздывания τ_0 принудительно удерживать в нулевом состоянии.

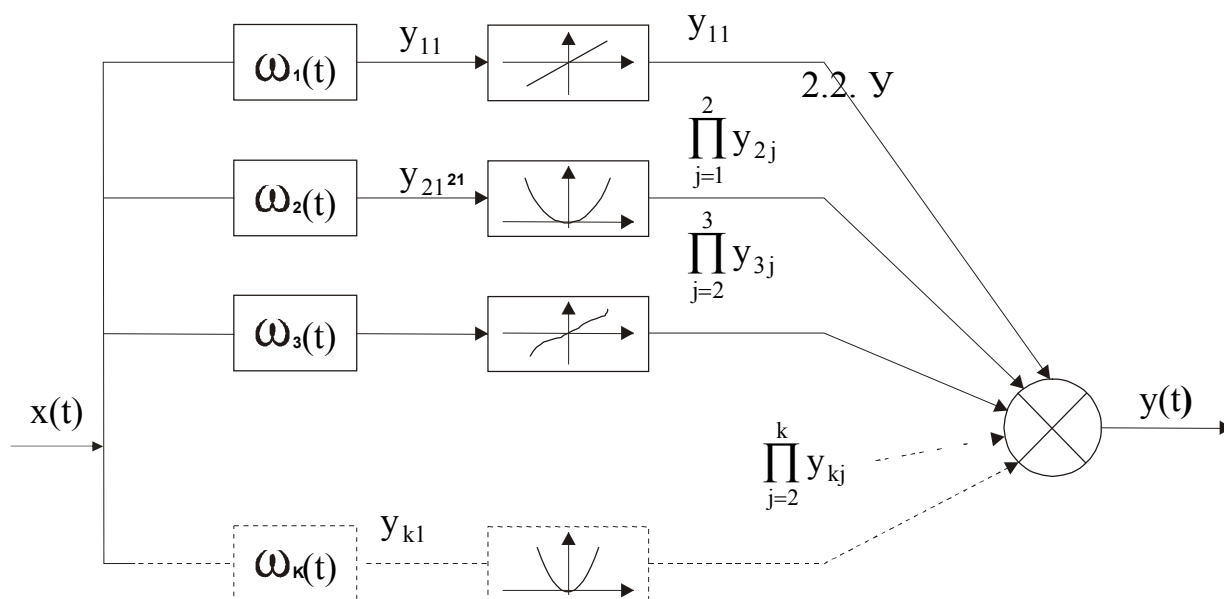


Рис. 2.11. Структура нелинейного фильтра

А так как они линейные, то блок сброса для каждого из них имеет одну из структур, приведенных выше для линейного фильтра в зависимости от вида передаточной функции, описывающей тот или иной элемент. В этом случае уравнение блока сброса, как видно из рис. 2.11, имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^i y_{ij}(t),$$

где $y_{ij}(t)$ – сигнал на выходе линейных динамических элементов с передаточной функцией вида (2.35).

Тогда блок сброса элементарного звена каждого линейного элемента будет описываться уравнением вида (2.36).

2.3. Вольтерровские модели динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием

Замена модифицированного ДЧИМ эквивалентной ему системой, позволяет получить структурную схему расчетной модели системы, показанной на рис. 2.12.

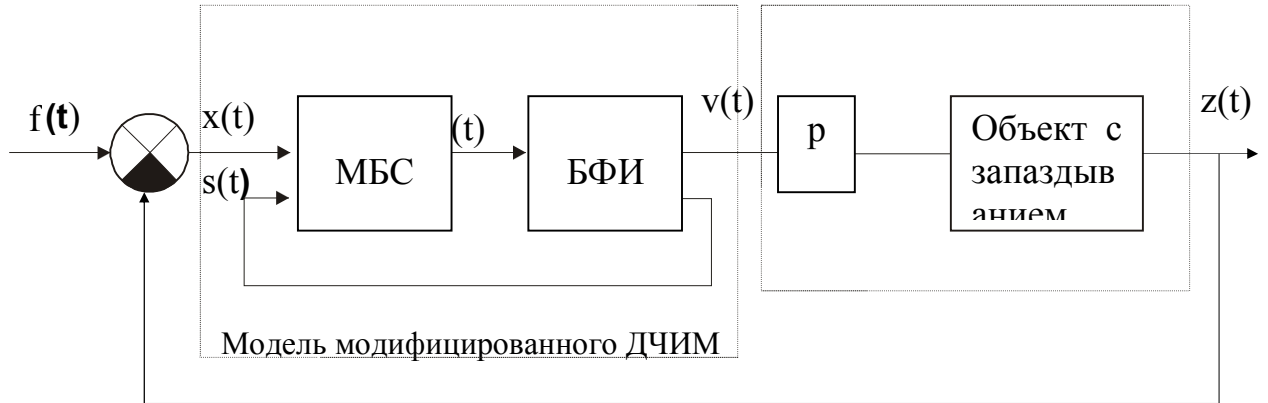


Рис 2.12. Структурная схема расчетной модели модифицированного ДЧИМ

Согласно рис.2.12, система с модифицированным ДЧИМ описывается следующими уравнениями [5, 12, 13, 16]:

$$x(t) = f(t) - z(t) , \quad (2.37)$$

$$z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [h_r \otimes_r y^\bullet(t)] , \quad (2.38)$$

$$y^\bullet(t) = \delta' \otimes u(t) , \quad (2.39)$$

$$v(t) = \varphi(u(t)) , \quad (2.40)$$

$$u(t) = \frac{1}{\Delta} y(t) + \{1 \otimes [y(t)s(t) \frac{1}{\Delta}]\} , \quad (2.41)$$

$$s(t) = \frac{1}{\Delta} y(t) [\delta \otimes v(t)] , \quad (2.42)$$

$$y(t) = [q \otimes x(t)] - \{q \otimes x(t) [q_{\tau_m} \otimes s(t)]\} - q \otimes [\frac{1}{k_u} [y(t)s(t)] , \quad (2.43)$$

где символом $[h_r \otimes_r y^\bullet(t)]$ обозначена r - мерная свертка импульсных характеристик объекта с запаздыванием $h_r(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ и функции $y^\bullet(t - \tau_i)$, $i = 1, \tau$, т.е.

$$[h_r \otimes y^*(t)] = \int_0^\infty \dots r \dots \int_0^\infty h_r(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_r) \prod_{i=1}^r y^*(t - \tau_i),$$

τ_0 – время запаздывания объекта; $q(t) = L^{-1}\{G(p)\}$, $G(p)$ – передаточная функция фильтра Φ модифицированного ДЧИМ; $\varphi(u(t))$ – релейно-гистерезисный нелинейный элемент (рис.2.4);

$q_{\tau_m}(t) = L^{-1}[G_{\tau_m}(p)]$; $G_{\tau_m}(p) = \frac{1 - e^{-\tau_m p}}{p}$; τ_m – параметр ДЧИМ, учитывающий эффект запаздывания объекта.

Полученные уравнения (2.37) – (2.43), описывающие поведение системы, являются существенно нелинейными и использование их для исследования системы приводит к необходимости привлечения численных методов.

Для преодоления выше указанных трудностей используется и развивается аппарат функциональных рядов Вольтерра [14, 53, 55, 59].

На ее основе формируется математическая модель системы в следующем виде:

$$z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [n_r \otimes f(t)], \quad (2.44)$$

где $n_r(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_r)$ – импульсные характеристики модели (2.44).

Ряд Вольтерра устанавливает явное соотношение между ошибкой $x(t)$ и входом $f(t)$ исходной замкнутой нелинейной системы.

Процедура построения вольтерровской модели системы (2.44) распадается на три этапа.

На первом этапе необходимо получить вольтерровскую модель ДЧИМ системы с запаздыванием в следующем виде:

$$u(t) = m_0 + \sum_{r=1}^{\infty} [m_r \otimes x(t)], \quad (2.45)$$

где $m_r(\tau_m, \tau_1, \dots, \tau_r)$ – импульсные характеристики ряда (2.45).

В свою очередь для ее построения необходимо получить математические модели модифицированного блока системы сброса и блока формирования импульсов.

На следующем этапе нужно получить математическую модель разомкнутой системы в виде

$$z(t) = \theta_0 + \sum_{r=1}^{\infty} [\theta_r \otimes x(t)], \quad (2.46)$$

где $\theta_r(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_r)$ – импульсные характеристики модели (2.46)

На последнем этапе формируется математическая модель замкнутой системы с модифицированным ДЧИМ в виде (2.44), что соответствует переходу от замкнутой системы к эквивалентной разомкнутой. Рассмотрим построение вольтерровских моделей конкретных видов динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием.

2.3.1. Вольтерровская модель интегральной частотно-импульсной системы управления с запаздыванием

2.3.1.1. Вольтерровская модель интегрального частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием

Обратимся к нелинейной системе, изображенной на рис. 2.12. Основными ее элементами являются, как известно, модифицированный блок сброса (МБС) и блок формирования импульсов (БФИ). Для построения математической модели ИЧИМ системы с запаздыванием рассмотрим вначале эти элементы в отдельности [5, 12].

Рассмотрим структурную схему блока МБС, изображенную на рис. 2.6. Поведение этого блока описывается уравнением (2.43).

Решение уравнения (2.43) ищем в виде:

$$y(t) = [d_0 \otimes x(t)] + \sum_{r=1}^{\infty} \left[d_r \otimes x(t) \right] \prod_{i=2}^{r+1} s(t_i). \quad (2.47)$$

После подстановки уравнения (2.47) в (2.43) получим

$$\begin{aligned} [d_0 \otimes x(t)] + \sum_{r=1}^{\infty} d_r \otimes x(t) \prod_{i=2}^{r+1} s(t_i) &= [q \otimes x(t)] - \{q \otimes x(t)[q_{hm} \otimes s(t)]\} - \\ &- \{q \otimes \frac{1}{k_u} [(d_0 \otimes x(t)) + \sum_{r=1}^{\infty} d_r \otimes x(t) \prod_{i=2}^{r+1} s(t_i)] s(t)\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Применение к каждому слагаемому в (2.48) многомерного преобразования Лапласа [23, 26, 27] и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $[XS]$, позволяют получить соотношения для изображения ядер ряда (2.47) в следующем виде [10, 18]:

$$D_0(p) = G(p) = \frac{k_u}{p},$$

$$D_1(\tau_m, p_1, p_2) = -G(p_1 + p_2) \left[\frac{1}{k_u} D_0(p_2) + G_{\tau_m}(p_2) \right], \quad (2.49)$$

$$D_r(\tau_m, p_1, p_2, \dots, p_{r+1}) = -G(p_1, p_2 + \dots + p_{r+1}) D_{r-1}(\tau_m, p_2, \dots, p_{r+1})$$

при $r = 2, 3, \dots$

Теперь рассмотрим структурную схему блока БФИ, показанную на рис.2.5. В структуру этого блока входит релейно-гистерезисный элемент с характеристикой, изображенной на рис. 2.4. Для построения математической модели требуется преобразовать эту релейно-гистерезисную функцию к виду, допускающему ортогональное разложение. В результате такого преобразования получена в работе [6] эквивалентная релейно-гистерезисному элементу замкнутая система с однозначной нелинейностью, изображенная на рис. 2.13.

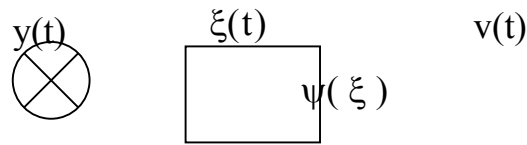


Рис.2.13. Эквивалентная схема релейно- гистерезисного элемента

С учетом замкнутой системы (рис. 2.13) получена эквивалентная схема блока формирования импульсов, показанная на рис. 2.5 б.

При разложении однозначной нелинейности $\psi(\xi(t))$ (рис. 2.14) в качестве ортогональной системы выберем полиномы Эрмита [51, 54]. Это означает, что распределение процесса на входе нелинейности $\psi(\xi)$ предполагается нормальным:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sigma_\xi \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\xi - m_\xi)^2}{2 \sigma_\xi^2} \right]. \quad (2.50)$$

С учетом весовой функции $\rho(\xi)$ выходной сигнал $v(t)$ определяется следующим образом:

$$v(t) = \psi(\xi(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k H_k \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right), \quad (2.51)$$

где
$$b_k = \left(\frac{1}{k!} \sigma_\xi \sqrt{2\pi} \sum_{m=-N}^N m^{2m+1} \int_{2m-1}^{2m+1} H_k \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) \exp \left(-\frac{\xi - m_\xi}{2 \sigma_\xi} \right) d\xi, \quad (2.52)$$

N – сколько угодно большое, конечное число.

$$H_0\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = 1, H_1\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi},$$

$$H_{k+2}\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) H_{k+1}\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) - (k+1)H_k\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right).$$

Вычисленные по выражению (2.52) коэффициенты b_k определяются точностью до первых двух моментов случайного процесса $\xi(t)$ (m_ξ, σ_ξ^2). Для удобства дальнейших вычислений представим ряд (2.51) по степеням $\xi(t)$

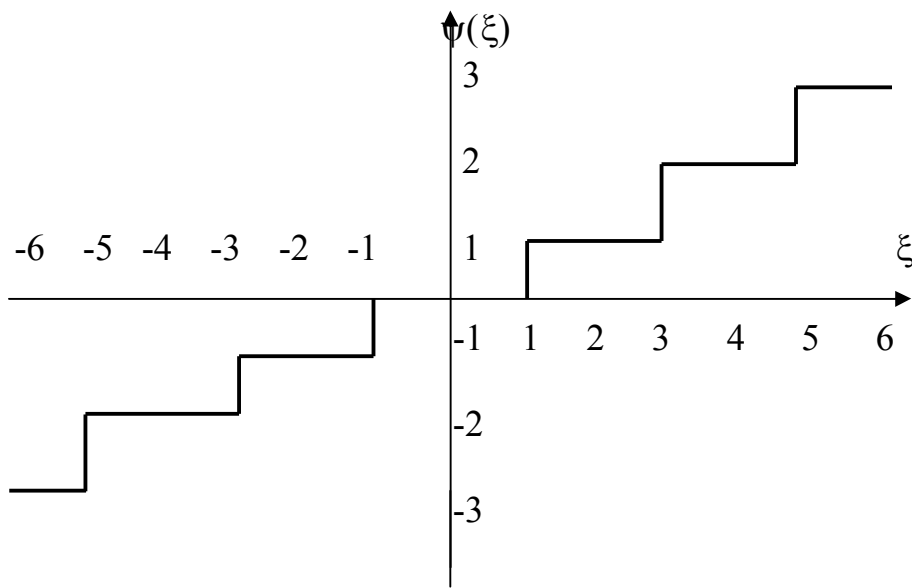


Рис. 2.14. Релейный элемент с однозначной нелинейностью

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \xi^k, \quad (2.53)$$

где коэффициент d_k определяется из соотношения

$$d_0 + d_1 \xi + d_2 \xi^2 + d_3 \xi^3 + \dots = b_0 + b_1 \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} +$$

$$+ b_2 \left[\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right)^2 - 1 \right] + b_3 \left[\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right)^3 - 3 \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) \right] + \dots$$

приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $\xi(t)$.

Входной процесс нелинейного элемента $\psi(\xi)$ (рис. 2.14) определяется в следующем виде:

$$\xi(t) = y(t) \frac{1}{\Delta} + 2v(t) . \quad (2.54)$$

Подставляя выражение для $\xi(t)$ (2.54) в (2.53), получим

$$v(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[d_l y(t) \frac{1}{\Delta} + 2v(t) \right]. \quad (2.55)$$

Решение уравнения (2.55) получим в виде ряда

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \left[\frac{y(t)}{\Delta} \right]^k, \quad (2.56)$$

где коэффициенты e_k определяются из уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k \left[\frac{y(t)}{\Delta} \right]^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left\{ \frac{y(t)}{\Delta} \right\} + 2 \sum_{l=0}^{\infty} e_l \left[\frac{y(t)}{\Delta} \right]^l \Big\}^k .$$

Для сигнала $s(t)$, определяемого соотношением (2.42), с учетом (2.55) получим:

$$s(t) = \sum_{m=2}^{\infty} \left[c_m \overset{m}{\otimes} y(t) \right], \quad (2.57)$$

где

$$c_m(p_1, \dots, p_m) = e_{m-1} \frac{l(p_1)(p_2 + \dots + p_m)}{\Delta^m} .$$

Уравнения (2.55) и (2.57) описывают поведение блока БФИ. Полученные уравнения (2.47), (2.55), (2.57) полностью характеризуют поведение МИЧИМ.

Подставляя выражение для $s(t)$ из (2.57) в (2.47), получим

$$y(t) = [d_0 \otimes x(t)] + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ d_r \overset{r+1}{\otimes} \left(x(t) \prod_{i=2}^{r+1} \sum_{m=0}^{\infty} \left[c_m \overset{m}{\otimes} y(t_i) \right] \right) \right\}. \quad (2.58)$$

Решение уравнения (2.58) строится в виде

$$y(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\varepsilon_r \overset{r}{\otimes} x(t) \right], \quad (2.59)$$

где, например, изображение первых трех ядер ряда (2.59) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\tau_m, p) &= D_0(p), \quad \varepsilon_2(\tau_m, p_1, p_2) = 0, \\ \varepsilon_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) &= D_1(\tau_m, p_2, p_3) c_2(p_2, p_3) \prod_{i=1}^3 \varepsilon_1(\tau_m, p_i). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Объединяя (2.59) и (2.56), получим

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\varepsilon_l \overset{l}{\otimes} x(t) \right] \right\}. \quad (2.61)$$

Тогда окончательно получим вольтерровскую модель ИЧИМ системы с запаздыванием в следующем виде

$$y(t) = m_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[m_r \overset{r}{\otimes} x(t) \right]. \quad (2.62)$$

Первые три ядра ряда (2.75) определяются из выражений:

$$\begin{aligned} m_0 &= M_0(\tau_m, 0) = e_0; \\ M_1(\tau_m, p) &= \frac{1}{\Delta} e_0 \varepsilon_1(h_m, p); \\ M_2(\tau_m, p_1, p_2) &= e_2 \frac{1}{\Delta^2} \prod_{i=1}^3 \varepsilon_1(\tau_m, p_i); \\ M_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) &= \frac{1}{\Delta^3} e_3 \prod_{i=1}^3 \varepsilon_1(\tau_m, p_i) + \frac{1}{\Delta} e_1 \varepsilon_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3). \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.3.1.2. Вольтерровская модель разомкнутой интегральной частотно-импульсной системы управления с запаздыванием

Управляемый объект представляет собой непрерывную динамическую систему для некоторой области значений сигнала $v(t)$ $|v(t)| < v$ и описывается оператором

$$W_r[\tau_0, v(\tau) / t_0 \leq \tau \leq t] = \sum_{r=1}^{\infty} \left[w_r \overset{r}{\otimes} v(t) \right]. \quad (2.64)$$

Объединяя операторы (2.38) и (2.64), получим

$$z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ w_r \overset{r}{\otimes} [\delta' \otimes v(t)] \right\} = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\tilde{w}_r \overset{r}{\otimes} v(t) \right]. \quad (2.65)$$

Подставляя (2.62) в уравнение (2.64) и располагая полученный ряд по степеням $x(t)$, получим

$$z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \tilde{w}_r \overset{r}{\otimes} \left(m_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \left[m_l \overset{l}{\otimes} x(t) \right] \right) \right\}. \quad (2.66)$$

Решение ряда (2.66) получим в следующем виде:

$$z(t) = \theta_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\theta_r \overset{r}{\otimes} x(t) \right]. \quad (2.67)$$

Изображения в терминах многомерного преобразования для первых трех ядер

$$\theta_0(\tau_0, \tau_m, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} m_0 \overset{r}{\otimes} \tilde{W}_r(\tau_0, 0, \cdot(r) \cdot, 0);$$

$$\begin{aligned}
\theta_1(\tau_0, \tau_m, p) &= M_1(\tau_m, p) \sum_{r=0}^{\infty} m^{r-1} \left[\tilde{W}_r(\tau_0, 0, (r), p, 0) + \tilde{W}_r(\tau_0, p, \bullet(r)\bullet, 0) \right]; \\
\theta_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) &= M_2(\tau_m, p_1, p_2) \sum_{r=2}^3 m_0^{r-1} [W_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, p_1 + p_2) + \\
&+ \tilde{W}_r(\tau_0, p_1 + p_2, 0, \bullet(r)\bullet, 0) + \prod_{i=1}^2 M_1(\tau_m, p_i) \times \\
&\times \sum_{r=2}^3 m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, p_1, 0, \bullet(r-2)\bullet, 0, p_2) + \dots + \tilde{W}_r(\tau_0, p_2, 0, \bullet(r-1)\bullet, 0, p_1)] \\
&]; \\
&\times \sum_{r=1}^3 m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, p_1 + p_2 + p_3, 0, \bullet(r-1)\bullet, 0) + \dots + \tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r-1)\bullet, 0, p_1 + p_2 + p_3)] + \\
&+ M_1(\tau_m, p_1) M_2(\tau_m, p_2, p_3) \sum_{r=2}^3 m_0^{r-2} [\tilde{W}_r(\tau_0, p_1, 0, \bullet(r-2)\bullet, 0, p_2) + \dots \\
&\dots + \tilde{W}_r(\tau_0, p_2 + p_3, 0, \bullet(r-1)\bullet, p_1) + \prod_{i=1}^3 M_1(\tau_m, p_i) \tilde{W}_3(\tau_0, p_1, p_2, p_3)]. \quad (2.68)
\end{aligned}$$

2.3.1.3. Вольтерровская модель замкнутой интегральной частотно-импульсной системы управления с запаздыванием

Ряд (2.67) совместно с уравнением замыкания (2.37) описывает модель замкнутую интегральную частотно-импульсную систему управления объектами с запаздыванием (рис. 2.12).

Подставляя (2.67) в уравнение замыкания системы (2.37), получим

$$x(t) = f(t) - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \left[\theta_r \otimes^r x(t) \right] \right\}. \quad (2.69)$$

Решение (2.69) ищем в виде (2.44). Тогда после подстановки ряда (2.44) в (2.69) получим

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[n_r \otimes^r x(t) \right] = f(t) - \left\{ \theta_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\theta_r \otimes^r \sum_{k=0}^{\infty} \left[n_k \otimes^k f(t) \right] \right] \right\}. \quad (2.70)$$

Применим к каждому слагаемому (2.70) многомерное преобразование Лапласа

$$N_0(\tau_0, \tau_m, 0) = \sum_{r=0}^{\infty} N_0^r(\tau_0, \tau_m, 0) \theta_r(\tau_0, \tau_m, 0, \bullet(r)\bullet, 0);$$

$$N_1(\tau_0, \tau_m, p) = 1 - N_1(\tau_0, \tau_m, p) \sum_{r=1}^3 N_0^{r-1}(\tau_0, \tau_m, 0) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times [\theta_r(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(r-1) \cdot, 0, p) + \dots + \theta_r(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(r-1) \cdot, 0)]; \\
N_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) = & -N_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) \sum_{r=1}^3 N_0^{r-1}(\tau_0, \tau_m, 0) \times \\
& \times [\theta_r(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(r-1) \cdot, 0, p_1 + p_2) + \dots + \theta_r(\tau_0, \tau_m, p_1 + p_2, 0, \cdot(r-1) \cdot, 0)] - \\
& - \prod_{i=1} N_1(\tau_0, \tau_m, p_i) \sum_{r=2} N_0^{r-2}(\tau_0, \tau_m, 0) [\theta_r(\tau_0, \tau_m, p_1, 0, \cdot(r-2) \cdot, 0, p_2) + \\
& + \dots + \theta_r(\tau_0, \tau_m, p_2, 0, \cdot(r-2) \cdot, 0, p_1)]; \\
N_3(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2, p_3) = & -N_3(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2, p_3) \sum_{r=1}^3 N_0^{r-1}(\tau_0, \tau_m, 0) \times \\
& \times [\theta_r(\tau_0, \tau_m, p_1 + p_2 + p_3, 0, \cdot(r-1) \cdot, 0) + \dots + \theta_r(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(r-1) \cdot, 0, p_1 + p_2 + p_3)] - \\
& - N_1(\tau_0, \tau_m, p_1) N_2(\tau_0, \tau_m, p_2, p_3) \sum_{r=2}^3 N_0^{r-2}(\tau_0, \tau_m, 0) \times \\
& \times [\theta_r(\tau_0, \tau_m, p_1 + p_2, 0, \cdot(r-2) \cdot, 0, p_1) + \dots + \theta_r(\tau_0, \tau_m, p_1, 0, \cdot(r-2) \cdot, 0, p_2 + p_3)] - \\
& - \prod_{i=1}^2 N_1(\tau_0, \tau_m, p_i) \theta_3(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2, p_3).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Полученная математическая модель замкнутой системы (2.44) учитывает особенности функционирования интегральной частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием и имеет ряд специфических свойств.

Например, ядро нулевого порядка модели (2.44) равно нулю. Для этого выражение для ядра $N_0(\tau_0, \tau_m, 0)$ представим в виде

$$\begin{aligned}
& N_r^0(\tau_0, \tau_m, 0) + \frac{1}{\theta_r(\tau_0, \tau_m, 0)} \left\{ \sum_{i=0.2}^{\infty} \theta_i(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(i) \cdot, 0) N_0^i(\tau_0, \tau_m, 0) + \right. \\
& \left. + [\theta_1(\tau_0, \tau_m, 0) + 1] N_0(\tau_0, \tau_m, 0) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

В уравнении (2.72) коэффициенты при $N_0^i(\tau_0, \tau_m, 0)$ можно определить следующим образом:

$$\theta_i(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(i) \cdot, 0) = \lim_{\beta \rightarrow 0} A_i(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(i) \cdot, 0) = \frac{\psi^i}{\beta^i}, \tag{2.73}$$

где $A_i(\tau_0, \tau_m, 0, \cdot(i) \cdot, 0)$ – ядро нулевого порядка системы с Σ - ЧИМ, т.е. в данном случае передаточная функция фильтра модулятора равна $G(p) = \frac{k_u}{p + \beta}$ и $\psi^i = \text{const}$.

С учетом соотношения (2.73) легко показать, что коэффициенты при $N_0^i(\tau_0, \tau_m, 0)$ определяются так:

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\theta_{k-i}(\tau_0, \tau_m, 0, \bullet(k-i)\bullet, 0)}{\theta_k(\tau_0, \tau_m, 0, \bullet(k)\bullet, 0)} = \\ & = \lim \frac{A_{k-i}(\tau_0, \tau_m, 0, \bullet(k-i)\bullet, 0)}{A_k(\tau_0, \tau_m, 0, \bullet(i)\bullet, 0)} = \lim \frac{\beta^k \psi_{k-i}}{\beta^{k-i} \psi_k} = 0, \quad i = 1, k. \end{aligned}$$

Таким образом, в уравнении (2.72) все коэффициенты при составляющей

$N_0^i(\tau_0, \tau_m, 0)$ ($i=0, k-1$) тождественно равны нулю.

Отсюда следует, что ядро нулевого порядка $N_0(\tau_0, \tau_m, 0)$ вольтерровской модели (2.44) тоже равно нулю.

Тогда математическая модель интегральной частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием примет следующий вид:

$$x(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[n_r \overset{r}{\otimes} f(t) \right]. \quad (2.74)$$

Следующим свойством полученной модели является возможность представления изображений ядер ряда (2.87) в виде двух составляющих, т.е.

$$N_r(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_r) = \vec{N}_r(\tau_m, p_1, \dots, p_r) + \tilde{N}_r(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_r), \quad (2.75)$$

где $\vec{N}_r(\tau_m, p_1, \dots, p_r)$ – ядро r -го порядка математической модели замкнутой интегральной частотно- импульсной системы управления с запаздыванием; $\tilde{N}_r(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_r)$ – ядро r -го порядка модели (2.74), учитывающее модификацию закона интегральной частотно- импульсной модуляции при управлении объектами с запаздыванием.

Справедливость равенства (2.75) вытекает из выражения для ядер модифицированного блока сброса (2.41). Для этого выражение (2.41) можно представить в виде:

$$D_r(\tau_m, p_1, \dots, p_r) = \vec{D}_r(p_1, \dots, p_r) + \tilde{D}_r(\tau_m, p_1, \dots, p_r), \quad (2.76)$$

где $\vec{D}_r(p_1, \dots, p_r)$ – ядро r -го порядка обычного блока сброса; $\tilde{D}_r(\tau_m, p_1, \dots, p_r)$ – ядро r -го порядка полученного блока сброса, учитывающее соотношения (2. 7) – (2. 8).

В случае, когда параметр модификации τ_m равен нулю, модифицированный ИЧИМ превращается в обычный ИЧИМ. Тогда вторая составляющая выражения (2.74) обращается в нуль ($\tilde{D}_r(\tau_m, p_1, \dots, p_r) = 0$).

Тогда в соотношении (2.75) второе слагаемое равно нулю

$$\tilde{N}_r(\tau_m, p_1, \dots, p_r) = 0. \quad (2.77)$$

Выражение (2.77) показывает, что в случае обычного ИЧИМ математическая модель (2.74) описывает поведение системы управления с ИЧИМ объектами с запаздыванием.

В случае объекта с сосредоточенными параметрами и ИЧИМ ($\tau_m=0$, $\tau_0=0$), из анализа выражений (2.75) можно показать, что модель (2.74) характеризует поведение интегральной частотно- импульсной системы управления объектами с сосредоточенными параметрами.

2.3.2. Вольтерровская модель Σ - частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием

2.3.2.1. Вольтерровская модель Σ - частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием

Обратимся к структурной схеме блока сброса модифицированного Σ -ЧИМ (рис. 2.9).

Как видно из этой схемы, сигнал на выходе фильтра определяется следующим соотношением:

$$y_v(t) = q_v \otimes x(t) - \frac{1}{c_v} (q_v \otimes (y_v(t)s(t)) - q \otimes x(t)[q_{\tau_m} \otimes s(t)], \quad (2.78)$$

где $q_v = c_v e^{-p_v t}$.

Решение этого уравнения ищется в виде ряда

$$y_v(t) = d_{v0} \otimes x(t) + \sum_{r=1}^n d_{vr} \otimes x(t) \overset{r}{\otimes} s(t), \quad (2.79)$$

где двойная свертка во втором слагаемом представим в виде:

$$d_{vr} \otimes x(t) \overset{r}{\otimes} s(t) = \int_0^t \int_0^t \left[\int_0^t d_{vr}(\tau_m, \theta, \tau_1, \dots, \tau_r) x(t - \theta) d\theta \right] \prod_{i=1}^r s(t - \tau_i) d\tau_i.$$

Подставляя (2.79) в соотношение (2.78) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях X и произведения XS и переходя к операторной форме, получим изображения ядер ряда (2.79) в виде [53]:

$$D_{v0}(p) = G_v(p);$$

$$D_{v0}(\tau_m, p_1, p_2) = -\frac{1}{c_v} (G_v(p_1 + p_2)[D_v(p_2) + c_v G_{\tau_m}(p_2)]);$$

$$D_{vr}(\tau_m, p_1, \dots, p_{r+1}) = -\frac{1}{c_v} (D_{v0}(\tau_m, p_1, \dots, p_{r+1})(D_{v,r-1}(\tau_m, p_1, \dots, p_{r+1}));$$

$$G_v(p) = \frac{c_v}{p + p_v}, \quad r = 2, 3, \dots$$

В случае линейного фильтра с простыми полюсами (рис. 2.10) уравнение блока сброса с учетом (2.79) имеет вид

$$y(t) = \sum_{v=1}^1 y_v(t) = \sum_{v=1}^1 d_{v0} \otimes x(t) + \sum_{v=1}^1 \sum_{r=1}^n d_{vr} \otimes x(t) \otimes s(t). \quad (2.80)$$

Решение уравнений (2.79) и (2.80) получим в виде:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \otimes x(t). \quad (2.81)$$

Подставим это решение (2.81) и соотношение (2.79) в уравнение (2.80)

Произведя операции, аналогичные вышеописанным в предыдущем разделе операциям, получим искомые ядра вольтерровской модели блока сброса (2.81):

$$\varepsilon_1(p) = \sum_{i=1}^1 d_{i0}(p) = \sum_{v=1}^1 \frac{c_v}{p + p_v}, \quad \varepsilon_2(\tau_m, p_1, p_2) = 0;$$

$$\varepsilon_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) = \sum_{v=1}^1 D_{v1}(\tau_m, p_1 + p_2 + p_3) c_2(p_2, p_3) \varepsilon_1(p_2) \varepsilon_1(p_3);$$

$$\varepsilon_k(\tau_m, p_1, \dots, p_k) = \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{v=1}^1 D_{vr}(\tau_m, p_1, \dots, p_{r+1}) \hat{c}_{r,k-1}(p_2, \dots, p_k);$$

$$\hat{C}_{r1}(p_2, \dots, p_{k+1}) = \frac{d^k}{k! dz^k} \left[\sum_{j=2}^{\infty} \hat{C}_j(p_1, \dots, p_{j+1}) z^j \right]^r \Big|_{z=0};$$

$$\hat{C}_j(p_1, \dots, p_j) = \sum_{i=2}^j C_j(p_1, \dots, p_j) \hat{\varepsilon}_{ik}(p_1, \dots, p_k);$$

$$\hat{\varepsilon}_{jk}(p_1, \dots, p_i) = \frac{d^k}{k! dz^k} \left[\sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon_j(p_1, \dots, p_j) z^j \right]^j \Big|_{z=0}.$$

Из уравнений (2.81), (2.58) и (2.79) следует, что ДЧИМ можно представить системой, показанной на рис. 2.12. В этой схеме все блоки содержат нелинейные элементы степенного типа, и поэтому для построения ее вольтерровской модели можно воспользоваться стандартной

процедурой [5, 7]. Применяя ее к данной системе, получим вольтерровскую модель ДЧИМ в виде:

$$v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \otimes^r x(t). \quad (2.82)$$

Объединение уравнений БФИ и модифицированного БС, определенные соотношениями (2.58), (2.57) и (2.81), позволяет получить уравнение ДЧИМ в виде

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{e=0}^{\infty} \left[\varepsilon_e \otimes^e x(t) \right] \right\}^k. \quad (2.83)$$

Решение этого уравнения ищем в виде (2.62), тогда получим

$$v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \otimes^r x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_j \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varepsilon_m \otimes^m x(t) \right]^k. \quad (2.84)$$

Отсюда получим соотношения для ядер вольтерровской модели модифицированного ДЧИМ:

$$\begin{aligned} M_0(0) &= e_0, \quad M_1(p) = \frac{e_1}{\Delta} \sum_{v=1}^1 \frac{c_v}{p - p_v}; \\ M_1(\tau_m, p_1, p_2) &= \frac{e_2}{\Delta^2} \sum_{v=1}^1 \frac{c_v}{p_1 - p_v} \sum_{v=1}^1 \frac{c_v}{p_2 - p_v}; \\ M_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) &= \frac{e_1}{\Delta} \sum_{i=1}^1 D_{vi}(\tau_m, p_1, p_2 + p_3) c_2(p_2, p_3) \varepsilon_1(p_2) \varepsilon_2(p_3) + \\ &+ \frac{e_3}{\Delta^3} \sum_{v=1}^1 \frac{c_v}{p_1 - p_v} \sum_{v=1}^1 \frac{c_v}{p_2 - p_v} \sum_{v=1}^1 \frac{c_v}{p_3 - p_v}; \\ M_1(\tau_m, p_1, \dots, p_k) &= \sum_{i=0}^k e_i \varepsilon_{jk}(\tau_m, p_1, \dots, p_k); \\ \varepsilon_{jk}(\tau_m, p_1, \dots, p_k) &= \frac{d^k}{k! dz^k} \left[\frac{1}{\Delta} \sum_{g=1,3,4}^{\infty} \varepsilon_q(\tau_m, p_1, \dots, p_g) z^q \right]^j \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

2.3.2.2. Вольтерровская модель разомкнутой Σ - частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием

Как уже было отмечено в пункте 2.1, приведенная непрерывная часть может быть представлена рядом Вольтерра

$$z(t) = \tilde{H}[\tau_0, v(\tau)/t_0 \leq \tau \leq t] = \sum_{k=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t \tilde{h}_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k v(t - \tau_i) d\tau_i, \quad (2.86)$$

где

$\tilde{H}[\tau_0, v(\tau)/t_0 \leq \tau \leq t] = H[\tau_0, \dot{v}(\tau) = y^*(\tau)/t_0 \leq \tau \leq t]$, $\tilde{h}_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k)$ – непрерывные ограничения функции, обращающиеся при $\tau_j < 0 (j=1, 2, \dots, k)$ в нуль.

Объединяя операторы (2.84) и (2.86), получим вольтерровскую модель разомкнутой системы в виде

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \otimes x(t) . \quad (2.87)$$

Импульсные характеристики $p_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k)$ этого ряда выражаются через импульсные характеристики вольтерровских моделей управляемого объекта $h_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k)$ и ДЧИМ $m_k(\tau_m, \tau_1, \dots, \tau_k)$. В области изображений эти соотношения имеют вид:

$$P_0(\tau_0, \tau_m, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} H_r(\tau_0, 0, \dots, 0) M_0^r(\tau_m, 0);$$

$$P_1(\tau_0, \tau_m, p) = \sum_{r=1}^N r \cdot H_r(\tau_0, p, 0, \dots, 0) M_1(\tau_m, p) M_0^{r-1}(\tau_m, p);$$

$$P_k(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k) = \sum_{r=1}^{\infty} H_r(\tau_0, p_1, \dots, p_r) M_{rk}(\tau_m, p_1, \dots, p_r);$$

$$M_{rk}(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k) = \sum_{r=1}^{\infty} H_r(\tau_0, p_1, \dots, p_r) \hat{M}_{rk}(\tau_m, p_1, \dots, p_r);$$

$$\hat{M}_{rk}(\tau_m, p_1, \dots, p_r) = \frac{d^k}{k! dz^k} \left[\sum_{l=2}^{\infty} M_l(\tau_m, p_1, \dots, p_r) z^l \right]^i \Big|_{z=0} .$$

2.3.2.3. Вольтерровская модель замкнутой Σ - частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием

Ряд (2.87) и уравнение замыкания (2.37) описывает систему (рис. 2.12). Подставляя (2.87) в (2.37), получим уравнение, решение которого будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} n_r \otimes f(t) , \quad (2.88)$$

где

$$N_0(\tau_0, \tau_m, 0) = -P_0(\tau_0, \tau_m, 0) - \sum_{r=1}^{\infty} P_r(\tau_0, \tau_m, 0, \dots, 0) N_0^r(\tau_0, \tau_m, 0);$$

$$N_1(\tau_0, \tau_m, p) = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} P_r(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_r) \hat{N}_1(\tau_0, \tau_m, 0);$$

$$N_k(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k) = - \sum_{r=1}^{\infty} P_r(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k) \hat{N}_{rk}(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k); \quad (2.89)$$

89)

$$\hat{N}_{rk}(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=0}^k C_r^i [N_0(\tau_0, \tau_m, 0)]^{r-i} N_{ik}(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k);$$

$$N_{ik}(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_k) = \frac{d^k}{k! dz^k} \left[\sum_{l=2}^{\infty} N_l(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_l) z^l \right]^i \Big|_{z=0}.$$

Уравнение (2.88) представляет собой искомую вольтерровскую модель исходной системы (рис. 2.12), содержащий нелинейную непрерывную часть и линейный фильтр в ДЧИМ с простыми полюсами.

Как отмечалось выше, использование различных операторов фильтра в ДЧИМ влияет только на структуру блока сброса системных моделей ДЧИМ. Поэтому алгоритм построения вольтерровской модели системы (рис. 2.12), разработанный для линейного фильтра с простыми полюсами, почти не меняется в случае использования других операторов ДЧИМ. Изменяются только соотношения, задающие изображения ядер ряда (2.81), описывающего поведение блока сброса.

Пусть фильтр в ДЧИМ характеризуется оператором вида (2.11) и (2.12). Если передаточные функции из (2.12)

$$W_{ki}(p) = L\{w_{ki}(t)\},$$

имеют простые полюса, то уравнение блока сброса для каждого линейного динамического элемента (рис.2.10), согласно (2.22), имеет вид

$$y_{ij} = d_{ij0} \otimes x(t) + \sum_{r=1}^n d_{ijr} \otimes x(t) \otimes^r s(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.90)$$

Решение уравнения (2.36), описывающего блок сброса, и уравнения (2.90) можно получить в виде (2.81). Изображение ядер ряда (2.81) в данном случае определяются из соотношений следующего вида:

$$\varepsilon_k(\tau_m, p_1, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^k D_{ik}(\tau_m, p_1, \dots, p_k);$$

$$D_{ik}(\tau_m, p_1, \dots, p_k) = \frac{d^k}{k! dz^k} [\hat{D}_k^{(ik)}(\tau_m, p_1, \dots, p_q) z^k]^i \Big|_{z=0} \quad (j=1, 2, \dots, i);$$

$$\hat{D}_q^{ij}(\tau_m, p_1, \dots, p_q) = \sum_{r=1}^{q-1} D_{ijr}(\tau_m, p_1, \dots, p_{r+1}) \hat{C}_{r,q-1}(p_1, \dots, p_q); \quad (2.91)$$

$$\hat{C}_{rq}(\tau_m, p_2, \dots, p_{q+1}) = \frac{d^q}{q! dz^q} \left[\sum_{j=2}^{\infty} \hat{C}_j(\tau_m, p_2, \dots, p_{j+1}) z^j \right]^r \Big|_{z=0};$$

$$\hat{C}_q(\tau_m, p_1, \dots, p_q) = \sum_{h=1}^q C_h(p_1, \dots, p_q) \hat{Q}_{hq}(\tau_m, p_1, \dots, p_q);$$

$$\hat{Q}_{hq}(\tau_m, p_1, \dots, p_q) = \frac{d^q}{q! dz^q} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_k(\tau_m, p_1, \dots, p_k) z^k \right]^h \Big|_{z=0}.$$

Следовательно, вольтерровской моделью системы, характеризующейся нелинейным фильтром в ДЧИМ, служит ряд (2.44), если изображения ядер ряда (2.81) определить из соотношений (2.91). В остальном все процедуры построения вольтерровской модели остаются без изменения. Обобщение на случай кратных корней передаточных функций (2.12) линейных элементов не вызывает принципиальных затруднений.

2.4. Алгоритмы формирования вольтерровских моделей системы

Формирование вольтерровской модели системы (рис.2.12) в виде (2.44) производится в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Вычислить коэффициенты разложения релейной функции (рис. 2.13) в ортогональный ряд (2.51) по формуле (2.52). Вычисление коэффициентов b_k по формуле (2.52) требует применения методов численного интегрирования, что приводит к погрешностям при их вычислении на ЦВМ. С целью удобства вычисления этих коэффициентов на ЦВМ в приложении 1 получены выражения для b_k .

Коэффициенты b_k , вычисляемые по формулам (П1.3–П1.6) определяются с точностью до моментов процесса $\xi(t)$ (рис.2.13).

2. Найти коэффициенты рядов (2.53) и (2.56) по выражениям для коэффициентов d_k и e_k . В случае $k=0$, согласно соотношениям для e_k , получим алгебраическое уравнение. Решение этого уравнения определяет нулевой коэффициент e_0 . Остальные коэффициенты e_k ($k=1, 2, \dots$) определяются по рекуррентным соотношениям.

3. Найти изображения ряда (2.57) по выражениям для c_k .

4. Найти изображения ядер ряда (2.47) по соотношениям (2.49).

5. Найти ядра модифицированного блока сброса (2.59) по выражениям (2.60).

6. Определить ядра вольтерровской модели модифицированного ДЧИМ (2.62) по формулам (2.63), представляющие явные соотношения.

7. Определить ядра вольтерровской модели разомкнутой системы с МИЧИМ (2.67) по соотношениям (2.68).

8. Найти ядра математической модели замкнутой системы (2.74) по формулам (2.71). Для ядер $N_r(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_r)$ ($r=1, 2, \dots$) получим рекуррентные соотношения.

В качестве примера рассмотрим алгоритмы формирования математических моделей интегральной частотно-импульсной системы управления линейным объектом с запаздыванием. В этом случае

управляемый объект с запаздыванием описывается первым членом ряда (2.64), т.е. является линейным объектом с передаточной функцией вида

$$\tilde{W}(\tau_0, p) = \tilde{W}_1(\tau_0, p)e^{-\tau_0 p}.$$

В вольтерровских рядах, описывающих поведение блоков системы, ограничимся только первыми тремя членами соответствующих рядов. Для этого случая проиллюстрируем применение описанной методики.

1. Определим коэффициенты ряда (2.51)

$$b_k = \frac{1}{k! \delta_\xi \sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m^{2m+1} \int_{2m-1}^{2m+1} H_k\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \exp\left[-\left(\frac{\xi - m_\xi}{2\sigma_\xi}\right)^2\right] d\xi$$

$$H_0(\cdot) = 1, H_1(\cdot) = \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right), H_2(\cdot) = \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2 - 1,$$

$$H_3(\cdot) = \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^3 - 3\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \text{ при } k=0, 1, 2, 3.$$

Согласно результатам приложения 1, для вычисления коэффициентов b_k ($k=0, 1, 2, 3$) имеем рекуррентные соотношения:

$$b_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N m \left[\Phi\left(-\frac{v_2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{v_1}{\sqrt{2}}\right) \right];$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m \left[\exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \right];$$

$$b_2 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m \left[v_2 \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) - v_1 \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \right];$$

$$b_3 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m \left[(v_2^2 - 1) \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) - (v_1^2 - 1) \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \right],$$

где

$$v_1 = \frac{2m+1-m_\xi}{\sigma_\xi}, \quad v_2 = \frac{2m-1-m_\xi}{\sigma_\xi}, \quad \Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-u^2} du.$$

2. Найдем коэффициенты ряда (2.53). Из формул (2.64) для вычисления d_k при $k=0, 1, 2, 3$ и $N=3$ получим

$$d_0 = b_0 - b_1 \eta + b_2 (\eta^2 - 1) - b_3 (\eta^3 - 3\eta), \quad d_1 = 1/\sigma_\xi [b_1 - 2b_2 \eta + 3b_3 (\eta^3 - 1)],$$

На основе соотношений для коэффициентов e_k через d_k , получим

$$e_0 = \sum_{i=0}^3 2^i d_i e_0^i, \quad e_1 = \frac{\sum_{i=1}^3 C_i^1 2^{i-1} d_i e_0^i}{1 - \sum_{i=1}^3 C_i^1 2^i d_i e_0^{i-1}}, \quad e_2 = \frac{\sum_{i=2}^3 C_i^2 2^{i-2} d_i e_0^{i-2} (1 + 2e_1)^2}{1 - \sum_{i=1}^3 C_i^1 2^i d_i e_0^{i-1}},$$

$$e_3 = \frac{d_3(1+2e_1)^3 + 2d_2C_2^1(1+2e_1)e_2}{1 - \sum_{i=1}^3 C_i^1 2^i d_i e_0^{i-1}}.$$

3. Импульсные характеристики ряда (2.57) определим из соотношений для коэффициентов c_k

$$C_2(p_1, p_2) = e_1 l(p_1) p_2 \frac{1}{\Delta^3};$$

$$C_3(p_1, p_2, p_3) = e_2 l(p_1)(p_2 + p_3) \frac{1}{\Delta^3}.$$

4. Находим изображения ядер (2.47) по формуле (2.49)

$$D_0(\tau_m, p) = \frac{k_u}{p};$$

$$D_1(\tau_m, p_1, p_2) = \frac{k_u}{p_1 + p_2} \left[\frac{1}{p_2} + \frac{1 - e^{-\tau_m p}}{p_2} \right];$$

$$D_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) = \frac{k_u}{p_1 + p_2 + p_3} \left[\frac{1}{p_2(p_2 + p_3)} + \frac{1 - e^{-\tau_m (p_2 + p_3)}}{p_2(p_2 + p_3)} \right].$$

5. Ядра импульсных характеристик модифицированного блока сброса (2.67) получим в виде

$$\varepsilon_1(\tau_m, p) = D_0(p); \quad \varepsilon_2(\tau_m, p_1, p_2) = 0;$$

$$\varepsilon_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) = C_2(p_2, p_3) \prod_{i=2}^3 \varepsilon_1(\tau_m, p_i) D_1(\tau_m, p_1, p_2 + p_3).$$

6. Ядра математической модели модифицированного ИЧИМ (2.62) примут вид

$$M_0(\tau_m, 0) = e_0, \quad M_1(\tau_m, p) = \frac{e_1}{\Delta} \varepsilon_1(\tau_m, p);$$

$$M_2(\tau_m, p_1, p_2) = \frac{e_2}{\Delta^2} \prod_{i=2}^3 \varepsilon_1(\tau_m, p_i);$$

$$M_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) = \frac{e_1}{\Delta} \varepsilon_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) + \frac{e_3}{\Delta^3} \prod_{i=2}^3 \varepsilon_1(\tau_m, p_i).$$

7. Ядра вольтерровской модели разомкнутой системы (2.67) определяются из следующих соотношений:

$$\theta_0(\tau_0, \tau_m, 0) = M_0(\tau_m, 0) \tilde{W}_1(\tau_0, 0);$$

$$\theta_1(\tau_0, \tau_m, p) = M_1(\tau_m, p) \tilde{W}_1(\tau_0, h, p);$$

$$\theta_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) = M_2(\tau_m, p_1, p_2) \tilde{W}_1(\tau_0, p_1 + p_2);$$

$$\theta_3(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2, p_3) = M_3(\tau_m, p_1, p_2, p_3) \tilde{W}_1(\tau_0, p_1 + p_2 + p_3) .$$

8. Изображения ядер вольтерровской модели замкнутой системы, согласно (2.74), примут вид

$$N_1(\tau_0, \tau_m, p) = \frac{1}{1 + \theta(\tau_0, \tau_m, p)} ;$$

$$N_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) = - \prod_{i=1}^2 N_1(\tau_0, \tau_m, p_i) \theta_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) \frac{1}{1 + \theta(\tau_0, \tau_m, p_1 + p_2)} ;$$

$$N_3(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2, p_3) = 2\theta_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2 + p_3) N_1(\tau_0, \tau_m, p_1) N_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) \times \\ \times \frac{1}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, p_1 + p_2 + p_3)} + \prod_{i=1}^2 N_1(\tau_0, \tau_m, p_i) \frac{1}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, p_1 + p_2 + p_3)} .$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать принцип действия и особенности функционирования системы с динамической частотно-импульсной модуляцией.
2. Привести функциональное уравнение нелинейной динамической системы со случайными параметрами.
3. Показать структуру динамической частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием.
4. Получить уравнения динамического частотно-импульсного модулятора с учетом особенностей и свойств объекта с запаздыванием.
5. Обосновать необходимость построения структурных моделей при исследовании динамической частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием.
6. Привести процедуру построения структурной модели динамического частотно-импульсного модулятора.
7. Провести сравнительный анализ структурной модели интегрального частотно-импульсного модулятора и интегрального частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием.
8. Привести процедуру построения структурной модели блока сброса Σ -ЧИМ при управлении объектами с запаздыванием.
9. Привести процедуру построения структурной модели блока сброса ДЧИМ с линейным фильтром при управлении объектами с запаздыванием.

10. Привести процедуру построения структурной модели блока сброса ДЧИМ с нелинейным фильтром при управлении объектами с запаздыванием.
11. Показать адекватность структурной модели Σ - ЧИМ при управлении объектами с запаздыванием и реального модулятора.
12. Получить математическую модель Σ -частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием.
13. Построить математическую модель интегральной частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием.
14. Показать особенности моделей интегральной и Σ -частотно-импульсной систем автоматического управления объектами с запаздыванием.
15. Показать основные свойства математических моделей интегральной частотно-импульсной систем автоматического управления объектами с запаздыванием.
16. Показать основные отличия математических моделей интегральных частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием и без запаздывания.
17. Получить рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов b_k ($k=0, 1, 2, 3$) .
18. Найти выражения для изображений ядер вольтеррской модели блока сброса интегрального ЧИМ.
19. Найти выражения для изображений ядер вольтеррской модели блока формирования импульсов интегрального ЧИМ.
20. Найти выражения для изображений ядер вольтеррской модели интегрального ЧИМ.
21. Найти выражения для изображений ядер вольтеррской модели разомкнутой частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.
22. Найти выражения для изображений ядер вольтеррской модели замкнутой частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.
23. Привести алгоритм формирования интегральной частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В настоящем разделе рассмотрены вопросы статистического анализа динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием. Приведены результаты вычислительного эксперимента по определению статистических характеристик унифицированного блока системы. Построены статистически линеаризованные модели динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием. Приведены вычислительные алгоритмы статистического анализа динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

3.1. Статистические характеристики нелинейных динамических систем управления с запаздыванием

Вольтерровская модель динамической частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием, полученная во втором разделе, устанавливает явную связь между процессом ошибки $x(t)$ и входным процессом $f(t)$. Это позволяет использовать ее для оценки точности работы системы, т.е. определения некоторых статистических характеристик процесса ошибки $x(t)$. Чаще всего такими характеристиками точности системы являются средние значения m_x , дисперсия ошибки σ_x^2 , вероятность попадания ее в определенную зону $P(|x| < \alpha)$, корреляционная функция ошибки $R_x(\tau)$ [24, 38, 42].

С использованием модели (2.87) определим среднее значение и дисперсию ошибки. Из (2.87) получим

$$m_x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \bullet(k) \bullet \int_0^{\infty} n_k(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_k) R_f^{(1)}(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k d\tau_i, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = & \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \bullet(k_1 + k_2) \bullet \int_0^{\infty} n_{k_1}(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_{k_1}) n_{k_2}(\tau_0, \tau_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{k_2}) \times \\ & \times [R_f^{(2)}(\tau_1, \dots, \tau_{k_1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{k_2}) - (R_f^{(1)}(\tau_1, \dots, \tau_{k_1}) \times \\ & \times R_f^{(2)}(\gamma_1, \dots, \gamma_{k_2}))] \prod_{i=1}^{k_1} d\tau_i \prod_{j=1}^{k_2} d\gamma_j, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $R_f^{(1)}(\tau_1, \dots, \tau_k) = M\{\prod_{i=1}^k f(t - \tau_i)\}$,

$$R_f^{(2)}(\tau_1, \dots, \tau_{k_1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{k_2}) = M\{\prod_{i=1}^{k_1} f(t - \tau_i) \prod_{j=1}^{k_2} f(t - \gamma_j)\}.$$

Импульсные характеристики $n_k(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_k)$, входящие в соотношения (3.1) и (3.2) зависят, как следует это из (2.62) от моментов m_ζ и σ_ζ^2 входного процесса $\zeta(t)$, действующего на входе релейного элемента блока формирования импульсов модифицированного ДЧИМ (рис. 2.14).

В связи с этим, прежде чем вычислить статистические характеристики процесса ошибки $x(t)$, следует определить эти моменты m_ζ и σ_ζ^2 . С этой целью на основе уравнений (2.72), (2.75) и (2.87), из (2.67) получим уравнение относительно $\zeta(t)$ в следующем виде:

$$\xi(t) = r_0 + \sum_{l=1}^{\infty} [r_l \otimes^l f(t)]. \quad (3.3)$$

Из (3.3) получаем

$$m_\xi = e_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \bullet(l) \bullet \int_0^{\infty} r_l(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_l) R_f^{(1)}(\tau_1, \dots, \tau_l) \prod_{i=1}^l d\tau_i, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2 = & \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \bullet(k_1 + k_2) \bullet \int_0^{\infty} r_{l_1}(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_{l_1}) \times \\ & \times r_{l_2}(\tau_0, \tau_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{l_2}) [R_f^{(2)}(\tau_1, \dots, \tau_{l_1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{l_2}) - \\ & - R_f^{(1)}(\tau_1, \dots, \tau_{l_1}) R_f^{(1)}(\gamma_1, \dots, \gamma_{l_2})] \prod_{i=1}^{k_1} d\tau_i \prod_{j=1}^{k_2} d\gamma_j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Полученные уравнения (3.4) и (3.5) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_\xi &= \varphi_1(m_\xi, \sigma_\xi^2), \\ \sigma_\xi^2 &= \varphi_2(m_\xi, \sigma_\xi^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Совместное решение этих уравнений определит среднее значение и дисперсию $\zeta(t)$. Тем самым модель (2.87) полностью определена и может быть использована для вычисления среднего значения m_x (3.1), дисперсии σ_x^2 (3.2) и других статистических характеристик ошибки $x(t)$.

Использование системы нелинейных алгебраических уравнений (3.6) для определения неизвестных моментов m_ζ и σ_ζ^2 с одной стороны требует вычисления статистических моментов входного процесса $f(t)$ и импульсных характеристик $r_l(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_l)$ более высокого порядка, а с другой – приводит к необходимости решения довольно сложной системы нелинейных алгебраических уравнений, чем определение статистических характеристик процесса ошибки системы $x(t)$.

В связи с этим возникает задача упрощенного определения первых двух моментов случайного процесса $\zeta(t)$.

3.2. Аналитико-экспериментальный метод вычисления моментов случайного процесса $\zeta(t)$

Рассмотрим блок формирования импульса БФИ (рис. 2.4) и выделим из него замкнутую систему, показанную на рис. 3.1, которую в дальнейшем назовем “внутренним” блоком системы. В состав данной системы (рис. 3.1) входит нелинейный элемент $\psi(\zeta)$ (рис. 2.14). На входе этой системы действует случайный процесс $\rho(t)$, являющийся выходным нормированным относительно порога Δ импульсного устройства ИУ сигналом фильтра Φ модифицированного ДЧИМ (рис. 3.2).

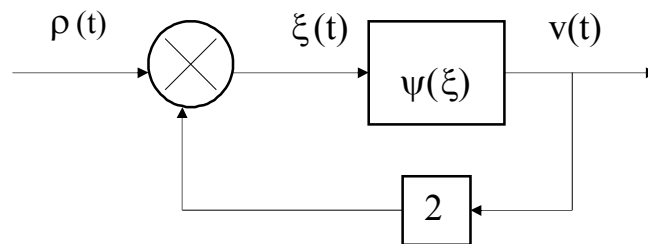


Рис. 3.1. Структурная схема "внутреннего" блока ДЧИМ

Согласно (рис. 3.1), уравнений (2.63) и (2.65), поведение “внутреннего” блока описывается уравнениями:

$$v(t) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \xi^l(t); \quad (3.7)$$

$$\xi(t) = \rho(t) + 2v(t); \quad (3.8)$$

$$\rho(t) = y(t)/\Delta. \quad (3.9)$$

Из анализа уравнений (3.7) и (3.8) следует, что для определения неизвестных моментов случайного процесса $\zeta(t)$ (m_ζ и σ_ζ^2) необходимо вычислить статистические характеристики $\rho(t)$.

В силу своеобразия работы модифицированного ДЧИМ (рис. 3.2) сигнал $\rho(t)$ не превышает порогового значения $y(t)$ импульсного устройства ИУ модулятора. Тогда первые два момента процесса $\rho(t)$ (3.9) удовлетворяют следующим условиям:

$$m_\rho \approx 0, \sigma_\rho^2 \leq 1. \quad (3.10)$$

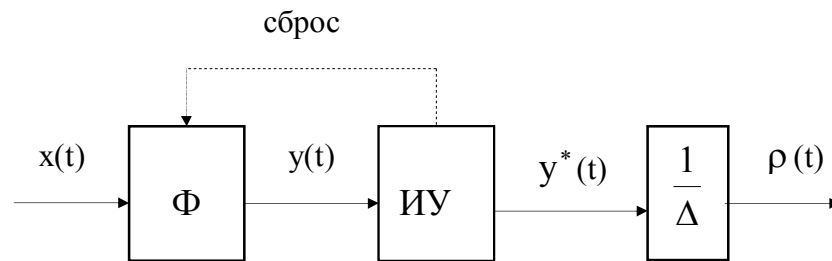


Рис. 3.2. Структура фильтра со сбросом

В связи с этим для определения m_ζ и σ_ζ^2 предлагается процедура, состоящая из двух этапов [14]. На первом этапе методом цифрового статистического моделирования (Монте-Карло) фильтра ДЧИМ оцениваются моменты m_ρ и σ_ρ^2 , а на втором этапе с использованием уравнений (3.7) и (3.8) вычисляются неизвестные моменты m_ζ и σ_ζ^2 .

3.2.1. Определение моментов случайного процесса $\rho(t)$ методом цифрового статистического моделирования

Для этого рассмотрим фильтр со сбросом модифицированного ДЧИМ (рис. 3.2). На входе фильтра со сбросом действует процесс ошибки системы $x(t)$, определяемый уравнением замыкания системы (2.19). Выходной сигнал системы $z(t)$ в силу гипотезы нормализации [42, 45] можно считать нормальным случайным процессом. На основе этого предположения процесс $x(t)$ можно считать случайным нормальным процессом с математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией

$R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau)$. Так как структура фильтра со сбросом задана (рис. 3.2), то задачу определения моментов случайного процесса $\rho(t)$ можно решить методом статистического цифрового моделирования (метод Монте-Карло).

Параметры метода Монте-Карло (T —длина реализации, Δt —шаг дискретизации) выбраны так, чтобы для заданного значения дисперсии и процесса ошибки $x(t)$ получить оценку дисперсии цифровой реализации σ_x^2 , лежащей в заданном доверительном интервале и доверительной вероятности, равной $P=0,95$.

Результаты статистического моделирования модифицированного блока сброса приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Результаты статистического моделирования блока сброса

m_x	0	0	0	0	0
σ_x^2	1	4	16	25	36
m_ρ	0,013	0,008	-0,016	0,003	0,002
σ_ρ^2	0,24	0,0266	0,295	0,32	0,34
m_x	5	5	5	5	5
σ_x^2	1	4	16	25	36
m_ρ	0,016	-0,08	0,09	0,07	-0,018
σ_ρ^2	0,18	0,21	0,22	0,237	0,38

Анализ табл.3.1 показывает, что первые два момента случайного процесса $\rho(t)$ удовлетворяет условию (3.10).

3.2.2. Аналитическое вычисление неизвестных моментов случайного процесса $\zeta(t)$

Рассмотрим поведение унифицированного блока системы, описываемого уравнениями:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (m_\xi, \sigma_\xi^2) \xi^k ; \quad (3.11)$$

$$\xi(t) = \rho(t) + 2u(t), \quad (3.12)$$

где коэффициенты d_k определяются из соотношения (2.36).

Согласно уравнения (2.39), имеем

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(m_{\xi}, \sigma_{\xi}^2) \rho^k, \quad (3.13)$$

Уравнения (3.11)–(3.12) позволяют получить следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно m_{ξ} и σ_{ξ}^2 :

$$\begin{aligned} m_{\xi} &= \Psi_3(d_k(m_{\xi}, \sigma_{\xi}^2), e_k(m_{\xi}, \sigma_{\xi}^2), m_{\rho}, \sigma_{\rho}^2), \\ \sigma_{\xi}^2 &= \Psi_4(d_k(m_{\xi}, \sigma_{\xi}^2), e_k(m_{\xi}, \sigma_{\xi}^2), m_{\rho}, \sigma_{\rho}^2), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где m_{ρ} и σ_{ρ}^2 определены на первом этапе процедуры вычисления статистических характеристик унифицированного блока.

Из сравнения систем уравнений (3.14) и (3.6) следует, что для решения (3.14) отпадает необходимость вычисления импульсных характеристик $r_1(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_l)$ и достаточно знать первые два момента случайного процесса $\rho(t)$. Блок-схема вычисления m_{ξ} и σ_{ξ}^2 по известным значениям моментов m_{ρ} и σ_{ρ}^2 приведена на рис. 3.3.

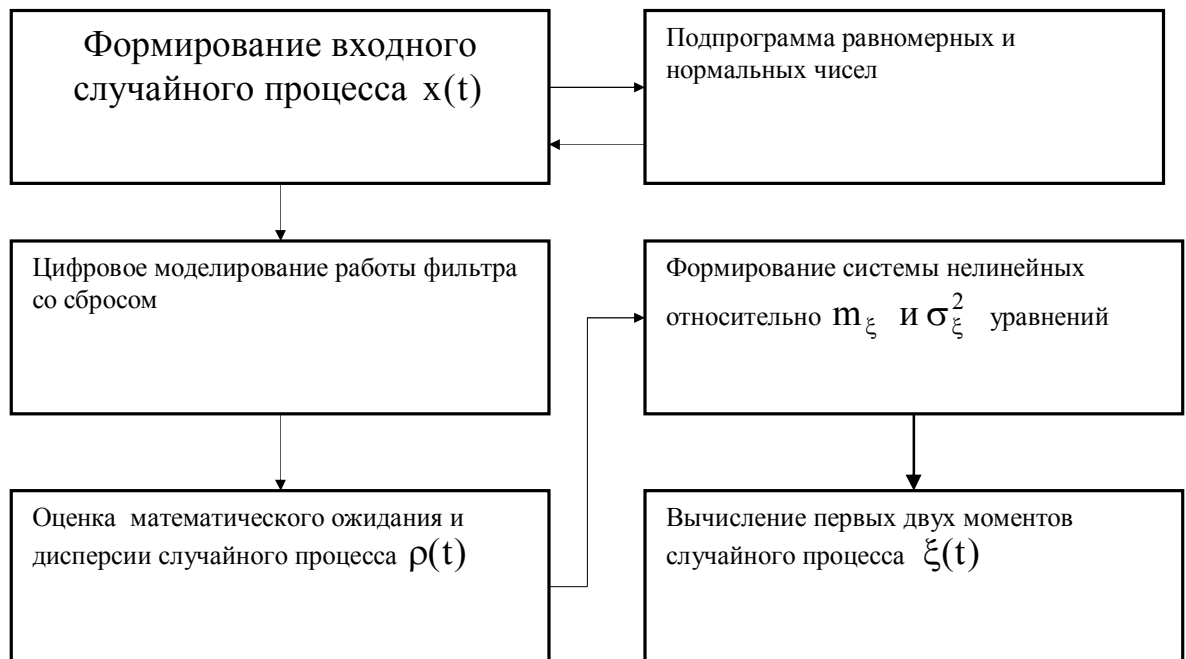


Рис. 3.3. Блок-схема алгоритма экспериментально-аналитического определения статистических характеристик процессов $\rho(t)$ и $\xi(t)$

Результаты вычислений моментов m_{ξ} и σ_{ξ}^2 по соотношениям (3.14) приведены в табл. 3.2.

После определения m_{ξ} и σ_{ξ}^2 можно провести статистический анализ системы с модифицированным ДЧИМ по выражениям (3.1) и (3.2). Однако

непосредственное использование этих выражений, с одной стороны, требует довольно большого объема информации о статистических характеристиках входного процесса $f(t)$, а с другой – приводит к необходимости решения сложных систем нелинейных алгебраических уравнений.

Таблица 3.2

Результаты аналитического вычисления m_ζ и σ_ζ^2

D_ρ	0,14	0,16	0,18	0,2	0,22
m_ξ	-0,545	-0,547	-0,41	-0,12	0,201
σ_ξ^2	1,04	1,236	1,408	1,612	1,754
D_ρ	0,24	0,26	0,3	0,4	0,5
m_ξ	0,301	0,352	0,431	0,521	0,558
σ_ξ^2	1,833	2,053	2,383	3,141	3,163

В связи с этим в работе строятся линеаризованные модели системы в виде

$$x^0(t) + m_x = \int_0^\infty l_0^{(i)}(\tau_0, \tau_m, \tau) m_f d\tau + \int_0^\infty l_1^{(i)}(\tau_0, \tau_m, \tau) f^0(t - \tau) d\tau, \quad (3.15)$$

где m_f и $f(t)$ – соответственно математическое ожидание и центрированная составляющая случайного входного процесса $f(t)$;

$l_0^{(i)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ и $l_1^{(i)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ – соответственно импульсные характеристики по постоянной и центрированной составляющей модели (3.15); i – индекс способ линеаризации.

3.3. Статистически линеаризованные модели нелинейных динамических систем управления объектами с запаздыванием

Рассматривается система с модифицированным ДЧИМ, показанная на рис. 2.12. Уравнение этой системы может быть записано двояко в явном виде

$$x(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [n_r \otimes^r f(t)], \quad (3.16)$$

или в неявном виде:

$$x(t) = f(t) - z(t); \quad (3.17)$$

$$z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [w_r \otimes^r v(t)]; \quad (3.18)$$

$$v(t) = m_0 + \sum_{r=1}^{\infty} [m_r \otimes^r x(t)]. \quad (3.19)$$

Разработку линеаризованных моделей системы с модифицированным ДЧИМ можно провести принципиально различными путями [9, 42, 45].

В одних случаях за основу линеаризации может быть взято уравнение (3.16), в других – (3.17) – (3.19). Далее в обоих случаях линеаризация может быть проведена либо путем простого отбрасывания высших членов в соответствующих рядах, либо путем определения их статистически оптимальных линейных эквивалентов.

Рассмотрим подробнее способы построения линейных моделей системы.

3.3.1. Раздельная линеаризация модулятора и объекта с запаздыванием

В данном случае за основу берутся уравнения (3.17) – (3.19). Для получения их линеаризованных моделей отбрасываются члены выше первого порядка в рядах (3.18) и (3.19). Уравнения (3.17) – (3.19) примут вид

$$x(t) = f(t) - z(t); \quad (3.20)$$

$$z(t) = \int_0^{\infty} \tilde{w}(h, \tau) v(t - \tau) d\tau; \quad (3.21)$$

$$v(t) = \int_0^{\infty} m_0(\tau_m, \tau) d\tau + \int_0^{\infty} m_1(\tau_m, \tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.22)$$

Уравнения (3.20) – (3.22) представимы в следующем виде:

$$x^0(t) + m_x = \int_0^{\infty} l_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau + \int_0^{\infty} l_1^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau) f^0(t - \tau) d\tau, \quad (3.23)$$

где импульсные характеристики $l_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ и $l_1^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ в терминах преобразования Лапласа определяются из соотношений

$$L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, p) = \frac{1 - \frac{1}{m_f} \tilde{W}_1(\tau_{0m}, 0) M_0(\tau_m, 0)}{1 + \tilde{W}_1(\tau_0, 0) M_1(\tau_m, 0)}, \quad (3.24)$$

$$L_1^{(1)}(\tau_0, \tau_m, p) = \frac{1}{1 + \tilde{W}_1(\tau_0, p) M_1(\tau_m, p)}. \quad (3.25)$$

Смысл данного способа линеаризации системы заключается в том, что вольтерровские модели модифицированного ДЧИМ и нелинейного объекта с запаздыванием по отдельности заменяются эквивалентными линейными звеньями с передаточными функциями, соответственно $M_1(\tau_m, p)$ и $\tilde{W}_1(\tau_0, p)$, после чего система замыкается линейной обратной связью, и ее свойства определяются передаточными функциями (3.24) и (3.25).

Для формирования модели (3.25) следует поступить следующим образом:

1. Вычислить коэффициенты b_k по формулам (П.3) – (П.6).
2. Вычислить коэффициенты d_k по формулам (2.12) – (2.13).
3. Найти коэффициент e_0 из уравнения

$$e_0 + \sum_{i=0}^N 2^i d_i e_0^i = 0. \quad (3.26)$$

4. Найти коэффициент e_1 по формуле

$$e_1 = \frac{\sum_{i=1}^N c_i^1 2^{i-1} d_i e_0^{i-1}}{1 - \sum_{i=0}^N c_i^1 2^i e_0^{i-1}}. \quad (3.27)$$

5. Сформировать ядро первого порядка вольтерровской модели ДЧИМ по выражениям (2.29), (2.30).
6. Сформировать требуемые выражения модели (3.23) по (3.24) и (3.25).

3.3.2. Линеаризация прямой цепи системы

Для этого рассмотрим уравнения (3.20) – (3.22). Объединяя (3.21) и (3.22), перепишем системы в виде

$$x(t) = f(t) - z(t), \quad (3.28)$$

$$z(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [\theta_r^r \otimes x(t)], \quad (3.29)$$

Отбрасывая в выражении (3.29) члены высшего порядка, получим

$$x(t) = f(t) - z(t), \quad (3.30)$$

$$z(t) = \int_0^{\infty} \theta_0(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau + \int_0^{\infty} \theta_1(\tau_0, \tau_m, \tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.31)$$

Уравнения (3.30) – (3.31) приведем к виду

$$x^0(t) + m_x = \int_0^{\infty} l_0^{(2)}(\tau_0, \tau_m, \tau) m_f d\tau + \int_0^{\infty} l_1^{(2)}(\tau_0, \tau_m, \tau) f^0(t - \tau) d\tau, \quad (3.32)$$

где

$$L_0^{(2)}(\tau_0, \tau_m, 0) = \frac{1 - \frac{1}{\theta_0(\tau_0, \tau_m, 0)}}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, 0)}, \quad (3.33)$$

$$L_1^{(2)}(\tau_0, \tau_m, p) = \frac{1}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, p)}. \quad (3.34)$$

Согласно (2.81) имеем

$$\theta_1(\tau_0, \tau_m, 0) = \sum_{r=1}^N m_0^r \tilde{W}_r(\tau_m, 0, \bullet(r)\bullet, 0); \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(\tau_0, \tau_m, p) = M_1(\tau_m, p) \sum_{r=0}^3 m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, 0, p) + \\ + \tilde{W}_r(\tau_0, p, \bullet(r)\bullet, 0, 0) + \tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, p, 0)], \end{aligned} \quad (3.36)$$

где $M_1(\tau_m, p)$ определяется выражением (2.48).

Методика формирования модели (3.32) состоит из следующих этапов:

1. Выполнить расчеты первых пяти пунктов методики первого способа.
2. Сформировать ядра оператора прямой цепи по (3.35) и (3.36).
3. Получить изображения ядер требуемой модели (3.32) по формулам (3.33) и (3.34).

В отличие от первого, смысл данного способа заключается в том, что вначале объединяются операторы модулятора и объекта управления и формируется вольтерровская модель разомкнутой системы, которая затем линеаризуется, и только после этого замыкается система.

3.3.3. Линеаризация замкнутой системы в целом

За исходное уравнение системы примем явное описание системы (3.16).

В уравнении математической модели замкнутой системы (3.16)

отбрасывая члены выше первого порядка получим линейную модель системы в следующем виде:

$$x^0(t) + m_x = \int_0^{\infty} l_0^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau) m_f d\tau + \int_0^{\infty} l_1^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau) f^0(t - \tau) d\tau, \quad (3.37)$$

где

$$L_0^{(3)}(\tau_0, \tau_m, 0) = N_1(\tau_0, \tau_m, 0), \quad (3.38)$$

$$L_1^{(3)}(\tau_0, \tau_m, p) = N_1(\tau_0, \tau_m, p). \quad (3.39)$$

Согласно (2.148), выражение для ядер первого порядка модели (2.87) получим в следующем виде:

$$N_1(\tau_0, \tau_m, p) = \frac{1}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, p)}, \quad (3.40)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(\tau_0, \tau_m, p) = M_1(\tau_m, p) \sum_{r=0}^3 m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, 0, p) + \\ + \tilde{W}_r(\tau_0, p, \bullet(r)\bullet, 0, 0) + \tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, p, 0)], \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $M_1(\tau_m, p)$ – определяется выражением (2.76)

Методика формирования модели (3.37) сводится к следующим этапам:

1. Формировать вольтерровскую модель модифицированного ДЧИМ, для чего выполнить операции первых 6 пунктов общего алгоритма 2.4.
2. Найти изображение ядер первого порядка ряда (2.30).
3. Сформировать ядро первого члена модели системы по (2.31).

В данном случае строится вольтерровская модель системы в целом (2.37) только после этого она линеаризуется.

3.3.4. Оптимальная линеаризация системы

За исходное уравнение системы также примем уравнение (3.16). В этом случае для построения линейной модели системы не просто отбрасываются высшие члены в (3.16), а подбираются весовые функции $l_0^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ и $l_1^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ линейной статистической модели так, чтобы выход линейного звена (3.15) приближался к выходу нелинейного звена (3.16) в смысле принятого критерия

$$I = M\{F(x - \hat{x})\} \rightarrow \min.$$

В частности, таким критерием может быть квадратичный критерий

$$I_2 = M\{F(x - \hat{x})^2\} \rightarrow \min. \quad (3.42)$$

Следовательно, весовые функции $l_0^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ и $l_1^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$ линейного звена (3.15), эквивалентного исходному нелинейному звену (3.16), могут быть найдены из условия

$$I_2 = \min_{l_0^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau), l_1^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau)} M\{F(x - \hat{x})^2\}. \quad (3.43)$$

Условие (3.43) приводит к уравнениям следующего вида:

$$\int_0^\infty l_0^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau) m_f^2 d\tau = S_{f_1}, \quad (3.44)$$

$$\int_0^{\infty} l_0^{(4)}(\tau_0, \tau_m, \tau) R(\lambda - \tau) d\tau = S_{f_2}(\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad (3.45)$$

где

$$S_{f_1} = m_f \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \bullet(r) \bullet \int_0^{\infty} n_r(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_r) M\left\{ \prod_{i=1}^k f(t - \tau_i) \right\} \prod_{i=1}^r d\tau_i, \quad (3.46)$$

$$S_{f_2} = \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \bullet(r) \bullet \int_0^{\infty} n_r(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_r) M\{f^0(t - \lambda) \prod_{i=1}^r f(t - \tau_i)\} \prod_{i=1}^r d\tau_i. \quad (3.47)$$

Изображения ядер модели (3.45) определяются в соответствии со следующей методикой:

1. Найти ядра математической модели системы согласно общему алгоритму, приведенному в 2.4.

2. Найти передаточные функции модели (3.15) как решение (3.44) – (3.45).

Таким образом, в данном способе линейная модель системы строится как линейный статистический эквивалент ее вольтерровской модели (2.54).

3.4. Исследование статистически линеаризованных моделей нелинейных динамических систем с запаздыванием

Рассмотрим свойства и особенности линейных моделей, полученных описанными в 3.2 способами линеаризации.

Раздельная линеаризация МИЧИМ и объекта с запаздыванием. Выражение (3.24) с учетом (2.41) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, 0) &= \lim_{p \rightarrow 0} (L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{m_f} \tilde{W}_1(\tau_0, p) m_0}{1 + \tilde{W}_1(\tau_0, p) M_1(\tau_m, p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p[1 - \frac{1}{m_f} \tilde{W}_1(\tau_0, p) m_0]}{p + e_1 \frac{k_u}{\Delta} \tilde{W}(\tau_0, p)} = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

С учетом (3.48) уравнение (3.23) примет следующий вид:

$$x^0(t) = \int_0^{\infty} l_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau) f^0(t - \tau) d\tau. \quad (3.49)$$

Таким образом, свойства линейной модели системы, полученной первым способом линеаризации, определяются центрированной составляющей входного процесса $f(t)$ и весовой функцией $l_1^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau)$.

Анализ выражения (3.48) показывает, что при данном способе линеаризации размыкаются обратные связи модифицированного блока

сброса по сигналам $\mu(t)$ и $\eta(t)$ и этот способ совпадает с обычной статистической линеаризацией.

При таком подходе не учитываются нелинейности МИЧИМ и объекта, свойства преобразований случайного процесса замкнутой системы, которые приводят к тому, что приближенная модель (3.48) даст не только неверный количественный результат, но и внесет принципиальные ошибки.

Линеаризация прямой цепи. Выражение, определяющее $l_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, 0)$ с учетом (3.35) и (3.36) представим в следующем виде:

$$L_0^{(2)}(\tau_0, \tau_m, 0) = \lim_{p \rightarrow 0} L_0^{(2)}(\tau_0, \tau_m, p) = \\ p \left[1 - \frac{1}{m_f} \sum_{r=1}^{\infty} e_0^r \tilde{W}_r(\tau_m, 0, \bullet(r)\bullet, 0) \right] \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + \frac{e_1}{\Delta} k_u \sum_{r=1}^3 m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, 0, p) + \dots + \tilde{W}_r(\tau_0, p, 0, \bullet(r)\bullet, 0)]}{p + \frac{e_1}{\Delta} k_u \sum_{r=1}^3 m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, 0, p) + \dots + \tilde{W}_r(\tau_0, p, 0, \bullet(r)\bullet, 0)]} .$$

На основе полученного свойства (3.49) можно заключить, что постоянная составляющая приближенной модели (3.37) m_x равна нулю. Тогда уравнение (3.49) примет следующий вид:

$$x^0(t) = \int_0^{\infty} l_1^{(2)}(\tau_0, \tau_m, \tau) f^0(t - \tau) d\tau . \quad (3.50)$$

В случае равенства количества членов, соответствующих рядов (3.35) и (3.36) единице (т.е. $r=1$), изображение (3.34) совпадает с (3.25).

Следовательно, в первом приближении линейная модель, полученная вторым способом, совпадает с (3.23).

Теперь пусть $r=3$. Тогда изображение ядра (3.34) с учетом (3.36) примет вид

$$L_1^{(2)}(\tau_0, \tau_m, p) = \frac{1}{1 + M_1(\tau_m, p) [\tilde{W}_1(\tau_0, p) + 2e_0 \tilde{W}_2(\tau_0, p, 0) + 3\tilde{W}_3(\tau_0, p, 0, 0)]} .$$

Передаточная функция $L_1^{(2)}(\tau_0, \tau_m, p)$ несет в себе, согласно (3.51), информацию о нелинейных членах в разложении (3.36). Поэтому линейная система (3.50), эквивалентная системе с МИЧИМ, учитывает свойства нелинейного преобразования случайного процесса непрерывной частью системы (рис. 2.7). Как видно из (3.51), и в данном способе, не учитываются свойства нелинейного преобразования случайного процесса модулятором и системой с обратной связью, т.к. здесь также используется принцип, близкий к классической линеаризации, заключающийся в первоначальной линеаризации разомкнутого оператора прямой цепи с последующим замыканием.

Линеаризация системы в целом. Определим $N_1(\tau_0, \tau_m, h, 0)$ с учетом (3.40) и (3.41) следующим образом:

$$N_1(\tau_0, \tau_m, 0) = \lim_{p \rightarrow 0} N_1(\tau_0, \tau_m, p) = \frac{p}{p + \frac{e_1}{\Delta} k_u \sum_{r=0}^{\infty} m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r) \bullet, 0, p) + \tilde{W}_r(\tau_0, p, 0, \bullet(r) \bullet, 0)]}. \quad (3.52)$$

Тогда, согласно (3.39)

$$L_0^{(3)}(\tau_0, \tau_m, 0) = 0. \quad (3.53)$$

Таким образом, как и в предыдущих способах линеаризации, модель системы с МИЧИМ имеет вид

$$x^0(t) = \int_0^{\infty} l_0^{(3)}(\tau_0, \tau_m, \tau) f^0(t - \tau) d\tau. \quad (3.54)$$

Следует заметить, что выражение определяющее $L_1^{(3)}(\tau_0, \tau_m, p)$, полностью совпадает с (3.34), т.е. результат этого способа будет всегда совпадать с результатами второго способа.

Оптимальная линеаризация системы. Первые приближения S_{f_1} и $S_{f_2}(\lambda)$ имеют вид

$$S_{f_1}^{(1)} = m_f^2 \int_0^{\infty} n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau, \\ S_{f_2}^{(1)} = \int_0^{\infty} n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) R_f(\lambda - \tau) d\tau.$$

В этом случае уравнения (3.44) и (3.45) будут выглядеть следующим образом:

$$\int_0^{\infty} l_0^{(4)1}(\tau_0, \tau_m, \tau) m_f^2 d\tau = m_f^2 \int_0^{\infty} n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau, \\ \int_0^{\infty} l_1^{(4)1}(\tau_0, \tau_m, \tau) R_f(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) R_f(\lambda - \tau) d\tau.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^{\infty} l_0^{(4)1}(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau, \quad (3.55)$$

$$l_1^{(4)1}(\tau_0, \tau_m, \tau) = n_1(\tau_0, \tau_m, \tau). \quad (3.56)$$

Выражения (3.55) и (3.56) совпадают с (3.38) и (3.39). Следовательно, в первом приближении получаем из (3.44) и (3.45) результат, совпадающий с результатом третьего способа.

Рассмотрим вторые приближения S_{f_1} и $S_{f_2}(\lambda)$:

$$S_{f_1}^{(2)} = m_f^2 \int_0^\infty n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) \times \\ \times [R_f(\tau_1 - \tau_2) m_f + m_f^3] d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.57)$$

$$S_{f_2}^{(2)}(\lambda) = \int_0^\infty n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) R_f(\lambda - \tau) d\tau + m_f \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) \times \\ \times [R_f(\lambda - \tau_1) + R_f(\lambda - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.58)$$

Подставляя (3.57) и (3.58) в уравнения (3.44) и (3.45) и решая их получим

$$\int_0^\infty l_0^{(4)2}(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau = \int_0^\infty l_1^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) \times \\ \times \left[\frac{1}{m_f} R_f(\tau_1 - \tau_2) + m_f \right] d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.59)$$

$$l_1^{(4)2}(\tau_0, \tau_m, \tau) = l_1^{(1)}(\tau_0, \tau_m, \tau) + m_f \left[\int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) d\tau_2 \right]. \quad (3.60)$$

В приложении 1 показано, что при $R_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}$

$$\frac{1}{m_f} \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) R_f(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ = \frac{\sigma_f^2}{m_f} [N_2(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha) + N_2(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha)]. \quad (3.61)$$

Подставляя (3.61) в (3.58) получим

$$L_0^{(4)2}(\tau_0, \tau_m, 0) = L_0^{(4)1}(\tau_0, \tau_m, 0) + \frac{\sigma_f^2}{m_f} [N_2(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha) + N_2(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha)], \\ L_1^{(4)2}(\tau_0, \tau_m, p) = L_1^{(4)1}(\tau_0, \tau_m, p) + m_f [N_2(\tau_0, \tau_m, 0, p) + N_2(\tau_0, \tau_m, p, 0)]. \quad (3.62)$$

Рассмотрим третье приближение S_{f_1} и $S_{f_2}(\lambda)$:

$$S_{f_1} = m_f^2 \int_0^\infty n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) [m_f^3 + R_f(\tau_1 - \tau_2) m_f + m_f^3] \times$$

$$\times d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty n_3(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \{m_f^4 + m_f^3 [R_f(\tau_1 - \tau_2) + R_f(\tau_3 - \tau_2) + R_f(\tau_3 - \tau_1)]\} \prod_{i=1}^3 d\tau_i ; \quad (3.64)$$

$$S_{f_2} = \int_0^\infty n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) R_f(\lambda - \tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) m_f [R_f(\lambda - \tau_1) + R_f(\lambda - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty n_3(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \{m_f^2 [R_f(\lambda - \tau_1) + R_f(\lambda - \tau_2) + R_f(\lambda - \tau_3)] + R_f(\tau_3 - \tau_2) R_f(\lambda - \tau_2) + R_f(\lambda - \tau_1) R_f(\tau_3 - \tau_2) + R_f(\lambda - \tau_2) R_f(\tau_2 - \tau_1) + R_f(\lambda - \tau_3) R_f(\tau_3 - \tau_1)\} \prod_{i=1}^3 d\tau_i . \quad (3.65)$$

Подставляя (3.64) и (3.65) в уравнения (3.44) и (3.45) получим

$$\int_0^\infty l_0^{(4)3}(\tau_0, \tau_m, \tau) m_f^2 d\tau = m_f^2 \int_0^\infty n_1(\tau_0, \tau_m, \tau) d\tau + L_0^{(4)2}(\tau_0, \tau_m, \tau) + \int_0^\infty \int_0^\infty n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) [m_f^3 + R_f(\tau_2 - \tau_1)] d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty n_3(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \{m_f^4 + m_f^2 [R_f(\tau_2 - \tau_1) + R_f(\tau_3 - \tau_2) + R_f(\tau_3 - \tau_1)]\} \prod_{i=1}^3 d\tau_i , \quad (3.66)$$

$$l_1^{(4)3}(\tau_0, \tau_m, \tau) = l_1^{(4)2}(\tau_0, \tau_m, \tau) + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty n_3(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \{m_f [R_f(\lambda - \tau_1) + R_f(\lambda - \tau_2) + R_f(\lambda - \tau_3)] + R_f(\lambda - \tau_2) R_f(\tau_3 - \tau_2) + R_f(\lambda - \tau_1) R_f(\tau_3 - \tau_2) + R_f(\lambda - \tau_2) R_f(\tau_2 - \tau_1) + R_f(\lambda - \tau_3) R_f(\tau_3 - \tau_1)\} \prod_{i=1}^3 d\tau_i . \quad (3.67)$$

На основании полученных в приложении 2 выражений (П2.9) – (П2.11), получим для передаточных функций линеаризованных моделей системы следующие выражения:

$$L_0^{(4)3}(\tau_0, \tau_m, 0) = N_1(\tau_0, \tau_m, 0) + \frac{\sigma_f^2}{m_f} [N_2(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha) + N_2(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha)] + 2 \frac{\sigma_f^2}{m_f} [N_3(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha, 0) + N_3(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha, 0) + N_3(\tau_0, \tau_m, -\alpha, 0, \alpha) + N_3(\tau_0, \tau_m, \alpha, 0, -\alpha) + N_3(\tau_0, \tau_m, 0, -\alpha, \alpha) + N_3(\tau_0, \tau_m, 0, \alpha, -\alpha)] , \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
L_0^{(4)3}(\tau_0, \tau_m, p) = & N_1(\tau_0, \tau_m, p) + m_f [N_2(\tau_0, \tau_m, p, 0) + N_2(\tau_0, \tau_m, 0, p)] + \\
& + m_f^2 [N_3(\tau_0, \tau_m, 0, 0, p) + N_3(\tau_0, \tau_m, 0, p, 0) + N_3(\tau_0, \tau_m, p, 0, 0)] + \\
& + \sigma_f^2 [N_3(\tau_0, \tau_m, p, -\alpha, \alpha) + N_3(\tau_0, \tau_m, p, \alpha, -\alpha) + N_3(\tau_0, \tau_m, -\alpha, p, \alpha) + \\
& + N_3(\tau_0, \tau_m, \alpha, p, \alpha) + N_3(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha, p) + N_3(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha, p)]. \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую составляющую передаточной функции $L_0^{(4)3}(\tau_0, \tau_m, 0)$ (3.68). Согласно выражению (3.52), $N_1(\tau_0, \tau_m, 0) = 0$.

Выражение для изображения $N_2(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha)$ с учетом (2.99) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
N_2(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha) &= \lim_{p_1 \rightarrow \alpha, p_2 \rightarrow -\alpha} N_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) = \\
&= \lim_{p_1 \rightarrow \alpha, p_2 \rightarrow -\alpha} \frac{N_1(\tau_0, \tau_m, p_1) N_1(\tau_0, \tau_m, p_2) \theta_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2)}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, p_1 + p_2)}. \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Согласно (3.41) выражение (3.70) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
N_2(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha) &= \lim_{p_1 \rightarrow \alpha, p_2 \rightarrow -\alpha} (p_1 + p_2) \prod_{i=1}^2 N_1(\tau_0, \tau_m, p_i) \theta_2(\tau_0, \tau_m, p_1, p_2) \times \\
&\times \frac{1}{(p_1 + p_2) + \frac{e_1}{\Delta} k_u \sum_{r=0}^{\infty} m_0^{r-1} [\tilde{W}_r(\tau_0, 0, \bullet(r)\bullet, 0, p) + \tilde{W}_r(\tau_0, p, 0, \bullet(r)\bullet, 0)]} = 0
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что все остальные слагаемые передаточной функции $L_0^{(4)3}(\tau_0, \tau_m, 0)$ равны нулю.

Следовательно, получим $L_0^{(4)3}(\tau_0, \tau_m, 0) = 0$.

Аналогично могут быть получены приближения любого высшего ранга, но и отсюда видно, что в общем случае импульсные характеристики модели (3.45) несут информации о нелинейных членах в разложении (2.54). Поэтому линейная система (3.45), эквивалентная в статистическом смысле (3.43) вольтерровской модели системы с МИЧИМ, учитывает свойства нелинейного преобразования процесса модифицированной интегральной частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить основные точностные характеристики системы с динамической частотно-импульсной модуляцией.

2. Написать формулу вычисления для статистических характеристик процесса ошибки системы с динамической частотно-импульсной модуляцией.
3. Обосновать применение аналитико-экспериментального подхода для упрощения оценки статистических характеристик процесса ошибки системы.
4. Основные предпосылки и положения, позволяющие оценить статистические моменты случайного процесса $\zeta(t)$.
5. Определение моментов случайного процесса $\rho(t)$ методом цифрового статистического моделирования.
6. Выбор и обоснование параметров метода Монте-Карло (шага дискретизации и количества отсчетов).
7. Написать и вывести уравнения метода аналитического вычисления математического ожидания m_ζ и дисперсии σ_ζ^2 сигнала $\zeta(t)$.
8. Разработать блок-схему и написать машинную программу алгоритма экспериментально-аналитического метода определения статистических характеристик процессов $\rho(t)$ и $\xi(t)$.
9. Преимущества и недостатки статистически линеаризованных моделей нелинейной динамической системы с запаздыванием.
10. Провести сравнительный анализ (недостатки и преимущества) основных классических методов статистической линеаризации систем.
11. Получить уравнения нелинейной системы при отдельной линеаризации модифицированного ДЧИМ и объекта с запаздыванием.
12. Получить выражения для процесса ошибки при линеаризации прямой цепи системы с запаздыванием.
13. Получить выражения для статистически линеаризованных моделей при линеаризации замкнутой системы с запаздыванием в целом.
13. Получить выражения для статистически линеаризованных моделей при оптимальной линеаризации замкнутой системы с запаздыванием в целом.
14. Провести сравнительный анализ (недостатки и преимущества) статистически линеаризованных моделей системы.
15. Разработать алгоритмы для оценки статистических характеристик системы с использованием статистически линеаризованных моделей.

4. СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Приведена математическая формулировка задачи параметрического синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием. Разработана процедура параметрического синтеза на основе преобразования исходной задачи к новой задаче, полученной исключением фазовых переменных. На основе разработанных методов решены задачи параметрического синтеза статистически оптимальных динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием из условия минимума среднеквадратичной ошибки. Приведены вычислительные алгоритмы синтеза данного класса систем управления объектами с запаздыванием.

4.1. Общая схема синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием

Рассматривается ДЧИСАУ объектами с запаздыванием, структурная схема которой приведена на рис. 2.1.

Содержательное описание преобразований, осуществляющихся в системе, и математическое описание ДЧИСАУ объектами с запаздыванием подробно приведены во втором разделе.

Эффективность функционирования системы (рис. 2.1) характеризуется статистическим критерием [1, 6, 40]:

$$I = MQ(x) \quad , \quad (4.1)$$

где M —знак математического ожидания; $Q(x)$ — заданная функция от ошибки.

Этот критерий охватывает многие известные виды критериев качества [2]. Например, если

$$Q(x) = x^2, \quad (4.2)$$

то получим среднеквадратичное отклонение ошибки. Если

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & d_1 \leq x \leq d_2 \\ 1, & x > d_2, x < d_1 \end{cases}, \quad (4.3)$$

то получим вероятность выхода ошибки из заданных допусков (d_1, d_2)

Как видно из вышеприведенного описания модулятора, применяемого для управления объектами с запаздыванием (2.1)–(2.8), он характеризуется последовательностью своих параметров $c_1, \dots, c_n$. Например, в случае модифицированного ИЧИМ (2.7), введя обозначения

$$\Delta = c_1, A = c_2, \gamma = c_3, k_u = c_4, \tau_m = c_5,$$

получим, что модифицированный интегральный частотно-импульсный модулятор с прямоугольными импульсами характеризуется вектором, состоящим из пяти параметров:

$$\vec{c} = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]^T. \quad (4.4)$$

Аналогично модифицированный Σ -ЧИМ характеризуется вектором, компонентами которого являются шесть параметров:

$$\vec{c} = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]^T. \quad (4.5)$$

где $\Delta = c_1, A = c_2, \gamma = c_3, c_v = c_4, p_v = c_5, \tau_m = c_6$.

В случае линейного фильтра (2.4) модифицированный ДЧИМ характеризуется $(1 + l_1^0 + 3)$ -мерным вектором:

$$\vec{c} = [c_1, c_2, \dots, c_{(1+l_1^0+3)}]^T. \quad (4.6)$$

В нелинейном случае ДЧИМ также характеризуется вектором из постоянных параметров

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T, \quad (4.7)$$

размерность которого определяется числом используемых членов ряда Вольтерра (2.54). Эти параметры могут выбираться из допустимой области, задаваемой в общем случае в виде

$$Mp(x(t)) \leq 0. \quad (4.8)$$

4.2. Параметрический синтез динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием

В связи с вышеприведенной формализацией процесса функционирования автоматической системы с динамической частотно-импульсной модуляцией, используемой при управлении объектами с запаздыванием (рис. 1.1), математическая постановка задачи ее параметрического синтеза примет вид: следует определить вектор постоянных параметров $\vec{c}$ (4.5)–(4.7) из условия

минимума критерия качества вида (4.1) при соответствующих ограничениях (2.7) – (2.14) и (4.8).

Задача параметрического синтеза ДЧИСУ объектами с запаздыванием (рис. .1), содержательное описание которой дано в 2.1, математически формулируется следующим образом [2, 39]:

$$MQ[x(t)] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$Mp(x(t)) \leq 0, \quad (4.9)$$

$$x(t) = f(t) - z(t); \quad (4.10)$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \otimes x(t); \quad (4.11)$$

$$y^*(t) = \sum_n \lambda_n \delta(t - t_n); \quad (4.12)$$

$$y(t_n - 0) = W[\vec{c}, x(t), t_{n-1} + \tau_0 \leq t \leq t_n - 0] = \lambda_n \Delta; \quad (4.13)$$

$$\lambda_n = \text{sign } y(t_n - 0); \quad (4.14)$$

$$y(t_n + 0) = 0, \quad (4.15)$$

где $x(t)$ —сигнал ошибки системы, $f(t)$ — входной стационарный случайный процесс системы, $z(t)$ —выходной сигнал непрерывной части, в состав которой помимо управляемого объекта с запаздыванием входит формозадающий фильтр, $\tilde{w}_k(\tau_m, t_1, \dots, t_k)$ —импульсные характеристики вольтерровского ряда (2.48), $y^*(t)$ —сигнал на выходе идеального ДЧИМ, Δ – порог срабатывания импульсного устройства, $y(t)$ – выходной сигнал фильтра в ДЧИМ.

Суть предлагаемой в работе методики решения задачи параметрического синтеза (4.9) – (4.15) заключается в осуществлении преобразования исходной задачи к задаче поиска экстремума функции многих переменных [17, 18]:

$$F(\vec{c}) \rightarrow \min, \text{ при } P(\vec{c}) \leq 0 \quad (4.16)$$

путем исключения из уравнений (4.9)-(4.15) переменных x , y , z . Такое преобразование может быть осуществлено разными путями. В работе предлагается три подхода к преобразованию, каждый из которых, с одной стороны, непосредственно решает исходную задачу, а с другой стороны, каждый предыдущий путь служит основанием для последующего, более рационального с практической точки зрения. Процедура исключения переменных x , y , z из математической модели исходной системы содержит принципиальные трудности. Как видно из уравнений (4.9)–(4.15), математическое описание системы содержит неявное функциональное соотношение (4.13), причем уравнения (3.80) и (3.82) связаны между собой через это функциональное соотношение. В моменты времени, когда удовлетворяется соотношение (4.13), изменяется правая часть уравнения(3.80) (на входе управляемого объекта появляется импульс) и

силу уравнения (3.85) - осуществляется сброс. В связи с этим система уравнений (3.79) – (3.85) не допускает непосредственного решения, а, следовательно, невозможно исключить переменные x , y , z из этих уравнений для преобразования исходной задачи к виду (3.86). Описанные трудности связаны с особенностями режима функционирования фильтра в ДЧИМ. Этот режим характеризуется наличием операции сброса, которая заключается в обнулении через конечные моменты времени всех накопителей энергии в фильтре с помощью сигналов неявной обратной связи от импульсного устройства, и после этого принудительном удерживании сигнала ошибки системы в течение времени запаздывания объекта в нулевом состоянии.

Предлагаемый в работе первый путь сводится к тому, чтобы найти такую структуру частотно-импульсной системы, которая, с одной стороны, точно воспроизводит процессы, протекающие в исходной системе (рис.1.3), и с другой – исключает “параметрические” обратные связи. Во втором разделе была предложена процедура построения эквивалентной замкнутой системы с релейно-гистерезисной нелинейностью, обладающей описанными выше свойствами. Замена модифицированного ДЧИМ эквивалентной структурой позволяет исключить из математической модели системы неявные функциональные соотношения. В результате математическая модель системы с линейным фильтром с простыми полюсами приобретает следующий вид:

$$x(t) = f(t) - z(t); \quad (4.17)$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \otimes y^*(t); \quad (4.18)$$

$$y^*(t) = \dot{v}(t); \quad (4.19)$$

$$\vartheta(t) = \varphi(y); \quad (4.20)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^e (c_{v_i} \int_0^{\infty} e^{p_{v_i}(t-\tau)} [x(\tau) - \mu(\tau)] d\tau - \int_0^{\infty} e^{p_{v_i}(t-\tau)} y_i(\tau) s(\tau) d\tau); \quad (4.21)$$

$$\mu(t) = x(t) \int_0^{\infty} q_{\tau_m}(t-\tau) s(\tau) d\tau; \quad (4.22)$$

$$s(t) = |\dot{v}(t)|, \quad (4.23)$$

где $y_i(t)$ – выходной сигнал элементарного звена фильтра, получающегося при разложении фильтра на 1 параллельно соединенных звеньев с передаточными функциями

$$W_{v_i}(P) = \frac{c_{v_i}}{p - p_{v_i}},$$

где $v(t)$ – выходной сигнал блока формирования импульсов, $s(t)$ – сигнал сброса, $q_{\tau_m}(t) = L^{-1} \left[\frac{1 - e^{-\tau_m p}}{p} \right]$.

С учетом уравнений (3.87) – (3.93) исходная задача параметрического синтеза примет вид

$$MQ(x) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$Mp(x(t)) \leq 0 ,$$

$$x(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k \otimes y^*(t); \quad (4.24)$$

$$y^*(t) = \dot{v}(t);$$

$$v(t) = \varphi(y);$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^e (c_{v_i} \int_0^{\infty} e^{p_{v_i}(t-\tau)} [x(\tau) - \mu(\tau)] d\tau - \int_0^{\infty} e^{p_{v_i}(t-\tau)} y_i(\tau) s(\tau) d\tau ;$$

$$\mu(t) = x(t) \int_0^{\infty} q_{\tau_m}(t - \tau) s(\tau) d\tau ,$$

$$s(t) = |\dot{v}(t)|.$$

В полученной задаче (4.24) отсутствует функциональное отношение вида (3.83) и она в принципе может быть сведена к параметрическому виду (3.86). Однако задача (4.24) аналитически трудно разрешима относительно переменных x, y, z , так как представляет собой систему нелинейных интегральных уравнений. Поэтому для ее решения используются приближенные методы.

Второй подход к преобразованию исходной задачи к виду (3.86), предлагаемый в работе, заключается в применении аппарата функциональных рядов Вольтерра к задаче (3.94). В работе [5, 11] показана процедура построения вольтерровской модели системы, которая заключается в последовательном размыкании замкнутых контуров на основе решения соответствующих уравнений с помощью функциональных рядов Вольтерра. Во втором разделе работы получена вольтерровская модель ДЧИСАУ объектами с запаздыванием в виде

$$x(t) = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \otimes f(t) , \quad (4.25)$$

где $n_k(t_1, \dots, t_k, c)$ – импульсные характеристики замкнутой системы, зависящие от параметров модулятора.

Вольтерровская модель (4.25) описывает явную связь между процессом ошибки $x(t)$ и входным процессом $f(t)$ системы. С помощью этой модели исключаются переменные x, y, z из уравнений задачи (3.94), и задача приводится к параметрическому виду (3.86)

$$MQ[n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \otimes f(t)] \rightarrow \min$$

при

$$M\rho[n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \otimes f(t)] \leq 0. \quad (4.26)$$

Во многих практических случаях удобно вместо задачи (3.96) использовать задачу, полученную путем статистической линеаризации вольтерровской модели (3.95) [2, 5]. Линейная модель ДЧИСАУ объектами с запаздыванием в подразделе 3.2 получена в виде

$$\hat{x}(t) = \int_0^{\infty} l_0^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) m_f d\tau + \int_0^{\infty} l_1^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) f^0(t - \tau) d\tau, \quad (4.27)$$

где индекс i указывает на различие способов получения соответствующих импульсных характеристик $l_0^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c})$, $l_1^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c})$.

На основе линейной модели (3.97) задача, решаемая в данной работе, представляется в виде

$$MQ\left(\int_0^{\infty} l_0^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) m_f d\tau + \int_0^{\infty} l_1^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) f^0(t - \tau) d\tau\right) \rightarrow \min \quad (4.28)$$

при

$$M\rho\left(\int_0^{\infty} l_0^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) m_f d\tau + \int_0^{\infty} l_1^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) f^0(t - \tau) d\tau\right) \leq 0.$$

Таким образом, использование при синтезе частотно-импульсной системы ее вольтерровской модели позволяет получить асимптотически точный результат. В практических применениях число элементов вольтерровской модели системы конечно, что приводит к появлению погрешности. Однако эту погрешность можно уменьшить увеличивая число элементов модели. И наконец, вольтерровская модель позволяет формировать различные типы линейных моделей, что делает метод параметрического синтеза приближенным, но зато более простым с вычислительной точки зрения.

4.2.1. Параметрический синтез динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием при среднеквадратичном критерии качества

Одним из наиболее часто используемых на практике критериев качества при разработке автоматических систем является среднее квадратичное отклонение процесса ошибки [36, 38, 45, 46]. Этот критерий является частным случаем критерия общего вида (3.71) при выполнении соотношения (3.72). С использованием этого критерия задача оптимизации ДЧИСАУ объектами с запаздыванием (рис. 2.1) формулируется следующим образом [18]:

$$M\{x(t) - m_x\}^2 \rightarrow \min \quad (4.29)$$

при ограничениях

$$M\rho(x) \leq 0, \quad (4.30)$$

$$x(t) = f(t) - z(t); \quad (4.31)$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [h_k \otimes x(t)]; \quad (4.32)$$

$$y^*(t) = \sum_n \lambda_n \delta(t - t_n); \quad (4.33)$$

$$y(t_n - 0) = W[\bar{c}, x(t), t_{n-1} + \tau_0 \leq t \leq t_n - 0] = \lambda_n \Delta; \quad (4.34)$$

$$\lambda_n = \text{sign } y(t_n - 0); \quad (4.35)$$

$$y(t_n + 0) = 0. \quad (4.36)$$

Для решения задачи (4.29), (4.30) – (4.36) построим для исходной системы эквивалентную структурную модель (рис. 2.2), сформируем вольтерровскую модель полученной эквивалентной системы, которая описывается следующим образом:

$$x(t) = n_0 \sum_{k=1}^{\infty} [n_k \otimes f(t)]. \quad (4.37)$$

Импульсные характеристики $n_k(t_1, \dots, t_k, c)$ ряда (4.37) определяются из соотношений (2.87). Подставляя ряд (4.37) в критерий качества (4.2) с учетом (3.1) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \min \{ & \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} n_{k_1}(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_{k_1}, \bar{c}) n_{k_2}(\tau_0, \tau_m, \theta_1, \dots, \theta_{k_2}, \bar{c}) \times \\ & \times [R_f^{(2)}(\tau_1, \dots, \tau_{k_1}, \theta_1, \dots, \theta_{k_2}) - R_f^{(1)}(\tau_1, \dots, \tau_{k_1}) \times \\ & \times R_f^{(1)}(\theta_1, \dots, \theta_{k_2})] d\tau_1 \dots d\tau_{k_1} d\theta_1 \dots d\theta_{k_2}, \quad (4.38) \\ & M\rho(\int_0^{\infty} n_0(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} n_k(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \dots, \tau_k, \bar{c}) \prod_{i=1}^k f(t - \tau) d\tau_i \leq 0. \end{aligned}$$

Задача (4.23) не содержит переменных x, y, z и имеет параметрический вид (3.86). Однако в вычислительном отношении ее решение является весьма трудоемким, так как связано с необходимостью решения систем сложных нелинейных уравнений. Кроме того, целевая функция содержит, как это видно из (4.23), многомерные моментные функции, определение которых на практике сопровождается значительными трудностями вычислительного характера.

С целью упрощения полученной задачи (4.38) используем статистическую линеаризацию вольтерровской модели системы. Суть и методика линеаризации были изложены в пункте 3.3, и линейный статистический эквивалент системы получается в виде

$$x(t) = \int_0^{\infty} l_0^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) m_f d\tau + \int_0^{\infty} l_1^i(\tau_0, \tau_m, \tau, \bar{c}) f^0(t - \tau) d\tau, \quad (4.39)$$

где $i=1, 2, 3, 4$ – способ линеаризации.

Подставляя выражение линейного статистического эквивалента (4.39) для различных способов линеаризации в известную формулу для вычисления дисперсии [42]

$$\sigma_x^{2(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |L_1^i(\tau_0, \tau_m, j\omega, \bar{c})|^2 S_f(\omega) d\omega, \quad (4.40)$$

получим четыре модификации задачи вида (4.38).

Первая из этих задач основана на модели (4.35), когда в вольтерровских моделях ДЧИМ и управляемого объекта отбрасывают члены порядка выше первого. В этом случае изображения ядер линейного статистического эквивалента (4.39) примут вид

$$L_0^1(\tau_0, \tau_m, 0) = \frac{1 - \frac{1}{m_f} H_1(\tau_0, 0) M_1(\tau_m, 0, \bar{c})}{1 + H_1(\tau_0, 0) M_1(\tau_m, 0, \bar{c})}, \quad (4.41)$$

$$L_1^1(\tau_0, \tau_m, p, \bar{c}) = \frac{1}{1 + H_1(\tau_0, p) M_1(\tau_m, p, \bar{c})}. \quad (4.42)$$

Подставляя (4.42) в (4.40), приведем задачу (4.38) к виду

$$\min_{\bar{c}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{1 + H_1(\tau_0, \tau_m, j\omega) M_1(\tau_m, j\omega, \bar{c})} \right|^2 S_f(\omega) d\omega : g_1(\bar{c}) \leq 0 \right\}. \quad (4.43)$$

Сформулированная задача легко реализуема в вычислительном отношении. Вместе с тем в ней не учитываются нелинейности модулятора и управляемого объекта. Поэтому решение данной задачи целесообразно использовать для первоначальной приближенной оценки областей оптимальных параметров ДЧИСАУ объектами с запаздыванием в условиях минимума затрат машинного времени. Такая задача решается на этапе проектирования систем с целью обоснования предварительного выбора оптимальных проектных решений.

При формировании второй задачи из класса (4.38) за исходную модель принимается линеаризованная вольтерровская модель (3.32) разомкнутой системы. Изображения ядер этой модели определяются из следующих соотношений:

$$L_0^2(\tau_0, \tau_m, 0, \bar{c}) = \frac{1 - \frac{1}{m_f} \theta_0(\tau_0, \tau_m, 0, \bar{c})}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, 0, \bar{c})}, \quad (4.44)$$

$$L_1^2(\tau_0, \tau_m, p, \bar{c}) = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^N r H_r(\tau_0, j\omega, 0, \dots, 0) M_1(\tau_m, j\omega, \bar{c}) M_0^{r-1}(0, \bar{c})}. \quad (4.45)$$

Преобразованная задача в этом случае имеет вид

$$\min_{\vec{c}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^N r H_r(\tau_0, j\omega, 0, \dots, 0) M_1(\tau_m, j\omega, \vec{c}) M_0^{r-1}(j\omega, \vec{c})} \right|^2 \times \right. \\ \left. \times S_f(\omega) d\omega : g_2(\vec{c}) \leq 0 \right\}. \quad (4.46)$$

В этой задаче, как видно из (4.45), учитываются особенности нелинейного преобразования случайного процесса, осуществляемого в управляемом объекте. Поэтому задачу (4.46) целесообразно использовать при синтезе частотно-импульсных систем объектами с запаздыванием с существенно нелинейной непрерывной частью для уточнения областей оптимальных параметров, полученных в результате решения первой задачи.

Третья задача из класса (4.38) основывается на линеаризации вольтерровской модели замкнутой системы (2.54), изображения ядер которой имеют вид:

$$L_0^3(\tau_0, \tau_m, 0, \vec{c}) = \frac{1}{m_f} (N_0(\tau_0, \tau_m, 0, \vec{c}) + N_1(\tau_0, \tau_m, 0, \vec{c})), \quad (4.47)$$

$$L_1^3(\tau_0, \tau_m, p, \vec{c}) = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^N \theta_r(\tau_0, \tau_m, p, 0, \dots, 0, \vec{c}) N_0^{r-1}(\tau_0, \tau_m, 0, \vec{c})}, \quad (4.48)$$

где $\theta_r(\tau_0, \tau_m, p_1, \dots, p_r, \vec{c})$ – ядра вольтерровской модели разомкнутой системы, определяемые отношениями (2.54).

Тогда задача (4.38) приобретает следующий вид:

$$\min_{\vec{c}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^N \theta_r(\tau_0, \tau_m, j\omega, 0, \dots, 0, \vec{c}) N_0^{r-1}(\tau_0, \tau_m, 0, \vec{c})} \right|^2 \times \right. \\ \left. \times S_f(\omega) d\omega : g_3(\vec{c}) \leq 0 \right\}. \quad (4.49)$$

В этой задаче по сравнению с предыдущей задачей учитываются свойства нелинейного преобразования случайного процесса не только управляемым объектом, но и, как видно из (3.34) и (2.54), модулятором. Следовательно, данную задачу можно использовать при существенно нелинейных управляемых объектах с запаздыванием для уточнения границы областей оптимальных параметров, построенных на основе решения предыдущих задач, по отдельным параметрам, существенно зависящим от нелинейных свойств модулятора.

Преобразование задачи (4.48) к виду (4.38) может быть основано на линейном статистическом эквиваленте модели замкнутой системы, полученном путем минимизации средней квадратичной ошибки приближения. В этом случае задача (4.38) принимает следующий вид:

$$\min_{\vec{c}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |L_1^4(\tau_0, \tau_m, j\omega, \vec{c})|^2 S_f(\omega) d\omega : g_4(\vec{c}) \leq 0 \right\}, \quad (4.50)$$

где $L_1^4(\tau_0, \tau_m, p, c) = L\{l_1^4(\tau_0, \tau_m, \tau, \vec{c})\}$ –преобразование Лапласа от импульсной характеристики $l_1^4(\tau_0, \tau_m, \tau, \vec{c})$ линеаризованной модели замкнутой системы (3.37).

В данной задаче учитываются особенности всех трех видов нелинейного преобразования случайного процесса, имеющих место в автоматических системах с ДЧИМ, применяемых для управления объектами с запаздыванием. Однако, в вычислительном отношении эта задача является наиболее трудоемкой. Вследствие этого данная задача решается в тех случаях, когда требуется более точная граница оптимальной области по отдельным параметрам, существенно зависящим от свойств нелинейного преобразования случайного процесса системой в целом.

4.3. Алгоритмы параметрического синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием

Осуществление рационального выбора численного способа оптимизации и анализа результатов задач (4.43) (4.46), (4.49) и (4.50) требует предварительного их исследования. Это связано с тем, что в преобразованных задачах отсутствует полная информация о свойствах и структуре критериев качества $I_i(\vec{c})$ и ограничений $g_i(\vec{c}) \leq 0$, $i=(1, 2, 3, 4)$. Заданными являются только алгоритмы их формирования. Из-за сложности этих алгоритмов удастся вычислить с помощью ЭВМ только конкретные значения этих функций. В связи с этим проводится предварительная оценка выпуклости критериев качества $I_i(\vec{c})$ и ограничений $g_i(\vec{c}) \leq 0$, а также степени нелинейности $I_i(\vec{c})$ [39]. В связи с вышеуказанными особенностями критериев качества и ограничений эти задачи решаются численными способами на ЭВМ. Ниже приводятся их укрупненные алгоритмы.

4.3.1. Алгоритм оценки выпуклости

Оценка выпуклости функций $I_i(\vec{c})$ и $g_i(\vec{c}) \leq 0$, $i=(1, 2, 3, 4)$ проводится путем цифрового статистического моделирования с использованием стохастического аналога формулы Иенсена. Для удобства алгоритм приведем в следующем виде:

1. Используя датчики псевдослучайных чисел, формируем значение вектора $\vec{c}(w)$.

2. Проверяется попадание значений вектора $\vec{c}(w)$ в допустимую область. По тем компонентам вектора $\vec{c}(w)$, по которым нет попадания в допустимую область, процедура повторяется с первого шага.

3. Производится вычисление значений $I_i(\vec{c})$.

3. Производится накопление значений $\vec{c}(w)$ и $I_i(\vec{c}(w))$ для вычисления $MI_i(\vec{c}(w))$ и $I_i(M(\vec{c}(w)))$.

Эти четыре шага повторяются до набора соответствующего объема выборки, определяемого точностью метода статистического цифрового моделирования.

5. Вычисляются $MI_i(\vec{c}(w))$ и $I_i(M(\vec{c}(w)))$.

6. Производится сравнение $I_i(M(\vec{c}(w))) \leq MI_i(\vec{c}(w))$.

Если это неравенство выполняется, то функция $I_i(\vec{c})$ выпуклая.

4.3.2. Алгоритм оценки степени нелинейности

Оценку степени нелинейности критерия качества производится путем численного разложения его в многомерный ряд Тейлора.

Для удобства алгоритм приведем для функции одной переменной $I_i(c)$.

1. Произвольно фиксируется опорная точка c_0 в допустимой области. Вычисляются производные функции в опорной точке.

2. На основе вычисленных производных строится ряд Тейлора $p(c-c_0)$.

3. Вычисляется суммарная квадратичная ошибка

$$S(c_0) = \sum_c [I_i(c) - P(c - c_0)]^2.$$

4. Вычисляется радиус сходимости построенного ряда $S(c_0)$. Эти четыре шага повторяются с изменением значения опорной точки c_0 .

5. Окончательный ряд выбирается из условия $\min S(c_0)$ при радиусе сходимости, покрывающем допустимую область.

6. Производится сравнительный анализ полученных коэффициентов ряда Тейлора. По результатам анализа делается вывод о степени нелинейности критерия качества.

4.3.3. Алгоритм минимизации

Решение задачи параметрического синтеза осуществляется по следующему алгоритму:

1. Проводится анализ выпуклости функции качества $I_i(\vec{c})$.

2. Выбор очередной исходной точки c_0 из допустимого множества $g_i(\vec{c}) \leq 0$.

3. С помощью датчиков псевдослучайных чисел из исходной точки делается m случайных независимых шагов (проб): $b\xi_1, b\xi_2, \dots, b\xi_m$, где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ – случайно выбранные направления, b – длина шага

4. Проверяется попадание каждой из m точек $\bar{c}_0 + b\xi_j$, $j=1, \dots, m$ в допустимую область. Если какая-либо из этих точек не удовлетворяет допустимым ограничениям, то неудачный шаг, приведение к этой точке, заменяют другим, сделанным также в случайном направлении, до тех пор, пока не выполняются условия ограничений.

5. Вычисляется значение функции качества в каждой из m точек.

6. Запоминается тот шаг, который привел к наибольшему снижению функции качества, т. е.

$$I_c(\bar{c}_0 + b\xi_k) = \min_{j=1, m} I_i(\bar{c}_0 + b\xi_j),$$

где ξ_k – направление наилучшей пробы.

7. Проводится оценка степени нелинейности функции качества $I_i(\bar{c})$ в направлении ξ_k в соответствии с приведенным выше алгоритмом.

$$I(\bar{c}_0 + b\xi_k) = I(b) = I(\bar{c}_0) + \sum_{n=1}^N \frac{\partial^n I}{\partial b^n} \Big|_0 b^n.$$

8. С помощью одного из методов одномерной оптимизации определяется оптимальная длина шага b из условия $I(b) \rightarrow \min$.

9. Если точка $\bar{c}_0 + b_{\text{опт}}\xi_k$ вышла за пределы допустимой области, то длина шага $b_{\text{опт}}$ уменьшается до тех пор, пока не выполняются условия ограничений.

10. Осуществляется перемещение рабочей точки в точку $\bar{c}_0 + b_{\text{опт}}\xi_k$.

11. Все операции повторяются с третьего шага из точки $\bar{c}_0 + b_{\text{опт}}\xi_k$. Эта процедура осуществляется до тех пор, пока абсолютная величина разности между значениями целевой функции при двух соседних шагах итерационного процесса не станет меньше заданной величины погрешности.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Общие определения и задачи синтеза системы.
2. Основные этапы решения задачи и виды синтеза системы.
3. Общая схема синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.
4. Основные этапы синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.
5. Перечислить и описать основные статистические критерии эффективности функционирования нелинейных систем.

6. Сформулировать и привести математическую постановку задачи параметрического синтеза динамической частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.

7. Описать и привести задачу параметрического синтеза динамической частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием на базе ее вольтерровской модели.

8. Описать и привести задачу параметрического синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием с использованием линейной модели, полученной раздельной линеаризации элементов системы.

9. Описать и привести задачу параметрического синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием с использованием линейной модели, полученной линеаризации прямой цепи системы.

10. Описать и привести задачу параметрического синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием с использованием линейной модели, полученной линеаризации замкнутой системы в целом.

11. Описать и привести задачу параметрического синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием на базе линейной модели, полученной оптимальной линеаризации замкнутой системы.

12. Разработать блок-схему и написать машинную программу алгоритма параметрического синтеза динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В предыдущих разделах учебника приведены математические модели и методы статистического анализа и синтеза динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием без учета особенностей реализации их на управляющей цифровой вычислительной машине.

В данном разделе развивается методика формирования моделей статистического анализа и синтеза динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием с учетом эффекта квантования сигналов во времени. Строятся структурные модели цифровых динамических частотно-импульсных модуляторов, применяемых для управления объектами с запаздыванием. На ее основе формируются дискретные вольтерровские модели системы, статистическая линеаризация которых приводит к различным приближенным линеаризованным моделям. Математические модели полученные в разделе использованы для статистического анализа и синтеза цифровых динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием.

5.1. Структурные модели цифровых динамических частотно-импульсных модуляторов системы управления с запаздыванием

5.1.1. Принцип действия и уравнения цифровых динамических частотно-импульсных систем управления с запаздыванием

Рассмотрим цифровую систему управления с запаздыванием, структурная схема которой изображена на рис. 5.1.

Цифровой динамический частотно-импульсный модулятор состоит из дискретного фильтра ДФ и импульсного устройства ИУ с порогом Δ [5, 9]. Дискретный фильтр описывается дискретной передаточной функцией вида [41,43]

$$W^*(z) = \frac{G(z)}{D(z)}, \quad (5.1)$$

где $G(z)$ и $D(z)$ в терминах z -преобразования определяются в виде

$$G(z) = \sum_{k=0}^{m_1} a_k z^k, \quad D(z) = 1 + \sum_{k=1}^m b_k z^k, \quad z = e^{-pT}, \quad m_1 < m, \quad (5.2)$$

T – период дискретизации.

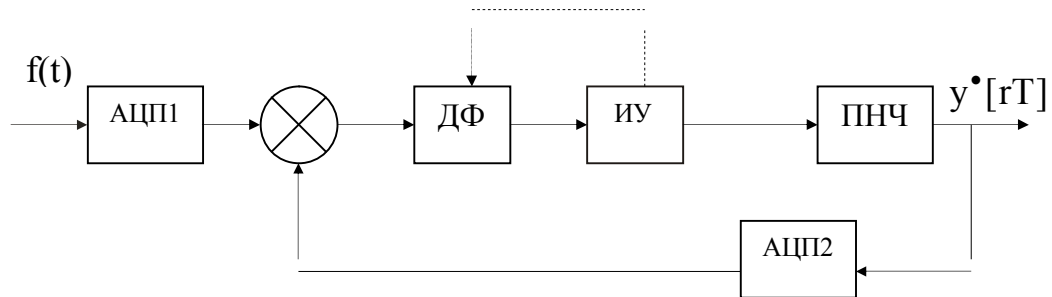


Рис. 5.1. Структурная схема цифровой системы с ДЧИМ

Пусть в момент времени $t_n T$ на выходе импульсного устройства появился n -й импульс. Тогда $(n+1)$ -й импульс вида:

$$y^*[qT] = \lambda_{n+1} \delta[(q - q_{n+1})T], \quad (5.3)$$

где

$$\delta[(q - q_{n+1})T] = \begin{cases} 1, & \text{если } q = q_{n+1} \\ 0, & \text{если } q \neq q_{n+1}; q, q_{n+1} = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

с учетом свойств управляемого объекта с запаздыванием [77] определяется из условий

$$y[q_{n+1}T - 0] = \sum_{q=q_n + \gamma_m + 1}^{q_{n+1}} w[(q_{n+1} - q)T] * [qT] \geq \lambda_{n+1} \Delta, \quad (5.4)$$

$$\lambda_{n+1} = \text{sign } y[q_{n+1}T - 0], \quad (5.5)$$

где $w[qT]$ – дискретная импульсная характеристика, соответствующая

дискретной передаточной функции $W^*(z)$ (5.1), γ_m – целое число, характеризующее запаздывание объекта управления ($\gamma_m = \frac{\tau_m}{T}$). В эти же моменты времени ИУ обнуляет состояние дискретного фильтра ДФ:

$$y[q_{n+1}T + 0] = 0. \quad (5.6)$$

Входной сигнал $f(t)$ и выход приведенной непрерывной части ПНЧ $z(t)$ преобразуется аналого-цифровыми преобразователями АЦП1 и АЦП2 в цифровые сигналы

$$z[qT] = z(t) \Big|_{t=qT}, \quad f[qT] = f(t) \Big|_{t=qT}. \quad (5.7)$$

Приведенная непрерывная часть включает в себя непрерывную часть НЧ и формозадающий фильтр ФЗФ и описывается в виде дискретного ряда Вольтерра [59]:

$$z(qT) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \bigoplus_k y * [qT], \quad (5.8)$$

где $h_k \bigoplus_k y * [qT]$ обозначена k -мерная дискретная свертка импульсных переходных характеристик $h_k[\gamma_0 T, qT, \dots, q_k T]$ и сигнала $y^*[(q - q_i)T]$, $i=1, 2, \dots, k$, имеющая вид:

$$h_k \bigoplus_k u[qT] = \sum_{q_1, \dots, q_k=0}^q h_k[\gamma_0 T, q_1 T, \dots, q_k T] \prod_{i=1}^k y^*[(q - q_i)T]. \quad (5.9)$$

Уравнение замыкания системы (5.1) в силу (5.7) имеет вид:

$$x[qT] = f[qT] - z[qT]. \quad (5.10)$$

Наличие в математическом описании цифрового ДЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием, логических условий сброса (5.4), (5.5) приводит при аналитическом исследовании таких систем к значительным трудностям.

Более удобна при аналитических исследованиях цифровой системы с ДЧИМ, эквивалентная ей замкнутая система, в которой цифровой модулятор заменяется нелинейной дискретной системой – структурной моделью [2, 5, 53].

5.1.2. Структурная модель цифрового Σ -частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием

Рассмотрим цифровой ДЧИМ, дискретный фильтр ДФ которого в терминах z -преобразования представляется передаточной функцией вида:

$$W(z) = \frac{z}{z - d_0}, \quad (5.11)$$

где $z = e^{pT}$, $d_0 = e^{p_0 T}$.

Такой вид цифрового ДЧИМ называется дискретным аналогом Σ -ЧИМ. В соответствии с соотношениями (5.4), (5.5) моменты появления импульсов $q_{n+1}T$ вида (5.3) для цифрового ДЧИМ (5.11) определяются уравнением

$$y[q_{n+1}T - 0] = \sum_{q=q_n + \gamma_m + 1}^{q_{n+1}} d_0^{q_{n+1}-q} x[qT] \geq \lambda_{n+1} \Delta, \quad (5.12)$$

$$\lambda_{n+1} = \text{sign } y[q_{n+1}T - 0]. \quad (5.13)$$

Теперь рассмотрим разностное уравнение дискретного фильтра характеризующегося передаточной функцией (5.11):

$$y[(q+1)T] = d_0 y[qT] + x[(q+1)T]. \quad (5.14)$$

Пусть в момент времени $q_n T$ появился n -й импульс. Тогда выход $y[qT]$ дискретного фильтра (5.14) в последующие ($qT > q_n T$) моменты времени определяются в виде:

$$\tilde{y}[qT] = \sum_{r=q_n}^q d_0^{q-r} x[rT] + d_0^{q-q_n} y[q_n T - 0] - d_0^{q=q_n} x[q_n T], \quad q_n < q < q_{n+1}, \quad (5.15)$$

Из уравнений (5.12) и (5.15) видно, что суть операции сброса сводится в настоящем случае к обнулению начального условия $y[q_n T - 0]$ и принудительном обнулении сигнала $x[qT]$ в течение времени запаздывания управляемого объекта. По аналогии с непрерывным случаем эта операция производится путем формирования и подачи на вход дискретного фильтра в момент времени $qT = q_n T$ соответствующих сигналов $\eta[qT]$ и $\mu[rT]$. Тогда уравнение дискретного фильтра примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{y}[qT] = & d_0^{q-q_n} y[q_n T - 0] + \\ & + \sum_{r=q_n}^q d_0^{q-r} \{x[rT] - x[q_n T] \delta[(q - q_n)T] - \eta[rT] - \mu[rT]\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где

$$\delta[(q - q_n)T] = \begin{cases} 1, & q = q_n \\ 0, & q \neq q_n; q, q_{n+1} = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3 \end{cases}. \quad (5.17)$$

Из сравнения уравнений (5.12) и (5.16) вытекает, что $y[qT] = \tilde{y}[qT]$ когда сигнал $\eta[qT]$ и дополнительный сигнал $\mu[rT]$ определяются выражениями

$$\eta[qT] = y[q_n T - 0] \delta[(q - q_n)T], \quad (5.18)$$

$$\mu[rT] = \begin{cases} x[rT], & \text{если } q_n < r < (q_n + \gamma_m), \\ 0, & \text{если } (q_n + \gamma_m) < r < q_{n+1} \end{cases} \quad (5.19)$$

Последовательность единичных импульсов $\delta[qT]$ представима в виде

$$\delta[(q - q_n)T] = \begin{cases} 1, & q = q_n \\ 0, & q \neq q_n; q, q_{n+1} = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (5.20)$$

Для формирования дополнительного сигнала $\mu[rT]$ (5.19) используем существующий выход $s(qT)$.

Сигнал $\mu[rT]$ можно получить в виде

$$\mu[rT] = x[rT] \chi[rT], \quad (5.21)$$

где

$$\chi[rT] = \sum_{\theta=0}^r q_{\gamma_m} [(r - \theta)T] s[\theta T], \quad (5.22)$$

$$q_{\gamma_m} [rT] = Z^{-1} \{G_{\gamma_m}(z)\}, \quad (5.23)$$

$$G_{\gamma_m}(z) = \frac{z}{z-1} [1 - z^{-\gamma_m}] \quad (5.24)$$

Структура звена, осуществляющего операцию сброса (5.16) будет иметь вид, показанный на рис. 5.2. Выход цифрового модифицированного сброса (ЦМБС) в промежутках времени $q_n T + 0 < qT < q_{n+1} T - 0$ совпадает с левой частью соотношения (5.12).

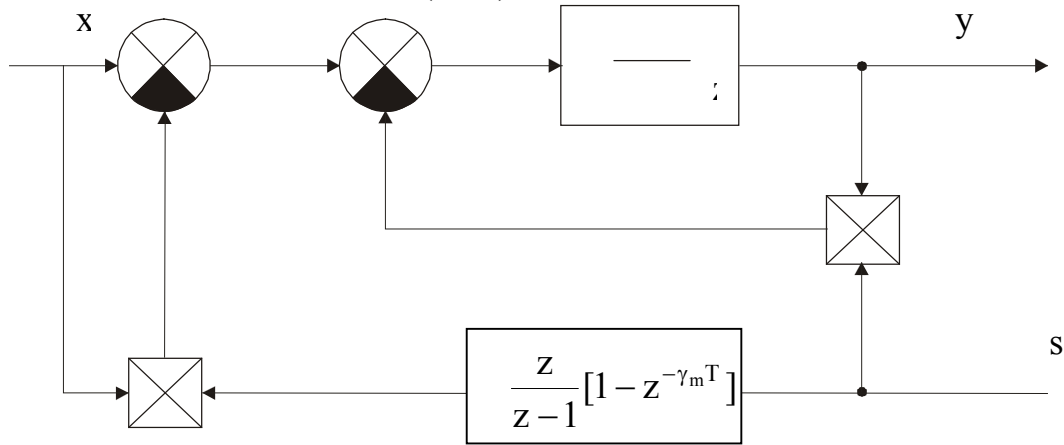


Рис. 5.2. Блок сброса цифрового $\Sigma - \text{ЧИМ}$ системы с запаздыванием

Последовательность $s[qT]$ генерируется цифровым блоком формирования импульсов (ЦБФИ), аналогичным тому, который входил в основную структурную модель.

Теперь задача сводится к построению дискретного аналога этого блока, который производит сравнение выхода (5.16) с порогом $\pm \Delta$, преобразует выход дискретного блока сброса в выходной сигнал $y^*[qT]$ (5.3) и сигнал

сброса $s[qT]$ (5.20). Особенность дискретизации сигналов во времени сводится к тому, что в этом случае характеристика нелинейного элемента, служащего основой построения БФИ, упрощается и имеет вид (рис. 5.3)

$$v[qT] = \phi[\rho[qT]] = \begin{cases} 1, u[qT] \geq 1 \\ 0, -1 < u[qT] < 1, \\ 1, u[qT] \leq -1 \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\rho[qT] = \frac{1}{\Delta} y[qT].$$

Из сравнения (5.25) с (5.3) следует, что

$$y^*[qT] = v[qT]. \quad (5.26)$$

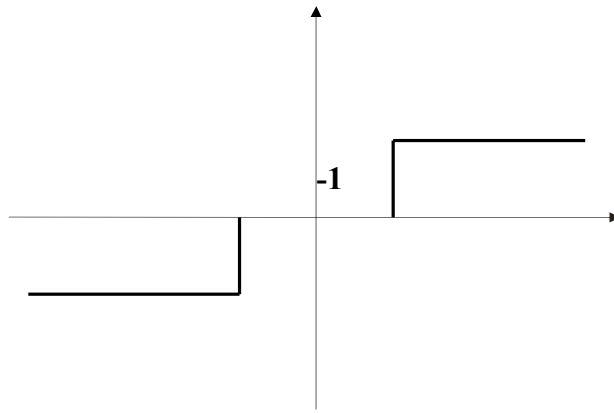


Рис. 5.3. Характеристика релейного элемента

Из (5.25) видно, что если в момент времени $qT = q_n T$ появился n -й импульс, то $(n+1)$ импульс появляется в момент $qT = q_{n+1} T$, определяемый уравнением

$$\tilde{y}[q_{n+1} T - 0] - y[q_n T + 0] = \lambda_{n+1} \Delta. \quad (5.27)$$

Момент $q_{n+1} T$, определяемый уравнением (5.12), (5.13), совпадает с моментом $\tilde{q}_{n+1} T$, определяемым уравнениями (5.16), (5.18), (5.25), (5.27), если формировать сигнал сброса $s[qT]$ (5.19) в виде:

$$s[qT] = v^2[qT] = \begin{cases} 1, |\rho[qT]| \geq \Delta \\ 0, |\rho[qT]| < \Delta \end{cases}. \quad (5.28)$$

Тогда на выходе дискретного блока формирования импульсов будем иметь решетчатую функцию $v[qT]$ (5.25), интервалы квантования по

времени и знаки дискрет которой определяются уравнениями (5.12), (5.13) и положительную решетчатую функцию (5.28).

Структурная модель цифрового Σ -ЧИМ системы управления объектами с запаздыванием, показана на рис. 5.4.

5.1.3. Структурная модель цифрового ДЧИМ с линейным фильтром общего вида

В пункте 5.1.2 показана возможность обобщения методики построения структурной модели Σ -ЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием, на цифровой случай. Аналогично, структурные модели конкретных видов цифровых ДЧИМ, применяемых для управления объектами с запаздыванием можно получить, как и в случае непрерывных ДЧИМ (раздел 2), без принципиальных затруднений. Как известно, задача сводится к построению только модифицированного блока сброса МБС. В этом пункте рассмотрим цифровой ДЧИМ с линейным дискретным фильтром общего вида, применяемый для управления объектами с запаздыванием.

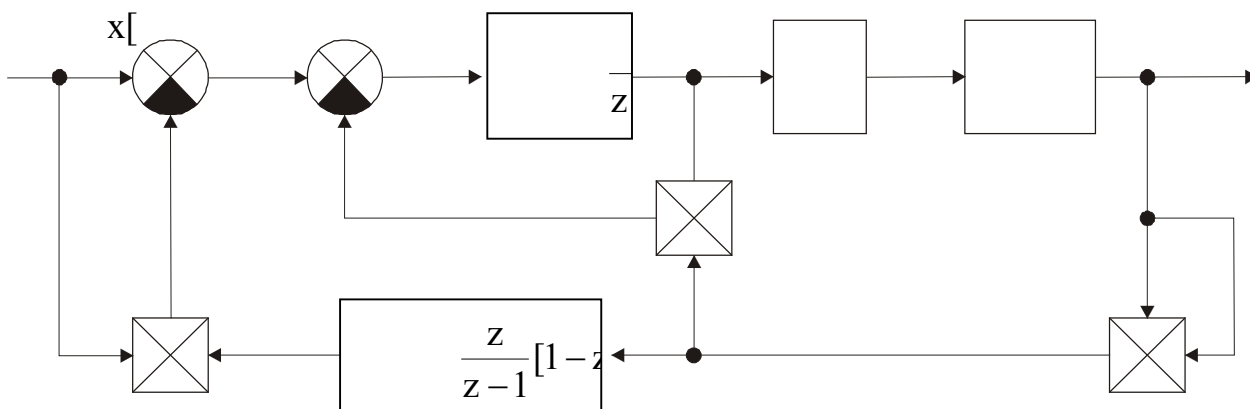


Рис. 5.4. Структурная модель цифрового Σ -ЧИМ,

применяемого для управления объектами с запаздыванием

Дискретный фильтр в этом случае в терминах z-преобразования описывается передаточной функцией

$$W(z) = \frac{G(z)}{D(z)}. \quad (5.29)$$

Предположим, что полосы передаточной функции простые, и обозначим как $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}^{-\mathbf{p}_1\mathbf{T}}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}^{-\mathbf{p}_2\mathbf{T}}$, ..., $\mathbf{d}_l = \mathbf{e}^{-\mathbf{p}_l\mathbf{T}}$. Тогда передаточную

функцию $W(z)$ (5.29) можно представить в виде разложения на простые дроби

$$W(z) = \sum_{i=1}^{lk} \frac{c_i}{z - d_i}, \quad (5.30)$$

где
$$c_i = \frac{G(d_i)}{D(d_i)}, \quad D(d_i) = \left. \frac{dD(z)}{dz} \right|_{z=d_i}. \quad (5.31)$$

Тогда задача построения структурной модели цифрового ДЧИМ с фильтром (5.29), применяемого для управления объектами с запаздыванием сводится к построению структуры модифицированного блока элементарного дискретного звена с передаточной функцией

$$W_i(z) = \frac{c_i}{z - d_i}. \quad (5.32)$$

Моменты появления $q_{n+1}T$ импульсов ДЧИМ с передаточной функцией (5.29) определяются уравнением

$$y[q_{n+1}T - 0] = \sum_{i=1}^1 \sum_{r=q_n + \gamma_m}^{q_{n+1}-1} c_i d_i^{q_{n+1}-r-1} x[rT] \geq \lambda_{n+1} \Delta. \quad (5.33)$$

Теперь рассмотрим разностное уравнение дискретного фильтра характеризующегося передаточной функцией (5.32)

$$y[(q+1)T] = \sum_{i=1}^1 y_i[(q+1)T] = \sum_{i=1}^1 \{d_i y_i[qT] + c_i x[qT]\}. \quad (5.34)$$

Пусть в момент времени $q_n T$ появился n -й импульс. Тогда выход $y[qT]$ дискретного фильтра (5.34) в последующие ($qT > q_n T$) моменты времени определяются в виде

$$\tilde{y}[qT] = \sum_{i=1}^1 \left\{ d_i^{q-q_n} y_i[q_n T - 0] + \sum_{r=q_n}^{q-1} \{d_i^{q-r-1} c_i x[rT]\} \right\}. \quad (5.35)$$

Из уравнений (5.33) и (5.35) следует, что $y[qT] = y[qT]$, если

$$\tilde{y}[qT] = \sum_{i=1}^1 \left\{ d_i^{q-q_n} \tilde{y}_i[q_n T - 0] + \sum_{r=q_n}^{q-1} d_i^{q-r-1} c_i \left\{ x[rT] - \frac{d_i}{c_i} \eta[rT] - \mu[rT] \right\} \right\}. \quad (5.36)$$

где сигнал сброса $\eta[rT]$ определяется по выражению

$$\eta_i[rT] = y_i[q_n T - 0] \delta[(r - q_n)T], \quad (5.37)$$

а сигнал $\mu(t)$ определяется по соотношению (5.21).

Так как фильтр с дискретной передаточной функцией $W(z)$ (5.29) образован параллельным соединением элементарных звеньев с дискретными передаточными функциями $W_i(z)$ (5.32), то структурная схема блока сброса принимает вид, показанный на рис.5.5.

Из анализа выражения (5.36) видно, что при $l=1$ и $d_1=1$ из структурной модели (5.5) получим структурную модель цифрового ИЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием [2,5] (рис. 5.6).

5.2. Вольтерровские модели цифровых динамических частотно-импульсных систем управления с запаздыванием

5.2.1. Общая процедура формирования вольтерровских моделей цифровых динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием

Для формирования вольтерровских моделей цифровых динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием используется аппарат дискретных функциональных рядов Вольтерра.

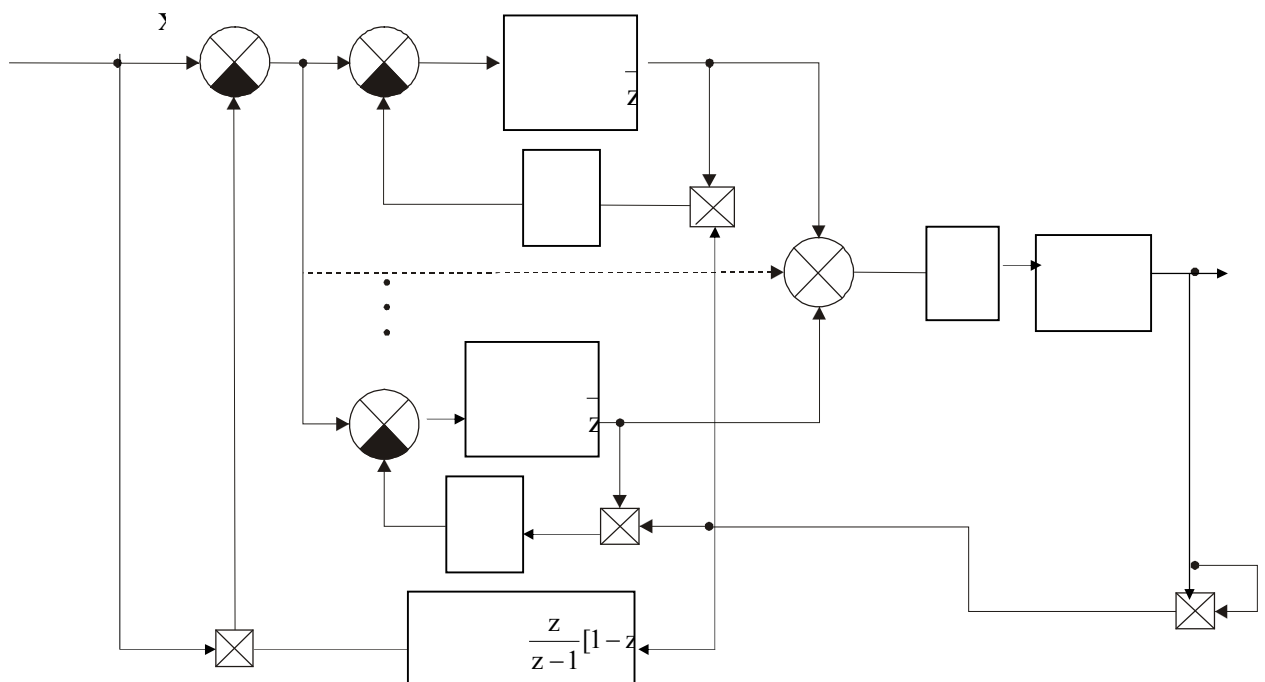


Рис. 5.5. Структурная модель цифрового ДЧИМ с линейным фильтром в системах с запаздыванием

Основой для нее служит структурная модель системы (рис. 5.7), где в приведенную непрерывную часть входит наряду с непрерывной частью и формирующий элемент.

В общем случае приведённая непрерывная часть характеризуется функционалом $H[\cdot]$. Ее выход в дискретные моменты времени определяется соотношением

$$z[qT] = H[y[rT]] \quad 0 \leq r \leq q \quad (5.38)$$

Если функционал H непрерывен, его можно представить в виде дискретного аналога ряда Вольтерра

$$z[qT] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \overset{k}{\oplus} v[rT] \quad (5.39)$$

где символом $h_k \overset{k}{\oplus} v[rT]$ обозначена k -мерная дискретная свертка решетчатых импульсных переходных характеристик $h_k(\gamma T, r_1 T, \dots, r_k T)$ и сигнала $v[q-r_i T]$ ($i=1, 2, \dots, k$), т.е.

$$h_k \overset{k}{\oplus} v[rT] = \sum_{r_1, \dots, r_k}^q h_k(\gamma T, \dots, r_k T) \prod_{i=1}^k v[(q-r_i)T]. \quad (5.40)$$

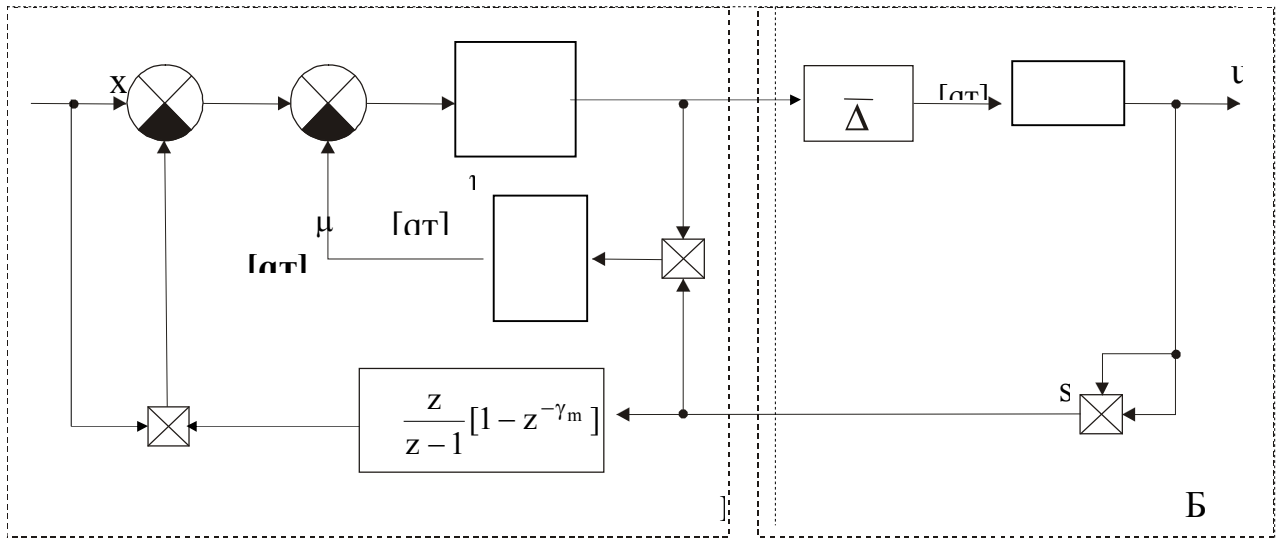


Рис. 5.6. Структурная модель цифрового ИЧИМ системы с запаздыванием

Процедура построения дискретных вольтеровских моделей цифровой ДЧИСАУ объектами с запаздыванием состоит из нескольких этапов [2, 5].

В дальнейшем подробно рассмотрим построение дискретных моделей интегральной частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.

Поведение цифровых модифицированных интегральных частотно-импульсных системы управления (рис. 5.7) описывается следующими уравнениями

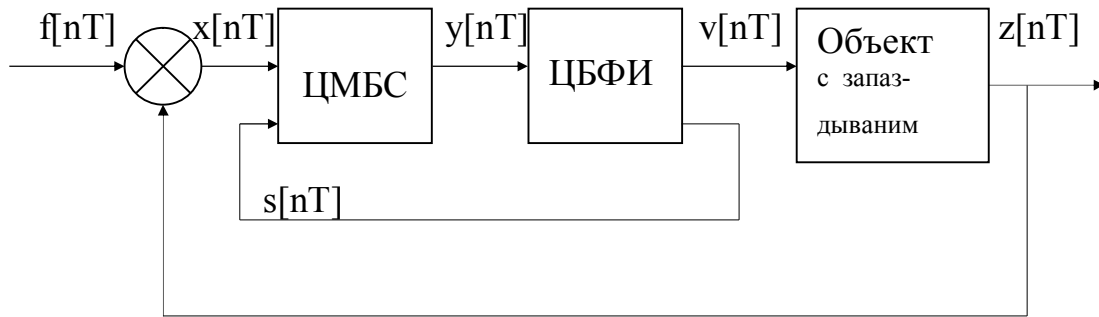


Рис. 5.7. Модель цифровой системы с модифицированным ДЧИМ

$$x[qT] = f[qT] - z[qT], \quad (5.41)$$

$$z[qT] = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ h_k \oplus y^*[qT] \right\}, \quad (5.42)$$

$$y^*[qT] = \phi(v[qT]), \quad (5.43)$$

$$v[qT] = \frac{y[qT]}{\Delta}, \quad (5.44)$$

$$y[qT] = (w \oplus x[qT]) - \{w \oplus x[qT](q_{ym} \oplus s[qT])\} - \left\{ w \oplus \frac{1}{k_u} y[qT] s[qT] \right\}, \quad (5.45)$$

$$s[qT] = (y^*[qT])^2, \quad (5.46)$$

где символом $\left\{ h_k \oplus y^*[qT] \right\}$ обозначена k -мерная свертка решетчатых импульсных характеристик объекта с запаздыванием $h_k(\gamma T, r_1 R, \dots, r_k T)$ сигнала $y^*[(n-r)T]$, $i=1, k$, т. е.

$$\left\{ h_k \oplus y^*[qT] \right\} = \sum_{q_1, \dots, q_k} h_k(\gamma_0 T, q_1 T, \dots, q_k T) \prod_{i=1}^k y^*[(q - q_i)T],$$

γ_0 – характеристика объекта с запаздыванием ($\gamma_0 T = \tau_0$),
 $w[qT] = Z^{-1}[W(z)];$

$$W(z) = \frac{k_u z}{z - 1}; \quad q_{\tau_m}[qT] = Z^{-1}[G_{\tau_m}(z)]; \quad G_{\tau_m}[z] = \frac{z}{z - 1} [1 - z^{-\gamma_m}];$$

$\phi(v[qT])$ – однозначная нелинейность релейного типа, определяемого выражением (5.3).

Непосредственное использование уравнений (5.41)–(5.46) для исследования цифровой системы приводит к трудностям математического характера, в частности, привлечения численных методов для решения этих уравнений.

Для преодоления этих трудностей используется и развивается аппарат функциональных рядов Вольтерра в дискретной форме [62,81].

Математическая модель модифицированных цифровых интегральных частотно-импульсных систем автоматического управления формируется в следующем виде

$$x[qT] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[n_k \oplus f[qT] \right], \quad (5.47)$$

где $n_k(\gamma_0 T, \gamma_m T, q_1 T, \dots, q_k T)$ – решетчатые импульсные характеристики математической модели (5.47).

Задача построения дискретной вольтерровской модели (5.47) цифровой системы состоит в определении связи между решетчатыми импульсными характеристиками $n_k(\gamma_0 T, \gamma_m T, q_1 T, \dots, q_k T)$ и характеристиками элементов системы, описываемой уравнениями (5.41) – (5.46).

5.2.2. Вольтерровские модели цифровых динамических частотно-импульсных систем управления с запаздыванием

Согласно разработанной во втором разделе процедуре построения вольтерровских моделей, на первом этапе формируется математическая модель цифрового МИЧИМ, на втором – разомкнутой системы, и на третьем – замкнутой системы.

В свою очередь, для построения вольтерровской модели цифрового МИЧИМ необходимо получить математические модели его составляющих модифицированного блока сброса МБС и блока формирования импульсов БФИ (рис. 5.7).

5.2.2.1. Вольтерровская модель цифрового интегрального частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием

Для построения вольтерровской модели цифрового МИЧИМ рассмотрим ее структурную схему, показанную на рис.5.6. В ней выделены дискретные модифицированный блока сброса МБС, описываемый уравнением (5.45) и блок формирования импульсов БФИ, поведение которого характеризуют уравнения (5.43), (5.45) – (5.46).

Рассмотрим дискретный модифицированный блока сброса, поведение которого характеризует уравнение (5.6). Решение уравнения (5.4) можно представить в следующем виде

$$y[qT] = (d_0 \oplus x[qT]) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ d_k \oplus x[q_1 T] \prod_{i=2}^k s[q_i T] \right\}. \quad (5.48)$$

Подставив выражение (5.48) в уравнение (5.45) получим:

$$\begin{aligned} d_0 \oplus x[qT] + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ d_k \oplus \left(x[q_1 T] \prod_{i=2}^k s[q_i T] \right) \right\} = \{w \oplus x[qT]\} - \\ - \left\{ \omega \oplus x[qT] (q_{\gamma_m} \otimes s[qT]) \right\} \left\{ w \oplus \frac{1}{k_u} y[qT] s[qT] \right\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Применим к каждому слагаемому в (5.49) многомерное дискретное преобразование Лапласа, тогда после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях XS получим выражение для изображения ядер (5.49) в виде:

$$\begin{aligned} D_0(z) = W(z) = \frac{k_u z}{z-1}; \\ D_1(\tau_m, z_1, z_2) = -W(z_1, z_2) \left[\frac{1}{k_u} D_0(z_2) - G_{\gamma_m}(z_2) \right]; \\ D_k(\tau_m, z_1, z_2, z_3) = -W(z_1 z_2 \dots z_{k+1}) D_{k-1}(\tau_m, z_1, \dots, z_k), \quad k=2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.50)$$

Для построения вольтерровской модели дискретного блока формирования импульсов рассмотрим уравнение этого блока (5.43), (5.45)

и (5.46). В структуре этого блока присутствует релейный элемент с единичной зоной нечувствительности (5.25).

Тогда для получения математической модели дискретного БФИ необходимо разложить эту нелинейность в ортогональный ряд. С этой целью

разложим нелинейность $y^*[qT] = \varphi(v[qT])$ в ряд по ортогональным полиномам Эрмита с весовой функцией $\vartheta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\sigma_\rho}\right)^2\right]$.

Весовую функцию ϑ можно интерпретировать как плотность распределения сигналов $\rho[nT]$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной σ_ρ^2 . Условие равенства нулю математического ожидания сигнала $\rho[nT]$ показано статистическим моделированием дискретного фильтра со сбросом в параграфе 2.2.

В данном случае разложение нелинейности $\psi(\rho)$ имеет следующий вид:

$$\varphi(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{\rho}{\sigma_\rho}\right) H_k \left(\frac{\rho}{\sigma_\rho}\right), \quad (5.51)$$

где

$$b_k = \frac{1}{k! \sigma_\rho \sqrt{2\pi}} \left\{ \int_1^{\infty} H_k \left(\frac{\rho}{\sigma_\rho}\right) e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_\rho^2}} d\rho - \int_{-\infty}^{-1} H_k \left(\frac{\rho}{\sigma_\rho}\right) e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_\rho^2}} d\rho \right\}. \quad (5.52)$$

Анализ выражения (5.52) показывает, что

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{для } k = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_\rho}\right)^2\right]}{k! \sqrt{2\pi}} H_{k-1} \left[\frac{1}{\sigma_\rho}\right], & \text{для } k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}, \quad (5.53)$$

Ряд (5.51) после несложных преобразований можно привести к следующему виду:

$$\varphi(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} \rho^{2m-1}, \quad (5.54)$$

где

$$\beta_m = \left\{ b_0 + \sum (-1)^k c_{1+2k}^k b_{1+2k} \prod_{i=1}^k c_{2i-1}^{2i-2} \right\}, \quad (5.55)$$

$c_i^j = \binom{1}{j} = \frac{1!}{j!(1-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Сигнал $s[nT]$, определяемый уравнением (5.46) с учетом (5.54) определяется из выражения

$$s[qT] = \varphi^2(\rho) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} \rho^{2m-1} \right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} e_{2m} \rho^{2m}, \quad (5.56)$$

где

$$e_{2m} = \sum_{j=1}^m \beta_{2j-1} \beta_{2(s-j)+1}. \quad (5.57)$$

Подставляя выражение для сигнала $s[qT]$ (5.56) в уравнение (5.48) получим:

$$y[qT] = \{d_0 \oplus x[qT]\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ d_k \oplus \left(x[qT] \prod_{j=2}^k \sum_{m=1}^{\infty} e_{2m} \rho^{2m} \right) \right\}. \quad (5.58)$$

Решение уравнения (5.58) ищем в виде:

$$y[qT] = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_k \oplus x[qT] \right\}, \quad (5.59)$$

где, например, первые три ядра (5.59) определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z) &= D_0(z); \\ \varepsilon_1(\tau_m, z_1, z_2) &= 0; \\ \varepsilon_1(\tau_m, z_1, z_2, z_3) &= \frac{e_2}{\Delta^2} D_1(\tau_m, z_1, z_2, z_3) \prod_{i=1}^3 \varepsilon_1(z_i). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Подставляя выражение для $y[qT]$ (5.59) в ряд (5.43), с учетом (5.44) окончательно получим:

$$y^*[qT] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k-1} \left(\frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_m \oplus x[qT] \right\} \right). \quad (5.61)$$

Уравнение (5.61) полностью описывает поведение цифрового МИЧИМ и представимо в следующем виде

$$y^*[qT] = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ m_l \oplus x[qT] \right\}, \quad (5.62)$$

где

$$\begin{aligned} M_1(z) &= \frac{e_1}{\Delta} \varepsilon_1(z); \\ M_2(\tau_m, z_1, z_2) &= 0; \\ M_3(\tau_m, z_1, z_2, z_3) &= \frac{e_1}{\Delta} \varepsilon_1(\tau_m, z_1, z_2, z_3) + \frac{e_3}{\Delta^3} \prod_{i=1}^3 \varepsilon_1(z_i); \\ M_2(\tau_m, z_1, z_2) &= 0; \\ M_3(\tau_m, z_1, z_2, z_3) &= \frac{e_1}{\Delta} \varepsilon_1(\tau_m, z_1, z_2, z_3) + \frac{e_3}{\Delta^3} \prod_{i=1}^3 \varepsilon_1(z_i). \end{aligned} \quad (5.63)$$

5.2.2.2. Вольтерровская модель цифровой интегральной частотно-импульсной системы с запаздыванием

Объединяя ряды (5.62) и (5.63) получим вольтеровскую модель разомкнутой системы в виде:

$$z[qT] = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \theta_l \oplus^1 x[qT] \right\}, \quad (5.64)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(\tau_0, \tau_m, z) &= H(\tau_0, z)M_1(\tau_m, z); \\ \theta_2(\tau_0, \tau_m, z) &= 0; \\ \theta_3(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2, z_3) &= H(\tau_0, z_1, z_2, z_3)M(\tau_m, z_1, z_2, z_3). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Ряд (5.64) совместно с уравнением замыкания системы (5.41) полностью описывает систему. Подставляя (5.64) в (5.41), получим уравнение для процесса сигнала ошибки системы в следующем виде

$$x[qT] = f[qT] - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \theta_l \oplus^1 x[qT] \right\}. \quad (5.66)$$

Решение уравнения (5.66) получим в виде ряда

$$x[qT] = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ n_k \oplus^k f[qT] \right\}. \quad (5.67)$$

Подставляя ряд (5.67) в уравнение (5.66) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ n_k \oplus^k f[qT] \right\} = f[qT] - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \theta_l \oplus^1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(n_m \oplus^m f[qT] \right) \right) \right\}. \quad (5.68)$$

Применим к каждому слагаемому в (5.68) многомерное дискретное преобразование Лапласа, тогда после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях X , получим следующие выражения для ядер ряда

$$\begin{aligned} N_1(\tau_0, \tau_m, z) &= \frac{1}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, z)}; \\ N_2(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2) &= 0; \\ N_3(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2, z_3) &= \frac{\theta_3(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2, z_3) \prod_{i=1}^3 N_1(\tau_0, \tau_m, z_i)}{1 + \theta_3(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2, z_3)}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Ряд (5.67) является вольтеровской моделью цифровой модифицированной интегральной частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.

5.3. Статистический анализ и синтез цифровых динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием

5.3.1. Определение статистических характеристик процесса ошибки цифровой системы

Полученная в пункте 5.2 дискретная вольтеровская модель системы с цифровым модифицированным ДЧИМ устанавливает явную связь между процессом ошибки $x[qT]$ и входным сигналом $f[qT]$, что позволяет использовать ее для определения статистических характеристик сигнала ошибки $x[qT]$.

Рассмотрим систему с цифровым модифицированным ДЧИМ, изображенную на рис. 5.7. На входе системы действует решетчатый стационарный (нормальный) случайный процесс $f(qT)$ с известными статистическими характеристиками m_f , σ_f^2 , $R_f[mT]$, $S_f(\omega)$.

Согласно (5.67) ошибка системы определяется выражением

$$x[qT] = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ n_k \oplus f[qT] \right\}, \quad (5.69)$$

Определим среднее значение и дисперсию ошибки. Из (5.69) имеем:

$$\begin{aligned} m_x &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_l=0}^{\infty} n_l [\gamma_m T, \gamma T, m_1 T, \dots, m_l T] R_f^{(1)}[m_1 T, \dots, m_l T], \\ \sigma_x^2 &= \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_{l_1}=0}^{\infty} n_{l_1} [\gamma_m T, \gamma T, m_1 T, \dots, m_{l_1} T] \times \\ &\times n_{l_2} [\gamma_m T, \gamma T, m_1 T, \dots, m_{l_1} T] \left(R_f^{(2)}[m_1, \dots, m_{l_1}, \beta_1, \dots, \beta_{l_2}] - \right. \\ &\left. - R_f^{(1)}[m_1, \dots, m_{l_1}] R_f^{(2)}[\beta_1, \dots, \beta_{l_2}] \right), \end{aligned} \quad (5.71)$$

где

$$\begin{aligned} R_f^{(1)}[m_1, \dots, m_{l_1}] &= M \left\{ \prod_{i=1}^{l_1} f[(q - m_i)T] \right\}, \\ R_f^{(2)}[m_1, \dots, m_{l_1}, \beta_1, \dots, \beta_{l_2}] &= M \left\{ \prod_{j=1}^{l_1} f[(q - m_j)T] \prod_{i=1}^{l_2} f[(q - \beta_i)T] \right\}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Полученные выражения (5.70) и (5.71) для определения статистических характеристик процесса ошибки $x[qT]$ показывают, что с одной стороны, они требуют довольно большого объема информации о статистических

характеристиках входного процесса $f[qT]$, а с другой, приводят к необходимости решения довольно сложной системы нелинейных уравнений. В связи с этим при решении инженерных задач имеет смысл поступиться точностью ради получения приемлемых результатов.

Естественным путем упрощения модели (5.69) является ее линеаризация, которая может проводиться двумя принципиально различными путями. В первом случае линеаризация может быть проведена путем отбрасывания всех высших членов выше первого порядка в ряде (5.69), а во втором случае путем определения их статистических оптимальных линейных эквивалентов.

5.3.2. Статистическая линеаризация цифровых динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием

Линеаризованные модели системы с цифровым ДЧИМ строятся в следующем виде

$$\begin{aligned} \hat{x}[qT] = \hat{x}^0[qT] + m_x = \sum_{m=0}^{\infty} l_0^{(i)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT) m_f + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} l_1^{(i)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT] f^0[(q-m)T], \end{aligned} \quad (5.73)$$

где m_f и $f^0[(q-m)T]$ – соответственно математическое ожидание и центрированная составляющая входного случайного процесса $f[qT]$, i – индекс способа линеаризации.

Рассмотрим подробнее способы построения линейных моделей системы с цифровым ДЧИМ [62].

Линеаризация системы в целом. В данном случае в уравнении (5.69) отбрасываются члены выше первого порядка, в результате чего решетчатые импульсные характеристики $l_1^{(1)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT]$ и $l_1^{(2)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT]$ в терминах z -преобразования определяются из следующих соотношений

$$L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, 1) = N_1(\tau_0, \tau_m, 1), \quad (5.74)$$

$$L_1^{(1)}(\tau_0, \tau_m, z) = N_1(\tau_0, \tau_m, z), \quad (5.75)$$

Оптимальная линеаризация системы в целом. В этом случае, решетчатые импульсные характеристики $l_0^{(2)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT]$ и $l_1^{(2)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT]$ подбираются так, чтобы выход линейной системы (5.73)

приближался к выходу нелинейной системы (5.69) в смысле квадратичного критерия

$$I_2 = M\{[x[qT] - \hat{x}[qT]]^2\} \rightarrow \min, \quad (5.76)$$

Подставляя в (5.76) уравнения (5.69) и (5.73) и, решая задачу минимизации по $1_0^{(2)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT]$ и $1_1^{(2)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT]$, получим следующие уравнения:

$$\sum_{m=0}^{\infty} 1_0^{(2)}(\gamma_m T, \gamma T, mT) m_f^2 = m_f \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} n_s[\gamma_m T, \gamma T, m_1 T, \dots, m_s T] \times \\ \times M\left\{\prod_{i=1}^s f[(q - m_i)T]\right\}, \quad (5.77)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 1_1^{(2)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT) M\{f^0[(q - p)T] f^0[(q - m)T]\} = \\ = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} n_s[\gamma_0 T, \gamma_m T, m_1 T, \dots, m_s T] M\left\{\prod_{i=1}^s f[(q - m_i)T]\right\}. \quad (5.78)$$

Данный способ статистической линеаризации базируется на представлении решения нелинейной системы уравнений функциональными рядами Вольтерра, что позволяет получить линейный статистический эквивалент системы с цифровым ДЧИМ любой степени точности.

Рассмотрим первое приближение $S=1$. В этом случае (5.75) и (5.78) будут выглядеть следующим образом:

$$m_f \sum_{m=0}^{\infty} 1_0^{(2)1}(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT) = \sum_{m=0}^N n_1(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT) m_f, \quad (5.79)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 1_1^{(2)1}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT] R_f[(p - m)T] = \sum_{m=0}^N n_1[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT] m_f \times \\ \times M\{f[(q - p)T] (m_f + f^0[(q - m)T])\}. \quad (5.80)$$

Отсюда получим, что

$$1_0^{(2)1}(\tau_0, \tau_m, 1) = N_1(\tau_0, \tau_m, 1), \quad (5.81)$$

$$1_1^{(2)1}(\tau_0, \tau_m, z) = N_1(\tau_0, \tau_m, z). \quad (5.82)$$

Выражения (5.81) и (5.82) совпадают соответственно с (5.74) и (5.75), т.е. в первом приближении получаем результат, совпадающий с результатом первого способа линеаризации.

Рассмотрим второе приближение ($S=2$). Из выражения (5.69) следует, что $N_2(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2)$ равно нулю. Тогда из выражений (5.77) и (5.78)

следует, что результат второго приближения совпадает с результатом первого приближения.

Рассмотрим третье приближение ($S=3$). С использованием результатов приложения ПЗ получаем следующие выражения для определения линейной эквивалентной системы с цифровым МИЧИМ

$$\begin{aligned} L_0^{(2)3}(\tau_0, \tau_m, 1) &= L_0^{(2)1}(\tau_0, \tau_m, 1) + m_f^2 N_3\left(\tau_0, \tau_m, 1, \frac{1}{d}, 1\right) + \\ &+ \sigma_f^2 \left[N_3\left(\tau_0, \tau_m, 1, d, \frac{1}{d}\right) + m_f^2 N_3(\tau_0, \tau_m, 1, 1, 1) \right] + \\ &+ \sigma_f^2 \left[N_3\left(\tau_0, \tau_m, 1, d, \frac{1}{d}\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, 1, \frac{1}{d}, d\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, d, 1, \frac{1}{d}\right) + \right. \\ &\left. + N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, 1, d\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, d, \frac{1}{d}, 1\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, d, 1\right) \right] \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} L_1^{(2)3}(\tau_0, \tau_m, z) &= L_0^{(2)1}(\tau_0, \tau_m, 1) + m_f^2 [N_3(\tau_0, \tau_m, z, 1, 1) + \\ &+ N_3(\tau_0, \tau_m, 1, z, 1) + N_3(\tau_0, \tau_m, 1, 1, z)] + \sigma_f^2 [N_3\left(\tau_0, \tau_m, z, d, \frac{1}{d}\right) + \\ &+ N_3\left(\tau_0, \tau_m, z, \frac{1}{d}, d\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, d, z, \frac{1}{d}\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, z, d\right) + \\ &+ N_3\left(\tau_0, \tau_m, d, \frac{1}{d}, z\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, d, z\right)]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Продолжая аналогичную процедуру можно получить линейные статистические модели с цифровым ДЧИМ с любой степенью точности.

Полученные линейные статистические модели цифровой динамической частотно-импульсной системы управления позволяют довольно просто решать задачи статистического анализа и синтеза.

Например, математическое ожидание и дисперсия процесса ошибки $x[qT]$ системы определяются соотношениями [2, 18, 19]:

$$m_x = L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, 1) m_f, \quad (5.85)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} [L_1^{(i)}(\tau_0, \tau_m, e^{j\omega T})]^2 S_f(\omega) d\omega, \quad (5.86)$$

где $S_f(\omega)$ – спектральная плотность входного случайного сигнала $f[qT]$.

Полученная линейная модель (5.73) системы с цифровым МИЧИМ имеет ряд свойств. Например, решетчатая импульсная характеристика $l_0^{(i)}[\gamma_0 T, \gamma_m T, mT]$ (5.83) равна нулю. Это ее свойство приводит к тому, что математическое ожидание процесса ошибки $x[qT]$ равно нулю при

использовании линейной модели цифровых интегральных частотно-импульсных системы любой степени точности.

Покажем это на примере. При использовании первого приближения ($S=1$) получаем:

$$m_x = L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, 1) m_f = m_f \frac{1}{1 + \theta_1(\tau_0, \tau_m, 1)}. \quad (5.87)$$

Согласно (5.65) и (5.63), $\theta_1(\tau_0, \tau_m, 1)$ определяется соотношением:

$$\theta_1(\tau_0, \tau_m, 1) = M_1(\tau_m, z) W(\tau_0, z) = \frac{e_1 k_u z}{\Delta z - 1} W(\tau_0, z). \quad (5.88)$$

Наличие в знаменателе $\theta_1(\tau_0, \tau_m, z)$ (5.88) множителя $(z-1)$ приводит к тому, что

$$N(\tau_0, \tau_m, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} N(\tau_0, \tau_m, z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\Delta(z-1)}{\Delta(z-1) + e_1 k_u z W(\tau_0, z)}. \quad (5.89)$$

Следовательно,

$$m_x = L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, 1) m_f = 0. \quad (5.90)$$

Рассмотрим третье приближение ($S=3$). Тогда выражение (5.85) с учетом (5.83) примет вид

$$\begin{aligned} m_x = m_f \{ & L_0^{(1)}(\tau_0, \tau_m, 1) + m_f N_3(\tau_0, \tau_m, 1, 1, 1) + \\ & + \sigma_f^2 [N_3\left(\tau_0, \tau_m, 1, d, \frac{1}{d}\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, 1, \frac{1}{d}, d\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, d, 1, \frac{1}{d}\right) + \\ & + N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, 1, d\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, d, \frac{1}{d}, 1\right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, d, 1\right)] \} \end{aligned} \quad (5.91)$$

Выражение для определения $N_3(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2, z_3)$ согласно (5.69) имеет вид:

$$N_3(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2, z_3) = - \frac{\theta_3(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2, z_3) \prod_{i=1}^3 N_3(\tau_0, \tau_m, z_i)}{1 + \theta_3(\tau_0, \tau_m, z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)}. \quad (5.92)$$

Анализ (5.92) показывает, что если, хотя бы одно из сомножителей произведения $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ равно единице, то в связи с (5.92) можно заключить, что

$$N_3(\tau_0, \tau_m, 1, 1, 1) = N_3\left(\tau_0, \tau_m, d, 1, \frac{1}{d}\right) = \dots = N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, d, 1\right) = 0. \quad (5.93)$$

Следовательно,

$$m_x = L_0^{(i)}(\tau_0, \tau_m, 1) m_f = 0. \quad (5.94)$$

Из анализа ядер вольтерровской модели (5.65) системы с цифровым модифицированным ДЧИМ можно заключить, что при любом

приближении величины математическое ожидание процесса ошибки системы m_x равно нулю.

С учетом (5.94) статистически линеаризованная модель системы примет вид:

$$\hat{x}[qT] = \sum_{m=0}^{\infty} 1_1^{(i)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT) f^0[(q-m)T]. \quad (5.95)$$

5.3.3. Синтез цифровых динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием

Полученные нелинейная (5.69) и линейная (5.73) модели цифровых ДЧИСАУ объектами с запаздыванием позволяет непосредственно проводить синтез данной системы.

Дискретная вольтерровская модель системы (5.69) устанавливает явную связь между входом системы $f[qT]$ и процессом ошибки $x[qT]$ и на ее основе задача оценки параметров цифрового динамического частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием формируется следующим образом [17]

$$\min_{\vec{c}} \left\{ \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_{l_1}=0}^{\infty} n_{l_1} [\gamma_0 T, \gamma_m T, m_1 T, \dots, m_{l_1} T, \vec{c}] \times \right. \\ \times n_{l_2} [\gamma_0 T, \gamma_m T, m_1 T, \dots, m_{l_1} T, \vec{c}] (R_f^{(2)}[m_1, \dots, m_{l_1}, \beta_1, \dots, \beta_{l_2}] - \\ \left. - R_f^{(1)}[m_1, \dots, m_{l_1}] R_f^{(2)}[\beta_1, \dots, \beta_{l_2}]) : M \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} n_k \oplus^k f[qT] \right) \leq 0 \right\}, \quad (5.96)$$

где

$$R_f^{(1)}[m_1, \dots, m_{l_1}] = M \left\{ \prod_{i=1}^{l_1} f[(n - m_i)T] \right\} \\ R_f^{(2)}[m_1, \dots, m_{l_1}, \beta_1, \dots, \beta_{l_2}] = M \left\{ \prod_{j=1}^{l_1} f[(n - m_j)T] \prod_{i=1}^{l_2} f[(n - \beta_i)T] \right\}, \quad (5.97)$$

M – символ математического ожидания, ρ – допустимая область параметров цифрового ДЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием, $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_n]^T$ – вектор настраиваемых параметров модулятора.

Выражение (5.96) не содержит переменных x, y, z и задача (5.96) сводится к поиску экстремума функции многих переменных. Однако в вычислительном отношении ее решение является трудоемким, так как

связано с необходимостью решения довольно сложных систем нелинейных уравнений.

С целью упрощения задачи (5.96) в дальнейшем при ее решении используются статистически линеаризованные модели (5.73). Тогда задача (5.96) представляется в виде

$$\min_{\vec{c}} \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |L_1^{(i)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, e^{j\omega T}, \vec{c})|^2 S_f(\omega) d\omega : \right. \\ \left. M_p \left(\sum_{m=0}^{\infty} l_1^{(i)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT, \vec{c}) m_f + \sum_{m=0}^{\infty} l_1(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT) f^0[(q-m)T] \right) \right\}, (5.97)$$

где $S_f(\omega)$ – спектральная плотность входного случайного сигнала $f[qT]$, $L_1^{(i)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, \vec{c}, z) = Z\{l_1^{(i)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT, \vec{c})\}$ – Z-преобразование от импульсной характеристики $l_1^{(i)}(\gamma_0 T, \gamma_m T, mT, \vec{c})$ линеаризованной модели замкнутой системы (5.69).

5.4. Вычислительные алгоритмы статистического анализа и синтеза цифровой системы с запаздыванием

Алгоритм статистического исследования цифровой динамической частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием сводится к следующему:

1. Вычислить коэффициенты разложения нелинейной функции (5.46) в ортогональный ряд (5.51) по формуле (5.52).
2. Найти коэффициенты рядов (5.54) и (5.56) соответственно по формулам (5.55) и (5.57).
3. Найти изображения ядер (5.48) по формуле (5.50).
4. Определить изображения ядер ряда (5.59) по формуле (5.60).
5. Определить изображения ядер вольтеровской модели цифрового модифицированного динамического частотно-импульсного модулятора (5.60) по формулам (5.61).
6. Формировать ядра вольтеровской модели разомкнутой системы (5.64) по соотношениям (5.65).
7. Формировать ядра ряда (5.67) по формулам (5.69).
8. Формирование линейной модели системы (5.73) по соотношениям (5.82) – (5.84).

9. Статистический анализ цифровой ДЧИСАУ объектами с запаздыванием по формулам (5.84) – (5.85).
10. Синтез цифровой ДЧИСАУ объектами с запаздыванием по выражениям (5.96) или (5.97).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Обосновать и показать преимущества применения для объекта с запаздыванием частотно-импульсного алгоритма управления.
2. Описать принцип действия и написать уравнения цифровой динамической частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием.
3. Поставить задачу построения структурной модели цифрового динамического частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием.
4. Вывести уравнения блока сброса структурной модели цифрового Σ -частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием.
5. Вывести уравнения блока формирования импульсов структурной модели цифрового Σ -частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием.
6. Построить структурную модель цифрового интегрального частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием.
7. Сравнить и показать отличия структурных моделей цифровых интегрального и Σ -частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием.
8. Привести процедуру построения структурной модели цифрового ДЧИМ с линейным фильтром общего вида.
9. Привести процедуру построения структурной модели цифрового ДЧИМ с нелинейным фильтром.
10. Показать особенности структурных моделей цифровых и непрерывных динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

11. Привести общую процедуру формирования вольтерровских моделей цифровой динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.
12. Получить вольтерровскую модель цифровой интегральной частотно-импульсной системы с запаздыванием.
13. Получить вольтерровскую модель цифровой интегральной частотно-импульсной системы с запаздыванием.
14. Получить вольтерровскую модель цифровой Σ -частотно-импульсной системы с запаздыванием.
15. Написать выражения для определения статистических характеристик процесса ошибки цифровой системы.
16. Привести процедуру получения статистически линеаризованных моделей динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.
17. Получить линейные модели путем статистической линеаризации динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.
18. Получить линейные модели путем статистической оптимальной линеаризации динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.
19. Показать постановку задачи и схему синтеза цифровой динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.
20. Показать методику синтеза с использованием вольтерровской модели цифровой динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.
21. Показать методику синтеза с использованием статистически линеаризованной и статистически оптимальной линеаризованной моделей цифровой динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.
22. Привести вычислительные алгоритмы статистического анализа и синтеза цифровой динамической частотно-импульсной системы с запаздыванием.

6. ДИАЛогоВАЯ СИСТЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данном разделе разработаны инструментальные программные средства для решения в диалоговом режиме задач анализа, синтеза и стохастической устойчивости динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием.

Кроме того, предложенная диалоговая система может работать в режиме моделирования с целью оценки свойства синтезируемой системы, а также в режиме обучения методам статистического исследования и моделирования систем управления объектами с запаздыванием.

6.1. Назначение и функциональная структура диалоговой системы

Разрабатываемая диалоговая система предназначена для анализа, синтеза и стохастической устойчивости динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием и позволяет решать следующие задачи:

- анализ стохастической устойчивости и оценка точности динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием;
- синтез асимптотически оптимальных по статистическому критерию ДЧИСАУ объектами с запаздыванием;

– контрольная оценка свойств синтезируемой системы путем цифрового статистического моделирования.

Дружественный интерфейс с пользователем, применение методов имитационного моделирования и использование для исследования ДЧИСАУ объектами с запаздыванием аппарата функциональных рядов Вольтерра и стохастических дифференциальных уравнений Ито дает возможность успешно решать поставленные задачи.

Общая функциональная структура диалоговой системы приведена на рис.6.1.

Диалоговая система исследования стохастических динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием состоит из прикладных программных модулей (функциональная часть), управляющих модулей (системная часть), обеспечивающих управление и взаимодействие с пользователем и между программами при решении конкретных задач, и файла данных (информационная часть) [6, 23] .

6.1.1. Системная часть диалоговой системы

В состав системной части входят блоки: Редактор, транслятор, монитор (управляющая программа) [6].

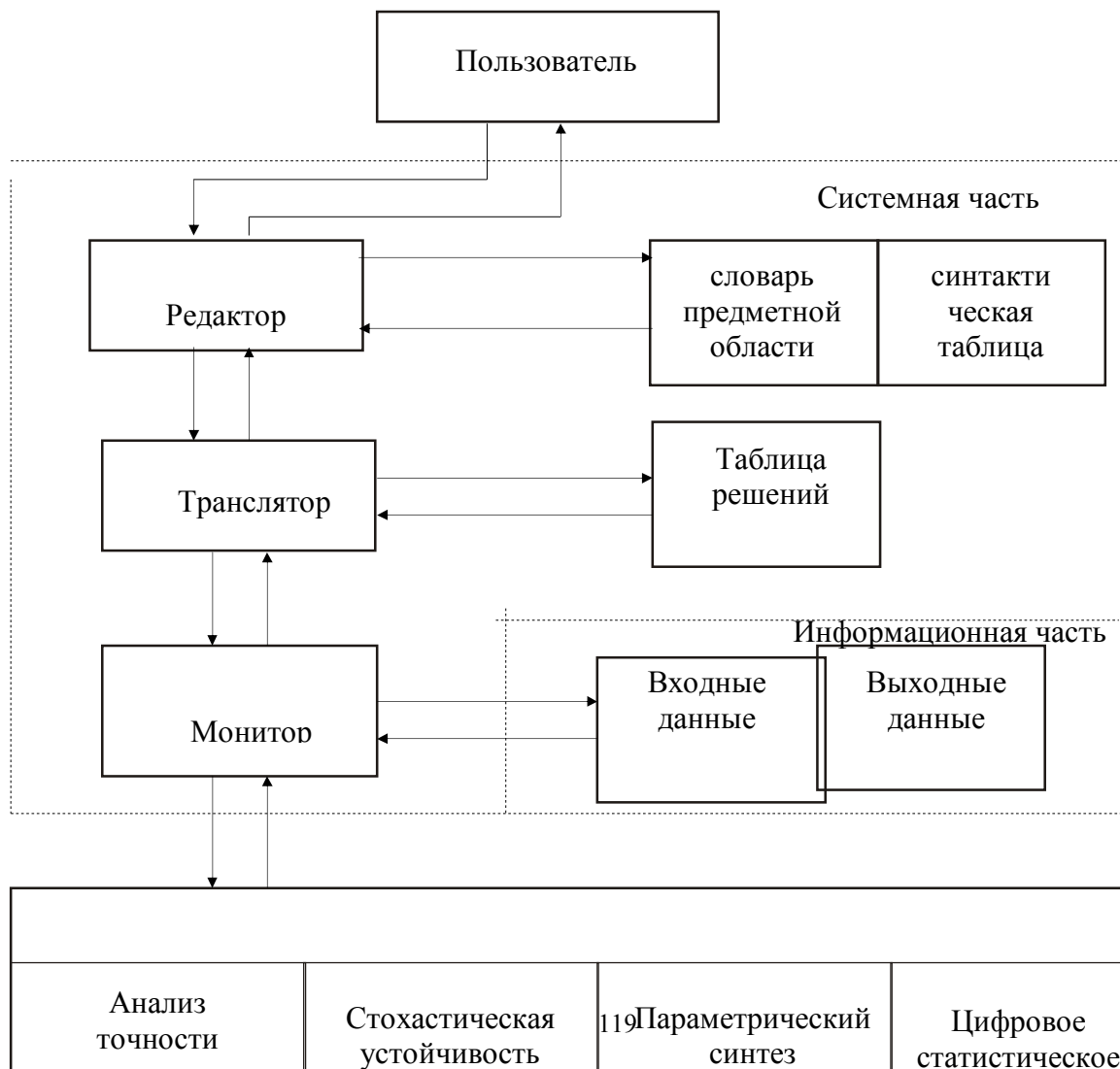


Рис. 6.1. Функциональная структура диалоговой системы

Редактор- это отдельный модуль из системной части, который считывает задание, расшифровывает его и преобразует в задание для транслятора. Кроме задания на выполнение задачи редактор имеет служебную информацию: словарь предметной области, синтаксическую таблицу.

Функционирование редактора можно представить следующим образом:

- входное задание считывается слово за словом в память машины;
- каждое входное слово идентифицируется с помощью словаря терминов предметной области. При отсутствии входного слова в словаре возникает ситуация ошибки, т.е. выдается диагностическое сообщение;
- используя синтаксическую таблицу, редактор осуществляет контроль порядка следования слов во входном предложении, т.е. формирует задание для транслятора в виде процедуры поиска в модели предметной области.
- используя синтаксическую таблицу, редактор осуществляет контроль порядка следования слов во входном предложении, т.е. формирует задание для транслятора в виде процедуры поиска в модели предметной области.

Словарь терминов предметной области составлен из определений и терминов, используемых в предметной области системы. Предметной областью данной системы является анализ и синтез стохастических динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

Словарь терминов предметной области состоит из 44 слов, и содержательный их смысл приведен в табл. 6.1.

Таблица 6.1.

Словарь терминов предметной области

	Наименование слова	Содержательный смысл
--	-----------------------	----------------------

1	АНАЛ	Анализ системы
2	СИНТ	Синтез системы
3	ДТОЧ	Динамическая точность
4	СТУС	Стохастическая устойчивость
5	ПСИН	Параметрический синтез
6	ССИН	Структурный синтез
7	СУДТ	Стохастическая устойчивость и динамическая точность
8	СУПС	Стохастическая устойчивость и параметрический синтез
	Наименование слова	Содержательный смысл
9	ССПС	Структурный и параметрический синтез
10	СПСД	Структурный и параметрический синтез, динамическая точность
11	СУПД	Стохастическая устойчивость, параметрический синтез и динамическая точность
12	ССУП	Структурный и параметрический синтез, стохастическая устойчивость
13	КРСК	Среднеквадратичный критерий оптимальности
14	КРВВ	Критерий оптимальности вероятности выхода
15	КРАЛ	Алгебраический критерий
16	КРЧС	Частотный критерий
17	АЛЧК	Алгебраический и частотный критерий
18	АЛВВ	Алгебраический критерий и вероятности выхода
19	ЧССК	Стохастический частотный и среднеквадратичный критерий
20	ЧСВВ	Стохастический частотный критерий и

		вероятности выхода
21	КРОТ	Критерий оптимального проектирования
22	ОПЛ1	Объект с постоянными параметрами с фильтром первого порядка
23	ОПЛ2	Объект с постоянными параметрами с фильтром второго порядка
24	ОПЛ3	Объект с постоянными параметрами с фильтром третьего порядка
25	ОПН2	Нелинейный объект второго порядка
26	ОПН3	Нелинейный объект третьего порядка
27	ОЗЛ1	Линейный объект с запаздыванием и фильтром первого порядка
	Наименование слова	Содержательный смысл
28	ОЗЛ2	Линейный объект с запаздыванием и фильтром второго порядка
29	ОЗЛ3	Линейный объект с запаздыванием и фильтром третьего порядка
30	ОЗН2	Нелинейный объект второго порядка с запаздыванием
31	ОЗН3	Нелинейный объект третьего порядка с запаздыванием
32	ОСЛ1	Объект со случайными параметрами и фильтром первого порядка
33	ОЗЛ2	Объект со случайными параметрами и фильтром второго порядка
34	ОСЛ3	Объект со случайными параметрами и фильтром третьего порядка
35	ОСН2	Нелинейный объект второго порядка со случайными параметрами
36	ОСН3	Нелинейный объект третьего порядка со случайными параметрами
37	ИЧМН	Непрерывный интегральный частотно-импульсный модулятор
38	ИЧМД	Дискретный интегральный

		частотно-импульсный модулятор
39	ИЧММ	Модифицированный ИЧИМ
40	СЧМН	Непрерывный ЧИМ с фильтром первого порядка
41	СЧМЛ	Модифицированный ЧИМ с фильтром первого порядка
42	ДЧМН	Дискретный ЧИМ с фильтром первого порядка
43	ДЧМД	Дискретный ЧИМ с фильтром второго порядка
44	ДЧММ	Модифицированный ЧИМ с фильтром второго порядка

Транслятор генерирует на основе таблицы решения управляющую программу (монитор). Таблица решения (табл.6.2) определяет последовательность выполнения функциональных модулей и выделяет набор входных и выходных данных, необходимых для решения конкретной задачи.

В первом столбце помещены решаемые диалоговой системой задачи. Например, анализ системы с ИЧИМ методом цифрового статистического моделирования и т.д.

Второй столбец таблицы решения представляет действие по управлению $P_{11}, \dots, P_{1kL}$ (цепочка вызовов модулей пакета), которые необходимо выполнить при решении конкретной задачи исследования системы.

Таблица 6.2

Таблица решений

Номер задачи	Действие по управлению	Значение переменной состояния по управлению	Действие по информации	Значение переменной состояния по информации
1	$P_{11}, \dots, P_{1k1}$	$I_{11}, \dots, I_{1k1}$	$S_{11}, \dots, S_{1k1}$	$Y_{11}, \dots, Y_{1k1}$
2	$P_{11}, \dots, P_{1k2}$	$I_{11}, \dots, I_{1k2}$	$S_{11}, \dots, S_{1k2}$	$Y_{11}, \dots, Y_{1k2}$
3	$P_{11}, \dots, P_{1k3}$	$I_{11}, \dots, I_{1k3}$	$S_{11}, \dots, S_{1k3}$	$Y_{11}, \dots, Y_{1k3}$

n	 $P_{11}, \dots, P_{1kn}$	 $I_{11}, \dots, I_{1kn}$	 $S_{11}, \dots, S_{1kn}$	 $Y_{11}, \dots, Y_{1kn}$
---	-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

Состояния, через которые должен пройти монитор диалоговой системы по управлению, можно занумеровать. Для этого введена переменная состояния I_{ij} , значения которой помещены в столбце 3.

В столбце 4 помещена цепочка действий по информации, представляющая собой необходимые для решения задачи исходные данные и результат. Переменные состояния перехода по информации представлены в столбце номер 6.

Монитор осуществляет вызов функциональных модулей для решения конкретной задачи, проверку условий перехода от одного модуля к другому, окончание работы системы. Он организует вычислительный процесс, вызывая прикладные модули согласно столбцу 2 таблицы решения (табл.6.2.). Результатом работы монитора является готовая к выполнению программа, которой и передается управление.

Входной язык предназначен для описания задач анализа и синтеза подсистем АСУТП, реализованных в классе систем управления с ДЧИМ.

Конструкция входного языка представлена текстовыми словами для описания конкретных задач исследования и проектирования подсистем АСУТП.

Текст задания на выполнение конкретной задачи составляется в соответствии со словами, хранящимися в словаре терминов предметной области пакета.

6.1.2. Информационная часть диалоговой системы

Центром сбора, хранения и накопления информации, обеспечивающим функционирование диалоговой системы является его файл данных.

В файл данных заносятся сведения, полученные при обработке паспортов функциональных модулей (набор входных и выходных данных). По требованию пользователя информация о модуле и его параметрах может быть выдана на печать в том же виде, в каком вводился паспорт модуля. Смысловые имена поступают в справочник имен, при формировании которого для экономии памяти совершается переход от смысловых имен к системным, являющимся порядковыми номерами имен в пакете. Вся работа внутри файла данных производится по системным именам.

В табл. 6.3. представлены наборы входных и выходных данных, используемых в данной диалоговой системе.

6.1.3. Функциональная часть диалоговой системы

Функциональная часть диалоговой системы представляет собой прикладные модули, предназначенные для решения задач статистического анализа и синтеза стохастических динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием. Прикладные модули функциональной части системы образуют четыре группы [8, 35, 49]. Рассмотрим каждую группу.

Первая группа модулей ANAL реализует алгоритм статистического анализа, рассмотренный в разделе 3. Модули ANAL1, ANAL2 реализуют соответственно алгоритмы статистического анализа на основе математических моделей, полученных первым и пятым способами статистической линеаризации.

Модули ANALD1, ANALD2 реализует алгоритмы статистического анализа цифровой ДЧИСУ объектами с запаздыванием на основе моделей, полученных первым и пятым способами статистической линеаризации.

Процедура статистического анализа сводится к следующему:

– выбора типа ДЧИМ из набора: ИЧИМ, Σ -ЧИМ, ДЧИМ с линейным фильтром второго порядка, дискретный ИЧИМ, дискретный Σ -ЧИМ, дискретный ДЧИМ с линейным фильтром второго порядка; i – выбор способа линеаризации ($i=1,2$);

Таблица 6.3.

Входные и выходные данные

Наименование объекта	Группа параметров
ИЧИМ	$K_m, \Delta, h_\phi, K_\phi$
Σ - ЧИМ	$K_m, \Delta, h_\phi, K_\phi, T_m$
ДЧИМ	$K_m, \Delta, h_\phi, K_\phi, T_1, T_2$
Модифицированный ПЧИМ	$K_m, \Delta, h_m, h_\phi, K_\phi$
Модифицированный Е-ЧИМ	$K_m, \Delta, T_m, h_m, h_\phi, K_\phi$
Модифицированный ДЧИМ	$K_m, \Delta, T_m, T_2, h_m, h_\phi, K_\phi$
Объект с постоянными параметрами	$K_{об}, T_{об}, T_{и}$
Объект с постоянными параметрами и запаздыванием	$K_{об}, T_{об}, T_{и}, h_{об}$
Объект со случайными параметрами и запаздыванием	$K_{об}, T_{об}, T_{и}, h_{об}, r_{ij}, ij = 1,2$
Объект со случайными параметрами Входной процесс	$K_{об}, T_{об}, T_{и}, r_{ij}, ij=1,2$

Шум Процесс ошибки системы Оптимальность	m_f, b_f, α $r_{ij}, ij = 1, 2$ $R_x(\tau), S_x(\omega), \sigma_x^2, m_x$ $\sigma_{\text{зад}}^2, P_{\text{зад}}, I$
--	--

– формирование ядер нулевого порядка вольтерровской модели замкнутой системы;

– формирование ядер первого, второго и третьего порядка вольтерровской модели разомкнутой системы;

– формирование ядер первого, второго и третьего порядка вольтерровской модели замкнутой системы;

– формирование статистически линеаризованной модели ДЧИСАУ объектами с запаздыванием и подынтегрального выражения;

– вычисление статистических характеристик сигнала ошибки системы в стохастической области устойчивости.

Вторая группа модулей SINT предназначена для проведения параметрического синтеза системы в области ее стохастической устойчивости из условия минимума статистического критерия с использованием линеаризованных моделей. Алгоритм синтеза состоит из следующих этапов:

- задание критериального ограничения;
- выбор статистического критерия;
- выбор типа ДЧИМ;
- выбор способа линеаризации;
- формирование линеаризованной модели системы;
- реализация процедуры параметрического синтеза.

Третья группа модулей STON предназначена для оценки стохастической устойчивости системы на основе ее модели в виде стохастических дифференциальных уравнений. Алгоритм построения области стохастической устойчивости состоит из следующих этапов:

- выбор типа ДЧИМ из следующего набора: ИЧИМ, Σ -ЧИМ, ДЧИМ с линейным фильтром второго порядка;
- выбор типа критерия устойчивости (алгебраический, частотный);
- решение матричного уравнения Ляпунова;
- вычисление параметров λ_i , учитывающих влияние случайных шумов;
- проверка частотного условия устойчивости стохастической ДЧИСАУ объектами с запаздыванием;
- проверка алгебраического условия устойчивости ДЧИСАУ объектами с запаздыванием.

Четвертая группа модулей MONT предназначена для количественной оценки динамической точности ДЧИСАУ объектами с запаздыванием методом цифрового статистического моделирования. Алгоритм оценки свойств системы состоит из следующих этапов:

- моделирование входного случайного процесса;
- имитационное моделирование реальной ДЧИСАУ объектами с запаздыванием;
- оценка статистических характеристик системы.

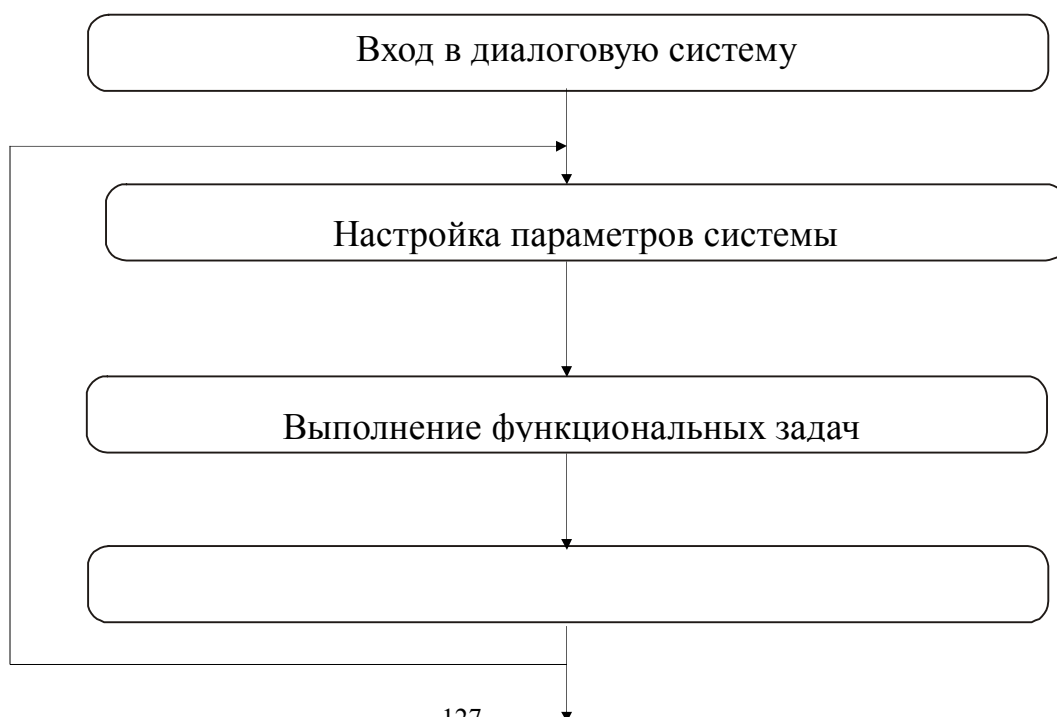
6.2. Функционирование диалоговой системы

В общем случае, диалоговая система должна представлять собой интеграцию необходимых пользователю задач и функций с удобной оболочкой для работы с ними. Причем эта оболочка должна обеспечить не только быстрое, удобное и качественное взаимодействие пользователя со своими задачами, но и предоставить ему ряд дополнительных возможностей. Например, вмешиваться в ход решения своих задач, оперативно обратиться к справочной информации и т.д.

Исходя из функциональной структуры диалоговой системы и учитывая вышесказанное, сформулируем основные требования к ней:

- диалоговая система должна состоять из независимых блоков для обеспечения возможности дальнейшего наращивания системы без дополнительных изменений;
- ввод-вывод данных должен осуществляться в привычной для пользователя виде, с использованием различных пояснений;
- диалоговая система должна предоставлять пользователю возможность корректировки введенных данных;
- диалоговая система должна обеспечивать вывод результатов решения не только на экран, но и в текстовый файл для формирования протокола решения;
- система диалога должна включать в себя информационные блоки и сообщения для удобства работы пользователя с системой

Алгоритм функционирования диалоговой системы представлен на рис.6.2.



Выход из системы диалога

Рис. 6.2. Алгоритм функционирования диалоговой системы

Вход в диалоговую систему производится с помощью нажатия специальной клавиши после загрузки системы.

На этапе “Настройка параметров системы” осуществляется формирование среды для функционирования последующих компонент системы с помощью системы кнопок, меню, окон ввода. Структурная схема данного блока приведена на рис. 6.3. и функции его блоков следующее:

– блок “Выбор предложения” обеспечивает вход в одну из следующих подсистем:

- 1) подсистема информационных сообщений;
- 2) подсистема решения функциональных задач;
- 3) подсистема выполнения сервисных функций;

– блок “Выбор вида информационного сообщения” реализует возможность для просмотра одного из предложенных информационных сообщений;

– блок “Выбор функциональной задачи” обеспечивает выбор нужной задачи исследования ДЧИСАУ объектами с запаздыванием;

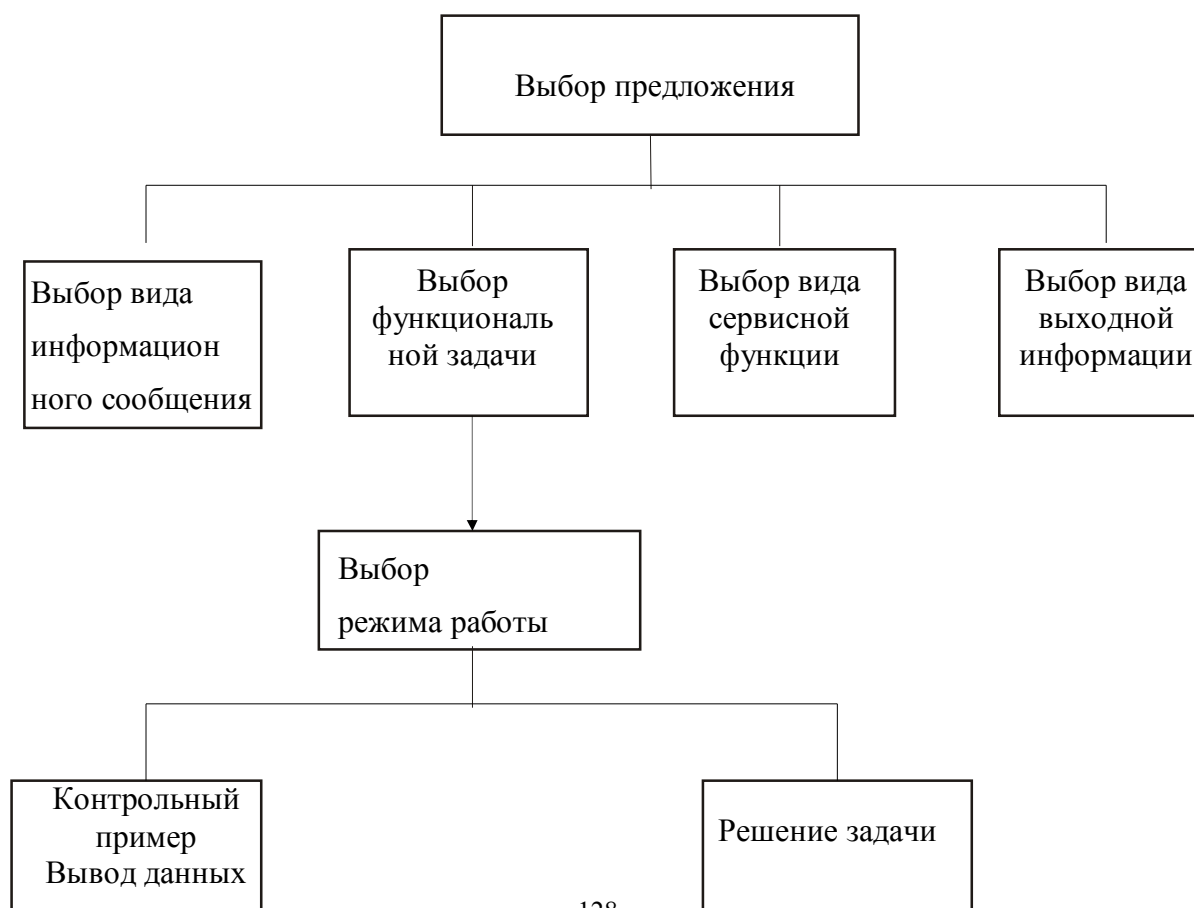


Рис. 6.3. Структура блока "Настройка параметров системы"

- блок “Выбор вида сервисной функции” дает возможность выбора для выполнения одной из следующих функций: просмотр файла, смена каталога;
- блок “Выбор режима работы” позволяет пометить необходимый режим: решение задачи, обучение, моделирование.
- блок “Контрольный пример” позволяет реализовать процедуру просмотра исходных данных контрольного примера на экране дисплея;
- блок “Решение задачи” обеспечивает возможность ввода исходных данных пользователем;
- блок “Вывод исходных данных” обеспечивает просмотр введенных пользователем данных на экране дисплея.

Блок “Выполнение функциональных задач” (рис. 6.2.) осуществляет в зависимости от параметров и данных, полученных в предыдущем блоке, следующие функции:

- анализ стохастической устойчивости и оценку точности ДЧИСАУ объектами с запаздыванием;
- синтез асимптотически оптимальной ДЧИСАУ объектами с запаздыванием;
- контрольная оценка свойств синтезируемой системы на основе цифрового статистического моделирования.

Данный блок не может быть выполнен без предварительной работы с блоком “Настройка параметров системы”.

Блок “Анализ результатов” осуществляет просмотр сообщений о результатах работы предыдущего блока на экране и формирование файлов с результатами работы.

Блок “Выход из системы диалога” осуществляется одновременно с выходом системы.

Вышеперечисленные блоки реализуются с помощью системы меню, зависимых и независимых кнопок, диалоговых окон, что отвечает основным требованиям диалоговой системы.

Разработанная диалоговая система имеет блочную структуру, что

позволяет наращивать количество выполняемых функциональных задач без изменения конфигурации самой системы.

6.3. Программное обеспечение диалоговой системы

Структура программного обеспечения (ПО) в соответствии с выполняемыми функциями представлена на рис. 6.4.

Программное обеспечение диалоговой системы включает в себя модуль диалога “IERMENV” и модулей системной и функциональной частей системы.

Программа “IERMENV” обеспечивает диалог между пользователем и модулем расчета системы. Она выполняет три основные функции:

- постановка задачи. С помощью иерархических меню выбираются (обговариваются) условия для решения задачи;
- установка параметров. Задание и редактирование с помощью оконного редактора одного или всех параметров решаемой задачи;
- запуск модуля расчета задачи. Осуществляется формирование файла связи, необходимого для передачи данных модулю расчета. Загрузку в память и запуск расчетного модуля.

Программное обеспечение системной части состоит из главной программы и подпрограмм RED, TRAN, MON.

Программное обеспечение функциональной части включает в себя прикладные программы, реализующие решение задач предметной области.

Вышеприведенная структура ПО обеспечивает полноту выполняемых всех требуемых функций, позволяет пользователю удобно взаимодействовать с системой.

Программное обеспечение системы состоит из главной программы и ряда процедур, вызываемых из нее.

При разработке программного обеспечения использовались проблемно-ориентированный язык ФОРТРАН и объектно-ориентированный язык Си. В связи с этим программное обеспечение системы содержит ряд процедур и функций, стандартных для вышеуказанных языков.

В данном описании приводятся только те процедуры и функции, разработанные при создании этой системы.

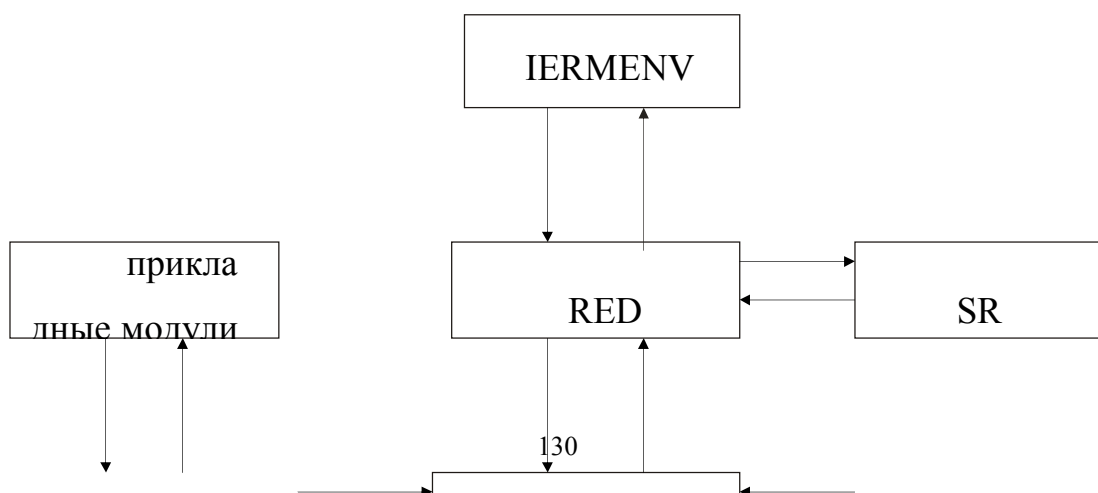




Рис. 6.4. Структура программного обеспечения

Ниже приведены описания разработанных процедур и функций.

Процедуры IERMENV предназначены для обеспечения диалога между системой и пользователем.

Входные данные: набор слов, определяющих конкретную решаемую задачу и исходные данные для расчета.

Выходные данные: результаты решения задачи в зависимости от значения входной информации.

Главная программа MAIN предназначена для управления работой системной части и выдачи диагностических ошибок о ходе процесса решения.

Входные данные: текст задания PVL (I), I=1–6.

Выходные данные: диагностическое сообщение о ходе процесса решения.

Процедура RED предназначена для идентификации слов входного предложения со словарем предметной области, проверки правильности следования слов во входном предложении пользователя и формирования диагностических признаков.

Входные данные: PVL (I) – вектор слов входного предложения, NV – количество слов во входном предложении.

Выходные данные: IRI, IR2 – признаки диагностических сообщений.

Подпрограмма SR служит для идентификации слов входного предложения со словарем предметной области и указания номера слова в словаре.

Входные данные:

- номер слова входного предложения I;
- количество слов в словаре предметной области K.

Выходные данные:

номер слова входного предложения в словаре предметной области.

Процедура TRAN формирует вектор кода решаемой задачи.

Входные данные: количество слов во входном предложении NV.

Выходные данные: код решаемой задачи KZ (6).

Процедура MON выполняет следующие функции:

- идентифицирует код решаемой задачи KZ (6) с таблицей решения функциональных задач;

- определяет номер решаемой задачи или диагностический признак того, что диалоговая система не решает поставленную пользователем задачу;

- вызывает прикладные модули функциональной части системы.

Входные данные: количество слов входного предложения NV.

Выходные данные: номер решаемой задачи JJ и диагностический признак IRZ об отсутствии данной задачи в системе.

Программное обеспечение функциональной части системы состоит из модулей, предназначенных для решения следующих задач:

- статистического анализа систем управления с динамической частотно-импульсной модуляцией ANALO1, ANALO2, ANALO3, ANALS1, ANALS2, ANALS3;

- параметрического синтеза стохастических динамических частотно-импульсных систем управления с сосредоточенными параметрами и запаздыванием SINTO1, SINTO2, SINTO3, SINTS1, SINTS2, SINTS3;

- стохастической устойчивости этих систем SVSH;

- контрольной оценки свойств синтезируемой системы.

Процедура ANALO1 предназначена для статистического анализа интегральной частотно-импульсной системы управления.

Входные данные:

- параметры входного случайного процесса (SF, DF, W);

- параметры интегрального частотно-импульсного модулятора (AKM, DELTA, AKF, HF);

- параметры управляемого объекта (AKOB, TOB).

Выходные данные: дисперсия процесса ошибки системы DX.

Процедура ANALO2 предназначена для статистического анализа Σ -частотно - импульсной системы управления.

Входные данные:

- параметры входного случайного процесса (SF, DF, W);

- параметры Σ -частотно – импульсного модулятора (AKM, AP1, DELTA, AKF, HF);

- параметры управляемого объекта (AKOB, TOB).

Выходные данные: дисперсия процесса ошибки системы DX.

Процедура ANALO3 решает задачу статистического анализа динамической частотно-импульсной системы управления.

Входные данные:

- параметры входного случайного процесса (SF, DF, W);

- параметры динамического частотно-импульсного модулятора (AKM, AP1, AP2, DELTA, AKF, HF);

- параметры объекта с запаздыванием (AKOB, TOB, HOB).

Выходные данные: дисперсия ошибки системы DX.

Процедура ANALS1 служит для статистического анализа интегральной

частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.

Входные данные:

- параметры входного процесса (SF, DF, W);
- параметры модифицированного ИЧИМ (AKM, DELTA, HM, AKF, DF);
- параметры объекта с запаздыванием (AKOB, TOB, NOB).

Выходные данные: дисперсия процесса ошибки системы DX.

Процедура ANALS2 предназначена для статистического анализа Σ -частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.

Входные данные:

- параметры входного процесса (SF, DF, W);
- параметры Σ -ЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием (AKM, AP1, DELTA, HM, AKF, HF);
- параметры объекта с запаздыванием (AKOB, TOB, NOB).

Выходные данные: дисперсия процесса ошибки системы DX.

Процедура ANALS3 предназначена для статистического анализа динамической частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием.

Входные данные:

- параметры входного процесса (SF, DF, W);
- параметры модифицированного ДЧИМ (AKM, AP1, AP2, DELTA, HM, AKF, HF);
- параметры объекта с запаздыванием (AKOB, TOB, NOB).

Группа процедур SINT предназначена для решения задачи параметрического синтеза системы с модифицированным ДЧИМ в области ее стохастической устойчивости.

Входные данные:

- количество оптимизируемых параметров NP;
- исходный вектор параметров P (NP);
- нижняя и верхняя границы изменения параметров A(NP), B(NP);
- параметры управляемого объекта с запаздыванием (AKOB, TOB, NOB);
- характеристики входного процесса SF, DF, W;

Выходные данные: оптимальные значения дисперсии сигнала ошибки системы и вектор параметров ДЧИМ, применяемых для управления объектами с запаздыванием.

Группа процедур SUSH предназначена для оценки стохастической устойчивости ДЧИСАУ объектами с запаздыванием.

Входные данные:

- параметры объекта управления PKDV, KVO, НОВ;
- параметры ДЧИМ, применяемого для управления объектами с запаздыванием PM, CM, НОМ;
- характеристики шума SIG, RS;
- вспомогательные матрицы и вектора CL1, E1, B1, QB, QBT.

Выходные данные:

- сообщения: “ДЧИСАУ объектами с запаздыванием устойчива” или “ДЧИСАУ объектами с запаздыванием неустойчива”;
- параметры модулятора.

Процедура MONT служит для оценки свойств ДЧИСАУ объектами с запаздыванием методом цифрового статистического моделирования.

Входные данные:

- параметры управляемого объекта с запаздыванием (АКОВ, ТОВ, НОВ);
- характеристики входного процесса (SF, DF, W);
- параметры метода Монте-Карло (Т – шаг дискретизации, N – количество реализаций).

Выходные данные: статистические характеристики сигнала ошибки $x(t)$ (дисперсия DX и математическое ожидание SX).

Таким образом, описаны основные процедуры и функции программ, реализующие процессы решения задач анализа и синтеза стохастических ДЧИСАУ объектами с запаздыванием.

Программное обеспечение диалоговой системы исследования выполнено на языках высокого уровня Си и Фортран.

При разработке программного обеспечения использовались методы и средства объектно-ориентированного программирования и объектно-ориентированной библиотеки языка Си.

Библиотека языка Си включает:

- многократно перекрывающиеся окна с изменяемыми размерами;
- выпадающие меню;
- поддержку мыши;
- встроенную установку цвета;
- кнопки, окна диалога, зависимые и независимые кластеры;
- стандартную обработку клавиш и нажатий мышки и т.д.

Вышеописанные средства используются для меню, ввода и вывода данных.

Вычислительные разделы прикладного программного обеспечения выполнены с использованием традиционных средств языка ФОРТРАН.

Для успешного функционирования программного комплекса необходимо разместить на жестком диске (или дискете) в одном каталоге следующие файлы:

Кат. DIALOG

- | | |
|--------------|-------------------|
| 1. Ier 1.exe | 4. Aspr.for |
| 2. Ier 1.c | 5. asprchII.m.for |
| 3. as5.for | 6. aspm.for |

Для загрузки из DOS необходимо перейти в каталог, где находятся вышеуказанные файлы и набрать в командной строке: Ier1.exe.

Затем следует нажать клавишу ENTER.

Для загрузки программы из NORTON необходимо перейти в каталог с вышеуказанными файлами, подвести маркер к файлу нажать клавишу ENTER.

В качестве контрольного примера рассмотрим реализацию решения задачи статистического анализа интегральной частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием.

После запуска программы и входа в диалоговую систему с помощью нажатия клавиши F 10 на экране появляется главное меню системы. При выборе пункта меню “Анализ” на экране возникает подменю. При выборе подменю “Динамическая точность” появляется на экране дисплея подменю. При выборе подменю “Модифицированный интегральный ЧИМ” возникает подменю. При выборе подменю “Линейный объект с фильтром первого порядка” возникает подменю.

При выборе подменю “Модель, линеаризованная вторым способом” на экране возникает диалоговое окно ввода данных.

После окончания ввода данных и просмотра исходных данных на экране появляется диалоговое окно, содержащее результаты решения задачи-статистический анализ ИЧИСАУ объектами с запаздыванием, на основе статистически линеаризованной вторым способом математической модели.

Проведение проверки программы показало, что функция решения задачи статистического анализа ИЧИСАУ объектами с запаздыванием успешно реализуется системой.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Назначение, задачи и структура диалоговой системы исследования динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием.
2. Основные блоки диалоговой системы исследования динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием.

3. Состав и блоки системной части диалоговой системы исследования.
4. Состав и задачи, решаемые информационной частью диалоговой системы исследования.
5. Основные прикладные модули функциональной части диалоговой системы исследования.
6. Алгоритм функционирования диалоговой системы.
7. Структура блока "Настройка параметров системы" диалоговой системы.
8. Структура программного обеспечения диалоговой системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современной теории управления одним из главных направлений в изучении широких классов управляемых непрерывных и импульсных динамических систем является метод, основанный на применении функциональных рядов Вольтерра, являющихся эффективным инструментом исследования систем. В этом направлении сложился собственный математический аппарат и методическая база для исследования таких систем. С их помощью были обнаружены закономерности и свойства, присущие тем или иным системам, которые проявляются одинаковым образом в управляемых динамических системах различной природы.

В учебнике рассмотрены элементы математической теории систем и функциональных рядов Вольтерра, применяемых для построения математических моделей и методов статистического исследования нелинейных динамических систем. Особое внимание уделено вопросам построения математических моделей и разработке методов статистического исследования динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием.

Разработаны структурные модели различных видов динамических частотно-импульсных модуляторов и с их использованием построены математические модели рассматриваемых систем в классе функциональных рядов Вольтерра. На основе вольтерровских моделей получены различные по точности и вычислительной трудоемкости статистически линеаризованные модели и методы статистических исследований непрерывных динамических частотно-импульсных систем.

Методы статистического анализа и синтеза непрерывных динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием в пятом разделе обобщены для цифровых систем.

Приведенные в учебнике модели и методы статистического анализа и синтеза непрерывных и цифровых динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием в шестом разделе использованы при разработке диалоговой системы исследования данного класса систем.

Материалы учебника полезны для широкого круга студентов вузов при изучении ряда специальных дисциплин управленческого цикла «Проектирование автоматических и автоматизированных систем

управления», «Теория информационных систем», «Теория управления» и «Модели и методы стохастических систем управления», а также для аспирантов и специалистов при создании систем автоматического и автоматизированного управления производственно-технологическими процессами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андреев Н.И.* Теория статистически оптимальных систем управления М.:Наука, 1980. 415 с.
2. *Айтчанов Б.Х.* Статистическая линейаризация и оценка точности цифровых интегральных частотно–импульсных систем автоматического управления // Математическое и программное обеспечение иерархических систем проектирования и управления. Алма-Ата: КазПТИ, 1988. С. 109–115.
3. *Айтчанов Б.Х.* Интегральные частотно-импульсные системы автоматического управления. Алма-Ата: КазПТИ, 1990. 25 с.
4. *Айтчанов Б.Х.* Теория автоматического управления. Алма-Ата: КазПТИ, 1990. 31 с.
5. *Айтчанов Б.Х.* Разработка методов статистического анализа интегральных частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Алма-Ата: КазПТИ, 1982. 24 с.
6. *Айтчанов Б.Х.* Модели динамических частотно-импульсных систем автоматического управления объектами с запаздыванием // Модели и методы автоматизации управления производственными системами. Алматы: КазПТИ, 1996. Вып. 2. С. 65–73.
7. *Айтчанов Б.Х.* Пакет прикладных программ для исследования одного класса нелинейных цифровых систем управления // Теория и практика

создания автоматизированных систем проектирования и управления. Алма-Ата: КазПТИ, 1986. С. 56–62.

8. *Айтчанов Б.Х.* Применение ЭВМ при проектировании и исследовании автоматизированных систем управления. Алма-Ата: КазПТИ, 1987. 26 с.

9. *Айтчанов Б.Х., Ашимова Р.Б. и др.* Выбор оптимальных параметров частотно-импульсных подсистем непосредственного цифрового управления технологическими процессами свинцового производства // Тезисы докладов X-Всесоюзного научно-технического совещания “Создание и внедрение автоматизированных и автоматических систем управления дискретно-непрерывными технологическими процессами”. М., 1983. С.32–33.

10. *Айтчанов Б.Х.* Дискретные системы автоматического управления. Алма-Ата: КазПТИ, 1988. 27 с.

11. *Асаубаев К.Ш.* Вольтерровские модели частотно-импульсных систем управления объектами со случайными параметрами // Динамика неоднородных систем. М.: ВНИСИ, 1984. С.14–21.

12. *Асаубаев К.Ш., Ашимов А.А., Попков Ю.С.* Модели систем автоматического управления с динамической частотно-импульсной модуляцией // А и Т. 1977. № 2. С. 52–63.

13. *Асаубаев К.Ш., Ашимов А.А., Попков Ю.С.* Статистический анализ автоматических систем с динамической частотно-импульсной модуляцией // А и Т. 1980. № 4. С.49–60.

14. *Асаубаев К.Ш., Айтчанов Б.Х.* Функциональная модель интегральной частотно-импульсной системы автоматического управления объектами с запаздыванием // Оптимизация процессов управления. Алма-Ата: 1979. С.100.

15. *Асаубаев К.Ш., Айтчанов Б.Х.* Методы исследования стохастических динамических частотно-импульсных систем автоматического управления

объектами с запаздыванием. В кн.: Актуальные вопросы современной науки и техники. Алматы, 1994. С. 129–132.

16. *Асаубаев К.Ш., Айтчанов Б.Х.* Основы построения АСУ. Алма-Ата: КазПТИ, 1986. 28 с.

17. *Ашимов А.А., Попков Ю.С., Асаубаев К.Ш., Айтчанов Б.Х.* Интегральные частотно-импульсные автоматические системы управления объектами с запаздыванием // Кибернетика и автоматика. Алма-Ата: КазПТИ, 1978. Вып. 7. С. 12–17.

18. *Ашимов А.А., Асаубаев К.Ш., Айтчанов Б.Х.* Статистический анализ модифицированной интегральной частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием // Вопросы создания АСУ технологическими процессами и предприятиями. Алма-Ата: КазПТИ, 1981. С. 24–36.

19. *Бакли П.С.* Автоматическое регулирование процессов с чистым запаздыванием // Труды I-го конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 1. С. 95–111.

20. *Балакирев В.С., Дудников Е.Г., Цирлин А.М.* Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. М.: Энергия, 1967. 213 с.

21. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972. 768 с.

22. *Ван-дер Поль Б., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. М.: ИЛ, 1952. 247 с.

23. *Ван-Трис Г.* Синтез оптимальных нелинейных систем управления. М.: Мир, 1964. 358 с.

24. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974. 327 с.

25. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука. 1971. 334 с.

26. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М.: Физматгиз. 1958. 412 с.
27. *Дралюк Б.Н., Синайский Г.В.* Системы автоматического регулирования объектами с транспортным запаздыванием. М.: Энергия, 1969. 72 с.
28. *Дубас В.И.* Статистические характеристики частотно–импульсных модуляторов // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наукова думка, 1969. Вып. 2. С. 95–110.
29. *Дубас В.И.* Приближенный статистический анализ систем с частотно–импульсной модуляцией // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наукова думка, 1971. Вып.9. С. 53-59.
30. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. М.:Наука, 1970. 532 с.
31. *Иванов В.А., Каневский В.А., Попков Ю.С., Штеренберг Е.Н.* Автоматические системы с ИЧИ-модуляцией для контроля и регулирования потоков сыпучих материалов // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наукова думка, 1975. Вып.28. С. 91–98.
32. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.:Мир, 1984.
33. *Казаков И.Е., Доступов Б.Г.* Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1962.
34. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.:Мир, 1971. 376 с.
35. *Каневский В.Л., Попков Ю.С и др.* Применение принципа ИЧИМ при автоматизации технологических процессов цветной металлургии // Труды ВНИКИ “Цветметавтоматика”, 1972. Вып. 4.С. 48–57.
36. *Каневский В.Л., Попков Ю.С и др.* Использование интегральной частотно-импульсной модуляции при автоматизации металлургических процессов. М.: Металлургия, 1976. 87 с.
37. *Клюев А.С., Карпов В.С.* Синтез быстродействующих регуляторов для объектов с запаздыванием. М.: Энергоатомиздат, 1990. 176 с.
38. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: ИЛ, 1948. 632 с.

39. *Крутько П.Д.* Дискретный аналог δ -функции Дирака // А и Т. № 7. 1962. С. 34–39.
40. *Крутько П.Д.* Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. М.: Советское радио, 1967. 448 с.
41. *Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н.* Нелинейные системы управления с частотно-импульсной модуляцией. Киев: Техника, 1970. 339 с.
42. *Кунцевич В.М.* Исследование переходного и установившегося процессов в релейно-импульсных и экстремальных системах с постоянным переменным периодом регулирования // Известия АН СССР. “Энергетика и автоматика”, 1961. № 5. С. 112–113.
43. *Кузин Л.Т.* Расчет и проектирование дискретных систем управления. М.: Машгиз, 1962. 520 с.
44. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 200 с.
45. *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. М.: Мир, 1967. 184 с.
46. *Лим Ю.А.* Построение модели цифровой системы управления с динамической частотно-импульсной модуляцией // А и Т, 1978. № 9. С. 172–176.
47. *Ли С., Джонс Р.Б.* Интегральные системы с частотно-импульсной модуляцией. Дискретные и самонастраивающиеся системы // Труды II-Международного конгресса ИФАК. М.: Наука, 1965. С. 124–137.
48. *Мееров М.В.* Системы многосвязанного регулирования. М.: Наука, 1965. 384 с.
49. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967. 423 с.
50. *Откер Р.* О регулируемости объектов с запаздыванием // Труды I-го конгресса ИФАК. М.: АН СССР, 1961. Т. 1. С.3–10.

51. *Первозванский А.А.* Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М.:Наука, гл.изд.физ-мат.лит., 1979. 352 с.
52. *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю. и др.* Принцип построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972. 260 с.
53. *Попков Ю.С., Ашимов А.А., Асаубаев К.Ш.* Статистическая теория автоматических систем с динамической частотно-импульсной модуляцией. М.: Наука, 1988. 258 с.
54. *Попков Ю.С., Киселев О.Н., Петров Н.П.* Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. М.: Энергия, 1976. 438 с.
55. *Попков Ю.С.* статистические модели нелинейных систем // А и Т. 1970. №10.
56. *Портер У.* Современные основы общей теории систем. М.:Наука, 1971.
57. *Пугачев В.С.* Теория случайных процессов и ее применение к задачам автоматического управления.М.:Физматиз, 1962. 883 с.
58. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967. 456 с.
59. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, гл. ред. физ-мат.лит., 1976. 448 с.
60. *Пупков К.А.* Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1965. 312 с.
61. *Скляревич А.М.* Операторные методы в статистической динамике автоматических систем.М.:Наука, гл.ред.физ-мат.,1965. 460 с.
62. *Солодов А.В., Солодова Е.А.* Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука, гл. ред. физ-мат. лит., 1980. 384 с.
63. *Солодовников В.В., Филимонов А.Б.* Конструирование регуляторов для объектов с запаздыванием // Изв. АН СССР “Техническая кибернетика”, 1979. № 1. С. 168–177.

64. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.:Сов.радио, 1966. 678 с.
65. *Тихонов В. И., Миронов В. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
66. *Ту Ю.* Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964. 426 с.
67. *Уланов Т.М.* Статистические и информационные вопросы управления по возмущению. М.: Энергия, 1970. 256 с.
68. *Флейк Р.* Теория рядов Вольтерра и ее применение к нелинейным системам с переменными параметрами. Оптимальные системы, статистические методы. М.:Наука, 1965.
69. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Наука, 1967. 546 с.
70. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. 624 с.
71. *Цыкунов А.М.* Адаптивные управления объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1984. 240 с.
72. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 с.
73. *Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, гл. ред. физ. мат. лит., 1973. 416 с.
74. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 400 с
75. *Чеховой Ю.Н.* Релейно-гистерезисная модель частотно-импульсного модулятора 2-го рода //Автоматика. Киев: Наукова думка, 1973. № 4. С 35–38.
76. *Эрриот П.* Регулирование производственных процессов. М.: Энергия, 1967. 480 с.
77. *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, гл. ред. физ.мат.лит., 1978. 416 с.

78. *Alper P.* A consideration of the discrete Volterra series. IFFF TRANS. Ac-10, 1965, № 3. P. 322–327.

79. *Dorf R.C., Liang T.* A Time-optimal pulse-frequency modulated step motor servo system. proceedings of the nec, Chicago, 1966, XXII, 2. P. 16–21.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА

$$b_k = \frac{1}{k! \delta_\xi \sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m \int_{2m-1}^{2m+1} H_k\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2\right] d\xi$$

Интегралы

$$b_k = \frac{1}{k! \delta_\xi \sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m \int_{2m-1}^{2m+1} H_k\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2\right] d\xi \quad (\text{П1.1})$$

с учетом равенства

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2\right] H_{k-1}\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = -\sigma_\xi \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2\right] H_k\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \right\}.$$

вычисляются по рекуррентным формулам

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi} k!} \sum_{m=-N}^N m \left\{ H_{k-1}\left(\frac{2m-1-m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2m-1-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2\right] - H_{k-1}\left(\frac{2m+1-m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2m+1-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2\right] \right\}. \quad (\text{П1.2})$$

Согласно рекуррентным соотношениям (П1.2), для вычисления коэффициентов b_k при $k=0, 1, 2, 3$ получим

$$b_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N m \left[\Phi\left(-\frac{v_1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{v_2}{\sqrt{2}}\right) \right]; \quad (\text{П1.3})$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m \left[\exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \right]; \quad (\text{П1.4})$$

$$b_2 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m \left[v_2 \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) - v_1 \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \right]; \quad (\text{П1.5})$$

$$b_3 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N}^N m[(v_1^2 - 1)\exp(-\frac{v_1^2}{2}) - (v_2^2 - 1)\exp(-\frac{v_2^2}{2})] , \quad (\text{П1.6})$$

где

$$v_1 = \frac{2m+1-m_\xi}{\sigma_\xi}, \quad v_2 = \frac{2m-1-m_\xi}{\sigma_\xi}, \quad \Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-u^2} du .$$

$$H_0\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = 1, \quad H_1\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi};$$

$$H_2\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2 - 1;$$

$$H_3\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) = \left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)^3 - 3\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) R_f(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

Приведем процедуру вычисления интеграла типа

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) R_f(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2, \quad (\text{П2.1})$$

где

$$R_f(\tau_2 - \tau_1) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha |\tau_2 - \tau_1|). \quad (\text{П2.2})$$

Если известно изображение произведений двух функций $L\{n_2 \cdot R_f\}$, то тогда выражение для (П2.1) легко определяется из $L\{n_2 \cdot R_f\}$ при подстановке $p_1 = p_2 = 0$.

Выражение (П2.1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} y(t_1, t_2, t_3, t_4) = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} n_2(\tau_0, \tau_m, t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \times \\ & \times \prod_{i=1}^2 \delta(\tau_i) d\tau_i \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_f(t_3 - \tau_3 - t_4 + \tau_4) \prod_{i=3}^4 \delta(\tau_i) d\tau_i. \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

Тогда изображение (П2.3) равно

$$Y(p_1, p_2, s_3, s_4) = N_2(\tau_0, \tau_m, s_1, s_2) R_f(s_3 - s_4).$$

Группируя переменные $s_1 + s_3 = p_1, s_2 + s_4 = p_2$, получим

$$\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} Y(p_1, p_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} N_2(\tau_0, \tau_m, p_1 - s_3, p_2 - s_4) R_f(s_3 - s_4) ds_3 ds_4. \quad (\text{П2.4})$$

Из (П2.4) при $p_1 = p_2 = 0$, получим

$$Y(0,0) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} N_2(\tau_0, \tau_m, -s_3, -s_4) R_f(s_3 - s_4) ds_3 ds_4. \quad (\text{П2.5})$$

Для получения конечного результата выражения (П2.5) необходимо найти двухмерное преобразование Лапласа от функции (П2.2), т.е.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau_1 - \tau_2|} e^{-S_1\tau_1 - S_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2. \quad (\text{П2.6})$$

Вычисление интегралов типа (П2.6) приводят к следующему результату:

$$R_f(s_1, s_2) = \frac{2\sigma_f^2}{s_1 + s_2} \left(\frac{1}{s_1 + \alpha} + \frac{1}{s_1 - \alpha} + \frac{1}{s_2 + \alpha} + \frac{1}{s_2 - \alpha} \right). \quad (\text{П2.7})$$

С учетом (П2.7) для (П2.5) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} Y(0,0) &= \frac{\sigma_f^2}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} N_2(\tau_0, \tau_m, s_3, -s_3) \left(\frac{1}{s_3 + \alpha} + \frac{1}{s_3 - \alpha} \right) ds_3 + \\ &+ \frac{\sigma_f^2}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} N_2(\tau_0, \tau_m, s_4, -s_4) \left(\frac{1}{s_4 + \alpha} + \frac{1}{s_4 - \alpha} \right) ds_4 = \\ &= 2\sigma_f^2 [N_2(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha) + N_2(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha)]. \end{aligned} \quad (\text{П2.8})$$

Окончательно получим

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} n_2(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2) R_f(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = N_2(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha) + N_2(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha). \quad (\text{П2.9})$$

Аналогично получаем для выражений

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} n_3(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3) R_f(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ = \sigma_f^2 [N_3(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha, 0) + N_3(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha, 0)] \end{aligned} \quad (\text{П2.10})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} n_3(\tau_0, \tau_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3) R_f(\lambda - \tau_3) R_f(\tau_2 - \tau_1) \prod_{i=1}^3 d\tau_i = \\ = \sigma_f^2 [N_3(\tau_0, \tau_m, \alpha, -\alpha, p) + N_3(\tau_0, \tau_m, -\alpha, \alpha, p)] \end{aligned} \quad (\text{П2.11})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ РЯДОВ ТИПА

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} n_2 (\gamma_m T, \gamma T, m_1 T, m_2 T) R_f [(m_1 - m_2) T]$$

Покажем процедуру вычисления z-преобразования дискретных рядов

$$\text{типа } \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} n_2 (\gamma_m T, \gamma T, m_1 T, m_2 T) R_f [(m_1 - m_2) T], \quad (\text{ПЗ.1})$$

$$\text{где } R_f [(m_1 - m_2) T] = \sigma_f^2 (-\alpha T |m_1 - m_2|). \quad (\text{ПЗ.2})$$

Z-преобразование от выражения (ПЗ.1) легко вычисляется, если известно изображение произведения двух функций $Z\{n_2 \cdot R\}$ подстановкой $z_1 = z_2 = 1$.

Изображение произведения двух функций $\varphi_1[n_1, n_2]$ и $\varphi_2[n_1, n_2]$ определяется следующим образом:

$$Z\{\varphi_1[n_1, n_2] \varphi_2[n_1, n_2]\} = Z\{\varphi_{12}[n_1, n_2]\} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \varphi_1[n_1, n_2] \varphi_2[n_1, n_2] z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

По формуле обращения [66, 67] первообразная функция

$$\varphi_1[n_1, n_2] = \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint_R \varphi_1(z_1, z_2) z_1^{n_1-1} z_2^{n_2-1} dz_1 dz_2. \quad (\text{ПЗ.4})$$

Интегрирование в (ПЗ.4) ведется по окружности с центром в начале координат и радиусом $R > |z_v|$, где z_v – полюсы функций $F_1(z_1, z_2)$.

С учетом (ПЗ.4) выражение (ПЗ.3) примет вид

$$\varphi_{12}(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint_R \varphi_1(s_1, s_2) s_1^{n_1-1} \cdot s_2^{n_2-1} ds_1 ds_2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \varphi_2(n_1, n_2) z_1^{-n_1-1} \cdot z_2^{-n_2} = \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint_R \varphi_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \times \\
& \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \varphi_2[n_1, n_2] \left(\frac{z_1}{s_1}\right)^{-n_1} \left(\frac{z_2}{s_2}\right)^{-n_2} (s_1 s_2) = \\
& = \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint_R \varphi_1(s_1, s_2) \varphi_2\left(\frac{z_1}{s_1}, \frac{z_2}{s_2}\right) (s_1 s_2) ds_1 ds_2 = \quad . \quad (ПЗ.5) \\
& = \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint \varphi_1\left(\frac{z_1}{s_1}, \frac{z_2}{s_2}\right) \varphi_2(s_1, s_2) (s_1 s_2) ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

Из анализа соотношения (ПЗ.5) видно, что для определения изображения произведения двух функций необходимо знать изображение каждой отдельной функции. Изображение функции $n_2(\gamma_0, T, \gamma_m T, m_1 T, m_2 T)$ равно $N_2(\tau_0, \tau_m, z_1, z_2)$. А изображение функции $R_f[(m_1 - m_2)T]$ равно

$$\begin{aligned}
Z\{R_f[(m_1 - m_2)T]\} &= \sigma_f^2 \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} e^{-\alpha|m_1-m_2|T} z^{-m_1} z^{-m_2} = \\
&= \sigma_f^2 \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{m_1-1} e^{-\alpha|m_1-m_2|T} z^{-m_1} z^{-m_2} + \sigma_f^2 \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=m_1}^{\infty} e^{-\alpha|m_1-m_2|T} z_1^{-m_1} z^{-m_2} \quad . \quad (ПЗ.6)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое выражения (ПЗ.6) можно представить следующим образом:

$$R_1(z_1, z_2) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{m_1-1} e^{-\alpha m_1 T} z_1^{-m_1} e^{\alpha m_2 T} z^{-m_2} = \sum_{m_1=0}^{\infty} (z_1 \cdot d)^{-m_1} \sum_{m_2=0}^{m_1-1} \left(\frac{z_2}{d}\right)^{-m_2} , \quad (ПЗ.7)$$

где $d = \exp(\alpha T)$.

С использованием формулы суммы геометрической прогрессии получаем

$$R_1(z_1, z_2) = \sum_{m_1=0}^{\infty} (z_1 \cdot d)^{-m_1} \frac{1 - \left(\frac{d}{z_2}\right)^{m_1}}{1 - \frac{d}{z_2}} = \frac{1}{1 - \frac{d}{z_2}} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} (z_1 \cdot d)^{-m_1} - \sum_{m_1=0}^{\infty} (z_1 \cdot z_2)^{-m_1} \right] =$$

$$= (1 - \frac{d}{z_2})(1 - \frac{1}{z_1 \cdot d}) - \frac{1}{1 - \frac{1}{z_1 \cdot z_2}} = \frac{\frac{z_2}{d}}{(z_1 - \frac{1}{d})(z_2 - \frac{1}{z_2})}. \quad (\text{ПЗ.8})$$

Второе слагаемое выражения (ПЗ.6), как и (ПЗ.8) примет вид

$$\begin{aligned} R_2(z_1, z_2) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=m_1}^{\infty} e^{-\alpha m_2} e^{\alpha m_1} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{d}\right)^{-m_1} \sum_{m_2=m_1}^{\infty} (z_2 \cdot d)^{-m_2} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{d}\right)^{-m_1} \left(\frac{1}{\frac{z_2 \cdot d}{1 - \frac{1}{z_2 \cdot d}}} \right)^{m_1+1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z_2 \cdot d}} \sum_{m_1=0}^{\infty} (z_1 z_2)^{-m_1} = \frac{\frac{z_1}{d}}{(z_2 - \frac{1}{d})(z_1 - \frac{1}{z_2})} \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.9})$$

Таким образом

$$Z\{R_f[(m_1 - m_2)\Gamma]\} = \sigma_f^2 \left[\frac{\frac{z_2}{d}}{(z_1 - \frac{1}{d})(z_2 - \frac{1}{z_1})} + \frac{\frac{z_1}{d}}{(z_2 - \frac{1}{d})(z_1 - \frac{1}{z_2})} \right]. \quad (\text{ПЗ.10})$$

Для вычисления $Z\{n_2 \cdot R\}$, подставляя (ПЗ.10) в (ПЗ.5), получим

$$\begin{aligned} Z\{n_2 \cdot R\} &= \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint N_2\left(\frac{z_1}{s_1}, \frac{z_2}{s_2}\right) \sigma_f^2 \times \\ &\times \sigma_f^2 \left[\frac{\frac{s_2}{d}}{(s_1 - \frac{1}{d})(s_2 - \frac{1}{s_1})} + \frac{\frac{s_1}{d}}{(s_2 - \frac{1}{d})(s_1 - \frac{1}{s_2})} \right] \frac{1}{s_1 \cdot s_2} ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.11})$$

Для определения значения (ПЗ.11) используем вычеты по полюсам $Z\{n_2 \cdot R\}$. Тогда для первого слагаемого

$$\frac{1}{(2\pi j)^2} \iint_R \sigma_f^2 N_2\left(\frac{z_1}{s_1}, \frac{z_2}{s_2}\right) \frac{\frac{s_2}{d}}{(s_1 - \frac{1}{d})(s_2 - \frac{1}{s_1})} \frac{1}{s_1 \cdot s_2} ds_1 ds_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi j} \int_R \frac{\frac{1}{d}}{s_1(s_1 - \frac{1}{d})} ds_1 \frac{1}{2\pi j} \int_R N_2\left(\frac{z_1}{s_1}, \frac{z_2}{s_2}\right) \frac{1}{(s_2 - \frac{1}{s_1})} ds_2 \sigma_f^2 = \\
&= \frac{\sigma_f^2}{2\pi j} \int_R \frac{1}{(s_1 - \frac{1}{d})} N_2\left(\frac{z_1}{s_1}, \frac{z_2}{s_2}\right) ds_1 = N_2\left(z_1 \cdot d, \frac{z_2}{d}\right). \quad (\text{ПЗ.12})
\end{aligned}$$

Аналогично для второго слагаемого получаем

$$= \frac{1}{(2\pi j)^2} \iint_R N_2\left(\frac{z_1}{s_1}, \frac{z_2}{s_2}\right) \frac{\frac{s_1}{d}}{(s_2 - \frac{1}{d})(s_1 - \frac{1}{s_2})} \frac{1}{s_1 \cdot s_2} ds_1 ds_2 = N_2\left(z_1 \cdot d, \frac{z_2}{d}\right). \quad (\text{ПЗ.13})$$

Окончательно для (ПЗ.1) имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} n_2[\gamma_0 T, \gamma_m T, m_1 T, m_2 T] R_f[(m_1 - m_2)T] = Z\{n_2 R\}_{z_1=z_2=1} = \\
&= \sigma_f^2 \left[N_2\left(\tau_0, \tau_m, d, \frac{1}{d}\right) + N_2\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{d}, d\right) \right] \quad (\text{ПЗ.14})
\end{aligned}$$

Аналогично показывается следующее равенство:

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} n_3[\gamma_0 T, \gamma_m T, m_1 T, m_2 T, m_3 T] R_f[(\lambda - m_3)T] R_f[(m_2 - m_1)T] = \quad (\text{ПЗ.15})$$

$$= Z\{ \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{R} \}_{z_1=z_2=z_3=1} = \left[N_3\left(\tau_0, \tau_m, \mathbf{d}, \frac{1}{\mathbf{d}}, z \right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, \frac{1}{\mathbf{d}}, z, \mathbf{d} \right) + N_3\left(\tau_0, \tau_m, z, \mathbf{d}, \frac{1}{\mathbf{d}} \right) \right]$$

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
I. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	5
1.1. Элементы математической теории систем	5
1.2. Определение ядер ряда Вольтерра системы по заданным структурным схемам	14
1.3. Статистическое исследование нелинейных динамических систем	20
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ	23
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	25
2.1. Общие сведения и описание принципа действия системы	25
2.2. Структурные модели динамических частотно-импульсных модуляторов системы с запаздыванием	29
2.2.1. Процедура построения структурной модели динамического частотно-импульсного модулятора	31
2.2.2. Блок сброса Σ -частотно-импульсного модулятора	36
2.2.3. Блок сброса для линейного фильтра общего вида	38
2.2.4. Блок сброса для нелинейного фильтра	41
2.3. Вольтерровские модели динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием	42
2.3.1. Вольтерровская модель интегрального частотно-импульсного модулятора системы управления с запаздыванием	44
2.3.2. Вольтерровская модель разомкнутой интегральной частотно- импульсной системы управления с запаздыванием	48

2.3.3. Вольтерровская модель замкнутой интегральной частотно-импульсной системы управления с запаздыванием	49
2.3.2. Вольтерровская модель Σ -частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием	52
2.3.2.1. Вольтерровская модель блока сброса Σ -частотно-импульсного системы с запаздыванием	52
2.3.2.2. Вольтерровская модель разомкнутой Σ -частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием	54
2.3.2.3. Вольтерровская модель замкнутой Σ -частотно-импульсной системы управления объектами с запаздыванием	55
2.4. Алгоритмы формирования вольтерровских моделей системы . . .	57
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ	60
 3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	 62
3.1. Статистические характеристики нелинейных динамических систем управления объектами с запаздыванием	62
3.2. Аналитико-экспериментальный метод вычисления моментов случайного процесса $\xi(t)$	64
3.2.1. Определение моментов случайного процесса $\rho(t)$ методом цифрового статистического моделирования	65
3.2.2. Аналитическое вычисление неизвестных моментов случайного процесса $\xi(t)$	66
3.3. Статистически линеаризованные модели нелинейных динамических систем управления объектами с запаздыванием	68
3.3.1. Раздельная линеаризация модулятора и объекта с запаздыванием.	69
3.3.2. Линеаризация прямой цепи системы	70
3.3.3. Линеаризация замкнутой системы в целом	71
3.3.4. Оптимальная линеаризация замкнутой системы	72
3.4. Исследование статистически линеаризованных моделей нелинейных динамических систем с запаздыванием	73
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ	80

4. СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	80
4.1. Общая схема синтеза нелинейных динамических систем управления объектами с запаздыванием	80
4.2. Параметрический синтез нелинейных динамических систем управления объектами с запаздыванием	81
4.2.1. Параметрический синтез динамических частотно-импульсных систем управления объектами с запаздыванием при среднеквадратичном критерии качества	84
4.3. Алгоритмы параметрического синтеза динамических частотно- импульсных систем управления объектами с запаздыванием	89
4.3.1. Алгоритм оценки выпуклости	90
4.3.2. Алгоритм оценки степени нелинейности	90
4.3.3. Алгоритм минимизации	91
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ	91
5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	93
5.1. Структурные модели цифровых динамических частотно-импульсных модуляторов систем с запаздыванием	94
5.1.1. Принцип действия и уравнения цифровых динамических частотно- импульсных модуляторов систем управления объектами с запаздыванием	94
5.1.2. Структурная модель цифрового Σ -частотно-импульсного модулятора систем с запаздыванием	96
5.1.3. Структурная модель цифрового ДЧИМ с линейным фильтром общего вида	99
5.2. Вольтерровские модели цифровых динамических частотно- импульсных систем с запаздыванием	101

5.2.1. Общая процедура формирования вольтерровских моделей цифровых динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием	102
5.2.2. Вольтерровские модели цифровых интегральных частотно-импульсных систем управления с запаздыванием	105
5.2.2.1. Вольтерровская модель цифрового интегрального частотно-импульсного модулятора системы с запаздыванием	106
5.2.2.2. Вольтерровская модель замкнутой цифровой интегральной частотно-импульсной системы с запаздыванием	107
5.3. Статистический анализ и синтез цифровых динамических частотно-импульсных систем запаздыванием	109
5.3.1. Определение статистических характеристик процесса ошибки цифровой системы	109
5.3.2. Статистическая линеаризация цифровых динамических частотно-импульсных систем запаздыванием	110
5.3.3. Синтез цифровых динамических частотно-импульсных систем с запаздыванием	114
5.4. Вычислительные алгоритмы статистического анализа и синтеза цифровой системы запаздыванием	116
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ	60
 6. ДИАЛогоВАЯ СИСТЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	 118
6.1. Назначение и функциональная структура диалоговой системы	118
6.1.1. Системная часть диалоговой системы	119
6.1.2. Информационная часть диалоговой системы	124
6.1.3. Функциональная часть диалоговой системы.	124
6.2. Функционирование диалоговой системы	126
6.3. Программное обеспечение диалоговой системы	129

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ	135
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	136
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	137
ПРИЛОЖЕНИЯ	145

Учебное издание

Айтчанов Бекмурза Хусаинович

**МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебник

Зав. РИО
Редактор
Техн.редактор
Компьютерный набор
и верстка

З.А. Губайдулина
З.А. Губайдулина
Н.Н. Передерева

Ж.. Идрисов

Подписано в печать 21.07. 2003 г.

Тираж 500 экз. Формат 60х84 1/16. Бумага типографская №1.

Объем 10 уч.– изд. л. Заказ №781. Цена договорная

Издание Казахского национального технического университета
имени К.И. Сатпаева
Издательский центр КазНТУ,
Алматы, Сатпаева, 22