

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Казахский национальный технический
университет имени К.И.Сатпаева

М.Б.Гаврилов

ГИДРАВЛИКА

Рекомендовано Республиканским учебно-методическим
объединением в качестве учебного пособия

Алматы 2003

УДК 532 (075)

Гаврилов М.Б. Гидравлика: Учеб. Пособие. – Алматы: КазНТУ, 2002. – 110 с.

Учебное пособие содержит систематическое изложение вопросов гидравлики, являющихся основой изучения природных водных ресурсов и связанных с ними водохозяйственных расчетов.

Учебное пособие предназначено для студентов водохозяйственных специальностей, а также может быть использовано студентами других специальностей, где изучаются вопросы гидромеханики..

Ил. 73. Табл. 2 Библиогр. – 30 назв.

Рецензенты: *Т.Т.Танатаров*, профессор кафедры ТиТБС,
канд.техн.наук.

К.Ш.Аширяев, доц. кафедры водоснабжения и
охраны вод Каз ГАСА, канд.техн.наук.

Печатается по плану Министерства образования и науки
Республики Казахстан на 2002 г.

ISBN5-7667-1096-8

© КазНТУ, 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

Гидравлика, как фундаментальная техническая дисциплина, является обязательной при подготовке весьма широкого круга специалистов технического профиля в ВУЗах. При этом объем и содержание дисциплины могут меняться в зависимости от требований специальности, особенностей сферы деятельности подготавливаемых инженеров.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов специальностей «гидрогеология, инженерная геология и геоэкология» и «водные ресурсы и водопользование». Оно может быть использовано также студентами нефтяных и других специальностей, где программой предусмотрено прохождение данного курса.

В соответствии с классической схемой в пособии рассматриваются разделы: «физические свойства жидкостей», «гидростатика» и «гидродинамика». В этих разделах в соответствии со спецификой курса даны сведения о жидкостях, с которыми придется встречаться будущему специалисту, об основных законах гидравлики и их использовании в инженерных расчетах.

ВВЕДЕНИЕ

«Гидравлика» в переводе с греческого означает – учение о движении воды в трубах (хюдер – вода, аулос – труба). Именно под таким названием преподается курс механики жидкостей (или гидромеханика) студентам технических инженерных специальностей, когда основное внимание уделяется практическому использованию законов гидростатики и гидродинамики. В случае же, когда требуется подготовка специалистов для углубленного изучения процессов деформации сплошной жидкой среды с применением методов математического анализа дисциплину или соответствующую науку называют «Гидромеханикой». Естественно, что это подразделение условное и преподавание гидравлики для студентов высших технических заведений должно осуществляться на основе технических положений гидромеханики и в тесной взаимосвязи с ней.

«Гидравлика» является одной из первых специальных дисциплин, к изучению которой студенты приступают, как правило, на третьем курсе, и именно она дает студентам те основы, которые в полной мере используются на последующих курсах при изучении таких дисциплин, как «Динамика подземных вод», «Водоснабжение и ирригация», «Гидротехнические сооружения», «Гидрология и регулирование стока», «Комплексное использование водных ресурсов» и др.

В разделе «физические свойства жидкости» особое внимание уделяется проявлению свойств жидкостей, находящихся в естественных условиях гидросферы, в том числе и подземной. Физические характеристики жидкостей и системы единиц измерения даются с учетом изучения последующих специальных курсов и имеющейся справочной гидротехнической и гидрогеологической литературы.

В последующих разделах гидростатики и гидродинамики соответственно рассматриваются законы равновесия и движения жидкости, а также способа применения этих законов в инженерной практике решения различных задач, связанных с распределением и использованием водных ресурсов.

История развития гидравлики уходит в глубокую древность. Началом ее развития явился трактат Архимеда (237-212 гг. до н.э.) «О плавающих телах», русский перевод которого, выполненный Долговым А.Н., был опубликован в книге «Начала гидростатики», ГТИИ, 1932.

По истечении семнадцати веков Леонардо да Винчи (1452-1519 гг.) составил трактат «О движении и измерении воды», опубликованный через 400 с лишним лет после его смерти.

В последующие годы на развитие гидравлики большое влияние оказали труды Стевина (1548-1620 гг.), Галилея (1564-1642 гг.), Торичелли (1608-1647 гг.), Паскаля (1623-1662 гг.), Ньютона (1642-1727 гг.). Именно тогда были открыты «Закон о передаче давления Паскаля» и «Закон истечения жидкостей из отверстий Торичелли», сформулирована гипотеза о внутреннем трении в жидкостях Ньютоном.

Многие положения гидравлики, принятые в те давние времена не претерпели изменения и в наши дни.

Основоположниками математической трактовки законов гидравлики (гидромеханики) по праву считаются академики Петербургской академии наук М.В. Ломоносов (1711-1765 гг.), Д. Бернулли (1700-1782 гг.) и Л. Эйлер (1707-1783 гг.). Последние – швейцарцы по происхождению – были приглашены в Петербургскую академию наук в 1733 и 1742 годах соответственно.

Бурное развитие гидравлики, как и всех естественных наук, произошло во второй половине XIX века. Здесь особо следует отметить работы Д.И. Менделеева (1834-1907 гг.) «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании», опубликованной в 1880 г., Н.П. Петрова (1836-1920гг.) «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» (1883 г.), а также работы Н.Е. Жуковского (1847-1921 гг.), Н.Н. Павловского (1884-1937 гг.), Л.С. Лейбензона (1879-1951 гг.), которые легли в основу существующим теоретическим положениям по гидрогидродинамике.

Большой вклад в развитие гидравлики внесли такие выдающиеся ученые, как И.И. Агроскин, Е.А. Замарин, И.И. Леви, Р.Р. Чугаев, М.А. Великанов, В.А. Большаков, В.Н. Петров, А.А. Лучшева, А.А. Угинчус и многие другие. Среди отечественных гидравликов, внесших значительный вклад в теоретическое развитие науки, так и практическое использование ее законов особо следует отметить Р.Ж. Жулаева, А.Ж. Жулаева, Л.Е. Тажибаева, А.А. Абдураманова, К. Шайпитенова и др.

В гидравлике принято те или иные механические величины или другие параметры обозначать буквами греческого или латинского алфавита. Ниже приведены наиболее часто встречающиеся прописные и заглавные буквы греческого алфавита с русской транскрипцией, а также механические величины и гидравлические параметры, их единицы измерения и обозначения.

Буквы греческого алфавита:

α - альфа	$\theta\theta$ - тэта	σ, Σ - сигма
β - бэта	$\aleph$ - каппа	τ - тау
γ, Γ – гамма	λ, Λ - ламда	ϕ, Φ - фи
δ, Δ - дельта	μ - мю	χ - хи
ε - эпсилон	ν - ню	ξ - кси
ζ - дзета	π - пи	ψ, Ψ - пси
η - эта	ρ - ро	ω, Ω - омега

Механические величины и гидравлические параметры

длина, ℓ	м;	масса, m	кг;
ширина, b	м;	плотность, ρ	кг/м ³ ;
высота, h	м;	удельный вес, $\gamma=\rho g$	Н/м ³ ;
площадь, F	м ² ;	время, t	с;
живое сечение, ω	м ² ;	температура, T, t	К, °С;
смоченный периметр, χ	м;	динамический коэф- фициент вязкости, μ	Пас;
гидравлический радиус, R	м;	кинематический ко- эффициент вязкости, ν	м ² /с;
объем, w	м ³ ;	коэффициент фильт- рации, k_f	м/сут
вес, G	Н;	коэффициент объем- ного сжатия, β_w	м ² /Н;
расход, Q q	м ³ /с; дм ³ /с;	модуль упругости, E_0	Па;
скорость, v	м/с;	работа, A	Дж;
давление, p	Па;	мощность, N	Вт;
ускорение свободного падения, g	м/с ² ;		

1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

1.1. Определение жидкости

Жидкость – это физическое тело, обладающее текучестью, т.е. неспособностью в состоянии покоя сопротивляться даже самым малым касательным напряжениям. Как видим, это определение вполне можно отнести и к газам. Но в отличие от газа, легко меняющего свой объем, жидкость очень мало сжимаема и весьма незначительно меняет свой объем при изменении давления или температуры.

Учитывая то, что в природе встречаются жидкости, сопротивляющиеся в состоянии покоя касательным напряжениям, то необходимо отметить, что мы эти жидкости рассматривать не будем, а будем иметь в виду жидкости, в частности воду, в которых касательные напряжения в состоянии покоя отсутствуют.

Таким образом, жидкость принимает форму сосуда, в который она помещена и в отличие от газа, который бы занял весь предоставленный ему объем, образует свободную поверхность на границе жидкость-газ (атмосфера) (рис.1.1). Такую жидкость еще называют капельной жидкостью.

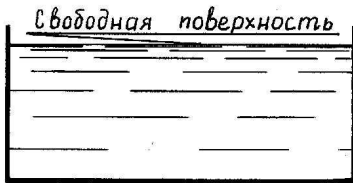


Рис. 1.1. Жидкость в сосуде

При изучении некоторых вопросов гидравлики удобно пользоваться понятиями реальной и идеальной жидкости. Последней в природе не существует, т.к. под идеальной предполагается жидкость, обладающая абсолютной несжимаемостью, а при движении – полным отсутствием касательных напряжений.

Понятие идеальной или воображаемой жидкости используется при необходимости введения некоторой отвлеченной модели при теоретических исследованиях в гидродинамике.

Понятно, что в покоящейся жидкости о касательных напряжениях вообще речи быть не может, поэтому в гидростатике нет надобности применять модель идеальной или воображаемой жидкости.

1.2. Плотность и удельный вес жидкости

Плотностью жидкости ρ называется отношение массы жидкости m к ее объему W :

$$\rho = \frac{m}{W}. \quad (1.1)$$

Силу веса G через массу m можно выразить: $G = mg$, где g – ускорение свободного падения (ускорение силы тяжести).

Удельным весом жидкости γ называется отношение силы веса G к ее объему W :

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{mg}{W} = \rho \frac{gW}{W} = \rho g. \quad (1.2)$$

В соответствии с полученной зависимостью (1.2) мы будем часто в формулах вместо удельного веса γ показывать ρg для более четкого понимания происхождения формулы.

При температурах воды 0°C , 3.8°C и 20°C плотность воды ρ соответственно будет равна 999.841, 999.973 и 998.203 кг/м^3 , а удельный вес 9998.68, 10000.00 и 9982.30 Н/м^3 .

Плотность и удельный вес нефти при температуре 20° составляют 900 кг/м^3 и 8000 Н/м^3 соответственно.

Относительной плотностью называется отношение массы рассматриваемой жидкости при заданной температуре $t^\circ\text{C}$ к массе равновеликого объема дистиллированной воды при температуре 4°C и атмосферном давлении. Обозначается она δ_4^t .

Так δ_4^{20} при 20°C для воды, нефти и керосина составит 0.998, 0.900 и 0.82 соответственно.

Плотность пресной воды при 4°C можно считать равной 1000 кг/м^3 . С увеличением минерализации плотность воды увеличивается. Так плотность морской воды составляет $1020\text{--}1030 \text{ кг/м}^3$, рассолов с минерализацией $300\text{--}500 \text{ г/л}$ – $1200\text{--}1300 \text{ кг/м}^3$.

1.3. Сжимаемость жидкости

Сжимаемость жидкости характеризуется коэффициентом объемного сжатия β_w , численно равным относительному изменению ее объема W при изменении давления P на единицу давления:

$$\beta_w = - \frac{1}{W} \frac{dW}{dP}. \quad (1.3)$$

Знак минус в формуле (1.3) показывает, что положительному увеличению давления P соответствует отрицательное уменьшение

объема жидкости W и наоборот. Размерность коэффициента объемного сжатия $1/\text{Па}$.

Учитывая зависимость (1.1) при $m = \text{const}$, имеем:

$$-\frac{dW}{W} = \frac{dp}{c} \text{ и } \beta_w = \frac{1}{c} \frac{dp}{dP}, \quad (1.4)$$

т.е. коэффициент объемного сжатия определяет также и относительное изменение плотности жидкости при изменении давления на единицу давления.

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем объемной упругости E_0 .

$$E_0 = \frac{1}{\beta_w}; \quad E_0 = \rho \frac{dP}{dc}. \quad (1.5.)$$

Среднее значение модуля объемной упругости E_0 для воды составляет 1960 МПа, для нефти, керосина и ртути – 1350, 1690 и 3200 МПа соответственно.

Для жидкостей значение модуля E_0 несколько уменьшается с увеличением температуры и возрастает с повышением давления.

При решении гидравлических задач, связанных с поверхностным стоком или подземным на небольших глубинах, сжимаемостью и упругостью практически пренебрегают. При изучении же гидравлических ударов или решении гидрогеодинамических задач на больших глубинах эти свойства могут иметь решающее значение и пренебрегать ими нельзя ни в коем случае.

1.4. Температурное расширение жидкости

Коэффициент температурного расширения жидкости β_t численно равен относительному изменению ее объема W при изменении температуры на 1°C .

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}. \quad (1.6.)$$

Для воды в зависимости от давления и температуры коэффициент температурного расширения изменяется от $0.00014 \text{ } 1/^\circ\text{C}$ до $0.00066 \text{ } 1/^\circ\text{C}$,

для нефтяных продуктов $\beta_t = 0.00066 - 0.0008 \text{ } 1/^\circ\text{C}$,

для ртути $\beta_t \approx 0.00018 \text{ } 1/^\circ\text{C}$.

1.5. Вязкость жидкости

Вязкостью или внутренним трением жидкости называется ее свойство оказывать при своем движении сопротивление относительному сдвигу своих частиц. Это свойство обуславливается внутримолекулярным движением жидкости и проявляется возникновением сил трения при перемещении одного слоя жидкости относительно другого (рис.1.2).

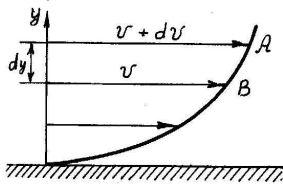


Рис. 1.2. Схема послойного движения жидкости

На рис.1.2 изображена схема послойного движения жидкости. Слой В движется со скоростью v , слой А – со скоростью $v + dv$. Расстояние между слоями – dy . Согласно гипотезе И.Ньютона касательное напряжение τ , равное силе трения, приходящейся на единицу площади и возникающее между смежными слоями, пропорционально разности скоростей dv и обратно пропорционально расстоянию dy , т.е.

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dy}, \quad \mu = \frac{\tau dy}{dv}, \quad (1.7)$$

где μ – динамический коэффициент вязкости или внутреннего трения; $\frac{dv}{dy}$ – градиент скорости.

Учитывая, что удельная сила трения τ измеряется в Н/м^2 , единица измерения динамического коэффициента вязкости μ , как следует из зависимости (1.7) будет измеряться в Нс/м^2 .

Динамический коэффициент вязкости принято измерять пуазами (пз) в честь Жан Луи Мари Пуазейля (1799-1869 гг.), французского врача и физика: $1 \text{ пз} = 0.1 \text{ Нс/м}^2$.

Вязкость жидкости значительно уменьшается с увеличением ее температуры. Зависимость вязкости от температуры хорошо описывается формулой Пуазейля:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0.0337t + 0.000221t^2)^{-1}, \quad (1.8)$$

где t – температура, $^{\circ}\text{C}$; μ_0 – динамический коэффициент вязкости воды при $t = 0^{\circ}\text{C}$.

Для характеристики вязкости жидкости наиболее употребителен кинематический коэффициент вязкости ν , представляющий собой отношение динамического коэффициента вязкости μ к плотности жидкости ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ м}^2/\text{с}. \quad (1.9)$$

Кинематический коэффициент вязкости принято измерять в стоксах (1 ст = 1 см²/с).

Вязкость, выраженная через кинематический коэффициент вязкости при температурах 0, 5, 10, 20, 50°C составляет соответственно 0.0178, 0.0152, 0.0131, 0.0101, 0.0055 ст.

Практически вязкость измеряется условными градусами Энглера (°E) с помощью вискозиметра, где число градусов Энглера является отношением времени истечения 200 мл испытуемого раствора ко времени истечения 200 мл воды при 20°C.

Коэффициент динамической вязкости, выражаемый в пуазах вычисляется по формуле Убеллоде:

$$\mu = \left(0,0731^{\circ E} - \frac{0,0631}{^{\circ E}} \right) \rho, \quad (1.10)$$

где ρ - плотность, г/см³.

В полевых условиях, при роторном бурении скважин вязкость приготовляемого глинистого раствора замеряется с помощью полевого вискозиметра СПВ-5 (рис.1.3). Вязкость в этом случае выражается в секундах. Обычно буровой глинистый раствор обладает вязкостью от 18 до 30 с.

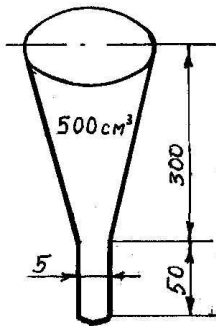


Рис. 1.3. Полевой вискозиметр СПВ-5

1.6. Сцепление, смачиваемость, поверхностное натяжение, капиллярность

Сцепление – это свойство любого физического тела, в том числе и жидкости, обусловленное сопротивлением соседних молекул растягивающим усилиям, стремящимся их раздвинуть.

Смачивание – это свойство, обусловленное взаимодействием молекул жидкого и твердого тела, благодаря которому жидкость может прилипать к твердому телу, находящемуся с ним в соприкосновении.

Сцепление между поверхностными молекулами жидкости обуславливает поверхностное (или молекулярное) давление – свойство, благодаря которому создается поверхность раздела жидкости с газом или же граница двух перемешивающихся жидкостей. Поверхностное натяжение характеризуется силой поверхностного натяжения, отнесенной к единице длины линии соприкосновения с воздухом или другой жидкостью. Эта величина называется коэффициентом поверхностного натяжения σ и зависит от природы жидкости (газа) и ее температуры.

Коэффициент поверхностного натяжения σ для воды, находящейся в соприкосновении с воздухом при температурах 0, 5, 15, 20, 25°C составляет соответственно 0.0755, 0.0748, 0.0733, 0.0725, 0.0718 Н/м.

Смачивание и поверхностное натяжение обуславливают способность жидкости подниматься или опускаться в трубках малого диаметра, которая носит название капиллярности.

Для объяснения явления капиллярности существует много теорий. Наибольшее признание имеют теории Пуассона и Юнга.

Поверхностное натяжение, стремясь сохранить поверхность соприкосновения, искривляет ее. При отсутствии внешних сил ограниченный объем жидкости, не соприкасающийся с другими телами, принимает форму шара, что отвечает устойчивому равновесию жидкости.

Поверхностное натяжение и смачивание обуславливают форму мениска (рис.1.4) выпуклого или вогнутого.

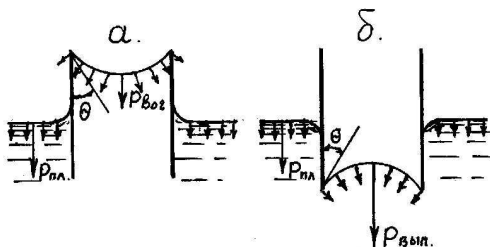


Рис. 1.4. Проявление капиллярной способности жидкости.

На рисунке представлены случаи проявления капиллярных сил: а) при смачивании жидкостью твердого тела (мениск вогнутый) и б) при несмачивании жидкостью стенок трубки (мениск выпуклый). Векторами $R_{пл}$, $R_{вог}$ и $R_{вып}$ – обозначены равнодействующие силы поверхностного натяжения соответственно при плоской, вогнутой и выпуклой поверхностях жидкости. Сравнивая их между собой, становится понятным явление поднятия и опускания жидкости по капиллярам – тонким трубкам. При вогнутом мениске $R_{вог} < R_{пл}$, а при выпуклом $R_{вып} > R_{пл}$. Опусканием или поднятием столбиков жидкости в капиллярах достигается равновесие систем а и б.

Высота капиллярного поднятия в общем виде для круглых капилляров выражается формулой Жюрена:

$$h_k = \frac{2\gamma \cos \theta}{r\rho g}, \quad (1.11)$$

где σ – поверхностное натяжение; θ – угол смачивания; r – радиус капиллярной трубки; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Высота капиллярного поднятия между двумя плоскими вертикальными поверхностями в два раза меньше: $h_n = \frac{\gamma \cos \theta}{r\rho g}$, где r – половина расстояния между плоскими гранями.

Максимальная высота капиллярного поднятия имеет место при полном смачивании, когда θ равно 0° или 180° . Высота капиллярного поднятия уменьшается при повышении температуры.

При капиллярах с переменным сечением капли смачивающей жидкости втягиваются в сторону утончения капилляров. В капиллярах, с чередующимися сужениями (шейками) и расширениями (вздутиями) капли смачивающей жидкости имеют равновесное повышение в шейках, а несмачивающей жидкости – во вздутиях.

1.7. Кипение и кавитация жидкости

Явление поглощения и растворения жидкостью соприкасающихся с ней газов называется абсорбцией. В соответствии с законом Генри весовое количество абсорбированного (растворенного) газа при данной температуре изменяется пропорционально давлению жидкости, оставаясь постоянным по объему.

При нормальном атмосферном давлении, в обычных условиях в воде в природном состоянии всегда содержится около 2 % объема воды растворенного в ней воздуха.

При уменьшении давления в жидкости или при повышении ее температуры растворенный воздух начинает выделяться. При этом в воде начинают образовываться разрывы (воздушные пузыри) в случае, когда давление насыщенных паров R_{np} превысит давление в воде P ($P < R_{np}$). До того, как пузыри выйдут из воды через ее свободную поверхность можно говорить о двухфазной (двухкомпонентной) системе (вода плюс воздушные пузыри). Давление насыщенных паров повышается с повышением температуры. Так в воде при температурах 0, 25, 50, 75, 100°C давление насыщенных паров будет составлять 0.0006, 0.0032, 0.0126, 0.0392, 0.103 МПа соответственно.

Кипением жидкости называется явление, когда пузыри пара всплывают и выходят из жидкости через ее свободную поверхность.

Кавитацией называется явление, когда пузырьки газа и пара появляются в движущейся жидкости и закрываются внутри нее.

В результате кавитации в трубопроводах могут появляться воздушные пробки, происходить разрушения металлических деталей гидромашин, так называемая кавитационная эрозия, и другие нежелательные явления. В этих случаях с кавитацией следует бороться. С другой стороны эффект кавитации используется в некоторых технологических процессах (эмульгирование жидкостей, ускорение химических реакций и т.д.).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое капельная жидкость?
2. Что такое реальная и идеальная жидкости?
3. Что такое плотность жидкости?
4. Дать характеристику сжимаемости жидкости.
5. Что такое модуль упругости жидкости?
6. Что такое коэффициент температурного расширения?
7. Дать понятие вязкости жидкости.
8. Что такое динамический коэффициент вязкости жидкости?
9. Что такое кинематический коэффициент вязкости жидкости?
10. Как определяется вязкость жидкости?
11. Объяснить физическую сущность явления капиллярности.
12. Дать характеристику явлениям кипения и кавитации жидкости.

2. ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика – это раздел гидравлики рассматривающий жидкость в состоянии покоя (равновесия). При этом к основным задачам гидростатики относятся:

- изучение гидростатического давления и его свойств;
- изучение законов равновесия жидкостей;
- определение силы гидростатического давления на различные поверхности, погруженные в жидкость;
- изучение условий плавания тел.

2.1. Гидростатическое давление и его свойства

Представим себе произвольный объем жидкости (рис.2.1).

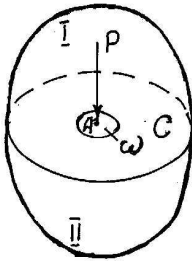


Рис. 2.1. Гидростатическое давление

Мысленно рассечем этот объем поверхностью C на две половины I и II. При этом первая половина будет оказывать давление на вторую. Часть этого давления будет приходиться на площадку ω , являющуюся частью поверхности C . Эта сила P , действующая на рассматриваемую площадку ω , называется силой гидростатического давления или суммарным гидростатическим давлением P .

Разделив величину P на ω , получим среднее гидростатическое давление:

$$p_{\text{ср}} = \frac{P}{\omega} \quad (2.1)$$

Если представить, что в формуле (2.1) площадь ω стремится к нулю, или в пределе к точке, т.е.

$$p = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{P}{\omega} \right), \quad (2.2)$$

то получим величину p , которая носит название гидростатического давления в точке или просто гидростатического давления. Единица измерения гидростатического давления – Па.

Гидростатическое давление в точке обладает тремя свойствами.

Первое свойство. Гидростатическое давление в точке всегда действует по внутренней нормали к рассматриваемой поверхности.

Это легко доказать методом от противного (рис.2.2).

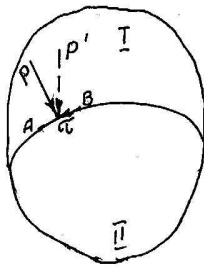


Рис. 2.2. Первое свойство гидростатического давления

Предположим, что гидростатическое давление p действует ненормально к произвольно выбранной поверхности AB (p'). В этом случае силу p' можно разложить по правилу параллелепипеда на две составляющие – нормальную к площадке AB и силу в ее плоскости, которая будет являться сдвигающей (τ), что противоречит условиям покоящейся жидкости. Следовательно, остается единственная возможность нормального приложения силы p к рассматриваемой поверхности (площадке AB).

Если же предположить, что сила p направлена не внутрь рассматриваемого объема жидкости, а в противоположную сторону, то в этом случае обязательно должны были бы возникнуть растягивающие усилия, что невозможно, так как принято считать, что жидкость в обычной обстановке растягивающим усилием не сопротивляется.

Второе свойство. Гидростатическое давление в точке действует одинаково по всем направлениям и может быть записано следующим образом: $p_x = p_y = p_z = \dots = p_n$. Выделим у произвольно взятой точки A внутри рассматриваемого объема жидкости элементарный объем в виде призмы, основанием которой является треугольник ABC (рис. 2.3.).

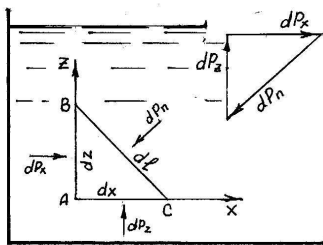


Рис. 2.3. Второе свойство гидростатического давления

Эта призма будет находиться в равновесии под действием сил dP_x , dP_y и dP_z , т.е. сил гидростатического давления со стороны окружающей жидкости. dP_y – сила направленная по оси y , перпендикулярной плоскости чертежа.

Призма с основанием ABC имеет соответственно осям длины граней $AB = dz$, $BC = dl$ и $CA = dx$, высота призмы dy .

Из теоретической механики следует, что в случае равновесия призмы с основанием ABC силовой треугольник будет замкнут (рис.2.3). Из подобия этого треугольника основанию призмы можно написать:

$$\frac{dP_x}{AB} = \frac{dP_n}{BC} = \frac{dP_z}{CA} \quad (2.3)$$

Разделим все члены этого равенства на длину призмы dy :

$$\frac{dP_x}{dzdy} = \frac{dP_n}{dldy} = \frac{dP_z}{dxdy}, \quad (2.4)$$

где $dzdy$, $dldy$, $dxdy$ – площади соответствующих граней призмы.

При стремлении dx , dy , dz и dl к нулю, совершенно очевидно, что $p_x = p_n = p_z = p$, т.е. $p_x = p_y = p_z = \dots = p_n$, что и следовало доказать.

2.2. Основные уравнения гидростатики

К основным уравнениям гидростатики относятся:

- дифференциальное уравнение равновесия жидкости;
- уравнение гидростатического давления;
- уравнение поверхности равного давления;
- уравнение гидростатического давления жидкости, находящейся под действием сил тяжести.

Основное дифференциальное уравнение равновесия жидкости выведено Леонардом Эйлером в 1755 году в Петербургской Академии Наук. Оно выражает связь между массовыми (объемными) силами, поверхностными (гидростатическим давлением) и координатами любой точки жидкости в состоянии равновесия.

В покоящейся жидкости выделим произвольно какой-либо элементарный объем. Предположим, что он будет в форме параллелепипеда с гранями dx , dy и dz , направленными вдоль соответствующих осей прямоугольной системы координат x , y и z (рис. 2.4.).

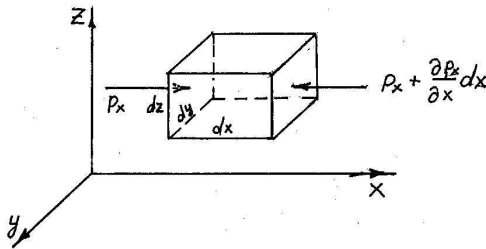


Рис. 2.4. Силы, действующие на элементарный объем жидкости

На выделенный объем действуют силы поверхностные, т.е. силы гидростатического давления и массовые (объемные) силы. Поскольку выделенный параллелепипед находится в равновесии, сумма всех сил, действующих на него должна быть равна нулю.

Поверхностные силы, представленные силами суммарного гидростатического давления по оси x с учетом приращения, которое может быть выражено, как частная производная $\frac{\partial p_x}{\partial x} dx$ будут складываться из давлений на противоположные грани размером $dx dz$, имеющие противоположные знаки, т.е.

$$p_x dy dz - \left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) dy dz. \quad (2.5)$$

Объемной силой, приложенной к массе жидкости в объеме параллелепипеда является равнодействующая той или иной внешней силы, необязательно силы тяжести (F). Через X, Y, Z обозначим проекции этой силы, действующие на единицу массы рассматриваемой жидкости, на оси x, y, z . Тогда представленная объемная сила будет выражаться как $F(dx dy dz)\rho$, где ρ - плотность жидкости. Проекция этой силы на ось x будет равна $X(dx dy dz)\rho$.

Сумма поверхностных и массовых сил на ось x , равная нулю из условия равновесия жидкости, будет выражаться:

$$p_x dy dz - p_x dy dz - \frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy dz + X dx dy dz = 0.$$

Произведя необходимые сокращения и отнеся все члены уравнения к единице массы, т.е. разделив их на $\rho dx dy dz$, а, также учитывая второе свойство гидростатического давления ($p_x = p_y = p_z = p$), получим дифференциальные уравнения равновесия жидкости Л.Эйлера.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} &= X \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_y}{\partial y} &= Y \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_z}{\partial z} &= Z \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Как видно, полученные уравнения выведены для произвольно заданных сил и позволяют решать самые различные задачи, связанные с равновесием жидкости.

Физический смысл этих уравнений заключается в следующем: изменение гидростатического давления в направлении какой-либо оси, отнесенное к плотности, равно проекции объемной силы, отнесенной к

единице массы на ту же ось.

Уравнение гидростатического давления может быть получено путем умножения каждого члена полученного уравнения Л.Эйлера на ρdx , ρdy и ρdz и почленного сложения. В результате проделанной операции получим следующее уравнение:

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (2.7)$$

Правая часть полученного уравнения, представляющая собой сумму частных дифференциалов, как следует из высшей математики, является полным дифференциалом давления dp . Таким образом:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.8)$$

Полученное уравнение (2.8) является уравнением гидростатического давления, из которого видно, что давление зависит от плотности жидкости и бывает больше для более плотных жидкостей.

В случае если $\rho = \text{const}$, а, следовательно, $dp = 0$, уравнение 2.8 с учетом, что $\rho \neq 0$, примет вид:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (2.9)$$

Полученное уравнение носит название уравнения поверхности равного давления.

Поверхностью равного давления в жидкости называется поверхность, все точки которой испытывают одинаковое давление.

Одной из таких поверхностей является свободная поверхность жидкости, т.е. поверхность, граничащая с газовой средой (практически с воздухом).

Уравнение гидростатического давления жидкости, находящейся под действием силы тяжести следует из уравнения гидростатического давления (2.8). Выделим в жидкости точку a , в которой жидкость находится под

действием силы тяжести, равной $G = mg$ (рис.2.5).

Если принять $m = 1$, то $G = g$, т.е. вес будет равен ускорению свободного падения. Проекция этой силы на оси x и y будут равны нулю, а на ось z ускорению g .

Подставляя в уравнение 2.8 вместо X , Y и Z соответствующие значения веса, получим

$$dp = \rho g dz. \quad (2.9)$$

Проинтегрируем это уравнение от p_0 до p и от z_0 до z :

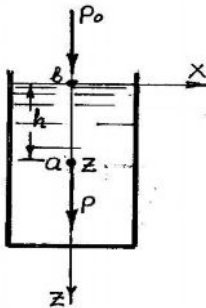


Рис. 2.5. Давление жидкости, находящейся под действием силы тяжести.

$$\int_{p_0}^p dp = c g \int_{z_0}^z dz ; \quad p - p_0 = \rho g (z - z_0).$$

Учитывая, что $z - z_0 = h$, т.е. глубине погружения точки a относительно свободной поверхности, получим:

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (2.10)$$

Полученная формула является уравнением гидростатического давления жидкости, находящейся под действием силы тяжести. Это уравнение называют основным уравнением гидростатики.

Если свободная поверхность жидкости соприкасается с атмосферой, то вместо p_0 в формулу (2.12) следует ввести атмосферное давление p_a , в результате чего формула (2.10) примет вид:

$$p = p_a + \rho gh. \quad (2.11)$$

В инженерной практике часто пользуются понятием избыточного (или манометрического) давления:

$$p_{изб} = \rho gh. \quad (2.12)$$

Избыточным или манометрическим давлением называется превышение гидростатического давления над атмосферным.

Избыточное или манометрическое давление, измеряемое с помощью манометров, измеряют в технических атмосферах: 1 техн. атмосфера = $9.81 \cdot 10^4 \text{ Па}$

2.3. Закон Паскаля

Закон Паскаля следует из основного уравнения гидростатики (2.10), из которого следует, что в случае сколь угодно малых величин изменения давления p_0 на поверхности раздела жидкость-газообразная среда будет происходить сколь угодно малое изменение гидростатического давления p , т.е. *внешнее давление передается внутри жидкости по всем направлениям и всем частицам этой жидкости без изменения величины передаваемого давления.*

Во всех точках покоящейся жидкости, погруженных на одну и ту же глубину полное (абсолютное) давление одинаково. Из этого следует, что при равновесии жидкости под действием силы тяжести поверхность равного давления или поверхность уровня представляет собой горизонтальную поверхность.

2.4. Некоторые понятия в гидростатике

На рис.2.6 показан сосуд с жидкостью, на свободную поверхность которой действует давление p , превышающее атмосферное p_a .

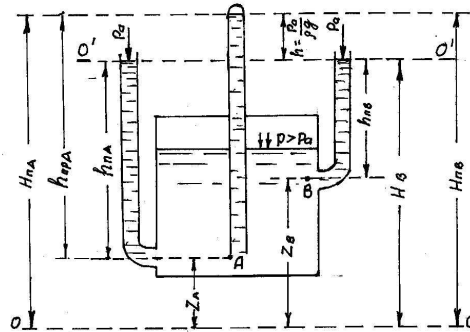


Рис. 2.6. Сосуд с жидкостью и выведенными пьезометрами

Из сосуда выведены трубки. Две крайние открыты и сообщаются с атмосферой, а средняя запаяна сверху и из нее выкачан воздух. При $p > p_a$ по трубкам, носящим название пьезометров, жидкость поднимается выше свободной поверхности жидкости в сосуде. Причем в открытых пьезометрах, где действует атмосферное давление уровень воды будет ниже, чем в закрытом пьезометре и установится на уровне $O'-O'$. Давление на свободной поверхности жидкости в открытых пьезометрах равно атмосферному, а в закрытом – нулю.

Рассмотрим в сосуде точки А и В напротив пьезометров, которые предназначены для измерения давления в точках (название «пьезометр» состоит из двух греческих слов пьезо – давление и метр – мера).

Из формулы (2.13) следует, что глубины погружения точек А и В будут равны соответственно:

$$h_{ПА} = \frac{p_A - p_a}{\rho g}; \quad h_{ПВ} = \frac{p_B - p_a}{\rho g}. \quad (2.13)$$

Величины $h_{ПА}$ и $h_{ПВ}$ являются *пьезометрическими высотами* для точек А и В.

Таким образом, *пьезометрической высотой для точки, находящейся под давлением называется расстояние от этой точки до поверхности, где давление равно атмосферному.*

Следует отметить, что пьезометрические высоты для точек, расположенных на различных уровнях, разные. Уровни же пьезометрических высот устанавливаются на одной напорной плоскости $O'-O'$ параллельной плоскости сравнения $O-O$. (Плоскость сравнения проводится в любом месте и все гидравлические системы рассматриваются относительно ее).

Координаты точек А и В относительно плоскости сравнения обозначим через Z_A и Z_B . Тогда суммы координат точек А и В и пьезометрических высот будут постоянными величинами $H_{ПА}=H_{ПВ}$.

$$H_{ПА} = Z_A + h_n = Z_A + \frac{P_A - P_a}{\rho g}, H_{ПВ} = Z_B + h_n = Z_B + \frac{P_B - P_a}{\rho g}. \quad (2.14)$$

Пьезометрическим (или гидростатическим) напором H_n для точек, находящихся под давлением, называется расстояние от плоскости сравнения до поверхности, где давление равно атмосферному.

Пьезометрические (или гидростатические) напоры для точек, находящихся на различных уровнях одинаковы.

Приведем понятия приведенной пьезометрической высоты и полного пьезометрического напора.

Приведенной пьезометрической высотой для точки, находящейся под давлением, называется расстояние от точки до поверхности, где давление равно нулю ($h_{ППА}$ и $h_{ППВ}$).

Полным пьезометрическим или гидростатическим напором для точек, находящихся под давлением называется расстояние от плоскости сравнения до поверхности, где давление равно нулю ($H_{ППА}$ и $H_{ППВ}$).

Легко определить разницу между пьезометрической и приведенной высотой давления, равно, как и между пьезометрическим и полным пьезометрическим напором.

Пьезометрическая высота для точки А определяется по формуле (2.13). Приведенная высота, определяемая по той же формуле, но при

значении p_a равном нулю составит: $h_{ППА} = \frac{P_A}{\rho g}$

Разница между ними будет составлять:

$$\frac{P_A + P_a}{\rho g} - \frac{P_A}{\rho g} = \frac{P_a}{\rho g}. \quad (2.15)$$

Вакуумметрическая высота $h_{\text{вак}}$ показана на рис.2.7.

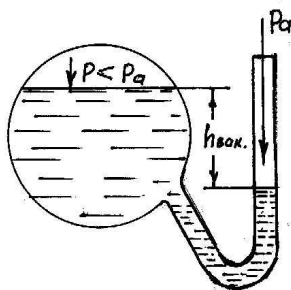


Рис. 2.7. Вакуумметр

В сосуде на свободную поверхность жидкости действует давление $p < p_a$. Из основного уравнения гидростатики (2.10) и рис.2.7 следует:

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_a - p}{\rho g} . \quad (2.16)$$

2.5. Энергетическая интерпретация пьезометрического напора

На рис.2.6 в точке А масса частицы жидкости равна m . Вес частицы жидкости равен mg . Частица жидкости из точки А может опуститься на плоскость сравнения 0-0, совершив при этом работу, равную mgz_a , т.е. произведению силы веса на пройденный путь. Таким образом, частица жидкости в точке А обладает потенциальной энергией, равной совершенной ею работе. Одновременно, эта частица могла бы

подняться на пьезометрическую высоту давления $\frac{p_A}{\rho g}$, совершив при этом работу $mg \frac{p_A}{\rho g}$, которая также является потенциальной энергией частицы А.

Полный запас потенциальной энергии для частицы жидкости в точке А E_{Π} составит:

$$E_{\Pi} = mgz_a + mg \frac{p_A}{\rho g} . \quad (2.17)$$

Отнеся весь запас энергии частицы к единице веса, получим значение удельной потенциальной энергии:

$$E_{\text{уд}} = z_a + \frac{p_A}{\rho g} . \quad (2.18)$$

Удельной потенциальной энергией жидкости называется энергия, отнесенная к единице веса и вычисленная относительно плоскости сравнения.

Из полученной формулы видим, что величина $z_a + \frac{p_A}{\rho g}$ есть величина постоянная и равная пьезометрическому напору. Следовательно, пьезометрический или гидростатический напор для каждой точки жидкости есть полная удельная потенциальная энергия, а величины z_a и $\frac{p_A}{\rho g}$ являются соответственно удельной потенциальной энергией положения и давления.

2.6. Гидростатическое давление на плоские поверхности

На рис.2.8 показана плоская фигура АВ, погруженная в жидкость под некоторым углом α к горизонту.

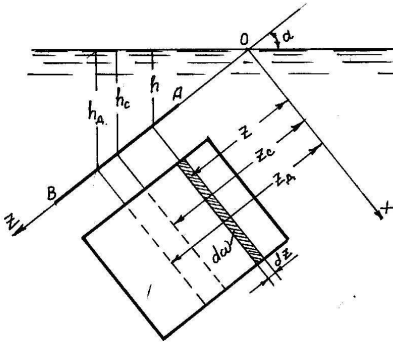


Рис. 2.8. Давление жидкости на плоскую поверхность

Требуется определить силу полного гидростатического давления, действующего на эту фигуру. Проведем оси координат, причем ось z совместим с проекцией фигуры на плоскость чертежа АВ; начало координат примем в точке пересечения продолжения проекции АВ со свободной поверхностью жидкости, а ось x направим вглубь жидкости перпендикулярно оси z .

Вращая фигуру вокруг оси y до совмещения с плоскостью чертежа, выделим на фигуре площадью ω бесконечно малую полоску толщиной dz . Эта полоска находится на расстоянии y от оси x , погружена в жидкость на глубину h и имеет бесконечно малую площадь $d\omega$.

Элементарная сила полного гидростатического давления, действующего на элементарную полоску, будет равна: $dp = p d\omega = (p_0 + \rho gh) d\omega$.

Выразив $h = z \sin \alpha$, получим $dp = p_0 d\omega + \rho g z \sin \alpha d\omega$.

Проинтегрировав полученное выражение по площади ω , получим силу полного гидростатического давления, действующего на плоскую фигуру АВ, погруженную в жидкость под углом α :

$$p = p_0 \omega + \rho g z \sin \alpha \int_{\omega} z d\omega. \quad (2.19)$$

Из механики известно, что $\int_{\omega} z d\omega$ выражает статический момент площади фигуры АВ относительно оси x , т.е.

$$\int_{\omega} z d\omega = \omega z_c, \quad (2.20)$$

где z_c – расстояние от центра тяжести плоской фигуры ω до оси x , которое выражается через глубину погружения центра тяжести h_c :

$$z_c = \frac{h_c}{\sin \beta}.$$

Следовательно:

$$p = p_0 \omega + \frac{c g \sin \beta \sin h_c}{\sin \beta} = \omega (p_0 + c g h_c). \quad (2.21)$$

Очевидно, что сила избыточного гидростатического давления будет равна:

$$p_{изб} = \omega p g h_c. \quad (2.22)$$

Таким образом, *сила полного гидростатического давления, действующего на плоскую фигуру, погруженную в жидкость, равна произведению площади фигуры на величину гидростатического давления в центре ее тяжести.*

Для выполнения инженерных гидравлических расчетов важно знать местоположение центра приложения давления.

Центром давления называется точка приложения силы полного гидростатического давления. Положение центра давления зависит только от избыточного гидростатического давления $p_{изб} = \omega p g h_c$, поэтому ординату центра давления следует определять с учетом только этой силы.

Выразив глубину погружения центра тяжести h_c через его координату z_c , избыточное гидростатическое давление будет равно: $p_{изб} = \omega p g z_c \sin \alpha$.

Эта сила является равнодействующей элементарных сил избыточного давления: $dp = d\omega p g z_c \sin \alpha$.

Для составления уравнения равновесия относительно оси x напишем выражение для элементарного момента dM , соответствующего указанным элементарным силам: $dM = dp_z = d\omega p g z^2 \sin \alpha$.

Сумма всех элементарных моментов будет равна:

$$M_c = \int_{\omega} dM = \int_{\omega} c g \sin \beta z^2 d\omega = c g \sin \beta \int_{\omega} z^2 d\omega = c g \sin \beta J_x, \quad (2.23)$$

где $\int_{\omega} z^2 d\omega = J_x$ - момент инерции фигуры АВ относительно оси x .

Обозначим через z_d координату центра давления, т.е. расстояние от этого центра до оси x . Тогда можно написать выражение для момента равнодействующей силы p , т.е.

$$M_p = p z_d = \omega p g h_c z_d = \omega p g z_c \sin \alpha z_d. \quad (2.24)$$

Приравнявая M_c и M_p , окончательно получим:

$$z_d = \frac{J_x}{\omega z_c} . \quad (2.25)$$

Известно, что между моментом инерции J_x и центральным моментом инерции существует связь: $J_x = J_c + \omega z_c^2$.

Тогда координата центра давления z_D будет равна:

$$Z_d = z_c + \frac{J_x}{\omega z_c} , \quad (2.26)$$

где $\frac{J_x}{\omega z_c}$ показывает насколько ниже центра тяжести фигуры располагается центр давления.

Формулы (2.21) и (2.22) очень хорошо и наглядно изображаются графически. На рис.2.9 изображен фрагмент резервуара, наполненного водой, боковая стенка которого наклонена к горизонту под углом α . Из формулы (2.12) следует, что: $p = \rho g h = \rho g \ell \sin \alpha$.

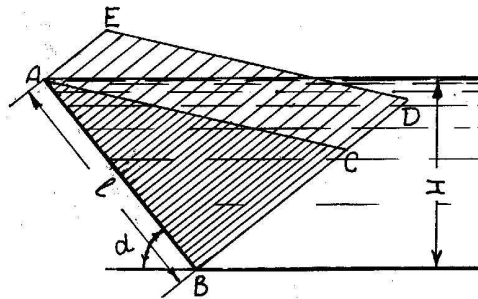


Рис. 2.9. Эпюра гидростатического давления жидкости на плоскую стенку

Совершенно очевидно, что зависимость $p=f(h)$ представляет собой прямую линию. Следовательно, если из точки, лежащей на пересечении линии стенки резервуара с линией его дна, восстановить перпендикулярный отрезок $\rho g h$, а затем соединить конец этого отрезка с точкой А, получится треугольник ABC, представляющий собой эпюру избыточного давления.

Для построения эпюры распределения силы полного гидростатического давления необходимо из точек А и В восстановить перпендикулярные отрезки к линии АВ равные p_a и $p_a + \rho g h$ соответственно соединить. Концы полученных отрезков прямой. Полученная эпюра BAED наглядно изображает зависимость (2.21).

2.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности

Рассмотрим цилиндрическую поверхность АВ, подверженную действию избыточного гидростатического давления (рис. 2.10.).

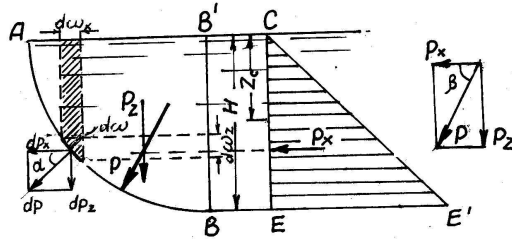


Рис. 2.10. Давление жидкости на криволинейную поверхность

Выделим на этой поверхности бесконечно малую горизонтальную полоску площадью $d\omega$, центр тяжести, которой погружен в жидкость на глубину h . На эту элементарную полоску действует сила избыточного гидростатического давления $dp = \rho gh d\omega$, которая раскладывается на горизонтальную и вертикальную составляющие, т.е. на силы dp_x и dp_z .

Предположим, что элементарная сила dp наклонена к горизонту под углом α . Тогда составляющие dp_x и dp_z будут равны: $dp_x = dp \cos \alpha$ и $dp_z = dp \sin \alpha$.

Учитывая, что $dp = \rho gh d\omega$, горизонтальная составляющая будет равна: $dp_x = \rho gh d\omega \cos \alpha$.

Величина $d\omega \cos \alpha$ является площадью проекции элементарной полоски $d\omega$ на вертикальную плоскость, т.е. $d\omega \cos \alpha = d\omega_z$. Следовательно, можно записать: $dp_x = \rho gh d\omega_z$.

Тогда горизонтальная составляющая полной силы избыточного гидростатического давления на криволинейную поверхность будет равна:

$$P_x = \int_{\omega_z} \rho gh d\omega_z = \rho g \int_{\omega_z} h d\omega_z, \quad (2.27)$$

где $\int_{\omega_z} h d\omega_z$ - является статическим моментом всей площади проекции ω_z относительно свободной поверхности жидкости. Он равен:

$$\int_{\omega_z} h d\omega_z = \omega_z h_c, \quad (2.28)$$

где h_c – глубина погружения центра тяжести площади ω_z .

Следовательно, горизонтальную составляющую избыточного гидростатического давления на криволинейную поверхность можно выразить:

$$p_x = \omega_z \rho g h_c. \quad (2.29)$$

Величина этой горизонтальной составляющей может быть выражена площадью эпюры гидростатического давления $EE'C$.

Вертикальная составляющая избыточного гидростатического давления: $dp_z = d\rho \sin \alpha = \rho g h d\omega \sin \alpha$

Величина $d\omega \sin \alpha$ является площадью проекции $d\omega_z$ элементарной площадки $d\omega$ на горизонтальную плоскость.

Вертикальная составляющая полной силы избыточного гидростатического давления будет равна:

$$p_z = \int_{\omega_x} dp_z = \int_{\omega_x} \rho g h d\omega \sin \alpha = \rho g \int_{\omega_x} h d\omega_x. \quad (2.30)$$

Выражение $h d\omega_x$ представляет собой бесконечно малый объем dW бесконечно малой призмы, отмеченной штриховкой на рис.2.10. Произведение $\rho g h d\omega_x$ является весом жидкости в этом бесконечно малом объеме dG , т.е. $dG = \rho g dW$.

Учитывая это, можно написать:

$$p_z = \rho g \int_{\omega_x} dW = \rho g W. \quad (2.31)$$

Объем W называется телом давления, т.е. объемом, ограниченным криволинейной поверхностью AB , ее проекцией на уровень свободной поверхности AC и вертикальными плоскостями проектирования. Следовательно, вертикальная составляющая полной силы избыточного гидростатического давления на криволинейную поверхность равна весу жидкости в объеме тела давления.

Полная сила избыточного гидростатического давления, являющаяся равнодействующей ее составляющих P_x и P_z определится:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}. \quad (2.32)$$

Направление равнодействующей, т.е. угол, образованный ею с горизонтальной плоскостью можно определить из выражения:

$$\tan \beta = \frac{P_x}{P_z}. \quad (2.33)$$

Центр давления в рассматриваемом случае будет расположен в точке пересечения вектора полной силы давления с криволинейной

поверхностью АВ (точка D, рис.2.10). Вектор полной силы давления p должен проходить через точку пересечения ее горизонтальной и вертикальной составляющих, т.е. p_x и p_z под углом β .

2.8. Относительное равновесие жидкости

На рис.2.11 представлен сосуд с жидкостью, вращающийся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . В этом случае жидкость будет находиться в состоянии относительного покоя и здесь также применимо уравнение равновесия (2.8).

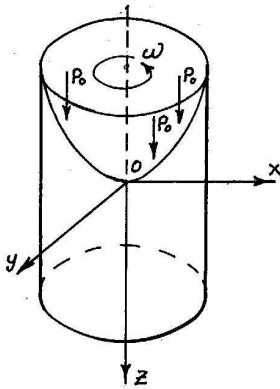


Рис. 2.11. Жидкость во вращающемся сосуде

При вращении сосуда свободная поверхность жидкости принимает вид поверхности тела вращения с пониженной точкой на оси сосуда и постепенным повышением к его стенкам. За начало координат выберем точку 0 на свободной поверхности жидкости. На жидкость в данном случае будут действовать две силы: сила тяжести, составляющие которой, отнесенные к единице массы, равны $X=0$; $Y=0$; $Z=g$ и центробежная сила, составляющие которой на соответствующие оси могут быть выражены следующим образом: $X = \omega^2 x$; $Y = \omega^2 y$ и $Z = 0$.

Уравнение равновесия (2.8) в этом случае примет вид:

$$dp = \frac{c g}{g} (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz). \quad (2.34)$$

После интегрирования этого уравнения получим:

$$p = \frac{c g \omega^2 x^2}{2g} + \frac{c g \omega^2 y^2}{2g} + c g z + C. \quad (2.35)$$

При $p=p_0$ (свободная поверхность) $X=0$; $Y=0$ и $p_0=C$. Тогда уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$p - p_0 = \frac{c g \omega^2 (x^2 + y^2)}{2g} + c g z. \quad (2.36)$$

Это – уравнение параболоида вращения. Для свободной поверхности, где $p=p_a$, получим:

$$\frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2g} + z = 0 \quad \text{или} \quad z = -\frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad (2.37)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - радиус любой точки свободной поверхности относительно оси вращения сосуда.

Из выражения 2.37 следует, что свободная поверхность жидкости во вращающемся сосуде будет иметь вид параболоида вращения.

2.9. Условия плавания тел

На рис.2.12 изображено твердое тело объемом W , погруженное в жидкость. Выделим в теле элементарный объем dW с площадкой dF .

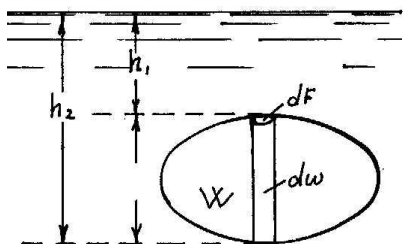


Рис. 2.12. Тело, погруженное в жидкость

На верхнюю площадку будет действовать сила гидростатического давления, стремящаяся погрузить тело в жидкость:

$$dp_1 = \rho g h_1 dF. \quad (2.38)$$

Давление на нижнюю площадку будет стремиться вытолкнуть тело:

$$dp_2 = \rho g h_2 dF. \quad (2.39)$$

Разность этих сил, направленная в сторону действия большей силы, т.е. снизу вверх равна: $dp_n = dp_2 - dp_1 = \rho g(h_2 - h_1)dF$; $dp_n = \rho g dW$.

Результирующая сила гидростатического давления на погруженное тело будет определяться выражением:

$$p_n = \int_W \rho g dW = \rho g W. \quad (2.40)$$

Полученное уравнение описывает закон Архимеда, согласно которому тело, погруженное в жидкость, находится под действием подъемной силы гидростатического давления, направленной снизу

вверх и равной весу объема жидкости, вытесненной телом.

Сила P_n носит название силы водоизмещения (подъемной силы, взвешивающей, «архимедовой»).

Точка приложения силы водоизмещения называется центром давления.

Условия плавания или плавучести тел связаны следующими соотношениями между весом тела G и силой водоизмещения P_n

- тело плавает на различной глубине, т.е. находится в состоянии безразличного равновесия при $G = P_n$;

- тело тонет при $G > P_n$;

- тело всплывает при $G < P_n$.

На рис.2.13 а показаны три случая взаимного расположения центра водоизмещения B и центра тяжести A твердого тела, погруженного в жидкость: а) если A ниже B – положение тела называется устойчивым; б) если A выше B – положение тела неустойчивое; в) если A и B совпадают – тело находится в состоянии безразличного равновесия.

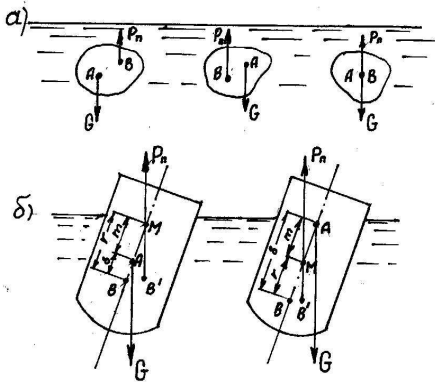


Рис. 2.13. Условия устойчивости плавающих тел.

Ниже приведены некоторые термины для плавающего тела.

■ Плавучесть – способность судна плавать в полупогруженном состоянии. Она наступает при $P_n = G$.

■ Грузовая ватерлиния – линия пересечения поверхности воды с боковой поверхностью плавающего судна без крена при полной нагрузке.

■ Запас плавучести – объем корпуса выше грузовой ватерлинии.

Для оценки запаса плавучести определяется величина n :

$$n = \frac{c_B - c_c}{c_B}, \quad (2.41)$$

где ρ_b и ρ_c – плотность воды и судна с полным грузом соответственно.

При $n < 0$ судно тонет.

■ Плоскость плавания – это плоскость сечения судна, ограни-

ченная по контуру ватерлинией и осью плавания 0-0, проходящей через центр тяжести.

На рис.2.13б) представлена схема судна при крене на угол α . При этом центр водоизмещения В перемещается в точку В' и тогда судно может быть в остойчивом или нестойчивом положении. На рисунке: r – *метацентрический радиус* – расстояние от метacentра М до центра водоизмещения В; Метacentр М – точка пересечения оси плавания 0-0 с вертикальной линией подъемной силы P_n ; m – *метацентрическая высота* – расстояние между М и А; δ – расстояние между центром тяжести А и центром водоизмещения В.

Соотношение между r и δ определяет положение остойчивости судна:

а) $r > \delta$ - положение остойчиво, $\frac{r}{\delta} > 1$;

б) $r < \delta$ - положение нестойчивое.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое гидростатическое давление жидкости?
2. Каковы свойства гидростатического давления?
3. Объяснить физическую сущность дифференциального уравнения равновесия жидкости Л. Эйлера.
4. Что из себя представляет уравнение гидростатического давления?
5. Что из себя представляет уравнение гидростатического давления жидкости, находящейся под действием силы тяжести?
6. Что такое избыточное давление?
7. Сформулировать закон Паскаля и привести примеры его использования на практике.
8. Что такое пьезометрическая высота и пьезометрический напор?
9. Что такое приведенная пьезометрическая высота?
10. Что такое вакуумметрическая высота?
11. Привести энергетическую интерпретацию пьезометрического напора.
12. Как определяется гидростатическое давление на плоскую поверхность?
13. Как определяется гидростатическое давление на криволинейную поверхность?
14. Что из себя представляют эпюры гидростатического давления?
15. Сформулировать закон Архимеда.
16. Каковы условия остойчивости и плавания тел?

3. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

Гидродинамика – это раздел гидравлики, изучающий законы движения жидкостей. При этом решению могут подлежать две задачи:

1) по заданным параметрам жидкости требуется найти силы, приложенные к тому или иному твердому телу, обтекаемому жидкостью (внешняя задача);

2) по заданным силам, действующим на жидкость, требуется найти гидродинамические характеристики потока (внутренняя задача).

Ниже будет рассматриваться вторая внутренняя задача, при решении которой будут определяться основные гидродинамические характеристики, к которым относятся: скорость движения v и гидродинамическое давление p . В общем случае эти параметры для разных точек рассматриваемого потока имеют различную величину, а также могут меняться во времени, т.е. $p = f(x, y, z, t)$ и $v = f(x, y, z, t)$.

В воображаемой идеальной жидкости гидродинамическое давление, в общем, ничем не отличается от гидростатического. В реальной же вязкой жидкости в силу возникающих касательных напряжений давление в точке по разным направлениям оказывается неодинаковым, т.е. $p_x \neq p_y \neq p_z$ и тогда за величину гидродинамического давления в точке принимают среднее давление, т.е.

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}.$$

3.1. Методы изучения гидродинамики

Учитывая сложность физической сущности движения жидкости, как легко деформируемой среды, каждая частица которой движется по определенным траекториям и своим законам, для успешного изучения этих законов, их математического описания вводится та или иная теоретическая модель реального движения и изучаются ее кинематические и динамические характеристики.

Существуют два метода исследования движения жидкости: метод Ж. Лагранжа и метод Л. Эйлера.

Метод Лагранжа заключается в изучении движения потока жидкости посредством рассмотрения траекторий, описываемых отдельными частицами, которые в совокупности представляют собой этот поток (рис.3.1).

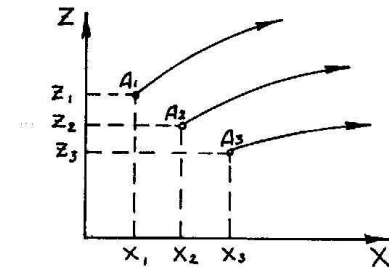


Рис. 3.1. Траектории движения частиц жидкости

Метод Лагранжа в виду его сложности не нашел широкого применения в гидравлике. Однако он необходим при глубоких гидромеханических исследованиях движения жидкостей, когда движение рассматривается не в продолжении времени t , а в продолжении элементарного отрезка времени dt , в течении которого данная частица жидкости проходит через рассматриваемую точку пространства.

Метод Эйлера исключает слежение за движением отдельных частиц, а позволяет рассматривать поток в целом, представленный в данный момент времени векторным полем скоростей, относящихся к неподвижным точкам пространства (рис.3.2).

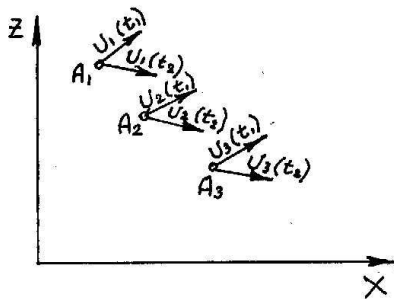


Рис. 3.2. Представление потока жидкости векторным полем скоростей

При известных координатах наблюдаемых частиц, изменяемых во времени $x = f(t)$ и $z = f(t)$, для каждой из них можно построить траекторию движения, а следовательно в любом месте этой траектории и в любое время можно определить скорость $v = ds/dt$. В этом случае x и z являются текущими координатами частиц A_1 , A_2 и A_3 , ds – путь, проходимый частицей за время dt .

На рисунке изображены три закрепленные в пространстве точки 1, 2 и 3. В отличие от метода Лагранжа координаты этих точек x и y являются обычными координатами, а не текущими. В момент времени t , в закрепленных точках находятся частицы жидкости, скорости которых равны соответственно $v_1(t_1)$, $v_2(t_1)$ и $v_3(t_1)$, т.е. поток в момент времени t_1 представлен определенным векторным полем скоростей.

В следующий момент времени t_2 скорости в закрепленных точках в общем случае будут иметь другие значения и направления $v_1(t_2)$, $v_2(t_2)$ и $v_3(t_2)$, т.е. будет другое поле скоростей.

Эти векторные поля скоростей при сопоставлении очень хорошо характеризуют рассматриваемый поток и его изменения во времени.

Очевидно, что различные способы изучения движения жидкости требуют принятия той или иной ее модели. В рассмотренных методах моделью жидкости является сплошная среда, заполненная частицами жидкости без пор и пустот. За частицу жидкости принимается объем жидкости намного меньший рассматриваемого объема и достаточно большой по сравнению с размером молекулы. Предполагается, что в частице содержится так много молекул, что жидкость в пределах частицы можно считать сплошной средой – континуумом.

Под скоростью частицы понимается скорость выбранного полюса – точки, выбранной произвольно в пределах частицы. Именно координатами полюса определяется положение частицы в жидком пространстве.

Выделенная частица жидкости может двигаться поступательно, вращательно, а также в отличие от твердого тела изменять свою форму и двигаться за счет своей деформации.

3.2. Линия и трубка тока, элементарная струйка, поток жидкости

Для изучения гидродинамики, основанном на методе Эйлера, необходимо ввести понятия линии тока, трубки тока, потока жидкости.

Линия тока, представляющая из себя векторную линию поля скоростей – это кривая, проходящая через такие частицы жидкости, скорости которых в данный момент времени направлены по касательной к этой кривой (рис.3.3).



Рис. 3.3. Линия тока

В общем случае линия тока не совпадает с траекторией, являющейся линией, по которой движется частица жидкости. Совпадение линии тока с траекторией возможно только в случае установившегося движения. Линии тока никогда не пересекаются между собой.

Трубкой тока называется трубчатая поверхность бесконечно малого поперечного сечения, образованная линиями тока, проходящими

через точку бесконечно малого замкнутого контура.

Элементарной струйкой называется движущаяся жидкость внутри трубки тока.

Потоком жидкости называется совокупность движения элементарных струек.

Очень важно иметь в виду, что в элементарной струйке скорости по ее поперечному сечению неизменны в отличие от потока жидкости, где скорости в поперечном сечении имеют разные значения и для характеристики потока, как правило, используется средняя скорость.

Различают плоские и радиальные потоки. Плоский поток – это поступательное движение жидкости как сплошной непрерывной массы (реки, каналы, трубопроводы и т.д.). Примером радиального потока может служить приток воды к фильтру скважины при ее откачке.

При вихревом движении (вращательном движении частиц жидкости) вводится понятие *вихревой линии*, по аналогии с линией тока, являющейся кривой, проходящей через частицы жидкости, угловые скорости которых в данный момент времени касательны к этой линии.

Трубчатая поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными через точки бесконечно малого замкнутого контура называется *вихревой трубкой*.

Движущая жидкость внутри вихревой трубки называется *вихревым шнуром*.

Линии тока показывают направление движения.

Совокупность линий тока представляет собой *поверхность тока*.

Линии, перпендикулярные линиям тока называются *эквипотенциалами* или *линиями равных напоров*.

Проекция линий равных напоров на горизонтальную плоскость представляют собой карту уровенной поверхности. При безнапорном движении такая карта называется картой изогипс, а при напорном – картой изопьез.

Система линий равных напоров и перпендикулярных к ним линий тока называется *гидродинамической сеткой*.

3.3. Основные гидравлические характеристики потока жидкости

Живое сечение потока ω – это поперечное сечение потока, проведенное нормально направлению движения (линиям тока). Измеряется в м^2 .

Смоченный периметр χ – часть поперечного сечения русла, соприкасающегося со стенками и дном русла. Измеряется в м.

Гидравлический радиус R – это отношение живого сечения к смоченному периметру:

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (3.1)$$

Гидравлический радиус, измеряемый в м – величина, с помощью которой учитывается влияние формы и размеров живого сечения потока на движение жидкости.

Расходом потока Q называется количество жидкости, протекающее через поперечное сечение потока в единицу времени.

На рис.3.4 показана элементарная струйка жидкости. За время dt частицы жидкости смещаются на величину $d\ell$. При этом площади поперечного сечения $d\omega$ можно считать неизменными. Перемещенный объем жидкости составляет: $dW = d\ell d\omega$.

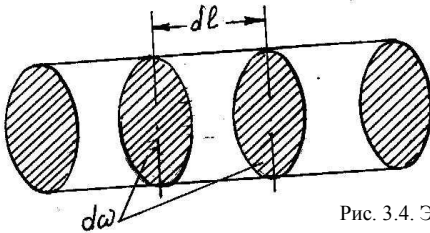


Рис. 3.4. Элементарная струйка жидкости.

Разделив объем жидкости на единицу времени dt , получим расход элементарной струйки dq :

$$dq = \frac{dW}{dt} = \frac{d\ell d\omega}{dt} = v d\omega, \quad (3.2)$$

где $\frac{d\ell}{dt} = v$ – скорость движения в поперечном сечении трубки.

Общий расход потока Q может быть выражен, как сумма расходов элементарных струек:

$$Q = \int_{\text{ш}} dq = \int_{\text{ш}} v d\text{ш} = v_{\text{ш}}, \quad (3.3)$$

где v – средняя скорость потока.

3.4. Виды движения жидкости

Ниже приводятся основные виды движения потоков жидкостей, имеющих место как в природных условиях (сток поверхностных и подземных вод), так и при искусственном транспортировании различных жидкостей (воды, нефти, газа и др.) по каналам, лоткам, трубопроводам и т.п.

Безнапорное движение (рис.3.5а) – это движение потоков, имеющих свободную поверхность, соприкасающуюся обычно с воздухом и имеющей во всех своих точках давление равное атмосферному.

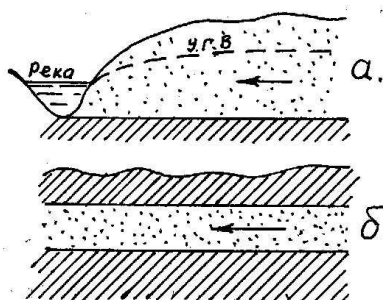


Рис. 3.5. Безнапорное (а) и напорное (б) движение жидкости.

Примерами такого движения являются потоки в реках, каналах, лотках, а также в замкнутых сечениях при неполном заполнении и движении грунтовых вод (рис.3.5а).

Напорное движение (рис.3.5б) – это движение потоков, в которых жидкость со всех сторон ограничена твердыми стенками русла; они не имеют свободной поверхности и пьезометрические напоры устанавливаются выше верхней границы потока (кровли водоносного

пласта).

Неустановившееся (нестационарное) движение – это такое, при котором скорости потока и давления изменяются как в пространстве, так и во времени, т.е. $v=f(x,y,z,t)$, $p=f(x,y,z,t)$, или $\frac{dv}{dt} \neq 0$ и $\frac{dp}{dt} \neq 0$.

Установившееся (стационарное) движение – это такое, при котором скорости потока и давления могут изменяться в пространстве, оставаясь постоянными во времени, т.е. $v=f(x,y,z)$, $p=f(x,y,z)$, или $\frac{dv}{dt} = 0$ и $\frac{dp}{dt} = 0$.

Установившееся движение может быть неравномерным и равно-

мерным.

Неравномерное движение – это движение, при котором по длине потока изменяются поперечные сечения или при постоянном сечении изменяется распределение скоростей по длине потока.

Равномерное движение – это движение, при котором поперечные сечения, средние скорости и скорости во всех точках потока по его длине одинаковы.

3.5. Уравнения неразрывности потока жидкости

Ниже приведены уравнения неразрывности в гидравлической и дифференциальной форме для установившегося движения сплошного потока несжимаемой жидкости при условии, что его русло имеет абсолютно жесткие стенки.

Гидравлическая форма. На рис.3.6 изображен поток жидкости с установившимся движением, ограниченный твердыми стенками.

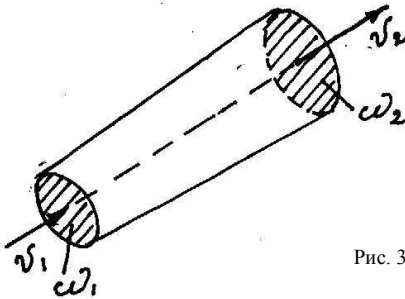


Рис. 3.6. Поток жидкости, ограниченной твердыми стенками.

В сечении I скорость и сечение потока равны v_1 и ω_1 соответственно, а в сечении II – v_2 и ω_2 . Расходы потока в сечениях I и II равны соответственно $Q_1 = v_1 \omega_1$ и $Q_2 = v_2 \omega_2$.

Предположим, что $Q_1 < Q_2$. В этом случае в сечение I будет поступать жидкости меньше, чем выходит из сечения II. Тогда в потоке должен появиться разрыв, что противоречит условию о сплошности потока.

Рассмотрим второй вариант неравенства расходов, т.е. $Q_1 > Q_2$. В этом случае между сечениями I и II должна скапливаться жидкость и в силу ее несжимаемости должно деформироваться и расширяться русло, что также противоречит условию абсолютной твердости стенок русла.

Остается принять единственно верный вариант $Q_1 = Q_2$.

Таким образом, уравнением неразрывности потока жидкости в гидравлической форме является:

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2 . \quad (3.4)$$

Дифференциальная форма. Уравнение неразрывности потока математически выражает закон сохранения массы движущейся жидкости. Иногда это уравнение справедливо называют уравнением несжимаемости однородной движущейся жидкости.

В потоке жидкости выделим элементарный объем в форме параллелепипеда с гранями, параллельными плоскостям координатных осей x, y, z и ребрами равными соответственно dx, dy, dz . Рассмотрим баланс массы жидкости в пределах элементарного постоянного объема, как бы скрепленным с неподвижным пространством (рис.3.7).

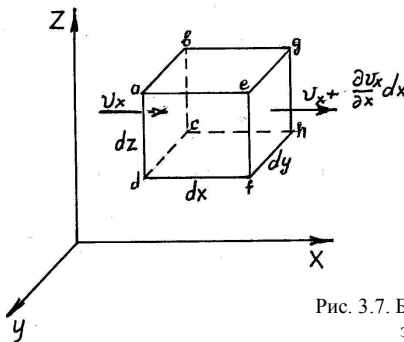


Рис. 3.7. Баланс жидкости в пределах элементарного объема

Определим массу жидкости, поступившей в параллелепипед за время dt и массу жидкости, вышедшей из него за это же время.

Горизонтальная составляющая скорости потока, входящего через грань $abcd$, равна v_x . Скорость потока, выходящего через грань $efgh$ будет равна (с точностью до величин высшего порядка малости):

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx , \text{ где } \frac{\partial v_x}{\partial x} \text{ представляет собой изменение величины } v_x,$$

приходящееся на единицу длины, измеренную вдоль ребра dx , параллельного оси Ox .

Принимая плотность жидкости ρ постоянной, масса жидкости, вошедшая в параллелепипед через грань $abcd$ M_1 будет составлять: $M_1 = \rho v_x dy dz dt$, а масса жидкости, вышедшая из него через грань $efgh$

$$M_2 \text{ составит: } M_2 = \rho \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt .$$

Разность этих масс будет равна:

$$M_1 - M_2 = \rho v_x dydzdt - \rho v_x dydzdt - \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dydzdt = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dydzdt \quad (3.5)$$

Изменения массы жидкости по осям y и z по аналогии запишутся:

$$-\rho \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dx dzdt \text{ и } -\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dx dydt.$$

В соответствии с законом сохранения массы общее изменение массы жидкости, прошедшей через объем параллелепипеда должно

$$\text{равняться нулю } -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dydzdt - \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dx dzdt - \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dx dydt = 0$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

Полученное выражение и является уравнением неразрывности потока в дифференциальной форме, в котором левая часть представляет собой скорость относительного изменения элементарного объема жидкости.

3.6. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости Л.Эйлера

В разделе «Гидростатика» уравнение (2.6) выражает дифференциальные уравнения Л. Эйлера для случая равновесия жидкости, которое можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Для перехода от равновесия к движению в соответствии с принципом Д'Аламбера к действующим объемным и поверхностным силам следует прибавить силы инерции j , проекции которых на соответствующие оси будут равны:

$$j_x = -\frac{dv_x}{dt}; \quad j_y = -\frac{dv_y}{dt} \text{ и } j_z = -\frac{dv_z}{dt}. \text{ Знаки}$$

«минус» показывают, что силы инерции направлены в сторону, противоположную ускорению.

Прибавив к уравнениям (3.7) проекции сил инерции и перенеся слагаемые в правую часть, получим:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Полученные уравнения и являются дифференциальными уравнениями движения невязкой жидкости, выведенные Л. Эйлером в 1755 г. в Петербургской Академии наук.

Учитывая, что для неустановившегося движения скорости потока являются функциями времени, представим полные производные $\frac{dv_x}{dt}$,

$\frac{dv_y}{dt}$ и $\frac{dv_z}{dt}$ в развернутом виде:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dv_x}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dv_x}{dz} \frac{dz}{dt} \quad (3.9)$$

так как $\frac{dx}{dt} = v_x$; $\frac{dy}{dt} = v_y$ и $\frac{dz}{dt} = v_z$, уравнения (3.8) можно переписать:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} + \frac{dv_x}{dx} v_x + \frac{dv_x}{dy} v_y + \frac{dv_x}{dz} v_z \\ Y - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} + \frac{dv_y}{dx} v_x + \frac{dv_y}{dy} v_y + \frac{dv_y}{dz} v_z \\ Z - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} + \frac{dv_z}{dx} v_x + \frac{dv_z}{dy} v_y + \frac{dv_z}{dz} v_z \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Если в полученных уравнениях (3.10) скорости $v_x=v_y=v_z=0$, то уравнения примут вид дифференциальных уравнений равновесия жидкостей (2.6).

В гидродинамике в общем случае определению подлежат пять функций: давление $p(x,y,z,t)$; проекции скорости на оси координат $v_x(x,y,z,t)$, $v_y(x,y,z,t)$ и $v_z(x,y,z,t)$; плотность $\rho(x,y,z,t)$.

Система уравнений Л. Эйлера определить эти пять неизвестных не позволяет. Необходимо иметь еще два уравнения. Этими недостающими

уравнениями являются уравнение неразрывности потока (3.6) и уравнение состояния, которое для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\rho = \text{const.} \quad (3.11)$$

3.7. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки невязкой жидкости

Перепишем дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости (3.8)

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ Y - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt} &= 0 \\ Z - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Интегрирование этих уравнений Л. Эйлера было произведено Д. Бернулли в Петербургской Академии Наук в VIII веке, в результате чего получены уравнения, которые на сегодняшний день имеют большое практическое значение.

Уравнения Л. Эйлера (3.12) приводятся к удобному для интегрирования виду. Для этого каждый член уравнения умножается на бесконечно малое приращение dx, dy, dz и dp , связанные с перемещением частиц жидкости за время dt .

Затем все члены уравнения складываются, в результате чего получается уравнение, состоящее из трех слагаемых:

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - c \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz \right) = 0 \quad (3.13)$$

Рассмотрим каждое слагаемое.

Первое слагаемое является правой частью уравнения гидростатического давления (2.8). Это уравнение при рассмотрении жидкости, на которую из внешних сил действует только сила тяжести примет вид: $dp = -\rho g dz$, т.к. $m=1$, $X=0$ и $Y=0$ (m – масса объема жидкости).

Второе слагаемое есть полный дифференциал давления: $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$.

Третье слагаемое преобразуем следующим образом: приращения

dx, dy, dz представляют собой пути, пройденные частицей жидкости за время dt , и могут быть выражены через соответствующие скорости: $dx=v_x dt$; $dy=v_y dt$ и $dz=v_z dt$. Подставляя эти значения вместо dx, dy, dz в третье слагаемое, получим:

$$-\rho \left(\frac{dv_x}{dt} v_x dt + \frac{dv_y}{dt} v_y dt + \frac{dv_z}{dt} dz dt \right) = -c (dv_x v_x + dv_y v_y + dv_z v_z).$$

По дифференциальному исчислению следует:

$$-\rho (dv_x v_x + dv_y v_y + dv_z v_z) = -\frac{\rho}{2} dv^2$$

Таким образом, уравнение (3.13) примет вид:

$$-\rho g dz - dP - \frac{\rho}{2} dv^2 = 0. \quad (3.14)$$

Разделив все части уравнения на ρg и поменяв знаки на обратные, получим:

$$dz + \frac{dP}{c g} + \frac{dv^2}{2g} = 0. \quad (3.15)$$

После интегрирования получим уравнение Д. Бернулли для движения элементарной струйки невязкой жидкости:

$$z + \frac{P}{c g} + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \quad (3.16)$$

Из полученного уравнения (3.16) видно, что чем больше давление в движущейся жидкости, тем меньше скорость, и наоборот.

Из зависимости, полученной в разделе «Гидростатика» (2.18) следует, что сумма первых двух членов уравнения Д. Бернулли $z + \frac{P}{c g}$ является удельной потенциальной энергией жидкости, последний член $\frac{v^2}{2g}$, как следует из физики, представляет собой удельную кинетическую энергию.

Таким образом, уравнение Д. Бернулли (3.16), сумма всех членов которого является суммой удельной потенциальной и кинетической энергий рассматриваемой движущейся элементарной струйки, математически выражает закон сохранения энергии, открытый М.В. Ломоносовым: *вдоль элементарной струйки невязкой жидкости сумма потенциальной и кинетической энергий постоянная величина.*

Все члены уравнения Д. Бернулли имеют линейную размерность. Первый член уравнения z представляет собой координату (положение)

живого сечения струйки над плоскостью сравнения 0-0 (рис.3.8).

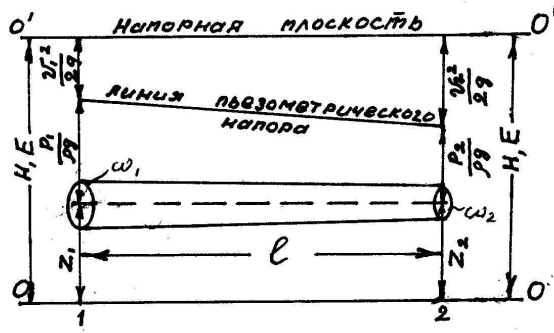


Рис. 3.8. Движение струйки невязкой жидкости

Второй член $\frac{p}{\rho g}$, как следует из гидростатики является пьезометрической высотой, отвечающей гидродинамическому давлению p в рассматриваемой точке живого сечения. Третий член $\frac{v^2}{2g}$, представляющий удельную кинетическую энергию, является скоростным напором или скоростной высотой. Из физики известно, что $\frac{v^2}{2g}$ представляет собой высоту, с кото-

рой в пустоте без начальной скорости должно падать тело, чтобы скорость его падения стала равной заданной v .

Величина $\frac{v^2}{2g}$ может быть измерена в

потоке с помощью, так называемой трубки Пито (рис.3.9), у которой нижний конец загнут против течения так, чтобы векторы скорости v были направлены в изогнутый конец трубки.

Горизонт воды в трубке Пито установится выше, чем в обычном пьезометре на величину:

$$\Delta h = \frac{v^2}{2g}. \quad (3.17)$$

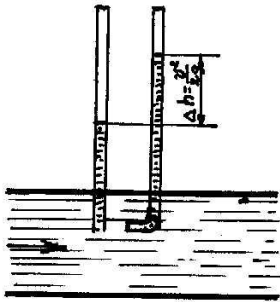


Рис. 3.9. Трубка Пито

По замеренной величине Δh можно найти скорость потока жидкости:

$$v = \sqrt{2g\Delta h}. \quad (3.18)$$

При использовании трубки Пито, как прибора для измерения скоростей потоков, в формулу (3.18) вводится поправочный коэффициент φ , учитывающий погрешность прибора и определяемый путем тарирования трубки Пито. Тогда расчетная формула примет вид:

$$v = \varphi \sqrt{2g\Delta h}. \quad (3.19)$$

На рис.3.8 представлено графическое изображение уравнения Д. Бернулли для струйки невязкой жидкости для двух ее сечений, отстоящих одно от другого на расстоянии l .

Предположим, что в сечениях I и II замерены все линейные величины членов уравнения Д. Бернулли z_1 и z_2 , $\frac{P_1}{\rho g}$ и $\frac{P_2}{\rho g}$, $\frac{v_1^2}{2g}$ и $\frac{v_2^2}{2g}$. Со-

гласно уравнению (3.16) во всех сечениях струйки суммы этих величин неизменны, несмотря на разницу отдельных членов по сечениям.

Так в первом сечении z_1 больше чем z_2 во втором; $\frac{P_1}{\rho g} > \frac{P_2}{\rho g}$ и

$\frac{v_1^2}{2g} < \frac{v_2^2}{2g}$. Причем в сечении, где давление больше, скорость меньше и

наоборот.

Напорная плоскость, как видно из рис.3.8 параллельна плоскости сравнения, а расстояния от нее до плоскости сравнения неизменны и равны удельной энергии движущейся струйки.

Линия, соединяющая концы отрезков, соответствующих пьезометрическим высотам в первом и втором сечениях, называется линией пьезометрического напора.

Таким образом, уравнение Д. Бернулли для струйки невязкой жидкости, составленное для двух сечений струйки выражается следующим образом:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (3.20)$$

3.8. Уравнение Д. Бернулли для струйки вязкой жидкости

На рис.3.10 представлена струйка, поперечное сечение которой по длине l изменяется от ω_1 до ω_2 . Причем $\omega_1 > \omega_2$.

Поскольку струйка вязкая, по пути ее движения l возникают гидравлические сопротивления, на преодоление которых затрачивается энергия, вследствие чего уменьшается скорость и суммарная энергия в сечении II будет меньше, чем в сечении I. Скоростная высота в сечении II уменьшается на величину потерь энергии (напора) $h_{\text{пот}}$ и напорная плоскость будет представлять собой не горизонтальную линию, а наклонную в сторону движения струйки.

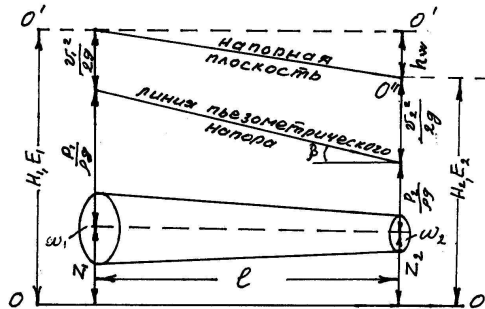


Рис. 3.10. Движение струйки вязкой жидкости

Уравнение Д. Бернулли в этом случае, т.е. для элементарной струйки вязкой жидкости, составленное для двух сечений, будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{c g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{c g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{пот}} \quad (3.21)$$

где $h_{\text{пот}}$ – потеря напора, имеющая ту же размерность, что и все члены уравнения Д. Бернулли.

3.9. Уравнение Д. Бернулли для потока вязкой жидкости

Прежде чем распространить уравнение Д. Бернулли на целый поток реальной (вязкой) жидкости, рассмотрим, каким образом происходит распределение давления в живых сечениях потока и как влияют неравномерности распределения скоростей по живому сечению на движение жидкости, протекающей через данное живое сечение.

3.9.1. Распределение давления в живых сечениях потока

На рис.3.11 представлен фрагмент равномерно движущегося потока жидкости под действием силы тяжести.

Отметим, что равномерное движение является параллельно-струйным и расчетные живые сечения являются плоскими. Такими же они принимаются и при плавно изменяющемся движении. В сечениях 1-1 и 2-2 к различным точкам сечений присоединены пьезометры. Как показывает опыт, в пьезометрах установленных в каком-либо плоском поперечном сечении, горизонт воды устанавливается на одном и том же уровне. Для различных точек данного живого сечения величины z и

$\frac{p}{\rho g}$ имеют разные значения, однако, сумма их постоянна. Следовательно, для параллельно-струйного и плавно изменяющегося движения $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.}$

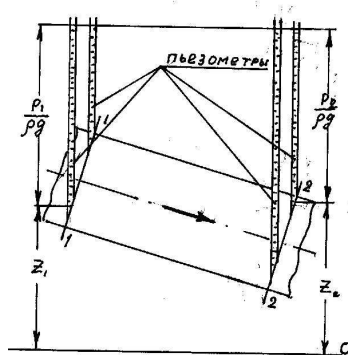


Рис. 3.11. Фрагмент равномерного движения потока жидкости

В другом живом сечении 2-2 сумма $z + \frac{p}{\rho g}$ будет иная, но постоянная для всех точек этого сечения.

Сказанное ни в коем случае не противоречит понятиям удельной энергии и гидростатического или пьезометрического напора, приведенным в гидростатике (2.5).

В связи с этим принято считать, что при равномерном (параллельно-струйном) и плавно изменяющемся движении жидкости распределение давления в живом сечении подчиняется законам гидростатики.

3.9.2. Коэффициенты Кориолиса и Буссинеска

Коэффициент Кориолиса или коэффициент кинетической энергии α представляет собой отношение действительной кинетической энергии E_k^D массы жидкости, протекающей через живое сечение в

единицу времени, к кинетической энергии E_k , условно вычисленной через среднюю скорость по сечению потока.

Действительная кинетическая энергия E_k^D равна интегральной сумме кинетической энергии элементарных масс жидкости, протекающих через бесконечно малые площадки $d\omega$ струек в пределах всего живого сечения:

$$E_k^D = \int_{\omega} c v_m d\omega \frac{v_m^2}{2} = \frac{c}{2} \int_{\omega} v_m^3 d\omega, \quad (3.22)$$

где v_m - местная скорость в рассматриваемом сечении.

Разделив выражение 3.22 на $\rho g \omega v = \rho g Q$, получим значение удельной кинетической энергии:

$$E_k = \frac{1}{2gQ} \int_{\omega} v_m^3 d\omega. \quad (3.23)$$

Полученную формулу использовать для практических расчетов весьма затруднительно, так как отсутствует картина распределения местных скоростей v_m по сечению.

Если бы все частицы потока в данном живом сечении имели одинаковые скорости, равные средней скорости v , то кинетическая энергия всей массы жидкости ρQ равнялась бы: $E_{k(v)}^n = c Q \frac{v^2}{2}$, а удельная

кинетическая: $E_{k(v)} = c Q \frac{v^2}{2c g Q} = \frac{v^2}{2g}$.

Тогда коэффициент Кориолиса α будет равен:

$$\alpha = \frac{E_k}{E_{k(v)}} = \frac{1}{Q} \frac{\int_{\omega} v_m^3 d\omega}{v^2} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left(\frac{v_m}{v} \right)^3 d\omega. \quad (3.24)$$

Очевидно, что, зная численное значение коэффициента Кориолиса α , удельную кинетическую энергию потока можно вычислить по формуле:

$$E_k = \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (3.25)$$

Коэффициент кинетической энергии α всегда больше 1.

Коэффициент Буссинеска или коэффициент количества движения α_0 представляет собой отношение действительного количества

движения $(\text{КД})^D$ массы жидкости, протекающей в единицу времени через данное живое сечение, к количеству движения (КД) той же массы жидкости, вычисленному в предположении через среднюю скорость потока.

По аналогии с коэффициентом Кориолиса α коэффициент Буссинеска будет равен:

$$\alpha_0 = \frac{(\text{КД})^D}{(\text{КД})v} = \frac{c \int_{\omega} v_m^2 d\omega}{c \omega v^2} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left(\frac{v_m}{v} \right)^2 d\omega, \quad (3.26)$$

где $\rho \int_{\omega} v_m^2 d\omega$ - действительное секундное количество движения для потока жидкости; $\rho \omega v^2$ - количество движения, вычисленное в предположении, что все частицы потока, находящиеся в плоскости рассматриваемого сечения имеют одинаковые скорости, равные средней скорости потока v ; v_m - местная скорость в рассматриваемом сечении.

Коэффициент Буссинеска α_0 также больше единицы, но он меньше, чем коэффициент Кориолиса α .

Как показывают опытные данные, коэффициент Буссинеска $\alpha_0 \approx 1.05$ и при инженерных расчетах принимается равным 1.

Коэффициенты α и α_0 являются коррективами количества движения и кинетической энергии потока соответственно. Так как они ставятся обычно в числителе перед значением средней скорости v , дроби, определяющей третий член уравнения Д. Бернулли - скоростную высоту $\left(\frac{v^2}{2g} \right)$, то эти коэффициенты часто называют коррек-

тивами, учитывающими неравномерность распределения скоростей по живому сечению потока.

С учетом изложенного уравнение Д. Бернулли для потока вязкой жидкости, составленное для двух сечений потока будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{c g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{c g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\text{пот}}. \quad (3.27)$$

Как видно, полученное уравнение отличается от уравнения

Д. Бернулли для струйки вязкой жидкости введением корректива кинетической энергии – коэффициента Кориолиса α .

3.10. Геометрическая и энергетическая интерпретация уравнения Д. Бернулли

В уравнение Д. Бернулли входят следующие величины: z – геометрическая высота в геометрическом смысле или удельная энергия положения в энергетическом; $\frac{P}{\rho g}$ – пьезометрическая высота в геометрическом смысле или удельная кинетическая энергия в энергетическом; $\frac{v^2}{2g}$ – высота скоростного напора в геометрическом смысле или удельная кинетическая энергия в энергетическом; $h_{\text{пот}}$ – высота потерь напора в геометрическом смысле или удельные потери напора в энергетическом.

3.11. Пьезометрический и гидравлический уклоны

Если угол наклона линии пьезометрического напора к горизонту обозначить через β (рис.3.10), то синус этого угла будет являться *пьезометрическим уклоном* I_n :

$$I_n = \sin\beta = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)}{\ell_{1-2}}, \quad (3.28)$$

где ℓ_{1-2} – длина рассматриваемого потока жидкости.

Пьезометрический уклон может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, в какую сторону наклонена линия пьезометрического напора. Если она имеет уклон по течению потока, то уклон положительный.

Гидравлическим уклоном I_g является уклон напорной плоскости, который можно выразить:

$$I_2 = \frac{h_{\text{пот1-2}}}{l_{1-2}} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{b_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{b_2 v_2^2}{2g} \right)}{l_{1-2}}, \quad (3.29)$$

где $h_{\text{пот1-2}}$ — потери напора между первым и вторым сечением.

Потери напора $h_{\text{пот}}$ могут иметь место при уменьшении всех или некоторых величин, входящих в уравнение 3.26, в зависимости от условий движения потока и вида движений.

Вопросы для самопроверки

1. Что изучает гидродинамика?
2. В чем заключается метод Лагранжа изучения движения жидкости?
3. В чем заключается метод Эйлера изучения движения жидкости?
4. Дать определение траектории частицы жидкости, линии и трубке тока, элементарной струйке и потоку жидкости.
5. Что такое гидродинамическая сетка?
6. Что такое живое сечение, смоченный периметр и гидравлический радиус?
7. Какие бывают виды движения жидкости?
8. Как выражается уравнение неразрывности потока в гидравлической форме?
9. Объяснить физическую сущность уравнений неразрывности потока в дифференциальной форме.
10. Каким образом получаются дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости из дифференциальных уравнений равновесия жидкости Л. Эйлера?
11. В чем различие уравнения Д. Бернулли для струйки невязкой жидкости и потока вязкой жидкости?
12. Что представляют собой члены уравнения Д. Бернулли в энергетическом и геометрическом смысле?
13. Что такое гидравлический уклон?
14. Что такое пьезометрический уклон?

4. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Впервые о существовании различных режимов движения жидкости было отмечено Г. Хагеном (1839, 1854 и 1869 г.г.). О принципиально разных двух режимах движения, связях скоростей потоков жидкости с гидравлическими сопротивлениями говорится в работе Д.И. Менделеева “О сопротивлении жидкости и о воздухоплавании” (1880 г.). Наиболее полные, детальные исследования по этому вопросу, результаты которых составляют основу современных исследований в гидродинамике, проведены в 1883 г. английским физиком Осборном Рейнольдсом.

4.1. Опыты О.Рейнольдса

Классические опыты О. Рейнольдса по установлению физических характеристик условий, определяющих режим движения жидкостей заключались в следующем (рис. 4.1).

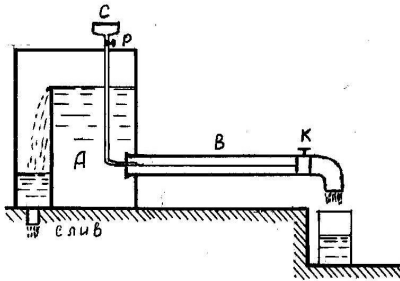


Рис. 4.1. Опыты Рейнольдса

Исследуемая жидкость поступает в бак А, где ее уровень поддерживается постоянным. К баку присоединена стеклянная труба В диаметром d , оборудованная на конце краном К. С помощью тонкой трубки, подсоединенной к емкости С, из этой емкости в стеклянную трубу подается краситель. Подача красителя регулируется краном Р. При открытии крана стеклянной

трубы К вода начинает двигаться со средней скоростью U , соответственной расходу, замеряемому в конце трубы объемным способом (рис. 4.2).

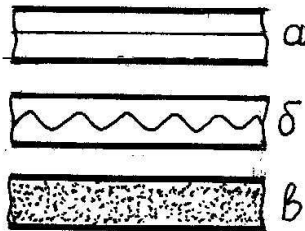


Рис. 4.2. Различные режимы движения жидкости: а) ламинарный режим, б) переходный режим, в) турбулентный режим

При открытии крана Р в поток жидкости будет поступать краситель, который при малой скорости v будет двигаться в трубе в виде тонкого шнура или прямой линии (рис. 4.2а). При большем открытии крана К средняя скорость v увеличится, и струйка красителя будет искривляться и приобретет вид извилистой дрожащей линии. Дрожание линии (ее колебание) можно объяснить непрерывным изменением (пульсацией) во времени вектора скорости в точках пространства (рис. 4.2б). При еще большем открытии крана, дальнейшем увеличении скорости v дрожание извилистой линии при пульсации скоростей будет увеличиваться, окрашенная струйка будет распадаться и, в конце концов, распределится по всему сечению трубы (рис. 4.2в).

Движение или режим движения, жидкости при котором краситель в потоке распределяется в виде прямой линии, т.е. когда движение происходит послойно при отсутствии пульсации скоростей, называется *ламинарным* (от латинского слова *lamina* – слой).

Режим движения жидкости, при котором происходит распределение красителя по всему сечению потока, т.е. происходит перемешивание частиц жидкости и имеет место пульсация скоростей, называется *турбулентным* (от латинского слова *turbulentus* – беспорядочный).

При проведении опыта в обратном порядке, т.е. постепенном закрытии крана К, наблюдается картина перехода турбулентного режима жидкости в ламинарный. При этом краситель приобретает вид изогнутой, а затем прямой линии при более низких значениях скоростей.

В результате проведенных исследований по переходу ламинарного режима движения жидкости в турбулентный и наоборот можно установить верхнюю и нижнюю критические скорости $v_{вк}$ и $v_{нк}$, соответствующие переходу одного режима движения жидкости в другой.

При скорости потока v меньше $v_{нк}$ ($v < v_{нк}$) режим движения жидкости будет ламинарный; при $v > v_{вк}$ режим движения будет турбулентный. В случае $\chi_{нк} < \chi < \chi_{вк}$ движение может быть и турбулентным и ламинарным в зависимости от того, как изменяется скорость потока. Если изменение скорости идет от большей величины к меньшей, то при рассматриваемом условии режим движения потока будет сохраняться турбулентным, а если от меньшей к большей – ламинарным.

Опыты показали, что режим движения жидкости зависит от ее вязкости μ , плотности ρ , средней скорости течения v , а также геометрических размеров русла, в данном случае диаметра трубы d . Из этих величин О. Рейнольдс составил единственно возможную безразмерную величину

$$\frac{c \cdot x \cdot d}{M} = \frac{x \cdot d}{N}, \quad (4.1)$$

и исследовал ее количественное значение.

Это значение, соответствующее устойчивому переходу от турбулентного режима к ламинарному, получило название числа Рейнольдса Re или критического числа Рейнольдса $Re_{кр}$. В опытах Рейнольдса его численное значение составляет

$$Re = \frac{vd}{\nu} = 2320; Re_d = \frac{vR}{\nu} = \frac{vd}{\nu 4} = 580; Re_h \approx \frac{vR}{\nu} \approx 300, \quad (4.2)$$

где Re_d и Re_h – числа Рейнольдса, выраженные через гидравлический радиус трубы или неглубокой реки соответственно.

Следует отметить, что в гидрогеологической практике приходится сталкиваться в основном с очень малыми числами Рейнольдса (движение жидкости происходит по тонким порам при малых скоростях), а гидротехнической – наоборот, намного превышающими его критические значения. Так при скорости воды в канале 0.8 – 1.0 м/с, глубине 1 – 1.5 м и кинематическом коэффициенте вязкости $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$ число Рейнольдса, вычисленное по формуле 4.3 составит $(1.0 - 1.2) \cdot 10^6$.

Вопросы для самопроверки

1. Когда и кем впервые были обнаружены два режима движения жидкости?
2. Дать схему установки для проведения опытов Рейнольдса.
3. Что такое число Рейнольдса?
4. Что такое критическое число Рейнольдса?
5. Каково значение критического числа, полученного Рейнольдсом?
6. Как устанавливается верхнее и нижнее критическое число Рейнольдса?
7. Как выражается число Рейнольдса через гидравлический радиус и диаметр?

5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

При рассмотрении уравнений Д. Бернулли для струйки и потока вязкой жидкости мы уже сталкивались с понятием потерь напора входящих в эти балансовые уравнения. Эти потери напора $h_{\text{пот}}$ имеют место при преодолении потоком возникающих в нем касательных напряжений, связанных с силами внутреннего трения, появляющимися в движущейся жидкости и представляющими собой гидравлические сопротивления.

5.1. Природа гидравлических сопротивлений и их виды

При гидравлических расчетах встречаются внутренняя и внешняя задача. Внутренняя задача рассматривает гидравлические сопротивления, возникающие внутри потока жидкости, связанные с силами внутреннего трения. Оценка этих сопротивлений носит энергетический характер.

Внешняя задача связана с обтеканием потоком неподвижной конструкции и оценка сопротивлений в этом случае носит силовой характер.

Следует отметить, что в обоих случаях речь идет об одном и том же комплексе физико-механических явлений, название которому – гидравлические сопротивления.

Различают следующие виды сопротивлений:

- *сопротивление по длине* возникает по всей длине потока при равномерном или плавно изменяющемся движении жидкости.

- *местные сопротивления*, возникающие в отдельных местах потока, благодаря тому, что в них поток претерпевает ту или иную резкую деформацию.

- в условиях внешней задачи имеют место *сопротивления давления или сопротивления формы*, которые характеризуются нормальными давлениями по поверхности тела.

Потери напора (энергии), затрачиваемые на преодоление гидравлических сопротивлений по длине потока называются потерями напора по длине (h_l), а при преодолении местных гидравлических сопротивлений – местными потерями напора (h_m).

Полные потери напора h для рассматриваемого участка водовода длиной ℓ_r будут составлять:

$$h_{\text{пот}} = h_l + \sum h_m \quad (5.1)$$

Гидравлические сопротивления могут быть вязкостными и инерционными.

Вязкостные сопротивления обуславливаются прилипанием жидких частиц к твердым поверхностям и внутренним трением в движущейся жидкости.

Инерционными являются сопротивления, оказываемые инертной массой жидкости изменению своего движения, т.е. ускорению, вызываемому другой массой.

Относительная роль каждого из сопротивлений указанного рода определяется величиной числа Рейнольдса или величиной инерционно – вязкостного критерия, что одно и то же.

При малых числах Рейнольдса преобладают силы вязкости, при больших – инерции.

Сопротивления реальной жидкости чаще всего обусловлены совместным действием инерционных и вязкостных сил.

При равномерном установившемся движении потока работа внешних сил равна работе, возникающих в потоке, сил трения. В результате работы сил трения механическая энергия жидкости переходит в тепло, которое рассеивается по длине потока.

Следовательно, величина потерь напора на участке водовода равна механической энергии жидкости, перешедшей в тепло, безвозвратно утерянное потоком. Чем больше силы трения в жидкости, тем больше потери напора.

5.2. Уравнение установившегося равномерного движения жидкости

Между силами трения в жидкости и потерями напора существует определенная зависимость. Эту зависимость, относящуюся к случаю установившегося равномерного движения принято называть основным уравнением равномерного движения жидкости.

На рис. 5.1 показан фрагмент потока жидкости в трубе, ограниченной сечениями 1-1 и 1-2 на расстоянии ℓ одно от другого. Поток в трубе движется равномерно со средней скоростью v .

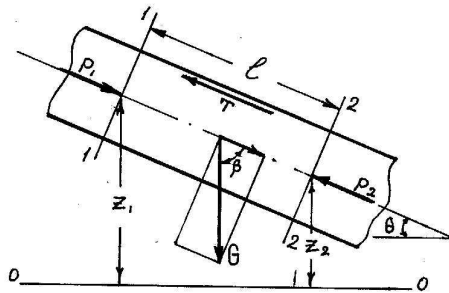


Рис. 5.1. Фрагмент равномерно движущегося потока жидкости в трубе

Известно, что равномерное движение возможно лишь при условии равновесия всех, действующих на поток сил. На данный отсек потока действуют: силы гидростатического давления P_1 и P_2 ; сила тяжести G , под действием которой происходит движение; сила трения T ; обуславливающая гидравлические сопротивления.

Следовательно, сумма проекций всех сил на ось, совмещенную с осью симметрии трубы, равна нулю:

$$P_1 - P_2 + G \cos \beta - T = 0, \quad (5.2)$$

где β - угол, составленный вектором силы тяжести с осью трубопровода; P_1 и P_2 - силы гидростатического давления, равные: $P_1 = p_1 \cdot \omega_1$ и $P_2 = p_2 \cdot \omega_2$. В нашем случае живые сечения $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Сила тяжести жидкости между сечениями 1-1 и 2-2 равна:

$$G = \rho g \omega \ell, \text{ а } \cos \beta = \frac{z_1 - z_2}{\ell},$$

где z_1 и z_2 - координаты положения центров тяжести сечений 1-1 и 2-2.

Сила трения T равна: $T = \tau \chi \ell$,

где χ - смоченный периметр; τ - касательное напряжение, отнесенное к единице площади поверхности рассматриваемого отсека.

Подставив значения сил в уравнение (5-2), получим:

$$p_1 \omega - p_2 \omega + \rho g \omega \ell \frac{z_1 - z_2}{\ell} - \tau \chi \ell = 0. \quad (5.3)$$

Разделив каждый член уравнения на $\rho g \omega$, получим

$$\left(\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} \right) + (z_1 - z_2) = \frac{\tau}{\rho g} \frac{\chi}{\omega} \cdot \ell. \quad (5.4)$$

Запишем уравнение Д. Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 относительно плоскости сравнения 0-0.

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\text{пот } 1-2}. \quad (5.5)$$

В этом уравнении при установившемся равномерном движении $v_1 = v_2 = v$ и уравнение (5.5) можно переписать

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) = h_{\text{пот } 1-2}. \quad (5.6)$$

Поскольку в уравнениях (5.4) и (5.6) левые части равны, то правые равны будут тоже. Следовательно:

$$h_{\text{пот1-2}} = \frac{\tau}{\rho g} \frac{\chi}{\omega} \cdot \ell. \quad (5.7)$$

Учитывая, что $R = \frac{\omega}{\chi}$ и $I = \frac{h_{\text{ном}}}{\ell}$ уравнение (5.7) можно переписать:

$$I = \frac{h_{\text{пот}}}{\ell} = \frac{\tau}{\rho g} \cdot \frac{1}{R} \quad \text{или} \quad \frac{\tau}{\rho g} = RI. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) показывает, что отношение напряжений сил трения к единице веса жидкости равно произведению гидравлического радиуса на гидравлический уклон. Полученное основное уравнение равномерного движения жидкости используется не только при равномерном движении потока, но и при неустановившемся движении. При этом в формулу вводятся соответствующие коррективы в виде коэффициентов.

Полученные зависимости (5.7) и (5.8) справедливы также не только для напорного потока в круглоцилиндрической трубе, но и для любого другого случая равномерного установившегося движения.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под гидравлическими сопротивлениями?
2. Чем вызываются гидравлические сопротивления по длине потока?
3. Чем вызываются гидравлические местные сопротивления?
4. Чему равны полные потери напора для рассматриваемого участка потока?
5. Что из себя представляют вязкостные и инерционные гидравлические сопротивления?
6. В чем заключается физический смысл установившегося равномерного движения жидкости?

6. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Как уже отмечалось выше, движение потока происходит в ламинарном режиме при сравнительно малых числах Рейнольдса ($Re < 2320$) и что такое движение в основном присуще подземным водам, где за модель фильтрации принимают движение воды по тонким трубам. Ниже мы также будем рассматривать особенности ламинарного движения жидкости в трубах круглого сечения.

6.1. Скорости потока при ламинарном режиме движения жидкости

Рассмотрим движение жидкости в круглой трубе в вертикальной плоскости, совместив ось x с осью трубы, а в качестве оси ординат примем перпендикулярную к оси x ось r (рис.6.1).

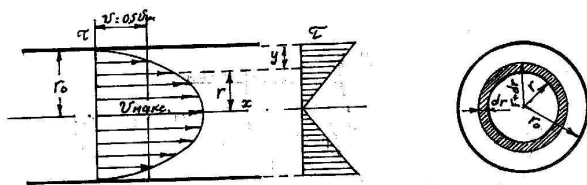


Рис. 6.1. Эпюры распределения скоростей и касательных напряжений по радиусу трубы при ламинарном режиме движения

Поскольку пульсация скоростей при ламинарном режиме движения отсутствует и векторы скоростей совпадают с линиями тока, можно написать:

$$v_x = v; v_y = 0 \text{ и } v_z(r) = 0.$$

Касательное напряжение, возникающее между движущимися слоями жидкости составит

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}, \quad (6.1)$$

где $-\frac{dv}{dr}$ является градиентом скорости.

Знак минус показывает, что скорость v убывает по направлению отсчета расстояний r от оси трубы, а значит градиент скорости отрицательный.

Приравняем (6.1) к выражению τ из уравнения (5.8). Учитывая, что гидравлический радиус для круглой трубы $R = \frac{d}{4}$, получим

$$\rho g \frac{r}{2} \cdot I = -\mu \frac{dv}{d\tau} . \quad (6.2)$$

Откуда $dv = -\frac{\rho g I}{2\mu} - r dr$ и при $\mu = \text{const}$ по сечению потока будем иметь

$$\int_0^v dv = -\frac{\rho g I}{2\mu} \cdot \int_{r_0}^r r dr .$$

После интегрирования получаем общее выражение для скорости в любой точке живого сечения при ламинарном режиме:

$$v = \frac{\rho g I}{4\mu} (r_0^2 - r^2) . \quad (6.3)$$

Максимальная скорость $v_{\text{макс}}$ будет при $r=0$ на оси трубы и будет составлять

$$v_{\text{макс}} = \frac{\rho g I}{4\mu} r_0^2 . \quad (6.4)$$

Подставив это выражение вместо первого сомножителя в формулу (6.3), получим:

$$v = v_{\text{макс}} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \text{ или } \frac{v}{v_{\text{макс}}} = 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 . \quad (6.5)$$

Следовательно, отношение местной скорости в какой-либо точке живого сечения трубы к максимальной скорости на ее оси не зависит от рода жидкости и от размеров трубы, а зависит только от относительного положения точки в сечении трубы $\frac{r}{r_0}$.

Отсюда можно сделать вывод, что эпюры относительных скоростей (рис. 6.1), построенные по формуле (6.3), для всех ламинарных потоков в круглых трубах будут представлены одной параболой.

Для определения средней скорости потока жидкости в трубе круглого сечения вычисляем расход Q представленный как сумма элементарных расходов через кольца радиусом r и шириной dr (рис. 6.1)

$$Q = \int_0^{r_0} v \cdot 2\pi r dr . \quad (6.6)$$

Подставив в формулу значение v из (6.3), получим

$$Q = \int_0^{r_0} \frac{\pi \rho g I}{2\mu} (r_0^2 - r^2) r dr = \int_0^{r_0} \frac{\pi \rho g I}{2\mu} r_0^2 r dr - \int_0^{r_0} \frac{\pi \rho g I}{2\mu} r^3 dr = \frac{I \rho g \pi r_0^4}{8\mu}. \quad (6.7)$$

Отсюда разделив расход на живое сечение, получим:

$$v_{cp} = \frac{Q}{\omega} = 0,5 v_{max}. \quad (6.8)$$

Из полученного выражения следует, что скорость в потоке жидкости при ламинарном режиме движения в круглой трубе равна половине максимальной скорости.

Перепишем формулу 6.8, используя выражение (6.4)

$$v_{cp} = \frac{\rho g r_0^2}{8\mu} \cdot I = \frac{I g}{8\nu} r_0^2. \quad (6.9)$$

По полученному v_{cp} выразим расход потока в круглой трубе

$$Q = v_{cp} \cdot \omega = \frac{1}{8} \pi \frac{\rho g}{\mu} I r_0^4 = \frac{1}{128} \pi \frac{\rho g}{\mu} I d^4. \quad (6.10)$$

Введем коэффициент M , зависящий только от рода жидкости:

$M = \frac{\pi \rho g}{128\mu}$. Тогда формула (6.10) приобретает вид

$$Q = M I d^4. \quad (6.11)$$

Эта формула была впервые получена доктором медицины Жаном Луи Пуазейлем в 1840г.

Выделим в зависимости (6.9) коэффициент ламинарного движения $K_{л}$ и коэффициент проницаемости $K_{п}$, приближая теорию ламинарного движения к гидродинамике:

$$K_{л} = \frac{\rho g}{8\mu} r_0^2 \text{ и } K_{п} = \frac{1}{8} r_0^2. \quad (6.12)$$

Связь между коэффициентами ламинарного движения и проницаемости будет выглядеть следующим образом:

$$K_{л} = K_{п} \frac{\rho g}{\mu} = K_{п} \frac{g}{\nu}. \quad (6.14)$$

Величину средней скорости ламинарного потока можно выразить:

$$v_{cp} = K_{л} \cdot I. \quad (6.15)$$

Если движение происходит в пористой среде, то заменив коэффициент $K_{л}$ на коэффициент фильтрации $K_{ср}$, получим формулу, отображающую линейный закон Дарси:

$$v_{cp} = K_{ср} \cdot I, \quad (6.16)$$

где I – гидравлический уклон, являющийся при рассмотрении фильтрации градиентом напора.

Приведенные выше зависимости справедливы для установившегося ламинарного движения, когда распределение скоростей по сечению приобретает вид параболы. Это наступает на некотором расстоянии от входа потока, определяемым длиной начального участка L_n . По рекомендациям Л. Шиллера

$$L_n = 0,29 \text{ dRe}. \quad (6.17)$$

6.2. Потери напора при ламинарном режиме движения

Определение потерь напора, вызванных гидравлическими сопротивлениями, связано с определенными трудностями, вызванными большим числом факторов, влияющими и на значения этих потерь напора. К этим факторам прежде всего относятся режимы движения жидкости, ее физическое состояние, состояние русла, по которому движется поток (геометрические очертания и шероховатость), препятствия на пути потока и др.). Однако, для отдельных случаев имеются довольно точные теоретические формулы, получившие в практике гидравлических расчетов самое широкое распространение. К ним, в частности, относится формула Дарси-Вейсбаха для определения потерь напора по длине ламинарного потока, равномерно движущегося в трубе круглого сечения.

Перепишем формулу (6.9), заменив в ней радиус r_0 на диаметр трубы d :

$$v_{cp} = \frac{I \cdot g \cdot d^2}{32\nu}. \quad (6.18)$$

Учитывая, что $I = \frac{h_l}{\ell}$ и, вписав это выражение вместо I в формулу (6.18), получим:

$$v_{cp} = \frac{h_l \cdot g \cdot d^2}{32\nu \cdot \ell}. \quad (6.19)$$

Из этой формулы найдем значение h_ℓ : $h_\ell = \frac{v_{cp} \cdot 32\nu \ell}{gd^2}$.

Умножив числитель и знаменатель на $\frac{2v_{cp}}{v}$, получим:

$$h_l = \frac{64 \cdot l \cdot v^2}{\frac{vd}{v} \cdot d \cdot 2g}.$$

Учитывая, что $\frac{vd}{v} = Re$, полученную формулу перепишем:

$$h_l = \frac{64}{Re} \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Обозначим $\frac{64}{Re} = \lambda$ и получим формулу Дарси-Вейсбаха для определения потерь напора h_ℓ

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (6.21)$$

где λ - коэффициент гидравлического трения или коэффициент Дарси.

Полученная формула справедлива для прямых участков трубопровода, удаленных от входа на расстояние $(l > 0,065 d \text{ Re})$.

Расчет местных потерь напора производится по формуле Вейсбаха:

$$h_m = \Sigma \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (6.22)$$

где ξ – безразмерный коэффициент местных сопротивлений.

Вопросы для самопроверки

1. Какие зависимости легли в основу формул для определения скорости потока жидкости в трубах круглого сечения при ламинарном режиме движения?
2. Что из себя представляет эпюра распределения скоростей движения жидкости по поперечному сечению круглой трубы при ламинарном режиме?
3. Каково соотношение между максимальной и средней скоростью потока жидкости в круглой трубе при ламинарном режиме?
4. Привести выражения коэффициента ламинарного движения и коэффициента проницаемости.
5. Как выражается средняя скорость потока при ламинарном режиме движения через коэффициент ламинарного движения?

6. Привести вывод формулы Ж. Пуазейля.
7. Привести вывод формулы Дарси-Вейсбаха.
8. Каким образом производится расчет местных потерь напора?

7. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Турбулентное движение жидкости представляет собой чрезвычайно сложное гидравлическое явление, являющееся объектом изучения многих исследователей. К ним относятся О. Рейнольдс, А. Клавен, Л. Прандтль, М. Великанов, В. Маккавеев, А. Колмогоров, П. Брэдшоу и многие другие. В настоящее время нет законченной строгой теории турбулентного движения. На наш взгляд наиболее обоснованной является теория переноса количества движения, развитая Л. Прандтлем, работы которого легли в основу данного раздела курса.

7.1. Пульсация скоростей и осредненные скорости при турбулентном режиме движения

Как уже отмечалось, турбулентное состояние потока характеризуется непрерывным образованием мельчайших вихреватостей в результате вращения разных по величине некоторых объемов жидкости, их перемешиванием, распадом на более мелкие, изменением их массы по течению. Вихреватости образуются у твердых границ и перемещаются внутрь потока. Зарождение вихреватостей происходит благодаря вязкости жидкости. Частицы жидкости, находящиеся у стенок русла на расстоянии молекул и попадающие в поле их силовых взаимодействий, «прилипают» к стенкам и скорость движения их равна нулю. Соседние с ними частицы приходят в движение и скорость их возрастает с удалением от стенок. При этом частицы приходят во вращательное движение и с ними вращаются малые массы жидкости (рис. 7.1).

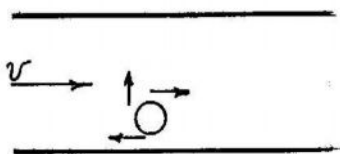


Рис. 7.1. Образование турбулентного режима движения жидкости

На частицы жидкости, вращающиеся в обтекаемом их потоке, будут действовать силы направленные внутрь потока в соответствии, с так называемым, эффектом Магнуса. Под действием этих сил частицы жидкости перемещаются в центральную область потока, образуя процесс перемешивания. Этому процессу способствует наличие шероховатости стенок, которая в процессе перемешивания может играть главную роль. Как следует из выше сказанного, для явления турбулентности характерна пульсация скоростей, т.е. такое ее изменение в данной

точке, при котором отклонение от некоторой средней величины скорости происходит в обе стороны (рис. 7.2).

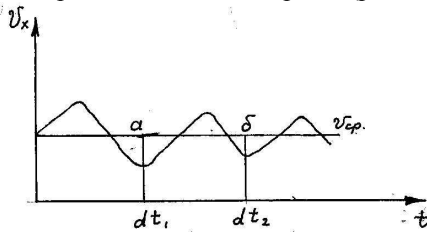


Рис. 7.2. Пульсация скоростей при турбулентном режиме

Объясняется это явление тем, что через данную точку пространства последовательно проходят разные частицы жидкости с разными скоростями, как по величине, так и по направлению. Действительную скорость, v_a движения жидкой частицы в данный момент времени и в данной точке пространства называют мгновенной местной скоростью или актуальной. Эта мгновенная или актуальная скорость в данной точке изменяется во времени как по величине, так и по направлению. Нас интересует только горизонтальная составляющая мгновенной скорости, направленная вдоль течения потока. На рис. 7.2 показана пульсация именно продольной проекции местной мгновенной скорости v_x .

Следовательно, можно сказать, что пульсацией скорости называется явление изменения (увеличения или уменьшения) во времени величины проекции местной мгновенной (актуальной) скорости на какое-либо направление.

В турбулентном потоке трубкой Пито замеряется проекция скорости v_x на продольное направление.

Следует подчеркнуть, что в общем случае турбулентное движение жидкости является неустановившимся, измеряемая скорость $v_x=f(t)$ является скоростью разных частиц, проходящих через данную точку и в каждый момент времени имеет место мгновенное поле скоростей.

Однако, турбулентные потоки жидкости мы рассматриваем как установившиеся и равномерно движущиеся. Это стало возможным при введении понятия осредненных скоростей в каждой точке. Осредненная скорость равна высоте прямоугольника равновеликого площади, ограниченной кривой $v_x=f(t)$, осью абсцисс и ординатами в момент времени dt_1 и dt_2 (рис.7.2). Эту осредненную скорость можно выразить:

$$\bar{v}_x = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v_x dt}{t_2 - t_1} \quad (7.1)$$

7.2. Касательные напряжения при турбулентном режиме движения жидкости

Современная теория турбулентного движения придерживается следующей схемы потока жидкости (рис. 7.3).



Рис. 7.3. Схема турбулентного потока жидкости

У самой стенки образуется слой, где наблюдается ламинарный режим движения жидкости. Основное ядро течения движется в турбулентном режиме. Между ядром потока и ламинарным слоем наблюдается тонкая переходная зона. Ламинарный слой называют еще вязким подслой, толщина которого

тем меньше, чем больше турбулентность потока. При значениях числа Рейнольдса $Re < 10^5$, толщина вязкого подслоя $\delta_{п.с.}$ в трубе круглого сечения может быть определена по следующей эмпирической формуле:

$$\delta_{п.с.} = 62,8 \cdot d \cdot Re^{-0,875}, \quad (7.2)$$

где d — диаметр трубы.

Как отмечалось выше, при турбулентном режиме движения имеет место пульсация скоростей, т.е. происходит непрерывное перемешивание жидкости благодаря поперечной пульсационной скорости v_y (рис. 7.4).

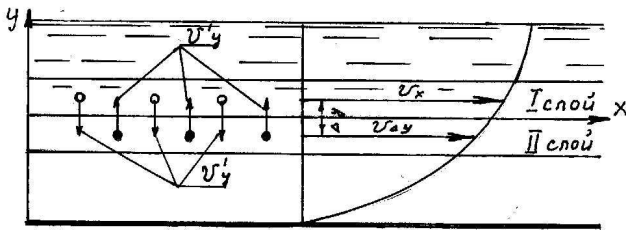


Рис. 7.4. Перемешивание жидкости при турбулентном режиме движения

Предположим, частица жидкости с этой скоростью перешла из первого слоя во второй слой, совершив при этом путь, длина которого или длина пути перемешивания составила величину $\ell = \Delta y$, одновременно с этой частицей из второго слоя в первый, в соответствии с неразрывностью потока переместится другая частица жидкости. Осредненные скорости рассматриваемых слоев, отстоящих один от другого

на расстоянии y , различны. Если осредненная скорость первого слоя составляла v_x , то второго на расстоянии Δy от первого с точностью до величин высшего порядка малости будет равна

$$v_{\Delta y} = v_x \pm \frac{dv_x}{dy} \Delta y. \quad (7.3)$$

Так как осевые скорости перемещающихся частиц разные, то в каждом слое происходит изменение количества движения (количество движения - это произведение массы на скорость). В слое с большей скоростью количество движения уменьшится, а в слое с меньшей скоростью – увеличится. На границе слоев должна возникнуть сила, равная изменению количества движения.

Масса, переносимая в единицу времени через площадку ΔF соприкосновения слоев поперечной пульсационной скоростью v_y' составляет:

$$\Delta m = \rho \Delta F v_y' \Delta t. \quad (7.4)$$

В каждом слое изменение количества движения в единицу времени будет равно, так называемой, турбулентной касательной силе T :

$$T = \rho \Delta F \cdot v_y' \frac{dv_x}{dy} \ell, \quad (7.5)$$

где T - сила, аналогичная силе трения, возникающая между движущимися слоями жидкости (именно такой эффект на слои жидкости оказывают, перемещающиеся из слоя в слой, жидкие частицы).

Единичная турбулентная касательная сила или напряжение τ_t составит:

$$\tau_t = \frac{T}{\Delta F} = \rho v_y' \frac{dv_x}{dy} \ell. \quad (7.6)$$

В формулах (7.5) и (7.6), как уже отмечалось при изучении вязкости жидкости, выражение $\frac{dv_x}{dy}$ является градиентом скорости.

Примем пульсационную скорость v_y' примерно равной $\ell \frac{dv_x}{dy}$.

Тогда:

$$\tau_t = \rho \ell^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2. \quad (7.7)$$

Добавив к единичному турбулентному касательному напряжению τ_T единичное вязкостное напряжение τ_v действующее между отдельными слоями турбулентного осредненного потока, получим:

$$\tau = \tau_v + \tau_T = \mu \frac{dv_x}{dy} + \rho \ell^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2. \quad (7.8)$$

Полученное выражение (7.8) позволяет понять физическую сущность принятой модели турбулентного потока жидкости (рис.7.3). Из уравнения (7.8) видим, что при ламинарном режиме движения длина пути перемешивания ℓ равна нулю и, следовательно, касательное напряжение может быть определено:

$$\tau_v = \mu \frac{dv_x}{dy}, \quad (7.9)$$

т.е. касательное напряжение пропорционально вязкости и скорости в первой степени.

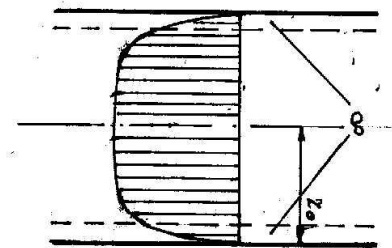
При турбулентном режиме, особенно при больших числах Рейнольдса, второй член уравнения (7.8) резко возрастает по сравнению с первым так, что вязкостной частью напряжения можно пренебречь (за исключением зоны в непосредственной близости к стенке) и уравнение (7.8) примет вид:

$$\tau = \tau_T = \rho \ell^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2, \quad (7.10)$$

т.е. при развитой турбулентности касательные напряжения пропорциональны квадрату средней скорости.

7.3. Схема турбулентного течения

На рис. 7.5 показана эпюра скоростей потока жидкости в круглой трубе при турбулентном режиме движения.



Как видно, здесь эпюра скоростей имеет гораздо более выровненное очертание по сравнению с эпюрой скоростей ламинарного потока (рис. 6.1). Очевидно, что это объясняется

Рис. 7.5. Эпюра распределения скоростей по сечению турбулентного потока жидкости

непрерывным переносом количества движения из одного слоя в другой при турбулентном режиме движения, т.е. перемешиванием движущихся слоев жидкости. Причем, чем больше число Рейнольдса, т.е. чем больше турбулентность потока и интенсивнее проходит процесс перемешивания, тем выровненной становится эпюра скоростей. На рисунке видно, что в ламинарном вязком подслое δ скорости возрастают быстро, а затем в турбулентном потоке их дальнейшее возрастание существенно замедляется, благодаря влиянию перемешивания.

В отличие от ламинарного потока, в котором имеет место отношение $\frac{v_{cp}}{v_{max}} = 0,5$, в турбулентном потоке в зависимости от числа

Рейнольдса эти соотношения составляют: при $Re=2700$ $\frac{v_{cp}}{v_{max}} = 0,75$,

при $Re=10^6$ $\frac{v_{cp}}{v_{max}} = 0,96$. Как видно, соотношение $\frac{v_{cp}}{v_{max}}$ при уве-

личении числа Рейнольдса приближается к единице.

Совершенно очевидно, что в пределе, при $Re \rightarrow \infty$ эпюра скоростей по сечению потока будет выровнена, что характерно для идеальной, т.е. невязкой жидкости.

7.4. Распределение скоростей в поперечном сечении турбулентного потока

На основании схемы турбулентного потока (рис. 7.3) Л. Прандтль установил теоретический закон распределения скоростей в его поперечном сечении. По этому закону скорость в какой-либо точке сечения, например, цилиндрической трубы на расстоянии y от ее оси определяется формулой:

$$v = v_0 - \frac{v^*}{\aleph} \ln \frac{r}{r-y}, \quad (7.11)$$

где v_0 – осевая скорость; r – радиус трубы; $\aleph$ – числовой коэффициент, определенный опытным путем (универсальная постоянная Прандтля), по Никурадзе $\aleph=0,4$; v^* – динамическая скорость (величина, имеющая размерность скорости):

$$v^* = \sqrt{gRI}. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.11) легло в основу вывода ряда эмпирических формул по определению скоростей в поперечном сечении различных труб, получивших широкое практическое применение.

Так, в случае гладких труб применяется формула:

$$v = v^* (5,75 \lg \frac{\alpha v^*}{\nu} + 5,5), \quad (7.13)$$

где $\alpha = r - y$.

Для шероховатых труб:

$$v = v^* (5,75 \lg \frac{\alpha}{\Delta} + 8,5), \quad (7.14)$$

где Δ - абсолютная шероховатость стенок.

7.5. Понятие о шероховатости. Гидравлически гладкие и шероховатые трубы

Любые внутренние поверхности стенок, ограничивающие потоки имеют ту или иную шероховатость, т.е. те или иные выступы в виде бугорков со средней высотой Δ . Эта средняя высота выступов называется абсолютной шероховатостью (рис. 7.6).

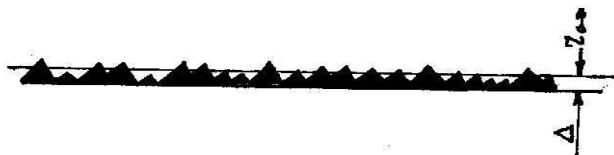


Рис. 7.6. Шероховатость

Отношение высоты бугорка (абсолютной шероховатости) к линейному размеру живого сечения потока называется относительной шероховатостью. Например, для круглой трубы абсолютной шероховатостью Δ относительная шероховатость Δ_r будет равна:

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{r_0}. \quad (7.15)$$

Гидравлически гладкими трубами называют трубы с движущейся жидкостью, шероховатость на внутренней поверхности которых полностью прикрыта ламинарным вязким подслоем.

Очевидно, что название «гидравлически гладкие трубы» является условным, т.к. толщина вязкого подслоя меняется в зависимости от числа Рейнольдса. Следовательно, одна и та же труба может быть гидравлически гладкой или шероховатой в зависимости от скорости про-

текающего в ней потока или вязкости жидкости его составляющей, т.е. от значения числа Рейнольдса.

7.6. Потери напора при турбулентном режиме движения

Обратимся к формуле Дарси-Вейсбаха (6.21), выведенной для определения потерь напора по длине h_f для ламинарного потока жидкости.

В этой формуле численное значение безразмерного коэффициента гидравлического сопротивления (трения), называемого коэффициентом Дарси, имеет вполне определенное теоретическое решение (6.20), т.е.:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_d} = \frac{16}{\text{Re}_R}. \quad (7.16)$$

При турбулентном режиме движения таких теоретических решений для коэффициента λ нет и поэтому он находится по эмпирическим формулам, выведенным для различных условий турбулентного движения жидкости. Структура же формул для определения потерь напора по длине потока остается та же, что и формулы Дарси-Вейсбаха (6.21) для ламинарного режима движения.

7.6.1. График Никурадзе

Из предыдущего раздела следует, что задача по определению потерь напора при турбулентном режиме движения жидкости сводится к определению коэффициента гидравлического трения или коэффициента Дарси λ , зависящего не только от числа Рейнольдса, определяющего режим движения, но и от относительной шероховатости стенок русла.

Наиболее полное представление о коэффициенте Дарси, его физической сущности дает график И. Никурадзе $\lambda=f(\text{Re}_d)$, построенный им в результате проведенных в 1933 году исследований потока в круглоцилиндрических трубах с искусственно создаваемой шероховатостью.

Коэффициент Дарси можно получить из формулы Дарси-Вейсбаха (6.21) с учетом (4.2)

$$\lambda = \frac{h_\ell}{\ell} 2g \frac{d^2}{v^2} \frac{1}{\text{Re}_d^2}. \quad (7.17)$$

Вычисленные по формуле (7.17) коэффициенты λ для различных значений числа Рейнольдса Re_d и относительной шероховатости Δg ,

которую И. Никурадзе создавал путем наклеивания в трубах песчинок высотой Δ , были нанесены на график (рис.7.7), оси координат которого представлены логарифмами Re_d и λ .

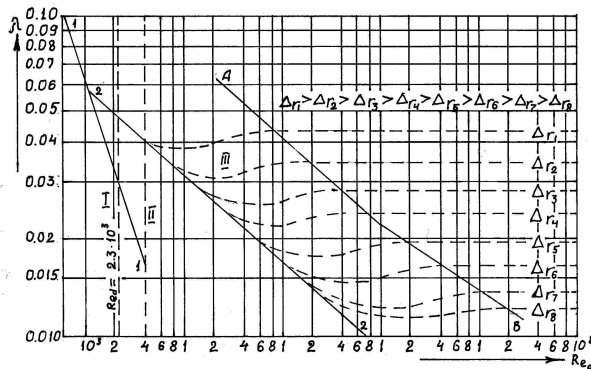


Рис. 7.7. График Никурадзе

Таким образом, на графике был нанесен ряд линий, каждая из которых отвечала определенной относительной шероховатости Δr , вычисленной по формуле (7.15). На графике имеются две прямые 1-1 и 2-2. Первая прямая ламинарного режима построена, исходя из зависимости (7.16), а вторая, так называемая, прямая Блазиуса, построена по эмпирической зависимости, полученной Блазиусом в 1913г для круглых гладких латунных труб при числах Рейнольдса от $4 \cdot 10^3$ до 10^5 :

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re_d^{0,25}}. \quad (7.18)$$

Все поле графика разбито на три зоны: зону ламинарного режима (I), зону неустойчивого режима (II) и зону турбулентного режима (III).

I зона представлена прямой 1-1. Для этой зоны числа Рейнольдса относительно малы и составляют: $Re_d = 1000-2300$.

Как видно из графика, потери напора h_ℓ здесь не зависят от шероховатости. Все кривые $\lambda = f(Re_d)$, построенные для разных Δr сливаются в одну прямую.

Величина λ определяется формулой (7.16).

II зона является зоной неустойчивого режима. Числа Рейнольдса здесь лежат в пределах от 1000-2300 до 4000. При движении жидкости по трубе на отдельных участках возникают отдельные области турбулентного режима, которые исчезают и снова появляются. Поэтому эта зона иногда называется зоной перемежающейся турбулентности.

III зона – зона турбулентного режима. Эта зона расположена правее вертикали II, отвечающей верхнему критическому числу Рейнольдса $Re_R = 4000$. В свою очередь эта зона делится на три области.

Первая область – *область гидравлически гладких русел* представлена прямой 2-2. В этой области коэффициент λ не зависит от относительной шероховатости, как это видно на графике (линии, отвечающие различным значениям Δg сливаются в одну) и может быть определен по формуле Блазиуса (4.18) или же по зависимости Л. Прандтля, введенной в 1932 г. для гладких труб:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re_d \sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (7.19)$$

Вторая область – *область доквадратичного сопротивления шероховатых русел* лежит между прямой 2-2 и линией АВ. Название области обусловлено тем, что здесь потери напора по длине пропорциональны скорости в степени от 1,75 до 2. В этой области коэффициент Дарси λ зависит как от числа Рейнольдса, так и от относительной шероховатости и может быть вычислен по эмпирической зависимости А.Д. Альтшуля:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_{\text{экр}}}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}, \quad (7.20)$$

где $\Delta_{\text{экр}}$ – эквивалентная шероховатость, которая дает при подсчете одинаковую с заданной шероховатостью величину λ .

Третья область – *область квадратичного сопротивления шероховатых русел* располагается правее линии АВ. Здесь коэффициент λ не зависит от числа Рейнольдса (Re), а зависит только от относительной шероховатости Δg . Линии $\lambda=f(Re)$ параллельны оси Re .

Потери напора прямо пропорциональны квадрату скорости v^2 .

Коэффициент Дарси λ для условий третьей области может быть найден по эмпирической формуле Л. Прандтля:

$$\lambda = \frac{1}{4 \left(\lg \frac{3,7d}{\Delta_{\text{экр}}} \right)^2}. \quad (7.21)$$

7.6.2. Эмпирические формулы для определения коэффициентов Дарси при напорном движении жидкости в трубах

Выше приведенные формулы (7.18) – (7.21) имеют большое практическое значение для определения потерь напора при различных значениях числа Рейнольдса и шероховатости стенок русла.

Кроме приведенных зависимостей имеется еще множество эмпирических формул различных авторов для определения коэффициента Дарси для турбулентного потока, некоторые из которых представлены ниже.

Для практических расчетов потерь напора в гидравлически гладких трубах (область гидравлически гладких русел по Никурадзе) при числах Рейнольдса до 70000 часто пользуются наряду с формулой Блазиуса (7.18) эмпирической зависимостью Ф. Шевелева:

$$\lambda = \frac{0,25}{\text{Re}^{0,225}}. \quad (7.22)$$

Для гидравлически гладких металлических труб диаметром $d \leq 0,50$ м удовлетворительные результаты дает формула Дарси:

$$\lambda = 0,02 \left(1 + \frac{1}{40d} \right). \quad (7.23)$$

При использовании формул (7.21) – (7.23) при $\text{Re} > 100000$ появляются существенные погрешности, поэтому для таких чисел Рейнольдса предлагается, например, формула Келлебрука (1939 г.)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \frac{\text{Re}}{7}, \quad (7.24)$$

которая может быть представлена в другом виде:

$$\lambda = \left(\frac{0,556}{\lg \frac{\text{Re}}{7}} \right)^2, \text{ или } \lambda = \frac{1}{(1,8 \lg \text{Re} - 1,52)^2}, \quad (7.25)$$

где $1,52 = 1,8 \lg 7$.

Для тех же условий, что и формула Келлебрука применяется формула Г.Филоненко (1948)

$$\lambda = \left(\frac{0,55}{\lg \frac{\text{Re}}{8}} \right)^2, \quad (7.26)$$

которую можно представить в виде:

$$\lambda = \frac{1}{(1,82 \lg \text{Re} - 1,64)^2}. \quad (7.27)$$

По формуле Прандтля-Кармана (1930 г.) хорошо показывающей, что для гладких труб коэффициент Дарси зависит только от числа

Рейнольдса, определение коэффициента λ осуществляется методом подбора:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} - 0,80, \text{ или } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}}{2,51}, \quad (7.28)$$

т.к. $0,8=2 \lg 2,51$.

Для области доквадратичного сопротивления шероховатых русел графика Никурадзе, в которой величина коэффициента λ зависит как от числа Рейнольдса, так и от относительной шероховатости, прежде всего применима формула Келлебрука-Уайта (1939 г.). Эта формула объединила формулы Прандтля-Кармана (7.29) для гладких труб и Прандтля-Никурадзе (7.32) для квадратичной области и имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} + 0,27 \frac{\Delta}{d} \right). \quad (7.29)$$

Формула Келлебрука-Уайта (7.30) была преобразована Н.Френкелем следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\left(\frac{6,81}{\operatorname{Re}} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{\Delta}{d} \right]. \quad (7.30)$$

Для области квадратичного сопротивления шероховатых русел коэффициент Дарси можно определить по формуле Прандтля-Никурадзе:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg 0,27 \frac{\Delta}{d}. \quad (7.31)$$

Формула (7.31) является вторым слагаемым формулы (7.30), применимой для условий области доквадратичного сопротивления шероховатых русел, т.е. при больших числах Рейнольдса влияние первого слагаемого становится столь малым, что им пренебрегают.

7.6.3. Формула Шези. Коэффициент Шези

В гидротехнической практике наиболее часто приходится иметь дело с турбулентным установившимся равномерным движением жидкости в условиях квадратичного сопротивления по Никурадзе. Применительно к этой области рассматриваются напорные и безнапорные потоки, движущиеся в цилиндрических руслах правильного сечения (круглых, квадратных, прямоугольных, трапециевидных, параболических и т.д.).

В практике гидравлических расчетов таких потоков наиболее употребима формула Шези, выражающая связь средней скорости потока с гидравлическим радиусом и гидравлическим уклоном.

Перепишем уравнение Дарси-Вейсбаха (6.21) следующим образом:

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{8R} \frac{v^2}{g}. \quad (7.32)$$

Определим величину гидравлического уклона I через h_ℓ :

$$I = \frac{h_\ell}{\ell} = \lambda \frac{\ell v^2}{8Rg\ell} = \lambda \frac{v^2}{8Rg}. \quad (7.33)$$

Из формулы (7.33) определим величину средней скорости:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda} \cdot RI}. \quad (7.34)$$

Обозначив в формуле (7.34) $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$, получим формулу Шези

для определения скорости потока при турбулентном движении:

$$v_{\text{ср}} = C\sqrt{RI} \quad (7.35)$$

Коэффициент C , входящий в формулу (7.35) называется коэффициентом Шези:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}, \quad (7.36)$$

откуда коэффициент гидравлического трения λ будет равен

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}. \quad (7.37)$$

Поскольку λ - величина безразмерная, коэффициент Шези имеет размерность - $\sqrt{m/c^2} = m^{0,5}/c$.

Так как формула Шези в основном используется для условий области квадратичного сопротивления шероховатых русел, то коэффициент Шези C будет зависеть в основном от шероховатости стенок и не зависеть от скорости движения жидкости, ее вязкости, т.е. от числа Рейнольдса. Если же формула Шези будет использоваться при рассмотрении области докватратичного сопротивления, то при определении коэффициента C необходимо учитывать число Рейнольдса.

Для определения коэффициента C кроме теоретической формулы (7.36) имеется множество эмпирических формул для каждого конкретного случая движения равномерного турбулентного потока, выведенных в основном путем исследований средней скорости v , гидравлического радиуса R и гидравлического уклона I .

Если эти три величины известны, то теоретически коэффициент C может быть найден из выражения

$$C = \frac{v}{\sqrt{RI}} \quad (7.38)$$

Поскольку коэффициент C , как уже отмечалось, зависит в первую очередь от шероховатости стенок русла, то практически во всех эмпирических формулах по его определению фигурирует безразмерный коэффициент шероховатости n , обобщенно характеризующий эту шероховатость. Наиболее часто в гидротехнических расчетах принимается формула, предложенная Н. Павловским:

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad (7.39)$$

где $y = 2,5 \sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R} (\sqrt{n} - 0,1), \quad (7.40)$
или приближенно

$$y = 1,3\sqrt{n} \quad \text{при } R > 1 \text{ м и } y = 1,5\sqrt{n} \quad \text{при } R < 1 \text{ м.} \quad (7.41)$$

Вопросы для самопроверки

1. Объяснить гидравлическое явление пульсации скоростей при турбулентном режиме движения жидкости.
2. Что из себя представляет осредненная скорость при турбулентном режиме движения жидкости?
3. Что из себя представляет схема турбулентного потока жидкости?
4. Что такое вязкий подслой?
5. Чем вызвано непрерывное перемешивание слоев жидкости в турбулентном потоке?
6. Что из себя представляет турбулентная касательная сила?
7. Каково соотношение между единичным турбулентным касательным напряжением τ_t и единичным вязкостным напряжением τ_v ?
8. Чем отличается эпюра распределения скоростей по сечению турбулентного потока от той же эпюры ламинарного потока?
9. Привести формулу, отражающую теоретический закон Л.Прандтля распределения скоростей в поперечном сечении турбулентного потока.
10. Что такое динамическая скорость?
11. Что такое абсолютная и относительная шероховатость?

12. Что из себя представляет график Никурадзе?
13. Привести вывод формулы Шези.
14. Какова размерность коэффициента Шези C ?

8. МЕСТНЫЕ ПОТЕРИ НАПОРА

В пятом разделе было дано понятие о местных потерях напора, а в шестом приведена формула Вейсбаха (6.22) для их определения.

Как следует из формулы (6.22), местные потери напора выражаются по их отношению к скоростному напору. Однако может оказаться, что скорости потока перед местным сопротивлением и после него различны. В таких случаях местные потери напора выражаются через скоростной напор до или после сопротивления.

Следовательно, формула для подсчета местных потерь напора будет следующей:

$$h_m = \xi'_m \frac{v_1^2}{2g} = \xi''_m \cdot \frac{v_2^2}{2g}, \quad (8.1)$$

где ξ'_m и ξ''_m - коэффициенты местных сопротивлений на подходе к ним и выходе соответственно.

8.1. Потери напора при внезапном расширении русла

Коэффициенты местных сопротивлений в основном определяемые опытным путем, берутся из справочников. Однако в некоторых случаях они могут быть вычислены теоретически, как, например, для случая внезапного расширения русла (рис. 8.1.).

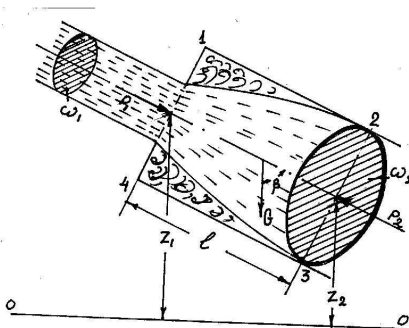


Рис. 8.1. Внезапное расширение трубы

На рисунке поток жидкости движется по трубе, сечение которой внезапно расширяется от ω_1 до ω_2 . При этом линии тока из малого сечения в большее переходят плавно, вследствие чего в начале расширенной трубы между стенками и потоком образуется зона, заполненная жидко-

стью, не участвующей в движении, и находящейся в сложном циркуляционном движении с постоянным обменом масс. Частицы жидкости основного потока (на участке его расширения) заходят в эту зону и, совершив там петлеобразный путь, вновь входят в основной поток. Затрачиваемая на этот процесс энергия и будет искомой потерей напора $h_{вр}$, которую можно определить с помощью уравнений Д. Бернулли:

$$h_{в.р.} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right). \quad (8.2)$$

На отсек 1-2-3-4 действуют силы давления $P_1 = p_1 \omega_1$ и $P_2 = p_2 \omega_2$, где P_1 и P_2 – давления в центрах тяжести сечения 1-4 и 2-3. Кроме того, на отсек действует сила тяжести G , проекция которой на направление движения определится, как $G \cos \beta = \rho g \omega \ell \cos \beta = \rho g \omega (z_1 - z_2)$.

Силами трения по стенкам, ввиду малого значения ℓ можно пренебречь.

Согласно теореме о количестве движения секундное приращение количества движения рассматриваемой системы равно сумме проекций на ось потока внешних сил, действующих на нее.

Секундное приращение количества движения массы жидкости в отсеке 1-2-3-4 при установившемся движении происходит потому, что количество движения M_1 массы $m_1 = \rho \omega_1 v_1$ входящей в сечение 1-4, больше количества движения M_2 массы $m_2 = \rho \omega_2 v_2$, равной массе m_1 , но вытекающей через сечение 2-3.

Из формулы по определению коэффициента Буссинеска (α_0) (3.36) следует:

$$K.D = M = \rho \alpha_0 v^2 \omega. \quad (8.3)$$

Зная M_1 и M_2 , найдем приращение количества движения:

$$M_2 - M_1 = \rho \alpha_{02} v_2^2 \cdot \omega_2 - \rho \alpha_{01} v_1^2 \cdot \omega_1. \quad (8.4)$$

Имея в виду, что $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$, будем иметь:

$$M_2 - M_1 = \rho \omega_2 v_2 (\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1). \quad (8.5)$$

Эта величина должна быть равна сумме проекций на ось потока сил, действующих на систему:

$$\rho \omega_2 v_2 (\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1) = (p_1 - p_2) \omega_2 + G \cos \beta = (p_1 - p_2) \omega_2 + \rho g \omega_2 (z_1 - z_2). \quad (8.6)$$

После сокращения найдем:

$$\rho v_2 (\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1) = (p_1 - p_2) + \rho g (z_1 - z_2). \quad (8.7)$$

Подставив это значение в (8.2), получим:

$$h_{\text{в.р.}} = \frac{v_2 (\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1)}{g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}. \quad (8.8)$$

Как показывают опыты, для турбулентного движения числовые значения коэффициентов Буссинеска α_0 и Кориолиса α близки к единице, поэтому окончательная формула для определения потери напора при внезапном расширении трубы примет вид:

$$h_{\text{в.р.}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (8.9)$$

Рассматривая разность $v_1 - v_2$ как потерянную скорость, полученное решение с формулируется, как теорема Борда.

Потеря напора при внезапном расширении потока равна скоростному напору, соответствующему потерянной скорости.

Потеря напора на внезапное расширение (8.9) может быть выражена как через скоростной напор до расширения, так и через скоростной напор после расширения:

$$h_{\text{в.р.}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{или} \quad h_{\text{в.р.}} = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}. \quad (8.10), (8.11)$$

Учитывая уравнение неразрывности в гидравлической форме (3.4), можно так же написать:

$$h_{\text{в.р.}} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{или} \quad h_{\text{в.р.}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}. \quad (8.12), (8.13)$$

Если ввести символы, обозначающие коэффициенты местных сопротивлений ξ , то множители перед скоростными напорами выразятся следующим образом:

$$\xi'_{\text{в.р.}} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \quad \text{или} \quad \xi''_{\text{в.р.}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2, \quad (8.14), (8.15)$$

а потери напора при внезапном расширении потока будут равны:

$$h_{\text{в.р.}} = \xi'_{\text{в.р.}} \frac{v_1^2}{2g}, \quad \text{или} \quad h_{\text{в.р.}} = \xi''_{\text{в.р.}} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (8.16), (8.17)$$

Рассмотрим частный случай внезапного расширения трубы – выход потока из трубы в бассейн больших размеров.

Здесь ω_2 намного превышает ω_1 . Имея это в виду, можно принять коэффициент $\xi'_{в.р.} = \xi_{вых} = 1$.

Тогда потеря на выход в бассейн будет равна: $h_{вых.} = \frac{v_1^2}{2g}$.

Если ω_2 нельзя считать достаточно большой величиной, то

$$h_{вых.} = \xi_{вых.} \cdot \frac{v_1^2}{2g},$$

$$\text{где } \xi_{вых.} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2.$$

8.2. Потери напора при внезапном сужении русла

На рис. 8.2. показан поток жидкости в трубе, имеющий резкий переход от большого сечения ω_1 к меньшему ω_2 .

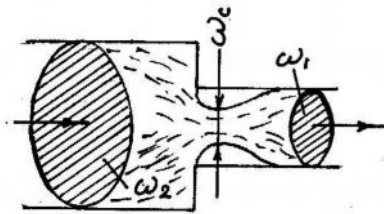


Рис. 8.2. Внезапное сужение трубы

При этом поток на некотором расстоянии по течению от входа в малое сечение будет иметь сжатое сечение ω_c . Степень сжатия струи определяется коэффициентом сжатия ε :

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega_2}. \quad (8.18)$$

Тогда коэффициент местных сопротивлений можно найти с помощью формулы (8.15) для случая внезапного расширения трубы, но с учетом сжатого сечения ω_c :

$$\xi = \left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1\right)^2. \quad (8.19)$$

Заменяя степень сжатия струи коэффициентом сжатия ε , получим

$$\xi = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2. \quad (8.20)$$

Как видно с уменьшением ε , т.е. увеличением сжатия струи, коэффициент сопротивления должен увеличиваться и, следовательно, должны увеличиваться потери напора.

Для наиболее резкого сжатия струи величина коэффициента сжатия $\varepsilon_{н.р.с.}$ будет определяться по следующей формуле

$$\varepsilon_{н.р.с.} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}}}. \quad (8.21)$$

Эта формула выводится путем совместного решения уравнения Д. Бернулли, составленного для сечений ω_2 и сжатого сечения и уравнения количества движения.

Подставив (8.21) в (8.20), получим:

$$\xi_{н.р.с.} = 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (8.22)$$

Ниже приводятся частные случаи внезапного сужения и расширения потока.

На рис.8.3 показана диафрагма, установленная в трубопроводе и имеющая в центре отверстие площадью поперечного сечения ω_∂ .

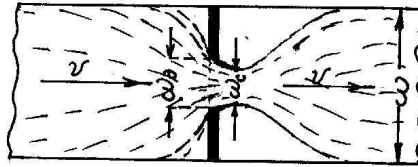


Рис. 8.3. Диафрагма в трубе

Коэффициент сопротивления ξ_∂ определяется по формуле (8.23)

$$\xi_\partial = \left(\frac{\omega}{\omega_\partial \cdot \varepsilon} - 1 \right)^2, \quad (8.23)$$

где ε - коэффициент сжатия равный $\frac{\omega_c}{\omega_\partial}$.

На рис. 8.4. изображен диффузор, в котором вход в расширенную трубу не внезапный, а постепенный.

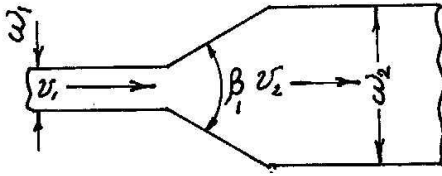


Рис. 8.4. Диффузор

В этом случае коэффициент сопротивления ξ_d определяется в долях от потерь напора на внезапное расширение (8.17).

$$h_{\text{дифф.}} = K_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \cdot \frac{v_1^2}{2g}, \quad (8.25)$$

где K_1 - коэффициент смягчения или полноты удара, учитывающий уменьшение потерь напора в диффузоре по сравнению с потерями напора при внезапном расширении трубы с тем же соотношением сечений соединяемых труб.

Коэффициент K_1 зависит от угла конусности β_1 и может быть определен по графику (рис. 8.5.), приведенным Чугаевым Р.Р. (1971 г.).

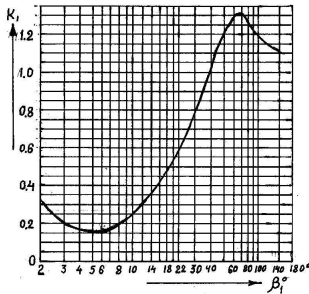


Рис. 8.5. График зависимости $K_1 = f(\beta_1)$

Как видно из графика, построенного по опытным данным, угол β , при котором получаются наименьшие потери напора, будет равен 6° .

На рисунке 8.6. изображен конфузор, где коэффициент сопротивления ξ также, как и в диффузоре определяется в долях от потерь напора, только при внезапном сужении (8.20).

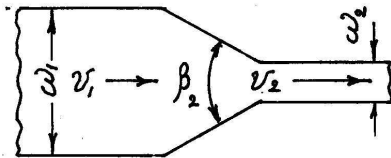


Рис.8.6. Конфузор

$$h_{\text{конф.}} = K_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 \cdot \frac{v_2^2}{2g}, \quad (8.26)$$

где K_2 - коэффициент смягчения, учитывающий уменьшение потерь напора в конфузоре по сравнению с потерями напора при внезапном сужении.

Коэффициент K_2 зависит от угла сходимости β_2 и может приниматься по графику (рис. 8.7.).

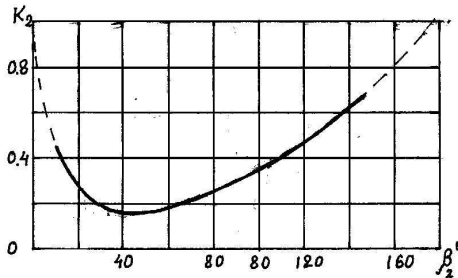


Рис. 8.7. График зависимости $K_2=f(\beta_2)$

8.3. Общие потери напора

Мы уже говорили, что общие потери $h_{\text{пот}}$ складываются из потерь по длине потока и местных потерь (5.1).

Местные потери напора также определяются как арифметическая сумма потерь напора, вызванных отдельными местными сопротивлениями. Этот метод определения потерь напора получил название принципа наложения потерь.

Таким образом, в системе трубопровода длиной ℓ с постоянным расходом жидкости и диаметром d потери напора $h_{\text{пот}}$ могут быть определены следующим образом:

$$h_{\text{пот.}} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_1 \frac{v^2}{2g} + \xi_2 \frac{v^2}{2g} + \dots + \xi_n \frac{v^2}{2g}, \quad (8.26)$$

или

$$h_{\text{пот.}} = \lambda \frac{\ell v^2}{d 2g} + \sum_{i=1}^n \xi_{m_i} \frac{v^2}{2g}, \quad (8.27)$$

где $\sum_{i=1}^n \xi_{m_i}$ - суммарный коэффициент сопротивлений системы.

Вопросы для самопроверки

1. По отношению к какой величине выражаются местные потери напора?
2. Какова физическая сущность теоремы Борда?
3. Как выражается потеря напора при внезапном расширении русла?
4. Как выражается потеря напора при внезапном сужении русла?
5. Как определяется коэффициент сопротивления при прохождении потоком установленной в трубопроводе диафрагмы?

6. Каков принцип расчета потерь напора в диффузоре?

7. Каков принцип расчета потерь напора в конфузоре?

9. НАПОРНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Напорные трубопроводы – это трубопроводы, работающие полным сечением, т.е. жидкость, движущаяся в трубопроводе занимает весь его внутренний объем и живое сечение потока всегда равно площади поперечного сечения водотока. Если движение жидкости в трубопроводе установившееся, то оно происходит под некоторым постоянным напором $H = \text{const}$ при неизменном расходе и скорости. Если же движение неустановившееся (например, при изменении по длине потока расхода Q и скорости v) сечение всегда будет неизменным.

Ниже нами будут рассматриваться только круглые цилиндрические трубопроводы с внутренним диаметром d , длиной ℓ , с гидравлическими элементами – живым сечением ω , смоченным периметром χ и гидравлическим радиусом $R \left(\frac{\pi d^2}{4}; \chi = \pi d; R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{d}{4} \right)$.

Гидравлический расчет трубопроводов заключается в основном в определении потерь напора, складывающихся согласно (5.1) из потерь по длине потока и местных потерь.

Основу гидравлических расчетов трубопроводов составляют уравнения неразрывности потока и Д. Бернулли.

9.1. Классификация трубопроводов

В зависимости от соотношения потерь напора по длине и местных потерь трубопроводы подразделяются на короткие и длинные.

Короткими трубопроводами называются трубопроводы, в которых потери сопоставимы по значению (местные потери – напора не должны превышать 5 % потерь напора по длине). При гидравлическом расчете этих трубопроводов учитываются как местные потери напора, так и потери по длине, а также скоростные напоры в сечениях потока.

Задачи по гидравлическому расчету коротких трубопроводов сводятся к следующим основным видам:

- определению расхода потока Q при заданном напоре H ;
- определению необходимого напора H при заданном расходе Q ;
- определению необходимого диаметра трубы при заданных расходе Q и напоре H .

Наиболее сложным вопросом при решении этих задач является, как отмечалось выше, нахождение потерь напора.

Примером коротких трубопроводов могут служить дюкеры, всасывающие трубы насосов, сифоны и др.

Длинными трубопроводами (или гидравлически длинными) называются трубопроводы, в которых местные потери напора и скоростной напор настолько малы по сравнению с потерями напора по длине, что их не вычисляют, а принимают как некоторую часть последних (обычно потери напора по длине увеличивают на 5-10%).

Длинные трубопроводы подразделяются на простые и сложные. Простые трубопроводы – это трубопроводы, не имеющие ответвлений или присоединений, состоящие из труб одинакового диаметра, выполнены из одного материала. Сложными трубопроводами называются такие, которые по длине имеют присоединения и ответвления. Они могут быть с последовательным соединением, параллельным, кольцевым и т.д.

9.2. Основные зависимости для расчетов трубопроводов

Основной расчетной формулой при решении рассматриваемых задач для условий, отвечающих квадратичной области сопротивления по Никурадзе является формула Шези $v = C\sqrt{RI}$, где коэффициент C определяется по приведенным выше формулам (7.38) – (7.41).

Из формулы Шези можно получить следующие расчетные зависимости:

гидравлический уклон, I

$$I = \frac{v^2}{C^2 \cdot R}; \quad (9.2)$$

потери напора по длине h_ℓ учитывая (3.40)

$$h_\ell = I \cdot \ell = \frac{v^2}{C^2 \cdot R} \cdot \ell; \quad (9.3)$$

расход потока Q :

$$Q = \omega \cdot v = \omega \cdot C\sqrt{RI}; \quad (9.4)$$

модуль расхода K

$$K = \omega C\sqrt{R}. \quad (9.5)$$

Тогда расход потока из (9.4) выразится:

$$Q = K\sqrt{I}. \quad (9.6)$$

Следовательно:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{I}}. \quad (9.7)$$

Модуль расхода K называют также расходной характеристикой, представляющей собой расход жидкости в русле заданного живого сечения при гидравлическом уклоне, равном единице.

Размерность K , как следует из зависимостей такая же, что и расхода.

Из формулы (9.7) следует:

$$I = \frac{Q^2}{K^2}. \quad (9.8)$$

Из (9.3) с учетом (9.8) следует:

$$h_\ell = I \cdot \ell = \frac{Q^2}{K^2} \ell. \quad (9.9)$$

Введем понятие модуля скорости W :

$$W = C\sqrt{R}. \quad (9.10)$$

При этом формула Шези (7.36) переписывается:

$$v = W\sqrt{I}. \quad (9.11)$$

Следовательно:

$$W = \frac{v}{\sqrt{I}}. \quad (9.12)$$

Размерность W , как видно из выражения (9.9) – (9.12) та же, что и скорости v .

Из (9.11) получаем:

$$I = \frac{v^2}{W^2}. \quad (9.13)$$

Следовательно:

$$h_\ell = \frac{v^2}{W^2} \cdot \ell \quad (9.14)$$

Введем понятие удельного сопротивления трубопровода A :

$$A = \frac{1}{K^2} = \frac{1}{\omega^2 C^2 R}. \quad (9.15)$$

Удельное сопротивление трубопровода численно равно напору, затрачиваемому на единицу длины трубопровода при расходе, равном единице.

Выражение (9.15) с учетом (7.36) примет вид:

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi d^5} = 0,0827 \frac{\lambda}{d^5}. \quad (9.16)$$

Поскольку движение жидкости по трубам в условиях различных областей сопротивления третьей турбулентной зоны имеет для каждой

свои особенности, требующие их учета при производстве гидравлических расчетов, очень важно знать, в какой области сопротивления движется поток. А так как нами рассматривается в основном квадратичная область сопротивления, то особую важность приобретает выявление границы между доквadraticной и quadratic областями.

В таблице 9.1 приведены средние скорости потока в металлических водопроводных трубах, превышение которых приведет к переходу в quadratic область.

Таблица составлена для новых стальных труб с эквивалентной шероховатостью $\Delta \approx 0,45$, новых чугунных с $\Delta \approx 0,50$ и “нормальных” (бывших в употреблении) с $\Delta \approx 1,35$.

Таблица 9.1

Средние скорости потока при переходе из доквadraticной области в quadraticную

Вид труб	Скорости v м/с при диаметре труб, мм								
	50	100	200	300	400	500	600	1000	1400
Новые стальные	2,8	3,2	3,5	3,7	3,8	3,9	4,0	4,2	4,4
Новые чугунные	2,5	2,8	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0
“Нормальные”	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3

9.3. Гидравлический удар

Примером неустановившегося движения жидкости в трубах, когда скорость потока и гидродинамический напор являются функцией не только координат x, y, z , но и времени t , может служить гидравлический удар.

Гидравлическим ударом называется явление понижения или повышения гидродинамического давления в напорном трубопроводе, вызванное резким изменением скорости потока во времени в некотором сечении трубопровода.

Явление гидравлического удара характеризуется большими по величине возникающими кратковременными давлениями, и скоростями распространения ударной волны. Гидравлический удар может быть причиной крупных аварий на трубопроводных системах вследствие разрыва труб, поэтому для его предотвращения необходимо знать физическую сущность гидравлического удара, а также приемы гидравлических расчетов по недопущению или нейтрализации этого опасного явления.

Теория гидравлического удара была разработана Н.Е. Жуковским и изложена в 1899 году в его работе «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах».

На рис.9.1. изображен простой трубопровод круглого сечения длиной ℓ , подключенный к резервуару А, имеющий на конце кран К. В резервуаре А поддерживается постоянный уровень жидкости.

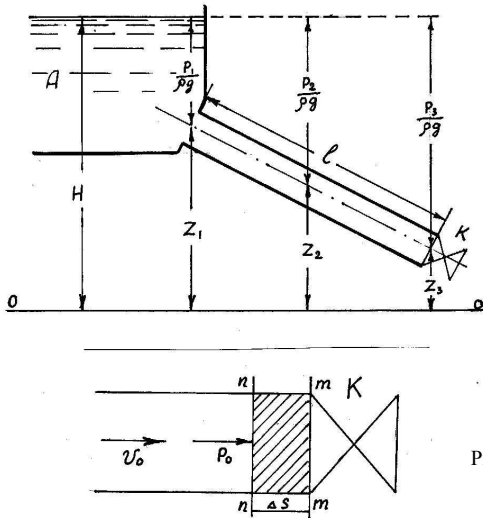


Рис. 9.1. Гидравлический удар

Внутренний диаметр трубопровода обозначим через D , толщину стенок - δ , а живое сечение ω . Модуль упругости материала, из которого сделана труба, обозначим через E . Будем считать δ и E постоянными по длине трубы ℓ . Скоростным напором и потерями напора по длине трубы ввиду малости скорости v_0 и длины ℓ будем пренебрегать.

Предположим, что стенки трубопровода абсолютно жесткие и жидкость несжимаема. В этом случае при мгновенном закрытии крана К жидкость мгновенно остановится, количество движения обратится в нуль, вызвав огромное повышение давления по всей длине трубопровода. Этот предполагаемый случай носит название «абсолютно жесткого» удара, не имеющего места в действительности.

На характер явления гидравлического удара оказывают большое влияние сжимаемость жидкости и деформируемость стенок трубопровода, т.е. способность стенок деформироваться с изменением гидродинамического давления в трубе. В таких условиях гидравлический удар носит название «упругого удара», качественно отличающегося от жесткого. Поскольку в природе «жесткого» удара не существует, то рассматриваемое явление называют просто «гидравлическим ударом», который подразделяется на прямой гидравлический удар и непрямой в

зависимости от соотношения времени закрытия крана и времени распространения ударной волны. Рассмотрим случай прямого удара.

После мгновенного закрытия крана К ближайший к крану слой жидкости m_n , бесконечно малой толщины ΔS остановится и масса жидкости в объеме этого слоя $\rho \omega \Delta S$ сожмется под влиянием соседних слоев (рис.9.1). В освободившуюся часть объема войдет жидкость со скоростью v_0 еще не остановившихся слоев.

Обозначим через P_0 начальное давление движущейся жидкости, а через P_1 – возросшее давление после ее остановки. Тогда увеличение давления составит $\Delta P = P_1 - P_0$.

В момент остановки скорость $v_1 = 0$. Тогда потерянное количество движения за бесконечно малый промежуток времени Δt массой жидкости в объеме $\omega \Delta S$ составит $m (v_0 - v_1) = \rho \omega \Delta S v_0$.

За тот же промежуток времени импульс действующих сил выразится:

$$(p_1 - p_0) \omega \Delta t = \Delta p \omega \Delta t. \quad (9.17)$$

Согласно теореме о количестве движения, его изменение равно импульсу действующих сил за тот же бесконечно малый промежуток времени, т.е.

$$\rho \omega \Delta S v_0 = \Delta p \omega \Delta t, \quad (9.18)$$

а следовательно:

$$\Delta p = \rho v_0 \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (9.19)$$

где $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ представляет собой скорость распространения ударной волны C .

Подставив C в (9.19) и заменив Δp – повышение давления на повышение напора ΔH , получим

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{C v_0}{g}. \quad (9.20)$$

Полученная зависимость (9.20) впервые была получена Н.Е. Жуковским. Им же была выведена формула для нахождения численного значения C :

$$C = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{d}{\delta} \frac{E_{ж}}{E_{тр}}}}, \quad (9.21)$$

где 1425 м/с – скорость распространения звука в воде; $E_{ж}$ – модуль упругости жидкости (в данном случае воды); $E_{тр}$ – модуль упругости материала стенок трубы; δ – толщина стенки трубы.

Явление гидравлического удара разделяется на фазы. Продолжительность фазы T определяется промежутком времени от момента за-

крытия крана до возвращения отрицательной волны к нему. Этот процесс повторяется с постепенным затуханием. Продолжительность фазы T , зная длину трубы ℓ и скорость ударной волны C , можно выразить:

$$T = \frac{2\ell}{C}. \quad (9.22)$$

Непрямой гидравлический удар имеет место в том случае, если время закрытия $t_{\text{закр}}$ больше фазы удара T , т.е. за период фазы удара T движение воды в трубопроводе еще не остановилось, не вся кинетическая энергия перешла в потенциальную, происходит наложение «возмущений» (отрицательная волна уменьшает повышение давления). Это повышение давления можно вычислить по формуле:

$$\Delta H = \frac{v \cdot C}{g} \left(\frac{\ell}{C \cdot T_3 - \ell} \right). \quad (9.23)$$

Если рассмотреть условия $T_3 = T = \frac{2\ell}{C}$, то, подставив это выра-

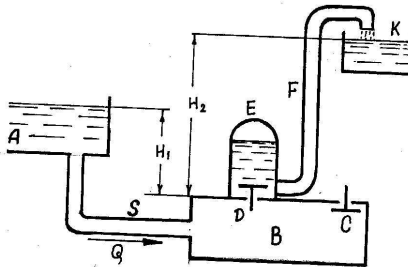
жение в (9.23), получим

$$\Delta H = \frac{v \cdot C}{g} \left(\frac{\ell}{C \cdot \frac{2\ell}{C} - \ell} \right) = \frac{v \cdot c}{g} \quad (9.24)$$

т.е. в этом случае наблюдается прямой удар.

9.4. Гидравлический таран

Гидравлический удар может рассматриваться не только как нежелательное опасное явление, требующее принятия специальных мер по его предотвращению, но и как явление, которое может быть использовано для подъема воды на высоту до 60 м без каких-либо затрат на использование энергетических ресурсов. Устройство, с помощью которого осуществляется подъем воды с использованием принципа гидравлического удара, называется *гидравлическим тараном* (рис. 9.2).



Из источника A с помощью трубопровода небольшой длины S вода поступает в рабочую коробку B с двумя клапанами C и D . Клапан C , так называемый ударный, открывается под действием силы собственного веса. Поступающая в

Рис. 9.2. Гидравлический таран

рабочую коробку вода под напором H , вытекает через открытый ударный клапан C . При увеличении интенсивности поступления воды в рабочую коробку, а следовательно увеличении силы давления, действующей на клапан C , последний закроется, скорость вытекающего потока через этот клапан упадет до нуля, поток внезапно остановится, в связи с чем в подающем трубопроводе S и в рабочей коробке B произойдет гидравлический удар с резким повышением давления. Под влиянием этого давления откроется клапан D и часть воды поступит в воздушный колпак E , сожмет имеющийся там воздух, который в свою очередь вытеснит часть воды на высоту H_2 в резервуар K посредством напорного трубопровода F .

После ухода части воды в воздушный колпак давление в рабочей коробке снизится и клапан C под действие силы тяжести откроется, а клапан D закроется под действием давления воздуха в воздушном колпаке E . Затем процесс повторится в том же порядке.

Первый период, когда поток из источника A вытекает через клапан S , набирая силу, называется разгонным. Второй период явления гидравлического удара и повышения давления до ударного, называется ударным. Третий период, в течение которого вода расходом Q поступает через напорный трубопровод F в резервуар K под давлением сжатого в колпаке E воздуха называется рабочим.

Обычно напор H , под которым вода поступает в рабочую коробку, составляет 1,5-5м, а высота нагнетания 15-40 м. Расход, подаваемый на высоту нагнетания Q_2 , составляет $(0,4 - 0,07) Q$ – расхода, поступающего в рабочую коробку. Коэффициент полезного действия гидравлического тарана составляет 0,85-0,4. Выпускаемые промышленностью гидравлические тараны могут поднимать воду на высоту до 60 м с расходом 0,33 – 0,37 л/с.

Вопросы для самопроверки

1. Что из себя представляет напорный трубопровод и каковы особенности движения жидкости в нем?
2. Что понимается под короткими и длинными трубопроводами?
3. Какие задачи решаются при гидравлическом расчете трубопроводов?
4. Какими расчетными зависимостями пользуются при гидравлических расчетах трубопроводов?
5. Какова физическая сущность гидравлического удара?
6. Что из себя представляет гидравлический таран?

10. БЕЗНАПОРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

В третьем разделе было дано определение безнапорному движению, в соответствии с которым поток имеет свободную поверхность, все точки которой находятся под атмосферным давлением. При напорном движении любое препятствие на пути потока вызывает изменение давления и скорости, не влияя при этом на форму живого сечения и смоченного периметра русла. При безнапорном же движении появление на пути каких-либо видов местных сопротивлений (задвижек, диафрагм и т.д.), а также изменение условий движения (изменение уклона дна, расширение или сужение русла) неизбежно влечет за собой изменение живого сечения и координат свободной поверхности.

При рассмотрении установившегося движения в открытых руслах будем считать, что линии тока параллельны между собой и живое сечение, проведенное нормально к ним, всегда плоское. В этом случае давление в живом сечении будет распределяться по гидростатическому закону.

Движение жидкости, удовлетворяющее таким условиям, называется плавно изменяющимся. Такое движение может иметь место в руслах, размеры и форма которых по пути потока изменяются очень плавно.

В общем открытом руслом называется русло, контур поперечного сечения которого образован незамкнутой линией. К таким руслам могут быть отнесены трубы и каналы замкнутого сечения с частичным заполнением их потоком.

Открытые русла могут быть призматическими и непризматическими.

Призматические или цилиндрические русла по длине сохраняют форму и размеры элементов поперечного профиля. В таких руслах живое сечение потока может изменяться только с изменением его глубины h .

Непризматические русла – это такие, у которых форма или геометрические размеры какого-либо элемента поперечного профиля меняются по длине русла.

Кроме того, открытые русла могут быть правильной и неправильной формы.

К руслам правильной формы относятся такие, для которых живое сечение ω , смоченный периметр χ , гидравлический радиус R , ширина русла по свободной поверхности B являются непрерывными функциями

ми глубины потока h . К таким руслам относятся прямоугольные, трапецидальные, параболические русла, а также круговые при наполнении $h < r$, где r – радиус. (Рис. 10.1).

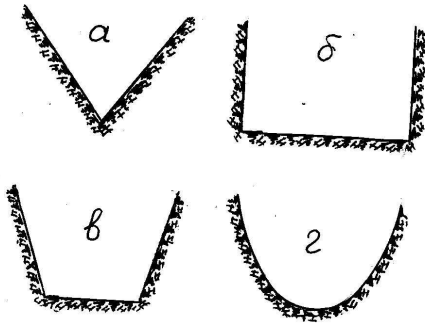


Рис. 10.1. Русла правильной формы:
а – треугольное; б – прямоугольное; в – трапецидальное; г – параболическое

К руслам неправильной формы относятся русла составного (полигонального) профиля, а также кругового при $h > r$.

На все перечисленные виды открытых русел, а также на естественные распространяется принятое нами допущение об установившемся движении как плавно изменяющемся.

10.1. Дифференциальное уравнение установившегося движения жидкости

Рассмотрим продольный профиль безнапорного потока в условиях плавно изменяющегося движения (рис. 10.2).

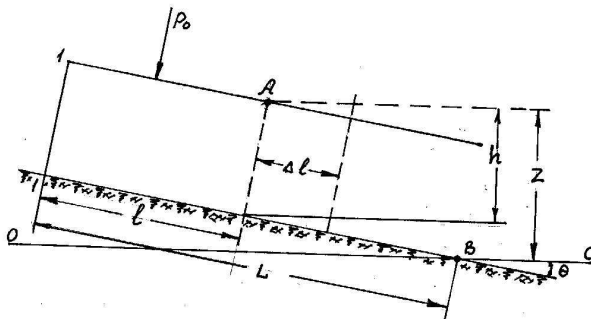


Рис. 10.2. Продольный профиль безнапорного потока

Из приведенных понятий гидравлического уклона в третьем разделе, очевидно, что выражение для гидравлического уклона I в сечении потока в дифференциальной форме будет иметь вид:

$$I = -\frac{dh}{d\ell} = -\frac{d}{d\ell} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right). \quad (10.1)$$

Приведенное уравнение можно рассматривать как дифференциальное уравнение установившегося движения.

Найдем производное по ℓ для каждого члена уравнения Д. Бернулли в скобках. Для некоторой точки А на свободной поверхности рассматриваемого потока, расположенной на расстоянии ℓ от первоначального сечения 1-1, ее координата z относительно плоскости сравнения, проходящей через произвольно выбранную точку В dna русла потока, находящуюся на расстоянии L от 1-1, может быть выражена следующим образом:

$$z = h + (L - \ell) \cdot i, \quad (10.2)$$

где i – уклон dna русла, который можно выразить через угол наклона dna русла к горизонту:

$$i = \sin \theta. \quad (10.3)$$

Взяв производную от z по ℓ , получим

$$\frac{dz}{d\ell} = \frac{dh}{d\ell} - i. \quad (10.4)$$

Заменим среднюю скорость потока v в третьем члене уравнения Д. Бернулли (10.1) на отношение расхода Q к живому сечению ω ($v=Q/\omega$) и перепишем это уравнение, перенеся правую часть в левую:

$$\frac{d}{d\ell} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) + I = 0. \quad (10.5)$$

Производная от p по ℓ будет равна нулю, т.к. давление на свободной поверхности по длине не изменяется и равно атмосферному.

При вычислении производной от $\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}$ по ℓ примем во внимание, что площадь живого сечения является функцией глубины потока h

и средней линии трапецеидального живого сечения В. В этом случае искомая производная будет иметь вид:

$$\frac{d}{d\ell} \left(\frac{\alpha Q^2}{g\omega^2} \right) = - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{d\omega}{dh} \cdot \frac{dh}{d\ell} + \frac{d\omega}{db} \cdot \frac{db}{d\ell} \right). \quad (10.6)$$

Подставив найденные значения в (10.5) и заменив в нем гидравлический уклон на его значение из формулы 9.4: $I = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}$, найдем $\frac{dh}{d\ell}$:

$$\frac{dh}{d\ell} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} \left(1 - \frac{\alpha C^2 R}{g\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\ell} \right)}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial h}}. \quad (10.7)$$

Из рис. 10.3 видно, что dh соответствует приращение площади живого сечения Bdh . Тогда имеем: $B dh = \frac{\partial \omega}{\partial h} dh$ и $\frac{\partial \omega}{\partial h} = B$, где B – ширина живого сечения поверху на свободной поверхности.

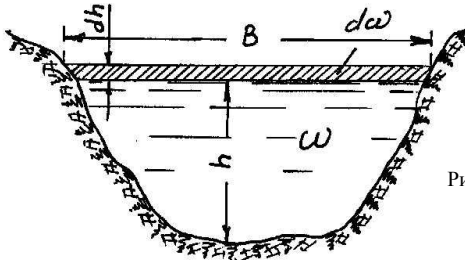


Рис. 10.3. К выводу уравнения установившегося движения жидкости

С учетом ввода величины B уравнение (10.7) примет вид:

$$\frac{dh}{d\ell} = \frac{i - \frac{Q}{\omega^2 C^2 R} \left(1 - \frac{\alpha C^2 R}{g\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\ell} \right)}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3}}. \quad (10.8)$$

Полученное уравнение (10.8) является общим дифференциальным уравнением установившегося плавно изменяющегося неравномерного движения в открытом русле.

Рассмотрим величину $\frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}$, стоящую в знаменателе уравнения (10.8):

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3} = \frac{\alpha v^2 B}{g\omega}. \quad (10.9)$$

Учитывая, что отношение $\frac{\omega}{B}$ является средней глубиной живого сечения h_{cp} , т.е. $\frac{B}{\omega} = \frac{1}{h_{cp}}$, уравнение (10.9) примет вид

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3} = 2 \frac{\alpha v^2 / 2g}{h_{cp}}. \quad (10.10)$$

Последнее выражение показывает двойное отношение кинетической энергии $\alpha v^2 / 2g$ к удельной потенциальной энергии по средней глубине h_{cp} . Учитывая это, безразмерное выражение $\alpha Q^2 B / g\omega^3$ назовем *параметром кинетичности* потока $П_k$.

Безразмерная величина $\frac{v^2}{gh}$, где под h подразумевается любая характерная для потока линейная величина, носит название числа Фруда (Fr) и является, как и число Рейнольдса, одним из критериев подобия. Параметр кинетичности потока $П_k$ является одной из форм числа Фруда, где в качестве линейной величины выступает средняя глубина потока.

10.2. Основные виды установившегося движения жидкости в открытом русле

Уравнение (10.8) в частном случае, когда русло имеет прямоугольную форму и производная $db/d\ell$ равна нулю, будет иметь упрощенный вид:

$$\frac{dh}{d\ell} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}}. \quad (10.11)$$

Это уравнение отражает характер изменения глубин потока по его длине в открытом призматическом русле.

Уравнение (10.11) при $\Pi_k \neq 1$ может иметь следующие три случая:

- $dh/d\ell = 0$ – равномерное движение потока;

- $dh/d\ell > 0$ - неравномерное движение с нарастанием глубин по длине потока (образование кривой подпора);

- $dh/d\ell < 0$ – неравномерное движение с уменьшением глубин по длине потока (образование кривой спада)

Уравнение *равномерного движения* жидкости в открытом русле, получаем из уравнения (10.11) при $\frac{dh}{d\ell} = 0$. Этому условию отвечает уравнение:

$$i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} = 0, \text{ или } Q = \omega C \sqrt{Ri}, \quad (10.12)$$

т.е. получена формула Шези, где вместо гидравлического уклона I под радикалом стоит геодезический уклон i , т.к. вполне очевидно, что при равномерном движении в открытом русле $I=i$.

Глубину потока, соответствующую равномерному движению, принято называть нормальной глубиной h_0 , а уравнение (10.12) записывается как

$$Q = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0 \cdot i}, \quad (10.13)$$

где ω_0 , R_0 и C_0 – параметры, соответствующие h_0 .

Введя понятие модуля расхода и расходной характеристики K (9.7), уравнение (10.12) примет вид $Q = K_0 \sqrt{i}$, где $K_0 = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0}$.

10.3. Удельная энергия сечения потока и изменение удельной энергии по длине потока

Удельной энергией потока E называется энергия массы жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение потока, отнесенная к единице веса и определяемая относительно плоскости сравнения.

Удельная энергия потока, определяемая относительно плоскости сравнения, хорошо описывается уравнением Д. Бернулли:

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (10.14)$$

В этом выражении исключим атмосферное давление, являющимся постоянным по всей свободной поверхности потока и вместо него введем манометрическое давление. Для любой точки М живого сечения (рис. 10.4) гидродинамическое давление будет равно:

$$z + \frac{p}{\rho g} = z + h' = z_0 + h, \quad (10.15)$$

где h – наибольшая глубина в живом сечении.

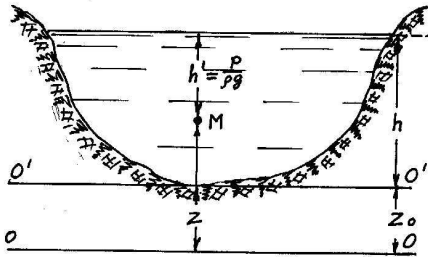


Рис. 10.4. Удельная энергия потока

Тогда удельная энергия выразится уравнением:

$$E = z_0 + h + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (10.16)$$

Если плоскость сравнения провести через низшую точку живого сечения, то z_0 будет равно нулю и удельную энергию в данном живом сечении относительно

этой плоскости сравнения называют удельной энергией сечения $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g \omega^2}. \quad (10.17)$$

Движение жидкости происходит за счет энергии потока E , поэтому последняя по пути потока должна уменьшаться, т.е. $\frac{dE}{d\ell} < 0$.

Выясним характер изменения удельной энергии сечения по длине.

Из рис. 10.1 видно, что $z_0 = i(L-l)$.

Из определения удельной энергии сечения следует: $\mathcal{E} = E - z_0 = E - i(L-l)$.

Производная от $\mathcal{E}$ по ℓ будет: $\frac{d\mathcal{E}}{d\ell} = \frac{dE}{d\ell} + i = -I + i$ или согласно (9.7):

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\ell} = -\frac{Q^2}{K^2} + i = i \left(1 - \frac{K_0^2}{K^2} \right), \quad (10.18)$$

где $K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}}$, а $K = \omega C \sqrt{R}$.

Из уравнения (10.18) видно, что при равномерном движении ($K=K_0$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\ell} = 0 \text{ или } \mathcal{E} = \text{const.} \quad (10.19)$$

При неравномерном движении ($K \neq K_0$) удельная энергия сечения $\mathcal{E}$ может увеличиваться или уменьшаться по длине потока в зависимости от соотношения K_0 и K .

Физический смысл уравнения (10.18) заключается в следующем. При равномерном движении работа гравитационных сил (сил тяжести) полностью расходуется на преодоление сил сопротивления и изменения удельной энергии сечения сопротивления и изменения удельной энергии сечения не происходит. В случае же $K > K_0$ средняя скорость потока будет меньше, чем при равномерном движении, потери напора уменьшатся и часть гравитационной энергии будет переходить в следующее сечение вниз по течению. При $K < K_0$ скорость потока будет больше, затрат энергии (потерь напора) станет также больше и поэтому на преодоление гидравлических сопротивлений энергия будет заимствоваться из удельных энергий нижележащих сечений, т.е. $\frac{d\mathcal{E}}{d\ell} < 0$.

Из уравнения (10.18) следует также, что отрицательные значения производных всегда будут при $i=0$ или $i < 0$.

Из уравнения (10.17), состоящего из потенциальной части ($\mathcal{E}_{\text{пот}}=h$) и кинетической $\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}$ видно, что при $h \rightarrow 0$,

имеем: $\mathcal{E}_{\text{пот}} \rightarrow 0$, $\mathcal{E}_{\text{кин}} \rightarrow \infty$ и $\mathcal{E} \rightarrow \infty$.

Увеличение глубины повлечет за собой увеличение $\mathcal{E}_{\text{пот}}$ и уменьшение $\mathcal{E}_{\text{кин}}$.

При $h \rightarrow \infty$ имеем: $\mathcal{E}_{\text{пот}} \rightarrow \infty$, $\mathcal{E}_{\text{кин}} \rightarrow 0$ и $\mathcal{E} \rightarrow \infty$.

На рис. 10.5 показан график изменения удельной энергии сечения в зависимости от изменения глубин $\mathcal{E}=f(h)$, характеризующийся кривой с двумя ветвями, уходящими в бесконечность. По оси ординат здесь отложены глубины h , а по оси абсцисс – значения удельной энергии и ее составляющие.

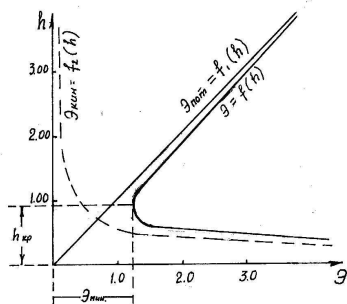


Рис. 10.5. График изменения энергии сечения от глубины потока

Потенциальная часть удельной энергии изобразится прямой линией - биссектрисой координатного угла, а кинетическая часть – пунктирной кривой.

Глубина потока, соответствующая минимальному значению удельной энергии сечения, называется критической глубиной.

Построенный график полностью отражает состояние открытых потоков, которое может быть бурным или спокойным. При глубинах потока меньше критических ($h < h_{кр}$) наблюдаем бурный поток. В этом случае увеличение удельной энергии сечения происходит вследствие увеличения ее кинетической части при уменьшении потенциальной.

При глубинах потока больше критической ($h > h_{кр}$) наблюдаем спокойное состояние потока. В этом состоянии увеличение удельной энергии сечения происходит вследствие увеличения ее потенциальной части при уменьшении кинетической.

При глубине потока равной критической глубине ($h = h_{кр}$) поток находится в критическом состоянии.

10.4. Критическая глубина потока

Для получения указанных расчетных формул необходимо исходить из общего уравнения критического состояния потока, вывод которого приводится ниже.

Рассмотрим условие, когда $h = h_{кр}$, $\Theta = \Theta_{мин}$, $\left(\frac{d\Theta}{dh} \right)_{кр} = 0$.

Возьмем производную от Θ по h с учетом (10.17)

$$\frac{d\Theta}{dh} = \frac{d}{dh} \left(h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = 1 - \frac{\alpha Q^2 d\omega}{g\omega^3 dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}, \quad (10.20)$$

где $\frac{d\omega}{dh} = B$ - ширина живого сечения по верху.

Из (10.20) следует:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial h} \right)_{кр.} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B_{кр}}{g\omega_{кр}^3} = 0 \quad (10.21)$$

или

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\omega_{кр}^3}{B_{кр}}. \quad (10.22)$$

Полученное уравнение (10.22) называется уравнением критического состояния.

Пользуясь понятием кинетичности потока Π_k как формы числа Фруда (Fr) из уравнения (10.21) следует, что критическое состояние потока имеет место при $\Pi_k=1$. При $\Pi_k>1$ или $\Pi_k<1$ состояние потока будет бурным или спокойным соответственно.

Критическую глубину для русла произвольной формы можно определить по (10.22) методом подбора или же графическим методом путем построения кривой $\frac{\omega^3}{B} = f(h)$ (рис. 10.6).

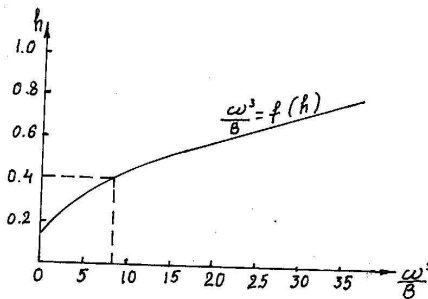


Рис. 10.6. Кривая $\frac{\omega^3}{B} = f(h)$.

10.5. Критический уклон

Как следует из вышеизложенного, критическая глубина зависит от геометрической формы поперечного сечения русла и расхода, но не зависит от продольного уклона i и состояния ложа.

При равномерном движении в соответствии с (10.13) нормальная глубина зависит от уклона и состояния ложа. Очевидно, что для любого призматического русла можно подобрать такие значения i при заданном расходе Q , при котором нормальная глубина h_0 станет равной $h_{кр}$.

Отсюда следует: критическим уклоном $i_{кр}$ называется уклон, при котором нормальная глубина равна критической.

Выражение для критического уклона $i_{кр}$ можно получить, решив совместно уравнение (10.13) и (10.22), принимая $h_0=h_{кр}$.

$$i_{кр} = \frac{\omega_{кр} g}{\alpha C_{кр}^2 R_{кр} B_{кр}} \quad \text{или} \quad i_{кр} = \frac{g \chi_{кр}}{\alpha C_{кр}^2 B_{кр}}. \quad (10.23)$$

10.6. Гидравлический прыжок

На рис. 10.7 показан фрагмент графика (рис. 10.5), а именно кривая изменения удельной энергии сечения потока от его глубины. Рас-

смотрим движение потока в русле с нулевым уклоном. В соответствии с (10.16) и (10.17) при нулевом уклоне в случае, если плоскость сравнения взята на дне потока, понятия удельной энергии сечения потока $\mathcal{E}$ с удельной энергией потока E совпадают.

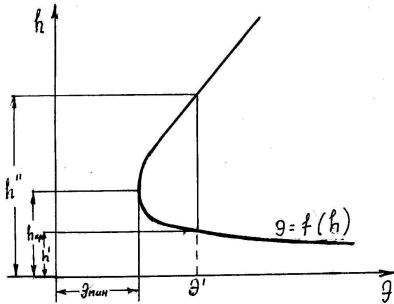


Рис. 10.7. График $\mathcal{E}=f(h)$

Возьмем на оси абсцисс произвольное значение глубины потока h' меньше, чем критическая глубина $h_{кр}$. Этому значению будет соответствовать удельная энергия $\mathcal{E}'$. Очевидно, что при глубине h' поток находится в бурном состоянии. Из графика следует, что при том же значении $\mathcal{E}'$ возможен переход бурного состояния потока в спокойное при глубине h'' . При этом удельная энергия потока сначала уменьшается до минимальной, а затем

повышается. Такое изменение энергии в данных условиях физически невозможно. Остается предположить, что переход из одного состояния потока в другой произойдет скачкообразно, что мы и наблюдаем в природе (рис. 10.8). Это явление носит название гидравлического прыжка.

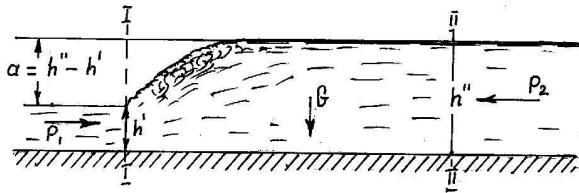


Рис. 10.8. Гидравлический совершенный прыжок

Скачкообразный переход потока из бурного состояния в спокойное при соответствующем изменении глубин потока называется гидравлическим прыжком.

В гидротехнической практике приходится решать задачи сопряжения бурного потока со спокойным, например при переливе потока через бетонную плотину, при истечении из-под щита, при изменении уклона дна с $i > i_{кр}$ на уклон $i < i_{кр}$. Решение этих задач связано с необ-

ходимостью гашения большой кинетической энергии, которая имеет место в бурном потоке, в целях предотвращения размыва дна русла. В конечном счете задача сводится к максимальному сокращению длины переходного участка, на котором происходит преобразование бурного потока в спокойный.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое плавно изменяющееся движение жидкости?
2. Дать определение открытым руслам и как они классифицируются?
3. Какое выражение можно принять за дифференциальное уравнение установившегося движения?
4. Что из себя представляет параметр кинетичности потока Π_k ?
5. Что из себя представляет число Фруда Fr ?
6. Какое уравнение отражает характер изменения глубин потока по его длине в открытом призматическом русле?
7. Какой вид имеет уравнение равномерного движения жидкости в открытом русле?
8. Что такое удельная энергия потока?
9. Какой физический смысл уравнения, отражающего характер изменения удельной энергии по длине потока $\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\ell}\right)$?
10. Что из себя представляет график изменения удельной энергии сечения потока в зависимости от изменения глубин $\mathcal{E}=f(h)$?
11. Что из себя представляет уравнение критического состояния потока?
12. Что такое критический уклон и как он выражается?
13. Какова физическая сущность гидравлического прыжка.

11. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

Гидравлические расчеты потоков жидкости при их равномерном движении в открытых руслах, главным образом в каналах или лотках являются наиболее распространенными в инженерной практике. Как уже отмечалось выше, при равномерном движении в открытом русле давление на свободной поверхности потока по длине остается постоянным так же, как и значение скоростного напора. Следовательно, гидравлический, пьезометрический и геодезический уклоны будут равны между собой, т.е. $I_z = I_n = i$.

Приведенные ранее зависимости (10.12) – (10.13) являются основными расчетными формулами в случае равномерного движения жидкости в открытых руслах. Формула $K_0 = \omega_0 c_0 \sqrt{R_0}$ выражает расходную характеристику при равномерном движении.

11.1. Гидравлически наивыгоднейшее сечение

Различные формы поперечного сечения искусственных русел (каналов и лотков) приведены на рисунке 10.1. Могут быть и другие формы поперечного сечения.

Площади всех форм поперечного сечения за исключением полукруга зависят от нескольких величин. Так площадь трапеции зависит от ширины по низу b , высоты (глубины потока) h , заложения откоса m ; площадь параболического русла – от параметра параболы p и глубины h ; площадь прямоугольного русла от ширины b и глубины h ; сегмента с центральным углом φ от φ и r и т.п. Полукруг определяется только радиусом r .

Следовательно, варьируя факторами, от которых зависит площадь живого сечения той или иной формы, можно получить множество вариантов заданной площади с определенными значениями смоченного периметра χ и гидравлического радиуса R . Если среди этих вариантов выбрать такой, у которого смоченный периметр будет наименьшим, то в этом случае будет наибольшим гидравлический радиус. Следовательно, в соответствии с формулой Шези (7.35), такое сечение будет обладать наибольшей пропускной способностью.

Поперечный профиль потока, являющийся его живым сечением, имеющий наибольший гидравлический радиус, или пропускающий за-

данный расход при наименьшей площади живого сечения, называется гидравлически наивыгоднейшим профилем.

В случае если одним из геометрических элементов русла задан, например, глубина h , то для других элементов уже не остается вариантов. Очевидно, что в этом случае гидравлический радиус будет меньше или же равен гидравлически наивыгоднейшему гидравлическому радиусу ($R \leq R_{г.н.}$).

11.2. Допустимые скорости течения воды в каналах

При гидравлических расчетах большое внимание должно уделяться скоростям потока, которые имеют ограничения для данного конкретного русла. Верхний предел скорости ограничивается её размывающей способностью, т.е. максимально возможной скоростью, при которой не будет происходить размыв русла. Верхняя граница допустимых скоростей $v_{\max}$ зависит от характера материала ложа канала, и способности его противостоять размыву.

Нижняя же граница представляет собой минимальные скорости, при которых не происходит заиления русла (отложения наносов). Очевидно, что эти скорости v зависят в основном от характера взвешенных в воде наносов.

Для каналов в условиях несвязных грунтов (песчаных, галечно-песчаных, гравелистых и т.п.) величину $v_{\max}$ можно определить по формуле И.И. Леви

$$v_{\max} = A \sqrt{g D_{\text{cp}}} \cdot \lg \frac{R}{7 D_{\text{cp}}}, \quad (11.1)$$

где D_{cp} – средняя крупность зерен грунта русла каналов, м; A – коэффициент, зависящий от уплотненности грунта русла канала (величина этого коэффициента может приниматься равной 3,2 для хорошо уплотненных грунтов и 2,8 для грунтов с более рыхлой структурой).

Формула Леви применяется при $50 \leq \frac{R}{D_{\text{cp}}} \leq 5000$.

В таблице 11.1. приведены максимально допустимые скорости для каналов, русла которых проходят в связанных грунтах.

Таблица 11.1.

Предельно допускаемая на размыв скорость $v_{\max}$ для русел
в связанных грунтах

Наименование грунтов	Гидравлический радиус R , м	$v_{\max}$, м/сек	Примечание
Супесь слабая, пылеватый песок	1 – 3	0.7 – 0.8	При $R > 3$ м скорости могут быть увеличены в отношении $(R/3)^{0.1}$
Супесь уплотненная	1 – 3	1.0	
Суглинки легкие (в том числе лессовидные)	1 – 3	0.7 – 0.8	
Суглинки средние	1 – 3	1.0	
Суглинки плотные	1 – 3	1.1 – 1.2	
Глины мягкие	1 – 3	0.7	
Глины нормальные	1 – 3	1.2 – 1.4	
Глины плотные	1 – 3	1.5 – 1.8	
Глинистые грунты	1 – 3	0.5 – 0.6	

Для определения незаилающих скоростей можно использовать формулы Е.А. Замарина описывающие эмпирическую зависимость транспортирующей способности потока ρ , кг/м³ от гидравлических характеристик потока v , R , i и средней крупности наносов w , м/с. Гидравлической крупностью наносов называется скорость падения частиц наносов в неподвижной воде:

а) когда $0.004 < w < 0.002$, м/с

$$\rho = 11v \sqrt{\frac{v}{w}} \sqrt{R_i}, \text{ кг/м}^3;$$

б) когда $0.002 < w < 0.008$, м/с (11.2.)

$$\rho = 0.022 \left(\frac{v}{w} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{R_i}, \text{ кг/м}^3.$$

Из сказанного следует, что средняя скорость потока в каналах должна находиться в интервале между допустимыми скоростями на заиливание, с одной стороны и на размыв – с другой, т.е. $v_{\max} > v > v_{\text{нез}}$.

11.3. Гидравлические расчеты равномерного движения жидкости в руслах произвольной формы

Гидравлические расчеты открытых русел при равномерном движении сводятся к решению уравнения $Q = \omega C \sqrt{R_i}$ относительно одной из входящих в его состав величин при заданных значениях остальных. Если, например, задано русло произвольной формы, это уравнение позволяет подстановкой всех элементов правой части непосредственно находить значение Q ; ω и χ при этом определяются графическим способом.

Если же задан расход Q , а расчету подлежит одна из величин, входящая в правую часть уравнения, то прямого решения уже не будет. В таком случае расчет производится методом подбора.

Наиболее часто встречающейся задачей для русел произвольной формы является определение нормальной глубины h_0 при заданных расходе Q , уклоне i и геометрии живого сечения.

Для решения поставленной задачи задаются любой произвольно выбранной глубиной h_1 ; и последовательно вычисляют площадь живого сечения ω_1 , смоченный периметр χ_1 , гидравлический радиус R_1 . Расчеты ведутся в предположении, что требуемому расходу Q будет соответствовать квадратичная зона сопротивлений. Для этих условий определяется коэффициент Шези C_1 .

Подставив найденные величины в уравнение расхода, найдем:

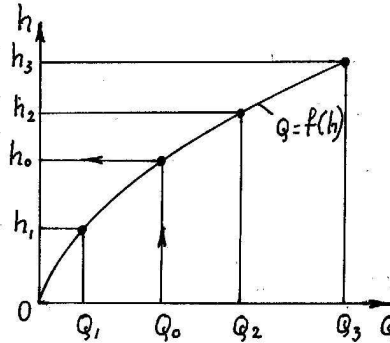
$$Q_1 = \omega_1 C_1 \sqrt{R_1 i}. \quad (11.3.)$$

Затем задаемся другим значением глубины h_2 и так до тех пор, пока найденные значения расхода Q_i не будут близко подходить к заданному.

Определение нормальной глубины может быть облегчено построением графика $Q = f(h)$. Для этого по оси ординат откладываем h_i , а по оси абсцисс – расходы, вычисляемые по формуле:

$$Q_i = \omega_i C_i \sqrt{R_i i} \quad (11.4.)$$

Искомая нормальная глубина при этом может быть легко снята с графика (рис. 11.1).

Рис. 11.1. График $Q=f(h)$

Вопросы для самопроверки

1. Почему при равномерном движении жидкости в открытом русле гидравлический, пьезометрический и геодезический уклоны равны между собой?
2. Что такое гидравлически наивыгоднейшее сечение открытого русла?
3. Как определяется максимально допустимая скорость потока в открытом русле?
4. Как определяется незаиляющая скорость потока в открытом русле?
5. В чем заключается сущность гидравлического расчета открытых русел при равномерном движении жидкости?
6. Как определяется нормальная глубина потока в открытых руслах?

12. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

Истечение жидкости через отверстия и насадки относится к виду движения жидкости, которое определяется в основном только местным сопротивлением. Этот вид движения на практике встречается при опорожнении сосудов, цистерн, резервуаров, водохранилищ, где суть гидравлических расчетов сводится к определению времени их опорожнения или наполнения; в подземных выработках, донных отверстиях плотин и пр., где гидравлическими расчетами устанавливаются количественные параметры потоков.

12.1. Истечение жидкости через малое отверстие с тонкой стенкой

На рисунке 12.1. показано истечение жидкости через малое отверстие в вертикальной тонкой стенке.

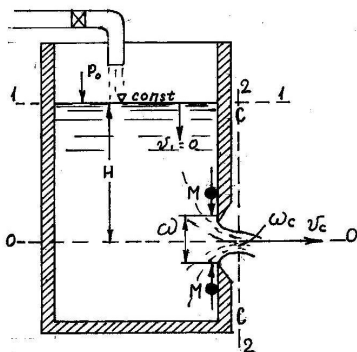


Рис. 12.1. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке

Под *малым отверстием* понимается отверстие, в котором напоры и скорости по сечению принимаются одинаковыми и равными скорости и напору в центре сечения.

Под *тонкой стенкой* понимается стенка с острой кромкой, как показано на рисунке, не влияющей на форму струи, вытекающей из отверстия.

Струя жидкости на выходе из отверстия резко сжимается до сечения C – C. Такое сжатие обусловливается инерцией частиц жидкости, движущихся при подходе к отверстию по криволинейным траекториям (частица M на рис 12.1). Это сечение C – C называется *сжатым сечением*.

В этом сечении линии тока параллельны между собой и потому к нему применимо уравнение Д. Бернулли.

Согласно имеющимся опытам расстояние от внутренней поверхности стенки до сжатого сечения составляет примерно $0.5d$, где d – диаметр отверстия.

Учитывая, что площадь поперечного сечения малого отверстия составляет ω , а сжатого – ω_c , введем понятие коэффициента сжатия струи ϵ .

$$\epsilon = \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (12.1)$$

Различают следующие типы сжатия струи:

1. *Совершенное сжатие* – это сжатие струи, обусловленное отверстием, расположенным достаточно далеко от боковых стенок и дна сосуда (рис. 12.2), когда расстояния m и n удовлетворяют следующим условиям: $m > 3a$; $n > 3a$; (a – длина стороны квадратного отверстия; m – расстояние отверстия от боковой стенки; n – расстояние отверстия от дна сосуда).

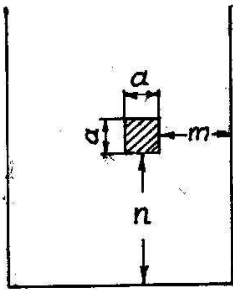


Рис. 12.2. Полное сжатие струи.

Для рассматриваемого случая величина коэффициента сжатия струи ϵ совершенно не зависит от размеров m и n и составляет 0,63 – 0,64.

2. *Несовершенное сжатие* – это сжатие струи, вытекающей из отверстия, расположенного близко к боковой стенке или дну сосуда, что обуславливает влияние последних на величину сжатия струи. Притом чем меньше размеры m и n , тем меньше сжатие струи и, следовательно, больше величина ϵ .

Описанные типы сжатия струи

относятся к полному сжатию.

3. *Неполное сжатие* – это сжатие струи, получаемое в случае, когда m или n , или же оба размера равны нулю (рис.12.3).

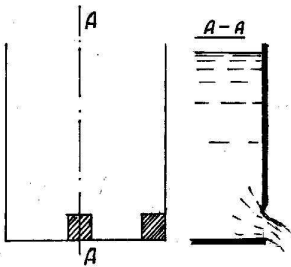


Рис. 12.3. Неполное сжатие струи

В том случае поджатие струи со стороны нулевого расстояния отсутствует и сил инерции частиц жидкости, обуславливающих сжатие струи не будет.

Истечение жидкости через отверстия, равно как и через насадки может происходить как в атмосферу, так и под уровень жидкости (затопленное отверстие или насадки).

12.2. Расчетные формулы истечения жидкости через малое отверстие в тонкой стенке

С помощью уравнения Д. Бернулли, составленных для сечений 1 – 1 и 2 – 2, относительно плоскости сравнения 0 – 0 (рис.12.1) найдем среднюю скорость v_c в сжатом сечении и расход Q , жидкости, вытекающей из резервуара.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{\text{пот}}, \quad (12.2)$$

где $z_1 = H$; $\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g}$; $\frac{\alpha v_1^2}{2g} \approx 0$, так как скорость понижения

уровня в резервуаре настолько мала по сравнению со скоростью вытекающей из отверстия струи жидкости, что ей можно пренебречь;

$z_2 = 0$; $\frac{\alpha v_2^2}{2g} \approx \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_c^2}{2g}$ (α в данном случае можно принять равным

единице); $\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g}$.

Таким образом, величина потерь напора от сечения 1 -1 до сечения 2 – 2 будет равна:

$$h_{\text{пот}} = \xi \frac{v_2^2}{2g}, \quad (12.3)$$

где ξ – коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора от сечения 1 – 1 до сечения 2 – 2.

Учитывая значения членов уравнения Д. Бернулли, уравнение (12.2) примет вид:

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_\alpha}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} + \xi \frac{v_c^2}{2g}, \quad (12.4)$$

где $H + \left(\frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_\alpha}{\rho g} \right) = H_{\text{пр}}$, т.е. является приведенным напором.

Тогда с учетом (12.3):

$$H_{\text{пр}} = (1 + \xi) \frac{v_c^2}{2g}, \quad (12.5)$$

откуда

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} \sqrt{2gH_{\text{пр}}} \quad \text{или} \quad v_c = \varphi \sqrt{2gH_{\text{пр}}} . \quad (12.6)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} . \quad (12.7)$$

Формула (12.7) описывает величину, учитывающую в формуле (12.6) потерю напора и называемую коэффициентом скорости φ .

В частном случае, когда $p_0 = p_a$, т.е. когда сосуд открыт, $H_{\text{пр}} = H$ и формула (12.6) примет вид

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH} . \quad (12.8)$$

Для идеальной жидкости при $\varphi = 1$ $v_c = \sqrt{2gH}$.
(12.9)

Эта формула называется формулой *Торричелли* (1643 г).

Расход Q для случая $p_0 = p_a$ будет равен

$$Q = \omega_c \cdot v_c = \omega \cdot \frac{\omega_c}{\omega} \varphi \sqrt{2gH} = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2gH} , \quad (12.10)$$

или

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH} , \quad (12.11)$$

$$\mu_0 = \varepsilon \varphi . \quad (12.12)$$

В формуле (12.12) коэффициент μ_0 называется коэффициентом расхода отверстия. Этот коэффициент учитывает и потерю напора $h_{\text{пот}}$, и степень сжатия струи, выходящей из отверстия.

Очевидно, что при несовершенном сжатии струи площадь сжатого сечения $\omega_{\text{н.сов}}$ будет больше площади сжатого сечения при истечении жидкости из такого же отверстия, но при совершенном сжатии $\omega_{\text{сов}}$, т.е.: $\omega_{\text{н.сов}} > \omega_{\text{сов}}$.

Коэффициент расхода отверстия $\mu_{\text{несс.}}$ при несовершенном сжатии может быть определен по эмпирической формуле:

$$\mu_{\text{несс.}} \approx (\mu_0)_{\text{сов}} \left(1 + \frac{\tau}{100} \right) , \quad (12.13)$$

где $(\mu_0)_{\text{сов}}$ – коэффициент расхода в случае совершенного сжатия; τ – величина зависящая от отношения (ω/Ω) (так при $\omega/\Omega=0.1$, $\tau \approx 1.5$, а при $\omega/\Omega=0.2$, $\tau \approx 3.5$) Ω – площадь поперечного сечения резервуара, в котором проделано отверстие (рис. 12.1).

Коэффициент μ_0 для случая неполного сжатия может быть вычислен по эмпирической формуле:

$$\mu_{0\text{неп.}} \approx (\mu_0)_{\text{сов.}} \left(1 + 0.4 \frac{P'}{P} \right), \quad (12.14)$$

где P – периметр отверстия; P' – часть периметра отверстия, где струя не испытывает сжатия.

Для случая совершенного сжатия струи, относящегося к круглым и квадратным отверстиям, численные значения коэффициентов μ_0, ξ, φ принимаются соответственно равными 0,62; 0,06 и 0,97.

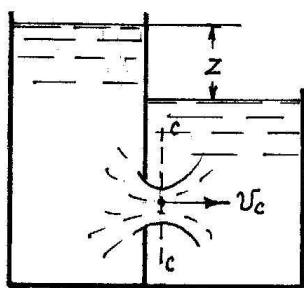


Рис. 12.4. Затопленное отверстие

В случае если истечение жидкости из малого отверстия в тонкой стенке происходит под уровень (случай затопленного отверстия (рис. 12.4), формула расхода имеет тот же вид, что и формула (12.11), только вместо величины H под радикал вводится величина Z – разность уровней жидкости в опорожняемом и приемном сосудах:

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gZ}. \quad (12.15)$$

При этом численное значение μ_0 остается, примерно, таким же, что и при истечении жидкости в атмосферу.

12.3. Истечение жидкости через насадки

Насадком называется короткая трубка, присоединенная к малому отверстию в тонкой стенке. При этом вход в трубку будет иметь острую кромку (рис. 12.5), которая обуславливает наличие, так называемой, “мертвой зоны” или зоны отжима потока от стенок трубки.

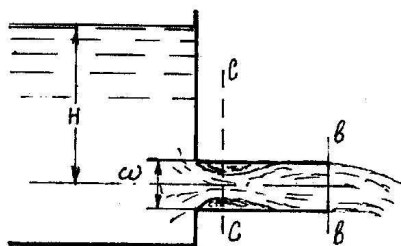


Рис. 12.5. Истечение жидкости через насадок

Жидкость при истечении через насадок заполняет все сечение трубки не сначала, а лишь на некотором расстоянии от выходного отверстия. Воздух в зоне отжима удаляется потоком и в “мертвой зоне” образуется вакуум, способствующий увеличению скорости истечения. С другой стороны в насадке имеют место потери энергии (напора) на расширение струи и преодоление сил трения по длине трубки, что приводит к снижению скоростей движения вытекающей жидкости.

Различают следующие типы насадков (рис. 12.6):

- 1) внешний цилиндрический насадок (насадок Вентури) (см. 1 на чертеже)
- 2) внутренний цилиндрический насадок (насадок Борда) (см. 2)
- 3) конический сходящийся насадок (см. 3)
- 4) конический расходящийся насадок (см. 4)
- 5) коноидальной насадок (см. 5)

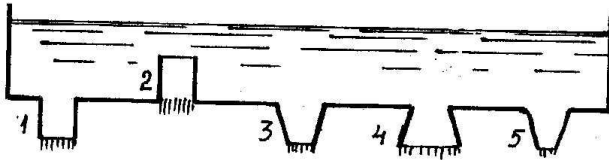


Рис. 12.6. Типы насадков

Истечение жидкости из насадков – это то же самое явление, что и истечение жидкости через отверстия в толстых стенках.

Приведенное в седьмом разделе понятие короткого трубопровода можно в полной мере распространить на насадки, считая при этом, что потери напора в них по длине равны нулю и учету подлежат только местные потери напора h_m .

12.4. Расчетные зависимости для определения основных параметров при истечении жидкости через насадки

Внешний цилиндрический насадок (насадок Вентури). При истечении в атмосферу:

$$v_e = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (12.15)$$

где v_e – скорость в выходном сечении b-b; H – превышение свободной поверхности в сосуде над осью насадка; φ – коэффициент скорости:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + (\xi_{\text{нас}})_a}}, \quad (12.16)$$

где $(\xi_{\text{нас}})_a$ – коэффициент сопротивления при истечении жидкости в атмосферу

$$Q = \mu_n \omega \sqrt{2gH}, \quad (12.17)$$

где μ_n – коэффициент расхода насадка: $\mu_n = \varepsilon_B \varphi = \varphi$, так как в выходном сечении насадка b-b $\varepsilon_B = 1$. (рис. 12.5.)

При истечении под уровень (рис.12.7):

$$v = \varphi \sqrt{2gZ}, \quad Q = \mu_n \omega \sqrt{2gH}, \quad (12.18)$$

где Z – разность уровней жидкости;

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{(\xi_{\text{нас}})_{\text{под.ур.}}}} = \sqrt{\frac{1}{(\xi_{\text{нас}})_a + 1}}, \quad (12.19)$$

μ_n – коэффициент расхода насадка, как и в предыдущем случае ($\mu_n = \varphi$).

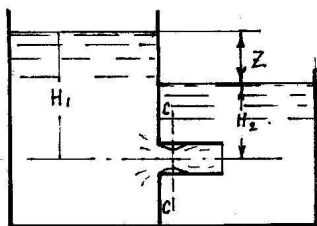


Рис. 12.7. Истечение жидкости через насадку под уровень

Величина вакуума в сечении с – с в случае истечения жидкости в атмосферу равна:

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = (0.75 \div 0.80)H, \text{ а в}$$

случае истечения под уровень:

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = (0.75 \div 0.80)Z - H_2.$$

Внутренний цилиндрический насадок (насадок Борда). Условия входа в этом насадке отличаются от насадка Вентури тем, что сжа-

тие струи в сечении с – с здесь больше и коэффициент сжатия ε составляет: $\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega} = 0.5$.

В этой связи потеря напора, скорость потока и вакуум для насадка Борда будут иметь большие значения, чем для насадка Вентури.

Расчетные формулы, как для этого насадка, так и для других типов остаются такими же, что и для внешнего круглоцилиндрического насадка.

По опытным данным коэффициенты расхода для различных типов насадок имеют следующие значения: для насадка Вентури

$\mu_n \geq 0.82$; для насадки Борда $\mu_n \approx 0.71$; для конического сходящегося насадка $\mu_n = 0.95$; для конического расходящегося - $\mu_n = 0.45$; для коноидального $\mu_n = 0.97$. Следует отметить, что в коническом расходящемся насадке расход жидкости значительно выше, чем в остальных, несмотря на небольшой коэффициент расхода μ . Объясняется это тем, что величина этого коэффициента относится к выходному сечению насадка, где скорость значительно меньше, чем в других выходных сечениях. Коэффициент расхода будет в два с лишним раза больше, если его отнести к входной части конического расходящегося насадка.

12.5. Истечение жидкости через отверстия и насадки при переменном напоре

На практике истечение жидкости из резервуара при переменном напоре имеет место в том случае, если уровень воды в резервуаре повышается или понижается, или же происходит непрерывное повышение или понижение уровня воды в приемном резервуаре, под уровень жидкости, в котором происходит истечение.

На рис.12.8 показан резервуар площадью поперечного сечения Ω , наполненный жидкостью до уровня 1 – 1.

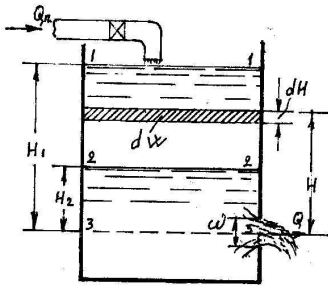


Рис. 12.8. Истечение жидкости через отверстие при переменном напоре

В общем случае $\Omega = f(H)$,

если резервуар не цилиндрический.

Расход жидкости, вытекающей через отверстие или насадок, определяемый по формуле 12.11, так же является функцией H .

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH} = f(H).$$

Расход жидкости, поступающей в резервуар Q_n может изменяться с течением времени t , т.е.

$$Q_n = f(t).$$

Ограничимся частным случаем, когда $Q_n = \text{const}$.

Если $Q_n > Q$, то резервуар будет наполняться и уровень жидкости в нем будет подниматься, до тех пор, пока не наступит равенство $Q_n = Q$. Если же $Q_n < Q$, то уровень жидкости будет опускаться опять же до равенства $Q_n = Q$.

Найдем время t , в течение которого уровень жидкости 1 – 1 опустится до положения 2 – 2 в случае, когда $Q_n < Q$.

За бесконечно малый промежуток времени dt из резервуара вытекает объем жидкости: $Qdt = \mu_0 \omega \sqrt{2gH} dt$.

За этот же промежуток времени dt в резервуар поступает объем жидкости $Q_n dt$.

Изменение объема жидкости в резервуаре (dW) можно представить двумя способами:

$$1) dW = Q_n dt - \mu_0 \omega \sqrt{2gH} dt ; 2) dW = \Omega dH .$$

Приравняв правые части уравнений (12.19), получим:

$$Q_n dt - \mu_0 \omega \sqrt{2gH} dt = \Omega dH \quad \text{или} \quad dt = \frac{\Omega}{Q_n - \mu_0 \omega \sqrt{2gH}} \cdot dH . \quad (12.20)$$

Интегрируя уравнение (12.20) в пределах от H_1 до H_2 получим искомое время:

$$t = \int_{H_1}^{H_2} \frac{\Omega}{Q_n - \mu_0 \omega \sqrt{2gH}} dH = \int_{H_2}^{H_1} \frac{\Omega}{\mu_0 \omega \sqrt{2gH} - Q_n} dH . \quad (12.21)$$

В частном случае для цилиндрического резервуара (при $Q_n = 0$ и $\Omega = const$) зависимость (12.21) примет вид:

$$t = \frac{\Omega}{\mu_0 \omega \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{dH}{\sqrt{H}} = 2 \frac{\Omega}{\mu_0 \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) . \quad (12.22)$$

Время полного опорожнения резервуара t_0 в этом случае будет, если в (12.22) подставим $H_2 = 0$:

$$t_0 = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu_0 \omega \sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu_0 \omega \sqrt{2gH_1}} = 2 \frac{\Omega H_1}{Q_1} = 2t' , \quad (12.23)$$

где Q_1 – расход жидкости при H_1 ; t' – время полного опорожнения резервуара, если предположить, что из резервуара в течение всего времени вытекает постоянный расход жидкости, равный Q_1 .

При рассмотрении истечения жидкости не в атмосферу, а под уровень (рис. 12.9) расчетные формулы те же, что и при истечении жидкости в атмосферу; однако в этом случае под величиной H следует понимать разность Z уровней жидкости в сосудах.

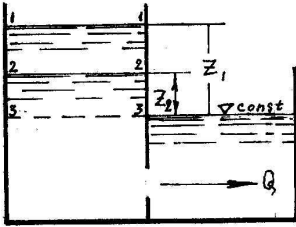


Рис. 12.9. Истечение жидкости под уровень при переменном напоре

Вопросы для самопроверки

1. Каковы особенности истечения жидкости через отверстия и насадки, как вида движения жидкости?
2. Что понимается под малым отверстием?
3. Что понимается под тонкой стенкой?
4. Что такое коэффициент сжатия струи?
5. Что понимается под совершенным, несовершенным, полным и неполным сжатием струи?
6. Каким образом получают расчетные формулы истечения жидкости через малое отверстие?
7. Что такое коэффициент расхода отверстия?
8. Каковы особенности истечения жидкости через насадки?
9. Чем объясняется уменьшение времени опорожнения резервуара через цилиндрический внешний насадок по отношению к времени его опорожнения через малое отверстие такого же диаметра, что и насадок?
10. Какие типы насадок существуют и каковы их гидравлические характеристики?
11. Каковы особенности гидравлического расчета истечения жидкости через отверстия и насадки при переменном напоре?

13. ВОДОСЛИВЫ

Открытая преграда на пути потока, через которую происходит перелив воды называется *водосливом*, а гидравлическое явление перелива воды через него – *истечением через водослив*.

Область потока перед преградой называется *верхним бьефом*, а за преградой – *нижним бьефом*.

Участок, на котором происходит истечение через водослив, называется порогом или гребнем водослива.

13.1. Классификация водосливов

Характерными параметрами водослива являются (рис. 13.1): b – ширина водослива, измеряемая по длине водосливного фронта; S – ширина порога (толщина гребня), измеряемая по ходу потока; $P_{вб}$ и $P_{нб}$ – высота порога соответственно со стороны верхнего и нижнего бьефов; H – напор на водосливе, измеряемый в верхнем бьефе за пределами спада струи потока.

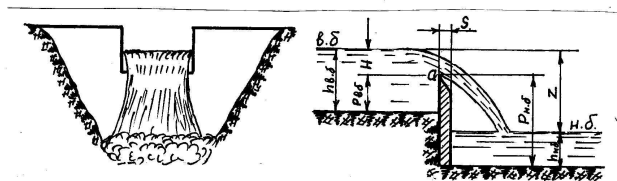


Рис.13.1. Схема водослива

Практически установлено, что расстояние, на котором влияние спада не сказывается на глубину в верхнем бьефе равно $(3-4)H$; напор H отсчитывается по рейке, нуль которой совмещен с уровнем гребня водослива; Z – разность отметок уровней воды в верхнем и нижнем бьефах; α – форма гребня (порога) или так называемый профиль водослива.

Последний параметр – форма гребня (порога) или профиль водослива положен в основу их классификации. По этому признаку различают следующие водосливы:

1. *Водослив с тонкой стенкой*, когда толщина стенки (ребра) не влияет на форму переливающейся струи. Толщина стенки в таком водосливе должна быть $S \leq 0.67H$ (рис. 13.1)

2. Водослив практического профиля прямолинейного очертания с шириной порога $0.67 < \frac{S}{H} < 2$ (рис. 13.2).

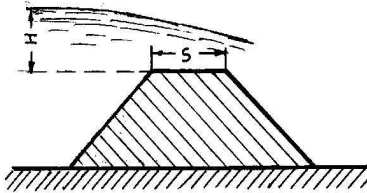


Рис 13.2. Водослив практического профиля прямолинейного очертания

3. Водослив с широким порогом, когда ширина порога (толщина стенки) S такова, что поток жидкости на самом пороге может приобретать характер параллельно-струйного потока (рис. 13.3).

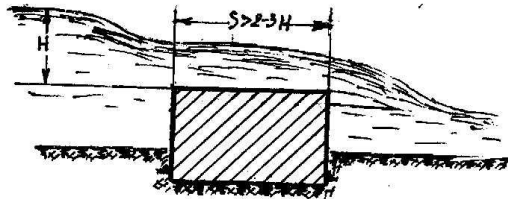


Рис. 13.3. Водослив с широким порогом

4. Водослив практического профиля криволинейного очертания, в котором низовая грань имеет очертание свободно падающей струи (рис. 13.4).

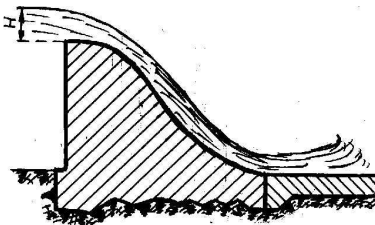


Рис. 13.4. Водослив практического профиля криволинейного очертания

Каждый из выделенных типов водосливов в свою очередь может быть подразделен по некоторым общим признакам следующим образом (рис. 13.5):

а) по расположению порога в плане: прямые водосливы, расположенные нормально к оси потока (рис. 13.5а); косые (рис. 13.5б); боковые, расположенные параллельно оси потока (рис. 13.5в) и криволинейные (рис. 13.5г);

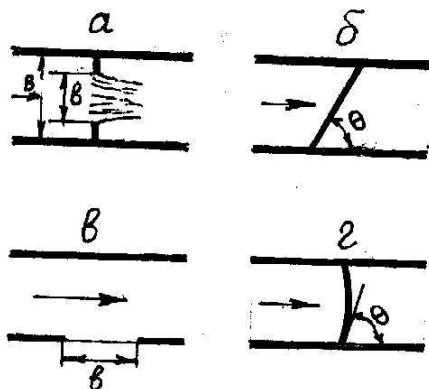


Рис. 13.5. Водосливы с различным расположением порога в плане
(а – прямой с боковым сжатием,
б – косой, в – боковой, г – криволинейный)

б) по условиям подхода потока к водосливу: водосливы без бокового сжатия потока, когда ширина прямоугольного водослива равна ширине подводящего канала; водосливы с боковым сжатием, когда ширина водослива меньше ширины русла;

в) по типу сопряжения струи, переливающейся через водослив, с нижним бьефом: водосливы неподтопленные, у которых уровень нижнего бьефа не влияет на расход водослива (рис. 13.1); водосливы подтопленные, у которых уровень нижнего бьефа влияет на расход водослива (рис. 13.3).

Водосливы широко применяются в гидротехническом строительстве, а также в качестве водомеров для замеров расходов воды в открытых водотоках.

В практике гидрогеологических и гидротехнических изысканий большое распространение получили переносные водосливы с тонкой стенкой, изготовленные из листового железа, с водосливными отверстиями различной геометрической формы (рис. 13.6): а) прямоугольные, б) трапециевидные, в) треугольные, г) круговые, д) параболические, е) пропорциональные.

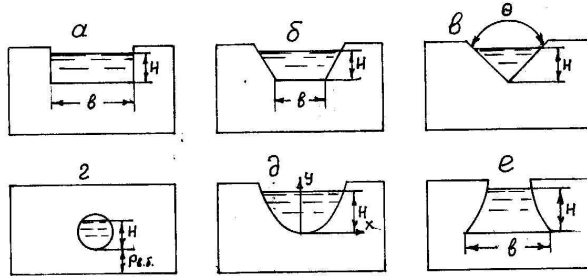


Рис. 13.6. Водосливы с тонкой стенкой

13.2. Расчетные формулы для некоторых водосливов

Прямоугольные водосливы (рис. 13.6а). Расход струи жидкости, переливающейся через водослив, выражается формулой:

$$Q = mbH\sqrt{2gH}, \quad (13.1)$$

где $bH=\omega$ – площадь живого сечения струи жидкости, переливающейся через водосливную стенку; $\sqrt{2gH} = v$ – скорость в сечении ω ; m – коэффициент пропорциональности.

Формулу (13.1) можно переписать следующим образом:

$$Q = mb\sqrt{2gH}^{3/2}. \quad (13.2)$$

Коэффициент пропорциональности m для водослива (без бокового сжатия) находится по формуле Базена:

$$m = \left(0.405 + \frac{0.0027}{H} \right) \left[1 + 0.55 \frac{H^2}{(H + P_{в.б.})^2} \right]. \quad (13.3)$$

Для водослива с боковым сжатием при ширине русла подводящего лотка $B_{л}$ коэффициент m определяется по формуле Базена-Эгли:

$$m = \left(0.405 + \frac{0.0027}{H} - 0.03 \frac{B_{л} - b}{B_{л}} \right) \left[1 + 0.55 \frac{b^2}{B_{л}^2} \frac{H^2}{(H + P_{в.б.})^2} \right]. \quad (13.4)$$

Для прямоугольного затопленного водослива расход переливающейся струи определяется по формуле:

$$Q = m\sigma_3 H\sqrt{2gH}, \quad (13.5)$$

где σ_3 – коэффициент затопления, который вычисляется по формуле:

$$\sigma_3 = 1.05 \left(1 + 0.2 \frac{H - Z}{P_{н.б.}} \right) \sqrt[3]{\frac{Z}{H}}. \quad (13.6)$$

Прямоугольные водосливы и приведенные расчетные формулы применяются при:

$$b = 0.2 - 2.0 \text{ м}; P_{в.б.} = 0.24 - 1.13 \text{ м}; H = 0.05 - 1.24 \text{ м}.$$

Трапецидальные водосливы. Для водослива Чиполетти, имеющего равнобедренный трапецидальный вырез с откосами боковых наклонных стенок 1:25 (рис. 13.6б) расход воды, протекающий через него, определяется по формуле:

$$Q = 1.86b \cdot H \sqrt{H} = 1.86bH^{\frac{3}{2}}. \quad (13.7)$$

Водослив Чиполетти применяется при $\frac{b}{H} > 3 \div 4$; $b = 0.2 \div 1.5 \text{ м}$.

Для водослива А.И.Иванова с откосами боковых стенок равнобедренного трапецидального выреза 1:1 расход воды при свободном истечении потока через водослив определяется по формулам:

$$Q = 1.86 \frac{b+H}{b+0.25H} bH\sqrt{H} \quad \text{при } Q < 0.6 \text{ м}^3/\text{с}. \quad (13.8)$$

$$Q = 1.9 \frac{b+H}{b+0.25H} bH\sqrt{H} \quad \text{при } Q > 0.6 \text{ м}^3/\text{с}. \quad (13.9)$$

Для затопленного истечения, которое допускается не больше $\frac{h_{н.б.}}{H} \leq 0.80$ ($h_{н.б.}$ – высота затопления нижнего бьефа над порогом), расход воды через водослив А.И.Иванова $Q_{зат.}$ определяется:

$$Q_{зат.} = Q - q, \quad (13.10)$$

где Q определяется по формулам (13.8) и (13.9); q определяется по формуле:

$$q = 0.67bh_{н.б.}^{1.585}. \quad (13.11)$$

Водослив А.И.Иванова применяется при $\frac{b}{H} = 3 \div 4$; $b = 0.25 \div 4.0 \text{ м}$.

Треугольные водосливы (рис. 13.6в) устраиваются с углами разворота боковых стенок – кромок треугольного выреза α от 20° до 120° , в зависимости от точности измерения расходов воды по напору и диапазон измерения. Чаще других применяются водосливы с углом 90° (водосливы Томсона).

Общая формула для определения расхода воды через треугольный водослив имеет вид:

$$Q = \frac{8}{15} \mu \sqrt{2g} H^{\frac{5}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (13.12)$$

где $\mu = 0.58 \div 0.59$.

При $\alpha = 90^\circ$ – $Q = 1.4H^{\frac{5}{2}}$.

Треугольные водосливы применяются при $H \leq 0.5$ м для $\alpha = 20^\circ$; при $H = 0.6 \div 1.0$ м для остальных α .

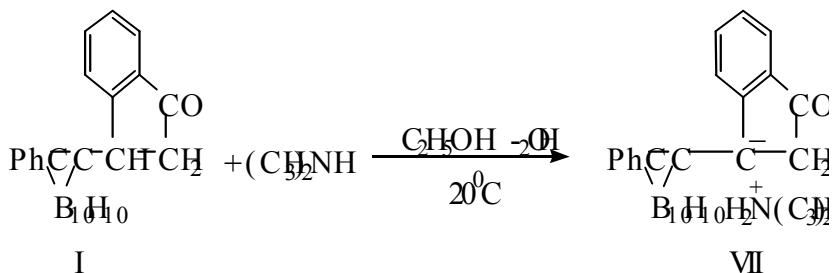
Вопросы для самопроверки

1. Что такое водослив?
2. Что такое верхний и нижний бьефы?
3. Как классифицируются водосливы по форме гребня или профилю?
4. Как классифицируются водосливы по условиям подхода потока к ним?
5. Что из себя представляют водосливы с тонкой стенкой и как практически они используются?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

1. *Агроскин И.И., Дмитриев Г.Т., Пикалов Ф.М.* Гидравлика.-М.: Госэнергоиздат, 1964.-352 с.
2. *Альтикуль А.Д.* Гидравлические сопротивления. – 2-е изд.-М.: Недра, 1982.-223 с.
3. *Альтикуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П.* Гидравлика и аэродинамика.-М.: Стройиздат, 1987.- 414 с.
4. *Альтикуль А.Д., Киселев П.Г.* Гидравлика и аэродинамика.-М.: Стройиздат, 1975.-328 с.
5. *Байбаков О.В., Зесовер О.И.* Гидравлика и насосы.- М.: Госэнергоиздат, 1957.-240 с.
6. *Барабашук В.И.* Планирование эксперимента в технике.-К.: Техника, 1984.- 200с.
7. *Бобровский С.А., Соколовский С.М.* Гидравлика, насосы и компрессоры. – М.: Недра, 1972.-296 с.
8. *Большаков В.А., Попов В.Н.* Гидравлика, общий курс.- К: Высшая школа, 1989. 213 с.
9. *Вакина В.В., Денисенко И.Д., Столяров А.Л.* Машиностроительная гидравлика: Примеры расчетов.- К.: Высшая школа, 1987. 206 с.
10. *Васильченко В.А.* Гидравлическое оборудование мобильных машин : Справочник.-М.: Машиностроение, 1983. 301 с.
11. *Вилькер Д.С.* Лабораторный практикум по гидромеханике.- М.: Физматгиз, 1959.- 352 с.
12. *Гипсон А.* Гидравлика и ее приложение. Пер. с англ. М.: Госэнергоиздат, 1934. 605 с.
13. *Гиргидов А.Д.* Техническая механика жидкости и газа (одномерная задача). –Л: ЛПИ, 1985. 78 с.
14. *Гулак И.А.* Задачи по гидравлике. М.: Недра, 1972. 128 с.
15. *Емцев В.Т.* Техническая гидромеханика.-2-е изд. М.: Машиностроение, 1987. 440 с.
16. *Есьман И.Г.* Гидравлика.- Баку : Азнефтеиздат, 1952. 332 с.
17. *Избаш С.В.* Основы гидравлики.-М.: Госстройиздат, 1952. 423 с.
18. *Киселев П.Г.* Гидравлика (Основы механики жидкости). М.: Стройиздат, 1980. 301 с.
19. *Константинов Ю.М.* Гидравлика.-2-е изд.-К.: Высшая школа, 1968. 398 с.
20. *Константинов Ю.М., Петров Н.А., Высоцкий Л.И.* Гидравлика, гидрология, гидрометрия (часть I). М: Высшая школа, 1987. 301 с.

21. *Леви И.И.* Моделирование гидравлических явлений.-2-е изд. М: Л, 1984.
22. *Лойцинский Л.Г.* Механика жидкостей и газа.-5-е изд. М: Наука, 1978. 736 с.
23. *Лучшева А.А.* Основы гидравлики и гидрометрии. –2-е изд. М.: Недра, 1989. 168 с.
24. *Ляхтер В.М., Прудовский А.М.* Гидравлическое моделирование.-М.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
25. *Рабинович Е.З.* Гидравлика. М.: Недра, 1977. и304 с.
26. *Рейнольдс А.Д.* Турбулентные течения в инженерных приложениях /Пер.с англ. М.: Энергия, 1979. 405 с.
27. *Смыслов В.В.* Гидравлика и аэродинамика.-К.: Высшая школа, 1979. 334 с.
28. Справочник по гидравлике. Под редакцией В.А.Большакова.-К.: Высшая школа, 1977. 598 с.
29. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика – 4-е изд.-М: Л: Энергоиздат, 1982. 671 с.
30. *Штеренлихт Д.В.* Гидравлика.-М.: Энергоатомиздат, 1984. 638 с.



СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ	7
1.1. Определение жидкости	7
1.2. Плотность и удельный вес жидкости	8
1.3. Сжимаемость жидкости	8
1.4. Температурное расширение жидкости	9
1.5. Вязкость жидкости	10
1.6. Сцепление, смачиваемость, поверхностное натяжение, капиллярность	12
1.7. Кипение и кавитация жидкости	13
Вопросы для самопроверки	
2. ГИДРОСТАТИКА	15
2.1. Гидростатическое давление и его свойства	15
2.2. Основные уравнения гидростатики	17
2.3. Закон Паскаля	20
2.4. Некоторые понятия в гидростатике	20
2.5. Энергетическая интерпретация пьезометрического напора	23
2.6. Гидростатическое давление на плоские поверхности	24
2.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности	27
2.8. Относительное равновесие жидкости	29
2.9. Условия плавания тел	30
Вопросы для самопроверки	32
3. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ	33
3.1. Методы изучения гидродинамики	33
3.2. Линия тока и трубка тока, элементарная струйка, поток жидкости	35
3.3. Основные гидравлические характеристики потока жидкости	37
3.4. Виды движения жидкости	38
3.5. Уравнения неразрывности потока жидкости	39
3.6. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости Л. Эйлера	41
3.7. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки невязкой жидкости	43
3.8. Уравнение Д. Бернулли для струйки вязкой жидкости	47
3.9. Уравнение Д. Бернулли для потока вязкой жидкости	47
3.9.1. Распределение давления в живых сечениях потока	48
3.9.2. Коэффициенты Кориолиса и Буссинеска	48

3.10. Геометрическая и энергетическая интерпретация уравнения Д. Бернулли	51
3.11. Пьезометрический и гидравлический уклоны.	51
Вопросы для самопроверки	52
4. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ	53
4.1. Опыты О. Рейнольдса	53
Вопросы для самопроверки	55
5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ	56
5.1. Природа гидравлических сопротивлений и их виды	56
5.2. Уравнение равномерного движения жидкости	57
Вопросы для самопроверки	59
6. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ	60
6.1. Скорости потока при ламинарном режиме движения жидкости	60
6.2. Потери напора при ламинарном режиме движения	63
Вопросы для самопроверки	64
7. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ	65
7.1. Пульсация скоростей и осредненные скорости при турбулентном режиме движения	65
7.2. Касательные напряжения при турбулентном режиме движения жидкости	67
7.3. Схема турбулентного течения	69
7.4. Распределение скоростей в поперечном сечении турбулентного потока	70
7.5. Понятие о шероховатости. Гидравлически гладкие и шероховатые трубы	71
7.6. Потери напора при турбулентном режиме движения	72
7.6.1. График Никурадзе	72
7.6.2. Эмпирические формулы для определения коэффициентов Дарси при напорном движении жидкости в трубах	74
7.6.3. Формула Шези. Коэффициент Шези	76
Вопросы для самопроверки	78
8. МЕСТНЫЕ ПОТЕРИ НАПОРА	79
8.1. Потери напора при внезапном расширении русла	79
8.2. Потери напора при внезапном сужении русла	82
8.3. Общие потери напора	85
Вопросы для самопроверки	85
9. НАПОРНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ	86
9.1. Классификация трубопроводов	86
9.2. Основные зависимости для расчетов трубопроводов	87
9.3. Гидравлический удар	89

9.4. Гидравлический таран	92
Вопросы для самопроверки	93
10. БЕЗНАПОРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ	94
10.1. Дифференциальное уравнение установившегося движения жидкости	95
10.2. Основные виды установившегося движения жидкости в открытом русле	98
10.3. Удельная энергия сечения потока и изменение удельной энергии по длине потока	99
10.4. Критическая глубина потока	102
10.5. Критический уклон	103
10.6. Гидравлический прыжок	103
Вопросы для самопроверки	105
11. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ	106
11.1. Гидравлически наивыгоднейшее сечение	106
11.2. Допустимые скорости течения воды в каналах	107
11.3. Гидравлические расчеты равномерного движения жидкости в руслах произвольной формы	109
Вопросы для самопроверки	110
12. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ	111
12.1. Истечение жидкости через малое отверстие с тонкой стенкой	111
12.2. Расчетные формулы истечения жидкости через малое отверстие в тонкой стенке	113
12.3. Истечение жидкости через насадки	115
12.4. Расчетные зависимости для определения основных параметров при истечении жидкости через насадки	116
12.5. Истечение жидкости через отверстия и насадки при переменном напоре	118
Вопросы для самопроверки	120
13. ВОДОСЛИВЫ	121
13.1. Классификация водосливов	121
13.2. Расчетные формулы для некоторых водосливов	124
Вопросы для самопроверки	126
БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ	127

Учебное издание

Гаврилов Михаил Борисович

ГИДРАВЛИКА

Учебное пособие

Гл. редактор (зав. РИО)
Редактор
Техн. редактор
Корректор
Компьютерный набор
и верстка

*З.А. Губайдулина
Ж.А. Нурмаганбетова
Н.Н. Передереева
А.Г. Бегимбекова
А.Н. Оразалиева*

Подписано в печать

Тираж 500 экз. Формат 60 х 84 1/16. Бумага типогр. № 1.

Объем 8,2 уч.- изд. л. Заказ №..... Цена договорная.

Издание Казахского национального технического
университета им. К.И. Сатпаева

Издательский центр КазНТУ, Алматы, Ладыгина, 32