

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ**

**Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық
техникалық университеті**

А.А. Бейсембаев

ЖҮЙЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

**Республикалық оқу-әдістемелік бірлестігі оқу
құралы ретінде ұсынған**

Алматы 2003

**А.А. Бейсембаев. Жүйелер теориясының негіздері. Оқу құралы. - Алматы: ҚазҰТУ, 2003, 120 б.
ISBN 9965-585-57-1**

Жүйелер теориясы қазіргі кезде жедел дамып отырған ғылыми бағыттардың бірі. Ұсынылып отырған оқу құралында жүйелер теориясының негізгі ұғымдары қарастырылған. Сонымен қатар жиындар, кеңістіктер, функциялар мен бейнелер арқылы динамикалық жүйе, басқару ұғымдары енгізіледі. Оқу құралы, «3601-Басқару жүйелерін автоматтандыру және информатизациялау» мамандығы бойынша, жоғары оқу орындары студенттеріне арналған.

Сурет — 42. Кесте - 2. Әдебиеттер тізімі — 13 атау.

Пікір жазғандар: Е.Б. Аяғанов — техн. ғыл. кандидаты;
С.С. Жүсіпбеков — техн. ғыл. кандидаты.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2002 жылғы басылым жоспары бойынша басылды.

А.А. Бейсембаев

ЖҮЙЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

КІРІСПЕ

Соңғы жылдары автоматтық басқару теориясы екі бағытта дамуда. Біріншісі — теориялық, екіншісі қолданбалы әдістерге байланысты. Соңғы кезде теориялық сұрақтардың математикалық мағынасы жоғарылауда. Соған орай осы сұрақтар, үлкен пән ретінде бөлініп шығып отыр. Мұны — пән *жүйелер теориясы* деп атаймыз.

Бірінші тарауда жиындар теориясының негіздері, ұғымдары, анықтамалары және қасиеттері қарастырылған. Теория нәтижелері функционалды анализбен жалғасады.

Екінші тарау — динамикалық жүйелерді қарастырады. Мұнда динамикалық жүйелерге функционалды анализдің нәтижелері қолданылып жазылған. Осы тараудың ішінде динамикалық жүйенің басқару анықтамасы да берілген.

Үшінші тарауда — бұл анықтама арқылы біз әртүрлі функционалды кеңістіктердің (сызықты, нормаланған, Банах және Гильберт кеңістіктері) анықтамаларын, қасиеттерін, сызықты динамикалық жүйелердің негізгі сипаттамаларын, өтпелі, импульсті өтпелі матрицаларды анықтай аламыз. Бұған жүйенің жағдай кеңістігі ұғымы енгізіледі.

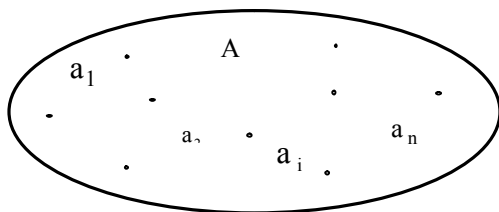
І. ЖИЫНДАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

Жиындар теориясының әдістері — автоматтық басқару жүйелерін синтездеу мен талдау есептерін қарастырады. Бұл математикалық аппаратпен, әртүрлі объектілерді сипаттап көрсетуге болады. Объектілердің физикалық, химиялық тағы басқа да мағыналары, оларда өтіп жатқан процестерді зерттейді. Жиындар теориясының ұғымдары арқылы, бейнелеу операцияларының функционалды байланыстары жаңа деңгейде енгізіледі. Осы теорияның негіздері арқылы, әр түрлі қатынастар, сәйкестер жазылады. Ары қарай, осы теорияның негіздерін қарастырамыз.

1.1. Жиындардың негізгі анықтамалары мен қасиеттері

Жиын деп — объектілердің (жиын элементтерінің) барлығын ортақ белгілермен біріктірген жиынтығын айтамыз. Мысалы, қазақ алфавиті 42 әріптен тұрады. Осы, әріптер жиынтығының элементтері болады.

Көбінесе жиынды латын $A, B, \dots, X, Y$ алфавитінің жазба әріптерімен, ал оның нақты элементтерін — индекстері бар немесе жоқ $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, x, y$ әріптерімен белгілейді. $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ элементтерінен тұратын A жиынды $A\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ деп белгілеп, оны графикалық түрде тұйықталған аймақпен, ал оның элементтерін — осы аймақта жатқан нүктелермен көрсетуге болады (1.1-сурет).



1.1-сурет

Жиынға кіретін элементті мынандай $\in$ символмен (таңбамен) белгілейді. Мысалы: $a \in A$ бұл жазба a элементі

А жиынына кіретінін көрсетеді. Ал, $b \notin A$ жазбасы, b элементі А жиынына кірмейтінін көрсетеді.

Жиынды берудің, ең қарапайым әдісі — элементтерін тізімдеу. Мысалы, сандардың ондық жүйесінің жиыны былай жазылады: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Бірақ, бұл әдіс тек қана шекті жиындарды анықтау үшін қолданылады. Осындай жиындардың элементтер саны, N натурал санымен берілсе, онда шексіз санды элементтері бар жиындар — оның қасиеттерімен беріледі. Мысал ретінде, теңжақты үшбұрыштар жиыны, жазықтық нүктелерінің жиыны, т.б. Жиындар теориясының түсініктемелері мен анықтамаларын қысқаша жазу үшін, бірқатар символдар қолданылады. Мысалы, теріс сандар жиынының жазылуын былай көрсетуге болады:

$$X = \{x: x < 0\}.$$

Бұл X жиынының элементтері — x дегені. Олар теріс таңбалы сан қасиетіне ие болуы тиіс. Басқа логикалық символдар, олардың пайда болу кезінде түсіндіріледі.

Бірде-бір элементі жоқ жиынды — *бос жиын* деп атайды да, оны $\emptyset$ символымен белгілейді. Бос жиын 0-дің аналогы (бірақ 0 емес). Ол шартты түрде шекті жиынға жатады.

Мысалы, студенттік топтың озығының жиыны бос болуы мүмкін ($S=0$, озық жоқ жағдайы). Оған қарамастан, осы жиынмен формальді операция жасай аламыз.

Жиындарды салыстыру үшін, жиынның қуаты деген ұғым қолданылады. Осы ұғымның әлі нақты анықтамасы жоқ. Көп жағдайларда бұл ұғым — элементтер санымен байланыстырылады да, ал шексіз жиындарды салыстыру кезінде, оның мағынасы жоғалып кетуі мүмкін. Сондықтан „жиын қуаты“ критерийін кеңірек анықтауымыз керек.

Айталық, A және B жиын элементтерінің арасында өзара бір мәнді сәйкестікті бекітуге болады. Дәлірек айтсақ, $a_i \in A$ әрбір элементін, анықталған $b_i \in B$ элементіне сәйкестеп қойса керісінше, әрбір $b_i \in B$ элементінің тек қана бір анықталған $a_j \in A$ элементі сәйкестеледі. Бұл жағдайда

жиындарды — *эквивалентті* деп атап, $A \sim B$ деп белгілейді. Ондай жиындардың төмендегідей қасиеттері бар:

— рефлексивтік қасиетінің мағынасы — әрбір жиын өзіне-өзі эквивалентті, демек $A \sim A$;

— симметриялық қасиетінің мағынасы — егер A жиыны B жиынына эквивалентті болса, онда B жиыны да A жиынына эквивалентті, демек $A \sim B$, онда $B \sim A$;

— транзитивтік (өпелілік) қасиетінің мағынасы — егер $A \sim B$, ал $B \sim C$, онда $A \sim C$ болады.

Енді бірнеше жиындарды қарастырамыз: квадрат жақтарының жиындары, жоғары оқу орындарындағы білімді бағалауда бағалардың жиыны (өте жақсы, жақсы, қанағат, қанағатсыз), математиканың негізгі амалдарының жиыны (қосу, азайту, көбейту, бөлу), горизонт жақтарының жиыны (оңтүстік, солтүстік, батыс, шығыс). Бұл жағдайда бір жиынның әрбір элементіне басқаның бір элементі сәйкес қойылады. Яғни, барлық жиындар өзара эквивалентті. Осы әртүрлі жиындардың ортақ қасиеті — олардың элементтер саны. Бұл жағдайда элементтер саны — төртеу. Жоғарыда қарастырылған эквивалентті жиындардың қуаттары бір-біріне тең. Сондықтан, әрбір жиынның қуатын, қарастырылатын жиындардың ортақ қасиетімен бағалауға болады.

“Жиынның қуаты” ұғымы арқылы шексіз жиындардың элементтерін санамай-ақ, өзара салыстырады. Екі шексіз жиынды алсақ: бірінші жиын, оң таңбалы бүтін сандардың жиынтығы:

$$\{1,2,3,4,5,6,\dots\} \quad (1.1)$$

және осы сандардың квадраттар жиынтығы:

$$\{1,4,9,16,25,36,\dots\} \quad (1.2)$$

Бұдан екі шексіз жиындар элементтерінің арасындағы бір мәндік сәйкестік көрініп тұр. Сондықтан (1.1) және (1.2) жиындар өзара эквивалентті және теңқуатты.

Егер шексіз жиынның барлық элементтері санаулы және шексіз немесе ретті нөмірленсе, мысалы $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, онда мұндай жиынды — *саналымды жиын* деп атайды.

Мысалы, жұп сандар жиыны, тақ сандар жиыны, $1/n$ түрдегі бөлшек жиындар, тағы сол сияқты. Шексіз саналымды жиындар, оң бүтін сан жиындарына теңқуатты. Транзитивтік қасиеті бойынша, барлық саналымдық жиындар бір-бірімен эквивалентті. Элементтерін санап шығуға және нөмірлеп қоюға болмайтын, шексіз жиындарды — *саналымсыз жиындар* деп атайды.

Ондай жиынға, сызықты нүктелік жиынды жатқызуға болады. Сызықты нүктелік жиынның жай түріне — кесінді мен интервал жатады.

Кесінді (сегмент) деп — $a \leq x \leq b$ теңсіздігін қанағаттандыратын, сандық ось нүктелерінің жиынын айтады. $x=a$ және $x=b$ шекаралық нүктелері кесіндіге кіреді. Кесіндіні $[a,b]$ символмен белгілейді.

Интервал (аралық) деп — $a < x < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын, әрі сандық ось жататын нүктелер жиынын айтады. (a,b) мен белгіленген интервалға шекаралық нүктелер кірмейтінін көрсетеді.

Шексіз саналымсыз жиын, үзіліссіз тізбектелген элементтермен берілсе, жиынның қуаты, континуумның қуаттылығына (латынның continuum — үзіліссіз деген сөзінен алынған) тең деп есептеледі.

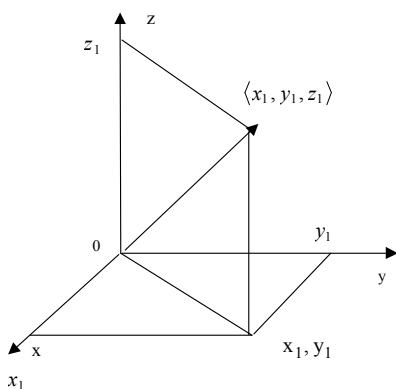
Жиынды *реттелінген* деп аталғанда, оның екі элементі өзара салыстырмалы болады да, олардың орналасуында белгілі бір тәртіп орнатылады. Реттелінген жиынға мысалы ретінде, T уақыт мезеттерінің жиынын алуға болады. Оның t элементтері “ертерек” және “кешірек” түсініктемелері арқылы салыстырылады. Уақыттың бағытталу қасиетінің бір элементі $t_i \in T$ ертерек болып кетсе, ал $t_{i+1} \in T$ кешірек болуы тиіс.

Реттелген жиынның элементтері өзара “азырақ” және “көбірек” түсініктемелері арқылы салыстырылуы да мүмкін. Мысалы: натурал сандардың жиыны.

Егер жиын, элементтердің тізбегімен көрсетіліп, тізбектегі әрбір элементке қатаң белгілі орын берілсе, мұндай жиын — *кортеж* деп аталады. $\langle a,b,c \rangle$ жазуы кортеждің үш элементтен немесе компоненттен тұратынын көрсетеді: a бірінші орында, b екінші орында, ал c үшінші орында орналасады. Оның реттелмеген жиындардан айырмашылығы

— кортежде бірдей компоненттердің болуы, мысалы $\langle a, b, c, c \rangle$. Кортеждің компоненттер саны, оның өлшемділігін немесе ұзындығын көрсетеді.

Кортеждің ұзындығы n -ге байланысты болса, оны n -лік (екілік, үштік, төрттік, т.б.) деп атайды. Ұзындығы екіге тең кортеж — *реттелген жұп* деп аталады. Бірде бір элементі жоқ кортежді — *бос кортеж* дейді де, оны Λ деп белгілейді. Егер компоненттері нақты сандар болса, кортежді оған сәйкес өлшемі бар кеңістікте нүкте түрінде немесе координат басынан басталып, нүктеде аяқталатын, вектор түрінде



1.2-сурет

көрсетуге болады. Осы вектордың компоненттері, оның ұшының координаттары болып табылады. Ендеше, $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ кортежді үш өлшемді кеңістіктегі вектор түрінде көрсетуге болады (1.2 сурет). Координат осіне түсірілген вектордың проекциялары, оның компоненттеріне сәйкес келеді:

$$\text{Пр}_x \langle x_1, y_1, z_1 \rangle = x_1,$$

Осы вектордың x , y осьтерінің проекциялары төмендегідей көрсетіледі:

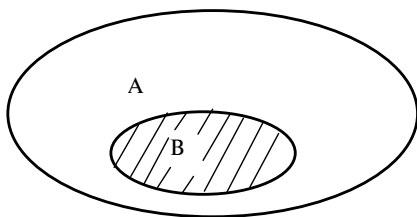
$$\text{Пр}_{x,y} \langle x_1, y_1, z_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$$

Вектордың басқа проекцияларын да осылай етіп көрсетуге болады.

1.2. Жиындар мен ішжиындар

Егер B жиынның барлық элементтері A жиынның элементтері болып табылса, керісінше, A жиынның барлық элементтері B жиынның элементтері болса, онда A және B жиындары *өзара сәйкес жиындар*, немесе *тең жиындар* деп аталып, $A=B$ белгімен белгіленеді. Мысалы, егер A - екі

бірдей жақтары бар үшбұрыштардың жиыны, ал B - екі бірдей бұрыштары бар үшбұрыштардың жиыны болса, онда осы екі жиын бір-біріне тең болады $A=B$.



1.3-сурет

Егер B жиынның әрбір элементі A жиынның элементі болса, сонымен қатар B жиыны A жиынына сәйкес болмаса, онда B жиыны A жиынның ішжиыны, мұны 1.3-сурет-тен көруге болады.

Бұл жағдайда B жиыны A жиыны элементтерінің бөлігін жалпы немесе дербес белгілер арқылы біріктіреді.

Екі жиынның арасындағы осындай қатынас мынандай $\subseteq$ символмен белгіленеді:

$B \subseteq A$ – B жиыны A жиынның ішіне кіретінін көрсетеді де,

$A \supseteq B$ – A жиынның ішіне B жиыны толық кіретіні осыдан көрініп тұр.

Келтірілген ұғымдарды түсіну үшін келесі мысалдарды қарастырамыз.

1.1. Мысал. Егер A -студенттер тобының жиыны болса, ал B -топтың озық оқитын студенттер жиыны, онда $B \subseteq A$ жазуға болады.

1.2. Мысал. Егер A – қоймадағы электр өлшегіш аспаптардың жиыны болса, ал B – жиыны олардың арасындағы амперметрлердің жиыны болса, онда $A \supseteq B$.

$\subseteq$ және $\supseteq$ символдармен байланысы, B жиыны A жиынына кейбір жағдайларда сәйкес болуы да мүмкін екенін көрсетеді. Егер B жиыны A жиынының кейбір элементтерінен тұрса, онда олардың арасындағы қатынас $\subset$ немесе $\supset$ қатаң ендіру символдары арқылы көрсетіледі. Мысалы, A жиыны әртүрлі қаламдардың жиыны, ал B тек қана сиямен жазатын қаламдардың жиыны болса, онда осы арақатыс $B \subset A$ және $A \supset B$ деп жазылады.

Келесі логикалық символдарды қолданып $\rightarrow$ (импликация) және $\forall$ (жалпылық кванторы), ішжиынның анықтамасын былай жазуға болады:

$B \subseteq A$ орындалса, онда $\forall b[b \in B \rightarrow b \in A]$.

Егер B жиыны A жиынның ішжиыны болса, онда әрбір b үшін (барлық b үшін) “ b B жиынның элементі” деген анықтама, өзінің артынан “ b A жиынның элементі” деген анықтаманы тудырады.

Ішжиындардың төмендегідей қасиеттері бар:

1) рефлексивтік - $A \subseteq A$ (әрі бір жиын өз-өзінің ішжиыны болады);

2) транзитивтік - $[C \subseteq B \text{ және } B \subseteq A \rightarrow C \subseteq A]$;

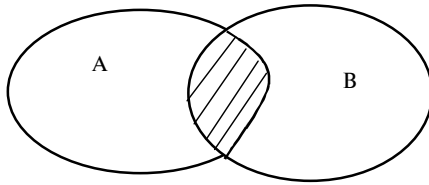
3) бос жиын кез келген жиынның ішжиыны бола алады. Мысалы M жиыны берілсе, онда $\emptyset \subset M$.

Егер A және B шектелген жиындар болса, онда $B \subset A$ жағдайында, B жиынның қуаты A жиынның қуатынан төмен. Ал, осы жиындар шексіз жиындар болса, онда олардың қуаттары да бірдей болуы мүмкін. Мысалы, (1.2) жиынның элементтері (1.1) жиынына да кіреді, сол себептен (1.2) жиыны (1.1) жиынның ішжиыны деп айта аламыз. Осыған орай осы екі жиын эквивалентті және олардың қуаттары бірдей.

1.3. Жиындар алгебрасы

Қазіргі математика — алгебраға әртүрлі амалдарды қолданып, түрлі операцияларды, объектілер жиынтығымен орындай алатын аппарат деп анықтайды. Жиындарды объектілер түрінде қарастыра отырып, олармен әртүрлі сандар алгебрасындағыдай қосу және көбейту операцияларына ұқсас операцияларды өткізуге болады. Оған қоса, мұнда сандар алгебрасының негізгі заңдары да сақталады:

- алмастыру (коммутативтік) заңы: $a+b=b+a$; $ab=ba$;
- терімділік (ассоциативтік) заңы: $(a+b)+c=a+(b+c)$;
 $(ab)c=a(bc)$;
- үлестірімділік (дистрибутивтік) заңы: $(a+b)c=ac+bc$.



1.4-сурет

Жиындар алгебрасының негізгі операцияларын қарастырайық. A және B жиындарының қиылысуы A жиынына да, B жиынына да кіретін элементтерден тұратын жиын (1.4-суретте штрихталған аудан). Қиылысу

келесі символ арқылы белгіленеді: $A \cap B$.

Осыған сәйкес мысалдарды қарастырайық.

1.3. Мысал. Егер A – оң сандық сандардың жұп сандар жиыны болса, ал B – оннан кіші бүтін оң сандар жиыны болса, онда:

$$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

1.4. Мысал. A -лабораториядағы вольтметрлердің жиыны десек, B -лабораториядағы сандық аспаптардың жиыны дейік, онда $A \cap B$ – сандық вольтметрлердің жиыны болады.

Бірнеше жиынның қиылысуын былай белгілейді $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Жиындардың қиылысуы мына заңдарға бағынады:

- алмастыру заңына – $A \cap B = B \cap A$;
- терімділік заңына – $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

Егер A және B жиындарының ортақ элементтері жоқ болса, онда осы жиындар – *қиылыспайтын жиын* деп аталады. Олардың арасындағы арақатыс былай көрсетіледі: $A \cap B = \emptyset$.

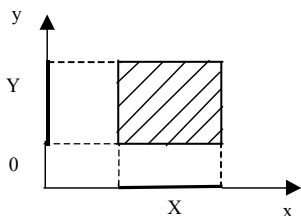
1.4. Мысалындағы сандық вольтметрлердің жиыны бос болуы мүмкін. Қиылысу операциясының, көбейтумен біршама ұқсастығы бар. Сондықтан нәтижелі жиынның элементтері көбейткіштік жиынның қасиеттеріне ие болады. Бұл $A \cap \emptyset = \emptyset$ қатынасымен, сондай-ақ $a \times 0 = 0$ қатынасымен ұқсас.

A және B жиынның тура (декарттық) көбейтіндісі $a \in A$ және $b \in B$, $\langle a, b \rangle$ кортеждердің немесе реттелген барлық жұптардың жиыны болады. Ол $A \times B$ деп белгіленеді.

1.5. Мысал. Мынандай жиындар берілсін, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Онда осы жиындардың көбейтіндісі $A \times B = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \dots, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \dots, \langle h, 7 \rangle, \langle h, 8 \rangle\}$.

$A \times B$ жиыны 64 кортежден құралады да, шахмат тақтасының 64 шақпақтарының белгісін көрсетеді.

1.6. Мысал. Егер X және Y нақты осьтің кесінділер түрінде көрсетілсе (сызықты нүктелік жиындар), онда $X \times Y$ тура көбейтіндісі — штрихталған тік бұрыштың барлық нүктелер жиынтығымен анықталады (1.5-сурет).



1.5-сурет

Сол сияқты $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ жиындырының тура көбейтіндісі:

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ түріндегі, ұзындығы n кортеждер жиыны болады.

Бұл жиыннан көретініміз, элементтердің реттелуіне байланысты тура көбейтінді алмастыру $A \times B \neq B \times A$ қасиетіне иемденбейді.

Тең жиындардың тура көбейтіндісі — *жиынның дәрежесі* деп аталады.

Егер $A_1 = A_2 = \dots = A_s = A$, онда

$$A_1 \times A_2 \rightarrow A \times A = A^2,$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow A \times A \times A = A^3,$$

.....

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_s \rightarrow A^s$$

Бұл жерде $A^1 = A$ және $A^0 = \{\Lambda\}$ деп саналады.

Егер 1.6. Мысалында $X = Y = R$ деп алса, мұндағы R -барлық нақты сандардың жиыны, онда $X \times Y = R \times R = R^2$ нақты жазықтықтың барлық нүктелерінің жиыны болады. Сол сияқты $R^3 = R \times R \times R$ 3 – өлшемді кеңістікті көрсетсе, онда $R^n = R \times R \times \dots \times R$ n – өлшемді кеңістікті көрсетеді. n – өлшемді кеңістікті – *гиперкеңістік* деп атайды.

Вектор кортежінің проекцияларын табу аналогиясымен бірдей, ұзындығы бірдей кортежден тұратын, қандай да болсын жиындардың проекциялау операциясын жасауға болады. Осындай жиынның проекциясы, оған кіретін кортеждердің проекцияларының жиыны болады.

Егер $V = v$ кортеждерінің жиыны болса, онда жиынның проекциясы болып кортеждер, басқаша айтсақ, $\text{Pr}_1 V = \{\text{Pr}_1 v : v \in V\}$

1.7. Мысал. Келесі жиынның проекцияларын табыңыз $V = \{ \langle a, b, d \rangle, \langle c, b, d \rangle, \langle d, b, c \rangle \}$?

Осы жиынның проекциялары мына тендеулермен анықталады: $\text{Pr}_1 V = \{a, c, d\}$; $\text{Pr}_2 V = \{b\}$; $\text{Pr}_{2,3} V = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, c \rangle \}$.

1.8. Мысал. $A = \{1,2\}$; $B = \{1,3\}$; $C = \{2,5\}$ болсын дейік. Онда $V = A \times B \times C$ үшін мынаны аламыз:

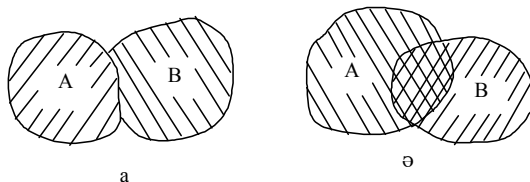
$$A \times B = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle \};$$

$$V = A \times B \times C = \{ \langle 1,1,2 \rangle, \langle 2,1,2 \rangle, \langle 1,3,2 \rangle, \langle 2,3,2 \rangle, \langle 1,1,5 \rangle, \langle 2,1,5 \rangle, \langle 1,3,5 \rangle, \langle 2,3,5 \rangle \};$$

$$\text{Pr}_1 V = \{1,2\}; \quad \text{Pr}_2 V = \{1,3\}; \quad \text{Pr}_3 V = \{2,5\}; \quad \text{Pr}_{2,3} V = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 3,5 \rangle \}.$$

1.8 Мысалында $\text{Pr}_1 V = A$, $\text{Pr}_2 V = B$, $\text{Pr}_3 V = C$ екені көрініп тұр. $z \subseteq A \times B \times C$ үшін $\text{Pr}_1 z \subseteq A$, $\text{Pr}_2 z \subseteq B$, $\text{Pr}_3 z \subseteq C$ екенін көрсетуге болады.

A және B жиындарының бірігуі, A жиынына немесе B жиынына кіретін элементтерден тұратын жиын болып есептеледі (1.6-сурет).



1.6-сурет

Бірігуді $A \cup B$ деп белгілейді. Бірігудің қосу операциясымен аналогиясы бар. Бірақ бұл аналогия толық емес, өйткені бірігу қиылысумен қосылып кетуі мүмкін (1.6-сурет).

1.9. Мысал. Егер A — каникул кезеңіндегі спортпен шұғылданатын студенттер тобының жиыны болып, ал B — спорттық секцияларға әрдайым қатысып жүретін студенттер тобының жиыны десек, онда $A \cup B$ — спортсмен студенттердің жиыны болып табылады. Олардың бір бөлігі осы екі жиынға да кіруі мүмкін. Бірнеше жиындардың бірігуі $\bigcup_{i=1}^n A_i$ болып жазылады. Жиындардың біріктіру операциясы келесі заңдарға бағынады:

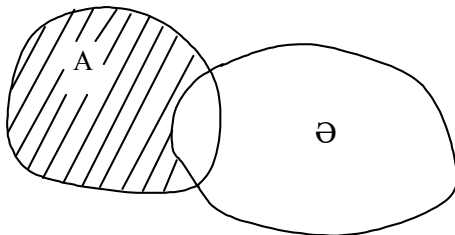
- алмастыру заңға- $A \cup B = B \cup A$;
- терімділік заңға- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Бос жиыны үшін $A \cup \emptyset = A$ ($a+0=a$), қосу операциясымен ұқсастығы көрініп тұр. Біріктірілген ішжиындардың жүйесі қандай да бір M жиынын құрастырса және барлық жиындар қиылыспаса, оны M жиынының бөлінуі деп атайды (яғни жиындардың қос қиылысуы бос жиын болса).

1.10. Мысал. Футболдың жоғарғы тобында n командасы ойнайды. $F_1, F_2, \dots, F_n$ — командаларға біріктірілген футболистердің жиыны. $V = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ жүйесі жоғарғы тобының барлық футболистер жиынының бөліндісі болады. $\bigcup_{i=1}^n F_i$ жиыны әр

футболистің тек бір командада ғана ойнай алатынын көрсетеді.

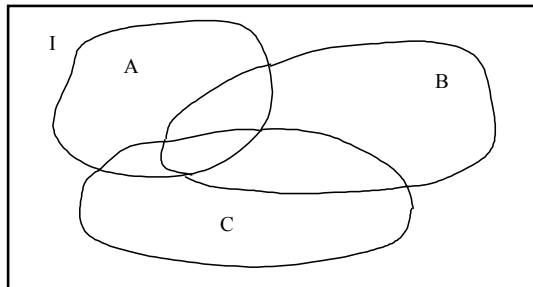
A және $\emptyset$ жиындарының айырымы $\emptyset$ құрамында жатпайтын тек сол элементтердің жиыны болып табылады (1.7-сурет). Операция $A/\emptyset$ деп белгіленеді. Бұл тек екі жиын үшін орындалатын операция (қатаң екі орынды).



1.7-сурет

1.11. Мысал. Егер A -амперметрлердің жиыны, ал Θ -тұрақты токтың өлшеуіш құралдарының жиыны болса, онда $A \setminus \Theta$ - айнымалы токтың амперметрлерінің жиыны болады.

Тек өзі барлық жарамды жиындарды толық қамтамасыз ететін жиынды – *толық* немесе *универсал жиыны* деп атайды. Егер бос жиын, алгебрада, нөл рөлін атқаратын болса, онда универсал жиын бір рөлін атқарып, I деп белгіленеді. Графикалық түрде бұл жиын тік бұрыш түрінде көрсетіледі. Тік бұрыштың ішкі аймағында көрсетілген жиындар бейнелері, *Эйлер-Венн диаграммасы* деп аталады (1.8-сурет).



1.8-сурет

Универсал жиынның қасиеттері:

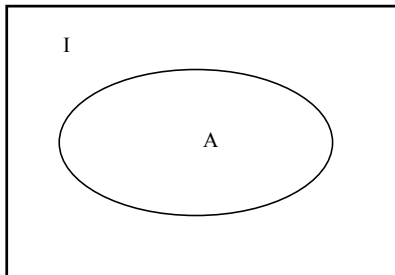
1) $A \cap I = A$ (сол сияқты $a \times 1 = a$);

2) $A \cup I = I$ ($a + 1 = 1$ сандар алгебрасындағы осындай ұқсас өрнектің мағынасы жоқ).

A жиыны универсал жиынның айырмасы сияқты анықталатын $\bar{A}$ жиыны – A жиынының қосымшасы деп аталады:

$$\bar{A} = I \setminus A.$$

Осы ұғым 1.9-суретте көрсетілген, $\bar{A}$ қосымшасы штрихпен белгіленіп тұр.



1.9-сурет

1.12. Мысал. Студенттер тобы, алғашқы мысалдарда көрсетілгендей, I универсал жиын сияқты қарастырылсын. Онда, A топтағы стипендияны алатын студенттер жиыны болса, ал $\bar{A} = I \setminus A$ стипендияны алмайтын студенттер жиыны болады.

Қосымшалардың қасиеттері:

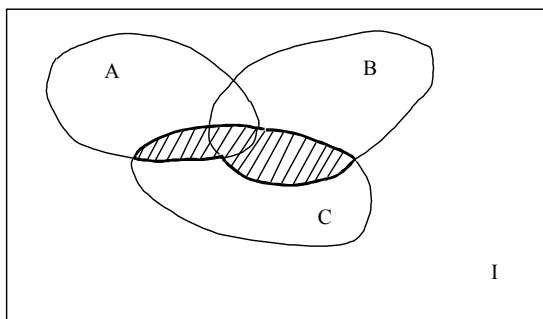
1) $A \cap \bar{A} = \emptyset$, өйткені A және $\bar{A}$ ортақ элементтері жоқ;

2) $A \cup \bar{A} = I$, өйткені I -дің барлық элементтері A және $\bar{A}$ жатады;

3) Егер $\bar{A}$ деген A жиынының қосымшасы болса, онда A -ны да $\bar{\bar{A}}$ жиынының қосымшасы деп атауға болады. Басқа жағынан, $\bar{A}$ жиынының қосымшасы $\bar{\bar{A}}$. Осыдан $\bar{\bar{A}} = A$.

Жиындардың негізгі операциялары нәтижеленіп, 1.1-кестеде келтірілген.

Жоғарыда айтылғандай, жиындар алгебрасында терімділік және алмастыру заңдары орындалады. Үлестірімділік заңына сәйкес Эйлер-Веннің диаграммасын салайық (1.10-сурет).



1.10-сурет

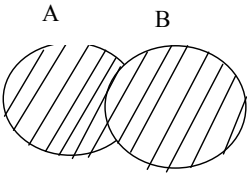
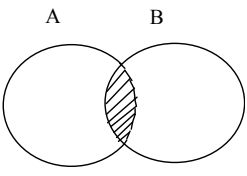
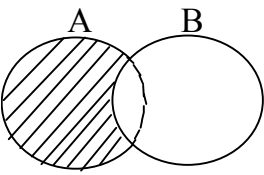
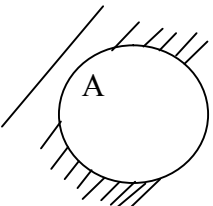
Қалың сызықпен сызылып штрихталған аудан, ортақ аймақты береді. Осыдан,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

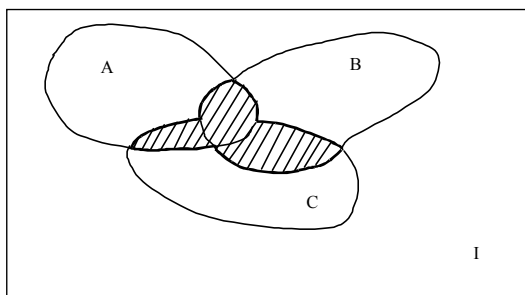
өзара тең. Сандар алгебрасындағы $(a+b)c=ac+bc$ арақатысына сәйкес келеді. Қарапайым алгебрада үлестірімділік заңының, терімділік және алмастыру заңдарынан айырмашылығы сол, қосу мен көбейтуге, симметриялы еместігі. Шынымен

де, + таңбасын $\times$ таңбасына ауыстыру, қарама-қайшылыққа алып келеді: $ab+c=(a+c)(b+c)$.

1.1-кесте

	Операцияның аталуы	Белгілеу және өрнегі	Графикалық бейнелеу
	Біріктіру	$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$	
	Қиылысу	$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	
	Алымы	$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	
	Қосымшалау	$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$	

Жиынға қолданатын өзара $\cup$ және $\cap$ таңбаларын ауыстыру екі жағдайда да бірдей жиындарды береді. 1.11-суреттегі диаграммада мұндай жиындар қалың сызықпен қоршалған аудан.



1.11-сурет

Осыдан мынау пайда болады:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

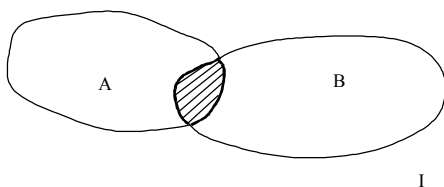
Сондықтан, жиындар алгебрасында, барлық үш заң да бірігу мен қиылысу амалдарына қарағанда симметриялы болып қалады.

1.12-суретте А және В жиындары универсалды І жиынның ішінде көрсетілген. Штрихталған аймақ — $A \cap B$ -нің қиылысуы. Оның элементтерінің қосымшалары не $\bar{A}$ жиының, не тек қана, $\bar{B}$ жиынының $\bar{A} \cap \bar{B}$ қиылысуына тиісті. Осы үш шарт $\bar{A} \cup \bar{B}$ бірігуін анықтайды. Сол себептен,

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Енді $A \cup B$ бірігуін қарастырып көрейік (қалың сызықпен сызылып штрихталған аудан). Оның қосымшасы $\overline{A \cup B}$ штрихталған болып шықты, басқаша айтқанда:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$



1.12-сурет

Алынған екі өрнек те де ол Морганның шарттары деп аталады. Осы ережелер арқылы әртүрлі есептерді логикалық теңдеулермен есептеуге және логикалық теңдеулердің ұзақтылығын азайтуға болады.

1.4. Жиындар мен олардың элементтерінің арасындағы қатынастар

Енді жиындардың араларындағы қатынастарды қарастырайық. Олардың бірнеше түрлері болады. Бірінші түрі — *сәйкестік*. Сәйкестік жиын, элементтерінің арасындағы қатынастарды көрсетеді. Екінші түрі — *бейнелеу*, бұл қатынас арқылы бір жиын элементтері белгілі теңдеулер арқылы екінші жиын элементтеріне айналады. Өзара екі жиынның арасындағы өрнек түріндегі байланыс — *функция* деп аталады. Ары қарай осы қатынастарды қарастырамыз.

Егер $a \in A$ элементтері $b \in B$ элементтерімен қабаттасып салыстырылып, салыстырудың әдісі анықталған болса, онда A және B жиындарының арасында сәйкестік орнатылған дейді. $Q \subseteq A \times B$ жиыны сәйкес орнататын заңын анықтайды да, сәйкестік графигі деп аталады. (A, B, Q) үш жиындармен анықталатын, $\langle a, b \rangle \in Q$ кортеждері салыстырылатын элементтердің жұбын көрсетеді.

1.13. Мысал. Студенттерге курстық жобалауға тапсырма беру кезінде: A — студенттер жиыны десек; B — құрылған тапсырмалардың жиыны. $Q \subseteq A \times B$ графигі әр студентке қандай тапсырма орындау керек екенін анықтайды (сәйкестік орнатылған).

1.14. Мысал. Студенттер тобының жиыны A , B -бағалардың жиыны, ал онда емтихан тапсыру нәтижелерінің кестесі $Q \subseteq A \times B$ сәйкес графигін көрсетеді.

Жалпы жағдайда A және B жиындарының барлық элементтер арасында сәйкестік орнатылуы мүмкін емес.

A жиыны сәйкестіктің жолдау аймағы, ал B қабылдау аймағы деп аталады. $a \in A$ элементтерінен тұратын $\text{Pr}_1 Q$ проекциясын — сәйкестіктің *анықталу аймағы*, ал $b \in B$ элементтерінен тұратын $\text{Pr}_2 Q$ сәйкестік *мәндерінің аймағы* деп атайды. Егер $\text{Pr}_1 Q = A$ болса, онда сәйкестікті әр жерде

анықталған (басқа жағдайда-дербес анықталған) дейді. $\text{Pr}_2 Q = B$ жағдайында, сәйкестік — *сюръективті* деп аталады.

(X, Y, Q) әр жерде анықталған сәйкестік беріліп, оның анықтау және жолдау аймақтары бірдей болса, онда X, Y бейнеленеді деп атап, $Q : X \rightarrow Y (\forall x \in X)$ белгілейді. Жалпы жағдайда $x \in X$ элементіне қандайда бір $Qx \subseteq Y$ ішжиын сәйкес болса, ол x элементінің бейнесі деп аталады. Ондай бейнені — *көпмәнді* дейді. Мысалы, ағылшын — орыс сөздігінде, Y орыс сөздерінің жиынына, оған сәйкес X ағылшын сөздерінің жиыны беріледі. Осы бейнелеу көпмәнді. Бірмәнді бейне кезінде $x \in X$ элементіне сәйкес, тек қана бір $y \in Y$ элементі қойылады.

Енді функция деген ұғымды қарастырайық. Бірмәнді бейнелеу кезінде, f -пен белгіленген сәйкестік графигінің бірдей бірінші және әртүрлі екінші компоненттері бар кортеждері болмасын. Мұндай бейнелеу — *функция* деп аталады: $f : X \rightarrow Y$.

$\text{Pr}_1 f = x$ анықталу аймағының x элементін аргумент, ал мәндер аймағында x элементінің бейнесін функция мәні деп атайды. Бұл кезде (x, y, f) сәйкестігі $y = f(x)$ түрінде жазылады.

Егер X жолдау аймағының ақырлы жиыны болса, онда функция кесте түрінде, $\langle x, y \rangle$ жұптардың ақырлы тізімі ретінде көрсетіледі. Функцияның y мәніне сәйкес келетін, берілген x аргументінің мәнін өрнектесе, онда есептеу процедурасы формула арқылы беріле алады. Егер X және Y нақты сандардың жиыны болса, онда $y = f(x)$ функциясының графигі, R^2 нақты жазықтығының ішінде жатқан, нүктелер жиыны арқылы көрсетіледі. Әр нүкте белгілі бір $\langle x, y \rangle \in f$ кортежге сәйкес. F жиынының графикалық көрсетуін — *функцияның графигі* деп атайды.

Сәйкестіктің жолдау аймағы t уақыт мезеттерінің, T реттелінген жиын болуы мүмкін. Онда T жиынының f бейнесі R нақты сандар жиынының: $f : T \rightarrow R$, $\langle t, x \rangle$ жұптарынан құрастырылады, мұндағы $t \in T$ және $x \in R$, функцияның *лездік мәні* деп аталады. Барлық $t \in T$ үшін $\langle t, x \rangle$ лездік мәндерінің жиыны, $x(t)$ уақыт функциясы деп аталады. Егер t

мына $(-\infty, \infty)$ аралығында қандай да болсын, мәнді қабылдаса, онда оны — *үздіксіз уақыт функциясы* деп атайды.

Кейде уақытты натурал $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ шексіз сандар жиыны ретінде қарастыруға болады. Онда $x(t)$ дискреттік уақыт функциясы болады және оның графигі n уақыт мезеттеріндегі $\langle n, x \rangle$ саналатын жиынтығын көрсетеді.

Енді жиындар арасындағы қатынастарды қарастырамыз. Жиынның өзіне-өзі бейнеленуі — бейненің дербес жағдайы болып саналады: $\Gamma : X \rightarrow X$. Бір жиында берілген (X, Γ) жұбымен анықталатын бейнені — *қатынастар* деп атайды. X жиыны қатынастың берілу аймағы болады да, ал оның графигі келесі түрде жазылады: $\Gamma \subseteq [X \times X = X^2]$.

Әрбір бөлек алынған қатынастардың реттелген жұбын X^2 жиынының екі элементімен салыстыратын болсақ, ондай қатынасты — *бинарлы* деп атайды. Символды түрде x және y элементтері арасындағы бинарлық қатынасты $x\Gamma y$ деп жазамыз.

Бұл қатынастар келесі қасиеттерді иемденеді:

- рефлексивтік — $(\forall x \in X) [x\Gamma x]$;
- симметриялық — $(\forall x, y \in X) [x\Gamma y \rightarrow y\Gamma x]$;
- транзитивтік — $(\forall x, y, z \in X) [x\Gamma y, y\Gamma z \rightarrow x\Gamma z]$;
- тепе-теңдік — $(\forall x, y \in X) [x\Gamma y, y\Gamma x \rightarrow x=y]$.

Ақырлы жиындағы бинарлық қатынастар, $|X| \times |X|$ өлшемді матрица түрінде берілуі мүмкін. Осы матрицалардың жолдары мен бағандары X жиынының элементтеріне сәйкес келеді. Элементтерінің арасында қатынастар болған жағдайда, оған сәйкес жолмен және бағанмен қиылысуына 1, егер болмаса, 0 қойылады.

1.15. Мысал. $\{1, 2, 3, 4\}$ қандар тобының жиыны үшін, қан құю кезіндегі үйлесушіліктің қатынасы график түрінде анықталады,

$$\Gamma = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}.$$

Осыған сәйкес қатынастар матрицасының түрі төмендегідей болады:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.16. Мысал. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ натурал сандар жиынында x және y бірге тең емес, ортақ бөлгіші бар xGu қатынасы берілсін. Бұл жерде, элементтер арасындағы қатынастар, рефлексивтік және симметриялық қасиеттерді иемденеді. Қатынастар матрицасы мына түрде табылады:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Егер осы айтылым $(\forall x, y \in X)[xGu]$ дұрыс болса, $(G=X^2)$ қатынасты — *толық қатынас*, ал егер ол дұрыс болмаса, онда *бос* деп аталады $(G=\emptyset)$. Толық қатынас тек бірлерден тұратын, ал бос қатынас, элементтері тек қана, нөлге тең матрицамен беріледі.

Айтылым төмендегідей берілсе:

$$(\forall x, y \in X)[xGu \rightarrow x=y],$$

ол теңдік қатынасты анықтайды. Егер қатынас рефлексивті, симметриялы және транзитивті болса, онда оны — *эквиваленттік қатынас* деп атайды.

Теңсіздіктің қатынасы, жиын элементтерінің орналасу ретін анықтайды. Қатаң емес рет $x \leq y$ қатынастары келесі қасиеттермен анықталады:

- рефлексивтік — $x \leq x$;
- тепе-теңдік — $(x \leq y, y \leq x) \rightarrow x = y$;
- транзитивтік — $(x \leq y, y \leq z) \rightarrow x \leq z$;

Қатаң рет қатынасы $x < y$ келесі қасиеттермен сипатталады:

- антирефлексивтік — $x < x$ жалған;
- симметриялы еместік — $(x < y \text{ және } y < x)$ жалған;
- транзитивтік — $(x < y \text{ және } y < z) \rightarrow x < z$.

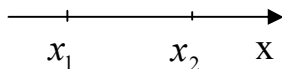
Қатынастарға жиындардағы сияқты операцияларды да (бірігу, қию, айыру) қолданады.

II. ЖҮЙЕЛЕРДІ ЖАЗУ НЕГІЗДЕРІ

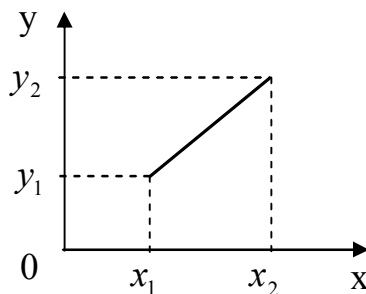
Жүйелерді жазып көрсету — негізі жоғарыда келтірілген жиындар теориясына сүйенеді. Оған қоса функционалды талдаудың бір топ ұғымдары қолданылады. Олардың арасында кеңістіктер, сәйкестіктер, бейнелеулер, функциялар ұғымдары бар. Ары карай осы негізгі ұғымдардың анықтамаларын функционалды талдау негіздеріне сүйене отырып жалғастырайық.

2.1. Кеңістіктер

Элементтердің өзара қатынастарымен операцияларды анықтайтын жиын — *кеңістік* деп аталады. Жиын элементтерінің арасындағы қарапайым қатынастардың бірі, олардың өзара арақашықтығы. Мысалы, сандық осінің x_1 және x_2 сандардың арасындағы қашықтық $|x_1 - x_2|$ санымен анықталады (2.1-сурет). Екі өзара перпендикуляр сандық осьтерімен берілген жазықтықта, арақашықтық шаманы келесі тендеуден көруге болады $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (2.2-сурет).



2.1-сурет



2.2-сурет

Жиын элементтерінің арақашықтық ұғымына, жалпы сипаттаманы берейік. Кейбір A бос емес жиыны берілсін. Осы жиынның элементтер арасындағы қашықтығы — *метрика* деп аталады да, келесі байланысты көрсетеді. Элементтер x және

у арасындағы метрика $\rho(x, y)$ болу үшін, үш метрикалық кеңістіктің аксиомалары орындалуы тиіс:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, тек қана $x = y$ болған кезде $\rho(x, y) = 0$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, бұл теңдеу, симметрия аксиомасы деп аталады;

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $(x, y, z \in X)$, осы теңсіздік үшбұрыштың теңсіздік аксиомасын көрсетеді.

ρ метрикасымен анықталған бос емес A жиынын — метрикалық кеңістік деп атайды.

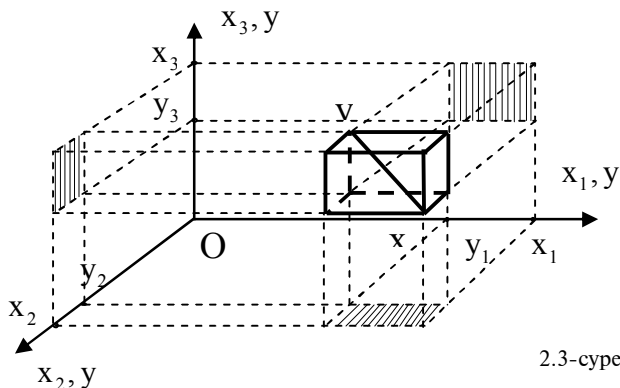
Жиындардың метрикасын әр түрде енгізуге байланысты, әртүрлі метрикалық кеңістіктерді қарастыруға болады. Мысал ретінде келесі метрикалық кеңістіктерді қарастырамыз.

2.1. Мысал. Осы мысалда Евклид кеңістігі былай белгіленеді E^n . Ең алдымен, R^3 үшөлшемді кеңістіктің нүктелер жиынын қарастырайық. Бұл кеңістікті үш бірдей нақты осьтер R^1 құрастырады. Кеңістіктің екі x және y нүктелер арасындағы арақашықтық метрикасы, тік бұрышты параллелепипедтің диагоналының d ұзындығымен анықталады (2.3-суретті қара). Оны мына теңдеуден көруге болады:

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Осы теңдеуді n -өлшемді Евклид кеңістігіне таратқанда, оның метрикасын мына теңдеуден көруге болады:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (2.1)$$



2.3-сурет

Жоғарыдағы айтылып кеткен аксиомаларда қарастырылған шарттарға, кеңістіктің тура екеніне көзіміз жетті.

2.2. Мысал. Енді мысал ретінде спектр бойынша шенелген сигналдар кеңістігін қарастырайық. Бұл сигналдарды үзіліссіз уақыт функциясымен $x(t)$ деп жазсақ, онда берілген функциялардың максималь мәні X_m -ға, ал минималь мәні 0-ге тең болады. Оны мына қасиеттермен сипаттап көрсетеміз:

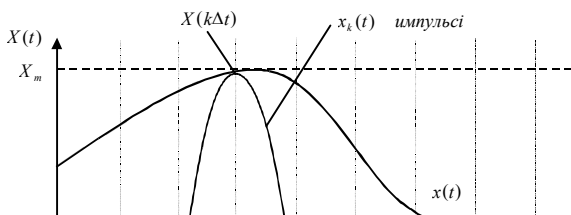
$$X(j\omega) = \begin{cases} X(j\omega) & \text{при } \omega \leq \omega_c, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_c \end{cases},$$

мұндағы $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$, $0 < t < T$.

Сонымен, осы жиынның барлық сигналдары, спектр мен уақыт бойынша шенелген сигналдар болады. Санаулардың теоремасы бойынша, осындай сигналдарды жуықтап, қатар түрінде көрсетуге болады:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n X(k\Delta t) \frac{\sin \omega_c(t - k\Delta t)}{\omega_c(t - k\Delta t)},$$

мұндағы $n = 2FT$; F – сигнал спектрінің көлемі, Гц; $\omega_c = 2\pi F$; T – сигналдың ұзақтығы, с. Онда $x(t)$ үзіліссіз уақыт функциясын бірқатар арнайы тұлғалы импульстер (санаулар функциялары) арқылы көрсетуге болады. Импульстердің максимумдары өзара Δt уақыт аралығында орналасады (2.4-сурет).



k нөмірлі импульсті $x_k(t)$ белгілесек, онда:

$$x_k(t) = X(k\Delta t) \frac{\sin \omega_c(t - k\Delta t)}{\omega_c(t - k\Delta t)},$$

осы теңдеуден көрініп тұрғандай, барлық импульстер өзара тек қана $X(k\Delta t)$ мәнімен бір-бірінен ажыратылады. Уақыт осіндегі k орындағы импульстің мәні 0 мен және X_m нақты сандар жиынымен шектеледі. $x(t)$ сигналдың жарамды мәндері, барлық $k\Delta t$, ($k = 1, 2, \dots, n$) уақыттағы сандар жиындарының көбейтіндісіне тең болады. Бұл жиындар көбейтіндісінің метрикалары — метрикалық кеңістікті құрастырады. Осы кеңістікте $x(t)$ уақыт функциясы бір элемент түрінде, функция мәндерінің $k\Delta t$ мезгілдеріндегі көбейтіндісімен көрсетіледі.

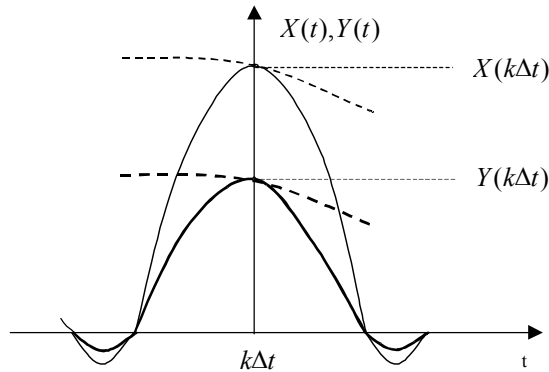
Жиынның екі уақыт функцияларын $x(t)$ және $y(t)$ қарастырайық (2.5-сурет). $k\Delta t$ уақыттарын k аралығында бекіте отырып, келесі метриканы енгізейік:

$$\rho(x, y) = \sqrt{2F(E_c - 2TK_{xy})},$$

мұндағы E_c — сигналдардың толық энергиялары. $x(t)$ және $y(t)$ сигналдарының энергиялары бірдей деп есептелген кезде:

$$K_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k\Delta t)Y(k\Delta t), \quad n = 2FT,$$

бұл теңдеу $x(t)$ және $y(t)$ сигналдарының өзара байланысын көрсететін коэффициентін анықтайды.



2.5-сурет

$x(t)$ және $y(t)$ сигналдарының импульс энергиясын есептесек:

$$E_{xk} = \frac{1}{2F} X^2(k\Delta t), \quad E_{yk} = \frac{1}{2F} Y^2(k\Delta t).$$

Онда сигналдардың толық энергиясы мынаған тең:

$$E_c = \frac{1}{2F} \sum_{k=1}^n X^2(k\Delta t) = \frac{1}{2F} \sum_{k=1}^n Y^2(k\Delta t).$$

Осы теңдеулерді қолданып, метриканы есептейтін теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\rho(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X^2(k\Delta t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Y^2(k\Delta t) - \sum_{k=1}^n X(k\Delta t)Y(k\Delta t) \right]^{1/2},$$

әлі де:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=1}^n [X(k\Delta t) - Y(k\Delta t)]^2} . \quad (2.2)$$

(2.1) және (2.2) тендеулерді салыстырсақ, олардағы енгізілген метрикалар n -өлшемді Евклид кеңістігін анықтайды. Метрикалық кеңістік ұғымын пайдалана отырып, әр түрлі метрикалардың және әр түрлі кеңістіктердің құрылымдарын енгізе аламыз.

Ары қарай функционалды кеңістіктердің өте бір маңызды ұғымын қарастырамыз. Ол әр түрлі тізбектелген элементтерден құрылған жиындардың жинақтылығы.

X метрикалық кеңістіктің $\{x_n\}$ элементтер тізбегі жинақталуы үшін оның $x \in X$ шегі болуы тиіс. Метрика ұғымына сүйене отырып, дәлелдемені келтірмей-ақ, тек екіөлшемді метрикалық кеңістіктегі нақты сандар мысалын қарастырайық.

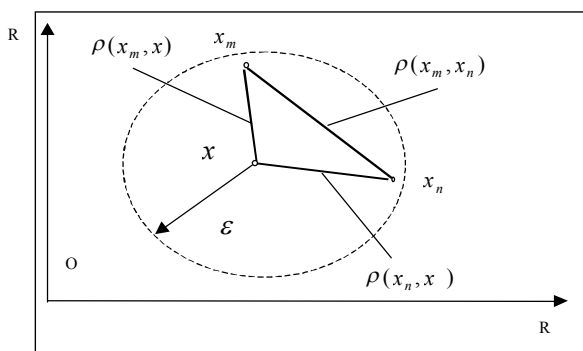
R^2 жазықтығының x_m, x_n және x сандарының метрикаларын $\rho(x_m, x), \rho(x_n, x), \rho(x_m, x_n)$ анықтайық та, x нүктесіне айналатын ε радиусті шеңберді сызайық (2.6-сурет). Онда қандай да болсын $\varepsilon > 0$ мәніне сондай N саны табылса, $m > N$ болғанда $\rho(x_m, x) < \varepsilon$, x_m элементтердің тізбегі — *жинақталатын тізбек* деп аталады. Енді $n > N$, $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ онда x_n тізбегі де жинақталатын тізбек. Метрикалық кеңістіктердің үшінші аксиомасы бойынша:

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) < 2\varepsilon.$$

Онда кеңістіктің x элементтерінің тізбегі, жинақталатын тізбек болуы үшін келесі шарт: $m, n > N$, $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ орындалуы тиіс. Жинақтылық деген ұғымның жалпы анықтамасын келтірейік.

Барлық $\varepsilon > 0$ сандарға, $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ $m > N, n > N$ шарттарға лайық бүтін N саны табылса, X метрикалық кеңістіктің

$\{x_n\}$ элементтер тізбегі жинақталатын тізбек болады (Коши тізбегі).



2.6-сурет

Кейбір жағдайларда $\{x_n\}$ тізбегінің элементтері және оның шегі x бір кеңістікте жатпауы да мүмкін. Мысалы, келесі сандар тізбегінің $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ шегі $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Осы тізбек e иррационал санымен шенеледі. Ал бұл жағдайда рационал сандардан құрылған X метрикалық кеңістікте берілген элементтер тізбегінің шегі, осы кеңістікте жатпайды. Нақты сандар метрикалық кеңістігінде, тізбектің элементтері мен олардың шегі, бір кеңістікте жатады. X метрикалық кеңістігі толық болуы үшін, тізбектің элементтері $\{x_n\} \subset X$ кеңістікте жатқан кезінде, олардың шегі $x \in X$ осы кеңістікте жатуы тиіс.

2.2. Бейнелер және функциялар

Функционалды талдауда, функция ұғымы жалпы ұғымдардың бірі. Сандар жиындары арасындағы қатынас — *функция* деп аталады. Осы қатынас бірімәнді де болуы мүмкін.

X жиынның, X_a ішжиынының элементерін және Y жиынының, Y_b ішжиынының элементерін қарастырайық:

$$X_a \subset X, x \in X_a; Y_b \subset Y, y \in Y_b.$$

Енді f ережесі арқылы X_a жиынының элементтері мен Y_b жиынының элементтері арасында кейбір қатынасты орнатсақ, онда $y = f(x)$ функциясы анықталады. Осы ұғымның толық анықтамасы былай тұжырымдалады.

X бос емес жиынының x элементіне Y бос емес жиынының y элементі f сәйкестікпен байланысты болса, онда ол функция X жиыны Y жиынының бейнелеуі деп аталады. Осы бейнелеу берілген X_a ішжиыны функциясының анықталу аймағы, ал Y_b ішжиыны функцияның мәндерінің аймағы деп аталады.

X -ті Y -ке бейнелеудің, символды түрі келесі өрнекпен көрсетіледі:

$$f : X \rightarrow Y \quad (2.3)$$

және ол былай оқылады: X және Y жиындарында f сәйкестік берілсе, онда X жиыны Y жиынына бейнеленеді. Жалпы жағдайда ол белгілі түрде көрсетіледі:

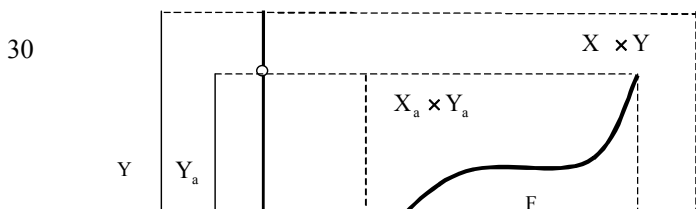
$$y = f(x).$$

$X \times Y$ жиынының F ішжиыны

$$F = \{(x, y) : y = f(x), x \in X_a\} \quad (2.4)$$

осы функцияның графигі деп аталады.

2.7-суретте осы анықтаманың графикалық түсініктемесі келтірілген. Мұндағы X және Y жиындар сан осьтері болып табылады, ал $X \times Y$ жазықтық, нүктелер жиынын көрсетеді. Оған сәйкес X_a және Y_b жиындары F ішжиынын анықтау үшін (2.4) теңдеу орындалуы тиіс. $X_a \times Y_b$ жиынының барлық нүктелері, F ішжиынның тек қана белгілі (x, y) нүктелерін құрастырады. Осы нүктелердің қасиеті, берілген $x \in X_a$ мәніне y мәні сәйкес болса, ол келесі байланыспен анықталады $y = f(x)$. Осы сәйкестік тек қана бірімәнді болуы тиіс.



$f : X \rightarrow Y$ бейнелеуде функция өзара бірімәнді болу үшін $f(x_1) = f(x_2)$ теңдігі орындалған кезде $x_1 = x_2$ теңдігі, барлық $x \in X$, орындалуы тиіс. Осы шарт орындалса, онда теріс бейнелеудің әрқайсысы y элементін x элементімен байланыстыратын бейнелеуін:

$$g : Y \rightarrow X$$

іздеуге болады.

Өзара бірімәнді бейнелеу $f : X \rightarrow Y$ анықталу $X_a \subset X$ және мәндерінің $Y_b \subset Y$ аймақтарымен берілсін. Онда $Y \times X$ жиынында берілген $g : Y \rightarrow X$ бейнелеудің графигі төмендегі түрде тұжырымдалады:

$$G = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in X_a\},$$

осы бейнелеу Y анықталу аймағымен және X_a мәндерінің аймағымен өзара бірімәнді. Осындай g бейнелеу теріс бейнелеу деп аталып, келесі символмен көрсетіледі: f^{-1} , оның толық жазылуы:

$$f^{-1} : Y \rightarrow X. \quad (2.5)$$

Енгізілген түсініктемелерді келесі мысалдармен бекітейік.

2.3. Мысал. $X = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$ және $Y = \mathbb{R}$ жиындары берілсін, мұндағы $\mathbb{R}$ нақты сандардың сандық осі. Ол келесі функциямен берілген:

$$y = f(x) = x^2,$$

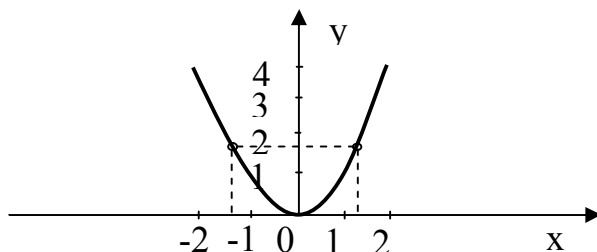
бейнелеуді қарастырайық. Осы функцияның анықталу аймағы келесі түрде берілсін $X_a = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$. Онда қарастырылған функцияның мәндерінің аймағы

$$Y = \{y : 0 \leq y \leq 4\},$$

ал оның графигінің өрнегі осылай табылады:

$$F = \{(x, y) : y = x^2, 0 \leq x \leq 2\},$$

және сурет жүзінде 2.8-суретімен қорсетіледі.



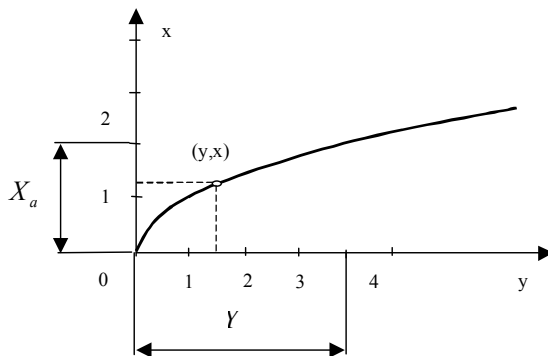
2.8-сурет

Онда $X_a = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$ анықталу аймағымен берілген $y = x^2$ функциясы өзара бірімді және оның теріс функциясы келесі өрнек түрінде жазылады:

$$x = \sqrt{y} = f^{-1}(y).$$

Осы функцияның анықталу аймағы $Y = \{y : 0 \leq y \leq 4\}$ өрнекпен жазылса, мәндерінің аймағы $X_a = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$ өрнекпен жазылады, ал оның графигі 2.9-суретте көрсетілген.

Енді $y = x^2$ функцияның анықталу аймағын барлық Y жиынына таратсақ, онда бұл функция өзара бірімәнді функция болмай кетеді. Оның себебі берілген бір $y \in Y$ мәніне, екі $x \in X$ мәндері сәйкес болып кетеді (2.8-суретті қара).



2.9-сурет

Функциялар теориясының ең маңызды ұғымдарының бірі — оның үзіліссіздігі. Математикалық талдауда $y = f(x)$ функция $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз болу үшін, қандай да болмасын бір сан $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ сан ылғи табылып тұрса, осы жағдайда келесі теңсіздік орындалуы тиіс:

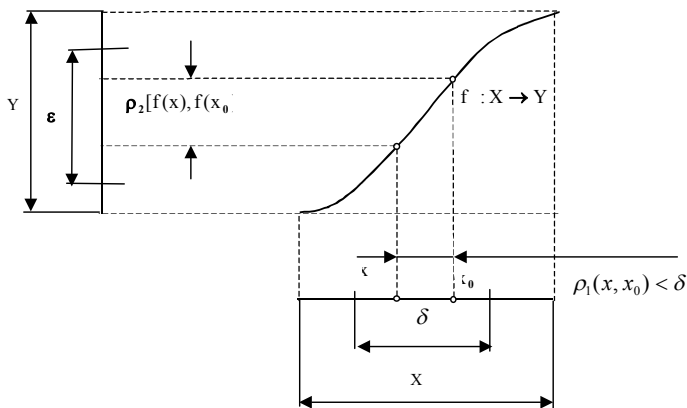
$$|x - x_0| < \delta, \text{ онда } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Ал, функционалды талдауда осы анықтама мына түрде беріледі: $f : R \rightarrow R$ бейнелеу, $x \in R$ нүктесінде үзіліссіз болу үшін, қандай да бір сан $\varepsilon > 0$ санға, сондай $\delta > 0$ сан табылып тұрады, осы жағдайда (2.6) шарт орындалуы қажет.

Метрикалық кеңістіктерде нүктелердің өзара жақындығы, аралықтарымен (метрикаларымен) анықталуын ескеріп, үзіліссіздік туралы анықтаманы бір метрикалық кеңістікті, екінші метрикалық кеңістікке бейнелеу жағдайына байланысты, осы түрде беруге болады. ρ_1 және ρ_2 метрикалармен берілген X және Y метрикалық кеңістіктер арасындағы бейнелеу, (функция) $x_0 \in X$ нүктесінде үзіліссіз болуы үшін келесі шарт орындалуы тиіс. Қандай болсын $\varepsilon > 0$ санға, сондай $\delta > 0$ сан табылса, осы жағдайда:

$$\rho_1(x, x_0) < \delta, \text{ онда } \rho_2[f(x), f(x_0)] < \varepsilon.$$

Осы анықтаманың графикалық түсініктемесі 2.10-суретте келтірілген.



2.10-сурет

X және Y сандық осьтері болса, олардың метрикалары $\rho_1 = |x - x_0|$ және $\rho_2 = |y - y_0|$ теңдеулермен анықталса, онда осы анықтама, математикалық талдаудағы үзіліссіз анықтамаға эквивалентті.

X метрикалық кеңістігін Y метрикалық кеңістігіне бейнелеу, X бойынша үзіліссіз болу үшін, ол барлық X

кеңістігінің нүктелерінде үзіліссіз болуы тиіс. Мұның әрқайсысы $\mathcal{E}$ келесі үзіліссіз туралы шартына

$$\rho_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow \rho_2[f(x), f(x_0)] < \varepsilon,$$

сәйкес болу үшін сондай δ табу керек. Осы талдаудан шығатын қорытынды: δ саны ε санына да x_0 нүктесіне де тәуелді. Мына бейнелеуде $f : X \rightarrow Y$ $\mathcal{E}$ -нің әрбір мағынасы үшін δ тауып, ол бір мезгілде үзіліссіз шарттың барлық нүктелерін қанағаттандырса, онда мұндай бейнелеуді — *бірқалыпты үзіліссіз бейнелеу* дейміз.

Осындай бейнелеудердің практикалық есептерде маңызы өте зор. Ол, X және Y метрикалық кеңістіктері ρ_1 және ρ_2 метрикаларына сәйкес болып, барлық $x \in X$ келесі теңдік орындалса:

$$\rho_1(x, x_0) = \rho_2[f(x), f(x_0)]$$

онда $f : X \rightarrow Y$ бейнелеуі — *изометриялық бейнелеу* деп аталады. Енді бейнелудің анықталу аймағы $X_a = X$, ал бейнелеудің мәндерінің аймағы $Y_b = Y$ болған кезде X және Y кеңістіктері өзара изометриялық байланыспен байланысады деп есептеледі. Онда X және Y кеңістіктер бірдей кеңістіктері болып табылады.

Осы тараудың соңында өте маңызды жағдай туралы айта кету қажет. «Жиындардың, кеңістіктердің және бейнелеулердің автоматтық басқару теориясына қажеті бар ма?» деген сұрақ туындауы мүмкін. Автоматтық басқару теориясына классикалық, математикалық талдау арқылы жүйелерді жазу және зерттеу әдістері жасалғаны белгілі.

Қазіргі күнде жаңадан қойылып жатқан есептерде, функцияларды математикалық талдау арқылы жазуға болмайды. Көп жағдайларда функция элементтерін жиын түрінде ғана беруге болады. Осындай есептерде функционалды кеңістіктерді, бейнелеулер арқылы зерттеуді кіргізуге болады. Жиындар, кеңістіктер және бейнелеулер ұғымдары арқылы, әр түрлі физикалық, химиялық мағыналы объектілердің арасындағы, математикалық байланыстарды

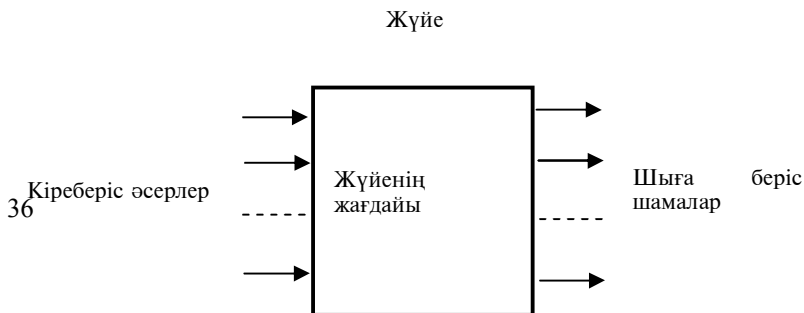
табуға болады. Жүйелер теориясының осы нәтижелерін, автоматтық басқару жүйелерін зерттеп жазу үшін қолданудың маңызы өте зор.

2.3. Динамикалық жүйе

Әдетте *жүйе* деп — бір-бірімен өзара байланысқан элементтерді немесе оның бөліктерін айтамыз (белгілі бір заңдылықтармен айналадағы ортамен өзара байланысатын). Нақтырақ айтқанда, *жүйе* дегеніміз — ол кіре беріс, шыға беріс айнымалылары бар құрылғы, кешен, бірлестік. Сырттан берілген әсерлерге байланысты өзінің жағдайларын өзгертеді. Бұл өзгерістер айналадағы орта әсерлеріне байланысты. Жүйенің анықтамасында, жүйенің физикалық параметрлері нақтыланбаған. Біздің тұжырымдағанымыз, жүйе түсінігінің қатаң анықтамасы. Болашақта ғылымның осы саласын тереңірек зерттеу мақсаты қойылып отыр. Осы анықтаманы бір топ есеп кластарына кеңінен қолдануға болады.

Жүйелерде өтетін процестерді зерттеу үшін, кіре беріс әсерлердің ағымдағы мәндерімен, жүйенің шығыс шамаларын анықтай білу керек. Ол үшін, алдымен жүйені математика тілінде жазу қажет, яғни жүйенің математикалық моделін құрған дұрыс. Теориялық жоспарда жүйе туралы ұғым қазіргі кезде де, кейінгі уақытта да, оның (жүйенің) күйін білуді қажет етеді. Бұл күйлер берілген математикалық қатынастармен толық анықталады. Осы қатынастар - қарастырылған жүйеге, бірімәнді түрде беріледі.

Сөйтіп, айтылған физикалық және логикалық жазулар 2.11-суретте көрсетілген жүйенің жалпы сұлбасына алып келеді.



2.11-сурет

Енді кіреберіс әсерлері мен жүйенің күйлерінің және шығаберіс шамаларының, толық анықтамаларын қарастырайық. Кіреберіс әсерлерді, лездік мәндерінің жиынымен беруге болады.

Оны u арқылы белгілейік. Енді уақыт мезеттерінің жиынын енгізіп, оны T арқылы белгілейік. Бұл - $u(t)$ нақты кіреберіс әсерлері берілген t уақыт мезеттерінде U жиынымен қатынасады.

Қарапайым физикалық түсініктерде, T уақыт мезеттерінің жиыны реттелген болуы керек. Басқаша айтқанда оның ішінде уақыттың бағыты анықталып, ал бағытты таңдағанда, уақыт тек қана алға жүретінін ескерту қажет.

Жалпы жағдайда кіреберіс әсерді, $u(t)$ кез келген еркін уақыт функциясы деп есептеуге болмайды. Әдетте, әрбір күй үшін белгілі шектеулер енгізіледі.

Олар енгізілгенде, шығарылып отырған есептің берілгені, айналадағы ортаны әсерлейтін қасиетімен көрсетіледі. Ол әрқашан орнықты болуы қажет. Егер $u(t)$ функцияларының жарамды абстрактілі ережелерін ω арқылы белгілесек, онда $u(t)$ функцияларының Ω жиыны жарамды екенін былай анықтауға болады:

$$\Omega = \{\omega; T \rightarrow U\}.$$

Мына өрнектің мағынасы: T және U жиындарында, ω сәйкестік (ереже) арқылы, T жиыны U жиынына бейнеленіп, Ω бейнелер жиынын құрастырады. Ω жиыны $T \times U$ жиынының ішжиыны болып табылады. Нақты шамалардың мәндері үшін жоғарыда көрсетілген өрнекті мына түрде жазуға болады:

$$u(t) = \omega(t).$$

Ары қарай $u(t)$ жазуын қолданғанда, бұл функция жарамды жиынға қатысты екендігін ескертейік.

Реалды жүйелерде кіреберіс әсерлер кесінділермен беріледі. Оның себебі — уақыттың шектелуінде. Онда Ω жиынында берілген функциялар тобы, сондай болуы керек. Егер екі әртүрлі ω_1 және ω_2 функциялар екі көрші уақыт кесінділерінде берілсе $[t_1, t_2]$ және $[t_2, t_3]$ олар қосынды $[t_1, t_3]$ кесінді ω_3 функциясымен ауыстырылады (2.12-сурет). Онда бұл шартты былай жазамыз:

$$\begin{aligned}\omega_1, \omega_2, \omega_3 &\in \Omega, \\ t_1 < t_2 < t_3 &\in T,\end{aligned}$$

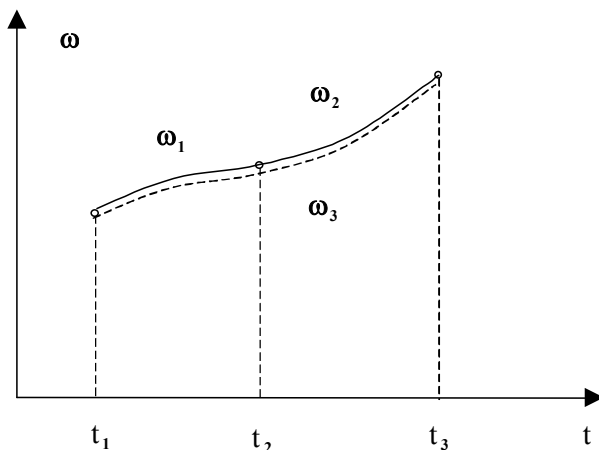
болса, онда келесі шарт орын алады:

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \omega_1 \quad t_1 < t \leq t_2 \text{ орындалғанда,} \\ \omega_3 &= \omega_2 \quad t_2 < t \leq t_3 \text{ орындалады.}\end{aligned}$$

Осы өрнектермен жазылған кіреберіс әсерлерінің, ары қарай да қолданылуы жеткілікті. Енді жүйе күйлерінің түсінігін қарастырайық. Нақтылап айтқанда, кіреберіс әсерлер ағымдағы уақыттың алдыңғы күйіне тәуелді, берілген уақыт кезіндегі жүйе күйін сипаттайтын, кейбір шамалар (оларды x арқылы белгілейік) бар екендігін ескеруіміз қажет. Бұл тәуелділікті жалпы түрде төмендегідей жазуға болады:

$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega],$$

мұндағы t_1 — берілген уақыт мезеті; t_0 — $t_0 < t_1$ шартына лайық кейбір өткен мезеттегі уақыт; $x(t_0)$ — жүйенің берілген өткен күйі; ω — $\omega \in \Omega$ шартына лайық кіреберіс әсер.



2.12- сурет

Егер x шамаларын кейбір X жиынының элементтері ретінде, ал барлық уақыт мезеттерін (соның ішінде t_0 және t_1) T жиынында жататын етіп қарастырсақ, онда x күйлерінің өрнегін осы түрде жазуға болады:

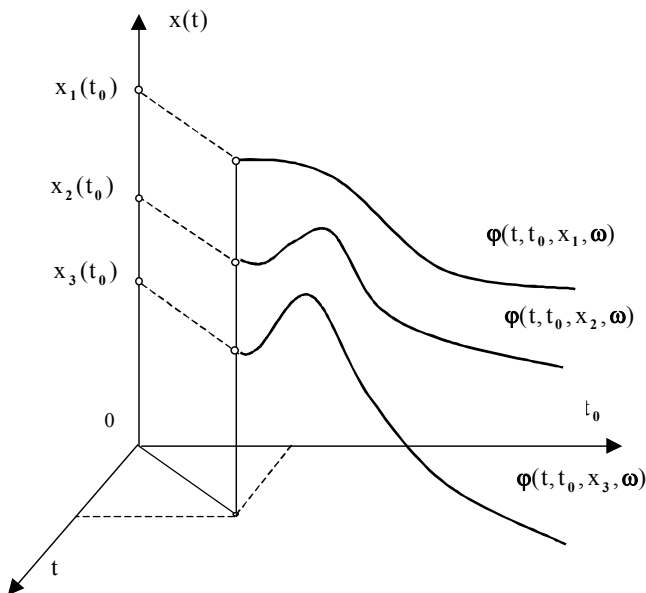
$$\Phi = \{\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}.$$

$T \times T \times X \times \Omega$ жиыны $t_1, t_0, x(t_0), \omega$ түріндегі төрт еселі элементтерінен тұрады. Яғни, φ сәйкестігі x элементтерінен тұратын осы төрт еселінің X жиынына бейнесін (функционалды байланыс) орнатады. Алынған φ бейнесі, кейбір Φ жиынында жатады және жүйе — *күйдің өтпелі*

функциясы деп аталады. Күйдің өтпелі функциясы, бір мәнді анықтамалардың талаптарын қанағаттандыруы қажет. Әрине біріншіден, күйдің өтпелі функциясы барлық $t \geq t_0$ үшін анықталуы қажет, ал $t = t_0$ кезінде барлық $t \in T, x \in X$ және $\omega \in \Omega$ үшін келесі теңдік орындалуы керек:

$$\varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega] = x(t_0).$$

Бұл теңдеу φ функциясының бастапқы мәнімен келісетіндігін көрсетеді. Осы бастапқы $x(t_0)$ мәнінің $t = t_0$ ω кіреберіс сигналдың, берілген мәніне тәуелсіздігін анықтайды (2.13-сурет).



2.13-сурет

Ары қарай, $t = t_0$ кезіндегі және ω кіреберіс әсер кесіндісінің $[t_0, t_1]$ уақыт кесіндісінде, $\omega[t_0, t_1]$ деп

белгілейік. $x(t_0)$ жүйе қалпының мәнін $t = t_1$ мезеттегі $x(t_1)$ қалпын анықтауға мүмкіндік беретін жеткілікті және қажетті шартты табу керек. Соған байланысты мына қатынас орындалады:

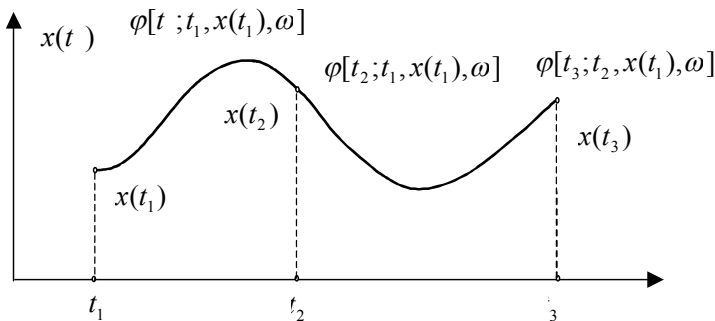
$$x(t_1) = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega(t_0, t_1)].$$

Осы арақатыстарға лайық жүйелер — *динамикалық жүйелер* деп аталады. Сонда, уақыт кесіндісі мен жүйенің бастапқы қалыптары $x(t_0)$ берілген кезде, екі бірдей кіреберіс әсерлердің нәтижелері де бірдей болуы тиіс, онда:

$$\varphi[t_1, t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1, t_0, x(t_0), \omega_2],$$

осы кезде $\omega_1 = \omega_2$, егер $t_0 < t \leq t_1$.

Айта кету керек, бірдей кіреберіс әсерлер ω , $[t_1, t_3]$ уақыт аралығының соңында берілсе, жүйе қалпын анықтайтын әсер келесі аралықтарда $[t_1, t_2], [t_2, t_3]$ беріледі. Онда нәтижелік күйі өзгермейді. Осы жағдай 2.14-суретте көрсетілген. Бұл шарт барлық $x \in X$, $\omega \in \Omega$ мәндеріне және барлық $t_1 < t_2 < t_3 \in T$ уақыт аралықтарына келесі теңдеумен беріледі:



2.14-сурет

$$\varphi[t_3, t_1, x(t_1), \omega] = \varphi\{t_3, t_2, \varphi[t_2, t_1, x(t_1), \omega], \omega\}.$$

Қарастырылған қатынастармен берілген жүйе, оның күйінің өтпелі функциясының қасиеттері, осы жүйенің негізгі сипаттамасы ретінде анықталады. Жүйе күйінің өтпелі функциясы белгілі болып, кіреберіс әсерлер берілген болса, онда жүйенің шыға беріс шамаларын анықтауға болады. Соңғысы өз-өзіне кіреберіс әсерін қосатындықтан, шыға беріс шама (оны $y(t)$ деп белгілейміз) былай жазылады:

$$y(t) = \eta[t; x(t)].$$

Әдетте шығаберіс шамалар жиынына шектеулер қойылмайды, бірақ олар Γ жиынында жатуы керек. t уақыт мезеттерінің T жиынында, ал x мәндері X жиынында жатқандықтан, шығаберіс шамалар жиынын жалпы мына түрде жазуға болады:

$$\Gamma = \{\eta: T \times X \rightarrow Y\}.$$

Енді Р. Калманның, П. Фалбтың және М. Арбибтың [1] динамикалық жүйеге берген анықтамасын толық бере аламыз.

2.1. Анықтама. *Динамикалық жүйе* деп — келесі аксиомаларды қанағаттандыратын, өзара байланысты элементтер жиынтығының математикалық моделін атаймыз:

1. T уақыт кезіндегі жиын, X жүйе күйлерінің жиыны, U кіреберіс лездік мәндерінің жиыны, олардың жарамды мәндерінің жиыны берілсін.

$$\Omega = \{\omega: T \rightarrow U\},$$

Y шыға беріс лездік мәндер жиыны және олардың жарамды мәндер жиыны

$$\Gamma = \{\eta: T \times X \rightarrow Y\}.$$

2. Берілген T жиыны нақты сандар жиынының, реттелген ішжиыны (уақыт бағытын көрсететін жиын): $T \subseteq \mathbb{R}$.

3. Берілген келесі шарттарды қанағаттандыратын кіреберіс әсерлер жиыны:

а) Ω бос емес жиын;

ә) ω кіреберіс әсерлер кесіндісі, $(t_1, t_3]$ уақыт аралығында келесі қасиетке ие болуы тиіс:

егер $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ және $t_1 < t_2 < t_3 \in T$,
онда:

$$t_1 < t \leq t_2 \text{ кезде } \omega_3 = \omega_1, \quad (2.7)$$

$$t_2 < t \leq t_3 \text{ кезде } \omega_3 = \omega_2.$$

4. Егер t_0 уақыт кезеңдерінде жүйе $x(t_0) \in X$ бастапқы қалпында болып, оған $\omega \in \Omega$ кіреберіс әсері әсер етсе, онда $t \in T$ уақыт кезінде:

$$x(t) = \varphi[t, t_0, x(t_0), \omega] \in X \quad (2.8)$$

жағдайларында болатын өтпелі күй функциясы былай табылады:

$$\Phi = \{\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X\}. \quad (2.9)$$

Өтпелі күй функциясының қасиеттері:

а) функция барлық $t \geq t_0$ үшін анықталған және барлық $t < t_0$ (уақыттың бағыты) үшін анықталмайды.

ә) функция өзінің бастапқы мәндерімен келісілген, яғни

$$x(t_0) = \varphi[t_0; t_0, x(t_0), \omega] \quad (2.10)$$

теңдігі кез келген $t \in T, x \in X, \omega \in \Omega$ үшін орындалады.

б) $t_0 < t \leq t_1$ үшін $\omega_1 = \omega_2$ болатын $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ кіреберіс әсерлерінің барлық кесінділері үшін келесі теңдік орындалады:

$$\varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_1] = \varphi[t_1; t_0, x(t_0), \omega_2] \quad (2.11)$$

в) функция жартылай топтық қасиетіне ие, яғни кез келген $t_1 < t_2 < t_3$ және $x \in X, \omega \in \Omega$ үшін осындай теңдік орындалады:

$$\varphi[t_3; t_1, x(t_1), \omega] = \varphi\{t_3; t_2, \varphi[t_2; t_1, x(t_1), \omega], \omega\}. \quad (2.12)$$

5. Келесі тендеумен күйдің өтпелі функциясы берілсе:

$$y(t) = \eta[t; x(t)], \quad (2.13)$$

онда жүйенің шығаберіс шамаларының мәндерін анықтайтын

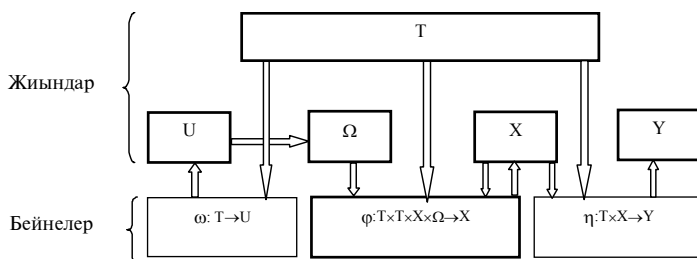
$$\Gamma = \{\eta : T \times X \rightarrow Y\}, \quad (2.14)$$

шығаберіс бейнелеуін табуға болады.

Келтірілген анықтама, жалпы түрде динамикалық жүйенің математикалық моделін сипаттайды. Сұлба түрінде оны 2.15-суретте көрсетілгендей, құрылымдық сұлбасы ретінде көрсетуге болады. Бұл математикалық модельді, физикалық жүйелердің әр түрлі кластарына қолдануға болады. Ол теориялық жағынан өте маңызды. Онда бір-талай дербес қосымшалар, ортақ

терминологиямен, негізгі түсініктермен және теорияның фундаментальды нәтижелерімен бірігеді. Бөлек қосымша терминдер, динамикалық жүйенің математикалық моделін нақтылайды. Мысалы, x -жүйесінің t_0 кезіндегі қалпы немесе TxX жиындарының қос элементтері, жүйенің оқиғасы немесе фазасы деп аталады. TxX жиынының өзі оқиға кеңістігі немесе фазалық кеңістік деп аталады.

Осы жағдайда кіреберіс әсерінің Ω_1 жиыны жүйені басқару үшін қолданылса, онда ол – *басқару* деп аталады. Басқару $x(t_0)$ қалпын $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ қалпына ауыстырады (немесе түрлендіреді).



2.15-сурет

Егер жарамды кіреберіс әсерлер Ω жиыны бір элементтен ғана тұрса, ол *еркін* немесе *автономды динамикалық жүйе* деп аталады. Практикалық жағдайда ол – кіреберіс әсерлер жоқ болған кезде, жүйенің қозғалысы тек қана бастапқы мәндердің ауытқуларымен туындалады. Күйлердің өтпелі функциялары, дифференциалды теңдеулермен жазылатын жүйелер, динамикалық жүйелердің бір манызды топтарын құрады. Осындай жүйелердің анықтамасын (жоғарыда келтірілген) жалпы 2.1 анықтама арқылы енгізейік. Ол үшін жүйе күйінің X , кіреберіс әсерлерінің Ω және уақыт мезеттерінің T

жиындарын карастырайық. Онда осы айтылып кеткен жиындар, метрикалық кеңістіктер болып табылады. Карастырылып отырған кеңістіктердің элементтер ретінде нақты сандар R болады. Онда:

$T = R$, $\Omega = R^m$, $X = R^n$, мұндағы m және n кеңістіктердің өлшемдері. Табылған кеңістіктер нормаланған (векторлы) кеңістіктер болып табылады.

Күйдің өтпелі функциясы $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$, барлық нүктелерде үзіліссіз бейнелеу болу үшін, $x \in X$ әрбір $t \in T$ анықталуы қажет. Осы бейнелеу (2.6) анықтамаға сәйкес түрінде берілсін.

Енді жүйенің қалпы, t уақыт мезетінде күйдің өтпелі функциясының мәнімен берілсе:

$$x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega],$$

онда x айнымалының өсімшесі, t уақыт ақырсыз кішкене мәнге өзгерген кезінде, φ функциясы үзіліссіз қасиетін ескеріп, келесі түрде жазылады:

$$dx = \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] dt.$$

Тағы да осы функция $\frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ бірімді болып, келесі үзіліссіз функцияға $f(t; x, \omega)$ сәйкес түрінде берілсін. Онда жүйенің күйі келесі дифференциалды теңдеумен анықталады:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)],$$

мұндағы $u(t) = \omega(t)$. Осындай жүйе барлық жоғарыдағы шарттарды қанағаттандырса, онда ол қарапайым динамикалық жүйе деп аталады. Осы

жүйенің толық анықтамасын келесі түрде беруге болады.

2.2. Анықтама. Қарапайым динамикалық жүйе деп — өзара байланысқан элементтердің жиынтығын айтамыз. Ол 1.1 анықтаманың барлық аксиомаларына сәйкес, оған қоса келесі шарттарға лайықты, математикалық модель:

1. Т уақыт мезеттер жиынының нақты сандар осі, ал U кіреберіс әсерлердің лездік мәндері. Жарамдық кіреберіс әсерлерінің мәндері, X жүйесінің күйлерінің векторлық кеңістіктері болып табылады;

2. Барлық $t \in T$ мәндерінде үзіліссіз функциямен

$\frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ берілген $f(t, x, \omega)$, туындатқыш функция деп аталады;

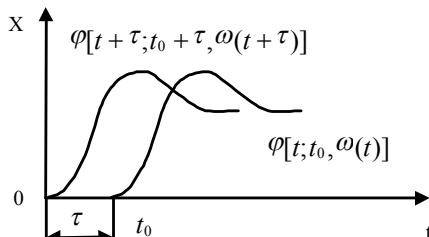
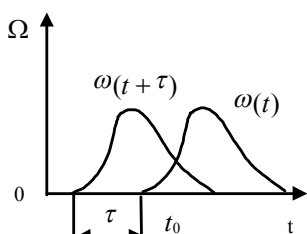
3. Жүйенің күйлерінің өтпелі функциясы, келесі дифференциалды теңдеудің шешімі болады:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)]. \quad (2.15)$$

Осы дифференциалды теңдеудің шешімдері келесі бастапқы мәндерінде $x(t_0) = x_0$ барлық $t \in T$, $x \in X$ және $u \in \Omega$ есептеледі, мұндағы x — жүйенің күйлер векторы, u — кіреберіс әсерлердің векторы.

Кейбір жағдайларда динамикалық жүйенің элементтері мен олардың өзара байланыстары, уақыт өзгерісімен бірге өзгермейді. Осындай жүйелердің күйлері өтпелі функциямен анықталған кезде уақыт санаудан тәуелсіз.

Мысалы, берілген кіреберіс әсері $\omega(t)$, Ω жиынынан болса және жүйедегі күйлер өтпелі функциясы $\varphi(t; t_0, x, \omega)$, онда оның τ ығыстыру уақыты тура осындай мәндегі күйлер өтпелі функциясын да ығыстырады, осы кезде функцияның түрі өзгермейді (2.16-сурет).



2.16-сурет

Осындай жүйелердің анықтамасы дәлірек келесі түрде беріледі.

2.3. Анықтама. Динамикалық жүйе стационарлы болу үшін (әлі де параметрлері уақыттан тәуелді болуы үшін), келесі шарттар орындалуы тиіс:

1. Жарамды Ω кіреберіс әсерлер кеңістігі кез келген $t, \tau \in T$ үшін барлық $\omega_1(t) = \omega(t + \tau)$ функцияларынан тұрады.

2. Барлық $\tau \in T$ үшін келесі теңдеу орындалады:

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t + \tau; t_0 + \tau, x, \omega(t + \tau)] . \quad (2.16)$$

3. $y(t) = \eta[t; x(t)]$ шығыс шамаларын анықтайтын $\eta: T \times X \rightarrow Y$ бейнесі t – дан тәуелді емес, яғни келесі теңдік орындалады: $y(t) = \eta(x)$.

$$y(t) = \eta(x).$$

T барлық нақты сандар жиыны болғанда, динамикалық жүйе уақыты үзіліссіз жүйе болады. T бүтін сандар жиыны болғанда, жүйе дискретті уақыты бар жүйе болады.

2.4. Жүйелерді басқару

Алдыңғы тақырыпта анықталған динамикалық жүйенің анықтамасында динамикалық жүйе, басқару объектісі ретінде қарастырыла алатындығы анықталған. Жүйе күйлерінің кейбір алдын ала берілген өзгерістеріне сәйкес, кіреберіс әсерлерін – *басқару* деп атайды.

Енді басқару түсінігін нақтылап, оған бірнеше анықтама беру керек. Басқарылатын объект алдын ала белгілі заңдар бойынша өзгеруі қажет. Осы өзгерістің сапасы, берілген критерий бойынша анықталады. Сонда, басқару есебі сондай кіреберіс әсерлерді тауып, олардың әсерінен жүйе өзгерісі – осы критерийдің тиімді мәніне сәйкес болуы тиіс. Осындай басқару – *тиімді басқару* деп аталады да, басқару есебінің мазмұнын құрады.

Жоғарыда енгізілген динамикалық жүйе деген ұғымға сүйене отырып, басқару есебін жалпы түрде қарастырамыз.

Басқару объектісі ретінде динамикалық жүйені 2.1 анықтамаға сәйкес аламыз. Енді басқару объектісінің $x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ мәндерімен берілген, күйдің өтпелі функциясын алайық:

$$\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X,$$

және $y(t) = \eta[t; x(t)]$ мәндері бар шығаберіс функциясын табайық:

$$\eta: T \times X \rightarrow Y.$$

$x(t)$ объектінің күйі өзгергенде, оның шығаберіс шамасы да өзгереді, яғни берілген t уақыт мезеті үшін $T \times X \times Y$ жиынының да, (x, y) жұбын анықтауға болады. Осы жиынның элементтері берілген (x, y, t) мәндері болып табылатын, $S_0 \subset T \times X \times Y$ ішжиынын ерекшелейміз. S_0 ішжиынын – *мақсат жиыны* деп атайық. Ω жиынында Ω_0 ішжиынын ерекшелейміз. Оны – *жарамды басқарулар жиыны* деп атаймыз.

Егер (x_0, t_0) оқиғасы, яғни $y(t_0)$ шығаберіс шамасында шаманың көп мәні болса:

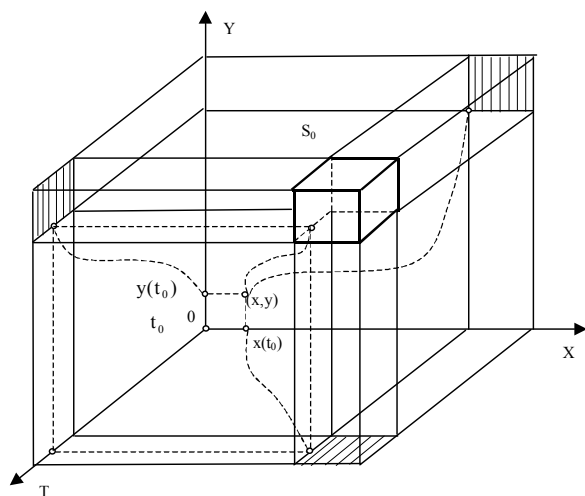
$$\varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t)].$$

S_0 жиынымен қиылысатындай етіп түрлендіретін $u(t) = \omega(t)$ кіреберіс әсері табылса, (жарамды басқару жиынынан), онда осы процесс жүретін t_1 уақытын – *жету уақыты* деп атайды (2.17-сурет).

Ω_0 жиынында осындай түрлендіруді қамтамасыз ететін, кіреберіс әсердің қажет еместігін айтуға болады. η функцияларымен анықталатын, x объектінің жағдайы мен оның қасиетінен, u және y кіреберіс және шығаберіс шамаларының мәндеріне тәуелді кейбір нақты

$$I = I(u, y, x, \varphi, \eta, t)$$

функциясын жасайық.



2.17-сурет

Олай болса, объекті (x_0, t_0) қалпынаң $[x(t_1), t_1]$ қалпына ауыстыратын $u(t)$ басқаруы болғанда I функциясы

$$I_1 = I_1 \{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t_1; t_0, x(t_0), u], \eta[t_1; x(t_1)], t_1\}$$

тең, нақты сан мәнін алады. Осы функцияның басқару сапасын — *шығындар функциясы* деп атайды.

Функцияның мәні азайған кезде, басқарудың сапасы жоғарылайды. Осыған сүйеніп, басқарудың жалпы есебінің анықтамасын келтіре аламыз [1].

2.4. Анықтама. Келесі шарттармен жасалған математикалық ұғым басқарудың жалпы есебі деп аталады:

1. Басқару объектісі — $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$ күйлердің ауыспалы функциясы мен $\eta[t; x(t)]$ шыға беріс функциясы бар, динамикалық жүйе болып, табылады. Басқару объектісі үшін $S_0 \subset T \times X \times Y$ мақсат жиыны мен $\Omega_0 \subset \Omega$ жарамды басқарулар жиыны көрсетілген.

2. Басқарудың сапасына шығындау функциясы берілсе

$$I = I(u, y, x, t, \varphi, \eta)$$

және берілген t_1 жету уақыты, t_0 бастапқы уақыт кезінде, $x(t_0)$ -дың бастапқы қалпы үшін, басқарудың сапасына шығындау функционалы алынады:

$$I_1 = I_1 \{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t_1)], t_1\} \quad (2.18)$$

3. Әрбір берілген (t_0, x_0) күйлер үшін (t_0, x_0) өзгерілген мәндері, $\varphi[t; t_0, x(t_0), u]$, $\eta[t; x(t)]$ мәндері S_0 мақсат жиынымен қиылысатындай етіп түрлендіретін және

басқарудың сапасын шығындау функционалын минимумдайтын $u(t) \in \Omega_0$ жарамды басқаруды анықтайды:

$$\{\varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t)]\} \cap S_0. \quad (2.19)$$

Бұл берілген анықтама жалпы жүйені анықтайды.

Алдында белгіленгендей, динамикалық жүйелердің негізгі тобы қарапайым динамикалық жүйелер болып табылады. Олардың жағдайларының өтпелі функциялары, дифференциалды теңдеулердің шешімі болып табылады. Бұл жағдайда басқару сапасын, шығындар функциясын дәлірек жазуға болады. Осы функция, нақты функция L_K түрінде берілсе:

$$L_K = L_K \{t_1; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\},$$

онда осы функция $u(t)$ басқаруының, t_1 жеткілікті уақытына және φ күйдің өтпелі функцияның түріне тәуелділігін көрсетеді. Осы жағдайда L_K функциясы міндетті түрде тандалуы керек, мұндағы негізгі мақсат — оның мәнін азайту, сонда ғана басқару сапасы жоғарылайды. Сонымен, үздіксіз нақты функцияның $L_n = L_n \{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u], u(t)\}$, $u(t)$ басқаруының тәуелділігін, ағымды уақыт t және φ жағдайындағы өтпелі функцияның, $[t_0, t_1]$ аралығында интегралдауын анықтауға болады.

Басқару сапасының шығындар функциясын, мынадан көруге болады:

$$I_1 = L_K \{t_1; \varphi[t_1; t_0, x(t_0), u]\} + \int_{t_0}^{t_1} L_n \{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u], u(t)\} dt. \quad (2.20)$$

L_K функциясы осы өрнектің бірінші қосылғышы, t_1 уақыттың соңғы мезетінде, басқару сапасын сипаттайды да, функционалдың *терминалды құрастырушысы* деп аталады.

Екінші қосылғышы t_0 мезеттегі қалптан t_1 мезеттегі қалпқа өту процесінің сапасын сипаттайды және өтпелі (әліде стационарлы) функционалдың құрастырушысы деп аталады.

Қарапайым динамикалық жүйе сызықты болған кезде, туындатқыш функция былай беріледі:

$$f[t; x, u(t)] = F(t)x + G(t)u,$$

ал шығаберіс функцияның түрі мына тендеумен анықталады:

$$\eta(t; x) = H(t)x.$$

Басқарудың сапасын бағалауда ең көп тараған критерийлердің бірі - квадраттық критерий. Ал басқару сапасының шығындау функционалының анықтамасы мынадай.

Бейнелеу берілгенде $z: T \rightarrow Y$, оның мөндері ретінде $y = z(t)$ функцияның шамалары болып табылады. Осы бейнелеуді шығаберіс сигналы деп атайық. Онда, берілген шығаберіс сигналымен шығаберіс шаманың, ағымды мәнінің арасындағы айырымы басқарудың қателігін сипаттайды:

$$\varepsilon(t) = z(t) - y(t) = z(t) - H(t)x(t),$$

сонда басқару сапасының шығындану функционалы жай түрде былай жазылады:

$$I_1 = |\varepsilon(t_1)|^2 = \int_{t_0}^{t_1} [|\varepsilon(t)|^2 + |u(t)|^2] dt.$$

Осы жағдайда басқару есебі келесі түрде қойылады да, басқарудың қателігін және басқаратын органдарының энергия шығымын азайтып, минималдайтын басқаруларды $u(t)$ табу керек.

Енді басқару заңы деген ұғымды анықтайық. Басында айтып кеткендей, кері байланыс принципі, автоматтық реттеу

теориясының негізі болып, техникалық қосымшаларда кеңінен, жан-жақты пайдаланылады. Оған қарамастан, осы принциптің әдістемелік негізі көп уақыт бойы түсініксіз болып келді. Осыны дәлелдейтін жағдай, автоматтық басқару теориясы бойынша оқулықтарда, басқару жүйелері – *тұйықталған* және *тұйықталмаған* жүйелерге бөлінді. Осы жерде, ұғымның техникалық жағы әдістемелік жағынан жоғары болып кетеді.

Жоғарыда енгізілген динамикалық жүйенің басқару есептерінің анықтамалары, басқару заңының ұғымын анықтауға алып келеді. Расында, күйдің өтпелі функциясы $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ жүйенің қалпын анықтайды. Ал, онда жүйенің күйі t_0 мезетінде және $[t_0, t)$ аралығында берілген ω кіреберіс әсерлердің кесіндісі, t уақыт мезетіндегі шығаберіс шамалардың мәндерін де анықтайды. Сонымен, қажетті басқаратын әсерлерді $u(t) = \omega(t)$ анықтау үшін, барлық ақпараттар жүйенің ағымды күйімен беріледі.

Басқару заңы деп аталатын бейнелеу келесі түрде жазылады:

$$k: T \times X \rightarrow U,$$

оның мәндері $u(t) = k[t; x(t)]$ шамалар, басқарулар болып табылады.

Жалпы жағдайда k функциясын анықтау күрделі, оның себебін келесі арақатыс көрсетеді:

$$u(t) = k\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\},$$

жарамды басқарулардың Ω жиынына қойылатын, шарттар k функцияның бар болу аймағын көрсетпейді.

Осыған орай, күйлер айнымаларын анықтау үшін, шығаберіс шамаларының

мәндерін білу қажет. Сонда кері түрлендіру операциясының анықталуы тиіс:

$$\eta^{-1} : Y \rightarrow X$$

оның мәндері ізделінген шамалар болып табылады:

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)].$$

Осындай операция орындалса, онда $x(t)$ анықтау дәлдігін, әлі де $x_0(t)$ қалпын бағалау әдістерін табу керек.

Автоматтық басқару ұғымының қатаң анықтамасын берейік.

2.5. Анықтама. Динамикалық жүйелерде автоматтық басқару уақыт бойынша өтетін процесс. Осы процесс келесі шарттарды қанағаттандыруы қажет:

1. Анықтамасына лайық басқару объектісінің мақсат жиыны $S_0 \subset T \times X \times Y$ және жарамды басқарулар жиыны $\Omega_0 \subset \Omega$ берілуі тиіс;

2. Басқару заңы деп аталатын бейнелеу анықталуы қажет:

$$k : T \times X \rightarrow U, \quad (2.21)$$

оның мәндері ретінде басқарулардың шамалары болып табылады:

$$u(t) = k\{t; \varphi[t; t_0, x(t_0), u]\} \quad (2.22)$$

3. Басқарулар $u(t) \subset \Omega_0$, басқару объектісінің $x(t_0) \in T \times X$ қалпынан $x(t) \in S_0$ қалпына, ауысу уақыты деп аталатын $t_1 - t_0$ уақыт кесіндісіне ауыстырып, келесі басқару сапасының шығындау функционалын минималдайды:

$$I_1 = I_1 \{u, y(t_1), x(t_1), \varphi[t; t_0, x(t_0), u], \eta[t; x(t_1)], t_1\}.$$

4. Шығаберіс функциясы $\eta(t, x)$, y шығаберіс шаманың S_0 мақсат жиынына кіруін көрсетеді. Сонда $x(t) \in S_0$ теріс бейнелеуді былай табуға болады:

$$\eta^{-1} : Y \rightarrow X \quad (2.23)$$

оның мәндері келесі тендеумен анықталады:

$$x(t) = \eta^{-1}[y(t)]. \quad (2.24)$$

5. Шығаберіс шаманың $y(t_0) : t_0 \leq t$ мәні жүйенің күйлерін $x(t_0)$ бағасын көрсетеді.

Бұл анықтамада, шарттардың бір бөлігі автоматтық басқару есебін орындайтын жүйені құрастырады. *Pemteyiu* деп — жүйенің математикалық моделін атайды. Оның құрамына басқару объектінің қалпын бағалайтын және басқару заңын құрастыратын элементтер кіреді. Басқару объектінің құрылымды логикалық сұлбасы 2.18-суретте көрсетілген. Басқару объектісіне әсерлеп Ω_0 жиынында жататын u басқарулар, жүйе күйлерінің шамаларының $x \in X$ және шығаберіс шамаларының $y \in Y$ бір мәндерін береді. Шығаберіс шамалардың мәндері арқылы жүйенің x күйлері, сонымен қоса, X жиынына алынған x бағаларды басқару заңын k құрастырады. Осы заң арқылы Ω_0 жиынынан u басқарудың қажетті шамасы табылады. Басқару сапасы — басқару сапасының шығындау функционалы I_1 арқылы, ал басқару мүмкіншілігі x және y мәндерінің мақсат жиынында S_0 жатуымен бақыланады.

Жоғарыда келтірілген анықтамалар, басқару мәселелерімен байланысқан жүйелер теориясының бірқатар есептерін көрсетеді.

Жүйенің идентификация есебі. Бұл жерде басқару жиынының $u(t) \in \Omega_0$ бірмәнде сәйкесетін, шығаберіс шамалардың жиынын көрсетуге болады. Осы сәйкестікті бір топ функциялар құрастырады.

Сәйкестікті құрастыратын функциялар келесі бейнелеумен анықталады:

$$f_r : T \times \Omega \rightarrow Y,$$

әрбір бейнелеу, бір басқаруға, бір шығаберіс шаманы $y(t)$ сәйкестеп, қойып, оны келесі теңдікпен көрсетеді:

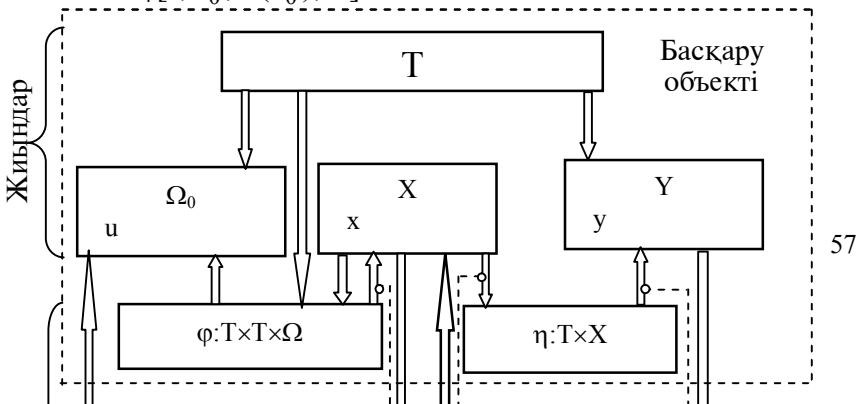
$$y(t) = f_{ri}[u(t)], \quad (2.25)$$

мұндағы i - $y(t)$ тәуелділердің нөмірлері.

Осыдан күрделі жағдайларда $u(t)$ және $y(t)$ шамаларының арасындағы қатынас, кейбір F және M айнымалылардың функциялары арқылы орналастырылады:

$$F[y(t)] = f_{ri}[M(u(t))]. \quad (2.26)$$

Осындай динамикалық жүйелердің математикалық модельдерді құрастыру есебі, идентификацияның есебі болып табылады. Көп жағдайларда идентификацияның мақсаты бойынша, (2.25) (2.26) теңдеулермен берілген, эксперимент арқылы табылған нәтижелерден, жүйенің қасиеттерін көрсететін, күйдің өтпелі функциясын $\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ табу қажет.



2.18-сурет

Келесі қарастырылатын есепте, жүйенің басқарылуы мен бақылауын табу керек. Бұл есепте мағынасы берілген шарт бойынша, жүйенің $x(t_0)$ қалпынан $x(t_1)$ қалпына ауысатын басқаруларды $u(t)$ табу керек. Ал, бұл мақсатты орындау оңай емес. Расында, алдын ала қойылған мақсатқа лайық, сәйкес басқарулардың жарамды жиыны, $u(t) \in \Omega_0$ бар-жоғы белгісіз. Осы жиын, келесі жиынның $\{x(t), y(t)\}$ және шектелген уақытта t_1 , берілген мақсат жиынымен S_0 қиылысын қамтамасыз етуі кажет. Кейбір жағдайларда Ω_0 жиынының ішжиыны, осы қиылысты қамтамасыз етеді. Сонда, $u(t)$ басқарулардың бөлігін, басқару есебін толық

шеше алмайды. Осы жағдайда жүйе – *басқарылмайтын жүйе* деп аталады.

Сонымен, динамикалық жүйенің басқарылуын анықтау үшін келесі шарттарды орындау қажет: күйлердің өтпелі функциясының $\varphi: T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ мәндері $x(t) = \varphi[t; t_0, x(t_0), \omega]$ бар болуын және оған сәйкес барлық басқарулар $u(t) \in \Omega_0$ нөлге тең болмауы керек.

Жүйені басқару үшін оның күйлерінің $x(t)$, шығаберіс мәндерін $y(t)$ арқылы анықтаймыз. Былайша айтқанда, бейнелеу солай $\eta: Y \rightarrow X$ болуы қажет. Осындай нөлге тең емес бейнелеулерді, барлық $y(t) \in Y$, $x(t) \in X$ сәйкес, анықтау есебі, динамикалық жүйенің басқарулығын анықтау есебі деп аталады.

Келесі берілген есеп, тиімді басқару есебі деп аталады. Бұл есеп жүйелер теориясының негізгі мақсатының бірі. Осы есепте басқару заңдарын $k: T \times X \rightarrow U$ табу керек. Олар берілген жиындар X, Y, Ω_0 шығындау функционалдың минимальды сапасын қамтамасыз етеді:

$$I_1 = I_1(u, y, x, \varphi, \eta, t_1).$$

Осы есеп тиімді басқарудың есебі болып табылады.

III. СЫЗЫҚТЫ ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР

Сызықты динамикалық жүйе, физикалық түсініктеме түрінде, суперпозиция принципіне сүйенеді. Осы принципте бірнеше элементтен құрылған, жүйенің кіреберісіне берілген әсер нәтижесінде, шығаберіс толық айнымалыға айналады. Осы толық шығаберіс айнымалының мәнінің әрқайсысы, элементтің шығаберіс айнымаларының қосындысына тең болады. Осы жүйелерде өтіп жатқан динамикалық процестер, сызықты дифференциалды теңдеулермен

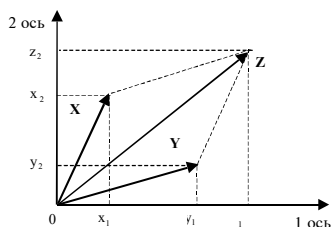
жазылады. Осы жағдайды ескере отырып, жүйелер теориясының сызықты кеңістіктер туралы тарауларын қарастырамыз.

3.1. Сызықты кеңістіктер

Жоғарыда енгізілген метрика ұғымы, жиын элементтерінің аралық көрсеткіші, толық метрикалық кеңістіктің сипаттамаларын көрсетпейді. Метрикалық кеңістіктің элементі ретінде вектор ұғымын енгізейік. Вектор ретінде, бағыты бар кесінді қарастырылады. Векторлардың қасиеттерін қарастыру үшін, екі өлшенген метрикалық кеңістікті жазықтықта екі координат осьтерімен (1 және 2) көрсетейік (3.1-сурет).

Осы кеңістікте X, Y, Z векторларының 1 және 2 осьтеріне проекцияларын $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ қарастырғанда, Z векторының, X және Y векторларының координаттары келесі теңдеумен анықталады:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 \\ z_2 &= x_2 + y_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$



3.1-сурет

Бұл жерде Z векторы X және Y векторларының қосындысына тең болады:

$$Z = X + Y.$$

Векторлар қосындысы, координаттар осіндегі проекциялардың қосындысы, яғни сәйкес сандардың қосындысы ретінде анықталғандықтан, келесі қатынастар ақиқат болады:

$$X + Y = Y + X,$$

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z,$$

егер $Y = 0$ ($y_1 = 0, y_2 = 0$) болса, онда $X + Y = X$.

Егер $Z=0$ десек, онда (3.1) қатынасы негізінде аламыз: $z=0$, $x_1=-y_1$, $x_2=-y_2$, демек, егер $X=-Y$ болса, $X=-Y$ векторлары болады және $X + Y = 0$. X векторның ұзындығын $\|X\|$ арқылы белгілеп, вектордың проекцияларын $\alpha + \beta$ тұрақты санына көбейтіп 3.1-суреті негізінде аламыз:

$$(\alpha + \beta)^2 x_1^2 + (\alpha + \beta)^2 x_2^2 = (\alpha + \beta)^2 \|X\|^2,$$

немесе

$$\alpha \|X\| + \beta \|X\| = \|X\|,$$

мұндағы $\|X\|$ – X векторының бағытымен сәйкес келетін жаңа вектордың ұзындығы. Демек, $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$. Сәйкесінше келесі теңдіктер ақиқат болады: $(\gamma\delta)X = \gamma(\delta X)$, мұндағы γ және δ – тұрақты сандар,

$$\alpha Z = \alpha X + \alpha Y,$$

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y.$$

Векторлардың кейбір қасиеттерінде, қарапайым екі өлшемді кеңістіктегі векторлар осындай болады. Бұл қасиеттерді кез келген метрикалық кеңістік жағдайына жалпылауға болады.

Сызықты кеңістіктің анықтамасын келесі түрде береміз.

3.1. Анықтама. X_c жиыны сызықты (немесе векторлық) кеңістік деп аталады. Осы жиынға келесі аксиомаларды қанағаттандыратын жиын элементтерін (векторларын) қосу, санға (скаляр) көбейту амалдары анықталса:

1. $X + Y = Y + X$, барлық X үшін, $Y \in X_c$ (қосындының коммутативтігі).

2. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$, барлық X, Y үшін, $Z \in X_c$ (қосындының ассоциативтігі).

3. $X + 0 = X$, барлығы үшін $X \in X_c$ болатындай, $0 \in X_c$ нөлдік элемент (нөлдік вектор) бар болады.

4. $X + Y = 0$ болатындай, кез келген $X \in X_c$ үшін қарама-қарсы элемент $Y \in X_c$ бар болады.

5. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$ кез келген $X \in X_c$ үшін және кез келген α және β үшін, мұндағы α және β — сандар (көбейтудің дистрибутивтігі).

6. $(\gamma\delta)X = \gamma(\delta X)$ кез келген $X \in X_c$ үшін және кез келген γ және δ үшін (көбейтудің ассоциативтігі).

7. $\left. \begin{array}{l} 1.X = X, \\ 0.X = 0, \end{array} \right\}$ барлық $X \in X_c$ үшін.

8. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$ барлық $X, Y \in X_c$ және кез келген α саны үшін.

Сызықты кеңістік аксиомалары комплексті кеңістіктерге де ақиқат болады.

Сызықты кеңістік өзінің векторлары ретінде, 3.1 анықтамасының аксиомаларын қанағаттандыратын, кез келген физикалық табиғат жиынының элементтері болуы мүмкін. Кейінірек, бұл сызықты жүйелер теориясы үшін маңызды мәселе болады.

Енді сызықты кеңістіктің ең маңызды қасиеттерінің бірін қарастырайық. Жазықтық түріндегі кеңістіктің ең қарапайым түрін қарастырып, өзара перпендикуляр болатын X және Y екі векторларын көрсетейік. Жазықтықта X және Y векторлары көптіктің шекаралары болатындай, белгі Ω нүктелер жиынын берейік (3.2а-сурет).

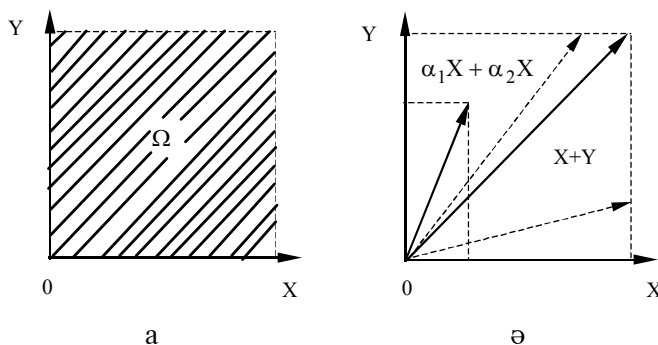
3.1 анықтамасының (1) және (5) аксиомаларының формулаларын қолдана отырып, мынаны аламыз:

$$Z + \alpha_1 X + \alpha_2 Y, \quad (3.2)$$

мұндағы $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$.

Егер 3.1 анықтамасының 7 аксиомасын қолдансақ, екі шектері X және Y векторларының қиылысу нүктесіне және Ω жиынының кез келген нүктесіне тірелетін әрбір вектор алынған. α_1 және α_2

сандарының мәндері арқылы (3.2) қатынастарымен анықталады (3.2 ә-сурет).



3.2-сурет

Негізінде X және Y осіндегі кез келген координаттарды 0 және 1 аралығындағы α_1 және α_2 сандарына, X және Y векторларының ұзындығының шамасына көбейтіп, табуға болады.

Ал, X және Y векторлары бір-бірінен сызықты кеңістіктер үшін, бекітілген көбейту және қосу амалдары арқылы алынуы мүмкін емес. Басқаша айтқанда, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ болғанда ғана $X \neq 0$ және $Y \neq 0$ болғанда, $\alpha_1 X + \alpha_2 Y = 0$ теңдеуі ақиқат болады.

Біздің мысалда Z векторлар жиыны сызықты кеңістік құрады. Оның барлық элементтері (векторлары) (3.2) формуласы бойынша X және Y векторлары арқылы алынған.

Бұл жағдайда Z сызықты кеңістігі X және Y векторларына тартылып жабылған деп атайды.

Егер X_c сызықты кеңістікте бос емес элементтер (векторлар) жиыны $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ бар болса, онда олардан — *сызықты комбинация* деп аталатын қосынды шығуы мүмкін:

$$Z = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n, \quad (3.3)$$

мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – сандар. Бұл элементтер (векторлар) жиыны сызықты тәуелсіз деп аталады, егер келесі теңдік:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n = 0 \quad (3.4)$$

болса, барлық $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ сандары нөлге тең, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, болғанда ғана орын алатын болады.

Егер (3.4) теңдеуде ақиқат болатын нөлге тең емес α_i сандары табылса, онда векторлар жиыны – *сызықты тәуелді* деп аталады.

Мысалы: X_c сызықты кеңістігінің әрбір элементтері, (векторлары) $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ векторларының (3.3) сызықты комбинациясы ретінде алынып, белгілі бір жиын белгіленген. Бұл жиын $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ элементтер (векторлар) жиынына керіліп жабылған $Z_c \subseteq X_c$ сызықты – *ішжиын* деп атайды.

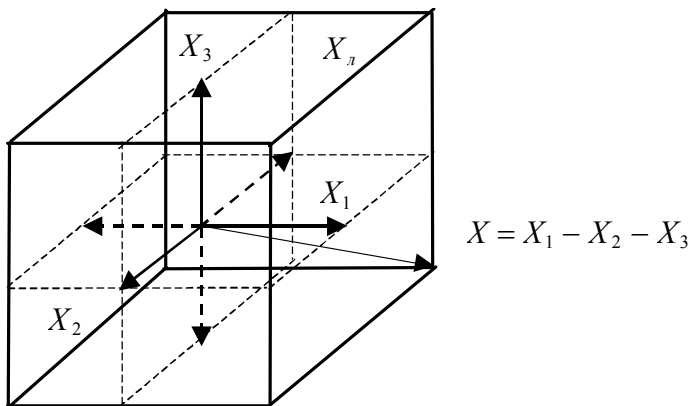
Координаттар жүйесі мен базистерді қарастырғанда, X_c сызықты кеңістігінен n векторларына $X_1, X_2, \dots, X_n$ сызықты тәуелсіз жиын құратындай етіп аламыз. Жоғарыда қарастырылған екі өлшемді кеңістікте X және Y сызықты тәуелсіз векторлары, тік бұрышты координаттар жүйесін (3.3 әсурет) құрады да, сәйкесінше бұл жиынды, n өлшемді кеңістіктегі өзара перпендикуляр координаттар осі деп қарастыруға болады. Онда осы кеңістіктің кез келген X векторын ось бойынша проекцияларға жіктеуге болады:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n, \quad (3.5)$$

мұндағы α_i — X_i осьтері бойынша, өлшеу масштабтарын анықтайтын сандар. Жіктелген шарт бойынша сызықты тәуелсіз $X_1, X_2, \dots, X_n$ векторларының сызықты комбинациясы болады. Демек, X_c сызықты кеңістігі түгелімен $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ векторлар жиынына тартылып жабылған.

X_c кеңістігі тартылып жабылған $X_1, X_2, \dots, X_n$ сызықты тәуелсіз векторлар жиыны — осы кеңістіктің базисі деп аталады.

3.3-суретінде мысал ретінде базисі X_1, X_2, X_3 осьтері түрінде X_c үш өлшемді кеңістігі келтірілген.



3.3-сурет

Басы базис осьтерінің қиылысу нүктесінде, ал соңы — параллелепипед көлемінің кез келген

нүктесінде болатын кез келген X векторы келесі формуламен көрсетіледі:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 ,$$

мұндағы α_i сандары $-1 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$ аралығында өзгереді.

X_c кеңістігінің кез келген элементі (векторы) базис көмегімен анықталатыны түсінікті. Мысалы: X векторын екі сызықты комбинациямен көрсетуге болады:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n , \\ X &= \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n . \end{aligned}$$

Шарт бойынша бұл комбинациялар сызықты тәуелсіз, демек олардың айырымы:

$$(\beta_1 - \alpha_1)X_1 + (\beta_2 - \alpha_2)X_2 + \dots + (\beta_n - \alpha_n)X_n$$

барлығы $\beta_i - \alpha_i$ нөлге тең болғанда ғана, нөлге тең болады. Онда $\alpha_i = \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), яғни X векторы базис көмегімен, бір түрде ғана көрсетіледі.

X_c кеңістігін осы кеңістіктің қалған векторларының кез келген жиынтығынан, сызықты тәуелді векторын, X_c жиынынан өзгертпей, алып тастауға болады.

X_c кеңістігінің кез келген X векторын, базис көмегімен көрсетілуін X векторының $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ базисі бойынша жіктелуі деп, ал $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сандары — *жіктеудің координаттары* деп аталады.

X_c сызықты кеңістігіндегі сызықты тәуелсіз векторларының n саны — осы *кеңістіктің өлшемділігі*

деп аталады. Кеңістіктің өлшемділігі $\dim X_{\mathcal{L}}$ деп көрсетіледі. Әрбір сызықты кеңістіктің кем дегенде, бір базисі болады. Оның көптеген әртүрлі базистері болуы да мүмкін.

Сызықты кеңістіктердің екі мысалын қарастырайық.

Дифференциалды теңдеудің шешімдер кеңістігі. Қандай да бір $x(t)$ функциясы n -дәрежелі сызықты дифференциалды теңдеудің шешімі болса:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)x = 0$$

оның алғашқы шарттары

$$x_v = \left. \frac{d^v x}{dt^v} \right|_{t=0}, \quad v = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Бұл теңдеудің шешімі мына түрде жазылуы тиіс:

$$x(t) = \varphi_1(t)\gamma_1 + \varphi_2(t)\gamma_2 + \dots + \varphi_n(t)\gamma_n,$$

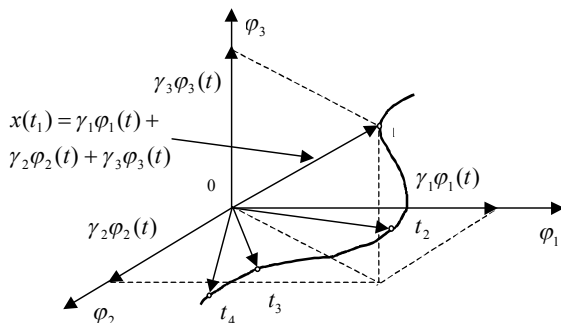
мұндағы $\varphi_i(t)$ —сызықты тәуелсіз функциялар болатын дербес

шешімдер;

γ_i — алғашқы шарттарға тәуелді тұрақтылар.

Осы өрнек $\varphi_i(t)$ функцияның сызықты тәуелсіз комбинациясы болып есептеледі, t уақытының тұрақты мәніне бұл функцияларының n -өлшемді сызықты кеңістігінің базисін құрайтын, векторлары ретінде анықтаймыз. $x(t)$ функциясының (енді ол да вектор деп қарастырылады) барлық мәндері, n -өлшемді сызықты кеңістікті құрайды. Бұл кеңістік элементтерінің орналасуы уақыт өткен сайын үздіксіз өзгеріп тұрады. Мұнда γ_i тұрақтыларының нақты

мәндерімен анықталатын әрбір $x(t)$ векторы өзінің соңындағы кеңістікте $x(t)$ вектор — функциясының уақыт ішіндегі өзгеруін сипаттайтын, траектория сызады. $\varphi_i(t)$ базистік векторлар кеңістікте өзінің бағытын өзгертпей, уақытқа байланысты өзінің ұзындығын өзгертеді. 3.4-суретте мысал ретінде қарастырылған кеңістіктің үш өлшемді кезі көрсетілген.



3.4-сурет

Бұл — сигналдар спектрі бойынша шектелген кеңістік. Т интервалында уақыт функциясы түріндегі $x(t)$ сигналдар жиынын қарасақ, ол өзінің комплексті спектрінің шектелгендігімен ерекшеленеді:

$$X(j\omega) = \begin{cases} X(j\omega), & \text{егер } \omega \leq \omega_c, \\ 0 & , \text{егер } \omega > \omega_c, \end{cases}$$

мұндағы $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$, $\omega_c = 2\pi F$, F - сигнал спектрінің ені.

Белгілі санау теоремасына сәйкес қарастырылған уақыт функциясы, жуық тізбек түрінде көрсетіледі:

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_c(t - k\Delta t)}{\omega_c(t - k\Delta t)}, \quad (3.6)$$

мұндағы $\Delta t = 1/2F$.

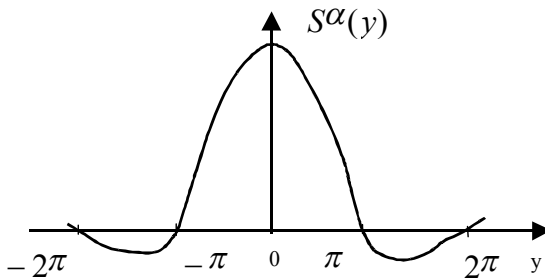
n шексіздікке ұмтылғанда бұл жіктеу дәл болады.

2-тараудың мысалында бұл жағдай $x(t)$ функциялар жиыны, метрикалық кеңістік құратынын көрсеткенбіз. Енді оның сызықты болатынын көрсетейік.

Келесі санау функциясын қарастырайық:

Оның графигі 3.5-суретінде көрсетілген. $Sa(y)$

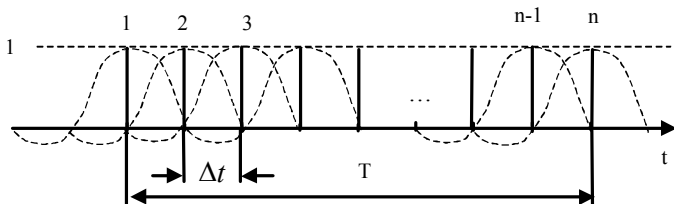
функциясы $y = i\pi$ ($i = 1, 2, \dots$) барлық нүктелерінде нөлге, ал $y = 0$ нүктесінде бірге тең.



3.5-сурет

Санау функциясы ортогональ функциялар сыныбына жатады, яғни оның сызықты комбинациясы

сызыққа тәуелсіз. Уақыттың $t = k\Delta t$ ($k = 1, 2, \dots, n$) дискретті кезеңдерінде $Sa[\omega_c(t - k\Delta t)]$ функциясы бірге тең мәндерге ие болады да, T уақыт аралығының санау функциясына нысанды (3.6-сурет) n бірлік импульстар тізбегін құрады. Бұл импульстер сызықты тәуелсіз болғандықтан, оларды белгілі бір n -өлшемді сызықты кеңістіктің базисі ретінде қабылдауға болады. Кеңістіктің өзі, (3.6) формуласымен анықталатын функциялар жиынынан құралады. Жіктеу координаттары, $k\Delta t$ дискрет нүктелеріндегі $x(k\Delta t)$ функцияның мәні болады. Бірақ $x(t)$ функциясының, T шектелген уақыт аралығына дәл көрсету үшін, сигналдың F жиілік жолағын шексіз кеңейту керек. Онда $F \rightarrow \infty$ $\Delta t \rightarrow 0$ болғаннан бастап санау саны, n — да шексіздікке ұмтылады. Бұл жағдайда қарастырылған сызықты кеңістік, шексіз өлшемді болады.



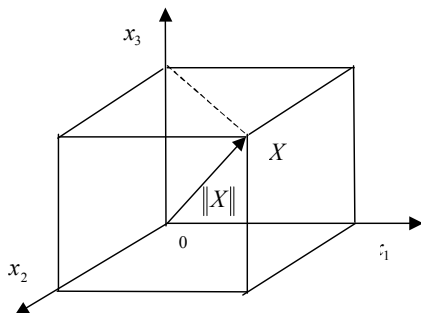
3.6-сурет

Нормаланған және банах кеңістіктерін қарастырайық. Жоғарыда вектор және базис түсініктері туралы айтсақ, олар вектордың ұзындығы түсінігіне келтіреді. Осылайша, X векторын үш өлшемді декарт жүйесінде қарастырсақ, онда оның ұзындығын осы вектордың проекцияларында салынған

(3.7-сурет) тік бұрышты параллелепипедтің дигоналы ретінде, мына формуламен көрсете аламыз:

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

$\|$ белгісі вектордың ұзындығын көрсетеді. Бірақ метрикалық кеңістік енгізген кездегідей, вектор ұзындығының қасиеттерін анықтайтын кейбір аксиомалар орындалатындай етіп, вектор ұзындығын әртүрлі түрлерде енгізуге болады. Енді “ұзындық” термині шартты болатыны түсінікті. Оның орнына “вектор нормасы” терминін қолданады.



3.7-сурет

3.2. Анықтама. Сызықты X_c кеңістігі нормаланған деп аталса, әрібір $X \in X_c$ векторына келесі аксиомаларды қанағаттандыратын, норма (белгіленуі $\|X\|$) деп аталатын нақты сан сәйкес келсе және

1. $\|X\| > 0$ және $\|X\| = 0$, $X = 0$ болғанда.
2. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (үш бұрыш теңсіздігі).
3. $\|\alpha X\| = |\alpha| * \|X\|$ (норманың біртектілігі).

$$\rho(x, y) = \|X - Y\|, \quad (3.7)$$

мұндағы $\|X - Y\|$ — екі векторлардың айырымының нормасының өрнегі. Метрикалық кеңістік аксиомаларын жоғарыдағы аксиомалармен салыстырсақ, сызықты

нормаланған кеңістік — метрикалық болатыны да байқалады. Егер келесіде арнайы айтылмаса, сызықты нормаланған кеңістіктің метрикасы (3.7) арақатысымен анықталады.

Егер X_c метрикалық кеңістік элементтерінің кез келген тізбегі, белгілі бір $X \in X_c$ шегіне жинақталатын болса, метрикалық кеңістік толық деп аталады. Біз үшін сызықты кеңістіктің кез келген нормасын, координаттар осьтері бойынша жинақталатын сандық немесе функционалдық тізбек түрінде көрсетуге болатындығы анық. Яғни, барлық ақырлы өлшемде нормаланған сызықты кеңістіктер толық болады.

3.3. Анықтама. Өзінің $\|X - Y\|$ нормасына қатысты толық болатын, нормаланған сызықты кеңістік *банах кеңістігі* деп аталады.

Енді банах кеңістігінің екі мысалын қарастырайық.

Сигналдар спектрі бойынша шектелген кеңістік. Жоғарыдағы мысалда қарастырылған:

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_c(t - k\Delta t)}{\omega_c(t - k\Delta t)},$$

формуласымен анықталатын сигналдар спектрі бойынша шектелген кеңістік сызықты және n -өлшемді болатынын көрсеттік. 2-тарауда бұл сигналдар үшін келесі метрика (2.24) табылған:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=1}^n [X(k\Delta t) - Y(k\Delta t)]^2},$$

сонымен бірге

$$\frac{1}{2F} \sum_{k=1}^n X^2(k\Delta t) = \frac{1}{2F} \sum_{k=1}^n Y^2(k\Delta t) = E_c,$$

мұндағы E_c — сигналдың толық энергиясы.

$\|X\|$ нормасын алу үшін $Y=0$ (3.7) формуласын енгізіп, өрнектерді ρ және E_c үшін қолданған жеткілікті. Нәтижесі былай болады:

$$Y = 0 \text{ болғанда } \rho(x, y) = \|X - Y\| = \|X\|,$$

$$\|X\| = \sqrt{2FE_c} \cdot 0$$

Бұл өрнек, қарастырылып отырған кеңістіктің вектор “ұзындығы” сигнал энергиясымен анықталатын сан екендігі айқын. Осы кеңістік банах кеңістігі болады, өйткені кез келген үздіксіз функциялардың, T жинақталатын функционалдық тізбегі - үздіксіз функция болады, яғни берілген кеңістікке тиісті функция.

Екінші мысалы - интегралданатын функциялар кеңістігі. (a, b) интервалында интегралданатын $f(t)$ функциялар жиыны болса. Ал, жиындағы нормасы келесі жолмен анықталса:

$$\|f(t)\| = \left[\int_a^b |f(t)|^s dt \right]^{1/s}, \quad (3.8)$$

мұндағы $1 \leq s \leq \infty$. $s = 2$ үшін норма келесі түрде болады:

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt},$$

бұл $n \rightarrow \infty$ ұмтылғаны үздіксіз болғаны жоғарыдағы мысалдың нормасына сәйкес келеді.

Бұдан біздің көретіміз, (3.8) нормасы 3.2 анықтамасының 1 және 3 аксиомаларын қанағаттандырады. 2 аксиомаға келетін, болсақ, $1 \leq s \leq \infty$ мәндері үшін келесі теңсіздік (Минковский теңсіздігі) ақиқат болады:

$$\left[\int_a^b |f(t) + g(t)|^s dt \right]^{1/s} \leq \left[\int_a^b |f(t)|^s dt \right]^{1/s} + \left[\int_a^b |g(t)|^s dt \right]^{1/s},$$

одан шығатыны:

$$\|f(t) + g(t)\| \leq \|f(t)\| + \|g(t)\|,$$

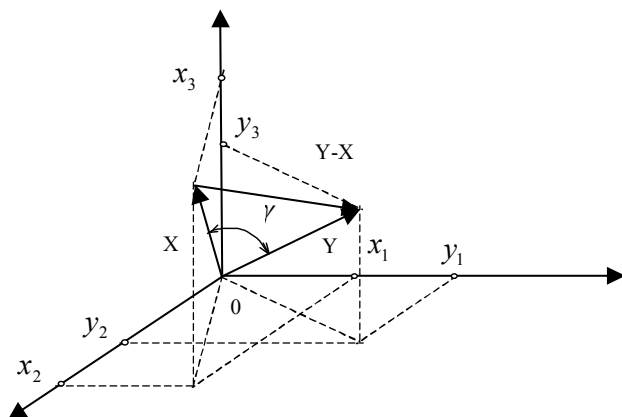
осылай, 2 аксиоманың шарттары қанағаттандырылады.

Интегралданатын $f_n(t)$ функциялардың кез келген тізбегі берілген жиынның $f(t)$ функциясына жинақталады. Бұл функциялар жиыны Лебег ұғымында интегралданады десек, сонда қарастырылатын сызықты нормаланған кеңістік, толық болатын болса, банах кеңістігі болып табылады.

Гильберт кеңістігін қарастырайық. Метрикалық кеңістікті тізбектеп қарастыру кезінде, бұл кеңістіктің элементі ретінде, вектор ұғымын, векторларға қолданатын амалдарды, (операцияларды) және вектор ұзындығы – норма ұғымдарын енгіздік. Векторлар арасындағы бұрыш ұғымын енгізсек, векторларды көбейту операциясын анықтауға мүмкіндік береді.

Ары қарай координаттар осіне сәйкесінше x_1, x_2, x_3 және y_1, y_2, y_3 проекциялары болатын X және Y векторлары бар үш өлшемді сызықты кеңістікті қарастырамыз (3.8-сурет). Векторлар арасындағы γ бұрышын енгізіп, X және Y векторларының көбейтіндісін анықтауға болады:

$$X * Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (3.9)$$



3.8-сурет

қарапайым болғандықтан, (3.7) формуласына сәйкес:

$$\left. \begin{aligned} \|X\| &= (X * X)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \|Y\| &= (Y * Y)^{1/2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

3.8-суретте айырма векторының ұзындығы болады:

$$\|Y - X\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\|X\| * \|Y\| * \cos \gamma \quad (3.11)$$

ал басқа жағынан:

$$\|X - Y\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2,$$

Біз жақшаларды ашып, (3.9), (3.10) және (3.11) арақатыстарын қолдана, аламыз:

$$X * Y = \|X\| * \|Y\| * \cos \gamma. \quad (3.12)$$

(3.9) және (3.12) формулалары қарастырылған үш өлшемді кеңістік екі вектордың скаляр көбейтіндісін анықтайды. Осы формулалардан шығатын нәтиже, скаляр көбейтіндісі сан (комплексі болуы да мүмкін). Векторлардың скаляр көбейтіндісі үшін арнайы белгі енгізілген:

$$X * Y = \langle X, Y \rangle.$$

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, ол *ортогональды* деп аталады. Ал геометриялық мағыналауын қарастырсақ, ортогональды векторлар арасындағы бұрыш $\pi/2$ тең.

(3.12) формуласынан белгілі: скаляр көбейтіндісі анықталған сызықты кеңістіктің нормасын келесі түрде өрнектеуге болады:

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}. \quad (3.13)$$

3.4. Анықтама. Сызықты кеңістікте, $\langle X, Y \rangle$ саны (нақты немесе комплексі) келесі аксиомаларды қанағаттандырса, скаляр көбейтіндісі деп аталады:

1. $\langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}$ (коммутативтігі);
2. $\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle$ (дистрибутивтігі);
3. $\langle \alpha X, Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle$ кез тек X келген α үшін;
4. $\langle X, X \rangle \geq 0$, ал $\langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$ болғанда.

Осы аксиомаларға сүйене отырып, қосымша қатынастар тізбегін алуға болады. Біз оларды керек болған жағдайда ғана табатын боламыз.

3.5. Анықтама. Сызықты X_c кеңістік — *Гильберт кеңістігі* (белгіленуі H) деп алатады. Егер кеңістікте скаляр көбейтінді анықталса, онда кеңістіктің скаляр көбейтіндіден алынған нормаға қатысы толық болады.

Гильберт кеңістігі деп — скаляр көбейтіндісі бар Банах кеңістігін айтамыз.

Жоғарғы алгебра және сызықты кеңістік бойынша әдебиеттерде, Гильберт кеңістігі деп, шексіз өлшемді сызықты кеңістікті айтады, ал скаляр көбейтіндісі бар шекті өлшемді кеңістікті — *Евклид кеңістігі* деп атайды. Бірақ біз үшін мұндай ұғымдарға бөлудің қажеті жоқ, сондықтан біз 2.5 анықтаманы қолданамыз.

Гильберт кеңістігіне екі мысал келтірейік. Оның біріншісі — Евклид кеңістігі. Сызықты n -өлшемді кеңістіктің метрикасы:

$$\rho(x, y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

және нормасы

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

болғанда кеңістік, Евклид E^n кеңістігі деп аталады.

Егер скаляр көбейтіндісі анықталса, Евклид кеңістігі Гильберт кеңістігі де бола алады:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (3.14)$$

Келесі мысал — интегралданатын функциялар кеңістігі. Айталық (a, b) интервалында үздіксіз $x(t)$ және $y(t)$ функциялары берілсе, олардың жиындары $L_2(a, b)$ кеңістігін құрады. Скаляр көбейтіндісін келесі формула бойынша анықтаймыз:

$$\langle X, Y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt. \quad (3.15)$$

енді скаляр көбейтіндісін анықтайық. Онда жоғарыда келтірілген арақатыстарға сәйкес, норма мен метрика мына формулалармен анықталады:

$$\|X\| = \langle X, X \rangle^{1/2} = \left[\int_a^b |x(t)|^2 dt \right]^{1/2},$$

$$\rho(x, y) = \|X - Y\| = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{1/2},$$

сонда қарастырылған кеңістік Банах кеңістігі, ал (3.15) ескертсек, онда осы кеңістік Гильберт кеңістігіне айналады. Екі Гильберт кеңістігінің векторлары X және Y ортогональды болуы үшін, келесі теңдеу орындалуы тиіс: $\langle X, Y \rangle = 0$. Осы жағдайда (3.11) теңдеу былай жазылады:

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 = \|X + Y\|^2 \quad (3.16)$$

Тараудың соңында функционалды кеңістіктерді сипаттау үшін 2-кесте берілген. Осы кесте, функционалды кеңістіктердің қасиеттерінің бір кеңістіктен, келесі кеңістікке дейін өсе беретінін көрсетеді.

2-кесте

Кеңістіктердің аттары	Анықтауыш сипаттамалар	Аксиомалар
Метрикалық	Метрика $\rho(x, y)$	1. $\rho(x, y) \geq 0$, осы кезде $\rho(x, y) = 0$, $x = y$ тен болса; 2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; 3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.
Сызықты	Косу Операциясы	1. $X+Y=Y+X$; 2. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$; 3. $X+0=X$; 4. $X+Y=0$, $X=-Y$ тен болса; 5. $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$; 6. $(\gamma\delta)X=\gamma(\delta X)$; 7. $1 \times X=X$, $0 \times X=0$; 8. $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$.

2- кестенің жалғасы

Нормаланған (сызықты)	$\ X\ $ нормасы	1. $\ X\ > 0$ және $\ X\ = 0$ $X=0$ тен болса; 2. $\ X + Y\ \leq \ X\ + \ Y\ $; 3. $\ \alpha X\ = \alpha \ X\ $.
Банах (сызықты)	$\ X\ $ нормасы және толықтық	1. $X+Y=Y+X$; 2. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$; 3. $X+0=X$; 4. $X+Y=0$, $X=-Y$ тен болса; 5. $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$; 6. $(\gamma\delta)X=\gamma(\delta X)$; 7. $1 \times X=X$, $0 \times X=0$; 8. $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$.
Гильберт (сызықты)	$\langle X, Y \rangle$ скаляр көбейтіндісі	1. $\langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}$; 2. $\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle$; 3. $\langle \alpha X, Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle$; 4. $\langle X, X \rangle \geq 0$.

3.2. Сызықты динамикалық жүйе

Сызықты динамикалық жүйе мағынасы жоғарыда айтылып кеткендей, суперпозиция принципіне сүйенеді. Бұл принциптің мағынасы мынандай: жүйеге әсер ететін кіріс сигналдар қосындысының жалпы шығыс мәні, әр әсерден шығатын сигналдардың қосындысына тең болады. Суперпозицияның мнемоникалық формуласы да бар: “Себептер қосындысының нәтижесі әрбір жеке себеп нәтижелерінің қосындысы болады”. 2-тараудағы 2.1 және 2.2 анықтамаларына сүйене отырып, сызықты динамикалық жүйенің анықтамасын тұжырымдаймыз.

3.6. Анықтама. Сызықты динамикалық жүйе деп –

2.1 (2-тарау) аксиомалар мен келесі шарттарды қанағаттандыратын, өзара байланысқан элементтер қосындысының математикалық моделін айтады:

1. X жүйесінің күйлері сызықты (векторлы) кеңістіктер, лездік кіреберіс әсерлері U , олардың жарамды мәндері Ω , Y шығыс лездік мәндері және олардың жарамды мәндері Γ берілсін.

2. $x(t)=\varphi[t;t_0, x(t_0), \omega]$ мәндері бар $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$ өтпелі күйлер функциясы $X \times \Omega$ жиынында сызықты болып табылады, яғни келесі теңдік орындалады:

$$\varphi[t; t_0, x(t_0), \omega] = \varphi[t; t_0, x, 0] + \varphi[t; t_0, 0, \omega], \quad (3.16)$$

және ол дифференциалды теңдеуді қанағаттандырады:

$$\frac{dx}{dt} = f[t; x, u(t)], \quad (3.17)$$

3. Шығыс бейнелеуі $\eta : T \times X \rightarrow Y$ X -жиынында сызықты, яғни келесі теңдік дұрыс болады:

$$y(t) = \eta[t; x(t)] = h(t)x(t). \quad (3.18)$$

Біз қарапайым сызықты динамикалық жүйеге, яғни қозғалысы дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын жүйеге анықтама бердік. Енді осы анықтаманы, сызықты кеңістіктің қасиеттерін пайдаланып нақтылаймыз.

X сызықты кеңістігінде базисі анықталып және кеңістіктің өлшемі n^* берілген болса, Ω кіреберіс сигналдары кеңістігінің өлшемі $n \leq m$ болады. Берілген t уақыт мезетінде жүйенің жағдайы X векторымен анықталса, осы вектордың туындысы $\frac{dX}{dt}$ базистің координаттары бойынша n құраушыға

$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ жіктеледі. 3.6 анықтаманың 2-шартына

сүйеніп, (3.17) теңдігінің оң жағы $\Omega \times X$ жиынында сызықты, яғни ол X және U векторларының сызықты комбинациясы болып табылады. Сәйкесінше, $\frac{dX}{dt}$ векторының құраушыларын келесі түрде көрсетуге болады:

Егер F, G және H матрицалары уақытқа тәуелсіз болса, онда сызықты динамикалық жүйе стационарлы болады.

(3.27) жүйесінің бірінші теңдеуі — жүйенің *қалып-күй теңдеуі*, ал екіншісі — *шығыс шамаларының теңдеуі* деп аталады.

3.3. Сызықты жүйенің өтпелі және импульсті өтпелі функцияларының матрицалары

Алдыңғы параграфта келтірілген сызықты динамикалық жүйенің анықтамалары, сызықты жүйелерді зерттеудің принципиялы негізін орнатады.

Кейбір конструктивтік нәтижелерді табу үшін, жүйеге сәйкес және оның қасиеттерін толығырақ ашатын сипаттаманы алу керек. Төменде сызықты жүйенің дифференциалды теңдеуін қарастырамыз:

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X, \quad (3.28)$$

Ол жүйенің күйлер теңдеуінен, $U(t)$ кіреберіс әсерлерін нөлге теңестіру арқылы алынған:

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X + G(t)U. \quad (3.29)$$

(3.28) теңдеуі $t=t_0$ мезетінде $X(t_0)$ бастапқы шарттар векторымен анықталатын, бастапқы ауытқулардың әсерінен болатын жүйенің күйін сипаттайды. Бұл вектор үшін арнайы белгі енгізейік:

$$X(t_0) = \Lambda. \quad (3.30)$$

(3.28) теңдеуін қанағаттандыратын әр $X(t_0)$ векторы, Λ бастапқы шарттар векторының кез келген мәнінде, $X(t_0)=X(t, \Lambda)$ теңдеуінің шешімі деп аталады, $t=t_0$ үшін $X(t, \Lambda)=\Lambda$ болуы керек.

(3.28) және (3.29) теңдеулерін қарастыру әдетте шешімнің жалғыз болуы туралы теореманы дәлелдеуден басталады. Келесі қарастырулардың мақсаты – негізінен шешімдердің қасиеттерін зерттеу болғандықтан, біз негізгі теореманың тұжырымдамасымен ғана шектелеміз, оны дәлелдеудің қажеті жоқ.

Егер t бойынша $F(t)$ матрицасы t_0 және $t \in T$ және Λ бастапқы шарттан, $\|\Lambda\| < 0$, әр мәндері үшін үздіксіз болса, (3.28) теңдеуінің $X(t, -)$ жалғыз ғана шешімі болады.

Сонымен, бастапқы шарттарының векторынан Λ тәуелді, анықталған t_0 мәніне сәйкес, $X(t_0, \Lambda)$ векторлардың (функциялардың) жиыны бар екен. Осы жиын, шешімдердің сызықты кеңістігін құрастырады, 3.6 анықтамасына сәйкес, жүйенің күйлер кеңістігі сызықты (векторлы) кеңістік.

(3.28) теңдеу $X(t_0, \Lambda)$ шешімдерінің кеңістік өлшемі n -ға тең екенін көрсетейік, мұндағы n - $F(t)$ матрица жолдарының саны.

Бастапқы шарттарының векторы Λ кез келген түрде берілсін. Онда, сызықты кеңістікте n сызықты тәуелсіз тұрақты векторларын λ_i таңдайық. Олар (3.28) теңдеудің бастапқы векторлары болсын. Осы вектор элементтерінің бастапқы мәндерін анықтап, сан болған себептен, R^n сандық кеңістігінде жатады.

Қарастырылған векторлар n -өлшемді сызықты кеңістіктің R^n базисын құрастырады. Сол себептен, кез келген бастапқы шарттарының векторы осы базис бойынша жіктеледі:

$$\Lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n, \quad (3.31)$$

мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – жіктеудің координаттары.

Шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар бойынша, әрбір бастапқы шарттарының

векторына және (3.28) тендеудің кез келген n бастапқы шарттарына λ_i сәйкес, шешімдер кеңістігінде n бірімәнді анықталған шешімдер $X(t, \lambda_i)$ табылады:

$$X_i(t_0, \lambda_i) = \lambda_i.$$

Осылардан сызықты комбинацияны құрастырайық:

$$X(t) = \alpha_1 X_1(t, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(t, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(t, \lambda_n), \quad (3.32)$$

ол өзі де (3.28) тендеудің шешімі болады.

Осы комбинацияның сызықты тәуелсіздігін көрсетету үшін, кері жағдайды қарастырайық. Онда кейбір нөлге тең емес α_i бойынша, $X(t)$ функциясы бір кез келген $t = \tau$ мәнінде де нөлге тең болуы кажет:

$$X(\tau) = \alpha_1 X_1(\tau, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(\tau, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(\tau, \lambda_n) = 0.$$

Ал шешімнің жалғыз болуы жайлы теоремасы бойынша, берілген λ_i мәндеріне сәйкес $X(\tau)$ функциясы барлық $\tau \in T$ нөлге тең болуы тиіс, оның арасына $\tau = t_0$ мәні де кіреді. Осы кезде, $X_i(t_0, \lambda_i) = \lambda_i$ болған кезде:

$$X(t_0) = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n = 0.$$

Онда бұл тендеу, λ_i векторлардың сызықты тәуелдік шартына қайшылыққа келеді де, (3.23) комбинацияның сызықты тәуелсіздігін көрсетеді.

(3.31) және (3.32) жіктеулерінің координаттары бірдей екенін ескертсек, $t = t_0$ болғанда:

$$\alpha_1 X_1(t_0, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(t_0, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(t_0, \lambda_n) = \Lambda.$$

Кандай болсын бастапқы шарттар Λ кезінде, $X(t)$ (3.29) тендеудің шешімі. Онда, $X_i(t, \lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ сызықты тәуелсіз векторлар, n -өлшенген кеңістіктің базисын құрастырады.

Шешімнің фундаментальды матрица ұғымын келтірейік. Оңай түсіндіру үшін, мысал ретінде 2-ретті тендеулер жүйесін қарастырамыз.

Келесі матрицаны:

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

және баған-матрицаны:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

енгізсек, (3.28) тендеу жазыңқы түрде жазылады:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_{11}x_1 + f_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = f_{21}x_1 + f_{22}x_2. \end{cases} \quad (3.35)$$

Осы жазуды қысқарту үшін, t аргументі жазылмады.

Бастапқы мәндері мына түрде берілсе, $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = 0$, онда $x_1(t, x_{10}, 0), x_2(t, x_{10}, 0)$ кейбір дербес шешімдері де (3.35) тендеудің шарттарына лайық болуы тиіс. Оларды былай белгілейік $\gamma_{11}(t, t_0), \gamma_{21}(t, t_0)$. Осы белгілеуде бірінші индекс (3.35) тендеудегі $x(t)$ нөмірін, ал екінші индекс, нөлге тең емес бастапқы шартын көрсетеді.

Бастапқы шарттардың орындарын аустырып $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = x_{20}$ дербес шешімдерін келесі түрде жазамыз $\gamma_{12}(t, t_0), \gamma_{22}(t, t_0)$. Онда $\gamma_{ij}(t, t_0)$

функциялары шешімдер - векторлардың, ал бастапқы шарттардың мәндері — бастапқы векторларының құраушылары:

$$\begin{cases} X_1(t, \lambda_1) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(t, t_0) \\ \gamma_{21}(t, t_0) \end{bmatrix}, & \lambda_1 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X_2(t, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \gamma_{12}(t, t_0) \\ \gamma_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, & \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (3.36)$$

$t = t_0$ болғанда $X_1(t_0, \lambda_1) = \lambda_1$, $X_2(t_0, \lambda_2) = \lambda_2$.

Осы арақатыстарды n -ретті тендеуге таратып, мынаны жазуға болады:

$$X_i(t, \lambda_i) = \begin{bmatrix} \gamma_{1i}(t, t_0) \\ \gamma_{2i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \gamma_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix},$$

(3.37)

мұндағы, γ функциясының бірінші индекс $F(t)$ матрицаның жолының, ал екінші индекс λ_i бастапқы вектордың нөмірлерін көрсетеді.

Біздің мысалда 2-ретті жүйелерге алғы шарттарын бірлік етіп қоялық, яғни $x_{10} = 1$ және $x_{20} = 1$.

Сәйкес дербес шешімдерін $\varphi_{ij}(t, t_0)$ деп белгілейік. Онда келесі арақатыстар орын алады:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(t, t_0) &= \lambda_1 \varphi_{11}(t, t_0), & \gamma_{12}(t, t_0) &= \lambda_2 \varphi_{12}(t, t_0), \\ \gamma_{21}(t, t_0) &= \lambda_1 \varphi_{21}(t, t_0), & \gamma_{22}(t, t_0) &= \lambda_2 \varphi_{22}(t, t_0), \end{aligned}$$

немесе матрицалық түрде:

$$X_1(t, \lambda_1) = \lambda_1 \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad X_2(t, \lambda_2) = \lambda_2 \begin{bmatrix} \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

Осы арақатыстарды n -ретті теңдеулерге таратып, оларды төмендегідей етіп жазамыз:

$$X_i(t, \lambda_i) = \lambda_i \begin{bmatrix} \varphi_{1i}(t, t_0) \\ \varphi_{2i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \varphi_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

және $t = t_0$ болғанда $X_i(t, \lambda_i) = \lambda_i$, өйткені

$$\begin{cases} \varphi_{ij}(t_0, t_0) = 0, & i \neq j \text{ кезінде,} \\ \varphi_{ij}(t_0, t_0) = 1, & i = j \text{ кезінде.} \end{cases} \quad (3.39)$$

(3.35) теңдеуіне қайта келейік. Табылған (3.36) дербес шешімдері оларды (3.35) теңдеуге алмастырған кезінде келесі тепе-теңдік табылады:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{11}}{dt} &= f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21}, & \frac{d\gamma_{12}}{dt} &= f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22}, \\ \frac{d\gamma_{21}}{dt} &= f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21}, & \frac{d\gamma_{22}}{dt} &= f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22}, \end{aligned}$$

Бұл арақатыстарды матрица элементтері ретінде келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\gamma_{11}}{dt} & \frac{d\gamma_{12}}{dt} \\ \frac{d\gamma_{21}}{dt} & \frac{d\gamma_{22}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21} & f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22} \\ f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21} & f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

мұндағы оң жақ матрицаның әрбір элементі, сол жақ матрицаның сәйкесінше элементіне тең. Екі матрицаны көбейту формуласын қолдана отырып, оң жақ матрица екі матрицаның көбейтіндісі екенін аңғаруға болады

$$\begin{bmatrix} f_{11}\gamma_{11} + f_{12}\gamma_{21} & f_{11}\gamma_{12} + f_{12}\gamma_{22} \\ f_{21}\gamma_{11} + f_{22}\gamma_{21} & f_{21}\gamma_{12} + f_{22}\gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}.$$

Белгілеу енгізейік:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

және (3.33) қолдана отырып, (3.40) арақатысын келесі түрде аламыз:

$$\frac{d\Gamma(t, t_0)}{dt} = F(t)\Gamma(t, t_0). \quad (3.41)$$

n -дәрежелі жүйе үшін $\Gamma(t, t_0)$ матрицасы келесі түрде болады:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

осы матрица — шешімдердің *фундаментальды матрицасы* деп аталады. Бұл матрицаның тік жолдары сызықты тәуелсіз, демек матрицаның анықтауышы нөлден өзге болады. Ал негізінде (3.37) формуласы мен (3.42) матрицасын келесі түрде жаза аламыз:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} X_1(t, \lambda_1), & X_2(t, \lambda_2) \dots X_n(t, \lambda_n) \end{bmatrix}$$

мұндағы тік жолдар рөлін атқарып тұрған функциялар (векторлар) $X_i(t, \lambda_i)$ сызықты тәуелсіз. (3.38) формуласымен анықталатын $X_i(t, \lambda_i)$ мәндерін соңғы өрнекке қойсақ, шығады:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Белгілеулерді енгізсек,

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Онда

$$\Gamma(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\Lambda_0.$$

$\Phi(t, t_0)$ матрицасы, жүйенің өтпелі матрицасы деп аталады. Бұл атаудың түсінігін төменде қарастырамыз.

Айталық, Λ_0 , λ_i құраушыларынан құралған бастапқы вектор, оның α_i жіктеу координаталары бірге тең [(3.31) формуласы]. Егер Λ_0 бастапқы векторының барлық құраушыларын бірге тең деп алсақ, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, онда фундаментальды шешімдер матрицасы өтпелі матрицамен бірдей болады. Соңғысы, $t=t_0$ болғанда бірлік матрицаға айналады, өйткені (3.39) формуласымен анықталатын φ_{ij} мәндері келесі теңдеуден табылады:

$$\Phi(t_0, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I \quad (3.44)$$

(3.41) арақатысы негізінде өтпелі матрица келесі теңдеуді қанағаттандырады деп ұйғаруға болады:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = F(t) \Phi(t, t_0). \quad (3.45)$$

Осы формуланы (3.28) теңдеуімен салыстырсақ, $\Phi(t, t_0)$ n -өлшемді кеңістіктегі (3.43) матрицасының сызықты тәуелсіз құраушылары бар, вектор деп түсінуге болады.

Өтпелі матрица түсінігін енгізу – жүйенің күйлер векторы мен кіреберіс әсер векторының арасындағы тікелей байланысты іздеу есебін шешуге мүмкіндік береді.

(3.29) теңдеуінің келесі түрдегі шешімін іздестірсек:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)K(t, t_0), \quad (3.46)$$

мұндағы $K(t, t_0)$ – $U(t)$ кіреберіс сигнал векторына тәуелді, белгілі бір матрица. (3.46) қатынасын уақыт бойынша дифференциалдағанда, табатыны:

$$\frac{dX}{dt} = \Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0).$$

(3.46) өрнегінен $x(t)$ мәнін және алынған $\frac{dX}{dt}$ -ны (3.29) теңдеуіне қойсақ, онда былай болады:

$$\Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)K(t, t_0) + G(t)U,$$

немесе

$$\Phi(t, t_0) \frac{dK}{dt} = G(t)U, \quad (3.47)$$

(3.45) негізіне келесі теңдік орын алады:

$$\frac{d\Phi}{dt} K(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)K(t, t_0).$$

$\Phi(t, t_0)$ өтпелі матрицасының тік жолдары сызықты тәуелсіз болғандықтан, матрица өзгеше емес және оның кері матрицасы $\Phi^{-1}(t, t_0)$ бар. (2.47) қатынасының сол жағын $\Phi^{-1}(t, t_0)$ көбейтіп, кері матрица қасиетін ескерсек:

$$\Phi^{-1}(t, t_0)\Phi(t, t_0) = I,$$

онда біз мынаны табамыз:

$$\frac{dK}{dt} = \Phi^{-1}(t, t_0)G(t)U(t).$$

Осы өрнекті t_0 мен t аралығында интегралдасақ:

$$K(t, t_0) = C + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0)G(s)U(s)ds,$$

сонымен бірге, $t = t_0$ болғанда $C = K(t_0, t_0)$. (3.46)

арақатысының сол жағын $\Phi^{-1}(t, t_0)$ көбейтіп, $t = t_0$ деп алып, (3.44) негізінде $\Phi^{-1}(t, t_0) = I$, болатындығын ескерсек,

$$C = X(t_0).$$

болады.

$K(t, t_0)$ және C мәндерін (3.46) формуласына қойсақ, нәтежесі былай болады:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0)G(s)U(s)ds, \quad (3.48)$$

(3.48) формуласы $x(t)$ – жүйенің күй векторы мен $X(t_0)$ – бастапқы шарттар мен $U(t)$ кіреберіс әсерлер векторлар арасында жүйенің $\Phi(t, t_0)$ – өтпелі матрица арқылы байланысын орнатады. Осылайша өтпелі матрица, жүйенің динамикалық қасиеттерін толығымен анықтайтын сызықты жүйенің сипаттамасы болып табылады. Егер кіреберіс әсері болмаса, $U(t)=0$, жүйенің күй векторы жүйенің қозғалысын анықтайды. (3.48) формуласы негізінде төмендегідей болады:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0), \quad U(t) = 0. \quad (3.49)$$

Алынған арақатынас, $\Phi(t, t_0)$ матрицасы жүйенің t_0 кезіндегі бастапқы қалпынан t уақыт кезіне сәйкес, $x(t)$ қалпына өтуін анықтайтындығын көрсетеді. Сондықтан да $\Phi(t, t_0)$ жүйенің өтпелі матрицасы деп аталады. Егер кіреберіс әсер бермей тұрғанда жүйе тыныштық күйде $X(t_0) = 0$ болса, кіреберіс әсер бергеннен кейін, жүйенің күй векторы еріксіз қозғалысты анықтайтын болады. Мұнда (3.48) формуласы келесі түрде беріледі:

$$X(t) = \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s, t_0)G(s)U(s)ds, \quad X(t_0) = 0.$$

Өтпелі матрицаның кейбір қасиеттерін айқындайық. (3.49) формуласын қолдана отырып, жазамыз:

$$X(t_1) = \Phi(t_1, t_0)X(t_0),$$

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_1)X(t_1),$$

бұдан:

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)X(t_0).$$

Екінші жағынан,

$$X(t_2) = \Phi(t_2, t_0)X(t_0),$$

демек,

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0). \quad (3.50)$$

Алынған формула күйлердің өтпелі функциясының, жартылай топтың қасиетінің нақты таралуы болып табылады және ол 2 тараудағы 2.1 анықтамамен келіседі. (3.50) формуласына $t_2 = t_0, t_1 = t$ деп енгізсек, онда ол:

$$\Phi(t_0, t_0) = \Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0) = I,$$

бұдан:

$$\Phi^{-1}(t_0, t) = \Phi(t, t_0). \quad (3.51)$$

(3.50) және (3.51) формулаларын, (3.48) арақатысын ыңғайлы түрге түрлендіруге, қолдануға болады.

Ондағы $\Phi^{-1}(s, t_0)$ кері матрицасын (3.51) формуласы бойынша $\Phi(t_0, s)$ ауыстырамыз, s интегралдау айнымалысынан тәуелсіз болғандықтан, интеграл астына $\Phi(t, t_0)$ матрицасын енгіземіз, алынған $\Phi(t, t_0)\Phi(t_0, s)$ көбейтіндісін (3.50) формуласы бойынша $\Phi(t, s)$ ауыстырғанда, нәтижесі төмендегідей болады:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)G(s)U(s)ds. \quad (3.52)$$

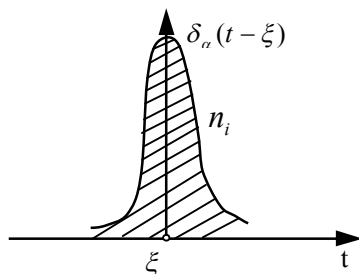
Бұл формула (3.48) формуласына қарағанда есептеуге ыңғайлырақ, онда матрица жоқ. Жүйенің күйі $t \leq \xi$ уақыт мезеттері үшін, $X(\xi) = 0$ нөлдік бастапқы векторымен сипатталатын, сызықты жүйені қарастырайық. $t = \xi$ мезетінде жүйеге кіреберіс әсер беріледі:

$$U(t) = N \delta(t - \xi), \quad (3.53)$$

мұндағы N — сандар тік жол-матрицасы,

$$N = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Қарастырылып отырған кіреберіс әсер $n_1, n_2, \dots, n_m$ “ауданы” бар — дельта, функциялар түріндегі импульсті кіреберіс сигналдарының жинағы болып табылады (3.9-сурет).



3.9-сурет

Аудандар өрнектің шегі ретінде анықталады

$$n_i = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\alpha}(t - \xi) dt,$$

мұндағы $\delta_{\alpha}(t - \xi)$ — $\alpha \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\delta_{\alpha}(t - \xi) \rightarrow \delta(t - \xi)$ болатындай α параметрлі кез келген үздіксіз жұп функция. Дельта функциясының өзі

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta(t - \xi) &= \begin{cases} 0, & t \neq \xi, \\ \infty, & t = \xi, \end{cases} \\ \text{b) } f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \xi)dt. \end{aligned} \quad (3.55)$$

арақатысымен анықталады. (3.52) формуласына (3.53) өрнегін қойып, $X(t_0) = 0$ деп есептейік. Онда

$$X(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, s)G(s)N\delta(s - \xi)ds.$$

Матрицаны интегралдау дегеніміз — оның әрбір элементін интегралдау. Сондықтан алынған өрнекке, дельта-функциясының негізгі қасиетін анықтайтын (3.55 б) формуласын қолдануға болады. Нәтижесінде

$$X(t) = \Phi(t, \xi)G(\xi)N. \quad (3.56)$$

Енді кіреберістегі барлық дельта-функциялардың “аудандарын,, бірге тең деп аламыз. Мұнда

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Осындай әсерден алынған шығаберіс сигналдар жиыны - импульсті өтпелі функциялар жиыны болады. Сондықтан, алынатын матрицаға арнайы белгі және импульсті өтпелі функциялар матрицасы атауын берген жөн.

$$W(t, \xi) = \Phi(t, \xi)G(\xi). \quad (3.57)$$

$\Phi(t, \xi)$ — матрицасы квадратты (n жатық жолдан және n тік жолдан тұрады), ал $G(\xi)$ — матрицасы n жатық жолдан және m тік жолдан тұрғандықтан, олардың көбейтінді матрицасының n жатық жолы және m тік жолы болады.

$W(t, \xi)$ матрицасын кеңейтілген түрде көрсетейік:

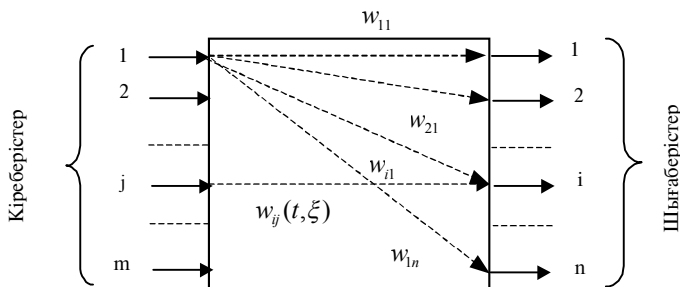
$$W(t, \xi) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(t, \xi) & \omega_{12}(t, \xi) & \cdots & \omega_{1m}(t, \xi) \\ \omega_{21}(t, \xi) & \omega_{22}(t, \xi) & \cdots & \omega_{2m}(t, \xi) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_{n1}(t, \xi) & \omega_{n2}(t, \xi) & \cdots & \omega_{nm}(t, \xi) \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

мұндағы $\omega_{ij}(t, \xi)$ функциялары жүйенің i шығаберісінің j кіреберісіне реакциясы болып табылады (3.10, ә-сурет). Онда i шығаберісінің барлық m кіреберістеріне (3.10, ә-сурет), реакциясы матрицаның (3.58) оның i жатық жолының барлық элементтерінің қосындысына тең. (3.56) формуласын (3.57) арақатысын ескере отырып, мына түрде жазуға болады:

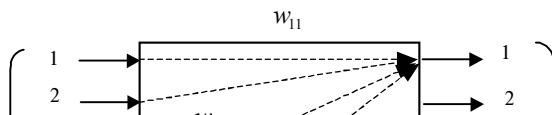
$$X(t) = W(t, \xi)N,$$

немесе ξ -ны t_0 -ге ауыстырып,

$$X(t) = W(t, t_0)N. \quad (3.59)$$



а



3.10-сурет

3.10-сурет

Жүйенің еркін қозғалысы кезіндегі күйлер векторын анықтау үшін, (3.49) арақатысын осы формуламен салыстырсақ, импульсті өтпелі функциялар матрицасы, жүйенің ағымдағы жағдайындағы дельта-функцияларының “энергия” векторын бейнелейтінін көреміз. Бұл жағдай бастапқы шарттар векторын $X(t_0)$, оған эквивалент кіреберіс сигналдар векторын $U_s(t) = N\delta(t - t_0)$ қайта есептеуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, барлық жағдайда жүйенің күйлер векторын, осыған дейін тыныштық күйде болған, жүйеге кіреберіс әсерлердің нәтижесі түрінде анықтауға болады. Сонымен бірге (3.52) формуласы (3.57) өрнегін ескере отырып) төмендегідей етіп ауыстыруға болады:

$$X(t) = \int_{t_0}^t W(t,s)[U_s + U_s(s)]ds, \quad (3.60)$$

мұндағы

$$U_s(t) = N\delta(t - t_0). \quad (3.61)$$

(3.61) формуласын (3.60) өрнегіне қойсақ, мұндай ауыстырудың ақиқат екендігіне көз жеткіземіз.

$X(t_0)$ бастапқы шарттар векторының мәндеріне сәйкес N тік жол-матрицасының мәндерін анықтау үшін (3.56), (3.49) өрнектерін (ξ -ны t_0 -ге ауыстырып) қолдансақ:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)G(t_0)N,$$

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0).$$

Оң жақтарын теңестіріп, N анықтасақ:

$$N = G^{-1}(t_0)X(t_0). \quad (3.62)$$

Жоғарыдағы параграфтың қорытындысы ретінде келесі мысалды қарастырамыз:

3.1. Мысал. Сызықты жүйеде келесі матрицалар берілген:

$$F(t) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X(t_0) = 0.$$

Жүйенің өтпелі матрицасын және күйлер векторының баған-матрицасын табу керек.

Күйлер теңдеуіне (бұл мысалда стационарлы жүйе):

$$\frac{dX}{dt} = FX + GU,$$

сонда алғашқы берілгендерді аламыз,

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Көбейту амалдарын орындағаннан кейін

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -6x_1 + 5x_2 + e^{-\alpha t}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1. \end{aligned} \right\}. \quad (3.63)$$

Өтпелі матрицаны табу үшін $U(t) = 0$ ($e^{-\alpha t} = 0$) қойып, теңдеулерді операторлық түрде жазамыз:

$$\begin{aligned} px_1 &= -6x_1 + 5x_2, \\ px_2 &= -x_1. \end{aligned}$$

Сонда:

$$\begin{aligned} (p^2 + 6p + 5)x_1 &= 0, \\ (p^2 + 6p + 5)x_2 &= 0, \end{aligned}$$

демек, x_1 және x_2 сипаттамалық теңдеулерінің бірдей түбірлері болады. Олар $p_1 = -1$, $p_2 = -5$ тең болады. Жалпы шешімі мына түрде табылады:

$$x_{1,2}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t}.$$

t бойынша дифференциалдасак:

$$\frac{dx_{1,2}}{dt} = -C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{-5t}. \quad (3.65)$$

Қарастырылып отырған жүйе үшін өтпелі матрица мына түрде жазылады:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

$\Phi(t, t_0)$ матрицасының элементтерін анықтау үшін, келесі кестеге сәйкес бастапқы шарттарды беру қажет:

Матрица элементтері		Φ_{11}	Φ_{21}	Φ_{12}	Φ_{22}
Бастапқы шарттар	$x_1(t_0)$ $x_2(t_0)$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

(3.63) теңдеуіне осы мәндерді және $t = t_0$ деп қойып, туындылардың бастапқы мәндерін табамыз. Олар келесі кестеден табылады:

$x_1(t_0)$	$x_2(t_0)$	$\dot{x}_1(t_0)$	$\dot{x}_2(t_0)$
1	0	-6	-1
0	1	5	0

φ -дің барлық мәндері жалғыз (3.64) формуласымен анықталады, бірақ әрбір φ үшін өзінің C_1 және C_2 тұрақтылар жұбын анықтау керек. Олар $t = t_0$ деп қойып (3.64) және (3.65) теңдеулерінен алынған теңдеулердің бірге шешілуімен анықталады

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2}(t_0) &= C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{-5t_0}, \\ \dot{x}_{1,2}(t_0) &= -C_1 e^{-t_0} - 5C_2 e^{-5t_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Жоғарыда келтірілген кестеден алынған бастапқы шарттарды (3.66) теңдеуіне қою мына жолмен іске асады:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &\rightarrow x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0), \\ \varphi_{21} &\rightarrow x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0), \\ \varphi_{12} &\rightarrow x_1(t_0), \dot{x}_1(t_0), \\ \varphi_{22} &\rightarrow x_2(t_0), \dot{x}_2(t_0). \end{aligned}$$

Есептеулер нәтижесінде келесі C_1 және C_2 тұрақтылар кестесін аламыз:

Матрица элементі	Φ_{11}	Φ_{21}	Φ_{12}	Φ_{22}
C_1	$-1/4$	$-1/4$	$5/4$	$5/4$
C_2	$5/4$	$1/4$	$-5/4$	$-1/4$

(3.64) қатынасына осы мәндерді қойсақ, өтпелі матрица элементтерін табамыз. Ол былай болады:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-(t-t_0)} + 5e^{-5(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} - 5e^{-5(t-t_0)} \\ -e^{-(t-t_0)} + e^{-5(t-t_0)} & 5e^{-(t-t_0)} - e^{-5(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

$t = t_0$ болғанда, $\Phi(t, t_0) = I$ болатынын оңай тексеруге болады.

$X(t)$ күй векторын табу үшін, (3.52) формуласын қолданамыз. $X(t_0) = 0$ екенін ескерсек, онда:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)} + 5e^{-5(t-s)} & 5e^{-(t-s)} - 5e^{-5(t-s)} \\ -e^{-(t-s)} + e^{-5(t-s)} & 5e^{-(t-s)} - e^{-5(t-s)} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e^{-\alpha s} \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$

Матрицаларды көбейтсек, мынаны аламыз:

$$x_1(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t [-e^{-(t-s)} + 5e^{-5(t-s)}] e^{-\alpha s} ds,$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t [-e^{-(t-s)} + e^{-5(t-s)}] e^{-\alpha s} ds.$$

Интегралдап, ізделініп отырған күйлер векторын табамыз:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4(\alpha-1)}(e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{5}{4(\alpha-5)}(e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \\ \frac{1}{4(\alpha-1)}(e^{-\alpha t} - e^{-t}) - \frac{1}{4(\alpha-5)}(e^{-\alpha t} - e^{-5t}) \end{bmatrix}.$$

3.4. Жүйенің күйлер кеңістігі

Алдыңғы келтірілген анықтамалар, берілген уақыт мезеттерінде, сызықты динамикалық жүйенің дифференциалды теңдеуін қанағаттандыратын, $X(t)$ күйлер векторымен сипатталатынын көрсетеді:

$$\begin{aligned} dX / dt &= F(t)X(t) + G(t)U(t), \\ X(t_0) &= \Lambda, \end{aligned} \quad (3.67)$$

мұндағы $F(t)$ және $G(t)$ – жүйенің физикалық параметрлерін анықтайтын $n \times n$ және $n \times m$ өлшемді матрицалар, $U(t)$ – кіреберіс әсерлер векторы, Λ – бастапқы шарттар векторы. Жүйенің күйлер кеңістігін былай анықтайық:

3.8. Анықтама. Барлық $U \in \Omega$ және $t \in T$ үшін (3.67) теңдеуді қанағаттандыратын $X(t)$ векторларының жиыны – *сызықты жүйенің күйлер кеңістігі* деп аталады. Жүйе кеңістігі, n – өлшемді базисқа керілген, яғни ол n – өлшемді.

$U(t)=0$ кездегі (3.67) теңдеудің кеңістігінің өлшемі n -ге тең екенін жоғарыда көрсеттік. Енді (3.67) біртекті емес теңдеудің шешімі де n – өлшемді сызықты кеңістікте жатады да, ол шешімнің жалғыздығы теоремасын қанағаттандырады.

Келесі түрдегі $n \times n$ өлшемді $P(t)$ диагональды матрицаны енгізейік:

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Бұл матрицаның элементтері $G(t)$ және $U(t)$

$$G(t)U(t) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

мұндағы $p_i(t) = g_{i1}u_1 + g_{i2}u_2 + \dots + g_{im}u_m$. Әрқайсысы $n \times n$ өлшемді $F(t)$ және $P(t)$ матрицасынан жаңа $2n \times 2n$ өлшемді $L(t)$ матрицасын құрамыз:

$$L(t) = \begin{bmatrix} F(t) & P(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

мұндағы $0 - n \times n$ өлшемді нөлдік матрица:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

$L(t)$ матрицасының көмегімен біртекті дифференциалдық теңдеу құрастырамыз:

$$dY / dt = L(t)Y. \quad (3.71)$$

(3.28) теңдеуге қарағанда бұл теңдеу эквивалентті болғандықтан, оның бастапқы шарттар векторлары берілгенде шешімнің жалғыздығы, базистік вектор арқылы көрсету мүмкіншілігінің анықталуы дұрыс. Егер алғашқы шарттың векторы берілсе (3.71), оны $2n \times 1$ өлшемді тік матрица түрінде көрсете аламыз:

$$Y(t_0) = \begin{bmatrix} \Lambda \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Алдыңғы тақырыптың нәтижелеріне сәйкес (3.71) теңдеуді, $2n$ -өлшемді шешімдер, кеңістіктегі базис жасаушы, $2n$ сызықты дербес шешімдердің, сызықты комбинация түрінде құрастырылған кез келген векторын қанағаттандырады.

$Y(t)$ векторының әрқайсысын n элементтері бар, екі тік матрица түрінде көрсетейік:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_F(t) \\ Y_P(t) \end{bmatrix}.$$

(3.28) біртекті теңдеу n сызықты тәуелсіз шешімдерді жасап, үнемі базистік вектор арқылы анықталады да, соған байланысты $Y_F(t)$ векторы да n -өлшемді сызықты кеңістікте жатады.

(3.70) арақатыстан $Y(t)$ вектор мен $L(t)$ матрицасының мәндерін, (3.71) теңдеуге қойып, мына теңдеуді табамыз:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y_F(t) \\ Y_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) & P(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_F(t) \\ Y_P(t) \end{bmatrix},$$

немесе оң жақтағы матрицаларды көбейткен соң,

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} Y_F(t) \\ \frac{d}{dt} Y_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t)Y_F(t) + P(t)Y_P(t) \\ 0 * Y_F(t) + 0 * Y_P(t) \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

(3.72) өрнекті ескере отырып, бастапқы шарттар векторы мына түрге келеді:

$$\begin{bmatrix} Y_F(t_0) \\ Y_P(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

немесе

$$Y_F(t_0) = \Lambda, \quad Y_P(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3.73) матрицаның сәйкес элементтерін теңестіріп, табамыз:

$$dY_F / dt = F(t)Y_F(t) + P(t)Y_P(t), \quad Y_F(t_0) = \Lambda,$$

$$dY_P / dt = 0, \quad Y_P(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Екінші теңдеудің шешімі $Y_P(t) = \text{const}$ тең. Шешімнің жалғыздығы шарты мен вектордың бастапқы мәнін ескерсек, онда

$$Y_P(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$P(t)Y_p(t)$ көбейтіндісін аламыз. (3.68) арақатыстан $P(t)$ матрица мәнін қолданып, мынаны табамыз:

$$P(t)Y_p(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & p_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & p_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ p_n(t) \end{bmatrix}.$$

(3.69) өрнекке байланысты бұл баған-матрица $G(t)U(t)$ -ға тең. Онда, бірінші теңдеу мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} dY_F / dt &= F(t)Y_F(t) + G(t)U(t), \\ Y_F(t_0) &= \Lambda. \end{aligned}$$

Осы теңдеуді (3.67) теңдеумен салыстырып, $Y_F(t) = X(t)$ деп қорытындылаймыз. Осыған байланысты, (3.67) біртекті емес теңдеудің шешімдер векторы, (3.71) біртекті теңдеу шешімдерінің n -өлшемді шешімдер векторының құраушысымен бірдей, яғни n -өлшемді күйлер кеңістігінде жатады. Сонымен бірге, (3.67) теңдігі үшін шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар сақталады.

Енді күйлер кеңістігінің базисі туралы сұрақты қарастырайық. 3.3 параграфында біз кез келген біртекті теңдеудің шешімдер векторын:

$$\frac{dX}{dt} = F(t)X, X(t_0) = A,$$

$X_i(t, \lambda_i)$ базисі бойынша жіктеуге болатынын тұжырымдадық:

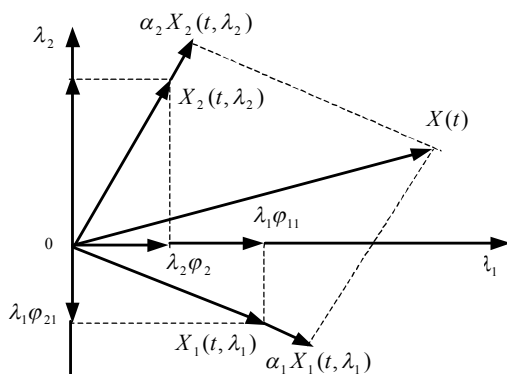
$$X(t) = \alpha_1 X_1(t, \lambda_1) + \alpha_2 X_2(t, \lambda_2) + \dots + \alpha_n X_n(t, \lambda_n), \quad (3.74)$$

мұндағы $X_i(t, \lambda_i)$ – берілген бастапқы шарттар векторының шешімі, ол баған-матрица ретінде анықталады:

$$X_i(t, \lambda_i) = \lambda_i \begin{bmatrix} \varphi_{1i}(t, t_0) \\ \varphi_{2i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \varphi_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Келесі жағдайға назар аударайық. $X_i(t, \lambda_i)$ векторы, бастапқы шарттар векторы, бірлік векторына сәйкес, стандартты дербес шешімдер мәндері φ_{ji} ($j = 1, 2, \dots, n$) арқылы ғана анықталады. φ_{ji} векторының n -өлшемді координаттар жүйесінің проекцияларын қарастырайық. φ_{ji} сызықты, тәуелсіз болғандықтан, олар n -өлшемді кеңістіктің базисін құрайды. Координаттар осьтерінің бағыттары Λ бастапқы вектордың базис осьтерінің бағыттарымен сәйкес келеді, себебі $t=t_0$ болғанда $\varphi_{ji}=0$ ($j \neq i$) және $\varphi_{ii}=1$.

Айтылған екіөлшемді модельмен бейнеленіп, 3.11-суретте көрсетілген. Мұнда $X(t)$ кеңістігінің базисін құрайтын, $X_1(t, \lambda_1)$ және $X_2(t, \lambda_2)$ векторлары мен олардың Λ бастапқы шарттар кеңістігінің базисі бойынша жіктеулері көрсетілген.



3.11-сурет

Бастапқы бірлік шарттар үшін, базисті шешімдер векторлары ретінде келесіні енгізейік:

$$X_i(t,1) = \begin{bmatrix} \varphi_{1i}(t, t_0) \\ \varphi_{2i}(t, t_0) \\ \dots \\ \varphi_{ni}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

ал координаттар ретінде Λ векторы құраушыларының сандық мәндерін қолданамыз. Сонда (3.74) формуласы мына түрде жазылады:

$$X(t) = \lambda_1 X_1(t,1) + \lambda_2 X_2(t,1) + \dots + \lambda_n X_n(t,1). \quad (3.77)$$

$t=t_0$ болғанда, барлық $X_i(t,1)$ векторлары бірлік мәндерді қабылдайды да, бағыттар бойынша бастапқы шарттар базисінің бағыттарымен сәйкес келеді, ал вектор $X(t_0) = \Lambda$. (3.77) теңдеуі мына түрге келеді:

$$X(t_0) = \Lambda = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot 1. \quad (3.78)$$

$X_i(t,1)$ векторының құраушылары арқылы $X(t)$ векторының құраушыларын анықтаймыз. $X(t)$ векторын баған-матрица түрінде жазып және (3.77) теңдеуіне (3.76) теңдеуін қойып, баған-матрицаларын қосқаннан кейін:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \varphi_{11}(t, t_0) + \lambda_2 \varphi_{12}(t, t_0) + \dots + \lambda_n \varphi_{1n}(t, t_0) \\ \lambda_1 \varphi_{21}(t, t_0) + \lambda_2 \varphi_{22}(t, t_0) + \dots + \lambda_n \varphi_{2n}(t, t_0) \\ \vdots \\ \lambda_1 \varphi_{n1}(t, t_0) + \lambda_2 \varphi_{n2}(t, t_0) + \dots + \lambda_n \varphi_{nn}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Осылайша, $X(t)$ векторының j -ші құраушысын келесі теңдеумен анықталады:

$$x_j(t) = \lambda_1 \varphi_{j1}(t, t_0) + \lambda_2 \varphi_{j2}(t, t_0) + \dots + \lambda_n \varphi_{jn}(t, t_0). \quad (3.79)$$

$X(t)$ векторының барлық құраушылары, сызықты тәуелсіздігінің себебі φ_{ij} өтпелі матрицаның бағандар функцияларының сызықты тәуелсіздігі болғандықтан, олар

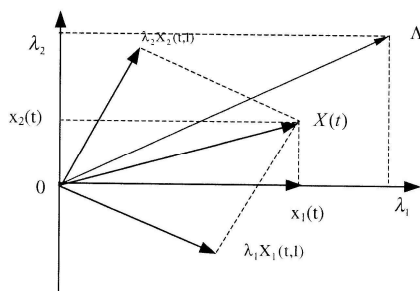
күйлер кеңістігінің базисі ретінде қабылдана алады. $t=t_0$ болғанда, келесі теңдік орын алады:

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda,$$

бұл (3.78) теңдеуімен сәйкес, бірақ баған-матрица түрінде жазылған.

Өткізілген қарастырулардың нәтижесінде (3.28) біртекті теңдеуінің күйлер кеңістігі базисінің $X_i(t, \lambda_i)$ векторлары — осы кеңістіктің $x_j(t)$ векторларымен базисіне түрленуін тұжырымдадық. Екі базис те $t=t_0$ болғанда, сәйкес болады. $x_j(t)$ элементтері бойынша базистің артықшылығы — кеңістікте уақыт өтуі мен бағытының өзгермейтіндігі. Осы қасиет, практикалық есептерде өте қолайлы. 3.12-суретте екіөлшемді жағдай үшін қарастырылған базистердің векторларының және олар бойынша $X(t)$ векторының орналасуы көрсетілген.

Жүйенің қозғалысы біртекті теңдеумен сипатталған жағдайдағы күйлер кеңістігінің бір ерекшелігін қарастырайық. Онда күйлер векторы келесі теңдеумен анықталады:



3.12-сурет

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0). \quad (3.80)$$

$t_1, t_0 < t_1 < t$ кез келген аралық уақыт мезетін енгізейік. Онда:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0),$$

теңдігін пайдаланып, табамыз:

$$X(t) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)X(t_0).$$

Бірақ (3.80) формуласына сәйкес:

$$\Phi(t_1, t_0)X(t_0) = X(t_1),$$

сәйкесінше,

$$X(t) = \Phi(t, t_1)X(t_1).$$

Осылайша, t_1 мезетіндегі жүйенің қалпын оның жаңа бастапқы қалпы ретінде қарастыруға болады. t және t_1 уақыт мезеттері t_0 -мен салыстырғанда, жүйенің кез келген жаңа қалыпқа өтуін, әрқашан бастапқы жағдайлардың тізбекті жиіні ретінде көрсетуге болады. Басқа сөзбен айтқанда, бұл жағдайда бүкіл күйлер кеңістігі, бастапқы шарттар векторларынан құралған. Ол кеңістік базиске (3.79) n векторларымен киілген. Мұндай кеңістік жүйелер теориясында фазалық кеңістік деп аталады.

Жүйе, кіреберіс сигналдарының әсерінде болған жағдайдағы, (3.67) біртекті емес теңдеудің шешім векторының қасиеттерін қарастырайық. Бұл жағдайда, жүйенің қалпы мына формуламен анықталады:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)G(s)U(s)ds. \quad (3.81)$$

Келесі:

$$Z(t) = G(t)U(t), \quad (3.82)$$

белгілеуді енгізіп және мына теңдеуді:

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, s), \quad (3.83)$$

ескере отырып, келесі түрде жазайық:

$$X_m(t) = \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, s)Z(s)ds,$$

мұндағы $X_m(t)$ — жүйенің мәжбүр қозғалысын анықтайтын күйлер векторының құраушысы.

Егер Δt шағын уақыт аралықтары арқылы болатын жүйенің тізбектес қалпын қарастырсақ, онда күйлер векторларының мәндерін іздестіру процедурасы — жоғарыда көрсетілген біртекті теңдеу үшін жүргізілген процедураға сәйкес болады. $t=t_0+\Delta t$ болсын, онда:

$$X_M(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s) Z(s) ds.$$

Δt -ның шағын мәндерінде интеграл жоғарғы шектен тәуелсіз және қайсыбір тұрақты баған-матрицаны береді:

$$N_1 = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \Phi(t_0, s) Z(s) ds.$$

сәйкесінше,

$$X_M(t_1) = \Phi(t_1, t_0) N_1(t_0),$$

мұндағы $N_1(t_0)$ бастапқы шарттар рөлін атқарады.

Осылайша, жүйенің мәжбүр қозғалысы векторларынан тұратын күйлер кеңістігі, жоғарыда қарастырылған еркін қозғалыс кеңістігіне ұқсас. Ол n -өлшемді және базис векторлары ретінде күйлер векторының $x_i(t)$ құраушыларынан алынады.

Жүйе қозғалысының жалпы жағдайы үшін (3.81), (3.82) және (3.83) арақатыстарын пайдаланып, кіреберіс әсерлері және бастапқы шарттар бар болғанда, күйлер векторын мына түрде жазамыз:

$$X(t) = \Phi(t, t_0) \left[X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, s) Z(s) ds \right].$$

(3.43) формуласындағы $\Phi(t, t_0)$ мәнін осы теңдеуге қойып, $X(t)$, $X(t_0)$ және $Z(t)$ баған-векторларын ашып аламыз:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix} ds.$$

$X(t)$ векторының j -ші құраушысы келесі теңдеумен анықталады:

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \varphi_{j1}(t, t_0) \lambda_1 + \varphi_{j2}(t, t_0) \lambda_2 + \dots + \varphi_{jn}(t, t_0) \lambda_n + \\ &+ \int_{t_0}^t [\varphi_{j1}(t_0, s) z_1(s) + \varphi_{j2}(t_0, s) z_2(s) + \dots + \varphi_{jn}(t_0, s) z_n(s)] ds. \end{aligned} \quad (3.84)$$

(3.79) және (3.84) формулаларын салыстырып, жалпы жағдай үшін күйлер кеңістігінің базис векторлары, кіреберіс әсерлерінің құраушыларына да тәуелді екенін көреміз, бірақ

$t=t_0$ болғанда, олар бастапқы шарттар кеңістігінің базисімен сәйкес келеді.

Әдебиеттер тізімі

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем.-М.: Мир, 1971, 340.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением.-М.: Наука, 1968, 475.
3. *Солодов А.В.* Методы теории систем в задаче непрерывной линейной фильтрации.-М.: Наука, 1976. 264 с.
4. *Летов А.М.* Динамика полета и управление.-М.: Наука, 1969.
5. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний.-М.: Наука, 1970, 703.
6. *Портер У.* Современные основания общей теории систем. М.: Наука, 1971.
7. *Андреев Ю.И.* Управление конечномерными линейными системами.-М.: Наука, 1976, 424.
8. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.-М.: Наука, 1979. 335.
9. *Казаков И.Е.* Статическая теория систем управления в пространстве состояний.-М.: Наука, 1975. 432.
10. *Медич Д.* Статистические оптимальные линейные оценки и управление.-М.: Энергия, 1973. 440.
11. *Негойце К.* Применение теории систем к проблемам управления. М.: Мир, 1981, 180.
12. Теория систем. Математические методы и моделирование. М.: Мир, 1989, 384.
13. Математические методы в теории систем.-М.: Мир, 1979, 354.

	КІРІСПЕ	3
I.	ЖИЫНДАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ	4
1.1.	Жиындарды” негізгі анықтамалары мен қасиеттері	4
1.2.	Жиындар мен ішжиындар	8
1.3.	Жиындар алгебрасы	10
1.4.	Жиындар мен оларды” элементтеріні” арасындағы қатынастар	19
II.	ЖҮЙЕЛЕРДІ ЖАЗУ НЕГІЗДЕРІ	23
2.1.	Ке”істіктер	23
2.2.	Бейнелер және функциялар	29
2.3.	Динамикалық жүйе	36
2.4.	Жүйелерді басқару	48
III.	СЫЗЫҚТЫ ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР	59
3.1.	Сызқты ке”істіктер	59
3.2.	Сызықты динамикалық жүйе	76
3.3.	Сызықты жүйені” өтпелі және импульсті өтпелі функцияларыны” матрицалары	80
3.4.	Жүйені” күйлер ке”істігі	99
	Әдебиеттер тізімі	109

Оқулық басылым

Ақамбай Ағыбайұлы Бейсембаев

ЖҮЙЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

Оқу құралы

РББ меңгерушісі	З.А. Ғұбайдулина
Редакторы	К. Мүптекеқызы
Техн. редакторы	Н.Н. Передереева
Компьютерде беттеген	Л.Калугина

Басуға қол қойылды

Таралымы 500 дана. Пішімі 60×84 1/16. Баспаханалық қағаз №1.
Көлемі 7,5 оқу-баспа табақ. Тапсырыс № Бағасы келісімді.

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық
университетінің басылымы.

КазҰТУ-дың Баспа орталығы, Алматы, Ладыгина көшесі, 32.