

*Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-дың
70 жылдығына арналады*



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.И. САТПАЕВА

Е.Ж.Айдос, Ю.В.Боровский

Серия типовых расчетов

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Типтік есептер сериясы

**КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛДЫ
ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ
ЖӘНЕ ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ҚИСАП**

Рекомендовано Республиканским учебно-методическим
объединением в качестве учебного пособия

АЛМАТЫ 2003

Айдос Е.Ж., Боровский Ю.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2003. 155 с.

ISBN 9965-487-87-1

Пособие написано на казахском и русском языках в соответствии с программой специального раздела высшей математики. Приводятся образцы решения примеров и задач из данного раздела и типовые расчеты из учебного пособия В.Ф. Чудесенко "Сборник заданий по специальным курсам высшей математики", теоретический справочный материал.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Ил. 8. Библиогр. – 3 назв.

Рецензенты: *Д.Н. Шафиева*, канд. физ.-мат. наук, доц.

Е. Касымов, канд. физ.-мат. наук, проф.

Айдос Е.Ж., Боровский Ю.В. Комплекс айнымалды функциялар теориясы және операциялық кісәні: Оқу құралы. – Алматы: КазҰТУ, 2003. 155 б.

ISBN 9965-487-87-1

Оқу құралы жоғары математиканың арнаулы бөлімдерінің бағдарламасына сәйкес қазақ және орыс тілдерінде жазылған. Аталған бөлімде мысалдар мен есептерді шығару үлгілері, В.Ф. Чудесенконың "Сборник заданий по специальным курсам высшей математики" атты оқу құралынан алынған тиімдік есептер және теориялық анықтама материалдар келтірілген.

Жоғары оқу орындарының инженер-техникалық мамандықтарында оқытын студенттерге арналған.

Сурет-8. Әдебиеттер тізімі – 3 атқ.

Печатается по плану издания Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2002 г.

ISBN 9965-487-87-1

КазНТУ, 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время в Республике Казахстан остро ощущается нехватка учебной литературы по высшей математике, предназначенной для самостоятельной работы студентов. Практически нет литературы, в которой бы изложение материала проводилось одновременно на двух языках: казахском и русском. Издание данного пособия частично восполняет этот пробел.

Работа открывает серию книг, содержащих варианты типовых расчетов по различным разделам курса высшей математики, подробные образцы решения этих вариантов и краткий справочный материал. При этом все изложение ведется параллельно на казахском и русском языках, что способствует внедрению двуязычия в учебный процесс.

Материал данной книги максимальным образом охватывает программу соответствующих специальных разделов курса высшей математики в техническом вузе и в доступной форме помогает студентам самостоятельно выполнять предлагаемые типовые расчеты. В работе использованы некоторые задания из удачной, но малодоступной в настоящее время книги В.Ф.Чудесенко «Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты)», изданной в 1983 г.

Авторы надеются, что настоящее издание будет способствовать качественной самостоятельной работе студентов при изучении курса высшей математики.

Қазіргі кезеңде жоғары математиканың арнаулы бөлімдерінен студенттердің өздік жұмыстарына арналған ыңғайлы оқу құралдары жетіспейді. Еліміздің жоғары оқу орындарының көпшілігінде студенттерге білім беру процесі негізінде қазақ тілі мен орыс тілінде жүргізіледі, оқытушыларымыздың көпшілігі осы аталған екі тілде сабақ өткізіп жүр. Міне осы сияқты және т.б. себептерден қос тілде жазылған әдебиеттер қажеттігі пайда бола бастады.

Осындай қажеттіктерді ескіріп, біз жоғары математиканың арнайы бөлімдерінің бағдарламаларына сәйкес студенттердің өздік жұмыстарына арналған типтік есептер сериясын шығаруды жоспарлап едік. Мұндай серияның біріншісі Айдос Е.Ж. “Векторлық анализ” 2001ж. басылып шықты. Ал қолдарыңыздағы құрал осындай серияның екіншісі. Мұнда комплекс айнымалы функциялар теориясы мен операциялық қисап бөлімі бойынша типтік есептер шығару үлгілері, теориялық анықтама материалдары және студенттердің өздік жұмысына арналған типтік есеп тапсырмалары келтіріледі. Бұл басылымда 1983 ж. шыққан, қазіргі кезде қолға түсе бермейтін В.Ф.Чудесенконың “Сборник заданий по специальным разделам высшей математики” атты кітабының материалдары пайдаланылды.

Бұл оқу құралы студенттерге олардың өздік жұмысы арқылы жоғары математикадан сапалы, да терең білім алуына септігін тигізер деген үміттеміз.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

Задача 1. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-27i}$.

Решение. Для числа $z = -27i$ его модуль $|z| = 27$ и аргумент

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}. \text{ Из формулы}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

при $n = 3$ получим

$$\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-\pi/2 + 2\pi k}{3} \right).$$

Отсюда для $k = 0, k = 1, k = 2$ имеем

$$\omega_0 = 3 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2},$$

$$\omega_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3(0 + i) = 3i$$

$$\omega_2 = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{-27i} = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2}; 3i; -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2} \right\}.$

Задача 2. Представить в алгебраической форме $ch(3 + \frac{\pi i}{4})$.

Решение. Используя формулы $chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$,

$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ получим

$$\begin{aligned} ch(3 + \frac{\pi i}{4}) &= \frac{1}{2} (e^{3 + \frac{\pi i}{4}} + e^{-3 - \frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{2} \left[e^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) + e^{-3} \left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + e^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (e^3 + e^{-3}) + i \frac{\sqrt{2}}{2} (e^3 - e^{-3}) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}ch3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3.$$

Ответ: $ch(3 + \frac{\pi i}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}ch3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}sh3.$

Задача 3. Представить в алгебраической форме $(-12 + 5i)^{-1}$.

Решение. Воспользуемся формулами $z^b = e^{bLnz}$;

$$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \text{ и } e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Так как $|-12 + 5i| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ и $\arg(-12 + 5i) = \pi - \arctg \frac{5}{12}$, то

$$Ln(-12 + 5i) = \ln 13 + i(\pi - \arctg \frac{5}{12} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Поэтому } (-12 + 5i)^{-1} = e^{-1/Ln(-12+5i)} = e^{-1/\ln 13 - i^2(\pi - \arctg \frac{5}{12} + 2\pi k)} =$$

$$= e^{\frac{\pi + 2\pi k - \arctg \frac{5}{12}}{13} - i \ln 13} = e^{\frac{\pi + 2\pi k - \arctg \frac{5}{12}}{13}} (\cos \ln 13 - i \sin \ln 13).$$

Ответ: $(-12 + 5i)^{-1} = e^{\frac{\pi + 2\pi k - \arctg \frac{5}{12}}{13}} (\cos \ln 13 - i \sin \ln 13), \quad k \in \mathbb{Z}.$

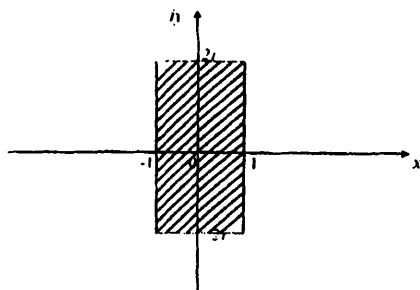
Задача 4. Вычертить область, заданную неравенствами $|\operatorname{Re} z| \leq 1$,

$$|\operatorname{Im} z| < 2.$$

Решение. Так как $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, то данные неравенства равносильны неравенствам $-1 \leq x \leq 1, -2 < y < 2$.

На комплексной плоскости эти неравенства определяют прямоугольник (рисунок.)

Границы, принадлежащие прямоугольнику, здесь обозначены сплошной линией, не принадлежащие ему – пунктиром.

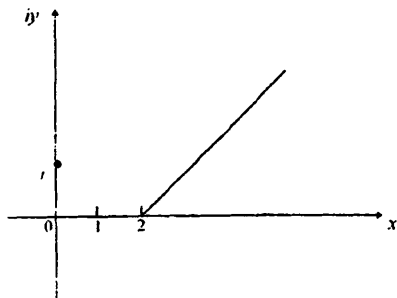


Задача 5. Определить вид кривой $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Решение. Обозначим $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ через y , где $y \in [0, +\infty)$. Тогда $t^2 - 2t + 3 = t^2 - 2t + 1 + 2 = y + 2$, и кривая примет вид $z = y + 2 + iy$, $y \in [0, +\infty)$.

Уравнение этой линии на плоскости Oxy есть $x = y + 2$ или $y = x - 2$, $y \in [0, +\infty)$. Следовательно, искомая линия представляет

собой полупрямую, определенную для неотрицательных y (рисунок).



Задача 6. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y) = 2xy + x$ и значению $f(0) = 0$.

Решение. Воспользуемся условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad \text{Из первого условия имеем } \frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда $u = \int 2x dx + c(y) = x^2 + c(y)$. Для нахождения неизвестной функции $c(y)$ подставим u во второе равенство и получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = c'(y); \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1 \Rightarrow c'(y) = -2y - 1.$$

$$\text{Отсюда } c(y) = \int (-2y - 1) dy + c = -y^2 - y + c.$$

Следовательно, $u = x^2 + c(y) = x^2 - y^2 - y + c$. поэтому

$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + c + i(2xy + x)$. Для нахождения c воспользуемся условием $f(0) = 0$: $0 + c + i \cdot 0 = 0 \Rightarrow c = 0$.

$$\text{Ответ: } f(z) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x) = (x + iy)^2 + i(x + iy) = z^2 + iz.$$

Задача 7. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой $\int_L |z| dz$; $L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Решение. Приведем один из способов вычисления данного интеграла.

Кривая представляет собой полуокружность радиуса 1 с центром в точке 0 лежащую в верхней полуплоскости. Ее параметрические

$$\text{уравнения имеют вид } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

$$\text{Следовательно,} \quad z(t) = x(t) + iy(t) = \cos t + i \sin t.$$

$$z'(t) = -\sin t + i \cos t.$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z|z| dz &= \int_0^{\pi} (\cos t + i \sin t) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-\cos t \sin t + i \cos^2 t - i \sin^2 t - \cos t \sin t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-\sin 2t + i \cos 2t) dt = \\ &= \left(\frac{\cos 2t}{2} + i \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \left(\frac{\cos 2\pi}{2} + i \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - \\ &- \left(\frac{\cos 0}{2} + i \frac{\sin 0}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int_{\Gamma} z|z| dz = 0.$$

Замечание: Данный интеграл можно было бы вычислить, введя замену переменной $t = e^{i\varphi}$.

Задача 8. Найти все Лорановские разложения функции

$$\omega = \frac{15z + 450}{225z + 15z^2 - 2z^3} \quad \text{по степеням } z.$$

Решение: Найдем особые точки этой функции, т.е. точки в которых (для данного примера) функция не определена. Для этого решим уравнение $2z^3 - 15z^2 - 225z = 0$; $z(2z^2 - 15z - 225) = 0$. Отсюда

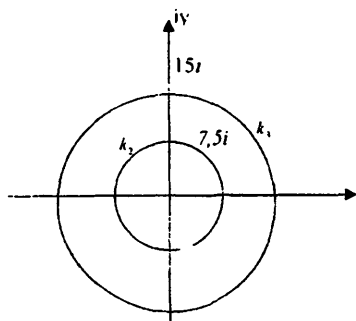
$$z_0 = 0, \text{ а также } 2z^2 - 15z - 225 = 0, \quad D = 15^2 + 2 \cdot 4 \cdot 225 = 2025,$$

$$z_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{2025}}{4} \Rightarrow z_1 = 15, \quad z_2 = -7,5.$$

Поэтому исходная функция аналитична в трех кольцах с центрами в точке 0:

$$k_1 = \{z : 0 < |z| < 7,5\}, \quad k_2 = \{z : 7,5 < |z| < 15\}, \quad k_3 = \{z : 15 < |z|\}$$

(рисунок).



Найдем Лорановские разложения функции в каждом из этих колец, предварительно разложив функцию на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов.

Поскольку $2z^3 - 15z^2 - 225z = 2z(z - 15)(z + 7,5) = z(z - 15)(2z + 15)$, то

$$\omega = \frac{-15z - 450}{2z^3 - 15z^2 - 225z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 15} + \frac{C}{(2z + 15)} \Rightarrow -15z - 450 = A(z - 15)(2z + 15) + Bz(2z + 15) + Cz(z - 15).$$

Подставив последовательно $z_0 = 0$, $z_1 = 15$, $z_2 = -7,5$, отсюда получим

$$-450 = A(-15)(15) \Rightarrow A = 2;$$

$$-15 \cdot 15 - 450 = B \cdot 15 \cdot 45 \Rightarrow B = -1;$$

$$+15 \cdot 7,5 - 450 = C(-7,5)(-22,5) \Rightarrow C = -2.$$

Окончательно имеем, что

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{z}{2z+15}.$$

1. Пусть $z \in K_1 = \{Z : 0 < |z| < 7,5\}$. В этом случае (как и в последующих) слагаемое $\frac{2}{z}$ является своим рядом Лорана. Для разложения оставшихся двух дробей, используя формулу суммы геометрической прогрессии

$$\frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots \quad (|q| < 1),$$

получим

$$-\frac{1}{z-15} = \frac{1}{15-z} = \frac{1}{15(1-\frac{z}{15})} = \left| \text{т.к. в } K_1 \text{ имеет место } |z| < \frac{15}{2} \Rightarrow \left| \frac{z}{15} \right| < \frac{1}{2} < 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{z}{15 \cdot 15} + \frac{1}{15} \left(\frac{z}{15} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}};$$

$$\frac{-2}{2z+15} = \frac{-1}{z+7,5} = \frac{-1}{7,5(1-(-\frac{z}{7,5}))} = \left| \text{т.к. в } K_1 \text{ имеет место } \left| \frac{-z}{7,5} \right| < 1 \right| =$$

$$= \frac{-1}{7,5} + \frac{-1}{7,5} \left(-\frac{z}{7,5} \right) + \frac{-1}{7,5} \left(-\frac{z}{7,5} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7,5)^{n+1}}.$$

Окончательно в кольце K_1 получим разложение

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{z}{2z+15} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7,5)^{n+1}}.$$

2. Пусть $z \in K_2 = \{z : 7,5 < |z| < 15\}$. Так как здесь $\left| \frac{z}{15} \right| < 1$, то разложение дроби $\frac{-1}{z-15}$ в ряд не отличается от предыдущего случая.

Разложим третью дробь в K_2 :

$$\frac{-2}{2z+15} = \frac{-2}{2z(1+\frac{15}{2z})} = \frac{-1}{z\left(1-\left(-\frac{15}{2z}\right)\right)} =$$

$$\text{при } |z| > 7.5 \quad \left| -\frac{15}{2z} \right| < 1 \quad = -\frac{1}{z} + \frac{-1}{z} \left(-\frac{15}{2z} \right) + \frac{-1}{z} \left(\frac{-15}{2z} \right)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}$$

Таким образом, в кольце K_2

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}.$$

3. Пусть $z \in K_1 = \{z : |z| > 15\}$. Т.к. $|z| > 15$, то $\left| \frac{15}{z} \right| < 1$.

Поэтому

$$-\frac{1}{z-15} = \frac{-1}{z(1-\frac{15}{z})} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{15}{z} - \frac{1}{z} \left(\frac{15}{z} \right)^2 - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15^{n-1}}{z^n}.$$

Поскольку в K_3 имеет место $\left| -\frac{15}{2z} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{15}{z} \right| < \left| \frac{15}{z} \right| < 1$, то раз-

ложение дроби $\frac{-2}{2z+15}$ остается таким же, как и в п.2.

Следовательно,

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15} = \frac{2}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}.$$

Ответ:

$$1. \text{ В кольце } \{z : 0 < |z| < 7.5\} \quad \omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{15^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(7.5)^{n+1}} \right) z^n.$$

$$2. \text{ В кольце } \{z : 7.5 < |z| < 15\}: \quad \omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}.$$

$$3. \text{ В кольце } \{z : |z| > 15\}: \quad \omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-15^{n-1} + \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}} \right) \frac{1}{z^n}.$$

Задача 9. Найти все разложения функции $\omega = \frac{2z}{z^2 - 4}$ по степеням

$$z - z_0, \text{ где } z_0 = 3 - 2i.$$

Решение. Особые точки данной функции являются корнями уравнения

$$z^2 - 4 = 0, \text{ т.е. } z_1 = 2, \quad z_2 = -2.$$

Расстояния от них до точки Z_0 равны соответственно

$$R_1 = |z_1 - z_0| = |2 - 3 + 2i| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$R_2 = |z_2 - z_0| = |-2 - 3 + 2i| = |-5 + 2i| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}.$$

Поэтому исходная функция аналитична в трех кольцах с центрами в точке $z_0 = 3 - 2i$ и с радиусами R_1 и R_2 :

$$K_1 = \{z : |z - 3 + 2i| < \sqrt{5}\},$$

$$K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < \sqrt{29}\},$$

$$K_3 = \{z : \sqrt{29} < |z - 3 + 2i|\}.$$

Разложив исходную функцию на элементарные дроби, получим

$$\omega = \frac{2z}{z^2 - 4} = \frac{2z}{(z-2)(z+2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2} \Rightarrow 2z = A(z+2) + B(z-2):$$

$$z = 2 \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow A = 1. \quad z = -2 \Rightarrow -4 = -4B \Rightarrow B = 1.$$

Поэтому

$$\omega = \frac{2z}{z^2 - 4} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2}.$$

1. Пусть $z \in K_1$. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получим

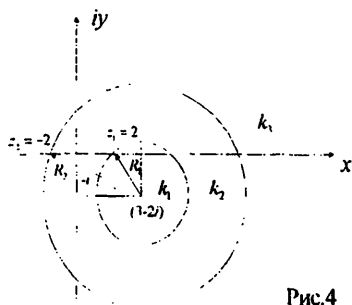


Рис.4

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-3+2i}{-1+2i}\right)} = \\ &= \left[\text{т.к. } \left| \frac{z-3+2i}{-1+2i} \right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \right] = \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{z-3+2i}{(-1+2i)} + \\ &+ \frac{1}{1-2i} \cdot \left(\frac{z-3+2i}{-1+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}} \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{(z-3+2i)+(5-2i)} = \frac{1}{5-2i} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-3+2i}{-5+2i}\right)} = \\ &= \left[\text{т.к. } \left| \frac{z-3+2i}{-5+2i} \right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}} < 1 \right] = \frac{1}{5-2i} + \frac{1}{5-2i} \left(\frac{z-3+2i}{-5+2i} \right) + \\ &+ \frac{1}{5-2i} \left(\frac{z-3+2i}{-5+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\omega = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}.$$

2. Пусть $z \in k_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)} = \frac{1}{(z-3+2i)} \cdot \frac{1}{1-\frac{-1+2i}{z-3+2i}} = \\ &= \left[\text{т.к. } \left| \frac{-1+2i}{z-3+2i} \right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \right] = \frac{1}{z-3+2i} + \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-1+2i}{z-3+2i} \right) + \\ &+ \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-1+2i}{z-3+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}. \end{aligned}$$

Поскольку в k_2 $\left| \frac{z-3+2i}{-5+2i} \right| < \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1$, то разложение дроби

$\frac{1}{z+2}$ остается прежним.

Окончательно получим

$$\omega = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}$$

3. Пусть $z \in k_3$. Тогда $\left| \frac{-1+2i}{z-3+2i} \right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}} < 1$, и поэтому лоранов-

ское разложение дроби $\frac{1}{z-2}$ совпадает с п.2.

Разложим вторую дробь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{(z-3+2i)+(5-2i)} = \frac{1}{z-3+2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-5+2i}{z-3+2i} \right)} = \\ &= \left[\text{т.к.} \left| \frac{-5+2i}{z-3+2i} \right| < \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1 \right] = \frac{1}{z-3+2i} + \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-5+2i}{z-3+2i} \right) + \\ &+ \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-5+2i}{z-3+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}.$$

Ответ:

1. В кольце $\{z \mid |z-3+2i| < \sqrt{5}\}$

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{-1}{1-2i} \right)^{n+1} + \left(\frac{-1}{5-2i} \right)^{n+1} \right) (z-3+2i)^n;$$

2. В кольце $\{z \mid \sqrt{5} < |z-3+2i| < \sqrt{29}\}$

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{5-2i} \right)^{n+1} (z-3+2i)^n;$$

3. В кольце $\{z \mid |z-3+2i| > \sqrt{29}\}$

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1+2i)^{n-1} + (-5+2i)^{n-1} \right) \frac{1}{(z-3+2i)^n}.$$

Задача 10. Данную функцию $\omega = z \sin \frac{\pi \cdot z}{z-a}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = a$.

Решение. Обозначим $z-a$ через t , тогда $z = t+a$, следовательно,

$$\omega = (t+a)$$

$$\sin \frac{\pi(t+a)}{t} = (t+a) \sin \left(\pi + \frac{a}{t} \right) = -(t+a) \sin \frac{a}{t} = -t \sin \frac{a}{t} - a \sin \frac{a}{t}.$$

Воспользуясь рядом Маклорена функции

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

для $x = \frac{a}{t}$, получим

$$\begin{aligned} \omega &= -t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1} (2n+1)!} - a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1} (2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n+1}}{t^{2n} (2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n+2}}{t^{2n+1} (2n+1)!}. \end{aligned}$$

Далее, возвращаясь к старой переменной z , получим

Ответ:
$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+1}}{(z-a)^{2n} (2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+2}}{(z-a)^{2n+1} (2n+1)!}.$$

Задача 11. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции

$$\omega = \frac{(e^{z^5} - 1)}{(e^z - 1 - z)}$$

Решение. Используем разложение функции $\omega = e^z$ в ряд Маклорена:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Подставляя сюда вместо z функцию z^5 , получим

$$e^{z^5} = 1 + z^5 + \frac{z^{10}}{2!} + \dots$$

Эти ряды сходятся в любой точке комплексной плоскости. Поэтому

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{e^{z^5} - 1}{e^z - 1 - z} = \frac{-1 + 1 + z^5 + \frac{z^{10}}{2!} + \dots}{-1 - z + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots} = \\ &= \frac{z^5 + \frac{z^{10}}{2!} + \dots}{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots} = \frac{z^5 \left(1 + \frac{z^5}{2!} + \dots\right)}{z^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots\right)} = z^3 \cdot h(z). \end{aligned}$$

Здесь через $h(z) = \frac{1 + \frac{z^5}{2!} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \dots}$ обозначена аналитическая в

окрестности $z = 0$ функция (она аналитична как отношение двух аналитических функций, где знаменатель не обращается в нуль).

Далее,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^5} - 1}{e^z - 1 - z} = \lim_{z \rightarrow 0} z^3 \cdot h(z) = 0 \neq \infty.$$

Следовательно, согласно теореме о классификации изолированных особых точек, заключаем, что $z_0 = 0$ — устранимая особая точка.

Ответ: $z_0 = 0$ — устранимая особая точка.

Задача 12. Для данной функции $\omega = \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{\frac{1}{z}}$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

Решение. Данная функция не определена в точке $z_1 = 0$ и в корнях уравнения $z^4 - 1 = 0$. Разложив его левую часть на множители

$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$, получим еще четыре особые точки: $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$. Определим тип каждой из этих особых точек:

1. $z_1 = 0$. Положим $z = x$ (действительное число) и найдем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\sin \pi x)^{-1}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\sin \pi x)^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \left| \text{применим правило Лопиталя} \right| = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-(\sin \pi x)^2 \cdot \cos \pi x \cdot \pi} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \pi x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\cos \pi x \cdot \pi} = \left| \infty \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{\pi} \right| = \infty. \end{aligned}$$

Поскольку пределы слева и справа данной функции не совпадают, то её предел в точке $z_1 = 0$ не существует, т.е. $z_1 = 0$ — существенно особая точка;

2. $z_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{\frac{1}{z}} &= \lim_{z \rightarrow 1} e^{\frac{1}{z}} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} = e \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = e \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(\sin \pi z)'}{(z^4 - 1)'} = \\ &= e \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi z}{4z^3} = -\frac{\pi \cdot e}{4} < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку этот предел конечен, то $z_2 = 1$ — устранимая особая точка;

3. Случай $z_3 = -1$ аналогичен предыдущему

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{1/z} &= \lim_{z \rightarrow -1} e^{1/z} \cdot \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} = e^{-1} \cdot \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(\sin \pi z)'}{(z^4 - 1)'} = \\ &= e^{-1} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\pi \cos \pi z}{4z^3} = \frac{\pi e^{-1}}{4}.\end{aligned}$$

Следовательно, $z_3 = -1$ — устранимая особая точка.

4. Рассмотрим точку $z_4 = i$.

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin \pi z \cdot e^{1/z}}{z^4 - 1} = \left(\frac{\sin \pi i \cdot e^{-1}}{0} \right) = \infty, \text{ следовательно, эта точка —}$$

полюс. Определим порядок полюса. Запишем функцию в виде

$$\omega = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \frac{\sin \pi z \cdot e^{1/z}}{z^4 - 1}.$$

Поскольку

$$\lambda(i) = \sin \pi e^{-1} \neq 0, \mu(i) = i^4 - 1 = 0, \mu'(z) = 4z^3, \mu'(i) = 4i^3 \neq 0,$$

то $z_4 = i$ — полюс 1-го порядка.

5. Случай $z_5 = -i$ аналогичен предыдущему. Так как

$$\lambda(-i) = \sin(-\pi i) e^{-1} \neq 0, \mu(-i) = (-i)^4 - 1 = 0, \mu'(-i) = -4i^3 \neq 0,$$

то $z_5 = -i$ — полюс 1-го порядка.

Ответ: $z_1 = 0$ — существенно особая точка;

$z_{2,3} = \pm 1$ — устранимые особые точки;

$z_{4,5} = \pm i$ — полюсы 1-го порядка.

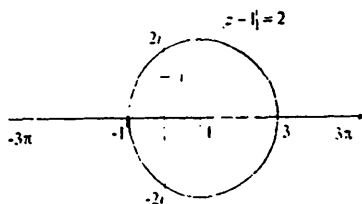
Задача 13. Вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin \frac{z}{3}} dz$.

Решение. Найдем особые точки подынтегральной функции, приравняв ее знаменатель к нулю:

$$(z^2+4)\sin \frac{z}{3} = 0.$$

Из $z^2+4=0$ получим $z_{1,2} = \pm 2i$. Так как $|1 - (\pm 2i)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 2$, то эти точки z_n находятся вне контура интегрирования. Из $\sin \frac{z}{3} = 0$ получим $\frac{z}{3} = \pi k$, $z_k = 3\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из этих точек внутри контура $|z-1|=2$ находится только одна особая точка $z_0 = 0$. Определим тип особой точки $z_0 = 0$.

В нашем случае



$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}, \text{ где } \lambda(z) = z^2 + 1, \mu(z) = (z^2 + 4)\sin \frac{z}{3}$$

и

$$\lambda(z_0) \neq 0, \mu(z_0) = 0, \mu'(z_0) \neq 0.$$

В самом деле,

$$\lambda(z) = z^2 + 1, \lambda(0) = 1, \mu(z) = (z^2 + 4)\sin \frac{z}{3}, \mu(0) = 0,$$

$$\mu'(z) = 2z \sin \frac{z}{3} + (z^2 + 4) \frac{1}{3} \cos \frac{z}{3},$$

$$\mu'(0) = 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \neq 0.$$

Следовательно, $z_0 = 0$ – простой полюс.

$$\text{Поэтому } \operatorname{res}_0 \left(\frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} \right) = \frac{\lambda(0)}{\mu'(0)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}. \quad \text{Согласно}$$

но основной теореме Коши о вычетах,

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 \left(\frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} \right) = 2\pi i \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \pi i$$

Ответ: $\frac{3}{2} \pi i$.

Задача 14. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\sqrt[3]{z^2}} - 1}{z} dz$.

Решение. Подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z_0 = 0$ и она лежит внутри контура $|z|=1$. Найдем вычет в этой точке с помощью разложения функции в ряд Лорана. Из ряда Маклорена

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

При $t = \frac{1}{z^2}$ получим

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 \cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \dots$$

Следовательно,

$$\frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} = \frac{z^2 \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 \cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \dots \right) - 1}{Z} =$$

$$= \frac{\left(z^2 + 1 + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 3!} + \dots \right) - 1}{Z} = z + \frac{1}{2! \cdot z^3} + \frac{1}{3! \cdot z^5} + \dots$$

Поскольку $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1}$, то

$$\operatorname{Res}_0 \left(\frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} \right) = 0 \quad (\text{коэффициент при } \frac{1}{z}).$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0.$$

Задача 15. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=0.5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi z} dz$.

Решение. Воспользовавшись соотношением $\operatorname{sh} iz = i \sin z$ перепишем интеграл в виде $\oint_{|z|=0.5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{iz \sin \pi z} dz$.

Особые точки подынтегральной функции находятся из уравнения $z \sin \pi z = 0$.

Отсюда, $z = 0$, $\pi z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Внутри окружности $|z| = 0,5$ попадает одна особая точка $z_0 = 0$. Определим ее тип. Представим функцию в виде

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z i \sin \pi z}.$$

Здесь

$$\lambda(0) = e^0 - \cos 0 = 0,$$

$$\lambda'(z) = 2e^{2z} + 9\sin 9z, \quad \lambda'(0) = 2 \cdot e^0 - \sin 0 \neq 0.$$

$$\mu(0) = 0, \quad \mu'(z) = i\sin \pi z + i\pi z \cos \pi z, \quad \mu'(0) = 0.$$

$$\mu''(z) = i\pi \cos \pi z + i\pi \cos \pi z - i\pi^2 z \sin \pi z, \quad \mu''(0) = 2i\pi \neq 0.$$

Поскольку первая отличная от нуля производная в точке $z_0 = 0$ имеет порядок 1 для числителя и 2 для знаменателя, то $z_0 = 0$ есть полюс порядка $2 - 1 = 1$. Найдем вычет в полюсе по формуле

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0):$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{iz \sin \pi z} \cdot z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{i \sin z} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^{2z} - \cos 9z)'}{(i \sin \pi z)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{2z} + 9\sin 9z}{i\pi \cos \pi z} = \frac{2}{i\pi}. \end{aligned}$$

Согласно основной теореме о вычетах, имеем

$$\oint_{|z|=0,5} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 f(z) = 2\pi i \frac{2}{i\pi} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 16. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=3} \left(\frac{\pi}{e^{z/2} + 1} + \frac{6ch \frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} \right) dz.$$

Решение. 1. Найдем особые точки 1-й дроби из уравнения

$$e^{z/2} + 1 = 0; \quad e^{\frac{z}{2}} = -1; \quad \frac{\pi z}{2} = \operatorname{Ln}(-1),$$

$$\text{т.к. } |-1| = 1, \quad \arg(-1) = \pi.$$

то

$$\frac{\pi z}{2} = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k); \quad \pi z = 2i(\pi + 2\pi k); \quad z = i(2 + 4k), \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Внутри контура $|z + 2i| = 3$ попадает одна (при $k = -1$) особая точка $z_0 = -2i$.

Для функции $f_1(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)} = \frac{\pi}{e^{z/2} + 1}$ выполняются $\lambda_1(-2i) = \pi \neq 0$,

$$\mu_1(-2i) = e^{-\pi} + 1 = 0, \quad \mu_1'(z) = \frac{\pi}{2} e^{z/2},$$

$$\mu_1'(-2i) = \frac{\pi}{2} e^{-\pi} = -\frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Поэтому $z_0 = -2i$ — полюс 1-го порядка. Так как

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{\lambda_1(z_0)}{\mu_1'(z_0)}, \quad \text{то} \quad \operatorname{res}_{z_0} f_1(z) = \frac{\pi}{-\pi/2} = -2.$$

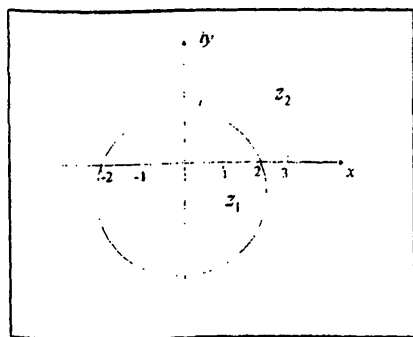
$$\text{Поэтому} \quad \oint_{|z+2i|=3} \frac{\pi}{e^{z/2} + 1} dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i.$$

2. Для интегрирования второй дроби найдем особые точки функции

$$f_2(z) = \frac{6ch \frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)},$$

из уравнения $(z-2+2i)^2(z-4-2i) = 0$.

Отсюда $z_1 = 2-2i$, $z_2 = 4+2i$. Так как $|2i - (4+2i)| = |-4| = 4 > 3$, то $4+2i$ находится вне контура интегрирования. Внутри окружности $|z+2i|=3$ попадает только точка $z_1 = 2-2i$.



Найдем тип этой особой точки функции $f_2(z)$, переписав ее в виде

$$f_2(z) = \frac{6 \cos \frac{\pi}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} = \frac{\lambda_2(z)}{\mu_2(z)}$$

Здесь

$$\lambda_2(2-2i) = 6\cos\pi = -6 \neq 0, \mu_2(2-2i) = 0;$$

$$\mu'_2(z) = 2(z-2+2i)(z-4-2i) + (z-2+2i)^2; \mu'_2(2-2i) = 0;$$

$$\mu''_2(z) = 2(z-4-2i) + 2(z-2+2i) + 2(z-2+2i);$$

$$\mu''_2(2-2i) = 2(2-2i-4-2i) = -4-8i \neq 0.$$

Поэтому $z_1 = 2-2i$ – полюс 2-го порядка для функции $f_2(z)$.

Найдем вычет в точке z_1 по формуле

$$\operatorname{res}_{z_1} f_2(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (f(z)(z-z_1)^2)'.$$

Получим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f_2(z) &= \lim_{z \rightarrow 2-2i} \left(\frac{6 \cos \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} (z-2+2i)^2 \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2-2i} \left(\frac{6 \cos \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-4-2i)} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2-2i} \frac{-\frac{6\pi}{2-2i} \sin \frac{\pi z}{2-2i} \cdot (z-4-2i) - 6 \cos \frac{\pi z}{2-2i} \cdot 1}{(z-4-2i)^2} = \\ &= \frac{-\frac{6\pi}{2-2i} \sin \pi \cdot (2-2i-4-2i) - 6 \cos \pi}{(2-2i-4-2i)^2} = \frac{6}{(-2-4i)^2} = \\ &= \frac{6}{4+16i-16} = \frac{3}{-6+8i} = \frac{3(-6-8i)}{(-6+8i)(-6-8i)} = \frac{-18-24i}{36+64} = \\ &= -0.18-0.24i. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\oint_{|z+2i|=3} f_2(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-2i} f_2(z) = 2\pi i(-0,18 - 0,24i) = \pi(0,48 - 0,36i).$$

Окончательно имеем, что

$$\oint_{|z+2i|=3} (f_1(z) + f_2(z)) dz = \oint_{|z+2i|=3} f_1(z) dz + \oint_{|z+2i|=3} f_2(z) dz =$$

$$= -4\pi i + \pi(0,48 - 0,36i) = \pi(0,48 - 4,36i).$$

Ответ: $0,48\pi - 4,36\pi i$.

Задача 17. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2} \sin t + 6}$.

Решение. Воспользуемся заменой $z = e^{it}$, при этом

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{zi}.$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2} \sin t + 6} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + 6\right) iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}}.$$

Найдем особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)},$$

решив квадратное уравнение

$$2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2} = 0.$$

$$z_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm i}{2\sqrt{2}}.$$

Поскольку

$$|z_1| = \left| \frac{-2i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \text{ а } |z_2| = \left| \frac{-4i}{2\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} > 1,$$

то в контуре $|z| = 1$ находится только особая точка $z_1 = \frac{-2i}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Определим ее тип.

$$\lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 \neq 0,$$

$$\mu\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 0 \quad (\text{т.к. } z_1 - \text{корень знаменателя}).$$

$$\mu'(z) = 4\sqrt{2}z + 6i,$$

$$\mu'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i + 6i = 2i \neq 0.$$

Поэтому $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ — полюс первого порядка:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \frac{\lambda(z_1)}{\mu'(z_1)} = \frac{1}{2i}.$$

Окончательно получаем, что

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Ответ: π .

Задача 18. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cos t)^2}$.

Решение. Воспользуемся методом решения предыдущей задачи,

положим $z = e^{it}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} =$$

= / умножим числитель и знаменатель на z / =

$$= \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}$$

Найдем особые точки функции

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \frac{z}{i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2},$$

решив квадратное уравнение

$$\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5-2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $\left| \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right| > 1$, а $\left| \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right| < 1$, то в контуре $|z| < 1$

попадает только особая точка $z_1 = \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

$$\lambda(z_1) = \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \neq 0, \mu(z_1) = \mu'(z_1) = 0, \text{ так как}$$

z_1 — двукратный корень функций $\mu(z)$.

$$\mu'(z) = i2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{2}z + \sqrt{5}),$$

$$\mu''(z) = i2(\sqrt{2}z + \sqrt{5})^2 + i2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\mu''(z_1) = i2 \left(\sqrt{2} \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{5} \right)^2 = 6i \neq 0.$$

Поэтому z_1 — есть полюс второго порядка функции $f(z)$.

Разложим $\mu(z)$ на множители

$$\mu(z) = i \frac{\sqrt{2}}{2} (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 = i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(z - \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(z + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right)^2.$$

Найдем вычет в точке Z_1 по формуле

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \left(f(z) (z - z_1)^2 \right)'$$

Получим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}} \left(\frac{z}{i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(z - \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(z + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2} \left(z - \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2} z}{i \left(z + (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2} \right)^2} \right)' = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{i} \lim_{z \rightarrow \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}} \frac{(z + (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2})^2 - 2z(z + (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2})}{(z + (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2})^4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{i} \frac{((- \sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2} + (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2})^2 - (- \sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{2}((- \sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2} + (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2})}{((-\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2} + (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2})^4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{i} \frac{6 + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{i \cdot 18} = \frac{\sqrt{30}}{18i}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\oint_{z=-1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) = 2\pi i \frac{\sqrt{30}}{18i} = \frac{\sqrt{30}}{9} \pi.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{9} \pi.$

Задача 19. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 16)}.$

Решение. Найдем особые точки функции

$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 16)},$ лежащие в верхней полуплоскости. Для

этого решим уравнения $(z^2 + 1)^2 = 0$ и $(z^2 + 16) = 0$. Отсюда получим $z_1 = i$, $z_2 = 4i$ — корни, лежащие в верхней полуплоскости. Найдем вычеты функции $f(z)$ в этих точках:

1) $z_1 = i$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+16)} = \frac{(z+i)^{-2}(z^2+16)^{-1}}{(z-i)^2} = \frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)}.$$

Здесь $\lambda_1(i) \neq 0$, а у функции $\mu_1(z)$ точка i — нуль второго порядка. Поэтому $z_1 = i$ есть полюс 2-го порядка для функции $f(z)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \left(f(z)(z-i)^2 \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)} \right)' = \\ &= - \lim_{z \rightarrow i} \frac{2(z+i)(z^2+16) + (z+i)^2 \cdot 2z}{(z+i)^4(z^2+16)^2} = - \frac{4i(-1+16) - 8i}{16(-1+16)^2} = - \frac{52i}{16 \cdot 225} = - \frac{13}{900} i; \end{aligned}$$

2) $z_2 = 4i$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+4i)(z-4i)} = \frac{(z+1)^{-2}(z+4i)^{-1}}{(z-4i)} = \frac{\lambda_2(z)}{\mu_2(z)}.$$

Здесь $\lambda_2(4i) \neq 0$, а у функции $\mu_2(z)$ точка $4i$ — нуль первого порядка. Следовательно, $z_2 = 4i$ — полюс первого порядка функции $f(z)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{4i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 4i} f(z)(z-4i) = \lim_{z \rightarrow 4i} \frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)} = \\ &= \frac{1}{(-16+1)^2 \cdot 8i} = \frac{-i}{1800}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(z)$ не имеет особых точек на действительной оси, показатель степени знаменателя на 6 превосходит показатель степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+16)} = 2\pi i (\text{res}_{3i} f(z) + \text{res}_{4i} f(z)) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-13i}{900} - \frac{i}{1800} \right) = \pi \left(\frac{13}{450} + \frac{1}{900} \right) = \pi \frac{27}{900} = \pi \frac{3}{100}.$$

Ответ: 0.03π .

Задача 20. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$.

Решение. Найдем особые точки и вычеты в них для $\text{Im } z > 0$ функции

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2}.$$

Из уравнения $(z^2+1)^2 = 0$ имеем $z_{1,2} = \pm i$, в верхней полуплоскости находится особая точка $z_1 = i$. Записав $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+i)^2(z-i)^2} = \frac{(e^{3iz} - e^{2iz})(z+i)^{-2}}{(z-i)^2} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}.$$

где $\lambda(i) \neq 0$ и в точке $z_1 = i$ $\mu(z)$ имеет нуль 2-го порядка, получим, что $z_1 = i$ — полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

$$\text{res}_i f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (f(z)(z-i)^2)' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z+i)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z+i)^2 - (e^{3iz} - e^{2iz})2(z+i)}{(z+i)^4} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z+i) - 2e^{3iz} + 2e^{2iz}}{(z+i)^3} =$$

$$= \frac{(3ie^{-3} - 2ie^{-2})2i - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} = \frac{-6e^{-3} + 4e^{-2} - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} =$$

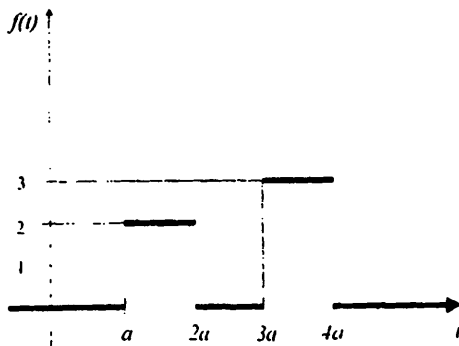
$$= \frac{+4e^{-3} - 3e^{-2}}{4i}.$$

Поскольку функция $R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ непрерывна на действительной оси и степень знаменателя превышает степень числителя на четыре, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \operatorname{Re}(2\pi i \cdot \operatorname{res}_i f(z)) = \operatorname{Re} 2\pi i \frac{4e^{-3} - 3e^{-2}}{4i} = \\ = \frac{\pi}{2} (4e^{-3} - 3e^{-2}).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} (4e^{-3} - 3e^{-2})$.

Задача 21. По данному графику оригинала $f(t)$ найти его изображение



Решение. Данная функция (и ее производная) имеет разрывы в точках $\tau_1 = a$, $\tau_2 = 2a$, $\tau_3 = 3a$, $\tau_4 = 4a$. Соответствующие скачки функции в этих точках равны $\alpha_1 = 2 - 0 = 2$; $\alpha_2 = 0 - 2 = -2$; $\alpha_3 = 3 - 0 = 3$, $\alpha_4 = 0 - 3 = -3$. Скачки производной равны $\beta_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, так как $f'(t) = 0$ во всех точках, за исключением $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$.

Следовательно, изображение $f(t)$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{k=1}^4 e^{-pk} \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2} \right) = e^{-pa} \frac{2}{p} - e^{-2pa} \frac{2}{p} + e^{-3pa} \frac{3}{p} - e^{-4pa} \frac{3}{p}.$$

Ответ:
$$\frac{2e^{-pa} - 2e^{-2pa} + 3e^{-3pa} - 3e^{-4pa}}{p}.$$

Задача 22. Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{3p - 2}{(p-1)(p^2 - 6p + 10)}.$$

Решение. Разложим заданную функцию на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{3p - 2}{(p-1)(p^2 - 6p + 10)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp + C}{p^2 - 6p + 10}.$$

$$3p - 2 = A(p^2 - 6p + 10) + (Bp + C)(p-1),$$

$$p=1 \Rightarrow 1 = A(1-6+10);$$

$$1 = 5A, \quad A = 0,2.$$

Подставим найденное значение A , приравняем коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получим

$$3p - 2 = 0,2p^2 - 1,2p + 2 + Bp^2 - Bp + Cp,$$

$$-2 = 2 - C,$$

$$3 = -1,2 - B + C.$$

Отсюда получаем, что $C = +4$, $B = -0,2$.

Поэтому

$$F(p) = \frac{0,2}{p-1} + \frac{-0,2p + 4}{p^2 - 6p + 10}.$$

Выделим в знаменателе второй дроби полный квадрат

$$p^2 - 6p + 10 = p^2 - 6p + 9 + 1 = (p-3)^2 + 1$$

и запишем $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{0,2}{p-1} + \frac{-0,2(p-3)-0,6+4}{(p-3)^2+1} = \frac{0,2}{p-1} - 0,2 \frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{3,6}{(p-3)^2+1}.$$

Воспользовавшись соотношениями, имеем

$$e^{-at} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

$$e^{-at} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}.$$

По свойствам линейности получим, что

$$F(p) \leftrightarrow 0,2e^t - 0,2e^{3t} \cos t + 3,6e^{3t} \sin t.$$

Ответ: $0,2e^t = 0,2e^{3t} \cos t + 3,6e^{3t} \sin t$.

Задача 23. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$.

Решение. Решим вспомогательное уравнение $y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = 1$ с нулевыми начальными условиями. Обозначим изображение оригинала y_1 через $Y(p)$, тогда, $y_1' \leftrightarrow pY(p)$, $y_1'' \leftrightarrow p^2Y(p)$. Переходя к оригиналам левой и правой частей уравнения, получим

$$p^2Y(p) + 4pY(p) + 4Y(p) = \frac{1}{p}; \quad Y(p)(p^2 + 4p + 4) = \frac{1}{p};$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}.$$

Разложим полученную дробь на простейшие

$$\frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2};$$

$$1 = A(p+2)^2 + Bp(p+2) + Cp$$

Подставив сюда $p = 0$, получим $1 = 4A$, т.е. $A = 0,25$.

Подставив $p = -2$, получим $1 = -2C$, т.е. $C = -0,5$.

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты. При p^2 получим

$$1 = 0,25p^2 + p + 1 + Bp^2 + 2Bp - 0,5p.$$

$$p^2|_0 = 0,25 + B \Rightarrow B = -0,25.$$

Окончательно получим, что

$$Y(p) = \frac{0,25}{p} - \frac{0,25}{p+2} - \frac{0,5}{(p+2)^2}.$$

Используя соотношения $e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-a}$, $te^{at} \leftrightarrow \frac{1}{(p-a)^2}$

и свойства линейности, найдем оригинал для $Y(p)$

$$y_1(t) = 0,25 - 0,25e^{-2t} - 0,5te^{-2t}.$$

Для нахождения решения исходного уравнения $y(t)$ используем формулу Дюамеля $y(t) = \int_0^t y_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

Имеем

$$y_1' = 0,5e^{-2t} - 0,5e^{-2t} + te^{-2t} = te^{-2t}, \quad y_1'(t-\tau) = (t-\tau)e^{-2(t-\tau)},$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (t-\tau)e^{-2(t-\tau)} \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} d\tau = e^{-2t} \int_0^t \frac{t-\tau}{(1+2\tau)^2} d\tau = \\ &= te^{-2t} \int_0^t \frac{d\tau}{(2\tau+1)^2} - e^{-2t} \int_0^t \frac{\tau d\tau}{(1+2\tau)^2} = \\ &= -te^{-2t} \cdot \frac{1}{2(2\tau+1)} \Big|_0^t - e^{-2t} \int_0^t \left(\frac{\tau + \frac{1}{2}}{(1+2\tau)^2} - \frac{1/2}{(1+2\tau)^2} \right) d\tau = \\ &= -\frac{t}{2} e^{-2t} \frac{1}{2t+1} + \frac{t}{2} - e^{-2t} \left(\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{(2\tau+1)} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{(2\tau+1)^2} \right) = \\ &= -\frac{t}{2} \frac{e^{-2t}}{2t+1} + \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} \left(\ln(2\tau+1) \Big|_0^t + \frac{1}{2\tau+1} \Big|_0^t \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{te^{-2t}}{2(2t+1)} + \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t} \ln(2t+1)}{4} - \frac{e^{-2t}}{4(2t+1)} + \frac{e^{-2t}}{4} =$$

$$= e^{-2t} \left(\left(\frac{-2t}{4(2t+1)} - \frac{1}{4(2t+1)} \right) + \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right) =$$

$$= e^{-2t} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right) = e^{-2t} \left(\frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right).$$

Ответ: $y(t) = e^{-2t} \left(\frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right).$

Задача 24. Операционным методом решить задачу Коши

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos \frac{t}{2}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Решение. Используя соотношение

$$e^{i\omega t} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2},$$

получим

$$2e^t \cos \frac{t}{2} \leftrightarrow 2 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1/4}.$$

Обозначим изображение оригинала $y(t)$ через $Y(p)$, тогда

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

$$y''(t) \leftrightarrow p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - p.$$

Записав изображения левой и правой частей уравнения, получим

$$p^2 Y(p) - p - 3pY(p) + 3 + 2Y(p) = 2 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1/4},$$

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = 2 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1/4} + p - 3,$$

$$Y(p) = \frac{2(p-1)}{((p-1)^2 + 1/4)(p-1)(p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{2}{((p-1)^2 + 1/4)(p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)}.$$

Разложим каждую из записанных дробей на простейшие:

$$1) \frac{2}{((p-1)^2 + 1/4)(p-2)} = \frac{Ap+B}{(p-1)^2 + 1/4} + \frac{C}{p-2};$$

$$2 = (Ap+B)(p-2) + C((p-1)^2 + 1/4).$$

$$\text{Подставив } p=2, \text{ получим } 2 = C \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow C = 1,6.$$

$$2 = Ap^2 - 2Ap + Bp - 2B + 1,6p^2 - 3,2p + 2;$$

$$p^0 \left| \begin{array}{l} 2 = -2B + 2 \end{array} \right. \Rightarrow B = 0,$$

$$p^1 \left| \begin{array}{l} 0 = -2A + B - 3,2 \end{array} \right. \Rightarrow A = -1,6.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{((p-1)^2 + 1/4)(p-2)} = \frac{-1,6p}{((p-1)^2 + 1/4)} + \frac{1,6}{p-2};$$

$$2) \frac{p-3}{(p-1)(p-2)} = \frac{D}{p-1} + \frac{E}{p-2};$$

$$p-3 = D(p-2) + E(p-1).$$

$$\text{Отсюда при } p=2, \quad p=1 \quad \text{имеем} \quad -1 = E; \\ -2 = -D \Rightarrow D = 2.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{p-3}{(p-1)(p-2)} = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p-2}.$$

Окончательно имеем, что

$$Y(p) = -\frac{1,6p}{(p-1)^2 + 1/4} + \frac{1,6}{p-2} + \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p-2} = \frac{-1,6p+1,6}{(p-1)^2 + 1/4} - \frac{1,6}{(p-1)^2 + 1/4} + \\ + \frac{0,6}{p-2} + \frac{2}{p-1} = -1,6 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1/4} - 3,2 \frac{1/2}{(p-1)^2 + 1/4} + \frac{0,6}{p-2} + \frac{2}{p-1}.$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2} \leftrightarrow e^{at} \cos \omega t, \quad \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2} \leftrightarrow e^{at} \sin \omega t,$$

$$\frac{1}{p-a} \leftrightarrow e^{at}$$

и свойством линейности, найдем оригинал для $Y(p)$:

$$y(t) = -1,6e^t \cos \frac{1}{2}t - 3,2e^t \sin \frac{1}{2}t + 0,6e^{2t} + 2e^t.$$

Ответ: $-1,6e^t \cos \frac{1}{2}t - 3,2e^t \sin \frac{1}{2}t + 0,6e^{2t} + 2e^t.$

Задача 25. На материальную точку массы m действует сила сопротивления $R = kv$, пропорциональная скорости v . Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0 ? $k = 10m, \quad v_0 = 1 \text{ м/с}.$

Решение. Обозначим координату точки в момент времени t через $y(t)$. При этом $y(0)$ примем за 0, $y'(0) = v_0 = 1$. Закон движения точки найдем из 2-го закона Ньютона $-R = m \cdot y''$.

Отсюда $-kv = my''$; $-10my' = my''$.

В результате получаем задачу Коши

$$y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Решим ее операторным методом, обозначив изображение $y(t)$ через $Y(p)$. При этом $y' \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p)$;

$$y'' \leftrightarrow p^2Y(p) - py'(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

Получим следующее уравнение:

$$p^2Y(p) - 1 + 10pY(p) = 0;$$

$$Y(p)(p^2 + 10p) = 1;$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 10p}.$$

Разложим полученную дробь на простейшие

$$\frac{1}{p(p+10)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+10}; \quad 1 = A(p+10) + Bp;$$

$$p=0 \Rightarrow 1=10A \Rightarrow A=0,1,$$

$$p=-10 \Rightarrow 1=-10B \Rightarrow B=-0,1.$$

$$\text{Поэтому } Y(p) = \frac{0,1}{p} - \frac{0,1}{p+10}.$$

Оригинал для этой функции получаем, используя соотношение

$$\frac{1}{p-a} \leftrightarrow e^{at} \text{ и свойство линейности}$$

$$y(t) = 0,1 - 0,1e^{-10t}.$$

Расстояние, пройденное точкой за неограниченное время, определяется пределом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (0,1 - 0,1e^{-10t}) = 0,1.$$

Ответ: 0,1 м.

Задача 26. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим изображение $x(t)$ через $X(p)$, $y(t)$ через $Y(p)$, тогда

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p).$$

$$\dot{y}(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} pX = -2x + y; \\ pY - 1 = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} (p+2)X - Y = 0 \\ -3x + pY = 1. \end{cases}$$

Решим ее по правилу Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p+2) & -1 \\ -3 & p \end{vmatrix} = p(p+2) - 3 = p^2 + 2p - 3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (p+2) & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = p+2;$$

$$X = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{p^2 + 2p - 3}; \quad Y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p+2}{p^2 + 2p - 3}.$$

Разложим каждую из этих дробей на простейшие и найдем их оригиналы:

$$\text{а) } X = \frac{1}{p^2 + 2p - 3} = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+3};$$

$$1 = A(p+3) + B(p-1),$$

$$p=1 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = 0,25,$$

$$p=-3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0,25.$$

$$\text{Поэтому } X(p) = \frac{0,25}{p-1} - \frac{0,25}{p+3}.$$

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = 0,25e^t - 0,25e^{-3t};$$

$$\text{б) } Y = \frac{p+2}{p^2 + 2p - 3} = \frac{p+2}{(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+3};$$

$$p+2 = A(p+3) + B(p-1),$$

$$p=1 \Rightarrow 3 = 4A \Rightarrow A = 0,75,$$

$$p=-3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0,25.$$

$$\text{Поэтому } Y(p) = \frac{0,75}{p-1} + \frac{0,25}{p+3}.$$

$$Y(p) \leftrightarrow y(t) = 0,75e^t + 0,25e^{-3t}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x(t) = 0,25e^t - 0,25e^{-3t}, \\ y(t) = 0,75e^t + 0,25e^{-3t}. \end{cases}$$

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Комплексные числа, действия над ними.
2. Показательная и логарифмическая функции комплексного переменного. Формула Эйлера.
3. Степенная функция. Тригонометрические и гиперболические функции.
4. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции.
5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Понятие о конформном отображении.
6. Интеграл от функции комплексного переменного, его свойства.
7. Теорема Коши для одно- и многосвязных областей. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Интегральная формула Коши.
9. Существование производных всех порядков у аналитической функции в ряду Тейлора.
10. Ряд Тейлора. Теорема о разложимости аналитической функции в ряд Тейлора.
11. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Теорема Лорана.
12. Классификация изолированных особых точек.
13. Вычеты. Вычисления вычетов.
14. Основная теорема Коши о вычетах. Вычисление контурных интегралов.
15. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
16. Преобразование Лапласа. Функция-оригинал.
Существование и аналитичность преобразования Лапласа.
Поведение изображения в бесконечности.
17. Свойства преобразования Лапласа: свойство линейности, теорема подобия, теорема затухания (смещения), теорема запаздывания.
18. Дифференцирование оригинала и изображения.
19. Интегрирование оригинала и изображения.
20. Интегрирование оригинала по заданному изображению.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать равенство

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, \theta \neq 2\pi, n=0, \pm 1, \dots$$

Указание. Рассмотреть геометрическую прогрессию $e^{i\theta}, e^{i2\theta}, \dots, e^{in\theta}$.2. Доказать, что в полярных координатах r, φ условия Коши-Римана имеют вид $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$.3. Доказать, что функция $w=|z|$ нигде не дифференцируема.4. Пусть функция $u(x, y)$ гармоническая в некоторой области G , т.е. $\Delta u = 0$ в любой точке $(x, y) \in G$. Для каких « f » сложная функция $f[u(x, y)]$ будет также гармонической в области G ?5. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z| \leq R$ и $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Для всех внутренних точек круга $|z| < R$ доказать неравенство

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}}, n=1, 2, \dots$$

6. Числа A_n , определяемые условиями $A_0=1, A_1=1, A_{n+2}=A_n+A_{n+1}, n=0, 1, \dots$, называются числами Фибоначчи. Доказать, что в некоторой области $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \frac{1}{1-z-z^2}$. Определить область сходимости ряда.7. Доказать, что для четной функции $f(x)$ имеет место равенство $\operatorname{rez}_{z=0} f(z) = -\operatorname{rez}_{z=0} f(z)$, а для нечетной функции — равенство $\operatorname{rez}_{z=0} f(z) = \operatorname{rez}_{z=0} f(z)$.8. Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ в точке $z = z_0$ имеют полюс соответственно порядка m и n . Что можно сказать о характере особой точки $z=z_0$ для функций: а) $f(z)\varphi(z)$; б) $f(z)/\varphi(z)$; в) $f(z)+\varphi(z)$?9. Функции $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в точке z_0 , причем $f(z_0) \neq 0$; $g(z_0) = g'(z_0) = 0, g''(z_0) \neq 0$. Найти вычет функции $\varphi(z) = f(z)/g(z)$ в точке z_0 .10. Являются ли оригиналами функция $f(t) = \eta(t) \sin e^{t^2}$ и её производная $f'(t)$? Здесь $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

11.Используя теорему умножения изображений, найти решение интегрального уравнения $\int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 1 - \cos t$

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Типтік есептер

Задача 1. Найти все значения корня (п.1.1)

1 - есеп. Түбірдің барлық мәндерін табу керек:

- | | | |
|--|---|---|
| 1.1. $\sqrt[4]{-1}$. | 1.2. $\sqrt[4]{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$. | 1.3. $\sqrt[3]{1}$. |
| 1.4. $\sqrt[3]{i}$. | 1.5. $\sqrt[4]{1}$. | 1.6. $\sqrt[4]{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$. |
| 1.7. $\sqrt[3]{-1}$. | 1.8. $\sqrt[3]{-i}$. | 1.9. $\sqrt[4]{-16}$. |
| 1.10. $\sqrt[4]{\frac{1 + i\sqrt{3}}{32}}$. | 1.11. $\sqrt[3]{8}$. | 1.12. $\sqrt[3]{8i}$. |
| 1.13. $\sqrt[4]{16}$. | 1.14. $\sqrt[4]{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{32}}$. | 1.15. $\sqrt{-8}$. |
| 1.16. $\sqrt{-8i}$. | 1.17. $\sqrt[4]{-1/16}$. | 1.18. $\sqrt{-8 + i8\sqrt{3}}$. |
| 1.19. $\sqrt[3]{1/8}$. | 1.20. $\sqrt[3]{i/8}$. | 1.21. $\sqrt[4]{1/16}$. |
| 1.22. $\sqrt{-8 + i8\sqrt{3}}$. | 1.23. $\sqrt[3]{-1/8}$. | 1.24. $\sqrt[3]{-1/8}$. |
| 1.25. $\sqrt{-128 + i128\sqrt{3}}$. | 1.26. $\sqrt[3]{27}$. | 1.27. $\sqrt[4]{1/256}$. |
| 1.28. $\sqrt{-128 - i128\sqrt{3}}$. | 1.29. $\sqrt[3]{i/27}$. | 1.30. $\sqrt[4]{256}$. |
| 1.31. $\sqrt{-i27}$. | | |

Задача 2. Представить в алгебраической форме (п. 1.2)

2-есеп. Алгебралық түрде жазу керек

- | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| 2.1. $\sin(\pi/4 + 2i)$. | 2.2. $\cos(\pi/6 + 2i)$. | 2.3. $\text{Ln } 6$. |
| 2.4. $\text{sh}(2 + \pi i/4)$. | 2.5. $\text{ch}(2 + \pi i/2)$. | 2.6. $\ln(1 + i)$. |
| 2.7. $\sin(\pi/3 + i)$. | 2.8. $\cos(\pi/4 + i)$. | 2.9. $\ln(\sqrt{3} + i)$. |
| 2.10. $\text{sh}(1 + \pi i/2)$. | 2.11. $\text{ch}(1 - \pi i)$. | 2.12. $\ln(1 + \sqrt{3} i)$. |

- | | | |
|--|--|--------------------------|
| 2.13. $\ln(-1+i)$. | 2.14. $\cos(\pi/4-2i)$. | 2.15. $\sin(\pi/2-5i)$. |
| 2.16. $\operatorname{sh}(3+\pi i/4)$. | 2.17. $\operatorname{ch}(1+\pi i/3)$. | 2.18. $\ln(-1-i)$. |
| 2.19. $\sin(\pi/6-3i)$. | 2.20. $\cos(\pi/3-3i)$. | 2.21. $\ln(1-i)$. |
| 2.22. $\operatorname{sh}(1-\pi i/3)$. | 2.23. $\operatorname{ch}(2-\pi i/6)$. | 2.24. 1^{2i} . |
| 2.25. $\sin(\pi/3-2i)$. | 2.26. $\cos(\pi/6-i)$. | 2.27. i^{3i} . |
| 2.28. $\operatorname{sh}(2-\pi i)$. | 2.29. $(-i)^{5i}$. | 2.30. $(-1)^{4i}$. |
| 2.31. $\operatorname{ch}(3+\pi i/4)$. | | |

Задача 3. Представить в алгебраической форме (п. 1.2)

3-есеп. Алгебралык түрде жазу керек

- | | | |
|---|--|--|
| 3.1. $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$. | 3.2. $\arcsin 4$. | 3.3. $\operatorname{arch}(-2)$. |
| 3.4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$. | 3.5. $\operatorname{arth}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$. | 3.6. $\operatorname{arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$. |
| 3.7. $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$. | 3.8. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$. | 3.9. $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$. |
| 3.10. $(-1-i)^{4i}$. | 3.11. $\sin(\pi/4+i)$. | 3.12. $\operatorname{arch}(3i)$. |
| 3.13. $\operatorname{arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$. | 3.14. $\operatorname{arch}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$. | 3.15. $\operatorname{arth}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$. |
| 3.16. $\operatorname{arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right)$. | 3.17. $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$. | 3.18. $\operatorname{arth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$. |
| 3.19. $\operatorname{arccos}(-5)$. | 3.20. $\operatorname{arsh}(-4i)$. | 3.21. $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$. |
| 3.22. $\omega = \sin \frac{i}{z}$ | 3.23. $\omega = e^{\frac{1}{z}}$. | 3.24. $\operatorname{arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$. |
| при $z = \frac{8+2\pi i}{\pi^2+16}$. | при $z = \frac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$. | |
| 3.25. $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$. | 3.26. $\operatorname{arth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$. | 3.27. $\omega = \operatorname{ch} iz$ |

при $z=\pi/4+2i$.

$$3.28. \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right). \quad 3.29. \arccos(-3i). \quad 3.30. (4-3i)^i.$$

$$3.31. (-12+5i)^i.$$

Задача 4. Вычертить область, заданную неравенствами
4-есеп. Теңсіздікпен берілген аймақты сызу керек

$$4.1. |z-1|\leq 1, |z+1|>2.$$

$$4.2. |z+i|\geq 1, |z|<2.$$

$$4.3. |z-i|\leq 2, \operatorname{Re} z>1.$$

$$4.4. |z+1|\geq 1, z+i=1.$$

$$4.5. |z+1|<1, |z-i|\leq 1.$$

$$4.6. |z-i|\leq 2, z-i=2.$$

$$4.7. |z-1-i|\leq 1, \operatorname{Im} z>1, \operatorname{Re} z\geq 1.$$

$$4.8. |z-1+i|\geq 1, \operatorname{Re} z<1, \operatorname{Im} z\leq -1.$$

$$4.9. |z-2-i|\leq 2, \operatorname{Re} z\geq 3, \operatorname{Im} z<1.$$

$$4.10. |z-1-i|\geq 1, 0\leq \operatorname{Re} z<2, 0<\operatorname{Im} z\leq 2.$$

$$4.11. |z+i|<2, 0<\operatorname{Re} z\leq 1.$$

$$4.12. |z-i|\leq 1, 0<\arg z<\pi/4.$$

$$4.13. |z-i|\leq 2, 0<\operatorname{Im} z<2.$$

$$4.14. |z+i|>1, -\pi/4\leq \arg z<0.$$

$$4.15. |z-1-i|<1, |\arg z|\leq \pi/4.$$

$$4.16. |z|<2, -\pi/4\leq \arg(z-1)\leq \pi/4.$$

$$4.17. |z|\leq 1, \arg(z+i)>\pi/4.$$

$$4.18. 1<|z-i|\leq 2, \operatorname{Im} z\geq 0, \operatorname{Re} z<1.$$

$$4.19. 1\leq |z-i|<2, \operatorname{Re} z\leq 0, \operatorname{Im} z>1.$$

$$4.20. |z|<2, \operatorname{Re} z\geq 1, \arg z<\pi/4$$

$$4.21. |z|>1, -1<\operatorname{Im} z\leq 1, 0<\operatorname{Re} z\leq 2.$$

$$4.22. |z-1|>1, -1\leq \operatorname{Im} z<0, 0\leq \operatorname{Re} z<3.$$

$$4.23. |z+i|<1, -3\pi/4\leq \arg z\leq -\pi/4.$$

$$4.24. |z-i|\leq 1, -\pi/2<\arg(z-i)<\pi/4.$$

$$4.25 \quad z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

$$4.26 \quad z\bar{z} \leq 2, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

$$4.27 \quad 1 < z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z > 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1.$$

$$4.28 \quad |z - 1| < 1, \arg z \leq \pi/4, \arg(z - 1) > \pi/4.$$

$$4.29 \quad |z - i| < 1, \arg z \geq \pi/4, \arg(z + 1 - i) \leq \pi/4.$$

$$4.30 \quad |z - 2 - i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \leq 3.$$

$$4.31 \quad |\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| < 2.$$

Задача 5. Определить вид кривой (п. 1.3)

5-есеп. Қисықтың түрін анықтау керек

$$5.1 \quad z = 3 \operatorname{sect} + i2 \operatorname{tgt}.$$

$$5.2 \quad z = 2 \operatorname{sect} - i3 \operatorname{tgt}.$$

$$5.3 \quad z = -\operatorname{sect} + i3 \operatorname{tgt}.$$

$$5.4 \quad z = 4 \operatorname{tgt} - i3 \operatorname{sect}.$$

$$5.5 \quad z = 3 \operatorname{tgt} + i4 \operatorname{sect}.$$

$$5.6 \quad z = -4 \operatorname{tgt} - i2 \operatorname{sect}.$$

$$5.7 \quad z = 3 \operatorname{cosect} + i3 \operatorname{ctgt}.$$

$$5.8 \quad z = 4 \operatorname{cosect} - i2 \operatorname{ctgt}.$$

$$5.9 \quad z = \operatorname{ctgt} - i2 \operatorname{cosect}.$$

$$5.10 \quad z = -\operatorname{ctgt} + i3 \operatorname{cosect}.$$

$$5.11 \quad z = 3 \operatorname{ch} 2t + i2 \operatorname{sh} 2t.$$

$$5.12 \quad z = 2 \operatorname{ch} 3t - i3 \operatorname{sh} 3t.$$

$$5.13 \quad z = 5 \operatorname{sh} 4t + i4 \operatorname{ch} 4t.$$

$$5.14 \quad z = -4 \operatorname{sh} 5t - i5 \operatorname{ch} 5t.$$

$$5.15 \quad z = \frac{2}{\operatorname{ch} 2t} + i4t \operatorname{th} 2t.$$

$$5.16 \quad z = \frac{4}{\operatorname{ch} 4t} + i2t \operatorname{th} 4t.$$

$$5.17 \quad z = i \operatorname{th} 5t + \frac{5i}{\operatorname{ch} 5t}.$$

$$5.18 \quad z = \frac{1}{\operatorname{sh} t} - i \operatorname{ct} h t.$$

$$5.19 \quad z = 2e'' + \frac{1}{2e''}.$$

$$5.20 \quad z = 3e'' - \frac{1}{2e''}.$$

$$5.21 \quad z = -2e'' + \frac{1}{e''}.$$

$$5.22 \quad z = 2e^{2i} - \frac{1}{e^{2i}}.$$

$$5.23 \quad z = \frac{1+i}{1-i} + i \frac{2+i}{2-i}.$$

$$5.24 \quad z = \frac{t-1+it}{t(t-1)}.$$

$$5.25 \quad z = \frac{1+i}{1-i} + i \frac{t}{1-i} (2-4i).$$

$$5.26 \quad z = \frac{2+i}{2-i} + i \frac{1+i}{1-i}.$$

$$5.27 \quad z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4).$$

$$5.28 \quad z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1).$$

$$5.29 \quad z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4).$$

$$5.30 \quad z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5).$$

$$5.31 \quad z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1).$$

Задача 6. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$ (п. 1.4)

6-есеп. Бсрылген нақты $u(x, y)$ немесе жорамал $v(x, y)$ бөлігі және

$f(z_0)$ мәні бойынша z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық $f(z)$ функциясын тұрғызу керек

$$6.1 \quad u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0. \quad 6.2 \quad u = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1.$$

$$6.3 \ v = e^x (y \cos y + x \sin y), f(0) = 0. \quad 6.4 \ u = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0.$$

$$6.5 \ u = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y, f(0) = 2. \quad 6.6 \ u = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$$

$$6.7 \ v = e^{-y} \sin x + y, f(0) = 1. \quad 6.8 \ v = e^x \cos y, f(0) = 1 + i.$$

$$6.9 \ v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1. \quad 6.10 \ v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2.$$

$$6.11 \ u = e^{-y} \cos x, f(0) = 1. \quad 6.12 \ u = y - 2xy, f(0) = 0.$$

$$6.13 \ v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i. \quad 6.14 \ u = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1.$$

$$6.15 \ v = 3x^2 y - y^3 - y, f(0) = 0. \quad 6.16 \ v = 2xy + y, f(0) = 0.$$

$$6.17 \ v = 3x^2 y - y^3, f(0) = 1. \quad 6.18 \ u = e^x (x \cos y - y \sin y), f(0) = 0.$$

$$6.19 \ v = 2xy + 2x, f(0) = 0. \quad 6.20 \ u = 1 - \sin y \cdot e^x, f(0) = 1 + i.$$

$$6.21 \ v = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, f(0) = 2. \quad 6.22 \ v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$$

$$6.23 \ u = e^{-y} \cos x + x, f(0) = 1. \quad 6.24 \ v = e^{-x} \sin x, f(0) = 1.$$

$$6.25 \ u = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1. \quad 6.26 \ u = x/(x^2 + y^2) + x, f(1) = 2.$$

$$6.27 \ v = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0. \quad 6.28 \ u = -2xy - 2y, f(0) = i.$$

$$6.29 \ v = 2xy - 2y, f(0) = 1. \quad 6.30 \ u = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0.$$

$$6.31 \ v = 2xy + x, f(0) = 0.$$

Задача 7. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой (п. 1.5)

7-есеп. Комплекс айнымалы функцияны берилген кысык бойынша интегралдау керек

$$7.1 \ \int_{AB} \bar{z}^2 dz; AB: \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}.$$

$$7.2 \ \int_L (z+1)e^z dz; L: \{|z| = 1; \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

$$7.3 \ \int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz; AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 0, z_B = 2 + 2i.$$

$$7.4 \int_{AB} (z^2 + 7z + 1)dz; AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 1, z_B = 1 - i.$$

$$7.5 \int_{ABC} |z|dz; ABC - \text{ломаная}, z_A = 0, z_B = -1 + i, z_C = 1 + i.$$

$$7.6 \int_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1)dz; AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 1, z_B = i.$$

$$7.7 \int_{AB} \bar{z}^2 dz; AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 0, z_B = 1 + i.$$

$$7.8 \int_{ABC} z^3 e^{z^4} dz; ABC - \text{ломаная}, z_A = i, z_B = 1, z_C = 0.$$

$$7.9 \int_{AB} \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz; AB: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}, BC - \text{отрезок}, z_B = 1, z_C = 2.$$

$$7.10 \int_{ABC} (z^2 + \cos z)dz; ABC - \text{ломаная}, z_A = 0, z_B = 1, z_C = i.$$

$$7.11 \int_L \frac{\bar{z}}{z} dz; L - \text{граница области: } \{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

$$7.12 \int_{ABC} (chz + \cos iz)dz; ABC - \text{ломаная}, z_A = 0, z_B = -1, z_C = i.$$

$$7.13 \int_L |z| \bar{z} dz; L: \{|z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

$$7.14 \int_L (chz + z)dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

$$7.15 \int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz; L: \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

$$7.16 \int_{AB} (3z^2 + 2z)dz; AB: \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}.$$

$$7.17 \int_L z \operatorname{Re} z^2 dz; L: \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

$$7.18 \int_{ABC} (z^2 + 1) dz; ABC - \text{ломаная}, z_A = 0, z_B = -1 + i, z_C = i.$$

$$7.19, \int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz; AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 1 + i, z_B = 0.$$

$$7.20 \int_L (\sin iz + z) dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

$$7.21 \int_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz; AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 0, z_B = 1 + 2i.$$

$$7.22 \int_{AB} (2z + 1) dz; AB: \{y = x^3; z_A = 0, z_B = 1 + i\}.$$

$$7.23 \int_{ABC} z \bar{z} dz; AB: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}, BC - \text{отрезок}, z_B = 1, z_C = 0.$$

$$7.24 \int_L (\cos iz + 3z^2) dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

$$7.25 \int_L |z| dz; L: \{|z| = \sqrt{2}, 3\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4\}.$$

$$7.26 \int_{ABC} (z^9 + 1) dz; ABC - \text{ломаная}, z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i.$$

$$7.27 \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{z} dz.$$

$$7.28 \int_{ABC} (\sin z + z^5) dz; ABC - \text{ломаная}, z_A = 0, z_B = 1, z_C = 2i.$$

$$7.29 \int_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz; AB - \text{отрезок прямой}, z_A = 0, z_B = 1 + i.$$

$$7.30 \int_L (z^3 + \sin z) dz; L: \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

$$7.31 \int_L z|z| dz; L: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Задача 8. Найти все Лорановские разложения данной функции по степеням z (п. 1.6)

8-есеп. Берілген функцияның z дәрежесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек

$$8.1 \frac{z-2}{2z^3+z^2-z}.$$

$$8.2 \frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}.$$

$$8.3 \frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}.$$

$$8.4 \frac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}.$$

$$8.5 \frac{5z-50}{2z^4+5z^3-25z^2}.$$

$$8.6 \frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}.$$

$$8.7 \frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}.$$

$$8.8 \frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}.$$

$$8.9 \frac{9z-162}{2z^4+9z^3-81z^2}.$$

$$8.10 \frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}.$$

$$8.11 \frac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}.$$

$$8.12 \frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}.$$

$$8.13 \frac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}.$$

$$8.14 \frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}.$$

$$8.15 \frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}.$$

$$8.16 \frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}.$$

$$8.17 \frac{z+2}{z+z^2-2z^3}.$$

$$8.18 \frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}.$$

$$8.19 \frac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}.$$

$$8.20 \frac{2z+16}{8z^3+2z^3-z^4}.$$

$$8.21 \frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}.$$

$$8.22 \frac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}.$$

$$8.23 \frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}.$$

$$8.24 \frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}.$$

$$8.25 \frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}.$$

$$8.26 \frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}.$$

$$8.27 \frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}.$$

$$8.28 \frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}, \quad 8.29 \frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}, \quad 8.30 \frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}.$$

$$8.31 \frac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}.$$

Задача 9. Найти все Лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$ (п. 1.6)

9-есеп. Берілген функцияның $z-z_0$ дәрсесі бойынша барлық Лоран қатарларын табу керек

$$9.1 \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 1+2i.$$

$$9.2 \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 2-3i.$$

$$9.3 \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -3-2i.$$

$$9.4 \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -2+i.$$

$$9.5 \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = 1+3i.$$

$$9.6 \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = 2-i.$$

$$9.7 \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -1+2i.$$

$$9.8 \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -2-3i.$$

$$9.9 \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = 2+i.$$

$$9.10 \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = 3-i.$$

$$9.11 \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = -2+3i.$$

$$9.12 \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = -2-2i.$$

$$9.13 \frac{z}{z^2+1}, z_0 = 2+i.$$

$$9.14 \frac{z}{z^2+1}, z_0 = 1-2i.$$

$$9.15 \frac{z}{z^2+1}, z_0 = -3+i.$$

$$9.16 \frac{z}{z^2+1}, z_0 = -3-2i.$$

$$9.17 \ 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2+2i.$$

$$9.18 \ 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = 1-3i.$$

$$9.19 \ \frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -3-i.$$

$$9.20 \ \frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2+1.$$

$$9.21 \ \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -1-2i.$$

$$9.22 \ \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 3+i.$$

$$9.23 \ \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 2-2i.$$

$$9.24 \ \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -2-i.$$

$$9.25. \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = -1-3i.$$

$$9.26. \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = -3+2i.$$

$$9.27. \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = 2+3i.$$

$$9.28. \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = 3+2i.$$

$$9.29. \frac{2z}{z^2 - 4}, z_0 = -1+3i.$$

$$9.30. \frac{2z}{z^2 - 4}, z_0 = 2+2i.$$

$$9.31. \frac{2z}{z^2 - 4}, z_0 = 3-2i.$$

Задача 10. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 (п. 1.6)

10-есеп. Берілген функцияны z_0 дәрежесі бойынша Лоран қатарларын жіктеу керек

$$10.1. z \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2.$$

$$10.2. \sin \frac{z}{z-1}, z_0 = 1.$$

$$10.3. ze^{z/(z-5)}, z_0 = 5.$$

$$10.4. \sin \frac{2z-2}{z+2}, z_0 = -2.$$

$$10.5. \cos \frac{3z}{z-i}, z_0 = i.$$

$$10.6. \sin \frac{5z}{z-2i}, z_0 = 2i.$$

$$10.7. \sin \frac{3z-i}{3z+i}, z_0 = -i/3.$$

$$10.8. z \cos \frac{3z}{z-1}, z_0 = 1.$$

$$10.9. z \sin \frac{z}{z-1}, z_0 = 1.$$

$$10.10. (z-3) \cos \frac{\pi(z-3)}{z},$$

$$z_0 = 0.$$

$$10.11. z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}, z_0 = 0.$$

$$10.12. z \cos \frac{z}{z+2i}, z_0 = -2i.$$

$$10.13. \cos \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2.$$

$$10.14. \sin \frac{z+i}{z-i}, z_0 = i.$$

$$10.15. \sin \frac{z}{z-3}, z_0 = 3.$$

$$10.16. ze^{\frac{1}{z-2}}, z_0 = 2.$$

$$10.17. e^{\frac{z}{z-3}}, z_0=3.$$

$$10.18. \sin \frac{2z}{z-4}, z_0=4.$$

$$10.19. \sin \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, z_0=2.$$

$$10.20. e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}, z_0=1.$$

$$10.21. ze^{\frac{z}{(z-a)^2}}, z_0=a.$$

$$10.22. ze^{\frac{\pi}{z-\pi}}, z_0=\pi.$$

$$10.23. z \sin \pi \frac{z+2}{z}, z_0=0.$$

$$10.24. z \cos \pi \frac{z+3}{z-1}, z_0=1.$$

$$10.25. z^2 \sin \frac{z+3}{z}, z_0=0.$$

$$10.26. z \sin \frac{z^2-2z}{(z-1)^2}, z_0=1.$$

$$10.27. z \cos \frac{z}{z-3}, z_0=3.$$

$$10.28. z \sin \pi \frac{z-1}{z-2}, z_0=2.$$

$$10.29. z \cos \frac{z}{z-5}, z_0=5.$$

$$10.30. ze^{\frac{z}{z-4}}, z_0=4.$$

$$10.31. z \sin \frac{\pi z}{z-a}, z_0=a.$$

Задача 11. Определить тип особой точки $z=0$ для данной функции (п. 1.7)

11-есеп. Берілген функцияның $z=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек (п. 1.7).

$$11.1. \frac{e^{yz}-1}{\sin z-z+z^3/6}.$$

$$11.2. z^3 e^{7/z^2}.$$

$$11.3. \frac{\sin 8z-6z}{\cos z-1+z^2/2}.$$

$$11.4. \frac{\cos 7z-1}{shz-z-z^3/6}.$$

$$11.5. \frac{sh6z-6z}{chz-1-z^2/2}.$$

$$11.6. \frac{ch5z-1}{e^z-1-z}.$$

$$11.7. z \sin \frac{6}{z^2}.$$

$$11.8. \frac{e^z-1}{\sin z-z+z^3/6}.$$

$$11.9. \frac{\sin z^2-z^2}{\cos z-1+z^2/2}.$$

$$11.10. \frac{\cos z^2-1}{shz-z-z^3/6}.$$

$$11.11. \frac{e^{5z}-1}{chz-1-z^2/2}.$$

$$11.12. \frac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}.$$

$$\begin{array}{lll}
 11.13. \frac{z^4 \cos \frac{5}{z^2}}{z^2} & 11.14. \frac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6} & 11.15. \frac{sh 2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2} \\
 11.16. \frac{ch 2z - 1}{sh z - z - z^3/6} & 11.17. \frac{e^{z^4}}{ch z - 1 - z^2/2} & 11.18. ze^{4/z^2} \\
 11.19. \frac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z} & 11.20. \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6} & 11.21. \frac{e^{7z} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2} \\
 11.22. \frac{\sin 6z - 6z}{sh z - z - z^3/6} & 11.23. z \sin \frac{3}{z^3} & 11.24. \frac{\cos 5z - 1}{ch z - 1 - z^2/2} \\
 11.25. \frac{sh 4z - 4z}{e^z - 1 - z} & 11.26. \frac{ch 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6} & 11.27. \frac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2} \\
 11.28. \frac{\sin z^4 - z^4}{sh z - z - z^3/6} & 11.29. z \cos \frac{2}{z^3} & 11.30. \frac{\cos z^4/2}{ch z - 1 - z^2/2} \\
 (e^z - 1)/(e^z - 1 - z).
 \end{array}$$

Задача 12. Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип (п. 1.7)

12-есеп. Берілген функцияның ерекше нүктелерін тауып, олардың түрлерін анықтау керек (п. 1.7)

$$\begin{array}{lll}
 12.1. e^{1/2} / \sin(1/z). & 12.2. 1 / \cos z. & 12.3. tg^2 z. \\
 12.4. z tge^{1/z}. & 12.5. \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2} & 12.6. \frac{z^2 + 1}{(z-i)^2(z^2 + 4)} \\
 12.7. \frac{(z+\pi) \sin \frac{\pi}{2} z}{z \sin^2 z} & 12.8. tg \frac{1}{z} & 12.9. ctg \frac{1}{z} \\
 12.10. \frac{1}{e^z + 1} & 12.11. ctg \pi z & 12.12. \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4} \\
 12.13. \frac{1}{\sin z^2} & 12.14. \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{z(\sin z - z)} & 12.15. \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \\
 12.16. \frac{e^z - 1}{\sin \pi z} & 12.17. th z & 12.18. \frac{\sin z}{z^3(1 - \cos z)} \\
 12.19. \frac{e^{1/z}}{(e^z - 1)(1 - z)^3} & 12.20. \frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{z^2} & 12.21. \frac{z^2}{(z^2 - 4)^2 \cos \frac{1}{z-2}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 12.22. \int_{\gamma} z^2 \sin \frac{1}{z} dz & 12.23. \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{z^4 - 1} & 12.24. \frac{\sin \pi}{(z^3 - 1)^2} \\
 12.25. \frac{\sin^3 z}{z(1 - \cos z)} & 12.26. \operatorname{ctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{z} & 12.27. \frac{\sin 3z^2}{z(z^2 + 1)} e^{1/z} \\
 12.28. \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)} & 12.29. \frac{\sin 3z}{z(1 - \cos z)} & 12.30. \frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2 + 1)} \\
 12.31. \frac{\sin \pi}{z^4 - 1} e^{1/z}
 \end{array}$$

Задача 13. Вычислить интеграл (п. 1.7, 1.8)

13-есеп. Интегралды есептеу керек

$$\begin{array}{ll}
 13.1. \int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2 + 1)} & 13.2. \int_{|z-1-i|=5,4} \frac{2dz}{z^2(z-1)} \\
 13.3. \int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z(z^2 + 4)} & 13.4. \int_{|z|=1} \frac{2 + \sin z}{z(z + 2i)} dz \\
 13.5. \int_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z} & 13.6. \int_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z + 2)}{\sin z} dz \\
 13.7. \int_{|z-1|=3} \frac{ze^z dz}{\sin z} & 13.8. \int_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|dz}{\sin z} \\
 13.9. \int_{|z-1/4|=1} \frac{z(z+1)^2 dz}{\sin 2\pi z} & 13.10. \int_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)dz}{\sin \pi z} \\
 13.11. \int_{|z-3|=1} \frac{(\sin 3z + 2)dz}{z^2(z - \pi)} & 13.12. \int_{|z-1|=1} \frac{(e^z + 1)dz}{z(z-1)} \\
 13.13. \int_{|z|=1} \frac{(e^z + 2)dz}{\sin 3zi} & 13.14. \int_{|z-2|=3} \frac{(\cos^2 z + 1)dz}{z^2 - \pi^2} \\
 13.15. \int_{|z-i|=3/2} \frac{\ln(z+2)dz}{\sin z} & 13.16. \int_{z=0}^1 \frac{(\sin^3 z + 2)dz}{z^2 - 4\pi^2}
 \end{array}$$

$$13.17. \int_{|z+1|=1/2} \frac{(tgz+2)dz}{4z^2+\pi z}.$$

$$13.18. \int_{|z+3/2|=1} \frac{(\cos^2 z+3)dz}{2z^2+\pi z}.$$

$$13.19. \int_{|z+1|=2} \frac{(\sin^2 z+3)dz}{z^2+2\pi z}.$$

$$13.20. \int_{z=1/4} \frac{\ln(z+e)dz}{z \sin(z+\frac{\pi}{4})}.$$

$$13.21. \int_{z=\pi/2} \frac{(z^2+z+3)dz}{\sin z(\pi+z)}.$$

$$13.22. \int_{|z|=1} \frac{(z^3-i)dz}{\sin 2z(z-\pi)}.$$

$$13.23. \int_{z=1;=2} \frac{z(z+\pi)dz}{\sin 2z}.$$

$$13.24. \int_{|z|=2} \frac{(z^2+\sin z+2)dz}{z^2+\pi z}.$$

$$13.25. \oint_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)dz}{\sin 3z(z-\pi)}.$$

$$13.26. \oint_{|z-3/2|=2} \frac{\sin zdz}{z(z-\pi)(z+\frac{\pi}{3})}.$$

$$13.27. \oint_{|z=-\pi|} \frac{(z^2+\pi)^2 dz}{i \sin z}.$$

$$13.28. \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 zdz}{z \cos z}.$$

$$13.29. \oint_{|z=-\pi|=2} \frac{\cos^2 zdz}{z \sin z}.$$

$$13.30. \oint_{|z-3/2|=2} \frac{(z^3+\sin 2z)dz}{\sin \frac{z}{2}(z-\pi)}.$$

$$13.31. \oint_{|z-1|=2} \frac{(z^2+1)dz}{(z^2+4)\sin \frac{z}{3}}.$$

Задача 14. Вычислить интеграл (п. 1.7, 1.8)

14-есеп. Интегралды есептеу керек (п. 1.7, 1.8)

$$14.1. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3} dz.$$

$$14.2. \oint_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3} dz$$

$$14.3. \oint_{|z|=1} \frac{e^{1/z}+1}{z} dz.$$

$$14.4. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz.$$

$$14.5. \oint_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} dz.$$

$$14.6. \oint_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz.$$

$$14.7. \oint_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz.$$

$$14.9. \oint_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz.$$

$$14.11. \oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz.$$

$$14.13. \oint_{|z|=3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz.$$

$$14.15. \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz.$$

$$14.17. \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz.$$

$$14.19. \oint_{|z|=1/2} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz.$$

$$14.21. \oint_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz.$$

$$14.23. \oint_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3} dz.$$

$$14.25. \oint_{|z|=2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3z}{2z^6} dz.$$

$$14.27. \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3} dz.$$

$$14.29. \oint_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz.$$

$$14.31. \oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} dz.$$

$$14.8. \oint_{|z|=1} \frac{1 - \sin^2 z}{z} dz.$$

$$14.10. \oint_{|z|=1/3} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3} dz.$$

$$14.12. \oint_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz.$$

$$14.14. \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz.$$

$$14.16. \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz.$$

$$14.18. \oint_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz.$$

$$14.20. \oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz.$$

$$14.22. \oint_{|z|=1/2} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz.$$

$$14.24. \oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz.$$

$$14.26. \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz.$$

$$14.28. \oint_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz.$$

$$14.30. \oint_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz.$$

Задача 15. Вычислить интеграл (п. 1.7; 1.8)
15-есеп. Интегралды есептеу керек (п. 1.7, 1.8).

- 15.1. $\oint_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - sh^2 \pi^2 z} dz.$
- 15.2. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2 / 2}{z^4 sh \frac{9}{4} z} dz.$
- 15.3. $\oint_{|z|=0,5} \frac{sh 2\pi - 2\pi}{z^2 \sin^2 \frac{\pi^2 z}{3}} dz.$
- 15.4. $\oint_{|z|=2} \frac{ch 3z - 1 - 9z^2 / 2}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz.$
- 15.5. $\oint_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z sh^2 4iz} dz.$
- 15.6. $\oint_{|z|=0,4} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{z sh 2\pi z} dz.$
- 15.7. $\oint_{|z|=0,2} \frac{e^{8z} ch 4z}{z \sin 4\pi z} dz.$
- 15.8. $\oint_{|z|=0,1} \frac{ch z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz.$
- 15.9. $\oint_{|z|=1} \frac{sh 3z - \sin 3z}{z^3 sh 2z} dz.$
- 15.10. $\oint_{|z|=0,05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3 sh 16z} dz.$
- 15.11. $\oint_{|z|=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2 sh^2 2z} dz.$
- 15.12. $\oint_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 sh \frac{4z}{3}} dz.$
- 15.13. $\oint_{|z|=5} \frac{sh \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{6}} dz.$
- 15.14. $\oint_{|z|=1} \frac{ch 4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin \frac{8z}{3}} dz.$
- 15.15. $\oint_{|z|=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{sh^2 \pi z} dz.$
- 15.16. $\oint_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z sh 4z} dz.$
- 15.17. $\oint_{|z|=1} \frac{e^{7z} - ch 5z}{z \sin 2iz} dz.$
- 15.18. $\oint_{|z|=0,5} \frac{ch 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz.$
- 15.19. $\oint_{|z|=2} \frac{sh 3z - \sin 3z}{z^3 sh - iz} dz.$
- 15.20. $\oint_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2 sh 5z} dz.$

- 15.21. $\oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz.$
- 15.22. $\oint_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{\pi}{3}} dz.$
- 15.23. $\oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}} dz.$
- 15.24. $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi}{3}} dz.$
- 15.25. $\oint_{|z|=0,4} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 2\pi z} dz.$
- 15.26. $\oint_{|z|=0,3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz.$
- 15.27. $\oint_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - \operatorname{ch} 6z}{z \sin \pi z} dz.$
- 15.28. $\oint_{|z|=0,2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz.$
- 15.29. $\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh} \frac{z}{3}} dz.$
- 15.30. $\oint_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz.$
- 15.31. $\oint_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi z} dz.$

Задача 16. Вычислить интеграл (п. 1.7; 1.8)
16-есеп. Интегралды есептеу керек (п. 1.7. 1.8).

- 16.1. $\oint_{|z+i|=3} \left(\frac{4 \sin \frac{\pi}{4-2i}}{(z-2+i)^2 (z-4+i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi/2} + i} \right) dz.$
- 16.2. $\oint_{|z+0,2|=2} \left(ze^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2 \cos \pi z / 5}{(z+5)^2 (z+3)} \right) dz.$
- 16.3. $\oint_{|z+3|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2} - i} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2-i)^2 (z-4-i)} \right) dz.$
- 16.4. $\oint_{|z+2|=2} \left(z \operatorname{ch} \frac{1}{z+2} - \frac{2 \sin(\pi z / 2)}{(z+1)^2 (z-1)} \right) dz.$

$$16.5. \oint_{|z-2i|=2} \left(\frac{2 \cos \frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)} + \frac{\pi}{e^{\pi/2} + 1} \right) dz.$$

$$16.6. \oint_{|z+3|=2} \left(zsh \frac{i}{z+3} - \frac{4sh(\pi iz/4)}{(z+2)^2 z} \right) dz.$$

$$16.7. \oint_{|z+5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi/2} + i} + \frac{8ch \frac{\pi z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)} \right) dz.$$

$$16.8. \oint_{|z+4|=2} \left(z \cos \frac{1}{z+4} + \frac{2 \sin(\pi z/6)}{(z+3)^2(z+1)} \right) dz.$$

$$16.9. \oint_{|z-7i|=2} \left(\frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)} + \frac{\pi}{e^{\pi/2} + i} \right) dz.$$

$$16.10. \oint_{|z+5|=2} \left(z \sin \frac{1}{z+5} + \frac{2ch(\pi iz/4)}{(z+4)^2(z+2)} \right) dz.$$

$$16.11. \oint_{|z-3i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi/2} + i} + \frac{2 \cos \frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)} \right) dz.$$

$$16.12. \oint_{|z-1|=2} \left(ze^{\frac{z}{z-1}} + \frac{2 \cos \pi z/2}{(z-2)^2(z-4)} \right) dz.$$

$$16.13. \oint_{|z+i|=2} \left(\frac{2 \sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\pi/2} + i} \right) dz.$$

$$16.14. \oint_{|z-2i|=2} \left(zch \frac{3}{z-2} + \frac{2 \cos \pi z/3}{(z-3)^2(z-5)} \right) dz.$$

$$16.15. \oint_{|z+7i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi/2} - i} - \frac{8ch \frac{\pi z}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)} \right) dz.$$

$$16.16. \oint_{|z-3|=2} \left(zsh \frac{1}{z-3} - \frac{2 \sin \pi z/8}{(z-4)^2(z-6)} \right) dz.$$

$$16.17. \oint_{|z+3i|=2} \left(\frac{4sh \frac{\pi z}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)} - \frac{\pi}{e^{\pi/2}-i} \right) dz.$$

$$16.18. \oint_{|z-4|=2} \left(z \cos \frac{1}{z-4} + \frac{10ch \pi z / 5}{(z-5)^2(z-7)} \right) dz.$$

$$16.19. \oint_{|z-5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi/2}-i} + \frac{2 \cos \frac{\pi}{1-5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)} \right) dz.$$

$$16.20. \oint_{|z-5|=2} \left(z \sin \frac{i}{z-5} + \frac{2sh \pi z / 12}{(z-6)^2(z-8)} \right) dz.$$

$$16.21. \oint_{|z-i|=2} \left(\frac{4 \sin \frac{\pi}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi/2}-i} \right) dz.$$

$$16.22. \oint_{|z-6|=2} \left(ze^{\frac{1}{z-6}} - \frac{2ch \pi z / 5}{(z-5)^2(z-3)} \right) dz.$$

$$16.23. \oint_{|z-6i|=2} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2}+1} - \frac{2ch \frac{\pi z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)} \right) dz.$$

$$16.24. \oint_{|z-5|=2} \left(zch \frac{2}{z-5} + \frac{2 \cos \pi z / 4}{(z-4)^2(z-2)} \right) dz.$$

$$16.25. \oint_{|z+6i|=2} \left(\frac{2sh \frac{\pi z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi/2}+1} \right) dz.$$

$$16.26. \oint_{|z-4|=2} \left(zsh \frac{1}{z-4} + \frac{2 \sin \pi z / 6}{(z-3)^2(z-1)} \right) dz.$$

$$16.27. \oint_{|z+2i|=2} \left(\frac{\pi}{e^{\pi/2}+1} + \frac{4 \cos \frac{\pi}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)} \right) dz.$$

$$16.28. \oint_{|z-3|=2} \left(z \cos \frac{1}{z-3} + \frac{4ch \pi z / 2}{z(z-2)^2} \right) dz.$$

$$16.29. \oint_{|z-2|=2} \left(\frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \frac{\pi}{e^{\pi/2} + 1} \right) dz.$$

$$16.30. \oint_{|z-2|=2} \left(z \sin \frac{i}{z-2} - \frac{2sh\pi z/2}{(z-1)^2(z+1)} \right) dz.$$

$$16.31. \oint_{|z-2|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1} + \frac{6ch \frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} \right) dz.$$

Задача 17. Вычислить интеграл (п. 1.7; 1.8; 1.11)

17-есеп. Интегралды есептеу керек (п. 1.7. 1.8).

$$17.1. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sqrt{3} \sin t}.$$

$$17.2. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + \sqrt{15} \sin t}.$$

$$17.3. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 2\sqrt{6} \sin t}.$$

$$17.4. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 + \sqrt{35} \sin t}.$$

$$17.5. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{7 + 4\sqrt{3} \sin t}.$$

$$17.6. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4 \sin t}.$$

$$17.7. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 3 \sin t}.$$

$$17.8. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 3\sqrt{7} \sin t}.$$

$$17.9. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{9 - 4\sqrt{5} \sin t}.$$

$$17.10. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t}.$$

$$17.11. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}.$$

$$17.12. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}.$$

$$17.13. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 2\sqrt{3} \sin t}.$$

$$17.14. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}.$$

$$17.15. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 - 4\sqrt{2} \sin t}.$$

$$17.16. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}.$$

$$17.17. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3} \sin t - 2}.$$

$$17.18. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}.$$

$$17.19. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5}.$$

$$17.20. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}$$

$$17.21. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3} \sin t - 7}.$$

$$17.22. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}$$

$$17.23. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 \sin t + 5}.$$

$$17.24. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7} \sin t + 8}.$$

$$17.25. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5} \sin t + 9}.$$

$$17.26. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}$$

$$17.27. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} \sin t + 3}.$$

$$17.28. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}$$

$$17.29. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3} \sin t + 4}.$$

$$17.30. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t}$$

$$17.31. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2} \sin t + 6}.$$

Задача 18. Вычислить интеграл (п. 1.7; 1.8; 1.11)
18-есеп. Интегралды есептеу керек (п. 1.7, 1.8).

$$18.1. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{10/11} \cos t)^2}.$$

$$18.2. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \cos t)^2}.$$

$$18.3. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{6/7} \cos t)^2}.$$

$$18.4. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3} + \sqrt{11} \cos t)^2}.$$

$$18.5. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cos t)^2}.$$

$$18.6. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \cos t)^2}.$$

$$18.7. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + 3 \cos t)^2}.$$

$$18.8. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{3} \cos t)^2}.$$

$$18.9. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + 2 \cos t)^2}$$

$$18.10. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \sqrt{7} \cos t)^2}$$

$$18.11. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + \sqrt{5} \cos t)^2}$$

$$18.12. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + 2\sqrt{2} \cos t)^2}$$

$$18.13. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos t)^2}$$

$$18.14. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + \cos t)^2}$$

$$18.15. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos t)^2}$$

$$18.16. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \cos t)^2}$$

$$18.17. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{2} + \cos t)^2}$$

$$18.18. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \cos t)^2}$$

$$18.19. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos t)^2}$$

$$18.20. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{3} \cos t)^2}$$

$$18.21. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + 2 \cos t)^2}$$

$$18.22. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cos t)^2}$$

$$18.23. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} \cos t)^2}$$

$$18.24. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \sqrt{3} \cos t)^2}$$

$$18.25. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}$$

$$18.26. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{13} + 2\sqrt{3} \cos t)^2}$$

$$18.27. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}$$

$$18.28. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + 2 \cos t)^2}$$

$$18.29. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos t)^2}$$

$$18.30. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10} + 3 \cos t)^2}$$

$$18.31. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \cos t)^2}$$

Задача 19. Вычислить интеграл (п. 1.7; 1.8; 1.9)

19-есеп. Интегралды есептеу керек (п. 1.7, 1.8; 1.9).

$$19.1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

$$19.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 16)}.$$

$$19.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}.$$

$$19.4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)^2}.$$

$$19.5. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$19.6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2 (x^2 + 4)^2}.$$

$$19.7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$19.8. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2}.$$

$$19.9. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 3)^2}.$$

$$19.10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

$$19.11. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2}.$$

$$19.12. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 5)^2} dx.$$

$$19.13. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$19.14. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$$

$$19.15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)}.$$

$$19.16. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3}.$$

$$19.17. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$19.18. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 5)^2}.$$

$$19.19. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

$$19.20. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}.$$

$$19.21. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 10)^2}.$$

$$19.22. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$19.23. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 10}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$19.24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 8x + 17)^2} dx.$$

$$19.25. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2 (x^2 + 15)^2}.$$

$$19.26. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}.$$

$$19.27. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}.$$

$$19.28. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx.$$

$$19.29. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 16)}.$$

$$19.30. \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2}{(x^2 + 11)^2} dx.$$

$$19.31. \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 10x + 29)^2} dx.$$

Задача 20. Вычислить интеграл (п. 1.7; 1.8: 1.10)

20-есеп. Интегралды есептеу ксерек (п. 1.7, 1.8: 1.10).

$$20.1. \int_0^{\pi} \frac{x \sin 3x}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$20.2. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x-1) \sin x}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

$$20.3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$20.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$20.5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 6} dx.$$

$$20.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x/2)}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx.$$

$$20.7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) \cos 2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$$

$$20.8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos(x/2)}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$20.9. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x^2 - x) \sin x}{x^4 + 9x^2 + 20} dx.$$

$$20.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 17} dx.$$

$$20.11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$20.12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)} dx$$

$$20.13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

$$20.14. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

$$20.15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$20.16. \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1/4)^2} dx.$$

$$20.17. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

$$20.18. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} dx.$$

$$20.19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

$$20.20. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

$$20.21. \int_0^{\infty} \frac{x \sin(x/2)}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

$$20.22. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$$

$$20.23. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$$

$$20.24. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

$$20.25. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$20.26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

$$20.27. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

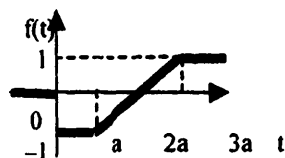
$$20.28. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$20.29. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x) \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$$

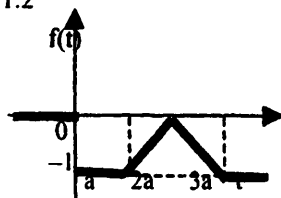
$$20.30. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x) \cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$$

$$20.31. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

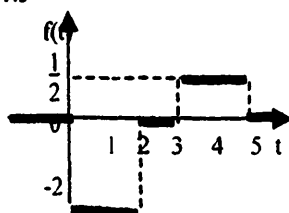
21.1



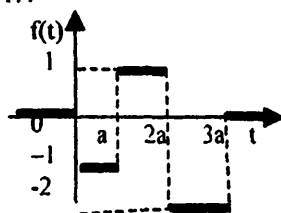
21.2



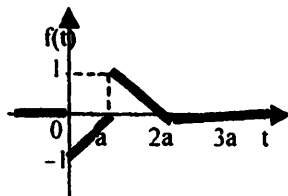
21.3



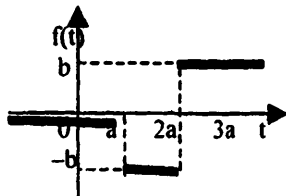
21.4



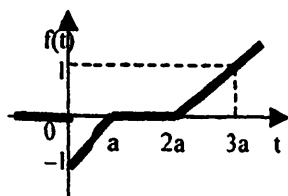
21.5



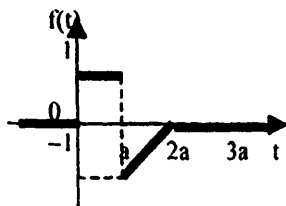
21.6



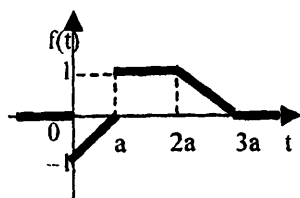
21.7



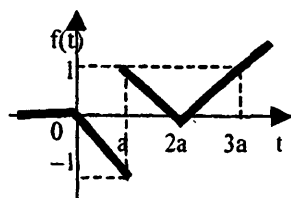
21.8



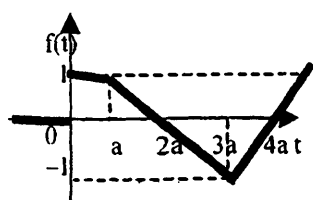
21.9



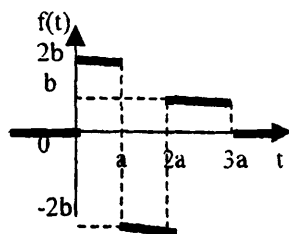
21.10



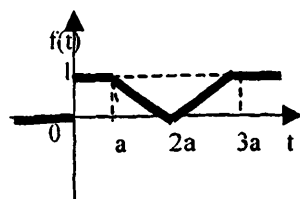
21.11



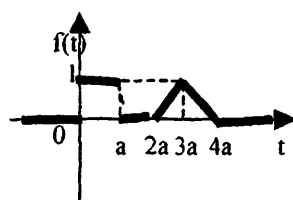
21.12



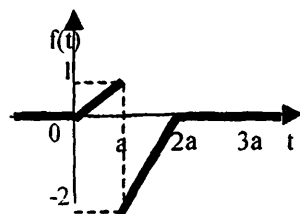
21.13



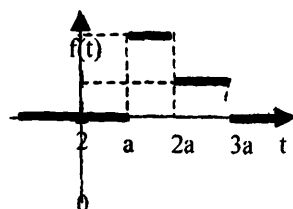
21.14



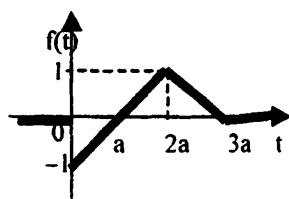
21.15



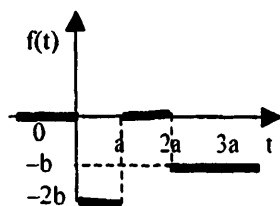
21.16



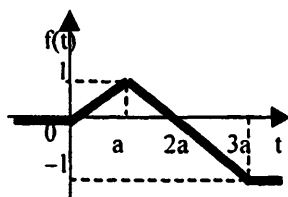
21.17



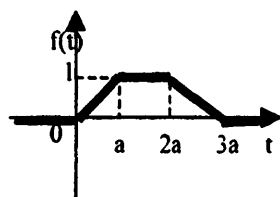
21.18



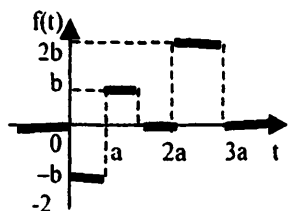
21.19



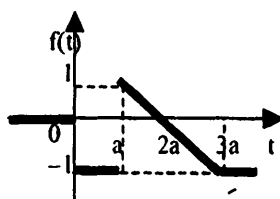
21.20



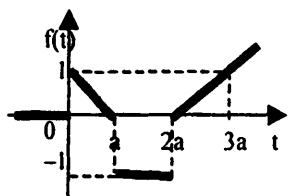
21.21



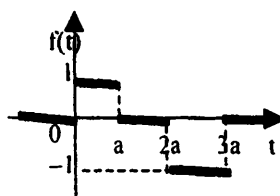
21.22



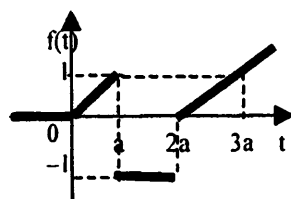
21.23



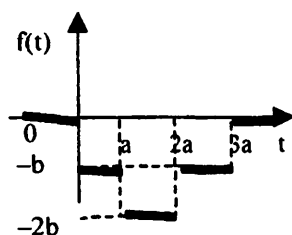
21.24



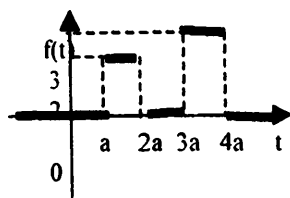
21.25



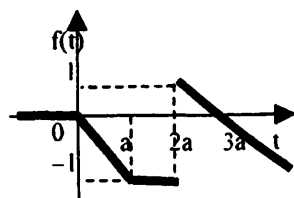
21.26



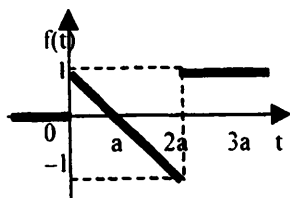
21.27



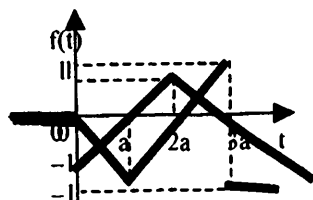
21.28



21.29



21.30



Задача 22. Найти оригинал по заданному изображению (п. 1.12)
22-есеп. Берілген бейне бойынша оригиналды табу керек

$$22.1. \frac{4p + 5}{(p - 2)(p^2 + 4p + 5)}.$$

$$22.2. \frac{p}{(p + 1)(p^2 + p + 1)}.$$

$$22.3. \frac{2p}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

$$22.4. \frac{1}{p(p^2 + 1)^2}.$$

$$22.5. \frac{p + 3}{p^3 + 2p^2 + 3p}.$$

$$22.6. \frac{p}{(p + 1)(p^2 + 4p + 5)}.$$

$$22.7. \frac{6}{p^3 - 8}.$$

$$22.8. \frac{4}{p^3 + 8}.$$

$$22.9. \frac{1}{p^5 + p^3}.$$

$$22.10. \frac{p + 4}{p^2 + 4p + 5}.$$

$$22.11. \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

$$22.12. \frac{p + 5}{(p + 1)(p^2 - 2p + 5)}.$$

$$22.13. \frac{1}{p^3 + p^2 + p}.$$

$$22.14. \frac{p + 5}{(p + 1)(p^2 + 4p + 5)}.$$

$$22.15. \frac{1}{p(p^3 + 1)}.$$

$$22.16. \frac{1}{p^3(p^2 - 4)}.$$

$$22.17. \frac{3p - 2}{(p - 1)(p^2 - 6p + 10)}.$$

$$22.18. \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}.$$

$$22.19. \frac{1}{p^3 - 1}.$$

$$22.20. \frac{e^{-p/2}}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)}.$$

$$22.21. \frac{5}{(p - 1)(p^2 + 4p + 5)}.$$

$$22.22. \frac{5p}{(p + 2)(p^2 - 2p + 2)}.$$

$$22.23. \frac{1}{(p - 2)(p^2 + 2p + 3)}.$$

$$22.24. \frac{p}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

$$22.25. \frac{1 - p}{p(p^2 + 3p + 3)}.$$

$$22.26. \frac{2p + 1}{(p + 1)(p^2 + 2p + 3)}.$$

$$22.27. \frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}.$$

$$22.30. \frac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}.$$

$$22.28. \frac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}.$$

$$22.31. \frac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}.$$

$$22.29. \frac{2-p}{p^3-2p^2+5p}.$$

Задача 23. Найти решение дифференциального уравнения,

удовлетворяющего условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$ (п. 1.12; 1.15; 1.16)

23-есеп. Дифференциалды теңдеудің $y(0)=0$, $y'(0)=0$ шартын қанағаттандыратын шешімін табу керек

$$23.1. y'' - y = tht.$$

$$23.2. y'' - y' = \frac{1}{1+e^t}.$$

$$23.3. y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}.$$

$$23.4. y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t.$$

$$23.5. y'' - y = th^2 t.$$

$$23.6. y'' - y = \frac{1}{cht}.$$

$$23.7. y'' - y' = \frac{e^t}{1+e^t}.$$

$$23.8. y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t+1}.$$

$$23.9. y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3+e^t}.$$

$$23.10. y'' - 2y' = \frac{e^t}{cht}.$$

$$23.11. \quad y'' - y' = \frac{1}{1 + ch t}.$$

$$23.12. \quad y'' + y' = \frac{1}{1 + e'}.$$

$$23.13. \quad y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2t}}{ch^2 2t}.$$

$$23.14. \quad y'' - 4y = \frac{1}{ch^3 2t}.$$

$$23.15. \quad y'' - y = \frac{1}{ch^2 t}.$$

$$23.16. \quad y'' + y' = \frac{e'}{1 + e'}.$$

$$23.17. \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}.$$

$$23.18. \quad 2y'' - y' = \frac{e^t}{(1 + e'^{1/2})^2}.$$

$$23.19. \quad y'' - y = \frac{1}{ch^3 t}.$$

$$23.20. \quad y'' - y' = \frac{e^{2t}}{(1 + e')^2}.$$

$$23.21. \quad y'' + 2y' + y = \frac{te^{-t}}{t+1}.$$

$$23.22. \quad y'' - y' = \frac{c^{2t}}{2 + c^t}.$$

$$23.23. \quad y'' - y = \frac{\operatorname{sh} t}{ch^2 t}.$$

$$23.24. \quad y'' + y' = \frac{e'}{(1 + e')^2}.$$

$$23.25. \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1 + t^2}.$$

$$23.26. y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{ch^2 t}.$$

$$23.27. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{ch^2 t}.$$

$$23.28. y'' - 4y = th^2 2t.$$

$$23.29. y'' + 2y' = \frac{1}{ch^2 t}.$$

$$23.30. y'' + y' = \frac{1}{(1+e)^2}.$$

$$23.31. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}.$$

Задача 24. Операционным методом решить задачу Коши (п. 1.12; 1.15)
24-есеп. Операциялық әдіспен Коши есебін шешу керек

- 24.1. $y'' + y = 6e^t$,
 $y(0) = 3, y'(0) = 1$.
- 24.2. $y'' - y' = t^2$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- 24.3. $y'' + y' = t^2 + 2t$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- 24.4. $y'' - y = \cos 3t$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
- 24.5. $y'' + y' + y = 7e^{2t}$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 4$.
- 24.6. $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
- 24.7. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$,
 $y(0) = -3, y'(0) = 2$.
- 24.8. $y'' + 2y' = 2 + e^t$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
- 24.9. $2y'' - y' = \sin 3t$,
 $y(0) = 2, y'(0) = 1$.
- 24.10. $y'' + 2y' = \sin t/2$,
 $y(0) = -2, y'(0) = 4$.
- 24.11. $y'' + y' = \sinh t$,
 $y(0) = 2, y'(0) = 1$.
- 24.12. $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- 24.13. $y'' - 3y' + 2y = e^t$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
- 24.14. $2y'' + 3y' + y = 3e^t$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- 24.15. $y'' + 2y' - 3y = 2t$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
- 24.16. $y'' + 4y = \sin 2t$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- 24.17. $2y'' + 5y' = 29 \cos t$,
 $y(0) = -1, y'(0) = 0$.
- 24.18. $y'' + y' + y = t^2 + t$,
 $y(0) = 1, y'(0) = -3$.
- 24.19. $y'' + 4y = 8 \sin 2t$,
 $y(0) = 3, y'(0) = -1$.
- 24.20. $y'' - y' - 6y = 2$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
- 24.21. $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
- 24.22. $y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{2t}$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
- 24.23. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$,
 $y(0) = 2, y'(0) = 6$.
- 24.24. $y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t$,
 $y(0) = -2, y'(0) = 3$.
- 24.25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} \cos 3t$,
 $y(0) = 5, y'(0) = 1$.
- 24.26. $y'' + 3y' - 10y = 47 \cos 3t - \sin 3t$,
 $y(0) = 3, y'(0) = -1$.
- 24.27. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$,
 $y(0) = -1, y'(0) = 0$.
- 24.28. $y'' - 2y' = e^t(t^2 - t - 3)$,
 $y(0) = 2, y'(0) = 2$.
- 24.29. $y'' + y = 2 \cos t$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- 24.30. $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t$,
 $y(0) = -1, y'(0) = -2$.
- 24.31. $y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos \frac{t}{2}$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Задача 25 (п. 1.12; 1.15)
25-есеп (1.12; 1.15 п.)

Варианты 1-8 1-8 варианттар

Частица массой m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $F=-kx$, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления $R=r \cdot v$. В момент $t=0$ частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0 . Найти закон движения $x=x(t)$ частицы.

Массасы m тең бөлшек x ығысуына пропорционал және қарама-қарсы бағытталған $F=-kx$ қалыптастырушы күші мен $R=r \cdot v$ кедергі күшінің әсерінен түзу сызық бойымен қозғалады. $t=0$ уақыт кезеңінде өзінің тепе-теңдік қалпынан x_0 қашықтықта және жылдамдығы v_0 тең болды. $x=x(t)$ қозғалыс заңдылығын табу керек.

- 25.1. $k=m, r=2m, x_0=1 \text{ м}, v_0=0$.
- 25.2 $k=m, r=2m, x_0=1 \text{ м}, v_0=m/c$.
- 25.3 $k=5m, r=2m, x_0=1 \text{ м}, v_0=0$.
- 25.4 $k=5m, r=2m, x_0=1 \text{ м}, v_0=1 \text{ м/с}$.
- 25.5 $k=5m, r=4m, x_0=2 \text{ м}, v_0=1 \text{ м/с}$.
- 25.6 $k=5m, r=4m, x_0=1 \text{ м}, v_0=0$.
- 25.7 $k=3m, r=2m, x_0=1 \text{ м}, v_0=0$.
- 25.8 $k=3m, r=2m, x_0=1 \text{ м}, v_0=1 \text{ м/с}$.

Варианты 9-16 9-16 варианттар

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой $F=kx$, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды $R=r \cdot v$, пропорциональная скорости v . При $t=0$ расстояние точки от начала координат x_0 , а скорость v_0 . Найти закон движения $x=x(t)$ материальной точки.

Массасы m тең бөлшек координата бас нүктесінен қашықтыққа пропорционал $F=kx$ күш әсерінен түзу сызықпен қозғалады. Нүктеге ортапың v жылдамдығына пропорционал $R=r \cdot v$

кедергі күші әсер етеді. $t=0$ кезінде нүктенің координата басынан қашықтығы - x_0 , ал жылдамдығы - v_0 . $x=x(t)$ қозғалыс заңдылығын табу керек.

- 25.9. $k=2m$, $r=m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=0$.
25.10. $k=2m$, $r=m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=1\text{ м/с}$.
25.11. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=1\text{ м/с}$.
25.12. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=2\text{ м/с}$.
25.13. $k=4m$, $r=3m$, $x_0=2\text{ м}$, $v_0=0$.
25.14. $k=4m$, $r=3m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=1\text{ м/с}$.
25.15. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=1\text{ м/с}$.
25.16. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=2\text{ м/с}$.

Варианты 17-24 17-24 варианттары

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы $F=-kx$, пропорциональной расстоянию x от начала координат, и направленной к началу координат, и возмущающей силы $f=A \cos t$. Найти закон движения $x=x(t)$ точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.

Массасы m тең материалдық нүкте x -қашықтығына (координата басынан) пропорционал және координата басына қарай бағытталған $F=-kx$ қалыптастырушы күшінің және $f=A \cos t$ ауытқытушы күшінің әсерінен түзу сызықты тербеліс жасайды. Бастапқы уақытта $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$ деп алып, $x=x(t)$ қозғалыс заңдылығын табу керек.

- 25.17. $k=m$, $A=2m$, $x_0=0$, $v_0=0$.
25.18. $k=m$, $A=m$, $x_0=0$, $v_0=1\text{ м/с}$.
25.19. $k=m$, $A=2m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=0$.
25.20. $k=m$, $A=m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=0,5\text{ м/с}$.
25.21. $k=9m$, $A=8m$, $x_0=1\text{ м}$, $v_0=0$.
25.22. $k=9m$, $A=4m$, $x_0=0$, $v_0=0$.
25.23. $k=9m$, $A=8m$, $x_0=0$, $v_0=3\text{ м/с}$.
25.24. $k=9m$, $A=m$, $x_0=1/8\text{ м}$, $v_0=3\text{ м/с}$.

Варианты 25-31 25-31 варианттары

На материальную точку массы m действует сила сопротивления $R=kv$, пропорциональная скорости v . Какое расстояние пройдёт

точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость U_0 ?

Массасы m тең материалдык нүктеге U жылдамдығына пропорционал $R=kU$ кедергі күші әсер етеді. Егер нүктенің бастапқы жылдамдығы U_0 болса, онда ол шектеусіз уақыт ішінде қанша қапықтыққа орын ауыстырады?

$$25.25. k=2m, U_0=10 \text{ м/с.} \quad 25.26. k=\frac{m}{3}, U_0=5 \text{ м/с.}$$

$$25.27. k=3m, U_0=6 \text{ м/с.} \quad 25.28. k=m, U_0=7 \text{ м/с.}$$

$$25.29. k=m/2, U_0=6 \text{ м/с.} \quad 25.30. k=0,1m, U_0=1 \text{ м/с.}$$

$$25.31. k=10m, U_0=1 \text{ м/с.}$$

Задача 26. Решить систему дифференциальных уравнений
(п. 1.12; 1.15)

26-есеп. Дифференциал теңдеулер жүйесін шешу керек
(1.12; 1.15)

26.1.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 2.$$

26.2.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 2.$$

26.3.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

26.4.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.5.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 1.$$

26.7.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2; \end{cases}$$

$$x(0) = 2, y(0) = 0.$$

26.6.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 2.$$

26.8

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 2.$$

26.9.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.10.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 0.$$

26.11.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 5.$$

26.12.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x; \end{cases}$$

$$x(0) = 3, y(0) = 1.$$

26.13.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

26.14.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 2.$$

26.15.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \frac{5}{2}x - y + 2; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.16.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 0.$$

26.17.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$$

$$x(0) = 2, y(0) = 1.$$

26.18.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.19.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

26.20.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.21.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 1.$$

26.22.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.23.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 2, y(0) = 1.$$

26.24.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

26.25.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 0.$$

26.26.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 3, \\ \dot{y} = x + 2. \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

26.27.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.28.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

26.29.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = 3x + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = 2, y(0) = 0.$$

26.30.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0.$$

26.31.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 1.$$

Задача 27. Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $\omega = f(z)$
 27-сеп. Геометриялық фигураның $\omega = f(z)$ функциясы арқылы алынған бейнесінің түрін анықтау керек.

- 27.1 $\omega = e^z$; прямые $x=C, y=C$.
- 27.2 $\omega = e^z$; полоса $\alpha < y < \beta, 0 < \alpha < \beta \leq 2\pi$.
- 27.3 $\omega = e^z$; прямые $y=kx+b$.
- 27.4 $\omega = e^z$; полоса между $y=x$ и $y=x+2\pi$.
- 27.5 $\omega = e^z$; полуполоса $x < 0, 0 < y < \alpha \leq 2\pi$.
- 27.6 $\omega = e^z$; полуполоса $x > 0, 0 < y < \alpha \leq 2\pi$.
- 27.7 $\omega = \frac{1-z}{1+z}$; область $D: \{z | <1, \operatorname{Im} z > 0\}$
- 27.8 $\omega = \ln z$; полярная сетка $|z|=R, \arg z=0$.
- 27.9 $\omega = \ln z$; угол $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$.
- 27.10 $\omega = \ln z$; сектор $|z| < 1, 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$.
- 27.11 $\omega = \ln z$; кольцо $r_1 < |z| < r_2$ с размером по отрезку $[r_1, r_2]$
- 27.12 $\omega = \cos z$; прямоугольная сетка $x=C, y=C$.
- 27.13 $\omega = \cos z$; полуполоса $0 < x < \pi, y < 0$.
- 27.14 $\omega = \cos z$; полуполоса $0 < x < \pi/2, y > 0$.
- 27.15 $\omega = \cos z$; полуполоса $-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0$.
- 27.16 $\omega = \cos z$; полоса $0 < x < \pi$.
- 27.17 $\omega = \cos z$; прямоугольник $0 < x < \pi, -h < y < h, h > 0$.
- 27.18 $\omega = \arcsin z$; верхняя полуплоскость.
- 27.19 $\omega = \arcsin z$; первый квадрант.
- 27.20 $\omega = \operatorname{ch} z$; прямоугольная сетка $x=C, y=C$.
- 27.21 $\omega = \operatorname{ch} z$; полоса $0 < y < \pi$.
- 27.22 $\omega = \operatorname{ch} z$; полуполоса $x > 0, 0 < y < \pi$.
- 27.23 $\omega = \operatorname{arsh} z$; первый квадрант
- 27.24 $\omega = \operatorname{tg} z$; полуполоса $0 < x < \pi, y > 0$.
- 27.25 $\omega = \operatorname{tg} z$; полоса $0 < x < \pi$.
- 27.26 $\omega = \operatorname{tg} z$; полоса $0 < x < \pi/4$.
- 27.27 $\omega = \operatorname{tg} z$; полоса $-\pi/4 < x < \pi/4$.
- 27.28 $\omega = \operatorname{cth} z$; полуполоса $0 < y < \pi, x > 0$.
- 27.29 $\omega = \operatorname{cth} z$; полоса $0 < y < \pi$.
- 27.30 $\omega = \frac{z-3+i}{z+1+i}$; полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$.
- 27.31 $\omega = \frac{2}{z-1}$; область $D: \{z | <|z| < 2\}$.

III. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Извлечение корня. Корень n -й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad \varphi = \arg z, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

1.2. Элементарные функции комплексного переменного. Значения показательной функции комплексного переменного

$z = x + iy$ вычисляются по формуле

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2},$$

где z_1 и z_2 — любые комплексные числа;

$$e^{z + 2\pi k i} = e^z, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

т.е. e^z является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ выражаются через показательные

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Функции $\omega = \sin z$ и $\omega = \cos z$ — периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \pi/2 + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), соответственно.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все известные формулы тригонометрии.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Имеют место тождества $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$.

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причём

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется *главным значением* и обозначается

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \quad \operatorname{Ln} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

Функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ соответственно. Так, если $z = \cos w$, то w называется арккосинусом числа z и обозначается $w = \operatorname{Arccos} z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}); \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}; \quad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}.$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы ($\operatorname{arcsin} z$, $\operatorname{arccos} z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$); они называются *главными значениями*.

Общая степенная функция $w = z^\alpha$, где α – любое комплексное число, определяется соотношением $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$, $z \neq 0$.

Эта функция многозначная; значение $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ называется *главным значением*. *Общая показательная функция* $w = \alpha^z$, $\alpha \neq 0$ определяется равенством $\alpha^z = e^{z \operatorname{Ln} \alpha}$.

Главное значение этой функции $\alpha^z = e^{z \operatorname{Ln} \alpha}$.

1.3. Кривые на комплексной плоскости. Уравнение вида $z = z(t)$ $= x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Исключением параметра t из этих уравнений получаем уравнение кривой в виде

$$F(x, y) = 0.$$

1.4. Дифференцирование функций комплексного переменного, условия Коши – Римана. Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области G комплексного переменного z . Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области G .

Введём обозначения

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i \Delta y.$$

Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in G$, если отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при $\Delta z \rightarrow 0$. Этот предел называется производной функции $w = f(z)$ и обозначается $f'(z)$ (или $\frac{dw}{dz}$), $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$.

Пусть $z = x+iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши—Римана.

Обратно, если в некоторой точке (x, y) выполняются условия Коши—Римана и, кроме того, функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ дифференцируемы как функций двух действительных переменных, то функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в точке $z = x+iy$ как функция комплексного переменного z .

Функция $w = f(z)$ называется аналитической в данной точке z , если она дифференцируема как в самой точке z , так и в некоторой её окрестности. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области G , если она аналитична в каждой точке $z \in G$.

Производная аналитической функции вычисляется по формулам

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пользуясь условиями Коши—Римана можно восстановить аналитическую функцию $w = f(z)$, если известна её действительная часть $u = u(x, y)$ или мнимая часть $v = v(x, y)$ и, кроме того, задано значение $f(z_0)$ функции в некоторой точке z_0 .

Пусть, например, $u = e^x \cos y$, $f(0) = 1$. Определить аналитическую функцию $f(z)$.

В силу условий (2) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y.$$

Интегрируя уравнение (4) по переменной x , находим мнимую часть

$$v = e^x \sin y + C(y).$$

Слагаемое $C(y)$ представляет собой постоянную (относительно x) интегрирования. Дифференцируя (5) по y и сопоставляя результат с (3), получаем $C'(y) = 0$, откуда $C(y) = C$. Таким образом, имеем

$$v = e^x \sin y + C \text{ и } f(z) = u + iv = e^x (\cos y + i \sin y) + C$$

с учётом формулы (1) -- $f(z) = e^z + C$. Учтём дополнительно условие $f(0) = 1$, откуда $C = 0$; итак, $f(z) = e^z$.

1.5. Интегрирование функций комплексного переменного.

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена и непрерывна в области G , а Γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G ; $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — действительные функции переменных x и y . Вычисление интеграла от функции $w = f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению криволинейных интегралов по координатам

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy.$$

Если кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt, \text{ где } z(t) = x(t) + iy(t).$$

Если $w = f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области G , то интеграл не зависит от пути интегрирования (зависит только от начальной и конечной точек). В этом случае для вычисления интеграла применяется формула Ньютона — Лейбница

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

где $\Phi(z)$ — какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области G .

Если функция $w = f(z)$ — является аналитической в области G , ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Γ , и на самом контуре, то

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (\text{теорема Коши})$$

и для любой внутренней точки $z_0 \in G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{интегральная формула Коши}).$$

1.6 Ряд Лорана. Функция $w = f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $\rho < |z - z_0| < R$ разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \quad (6)$$

коэффициенты находятся по формулам

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Здесь Γ - произвольная окружность с центром в точке z_0 , лежащая внутри заданного кольца. Разложение в ряд Лорана единственно.

В формуле (6) ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$$

называются соответственно *главной частью ряда Лорана* и *правильной частью ряда Лорана*.

На практике для нахождения коэффициентов C_k , если это возможно, используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Для примера разложим в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

Функция аналитична в кольце $0 < |z| < \infty$, следовательно, разложима в нём в ряд Лорана. Воспользуемся разложением показательной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta_0 = 0$:

$$e^{\zeta} = 1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2!} + \dots + \frac{\zeta^k}{k!} + \dots. \quad \text{Положим } \zeta = 1/z, \text{ тогда}$$

$$f(z) = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots + \frac{1}{z^k k!} + \dots \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{z^{k-3} k!} + \dots$$

В силу единственности ряда Лорана полученное разложение функции $f(z)$ по степеням z является рядом Лорана для функции $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в кольце $0 < |z| < \infty$.

1.7. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $w = f(z)$, если $f(z)$ — однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, кроме самой точки z_0 .

Функцию $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана (6), сходящийся в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$. При этом возможны три различных случая, когда ряд Лорана: 1) не содержит членов с отрицательными степенями разности $z - z_0$, т.е. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$. В этом

случае z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $w = f(z)$;

2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, т.е. $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$, причем $C_n \neq 0$. В этом случае

z_0 называется *полюсом* порядка n функции $w = f(z)$;

3) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $z - z_0$,

т.е. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$. В этом случае z_0 называется *существенно особой точкой* функции $w = f(z)$.

При определении характера изолированной особой точки используются следующие утверждения.

1. Для того, чтобы точка z_0 являлась *устранимой особой точкой* функции $w = f(z)$, необходимо и достаточно существование предела.
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$, причем $|C_n| < \infty$.

2. Для того, чтобы точка z_0 являлась *полюсом* аналитической функции $w = f(z)$, необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

2'. Для того, чтобы точка z_0 являлась *полюсом* порядка n аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \varphi(z) / (z - z_0)^n$, где $\varphi(z)$ — функция аналитическая в точке z_0 , причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

2''. Пусть z_0 — *изолированная особая точка* функции $f(z) = \lambda(z) / \mu(z)$, где $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ — функции аналитические в точке z_0 .

Если числитель $\lambda(z)$ и все производные до $k-1$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0$, знаменатель $\mu(z)$ и все производные до $l-1$ порядка включительно также равны нулю в точке z_0 , $\mu^{(l)}(z_0) \neq 0$, то при $l > k$ точка z_0 является *полюсом* порядка $n = l - k$ аналитической функции $f(z)$. (Если $l \leq k$, то точка z_0 является *устранимой особой точкой* аналитической функции $f(z)$.) В частном случае, при $k=0$, $l=1$ имеем: если $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z_0) \neq 0$, то z_0 — *полюс* первого порядка функции $f(z)$.

3. Пусть при $z \rightarrow z_0$ аналитическая функция $\omega=f(z)$ не имеет пределов: ни конечного, ни бесконечного. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $\omega=f(z)$.

1.8. Вычеты. Пусть z_0 — изолированная точка функции $\omega=f(z)$. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется число, обозначаемое символом $\text{res}_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (8)$$

(другие обозначения: $\text{res } f(z_0)$, $\text{res}[f(z), z_0]$). Замкнутый контур интегрирования γ лежит в области аналитичности функции $f(z)$ и не содержит внутри других особых точек функции $f(z)$, кроме z_0 .

Сопоставление формул (7) и (8) показывает, что вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в Лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0 : $\text{res } f(z_0) = c_{-1}$.

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе n -го порядка вычисляется по формуле

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n];$$

при $n=1$

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z-z_0)]$$

Если функция $\omega=f(z)$ в окрестности точки z_0 представляется как частное двух аналитических функций $f(z) = \lambda(z)/\mu(z)$, причем $\lambda(z) \neq 0$, $\mu(z) \neq 0$, $\mu'(z) \neq 0$ (в этом случае z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$), то

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \lambda(z) / \mu'(z).$$

Если точка z_0 есть существенно особая точка функции $\omega=f(z)$, то вычет вычисляется по формуле (9).

Основная теорема Коши о вычетах. Если функция $\omega=f(z)$ является аналитической на границе Γ области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_m$ то

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res } f(z_k). \quad (10)$$

1.9. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней k и l , соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geq k+2$, т.е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{m} \operatorname{res}_{z_m} R(z).$$

Здесь сумма вычетов функции $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$ берется по всем полюсам z_m , расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

1.10. Вычисление несобственных интегралов специального вида. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней k и l , соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и (т.е. $R(x)$ — правильная рациональная дробь), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \sum_m \operatorname{res}_{z_m} R(z) e^{i\lambda z} \right\}, \lambda > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_m \operatorname{res}_{z_m} R(z) e^{i\lambda z} \right\}, \lambda > 0,$$

где сумма вычетов функции $R(z)e^{i\lambda z}$ берется по всем полюсам z_m , расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

1.11. Вычисление определенных интегралов специального вида

Пусть R — рациональная функция $\cos t$ и $\sin t$, непрерывная внутри промежутка интегрирования. Полагаем $z = e^{it}$, тогда

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} F(z) dz, \quad (11)$$

где путь интегрирования — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Контурный интеграл в правой части равенства (11)

вычисляется по формуле (10), где сумма вычетов функции $F(z)$ берется по всем особым точкам, лежащим в области $|z| < 1$.

1.12. Преобразование Лапласа. *Функцией-оригиналом* называется функция $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющая условиям: 1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t ; 2) для всех отрицательных t $f(t) = 0$; 3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные M и δ , что для всех t $|f(t)| < Me^{\delta t}$.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \delta + it$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt;$$

обозначение: $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

С в о й с т в а

1°. *Линейность: для любых комплексных постоянных C_1 и C_2 ,*

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \leftrightarrow C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

2°. *Формула подобия: для любого постоянного $\omega > 0$*

$$f(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3°. *Дифференцирование оригинала: если функции являются функциями оригиналами, то*

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - pf'(0) - f'(0),$$

.....

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Величина $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ понимается как $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

4°. Дифференцирование изображения $F'(p) \leftrightarrow -t f(t)$.

5°. Интегрирование оригинала $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$.

6°. Интегрирование изображения *если $\frac{f(t)}{t}$ является функцией-оригиналом, то*

$$\int_p^\infty F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}.$$

7°. Формула смещения для любого комплексного λ

$$f(t)e^{-\lambda t} \leftrightarrow F(p+\lambda).$$

8°. Формула запаздывания $f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p)$, $\tau > 0$.

9°. Формула умножения изображений

$$F_1(p)F_2(p) \leftrightarrow \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл в (12) называется *сверткой функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$, обозначается символом $f_1 * f_2$.

Отыскание оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ наиболее широко применяются следующие приемы:

1) если $F(p)$ есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства 1°—9° преобразования Лапласа;

2) используют *формулу разложения*, согласно которой при некоторых достаточно общих условиях оригиналом для $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p_k} [F(p) e^{pt}],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

1.13. Формулы соответствия. Широко применяются следующие табличные соотношения:

$$1 \leftrightarrow 1/p; e^{at} \leftrightarrow 1/(p-a); \sin \omega t \leftrightarrow \omega/(p^2 + \omega^2); \cos \omega t \leftrightarrow p/(p^2 + \omega^2); \\ \operatorname{sh} \omega t \leftrightarrow \omega/(p^2 - \omega^2); \operatorname{ch} \omega t \leftrightarrow p/(p^2 - \omega^2); t^n \leftrightarrow n! / p^{n+1}.$$

Левые части операционных соотношений предполагаются домноженными на функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

которая для сокращения записи, как правило, опускается.

1.14. Изображения кусочно-линейной функции. Примерный вид графика кусочно-линейной (полигональной) функции представлен на рис. 1. Введем следующие обозначения:

t_k — точки разрыва функций $f(t)$ или $f'(t)$;

$\alpha_k = a_k - b_k$ — скачки функций в узлах «стыка»;

$\beta_k = \operatorname{tg} \gamma_k - \operatorname{tg} \delta_k$ — скачки производной $f'(t)$ в узлах «стыка».

Изображение полигональной функции имеет вид

$$F(p) = \sum_k e^{-t_k p} k \left[\frac{a_k}{p} + \frac{b_k}{p^2} \right].$$

1.15. Задача Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Решение линейных дифференциальных уравнений операционным методом предполагает три этапа: 1) переход от исходных функций к их изображению по Лапласу, при этом дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое относительно изображений искомой функции; 2) решение полученного алгебраического уравнения; 3) получение искомого решения по его изображению.

Решим задачу Коши для дифференциального уравнения $x'' + x = 1$ при начальном условии $x(0) = 1$.

Операционный метод решения такой задачи состоит в том, что искомую функцию и правую часть дифференциального уравнения считаем оригиналами и переходим от уравнения, связывающего оригиналы, к уравнению, связывающему их изображения. Для этого воспользуемся формулой дифференцирования оригинала $x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$.

Применяя свойство линейности, перейдем в уравнении (13) от оригиналов к изображениям

$$[pX(p)-1]-X(p)=1/p.$$

Решим полученное уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $X(p)$:

$$X(p)=2/(p-1)-1/p.$$

Осталось по известному изображению $X(p)$ найти соответствующий ему оригинал $x(t)$. Используя свойство линейности преобразования Лапласа и табличные операционные отношения (п. 1.13), получаем $x(t)=2e^t-1$. Это и есть искомое решение задачи Коши.

Аналогично решаются системы линейных дифференциальных уравнений.

1.16. Формула Дюамеля. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$L\{x(t)\}=a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\dots+a_nx(t)=f(t) \quad (14)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0)=x'(0)=\dots=x^{(n-1)}(0)=0. \quad (15)$$

(Заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями).

Допустим, что известно решение уравнения $L\{x(t)\}=1$ (с той же левой частью и правой, равной единице) при условиях (15). Обозначим его $x_1(t)$. Тогда решение $x(t)$ задачи (14)-(15) можно выразить через $x_1(t)$ и $f(t)$ с помощью одной из следующих формул:

$$x(t)=\int_0^t x'_1(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad x(t)=\int_0^t x'_1(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau, \quad x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau$$

Каждое из этих выражений называют *формулой* (или *интегралом*) *Дюамеля*.

Метод решения дифференциальных уравнений, основанных на формуле Дюамеля, применяют, как правило, в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ уравнения (14), а также при необходимости многократного решения задачи (14) – (15) для различных функций $f(t)$.

Комплекс айнымалы функциялар теориясы және операциялық есептеулер

I. Анықтама материал

1. Түбір табу.

z комплекс санының n -ші дәрежелі түбірінің өртүрлі n мәні бар және оларды келесі формула бойынша табуға болады

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad \varphi = \arg z, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Комплекс айнымалы элементар функциялар

Комплекс $z = x + iy$ айнымалы корсеткіштік функция мәндері келесі формула бойынша есептеледі

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

Корсеткішті e^z функция келесі қасиеттерге ие:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

мұндағы z_1 мен z_2 – кез келген комплекс сандар;

$$e^{z + 2\pi ki} = e^z, \quad k = 0, 1, \dots,$$

яғни, e^z - негізгі периоды $2\pi i$ тең периодты функция.

Тригонометриялық $\sin x$ және $\cos x$ функциялары корсеткіштік функция арқылы өрнектеледі:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$\operatorname{tg} z$ және $\operatorname{ctg} z$ функциялары келесі теңдіктермен анықталады:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометриядағы барлық белгілі формулалар комплекс айнымалы тригонометриялық функциялар үшін де сақталады.

Гиперболалық $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ функциялары келесі теңдіктермен анықталады

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Келесі тепе-теңдіктер орындалады:

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z.$$

Логарифмдік $z=0$ функция көрсеткіштік функцияға кері функция ретінде анықталады:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Функцияның $k=0$ сәйкес мәні оның **бас мәні** деп аталады және

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

арқылы белгіленеді.

Логарифмдік функцияның келесі қасиеттері бар:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

Кері тригонометриялық $\operatorname{Arc} \sin z$, $\operatorname{Arc} \cos z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arctg} z$

функциялар, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ функцияларына сәйкес кері функциялар ретінде анықталады. Мысалы, егер $z = \cos \omega$ болса, онда ω , z санының арккосинусы деп, аталады да $\omega = \operatorname{Arc} \cos z$ деп, белгіленеді. Бұл функциялардың барлығы көп мәнді және логарифмдік функция арқылы орнектелсді:

$$\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}); \quad \operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1});$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}.$$

Логарифмнің бас мәніне сәйкес келетін мәндер кіші әріптермен басталып жазылады ($\operatorname{arcsin} z, \dots$) және олар **бас мәндер** деп аталады.

Дәрежелік $\omega = z^\alpha$ (α – кез келген комплекс сан) функция келесі қатыспен анықталады

$$z^\alpha = e^{i \operatorname{Ln} z}, \quad z \neq 0.$$

Бұл көп мәнді функция: $z^\alpha = e^{i \operatorname{Ln} z}$ – оның **бас мәні**.

Көрсеткіштік $\omega = \alpha^z$, $\alpha \neq 0$ функция

$$\alpha^z = e^{z \ln \alpha}$$

тендігімен анықталады. Бұл функцияның бас мәні ,
 $\alpha^z = e^{z \ln \alpha}$.

3. Комплекс жазықтықтағы қисықтар

$z = z(t) = x(t) + iy(t)$ түріндегі тендеу, комплекс жазықтықта параметрлік тендеулері

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

түрінде болатын қисықты анықтайды. Бұл тендеулерден t параметрін шығарсақ қисықтың $F(x, y) = 0$ түріндегі тендеуін аламыз.

4. Комплекс айнымалы функцияларды дифференциалдау Коши-Риман шарттары

$w = f(z)$ функциясы қандайда бір G аймағында анықталсын; Z пен $z + \Delta z$ нүктелері G аймағында жатсын және
 $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$
 болсын.

Егер $\Delta z \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ қатынасының ақырғы шегі бар болса, онда $w = f(z)$, $z \in G$ нүктесінде *дифференциалданатын функция* деп аталады және $f'(z)$ немесе $\frac{dw}{dz}$ арқылы белгіленеді. Сонымен,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Егер $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ болса, онда $f(z)$ функциясының дифференциалданатын әрбір нүктесінде *Коши-Риман шарттары* деп аталатын

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

қатыстары орындалады.

Керісінше, егер қандай да бір (x, y) нүктесінде Коши-Риман шарттары орындалса, сонымен бірге $u(x, y)$, $v(x, y)$ нақты екі

айнымалы функциялары дифференциалданатын болса, онда $z = x + iy$ нүктесінде комплекс айнымалы $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциясы дифференциалданады.

$w = f(z)$ функциясы Z нүктесінде жәнс оның қандай да бір маңайында дифференциалданса, онда ол Z нүктесінде **аналитикалық функция** деп аталады. Егер $f(x)$, G аймағынын әрбір нүктесінде аналитикалық функция болса, онда ол G аймағында **аналитикалық функция** деп аталады.

Аналитикалық функцияның туындысы

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

формулары бойынша есептеледі.

Егер $f(z)$ функциясының нақты $u = u(x, y)$ немесе жорамал $v = v(x, y)$ бөлігі беріліп жәнс қандай да бір z_0 нүктедегі $f(z_0)$ мәні белгілі болса, онда Коши-Риман шарттарын пайдаланып $w = f(z)$ аналитикалық функциясын құрауға болады.

Мысалы, $u = e^x \cos y$, $f(0) = 1$ берісін. $f(z)$ аналитикалық функциясын анықтау керек.

Ү (2) шарттар бойынша

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y \quad (4)$$

аламыз. (4) теңдеуді x айнымалы бойынша интегралдан жорамал

$$v = e^x \sin y + C'(y) \quad (5)$$

бөлігін аламыз. $C'(y)$ қосылғышы (x -ке қатысты) интегралдау тұрақтысы. (5)-ті y бойынша дифференциалдап, нәтижесін (3)-пен салыстыра отырып $C''(y) = 0$, ал бұдан $C'(y) = C$ аламыз.

Сонымен,

$v = e^x \sin y + C$ және $f(z) = u + iv = e^x (\cos y + i \sin y) + C$;

(1) – формуланы ескерсек, $f(z) = e^z + C$. Ал $f(0) = 1$ шартын ескерсек $C = 0$, яғни $f(z) = e^z$ аламыз.

5. Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау

G аймағында бір мәнді үзіліссіз $w = f(z)$ функциясы анықталсын, Γ , G аймағында жатқан тегіс-күрақ қисық; $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, мұндағы $u(x, y)$, $v(x, y)$, x пен y айнымалыларының нақты функциялары. Комплекс айнымалы $w = f(z)$ функциясының интегралын есептеу, екінші текті қисықсыздықты

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy$$

интегралды есептеуге өкседі.

Егер Γ қисығы $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ параметрлік теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} [f(z(t)) z'(t)] dt, \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

болады.

Егер $w = f(t)$, бір байламды G аймағында аналитикалық функция болса, онда интеграл, интегралдау қисығының түріне тәуелсіз, ол қисықтың бастапқы және соңғы нүктелерінің орнына ғана тәуелді. Бұл жағдайда интегралды есептеуге Ньютон–Лейбниц формуласы қолданылады:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

мұндағы $\Phi(z)$, $f(z)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы, яғни $\Phi'(z) = f(z)$, $z \in G$.

Егер $w = f(t)$, тегіс-күрақты Γ тұйық контурымен шектелген G аймағында және Γ контурында аналитикалық функция болса, онда

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (\text{Коши теоремасы}),$$

және $z_0 \in G$ ішкі нүкте үшін

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{Кошидің интегралдық формуласы})$$

орындалады.

6. Лоран қатары

$\rho < |z - z_0| < R$ сақинасында аналитикалық бір мәнді $w = f(z)$ функциясы, осы сақинада Лоран қатарына жіктеледі:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (6)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7)$$

мұнда Γ , центрі z_0 нүктесі болатын, сақина ішінде жағқан (сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған) кез келген шеңбер.

(6) формуладағы

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k \quad \text{және} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

қатарлары *Лоран қатарының*, сөйкес *бас* және *дұрыс бөліктері* деп аталады.

Практикада c_k коэффициенттерін табу үшін, элементар функциялардың Тейлор қатарына дайын жіктелулерін пайдаланады.

Мысалы, $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ функциясын z^n дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктейік. Берілген функция $0 < |z| < \infty$ сақинасында аналитикалық функция болғандықтан, ол осы сақинада Лоран қатарына жіктеледі.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \dots$$

жіктелуіндегі $t = \frac{1}{z}$ деп, алсақ

$$f(x) = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{k!z^k} \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \dots + \frac{1}{k!z^{k-3}} + \dots$$

аламыз.

7. Бірмәнді аналитикалық функцияның дара, ерекше нүктелері

Егер $w = f(z)$ бірмәнді және $0 < |z - z_0| < \delta$ сақинасының z_0 нүктесінсіз басқа нүктелерінде аналитикалық функция болса, онда z_0 , **функцияның дара ерекше нүктесі** деп аталады.

$w = f(z)$ функциясын z_0 нүктесінің маңайында ($0 < |z - z_0| < \delta$ сақинасында жинақталатын) Лоран қатарына жіктеуге болады. Бұл ретте келесі жағдайлар болуы мүмкін:

1) Лоран қатарында $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелі мүшелері жоқ, яғни $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының **жөнделетін ерекше нүктесі** деп аталады;

2) Лоран қатары мүшелерінің құрамында $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелері бар және ондай мүшелер саны ақырлы, яғни $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $c_{-n} \neq 0$. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $w = f(z)$ **функциясының n -ші ретті полюсі** деп аталады;

3) Лоран қатарының мүшелерінің құрамында $z - z_0$ айырымының теріс дәрежелері бар және ондай мүшелер саны ақырсыз, яғни $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Бұл жағдайда z_0 нүктесі $w = f(z)$ **функциясының елеулі ерекше нүктесі** деп аталады.

Ерекше нүктелердің сипатын анықтау үшін келесі тұжырымдар пайдаланылады:

1. z_0 нүктесі $w = f(z)$ аналитикалық функциясының жөнделетін ерекше нүктесі болуы үшін, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0$,

$|C_0| < \infty$ шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

2. Z_0 нүктесі $w = f(z)$ аналитикалық функциясының полюсі болуы үшін, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

2'. Z_0 нүктесі $w = f(z)$ функциясының n -ші ретті полюсі болуы үшін, $f(z)$ функциясы

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n},$$

түрінде көрсетілуі қажетті және жеткілікті (мұндағы $\varphi(z)$,

Z_0 нүктесінде аналитикалық функция және $\varphi(z_0) \neq 0$).

2'/. Z_0 нүктесі $f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ функциясының дара ерекше

нүктесі болсын ($\lambda(z)$ пен $\mu(z)$, Z_0 нүктесінде аналитикалық функциялар). Егер $\lambda(z_0) = \lambda'(z_0) = \dots = \lambda^{(k-1)}(z_0) = 0$, $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0$ (яғни, Z_0 нүктесі $\lambda(z)$ функциясының k -ші ретті нөлі), ал $\mu(z)$ үшін $\mu(z_0) = \mu'(z_0) = \dots = \mu^{(l-1)}(z_0) = 0$, $\mu^{(l)}(z_0) \neq 0$ (яғни, Z_0 нүктесі $\mu(z)$ функциясының l -ші ретті нөлі) болып:

$l > k$ болса, онда Z_0 , $f(z)$ аналитикалық функциясының $l - k$ ретті полюсі;

$l \leq k$ болса, онда Z_0 , $f(z)$ аналитикалық функцияның жонделетін ерекше нүктесі болады.

Дербес жағдайда, $k = 0$, $l = 1$: $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$. $\mu'(z_0) \neq 0$ болса, онда Z_0 , $f(z)$ функцияның бірінші ретті полюсі (жай полюсі) болады.

3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ шегінің болмауы, Z_0 нүктесінің $w = f(z)$ функциясы үшін елеулі ерекше нүктесі болуының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады.

8. Шегерімдер (вычеты)

z_0 , $w = f(z)$ функциясының дара ерекше нүктесі болсын. $f(z)$ функциясының z_0 нүктесіндегі шегерімі деп, $\text{шег} f(z)$ немесе $\text{шег} f(z_0)$ арқылы белгіленетін,

$$\text{шег}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (8)$$

санын айтады. Мұнда γ тұйық контурының ішінде $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінен басқа ерекше нүктелері жоқ.

(7) және (8)-ші формулаларды салыстыра отырып, функция шегерімі, $f(z)$ -тің Лоран қатарының (z_0 нүктесі маңайындағы) минус бірінші дәрежелі мүшесінің коэффициентіне тең екенін көреміз

$$\text{шег} f(z_0) = C_{-1}. \quad (9)$$

Жоңделетін ерекше нүктедегі шегерім нөлге тең

n -ші ретті полюстегі шегерім келесі формуламен есептеледі

$$\text{шег}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)^n]^{(n-1)},$$

$n=1$ болса

$$\text{шег}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0).$$

Егер $w = f(z)$ функциясы z_0 нүктесінің маңайында екі аналитикалық функциялардың қатынасы түрінде берілсе

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \quad \text{және} \quad \lambda(z_0) \neq 0, \quad \mu(z_0) = 0, \quad \mu'(z_0) \neq 0 \quad (\text{яғни } z_0 -$$

жай полюс) болса, онда

$$\text{шег}_{z=z_0} f(z) = \frac{\lambda(z_0)}{\mu'(z_0)}.$$

Егер z_0 , $w = f(z)$ функциясының ерекше нүктесі болса, онда шегерім (9) формуламен есептеледі.

Кошидің шегерімдер туралы негізгі теоремасы. Егер $w = f(z)$, G аймағының ақырлы санды $z_1, z_2, \dots, z_n$ нүктелерінен басқа ішкі нүктелерінде және Γ шекарасында аналитикалық функция болса, онда

$$\oint_{\Gamma} f(z) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (10)$$

9. Рационал функциялардың меншіксіз интегралдарын есептеу

$$R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_l(x)} \quad (11)$$

түріндегі $R(x)$ рационал функциясын қарастырамыз (мұндағы $P_k(x)$ пен $Q_l(x)$, сәйкес k -ші және l -ші дәрежелі көпмүшеліктер). Егер $R(x)$ бүкіл сан осінде үзіліссіз және $l \geq k + 2$, яғни бөлімінің дәрежесі алымының дәрежесінен, сң болмағанда екі бірлікке үлкен болса, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{m=1}^n \operatorname{res}_{z=z_m} f(z),$$

мұнда $R(z)$ функциясының шегерімдерінің қосындысы жоғарғы $\operatorname{Im} z > 0$ жарты жазықтықта орналасқан барлық z_m полюстері бойынша алынады.

10. Арнайы түрдегі меншіксіз интегралдарды есептеу

Егер $R(x)$, бүкіл сан осінде үзіліссіз функция және $l \geq k + 1$ болса (яғни, $R(x)$ – дұрыс бөлшек), онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \sum_{m=1}^n \operatorname{res}_{z=z_m} R(z) e^{i\lambda z} \right\}, \quad \lambda > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{m=1}^n \operatorname{res}_{z=z_m} R(z) e^{i\lambda z} \right\}, \quad \lambda > 0.$$

мұнда $R(z)e^{i\lambda z}$ функциясының шегерімдерінің қосындысы жоғарғы $\text{Im } z > 0$ жарты жазықтықта орналасқан барлық z_m полюстері бойынша алынады.

11. Арнайы түрдегі интегралдарды есептеу

$R, \cos t$ мен $\sin t$ -ге қатысты рационал функция және ол интегралдау аралығында үзіліссіз болсын. $z = e^{it}$ деп аласак,

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

болады да,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} F(z) dz \quad (12)$$

аламыз. (12)-нің оң жағындағы контурлық интеграл (10)-формуламен есептелсін ($F(z)$ функциясының шегерімдерінің қосындысы $|z| < 1$ аймағында жатқан барлық ерекше нүктелер бойынша алынады).

12. Лаплас түрлендіруі

Түпнұсқа-функция (функция-оригинал) деп, келесі шартты қанағаттандыратын, нақты t аргументінің $f(t)$ функциясын айтады:

1) $f(t)$, t осінің кез келген ақырлы аралығында интегралданады;

2) барлық теріс t үшін, $f(t) = 0$;

3) $f(t)$ функциясының осуі корсеткіштік функциядан жылдам емес, яғни барлық t үшін $|f(t)| < M \cdot e^{\delta_0 t}$ теңсіздігі орындалатындай, M мен δ_0 тұрақтылары табылады.

$f(t)$ функциясының Лаплас бейнесі деп,

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

теңдігімен анықталатын, комплекс $p = \delta + i\tau$ айнымалы $F(p)$ функциясын айтады және оны

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

арқылы белгілейді (оның басқа да белгілеулері бар).

Кез келген $f(t)$ түпнұсқа функция үшін $F(p)$ бейнесі $\operatorname{Re} p > \delta_0$ жарты жазықтығында анықталады және осы жарты жазықтықта аналитикалық функция болады.

Қасиеттері

1⁰. **Сызықтығы:** кез келген C_1 және C_2 комплекс тұрақтылары үшін

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \leftrightarrow C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

2⁰. **Үксастық формуласы:** кез келген $\omega > 0$ тұрақтысы үшін

$$f(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3⁰. **Түпнұсканы дифференциалдау:** егер $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ түпнұсқа функциялар болса, онда

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

.....

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

мұнда, $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

4⁰. **Бейнені дифференциалдау:** $F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$.

5⁰. **Түпнұсканы интегралдау:** $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$.

6⁰. Бейнені интегралдау: егер $\frac{f(t)}{t}$ түпнұсқа-функция болса, онда

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}.$$

7⁰. Ығыстыру формуласы: кез келген λ комплекс саны үшін

$$f(t) \cdot e^{-\lambda t} \leftrightarrow F(p + \lambda).$$

8⁰. Кешігу формуласы: $f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p)$, $\tau > 0$.

9⁰. Бейнелерді кобейту формуласы:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \leftrightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

(13) формуладағы интеграл, $f_1(t)$ мен $f_2(t)$ функцияларының үйіріткісі (свертка) деп аталады да, $f_1 * f_2$ деп белгіленеді. Сонымен,

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \leftrightarrow f_1 * f_2.$$

Бейне бойынша түпнұсқаны табу

Белгілі $F(p)$ бейне бойынша $f(t)$ түпнұсқаны табу үшін көбінесе келесі әдістер кеңінен қолданылады:

1) егер $F(p)$ дұрыс рационал функция болса, онда оны қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейді және $1^0 - 9^0$ қасиеттерді пайдаланып әрбір алынған бөлшектің түпнұсқасын табады;

2) белгілібір жеткілікті жалпы шарттар орындалғанда, $F(p)$ үшін

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} [F(p)e^{pt}]$$

функциясы түпнұсқа болады. Бұл теңдік жіктеу формуласы деп аталады.

13. Сәйкестік формулалары

Келесі кестелік қатыстарды еске ұстаған жөн:

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{p}; e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-a}; \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\sinh \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}; \cosh \omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2}; t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}},$$

мұндағы қатыстардың сол жақ бөліктері, $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0. \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ функциясына көбейтілген деп ұйғарылады.

14. Копбұрышты (полигональды) функциялар бейнесі

Копбұрышты (полигональды) функция сызбасының (графикінің) мысалы 1-суретте көрсетілген. Келесі белгілеулерді енгізейік:

τ_k , $f(t)$ мен $f'(t)$ функцияларының үзіліс нүктелері;

$\alpha_k = a_k - b_k$, функциялардың «тоғысқан» түйіндеріндегі секірістері;

$\beta_k = \lg \gamma_k - \lg \delta_k$, $f'(t)$ туындының «тоғысқан» түйіндеріндегі секірістері.

Полигонал функцияларының бейнесі келесі түрде болады:

$$F(p) = \sum_k e^{-p\tau_k} \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2} \right).$$

15. Жай сызықты дифференциал теңдеулер үшін Коши есебі

Сызықты дифференциал теңдеулерді *операциялық әдіспен* шешу келесі үш кезеңнен тұрады:

1) бастапқы функциялардан олардың Лаплас бейнелеріне өту. Мұнда дифференциал теңдеу, ізделінетін функцияның бейнесіне қатысты алгебралық теңдеуге түрленеді;

2) алгебралық теңдеуді шешу;

3) бейнесі бойынша ізделінетін шешімді алу.

Келесі Коши есебін шешейік: $x' - x = 1$, $x(0) = 1$.
(14)

▽ Изделінетін функция мен теңдеудің оң жақ бөлігін түпнұсқалар деп санап, олардың бейнелеріне өтейік. Ол үшін түпнұсқаны дифференциалдау формуласын пайдаланайық

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Сызықтық қасиеттерді пайдалана отырып (14) теңдеудегі түпнұсқалардан олардың бейнелеріне өтеміз

$$[pX(p) - 1] - X(p) = \frac{1}{p}.$$

Алынған алгебралық теңдеуді $X(p)$ бейнесіне қатысты шешеміз

$$X(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

Енді осы бейне бойынша оған сәйкес $x(t)$ түпнұсқаны табу керек

$$x(t) = 2e^t - 1,$$

Коши есебінің шешімі осы.

Сызықты дифференциал теңдеулер жүйесін де осылай шешуге болады.

16. Дюамель формуласы

n -ші ретті коэффициенті тұрақты сызықты дифференциал теңдеулерді қарастырамыз.

$$L\{x(t)\} \equiv a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (15)$$

және алғашқы шарттар

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = (0) \quad (16)$$

болсын. Алғашқы шарты (16) болатын $L\{x(t)\} = 1$ теңдеуінің шешімі белгілі делік, оны $x_1(t)$ деп белгілейік. Онда (15)–(16) есептің $x(t)$ шешімін келесі формулалардың бірімен $x_1(t)$ мен $f'(t)$ арқылы орнектеуге болады:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau) d\tau.$$

Бұл орнектердің әрбіреуі **Дюамель формуласы** (немесе **интегралы**) деп аталады.

Дюамель формуласына негізделген дифференциал теңдеулерді шешу әдісін, (15) теңдеудің оң жағындағы $f(t)$ -ның $F(p)$ бейнесін табу қиын болғанда және де (15) – (16) есептерін әртүрлі $f(t)$ функциясы үшін бірнеше рет шешу қажеттілігі болғанда қолданады.

II. Типтік есептер

Теориялық сұрақтар

1. Комплекс сандар, оларға жасалатын амалдар.
2. Комплекс айнымалы көрсеткіш және логарифмдік функциялар. Эйлер формулалары.
3. Дәрселік функция. Тригонометриялық және гиперболалық функциялар.
4. Комплекс айнымалы функция туындысы. Коши-Риман шарттары. Аналитикалық функция түсінігі.
5. Комплекс айнымалы функцияның туындысының модулі мен аргументінің геометриялық мағынасы. Конформдық бейне туралы түсінік.
6. Комплекс айнымалы функцияның интегралы, оның қасиеттері.
7. Бір және көп байламды аймақтар үшін Коши теоремасы. Ньютон-Лейбниц формуласы.
8. Кошидің интегралдық формуласы.
9. Аналитикалық функцияның барлық ретті туындыларының бар болуы.
10. Тейлор қатары. Аналитикалық функцияның Тейлор қатарына жіктелуі туралы теорема.
11. Лоран қатары. Жинақтылық сақинасы. Лоран теоремасы.
12. Дара ерекше нүктелердің классификациясы (сараптары).
13. Шегерімдер. Шегерімдерді есептеу.
14. Шегерімдер туралы Кошидің негізгі теоремасы. Контурлық интегралды есептеу.
15. Шегерімдер көмегімен меншіксіз интегралдарды есептеу. Жордан леммасы.
16. Лаплас түрлендіруі. Түпнұсқа-функция.
17. Лаплас түрлендіруінің қасиеттері.
18. Түпнұсқа мен бейнесі интегралдау.
19. Берілген бейне бойынша түпнұсқаны табу әдістері.

Теориялық жаттығулар

1. Теңдікті дәлелдеу керек:

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \theta \neq 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Нұсқау. $e^{i\theta}, e^{i2\theta}, \dots, e^{in\theta}$ геометриялық прогрессиясын қарастыру керек.

2. Коши–Риман шарттары поляр r, φ координаталары бойынша

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

түрінде жазылатынын дәлелдеу керек.

3. $w = |z|$ функциясы ешбір нүктеде дифференциалданбайтынын дәлелдеу керек.

4. $U(x, y)$ - қандайда бір G аймағында гармоникалық функция, яғни $\forall (x, y) \in G, \Delta U = 0$. f функциялары қандай болғанда $f[U(x, y)]$ күрделі функциясы G аймағында гармониялық функция болады.

5. $f(z), |z| \leq R$ дөңгелегінде аналитикалық функция және $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$ болсын. $|z| < R$ дөңгелегінің барлық ішкі нүктелерінде

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{MR}{(R - |z|)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

теңсіздігінің орындалатынын дәлелдеу керек.

6. $A_0 = 1, A_1 = 1, A_{n+2} = A_n + A_{n+1}, n = 0, 1, \dots$ шарттарымен анықталатын A_n сандары Фибоначчи сандары деп аталады. Қандай да бір аймақта,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

теңдігінің орындалатынын дәлелдеу керек. Қатардың жинақталу аймағын табу керек.

7. $f(z)$ жұп функциясы үшін $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = -\lim_{z \rightarrow -z_0} f(z)$, ал $f(z)$ тақ функциясы үшін $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow -z_0} f(z)$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.

8. $f(z)$ пен $\varphi(z)$ функциялары үшін $z = z_0$ нүктесі, сәйкес m -ші және n -ші ретті полюс.

а) $f(z) \cdot \varphi(z)$; б) $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$; в) $f(z) + \varphi(z)$,

функциялары үшін $z = z_0$ ерекше нүктесінің сипаты туралы не айтуға болады?

9. $f(z)$ және $g(z)$, z_0 нүктесінде аналитикалық функциялар және $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = 0$,

$g''(z_0) \neq 0$. $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ функциясының $z = z_0$

нүктесіндегі шегерімін табу керек.

10. $f(z) = \eta(t) \sin e^{t^2}$ функциясы және оның туындысы $f'(t)$ түпнұсқа бола ма? Мұнда $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

11. Бейнелерді кобейту теоремасын пайдаланып,

$$\int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 1 - \cos t$$

интегралдық теңдеуінің шешімін табу керек.

Типтік есептерді шығару үлгілері

1-есеп. Түбірдің барлық мәндерін табу керек: $\sqrt[3]{-27i}$.

Шешуі. $z = -27i$ комплекс санының модулі $|z| = 27$

аргументінің бас мәні $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Бұл мәндерді және

$n = 3$ санын

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

формуласына қойсақ

$$\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-\pi/2 + 2\pi k}{3} \right), \quad k=0,1,2$$

аламыз. Бұдан

$k = 0$ үшін

$$\omega_0 = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2}$$

$k = 1$ үшін

$$\omega_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3(0 + i) = 3i,$$

$k = 2$ үшін

$$\omega_2 = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2}$$

Жауабы: $\sqrt[3]{-27i} = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2}; 3i; -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2} \right\}.$

2-есеп. Алгебралық түрде жазу керек: $\operatorname{ch}\left(3 + \frac{\pi i}{4}\right).$

Шешуі. $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ және $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

формулаларын пайдалансақ

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(3 + \frac{\pi}{4}i\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{3 + \frac{\pi}{4}i} + e^{-3 - \frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{1}{2}\left(e^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + e^{-3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(e^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^{-3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e^3 + e^{-3}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(e^3 - e^{-3})\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}3 \end{aligned}$$

аламыз. Жауабы: $\operatorname{ch}\left(3 + \frac{\pi}{4}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}3$.

Ескерту. 2-есепті шығарудың басқа жолы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(3 + \frac{\pi}{4}i\right) &= \operatorname{ch}3 \cdot \operatorname{ch}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sh}3 \cdot \operatorname{sh}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ch}3 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sh}3 \cdot \left(i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}3 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}3. \end{aligned}$$

3-есеп. Алгебралық түрде жазу керек: $(-12 + 5i)^{-1}$.

Шешуі. $z^h = e^{h \ln z}$ $z^h = e^{h \ln z}$; $\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$.

$k \in \mathbb{Z}$ және $e^{i\pi y} = e^{i}(\cos y + i\sin y)$ қатыстарын пайдаланамыз.

Мұнда $|-12 + 5i| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ және

$\arg(-12 + 5i) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, болғандықтан,

$\ln(-12 + 5i) = \ln 13 + i(\pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{12} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ аламыз.

Сондықтан

$$(-12 + 5i)^{-i} = e^{-i \ln(-12 + 5i)} = e^{-i \ln 13 - i^2 (\pi - \arctg \frac{5}{12} + 2\pi k)} =$$

$$= e^{\pi + 2\pi k - \arctg \frac{5}{12} - i \ln 13} = e^{\pi + 2\pi k - \arctg \frac{5}{12}} (\cos \ln 13 - i \sin \ln 13).$$

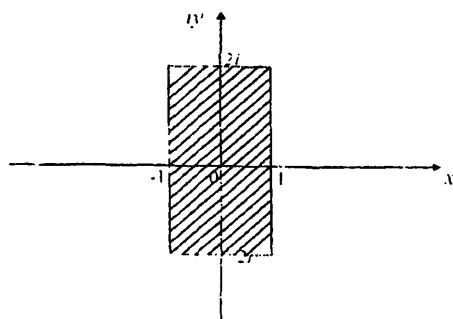
Жауабы: $(-12 + 5i)^{-i} = e^{\pi + 2\pi k - \arctg \frac{5}{12}} (\cos \ln 13 - i \sin \ln 13), k \in \mathbb{Z}.$

4-есеп. $|\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| < 2$ теңсіздіктерімен берілген аймақты салу керек.

Шешуі. $\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y$ екенін ескерсек, онда берілген теңсіздіктер келесі түрде жазылады: $-1 \leq x \leq 1, -2 < y < 2$.

Бұл теңсіздіктер комплекс жазықтықта тік төртбұрышты анықтайды (1-сурет).

Мұнда аймаққа жататын шекара сызықтары тұтас, ал жатпайтын шекара сызықтары пунктир сызықтармен көрсетілген.



1-сурет

5-есеп. $Z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1), t \in \mathbb{R}$ теңдеуімен берілген қисықты анықтау керек.

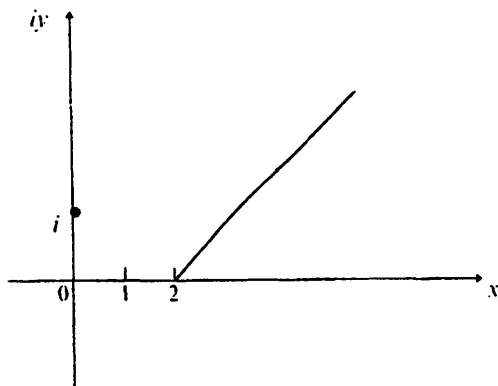
Шешуі. $z = x + iy$ саны мен $Z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$ комплекс сандарының теңдігінен

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases} \quad \text{жүйесін аламыз. Бұл жүйеден } x \text{ пен } y$$

арасындағы байланысты табамыз:

$$\begin{cases} x = (x-1)^2 + 2, \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = (x-1)^2, \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

мұндағы y теріс емес екенін байқасақ, алынған теңдеу Ox жазықтығында $y = x - 2$, $y \in [0, +\infty)$, $x \in [2, +\infty)$ жарты түзуін беретінін көреміз (2-сурет).



2-сурет

6-есеп. Берілген жорамал $v(x, y) = 2xy + x$ бөлігі және $f(0) = 0$ мәні бойынша $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясын табу керек.

Шешуі. Алдымен $v(x, y) = 2xy + x$ функциясының $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында аналитикалық функция екенін тексерейік:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad 0+0=0,$$

яғни $v(x, y) = 2xy + x$ функциясы Лаплас теңдеуін комплекс жазықтығының кез келген нүктесінде қанағаттандырады демек, ол осы көрсетілген жазықтықта гармоникалық функция.

Енді жорамал бөлігі $v(x, y) = 2xy + x$ болатын аналитикалық функцияны табайық. Оған арналған келесі екі тәсілді көрсетеміз.

1-тәсіл. Коши-Риман шарттарын: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

пайдалану.

Бірінші теңдікті пайдалансақ, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x}$

бұдан $u = \int 2x dx + c(y) = x^2 + c(y)$ аламыз. Мұндағы $c(y)$ белгісізін табу үшін u функциясын Коши-Риман шарттарының екінші теңдігіне қоямыз.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + c(y))'_y = c'(y), \text{ ал } \frac{\partial v}{\partial x} = (2xy + x)'_x = 2y + 1$$

екенін ескеріп, екінші шарттан $c'(y) = -2y - 1$ аламыз.

Бұдан $c(y) = \int (-2y - 1) dy = -y^2 - y + c$, демек,

$$u = x^2 + c(y) = x^2 - y^2 - y + c.$$

Сонымен,

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + c + i(2xy + x) = x^2 + 2xiy + (iy)^2 + i(x + iy) + c = z^2 + iz + c,$$

мұндағы c тұрақтысының мәнін $f(0) = 0$ шартынан табамыз:

$$0 + c + i \cdot 0 = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Жауабы: $f(z) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x).$

2-тәсіл: z_0 нүктесінің маңайында аналитикалық болатын $f(z)$ функциясын табу үшін, келесі екі формуланың бірін пайдалануға болады

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{C}_0, \quad (a)$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + \bar{C}_0, \quad (б)$$

мұндағы $\bar{C}$, $\bar{C}_0 = f(\bar{z}_0)$ санына түйіндес сан.

Біздің мысалымызда $v(x, y) = 2xy + x$. $z_0 = 0$, $\bar{C} = 0$.
Жоғарыдағы формулалардың екіншісін пайдаланамыз

$$f(z) = 2i\left(2\frac{z+0}{2} \cdot \frac{z-0}{2i} + \frac{z+0}{2}\right) + 0 = z^2 + iz.$$

Жауабы: $y(z) = z^2 + iz$.

7-есеп. Комплекс айнымалы функцияның интегралын берілген қисық бойынша есептеу керек

$$\int_L z|z|dz; \quad L: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Шешуі. L қисығы - центрі 0 нүктесі, радиусі 1 болатын, жоғарыдағы жарты жазықтықта жататын жарты шеңбер:

$$L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

Олай болса,

$$L: z(t) = x(t) + iy(t) = \cos t + i \sin t, \quad z'(t) = -\sin t + i \cos t.$$

Енді $\int_1^{\prime\prime} \alpha(z)dz = \int_a^b \alpha(z(t))z'(t)dt$ формуласын пайдаланып

$$\begin{aligned} \int_L |z| dz &= \int_0^\pi (\cos t + i \sin t) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= \int_0^\pi (-\cos t \sin t + i \cos^2 t - i \sin^2 t - \cos t \sin t) dt = \\ &= \int_0^\pi (-\sin 2t + i \cos 2t) dt = \\ &= \left(\frac{\cos 2t}{2} + i \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^\pi = \left(\frac{\cos 2\pi}{2} + i \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - \left(\frac{\cos 0}{2} + i \frac{\sin 0}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

аламыз.

$$\text{Жауабы: } \int_L |z| dz = 0.$$

Ескерту: Берілген интегралды $Z = \ell^{it}$ айнымалысын енгізу арқылы да есептеуге болады.

$$\text{8-есеп. } \omega = \frac{15z + 450}{225z + 15z^2 - 2z^3} \quad \text{функциясының Лоран}$$

қатарына Z дәрежесі бойынша жіктелуін табу керек.

Берілген функцияның ерекше нүктелері: $2z^3 - 15z^2 - 225z = 0$ немесе $z(2z^2 - 15z - 225) = 0$ теңдеуінің түбірлері. Бұдан $z_0 = 0$ және $2z^2 - 15z - 225 = 0$.

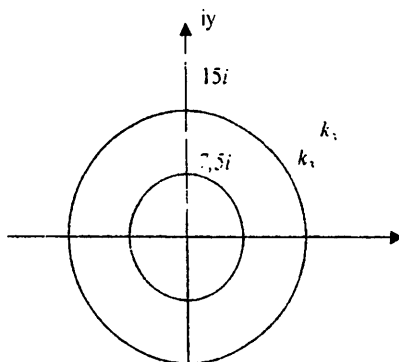
$$D = 15^2 + 4 \cdot 225 = 2025; \quad z_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{2025}}{4} \Rightarrow z_1 = 15,$$

$$z_2 = -7.5 \quad \text{аламыз.}$$

Сондықтан, берілген функция центрі 0 нүктесіндегі келесі үш сақинада аналитикалық функция болады:

$$k_1 = \{z : 0 < |z| < 7.5\}, \quad k_2 = \{z : 7.5 < |z| < 15\},$$

$$k_3 = \{z : 15 < |z|\} \quad (3\text{-сурет}).$$



3-сурет

Берілген функцияны осы сақинаның әрқайсысында Лоран қатарына жіктейік. Ол үшін функцияны қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейік.

$$2z^3 - 15z^2 - 225z = 2z(z - 15)(z + 7.5) = z(z - 15)(2z + 15),$$

$$\omega = \frac{-15z - 450}{2z^3 - 15z^2 - 225z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 15} + \frac{C}{(2z + 15)} \Rightarrow 15z - 450 = A(z - 15)(2z + 15) +$$

$$Bz(2z + 15) + Cz(z - 15).$$

Мұнда,

$$z_0 = 0 \text{ деп алсақ, } -450 = A(-15)(15) \Rightarrow A = 2,$$

$$z_1 = 15 \text{ деп алсақ, } -15 \cdot 15 - 450 = B \cdot 15 \cdot 45 \Rightarrow B = -1,$$

$$z_2 = -7.5 \text{ деп алсақ, } +15 \cdot 7.5 - 450 = C(-7.5)(-225) \Rightarrow C = -$$

аламыз.

Сонымен,

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z - 15} - \frac{z}{2z + 15}.$$

1. $z \in K_1 = \{z : 0 < |z| < 7,5\}$ нүктелері үшін берілген функцияны жіктейік. Ол үшін геометриялық прогрессияның жіктелуін $\frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$ ($|q| < 1$). пайдаланамыз.

$$-\frac{1}{z-15} = \frac{1}{15-z} = \frac{1}{15(1-\frac{z}{15})} = \left| |z| < 7,5 \Rightarrow \left| \frac{z}{15} \right| < 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{z}{15 \cdot 15} + \frac{1}{15} \left(\frac{z}{15} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}}.$$

$$\frac{-2}{2z+15} = \frac{-1}{z+7,5} = \frac{-1}{7,5(1-(-\frac{z}{7,5}))} = \left| \left| \frac{z}{7,5} \right| < 1 \right| =$$

$$\left| \text{т.к.в.к.} \left| \frac{-z}{7,5} \right| < 1 \right| = \frac{-1}{7,5} + \frac{-1}{7,5} \left(-\frac{z}{7,5} \right) + \frac{-1}{7,5} \left(-\frac{z}{7,5} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7,5)^{n+1}}$$

Сонымен, $K_1 = \{z : 0 < |z| < 7,5\}$ сакинада

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{(7,5)^{n+1}}$$

аламыз.

2. $z \in K_2 = \{z : 7,5 < |z| < 15\}$ нүктелерін қарастырайық.

Мұнда $\left| \frac{z}{15} \right| < 1$. болатындыктан $\frac{-1}{z-15}$ болшегінің қатарға

жіктелуі алдыңғы жағдайға келеді. K_2 жиынында үшінші болшекті қатарға жіктейік.

$$\frac{-1}{2z+15} = \frac{-2}{2z(1+\frac{15}{2z})} = \frac{-1}{z\left(1-\left(-\frac{15}{2z}\right)\right)} =$$

$$\text{при } |z| > 7.5 \left| -\frac{15}{2z} \right| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{z} + \frac{-1}{z} \left(-\frac{15}{2z} \right) + \frac{-1}{z} \left(\frac{-15}{2z} \right)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}.$$

Сондықтан, $z \in K_2 = \{z : 7.5 < |z| < 15\}$ сақинасындағы нүктелер үшін

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15} = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}$$

аламыз.

3. $z \in K_3 = \{z : |z| > 15\}$ болсын. $|z| > 15$ болғандықтан

$$\left| -\frac{15}{z} \right| < 1 \text{ болады. Демек,}$$

$$\frac{1}{z-15} = \frac{-1}{z(1-\frac{15}{z})} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{15}{z} - \frac{1}{z} \left(\frac{15}{z} \right)^2 - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15^{n-1}}{z^n}.$$

$$\left| -\frac{15}{2z} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{15}{z} \right| < \left| \frac{15}{z} \right| < 1 \text{ болатындықтан } K_3 \text{ сақинасында}$$

$$\frac{-2}{2z+15} \text{ бөлшегінің қатарға жіктелуі алдыңғы жағдайға келеді.}$$

Сонымен, $z \in K_3 = \{z : |z| > 15\}$ жиынында

$$\omega = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15} = \frac{2}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}$$

аламыз.

Жауабы:

1. $k_1 = \{z : 0 < |z| < 7.5\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{15^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(7.5)^{n+1}} \right) z^n.$$

2. $z \in K_2 = \{z : 7.5 < |z| < 15\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1} z^n}.$$

3. $z \in K_3 = \{z : |z| > 15\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-15^{n-1} + \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}} \right) \frac{1}{z^n}.$$

9 есеп. $\omega = \frac{2z}{z^2 - 4}$ функциясының $z - z_0$ айырмасының дәрежесі бойынша Лоран қатарына жіктеу керек. Мұнда $z_0 = 3 - 2i$ тең.

Шешуі.

Функцияның ерекше нүктелері $z^2 - 4 = 0$ теңдеуінің түбірлері, яғни, $z_1 = 2$, $z_2 = -2$.

Ол нүктелерден z_0 нүктесіне дейінгі қашықтық, сәйкес

$$R_1 = |z_1 - z_0| = |2 - 3 + 2i| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

$$R_2 = |z_2 - z_0| = |-2 - 3 + 2i| = |-5 + 2i| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

тең. Сондықтан берілген функция центрлері $z_0 = 3 - 2i$ радиустары R_1 мен R_2 болатын келесі үш сақинада

$$K_1 = \{z : |k| < |z - 3 + 2i| < \sqrt{5}\}.$$

$$K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < \sqrt{29}\},$$

$$K_3 = \{z : \sqrt{29} < |z - 3 + 2i|\}.$$

малитикалык функция.

Берілген функцияны карапайым болшектердің қосындысына келтірейік.

$$\omega = \frac{2z}{z^2 - 4} = \frac{2z}{(z-2)(z+2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2} \Rightarrow 2z = A(z+2) + B(z-2):$$

$$z=2 \Rightarrow 4=4A \Rightarrow A=1. \quad z=-2 \Rightarrow -4=-4B \Rightarrow B=1.$$

$$\text{Сондықтан,} \quad \omega = \frac{2z}{z^2 - 4} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2}.$$

1. $K_1 = \{z : |k| < |z - 3 + 2i| < \sqrt{5}\}$ жиынындағы нүктелер үшін,

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-3+2i}{-1+2i} \right)} =$$

$$= \left| \left| \frac{z-3+2i}{-1+2i} \right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \right| = \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{z-3+2i}{(-1+2i)} +$$

$$\frac{1}{1-2i} \cdot \left(\frac{z-3+2i}{-1+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}}.$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(-z+2i)+(5-2i)} = \frac{1}{5-2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-3+2i}{-5+2i} \right)} =$$

$$= \left| \left| \frac{z-3+2i}{-5+2i} \right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}} < 1 \right| = \frac{1}{5-2i} + \frac{1}{5-2i} \left(\frac{z-3+2i}{-5+2i} \right) +$$

$$+ \frac{1}{5-2i} \left(\frac{z-3+2i}{-5+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}.$$

аламыз. Демек, $K_1 = \{z : |k| < |z - 3 + 2i| < \sqrt{5}\}$ жиынындағы нүктелер үшін

$$\omega = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(-1+2i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}$$

2. $K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < \sqrt{29}\}$, яғни, $z \in k_2$ нүктелері үшін

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)} = \frac{1}{(z-3+2i)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-1+2i}{z-3+2i}} = \\ &= \left\| \frac{-1+2i}{z-3+2i} \right\| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = \frac{1}{z-3+2i} + \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-1+2i}{z-3+2i} \right) + \\ &+ \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-1+2i}{z-3+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3-2i)^n}. \end{aligned}$$

$K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < \sqrt{29}\}$ сақинасының нүктелерінде

$$\left| \frac{z-3+2i}{-5+2i} \right| < \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1 \quad \text{орындалатындықтан,} \quad \frac{1}{z+2}$$

бөлшегінің жіктелуі алдыңғы жағдайдағыдай болады. Олай болса,

$K_2 = \{z : \sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < \sqrt{29}\}$ жиынында,

$$\omega = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}$$

$$3. K_3 = \{z: \sqrt{29} < |z-3+2i|\} \text{ нүктелерінде } \left| \frac{-1+2i}{z-3+2i} \right| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}} < 1$$

орындалатындықтан $\frac{1}{z-2}$ болшегінің жіктелуі 2 п.-дей болады.

Екінші бөлшекті қатарға жіктейік.

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-3+2i)+(5-2i)} = \frac{1}{z-3+2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-5+2i}{z-3+2i} \right)} =$$

$$\left| m.k. \left| \frac{-5+2i}{z-3+2i} \right| < \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1 \right| = \frac{1}{z-3+2i} + \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-5+2i}{z-3+2i} \right) +$$

$$+ \frac{1}{z-3+2i} \cdot \left(\frac{-5+2i}{z-3+2i} \right)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}.$$

Демек, $K_3 = \{z: \sqrt{29} < |z-3+2i|\}$ жиынында

$$\omega = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}.$$

Жауабы:

$$1. \omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{-1}{1-2i} \right)^{n+1} + \left(\frac{-1}{5-2i} \right)^{n+1} \right) (z-3+2i)^n.$$

$$K_1 = \{z: |k| < |z-3+2i| < \sqrt{5}\},;$$

$$2. \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{5-2i} \right)^{n+1} (z-3+2i)^n,$$

$$K_2 = \{z: \sqrt{5} < |z-3+2i| < \sqrt{29}\},;$$

$$3. \quad \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1+2i)^{n-1} + (-5+2i)^{n-1} \right) \frac{1}{(z-3+2i)^n},$$

$$K_3 = \{z : \sqrt{29} < |z-3+2i|\}.$$

10 есеп. $\omega = z \sin \frac{\pi z}{z-a}$ функциясын $z_0 =$ нүктесінің

маңайында Лоран қатарына жіктеу керек.

Шешуі: $z-a$ айырмасын t арқылы белгілесек $z = t+a$ болады да $\omega = (t+a) \sin \frac{\pi(t+a)}{t} = (t+a) \sin \left(\pi + \frac{a}{t} \right) = -(t+a) \sin \frac{a}{t} = -t \sin \frac{a}{t} - a \sin \frac{a}{t}$.

аламыз.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{жіктелуін } x = \frac{a}{t}$$

үшін жазсақ,

$$\begin{aligned} \omega &= -t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1} (2n+1)!} - a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{t^{2n+1} (2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n+2}}{t^{2n+1} (2n+1)!} - \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n+2}}{t^{2n+1} (2n+1)!} \end{aligned}$$

шығады. Енді мұнда $t = z-a$ ауыстыруын жасаса болғаны.

Жауабы:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+2}}{(z-a)^{2n+1} (2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+2}}{(z-a)^{2n+1} (2n+1)!}.$$

11-есеп. $\omega = \frac{e^z - 1}{e^z - 1 - z}$ функциясының $z=0$

ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$\omega = e^z$ функциясының Маклорен қатарына жіктелу формуласын

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

пайдаланамыз

$$\text{Мұндағы } z \text{ орнына } z^5 \text{ қойсақ } e^{z^5} = 1 + z^5 + \frac{z^{10}}{2!} + \dots$$

және бұл қатар $z = 0$ нүктесінің маңайында жинақты. Сондықтан,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{e^{z^5} - 1}{e^z - 1 - z} = \frac{-1 + 1 + z^5 + \frac{z^{10}}{2!} + \dots}{-1 - z + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots} = \\ &= \frac{z^5 + \frac{z^{10}}{2!} + \dots}{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots} = \frac{z^5 \left(1 + \frac{z^5}{2!} + \dots \right)}{z^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots \right)} = z^3 \cdot h(z), \end{aligned}$$

$$\text{мұнда } h(z) = \frac{1 + \frac{z^5}{2!} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \dots} \quad \text{арқылы } z = 0 \text{ нүктесінің}$$

маңайында аналитикалық функция белгіленген (ол, екі аналитикалық функцияның қатынасы және бөлшектің бөлімі нөлге тең емес).

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^5} - 1}{e^z - 1 - z} = \lim_{z \rightarrow 0} z^3 \cdot h(z) = 0 < \infty$$

болғандықтан $z_0 = 0$ -жөнделетін ерекше нүкте.

$$\text{12-есеп. } \omega = \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{\frac{1}{z}} \quad \text{функциясының дара ерекше}$$

нүктелерін тауып, олардың түрлерін анықтау керек.

Шешімі. Берілген функция $z_1 = 0$ нүктесінде және $z^4 - 1 = 0$ теңдесуінің түбірлерінде аныкталмаған.

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$$

жіктелуінен тағыда $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$ торт ерскше нүктелерін аламыз. Осы ерскше нүктелердің түрлерін анықтайық.

1. $z_1 = 0$ нүктесінде берілген функцияның шегі жоқ екенін көрсетейік. $z = x + 0i$ нөлге ұмтылдырайық ($y = 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot e^{-\infty}) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \pi x}{x^4 - 1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^4 - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\sin \pi x)^{-1}} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(\sin \pi x)^{-1}} - 1 = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \text{Лопиталь ережесі} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-(\sin \pi x)^{-2} \cdot \cos \pi x \cdot \pi} = - \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \pi x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\cos \pi x \cdot \pi} =$$

$$= \left(\infty \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{\pi} \right) = \infty.$$

Функцияның оң және сол жақ шектері тең емес, олай болса оның $z_1 = 0$ нүктесінде шегі жоқ, демек $z_1 = 0$ - сәулі ерскше нүкте.

2. $z_2 = 1$ нүктесін зерттейік.

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{z \rightarrow 1} e^{\frac{1}{z}} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} = e \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(\sin \pi z)'}{(z^4 - 4)'} =$$

$$= e \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi z}{4z^3} = \frac{\pi e}{4}.$$

Олай болса $z_2 = 1$ жөнделетін ерекше нүкте.

3. $z_3 = -1$ нүктесін де осы сияқты зерттеуге болады:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{\frac{1}{z}} &= \lim_{z \rightarrow -1} e^{\frac{1}{z}} \cdot \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} = \\ &= e^{-1} \cdot \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(\sin \pi z)'}{(z^4 - 1)'} = e^{-1} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\pi \cos \pi z}{4z^3} = \frac{\pi e^{-1}}{4}, \end{aligned}$$

яғни, $z_3 = -1$ жөнделетін ерекше нүкте.

4. $z_4 = i$ нүктесін зерттейік.

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin \pi z \cdot e^{\frac{1}{z}}}{z^4 - 1} = \left(\frac{\sin \pi i \cdot e^{-i}}{0} \right) = \infty,$$

олай болса $z_4 = i$ нүктесі - полюс. Оның ретін анықтау үшін функцияны келесі түрде жазайық

$$\omega = \frac{x(z)}{\mu(z)} = \frac{\sin \pi z \cdot e^{\frac{1}{z}}}{z^4 - 1},$$

мұнда

$$\begin{aligned} \lambda(i) &= \sin \pi i e^{-i} \neq 0, \quad \mu(i) = i^4 - 1 = 0, \quad \mu'(z) = 4z^3, \\ \mu'(i) &= 4i^3 \neq 0 \end{aligned}$$

орындалады, демек, $z_4 = i$ 1-ші ретті полюс.

5. $z_5 = -i$ жағдайы алдыңғы сияқты, мұнда да

$$\begin{aligned} \lambda(-i) &= \sin(-\pi i) e' \neq 0, \quad \mu(-i) = (-i)^4 - 1 = 0, \\ \mu'(-i) &= -4i^3 \neq 0, \end{aligned}$$

орындалады, олай болса $z_5 = -i$ 1-ші ретті полюс.

Жауабы: $z_1 = 0$ - слеулі ерекше нүкте;

$z_{2,3} = \pm 1$ -- жөнделетін ерекше нүктелер;

$z_{4,5} = \pm i$ - 1-ші ретті полюстер.

13-есеп. Интегралды есептеу керек:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} dz$$

Шешуі. Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелерін табамыз, ол үшін бөлшектің бөлімін нөлге теңестіреміз

$$(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3} = 0, \text{ бұдан } z^2 + 4 = 0 \text{ немесе } z_{1,2} = \pm 2i.$$

ал $\sin \frac{z}{3} = 0$ болса $\frac{z}{3} = \pi k$, $z_k = 3\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$|1 - (\pm 2i)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 2$, яғни $z_n = \pm 2i$ нүктелері интегралдау контурының сыртында жатыр, сондықтан оларды қарастырмаймыз, ал $z_k = 3\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ нүктелер жиынындағы $z_0 = 0$ нүктесі ғана $|z - 1| = 2$ контурының ішінде жатыр. $z_0 = 0$ нүктесінің түрін анықтайық.

Интеграл астындағы функция $f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$.

$\lambda(z) = z^2 + 1$, $\mu(z) = (z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}$ түрінде берілген және

$\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$ орындалады, шынында да.

$\lambda(z) = z^2 + 1$ үшін $\lambda(0) = 1 \neq 0$;

$\mu(z) = (z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}$, үшін $\mu(0) = 0$,

ал $\mu'(z) = 2z \sin \frac{z}{3} + (z^2 + 4) \frac{1}{3} \cos \frac{z}{3}$, үшін

$\mu'(0) = 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \neq 0$. Сондықтан, $z_0 = 0$ - жай (1-ші

ретті) полюс.

Олай болса,

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} \right) = \frac{\lambda(0)}{\mu'(0)} = \frac{1}{4/3} = 3/4.$$

Кошидің шегерім туралы негізгі теоремасына сәйкес

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 \left(\frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} \right) = 2\pi i \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \pi i.$$

Жауабы: $\frac{3}{2} \pi i$.

14-есеп. Интегралды есептеу керек: $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\sqrt[3]{z}} - 1}{z} dz$.

Шешуі. Интеграл астындағы функцияның жалғыз ерекше нүктесі $z_0 = 0$ бар және ол $|z|=1$ контурының ішінде жатыр. Функцияны $z_0 = 0$ нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктей отырып, осы нүктедегі оның шегерімін табамыз.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

түріндегі Маклорен қатарын

$$t = \frac{1}{z^2} \quad \text{үшін жазсак}$$

$$e^{\sqrt[3]{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 \cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \dots$$

аламыз. Олай болса,

$$\begin{aligned} \frac{z^2 e^{\sqrt[3]{z^2}} - 1}{z} &= \frac{z^2 \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 \cdot 2!} + \frac{1}{z^6 \cdot 3!} + \dots \right) - 1}{z} = \\ &= \frac{\left(z^2 + 1 + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 3!} + \dots \right) - 1}{z} = z + \frac{1}{2! z^3} + \frac{1}{3! z^5} + \dots \end{aligned}$$

$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = c_{-1}$ екені белгілі, ал бізде $\frac{1}{z}$ дәрежесінің

коэффициенті c_{-1} нөлге тең, демек,

$$\operatorname{Res}_0 \left(\frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z} \right) = 0.$$

Олай болса, $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_0=0} f(z) = 0.$

Жауабы: 0.

15-есеп.

Интегралды

есептеу

керек: $\oint_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \sin \pi z} dz$.

Шешуі: $shiz = i \sin z$ қатысын пайдаланамыз да, берілген интегралды келесі түрде жазамыз

$$\oint_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{iz \sin \pi z} dz.$$

Интеграл астындағы функцияның ерекше нүктелері $z \cdot \sin \pi z = 0$ тендеуінен табылады:

$$z = 0, \pi z = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ немесе } z = k, k \in \mathbb{Z}.$$

$|z| = 0,5$ шеңберінің ішінде $z_0 = 0$ нүктесі ғана жатыр.

Оның түрін анықтайық. Интеграл астындағы функция

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \frac{e^{2z} - \cos 9z}{i \sin \pi z}$$

түрінде жазылған және

$$\lambda(0) = e^0 - \cos 0 = 0$$

$$\lambda'(z) = 2e^{2z} + 9 \sin 9z, \quad \lambda'(0) = 2 \cdot e^0 - \sin 0 = 2 \neq 0,$$

яғни, $z_0 = 0$ нүктесі $\lambda(z)$ функциясының 1-ші ретті нолі;

$$\mu(0) = 0, \quad \mu'(z) = i \sin z + i \pi z \cos \pi z, \quad \mu'(0) = 0.$$

$$\mu''(z) = i \pi \cos \pi z + i \pi \cos \pi z - i \pi^2 z \sin z,$$

$$\mu''(0) = z i \pi \neq 0, \quad \text{яғни,} \quad z_0 = 0 \quad \text{нүктесі} \quad \mu(z)$$

функциясының 2-ші ретті нолі.

Олай болса, $z_0 = 0$ нүктесі функцияның $2 - 1 = 1$ ретті полюсі. Шегерімді

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$$

формуласы бойынша іздейміз:

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{i z \sin \pi z} \cdot z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{i \sin z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^{2z} - \cos 9z)'}{(i \sin \pi z)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{2z} + 9 \sin 9z}{i \pi \cos \pi z} = \frac{2}{i \pi}.$$

Шегерім туралы негізгі теорема бойынша

$$\oint_{|z|=0.5} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 f(z) = 2\pi i \frac{2}{i \pi} = 4.$$

Жауабы: 4.

16-есеп. Интегралды есептеу керек:

$$\oint_{|z+2i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1} + \frac{6ch \frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} \right) dz.$$

Шешуі: 1) Бірінші бөлшектің ерекше нүктелерін келесі теңдесуден табамыз

$$e^{\pi z/2} + 1 = 0, \quad e^{\frac{\pi z}{2}} = -1, \quad \frac{\pi z}{2} = \operatorname{Ln}(-1).$$

Бұдан $|-1| = 1, \quad \arg(-1) = \pi$ болғандыктан

$$\frac{\pi z}{2} = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k); \quad \pi z = 2i(\pi + 2\pi k); \quad z = i(2 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

аламыз. Бұл нүктелердің $|z + 2i| = 3$ контурының ішінде жататыны тек $z_0 = -2i$ нүктесі ($k = -1$ болса). Бұл нүктенің түрін анықтайық.

$$f_1(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)} = \frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1}, \quad \lambda_1(-2i) = \pi \neq 0, \quad \mu_1(-2i) = e^{-\pi i} + 1 = 0$$

$$\mu'_1(z) = \frac{\pi}{2} e^{\pi z/2}, \quad \mu'_1(-2i) = \frac{\pi}{2} e^{-\pi i} = -\frac{\pi}{2} \neq 0,$$

олай болса, $z_0 = -2i$ - нүктесі 1-ші ретгі полюс. Бұл нүктедегі шегерімді

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{\lambda_1(z_0)}{\mu'_1(z_0)}$$

формуласын қолданып табамыз:

$$\operatorname{res}_0 f_1(z) = \frac{\pi}{-\pi/2} = -2.$$

Сонымен бірінші бөлшектің интегралы

$$\oint_{|z+2i|=3} \frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1} dz = 2\pi(-2) = -4\pi i$$

тең.

$$2) \quad \text{Екінші} \quad f_2(z) = \frac{6 \cosh \frac{\pi z}{2}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} \quad \text{бөлшектің}$$

ерекше нүктелерін $(z-2+2i)^2(z-4-2i) = 0$ теңдеуінен табамыз.

Бұдан $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$. Екінші ерекше нүкте үшін $|-2i - (4 + 2i)| = |-4 - 4i| = \sqrt{32} > 3$ орындалады, яғни, $4 + 2i$ нүктесі $|z + 2i| = 3$ контурының сыртында, ал $z_1 = 2 - 2i$ нүктесінің контуры ішінде жататынын қору қиын емес. Осы нүктенің түрін анықтайық.

$$f_2(z) = \frac{6 \cos \frac{\pi z}{2}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} = \frac{6 \cos \frac{\pi z}{2}}{(z-2+2i)^2} \cdot \frac{1}{z-4-2i},$$

және мұнда

$$\varphi(z) = \frac{6 \cos \frac{\pi z}{2}}{z-4-2i}$$

$$\text{функциясы үшін } \varphi(2-2i) = \frac{-6}{2-2i-4-2i} = \frac{6}{2+4i} \neq 0,$$

сонымен бірге ол $2-2i$ нүктесінің маңайында аналитикалық функция. Сондықтан, белгілі критерий бойынша $2-2i$ нүктесі 2 -ші ретті полюс. $2-2i$ нүктесіндегі шегерімді табу үшін

$$\operatorname{res}_{z_1} f_2(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (f(z)(z-z_1)^2)'$$

формуласын пайдаланамыз.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{z=2i} f_2(z) &= \lim_{z \rightarrow 2+2i} \left(\frac{6 \cos \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2 (z-4+2i)} (z-2+2i)^2 \right) = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 2+2i} \left(\frac{6 \cos \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-4-2i)} \right) = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 2+2i} \frac{-\frac{6\pi}{2-2i} \sin \frac{\pi z}{2-2i} \cdot (z-4-2i) - 6 \cos \frac{\pi z}{2-2i} \cdot 1}{(z-4-2i)^2} = \\
 &= \frac{-\frac{6\pi}{2-2i} \sin \pi \cdot (2-2i-4-2i) - 6 \cos \pi}{(2-2i-4-2i)^2} = \frac{6}{(-2-4i)^2} = \\
 &= \frac{6}{4+16i-16} = \frac{3}{-6+8i} = \frac{3(-6-8i)}{(-6+8i)(-6-8i)} = \frac{-18-24i}{36+64} = \\
 &= -0,18 - 0,24i.
 \end{aligned}$$

Сондықтан,

$$\oint_{|z+2i|=3} f_2(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} f_2(z) = 2\pi i (-0,18 - 0,24i) = \pi(0,48 - 0,36i).$$

Сонымен,

$$\begin{aligned}
 \oint_{|z+2i|=3} (f_1(z) + f_2(z)) dz &= \oint_{|z+2i|=3} f_1(z) dz + \oint_{|z+2i|=3} f_2(z) dz = -4\pi i + \pi(0,48 - 0,36i) = \\
 &= \pi(0,48 - 4,36i).
 \end{aligned}$$

Жауабы: $0,48\pi - 4,36\pi i$.

17-есеп. Интегралды есептеу керек:
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}.$$

Шешуі. $z = e^{it}$ айнымалы ауыстыруын жасайық. Онда

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{zi}.$$

Сондықтан,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + 6\right)iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}}.$$

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2}} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$$

функциясының ерекше нүктелерін $2\sqrt{2}z^2 + 6iz - 2\sqrt{2} = 0$ теңдеуінен табамыз.

$$z_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-3i \pm i}{2\sqrt{2}}.$$

$$|z_1| = \left| \frac{-2i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \text{ ал } |z_2| = \left| \frac{-4i}{2\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} > 1, \text{ демек, } |z| = 1$$

контурының ішінде $z_1 = \frac{-2i}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ нүктесі жатыр.

Оның түрін анықтайық.

$$\lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 \neq 0, \quad \mu\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 0, \text{ өйткені } z_1 - \text{болшектің}$$

бөлімінің түбірі. Сонымен бірге

$$\mu'(z) = 4\sqrt{2}z + 6i, \quad \mu'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i + 6i = 2i \neq 0.$$

Сондықтан, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ – бірінші ретті полюс,

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \frac{\lambda(z_1)}{\mu'(z_1)} = \frac{1}{2i}.$$

Олай болса, $\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$

Жауабы: π .

18-есеп. Интегралды есептеу керек: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cos t)^2}.$

Шешуі: Алдыңғы есептің шешу әдісін пайдаланамыз:

$z = e^{it}$ деп алайық. Онда,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cos t)^2} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{2} \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5} z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

$f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)} = \frac{z}{i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5} z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ функциясының

ерекше нүктелерін $\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5} z + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ теңдеуінен табамыз:

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5-2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

мүнда, $\left| \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right| > 1$ және $\left| \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right| < 1$ болғандықтан $|z| < 1$ контурының ішінде $z_1 = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ерекше нүктесі

ғана жатады.

$$\lambda(z_1) = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \neq 0, \quad \text{ал } \mu(z) \text{ үшін } \mu(z_1) = \mu'(z_1) = 0$$

және $\mu''(z_1) \neq 0$ болады, шынында да,

$$\mu'(z) = i2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{2}z + \sqrt{5})$$

$$\mu''(z) = i2(\sqrt{2}z + \sqrt{5})^2 + i2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 + \sqrt{5}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Бұл функцияның z нүктесі мәні

$$\mu''(z_1) = i2 \left(\sqrt{2} \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{5} \right)^2 = 6i \neq 0$$

Олай болса, z -нүктесі $f(z)$ функциясының екінші ретті полюсі.

$\mu(z)$ -гі көбейткіштерге жіктесп алайық:

$$\mu(z) = i \frac{\sqrt{2}}{2} (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 = i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(z - \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(z + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right)^2.$$

Z_1 нүктесіндегі шегерімді

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} (f(z)(z - z_1)^2)'$$

формуласымен табамыз:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{z}{i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(z - \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(z + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\sqrt{2}z}{i(z + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2} \right)' = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{i} \lim_{z \rightarrow \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \frac{(z + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2 - z \cdot 2(z + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})}{(z + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{i} \frac{((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2} + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{2}((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2} + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})}{((-\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2} + (\sqrt{5}+\sqrt{3})/\sqrt{2})^4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{i} \frac{6 + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{i \cdot 18} = \frac{\sqrt{30}}{18i}. \end{aligned}$$

Сонымен,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{30}}{18i} = \frac{\sqrt{30}}{9} \pi.$$

Жауабы: $\frac{\sqrt{30}}{9} \pi$.

19-есеп. Интегралды есептеу керек: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

Шешуі. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$ функциясының

жоғарғы жарты жазықтықта жатқан ерекше нүктелерін табайық. Ол үшін $(z^2+1)^2 = 0$ және $z^2+16=0$ теңдеулерін шешеміз. Бұдан жоғарғы жарты жазықтықта жатқан ерекше нүктелер $z_1 = i$, $z_2 = 4i$ аламыз. Енді $f(z)$ функциясының осы нүктелердегі шегерімдерін табамыз.

1) $z_1 = i$.

$f(z)$ функциясын келесі түрде жазайық

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+16)} = \frac{(z+i)^{-2}(z^2+16)^{-1}}{(z-i)^2} = \frac{\lambda_1(z)}{\mu_1(z)}$$

мұнда, $\lambda_1(i) \neq 0$ және $\mu_1(z)$ функциясы үшін i -екінші ретті нөл (түбір), сондықтан, $z_1 = i$ нүктесі $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі. Одан

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \left(f(z)(z-i)^2 \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)} \right)' = \\ &= - \lim_{z \rightarrow i} \frac{2(z+i)(z^2+16) + (z+i)^2 \cdot 2z}{(z+i)^4(z^2+16)^2} = - \frac{4i(-1+16) - 8i}{16(-1+16)^2} = \\ &= - \frac{52i}{16 \cdot 225} = - \frac{13}{900} i. \end{aligned}$$

2) $z_2 = 4i$.

$f(z)$ функциясын келесі түрде жазайық

$$f'(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+4i)(z-4i)} = \frac{(z+1)^{-2}(z+4i)^{-1}}{(z-4i)} = \frac{\lambda_2(z)}{\mu_2(z)},$$

мұнда, $\lambda_2(4i) \neq 0$, ал $\mu_2(z)$ үшін $4i$ -бірінші ретті нөл.

Демек, $z_2 = 4i$ нүктесі $f(z)$ функциясының бірінші ретті полюсі. Одан әрі,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{4i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 4i} f'(z)(z-4i) = \lim_{z \rightarrow 4i} \frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)} = \\ &= \frac{1}{(-16+1)^2 \cdot 8i} = \frac{-i}{1800}. \end{aligned}$$

$f(z)$ функциясының нақты осіге жатқан срекше нүктелері жоқ болғандықтан және бөлшектің бөлімінің дәрежесі алымының дәрежесінен 6-ға артық болғандықтан

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)} &= 2\pi i (\operatorname{res}_{4i} f(z) + \operatorname{res}_{-4i} f(z)) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{-13i}{900} - \frac{i}{1800} \right) = \pi \left(\frac{13}{450} + \frac{1}{900} \right) = \pi \frac{27}{900} = \pi \frac{3}{100}. \end{aligned}$$

Жауабы: 0.03π .

20-есеп. Интегралды есептеу керек: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$.

Шешуі: $f(z) = \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2}$ функциясының $\operatorname{Im} z > 0$ жарты

жазықтығындағы срекше нүктелерін және осы нүктелердің шегерімдерін табамыз. $(z^2+1)^2 = 0$ теңдеуінен $z_{1,2} = \pm i$

аламыз, жоғарғы жарты жазықтықта $z_1 = i$ ерекше нүкте жатыр. $f(z)$ функциясын келесі түрде жазамыз

$$f(z) = f(z) = \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2 + 1)^2(z - i)^2} = \frac{(e^{3iz} - e^{2iz})(z + i)^{-2}}{(z - i)^2} = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)},$$

мұнда $\lambda(i) \neq 0$ және $z_1 = i$ нүктесі $\mu(z)$ функциясының 2-ші ретті нөлі яғни, $z_1 = i$ нүктесі $f(z)$ функциясының 2-ші ретті полюсі. Олан

$$\begin{aligned} \text{res } f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} (f(z)(z - i)^2)' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z + i)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z + i)^2 - (e^{3iz} - e^{2iz})2(z + i)}{(z + i)^4} = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(3ie^{3iz} - 2ie^{2iz})(z + i) - 2e^{3iz} + 2e^{2iz}}{(z + i)^3} = \\ &= \frac{(3ie^{-3} - 2ie^{-2})2i - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} = \frac{-6e^{-3} + 4e^{-2} - 2e^{-3} + 2e^{-2}}{-8i} = \\ &= \frac{+4e^{-3} - 3e^{-2}}{4i}. \end{aligned}$$

$$R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \text{ функциясы нақты осьте үзіліссіз және}$$

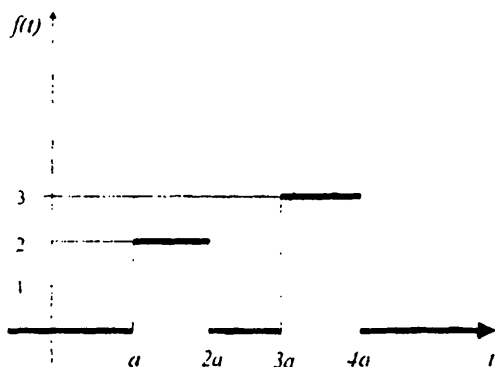
бөлшектің бөлімінің дәрежесі, алымының дәрежесінен 4-ке артық болғандықтан

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx = R_0(2\pi i \cdot \text{res}_i f(z)) = \text{Re} 2\pi i \frac{4e^{-3} - 3e^{-2}}{4i} =$$

$$= \frac{\pi}{2} (4e^{-3} - 3e^{-2}).$$

Жауабы: $\frac{\pi}{2} (4e^{-3} - 3e^{-2}).$

21-есеп. $f(t)$ оригиналының (түпнұсқаның) берілген сызбасы (графикі) арқылы оның бейнесін табу керек.



Шешуі. Берілген функция мен оның туындылары $\tau_1 = a$, $\tau_2 = 2a$, $\tau_3 = 3a$, $\tau_4 = 4a$ нүктелерінде үзіледі. Бұл нүктелердегі сәйкес секіrmелер (скачки функции в точках разрывов). Туындының секіrmелері: $\alpha_1 = 2 - 0 = 2$;
 $\alpha_2 = 0 - 2 = -2$, $\alpha_3 = 3 - 0 = 3$, $\alpha_4 = 0 - 3 = -3$ тең.
 Туындының секіrmелері: $\beta_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ тең, ойткені.

$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ -ден басқа нүктелерде $f'(t) = 0$. Олай

болса, $f(t)$ -ның бейнесі

$$F(p) = \sum_{k=1}^4 e^{-p\tau_k} \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2} \right) = e^{-p\tau_1} \frac{2}{p} - e^{-2p\tau_1} \frac{2}{p} + e^{-3p\tau_1} \frac{3}{p} - e^{-4p\tau_1} \frac{3}{p}.$$

Жауабы:
$$\frac{2e^{-p\tau_1} - 2e^{-2p\tau_1} + 3e^{-3p\tau_1} - 3e^{-4p\tau_1}}{p}.$$

22-есеп. Берілген $F(p) = \frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$ бейнесі

бойынша оның түпнұсқасын (оригиналын) табу керек.

Шешуі. Берілген функцияны ең жан бөлшектердің қосындысына келтіреміз:

$$\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2-6p+10}.$$

$$3p-2 = A(p^2-6p+10) + (Bp+C)(p-1), \quad p=1 \Rightarrow 1 = A(1-6+10):$$

$$1 = 5A, \quad A = 0,2.$$

A -ның мәнін орнына қойып, x -тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз.

$$3p-2 = 0,2p^2 - 1,2p + 2 + Bp^2 - Bp + Cp.$$

$$-2 = 2 - C'$$

$$3 = -1,2 - B + C'.$$

Будан, $C' = +4$, $B = -0,2$.

Сондықтан,
$$F(p) = \frac{0,2}{p-1} + \frac{-0,2p+4}{p^2-6p+10}.$$

Екінші болысқын бөліміндегі өрнектен толық квадрат болып аламыз:

$p^2 - 6p + 10 = p^2 - 6p + 9 + 1 = (p-3)^2 + 1$ және $F(p)$ функциясын келесі түрде жазамыз

$$F(p) = \frac{0,2}{p-1} + \frac{-0,2(p-3) - 0,6 + 4}{(p-3)^2 + 1} = \frac{0,2}{p-1} - 0,2 \frac{p-3}{(p-3)^2 + 1} + \frac{3,6}{(p-3)^2 + 1}.$$

Енді

$$e''' \leftrightarrow \frac{1}{p-a}, \quad e^{-\cos \omega t} \leftrightarrow \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}.$$

$$e''' \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

қатыстарын пайдалана отырып

$$F(p) \leftrightarrow 0,2e' - 0,2e^{3t} \cos t + 3,6e^{3t} \sin t \text{ аламыз.}$$

$$\text{Жауабы: } 0,2e' = 0,2e^{3t} \cos t + 3,6e^{3t} \sin t.$$

$$\text{23-есеп. } y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2} \text{ - дифференциалдық}$$

теңдеуінің $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ - бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімдерін табу керек.

Шешуі. $y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = 1$ түріндегі көмекші теңдеудің шешімін табамыз. y_1 -дің бейнесін $Y(p)$ арқылы белгілейміз онда,

$$y_1' \leftrightarrow pY(p), \quad y_1'' \leftrightarrow p^2Y(p).$$

Теңдеудің оң және сол жақтарынан олардың оригиналдарына өтеміз:

$$p^2Y(p) + 4pY(p) + 4Y(p) = \frac{1}{p}, \quad Y(p)(p^2 + 4p + 4) = \frac{1}{p}.$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}.$$

Алынған бөлшектерді ең қарапайым бөлшектер қосындысына келтіреміз:

$$\frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2}; \quad 1 = A(p+2)^2 + Bp(p+2) + Cp$$

$$p = 0 \text{ болса, } 1 = 4A, \text{ яғни, } A = 0,25.$$

$$p = -2 \text{ болса, } 1 = -2C, \text{ яғни, } C = -0,5.$$

Енді p^2 дәрежесінің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$1 = 0,25p^2 + p + 1 + Bp^2 + 2Bp - 0,5p.$$

$$p^2|0 = 0,25 + B \Rightarrow B = -0,25.$$

$$\text{Сонымен, } Y(p) = \frac{0,25}{p} - \frac{0,25}{p+2} - \frac{0,5}{(p+2)^2}.$$

$$\text{Одан өрі, } e''' \leftrightarrow \frac{1}{p-a}, \quad te''' \leftrightarrow \frac{1}{(p-a)^2} \quad \text{қатыстарын}$$

және сызықтық қасиетті пайдаланып $Y(p)$ -ның оригиналын табамыз:

$$y_1(t) = 0,25 - 0,25e^{-2t} - 0,5te^{-2t}.$$

Бастапқы теңдеудің $y(t)$ -шешімін табу үшін Дюамель

$$\text{формуласын пайдаланамыз: } y(t) = \int_0^t y_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

$$y_1' = 0,5e^{-2t} - 0,5e^{-2t} + te^{-2t} = te^{-2t}, \quad y_1'(t-\tau) = (t-\tau)e^{-2(t-\tau)}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t (t-\tau) e^{-2t+2\tau} \frac{t^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} d\tau = e^{-2t} \int_0^t \frac{t-\tau}{(1+2\tau)^2} d\tau = \\
 &= -te^{-2t} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(2\tau+1)} \Big|_0^t - e^{-2t} \int_0^t \left(\frac{\tau + \frac{1}{2}}{(1+2\tau)^2} - \frac{1/2}{(1+2\tau)^2} \right) d\tau = \\
 &= -\frac{t}{2} e^{-2t} \frac{1}{2t+1} + \frac{t}{2} - e^{-2t} \left(\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{(2\tau+1)} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{(2\tau+1)^2} \right) = \\
 &= -\frac{t}{2} \frac{e^{-2t}}{2t+1} + \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} \left(\ln(2\tau+1) \Big|_0^t + \frac{1}{2\tau+1} \Big|_0^t \right) = \\
 &= -\frac{te^{-2t}}{2(2\tau+1)} + \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t} \ln(2t+1)}{4} - \frac{e^{-2t}}{4(2t+1)} + \frac{e^{-2t}}{4} = \\
 &= e^{-2t} \left(\left(\frac{-2t}{4(2t+1)} - \frac{1}{4(2t+1)} \right) + \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right) = \\
 &= e^{-2t} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right) = e^{-2t} \left(\frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Жауабы: $y(t) = e^{-2t} \left(\frac{t}{2} - \frac{\ln(2t+1)}{4} \right).$

24-есеп. Операциялық әдіспен Коши есебін шешу керек:

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos \frac{t}{2}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Шешуі: $e^{\omega t} \cos \omega t = \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$ қатысын пайдалансақ

$$2e^t \cos \frac{t}{2} = 2 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1/4} \quad \text{аламыз.}$$

$y(t)$ -ның бейнесін $Y(p)$ арқылы белгілейміз. Онда

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(0) - 1.$$

$$y''(t) \leftrightarrow p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - p.$$

Тендеудің оң және сол жақтарының бейнелерін жаза отырып

$$p^2 Y(p) - p - 3pY(p) + 3 + 2Y(p) = 2 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1/4},$$

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = 2 \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1/4} + p - 3,$$

$$Y(p) = \frac{2(p-1)}{((p-1)^2 + 1/4)(p-1)(p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{2}{((p-1)^2 + 1/4)(p-2)} + \frac{p-3}{(p-1)(p-2)}$$

аламыз. Алынған әрбір бөлшекті жай бөлшектер қосындысына келтіреміз:

$$1) \quad \frac{2}{((p-1)^2 + 1/4)(p-2)} = \frac{Ap+B}{(p-1)^2 + 1/4} + \frac{C}{p-2};$$

$$2 = (Ap+B)(p-2) + C((p-1)^2 + 1/4);$$

$$p=2 \text{ болса, } 2 = C \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow C = 1.6.$$

$$2 = Ap^2 - 2Ap + Bp - 2B + 1.6p^2 - 3.2p + 2$$

$$p^0 \left| \begin{array}{l} 2 = -2B + 2 \end{array} \right. \Rightarrow B = 0$$

$$p^1 \left| \begin{array}{l} 0 = -2A + B - 3.2 \end{array} \right. \Rightarrow A = -1.6.$$

Сонымен,

$$\frac{2}{\left((p-1)^2 + \frac{1}{4}\right)(p-2)} = \frac{-1,6p}{\left((p-1)^2 + \frac{1}{4}\right)} + \frac{1,6}{p-2}.$$

$$2) \quad \frac{p-3}{(p-1)(p-2)} = \frac{D}{p-1} + \frac{E}{p-2};$$

$$p-3 = D(p-2) + E(p-1).$$

$$p=2 \text{ болса, } -1 = E.$$

$$p=1 \text{ болса, } -2 = -D \Rightarrow D=2.$$

$$\text{Демек, } \frac{p-3}{(p-1)(p-2)} = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p-2}.$$

Ақырында,

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-1,6p}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1,6}{p-2} + \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p-2} = \frac{-1,6p+1,6}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1,6}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + \\ &+ \frac{0,6}{p-2} + \frac{2}{p-1} = -1,6 \frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} - 3,2 \frac{1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{0,6}{p-2} + \frac{2}{p-1}. \end{aligned}$$

Енді,

$$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2} \leftrightarrow e^{at} \cos \omega t, \quad \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2} \leftrightarrow e^{at} \sin \omega t.$$

$$\frac{1}{p-a} \leftrightarrow e^{at} \quad \text{катыстарын жөнс сызықтык касиетті}$$

пайдаланып $Y(p)$ -ның оригиналын табамыз:

$$y(t) = -1,6e^t \cos \frac{1}{2}t - 3,2e^t \sin \frac{1}{2}t + 0,6e^{2t} + 2e^t.$$

Жауабы: $-1,6e' \cos \frac{1}{2}t - 3,2e' \sin \frac{1}{2}t + 0,6e^{2t} + 2e'$.

25-есеп. Массасы m материалдык нүктеге V - жылдамдығына пропорционал $R = kv$ кедергі күші әсер етеді. Егер нүктенің бастапқы жылдамдығы v_0 болса, ол шектеусіз уақыт ішінде қанша қашықтыққа орын ауыстырады ($k = 10m$, $v_0 = 1$ м/с.) ?

Шешуі. t уақыт кезеңіндегі нүктенің координатасын $y(t)$ арқылы белгілейміз. $y(0)$ деп 0, ал $y'(0) = v_0 = 1$ аламыз. Нүктенің қозғалу заңдылығын Ньютонның 2-ші заңынан: $-R = m \cdot y''$ табамыз:

$$-kv = my''; \quad -10my' = my''.$$

Нәтижесінде Коши есебін аламыз:

$$y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$y(t)$ -нің бейнесін $Y(p)$ арқылы белгілейік. Онда,

$$y' \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y'' \leftrightarrow p^2 Y(p) - py'(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1.$$

Бұдан келесі теңдеуді аламыз

$$p^2 Y(p) - 1 + 10pY(p) = 0;$$

$$Y(p)(p^2 + 10p) = 1;$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 10p}.$$

Бөлшектің сң жай бөлшектер қосындысына келтіреміз

$$\frac{1}{p(p+10)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+10}; \quad 1 = A(p+10) + Bp;$$

$$p=0 \Rightarrow 1=10A \Rightarrow A=0,1$$

$$p=-10 \Rightarrow 1=-10B \Rightarrow B=-0,1.$$

Сондықтан,
$$Y(p) = \frac{0,1}{p} - \frac{0,1}{p+10}.$$

$\frac{1}{p-a} \leftrightarrow e^{at}$ қатысын және сызықтық қасиетті пайдаланып

$$y(t) = 0,1 - 0,1e^{-10t}$$

аламыз.

Шектеусіз уақыт ішіндегі нүктенің орын ауыстыру қашықтығы келесі шек арқылы табылады:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (0,1 - 0,1e^{-10t}) = 0,1.$$

Жауабы: 0,1м.

26-есеп. Келесі дифференциал теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Шешуі: $x(t)$ -нің бейнесін $X(p)$ арқылы, ал $y(t)$ -нің бейнесін $Y(p)$ арқылы белгілейміз, онда

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p).$$

$$\dot{y}(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Нәтижеде,

$$\begin{cases} pX = -2x + 4; \\ pY - 1 = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} (p+2)X - Y = 0 \\ -3x + pY = 1 \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Оны Крамер ережесімен шешеміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p+2) & -1 \\ -3 & p \end{vmatrix} = p(p+2) - 3 = p^2 + 2p - 3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (p+2) & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = p+2;$$

$$X = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{p^2 + 2p - 3}; \quad Y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p+2}{p^2 + 2p - 3}.$$

Бұл бөлшектердің әрқайсысын ең жай бөлшектер қосындысына келтіреміз:

$$\text{а) } X = \frac{1}{p^2 + 2p - 3} = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+3};$$

$$1 = A(p+3) + B(p-1).$$

$$p=1 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = 0.25.$$

$$p=-3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0.25.$$

$$\text{Сондықтан, } X(p) = \frac{0.25}{p-1} - \frac{0.25}{p+3}.$$

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = 0,25e^t - 0,25e^{-3t}.$$

$$б) Y = \frac{p+2}{p^2+2p-3} = \frac{p+2}{(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+3};$$

$$p+2 = A(p+3) + B(p-1).$$

$$p=1 \Rightarrow 3 = 4A \Rightarrow A = 0,75.$$

$$p=-3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0,25.$$

Сондықтан,

$$Y(p) = \frac{0,75}{p-1} + \frac{0,25}{p+3}.$$

$$Y(p) \leftrightarrow y(t) = 0,75e^t + 0,25e^{-3t}.$$

$$\text{Жауабы: } \begin{cases} x(t) = 0,25e^t - 0,25e^{-3t} \\ y(t) = 0,75e^t + 0,25e^{-3t} \end{cases}.$$

Библиографический список

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М: Наука, 1989.
2. Араманович И.Г., Лунц Л.Г., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.,1968.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (Задачи и упражнения). М.,1971.
4. Шостак Р.Я. Операционное исчисление (Краткий курс). М.,1972.
5. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Высшая школа, 1983 .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Алғы сөз.....	4
Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление	5
I. Образцы решения задач типовых расчетов.....	5
II. Типовые расчеты.....	40
Теоретические вопросы.....	40
Теоретические упражнения	41
Расчетные задания	42
Типтік есептер	42
III. Справочный материал	83
Комплекс айнмалы функциялар теориясы және операциялық есептеулер	95
I. Анықтама материал	95
II. Типтік есептер	111
Теориялық сұрақтар.....	111
Теориялық жаттығулар	112
Типтік есептерді шығару үлгілері.....	114
Библиографический список.....	157

Учебное издание

Айдос Е.Ж., Боровский Ю.В.

Серия типовых расчетов

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Типтік есептер сериясы

**КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ
ЖӘНЕ ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ҚИСАП**

Учебное пособие

Зав.РИО

Редакторы

Техн. редактор

Компьютерная верстка

З.А.Губайдулина

С.Н.Яниева, Т.Бекмагамбетова

Н.Н.Передсерева

Л.Т.Касжанова

Подписано в печать 12 марта 2003 г.

Тираж 500 экз. Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. №1

Объем 8 уч.-изд.л. Заказ № 288 Цена договорная.

Издание Казахского национального технического
университета им.К.И.Сатпаева
Издательский центр КазНТУ
Алматы, Ладыгина, 32

Издательский центр КазНТУ
имени К.И. Сатпаева готовит к выходу в
свет следующую учебную литературу,
посвященную 70-летию университета:

1. Калижанова Ә.У., Мұстафина К.К., Алғожаева Р.С. Жүйелер теориясының әдістері: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 93 б.

2. Асаубсков М.Ә. Биотехнология негіздері: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 71 б.

3. Мұртазина Ә.Ө. Компьютермен модельдеу: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 83 б.

4. Досымов Ж. Ұсату, ұнтақтау, кенді байытуға лайынлау: Оқулық. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 208 б.

5. Ыскакова С.Д., Рахметова Ш.Т. Инженерлік графикадан есептер минимумі сандық белгілері бар проекциялар: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 128 б.

6. Крушник Л.А., Исаков Б. Көтерім қондырғылары: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 90 б.

7. Омаров М. Ұңғыдан тербелмелі қондырғымен мұнай өндіру: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 90 б.

8. Баймұхамедова С.К. Жаңа ақпараттық технологиялар: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 90 б.

9. Менлібаев Ж.К., Шайдарбекова Н.Ө., Менлібаева Д.Ә. "Бейорганикалық заттардың химиялық технологиясы" (Аммиак және азот қышқылының өндірісі): Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 283 б.

10. Қарауылов Ж. Мұнай-газ ұңғыларын бұрғылаудағы жер үсті аспаптары мен механизмдері: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 80 б.

11. Әденов С.Т., Жанатасов Д.Ж., Котошева К.К., Мәмбетов А.К.

Мәдениеттану: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 114 б.

12. Шоқанов Ә. Жалпы физика курсы. Механика және молекулалық физика: Оқулық. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 201 б.

13. Қасымов Е.Ә. Жоғары математика. 1-бөлім (оқулық). – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 336 б.

14. Ермағанбетов М.Е. Мұнай және газ химиясы: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 110 б.

15. Даулетбаков Т.С., Баймбетов Б.С. Мыс және никель металлургиясы: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 98 б.
16. Абдикасова Г.А. Машиналық тілде бағдарламалау: Оқулық. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 272 б.
17. Иманбекова Г.Д. Теория электрических цепей. Упражнения и задачи: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2003. – 104 с.
18. Кудайкулова Г.А. Буровые глинистые растворы: Учеб.пособие. - Алматы: КазНТУ, 2003. – 111 с.
19. Фидимонов А.Г. Расчет конструкторных параметров горных машин: Учеб. пособие (для студентов специальности 1905 "Горные машины и оборудование"). – Алматы: КазНТУ, 2003. – 128 с.
20. Исмаилов А.А., Аманкул А.С. Опробование и испытание скважин: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2003. – 93 с.
21. Шолапов К.С. Механика механизмов и манипуляторов. 4.1. Стресс и кинематика: Учеб. пособие. Алматы: КазНТУ, 2003. – 120 с.
22. Шаринов Т.А. Металлорежущие станки: Учеб. пособие. - Алматы: КазНТУ, 2003. – 128 с.
23. Гаврилов М.Б. Гидравлика: Учеб. пособие. - Алматы: КазНТУ, 2003. – 110 с.
24. Дүйсемалшев Т. У. Литая структура и ликвация в металлических сплавах: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2003. – 90 с.
25. Абдуллина В.З. Базы и банки данных: Учеб. пособие. – Алматы: КазНТУ, 2003. – 109 с.
26. Сыдыков Ұ.Е., Розенберг Ц.Р. Инженерлік еңбектің социологиясы: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003. – 192 б.
27. Кенетаев Г.Ж. Политология: Учеб.пособие. – Алматы: КазНТУ, 2003. – 97 с.

**ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР КАЗНТУ имени К.Н.САТПАЕВА
ПРЕДЛАГАЕТ СЛЕДУЮЩИЕ
ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЕ УСЛУГИ:**

- Компьютерный набор текстов с любых источников информации (рукописных, машинописных, с дискет); запись информации на дискеты;
- верстку печатных материалов по международным стандартам;
- квалифицированное редактирование, корректуру, техническое редактирование;
- издание авторефератов, кандидатских и докторских диссертаций, монографий;
- выпуск небольших тиражей (до 500 экз.); переплетные работы.

МЫ ГАРАНТИРУЕМ ЗА УМЕРЕННУЮ ОПЛАТУ:

- надежность;
- высокое качество исполнения;
- сроки, установленные по обоюдному согласию!

МЫ ПОМОЖЕМ ВАМ представить Ваши научные работы на различных конференциях, семинарах, выставках, конкурсах в хорошем полиграфическом исполнении; будем способствовать пропаганде ваших научных достижений в ближнем и дальнем зарубежье.

МЫ ЖДЕМ ВАС ПО АДРЕСУ:

г. Алматы, КазНТУ, ул. Ладыгина, 32

тел.: 8(3272)20-17-67,
8(3272)20-19-83;
8(3272)29-23-00