ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті

О. С. Сатыбалдиев
З. И. Сулейменов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫ

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі
оқулық ретінде ұсынған

Алматы 2016

ӘОЖ 51 (075)
КБЖ 22.1 я73
С 23

Пікір жазғандар:
С.Т. Мұхамбетжанов – ф.-м.ғ.д., профессор (Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ);
А. Нұғысова – п.ғ.д., профессор (І. Жансүгіров атындағы ЖМУ);
Қ.К. Көксалов – ф.-м.ғ.д., профессор (Абай атындағы ҚазҰПУ);
Б.М. Искаков – ф.-м.ғ.д., профессор (Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ).

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі оқулық ретінде ұсынған.

Сатыбалдиев О.С.

С 23 Жоғары математика курсы: Оқулық / *О. С. Сатыбалдиев, З. И. Сулейменов.* – Алматы: ҚазҰТЗУ, 2016. – 474 б. Сурет – 110. Кесте – 4. Библиогр. – 15 атау

ISBN 978–601–228–941–1

Оқулық техникалық жоғары оқу орындарында оқылатын «Математика - I, II, III» курстарының типтік оқу бағдарламаларына сәйкес жазылған. Оқулықта теориялық материалдардың дәлелдеулері қысқа, айқын жолдармен берілген. Оқулықтың мазмұнына техникалық мамандықтарға аса қажетті материалдар енген. Теориялық материалдардың практика мәселелеріне қолданылуларына басты назар аударылған.

Оқулық оқытудың кредиттік технология жүйесінің талаптарына сай жазылған және ол техникалық жоғары оқу орындарының мұнай-ісі және металлургия мамандықтарына арналған, сонымен қатар басқа да техникалық мамандықтардың студенттері мен оқытушыларының пайдалануларына болады.

ӘОЖ 51 (075)
КБЖ 22.1 я73

ISBN 978–601–228–941–1 © Сатыбалдиев О.С., Сулейменов З.И., 2016
© ҚазҰТЗУ, 2016

Алғы сөз

Қазіргі уақытта Республикамыз бен бүкіл әлемде болып жатқан саяси, экономикалық және т.б. өзгерістер білім беру жүйесінің жаңа моделін енгізуді талап етіп отыр. Ақпараттық технологияның қарқындап өсуі, оқытудың жаңа заман ағымына сай талаптары мен білім берудің ескі мазмұнының арасындағы қайшылықтар жоғары білім беруді жетілдіруге бағытталған көптеген практикалық тұрғыдағы кешенді мәселелерді айқындап, оларды жүзеге асыруды міндеттейді. Осы мәселелердің негізінде білім беру процесін алынған білім мен дағдының практикалық мәнін, білім берудің жалпы мазмұнын ізгілендіруді күшейту арқылы жетілдіру және жаңғырту, халықаралық білім кеңістігіне енуін қамтамасыз ету, ұлттық білім деңгейін халықаралық стандарт деңгейіне жақындату міндеттері жүзеге асуы тиіс.

Бүгінгі таңда жоғары оқу орындарында оқытудың кредиттік жүйесіне өтуіне байланысты оқу процестерінде өзгерістер жасалуда. Бұрынғы оқу жүйесінде оқу материалының бәрін оқытушының өзі дәрістік, практикалық сабақтарда түсіндіріп беретін болса, ал енді кредиттік технология бойынша негізінен студенттердің өздері оқып, талдап және есеп шығарып үйренеді, ал оқытушылар студенттердің өздері оқып талдауына, игерген теориялық білімін есеп шығаруға қолдануға, тиісті материалдың бәрін өздері игеруіне көмектеседі. Студенттердің оқытушылармен бірге даярлығы шығармашылық ізденіске бағытталған. Дәрістерді өткізу алгоритмі де өзгеруде. Дәріскер тақырыпқа қатысты студенттердің түсінбеген сауалдарына жауап береді, сабақ басталған күннен бастап-ақ қажетті әдебиеттер тізімін ұсынады.

Кредиттік технология жүйесінде оқу процесін ұйымдастырудың негізгі міндеті студенттердің өзіндік жұмыстарының рөлін күшейту және оның нәтижелілігін көтеру.

Оларды іс жүзіне асыру үшін келесі мәселелер өз шешімін табуы тиіс:

- пәнді оқытудың оқу-әдістемелік кешенімен студенттерді қамтамасыз ету;
- студенттерді оқу әдебиеттермен өзіндік жұмыс істей білуге тәрбиелеу;
- студенттерді электрондық оқулықтармен және лекциялармен толық қамтамасыз ету;
- «студент - оқытушы» кері байланысын орнату және оны жүзеге асыру;
- студенттердің өзіндік жұмыстарына қажетті тапсырмаларды іріктеп, бөліп алу;
- сол тапсырмалардың орындалуын уақтылы қадағалау;
- студенттердің тапсырмаларды орындауына консультациялар беру және көмек көрсету;
- студенттерге әрбір сабақтың мақсатын түсіндіру және әрбір өткізген тапсырмалары үшін алған бағаларының не үшін қойылғаны туралы мағлұмат беру;
- студенттердің орындаған өзіндік жұмыстарын уақытылы тексеру, орындалған жұмыстарға кеңес айту және нұсқау беру.

Осындай кредиттік технологияда оқытудың талаптарын жүзеге асыруда студенттерге арналып жазылған оқулықтар, оқу құралдары және оқу-әдістемелік кешендердің атқаратын рөлі зор. Олардың көмегі арқылы студенттер өз бетінше білім алуға үйренеді және олардың бойында алған білімдерін практикаға қолдана білу іскерлігі мен дағдылары қалыптасады. Осындай келелі мәселелердің шешімін табу мақсатында техникалық жоғары оқу орындарының мұнай-ісі және металлургия мамандықтарына арналған, сонымен қатар басқа да техникалық мамандықтардың студенттері мен оқытушыларының пайдалануларына болады.

Беріліп отырған құрылымдағы оқулық кредиттік технология жүйесі бойынша техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне математикалық білім беруде әдістемелік тұрғыдан өте тиімді және кредиттік технологияда оқытудың барлық талаптарын қанағаттандырады.

Оқулық оқытудың кредиттік технология жүйесіне сәйкес мемлекеттік тілде тұңғыш рет жазылып отырғандықтан

кемшіліктері жоқ деп айта алмаймыз. Сол кемшіліктерге сын-ескертпелер айтқан оқырмандар мен мамандарға алдын-ала алғысымызды білдіреміз.

Ұсынылып отырған оқулықтың қолжазбасына пікір жазып, ескертпелер айтқан Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің «Математикалық анализ, алгебра және геометрия» кафедрасының профессоры, физика-математика ғылымдарының докторы Қ.К. Көксаловқа және оқулықты жазу барысында құнды кеңес берген Қазақстан Республикасының еңбек сіңген қайраткері, Нью-Йорк академиясының толық мүшесі, Қазақстан Республикасы инженерлік академиясының академигі, ф.-м.ғ.д., профессор Е.Т.Божановқа, Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ-нің «Математика» кафедрасының доценттері Ә. М. Ибраймқұловқа, Ә.Т.Жүнісовке зор алғысымызды білдіреміз.

Авторлар

1 тарау. СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

1. Анықтауыштар

1.1. Бірінші, екінші, үшінші және *n*-ретті анықтауыштар, оларды есептеу

1-анықтама. Бір жолдан және бір бағаннан тұратын, кез келген нақты бір сан бірінші ретті анықтауыш деп аталады.

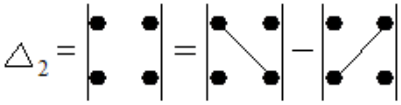
Мысалы a немесе b саны.

2-анықтама. Төмендегі квадраттық кесте түрінде жазылатын және

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

формуласы арқылы есептелінетін сан *екінші ретті анықтауыш* деп аталады. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ сандары (1.1) анықтауыштың *элементтері* деп аталады.

Екінші ретті анықтауышты схемалық түрде былай жазуға болады:



Мысалы, төмендегі екінші ретті анықтауышты есептелік.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7 \cdot$$

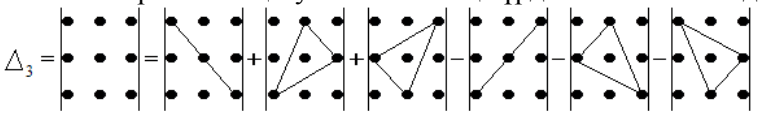
3-анықтама. Төмендегі квадраттық кесте түрінде жазылатын және

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \qquad (1.2)$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

формуласы арқылы есептелінетін сан *үшінші ретті анықтауыш* деп аталады.

Үшінші ретті анықтауыш схемалық түрде былай жазылады:



Мысалы, төмендегі үшінші ретті анықтауышты есептелік.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = 5$$

1-ескерту! Екінші ретті анықтауыш $2^2 = 4$ сандардан құралады және мүшелерінің саны $2!$ болады. Әрбір мүшесі екі элементтің көбейтіндісінен тұрады.

Екінші ретті анықтауышты есептегенде оның мүшелерінің жартысы «плюс» таңбасымен, ал қалған жартысы «минус» таңбасымен алынады.

2-ескерту! Үшінші ретті анықтауыш $3^2 = 9$ сандардан тұрады және оның мүшелерінің саны $3! = 6$ болады. Бұл анықтауышты есептегенде де оның мүшелерінің жартысы «плюс» таңбасымен, ал қалған жартысы «минус» таңбасымен алынады.

3-ескерту! Төртінші ретті анықтауыш $4^2 = 16$ сандардан құралады және оның мүшелерінің саны $4! = 24$ болады. Әрбір мүшесі төрт санның көбейтіндісінен тұрады. Бұл анықтауышты есептегенде де оның жарты мүшесі «плюс» таңбасымен, ал қалған жарты мүшесі «минус» таңбасымен алынады. Төртінші ретті анықтауыш былай жазылады:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \qquad (1.3)$$

4-анықтама. *n* - *ретті анықтауыш* деп *n* жолдан және *n* бағаннан тұратын, n^2 сандардан құралған санды айтады да, былай белгілейді

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.4)$$

Мұндағы a_{ij} элементінің бірінші индексі i - жолдың нөмірін, екінші индекс j - бағанның нөмірін көрсетеді.

1.2. Анықтауыштардың негізгі қасиеттері және оларды есептеу

Анықтауыштың реті өскен сайын оның мүшелерінің саны өте тез өседі: екінші ретті анықтауыштың екі мүшесі, үшінші ретті анықтауыштың 6 мүшесі, төртінші ретті анықтауыштың 24 мүшесі, бесінші ретті анықтауыштың 120 мүшесі бар т.с.с. Сонымен қатар, олардың жарты қосындылары «плюс» таңбасымен, ал жарты қосындылары «минус» таңбасымен алынады. Сондықтан үшінші ретті анықтауыштан реті жоғарғы анықтауыштарды анықтама бойынша есептеу көптеген күрделі мәселелерге алып келеді. Осыған орай, реті кез келген анықтауышты есептеу үшін, алдымен, олардың қасиеттеріне тоқталып және оларға қатысты кейбір теоремаларды қарастырайық.

1°. Нөмірлері сәйкес жолдары мен бағандарын ауыстырғаннан (транспонирланғаннан) анықтауыштың мәні өзгермейді, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

2°. Анықтауыштың кез келген екі жолын (екі бағанын) алмастырғаннан оның таңбасы өзгереді, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

3°. Егер анықтауыштың бір жолының (бір бағанының) барлық элементтерін қандайда бір k санына көбейтсе, онда анықтауыштың мәні осы k санына көбейтіледі, яғни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & ka_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.7)$$

Салдар. Бір жолдың (бір бағанның) барлық элементтеріне ортақ көбейткішті анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

4°. Екі жолы немесе екі бағаны пропорционал анықтауыштың мәні нөлге тең.

5°. Егерде Δ анықтауышының қандайда бір жолының элементтері екі қосындыдан тұрса, онда Δ анықтауышы Δ_1 мен Δ_2 анықтауыштарының қосындысына тең болады. Δ_1 анықтауышында қарастырылып отырған жол бірінші қосылғыштан, ал Δ_2 анықтауышында екінші қосылғыштан тұрады. Δ_1 мен Δ_2 анықтауыштарының қалған жолдары Δ анықтауышының жолдарымен сәйкес келеді. Мысалы, төмендегі үшінші ретті анықтауыш үшін

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

теңдігі орындалады.

6°. Егер анықтауыштың бір жолын (бір бағанын) қандайда бір санға көбейтіп, оған параллель басқа бір жолдың (бағанның) сәйкес элементтеріне қосса, онда анықтауыштың мәні өзгермейді.

Мысалы,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Енді

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n-ретті анықтауышын қарастырайық. Осы анықтауыштың a_{ij} элементі орналасқан i-ші жол мен j-ші бағанды сызалық. Сонда реті $(n-1)$-ге тең Δ_{n-1} анықтауышы Δ_n анықтауышының a_{ij} элементінің ***миноры*** деп аталады да, былай жазылады M_{ij}.

Мысал.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

4-ретті анықтауышының a_{23} элементінің миноры

$$M_{23}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-8-14+1=-21.$$

1-анықтама. Δ_n анықтауышының a_{ij} элементінің *алгебралық толықта-уышы* деп

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

санын айтады.

Мысалы, $A_{13}=M_{13},\ A_{21}=-M_{21}$ және т.б.

1-теорема. Анықтауыштың мәні оның кез келген жолының (бағанының) элементтерін олардың сәйкес алгебралық толықтауыштарына көбейтіп, қосқанға тең.

Басқаша айтқанда, *n* -ші ретті анықтауыш үшін

$$\Delta_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} \qquad (1.8)$$

теңдігі орындалады $(i=1,2,\ldots,n)$.

Теореманың дәлелдеуін жоғары алгебра курсы бойынша жазылған оқу әдебиеттерінен табуға болады. (1.8) теңдік анықтауышты i *-ші жолы бойынша жіктеу* деп те аталады. (1.8) теңдігінің көмегімен *n* -ші ретті анықтауышты есептеу $(n-1)$-ші ретті анықтауыштарды есептеуге келтірі-леді. Ары қарай $(n-1)$-ші ретті анықтауыш $(n-2)$-ретті анықтауыштарды есептеуге келтіріледі т.с.с. Бұл күрделі есептеулерді анықтауыштың қасиеттеріне сүйене отырып ықшамдауға болады.

2-теорема. Анықтауыштың кез келген жолының элементтеріне басқа бір жолдың сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауышын көбейтіп қоссақ, қосындысы нөлге тең болады.

Мысалы,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

үшінші ретті анықтауыш үшін

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0$$

теңдігі орындалады.

Бұл теңдіктің сол жағында екінші жолдың элементтерімен бірінші жолдың элементтерінің алгебралық толықтауыштары көбейтілген қосынды тұр.

3-теорема. Кез келген анықтауыш оның кез келген бағанының элементтерін олардың алгебралық толықтауышына көбейтіп қосқанға тең, яғни

$$\Delta_n = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni}, \qquad (1.9)$$

мұндағы n анықтауыштың реті $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Практикада анықтауыштар (1.8) немесе (1.9) формулаларының көмегі арқылы есептелінеді.

Егер анықтауыштың i-ші жолының бір элементінен басқа (мысалы, a_{ij}) элементтерінің барлығы нөлге тең болса, онда

$$\Delta_n = a_{ij}A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}.$$

теңдігін аламыз.

Осы айтылғандарды мысал арқылы көрсетелік.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

анықтауышын есептелік. Екінші жолдың элементтерін қарастыралық, себебі, бұл жолдың бір элементі, яғни a_{21}, нөлге

тең. Берілген анықтауышты екінші жолдың $a_{24}=1$ элементінен басқа элементтері нөлге тең болатындай етіп түрлендіреміз. Ол үшін алдымен төртінші бағанды екіге көбейтіп, екінші бағанға қосамыз; одан соң төртінші бағанды минус екіге көбейтіп үшінші бағанға қосамыз. Сонда жоғарыдағы Δ_4 анықтауышына тең

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3 & 0\end{vmatrix},$$

анықтауышын аламыз. Соңғы анықтауышты оның екінші жолының элементтері бойынша жіктеп

$$\Delta_3=1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

анықтауышын аламыз. Соңғы анықтауыш үшінші ретті анықтауыш, сондықтан оны жоғарыдағы ереже бойынша есептейміз, яғни

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=0+0+3-0-4-0=-1.$$

1.3. Матрицалар

1.3.1. Матрица ұғымы, оларға сызықты амалдар қолдану және олардың қасиеттері

1-анықтама. *m* жолдан *n* бағаннан тұратын тік бұрышты сандар кестесін *өлшемі* $m\times n$ болатын *матрица* деп атайды. Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.10)$$

түрінде жазылады. Матрицаны құратын $a_{ij}\,(i=1,2,3,\dots,m;\ j=1,2,3,\dots,n)$ сандары матрицаның *элементтері* деп аталады, i саны матрицаның жолының, ал j саны оның бағанының нөмірлерін көрсетеді. Бір жолдың элементтерінен ғана құралған $(a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n})$ матрицаны *жол-матрица* немесе *жол-вектор,* ал бір бағанның элементтерінен құралған $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ матрицаны *баған-матрица* немесе *баған-вектор* дейді.

Егер $m \neq n$ болса, матрица *тік бұрышты*, ал $m=n$ болса, *квадрат-матрица* деп аталады. Матрицаның *бас диагоналының элементтері* деп оның жолдары мен бағандарының нөмірлері тең, яғни $a_{ij}\,(i=j)$ элементтерін айтады. Квадрат матрицаның бас диагоналы $a_{11}, a_{22},\dots,a_{nn}$ элементтерінен тұрады.

2-анықтама. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ және $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

матрицалары *үшбұрышты матрицалар* деп аталады.

3-анықтама. Квадрат матрицаның бас диагоналының элементтерінен басқа элементтері нөлге тең болса, онда ол *диагональ* матрица деп аталады.

4-анықтама. Квадрат матрицаның бас диагоналында орналасқан элемент-тері бірге тең, ал басқа элементтерінің бәрі нөлге тең болса, онда ол *бірлік матрица* деп аталады және ол E әрпімен белгіленеді

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

Барлық элементтері нөлге тең болатын матрица *нөл-матрица* деп аталады да былай белгіленеді

$$0=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}.$$

5-анықтама. Квадрат матрицаның барлық жолдарын сәйкес бағандурымен ауыстырудан шыққан матрицаны *транспозицияланған матрица* дейді.

A матрицасының транспозицияланған матрицасы A^{T} арқылы белгіле-неді.

Мысалы: а) егер $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ болса, онда $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$;

б) егер $A=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ болса, онда $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$. Транспозицияланған матрица үшін $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=A$ теңдігі-нің орындалатындығына көз жеткізу қиын емес.

Жолы мен жолының саны, бағаны мен бағанының саны тең матрицалар *өлшемдері бірдей матрицалар* деп аталады. Өлшемдері бірдей матрицалар-дың сәйкес элементтері өзара тең болса, онда ол матрицалар *өзара тең* деп аталады. Өлшемдері бірдей матрицалар үшін ғана теңдік ұғымы анықталады.

6-анықтама. n өлшемді A және B матрицаларының *қосындысы (айырымы)* деп элементтері бұл матрицалардың сәйкес элементтерінің қосындысынан (айырмасынан) тұратын C матрицасын айтады.

Айталық өлшемдері бірдей $A=(a_{ij})$ және $B=(b_{ij})$ матрицалары берілсін. Бұл матрицалар үшін қосу және азайту амалдары төмендегідей анықталады:

$$A\pm B=C=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \dots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \dots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\pm b_{n1} & a_{n2}\pm b_{n2} & \dots & a_{nn}\pm b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицаларды қосу және азайту амалдары төмендегі қасиеттерге ие болатынына көз жеткізу қиын емес:

а) $A+B=B+A$; б) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

в) $A+0=A$; г) $A+(-A)=0$;

7-анықтама. A матрицасының λ *санына көбейтіндісі* деп

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицасын айтады. Басқаша айтқанда, матрицаны санға көбейту деп оның барлық элементтерін сол санға көбейтуді айтады. Матрицаны санға көбейту амалы мынадай қасиеттерге ие:

1) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$; 2) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

3) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$; 4) $1\cdot A=A$. Мұндағы α мен β сандар.

Матрицаны матрицаға көбейту амалы көбейгіш матрицасының бағанының саны көбейткіш матрицасының жолының санына тең болатын матрицалар үшін ғана орындалады.

8-анықтама. $m\times n$ өлшемді $A=\left(a_{ij}\right)$ матрицасының $n\times p$ өлшемді $B=\left(b_{jk}\right)$ $\left(i=1.2,...,m;\ j=1.2,...,n;\ k=1.2,...,p\right)$ матрицасына *көбейтіндісі* деп өлшемі $m\times p$ болатын және әрбір c_{ik} элементі A матрицасының i-ші жолы мен B матрицасының k-шы бағанының сәйкес элементтерінің көбейтіндісінің қосындысына тең $C=\left(c_{ik}\right)$ матрицасын айтады, яғни

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}.$$

Мысалы: $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$

матрицалары үшін

$$C=AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}.$$

Матрицаларды көбейту амалы төмендегідей қасиеттерге ие:

1) $AB\neq BA$; 2) $AE=EA=A$; 3) $O\cdot A=A\cdot O=O$;
4) $A(BC)=(AB)C$; 5) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$;
6) $(A+B)C=AC+BC$; $C(A+B)=CA+CB$.

Матрицаларды қосу, азайту және санға көбейтуді матрицаларға *сызықтық амалдар қолдану* деп атайды.

1.3.2. Кері матрица

A мен B өлшемдері бірдей квадрат матрицалар, ал $|A|$ және $|B|$ олардың анықтауыштары болса, онда $C=A\cdot B$ матрицасының анықтауышы $|C|=|A|\cdot|B|$ көбейтіндісіне тең.

1-анықтама. A квадрат матрицасы элементтерінің алгебралық толықтауыштарынан құралған матрица *тіркелген матрица* деп аталады және ол $\tilde{A}$ әрпімен белгіленеді:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.11)$$

2-анықтама. Егер A квадрат матрицасының анықтауышы $\Delta = |A| \neq 0$ болса, ол *ерекше емес*, ал егер $\Delta = 0$ болса, онда ол *ерекше* матрица деп аталады.

Кез келген $a \neq 0$ саны үшін $a^{-1} \cdot a = 1,\ a \cdot a^{-1} = 1$ теңдіктерді қанағаттандыратын a-ға кері a^{-1} саны бар болатыны мектеп математикасынан белгілі. Осыған ұқсас кері матрица ұғымы енгізіледі.

3-анықтама. A матрицасы үшін $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ теңдіктері орындалса, онда A^{-1} матрицасы A матрицасына *кері матрица* деп аталады.

Нөлден өзгеше элементі бар кез келген матрица үшін кері матрица бар бола бермейді. Кері матрицаның бар болу шартын төмендегі теорема береді.

1-теорема. A матрицасына кері A^{-1} матрицасы бар болуы үшін A ерекше емес матрица болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Қажеттілігі. Айталық A матрицасына кері A^{-1} матрицасы бар болсын. Бұл жағдайда A ерекше емес матрица болатынын көрсетелік. Шынында да, егер $\Delta = 0$ болса, онда

$$\left|AA^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = \Delta \cdot \left|A^{-1}\right| = 0.$$

Мұндай болуы мүмкін емес. Себебі 3-анықтама бойынша

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Осыдан

$$\left|A \cdot A^{-1}\right| = |E| = 1$$

теңдігі шығады, ендеше $\Delta = |A| \neq 0$. Демек, A ерекше емес матрица екен.

Жеткіліктілігі. Енді A матрицасының анықтауышы $\Delta = |A| \neq 0$ болсын. A үшін кері матрицаның бар болатынын көрсетелік. Ол үшін

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

матрицаларын құрамыз. Мұндағы B матрицасының A_{ij} элементтері a_{ij} элементтерінің алгебралық толықтауыштары. B матрицасы $\tilde{A}$ матрицасының транспозицияланған матрицасы.

1.2 тақырыбының 1, 2, 3 - теоремалары бойынша

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$$

Осыдан $A \cdot \dfrac{B}{|A|} = E$ теңдігін аламыз. Бұл теңдік A матрицасына кері матрица A^{-1} бар болатынын көрсетеді, яғни

$$A^{-1} = \frac{B}{|A|}.$$

Сонымен, ерекше емес $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

матрицасына кері A^{-1} матрицасы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

формуласы арқылы табылады екен.

Кері матрицаны табу алгоритмі.

1. Берілген A матрицасының анықтауышы $|A|$ есептеледі. Егер $|A| = 0$ болса, онда кері матрица жоқ. Егер $|A| \neq 0$ болса, онда кері матрица бар.

2. Тіркелген $\tilde{A}$ матрицасының транспозицияланған матрицасы B табылады. Ол матрицаны табу үшін A матрицасының a_{ij} элементтеріне сәйкес A_{ij} алгебралық толықтауыштары есептеледі, содан соң (1.11) матрицасы құрылады.

3. (1.12) формуласы бойынша кері матрица табылады.

4. Табылған кері матрицаның дұрыстығы $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ теңдіктері арқылы тексеріледі.

1.3.3. Матрицаның рангісі

1-анықтама. *Матрицаның рангісі* деп оның нөлден өзгеше минорының ең жоғарғы ретін айтады.

Матрица рангісінің қасиеттерін атап өтелік.

1º. Транспозициялағаннан матрицаның рангісі өзгермейді.

2º. Матрицадан нөлдік қатарды, яғни барлық элементтері нөлге тең жол немесе бағанды, сызып тастағаннан оның рангісі өзгермейді.

Матрицаға қолданылатын төмендегі амалдар оны *қарапайым түрлендіру* деп аталады:

• матрицаның кез келген екі қатарының орындарын ауыстыру;

• матрицаның кез келген қатарының элементтерін нөлден өзгеше санға көбейту;

• матрицаның кез келген қатарының элементтерін бір санға көбейтіп, оған параллель қатардың сәйкес элементтеріне қосу.

3º. Матрицада жүргізілетін қарапайым түрлендірулер оның рангісін өзгертпейді.

A матрицасының рангі $r(A)$-мен белгіленеді. Ол мынадай қасиеттерге ие:

1) $r(A) \le \min(m;n)$;

2) A матрицасының барлық элементтері нөл болғанда ғана $r(A)=0$;

3) A - ерекше емес n - ретті квадрат матрица болса, онда $r(A)=n$.

Енді қарапайым түрлендірулер арқылы төмендегі матрицаның рангісін есептелік.

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & -4 \\ -3 & 10 & 2 & 1 \\ 7 & -24 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ -3 & 10 & 2 & 1 \\ 7 & -24 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & 12 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бұл арада мынадай түрлендірулер жүргізілді:

1) берілген матрицаның бірінші жолының барлық элементтерін 2-ге бөліп, бірінші жол етіп жазылды;

2) жаңадан жазылған бірінші жол элементтерін алдымен 3-ке көбейтіп екінші жолдың сәйкес элементтеріне қосылды, одан кейін (-7)-ге көбейтіп, үшінші жолдың сәйкес элементтеріне қосылды да, екінші және үшінші жол етіп жазылды.

3) бірінші, екінші жолдарды өзгеріссіз қалдырып, екінші жол 3-ке көбейтіліп, үшінші жолдың сәйкес элементтеріне қосылды.

Соңғы матрицаның нөлден өзгеше 2-ретті анықтауышы бар екені көрініп тұр, онда берілген матрицаның рангі 2-ге тең екен.

Қарапайым түрлендірудің көмегі арқылы кез келген матрицаны бас диагоналы бірнеше бірліктерден тұратын, ал қалған элементтерінің барлығы нөлге тең матрицаға келтіруге болады. Мұндай матрица *канондық матрица* деп аталады. Мысалы,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицасы канондық матрица.

Осы айтылғандарды нақты мысал арқылы көрсетелік.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицасын канондық түрге келтірелік.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Бұл арада мынадай қарапайым түрлендірулер жүргізіледі:

1) берілген матрицаның бірінші және үшінші бағандары ауыстырылады;

2) бірінші жолдың элементтері екінші жолдың сәйкес элементтеріне қосылды;

3) бірінші бағанның элементтерін минус 3-ке көбейтіп, екінші бағанның элементтеріне қосылады; одан кейін бірінші бағанның элементтерін минус 2-ге көбейтіп үшінші және төртінші бағанның элементтеріне қосылды;

4) екінші бағанның элементтері 5-ке, үшінші бағанның элементтері 2-ге және төртінші бағанның элементтері 3-ке бөлінді;

5) екінші жолдың элементтерін 3-ке көбейтіп, үшінші жолдың элементте-ріне қосылды;

6) екінші бағанның элементтерін минус 1-ге көбейтіп, үшінші және төртінші бағандардың элементтеріне қосылды.

1.4. Сызықтық теңдеулер жүйесі

1.4.1. Негізгі түсініктер

m теңдеуден және *n* белгісізден тұратын мына түрдегі жүйе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.13)$$

сызықтық теңдеулер жүйесі деп аталады. Мұндағы $a_{ij}\,(i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n)$ сандары жүйенің *коэффициенттері*, ал b_i сандары оның *бос мүшелері* деп аталады.

Егер (1.13) жүйесінде $b_1, b_2, \ldots, b_m$ мүшелерінің барлығы нөлге тең болса, ол жүйе *біртекті,* ал олардың ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болса, онда ол жүйе *біртекті емес* деп аталады.

(1.13) жүйесін

$$AX = B$$

матрицалық түрде жазған өте ыңғайлы. Мұндағы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

A матрицасы (1.13) жүйесінің *негізгі матрицасы* деп аталады.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

матрицасы (1.13) жүйесінің *кеңейтілген матрицасы* деп аталады.

Егер $x_1=c_1,\ x_2=c_2,\dots,x_n=c_n$ сандары (1.13) жүйенің барлық теңдеулерін тепе-теңдікке айналдырса, онда ол сандар осы жүйенің *шешімі* деп аталады.

Егер теңдеулер жүйесінің ең болмағанда бір шешімі бар болса, ол жүйе *үйлесімді*, ал ешқандай шешімі болмаса, ол жүйе *үйлесімсіз* деп аталады. Егер үйлесімді жүйенің жалғыз ғана шешімі бар болса, онда ол жүйе *анықталған,* ал егер бірден көп шешімдері бар болса, онда ол жүйе *анықталмаған* деп аталады. Жүйе анықталмаған жағдайда, оның әрбір шешімі *дербес шешім,* ал ол дербес шешімдердің жиыны жүйенің *жалпы шешімі* деп аталады. Жүйені шешу дегеніміз - оның үйлесімді немесе үйлесімсіз екенін айқындау және үйлесімді болған жағдайда оның жалпы шешімін іздеу.

Егер де екі жүйенің жалпы шешімдері бірдей болса, яғни біреуінің шешімі екіншісінің де шешімі болса және керісінше, екіншісінің шешімі біріншісінің де шешімі болса, онда бұл жүйелер *өзара пара-пар жүйелер* деп аталады.

Біртекті жүйе әрқашан үйлесімді, себебі оның $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ шешімі бар. Бұл шешім ол біртекті жүйенің *нөлдік шешімі* деп аталады.

1.4.2. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу. Кронекер-Капелли теоремасы

(1.13) сызықтық теңдеулер жүйесін қарастыралық. Осы жүйенің үйлесімділігі туралы мәселенің шешімін келесі теорема береді.

1-теорема. (1.13) сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді жүйе болу үшін оның негізгі матрицасының рангісімен кеңейтілген матрицасының рангісінің өзара тең болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теорема *Кронекер-Капелли теоремасы* деп аталады.

Үйлесімді сызықтық теңдеулер жүйесінің барлық шешімдерін практи-калық тұрғыдан іздеу ережесі келесі теоремалар арқылы жүзеге асырылады.

2-теорема. Егер үйлесімді жүйенің рангісі сол жүйедегі белгісіздердің санына тең болса, онда ол жүйенің жалғыз ғана шешімі бар болады.

3-теорема. Егер үйлесімді жүйенің рангісі сол жүйедегі белгісіздердің санынан кіші болса, онда ол жүйенің шексіз көп шешімі болады.

Жоғарыда теоремаларды негізге ала отырып, кезкелген сызықтық теңдеу-лер жүйесінің шешімдерін табудың төмендегі ережелерін тұжырымдалық.

1. Алдымен жүйенің негізгі және кеңейтілген матрицаларының рангілері табылады. Егер олар тең болмаса, онда қарастырылып отырған жүйе үйлесімсіз.

2. Егер негізгі және кеңейтілген матрицалардың рангілері өзара тең және ол r болса, онда жүйе үйлесімді. Бұл жағдайда реті r-ге тең қандайда бір базистік минор табылады да, коэффициенттері осы базистік минордан құралған берілген жүйенің r теңдеуі қарастырылады (жүйенің қалған теңдеулерін жүйеден алынып тасталынады). Коэффициенттері базистік минор болып келетін белгісіздер теңдеудің сол жағына қалдырылады, олар *негізгі белгісіздер* деп аталады. Қалған $n - r$

белгісіздер теңдеудің оң жағына шығарылады, олар *еркін белгісіздер* деп аталады.

3. Негізгі белгісіздерді еркін белгісіздер арқылы өрнектей отырып, қарастырылып отырған жүйенің жалпы шешімі алынады.

4. Еркін белгісіздерге кезкелген мәндер бере отырып, оларға сәйкес негізгі белгісіздердің мәндері алынады. Сөйтіп, берілген теңдеулер жүйесінің дербес шешімдері табылады.

1.4.3. Ерекше емес сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі. Крамер формуласы

n теңдеуден және *n* белгісізден тұратын төмендегі теңдеулер жүйесін қарастыралық, яғни

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.14}$$

Бұл жүйе матрицалық түрде былай жазылады

$$A \cdot X = B$$

(1.14) жүйенің негізгі матрицасы $A-$ квадраттық матрица. Осы A матрицасының

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышы (1.14) жүйесінің анықтауышы деп аталады.

Егер (1.14) жүйесінің Δ анықтауышы нөлден өзгеше болса, онда ол жүйе *ерекше емес,* ал нөлге тең болса *ерекше* жүйе деп аталады.

$\Delta \neq 0$ болсын деп ұйғаралық та, (1.14) жүйесінің шешімін ізделік. Ол үшін $A \cdot X = B$ теңдеуінің екі жағын A^{-1} матрицасына көбейтіп $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B$ теңдігін аламыз. $A^{-1} \cdot A = E$ және $E \cdot X = X$ болғандықтан, соңғы теңдіктен

$$X = A^{-1}B \tag{1.15}$$

теңдігін аламыз.

(1.14) жүйесінің шешімін (1.15) формуласының көмегі арқылы іздеу жолы жүйені *матрицалық әдіс арқылы* шешу деп аталады.

(1.15) теңдігін

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

түрінде жазалық. Осыдан

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta},$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

теңдіктерін аламыз. Екіншіден,

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$$

қосындысы

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышының бірінші бағанының элементтері бойынша жіктелуін береді. Δ_1 анықтауышы Δ анықтауышының бірінші бағанын бос мүшелерден тұратын бағанмен алмастырғаннан шығады.

Олай болса

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Осыған ұқсас Δ анықтауышының екінші, үшінші т.с.с. бағандарын бос мүшелерден тұратын бағанмен алмастырып $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ теңдіктерін аламыз.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{1.16}$$

формулалары *Крамер формулалары* деп аталады.

Сонымен мынадай қорытындыға келдік: n белгісізі бар n теңдеуден тұратын ерекше емес сызықтық теңдеулер жүйесінің жалғыз ғана шешімі болады және ол шешім (1.15) теңдігі арқылы матрицалық әдіспен немесе (1.16) Крамер формуласы арқылы табылады.

1.4.4. Сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісі арқылы шешу

Сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін табудың көп тараған әрі әмбебап әдісінің бірі - Гаусс әдісі. Бұл әдістің мәнісі мынада: берілген жүйе қандайда бір қарапайым түрлендірулер арқылы оған пара-пар үшбұрышты немесе трапеция түріндегі жүйеге келтіріледі.

(1.13) жүйесін қарастыралық. Гаусс әдісі бойынша бұл жүйенің шешімін іздеу мәселесі екі кезеңнен тұрады. Бірінші кезеңде (тура жол) берілген жүйе баспалдақты (дербес жағдайда, үшбұрышты) жүйеге келтіріледі. *Баспалдақ-ты жүйе* деп

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (1.17)$$

түріндегі жүйені айтады. Мұндағы $k \le n,\ a_{ii} \ne 0\ (i = 1,2,\ldots,k)$. a_{ii} коэффициент-тері (1.17) баспалдақты жүйесінің *негізгі элементтері* деп аталады. Екінші кезеңде (кері жол) баспалдақты жүйенің белгісіздері біртіндеп айқындалады.

Гаусс әдісі туралы толық мағлұмат берелік. *Тура жол*. $a_{11} \ne 0$ деп ұйғаралық. Егер $a_{11} = 0$ болса, онда жүйенің бірінші теңдеуі ретінде x_1 белгісізінің коэффициенті нөл болмайтын теңдеуді жазамыз. Элементарлық түрлендірулерді қолдана отырып (1.13) жүйесіндегі бірінші теңдеуден басқа теңдеулерден x_1 белгісізін жоямыз. Ол үшін (1.13) жүйесінің бірінші теңдеуінің екі жағын $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ санына көбейтіп, екінші теңдеудің сәйкес мүшелеріне қосамыз. Одан соң (1.13) жүйесінің бірінші теңдеуінің екі жағын $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ санына

көбейтіп үшінші теңдеудің сәйкес мүшелеріне қосамыз. Осы процесті жалғастыра отырып берілген жүйеге пара-пар

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases} \tag{1.18}$$

жүйені аламыз. (1.18) жүйесінде $a_{ij}^{(1)}$ және $b_i^{(1)}$ $(i, j = 2,3,\ldots,m)$ сандары бірінші қадамнан кейінгі жүйенің жаңа коэффициенттері мен бос мүшелері.

Ары қарай $a_{22}^{(1)} \neq 0$ деп ұйғара отырып (1.18) жүйесінің бірінші мен екінші теңдеулерінен басқа барлық теңдеулерінен x_2 белгісізін жоямыз. Осы процесті мүмкін болғанша жалғастыра береміз.

Егер (1.13) жүйесін баспалдақты жүйеге келтіру процесінде $0 = 0$ түріндегі нөлдік теңдеулер пайда болса, оларды жүйеден шығарып тастаймыз. Егер осы процесс кезінде жүйеде $0 = b_k$, $b_k \neq 0$ түріндегі теңдеу пайда болса, онда ол қарастырылып отырған жүйенің үйлесімсіз екендігін көрсетеді.

Кері жол. Жалпы алғанда баспалдақты жүйенің шексіз көп шешімдері бар. Оған көз жеткізу үшін, алдымен осы баспалдақты жүйенің соңғы теңдеуіндегі x_k белгісізін басқа $x_{k+1},\ldots,x_n$ белгісіздері арқылы өрнектейміз. Одан кейін x_k-ның мәнін оның алдындағы теңдеуге қойып x_{k-1} белгісізін $x_{k+1},\ldots,x_n$ белгісіздері арқылы өрнектейміз. Осы жолмен $x_{k-2},\ldots,x_1$ белгісіз-дері $x_{k+1},\ldots,x_n$ белгісіздері арқылы өрнектелінеді. $x_{k+1},\ldots,x_n$ еркін белгісіздері-не кез келген мәндер бере отырып, берілген жүйенің шексіз көп шешімдерін аламыз.

1-ескерту! Егер берілген жүйе үшбұрышты жүйеге келтірілсе, яғни $k = n$ болса, онда ол жүйенің жалғыз ғана

шешімі болады. Бұл жағдайда жүйенің соңғы теңдеуінен x_n белгісізі табылады. Одан соң оның алдындағы теңдеуден x_{n-1} белгісізі табылады. Сөйтіп, төменнен жоғары қарай жылжып отырып басқа $x_{n-2},\ldots,x_1$ белгісіздері табылады.

2-ескерту! Практикада (1.13) жүйесімен емес, оның кеңейтілген матрицасының жолдарына элементарлық түрлендірулер жасау әдісі тиімді. Жалпы алғанда a_{11} коэффициенттері бірге тең деп ұйғарылады. Егер ол коэффициент бірге тең болмаса, онда жүйенің бірінші теңдеуі басқа теңдеумен алмастырылады немесе бірінші теңдеудің екі жағы $a_{11} \neq 1$ санына бөлінеді.

1.4.5. Біртектес теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

біртектес сызықтық теңдеулер жүйесін қарастыралық. Бұл жүйе әруақытта үйлесімді, себебі $r(A) = r(\overline{A})$. 1.4.1 тақырыбында бұл жүйенің нөлдік шешімінің болатындығы туралы айтқанбыз. Ендігі мәселе қандай жағдайда (1.19) жүйесінің нөлдік емес шешімдерінің бар болатындығын айқындау.

1-теорема. Біртектес теңдеулер жүйесінің нөлдік емес шешімдері болу үшін, оның негізгі матрицасының рангісі белгісіздердің санынан аз болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі.* Матрицаның рангісі оның өлшемінен аспайды, сондықтан $r \leq n$. Айталық $r = n$ болсын. Бұл жағдайда өлшемі $n \times n$ болатын минордың ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болады. Сондықтан оған сәйкес сызықтық теңдеулер жүйесінің $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $\Delta_i = 0, \Delta \neq 0$ түріндегі жалғыз

ғана шешімі бар. Бұл нөлдік шешім. Демек, нөлдік шешімнен басқа шешімі жоқ. Олай болса, егер (1.19) жүйесінің нөлдік емес шешімі бар болса, онда $r < n$ болады екен.

Жеткіліктілігі. Айталық $r < n$ болсын. Онда біртектес үйлесімді жүйе анықталмаған жүйе болады. Демек, оның шексіз көп шешімдері бар, яғни нөлдік емес шешімдері де бар.

Енді n белгісізі бар n теңдеуден тұратын

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

біртектес сызықтық теңдеулер жүйесін қарастыралық.

(1.20) жүйесінің шешімі туралы төмендегі теорема толық мағлұмат береді.

2-теорема. n белгісізі бар n теңдеуден тұратын (1.20) сызықтық теңдеулер жүйесінің нөлдік емес шешімінің бар болуы үшін, ол жүйенің анықтауышының нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Егер (1.20) жүйесінің нөлдік емес шешімі бар болса, онда ол жүйенің анықтауышы $\Delta = 0$ болады. Себебі, $\Delta \neq 0$ болған жағдайда ол жүйенің жалғыз нөлдік шешімі бар.

Жеткіліктілігі. Егер $\Delta = 0$ болса, онда негізгі матрицаның рангісі белгісіздердің санынан аз, яғни $r < n$. Демек, жүйенің шексіз көп (нөлдік емес) шешімдері бар.

Бірінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Екінші ретті анықтауыштың анықтамасын тұжырымдаңыздар.
2. Екінші ретті анықтауыш қалай есептелінеді?
3. Үшінші ретті анықтауыштың анықтамасын беріңіздер.
4. Үшбұрыш немесе Саррюс ережесін тұжырымдаңыздар.

5.Анықтауыштардың элементтері мен мүшелерінің саны қалай анықтала-ды?

6. Екі жолының немесе бағанының сәйкес элементтері пропорционал анықтауыштың мәні неге тең?

7. Анықтауыштың қандайда бір жолының немесе бағанының ортақ көбейткішін оның алдына шығаруға бол ма?

8. Анықтауыштың қандайда бір элементінің миноры деп нені айтады?

9. Анықтауыштың қандайда бір элементінің алгебралық толықтауышы деп нені айтады?

10. Анықтауыштың мәнін оның кез келген жолының (бағанының) элементтері мен олардың алгебралық толықтауыштары арқылы өрнектеңіз-дер.

11. *n*-ші ретті анықтауыш деп нені айтады?

12. Анықтауыштың екі жолын немесе екі бағанын ауыстырғаннан оның таңбасы өзгере ме? Жоқ па?

13. Квадрат матрица деп қандай матрицаны айтады ?

14. Транспозицияланған матрица деп қандай матрицаны айтады?

15. Бірлік матрица деп қандай матрицаны айтады?

16. Матрицаның өлшемі деген не?

17. Қосу (алу) амалы қандай матрицалар үшін анықталады?

18. Екі матрицаның қосындысын (айырмасын) қалай табады?

19. Матрицаларды қосу және алу амалдары қандай қасиеттерге ие?

20. Матрицаны санға көбейту амалы қалай анықталады?

21. Көбейту амалы қандай матрицалар үшін анықталады?

22. Матрицаны матрицаға көбейту ережесін жазыңыздар.

23. Матрицаларды көбейту қандай қасиеттерге ие?

24. Ерекше емес матрица деп қандай матрицаны айтады?

25. Кері матрицаның бар болуының қажетті шартын тұжырымдаңыздар.

26. Кері матрицаның бар болуының жеткілікті шартын тұжырымда-ңыздар.

27. Кері матрица қандай формуламен анықталады?

28. Кері матрицаны табу алгоритмін жазыңыздар.

29. Сызықты теңдеулер жүйесін матрицалық теңдеу түрінде жазыңыз.

30. Матрицалық теңдеу қалай шешіледі?

31. Сызықты теңдеулер жүйесіне элементар түрлендірулер қалай жүргізі-леді?

32. Сызықты теңдеулер жүйесін шешудің Гаусс әдісін баяндаңыздар.

33. Сызықты теңдеулер жүйесі үшбұрышты түрге келсе, оның шешімдері қандай болады?

34. Сызықты теңдеулер жүйесі трапеция түріне келтірілсе, оның шешім-дері қандай болады?

35. Теңдеулер жүйесінің үйлесімсіздігі Гаусс әдісімен қалай анықталады?

36. Сызықты теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасы дегеніміз не?

37. Матрицаның рангі деген не?

38. Элементар түрлендірулерден кейін матрицаның рангі өзгереді ме?

39. Сызықты теңдеулер жүйесінің үйлесімді болуының қажетті және жеткілікті шартын жазыңыздар.

40. Анықталған және анықталмаған жүйелердің анықтамасын беріңіздер.

2 тарау. ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

2.1. Вектор ұғымы және оларға сызықтық амалдар қолдану

Сандық мәні және бағытымен анықталатын шамаларды сипаттау үшін вектор ұғымы енгізіледі. Оларға мысалдар ретінде денеге әсер ететін күш, қозғалыстағы дененің жылдамдығы, үдеуі және т.б. ұғымдарды атауға болады. Векторды бағытталған кесінді түрінде кескіндейді. Бастапқы нүктесі A, соңғы нүктесі B болатын векторды $\overline{AB}$ деп белгілейді. Ыңғайлы болу үшін векторларды бір әріппен, мысалы, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ әріптерімен де белгілейді.

Векторды кескіндейтін бағытталған кесіндінің ұзындығын *вектордың ұзындығы* деп атайды. Оны $\left|\overline{AB}\right|$ немесе $\left|\bar{a}\right|$ деп белгілейді.

Егер векторлар бір түзудің немесе параллель түзулердің бойында жатса, оларды *коллинеар векторлар* деп атайды.

Егер $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ұзындықтары мен бағыттары бірдей және олар коллинеар болса, онда олар *тең векторлар* деп аталады. Оларды былай белгілейді $\bar{a} = \bar{b}$.

Егер $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ұзындықтары бірдей, өзара параллель, ал бағыттары қарама-қарсы болса, онда оларды *қарама-қарсы векторлар* деп атайды және $\bar{a} = -\bar{b}$ деп жазады.

Егер векторлар бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, оларды *компланар векторлар* деп атайды.

Егер вектордың бастапқы нүктесі мен соңғы нүктесі беттессе (бір нүктеде жатса), онда ол *нөл вектор* деп аталады және ол $\bar{0}$ деп белгіленеді.

Векторларды өзара қосу, алу және векторды скалярға көбейту амалдары сызықтық амалдарға жатады.

Екі вектордың қосындысын екі жолмен табуға болады: бірі паралле-лограмм ережесі, екіншісі үшбұрыш ережесі.

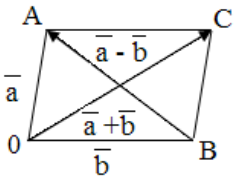
Параллелограмм ережесі бойынша екі вектордың қосындысын табу үшін қосылғыш векторлардың бастапқы нүктелерін бір нүктеге орналастырып, сол екі вектор арқылы

параллелограмм тұрғызады. Осы параллелограммның бастапқы төбесінен жүргізілген диагоналы екі вектордың қосындысын анықтайды (2.1-сурет).

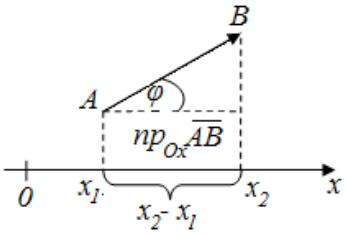
Үшбұрыш ережесі бойынша екі вектордың қосындысын табу үшін екінші вектордың бастапқы нүктесін бірінші вектордың соңғы нүктесіне орналастырады. Сонда бірінші вектордың бастапқы нүктесімен екінші вектордың соңғы нүктесін қосатын вектор қосынды вектор болады. Бірнеше векторларды қосу үшін алдымен екеуін қосады, қосынды векторға үшінші векторды, оның қосындысына төртіншісін қосады және т.с.с.

Екі вектордың айырымын, қосу амалына кері амал арқылы анықтауға болады. $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)=\bar{c}$ (2.1-сурет).

$\bar{a}$ векторының λ *скалярына көбейтіндісі* деп жаңа $\bar{b}=\lambda\,\bar{a}$ векторын айтады. Векторды скалярға көбейткенде берілген векторға коллинеар вектор шығады.



2.1 - сурет



2.2 - сурет

Векторларды қосу және скалярға көбейту амалдары мынадай қасиеттер-ге ие:

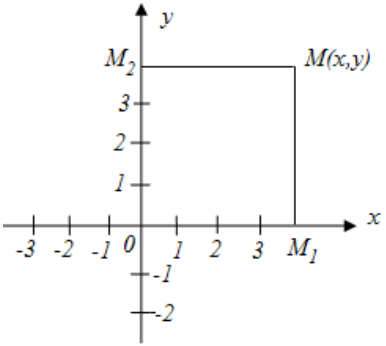
1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$; 2) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)$; 3) $\lambda\,\bar{a}=\bar{a}\,\lambda$;

4) $\lambda\left(\alpha\,\bar{a}\right)=\left(\lambda\,\alpha\right)\bar{a}$; 5) $\lambda\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$;

6) $\left(\lambda+\alpha\right)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\alpha\bar{a}$.

Нүктенің жазықтықтағы және кеңістіктегі орнын анықтау үшін тік бұрышты декарттық координаталар жүйелері енгізіледі. Координаталар жүйесінде нүкте сандар жиынымен, ал сызықтар мен беттер теңдеулер көмегімен анықталады.

Жазықтықтан өзара перпендикуляр екі түзу алайық. Олардың қиылысу нүктесі O *координаталар бас* нүктесі деп аталады. Егер перпендикуляр түзулерде оң бағыттар мен масштаб бірліктері көрсетілсе, онда жазықтықта декарттық координаталар жүйесі берілді деп есептелінеді (2.3-сурет).



2.3-сурет

Жазықтықтан кез келген M нүктесін алайық. M нүктесінен Ox өсіне түсірілген перпендикулярдың осы өспен қиылысу нүктесі M_1, ал Oy өсіне түсірілген перпендикулярдың осы өспен қиылысу нүктесі M_2 болсын.

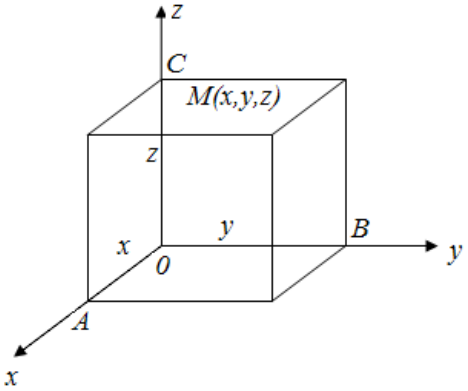
M_1-ге x саны, ал M_2-ге y саны сәйкес келеді. Сонымен, M нүктесі оның координаталары деп аталатын екі, x және y сандарымен анықталады және ол $M(x, y)$ түрінде жазылады. x саны M нүктесінің *абциссасы*, ал y саны оның *ординатасы* деп аталады.

Егер, кез келген қос x, y саны берілсе, онда абцисса өсінен x нүктесін, ал ордината өсінен y нүктесін тауып, оларға перпендикуляр тұрғызсақ, онда олардың қиылысқан нүктесі, координаталары x және y болатын M нүктесін анықтайды.

Сонымен, координаталар жүйесі енгізілген жазықтықтың әрбір нүктесі мен барлық қос (x, y) нақты сандар жиыны арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнатуға болады және ол координаталар жазықтығы деп аталады.

Осылайша кеңістікте де декарт координаталар жүйесі енгізіледі.

Кеңістікте өзара перпендикуляр үш Ox, Oy, Oz өстері берілсін. xOy, xOz, yOz - *координаталар жазықтықтары* деп аталады, (2.4-сурет).



2.4-сурет

Кеңістіктің кез келген M нүктесі арқылы Ox, Oy, Oz өстеріне перпендикуляр жазықтықтар тұрғызып, олардың координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін A, B, C әріптерімен белгілейміз. Онда оларға x, y, z сандары сәйкес келеді. Сонымен, кеңістіктегі M нүктесі оның координаталары деп аталатын x, y, z сандарын анықтайды. z саны M нүктесінің *аппликатасы* деп аталады.

Енді x, y, z үш сан берілсін. Егер Ox, Oy, Oz өстерінен x, y, z-терге (2.4-сурет) сәйкес A, B, C нүктелерін тауып, олар арқылы өстерге перпендикуляр жазықтықтар тұрғызсақ, онда олар бір M нүктесінде қиылысады, оның координаталары x, y, z болады және былай жазылады $M(x, y, z)$.

Сонымен, координата жүйесі енгізілген кеңістіктің әрбір нүктесі мен барлық (x, y, z) түріндегі нақты сандар жиыны арасында өзара бір мәнді сәйкестік орнатылады екен.

Ox өсі және кезкелген $\overline{AB}$ векторы берілсін. A және B нүктелерін Ox өсіне проекциялаймыз. B нүктесінің абсциссасы мен A нүктесінің абсциссасының айырымы $\overline{AB}$ векторының Ox өсіне *проекциясы* деп аталады (2.2-сурет) және $np_{Ox}\overline{AB}$ деп белгіленеді. Сонымен $np_{Ox}\overline{AB} = x_2 - x_1$.

Теорема. $\overline{AB}$ векторының Ox өсіне проекциясы осы $\overline{AB}$ векторының модулі мен Ox өсі арасындағы бұрыш косинусының көбейтіндісіне тең, яғни

$$np_{Ox}\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi . \qquad (2.1),$$

Дәлелдеу. Тік бұрышты үшбұрышта іргелес катеттің гипотенузаға қатынасы сүйір бұрыштың косинусы екенін ескерсек (2.1) теңдігі шығады (2.2-сурет).

$\overline{AB}$ векторының Oy өсіне проекциясы $np_{Oy}\overline{AB} = y_2 - y_1$ болсын. $\overline{AB}$ векторы өстердегі проекциясы бойынша былай жазылады $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Дәл осы секілді кеңістікте $\overline{AB}$ векторы өстердегі проекциясы бойынша $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ деп жазылады.

Жазықтықтағы $\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ векторының ұзындығы

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,, \qquad (2.2)$$

ал кеңістіктегі $\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ векторының ұзындығы:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (2.3)$$

формулалары арқылы табылады.

Координаталарымен берілген векторларды қосқанда олардың сәйкес координаталары қосылады, ал векторды санға көбейткенде оның барлық координаталары осы санға көбейтіледі.

2.2. Векторлардың сызықтық комбинациясы. Базис. Векторлардың скаляр көбейтіндісі. Сызықтық кеңістіктер

1-анықтама. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының *сызықтық комбинациясы* деп осы векторлардың кез келген α, β, γ нақты сандарға көбейтілген $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$ қосындысын айтады.

2-анықтама. Егер $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0$ теңдеулер жүйесінің нөлден өзгеше шешімі болмаса, онда $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары *сызықты тәуелсіз векторлар* деп аталады. Егер нөлден өзгеше шешімі болса, онда *сызықты тәуелді векторлар* деп аталады.

3-анықтама. Егер $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ теңдігі орындалатын α, β сандары табылса, онда $\bar{c}$ векторы $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының сызықты комбинациясы деп аталады.

4-анықтама. Егер жазықтықта кез келген $\bar{x}$ вектор үшін x_1, x_2 нақты сандары табылып, мына теңдік

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 \qquad (2.4)$$

орындалса, онда белгілі ретпен алынған $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ сызықтық тәуелсіз векторлар жұбы *жазықтықтағы базис* деп аталады.

5-анықтама. Кеңістікте белгілі ретпен алынған $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ сызықтық тәуелсіз векторлар *кеңістіктегі базис* векторлар деп аталады.

5-анықтамадан кез келген компланар емес үш вектор базис вектор құрайтыны шығады.

Кеңістікте координат жүйесін алып, ұзындықтары бірге тең $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторларын OX, OY, OZ өстерінің оң бағыты бойынша *орналастырсақ*, онда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлары кеңістіктегі векторлардың базис векторларын құрайды. Оларды *ортонормалданған базис* деп атайды. Кеңістіктегі кез келген $\bar{a}$ векторын $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ деп жазуға болады. Мұндағы a_x, a_y, a_z -тер $\bar{a}$ векторының OX, OY, OZ өстеріне проекциялары.

6-анықтама. Нөлден өзгеше екі вектордың *скаляр көбейтіндісі* деп, ол векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусы-ның көбейтіндісіне тең болатын санды айтады да былай жазады

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\varphi. \qquad (2.5)$$

$\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi$ көбейтіндісі $\bar{b}$ векторының $\bar{a}$ векторымен беттесетін өске проекциясы, ал $\left|\bar{a}\right|\cdot\cos\varphi$ көбейтіндісі $\left|\bar{a}\right|$ векторының $\bar{b}$ векторымен беттесетін өске проекциясы болғандықтан (2.5) формуласын

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|np_{\bar{a}}\bar{b}=\left|\bar{b}\right|np_{\bar{b}}\bar{a}$$

деп жазуға болады.

Скаляр көбейтіндінің анықтамасынан оның мынадай қасиеттері шығады.

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ (ауыстырымдылық қасиеті);
2) $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (үлестірімдік қасиеті);
3) $\left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$;
4) $\bar{a}\cdot\bar{a}\geq 0$;

5) нөлден өзгеше екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болуы үшін олардың өзара перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті.

Координаталарымен берілген $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$ век-торларының скаляр көбейтіндісін табалық: (2.5) формуласы бойынша $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$, $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$-ларды және скаляр көбейтіндінің 1), 2), 3) – қасиеттерін пайдаланып,

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (2.6)$$

теңдігін аламыз. Басқаша айтқанда, екі вектордың скаляр көбейтіндісі олардың аттас проекцияларының көбейтіндісінің қосындысына тең.

Егер $\bar{a} = \bar{b}$ болса, онда $\varphi = 0,\ \cos\varphi = 1.$

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \overline{a^2} = \left|\bar{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Басқаша айтқанда, вектордың скалярлық квадраты оның ұзындығының квадратына тең.

$\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының арасындағы бұрыш

$$cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

формуласымен анықталады.

Скаляр көбейтінді мынадай экономикалық мағынаға ие: егер $\bar{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$ векторы әртүрлі тауарлар көлемін, ал $\bar{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$ векторы олардың бағасын білдірсе, онда $\bar{a} \cdot \bar{b}$ скаляр көбейтінді бұл тауарлардың жалпы бағасына тең болады.

Енді n өлшемді вектор және сызықтық кеңістік ұғымдарын анықтауға көшелік.

Бұрын қарастырылған векторлар сәйкес кеңістіктердің қарапайым мысалдары болады. Енді ол ұғымды біраз кеңейтейік.

7-анықтама. *n өлшемді вектор* деп нақты *n* саннан құралған кез келген $a_1, a_2, ..., a_n$ тізбекті айтады және ол

$$\bar{a} = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$$

деп белгіленеді, ал $a_1, a_2, ..., a_n$ сандары $\bar{a}$ векторының *координаталары* деп аталады.

1, 2, 3 өлшемді векторлардың геометриялық мәндері айқын, оларды алдыңғы тақырыптарда қарастырдық. *n* өлшемді вектор ұғымы экономикада кең қолданылады, мысалы, қандай да бір

тауарлар жиынын $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ векторымен сипаттасақ, онда олардың сәйкес бағалары $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ векторымен сипатталады.

8-анықтама. Егер, нақты координаталы векторлар жиынында сызықты амалдар анықталған болып, олар 2.1 тақырыбында келтірілген 6 қасиетке ие болса, онда ол жиын *вектор кеңістігі* деп аталады.

Вектор кеңістігін *сызықты кеңістік* деп те атайды. Сызықты кеңістіктің элементтері тек қана вектор емес, әртүрлі жиындар болуы мүмкін. Мысалы:

1) біртекті сызықты теңдеулер жүйесінің шешімдерінен тұратын жиын;

2) дәрежесі *n* -нен аспайтын барлық көпмүшеліктер жиыны;

3) $[a, b]$ кесіндісінде анықталған барлық функциялар жиыны және т.б.

9-анықтама. Сызықтық кеңістіктің *өлшемі* деп ондағы сызықтық тәуелсіз векторлардың санын айтады.

10-анықтама. *n* сызықты тәуелсіз векторлар жиынын *n* өлшемді кеңістіктің базисі деп атайды.

11-анықтама. Егер сызықтық кеңістіктегі скалярлық көбейтінді 2.2. тақырыбындағы төрт қасиетті қанағаттандырса, онда ол *Евклид кеңістігі* деп аталады.

n өлшемді вектор кеңістігі Евклид кеңістігіне мысал болады. $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ және $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ векторлардың скаляр көбейтіндісі $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$ теңдігімен анықталады.

n өлшемді Евклид кеңістігінде $\bar{a}$ векторының ұзындығы (нормасы)

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

формуласымен анықталады.

Коши-Буняковский теңсіздігі. Евклид кеңістігінің кез келген екі $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары үшін

$$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2 \le \left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)\cdot\left(\bar{b}\cdot\bar{b}\right) \qquad (2.7)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеуі. Кез келген t санын алып $\bar{c} = t\bar{a} + \bar{b}$ векторын құрамыз.

$$\bar{c}\cdot\bar{c} = \left(t\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(t\bar{a}+\bar{b}\right) = t^2\left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right) + 2t\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right) + \left(\bar{b}\cdot\bar{b}\right)$$

Егер $\bar{a}\cdot\bar{a} = \alpha,\ \bar{a}\cdot\bar{b} = \beta,\ \bar{b}\cdot\bar{b} = \gamma$ деп белгілесек,

$$\bar{c}\cdot\bar{c} = \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma. \qquad (2.8)$$

$\bar{c}\cdot\bar{c} \ge 0$ болғандықтан t-ның кез келген мәнінде $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma \ge 0$. Олай болса, $\beta^2 - \alpha\gamma \le 0$. Осыдан $\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2 - \left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)\cdot\left(\bar{b}\cdot\bar{b}\right) \le 0$ немесе $\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2 \le \left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right)\cdot\left(\bar{b}\cdot\bar{b}\right)$.

Коши-Буняковский теңсіздігінен кезкелген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары үшін

$$\bar{a}\cdot\bar{b} \le \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right| \qquad (2.9)$$

теңсіздігі шығады.

Шынында да, Коши-Буняковский теңсіздігі $\bar{a}\cdot\bar{b} \le \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|$ теңсіздігіне пара-пар. Себебі,

$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2 = \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right) = \left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right| = \left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right|^2$, ал $\left(\bar{a}\cdot\bar{a}\right) = \left|\bar{a}\right|^2$ және $\left(\bar{b}\cdot\bar{b}\right) = \left|\bar{b}\right|^2$; Оларды (2.7) теңсіздікке апарып қойсақ: $\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right| \le \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|$. Осы теңсіздіктен (2.9) теңсіздікті аламыз.

Салдар. Евклид кеңістігінің кез келген екі $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторы үшін

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right| \le \left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right| \qquad (2.10)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 = \left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right) = \bar{a}\cdot\bar{a} + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{b}$. Соңғы теңдіктің оң жағына (2.9) теңсіздікті қолдансақ:

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2 \le \left|\bar{a}\right|^2 + 2\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{b}\right|^2 = \left(\left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right|\right)^2$$

теңсіздігін аламыз. Осыдан

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right| \le \left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right| \qquad (2.10)$$

теңсіздікті *үшбұрыш теңсіздігі* деп те атайды.

12-анықтама. Егер екі вектордың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса, онда олар *ортогональ векторлар* деп аталады.

Егер n өлшемді Евклид кеңістігінде $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ векторлары қос-қостан ортогональ болып, олардың әрқайсысының ұзындығы (нормасы) бірге тең болса, онда бұл векторлар ортонормалданған базис құрайды. Бұған көз жеткізу үшін $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ векторлардың сызықты тәуелсіздігін көрсетейік, басқаша атқанда

$$\gamma_1\bar{e}_1 + \gamma_2\bar{e}_2 + ... + \gamma_n\bar{e}_n = 0 \qquad (2.11)$$

теңдігі тек қана $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_n = 0$ болғанда ғана орындалады.

Шынында да (2.11) теңдіктің екі жағын $\bar{e}_i$ бірлік векторына $(i = 1, 2, ..., n)$ скаляр көбейтсек

$$\gamma_1\left(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_i\right) + \gamma_2\left(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_i\right) + ... + \gamma_n\left(\bar{e}_n\cdot\bar{e}_i\right) = 0.$$

Мұндағы $\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j = 0$, егер $i \ne j$, $\bar{e}_i\cdot\bar{e}_i \ne 0$ барлық $i = 1, 2, ..., n$. Онда $\gamma_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Демек, аталған $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ векторлар ортонормалданған базис болады екен.

2.3. Векторлық көбейтінді, оның қасиеттері және қолданылуы

1-анықтама. $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларының *векторлық көбейтіндісі* деп келесі үш шартты қанағаттандыратын $\bar{c}$ векторын айтады:

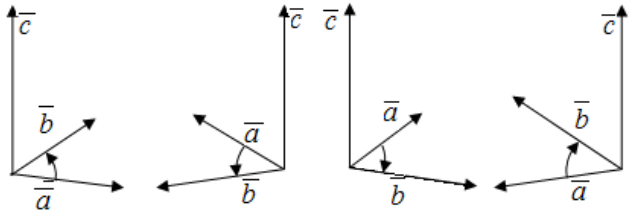
1) $\bar{c}$ векторының ұзындығы (модулі) $\bar{a}$ мен $\bar{b}$ векторларының ұзындықтарымен олардың арасындағы бұрыш синусының көбейтіндісіне тең

$$\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \sin\left(\bar{a} \hat{\cdot} \bar{b}\right).$$

2) $\bar{c} \perp \bar{a}$; $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) $\bar{c}$ векторының бағыты былай анықталады: оның ұшынан қарағанда $\bar{a}$ векторынан $\bar{b}$ векторына қарай ең қысқа бұру сағат тіліне кері болуы тиіс.

Үшінші шартты қанағаттандыратын компланар емес векторларды оң үштік құрады деп те айтады, мысалы



а) б) в) г)

2.6 – сурет

2.6 а, б - суретте кескінделген векторлар оң үштік, ал 2.6 в, г – суретте кескінделген векторлар сол үштік құрайтын векторлар.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі $\left[\bar{a} \cdot \bar{b}\right]$ немесе $\bar{a} \times \bar{b}$ деп белгіленеді және ол мынадай қасиеттерге ие:

1) $\left[\bar{a} \cdot \bar{b}\right] = -\left[\bar{b} \cdot \bar{a}\right]$ (антикоммутативтік);

2) $\left[\lambda \bar{a} \cdot \bar{b}\right] = \left[\bar{a} \cdot \lambda \bar{b}\right] = \lambda \left[\bar{a} \cdot \bar{b}\right]$ (санға қарағанда терімділік);

3) $\left[\left(\overline{a_1} + \overline{a_2}\right)\bar{b}\right] = \left[\overline{a_1} \cdot \bar{b}\right] + \left[\overline{a_2} \cdot \bar{b}\right]$ (үлестірімділік);

4) нөлден өзгеше $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі олар коллинеар болғанда ғана нөлге тең болады.

Енді координаталарымен берілген екі вектордың векторлық көбейтін-дісінің формуласын қорытып шығарайық.

$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \quad \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ векторлары берілсін. Векторлық көбейтіндінің төртінші қасиетін пайдаланасақ, $\left[\bar{i}\cdot\bar{i}\right] = \left[\bar{j}\cdot\bar{j}\right] = \left[\bar{k}\cdot\bar{k}\right] = 0$. Осыларды ескерсек

$$\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

формуласын аламыз.

Егер векторлар коллинеар болса, онда олардың векторлық көбейтіндісі нөлге тең болады. Ал бұл $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ векторының барлық координаталары нөлге тең деген сөз, яғни

$$y_1z_2 - z_1y_2 = 0, \quad z_1x_2 - x_1z_2 = 0, \quad x_1y_2 - y_1x_2 = 0.$$

Бұдан $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ теңдіктері шығады. Бұл екі вектордың коллинеар болу шарты.

Енді векторлық көбейтіндінің қолданылуын баяндалық.

1. Параллелограмм ауданы. Қабырғалары $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \quad \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ векторларымен беттесетін параллелограмның ауданы мына формулалармен табылады

$$S_{пар} = \left|\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\right| \text{ немесе } S_{пар} = \left|\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right|.$$

2. Үшбұрыш ауданы

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

OXY жазықтығында жатқан үшбұрыш ауданы:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 - y_1 x_2\right|.$$

3. Күш моменті. $A-$ қатты дененің бекітілген нүктесі болсын. Егер оның басқа бір B нүктесіне $\overline{F}$ күші әсер етсе, онда айналдыру моменті немесе күш моменті пайда болады. Ол күш моменті механикадан белгілі ереже бойынша $\overline{M} = \left[\bar{r} \cdot \overline{F}\right]$ формуласы арқылы табылады. Мұндағы $\bar{r} = \overline{AB}$. Күш моменті сан жағынан $\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{F}\right| \cdot \sin\varphi$-ге тең, яғни $\overline{AB}$ мен $\overline{F}$-ке салынған параллелог-раммның ауданына тең.

2.4. Үш вектордың аралас көбейтіндісі және олардың қасиеттері

1-анықтама. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының *аралас көбейтіндісі* деп олардың екеуінің векторлық көбейтіндісін үшінші векторға скаляр көбейткенде шығатын санды айтады және оны $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ немесе $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ деп белгілейді.

Сонда, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \left[\bar{a} \cdot \bar{b}\right]\bar{c}$.

Үш вектор координаталарымен берілсін, яғни

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$
$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$
$$\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}.$$

Олардың аралас көбейтіндісін табалық. Алдымен $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін табалық, яғни

$$\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\bar{k}.$$

Енді $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ мен $\bar{c}$ векторының скаляр көбейтіндісін табамыз.

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}=\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Сонымен,

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}=\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (2.14)$$

Аралас көбейтіндінің қасиеттері.

1. $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}=-\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}=\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}=-\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}=\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}=-\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}.$ Бірінші теңдіктің дұрыстығына (2.14) формуласы арқылы көз жеткізуге болады. Шынында да

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}.$$

Қалғандары да осылайша дәлелденеді.

2. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары компланар болуы үшін олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}=0.$$

Дәлелдеу. Қажеттілігі. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары компланар болсын, яғни бір жазықтықта жатсын. Бұл жағдайда

$\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\perp\bar{a},\ \left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\perp\bar{b}$ болғандықтан $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\perp\bar{c}$ болады. Онда $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ мен $\bar{c}$-ның скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады, яғни

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]\cdot\bar{c}=0.$$

Жеткіліктілігі. $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$ болсын. Онда $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}=0$, бұдан $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\perp\bar{c}$. Ал $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\perp\bar{a},\ \left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\perp\bar{b}$ екенін ескерсек, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларының компланарлығы шығады.

3. Тұрақты көбейткішті аралас көбейтіндінің алдына шығаруға болады:

$$\left[\lambda\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}=\lambda\,\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}.$$

4. Кез келген $\overline{a_1},\overline{a_2},\bar{b},\bar{c}$ векторлары үшін үлестірімділік заңы орындалады:

$$\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}\right)\bar{b}\,\bar{c}=\overline{a_1}\,\bar{b}\,\bar{c}+\overline{a_2}\,\bar{b}\,\bar{c}.$$

Аралас көбейтіндінің геометриялық мағынасы. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларынан құралған параллелепипедтің көлемі осы үш вектордың аралас көбейтіндісінің модуліне тең.

Дәлелдеу. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлары бойынша параллелепипед құралық. $\bar{d}=\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ векторының модулі $\bar{a},\bar{b}$ векторлары бойынша құрылған парал-лелограммның ауданы S-ке тең болып, параллелепипедтің $\bar{a},\bar{b}$-ларға салынған табанына перпендикуляр болады.

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}=\left|\bar{d}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\varphi=S\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\varphi \quad (2.15)$$

(2.15) теңдіктегі φ, $\bar{d}$ мен $\bar{c}$ векторының арасындағы бұрыш. Егер $\varphi<\frac{\pi}{2}$ болса, онда параллелепипедтің биіктігі $h=\left|\bar{c}\right|\cos\varphi$ болады. Онда

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=s\cdot h.$$

Егер $\varphi > \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\cos\varphi < 0$ болып, $\left|\bar{c}\right|\cos\varphi = -h$.

Демек,

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -V .$$

Сонымен, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \pm V$ немесе

$$V = \left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|.$$

Екінші тараудың теориялық материалдарын тиянақтайтын сауалдар

1. Векторлық шама деп қандай шаманы айтады?
2. Вектордың ұзындығы немесе модулі деген не?
3. Қандай векторларды коллинеар векторлар деп атайды?
4. Қандай векторлар тең векторлар деп аталады?
5. Вектордың скаляр санға көбейтіндісінің анықтамасын беріңіздер.
6. Қандай векторларды компланар векторлар деп атайды?
7. Векторларды қосу ережелерін жазыңыздар.
8. Векторлардың айырмасы қалай табылады?
9. Векторларға сызықты амалдар қандай қасиеттерге ие?
10. Вектордың өске проекциясы қалай анықталады?
11. Вектордың ұзындығы қандай формуламен табылады?
12. Векторлардың сызықтық комбинациясы деген не?
13. Қандай векторлар сызықты тәуелсіз векторлар деп аталады?
14. Сызықты тәуелді векторлар деп қандай векторларды айтады?
15. Жазықтықтың базис векторлары деген не?
16. Қандай векторлар кеңістіктің базис векторлары деп аталады?
17. Ортонормалданған базис деген не?
18. Кез келген вектор базис векторлар арқылы қалай өрнектеледі?

19. Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің анықтамасын беріңіздер.

20. Скаляр көбейтіндінің қасиеттерін жазыңыздар.

21. Координаталарымен берілген векторлардың скаляр көбейтіндісінің формуласын жазыңыздар.

22. Екі вектордың векторлық көбейтіндісінің анықтамасын жазыңыздар.

23. Қандай векторларды оң үштік векторлар деп атайды?

24. Векторлық көбейтіндінің қасиеттерін жазыңыздар.

25. Координаталарымен берілген екі вектордың векторлық көбейтіндісі қандай формуламен анықталады?

26. Екі вектордың коллинеарлық шартын жазыңыздар.

27. Параллелограммның ауданы қандай формуламен анықталады?

28. Үшбұрыштың ауданы қандай формуламен анықталады?

29. Вектор көбейтіндінің көмегімен күш моментінің сан мәні қалай есептеледі?

30. Үш вектордың аралас көбейтіндісінің анықтамасын жазыңыздар.

31. Аралас көбейтіндінің координаталары арқылы өрнегін жазыңыздар.

32. Аралас көбейтіндінің қасиеттерін атаңыздар.

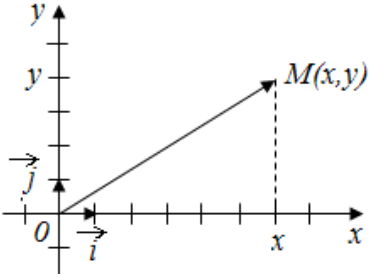
33. Аралас көбейтіндінің геометриялық мағынасы неде?

3 тарау. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Жазықтықтағы координаталар жүйесі

3.1.1. Негізгі түсініктер

Жазықтықтағы *координаталар жүйесі* ретінде жазықтықтағы нүктенің орнын сандық түрде өрнектеуге мүмкіндік беретін әдісті түсінеміз. Осындай жүйенің бірі *тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі*. Ол 2-тарауда енгізілген еді.

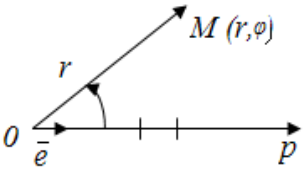


3.1 - сурет

Oxy жазықтығының кез келген M нүктесін қарастыралық. $\overline{OM}$ векторы осы M нүктесінің *радиус-векторы* деп аталады (3.1-сурет). $\overline{OM}$ радиус-векторының координаталары M нүктесінің координаталары деп аталады да $M(x,y)$ түрінде жазылады.

Координаталар жүйесінің тағы бір практикалық тұрғыдан маңызды түрі *полярлық координаталар* жүйесі болып табылады.

Полярлық координаталар жүйесінде *полюс* деп аталатын O нүктесі және *полярлық өс* деп аталатын Op сәулесі беріледі. $\bar{e}$ бірлік векторының бағыты Op сәулесінің бағытымен сәйкес келеді.

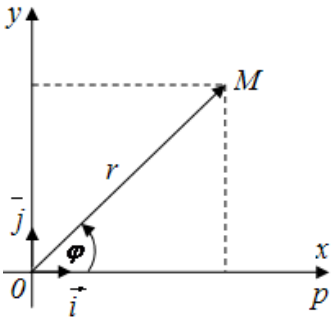


3.2-сурет

Жазықтықтың O нүктесінен басқа M нүктесінің орыны оның O нүктесінен ара қашықтығы r және OM кесіндісінің поляр өсінің оң бағытымен (сағат тіліне қарсы) жасайтын φ бұрышы арқылы айқындалады (3.2-сурет).

r мен φ сандары M нүктесінің *полярлық координаталары* деп аталады да былай жазылады $M(r;\varphi)$. Жазықтықтың барлық нүктелерін алу үшін полярлық бұрыш φ-ді $(-\pi;\pi]$ немесе $[0;2\pi)$ аралығында, ал полярлық радиусы r-ді $[0;+\infty)$ аралығында алған жеткілікті. Осы жағдайда жазықтықтың әрбір нүктесіне (O нүктесінен басқа) r мен φ сандарының жалғыз қосағы сәйкес келеді және керісінше, r мен φ сандарының әрбір қосағына жазықтықтың жалғыз ғана $M(r;\varphi)$ нүктесі сәйкес келеді.

Енді тікбұрышты және полярлық координаталар арасында байланыс орналық. Ол үшін полюсті Oxy координаталар жүйесінің бас нүктесі O-мен, ал поляр өсін Ox өсінің оң бөлігімен беттестірелік (3.3-сурет).



3.3-сурет

3.3-суреттен M нүктесінің тікбұрышты координаталары, оның полярлық коорди-наталары арқылы төмендегі түрде

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi, \end{cases}$$

ал полярлық координаталары оның декарттық координаталары арқылы төмендегідей өрнектелетінін көру қиын емес.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

3.1.2. Координаталар әдісінің жазықтықтағы қолданулары

Екі нүктенің арасындағы қашықтық

Oxy жазықтығының $M_1(x_1;y_1)$ және $M_2(x_2;y_2)$ нүктелерінің арасындағы қашықтық d-ны табалық. Ізделініп отырған қашықтық d, $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$ векторының ұзындығына тең, яғни

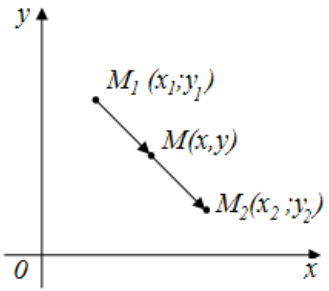
$$d=\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. $M_1(x_1;y_1)$ және $M_2(x_2;y_2)$ нүктелерін қосатын M_1M_2 кесіндісін берілген $\lambda>0$ қатынасында бөлу қажет болсын (3.4-сурет).

Басқаша айтқанда $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$ теңдігі орындалатындай M_1M_2 кесіндісінің $M(x,y)$ нүктесінің координаталарын табалық. $\overline{M_1M}$ мен $\overline{MM_2}$ векторларын қарастыралық. Егер

$$\overline{M_1M}=\lambda\overline{MM_2} \qquad (3.1)$$

теңдігі орындалса, онда M нүктесі M_1M_2 кесіндісін λ қатынасында бөледі.



3.4-сурет

$\overline{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1\}$ немесе $\overline{M_1M}=(x-x_1)\bar{i}+(y-y_1)\bar{j}$. Сол сияқты $\overline{MM_2}=\{x_2-x;\ y_2-y\}$ немесе $\overline{MM_2}=(x_2-x)\bar{i}+(y_2-y)\bar{j}$. Осы теңдіктерді ескерсек (3.1) теңдігі мына түрде жазылады:

$$(x-x_1)\bar{i}+(y-y_1)\bar{j}=\lambda(x_2-x)\bar{i}+\lambda(y_2-y)\bar{j}\,.$$

Векторлар тең болу үшін олардың сәйкес координаталары тең болу керек деген қағиданы ескерсек, соңғы теңдіктен

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \text{ яғни } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \tag{3.2}$$

және

$$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \text{ яғни } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \tag{3.3}$$

теңдіктерін аламыз.

(3.2) мен (3.3) теңдіктері *кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулалары* деп аталады. Дербес жағдайда, егер $\lambda = 1$ болса, онда (3.2) мен (3.3) теңдіктері сәйкес $x = \frac{x_1 + x}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ болады. Бұл жағдайда $M(x; y)$ нүктесі M_1M_2 кесіндісінің қақ ортасында жатады.

Үшбұрыштың ауданы

Төбелері $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ және $M_3(x_3; y_3)$ болатын $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын табу қажет болсын. Ол үшін M_1, M_2 және M_3 төбелерінен Ox өсіне M_1N_1, M_2N_2 және M_3N_3 перпендикулярларын түсірелік (3.5-сурет).

$M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданы $M_1N_1M_2N_2$ мен $N_2M_2M_3N_3$ төртбұрыштарының ауданынан $M_1N_1M_3N_3$ төртбұрышының ауданын алғанға тең, яғни

$$S_{M_1M_2M_3} = S_{M_1N_1M_2N_2} + S_{M_2N_2M_3N_3} - S_{M_1N_1M_3N_3}.$$

$$S_{M_1M_2M_3} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) =$$

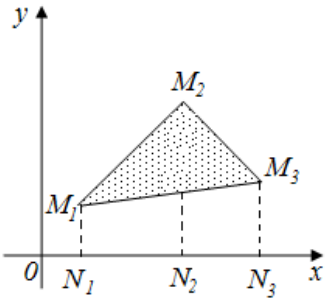
$$= \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_1 +$$

$$+ x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_3) = \frac{1}{2}[x_3(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1) - x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_3 - y_1)] =$$

$$= \left[(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) \right] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Сонымен

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$



3.5-сурет

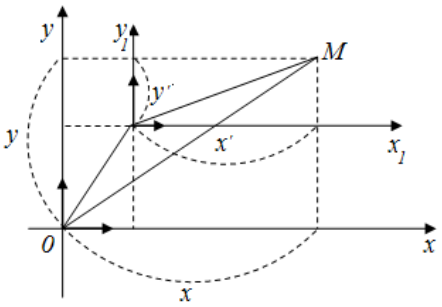
3.1.3. Координаталар жүйесін түрлендіру

Бір координаталар жүйесінен екінші бір координаталар жүйесіне көшу *координаталар жүйесін түрлендіру* деп аталады. Біз төменде бір тікбұрышты координаталар жүйесін екінші бір тікбұрышты координаталар жүйесіне түрлендірудің екі жағдайын қарастырамыз. Алынған формулалар әртүрлі жүйедегі жазықтықтың кез келген нүктесінің координаталарының арасындағы байланысты орнатады.

Координаталар өстерін параллель көшіру

Жазықтықта Oxy тікбұрышты координаталар жүйесі берілсін. Коор-динаталар өстерін параллель көшіру деп координаталар бас нүктесі өзгерген, бірақ өстерінің бағыттары мен масштабтары өзгермеген Oxy жүйесінен $O_1x_1y_1$ жүйесіне көшуді айтады.

Айталық жаңа жүйенің O_1 нүктесінің ескі Oxy жүйесіндегі координаталары x_0 мен y_0 болсын, яғни $O_1(x_0;y_0)$. Кезкелген M нүктесінің Oxy жүйесіндегі координаталарын x пен y арқылы, ал $O_1x_1y_1$ жүйесіндегі координаталарын x' пен y' арқылы белгілейік (3.6-сурет).



3.6-сурет

$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j},\ \overline{OO_1} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j},\ \overline{O_1M} = x'\bar{i} + y'\bar{j}$ векторын қарастыралық. $\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$ болғандықтан $x\bar{i} + y\bar{j} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + x'\bar{i} + y'\bar{j}$ болады. Осыдан

$$x\bar{i} + y\bar{j} = (x_0 + x')\cdot\bar{i} + (y_0 + y')\cdot\bar{j}.$$

Демек,

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Осы алынған формула M нүктесінің ескі координаталарын x' пен y' координаталары арқылы табуға мүмкіншілік береді.

Координаталар өстерін бұру

Координаталар өстерін бұру деп координаталар бас нүктесі мен масштабы өзгермейтін, ал екі координаталар өстері бірдей бұрышқа бұрылатын түрлендіруді айтады.

Айталық жаңа $O_1x_1y_1$ жүйесі Oxy жүйесін α бұрышқа бұрғаннан алынсын (3.7-сурет). Жазықтықтың кезкелген M нүктесінің ескі жүйедегі координаталары x пен y, ал жаңа

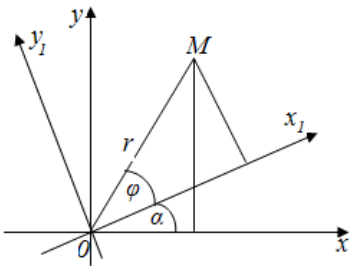
жүйедегі координаталары x' пен y' болсын. Поляр өстері Ox пен Ox' (масштабтары бірдей) және полюсі ортақ O нүктесі болатын екі поляр координаталар жүйесін қарастыралық. Бұл екі жүйенің поляр-радиустары бірдей, ал поляр бұрыштары сәйкес $\alpha+\varphi$ және φ болады. Мұндағы φ жаңа полярлық жүйедегі поляр бұрышы.

Полярлық координата жүйесінен декарттық координата жүйесіне көшу формуласы бойынша

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos(\alpha+\varphi), \\ y = r\cdot\sin(\alpha+\varphi). \end{cases}$$

немесе

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cdot\cos\alpha - r\sin\varphi\cdot\sin\alpha, \\ y = r\cos\varphi\cdot\sin\alpha + r\sin\varphi\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$



3.7-сурет

$r\cos\varphi = x'$ және $r\sin\varphi = y'$. Олай болса

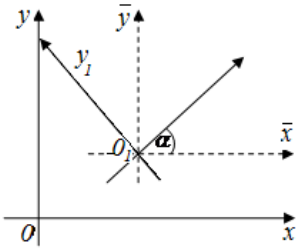
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Осы алынған формулалар *өстерді бұру формулалары* деп аталады. Олар M нүктесінің ескі координаталарын оның жаңа координаталары арқылы табуға мүмкіндік береді.

Егер жаңа $O_1x_1y_1$ координаталар жүйесі координаталар өстерін параллель көшіру және ол өстерді α бұрышына бұру арқылы алынса (3.8-сурет), онда $O_1\overline{x}\,\overline{y}$ қосымша жүйесін енгізу арқылы кезкелген нүктенің ескі координаталары x пен y-ті оның жаңа координаталары x' пен y' арқылы өрнектейтін

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

формуласын аламыз.



3.8-сурет

3.2. Жазықтықтағы қисықтар

3.2.1 Негізгі түсініктер

Жазықтықтағы сызықтар өзіне тән геометриялық қасиеттерге ие *нүктелердің жиыны* ретінде айқындалады. Мысалы, радиусы R-ге тең шеңбер центрі деп аталатын O нүктесінен R қашықтықта орналасқан жазықтықтың нүктелерінің жиынын құрайды.

Алдыңғы тақырыпта қарастырылған координаталар жүйесі жазықтық-тағы нүктенің орнын екі сан, яғни оның координаталары арқылы айқындауға мүмкіндік беретінін көрдік. Бұл тақырыпта жазықтықтағы сызықтың орналасуын теңдеулер, яғни сызық нүктелерінің координаталарын байла-ныстыратын теңдік арқылы айқындалатынын көрсетелік.

Oxy жазықтығында *сызықтың (қисықтың) теңдеуі* деп оның әрбір нүктесінің координаталары қанағаттандыратын, ал осы сызықта жатпайтын кезкелген нүктенің координаталары қанағаттандырмайтын $F(x;y)=0$ түріндегі теңдеуді айтады.

Сызықтың теңдеуіндегі x пен y айнымалы шамалары осы сызықтың *ағым координаталары* деп аталады.

Сызықтың теңдеуі осы сызықтың геометриялық қасиеттерін сол теңдеуді зерттеу арқылы анықтауға мүмкіндік береді.

Мысалы, $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің берілген сызықта жату мәселесін шешу үшін ол сызықтың графигін құрмай-ақ, таңдалынып алынған координаталар жүйесінде $M_0(x_0,y_0)$

нүктесінің координаталары сызықтың теңдеуін қанағаттандыратынын көрсетсе жеткілікті.

Мысалы, $M(-2;1)$ және $N(1;\ 1)$ нүктелерінің $2x+y+3=0$ сызығында жату немесе жатпау мәселелерін анықталық. Ол үшін, алдымен $M(-2;1)$ нүктесінің координаталарын сызықтың теңдеуіне қоямыз, яғни $2\cdot(-2)+1+3=0$. Бұл $M(-2;\ 1)$ нүктесінің берілген сызықта жататындығын көрсетеді. Сол сияқты $N(1;\ 1)$ нүктесінің координаталарын берілген сызықтың теңдеуіне қойып, яғни $2\cdot 1+1+3\neq 0$ болатындығын айқындаймыз. Бұл $N(1;\ 1)$ нүктесінің берілген сызықта жатпайтындығын көрсетеді.

$F_1(x;y)=0$ және $F_2(x;y)=0$ екі сызығының қиылысу нүктелерін табу мәселесі координаталары осы екі сызықтың да теңдеулерін қанағаттан-дыратын нүктелерді іздеу мәселесіне келтіріледі.

Басқаша айтқанда төмендегі

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0 \end{cases}$$

екі белгісізі бар екі теңдеу жүйесінің шешімін іздеу мәселесіне алып келеді. Егер бұл жүйенің нақты шешімдері болмаса, онда бұл сызықтар өзара қиылыспайды.

$F(r;\varphi)=0$ түріндегі теңдеу *сызықтың полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеуі* деп аталады.

Жазықтықтағы сызықтың теңдеуін

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases} \qquad (3.4)$$

екі теңдеу арқылы да анықтайды. Мұндағы x пен y осы сызықта жататын кезкелген $M(x;y)$ нүктесінің координаталары, ал t параметр деп аталатын айнымалы. t параметрі жазықтықтағы $M(x;y)$ нүктесінің орналасуын айқындайды. Мысалы, егер $x=t+1,\ y=t^2$ болса, онда

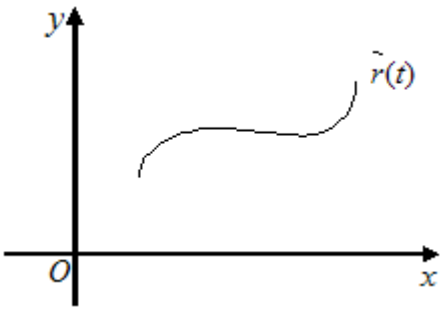
параметр t-ның $t=2$ мәні жазықтықтағы $M_0(3;4)$ нүктесін береді, себебі $x=2+1=3;\ y=2^2=4$.

Егер параметрі t өзгеріп отырса, онда жазықтықтағы нүктелер берілген сызықты бейнелей отырып орындарын өзгертіп отырады. (3.4) теңдеуі *сызықтың параметрлік теңдеуі*, ал сызықтың бұл түрде берілу әдісі *параметрлік түрде берілуі* деп аталады.

Сызықтың параметрлік теңдеуінен оның $F(x;y)=0$ түріндегі теңдеуіне көшу үшін қандай да бір әдіс арқылы (3.4) теңдеуінен t параметрін шығарып алу керек. Мысалы, $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2 \end{cases}$ теңдеуінен $t=x$ алмастыруын жасап екінші теңдеуге қойып, $y=x^2$ немесе $y-x^2=0$, яғни $F(x;y)=0$ түрдегі теңдеуді аламыз. Алайда, мұндай мүмкіншілік әруақытта бола бермейді.

Жазықтықта сызық $\bar{r}=\bar{r}(t)$ *векторлық теңдеу* түрінде де беріледі, мұндағы t-скаляр айнымалы параметр. Әрбір t_0 мәніне жазықтықтың белгілі бір $\bar{r}_0=\bar{r}(t_0)$ векторы сәйкес келеді. t параметр өзгерген сайын $\bar{r}=\bar{r}(t)$ векторының ұшы қандайда бір сызықты сызады (3.9-сурет).

$\bar{r}=\bar{r}(t)$ векторлық теңдеуіне Oxy координаталар жүйесінде (3.4) түрдегі екі скаляр теңдеу сәйкес келеді. Сызықтың параметрлік және вектор-лық теңдеулері келесі механикалық мағынаға ие: егер жазықтықтың нүк-телері бір орыннан екінші орынға ауысып отырса, онда аталынған тең деулер



3.9-сурет

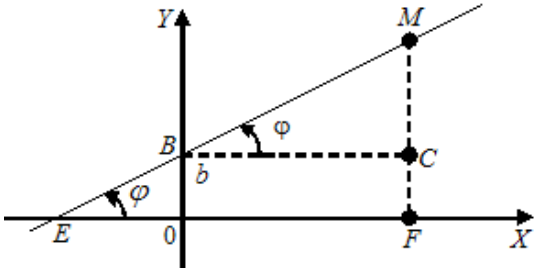
қозғалыс теңдеулері, ал сызық нүктенің *траекториясы* деп аталады. Бұл жағдайда t параметрі уақытты береді.

Сонымен, жазықтықтың әрбір сызығына $F(x;y)=0$ түріндегі теңдеу сәйкес келеді екен.

3.3. Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

3.3.1 Бұрыштық коэффициенті берілген түзудің теңдеуі

Oy өсін b қашықтығында қиятын, Ox өсінің оң бағытымен φ бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін табалық (3.10-суретті қараңыз).



3.10-сурет

Ол үшін түзудің кезкелген $M(x,y)$ нүктесін алалық. 3.10-суретінен $OB=b$, $CBM=\hat{FEM}=\varphi$, $BC=OF=x$, $CM=FM-FC=y-b$ болатынды-ғына көз жеткізу қиын емес. $CM:BC=tg\varphi$, яғни $\dfrac{y-b}{x}=tg\varphi$. Соңғы теңдіктен

$$y=tg\varphi\cdot x+b$$

теңдігін аламыз. $tg\varphi$-ді k арқылы белгілейік. Ол берілген түзудің *бұрыштық коэффициенті* деп аталады. Осы айтылғандарды ескеріп

$$y=kx+b \qquad (3.5)$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу түзудің *бұрыштық коэффициенті арқылы берілген теңдеуі* деп аталады.

3.3.2 Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.6}$$

теңдеуін қарастыралық. Мұндағы A, B және C-лар бір мезгілде нөлге тең болмайтын сандар. (3.6) теңдеуі *түзудің жалпы теңдеуі* деп аталады. $B \neq 0$ деп ұйғарып, оның екі жағын B-ға бөліп

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

теңдеуін аламыз. Егер

$$k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B} \tag{3.7}$$

деп белгілесек, онда (3.5) теңдеуін аламыз.

(3.6) теңдеуінде $C = 0$ болса, онда координаталар бас нүктесінен өтетін түзудің, ал егер $A = 0$ болса, онда Ox өсіне параллель түзудің және $B = 0$ болса, онда Oy өсіне параллель түзудің теңдеулері шығады.

Егер $A = C = 0$, яғни $y = 0$ болса, онда (3.6) түзуі Ox өсінің бойымен өтетін түзудің теңдеуін; ал $B = C = 0$, яғни $x = 0$ болса, онда (3.6) түзуі Oy өсінің бойымен өтетін түзудің теңдеуін береді. Басқаша айтқанда $y = 0$, Ox өсінің; ал $x = 0$, Oy өсінің теңдеуі.

3.3.3 Берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

Айталық $y = kx + b$ түзуі $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінен өтсін. Олай болса, ол нүктенің координаталары түзудің теңдеуін қанағаттандырады, яғни $y_0 = kx_0 + b$. $y = kx + b$ теңдеуінен

$y_0 = kx_0 + b$ теңдеуін шегеріп $y - y_0 = (kx + b) - (kx_0 + b)$, яғни

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3.8}$$

теңдеуін аламыз. Осы (3.8) теңдеуі *берілген* $M_0(x_0; y_0)$ *нүктесінен өтетін түзудің теңдеуі* деп аталады.

3.3.4 Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

Айталық $y = kx + b$ түзуі $M_1(x_1; y_1)$ және $M_2(x_2; y_2)$ нүктелерінен өтсін. Бұл түзу $M_1(x_1, y_1)$ нүктесінен өтетін болғандықтан, оның теңдеуі (3.8) формуласы бойынша

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3.9}$$

болады. Түзу $M_2(x_2, y_2)$ нүктесі арқылы өтеді, олай болса бұл нүктенің координаталары (3.9) теңдеуін қанағаттандырады, яғни

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \tag{3.10}$$

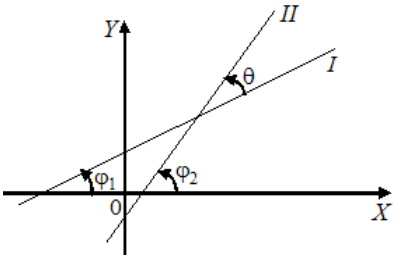
(3.9) теңдеуін (3.10) теңдеуіне бөліп

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3.11}$$

теңдеуін, яғни *берілген екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуін* аламыз.

3.3.5. Екі түзудің арасындағы бұрыш

Айталық $y = k_1 x + b_1$ және $y = k_2 x + b_2$ түзулері берілсін.



3.11-сурет

Екі түзудің арасындағы бұрыш деп $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ бұрышын айтады. $k_1 = tg\varphi_1$ және $k_2 = tg\varphi_2$ делік. Сонда

$$tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2},$$ яғни

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3.12)$$

Егер $k_1 = k_2$ болса, онда $tg\theta = 0$, яғни $\theta = 0$. Онда (3.12) теңдігінен

$$k_1 = k_2 \qquad (3.13)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдік *екі түзудің параллельдік шартын* береді. Егер $1 + k_1 k_2 = 0$ болса, онда $\theta = 90^0$. $1 + k_1 k_2 = 0$ теңдеуінен

$$k_1 k_2 = -1 \qquad (3.14)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдік *екі түзудің перпендикулярлық шартын* береді.

3.3.6. Түзудің кесінділері арқылы берілген теңдеуі

Координаталар өстерінде жатқан $A(a;0)$ және $B(0;b)$ нүктелерін қарастыралық. Осы екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі (3.11) формуласы бойынша

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$$

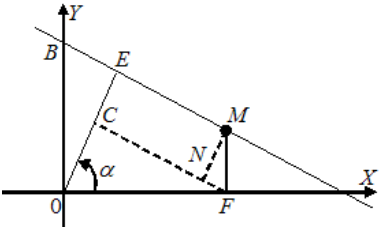
түрінде болады. Осы теңдіктен $-ay=bx-ab$ немесе $bx+ay=ab$ теңдігін аламыз. Соңғы теңдіктің екі жағын ab-ға бөліп,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3.15)$$

теңдеуін аламыз. Осы (3.15) теңдеуі *түзудің кесінділер арқылы берілген теңдеуі* деп аталады.

3.3.7. Түзудің нормаль теңдеуі

Айталық түзуге координаталар бас нүктесінен жүргізілген перпендикуляр Ox өсінің оң бағытымен α бұрышын жасасын және координата бас нүктесінен түзуге дейінгі қашықтық « p »-ға тең болсын.



3.12-сурет

Осы түзудің теңдеуін табалық. $M(x;y)$ түзудің кезкелген нүктесі болсын. Шарт бойынша $OE\perp EM$, $|OE|=p$ және $\hat{EOF}=\alpha$.

$$OF=x,\ FM=y,\ OC=OF\cdot\cos\alpha;\ CE=NM=FM\cdot\sin\alpha.$$

$|OC|+|CE|=p$ болғандықтан

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (3.16)$$

теңдеуін аламыз. Осы (3.16) теңдеуі түзудің нормаль теңдеуі деп аталады.

$\hat{BOE} = \beta$ деп белгілесек, онда $\alpha + \beta = 90^0$, яғни $\sin\alpha = \cos\beta$ болады. Осыларды пайдаланып

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0, \qquad (3.17)$$

түзудің тағыда бір *нормаль теңдеуін* аламыз.

Енді түзудің жалпы теңдеуін ((3.6) формуласын қараңыз) оның нормальдық түріне келтіру мәселесімен шұғылданалық. Ол үшін түзудің жалпы теңдеуі қандайда бір M көбейткіші арқылы нормаль түрге ие болсын деп ұйғаралық, яғни $M \cdot Ax + M \cdot By + M \cdot C = 0$ болсын.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ болғандықтан $(MA)^2 + (MB)^2 = 1$. Осы соңғы теңдіктен $M = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$. (3.16) теңдігіндегі p-ның алдындағы таңба минус болғандықтан MC шамасы теріс болады, яғни $MC < 0$.

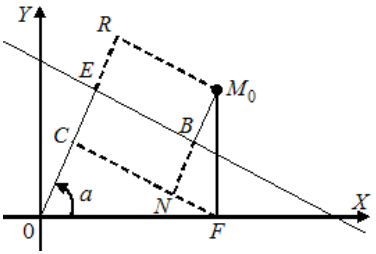
Сонымен

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ MC \le 0. \qquad (3.18)$$

Осы M саны *нормальдаушы көбейткіш* деп аталады.

3.3.8 Түзуге дейінгі ара қашықтық

$M_0(x_0; y_0)$ нүктесінен $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ түзуіне дейінгі ара қашықтықты табалық (3.13-сурет).



3.13-сурет

M_0 нүктесінен түзуге дейінгі ара қашықтық $M_0B = d$ кесіндісіне тең.

$$OF = x_0;\ \ FM_0 = y_0;\ |OC| + |CE| = p;$$
$$|OC| + |OF|\cos\alpha = x_0\cos\alpha;\ |CE| = |CR| - |ER|;$$
$$|CR| + |FM_0|\sin\alpha = y_0\sin\alpha;\ |ER| = d.$$

Сонымен $|OC| + |CR| - d = p$, яғни $d = |OC| + |CR| - p$ немесе

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \qquad (3.19)$$

(3.19) формуласы мына мәселені аңғартады: нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты табу үшін сол түзудің нормальдық теңдеуіндегі x пен y-тің орнына берілген $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінің координаталарын қою қажет.

Егерде түзудің теңдеуі жалпы түрде берілсе, онда берілген $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ түзуіне дейінгі ара қашықтық

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.20)$$

формуласы арқылы табылады.

3.4. Жазықтықтағы екінші ретті қисықтар

Ағым координаталарына қарағанда екінші дәрежелі

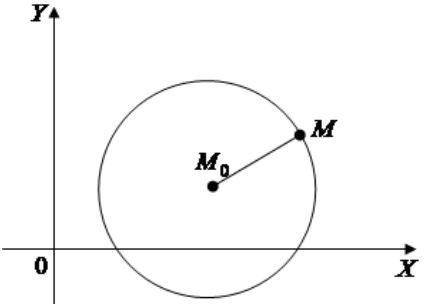
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (3.21)$$

теңдеуімен берілген сызықты (қисықты) қарастыралық. Мұндағы A, B, C коэффициенттері бір мезгілде нөл болмайтын нақты сандар. Осындай сызықтар *екінші ретті сызықтар (қисықтар)* деп аталады. Алдағы уақытта (3.21) теңдеуі жазықтықта не шеңберді, не эллипсті, не гиперболаны және не параболаны айқындайтыны жөнінде тұжырымдар жасалынады. Ол тұжырымдардан бұрын осы аталған қисықтардың қасиеттеріне тоқталалық.

3.4.1. Шеңбер

Анықтама. Центрі деп аталатын берілген нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орыны *шеңбер* деп аталады. Шеңберден центрге дейінгі ара қашықтық оның *радиусы* деп аталады.

Енді радиусы R-ге тең, центрі $M_0(x_0;y_0)$ нүктесінде жататын шеңбердің теңдеуін табалық (3.14-сурет).



3.14-сурет

Ол үшін шеңбердің бойынан кез келген $M(x;y)$ нүктесін алайық. Өзімізге белгілі, екі нүктенің ара қашықтығының формуласы бойынша $|M_0M|=R$, яғни $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$. Осыдан

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (3.22)$$

(3.22) теңдеуі *шеңбердің канондық теңдеуі* деп аталады.

Дербес жағдайда $x_0=y_0=0$ болса, онда центрі координаталар бас нүктесінде орналасқан, теңдеуі $x^2+y^2=R^2$ болатын шеңберін аламыз.

(3.22) теңдеуін онша күрделі емес түрлендіруден кейін $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$ түріне келтіруге болады. Осы соңғы теңдеуді екінші ретті қисықтардың жалпы

(3.21) теңдеуімен салыстырып, мынандай қорытынды жасай аламыз:

1) x^2 бен y^2-тың коэффициенттері өзара тең (бірге тең),

2) xy көбейтіндісі бар мүше қатыспайды (нөлге тең).

Енді кері есепті қарастыралық. (3.21) теңдеуіне $B=0$ және $A=C\neq 0$ мәндерін қойып

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (3.23)$$

теңдеуін аламыз. Осы теңдеудің екі жағын A-ға бөлейік, яғни

$$x^2+y^2+\frac{2D}{A}x+\frac{2F}{A}y+\frac{E}{A}=0.$$

Осыдан

$$x^2+\frac{2Dx}{A}+\frac{D^2}{A^2}+y^2+\frac{2E}{A}y+\frac{E^2}{A^2}+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{A^2}-\frac{E^2}{A^2}=0$$

немесе

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A} \qquad (3.24)$$

теңдеулерін аламыз. (3.24) теңдеуінде $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}>0$ болса, онда ол центрі $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ нүктесінде жататын, ал радиусы $R=\sqrt{\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}}$ болатын шеңбердің теңдеуін береді.

Егер $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}=0$ болса, онда (3.24) теңдеуі

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0$$

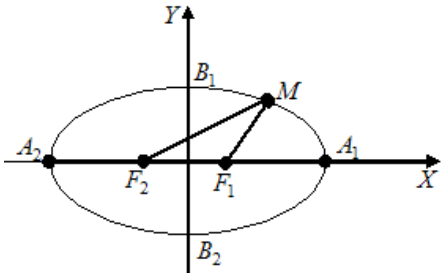
түріне келеді. Ал бұл теңдеуді жалғыз $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ нүктесінің координаталары қанағаттандырады.

Егер $\frac{E^2}{A^2}+\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}<0$ болса, онда (3.24) теңдеуі немесе оған пара-пар (3.23) теңдеуі ешқандай сызықты (қисықты) айқындамайды.

3.4.2. Эллипс

Анықтама. Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтық-тарының қосындысы тұрақты $2a$ шамасына тең нүктелердің геометриялық орыны эллипс деп аталады (3.15-сурет).

Фокустары координаталар бас нүктесінен бірдей қашықтықта және Ox өсінде жататын эллипстің теңдеуін жазалық.



3.15-сурет

F_1 мен F_2 эллипстің фокустары, олардың ара қашықтығын $2c$ арқылы белгілейік, яғни $|F_1F_2|=2c$ болсын.

$F_1(c;0)$ және $F_2(-c;0)$ болғандықтан

$$|F_1M|=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2};\ |F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Анықтама бойынша $|F_1M|+|F_2M|=2a$. Олай болса $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Осы теңдіктің екі жағын квадраттап

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын 4-ке бөліп, тағыда квадраттасақ

$$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2,$$

немесе

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

теңдігін аламыз. Анықтама бойынша $a>c$ болғандықтан $a^2-c^2=b^2$ деп белгілейік. Сонда $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Осы теңдіктің екі жағын a^2b^2-қа бөліп

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.25)$$

эллипстің канондық теңдеуін аламыз.

Енді эллипстің координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін табалық. Егер $y=0$ болса, онда эллипстің теңдеуінен $x^2=a^2$, яғни $x=\pm a$ болатындығына көз жеткізу қиын емес. Олай болса, эллипс Ox өсін $A_1(a;0)$ және $A_2(-a;0)$ нүктелерінде қияды. Дәл осы жолмен эллипстің Oy өсін $B_1(0;b)$ және $B_2(0;-b)$ нүктелерінде қиятынына көз жеткізуге болады.

A_1, A_2, B_1 және B_2 нүктелері эллипстің *төбелері*, ал A_1A_2 және B_1B_2 кесінділері эллипстің сәйкес *үлкен* және *кіші өстері* деп аталады. OA_1 мен OB_1 кесінділері эллипстің жарты өстері, ал $\frac{c}{a}=\varepsilon$ қатынасы эллипстің *эксцентриситеті* деп аталады. $\varepsilon<1$ екендігі өзінен-өзі түсінікті. MF_1 мен MF_2 кесінділері эллипстің *фокальдық радиусы* деп аталады. Олар үшін

$$|MF_1|=r_1=a-\varepsilon x;\ |MF_2|=r_2=a+\varepsilon x \qquad (3.26)$$

теңдіктері орындалады. Егер эллипстің центрі $M_0(x_0;y_0)$ нүктесінде жатса, онда оның канондық теңдеуі

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (3.27)$$

болады.

Теңдеуі бойынша эллипстің формасын зерттеу

Эллипстің канондық теңдеуін пайдаланып, оның формасын анықталық.

1. (3.25) теңдеуінде x пен y тек жұп дәрежеде енеді, ол деп отырғанымыз егер $M(x;y)$ нүктесі эллипсте жатса, онда $N(x;-y), K(-x;y)$ және $P(-x;-y)$ нүктелері де осы эллипсте жатады деген сөз. Осыдан эллипс оның центрі деп аталатын $O(0;0)$ нүктесіне және Ox пен Oy өстеріне қарағанда симметриялы екендігі шығады.

2. Эллипстің канондық теңдеуінен оның сол жағындағы әрбір қосылғыштың бірден аспайтынын көреміз, яғни $\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1$ немесе $-a\le x\le a,\ -b\le y\le b$. Демек, эллипстің барлық нүктелері $x=\pm a,\ y=\pm b$ түзулерінен құралған төртбұрыштың ішінде жатады.

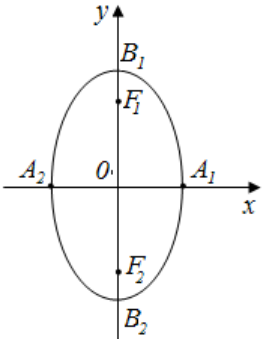
3. (3.25) теңдеуінен екі теріс емес қосылғыштың қосындысы бірге тең екендігін көреміз. Бұл бір қосылғыш өскенде екінші қосылғыштың кемитінін көрсетеді, яғни егер $|x|$ өссе $|y|$ кемиді және керісінше $|y|$ өссе $|x|$ кемиді.

Эллипстің формасы $\frac{b}{a}$ қатынасына тәуелді. Егер $a=b$ болса, онда эллипс теңдеуі $x^2+y^2=a^2$ болатын шеңберге айналады. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ түзулері эллипстің *директрисалары* деп аталады.

Келесі тұжырым эллипстің директрисасы туралы толық мағлұмат береді.

Теорема. Егер r эллипстің кезкелген нүктесінен оның фокустарының біреуіне дейінгі қашықтық, ал d осы нүктеден сол фокусқа сәйкес келетін директрисаға дейінгі ара қашықтық болса, онда $\frac{r}{d}$ қатынасы осы эллипстің экцентриситетіне тең тұрақты шама болады, яғни $\frac{r}{d}=\varepsilon$.

(3.25) теңдеуінде $a>b$ деп ұйғарғанбыз. Егер $a<b$ болса, онда (3.25) теңдеуі үлкен өсі $2b$-ға тең және Oy өсінде жататын, ал кіші өсі $2a$-ға тең және Ox өсінде жататын эллипсті береді (3.16-сурет). Бұл эллипстің фокустары $F_1(0;c)$ және $F_2(0;-c)$ нүктеле-рінде жатады. Мұндағы $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

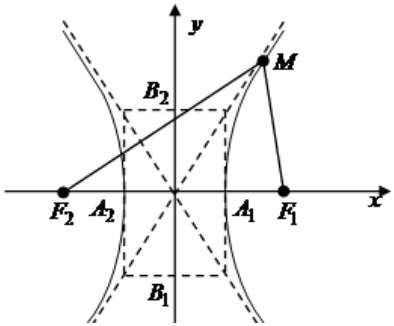


3.16-сурет

3.4.3. Гипербола

Анықтама. Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтық-тарының айырымы тұрақты $2a$ шамасына тең нүктелердің геометриялық орыны *гипербола* деп аталады (3.17-сурет).

Фокустары Ox өсінде жататын және координаталар бас нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан гиперболаның теңдеуін жазалық.



3.17-сурет

$|F_1F_2|=2c$ деп белгілейік. Сонда $F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$, $|F_1M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, мұндағы $M(x;y)$ гиперболаның кезкелген нүктесі. Анықтама бойынша $|F_1M|-|F_2M|=2a$. Сондықтан

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2};\ x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+$$
$$+x^2-2xc+c^2+y^2;\ a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2c^2+a^2y^2=x^2c^2-2a^2xc+a^4;$$
$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

$c^2-a^2=b^2$ деп белгілейік. Сонда $x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$ немесе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.28)$$

гиперболаның канондық теңдеуін аламыз.

Ox өсін гипербола $A_1(a;0)$ және $A_2(-a;0)$ нүктелерінде қияды. A_1A_2 өсі гиперболаның *нақты өсі* деп аталады. Oy өсін гипербола қимайды, B_1B_2 өсі гиперболаның жорымал өсі, $\frac{c}{a}=\varepsilon$ қатынасы гиперболаның *эксцентриситеті*, ал $y=\pm\frac{b}{a}x$ түзулері оның *асимптоталары* деп аталады.

Егер гиперболаның центрі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде орналасса, онда оның канондық теңдеуі

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\cdot \qquad (3.29)$$

$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-гиперболасы *түйіндес гипербола* деп аталады.

Теңдеуі бойынша гиперболаның формасын зерттеу

1. (3.28) теңдеуінде x пен y-тің тек қана жұп дәрежелері енеді. Сондықтан гипербола оның *центрі* деп аталатын $O(0;0)$ нүктесіне және Ox пен Oy өстеріне қарағанда симметриялы.

2. Гиперболаның координата өстерімен қиылысу нүктелерін табалық. (3.28) теңдеуінен $y=0$ деп оның Ox өсімен қиылысу нүктелерін табамыз. Олар $A_1(a;0)$ және $A_2(-a;0)$ нүктелері. (3.28) теңдеуінен $x=0$ деп мүмкін болмайтын $y^2=-b^2$ теңдеуін аламыз. Демек, гипербола Oy өсін қимайды.

$A_1(a;0)$ мен $A_2(-a;0)$ гиперболаның *төбелері*, $A_1A_2=2a$ кесіндісі гиперболаның *нақты өсі*, ал $OA_1=OA_2=a$ кесіндісі оның *жарты өсі* деп аталады. $B_1B_2=2b$ кесіндісі гиперболаның жорымал өсі, ал b оның *жарты жорымал* өсі деп аталады. Қабырғалары $2a$ және $2b$ болатын тіктөртбұрыш гиперболаның *негізгі тіктөртбұрышы* деп аталады.

3. (3.28) теңдеуінен $\frac{x^2}{a^2}$ шамасы бірден кем болмайтынын көреміз, яғни $\frac{x^2}{a^2}\geq 1$ немесе $|x|\geq a$. Бұл гиперболаның нүктелері $x=a$ түзуінің (гиперболаның оң тармағы) оң жағында және $x=-a$ түзуінің (гиперболаның сол тармағы) сол жағында орналасатынын көрсетеді.

4. (3.28) теңдеуінен $|x|$ өскен сайын $|y|$-тің өсетінін көреміз. Бұл тұжырым $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ айырымының тұрақты мәні бірге тең болатындығынан шығады.

(3.28) гиперболасы үшін $a=b$, яғни оның жарты өстері өзара тең болса, онда ол *теңбүйірлі гипербола* деп аталады. Оның канондық теңдеуі

$$x^2-y^2=a^2$$

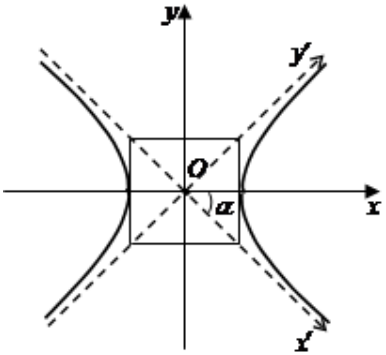
болады. Теңбүйірлі гиперболаның асимптоталарының теңдеулері $y = x$ және $y = -x$, яғни координаталық бұрыштардың биссектрислары болады.

Осы гиперболаның теңдеуін енді координаталар өстерін $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ бұрышқа бұрғаннан шығатын жаңа $Ox'y'$ координаталар жүйесінде қарастыралық (3.18-сурет).

Координаталар өстерін бұру, яғни

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

формулаларын пайдаланамыз. Осы мәндерді теңбүйірлі гиперболаның теңдеуіне қоялық:



3.18-сурет

$$\left[x'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 - \left[x'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 = a^2,$$

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2 - \frac{1}{2}(-x'+y')^2 = a^2; \qquad x' \bullet y' = \frac{a^2}{2}$$

немесе $y' = \frac{k}{x'}$.

Мұндағы $k = \frac{a^2}{2}$.

Сонымен Ox және Oy өстері асимптоталар болатын теңбүйірлі гиперболаның теңдеуі $y=\frac{k}{x}$ болады екен.

Фокустарының ара қашықтықтарының нақты жарты өске қатынасы, яғни $\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ (3.28) гиперболаның *эксцентриситеті* деп аталады да былай белгіленеді $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Гипербола үшін $c>a$ болғандықтан $\varepsilon>1$ болады. Гиперболаның эксцентриситеті оның формасын сипаттайды. Шынында да (3.28) теңдігінен $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1$, яғни $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ немесе $\varepsilon=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Осыдан гиперболаның экцентриситеті неғұрлым кіші болған сайын, оның жарты өстерінің қатынасы $\frac{b}{a}$ соғұрлым кішірейе береді. Бұл оның негізгі тіктөртбұрышының соғұрылым созыла беретіндігін көрсетеді.

Теңбүйірлі гиперболаның эксцентриситеті $\sqrt{2}$-ге тең. Шынында да

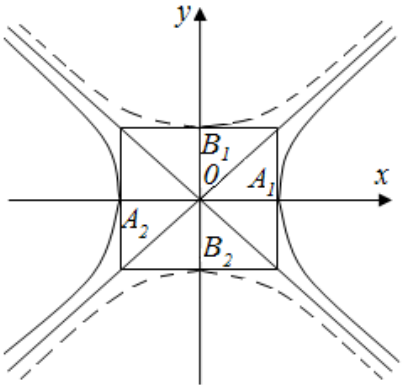
$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{\frac{2a^2}{a^2}}=\sqrt{2}.$$

Гиперболаның $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ және $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ фокальдық радиустары оның оң тармағының нүктелері үшін $r_1=\varepsilon x+a$ және $r_2=\varepsilon x-a$, ал сол тармағының нүктелері үшін $r_1=-(\varepsilon x+a)$ және $r_1=-(\varepsilon x-a)$.

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ түзулері гиперболаның *директрисалары* деп аталады. Гипербола үшін $\varepsilon > 1$ болғандықтан $\frac{a}{\varepsilon} < a$ болады. Бұл директрисаның оң жағы гиперболаның центрі мен оң жақ төбесінің арасында, ал директрисаның сол жағы гиперболаның центрі мен сол жақ төбесінің арасында орналасатынын көрсетеді.

Нақты өсі $2b$-ға тең және Oy өсінде жататын, ал жорымал өсі Ox өсінде жататын $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ қисығы да гипербола болады. 3.19–суретінде ол пунктірлі сызық арқылы көрсетілген.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ және $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ гиперболаларының асимптоталары ортақ. Олар *түйіндес гиперболалар* деп аталады.



3.19-сурет

3.4.4. Парабола

Анықтама. Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орыны *парабола* деп аталады.

Фокус пен директрисаның ара қашықтығын p арқылы белгілейік. Фокус пен директриса координаталар бас нүктесінің екі жағында орналасқан жағдайдағы параболаның теңдеуін табалық. Бұл жағдайда фокустың координаталары $F\left(p/2;0\right)$, ал директрисаның теңдеуі $x=-\dfrac{p}{2}$ болады. Анықтама бойынша $|MF|=|MN|$.

Мұндағы $|MF|=\sqrt{\left(x-p/2\right)^2+y^2}$; $|MN|=x+\dfrac{p}{2}$. Соңғы теңдеудің екі жағын квадраттап $x^2-xp+\dfrac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\dfrac{p^2}{4}$ немесе $y^2=2px$ теңдеуін аламыз.

$$y^2=2px \tag{3.30}$$

теңдеуі *параболаның канондық теңдеуі* деп аталады. $O(0;0)$ нүктесі-параболаның төбесі. Егер параболаның тармағы солға қарай бағытталса, оның теңдеуі

$$y^2=-2px, \tag{3.31}$$

ал, егер параболаның тармағы жоғары бағытталса, оның теңдеуі

$$x^2=2py, \tag{3.32}$$

ал төмен бағытталса

$$x^2=-2py. \tag{3.33}$$

болады.

Төбесі $M\left(x_0;y_0\right)$ нүктесінде орналасқан параболаның теңдеуі

$$\left(y-y_0\right)^2=2p\left(x-x_0\right). \tag{3.34}$$

болады.

Теңдеуі бойынша параболаның формасын зерттеу

1. Параболаның (3.30) теңдеуінде y айнымалысының дәрежесі жұп, яғни парабола Ox өсіне қарағанда симметриялы.

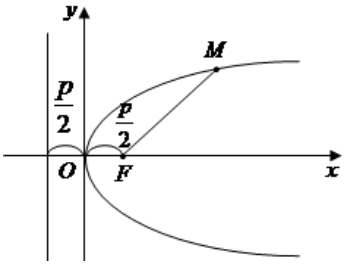
2. $p > 0$ болғандықтан (3.30) теңдеуінен $x \geq 0$ екендігі шығады. Демек, парабола Ox өсінің оң жағында орналасады.

3. $x = 0$ болса $y = 0$ болады. Демек, парабола координаталар бас нүктесі арқылы өтеді.

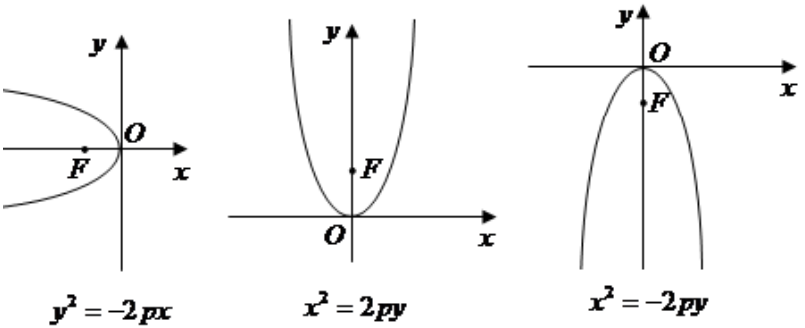
4. x өскен сайын y-тің модулі де өседі. $y^2 = 2px$ параболасы 3.20–суретінде кескінделген. $FM = r$ кесіндісі M нүктесінің *фокальдық радиусы* деп аталады.

$y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ және $x^2 = -2py$ $(p > 0)$

теңдеулері 3.21-суретінде кескінделген параболаларды береді.



3.20-сурет

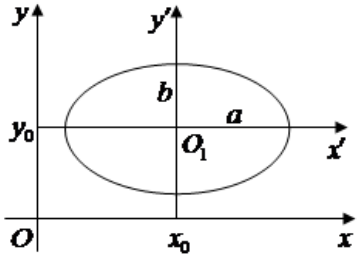


3.21-сурет

3.5. Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеулері

3.5.1. Координаталар өстеріне параллель және оларға қарағанда симметриялы екінші ретті қисықтардың теңдеулері

Алдымен центрі $O_1(x_0, y_0)$ нүктесінде жататын, координата өстеріне симметрия-лы және жарты өстері сәйкес a мен b болатын эллипстің теңдеуін табалық. O_1x' пен O_1y' өстері сәйкес Ox пен Oy өстеріне параллель және олармен бағыт-тас болатындай етіп эллипстің $O_1(x_0, y_0)$ центріне жаңа $O_1x'y'$ координаталар жүйесінің бас нүктесін орналастырамыз (3.22-сурет).



3.22-сурет

Осы координаталар жүйесіндегі эллипстің теңдеуі

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

болады. $x' = x - x_0,\ y' = x - y_0$ болатындықтан (3.1.3-тақырыбындағы парал-лель көшіру формулаларын қараңыздар) эллипстің теңдеуі ескі коорди-наталар системасында

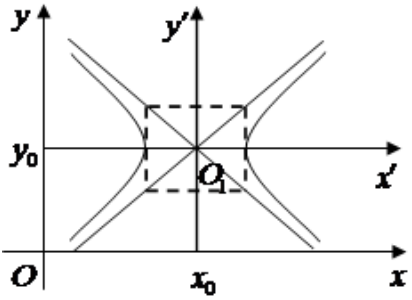
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

түрінде болады.

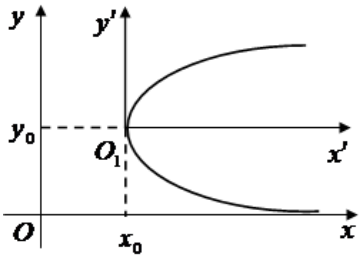
Дәл осылай пайымдай отырып центрі $O_1(x_0; y_0)$ нүктесінде жататын және жарты өстері a мен b болатын (3.23-сурет) төмендегі гиперболаның теңдеуін аламыз:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

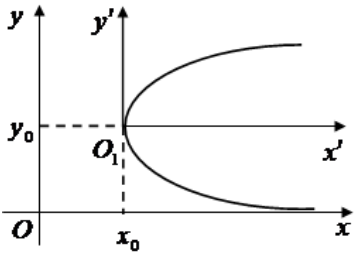
Сол сияқты 3.24-суретінде кескінделген параболаларды аламыз.



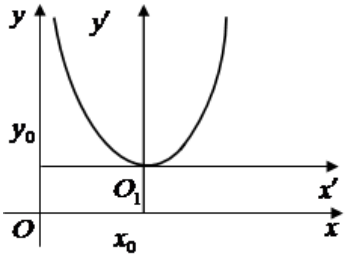
3.23-сурет



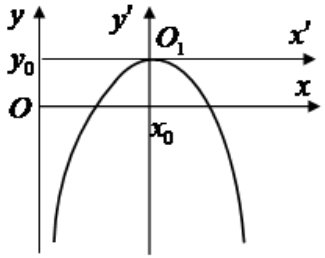
$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$



$$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$$



$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$$



$$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$$

3.24-сурет

$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ **теңдеуі**

Шеңбердің, эллипстің, гиперболаның және параболаның канондық теңдеулерін қандайда бір түрлендірулер (жақшаны ашу, теңдеудің барлық мүшелерін оның бір жағына шығару, ұқсас мүшелерді жинастыру, коэффициенттерге жаңа белгілеулер енгізу және т.б.) арқылы

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (3.35)$$

түріндегі теңдеуге келтіруге болады. Соңғы теңдеуде A мен C коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең болмайды.

Мынадай сауалдың туатыны заңды құбылыс: (3.35) түріндегі теңдеу екінші ретті қисықтарды (шеңбер, эллипс, гипербола, парабола) айқындайды ма? Жоқ айқындамай ма?

Бұл сауалдың жауабын келесі теорема береді.

Теорема. (3.35) теңдеуі $A = C$ болғанда шеңберді, $A \cdot C > 0$ болғанда эллипсті, $A \cdot C < 0$ болғанда гиперболаны және $A \cdot C = 0$ болғанда парабо-ланы береді. Мынадай жағдайлар да кездесуі мүмкін: эллипс (шеңбер) нүктеге, не болмаса жорымал эллипске(шеңберге) айналады; гипербола қиылысатын екі түзуге айналады; парабола екі параллель түзуге айналады.

Бұл теореманың дәлелдеуіне тоқталмай, оның тұжырымдарының орындалатындығын нақты мысалдар арқылы көрсетелік.

1-мысал. $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$ теңдеуімен берілген екінші ретті қисықтың түрін анықталық.

Шешуі. Жоғарыдағы теорема бойынша теңдеу эллипсті береді, себебі, $A \cdot C = 4 \cdot 5 > 0$. Шынында да

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5\left(y^2 - 6y + 9\right) - 25 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2 = 60, \quad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1.$$

Сөйтіп, центрі $O\left(-\frac{5}{2};3\right)$ нүктесінде жататын және жарты өстері $a=\sqrt{15}, b=\sqrt{12}$ болатын эллипстің канондық теңдеуін алдық.

2-мысал. $x^2+10x-2y+11=0$ теңдеуі қандай екінші ретті қисықты айқындайды?

Шешуі. Теорема бойынша бұл теңдеу параболаны береді, себебі $C=0$. Шынында да

$$x^2+10x+25-2y+11-25=0,$$
$$(x+5)^2=2y+14,\ (x+5)^2=2(y+7).$$

Бұл төбесі $O(-5;-7)$ нүктесінде жататын, ал $p=1$ болатын параболаның теңдеуі.

3-мысал. $4x^2-y^2+8x-8y-12=0$ теңдеуі қандай екінші ретті қисықты айқындайды?

Шешуі. Теорема бойынша бұл теңдеу гиперболаны береді, өйткені $A\cdot C=-4<0$. Бірақ бұл арада теореманың екінші жартысында айтылған тұжырым орындалады. Шынында да

$$4(x^2+2x+1)-(y^2+8y+16)-4+16-12=0,$$
$$4(x+1)^2-(y+4)^2=0,\ [2(x+1)+(y+4)]\cdot[2(x+1)-(y+4)]=0,$$

$(2x+y+6)(2x-y-2)=0$. Бұл теңдеу екі қиылысатын түзуді айқындайды.

3.5.2. Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеулері

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (3.36)$$

екі белгісізді екінші ретті жалпы теңдеуді қарастыралық. Бұл теңдеу (3.21) теңдеуінен x пен y-тің көбейтіндісі бар $(B\neq 0)$ мүшесімен ерекшеленеді. (3.36) теңдеуін координаталар өстерін α бұрышына бұру жолы (әдісі) арқылы x пен y-тің

көбейтіндісі болмайтын теңдеуге келтіруге болады. Ол үшін координаталар өстерін бұру (3.1.3-тақырыбын қараңыздар), яғни

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\ \ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

формулалары арқылы ескі координаталар жаңа координаталар арқылы өрнектеледі:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2\beta(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\cdot(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

Енді $x'\cdot y'$ көбейтіндісінің коэффициенті нөлге тең болатындай етіп α бұрышын табалық, яғни

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

немесе

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0 \qquad (3.37)$$

теңдігі орындалуы тиіс. Соңғы теңдіктен

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$tg\,2\alpha = \frac{2B}{A - C} \qquad (3.38)$$

теңдігі шығады.

Сонымен координаталар өстерін (3.38) шарты орындалатындай α бұрышына бұрсақ, онда (3.21) теңдеуі (3.35) теңдеуіне келеді екен.

Қорытынды: екінші ретті жалпы теңдеу (3.36) шеңбер, эллипс, парабола және гипербола секілді қисықтарды айқындайды.

Ескерту! Егер $A = C$ болса, онда (3.38) теңдігі мағынасын жоғалтады. Бұл жағдайда $\cos 2\alpha = 0$, яғни $2\alpha = 90^0$, $\alpha = 45^0$. Олай болса $A = C$ жағдайында координаталар өстерін 45^0-қа бұру керек.

III-тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Жазықтықтағы сызықтың теңдеуі қалай анықталады?
2. Координаталар жүйесін түрлендіру деп нені айтады?
3. Түзудің бұрыштық коэффициенттері арқылы берілген теңдеуін жазыңыз.
4. Түзудің жалпы теңдеуін жазыңыз.
5. Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
6. Түзудің кесінділер арқылы берілген теңдеуін жазыңыз.
7. Екі түзудің қиылысуы қалай табылады?
8. Нүктенің түзудегі проекциясы деген не?
9. Нүктеден түзуге дейінгі ара қашықтықтың формуласын жазыңыз.
10. Жазықтықтағы екі түзудің арасындағы бұрыш қалай табылады?
11. Екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын жазыңыз.
12. Ox және Oy параллель түзудің теңдеуін жазыңыз.
13. Координаталар бас нүктесінен өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.
14. Шеңбердің канондық теңдеуін жазыңыз.
15. Эллипстің канондық теңдеуін жазыңыз.
16. Гиперболаның канондық теңдеуін жазыңыз.
17. Параболаның канондық теңдеуін жазыңыз.
18. Эллипстің эксцентриситеті, директрисасы деп нені айтады?
19. Гиперболаның асимптотасы деп нені айтады?
20. Екінші ретті қисықтардың жалпы теңдеуін жазыңыз.

4 тарау. КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

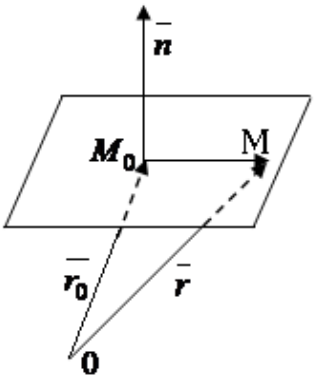
4.1. Кеңістіктегі жазықтық

Жазықтық кеңістікте әртүрлі жолдармен анықталады. Мысалы, жазықтық нүкте мен оған перпендикуляр вектор немесе үш нүкте, сол сияқты координаталар өстерін қиюшы кесінділер және т.б. арқылы бірмәнді анықталады. Жазықтықтың берілу тәсілдеріне қарай оның әртүрлі теңдеулері қарастырылады.

4.1.1. Жазықтықтың жалпы және кесінділер арқылы берілген теңдеулері. $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ нүктесінен өтетін және $\bar{n} = \{A, B, C\}$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі векторлық түрде былай жазылады:

$$\bar{n}\left(\bar{r} - \bar{r_0}\right) = 0, \tag{4.1}$$

мұндағы $\bar{r}$ жазықтықтың кез келген $M\left(x, y, z\right)$ нүктесінің, ал $\bar{r_0}$, $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ нүктесінің радиус-векторы. (4.1) теңдеуі $\bar{n}$ векторы мен $\bar{r} - \bar{r}_0 = \overline{M_0M}$ векторының перпендикулярлық шартын өрнектейді (4.1-сурет).



4.1-сурет

(4.1) теңдеуін былай жазуға болады

$$\bar{n}\bar{r} + D = 0, \text{ мұндағы } D = -\left(\bar{n}\bar{r}_0\right).$$

$\bar{n} = \{A, B, C\}$ және $\bar{r} - \bar{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ болғандықтан (4.1) теңдеуі былай жазылады

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (4.2)$$

немесе

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (4.3)$$

Мұндағы

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

(4.2) теңдеуі *берілген нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуі*, ал (4.3) теңдеуі *жазықтықтың жалпы теңдеуі* деп аталады.

Ескерту! (4.2) мен (4.3) теңдеулерінде A, B, C коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең болмайды.

Жазықтықтың жалпы теңдеуінің дербес жағдайларын қарастыралық.

1. Егер $D = 0$ болса, онда

$$Ax + By + Cz = 0. \qquad (4.4)$$

Бұл координаталар бас нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуі.

2. а) Егер $D \neq 0,\ A = 0$ болса, онда

$$By + Cz + D = 0. \qquad (4.5)$$

Бұл Ox өсіне параллель жазықтықтың теңдеуі.

ә) Егер $D \neq 0,\ B = 0$ болса, онда

$$Ax + Cz + D = 0. \qquad (4.6)$$

Бұл Oy өсіне параллель жазықтықтың теңдеуі.

б) Егер $D \neq 0,\ C = 0$ болса, онда

$$Ax + By + D = 0. \qquad (4.7)$$

Бұл Oz өсіне параллель жазықтықтың теңдеуі.

3. а) Егер $D = A = 0$ болса, онда

$$By + Cz = 0. \qquad (4.8)$$

Бұл Ox өсінен өтетін жазықтықтың теңдеуі.

ә) Егер $D = B = 0$ болса, онда

$$Ax + Cz = 0. \qquad (4.9)$$

Бұл Oy өсінен өтетін жазықтықтың теңдеуі.

$$Ax + By = 0. \qquad (4.10)$$

Бұл Oz өсінен өтетін жазықтықтың теңдеуі.

4. а) Егер $D \neq 0,\ B = C = 0$ болса, онда

$$Ax + D = 0. \qquad (4.11)$$

Бұл Oyz жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуі.

ә) Егер $D \neq 0,\ A = C = 0$ болса, онда

$$By + D = 0. \qquad (4.12)$$

Бұл Oxz жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуі.

б) Егер $D \neq 0,\ A = B = 0$ болса, онда

$$Cz + D = 0. \qquad (4.13)$$

Бұл Oxy жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуі.

в) Егер $D = B = C = 0$ болса, онда

$$Ax = 0 \text{ немесе } x = 0 \qquad (4.14)$$

Бұл Oyz жазықтығының теңдеуі.

5. г) Егер $D = A = C = 0$ болса, онда

$$By = 0 \text{ немесе } y = 0. \qquad (4.15)$$

Бұл Oxz жазықтығының теңдеуі.

д) Егер $D = A = B = 0$ болса, онда

$$Cz = 0 \text{ немесе } z = 0. \tag{4.16}$$

Бұл Oxy жазықтығының теңдеуі.

Егерде (4.3) теңдеуінің бірде бір коэффициенттері нөлге тең болмаса, онда ол теңдеуді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{4.17}$$

түріне келтіруге болады. Мұндағы $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$. (4.17) теңдеуі *жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі* деп аталады.

4.1.2. Жазықтықтың нормал теңдеуі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{4.18}$$

түріндегі теңдеу *жазықтықтың нормал теңдеуі* деп аталады. Мұндағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ координаталар бас нүктесінен жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың бағыттаушы косинустары, ал p оның ұзындығы.

Таңбасы (4.3) жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі D санына қарама-қарсы, *нормалдық көбейткіш* деп аталатын

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{4.19}$$

санын (4.3) теңдеуінің екі жағына көбейтіп жазықтықтың (4.18) түріндегі нормал теңдеуін алуға болады.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесінен (4.18) жазықтығына дейінгі арақашықтық

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|,$$

ал (4.3) жазықтығына дейінгі ара қашықтық

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.20)$$

формулалары арқылы есептеледі.

4.2. Кеңістіктегі түзулер

4.2.1. Түзудің параметрлік және канондық теңдеулері. Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

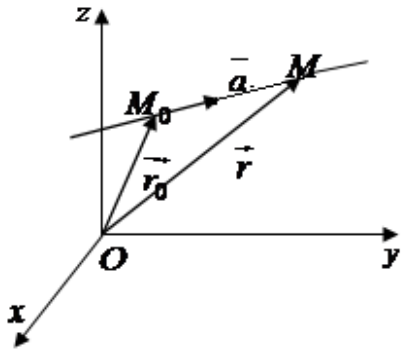
$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтетін, $\bar{a} = \{l, m, n\}$ векторына параллель түзудің теңдеуі векторлық түрде былай жазылады

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t, \qquad (4.21)$$

Мұндағы $\bar{r}$, кез келген $M(x, y, z)$ нүктесінің; ал $\bar{r_0}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінің радиус векторлары, t – параметр (4.2-сурет). $\bar{a}$ векторы түзудің бағыттаушы косинустарына пропорционал.

(4.21) теңдеуі координаталары арқылы былай жазылады

$$x = x_0 + lt;\ \ y = y_0 + mt;\ \ \ z = z_0 + nt. \qquad (4.22)$$



4.2 - сурет

(4.22) теңдеуі *түзудің параметрлік теңдеуі* деп аталады. Егер t параметрін уақыт, ал (4.22) теңдеуін $M(x,y,z)$ нүктесінің қозғалыс теңдеуі ретінде қарастырсақ, онда бұл теңдеулер $M(x,y,z)$ нүктесінің бірқалыпты түзу сызықты қозғалысын айқындайды. $t=0$ болғанда M нүктесі M_0 нүктесімен беттеседі. M нүктесінің жылдамдығы тұрақты және

$$v=\sqrt{l^2+m^2+n^2} \tag{4.23}$$

формуласы бойынша анықталады.

(4.22) теңдеулерінен t параметрін тауып,

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{4.24}$$

түзудің *канондық* теңдеуін аламыз.

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ мен $M_2(x_2,y_2,z_2)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуі былай жазылады

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4.25}$$

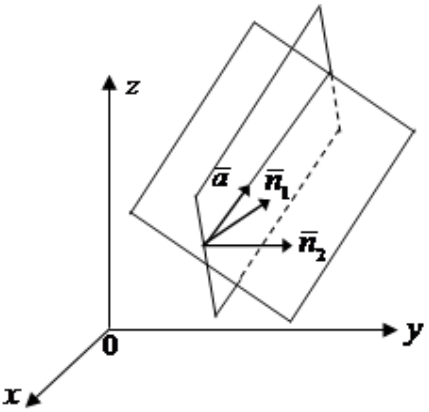
4.2.2. Түзу екі жазықтықтың қиылысуы. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасулары

Кеңістікте түзудің теңдеуін бірінші дәрежелі екі теңдеудің

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{4.26}$$

жүйесі ретінде, яғни екі жазықтықтың қиылысу сызығы ретінде қарастыруға болады. Мұнда бірінші теңдеудің A_1,B_1,C_1, коэффициенттері екінші теңдеудің A_2,B_2,C_2 коэффициенттеріне пропорционал болмайды деген шарт қойылады.

(4.26) түзуінің бағыттаушы векторы ретінде $\bar{a} = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right]$ векторлық көбейтіндісін алуға болады. Мұндағы $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ (4.3 – сурет).



4.3 - сурет

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ немесе } \bar{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad (4.27)$$

Олай болса (4.26) түзуінің канондық теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad (4.28)$$

ал оның параметрлік теңдеуі

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t; \quad y = y_0 - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} t; \quad z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t \quad (4.29)$$

болады.

Айталық, екі түзу өзінің параметрлік теңдеулері арқылы берілсін, яғни:

$$x = x_1 + l_1 t, \quad y = y_1 + m_1 t, \; z = z_1 + n_1 t; \tag{4.30}$$

$$x = x_2 + l_2 t, \quad y = y_2 + m_2 t, \; z = z_2 + n_2 t. \tag{4.31}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \tag{4.32}$$

анықтауышын қарастыралық.

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

теңдеуі екі түзудің бір жазықтықта жатуының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады.

Егер (4.32) анықтауышының барлық жолдары пропорционал болса, яғни

$$\begin{gathered} l_2 = \lambda l_1, \; m_2 = \lambda m_1, \; n_2 = \lambda n_1, \\ x_2 - x_1 = \mu l_1, \; y_2 - y_1 = \mu m_1, \; z_2 - z_1 = \mu n_1, \end{gathered} \tag{4.33}$$

онда (4.30) және (4.31) түзулері беттеседі.

Егер алғашқы екі жолы ғана пропорционал болса,

$$l_2 = \lambda l_1, \; m_2 = \lambda m_1, \; n_2 = \lambda n_1, \tag{4.34}$$

онда (4.30) және (4.31) түзулері өзара параллель болады.

Егер $\Delta = 0$ болса және (4.34) шарты орындалмаса, онда (4.30) және (4.31) түзулері қиылысады.

Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда (4.30) және (4.31) түзулері айқасады.

4.2.3. Екі түзудің арасындағы бұрыш. Нүктеден түзуге дейінгі ара қашықтық. Екі түзудің арасындағы ең қысқа ара қашықтық

Екі түзудің арасындағы бұрыш деп сол түзулердің бағыттаушы векторларының арасындағы бұрышты айтады.

$$x = x_1 + l_1 t, \quad y = y_1 + m_1 t, \quad z = z_1 + n_1 t;$$

$$x = x_2 + l_2 t, \quad y = y_2 + m_2 t, \quad z = z_2 + n_2 t;$$

екі түзудің арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (4.35)$$

формуласы арқылы есептелінеді.

(4.30) және (4.31) түзулерінің перпендикулярлық шарты:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (4.36)$$

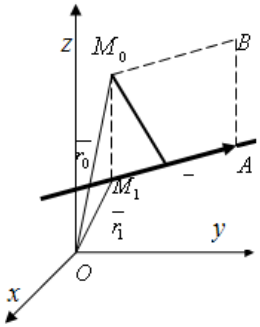
$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен (4.30) түзуіне дейінгі ара қашықтық

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} \qquad (4.37)$$

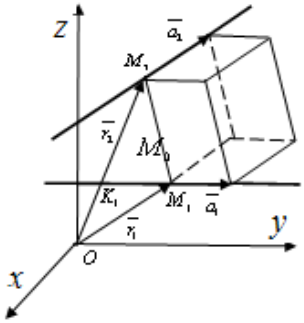
формуласы арқылы табылады. Бұл формула векторлық түрде былай жазылады

$$d = \frac{\sqrt{\left|\left(\overline{r_1} - \overline{r_0}\right)\overline{a}\right|^2}}{\sqrt{\overline{a^2}}}, \qquad (4.38)$$

мұндағы $\overline{r_1}$ мен $\overline{r_0}$, M_1 мен M_0 нүктелерінің радиус-векторлары, ал $\overline{a}$ бағыттаушы вектор (4.4-сурет).



4.4-сурет



4.5-сурет

$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t$ және $\bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2 t$ түзулерінің арасындағы ең қысқа қашықтық

$$d = \frac{\left|\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right)\bar{a}_1\bar{a}_2\right|}{\left|\left[\bar{a}_2\bar{a}_2\right]\right|}, \tag{4.39}$$

формуласы арқылы табылады. Бұл формула координаталар түрінде былай жазылады

$$d = \pm\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 n_1 \\ l_2 n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix}^2}}, \tag{4.40}$$

Мұнда оң таңба үшінші ретті анықтауыш оң болған жағдайда, ал теріс таңба ол анықтауыш теріс болған жағдайда алынады.

4.3. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтар

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

түзуі мен

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

жазықтығының арасындағы бұрыш

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (4.41)$$

формуласы арқылы табылады. (4.22) түзуі мен (4.3) жазықтығының қиылысу нүктесінің координаталары (4.22) мен (4.3) теңдеулер жүйесі арқылы табылады. (4.22) түзуі мен (4.3) жазықтығының параллельдік шарты

$$Al + Bm + Cn = 0 \qquad (4.42)$$

болады, ал олардың перпендикулярлық шарты

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \text{ немесе } A = \lambda l,\ B = \lambda m,\ C = \lambda n,\quad \lambda \neq 0. \qquad (4.43)$$

Берілген түзуден өтетін жазықтықтар жиыны *жазықтықтар шоғы* деп аталады.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

түзуі арқылы өтетін жазықтықтар шоғының теңдеуі

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \qquad (4.44)$$

болады. Мұндағы α мен β кез келген нақты сандар және $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

(4.44) теңдеуін былай да жазуға болады

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0. \qquad (4.44')$$

Мұндағы $\lambda = \frac{\beta}{\alpha},\ \alpha \neq 0$.

4.4. Кеңістіктегі беттер. Сфера. Айналу, цилиндрлік және конустық беттер

Кеңістікте координаталары

$$F(x,y,z)=0 \tag{4.45}$$

теңдеуін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орыны *бет* деп аталады.

Кеңістікте сызық

$$\begin{cases} F_1(x,\ y,\ z)=0 \\ F_2(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \tag{4.46}$$

жүйесі арқылы, яғни екі беттің қиылысуы ретінде айқындалады.

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+E=0 \tag{4.47}$$

теңдеуін толық квадраттарға толтырып

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d\,. \tag{4.48}$$

түріне келтіруге болады.

Егер $d>0$ болса, онда (4.48) теңдеуі сфераны береді. Егер $d=0$ болса, онда (4.48) теңдеуін жалғыз ғана $M(a,b,c)$ нүктесінің координаталары қанағаттандырады. Егер $d<0$ болса, онда (4.48) теңдеуін кеңістіктің ешқандай нүктесінің координаталары қанағаттандырмайды.

l сызығының, яғни

$$\begin{cases} x=\varphi_1(z), \\ y=\varphi_2(z). \end{cases} \tag{4.49}$$

сызығының Oz өсі бойынша айналғанда шығатын бет

$$x^2+y^2=\varphi_1^2(z)+\varphi_2^2(z) \tag{4.50}$$

теңдеуі арқылы айқындалады.

Берілген бағытқа параллель (жасаушылардан) және берілген сызықты қиятын (бағыттаушылардан) түзулерден тұратын бет *цилиндрлік бет* деп аталады.

Жасаушысы Oz өсіне параллель цилиндрлік беттің теңдеуі

$$F(x,y)=0 \tag{4.51}$$

болады. Осы (4.51) цилиндрлік бетінің бағыттаушысының теңдеуі

$$\begin{cases} F(x,y)=0; \\ z=0 \end{cases} \tag{4.52}$$

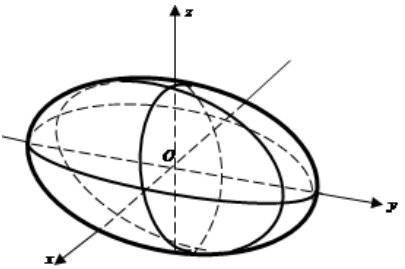
болады.

Берілген нүкте арқылы өтетін (конустың төбесі) және берілген сызықты қиятын (конустың жасаушысы) түзулерден құралған бет конустық бет деп аталады.

4.5. Екінші ретті беттер

x, y, z ағым координаталарына қарағанда екінші дәрежелі теңдеулермен айқындалатын беттер *екінші ретті* беттер деп аталады.

Кеңістікте тікбұрышты декарттық координаталар жүйесін таңдай отырып екінші ретті беттерді төмендегі түрлерге келтіруге болады:

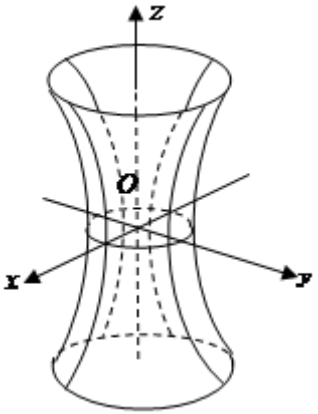


4.6-сурет

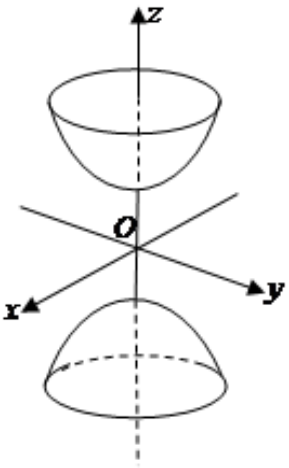
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (эллипсоид, 4.6-сурет);} \tag{4.53}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (бір қуысты гиперболоид, 4.7-сурет);} \tag{4.54}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (екі қуысты гиперболоид, 4.8-сурет);} \tag{4.55}$$



4.7-сурет



4.8-сурет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ (конус, 4.9-сурет); (4.56)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$ (эллипстік параболоид, 4.10-сурет); (4.57)

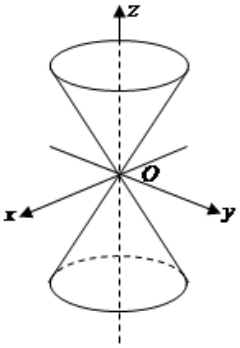
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$ (гиперболалық параболоид, 4.11-сурет); (4.58)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ (эллипстік цилиндр, 4.12-сурет); (4.59)

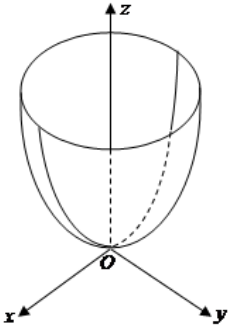
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ (гиперболалық цилиндр, 4.13-сурет); (4.60)

$$y^2=2px$$ (параболалық цилиндр, 4.14-сурет); (4.61)

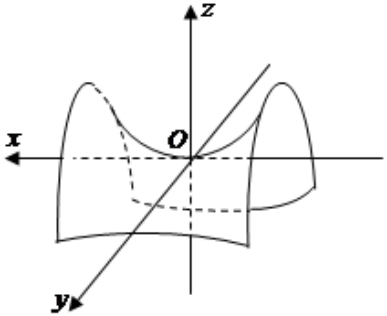
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (қиылысатын жазықтықтар қосағы, 4.15-сурет); (4.62)



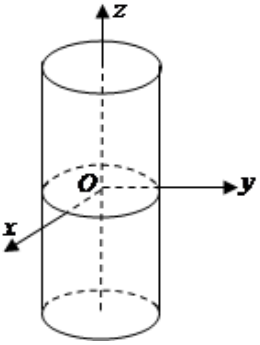
4.9-сурет



4.10-сурет



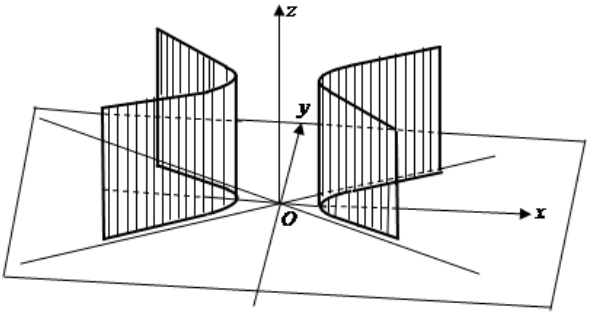
4.11-сурет



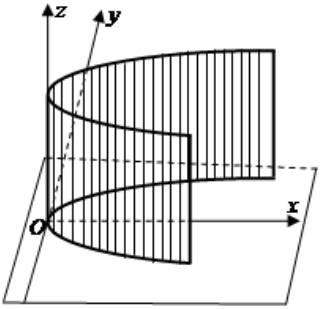
4.12-сурет

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ (параллель жазықтықтар қосағы, 4.16-сурет); (4.63)

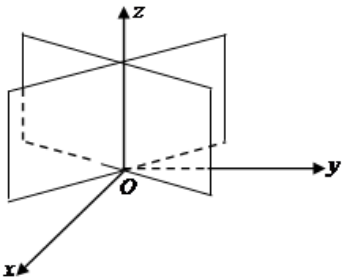
$x^2 = 0$ (беттесетін жазықтықтар қосағы, 4.17-сурет); (4.64)



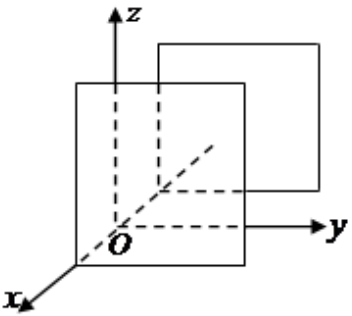
4.13-сурет



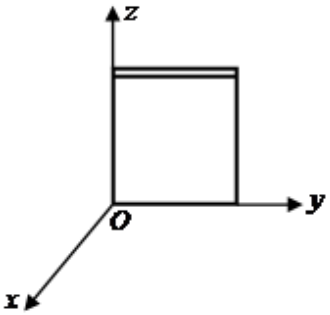
4.14-сурет



4.15-сурет



4.16-сурет



4.17-сурет

(5.53) – (5.64) теңдеулері екінші ретті беттердің канондық теңдеулері деп аталады.

4-тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын студенттер үшін өзін-өзі тексеру сауалдары

1. Кеңістіктегі бет дегеніміз не? Мысалдар келтіріңіздер.
2. Кеңістіктегі беттің теңдеуін жазыңыздар.
3. Жазықтыққа перпендикуляр вектор қалай аталады?
4. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтетін $\overline{N}(A, B, C)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңыздар.
5. Жазықтықтың жалпы теңдеуін жазыңыздар.
6. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтетін $\vec{e}$ бірлік векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңыздар.
7. $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ және $M_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыздар.
8. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесінен өтетін $\overline{a_1}(l_1, m_1, n_1)$ және $\overline{a_2}(l_2, m_2, n_2)$ векторларына параллель жазықтықтың теңдеуін жазыңыздар.
9. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелерінен өтетін және $\overline{a}(l, m, n)$ векторына параллель жазықтықтың теңдеуін жазыңыздар.
10. Берілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесінен жазықтыққа дейінгі ара қашықтық-тың формуласын жазыңыздар.
11. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш деп нені айтады?
12. Екі жазықтықтың екі бағыттаушы векторларының арасындағы бұрыш неге тең?
13. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың косинусы неге тең?
14. Жалпы теңдеумен берілген екі жазықтықтың параллельдік шартын жазыңыздар.
15. Жалпы теңдеумен берілген екі жазықтықтың беттесу шартын жазыңыздар.
16. Жалпы теңдеумен берілген екі жазықтықтың перпендикулярлық шартын жазыңыздар.

17. $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ нүктесінен өтетін $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына параллель болатын түзудің теңдеуін жазыңыздар.

18. Төмендегі теңдеулермен берілген жазықтықтардың қайсылары бір-бірімен параллель:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$;
2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$;
3) $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;
4) $2x + y + 2z - 1 = 0$.

5 тарау. АНАЛИЗГЕ КІРІСПЕ

5.1. Функция және оның графигі

Кез келген X және Y жиындары берілсін.

1-анықтама. Егер әрбір $x \in X$ элементіне бір ғана $y \in Y$ элементі сәйкестендірілсе, онда ол сәйкестікті X жиынын Y жиынына *бейнелеу* деп атайды. Бейнелеуді латын әріптерінің $f, g, h, \ldots$ біреуімен белгілейді. Егер f, X жиынын Y жиынына бейнелесе, онда ол $f : X \to Y$ түрінде де жазылады.

Енді X және Y сан жиындарын қарастыралық.

2-анықтама. Әрбір $x \in X$ санына белгілі ереже немесе заң бойынша $y \in Y$ санын сәйкестендіретін f бейнелеуін X жиынында берілген *сан функциясы* деп атайды.

Егер $f : X \to Y$ сан функциясы болса, онда $x \in X$ элементінің Y жиынындағы бейнесін $f(x)$ деп белгілейді де, оны x нүктесіндегі функция мәні деп атайды.

Кейде функцияның өзін де $f(x)$ деп белгілейді. Осы жағдайда x-ті тұрақты бір элемент деп қарастырмай X жиынының жалпы элементі (айнымалы) деп қарастыру керек.

X жиынын $f(x)$ функциясының *анықталу немесе берілу облысы,* ал $f(X) = \{y / y = f(x),\ x \in X\}$ жиынын функцияның *өзгеру облысы немесе мәндер жиыны* деп атайды.

$y = f(x)$ функциясындағы x-ті функцияның *аргументі немесе тәуелсіз айнымалы,* ал y-ті *тәуелді айнымалы* дейді.

Функцияның анықталу облысын табуға мысалдар келтірейік.

1º. $y = \sqrt{4 - x^2}$. Осы функция өзінің мағынасын $4 - x^2 \geq 0$ болғанда ғана жоғалтпайды. Ендеше $x^2 \leq 4$. Осыдан $|x| \leq 2$ немесе $-2 \leq x \leq 2$. Сонымен $y = \sqrt{4 - x^2}$ функциясының

анықталу облысы $X=[-2;2]$ кесіндісі, өзгеру облысы $f(X)=[0;\ 2]$ кесіндісі болады екен.

2º. $y=\dfrac{1}{x^3-x}$. Функция өзінің мағынасын $x=0,\ x=1,\ x=-1$ нүктелерінде жоғалтады да, сан түзуінің барлық басқа нүктелерінде толық мағынаға ие болады.

Олай болса бұл функцияның анықталу облысы X төмендегі жиын болады:

$$]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[.$$

Демек, функцияның анықталу облысын табу үшін берілген өрнек толық мағынаға ие бола алатындай барлық нақты сандардың жиынын іздеу керек екен. Функцияның анықталу облысы кез келген сан жиын болады. Дербес жағдайда функцияның анықталу облысы аралық, кесінді немесе жартылай кесінді болуы мүмкін.

3-анықтама. $y=f(x)$ функциясының E жиынындағы *графигі* деп координаталары x пен $f(x)$ болатын жазықтықтың нүктелер жиынын, яғни $\{M(x;\ f(x)),\ x\in E\}$ жиынын атайды.

Функцияның анықтамасы бойынша x-тің бір мәніне $f(x)$-тің бір ғана мәні сәйкес келеді. Сондықтан да Oy өсіне параллель кез келген түзу функцияның графигін бір нүктеде ғана қия алады.

Мысалы шеңберді алсақ, ол ешқандай функцияның графигі бола алмайды, себебі Oy өсіне параллель түзулер шеңберді екі нүктеде қияды.

Жалпы жағдайда функцияның графигі қандайда бір қисық болады. Алайда, геометриялық кескіні болмайтын функция да кездеседі. Мысал ретінде Дирихле функциясын алуға болады (5.2 - тақырыбының 2-мысалын қараңыз).

5.2. Функцияның берілу тәсілдері

Функция мен аргументтің арасындағы байланыс заңы әртүрлі тәсілдерімен беріледі.

Математикада ол заң көбінесе формула арқылы беріледі.

Егер $y = f(x)$ функциясы формула арқылы берілсе, онда функцияның осылай берілуін оның аналитикалық түрде берілуі дейді.

Мысалы, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \cos x$, $y = \dfrac{\sin x}{2^x - 1}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ аналитика-лық түрде берілген функциялар.

Егер функция аналитикалық түрде, яғни $y = f(x)$ түрінде берілсе, онда f заңы бойынша y-тің тиісті мәнін табу үшін мынадай амалдар қолданылады:

1) берілген формуланың толық мағынасы болатындай x-тің мәндерін анықтап алады;

2) формулада көрсетілетін барлық амалдарды қолданып y-тің тек тиянақты нақты мәндерін табады.

Кейде функция өзінің анықталу облысының әр бөлігінде әртүрлі формулалар арқылы берілуі мүмкін.

Мысалдар келтірелік:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x, & егер \quad x < 0 \quad болса, \\ 1, & егер \quad x = 0 \quad болса, \\ 1 + x, & егер \quad x > 0 \quad болса, \end{cases}$ функциясы берілсін.

Бұл мысалда үш функция берілген деп түсінбей, үш формула бір функцияны анықтайды деп түсіну қажет.

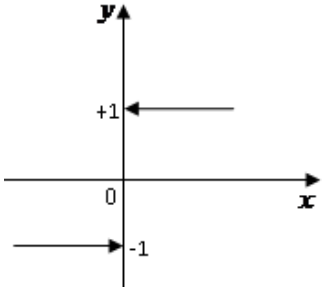
2. Дирихле функциясы:

$$y = D(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x - рационал \quad сан \quad болса, \\ 1, & егер \quad x - иррационал \quad сан \quad болса. \end{cases}$$

Бұл функция шексіз сан түзуінде берілген, оның барлық мәндер жиыны 0 мен 1 нүктелерінен тұрады.

3. $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \textit{егер} \quad x > 0 \quad \textit{болса}, \\ 0, & \textit{егер} \quad x = 0 \quad \textit{болса}, \\ -1, & \textit{егер} \quad x < 0 \quad \textit{болса}. \end{cases}$

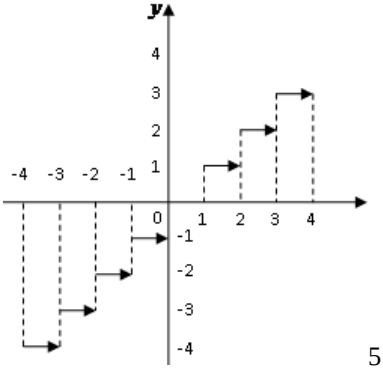
«sgn» термині латын сөзінен шыққан (signum - таңба), оны «сигнум x» деп оқиды. Осы функция барлық нақты сандар жиынында анықталған, оның мәндер жиыны -1, 0, 1 сандарынан тұрады (5.1-сурет).



5.1-сурет

4. $y = [x]$ немесе $y = E(x)$. Мұндағы $[x]$ немесе $E(x)$ символы x санының бүтін бөлігі, дәлірек айтқанда x санынан аспайтын ең үлкен бүтін сан. Оны «антье x» деп оқиды (француз сөзі, қазақшасы «бүтін»).

Мысалы, $[9] = 9, \left[\frac{1}{3}\right] = 0, [\sqrt{3}] = 1, [-1{,}3] = -2.$ $y = [x]$ функциясы $]-\infty; +\infty[$ интервалында анықталған, оның мәндер жиыны барлық бүтін сандар (5.2-сурет).



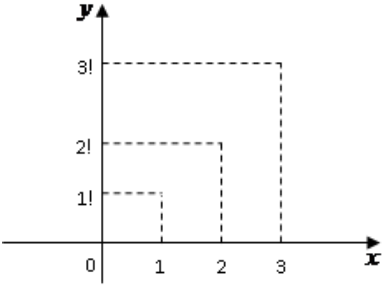
5.2-сурет

5. $y = \{x\} \equiv x - [x]$. Мұндағы $\{x\}$ дегеніміз x-тің бөлшек бөлігі. Мысалы,

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2},\ \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2},\ \left\{\frac{7}{3}\right\} = \frac{1}{2}.$$

$y = x - [x]$ функциясы барлық R жиынында анықталған, оның мәндер жиыны $[0;1[$ - аралығы.

6. $y = n!$. Осы функция барлық натурал сандар $n = 1,2,3,\ldots$ жиынында берілген. Функцияның барлық мәндер жиыны $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ түріндегі натурал сандар жиыны болады (5.3-сурет).



5.3-сурет

Функциялардың берілу тәсілдерінің ішіндегі кең тарағандарының бірі кестелік тәсіл. Ол тәсіл бойынша аргументтің жекеленген мәндері мен оларға сәйкес келетін функция мәндерінің кестесі беріледі.

Кестедегі мәндер тікелей тәжірибеден, не болмаса математикалық есептеулердің көмегімен алынады. Функциялардың осылайша берілуіне мысал ретінде логарифмдік және тригонометриялық функциялардың кестелерін алуға болады. Жоғарғыдағы көрсетілген тәсілдерден басқа функция график түрінде де беріледі.

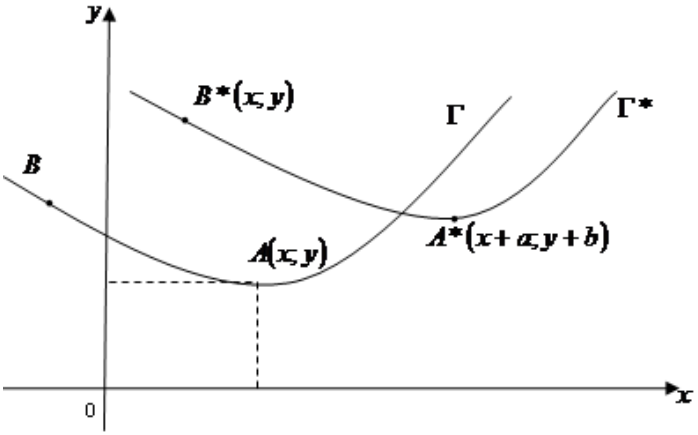
Практикада уақыттың өзгеруіне байланысты кейбір шамалардың өзгеруін автоматты түрде жаза алатын приборлар (термографтар, барографтар және т.т.) қолданылады. Олар уақыттың функциялары болатын осы шамалардың графиктерін береді.

5.3. Функциялардың графиктерін түрлендіру

а) Графикті көшіру. $y = f(x),\ x \in E$ функциясының графигі Γ қисығы болсын. Γ-нің әрбір $A(x;y)$ нүктесін $A^*(x+a;y+b)$ нүктесіне көшіретін геометриялық түрлендіру жасалық, яғни $\vec{e} = (a;b)$ векторына параллель көшірелік. Осы жағдайда Γ қисығы Γ^* қисығына көшеді. Егер $B*(x,y)$ нүктесі Γ^*-да жатса, онда оған сәйкес келетін Г-нің нүктесі $B(x-a;y-b)$ болады. Ол нүктенің координаттары мына теңдікті қанағаттандырады:

$$y-b = f(x-a) \text{ немесе } y = f(x-a)+b,\quad (x-a) \in E. \qquad (5.1)$$

Осы функцияның графигі Γ^* болады (5.4-сурет).



5.4-сурет

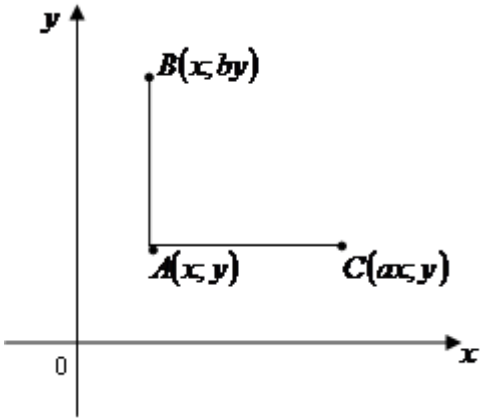
Сонымен, егер $y = f(x),\ x \in E,$ функциясының графигі Γ болса, онда $y = f(x-a)+b,\ (x-a) \in E,$ функциясының графигі Γ-ден параллель көшіру арқылы алынады.

Егер $a>0$ болса, жылжу оңға, ал $a<0$ болса, жылжу солға қарай болады. Егер $b>0$ болса, жылжу жоғары, ал $b<0$ болса, жылжу төмен қарай болады.

Мысалы, $y=f(x)$ функциясының графигінен $y=f(x+2)+9$ функция-сының графигін алу керек болсын. Осы жағдайда $b=9,\quad x-a=x+2\Rightarrow a=-2.$ Сонда $y=f(x)$ функциясының графигін 2 бірлікке солға қарай және 9 бірлікке жоғары қарай жылжыту керек.

ә) Графикті қысу және созу. $A(x;y)$ нүктесін $B(x;by)$ нүктесіне көшіретін геометриялық түрлендіруді, Oy өсі бойымен, коэффициенті $b\neq 0$ болатын созу деп атайды.

Осы сияқты Ox өсі бойымен созу деген ұғым енгізіледі (5.5-сурет).



5.5-сурет

$y=f(x),\ x\in E,$ функциясының графигі Г болсын. Ox өсі бойымен коэффициенті $a\neq 0$, ал Oy өсі бойымен коэффициенті $b\neq 0$ болатын созу жасалық. Осы түрлендіруде $A(x;y)$ нүктесі $A^*(ax;by)$ нүктесіне көшеді.

Г қисығы Γ^* қисығына көшсін және $B^*(x;y)\in\Gamma^*$ болсын. Сонда B^* нүктесінің кері бейнесі $B\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right)$, $B\in\Gamma$ болады да $\frac{y}{b}=f\left(\frac{x}{a}\right)$ орындалады. Осыдан

$$y=bf\left(\frac{x}{a}\right),\quad \frac{x}{a}\in E. \tag{5.2}$$

функциясының графигі Γ^* болады.

Егер (5.2) формулада $b>1$ болса, онда $y=f(x)$-тің графигі Oy өсі бойымен b рет созылады да $y=bf\left(\frac{x}{a}\right)$, $\frac{x}{a}\in E$ функциясының графигі алынады.

Егер $0<b<1$ болса, онда қысылу болады. Егер $0<a<1$ болса, онда $y=f(x)$-тің графигі Ox өсі бойымен a рет қысылады, ал $a>1$ болса, онда созылады.

Сонымен, егер $y=f(x)$ функциясының графигі Г болса, онда $y=b\,f\left(\frac{x}{a}\right)$ функциясының графигі Г-ден Oy өсі бойымен коэффициенті b және Ox өсі бойымен коэффициенті a болатын созылу (қысылу) көмегімен алынады.

Мысалдар.

1. $y=ax^2+bx+c$ функциясын алып оны түрлендірейік:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Сонда осы функцияның графигін $y=x^2$ функциясының графигінен мынадай түрлендірулер арқылы алуға болады:

а) Oy өсі бойымен коэффициенті a болатын созу немесе қысу.

б) $\vec{e}=\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ векторына параллель көшіру.

2. $y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$ функцияның графигін сызу керек болсын.

Мынадай теңдіктің $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ орынды екені белгілі. Олай болса α саны табылып, $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ деуге болады. Сонда

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\omega x\sin\alpha+\sin\omega x\cos\alpha\right)=$$

$$=A\sin(\omega x+\alpha)=A\sin\omega\left(x+\frac{\alpha}{\omega}\right),$$

мұндағы $A=\sqrt{a^2+b^2}$ немесе $y=A\sin\omega\left(x+\frac{\alpha}{\omega}\right)$.

Осы функцияның графигі $y=\sin x$ функциясының графигінен мына түрлендірулер арқылы алынады:

1) Oy өсі бойымен коэффициенті A болатын созу және Ox өсі бойымен коэффициенті ω болатын қысу;

2) Oy өсі бойымен $-\frac{\alpha}{\omega}$ шамасына параллель көшіру.

5.4. Күрделі және айқындалмаған функциялар

Айталық, $y=\varphi(x)$ және $z=f(y)$ функциялары сәйкесінше X және Y жиындарында анықталып, φ функциясының мәндер жиыны f функциясының анықталу

облысында жататын болсын. Сонда φ функциясының анықталу облысы X-та жататын әрбір x мәніне белгілі бір ереже бойынша $z = f(y)$-тің тиянақты бір мәні сәйкес келіп $z = f\left[\varphi(x)\right]$ функциясы анықталады. Осы $z = f\left[\varphi(x)\right]$ функцияны φ және f функцияларының *композициясы (суперпозициясы) немесе күрделі функция* деп атайды.

Кейде φ және f функцияларының композициясын былай да белгілейді:

$$\left(f \cdot \varphi\right)(x) = f\left(\varphi(x)\right) \text{ немесе } f \cdot \varphi.$$

Күрделі функциядағы x - ті тәуелсіз аргумент дейді.

Айта кететін нәрсе, күрделі функция айнымалылардың тәуелділігін емес, олардың берілу тәсілдерін сипаттайды.

Егер φ функциясының мәндер жиыны f функциясының анықталу облысына кірмесе, онда $z = f\left[\varphi(x)\right]$ күрделі функциясының мағынасы болмайды.

Күрделі функцияның мәнін табу үшін мына амалдарды орындайды:

1) аргумент x - тің өзгеру облысынан алынған мәні бойынша айнымалы y-тің сәйкес мәнін φ заңы бойынша табады;

2) табылған y-тің мәні бойынша f заңы көмегімен z-тің мәнін табады.

Мысалдар.

1. $z = f(y) = \sin y$, ал $y = \varphi(x) = x^2 + 9$ болсын. Мұндағы $\varphi(x)$ функциясы *x*-тің барлық мәндерінде, яғни $]-\infty; +\infty[$ арлығында, $f(y) = \sin y$ функциясы да $]-\infty; +\infty[$ арлығында анықталған.

$y = x^2 + 9$ функциясының мәндер жиыны $[9; +\infty[$ $f(y) = \sin y$ функция-сының анықталу облысына кіреді.

Олай болса $z=\sin\left(x^2+9\right)$ күрделі функцияның $\left]-\infty;+\infty\right[$ арлығында мағынасы бар.

2. $z=\sqrt{1-y}$, ал $y=x^2+9$. Мұндағы $y=x^2+9$ функциясының мәндер жиыны $[9;+\infty]$, ал $z=\sqrt{1-y}$ функциясының анықталу облысы $\left]-\infty;1\right]$ Демек, $z=\sqrt{-x^2-8}$ күрделі функцияның мағынасы жоқ. Жоғарғыдағыдай етіп саны екіден артық функциялардың да композициясын қарастыруға болады.

Мысалы, $W=\cos\lg\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ функциясы $W=\cos u,$ $u=\lg z,$ $z=1+\frac{1}{y},$ $y=\sqrt{x}$ функцияларының композициясы болды.

$F(x,y)$ функциясы жазықтықтың қандай да бір нүктелер жиынында анықталған деп

$$F(x,y)=0 \tag{5.3}$$

теңдеуін қарастырайық.

Осы (5.3) теңдеудің y бойынша шешілген бір мәнді шешуі бола ма немесе ол теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын бір мәнді $y=f(x)$ функ-циясы табыла ма деген заңды сұрақ туады.

Мысалы, мына теңдеуді қарастырайық

$$x^2+y^2-1=0. \tag{5.4}$$

Егер $|x|>1$ болса, онда y-тің (x,y) жиынында (5.4) теңдеуді қанағаттандыратын мәндері болмайды.

Ал егер $|x|\le 1$ болса, онда (5.4)-тен y-тің мынадай мәндерін табамыз:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}. \qquad (5.5)$$

Сонымен, егер $|x| < 1$ болса, онда (5.5) теңдеуден x-тің бір мәніне y-тің екі мәні: $y_1 = \sqrt{1-x^2}$, $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$ сәйкес келетінін көреміз. Демек, x-тің $[-1;\ 1]$ кесіндісіндегі кез келген мәніне $y = f(x)$ функциясының

$$x^2 + f^2(x) - 1 = 0$$

теңдеуін қанағаттандыратын y_1 және y_2 мәндері сәйкес келеді екен.

Енді (5.4) теңдеуді

$$E_1 = \{(x;\ y),\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

төртбұрышты облыста қарастырайық. Бұл жағдайда (5.4) теңдеуді қанағаттандыратын тек бір ғана $y = y_1 = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \le x \le 1)$ функциясы бар болады және $0 \le y \le 1.$

Соңғы функцияны E_1 төртбұрышында (5.4) теңдеуімен берілген *айқындалмаған функция* деп атайды.

Сол сияқты

$$E_2 = \{(x;\ y),\ -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0\}$$

төртбұрышында (5.4) теңдеуі $y = y_2 = -\sqrt{1-x^2}$ айқындалмаған функцияны береді.

Жоғарыдағы (5.3) теңдеуге оралайық та $F(x, y)$ функциясының анықталу облысы

$$E = \{(x;\ y),\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$

төртбұрышында болсын делік және $F(x_0, y_0) = 0$ теңдігі орындалсын.

Егер $[x_0 - a;\ x_0 + a]$ кесіндісінде (5.3) теңдеуді тепе-теңдікке айналдыра-тын бір ғана $y = f(x)$ функциясы бар болса және $f(x) \in [y_0 - b;\ y_0 + b]$, онда (5.3) теңдеу E төртбұрышында y-ті x-тен тәуелді айқындалмаған функция ретінде анықтайды деп атайды.

5.5. Шектелген функциялар

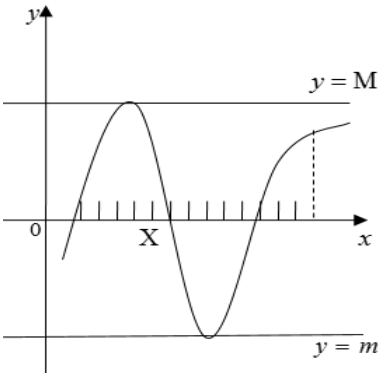
$y = f(x)$ функциясы X сан жиынында анықталсын.

1-анықтама. Егер $M(m)$ саны табылып, барлық $x \in X$ үшін $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$ теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын X жиынында *жоғарғы (төменгі) жағынан шектелген* дейді.

Кванторлар көмегімен бұл анықтаманы былай жазады: егер $(\exists M(m))(\forall x \in X): (f(x) \le M)(f(x) \ge m)$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы X жиынында жоғарғы (төменгі) жағынан шектелген делінеді.

2-анықтама. Егер $L > 0$ саны табылып, барлық $x \in X$ үшін $|f(x)| \le L$ теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын X жиынында шектелген дейді.

Егер $y = f(x)$ функциясы X жиынында жоғарғы (төменгі) жағынан шектелсе, онда функцияның графигі $y = M$ $(y = m)$ түзуінің төменгі (жоғарғы) жағында жатады (5.6-сурет).



5.6-сурет

X жиынында шектелген (3-анықтама бойынша) $y = f(x)$ функциясының графигі $y = m$ мен $y = M$ түзулерінің аралығында жатады.

Мысалдар.

1. $y = 8 - x^2$ функциясы R жиынында жоғарғы жағынан шектелген.

Шынында, кез келген $x \in R$ үшін $8 - x^2 \le 8$ теңсіздігі орындалатыны белгілі. Сондықтан $y = 8 - x^2$ функциясы жоғарғы жағынан шектелген және $M = 8$ деп алсақ жеткілікті.

2. R жиынында $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ функциясы шектелген. Расында, $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \ = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} \le 1$. Бұдан $\forall x \in R$ үшін $0 \le \dfrac{x^2}{1+x^2} \le 1$ теңсіздігі орындалатынын көреміз. Демек, $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ функциясы R жиынында шектелген $(m = 0,\ M = 1)$.

5.6. Жұп және тақ функциялар

1-анықтама. Егер E сан жиынында жататын әрбір x нүктесіне қарама-қарсы $(-x)$ нүктесі де E-де жатса, онда E-ні координаталар бас нүктесіне қарағанда *симметриялы жиын* дейді.

Мысалы, $[-3; 3]$ сегменті бас нүктеге қарағанда симметриялы, ал $(-3; 3]$ аралығы симметриялы емес жиындар, себебі $-3 \notin E,\ 3 \in E$.

2-анықтама. Координаталар басына қарағанда симметриялы E жиынының кез келген $x \in E$ үшін $f(-x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын E-де *жұп функция* деп атайды.

3-анықтама. Координаталар басына қарағанда симметриялы болатын E жиынының $\forall x \in E$ нүктесі үшін $f(-x) = -f(x)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын E-де *тақ функция* деп атайды.

Аналитикалық функция жұп немесе тақ екендігін білу үшін $f(x)$ өрнегіндегі x-тің орнына минус x-ті қою керек. Сонда, егер $\forall x \in E$ үшін $f(-x) = f(x)$, болса, онда $f(x)$ функциясының жұп, ал $f(-x) = -f(x)$, болса, тақ болғаны.

Егер осы екі теңдік барлық $x \in E$ үшін орындалмаса, онда $y = f(x)$ функциясы тақ та, жұп та болмайды.

Ескертетін жай! Егер функцияның анықталу облысы координаталар бас нүктесіне қарағанда симметриялы болмаса, онда функцияны жұптылыққа немесе тақтылыққа зерттеудің қажеті жоқ.

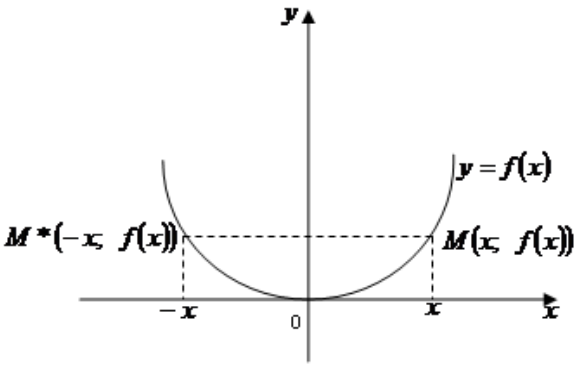
Мысалы,

$$y = x^2,\ y = x^4,\ y = \cos x,\ y = |x|,$$

функциялары жұп функциялар.

Жұп функциясының графигі Oy өсіне қарағанда симметриялы болады. Расында, егер берілген облыста $y = f(x)$ функциясы жұп болса, онда функцияның графигінің $M(x;\ f(x))$ нүктесіне Oy өсіне қарағанда симметриялы $M^*(-x;\ f(x))$ нүктесі сәйкес келеді және ол да сол графикте жатады.

Сондықтан да жұп функцияның графигін салғанда Oy өсінің оң жағында жатқан графиктің бөлігін ғана салады да осы бөлікті Oy өсіне қарағанда симметриялы болатындай етіп бейнелейді (5.7-сурет).

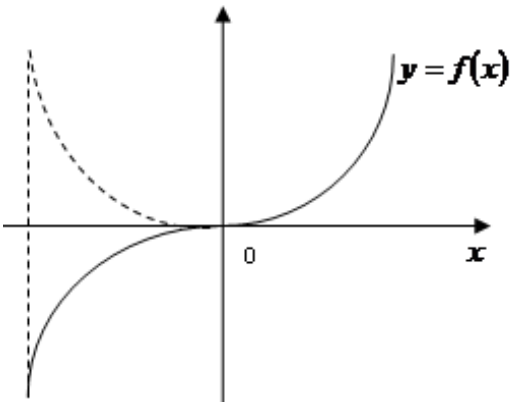


5.7-сурет

$y = x,\ y = x^3,\ y = \sin x$ функциялары тақ функциялар.

Тақ функцияның графигі координаталар бас нүктесіне қарағанда симметриялы болады.

Практикада тақ функцияның графигін былай сызады: графиктің Oy өсінің оң жақтағы бөлігі бойынша Oy өсіне симметриялы сол жақ бөлігін сызады. Сонан соң осы графиктің сол жақ бөлігін Ox өсіне қарағанда симметриялы болатындай етіп аударады. Сонда функцияның толық графигі шығады (5.8-сурет).



5.8-сурет

Функцияларды жұптыққа зерттегенде мынадай тұжырымдарды пайдалан-ған жөн:

а) екі жұп (тақ) функцияның қосындысы жұп (тақ) функция болады;

б) екі жұп немесе екі тақ функцияның көбейтіндісі жұп функция болады;

в) жұп және тақ функциялардың көбейтіндісі тақ функция болады.

Теорема. Симметриялы X жиынында берілген кез келген $y = f(x)$ функциясын жұп және тақ функциялардың қосындысы түрінде өрнектеуге болады.

Дәлелдеу. Кез келген $x \in X$ нүктесі үшін $f(x)$ функциясын былай жазуға болады:

$$f(x) \equiv \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \varphi(x)+\psi(x),$$

мұндағы

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Осы $\varphi(x)$ функциясының жұп екенін көру қиын емес. Шынында да,

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \varphi(x).$$

Сол сияқты $\psi(x)$ функциясының тақ екенін көреміз

$$\psi(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -\psi(x).$$

5.7. Периодты функциялар

Айталық, X жиынында $y = f(x)$ функциясы берілсін.

Анықтама. Егер кез келген $x \in X$ үшін $f(x) = f(x+T),\ (T>0)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x),$

$x \in X$ функциясын периоды T болатын *периодты функция* деп атайды.

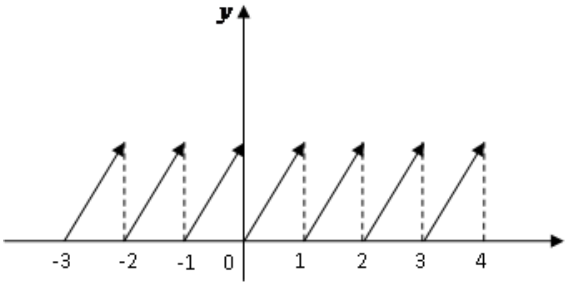
Егер период T болса, онда минус Т саны да период болады. Шынында, $f(x) = f(x - \mathrm{T} + \mathrm{T}) = f(x - \mathrm{T})$. $\mathrm{T} = 0$ саны кез келген функцияның периоды болады. Сондықтан да тек оң периодтарды ғана қарастыру жеткілікті.

Мысалдар келтірейік.

1. $y = \{x\}$, мұндағы $\{x\}$ дегеніміз x санының бөлшек бөлігі. Осы функцияның негізгі периодын табайық.

Шешуі. Кез келген X үшін $\{x\} = \{x+1\} = \{x-1\}$ болады, себебі $x,\ x-1,\ x+1$ сандарының бөлшек бөліктері бірдей. Ендеше 1 саны $\{x\}$ функциясының периоды. Осы $\mathrm{T} = 1$ периоды негізгі период болады, себебі $0 < \mathrm{T} < 1$ болғанда $\{X + \mathrm{T}\} = \{X\}$ теңдігі $x = 0$ үшін орындалмай қалады.

$y = \{x\}$ функциясының графигі 5.9-суретте көрсетілген.



5.9-сурет

2. Дирихле функциясы:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x - \text{рационал сан болса}, \\ 1, & \text{егер } x - \text{иррационал сан болса}. \end{cases}$$

Кез келген рационал сан r осы функцияның периоды екенін көрсетелік.

Шешуі. x - иррационал сан болсын. Сонда $x+r,\ x-r$ сандары иррационал болады да $D(x)=D(x\pm r)$. Сол сияқты, егер x рационал сан болса, онда $x+r,\ x-r$ рационал сандары үшін $D(x)=D(x+r)=D(x-r)$. Сонымен кез келген x үшін $D(x)=D(x+r)=D(x-r)$ теңдіктері орындалады екен. Олай болса $\mathrm{T}=r$ саны $D(x)$ функциясының периоды. Рационал сандардың ішінде ең кіші оң сан болмайтындықтан $D(x)$ функциясының негізгі периоды жоқ.

3. Тригонометриялық функциялар: $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$.

$\sin x$ пен $\cos x$-тің негізгі периоды 2π, ал tgx пен $ctg\,x$-тің негізгі периоды π екені мектеп математикасынан белгілі.

5.8. Монотонды функциялар

X сан жиынында $y=f(x)$ функциясы берілсін.

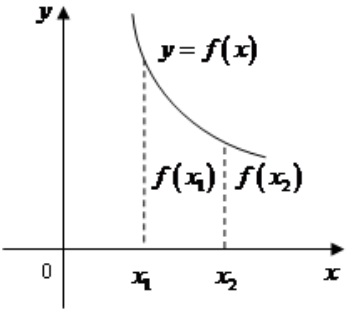
1-анықтама. Егер X жиынының $x_1<x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген x_1 және x_2 нүктелері үшін $f(x_1)<f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, яғни аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда $f(x)$ функциясын X жиынында өспелі функция деп атайды (5.10-сурет).

2-анықтама. Егер $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2))$ болса, онда $f(x)$ функциясын X жиынында кемімелі функция деп атайды (5.11-сурет).

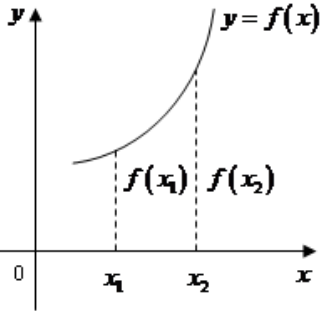
Өспелі және кемімелі функциялардың графиктері төмендегі суреттерде келтірілген.

Егер $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2))$ болса, онда $f(x)$ функциясы X жиынында кемімейтін функция делінеді. Егер $(\forall x_1, x_2 \in X)\ (x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2))$ болса,

онда $f(x)$ функциясы X жиынында өспейтін функция делінеді.



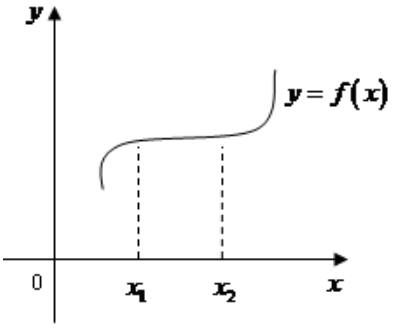
5.10-сурет



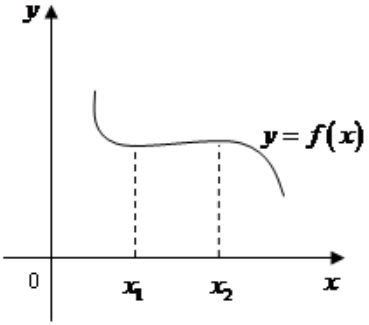
5.11-сурет

Кемімейтін және өспейтін функциялардың графиктері 5.10-5.13 суреттер-де кескінделген.

3-анықтама. Жоғарыдағы өспелі, кемімелі, кемімейтін және өспейтін функцияларды монотонды (біркелкі) функциялар дейді. Кейде өспелі және кемімелі функцияларды қатаң монотонды функциялар дейді.



5.12-сурет



5.13-сурет

Мысалдар келтірейік.

1. R жиынында $y = x^3$ функциясы өспелі. Шынында, $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген x_1 және x_2 нүктелерін алсақ, онда

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1\cdot x_2+x_1^2)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0,$$

себебі $x_2-x_1>0$, $\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2>0.$ Сонымен $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, яғни $y=x^3$ функциясы R жиынында өспелі.

2. $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ функциясы берілген. Бұл функцияның анықталу облысы:

$$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[.$$

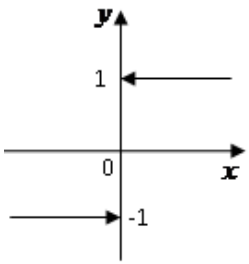
Егер $x>0$ болса, онда $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1.$

Егер $x<0$ болса, онда $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1.$

Олай болса, $\varphi(x)$ функциясы мына функциямен тепе-тең екен:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{егер } x>0 \text{ болса},\\ -1, & \text{егер } x<0 \text{ болса}.\end{cases}$$

Демек $\varphi(x)\equiv f(x)$ функциясы өзінің анықталу облысында кемімейтін (өспейтін) функция екен. Оның графигі 5.14-суретте көрсетілген



. 5.14-сурет

Егер $f(x)$ функциясы X жиынында тұрақты мән қабылдаса, яғни $f(x)=const$, онда ол функцияны кемімейтін де, өспейтін де функция ретінде қарастыруға болады. Функцияларды монотондылыққа зерттегенде төмендегі тұжырымдарды ескерген жөн:

а) егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары X жиынында өссе (кемісе), онда $f(x)+\varphi(x)$ функциясы да осы жиында өседі (кемиді);

б) егер $f(x)$ функциясы X жиынында өссе (кемісе), онда $-f(x)$ функциясы осы жиында кемиді (өседі);

в) егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары X жиынында теріс болмаса және өссе (кемісе), онда $f(x)\cdot\varphi(x)$ функциясы да осы жиында өседі (кемиді);

г) егер $f(x)$ функциясы X жиынында оң болса және өссе (кемісе) онда осы жиында $\dfrac{1}{f(x)}$ функциясы кемиді (өседі).

3. $y=x^n$, $n\in N$ функциясы $[0;+\infty[$ аралығында өседі.

Расында, $y=x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n}$, мұндағы әрбір x функциясы $[0;+\infty[$ аралығында теріс емес және өспелі. Олай болса в) тұжырымы бойынша $y=x^n$ функциясы $[0;+\infty[$ -да өседі.

4. $y=4+3x^2+6x^5$ функциясының $[0;+\infty[$ -да өсетінін көрсетелік.

Берілген функцияның оң жағындағы $3x^2$, $6x^5$ функциялары жоғарыдағы

а) және б) тұжырымдары бойынша $[0;+\infty[$ -да өседі. Олай болса а) тұжырымы бойынша $y=4+3x^2+6x^5$ функциясы $[0;+\infty[$ -да өседі.

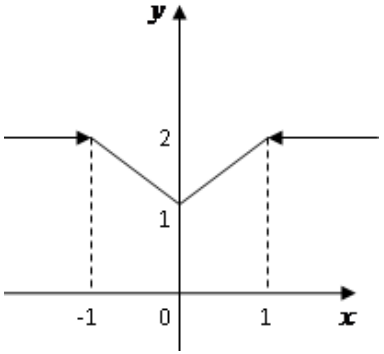
Енді үзік-монотонды функция ұғымын енгізейік.

4-анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы E сан жиынында анықталып, монотонды болмаса, бірақ осы аралықтың әрқайсысында $f(x)$ функциясы монотонды болатындай етіп саны шекті аралықтарға бөлуге болатын болса, онда $y = f(x)$ функциясын E жиынында үзік-монотонды деп атайды.

Мысалы,

$$f(x)=\begin{cases} 2, & егер \quad x<-1 \quad болса, \\ 1-x, & егер \quad -1\le x<0 \quad болса, \\ 1+x, & егер \quad -0<x<1 \quad болса, \\ 2, & егер \quad x\ge 1 \quad болса \end{cases}$$

функциясы үзік-монотонды функция, себебі $]-\infty;-1[$ аралығында функция кемімейді (және өспейді), $[-1;0]$ кесіндісінде кемиді, $]0;1[$ аралығында өседі, ал $[1;+\infty[$ аралығында кемімейді (және өспейді) (5.15-сурет).



5.15-сурет

5.9. Кері функция

Айталық, $f: X \to Y$ бейнелеуі қайтымды болсын. Сонда әрбір $y \in f(X)$ элементіне $f(x) = y$ теңдігін қанағаттандыратындай бір ғана x элементі табылады.

Сондықтан да $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$ өрнегі арқылы берілген $f^{-1}: f(X)\to X$ бейнелеуі анықталады.

Егер барлық X жиынын Y-ке бір мәнді бейнелейтін f бар болса, онда Y-тен X-ке бейнелейтін f^{-1} бар болады.

1-анықтама. Егер X-тен Y-ке бейнелейтін f қайтымды болса, онда $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$ өрнегімен берілген $f^{-1}: Y\to X$ бейнелеуін f бейне-леуіне кері бейнелеу дейді.

Дербес жағдайға тоқталайық.

2-анықтама. X сан жиынында анықталған сан функциясы f осы жиынның әртүрлі нүктелерінде әртүрлі мәндер қабылдаса, яғни $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_1\neq x_2$ болғанда $f(x_1)\neq f(x_2)$ болса, онда f функциясы X жиынында қайтымды дейді. Функцияның қайтымдылығының жеткілікті шарты мына теорема арқылы беріледі.

1-теорема. Егер f сан функциясы X жиынында өспелі (кемімелі) болса, онда ол осы X жиынында қайтымды болады.

Дәлелдеу. Функцияның өспелі болған жағдайын қарастыралық. X-тен әртүрлі x_1, x_2 нүктелерін алайық. Сонда функция өспелі болғандықтан да $x_1<x_2$ үшін $f(x_1)<f(x_2)$, ал $x_1>x_2$ үшін $f(x_1)>f(x_2)$ теңсіздіктері орындалады. Басқаша айтқанда $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_1\neq x_2$ болғанда $f(x_1)\neq f(x_2)$ екенін көреміз. Ендеше f функциясы X жиынында қайтымды.

Теореманың екінші бөлігі де осылай дәлелденеді.

Ескерту! Функцияның X жиынында қатаң монотонды болу шарты функцияның қайтымды болуының қажетті шарты бола алмайды.

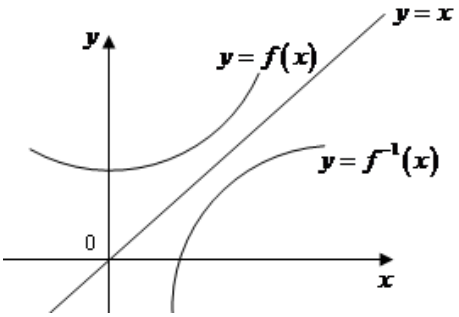
3-анықтама. f сан функциясы X жиынында берілсін және $f(X)=Y$. Егер f функциясы X-ты Y-ке қайтымды

бейнелесе, онда Y-ті X-ке кері бейнелеуді кері функция дейді және f^{-1} деп белгілейді.

Кері функция $x = f^{-1}(y),\ y \in Y$ сан функциясы болады. Егер $y = f(x),\ x \in X$, функциясы аналитикалық түрде берілсе, онда кері функцияның аналитикалық өрнегін алу үшін $y = f(x)$ теңдеуін x бойынша шешу керек. Егер осы жағдайда бірнеше аналитикалық өрнек шықса, онда олардың ішінен мәндері X жиынына тиістілерін алу керек. Сонда $x = f^{-1}(y)$ функциясы алынады.

$y = f(x)$ функциясынан оған кері $x = f^{-1}(y)$ функцияға көшкенде X пен Y жиындарының рольдері ауысады. Сондықтан да $y = f(x)$ және $x = f^{-1}(y)$ функцияларының графиктері беттеседі (біреу ғана болады).

Егерде функцияны y, аргументті x әріптерімен белгілесек, онда кері функцияны $x = f^{-1}(y)$ деп жазады. Оның графигін алу үшін тура функция $y = f(x)$-тің графигін $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы түрде кескіндеу керек (5.16-сурет).



5.16-сурет

Мысал. $y = x^2 - 9,\ x \geq 0$ функциясының кері функциясын табу керек.

Шешуі. $y = x^2 - 9$ теңдеуінен $x = \sqrt{y+9}$ және $x = -\sqrt{y+9}$. Есептің шарты бойынша $x \geq 0$ болғандықтан да осы өрнектің біріншісін, яғни $\sqrt{y+9}$ шамасын аламыз.

Осыдан $y \geq -9$. Сонымен кері функция $\sqrt{y+9}$ өрнегімен беріліп $[-9; +\infty[$ аралығында анықталады екен, яғни

$$x = \sqrt{y+9},\ y \geq -9.$$

Егер y-ті x-пен алмастырсақ, онда кері функция былай жазылады:

$$y = \sqrt{x+9},\ x \geq -9.$$

2-теорема. Егер f функциясы X жиынында өссе (кемісе) және $f(X) = Y$ болса, онда f^{-1} кері функциясы бар болып, ол Y жиынында анықталады және өседі (кемиді).

Дәлелдеу. Анығырақ болу үшін $f(x)$ функциясы X жиынында өседі делік. Y жиынында анықталған f^{-1} кері функцияның бар болатындығы 1-теоремадан шығады.

Енді f^{-1} функциясының Y жиынында өсетінін көрсетелік. Y жиынынан $y_1 < y_2$ болатындай етіп кез келген y_1 және y_2 нүктелерін алайық және $x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$ дейік. Кез келген x_1 және x_2 сандары үшін $x_1 > x_2,\ x_1 = x_2,\ x_1 < x_2$ қатыстарының тек біреуі ғана орынды болатыны белгілі.

Егер $x_1 > x_2$ немесе $x_1 = x_2$ болса, онда $f(x)$ функциясының өсетіндігінен сәйкесінше $y_1 > y_2$ немесе $y_1 = y_2$ қатыстары шығады. Бұл $y_1 < y_2$ деп алғанымызға қайшы келеді.

Сонымен біз $y_1 < y_2$ шартынан $x_1 < x_2$ шарты келіп шығатынын, яғни $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ орындалатынын көрдік. Ендеше $f^{-1}(y)$ функциясы Y жиынында өспелі.

Теореманың екінші бөлігі де осылай дәлелденеді.

Мысалдар.

1. $y = x^3,\ -\infty < x < +\infty$ функциясы өзінің анықталу облысында өспелі. Олай болса, оның кері функциясы бар. $y = x^3$ теңдеуінен $x = \sqrt[3]{y},\ -\infty < y < +\infty$.

Егер x пен y-тің орындарын алмастырсақ, онда кері функция $y = \sqrt[3]{x},\ -\infty < x < +\infty$ болады да, ол өзінің анықталу облысында өседі.

2. $y = x^2,\ -\infty < x < +\infty$ функциясының кері функциясы жоқ, себебі $(-x)^2 = x^2$, яғни x және $-x$ әртүрлі сандарына y-тің бір ғана мәні сәйкес келеді.

Егер $y = x^2,\ -\infty < x \le 0$ десек, онда оның кері функциясы бар болады. Ол $x = \sqrt{y}, y \ge 0$. Егер x пен y-тің орындарын алмастырсақ, онда кері функция $y = \sqrt{x},\ x \ge 0$ болады. Сол сияқты $y = x^2,\ 0 \le x < +\infty$ функциясының да кері функциясы бар, ол $y = -\sqrt{x},\ x \ge 0$.

Функциялар айқындалған $y = f(x)$ немесе айқындалмаған $F(x, y) = 0$ түрлерінде ғана емес, параметрлік түрде де беріледі.

Айталық, $x = \varphi(t)$ және $y = \psi(t)$ функциялары E жиынында анықталсын, ал E_1 жиыны φ функциясының мәндер жиыны болсын. Сонан соң E жиынында φ функциясы қайтымды деп жорып, кері функцияны $t = \varphi^{-1}(x)$ деп белгілейік. Сонда E жиынында $y = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ күрделі функциясы $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ формулаларымен параметрлік түрде берілген деп атайды.

Мысалы, $x=\cos t,\ \ y=\sin t$, мұндағы $t\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, функциялары $y=f(x)$ функциясын параметрлік түрде анықтайды.

Расында, $x=\cos t$ теңдігінен $t=\arccos x$ болады да $y=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$ функциясы шығады.

5.10. Сан тізбегі және оның шегі. Шектер теориясы

1-анықтама. Егер натурал сандар жиынының $N=\{n\}$ әрбір n мәніне белгілі бір заң (ереже) бойынша x_n нақты саны сәйкестендірілсе, онда сол нөмірленген нақты сандар жиыны

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{5.6}$$

сан тізбегі немесе жай тізбек деп аталады.

Мұндағы x_n элементін (5.6) тізбектің n-ші немесе жалпы мүшесі дейді. Тек соңғы жағдайда n-ді $N=\{n\}$ жиынының айнымалы элементі деп түсіну керек. Сан функциясының анықтамасын қолданып (5.6) сан тізбегін $x_n=f(n)$ деп жазуға да болады.

Кейде (5.6) тізбекті айнымалы x_n-нің мәндер жиыны деп қарастырады. Сондықтан да x_n айнымалысы берілсе, онда (5.6) тізбектің де берілгені. Осыған байланысты тізбекті кейде айнымалы шама деп те айтады.

Ұсынып отырған оқулықта ыңғайына қарай «айнымалы шама» немесе «тізбек» терминдері қатар қолданылатынын оқырмандарға ескертіп қоюды жөн көрдік.

Айталық, $x_n=\frac{1}{n}$, $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$, $x_n=(-1)^n$.

$x_n=1$ айнымалылары берілсе, онда оларға сәйкес келетін тізбектер төмендегідей болады:

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;
2. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$;
3. $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots$;
4. $-1, 1, -1, 1, \ldots$;
5. $1, 1, 1, \ldots$.

Бұдан тізбек мүшелерінің әртүрлі болатынын (1º, 2º, 3º), ал кейбір тізбектердің екі саннан, тіпті бір саннан да құрылатынын көреміз.

Барлық элементтері тек бір ғана саннан тұратын тізбекті тұрақты тізбек деп атайды.

Сонымен, $\{x_n\}$ тізбегінің элементтер жиыны мен оның элементтерінің мәндер жиынын шатастырмаған жөн. Тізбектің элементтер жиынында шексіз көп элемент бар, олар өздерінің нөмірлері арқылы анықталады. Ал, тізбектің элементтерінің мәндер жиыны шекті де, шексіз де болуы мүмкін.

Жоғарыдағы (5.6) тізбекпен қатар мынадай да тізбек берілсін:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \qquad (5.7)$$

немесе, қысқаша $\{y_n\}$.

2-анықтама. (5.6) және (5.7) тізбектердің қосындысы, айырмасы және көбейтіндісі деп сәйкесінше $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ және $\{x_n \cdot y_n\}$ тізбектерін айтады.

Ескерту! Егер $\{y_n\}$ тізбегінде саны шекті элементтер нөлге тең болса, онда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ қатынасын $y_n \neq 0$ болатындай нөмірден бастап анықтау керек.

Біз тізбектерді N жиынында анықталған функциялар деп қарастырдық. Ендеше функциялар үшін енгізілген ұғымдардың көпшілігін тізбектер үшін де енгізуге болады.

3-анықтама. Егер $\forall n \in N$ үшін $x_n < x_{n+1}$ $\left(x_n > x_{n+1}\right)$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі *өспелі (кемімелі)* делінеді;

4-анықтама. Егер $(\exists M \in R)(\forall n \in N) : (x_n \le M)$ орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі *жоғарғы жағынан шектелген* делінеді;

5-анықтама.Егер $(\exists m \in R)(\forall n \in N) : (x_n \ge m)$ орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі *төменгі жағынан шектелген* делінеді;

6-анықтама. Егер (5.6) тізбек жоғарғы және төменгі жағынан шектелсе, онда оны шектелген дейді, яғни $m \le x_n \le M$. Керісінше, егер $m \le x \le M$ теңсіздігі орындалса, онда $K = \max\{|m|, |M|\}$ деп алсақ $|x| \le K$ теңсіздігі шығады.

7-анықтама. Егер кез келген $A > 0$ саны үшін (5.6) тізбектің ең болмағанда бір элементі табылып $|x_n| > A$ теңсіздігі орындалса, онда ол тізбекті *шектелмеген* деп атайды.

Егер (5.6) тізбек тек жоғарғы немесе төменгі жағынан ғана шектелсе, онда оның шектелмейтіні соңғы анықтамадан келіп шығады.

Тізбектер кейде рекурентті түрде беріледі. Осы жағдайда тізбектің n-ші мүшесі оның алдыңғы мүшелері арқылы өрнектеледі.

Мысалы, $x_n = x_{n-1} + d,\ b_n = b_{n-1} \cdot q,\ n = 2,3\ldots$ тізбектері бойынша сәйкесін-ше арифметикалық және геометриялық прогрессияларды (олар да тізбектер) құруға болады.

Енді тізбектің шегі түсінігіне тоқталайық.

8-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ натурал саны табылып N-нен үлкен барлық натурал n-дер үшін $(n > N)$

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{5.8}$$

теңсіздігі орындалса, онда a *санын (5.6) тізбегінің шегі* деп атайды да оны былай жазады:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,. \qquad (5.9)$$

Шек таңбасы $\lim$ латынның $\lim es$ (қазақша-шек) деген сөзінен қысқартылып алынған.

Кейде (5.9) теңдіктің орнына $n\to\infty,\ x_n\to a$ деп те жазады. Оның оқылуы: n шексіздікке ұмтылғанда x_n айнымалысы a -ға ұмтылады.

Жоғарыдағы анықтаманы кванторлар арқылы былай жазады:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N=N(\varepsilon))(\forall n>N):(|x_n-a|<\varepsilon)\Leftrightarrow a=\lim_{n\to\infty}x_n\,.$$

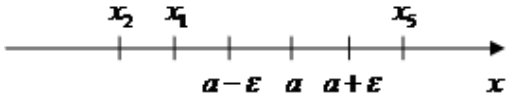
Ескерту! Анықтамада N нөмірі ε -нан тәуелді дедік. Егер ε санын кішірейтсек, онда $N(\varepsilon)$ саны көбейеді. Демек, N нөмірін тұрақты деп қарастыруға болмайды. Бұл тұжырым айнымалы x_n -нің барлық мәндері бір санға тең болғанда ғана орындалмайды. Басқаша айтқанда, $x_n=a$ шартынан $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ теңдігі шығатындықтан, анықтамадағы $\varepsilon>0$ саны кез келген етіп алынсада $|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздігі n -нің барлық мәндерінде орындалады. Бұдан тұрақты тізбектің шегі осы тұрақты санға тең болады деген қорытынды шығады.

9-анықтама. Егер (5.6) тізбектің тиянақты (шекті) шегі a бар болса, онда оны a *санына жинақты* дейді.

Егер $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ болса немесе барлық $n=1,2,\ldots$ үшін $x_n<a$ (немесе $x_n>a$) теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін a санына сол (оң) жағынан жинақты дейді де оны былай жазады: $\lim_{n\to\infty}x_n=a-0$ ($\lim_{n\to\infty}x_n=a+0$). Егер $a=0$ болса, онда 0-0 немесе 0+0 демей, тек қана -0 немесе +0 деп жазады.

Тізбек шегінің геометриялық түсінігін берелік. Жоғарыдағы (5.8) теңсіздік $n>N$ мынадай қос теңсіздікке

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,$ пара-пар екені белгілі. Осыдан $x_n,\ n > N$ нүктелерінің a нүктесінің ε аймағында жататынын көреміз. Егер a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі болса, онда $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылады да нөмірлері $N(\varepsilon)$-нен үлкен барлық x_n нүктелері $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ интервалында жатады, ал $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нүктелері интервалдың сыртында да, ішінде де жатуы мүмкін (5.17-сурет).



5.17-сурет

10-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып барлық $n > N$ нөмірлері үшін $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ теңсіздігі орындалса, онда шексіз алыстаған ∞ нүктені (5.6) тізбектің шегі деп айтады да оны былай жазады:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

11-анықтама. Егер (5.6) тізбектің шегі жоқ немесе $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ болса, онда ол тізбекті жинақсыз дейді.

Мысалдар.

1. Жоғарыдағы 1-мысалдағы

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad (5.10)$$

тізбегінің шегі 0 болатынын көрсетейік.

Ол үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санын алып

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \qquad (5.11)$$

теңсіздігі n-нің қандай мәндерінде орындалатынын анықтаймыз. Егер (5.11) теңсіздікті n бойынша шешсек:

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Осыдан, егер N үшін, мысалы $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ санын алсақ (мұндағы $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ шамасы $\frac{1}{\varepsilon}$ санының бүтін бөлігі), онда $\forall n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ болғанда (5.11) теңсіздіктің орындалатынын көреміз. Демек, (5.10) тізбектің шегі 0. Осы сияқты 2- мен 3-мысалдардағы тізбектердің шектері де 0 екенін дәлелдеуге болады.

2. $x_n=\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ айнымалысы берілсін. Осы айнымалының шегі $\frac{1}{3}$ болатынын дәлелдейік. Расында, кез келген $n>2$ үшін:

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{-5n+10}{3\left(3n^2+2n-4\right)}\right|=\frac{5n-10}{3\left(3n^2+2n-4\right)}<\frac{5n}{3\left(3n^2+2n-4\right)}<\frac{5n}{3\left(3n^2-4\right)}=$$

$$=\frac{5n}{3\left(2n^2+\left(n^2-4\right)\right)}<\frac{5n}{3\cdot 2n^2}<\frac{1}{n},$$

яғни

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Егер $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ десек, онда $\forall n > N$ үшін $\left|x_n - \frac{1}{\varepsilon}\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

Демек, $\frac{1}{3}$ саны x_n айнымалысының шегі.

3. $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ тізбегі жинақсыз.

Расында, тізбектің шегін *a* десек және $0 < \varepsilon < 1$ шартын қанағаттан-дыратын $\varepsilon > 0$ санын алсақ, онда $U_\tau(a)$ аймағының сыртында берілген тізбектің шексіз көп мүшелері жатады.

Демек, *a* саны тізбектің шегі бола алмайды.

4. Жоғарыдағы $x_n = (-1)^n$ айнымалысының шегі жоқ.

Расында, берілген айнымалы бойынша тізбек құрайық:

$$-1,\ +1,\ -1,\ +1,\ \ldots,\ (-1)^n, \ldots \qquad (5.12)$$

Кері жорып (5.12) тізбектің шегі *a* саны бар дейік. Олай болса, $\forall \varepsilon > 0$ (мысалы $\varepsilon = \frac{1}{2}$) үшін N нөмірі табылады да $\forall n > N$ үшін $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ орындалады. x_n айнымалысы $n = 2k$ болғанда 1 мәнін, ал $n = 2k - 1$ болғанда -1 мәнін қабылдайтындықтан $|1 - a| < \frac{1}{2}$ және $|(-1) - a| < \frac{1}{2}$ теңсіздіктері орындалады.

Олай болса,

$$2 = \left|(1-a) + \left(a - (-1)\right)\right| \le |1-a| + \left|a - (-1)\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

яғни $2 < 1$. Бұл қайшылық (5.12) тізбек *a* санына жинақталады дегенімізді теріске шығарады.

5.11. Шексіз аз және шексіз үлкен тізбектер

1-анықтама. Шегі нөлге тең болатын $\{\alpha_n\}$ тізбегін *шексіз аз* тізбек немесе қысқаша шексіз аз дейді.

Егер тізбектің шегінің анықтамасында $a=0$ десек, онда шексіз аз анықтамасын былай беруге болады.

2-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon>0$ санына сәйкес $N=N(\varepsilon)$ нөмірі табылып $\forall n>N$ үшін $|\alpha_n|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $\{\alpha_n\}$ тізбегін шексіз аз дейді.

Мысалы, $\{\alpha_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ тізбегінің шегі нөлге тең екенін алдыңғы тақырыпта көрсеткенбіз, ендеше $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ - шексіз аз.

Соңғы анықтамадан шексіз аз деп аталатын тізбектің элементтерінің модульдері белгілі бір нөмірден бастап $\varepsilon>0$ санынан кіші болатынын байқаймыз.

Жоғарыдағы анықтамада «шексіз аз» деген терминді шегі нөл болатын $\{\alpha_n\}$ тізбегіне бердік. Алайда нөлге тең емес кез келген тұрақты өте аз шаманы шексіз аз деуге болмайды.

Мысалы, $\alpha=0,001$ шамасын алсақ, оны өте аз шама деуге болады, бірақ шексіз аз шама деуге болмайды. Оның себебі бұл шама тұрақты және ол салыстырмалы түсінік.

Шексіз аз тізбек пен шегі бар тізбектің арасында тығыз байланыс бар.

Шынында, $\{x_n\}$ тізбегінің шегін a десек, онда $\forall\varepsilon>0$ саны үшін $|x_n-a|<\varepsilon,\ n>N$, теңсіздігі орындалады да $\{x_n-a\}$ тізбегі шексіз аз болады.

Егер $x_n-a=\alpha_n$ десек, онда

$$x_n=a+\alpha_n. \tag{5.13}$$

Осыдан шегі бар $\{x_n\}$ тізбегінің n - мүшесін сол тізбектің шегі мен қандай да бір шексіз аз $\{\alpha_n\}$ тізбегінің α_n мүшесінің қосындысы түрінде өрнектеуге болатынын көреміз. Керісінше, егер (5.13) өрнектегі α_n шексіз аз $\{\alpha_n\}$ тізбегінің n - мүшесі болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Демек, жоғарыда айтылғандарды былай тұжырымдауға болады:

$\{x_n\}$ тізбегінің шегі a саны болу үшін $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ тізбегінің шексіз аз болуы қажетті және жеткілікті. Осыған сүйеніп $\{x_n\}$ тізбегінің шегінің тағы бір анықтамасын атайды.

Енді осы шексіз аз тізбектерге мағынасы керісінше болып келетін шексіз үлкен тізбектерге тоқталайық.

3-анықтама. Егер кез келген $M > 0$ санына сәйкес N нөмірі табылып барлық $n > N$ мәндерінде $|x_n| > M$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін *шексіз үлкен тізбек* немесе қысқаша шексіз үлкен дейді де $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ немесе $n \to \infty,\ x_n \to \infty$ деп жазады.

Осы жағдайда $\{x_n\}$ тізбегін шексіздікке ұмтылады деп атайды. Логикалық символдарды пайдаланып осы анықтаманы былай жазуға болады:

$$(\forall M > 0)(\exists N = N(M))(\forall n > N): (|x_n| < M) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Егер шексіз үлкен тізбек $\{x_n\}$ белгілі бір нөмірден бастап тек оң (теріс) таңба қабылдаса, онда мына символды пайдаланады:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right).$$

Ескерту! Кез келген шексіз үлкен тізбек шектелмеген тізбек болады (олардың анықтамаларын салыстырыңыз).

Керісінше, шектелмеген тізбек шексіз үлкен тізбек болмауы мүмкін.

Мысалы, $1, 2, 1, 3, \ldots, 1, n, \ldots$ тізбегі шектелмеген, бірақ ол шексіз үлкен тізбек бола алмайды. Себебі $M > 1$ болғанда $|x_n| > M$ теңсіздігі тізбектің керегінше үлкен тақ нөмірлі элементтері үшін орындалмайды.

Шексіз үлкен тізбектерге мысалдар келтірейік.

1. $\{x_n\} = \{n\}$ тізбегінің жинақсыз екенін көрсетейік. Расында, осы тізбектің шегін *a* делік және $M = 1$ болсын. Сонда Архимед аксиомасы бойынша $N > a + 1$ теңсіздігі орындалатындай натурал N саны табылады. Олай болса барлық $n > N$ нөмірлері үшін $x_n = n > a + 1$ теңсіздігі орындалады.

Демек, a саны $\{n\}$ тізбегінің шегі бола алмайды. Тізбек шексіз шекке ие болады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. $\{x_n\} = \{-n\}$ тізбегі де жинақсыз, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Енді шексіз үлкен және шексіз аз тізбектердің арасындағы байланыстарға тоқталайық.

1-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбегі шексіз үлкен болса, онда қандай да бір *n* нөмірінен бастап $\{1\}$, $\{x_n\}$ екі тізбегінің қатынасы $\dfrac{\{1\}}{\{x_n\}}$ анықталады да ол шексіз аз тізбек болады.

5.12. Шексіз аз тізбектердің қасиеттері

1-теорема. Егер $\{\alpha_n\}$ және $\{\beta_n\}$ тізбектері шексіз аз болса, онда олардың қосындысы (айырмасы) шексіз аз тізбек болады.

Дәлелдеу. Теореманың шарты бойынша $\{\alpha_n\}$ және $\{\beta_n\}$ тізбектері шексіз аз. Олай болса шексіз аз тізбек анықтамасы бойынша кез келген $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ санына сәйкес N_1 және N_2

нөмірлері табылады да $\forall n > N_1$ және $\forall n > N_2$ нөмірлері үшін сәйкесінше

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.14}$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.15}$$

теңсіздіктері орындалады.

N арқылы N_1 және N_2 нөмірлерінің үлкенін белгілейік. Сонда $\forall n > N$ үшін (5.14) және (5.15) теңсіздіктердің екеуі де орындалады. Олай болса

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

яғни

$$|\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon, \ n > N.$$

Бұдан $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ тізбектерінің шексіз аз екенін көреміз.

Салдар. Саны шекті шексіз аз тізбектердің алгебралық қосындысы шексіз аз тізбек болады.

2-теорема. Шектелген тізбек пен шексіз аз тізбектің көбейтіндісі шексіз аз тізбек болады.

3-теорема. Кез келген шексіз аз тізбек шектелген.

Жоғарыдағы 2 және 3 теоремалардан мынадай салдар шығады:

Салдар. Саны шекті шексіз аз тізбектердің көбейтіндісі де шексіз аз тізбек болады.

4-теорема. Егер шексіз аз $\{\alpha_n\}$ тізбегінің барлық элементтері бір және тек бір ғана c санына тең болса, онда $c = 0$.

5.13. Жинақты тізбектердің қасиеттері

1-теорема. Жинақты тізбектің тек бір ғана шегі болады.

2-теорема. Кез келген жинақты тізбек $\{x_n\}$ шектелген.

Ескерту! Кез келген шектелген тізбек жинақты болады деуге болмайды.

Мысалы, $\{x_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ тізбегі шектелген, бірақ жинақты емес.

Жинақты тізбектерге қолданылатын арифметикалық амалдарға тоқталайық.

3-теорема. Жинақты $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектерінің қосындысы (айырмасы) да жинақты тізбек және оның шегі $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектер шектерінің қосындысына (айырмасына) тең, яғни

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n .$$

1-салдар. 3-теорема қосылғыштардың саны шекті болған жағдайда да күшін сақтайды. Басқаша айтқанда, егер

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ \lim_{n\to\infty} z_n = c, \ldots \lim_{n\to\infty} t_n = l$$

болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n + z_n + \ldots + t_n) = a + b + c + \ldots + l .$$

Ескерту! 3-теореманың кері тұжырымы әр уақытта дұрыс бола бермейді, яғни қосындының шегінің бар болуынан әрбір қосылғыштың шегі бар деуге болмайды.

Мысалы, $\{x_n\} = \left\{(-1)^n\right\},\ \{y_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\right\}$ тізбектерін алсақ, онда $x_n + y_n = 0$ болады да $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$ орындалады, яғни $\{x_n + y_n\}$ тізбегінің шегі бар. Алайда, $\{x_n\},\ \{y_n\}$ тізбектерінің шектері жоқ екені белгілі.

4-теорема. Егер $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектері жинақты болса, онда $\{x_n \cdot y_n\}$ тізбегі де жинақты және оның шегі $\{x_n\},\ \{y_n\}$ тізбектер шектерінің көбейтіндісіне тең:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

2-салдар. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ бар болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} k\,x_n$, мұндағы k - кез келген тұрақты сан, шегі де бар және

$$\lim_{n\to\infty}\left(kx_n\right) = k \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Осыдан тұрақты санды шек таңбасының алдына шығаруға болады деген қорытынды аламыз.

3-салдар. Саны шекті жинақты тізбектердің көбейтіндісі де жинақты болады және

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n \cdot \ldots \cdot z_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} z_n .$$

Дербес жағдайда $x_n = y_n = \ldots = z_n$ десек, онда

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\right)^m = \lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot x_n \cdot \ldots \cdot x_n\right) \cdot = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^m$$

яғни

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\right)^m = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^m .$$

Бұдан шегі бар айнымалы шаманың дәрежесінің шегі айнымалының шегінің сол дәрежесіне тең болады деген қорытынды шығады.

Ескерту! 4-теоремаға кері теорема әрқашанда орынды деуге болмайды. Басқаша айтқанда $\left\{x_n \cdot y_n\right\}$ тізбегінің шегі бар болғанымен $\left\{x_n\right\}$ мен $\left\{y_n\right\}$ тізбектерінің шектері болмауы мүмкін.

Мысалы, $\left\{x_n\right\} = \{n\},\ \{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ болсын. Сонда

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

яғни $\left\{n\cdot\frac{1}{n^2}\right\}$ тізбегінің шегі бар. Алайда $\{x_n\}=\{n\}$ тізбегінің шегі жоқ.

5-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерінің шектері сәйкесінше *a* және $b\,(b\neq 0)$ болса, онда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ тізбегінің де шегі бар және $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

4-салдар. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ және $a\neq 0$, ал k - бүтін теріс сан болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^k=\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)^k=a^k$. Шынында, $k=-m\ (m>0)$ десек, онда

$$\lim_{n\to\infty}x_n^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^m}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n^m}=\frac{1}{a^m}=a^{-m}=a^k=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)^k.$$

6-теорема. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ x_n\geq 0,$ ал k - натурал сан болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}x_n}=\sqrt[k]{a}.$$

5-салдар. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ a\geq 0,$ ал z - кез келген рационал сан болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^z=a^z$.

5.14. Теңсіздіктерде шекке көшу

1-теорема. Егер b санына жинақталатын $\{x_n\}$ тізбегінің элементтері белгілі бір нөмірден бастап $x_n\geq a$ (немесе $x_n\leq a$)

теңсіздігін қанағаттан-дырса, онда $b \geq a$ (немесе $b \leq a$) теңсіздігі орындалады.

Ескерту! Егер жинақты $\{x_n\}$ тізбегінің мүшелері үшін тиісті бір нөмірден бастап $x_n > a$ қатаң теңсіздігі орындалса, онда жалпы жағдайда, тізбектің шегі b үшін $b > a$ болады деген қорытынды жасауға болмайды. Сонымен $x_n > a \Rightarrow b \geq a$.

Мысалы, егер $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ десек, онда барлық нөмірлер үшін $x_n > 0$, бірақ $b = 0$, себебі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Осы ескертуге сүйене отырып оң (теріс) айнымалының шегі теріс (оң) болмайтынын көреміз.

1-салдар. Егер жинақты $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерінің барлық элементтері, ең болмағанда тиісті бір нөмірден бастап, $x_n \leq y_n$ теңсіздігін қанағаттан-дырса, онда олардың шектері де осындай теңсіздікті қанағаттандырады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2-салдар. Егер жинақты тізбектің барлық элементтері $[a; b]$ сегментінде жатса, онда осы тізбектің шегі c да осы сегментте жатады.

Шынында, $a \leq x \leq b$ болғандықтан да 1-теорема бойынша $a \leq c \leq b$.

2-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерінің екеуі b-ға жинақты болса және үшінші бір $\{y_n\}$ тізбегінің элементтері тиісті бір нөмірден бастап

$$x_n \leq y_n \leq z_n \tag{5.16}$$

теңсіздіктерді қанағаттандырса, онда $\{y_n\}$ тізбегі де b-ға жинақталады.

5.15. Анықталмаған өрнектер

Алдағы тақырыптарда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ өрнектерінің шектерін қарастырғанда $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерінің шектері шекті (тиянақты) сандар деп алынған. Сонымен қатар бөлшектің бөлімі нөлден өзгеше, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ делінген.

Ал, $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектерінің шектерінің біреуі немесе екеуі шексіз (немесе нөл) болатын жағдайлар қарастырылмаған.

Енді соларды зерттелік.

1. x_n және y_n айнымалыларының екеуі де нөлге ұмтылсын. Сонда $\frac{x_n}{y_n}$ айнымалысының шегі, x_n және y_n айнымалыларының өзгеру заңдылықтарына байланысты, әртүрлі мәндерге ие болуы немесе тіпті жоқ болуы да мүмкін. Төмендегі мысалдар осыны көрсетеді:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$ айнымалылары берілсін. Сонда: $n \to \infty$-да $x_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, $y_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$;

ә) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{n^2}$ болсын. Сонда: $n \to \infty$-да $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = \frac{2}{n^2} \to 0$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{n}{2} \to \infty$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$;

б) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{n}$ болсын. Сонда: $n \to \infty$-да $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = \frac{2}{n} \to 0$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \to \frac{1}{2}$;

в) $x_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, $y_n = \frac{1}{2^n}$. Сонда: $n \to \infty$-да $x_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \to 0$, $y_n = \frac{1}{2^n} \to 0$, $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ шегі болмайды.

Сонымен, x_n және y_n айнымалыларының шектерін білгенімізбен $\frac{x_n}{y_n}$ айнымалысының шегі туралы ештеңе айтуға болмайды екен. Оны табу үшін x_n және y_n-дердің өзгеру заңын біліп $\frac{x_n}{y_n}$ қатынасын зерттеу керек. Осы жағдайда, яғни $x_n \to 0$ және $y_n \to 0$-да, $\frac{x_n}{y_n}$ өрнегі $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмаған өрнек делінеді.

2. Енді $n \to \infty$-да $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ болсын. Сонда $\frac{x_n}{y_n}$ айнымалысының шегі үшін жоғарыдағы қарастырылғанға ұқсас жағдайлар болады.

Мысалдар келтірейік.

а) $x_n = 5n$, $y_n = 3n^2$ болсын. Сонда $n \to \infty$-да: $x_n = 5n \to \infty$, $y_n = 3n^2 \to \infty$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{5}{3n} \to 0$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$;

ә) $x_n = 3n^2$, $y_n = 2n$ болсын. Сонда $n \to \infty$-да: $x_n = 3n^2 \to \infty$, $y_n = 2n \to \infty$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{3n}{2} \to \infty$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$;

б) $x_n = 2n,\ y_n = 3n$ болсын. Сонда $n \to \infty$-да: $x_n = 2n \to \infty,\ y_n = 3n \to \infty,\ \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{2}{3}$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{2}{3}$;

в) $x_n = (-1)^n n,\ y_n = n$ болсын. Сонда $n \to \infty$-да: $x_n = (-1)^n n \to \infty,\ y_n = n \to \infty,$ $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ шегі жоқ.

Осы жағдайда, яғни $x_n \to \infty,\ y_n \to \infty$-да, $\dfrac{x_n}{y_n}$ өрнегі $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмаған өрнек делінеді.

3. Егер $x_n \to 0,\ y_n \to \infty$ болса, онда $x_n \cdot y_n$ өрнегі $0 \cdot \infty$ түріндегі анықталмаған өрнек делінеді.

Мысалдар келтірейік:

а) егер $x_n = \dfrac{2}{n^3},\ y_n = 2n$ болса, онда: $n \to \infty$-да $x_n = \dfrac{2}{n^3} \to 0,$ $y_n = 2n \to \infty,$ $x_n \cdot y_n = \dfrac{4}{n^2} \to 0$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$;

ә) егер $x_n = 2n^3,\ y_n = \dfrac{1}{2n^2}$ болса, онда: $n \to \infty$-да $x_n = 2n^3 \to \infty,$ $y_n = \dfrac{1}{2n^2} \to \infty$, $x_n \cdot y_n = n \to \infty$ яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$;

б) егер $x_n = \dfrac{3}{n},\ y_n = 2n$ болса, онда: $n \to \infty$-да $x_n = \dfrac{3}{n} \to 0$, $y_n = 2n \to \infty$, $x_n \cdot y_n = 6$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 6$;

в) егер $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = 2n$ болса, онда: $n \to \infty$-да $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $y_n = 2n \to \infty$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 2\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ шегі жоқ.

4. Егер x_n және y_n шамалары таңбалары әртүрлі болатын шексіздікке ұмтылса, онда $x_n + y_n$ қосындысы туралы тиянақты ештеңе айтуға болмайды.

Мысалдар келтірейік:

а) $n \to \infty$-да $x_n = 5n \to \infty$, $y_n = -4n \to -\infty$, $x_n + y_n = n \to +\infty$;

ә) $n \to \infty$-да $x_n = 5n \to \infty, y_n = -6n \to -\infty$, $x_n + y_n = -n \to -\infty$;

б) $n \to \infty$-да $x_n = 5n + b \to +\infty$, $y_n = -5n \to -\infty$, $x_n + y_n = b$;

в) $n \to \infty$-да $x_n = 5n + (-1)^n \to +\infty$, $y_n = -5n \to -\infty$, $x_n + y_n = (-1)^n$ өрнегінің шегі жоқ.

Сондықтан да $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ болғанда $x_n + y_n$ өрнегі $\infty - \infty$ түріндегі анықталмаған өрнек делінеді.

Сонымен 1-4 жағдайларда біз анықталмағандықтардың мынадай түрлерін қарастырдық:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty - \infty.$$

Айнымалы x_n мен y_n шамаларының өзгеру заңдарын ескере отырып $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$, $\frac{x_n}{y_n}$ өрнектерін зерттеуді «анықталмағандықты ашу» деп айтады.

Кейде $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін Штольцтің мына теоремасын пайдаланған тиімді.

Теорема. Егер қандай да бір n нөмірінен бастап $\{y_n\}$ тізбегі өсетін болса, яғни $y_{n+1} > y_n$ және $n \to \infty$-да $y_n \to +\infty$ болса, сонымен қатар $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ шегі (шекті немесе шексіз) бар болса, онда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ тізбегінің шегі бар және

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Мысалдар.

1. $x_n = 4\dfrac{n^2\left(3 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 - \dfrac{4}{n^2}\right)} = 4\dfrac{3 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{2 - \dfrac{4}{n^2}},$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4\lim_{n\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{2 - \dfrac{4}{n^2}} = 4\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = 4\cdot\frac{3}{2} = 6,$$

яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\left(3n^2 - n + 1\right)}{2n^2 - 4} = 6.$

2. $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)\left(3 + \dfrac{1}{n}\right)$ айнымалысының шегін табу керек.

Шешуі.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$

.

3. $x_n = \left(\dfrac{2 + 3n^4}{n - 6n^4}\right)^5$ айнымалысының шегін табу керек.

Шешуі.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3n^4}{n-6n^4}\right)^5 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^4}+3}{\frac{1}{n^3}-6}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}.$$

4. $x_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3-n^2}$ айнымалысының шегін табу керек.

Шешуі. Егер $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ болатынын ескерсек, онда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{3-n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(3-n^2)} = -\frac{1}{2}.$$

5. $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ айнымалысының шегін табу керек.

Шешуі. Алдымен берілген өрнекті түрлендіреміз:

$$x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Осы жағдайда $\dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығы кездесіп тұр. Оны ашу үшін бөлшекті тағы да түрлендірейік:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Сонда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$

6. $0<k<1$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^k - n^k\right] = 0$ болатынын дәлелдеу керек.

Шешуі. Мұнда $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандық беріліп тұр. Өрнекті былай түрлендірейік:

$$0<\left(n+1\right)^k-n^k=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]<n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-k}}.$$

$n\to\infty$-да $\frac{1}{n^{1-k}}\to 0$ болатындықтан $\left(n+1\right)^k-n^k\to 0$

немесе $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n+1\right)^k-n^k\right]=0.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}$ өрнегі ∞° түріндегі анықталмағандықты береді. $\sqrt[n]{n}$ айнымалысының шегін табу мақсатымен $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$ дейік те α_n-нің шексіз аз екенін дәлелдейік.

Кез келген n үшін $\alpha_n\geq 0$ болатынын көру қиынға соқпайды. Соңғы теңдіктің екі жағын да n-ші дәрежеге шығарайық:

$$n=\left(1+\alpha_n\right)^n=1+n\alpha_n+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}\alpha_n^2+\ldots+\alpha_n^n.$$

Теңдіктің оң жағының кез келген мүшесі теріс болмағандықтан, $\forall n>1$ үшін келесі теңсіздік орынды:

$$n>1+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\alpha_n^2, \text{ яғни } n-1>\frac{n\left(n-1\right)}{2}\alpha_n^2.$$

Осыдан

$$1>\frac{n}{2}\alpha_n^2\Rightarrow\frac{2}{n}>\alpha_n^2\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{n}}>\alpha_n\geq 0.$$

Соңғы қос теңсіздіктен шекке көшсек:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}\geq\lim_{n\to\infty}\alpha_n\geq 0 \text{ немесе } 0\geq\lim_{n\to\infty}\alpha_n\geq 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0.$$

Демек, α_n - шексіз аз шама екен. Олай болса, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=1$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$ болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Шынында да, қандай да бір нөмірден бастап барлық n үшін $\frac{1}{n}<a<n$ теңсіздігі орындалады. Осыдан $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$. Шекке көшіп $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ екенін ескерсек, онда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

9. $z_n=\frac{a^n}{n},\ a>1.$

Шешуі. Егер $n\to\infty$ болса, онда $a^n\to+\infty$ болады да $\frac{\infty}{\infty}$ анықталма-ғандығын аламыз. Сонда Штольц теоремасы бойынша (мұнда $y_n=n,\ x_n=a^n$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{n-1}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)=+\infty.$$

Сонымен

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty,\ \ (a>1).$$

Осы нәтижені (n керегінше үлкен болғанда) пайдаланып $k>1$ үшін мынадай нәтиже алуға болады:

$$\frac{a^n}{n^k}=\left[\frac{a^{\frac{1}{k}}}{n}\right]^k>\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}.$$

Осыдан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=+\infty,\ \ (a>1)$$

Егер $0<k<1$ десек, онда да осы соңғы формула орынды.

10. Егер $\{a_n\}$ тізбегінің шекті немесе шексіз шегі бар болса, онда сол шекке $\{b_n\}=\left\{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right\}$ тізбегі де ұмтылады.

Мұндағы $\{b_n\}=\left\{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right\}$ дегеніміз $\{a_n\}$ тізбегінің алғашқы n мүшесінің «арифметикалық ортасы».

Шешуі. Шыныда, $x_n=a_1+a_2+...+a_n,\ y_n=n$ десек, онда Штольц теоремасы бойынша

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1}=\lim_{n\to\infty}a_n\,.$$

11. $z_n=\dfrac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}}$ (k-натурал сан) айнымалысының шегін табу керек.

Шешуі. Мұнда $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық беріліп тұр. Егер $x_n=1^k+2^k+...+n^k,\ \ y_n=n^{k+1}$ десек, онда $x_n-x_{n-1}=n^k$, ал y_n-y_{n-1}-ді табу үшін келесі теңдіктен пайдаланамыз:

$$(n-1)^{k+1}=n^{k+1}-(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}-...+(-1)^{k+1}.$$

$$y_n-y_{n-1}=n^{k+1}-(n-1)^{k+1}=(k+1)n^k-\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+...-(-1)^{k+1}.$$

Енді Штольц теоремасын қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \frac{(k+1)k}{2}n^{k-1} + \ldots - (-1)^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^k\left[(k+1) - \frac{(k+1)k}{2n} + \ldots - \frac{(-1)^{k+1}}{n^k}\right]} = \frac{1}{k+1}.$$

Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$ (k - натурал сан).

5.16. Монотонды тізбек және оның шегі туралы теорема

1-анықтама. Егер $\{x_n\}$ тізбегінің әрбір келесі элементі оның алдындағы элементтен кем (артық) болмаса, яғни егер барлық $n = 1, 2, \ldots$ нөмірлері үшін

$$x_n \le x_{n+1}, \quad (x_n \ge x_{n+1})$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін *кемімейтін (өспейтін) тізбек* деп атайды.

2-анықтама. Егер барлық n нөмірлері үшін $x_n < x_{n+1}$, $(x_n > x_{n+1})$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін өспелі (кемімелі) тізбек деп атайды. Тізбектердің барлық осы түрлерін біріктіріп жалпы атпен *монотонды тізбектер* деп атайды.

Кез келген монотонды тізбек не жоғары, не төменгі жағынан шектелген болады. Шынында, кез келген кемімейтін тізбек төменгі жағынан шектелген (дәл төменгі шекара ретінде тізбектің бірінші мүшесін алуға болады), ал кез келген өспейтін тізбек жоғарғы жағынан шектелген (дәл жоғарғы шекара ретінде бірінші мүшені алуға болады).

Сондықтан, егер өспейтін тізбек төменгі жағынан шектелсе, онда ол екі жағынан да шектелген болады.

Сол сияқты, егер кемімейтін тізбек жоғарғы жағынан шектелсе, онда ол тізбек екі жағынан шектелген.

Мысалдар.

1. $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots$ тізбегі өспейді. Ол жоғарғы жағынан өзінің бірінші элементі 1-мен, ал төменгі жағынан 0 санымен шектелген.

2. 2, 2, 3, 3, ..., *n*, *n*, ... тізбегі кемімейтін тізбек. Осы тізбек төменгі жағынан 2 санымен шектелген, ал жоғарғы жағынан шектелмеген.

Монотонды тізбектің шегі туралы мынадай теорема бар.

Теорема. Егер кемімейтін (өспейтін) тізбек жоғарғы (төменгі) жағынан шектелсе, онда ол жинақты.

5.17. e саны

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \tag{5.17}$$

тізбегін қарастыралық және монотонды тізбектің шегі туралы теореманы пайдаланып, осы тізбектің жинақты болатынын дәлелдейік.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ болатынын ескерсек, онда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ шегі 1^∞ анықталмағандығын беретінін көру қиын емес.

(5.17) тізбегінің x_n элементін Ньютон биномының формуласын пайдаланып жіктейік:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots.+\frac{n(n-1)\ldots\left[n-(n-1)\right]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+ \tag{5.18}$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Тізбектің келесі x_{n+1} элементі де осы сияқты жіктеледі, яғни

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \quad (5.19)$$

Осы (5.18) және (5.19) өрнектерді салыстырсақ, онда біріншіден (5.18) өрнектің оң жағындағы қосылғыштардың саны n, ал (5.19) өрнектің оң жағындағы қосылғыштардың саны $n+1$ болатынын, (5.19) өрнектегі соңғы $(n+1)$ - қосылғышының оң екенін көреміз.

Екіншіден, $\forall k=2,3,\ldots,n$ үшін

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

теңсіздігі орынды, себебі

$$1-\frac{S}{n}\le 1-\frac{S}{n+1},\quad S=1,2,\ldots,n-1;\ n=1,2,\ldots$$

Сондықтан $x_n<x_{n+1}$, яғни $\{x_n\}$ тізбегі өспелі.

Енді (5.17) тізбектің жоғарғы жағынан шектелетінін көрсетейік. Осы мақсатпен (5.18) өрнектің оң жағындағы әрбір жақшаны 1 санымен алмастырамыз және $k!\ge 2^{k-1},\ k\ge 2$ теңсіздігін пайдаланамыз. Сонда

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Енді

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1$$

екенін ескерсек, онда

$$x_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Соңғы теңсіздік $\{x_n\}$ тізбегінің жоғарғы жағынан шектелетінін көрсетеді.

Сонымен $\{x_n\}$ тізбегі өспелі және жоғарғы жағынан шектелген екен.

Демек, ол тізбектің шекті шегі бар, оны Эйлердің ізімен e әрпімен белгілейді:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

e саны иррационал және сол себептен шексіз, периодты емес бөлшек арқылы өрнектеледі:

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

5.18. Функция шегі

Жоғары математиканың негізгі ұғымдарының бірі – функция шегі ұғымын анықтайық. Осы мақсатпен алдымен шексіз көп элементтерден тұратын $X = \{x\}$ сан жиынының шектік нүктесі деп нені айтады, соған тоқталайық.

1-анықтама. Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында X жиынының x_0-ден өзгеше *x* нүктесі жатса, онда x_0 нүктесін X жиынының *шектік нүктесі* деп атайды.

Шектік нүктенің өзі X жиынында жатуы да, жатпауы да мүмкін. Мысалы, $X = [a;b]$ немесе $X =]a;b[$ десек, онда *a* нүктесі екі жиын үшін де шектік нүкте болады, бірақта, бірінші жағдайда *a* нүктесі X жиынында жатады да, екінші жағдайда жатпайды.

2-анықтама. Егер $\overline{x} \in X$ нүктесінің кез келген аз аймағында X жиынының $\overline{x}$-тен басқа нүктесі жатпаса, онда $\overline{x}$ нүктесін X жиынының *оқшауланған нүктесі* деп атайды.

Егер x_0 нүктесі X жиынының шектік нүктесі болса, онда осы нүктенің кез келген аймағында X жиынының шексіз көп нүктелері жатады.

Шынында, кері жорып x_0 нүктесінің $]x_0-\varepsilon_1;\ x_0+\varepsilon_1[$ аймағында X жиынының саны шекті нүктелері жатады, олар $x_1,\ x_2,\ldots,x_N$ нүктелері болсын дейік. Енді $|x_0-x_1|,|x_0-x_2|,\ldots,|x_0-x_N|$ сандарының ең кішісін ε делік. Сонда $]x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1[$ аймағында X жиынының $x_1,\ x_2,\ldots,x_N$ нүктелері және басқа нүктелері де жатпайды.

Сонымен $]x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1[$ аймағы X жиынының бір де бір нүктесін (егер x_0 нүктесі X жиынында жатса, онда одан басқа) қамтымайды екен. Демек, x_0 нүктесі X жиынының шектік нүктесі емес. Бұл қайшылық кері жорығаны-мызды теріске шығарды.

3-анықтама. Егер x_0 нүктесінің кез келген сол (оң) жақ жарты аймағында X жиынының ең болмағанда бір нүктесі жатса, x_0 нүктесін X жиынының *сол (оң) жақты шектік нүктесі* деп атайды.

Егер x_0 нүктесі тек сол (оң) жақты шектік нүкте болса, онда x_0 нүктесін бір жақты, ал бұлай екі жақты шектік нүкте деп атайды.

Шектік нүкте анықтамасынан шекті жиындардың шектік нүктелері болмайтынын көреміз. Ал, шексіз жиынның шектік нүктелері болуы да, болмауы да мүмкін.

Егер жиынның барлық шектік нүктелері жиынның өзінде жатса, ондай жиынды *тұйық* дейді.

1-теорема. Егер x_0 нүктесі X жиыны үшін шектік нүкте болса, онда X -тан шексіз көп әдіспен x_0 нүктесіне жинақты болатын және элементтері x_0 -дан өзгеше

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

сан тізбегін бөліп алуға болады.

4-анықтама (Гейне бойынша). Егер x_0 нүктесіне жинақты болатын X жиынының кез келген тізбегі $\{x_n\}$ $(x_i \neq x_0,\ i=1,2,\ldots)$ бойынша құрылған $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақты болса, онда b санын $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі (немесе $x \to x_0$-дағы) шегі (немесе шектік мәні) деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \text{ немесе } x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to b. \qquad (5.20)$$

Функция шегінің Гейне бойынша берілген анықтамасы сан тізбегінің шегі ұғымына негізделген, сондықтан бұл анықтаманы кейде «тізбектер тіліндегі» анықтама дейді.

5-анықтама (Коши бойынша). Егер кез келген оң ε санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып $0 < |x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын x-тің барлық мәндері үшін

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда b санын $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі (немесе $x \to x_0$-дағы) шегі (немесе шектік мәні) деп атайды және былай жазады:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \text{ немесе } x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to b.$$

Осы анықтаманы функция шегінің «$\varepsilon - \delta$» тіліндегі анықтамасы деп атайды.

Логикалық символдар арқылы жоғарыдағы анықтама былай жазылады:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x / 0 < |x - x_0| < \delta): (|f(x) - b| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = b \cdot$$

2-теорема. Функция шегінің Гейне және Коши бойынша анықтамалары пара-пар.

5.19. Бір жақты шектер

X сан жиынында $f(x)$ функциясы анықталсын, ал x_0 нүктесі осы X жиынының оң (сол) жақты шектік нүктесі болсын (x_0 нүктесі екі жақты шектік нүкте болуы да мүмкін).

$f(x)$ функциясы үшін x_0 нүктесінде бір жақты (оң немесе сол жақты) шек ұғымын енгізелік.

Осы мақсатпен кез келген $\delta > 0$ саны үшін $]x_0;\ x_0 + \delta[$ ($]x_0 - \delta;\ x_0[$) интервалында X жиынының ең болмаса бір элементі болуын талап етелік.

1-анықтама (Гейне бойынша). Егер x_0 нүктесіне жинақты және x_0-ден үлкен (x_0-ден кіші) сандардан тұратын аргумент мәндерінің кез келген тізбегі $\{x_n\}$ үшін оған сәйкес функция мәндерінің тізбегі $\{f(x_n)\}$ b санына жинақты болса, онда b санын $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі оң жақты (сол жақты) шегі деп атайды.

2-анықтама (Коши бойынша). Егер кез келген оң ε санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) шартын қанағаттандыратын аргумент x-тің барлық мәндері үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі оң жақты (сол жақты) шегі деп атайды.

Оң жақты (сол жақты) шекті белгілеу үшін мына символдарды:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = b,\ \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b \right)$$

немесе қысқаша

$$f(x_0 + 0) = b,\ \left(f(x_0 - 0) = b \right)$$

символдарын пайдаланады.

Функцияның оң және сол жақты шектерін функцияның бір жақты шектері деп атайды.

Мысалдар.

1. $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}+1, & егер \quad x>0 \quad болса,\\ 0, & егер \quad x=0 \quad болса,\\ -1, & егер \quad x<0 \quad болса.\end{cases}$

Осы функцияның графигі 5.1-суретте көрсетілген. Берілген функцияның $x=0$ нүктесінде бір жақты шектері бар екенін дәлелдейік.

Шынында, $x=0$ нүктесіне жинақты және нөлден үлкен сандардан тұратын $\{x_n\}$ тізбегіне сәйкес келетін $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ тізбегі плюс 1 санына, ал $x=0$ нүктесіне жинақты және нөлден кіші сандардан тұратын $\{x_n\}$ тізбегіне сәйкес $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ тізбегі минус 1 санына жинақты. Демек, $f(x)=\operatorname{sgn} x$ функциясының $x=0$ нүктесінде бір жақты шектері бар, бірақ ол нүктеде функцияның шегі жоқ.

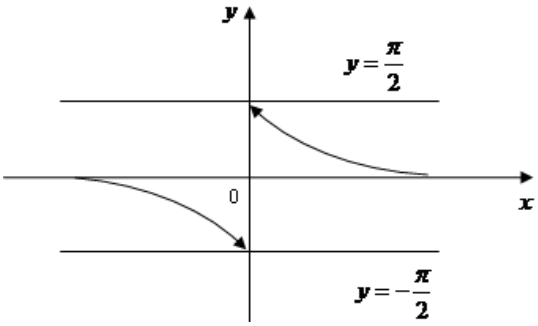
2. $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$ функциясының $x=0$ нүктесіндегі біржақты шектерін табу керек.

Оң және сол жақты шектерді табайық.

$$f(+0)=\lim_{x\to+0} arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$f(-0)=\lim_{x\to-0} arctg\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

Осыдан $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$ функциясының $x=0$ нүктесінде өзара тең емес оң және сол жақты шектері бар екенін көреміз. Демек, $x=0$ нүктесінде функцияның шегі жоқ. Берілген функцияның графигі 5.18-суретте кескінделген.



5.18-сурет

Теорема. $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде шегі бар болуы үшін осы нүктеде оң және сол жақты шектері бар болып, олардың өзара тең болуы қажетті және жеткілікті.

Олардың ортақ мәні $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі (немесе екі жақты шегі) болады.

5.20. Шектер туралы теоремалар

X сан жиыны беріліп $x_0 \in X$ оның шектік нүктесі болсын және осы параграфта кездесетін барлық функциялар X жиынында анықталсын (x_0 нүктесінде функциялар анықталмаса да болады).

Сан тізбегі үшін берілген шектер туралы теоремаларды функция шектері үшін жалпылайық.

1-теорема. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде тиянақты шегі бар болса, онда осы нүктенің қандай да бір аймағы табылып (x_0 нүктесі кірмеуі де мүмкін), сол аймақта $f(x)$ функциясы шектелген болады.

2-теорема. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының нөлден өзгеше шегі бар болса, яғни $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$, онда x_0 нүктесінің қандай да бір аймағы табылып сол аймақта (x_0

нүктесі кірмеуі де мүмкін) $f(x)$ функциясы нөлге тең болмайды және b-ның таңбасындай таңба қабылдайды.

3-теорема. Егер $\delta > 0$ саны табылып барлық $x \in U_\delta(x_0)$ үшін $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ теңсіздігі орындалса және $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = b$ болса, онда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

4-теорема. Егер $\delta > 0$ саны табылып барлық $x \in U_S(x_0)$ үшін $f(x) \le \varphi(x)$ теңсіздігі орындалса және $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$ болса, онда $A \le B$.

5-теорема. Егер $f(x) = K - const$, $(x \in U_\delta(x_0))$ болса, онда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = K$.

6-теорема. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ және $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ тиянақты шектері бар болса, онда

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm \varphi(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot \varphi(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}$, мұндағы $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \ne 0$.

7-теорема. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тиянақты шегі бар болса, онда кез келген α нақты саны үшін

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^\alpha = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^\alpha$$

болады. Яғни функция дәрежесінің шегі негіздің шегінің сол дәрежесіне тең болады.

8-теорема. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тиянақты шегі бар болса, онда кез келген нақты сан $b > 0$ үшін

$$\lim_{x\to x_0} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)},$$

яғни негізі тұрақты көрсеткіштік функцияның дәреже көрсеткішінде шекке көшуге болады.

9-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ тиянақты шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\left[\log_a f(x)\right] = \log_a\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right],\ a>0,\ a\neq 1,$$

яғни шек пен логарифм белгілерінің орындарын алмастыруға болады.

Мысалдар.

1. $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^4-1} - \dfrac{1}{2x^2}$ функциясының $x_0 = \sqrt{2}$ нүктесіндегі шегін табу керек.

Шешуі. 5-6 - теоремаларды пайдаланамыз:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}}\left(\frac{6x^2}{x^4-1} - \frac{1}{2x^2}\right) = \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{6x^2}{x^4-1} - \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{1}{2x^2} =$$

$$= 6\frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} x^2}{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(x^4-1\right)} - \frac{1}{2\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} x^2} = 6\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^4-1} - \frac{1}{2\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{15}{4}.$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{12}{x^3+8}$ функциясының $x_0 = -2$ нүктесіндегі шегін табу керек.

Шешуі. Егер 6-теореманы тікелей қолдансақ, онда $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықты алған болар едік. Сондықтан оны ашу үшін берілген өрнекті түрлендіреміз:

$$f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} = \frac{x^2-2x-8}{x^3+8} = \frac{(x+2)(x-4)}{x^3+8}.$$

Осыдан

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} = \lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4} = -\frac{1}{2}.$$

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ функциясының $x_0=4$ нүктесіндегі шегін табу керек.

Шешуі. Бөлшектің шегі туралы 6-теореманы қолдануға болмайды, себебі $-\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық пайда болып отыр. Осы анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымын да бөлімін де олардың түйіндестеріне көбейтеміз. Сонда

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

.

Осыдан

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

4. $f(x)=\dfrac{15x^3+14x^2-2x+1}{18x^4-7x^2+4x-4}$ функциясының $x\to\infty$-дағы шегін табу керек.

Шешуі. $x\to\infty$-да бөлшектің алымының да бөлімінің де шектері шексіз, яғни $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық шығып отыр. Одан құтылу үшін бөлшектің алымын да, бөлімін де *x*-тің ең жоғарғы дәрежесіне бөліп, сонан соң шекке көшеді.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{15x^3+14x^2-2x+1}{18x^4-7x^2+4x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{15x^3}{x^4}+\frac{14x^2}{x^4}-\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{18x^4}{x^4}-\frac{7x^2}{x^4}+\frac{4x}{x^4}-\frac{4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{15}{x}+\frac{14}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(18-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)}=\frac{0}{18}=0.$$

5. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{егер } x\le 2 \text{ болса,}\\ -2x+1, & \text{егер } x>2 \text{ болса}\end{cases}$ функциясының $x_0=2$ нүктесін-дегі бір жақты шектерін есептеу керек.

Шешуі. $x_0 = 2$ нүктесіндегі сол жақты және оң жақты шектерді табайық.

$$\lim_{x_0 \to 2-0} f(x) = \lim_{x_0 \to 2-0} (x+1) = 3;$$
$$\lim_{x_0 \to 2+0} f(x) = \lim_{x_0 \to 2+0} (-2x+1) = -3.$$

5.21. Күрделі функцияның шегі

Айталық $y = f(x)$ және $z = F(y)$ функциялары беріліп, олар $z = F[f(x)]$ күрделі функциясын (суперпозициясын) құрсын.

Теорема. Егер $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} F(y)$ шектері бар және $x \neq x_0$ үшін $f(x) \neq y_0$ болса, онда x_0 нүктесінде $F[f(x)]$ күрделі функциясының шегі бар және

$$\lim_{x \to x_0} F[f(x)] = \lim_{y \to y_0} F(y).$$

5.22. Бірінші тамаша шек

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ функциясын қарастырайық. Осы функция $x = 0$ нүктесінде анықталмаған, бірақ оның x нөлге ұмтылғанда шегі бар, ол

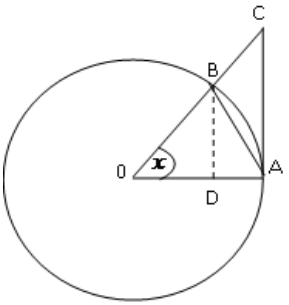
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (5.21)$$

Осы шекті бірінші тамаша шек дейді. Алдымен $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ мәндерінде

$$\sin x < x < tgx \qquad (5.22)$$

теңсіздіктерінің орынды екенін дәлелдейік. Осы мақсатпен радиусы R, центрі O шеңберін алып, x сүйір бұрышын, AB

хордасын және A нүктесінде шеңберге жүргізілген AC жанамасын қарастырамыз (5.19-сурет).



5.19-сурет

Сонда

$$S_{\Delta AOB \text{ ауданы}} < S_{AOB \text{ сект. ауданы}} < S_{\Delta AOC \text{ ауданы}}$$

немесе

$$\frac{1}{2}OA \cdot BD < \frac{1}{2}OA \cdot \overset{\smile}{AB} < \frac{1}{2}OA \cdot AC.$$

Егер AOB бұрышының радиан өлшемін x деп белгілесек $\overset{\smile}{AB}$ доғасының ұзындығы $R \cdot x$ болатыны белгілі. Сонда жоғарғыдағы қос теңсіздік былай жазылады:

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx.$$

Бұдан (5.22) теңсіздіктер келіп шығады.

Егер $0 < x < \frac{\pi}{2}$ екенін ескере отырып (5.22) теңсіздіктерді мүшелеп $\sin x$-ке бөлсек, онда

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Осыдан

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x. \qquad (5.23)$$

Егер $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x$ екенін ескерсек, онда (5.23) былай жазылады:

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x.$$

$\varepsilon>0$ санын алайық. Егер δ саны үшін ε - мен $\frac{\pi}{2}$ сандарының кішісін алсақ, онда $0<x<\delta$ болғанда $\delta\le\varepsilon$ орындалады да

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon$$

ара қатынасы шығады.

Демек, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Біз осы жағдайда $x>0$ дедік. Егер $x<0$ болса,онда да осы нәтижені аламыз, себебі $\frac{\sin x}{x}$ функциясы жұп:

$$\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}.$$

Сонымен (5.21) формула толығымен дәлелденді.

5.23. Екінші тамаша шек

Біз жоғарыда $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $n=1,2,...$ сан тізбегінің шегін қарастырып

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

болатынын дәлелденгенбіз.

Енді $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (мұнда x нөлге тең емес кез келген нақты сан) функциясының шегін қарастырайық.

Егер x аргументі шексіздікке ұмтылса, онда осы функцияның шегі e санына тең, яғни

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (5.24)$$

(5.24) формула екінші тамаша шек деп аталады. Егер (5.24) формулада $\frac{1}{x}=t$ десек, онда

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

шығады.

Теорема. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ теңдік орынды.

Дәлелдеу. Шектер туралы 9-теореманы қолданып келесі теңдіктерді жаза аламыз.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)=\ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)=\ln e=1.$$

Теорема дәлел-денді. Егер дәлелденген теңдікте $\ln(1+t)=z$ деп айнымалыны ауыстырсақ, онда $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=1$ шығады.

5.24. Шексіз аз функциялар және оларды салыстыру

Шексіз аз тізбек ұғымы сияқты етіп шексіз аз функция ұғымы енгізіледі.

1-анықтама. Егер $\alpha(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі нөлге тең болса, яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, онда $\alpha(x)$

функциясын x_0 нүктесінде шексіз аз функция (немесе қысқа шексіз аз) дейді.

Мысалы, $\alpha(x)=(x-x_0)^2=0$ функциясы x_0 нүктесінде шексіз аз функция, себебі

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2=0.$$

Лемма. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде шегі бар болып, ол b -ға тең болса, онда $\alpha(x)=f(x)-b$ функциясы x_0 нүктесінде шексіз аз болады.

Шексіз аз тізбектер үшін келтірілген теоремаларды шексіз аз функциялар үшін жалпылауға болады.

1-теорема. Саны шекті шексіз аз функциялардың қосындысы, көбейтіндісі шексіз аз функция болады.

2-теорема. Шектелген функция мен шексіз аз функцияның көбейтіндісі шексіз аз функция болады.

Енді шексіз аз функциялардың бір-бірімен қалай салыстырылатынына тоқталайық.

Айталық, $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функциялары x_0 нүктесінде шексіз аз болсын.

2-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ болса, $\alpha(x)$-ті x_0 нүктесінде $\beta(x)$-ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз дейді.

3-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C-const,\ C\neq 0$ болса, онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$-ті x_0 нүктесінде аздығы жөнінен бірдей ретті деп атайды.

4-анықтама. Егер $\alpha(x)$ пен $\beta^k(x),\ (k>0)$ шамалары бірдей ретті шексіз аз функциялар болса, яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\neq 0$ (C - тұрақты сан), онда $\alpha(x),\ \beta(x)$

функциясына қарағанда k - ретті дейді де былай жазады: $\alpha = 0\left(\beta^k\right)$.

5-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ болса, онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функциялары эквивалентті делінеді және $\alpha \sim \beta$ деп белгіленеді.

Эквивалентті функцияларға мысалдар келтірейік. $x\to 0$ да

$$\sin x \sim x,\ tgx \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ arctgx \sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x$$

Мынадай жалпы тұжырым да орынды екенін айтқан жөн:

Егер $x \to x_0$ -да $f(x)$ функциясы шексіз аз болса, онда

$$\sin f(x)\sim f(x),\ \ tg\, f(x)\sim f(x),\ \ \arcsin f(x)\sim f(x),\ \ arctg\, f(x)\sim f(x)$$

$$e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$$

6-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ болса, онда $\alpha(x)$-ті $\beta(x)$-ке қарағанда төменгі ретті шексіз аз деп атайды.

5.25. Үзіліссіз функциялар

Функция шегі ұғымымен тығыз байланысты жоғары математиканың тағы бір ұғымы - функцияның үзіліссіздігі.

Айталық, $f(x)$ функциясы X сан жиынында анықталсын. Біз функцияның x_0 нүктесіндегі шегін қарастырғанда x_0 нүктесі X жиыны үшін шектік нүкте болсын дегенбіз де, $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде анықталу-анықталмауы, анықталған жағдайда, оның x_0 нүктесінде мәнінің қандай екенін білу қажет болмаған.

Ал, енді $x_0 \in X$ дейік те, функцияның x_0 нүктесіндегі үзіліссіздігі деген ұғымға тоқталайық.

1-анықтама. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі бар болып, ол $f(x)$ функциясының сол нүктесіндегі мәні $f(x_0)$-ге тең болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде *үзіліссіз* дейді.

Осы анықтаманы үзіліссіздіктің формалды анықтамасы деп атайды.

Функция үзіліссіз болатын нүктені үзіліссіздік нүктесі дейді.

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегінің Гейне және Коши бойынша анықтамаларын пайдаланып функцияның нүктедегі үзіліссіздік анықтамала-рын Гейне және Коши бойынша беруге болады.

2-анықтама (Гейне бойынша). Егер X жиынынан алынған кез келген $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ тізбегі x_0 санына жинақты болғанда, осы тізбекке сәйкес келетін $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n), \ldots$ тізбегі $f(x_0)$ санына жинақты болса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз дейді.

Үзіліссіздіктің осы анықтамасын «тізбектер тіліндегі» үзіліссіздік анықтамасы деп атайды.

Айта кететін жағдай, функция шегінің Гейне бойынша анықтамасынан үзіліссіздіктің 2-анықтамасының айырмашылығы мұнда $\{x_n\}$ тізбегінің барлық элементтерінің x_0-ге тең болмауы талап етілмейді, себебі $f(x_0)$-ге жинақталатын $\{f(x_n)\}$ тізбегіне $f(x_0)$-ге тең болатын жаңа элементтерді қосқаннан оның $f(x_0)$-ге жинақтылығы өзгермейді.

3-анықтама (Коши бойынша). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып

$$|x - x_0| < \delta$$

теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің барлық мәндері үшін

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз деп атайды.

Бұл анықтаманы үзіліссіздіктің «$\varepsilon - \delta$» тіліндегі анықтамасы дейді.

4-анықтама. Егер x_0 нүктесіндегі аргументтің шексіз аз өсімшесіне функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе, яғни $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ болса, онда $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз деп атайды да былай жазады;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Функцияның бір жақты шектерінің Коши және Гейне бойынша анықтамалары сияқты фунцияның сол жақты және оң жақты үзіліссіздік анықтамаларын беруге болады.

5-анықтама (Коши бойынша). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып $x_0 - \delta < x < x_0$ $(x_0 < x < x_0 + \delta)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, басқаша айтқанда x_0 нүктесіндегі сол жақты (оң жақты) шек функцияның сол нүктедегі мәніне тең болса, яғни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0),$$
$$\left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0) \right),$$

онда $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде сол жағынан (оң жағынан) үзіліссіз дейді.

6-анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ сегментінің әрбір ішкі нүктесінде үзіліссіз және a нүктесінде оң жағынан,

ал b нүктесінде сол жағынан үзіліссіз болса, онда $y=f(x)$ функциясын $[a;b]$ сегментінде үзіліссіз деп атайды.

Мысалдар.

1. Функцияның үзіліссіздігі туралы 1-анықтаманы пайдалана отырып

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_n$$

көпмүшелігінің кез келген $x\in R$ нүктесінде үзіліссіз екенін көрсетейік.

Шешуі. Шынында, шектер теориясынан белгілі теоремалар бойынша:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\right)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+...+a_n.$$

Екінші жағынан, $x=x_0$ нүктесіндегі $P(x)$-тің мәні:

$$P(x_0)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+...+a_n.$$

Демек,

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0).$$

2. Коши анықтамасына сүйене отырып $f(x)=\dfrac{x+3}{2-3x}$ функциясын $x_0=\dfrac{1}{2}$ нүктесінде үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі. Еркімізше $\varepsilon>0$ санын аламыз да $f(x)-f(x_0)$ айырымын қарастырамыз:

$$\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{x+3}{2-3x}-7\right|=\left|\frac{22x-11}{2-3x}\right|=11\left|\frac{2x-1}{2-3x}\right|.$$

Сонда Коши анықтамасы бойынша $\delta>0$ саны табылып, $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<\delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x-тер үшін

$$11\left|\frac{2x-1}{2-3x}\right|<\varepsilon \text{ немесе } \left|\frac{2x-1}{x-\frac{2}{3}}\right|<\frac{3\varepsilon}{11}$$

теңсіздігі орындалуы керек. Бұл арадан

$$\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right|>\frac{11}{3\varepsilon} \text{ немесе } \left|\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}}{x-\frac{1}{2}}\right|>\frac{22}{3\varepsilon}\Rightarrow\left|1-\frac{\frac{1}{6}}{x-\frac{1}{2}}\right|>\frac{22}{3\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{\frac{1}{6}}{x-\frac{1}{2}}-1\right|>\frac{22}{3\varepsilon} \quad (*)$$

Егер $|a-b|>|a|-|b|$ теңсіздігін пайдалансақ, онда (*) теңсіздігінен:

$$\left|\frac{\frac{1}{6}}{x-\frac{1}{2}}-1\right|>\left|\frac{\frac{1}{6}}{x-\frac{1}{2}}\right|-1>\frac{22}{3\varepsilon}\Rightarrow\frac{1}{6\left|x-\frac{1}{2}\right|}>\frac{22}{3\varepsilon}+1\Rightarrow 6\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{3\varepsilon}{22+3\varepsilon}$$

.

теңсіздігін аламыз. Осыдан

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{3\varepsilon}{6(22+3\varepsilon)}=\frac{\varepsilon}{2(22+3\varepsilon)}.$$

Демек, егер $\delta=\frac{\varepsilon}{2(22+3\varepsilon)}$ деп алсақ, онда $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$ теңсіздігін қанағат-тандыратын x-тің барлық мәндерінде

$$\left|\frac{x+3}{2-3x}-7\right|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалады.

3. $y = \cos x$ функциясы кез келген $x \in R$ нүктесінде үзіліссіз екенін көрсетейік.

Шешуі. Кез келген $x \in R$ мәнін алайық та оған Δx өсімшесін беріп $x + \Delta x$ нүктесіндегі функция мәнін табайық:

$$f\left(x+\Delta x\right) = \cos\left(x+\Delta x\right).$$

Сонда

$$\Delta y = \cos\left(x+\Delta x\right) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Бұдан:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] = 0,$$

яғни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$

Демек, 4-анықтама бойынша $y = \cos x$ функциясының сан өсінің кез келген x нүктесінде үзіліссіз болатынын көреміз.

4. $f\left(x\right) = \left|\operatorname{sgn} x\right|$ функциясының $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз болмайтынын көрсетейік.

Шешуі. Расында, $\Delta f = \left|\operatorname{sgn} x\right| - \left|\operatorname{sgn} 0\right| = \left|\operatorname{sgn} x\right|$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\operatorname{sgn} x\right| = 1, \text{ ал } \operatorname{sgn} 0 = 0.$$

Басқаша айтқанда, $x = 0$ нүктесіндегі шек сол нүктедегі функцияның мәніне тең емес. Олай болса $f\left(x\right) = \left|\operatorname{sgn} x\right|$ функциясы $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз болмайды.

5.26. Функцияның үзіліс нүктелері

1-анықтама. Егер x_0 нүктесінде $f\left(x\right)$ функциясы үзіліссіз болмаса, онда x_0 нүктесін $f\left(x\right)$ функциясының *үзіліс нүктесі* деп атайды, ал функцияның өзін осы нүктеде үзілісті дейді.

Осы анықтамадан функцияның үзілісті болуы мына төмендегі жағдайлардың ең болмаса біреуі орындалғанда болатынын көреміз:

а) функция x_0 нүктесінде анықталмаған;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ тиянақты шегі жоқ;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Үзіліс нүктелерінің түрлеріне тоқталайық.

2-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ шегі бар болса, бірақ x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы не анықталмаса, не x_0 нүктесіндегі шектен өзгеше дербес $f(x_0)$ мәнге ие болса, онда x_0 нүктесін функцияның *жойылатын үзіліс нүктесі* деп атайды.

Мұның жойылатын нүкте деп аталуының мәнісі мынада: егер $f(x)$ функциясын қосымша анықтап, немесе түрлендіріп x_0 нүктесіндегі функцияның мәні үшін сол нүктедегі функция шегін алсақ, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз функцияға айналады да үзіліс «жойылады».

Мысалдар келтірейік.

1. $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \textit{егер} \quad x\neq 0 \quad \textit{болса}, \\ 0, & \textit{егер} \quad x=0 \quad \textit{болса} \end{cases}$ функциясының $x=0$ нүктесінде жойылатын үзілісі бар екенін көрсетейік.

Шешуі. Бір жақты шектерді табайық: $\lim\limits_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$, яғни $x=0$ нүктесінде функцияның шегі бар, ол бірге тең. Есептің шарты бойынша функцияның $x=0$ нүктесіндегі мәні $f(0)=0$.

Егер $f(0)=1$ десек, онда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=f(0)=1$, яғни $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ функциясы $x=0$ нүктесінде үзіліссіз болады.

Демек, $x=0$ нүктесі жойылатын үзіліс нүктесі.

2. $f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{егер } x\neq 0 \text{ болса},\\ 1, & \text{егер } x=0 \text{ болса}\end{cases}$ функциясын $x=0$ нүктесінде үзіліссіздік-ке зерттейік.

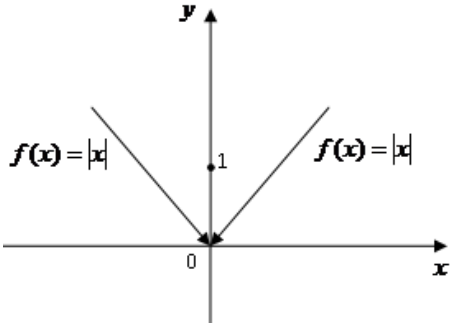
Шешуі. Функцияның сол жақты және оң жақты шектерін табайық:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}|x|=0,\quad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}|x|=0.$$

Сонымен қатар $f(0)=1$. Осылардан көретініміз:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to +0} f(x)\neq f(0).$$

Ендеше $x=0$ нүктесі жойылатын үзіліс нүктесі (5.20-сурет).



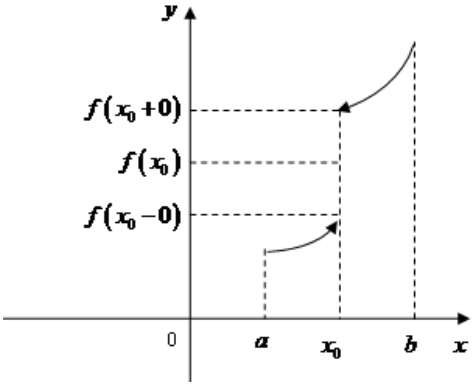
5.20-сурет

3-анықтама. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының сол жақты және оң жақты шектері бар болып, олар бір-біріне тең болмаса, яғни

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

онда x_0 нүктесін $f(x)$ функциясының *1-текті үзіліс нүктесі* деп атайды (5.21-сурет).

$f(x_0+0)-f(x_0-0)$ шамасын $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі *секірмесі* дейді.



5.21-сурет

4-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ және $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ шектерінің ең болмаса біреуі жоқ немесе шексіздікке тең болса, онда x_0 нүктесін *2-текті үзіліс нүктесі* дейді.

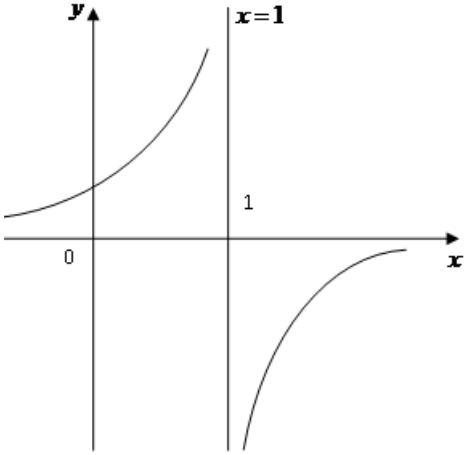
3. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ функциясының 2-текті үзілісі бар екенін дәлелдейік.

Шешуі. Берілген функция $x=1$ нүктесінде анықталмаған. Сонымен қатар

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-x}=-\infty.$$

Демек, $x=1$ нүктесі 2-текті үзіліс нүктесі (5.22-сурет).



5.22-сурет

5.27. Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері

Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда үзіліссіздіктің анықтамасы бойынша функцияның x_0 нүктесінде тиянақты шегі бар. Сондықтан үзіліссіз функцияларға шектер туралы теоремаларды қолдануға болады.

1-теорема. Егер x_0 нүктесінің $U_\sigma(x_0)$ аймағында $f(x)$ функциясы тұрақты болса, яғни $f(x)=const$, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

2-теорема. Егер X жиынында анықталған $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда x_0 нүктесінде $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$ және $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (мұнда $\varphi(x_0)\neq 0$) функциялары да үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. Теореманың шарты бойынша

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0). \tag{5.25}$$

Шектер туралы теоремаларды пайдалансақ:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)\pm\varphi(x_0).$$

Бұл факті $f(x)\pm\varphi(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіздігін көрсетеді.

Осы сияқты етіп $f(x)\cdot\varphi(x)$ функциясының үзіліссіздігін де дәлелдеуге болады.

Енді екі функцияның қатынасының үзіліссіздігіне тоқталайық. Теореманың шарты бойынша (5.25) теңдіктер орындалып тұр. Сонда бөлшектің шегі туралы теорема бойынша:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)},$$

мұндағы $\varphi(x_0)\neq 0.$

Соңғы теңдік $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ функциясының x_0 нүктесіндегі үзіліссіздігін көрсетеді.

Салдарлар.

1. Саны шекті үзіліссіз функциялардың сызықтық комбинациясы

$$F(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x),$$

($c_1, c_2,\ldots,c_n$ - нақты сандар) үзіліссіз функция болады.

2. Саны шекті үзіліссіз функциялардың көбейтіндісі үзіліссіз функция болады.

3-теорема. Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда x_0 нүктесінің белгілі бір аймағы табылып ол аймақта $f(x)$ функциясы шектелген болады.

4-теорема. Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және $f(x_0)\neq 0$ болса, онда x_0 нүктесінің керегінше аз

аймағында жатқан барлық x нүктелерінде $f(x)$-тің таңбалары $f(x_0)$-дің таңбасымен бірдей болады.

5.28. Күрделі функцияның үзіліссіздігі

Күрделі функция ұғымын еске түсірейік. Айталық, T жиынында $x=\varphi(t)$ функциясы беріліп оның мәндер жиыны X болсын.

Осы X жиынында $y=f(x)$ функциясы анықталсын.

Сонда T жиынында $y=f[\varphi(t)]=F(t)$ немесе $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$ күрделі функциясы берілген деп айтатын.

Теорема. $x=\varphi(t)$ функциясы $t_0\in\mathrm{T}$ нүктесінде, ал $y=f(x)$ функциясы $x_0=\varphi(t_0)=\varphi_0\in X$ нүктесінде үзіліссіз болсын. Сонда $y=f[\varphi(t)]$ күрделі функциясы $t_0\in\mathrm{T}$ нүктесінде үзіліссіз болады. Қысқаша айтқанда, үзіліссіз функцияның үзіліссіз функциясы – үзіліссіз функция.

Ескерту! Теореманың тұжырымын формула түрінде былай жазуға:

$$\lim_{t\to t_0} f[\varphi(t)]=f\left[\lim_{t\to t_0}\varphi(t)\right],$$

яғни шекке көшу амалы мен үзіліссіз функцияны құру амалының орындарын алмастыруға болады.

5.29. Монотонды функцияның шектері және үзіліссіздігі

Монотонды функция ұғымы жоғарыда берілді. Енді монотонды функцияның бір жақты шектерінің бар болатынын көрсетейік.

1-теорема. Егер $f(x)$ функциясы $]a;b[$ интервалында кемімейтін болса, онда a және b нүктелерінде $f(x)$ функциясының (шекті немесе шексіз) бір жақты шектері

$$\lim_{x\to b-0} f(x),\quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

бар болады және

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=\sup_{]a;\ b[} f(x),\quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\inf_{]a;\ b[} f(x).$$

Егер $f(x)$ функциясы $]a;\ b[$ интервалында өспейтін болса, онда

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=\inf_{]a;\ b[} f(x),\quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\sup_{]a;\ b[} f(x).$$

2-теорема. Егер $f(x)$ функциясы $]a;b[$ интервалында анықталған және монотонды болса, онда ол функция $]a;b[$ интервалында тек қана 1 - текті үзіліссіз нүктелеріне ие бола алады.

3-теорема. Егер $f(x)$ функциясы X аралығында кемімейтін болса және функцияның мәндер жиыны Y аралығында оны лық толтырса, онда $f(x)$ функциясы X жиынында үзіліссіз болады.

5.30. Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері

Біз осы параграфта кесіндіде үзіліссіз болатын функциялардың глобальдық қасиеттеріне тоқталамыз. Глобальдық қасиеттер – олар функцияның барлық анықталу облысында орынды қасиеттер. Мысалы, функцияның $[a;\ b]$ кесіндісіндегі монотондылығы глобальдық қасиет болып табылады.

Вейерштрасстың 1-теоремасы. $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы осы кесіндіде шектелген.

Вейерштрасстың 2-теоремасы. $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы осы кесіндіде өзінің дәл төменгі және дәл жоғарғы шекараларын қабылдайды, яғни $[a;\ b]$ кесіндісінен x_1 және x_2 нүктелері табылып

$$f(x_1)=\sup_{[a;b]} f(x),\quad f(x_2)=\inf_{[a;b]} f(x).$$

Больцано-Кошидің 1-теоремасы (үзіліссіз функцияның нөлдері туралы). $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз және кесіндінің ұштарындағы функция мәндерінің таңбалары әртүрлі болсын. Сонда $[a;\ b]$ кесіндісінен ең болмаса бір нүкте c табылып $f(c)=0$ теңдігі орындалады.

Больцано-Кошидің 2-теоремасы (функцияның аралық мәндері туралы). $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(a)\neq f(b)$ болсын. Сонда функция осы кесіндіде $f(a)$ мен $f(b)$ сандарының арасында жататын кез келген μ мәнін қабылдайды, яғни $[a;\ b]$ кесіндісінде $f(c)=\mu$ теңдігін қанағаттандыратын кемінде бір c саны табылады.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a;\ b]$ кесіндісінде өспелі (кемімелі) және үзіліссіз болса, онда $[f(a);\ f(b)]$ кесіндісінде $f^{-1}(y)$ кері функциясы бар болып ол өспелі (кемімелі) және үзіліссіз болады.

Бесінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. X жиынын Y жиынына бейнелеу дегеніміз не?
2. Сан функциясының анықтамасын беріңіз.
3. Функцияның анықталу, өзгеру облыстары дегеніміз не?
4. Функцияның берілу тәсілдерін атаңыз, мысалдар келтіріңіз.
5. Функция графигін көшіру дегенді қалай түсінесіз?
6. Функция графигін қысу және созу дегендерді анықтаңыз.
7. Күрделі функция қалай анықталады?
8. Айқындалмаған функция деген не?
9. Шектелген және шектелмеген функциялардың анықтамаларын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.
10. Симметриялы жиынның анықтамасын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.

11. Жұп және тақ функциялардың анықтамаларын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.

12. Жұп және тақ функциялардың графиктері қалай салынады?

13. Периодты функцияның анықтамасын беріңіз.

14. Монотонды функциялардың анықтамаларын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.

15. Қатаң монотонды функция дегеніміз не?

16. X жиынын Y жиынына кері бейнелеу ұғымын анықтаңыз.

17. X сан жиынында анықталған f сан функциясы қашан қайтымды болады?

18. Кері функцияның анықтамасын беріңіз.

19. $f(x)$ функциясының графигінен оған кері $f^{-1}(x)$ функцияның графигі қалай алынады?

20. Сан тізбегінің анықтамаларын беріңіз.

21. Өспелі (кемімелі) тізбектің анықтамасын беріңіз.

22. Шектелген және шектелмеген тізбектердің анықтамаларын беріңіз.

23. Тізбектің шегінің анықтамасын беріңіз.

24. Тізбек шегінің геометриялық мәнін түсіндіріңіз.

25. Қашан тізбекті жинақты (жинақсыз) деп атайды?

26. Шексіз аз тізбектің анықтамаларын беріңіз.

27. Шексіз аз тізбекпен шегі бар тізбектің қандай байланысы бар?

28. Шексіз үлкен тізбектің анықтамасын беріңіз.

29. Шексіз аз тізбектердің қасиеттеріне тиісті теоремаларды атаңыз.

30. Жинақты тізбектердің қасиеттеріне тиісті теоремаларды атаңыз.

31. Теңсіздіктердің шектеріне тиісті теоремаларды атаңыз.

32. Анықталмаған өрнектер деп қандай өрнектерді атайды және олардың түрлерін көрсетіңіз.

33. Анықталмағандықты ашу деген не?

34. Штольц теоремасын жазыңыз.

35. Монотонды тізбек және оның шегі туралы теоремаларды жазыңыз.

36. e саны деп қандай санды атайды?

37. Функция шегінің Гейне, Коши бойынша анықтамаларын беріңіз.

38. Бір жақты шектердің анықтамаларын беріңіз.

39. Шектер туралы 1-9 теоремаларды баяндаңыз.

40. Күрделі функцияның шегінің бар болу теоремасын баяндаңыз.

41. Бірінші тамаша шекті жазыңыз.

42. Екінші тамаша шекті жазыңыз.

43. Шексіз аз функцияның анықтамасын беріңіз.

44. Шексіз аз функциялардың қасиеттеріне тиісті теоремаларды жазыңыз.

45. Шексіз аз функциялар бір-бірімен қалай салыстырылады.

46. x_0 нүктеде үзіліссіз $f(x)$ функцияның 1-5 анықтамаларын беріңіз.

47. Үзілісті функцияның анықтамасын беріңіз.

48. Жойылатын үзіліс нүктесі деп қандай нүктені атайды?

49. 1-текті үзіліс нүктесі деп қандай нүктені атайды?

50. 2-текті үзіліс нүктесі деп қандай нүктені атайды?

51. Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қасиеттеріне тиісті теоремаларды жазыңыз.

52. Күрделі функцияның үзіліссіздігі туралы теореманы жазыңыз.

53. Монотонды функцияның шектері және үзіліссіздігі туралы 1-3 теоремаларды жазыңыз.

54. Сегменттегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері туралы Вейер-штрасстың және Больцано-Кошидің теоремаларын жазыңыз.

6 тарау. ТУЫНДЫ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

6.1. Туындының анықтамасы

Алдымен туынды ұғымына келтірілетін есептерді қарастырайық.

1. Лездік жылдамдық туралы есеп. Қозғалыстағы дененің, белгілі бір сәттен бастап t уақыт ішінде жүрген жолын S деп белгілесек, t-ның әр мәніне S-тің қандай да бір мәні сәйкес келеді. Сондықтан жүрген жол өткен уақыт t-ның функциясы, яғни $S = f(t)$. Бұл теңдеу *қозғалыстың теңдеуі* немесе *қозғалыс заңы* деп аталады. Осы берілген қозғалыс заңына сүйеніп, дененің берілген сәттегі жылдамдығын табалық. Ол үшін қозғалыстағы дененің берілген t сәттегі жылдамдығы деп нені айтамыз, соны анықтайық. Берілген t сәттен кейін тағы да біраз уақыт өтсін, оны Δt деп белгілейік. Осы Δt уақыттың ішінде қозғалыстағы дене ΔS жол жүрсін. Сонда $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ қатынасы дененің Δt уақыт ішіндегі орташа жылдамдығы болатыны белгілі: $\vartheta_{op} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$. Егер Δt неғұрлым аз болса, онда орташа жылдамдық ϑ_{op} соғұрлым аз өзгереді де дененің t сәттегі қозғалысын дәлірек анықтайды. Мынадай анықтама берелік.

1-анықтама. Қозғалыстағы дененің t сәттегі жылдамдығы деп, орташа жылдамдық ϑ_{op} шамасының Δt нөлге ұмтылғандағы шегін айтамыз, яғни

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{op} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

2. Қисыққа жанама туралы есеп. Кейде қисықпен тек бір ғана жалпы нүктеге ие түзу жанама деп айтылады деген анықтама қолданылады . Бірақ, жанаманың бұл анықтамасы дұрыс емес. Мысалы, $y = x^2$ параболаның симметрия өсі

параболамен жалғыз жалпы нүктеге ие, бірақ ол жанама болмайды. Немесе, $y=1$ түзуі $y=\sin x$ синусоидамен шексіз көп жалпы нүктеге ие, бірақ ол сол нүктелерде жанама болады және т.с.с. Қисыққа жанаманы шек ұғымының көмегімен анықтаған дұрыс.

Декарттық координаталар жүйесінде $y=f\left(x\right)$ теңдеуімен берілген үзіліссіз қисыққа оның $M_0\left(x_0,y_0\right)$ нүктесінде жүргізілген жанаманы анықтау керек болсын (6.1-сурет). Ол үшін x-ке Δx өсімшесін беріп, y-тің оған сәйкес өсімшесін Δy деп белгілейік. Қисық бойындағы $M\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)$ және $M_0\left(x_0,y_0\right)$ нүктелері арқылы M_0M қиюшысын жүргізейік. M нүктесі қисықтың бойымен M_0 нүктесіне қарай жылжығанда, M_0M қиюшысы M_0 нүктесін шыр айналып, M нүктесі M_0 нүктесіне шексіз жақындағанда M_0T жанамасы шығады. Демек жанаманың мынадай жалпы анықтамасын беруге болады.

2-анықтама. $y=f\left(x\right)$ қисығына $M_0\left(x_0,y_0\right)$ нүктесінде жүргізілген жанама деп M нүктесі қисықтың бойымен M_0 нүктесіне қарай жылжығанда M_0M қиюшысының M_0T түріндегі орналасуын айтамыз (6.1-сурет).

Енді берілген анықтамаға сүйеніп, M_0T жанамасының теңдеуін шығарайық. Жанама, берілген жанасу нүктесі $M_0\left(x_0,y_0\right)$ арқылы өтеді, сондықтан оны берілген нүктеден тиісті бағытта өтетін түзу деп қарастырып, теңдеуін былайша жазуға болады:

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right).$$

Демек, жанаманың теңдеуін табу үшін, бұрыштық коэффициент $k=tg\varphi$-ді табу керек. $M\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)$ нүктесі $M_0\left(x_0,y_0\right)$ нүктесіне ұмтылғанда (біртіндеп

жақындаған сайын) θ бұрышы нөлге ұмтылады да, α бұрышы φ бұрышына ұмтылады (және керсінше), ал $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Сондықтан

$$k = tg\varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} tg\alpha = \lim_{\theta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Екінші жағынан $y = f(x)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан, Δx нөлге ұмтылғанда Δy нөлге ұмтылады. Онда $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда M нүктесі M_0 нүктесіне ұмтылады. Олай болса

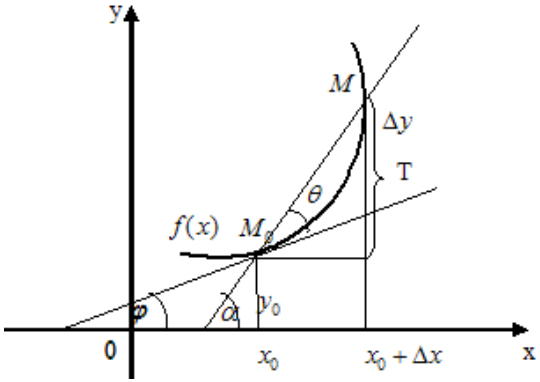
$$k = tg\varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} tg\alpha = \lim_{M \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

немесе

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Демек, жанаманың теңдеуі мына түрде жазылады

$$y - y_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (x - x_0).$$



6.1-сурет

3. Еңбек өнімділігі туралы есеп. t уақыт ішінде өндірілген өнімнің мөлшері $U=U(t)$ функциясымен өрнектелсін. t_0 сәттегі еңбек өнімділігін табу керек. t_0 уақытымен $t_0+\Delta t$ уақыты аралығында өндірілген өнімнің мөлшері, $U_0=U(t_0)$ мәнінен $U_0+\Delta U=U(t_0+\Delta t)$ мәніне дейін өссін делік. Онда, осы уақыт аралығында еңбек өнімділігінің орта мәні $Z_{op}=\dfrac{\Delta U}{\Delta t}$ болады. Ал t_0 сәттегі еңбек өнімділігін табу үшін Δt -ны нөлге ұмтылдырып төмендегі шекті есептеуіміз қажет, яғни

$$\lim_{\Delta t\to 0} Z_{op}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta t}.$$

Сонымен, жоғарыда қарастырылған үш есептің шешімі де негізінен математикалық бір амалды, яғни функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегін есептеуге алып келді. Олай болса мынадай жалпы анықтама берелік.

3-анықтама. Егер функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының Δx нөлге ұмтылғандағы шегі

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

бар болса, онда ол $y=f(x)$ функциясының x нүктесіндегі *туындысы* деп аталады да, былай белгіленеді: $f'(x)$ немесе y'.

Сонымен, анықтама бойынша

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

1-мысал. $y=x^2$ функциясының туындысын табалық.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$$
$$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2=\Delta x\cdot(2x+\Delta x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x .$$

4-анықтама. Егер $x = x_0$ нүктесінде $y = f(x)$ функциясының туындысы, яғни $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ шегі бар болса, онда бұл нүктеде осы берілген функция *дифференциалданады* деп аталады. Функцияның туындысын табуды оны *дифференциалдау* деп атайды.

5-анықтама. Егер $x = x_0$ нүктесінде $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} \frac{f(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$ және $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} \frac{f(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$ бір жақты шектер бар болса, онда оны $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі *оң (сол) жақты туындысы* деп айтады және оны келесі түрде белгілейді:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} \frac{f(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0), \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} \frac{f(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0).$$

Функцияның оң және сол жақты туындыларын оның бір жақты туындылары деп атайды.

Егер $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесінде туындысы бар болса, онда оның бір жақты туындылары бар болады және олар өзара тең болады. Ал, $x = x_0$ нүктесінде функцияның бір жақты туындылары бар болып, олар өзара тең болмаса, онда шектер туралы теорема бойынша сол нүктеде $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ қатынасының Δx нөлге ұмтылғандағы шегі болмайды, яғни $x = x_0$ нүктесінде $f(x)$ функциясының туындысы болмайды.

Мысалы, $f(x) = |x|$ функциясының $x = 0$ нүктесінде бір жақты туындылары бар, олар:

$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=1,\ f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=-1,$ бірақ бұлар өзара тең емес, яғни $f'_+(0)\neq f'_-(0),$ онда $f(x)=|x|$ функциясының $x=0$ нүктесінде туындысы жоқ.

Егер $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ немесе (a,b) аралықтардың әрбір нүктесінде дифференциалданатын болса, онда ол сол аралықтарда дифференциалданады деп айтылады.

1-теорема. Егер $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалдана-тын болса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. Теореманың шарты бойынша $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0).$

Бұл теңдікті $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$ немесе $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$ түрінде жазамыз. Мұндағы $\alpha(\Delta x)$ шамасы, $\Delta x\to0$ да шексіз аз шама. Соңғы теңдіктен $\Delta x\to0$ болғанда $\Delta y\to0$ болатындығы көрініп тұр. Онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

Кері тұжырым жалпы жағдайда дұрыс емес, мысалы, $y=|x|$ функциясы $x=0$ нүктесінде үзіліссіз болғанымен, ол осы нүктеде дифференциалданбай-тынын жоғарыда көрсеттік.

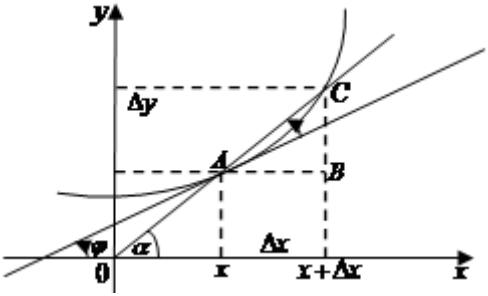
6.2. Туындының геометриялық және механикалық мағыналары

Қандай да бір аралықта анықталған, үзіліссіз $y=f(x)$ функциясы берілсін. Осы аралықтың x нүктесіндегі $y=f(x)$ функциясының туындысы y'-тың геометриялық мағынасын берелік. 6.2-суреттен

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{BC}{AB}=tg\alpha\,,$$

Осыдан

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = tg\varphi, \text{ яғни } y' = tg\varphi .$$



6.2-сурет

Сонымен $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы сол нүктеде $y = f(x)$ қисығына жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең екен.

Егер берілген функция қозғалыстағы дененің жүрген жолы мен оған кеткен уақыт арасындағы тәуелділікті білдірсе, онда жолдың уақыт бойынша алынған туындысы қозғалыстың жылдамдығын береді. Сол секілді жылдамдықтың уақыт бойынша алынған туындысы үдеуді береді. Бұл туындының механикалық мағыналары.

Мысал. $y = x^2$ қисығына $x = 1$ нүктесінде жүргізілген жанамасының теңдеуін жазалық. $y(1) = 1$ болғандықтан жанасу нүктесі $M_0(1,1)$ болады.

Жанаманың теңдеуін $M_0(1,1)$ нүктесінен өтетін түзудің теңдеуі ретінде қарастырамыз, яғни $y - 1 = k(x-1)$. Осыдан $k = f'(1)$, ал $f'(x) = 2x$ болғандықтан $k = 2 \cdot 1 = 2$. Сонымен $y - 1 = 2(x-1)$ немесе $2x - y - 1 = 0$. Бұл іздеп отырған жанамамыздың теңдеуі.

$y = f(x)$ ***функциясының туындысын табу алгоритмі:***

1) x аргументіне $f(x)$ функциясының анықталу облысынан шығып кетпейтіндей етіп Δx өсімшесін береміз де $f(x+\Delta x)$ мәнін табамыз;

2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ функция өсімшесін есептейміз;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасын табамыз;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ шегін есептейміз.

Осы алгоритмді қолданып бірнеше негізгі элементар функцияның туындысын табуды дәлелдеуімен көрсетелік.

6.3. Негізгі элементар функциялардың туындылары

1. $y = x^{\alpha}$ функциясы дәрежелі функция деп аталатыны мектептен белгілі, мұндағы α нақты сан, $x \neq 0$. Осы функцияның туындысын табалық.

$y + \Delta y = (x+\Delta x)^{\alpha}$. Осыдан $\Delta y = (x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha} = \left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right] x^{\alpha}.$

Олай болса

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}\cdot x^{\alpha} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}\cdot x^{\alpha-1} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Себебі, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \alpha.$ Сонымен

$$y' = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Бұл формуладан:

а) егер $\alpha = 1$ болса, онда $y' = x' = 1$;

ә) егер $\alpha = \frac{1}{2}$ болса, онда $y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

б) егер $\alpha = -1$ болса, онда $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, ал

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2. $y = a^x$, мұндағы $a > 0,\ a \neq 1,$ көрсеткішті функциясының туындысын табалық. $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$. Сондықтан

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Себебі, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$. Сонымен $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$. Дербес жағдайда, егер $a = e$ болса, онда $\left(e^x\right)' = e^x$.

3. $y = \log_a x$, мұндағы $0 < a \neq 1$, логарифмдік функцияның туындысын табалық

$$\Delta y = \log_a\left(x + \Delta x\right) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Олай болса

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Себебі, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \log_a e.$ Сонымен ,

$$y' = \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Дербес жағдайда, егер $a = e$ болса, онда

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

4. $y = \cos x$ тригонометриялық функцияның туындысын табалық.

$$\Delta y = \cos\left(x + \Delta x\right) - \cos x = -2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x + x}{2} = -2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Олай болса

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x$$

Сонымен $\left(\cos x\right)' = -\sin x.$

6.4. Дифференциалдаудың негізгі ережелері

1-теорема. Тұрақтының туындысы нөлге тең, яғни

$$y = c \text{ болса, онда } y' = 0. \tag{6.1}$$

2-теорема. Дифференциалданатын u және v функцияларының қосынды-
сының (айырымының) туындысы, олардың туындыларының қосындысына (айырымына) тең, яғни

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'. \tag{6.2}$$

3-теорема. Екі дифференциалданатын функциялардың көбейтіндісінің туындысы бірінші функцияның туындысын екінші функцияға көбейтіп және екінші функцияның

туындысын бірінші функцияға көбейтіп, оларды бір-біріне қосқанға тең, яғни

$$\left(u \cdot v\right)' = u'v + uv' \tag{6.3}$$

Дәлелдеу. $y = u \cdot v$ болсын. Сонда

$$y + \Delta y = \left(u + \Delta u\right)\left(v + \Delta v\right) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

Осыдан

$$\Delta y = \left(y + \Delta y\right) - y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

Олай болса

$$y' = \left(v \cdot u\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right).$$

y, u, v функциялары үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0.$$

Олай болса

$$y' = v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv'.$$

яғни

$$y' = \left(uv\right)' = u'v + uv'.$$

4-теорема. Егер u және v функциялары x нүктесінде дифференциалда-натын функциялар болса және $v\left(x\right) \neq 0$, онда

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{6.4}$$

Дәлелдеу. $y = \frac{u}{v}$ болсын, онда

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v\left(v+\Delta v\right)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v\left(v+\Delta v\right)}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\Delta v\right)} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v+\Delta v\right)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Мысалы,

$$\left(ctgx\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

6.5. Кері функцияның туындысы

Айталық $y = f\left(x\right)$ дифференциалданатын функция болсын және $x = \varphi\left(y\right)$, яғни $x,\ y$ арқылы өрнектелсін. $x = \varphi\left(y\right)$ функциясында айнымалылардың орындары ауысқандықтан, бұл функцияның y аргументі бойынша туындысы, яғни x'_y бар деп ұйғаралық. Сонда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{6.5}$$

теңдігі орындалды.

Дәлелдеу. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$ және $x = \varphi\left(y\right)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан Δy нөлге ұмтылғанда Δx-те нөлге ұмтылады.

Сондықтан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \dfrac{1}{x'_y}.$

Енді (6.5) теңдікті қолданып кері функциялардың туындыларын табалық.

1) $y = \arcsin x$. Сонда $x = \sin y$ болғандықтан (6.5) теңдік бойынша

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\left(\sin y\right)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

яғни

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) $y = arctgx$, осыдан $x = tgy$. Олай болса

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{\left(tgy\right)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$ яғни

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

6.6. Күрделі және айқындалмаған функцияның туындысы

Айталық $y = F(u)$, $u = f(x)$, яғни $y = F\left[f(x)\right]$ күрделі функциясы берілсін. $y = F(u)$ өрнегіндегі u айнымалысы аралық аргумент деп аталады.

Теорема. Күрделі функцияның туындысы берілген функцияның аралық аргумент бойынша алынған туындысы мен сол аралық аргументтің x бойынша алынған туындысының көбейтіндісіне тең, яғни

$$y'_x = F'_u \cdot u'_x . \qquad (6.6)$$

Дәлелдеу. $y + \Delta y = F\left(U + \Delta U\right)$ және $u + \Delta u = f\left(x + \Delta x\right)$. Сөйтіп, Δx өсімшесіне Δu өсімшесі, ал Δu өсімшесіне Δy өсімшесі сәйкес келеді және Δx нөлге ұмтылса Δu мен Δy

нөлге ұмтылады. Шарт бойынша $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$. Осыдан $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha$, мұндағы α, Δu нөлге ұмтылса нөлге ұмтылатын шексіз аз шама. Демек,

$$\Delta y=y'_u\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u\,.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын Δx - ке бөлсек

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\,. \qquad (6.7)$$

Шарт бойынша

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x \text{ және } \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0\,.$$

(6.7) теңдікте Δx -ті нөлге ұмтылдырып, шекке көшелік. Сонда

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'\,.$$

Теорема дәлелденді.

1-мысал. $y=\sin^2 x$ функциясының туындысын табалық. Ол үшін берілген функцияны $y=u^2,\ u=\sin x$ түрінде өрнектелік. Сонда

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=2u\cdot\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x\,.$$

2-мысал. $y=\ln^2 tgx$ функциясының туындысын табалық. Берілген функцияны $y=u^2,\ u=\ln v,\ v=tgx$ түрінде жазамыз. Сонда

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=2u\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=2\ln(tgx)\cdot\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4\ln(tgx)}{\sin 2x}.$$

$F(x,y)=0$ түріндегі функцияны *айқындалмаған функция* деп атайды. Бұл түрде берілген функциялардың туындыларын табу үшін күрделі функцияның туындысын табу ережесін пайдаланамыз.

3-мысал. $x^2+y^2=25$ функциясының туындысын табалық.

Шешуі: $\left(x^2+y^2\right)'=\left(25\right)'$, яғни $2x+2y\cdot y'=0$.

Осыдан $y'=-\dfrac{x}{y}$.

4-мысал. $2x^2-3xy+4y^2-5x+y-6=0$ функциясының туындысын табалық.

Шешуі: $\left(2x^2-3xy+4y^2-5x+y-6\right)'=\left(0\right)'$, яғни $4x-3y-3xy'+8y\cdot y'-5+y'=0.$

Соңғы теңдіктен:

$$y'=\frac{4x-3y-5}{3x-8y-1}.$$

6.7. Күрделі-көрсеткішті функцияның туындысы және логарифмдік дифференциалдау

$y=u^v$ (мұндағы $u=u(x),\ v=v(x)$) түріндегі функцияны *күрделі көрсеткішті функция* деп атайды.

Теорема. Күрделі-көрсеткішті функцияның туындысы осы функцияны дәрежелі функция ретінде алынған туынды мен осы функцияны көрсеткішті функция ретінде алынған туындының қосындысына тең, яғни

$$\left(u^v\right)'=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot\ln u\cdot v'. \qquad (6.8)$$

Дәлелдеу. $y=u^v$ болсын. Екі жағын логарифмдеп $\ln y=v\ln u$ теңдігін аламыз. Соңғы теңдіктің екі жағын дифференциалдап,

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot \ln u + v\cdot \frac{1}{u}\cdot u',$$

яғни

$$y' = y\left(v'\cdot \ln u + v\cdot \frac{1}{u}u' \right) = u^v \ln uv' + u^{v-1}vu' = vu^{v-1}u' + u^v \ln uv'.$$

1-мысал. $y = \left(\sin x\right)^{\sqrt{x}}$ функциясының туындысын табалық. (6.8) теңдік бойынша

$$y' = \sqrt{x}\cdot \left(\sin x\right)^{\sqrt{x}-1}\cdot \cos x + \left(\sin x\right)^{\sqrt{x}}\cdot \ln \sin x\cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\left(\sin x\right)^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot \left(\frac{2x\cos x}{\sin x} + \ln \sin x \right).$$

Көп жағдайларда кейбір функциялардың туындыларын табу үшін, алдымен берілген функцияны логарифмдеп, одан соң функцияның логарифмі бойынша туындысын тапқан ыңғайлы, мұндай әдісті *логарифмдік дифференциалдау* деп атайды.

2-мысал. $y = \dfrac{\left(x-1\right)^3\cdot \left(2x+3\right)^2}{\left(3x+8\right)^5}$ функциясының туындысын табалық.

Шешуі. Екі жағын логарифмдесек

$$\ln y = 3\ln\left(x-1\right) + 2\ln\left(2x+3\right) - 5\ln\left(3x+8\right).$$

Осы теңдіктің екі жағын дифференциалдап

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{x-1} + \frac{4}{2x+3} - \frac{15}{3x+8}$$

немесе

$$y' = \frac{\left(x-1\right)^3\cdot \left(2x+3\right)^2}{\left(3x+8\right)^5}\cdot \left[\frac{3}{x-1} + \frac{2}{2x+3} - \frac{5}{3x+8} \right]$$

теңдігін аламыз.

6.8. Параметрлі түрде берілген функцияның туындысы

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \tag{6.9}$$

түрінде берілген функцияны *параметрлік түрде берілген функция,* t айнымалысын параметр деп атайды.

(6.9) жүйенің бірінші теңдеуінен t-ны x арқылы өрнектеп, яғни $t = \phi(x)$, оны жүйенің екінші теңдеуіне қойып $y = \psi\left[\phi(x)\right]$ күрделі функциясын аламыз. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша.

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t \cdot \phi'_x .$$

Екіншіден, кері функцияны дифференциалдау ережесі бойынша

$$\phi'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'_t}.$$

Олай болса

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

$$\frac{dy}{dt} = y'_t, \quad \frac{dx}{dt} = x'_t$$

Онда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Мысал. $x = a\cos t, \ y = a\sin t$ функциясының туындысын табалық.

Шешуі: $x'_t = -a\sin t, \ y'_t = a\cos t$. Сондықтан

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt.$$

6.9. Туындылар кестесі

Дифференциалдаудың негізгі ережелеріне, күрделі және кері функциялардың туындыларын табу формулаларына сүйеніп функцияны дифференциалдаудың төмендегі кестесін жасауға болады.

№	Функциялар	Туындылар	№	Функциялар	Туындылар
1	$y = c = const$	$y' = 0$	9	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
2	$y = u^{\alpha}$	$y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	10	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
3	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$	11	$y = tgu$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} \cdot$
4	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	12	$y = ctgu$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \cdot$
5	$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$	13	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot$
6	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$	14	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot$
7	$y = \log_a u$	$y = \frac{\log_a e}{u} \cdot u'$	15	$y = arctgu$	$y' = \frac{u'}{1+u^2} \cdot$
8	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	16	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2} \cdot$

6.10. Функцияның дифференциалы

Айталық x нүктесінде $f(x)$ функциясының туындысы бар болсын, яғни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \qquad (6.10)$$

Онда функцияның шегі туралы тақырыптағы 1-теоремаға негізделіп оның өсімшесі былай жазылады:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (6.11)$$

Мұндағы $\alpha(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$ да шексіз аз шама.

Сонымен, егер функцияның туындысы бар болса, онда оның өсімшесі екі мүшенің қосындысы түрінде өрнектеледі екен. Біріншісі Δx-ке сызықты тәуелді де, екіншісі Δx-ке қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясының x нүктесіндегі өсімшесін (6.11) теңдік түрінде жазу мүмкін болса, онда $f'(x)\Delta x$ өрнегі $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі *дифференциалы* деп аталады да dy арқылы белгіленеді, яғни

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (6.12)$$

Сонымен, функцияның дифференциалы оның өсімшесінің Δx-ке сызықты тәуелді бөлігі екен.

Дербес жағдайда, $y = x$ болса, онда $dy = x'\Delta x = \Delta x$, яғни $dx = \Delta x$. Бұл жағдайда (6.12) теңдік $dy = f'(x)dx$ түрінде жазылады.

Теорема. $y = f(x)$ функциясының x нүктесінде дифференциалы бар болу үшін $f'(x)$ туындысының бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Қажеттілігі. Теореманың шарты бойынша $y = f(x)$ функция-сының x нүктесіндегі дифференциалы бар. Онда функцияның Δy өсімшесі (6.11) формуламен, яғни

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

түрінде жазылады. Соңғы теңдіктің екі жағын Δx-ке бөліп, Δx нөлге ұмтыл-ғандағы шегін тапсақ

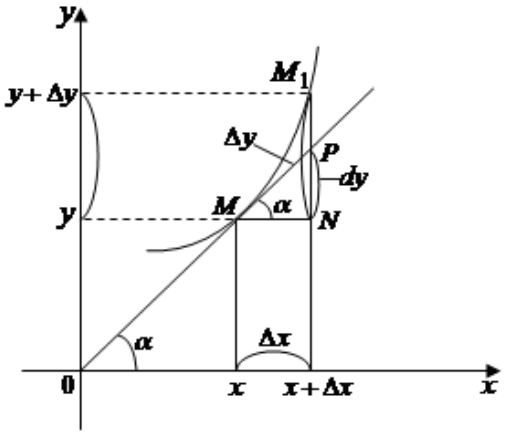
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

болады, демек, функцияның туындысы бар екен.

Жеткіліктілігі. $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы бар болсын, яғни (6.10) теңдік орындалсын. Онда функцияның шегі туралы тақырыптың 1-теоремасы бойынша (6.11) теңдік орындалады.

Сонымен, дифференциалдың анықтамасына негізделіп функцияның $dy = f'(x)\Delta x$ дифференциалы бар деп тұжырымдаймыз.

Енді дифференциалдың геометриялық мағынасын қарастырайық.



6.3-сурет

$y = f(x)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіне жанама жүргізейік (6.3-сурет). Жанаманың бұрыштық коэффициенті $k = tg\alpha = f'(x)$ болады. Егер x-ке Δx өсімшесін берсек, онда y функциясы $\Delta y = NM_1$ өсімшесін, ал жанаманың ординатасы NP өсімшесін алады және

$$NP = MNtg\alpha = y'\Delta x = dy.$$

Сонымен, егер Δy қисықтың ординатасының өсімшесі болса, онда dy сәйкес жанаманың ординатасының өсімшесі екен.

Дифференциалды жуық есептеулерге қолдануға болады. Ол үшін функцияның өсімшесімен дифференциалы арасындағы (6.11) мен (6.12) формулаларға негізделген $\Delta y \approx dy$ жуық теңдігінен мынадай жуық теңдікті аламыз

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (6.13)$$

Егер $f(x)$, $f'(x)$ және Δx-тің мәндері белгілі болса, онда (6.13) арқылы $f(x+\Delta x)$ жуық түрде есептелінеді.

Дербес жағдайда $\Delta x = x - x_1$ теңдігінде $x_1 = 0$ болса, онда $\Delta x = x$ болып (6.13) формула

$$f(x) = f(0) + f'(0)x \qquad (6.14)$$

түрде жазылады.

Мысалы, $f(x) = \sqrt{1+x}$ функциясының жуық мәнін табайық.

Шешуі. (6.14) формуланы пайдаланамыз. $x = 0$ де $f(0) = 1;\ f'(0) = \frac{1}{2}$; онда x-тің кіші мәндерінде $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$

Осыған ұқсас: $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x;$ $\ell^{x} \approx 1 + x;$ $\ln(1+x) \approx x;$ $\sin x \approx x$ жуық теңдіктердің дұрыстығын тексеруді студенттердің өздеріне қалдырамыз.

Дифференциалды табу ережелері туындыны табу ережелері сияқты. Енді күрделі функцияның дифференциалын табуды қарастырайық: егер $y = F(u),\ u = \varphi(x)$ дифференциалданатын функциялар болса, онда $y' = F'(u) \cdot u'$ болатыны белгілі. Онда $dy = y'dx = F'(u) \cdot u'dx = F'(u)du,$ өйткені $u'dx = du$. Сонымен, $dy = F'(u)du$. Дифференциалдың бұл қасиеті *дифференциал формасының инварианттылығы* деп аталады.

Дифференциалдардың түрлері бірдей болғанымен, мағыналары әртүрлі. (6.12) формулада $\Delta x = dx$, ал соңғы теңдікте $du \approx \Delta u$.

Алтыншы тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Туындының анықтамасын беріңіз.
2. Туындының геометриялық және механикалық мағыналарын түсін-діріңіз.
3. Функцияның үзіліссіздігімен дифференциалдануының арасындағы байланыс туралы теореманы дәлелдеңіз.
4. Негізгі элементарлық функциялардың туындыларын қорытып шыға-рыңыз.
5. Дифференциалдаудың негізгі ережелерін жазыңыз.
6. Күрделі функцияның анықтамасын беріңіз.
7. Күрделі функция туындысының формуласын жазыңыз.
8. Кері функция ұғымын анықтаңыз.
9. Кері функция туындысының формуласы туралы теореманы дәлелдеңіз.
10. Айқындалмаған және параметрлі функциялардың туындылары.
11. Туындылар кестесін жазыңыз.
12. Функция дифференциалының анықтамасын беріңіз.
13. Функция дифференциалы бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын жазыңыз.
14. Дифференциалдың геометриялық мағынасын баяндаңыз.
15. Дифференциалды жуық есептеуге қолдану формуласын жазыңыз.
16. Дифференциал формасының инварианттылығы деген не?

7 тарау. ЖОҒАРЫ РЕТТІ ТУЫНДЫЛАР ЖӘНЕ ДИФФЕРЕН-ЦИАЛДАР

7.1. Жоғары ретті туындылар

Дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясы берілсін. Онда оның $f'(x)$ туындысының мәндері жалпы жағдайда x-тен тәуелді, басқаша айтқанда x-тің функциясы. Егер $f'(x)$ функциясы да дифференциалданатын болса, онда оны дифференциалдап екінші ретті туындысын табамыз. Екінші ретті туындыны дифференциалдап 3-ретті туындыны және т.с.с. туындыларды табамыз. Реті біріншіден жоғары болатын туындылар *жоғарғы ретті туындылар* деп аталады. $f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы $f''(x)$, үшінші ретті туындысы $f'''(x),\ldots,n$-ші ретті туындысы $f^{(n)}(x)$-тер арқылы белгіленеді, яғни,

$$f''(x) = \left[f'(x) \right]', \quad f'''(x) = \left[f''(x) \right]', \ldots, \ f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'.$$

n-ші ретті туындылар үшін төмендегі теңдіктер орындалады.

1) $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$,

2) $(cu)^n = cu^{(n)}$.

Енді $y = u(x) \cdot v(x)$ көбейтіндінің n-ретті туындысын табайық.

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Осылайша 4, 5, ..., n-ретті туындылары анықталады, оларды мынадай заңдылықпен жалпы түрде жазуға болады. Яғни, $y = uv$ көбейтіндінің n-ретті туындысын табу үшін

$(u+v)^n$ өрнектің Ньютон биномындағы u мен v –лардың дәреже көрсеткішін туынды ретінің көрсеткішімен ауыстырып, шеткі мүшелеріндегі u мен v -ның нөлінші дәреже көрсеткішін функциялардың өздерімен ауыстырылады, яғни

$$y^{(n)} = (uv)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

Бұл *Лейбниц формуласы* деп аталады.

Параметр арқылы берілген $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ функциясының екінші ретті туындысы былай анықталады

$$y''_x = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'_t\cdot\psi''_{tt} - \varphi''_{tt}\cdot\psi'_t}{(\varphi'_t)^2}.$$

7.2. Жоғары ретті дифференциалдар

Бірінші ретті дифференциалдың дифференциалы оның екінші ретті дифференциалы деп аталады және d^2y -пен белгіленеді.

$$d^2y = d(dy) = d\left[f'(x)dx\right] = f''(x)dx^2.$$

Осы сияқты

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{7.1}$$

(7.1) формуладан

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \tag{7.2}$$

теңдігі шығады. Дербес жағдайда, $n=1,2,3$ болғанда:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Басқаша айтқанда, берілген функцияның n -ретті туындысы оның n -ретті дифференциалын тәуелсіз айнымалы дифференциалының n -ші дәрежесіне бөлгенге тең екен.

Біз жоғарыда функцияның 1-ретті дифференциалы инвариантық формаға ие болатындығы туралы айтқанбыз. Ал екінші, үшінші және т.с.с. ретті дифференциалдары ондай қасиетке ие болмайды, яғни егер функцияның аргументі тәуелсіз айнымалы болмаса, онда (7.1) мен (7.2) теңдіктер орындалмайды.

7.3. Дифференциалдық есептеулердің негізгі теоремалары

Ролль теоремасы. Егерде $[a;b]$ кесіндісінде анықталған, үзіліссіз $y=f(x)$ функциясы оның барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса және кесіндінің $x=a$, $x=b$ ұштарында нөлге тең болса, онда ең болмағанда бір $x=c$, $a<c<b$, нүктесі табылып, осы нүктедегі функцияның туындысы нөлге тең болады, яғни $f'(c)=0$.

Дәлелдеу. $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан өзінің ең үлкен мәні M мен ең кіші мәні m-ді қабылдайды (Анализге кіріспе бөлімін қараңыз).

Егер $M=m$ болса, онда $f(x)=0$, яғни $[a;b]$ кесіндісінің барлық нүктелерінде $f'(x)=0$ болады.

Енді $M\neq m$ деп ұйғаралық. Онда олардың ең болмағанда біреуі нөлге тең емес. Айталық $M>0$ және $f(c)=M$ делік. c нүктесі $a<c<b$ теңсіздігін қанағаттандырады, себебі теореманың шарты бойынша $f(a)=f(b)=0$. $f(c)$-функцияның ең үлкен мәні болғандықтан, кез келген Δx үшін $f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$. Олай болса

$$\Delta x<0 \text{ үшін } \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0,$$

$$\Delta x>0 \text{ үшін } \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0.$$

Шарт бойынша $x=c$ нүктесінде функцияның туындысы бар болғандықтан

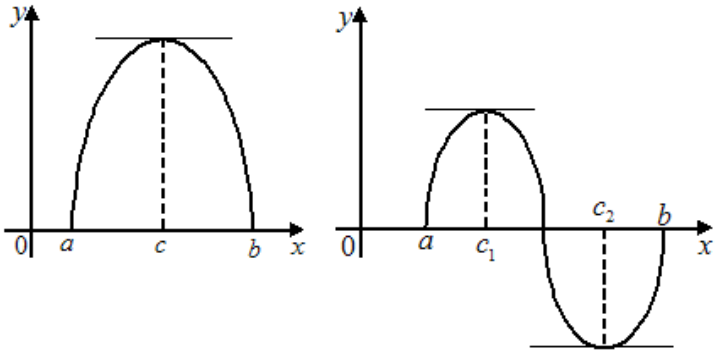
$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad (\Delta x < 0),$$

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad (\Delta x > 0)$$

шектері бар болады. Бұдан $f'(c) \geq 0$ және $f'(c) \leq 0$ қатынастары тек $f'(c) = 0$ болғанда ғана орындалатыны шығады.

Теорема дәлелденді.

Ролль теоремасы геометриялық тұрғыдан былай түсіндіріледі (7.1-сурет). $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, оның ішкі нүктелерінде дифференциалданатын және $f(a) = f(b) = 0$ шартын қанағаттандыратын $y = f(x)$ қисығы үшін a және b нүктелерінің арасында жататын c нүктесі табылады да $f'(c) = 0$ болады, яғни $x = c$ нүктесі арқылы өтетін жанама Ox өсіне параллель болады.



7.1-сурет

Ескерту! Ролль теоремасының тұжырымы $f(a) = f(b) \neq 0$ шартын қанағаттандыратын функция үшін де орындалады.

Лагранж теоремасы. $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, оның барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын $y = f(x)$

функциясы үшін ең болмағанда бір c нүктесі $(a<c<b)$ табылады да

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. $Q=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ деп белгілеп $F(x)=f(x)-f(a)-Q\cdot(x-a)$ функциясын қарастыралық. Бұл функция жоғарыдағы Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады (оны тексеруді студенттерге тапсырамыз). Демек, $[a;b]$ кесіндісінің ішінде жататын c нүктесі табылады да $F'(c)=0$ болады.

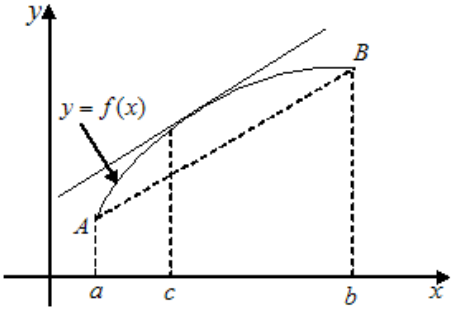
$$F'(x)=f'(x)-Q=0,$$

онда

$$f'(c)=Q \text{ немесе } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорема дәлелденді.

Лагранж теоремасы геометриялық тұрғыдан былай түсіндіріледі (7.2-сурет). $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, оның барлық ішкі нүктесінде дифференциалданатын $y=f(x)$ қисығы үшін осы кесіндінің ішінде жататын c нүктесі табылып, $\left(c, f\left(c\right)\right)$ нүктесінде жүргізілген жанама AB хордасына параллель болады.



7.2-сурет

Коши теоремасы. Егерде $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, оның ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса және $\varphi'(x)$ нөлге тең болмаса, онда осы кесіндінің ішінде жататын $x=c$ нүктесі табылады да

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{7.3}$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. $\varphi(b)\neq\varphi(a)$, себебі егер тең болса, онда Ролль теоремасы бойынша $[a;b]$ кесіндісінің ішінде жататын c нүктесі табылады да $\varphi'(c)=0$ болады. $Q=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ белгілеуін енгізіп, $F(x)=f(x)-f(a)-Q\cdot[\varphi(x)-\varphi(a)]$ функциясын қарастыралық. Бұл функция Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан $F'(c)=0$, $a<c<b$, болады. Екіншіден, $F'(x)=f'(x)-Q\cdot\varphi'(x)$.

Осыдан $F'(c)=f'(c)-Q\cdot\varphi'(c)$, яғни $Q=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема дәлелденді.

7.4. Лопиталь ережесі

Айталық $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары $[a;b]$ кесіндісінде Коши теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырсын және $f(a)=\varphi(a)=0$ болсын. Егер x нүктесі a-ға ұмтылғанда $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ қатынасының шегі бар болса, онда $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ қатынасының да шегі бар болады және

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{7.4}$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. $[a;b]$ кесіндісінен қандай да бір $x \neq a$ нүктесін алайық.

Онда жоғарыдағы (7.4) теңдік бойынша

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},\ a<c<x.$$

Екіншіден, шарт бойынша $f(a)=\varphi(a)=0$ болғандықтан соңғы теңдіктен

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

теңдігін аламыз. x нүктесі a -ға ұмтылса c нүктесі де a -ға ұмтылады, себебі $a<c<x$. Айталық

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$$

болсын. Онда

$$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=A$$

болады. Сондықтан

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A.$$

Теорема дәлелденді.

1-ескерту! Осы дәлелденген теореманы Лопитальдың бірінші ережесі деп те атайды.

2-ескерту! Бұл теорема x, a -ға ұмтылғанда $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ болған жағдай үшінде орынды. Бұл жағдайды Лопитальдың екінші ережесі деп те атайды.

3-ескерту! Анықталмағандықтардың $\infty-\infty;0\cdot\infty;0^{\circ};1^{\infty};\infty^{\circ}$ түрлерін ашу үшін оларды түрлендіріп, Лопитальдың екі ережесінің біреуіне келтіреміз.

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{7x}$ шегін есептелік. Лопитальдың бірінші ережесі бойынша

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{7}=\frac{5}{7}.$$

2-мысал. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-8x+2}{6x^2+2x-1}$ шегін есептеу үшін Лопитальдың екінші ережесін қолданамыз, яғни

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-8x+2}{6x^2+2x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-8}{12x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

3-мысал. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$ шегін есептелік.

Шешуі.

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

4-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ шегін есептелік.

Шешуі.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

4-ескерту! Лопиталь ережелерін анықталмағандықты ашу үшін бірнеше рет қолдануға болады (2, 4-мысалдарда екі рет қолдандық).

7.5. Тейлор формуласы

Ішінде $x=a$ нүктесі жататын қандай да бір аралықта $y=f(x)$ функциясының $(n+1)$ - ретке дейінгі барлық туындылары бар болсын деген ұйғарым жасалық. $x=a$ нүктесіндегі мәні $f(x)$ функциясының осы нүктедегі мәніне, ал осы нүктедегі n-ші ретті туындыларының мәні $f(x)$ функциясының сәйкес n-ші ретті туындыларының мәніне тең болатын, дәрежесі n-нен аспайтын $P_n(x)$ көпмүшелігін қарастыралық, яғни

$$P_n(a)=f(a),\ P_n'(a)=f'(a),\ P_n''(a)=f''(a),...,\ P^{(n)}{}_n(a)=f^{(n)}(a). \tag{7.5}$$

Көпмүшелікті

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...+c_n(x-a)^n \tag{7.6}$$

коэффициенттері белгісіз, $(x-a)$-ның дәрежесі түрінде іздейміз. $P_n(x)$ көпмүшелігінің туындыларын табалық

$$\begin{cases} P_n'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+...+nc_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x)=2c_2+2\cdot 3(x-a)+...+(n-1)n(x-a)^{n-2}, \\ \text{- -} \\ P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)...2\cdot 1\cdot c_n. \end{cases} \tag{7.7}$$

(7.6) және (7.7) теңдіктердегі x-тің орнына a-ны қойып,

$$c_0=f(a),\ c_1=f'(a),...,\ c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{7.8}$$

теңдіктерін аламыз. Осы табылған $c_0, c_1, \ldots, c_n$-дердің мәндерін (7.6) теңдікке қойып,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a^2) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

теңдігін аламыз.

$f(x)$ функциясы мен $P_n(x)$ көпмүшелігінің айырымын $R_n(x)$ арқылы белгілесек,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{7.9}$$

формуласы шығады.

(7.9) формуланы *Тейлор формуласы*, ал $R_n(x)$-ті оның *қалдық мүшесі* деп атайды. Практикада қалдықтың *Лагранж формасы* деп аталатын

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varsigma)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{7.10}$$

мұндағы $\zeta = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1$, түрі жиі қолданылады.

$a = 0$ болғанда Тейлор формуласынан төмендегі Маклорен формуласы шығады

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{7.11}$$

7.5.1. Функциялардың Тейлор формуласына жіктелуіне мысалдар

1. $y = e^x$ функциясы. $y = f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots, \ f^{(n)}(x) = e^x$,

ал $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$. Осы мәндерді (7.11) формулаға қойсақ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x} \qquad (7.12)$$

2. $y = f(x) = \sin x$ функциясы.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \ldots, \quad y^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Осыдан

$$f(0) = 0, \ f'(0) = 1, \ f''(0) = -1, \ f'''(0) = 0, \ f^{IV}(0) = 1, \ldots$$

Олай болса

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + 0\left(x^{2n}\right). \qquad (7.13)$$

3. $y = \cos x$ функциясы. Бұл функция үшін жоғарыдағы $\sin x$ -ке ұқсас келесі формуланы аламыз:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + 0\left(x^{2n-1}\right). \qquad (7.14)$$

4. $y = f(x) = (1+x)^n$ функциясы. Бұл функция үшін де жоғарыдағы функциялар сияқты келесі формуланы аламыз

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (7.15)$$

7.5.2. Тейлор формуласының жуықтап есептеулерде қолданулары

1-мысал. $e^{0,15}$ санын жуықтап есептелік. Ол үшін (7.12) формуланы қолданамыз. Есептеу дәлдігі жіктелуден алынған мүшелердің санына тәуелді, ал жіберілген қате жіктелудегі қолданылмаған бірінші мүше арқылы бағаланылады.

$e^{0,15}$ санын есептеу үшін (7.12) формуланың алғашқы төрт мүшесін пайдаланамыз, яғни

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Осы жуықтаудағы x-тің орнына $0{,}15$ санын қоялық. Сонда

$$e^{0,15} \approx 1 + 0{,}15 + \frac{0{,}0225}{2} + \frac{0{,}003375}{6} = 1{,}1618.$$

Жіберілген қате $\delta < \left|\frac{x^4}{4!}\right| < 0{,}00002.$

2-мысал. $\sin 20^\circ$ шамасын есептелік. (7.13) формуланы пайдаланамыз. Оның алғашқы екі мүшесін алайық және $x = \frac{\pi}{9}$.

$$\sin 20^\circ = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{31}\cdot\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}342$$

Жіберілген қате

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!}\sin(\varsigma + 2\pi)\right| \le \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \approx 0{,}00062 < 0{,}001$$ яғни $0{,}001$

дәлдікте $\sin 20^\circ \approx 0{,}342$.

3-мысал. $\sqrt[5]{315}$ санын есептелік. Ол үшін (7.15) формуланың алғашқы үш мүшесін пайдаланамыз:

$$\sqrt[5]{315} = \sqrt[5]{243\cdot\frac{315}{243}} = 3\cdot\left(1+\frac{72}{243}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 3\left[1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{72}{243} + \frac{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}\cdot\left(\frac{72}{243}\right)^2\right] =$$

$$= 3\cdot(1 + 0{,}05926 - 0{,}00702) = 3\cdot 1{,}05224 = 3{,}15672.$$

Жіберілген қате

$$\delta < \left| \frac{\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) \cdot \left(-\frac{9}{5} \right)}{6} \cdot \left(\frac{72}{243} \right)^3 \right| < 0{,}00125 < 0{,}01,$$

яғни $0{,}01$ дәлдікпен $\sqrt[5]{315} \approx 3{,}16$.

Жетінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Жоғары ретті туынды деген не?
2. Лейбниц формуласын жазыңыз.
3. Жоғары ретті дифференциалдар инварианттық қасиетке ие бола ма?
4. Ролль теоремасын жазыңыз.
5. Лагранж теоремасын жазыңыз және дәлелдеңіз.
6. Коши теоремасын жазыңыз.
7. $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты айқындаудың Лопиталл ережесі.
8. $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықты айқындаудың Лопиталл ережесі.
9. $0 \cdot \infty$ және 1^{∞} түріндегі анықталмағандықтарды айқындау әдісін баяндаңыз.
10. Тейлор формуласын жазыңыз.
11. Қалдықтың Лагранж формуласы қандай?
12. Негізгі элементар функциялардың Тейлор формуласына жіктелуін жазыңыз.
13. Тейлор формуласы жуықтап есептеулерге қалай қолданылады?

8 тарау. ТУЫНДЫНЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУГЕ, ГЕОМЕТ-РИЯ ЖӘНЕ МЕХАНИКА ЕСЕПТЕРІН ШЕШУГЕ ҚОЛДАНУ

8.1. Функцияның өсуі мен кемуі туралы теоремалар

1-теорема. 1) егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде өсетін және оның барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса, онда оның туындысы осы кесіндіде теріс болмайды, яғни $f'(x) \geq 0$; 2) егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал оның барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса және $f'(x) > 0$ болса, онда бұл функция $[a;b]$ кесіндісінде өседі.

Дәлелдеу. Алдымен теореманың бірінші бөлімін дәлелдейік. Айталық $[a;b]$ кесіндісінде $f(x)$ өсетін функция болсын. Анықтама бойынша таңбасы кез келген Δx үшін

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Демек,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Енді теореманың екінші бөлімін дәлелдейік. Айталық $(a;b)$ интервалының барлық x нүктелері үшін $f'(x) > 0$ болсын. $[a;b]$ кесіндісінде жататын, $x_1 < x_2$ шартын қанағаттандыратын x_1 және x_2 мәндерін қарастыралық. Лагранж теоремасы бойынша $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $x_1 < c < x_2$. Шарт бойынша $f'(c) > 0$. Демек $f(x_2) - f(x_1) > 0$, яғни $f(x)$ өспелі функция.

Теорема толық дәлелденді.

Ескерту! Кемімелі функциялар үшін де осы теоремаға ұқсас келесі теореманы дәлелдеуге болады.

2-теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде кемімелі болса, онда $f'(x)\le 0$ болады. Егерде $f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығында үзіліссіз, дифференциалданатын және $f'(x)<0$, $a<x<b$, болса, онда $[a;b]$ кесіндісінде бұл функция кемімелі болады.

Мысал. $y=3x^2-6x+5$ функциясының өсу және кему аралықтарын табалық.

Шешуі. Алдымен бұл функцияның туындысын табалық, яғни $y'=6x-6=6(x-1)$. Осы теңдіктен $x>1$ болса, $y'>0$; ал $x<1$ болса $y'<0$ болатынына көз жеткізу қиын емес.

Демек, берілген функция $(-\infty;1)$ аралығында кемиді, ал $(1;+\infty)$ аралығында өседі.

8.2. Функцияның экстремумдары

1-анықтама. Егер x_0 нүктенің аймағындағы барлық x нүктелері үшін $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *максимум (минимум) нүктесі* деп аталады.

Функцияның максимумы мен минимумын оның *экстремумдері* деп атайды.

Функцияның экстремумдары бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қарастырайық.

1-теорема. Егер $x=x_0$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясының экстремумы бар болса, онда оның осы нүктедегі туындысы нөлге тең, яғни $f'(x_0)=0$.

Дәлелдеу. Айталық x_0 берілген функцияның максимум нүктесі болсын. Сонда кезкелген Δx үшін $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$.

Осыдан $\Delta x < 0$ болғанда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0,$$

ал $\Delta x > 0$ болғанда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0.$$

Олай болса $\Delta x < 0$ үшін

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

ал $\Delta x > 0$ үшін

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Яғни $f'(x_0) = 0.$

2-анықтама. $y = f(x)$ функциясының бірінші ретті туындысы нөлге тең болатын немесе ол туынды болмайтын нүктелері оның *кризистік нүктелері* деп аталады.

Ескерту! 1-теоремадан мынадай салдар шығады: егер қарастырылып отырған аргументтің барлық мәндерінде $f(x)$ функциясының туындысы бар болса, онда бұл функция өзінің экстремумын тек туындысы нөлге тең болатын мәндерінде ғана қабылдайды.

Кері тұжырым дұрыс емес.

Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданбайтын, бірақ x_0 нүктесінде экстремумы бар болса, онда x_0 нүктесінде бұл функцияның туындысы болмайды.

2-теорема. Айталық $f(x)$ функциясы, x_0 кризистік нүктесі жататын қандайда бір аралықта үзіліссіз және осы аралықтың x_0 нүктесінен басқа нүктелерінде дифференциалданатын болсын. Егер осы нүктенің сол жағынан

оң жағына өткенде туындының таңбасы плюстен минуске өзгерсе, онда x_0 максимум нүктесі болады. Егер x_0 нүктесінің сол жағынан оң жағына өткенде туындының таңбасы минустен плюске өзгерсе, онда x_0 минимум нүктесі болады.

Мысал. $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 3$ функциясының экстремумдарын және өсу, кему аралықтарын табалық.

Шешуі. Берілген функцияның анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ аралығы, яғни бүкіл сан өсі. Туындысын табалық:

$$y' = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4).$$

Кризистік нүктелерін табалық, ол үшін туындыны нөлге теңестірелік, яғни $x^2 - 5x + 4 = 0$. Осыдан $x_1 = 1,\ x_2 = 4$. Бұл кризистік нүктелер функция-ның анықталу облысын $(-\infty; 1)$, $(1;4), (4;+\infty)$ аралықтарына бөледі.

а) $(-\infty; 1)$ аралығынан кез келген, мысалы $x = 0$ нүктесін аламыз. Бұл нүктеде $y' = 6 \cdot 4 = 24 > 0$, яғни $(-\infty; 1)$ аралығында функция өседі;

ә) $(1; 4)$ аралығында жататын кез келген нүктені, мысалы $x = 2$ нүктесін алайық. Бұл нүктеде $y' = 6(4 - 10 + 4) = -12 < 0$, яғни бұл аралықта функция кемиді;

б) $(4;+\infty)$ аралығынан кез келген, мысалы $x = 5$ нүктесін алайық. Бұл нүктеде $y' = 6(25 - 25 + 4) = 24 > 0$, яғни $(4;+\infty)$ аралығында функция өседі.

$x = 1$ кризистік нүктесінің сол жағынан оң жағына қарай өткенде, туындының таңбасы плюстен минуске ауысады, яғни ол максимум нүктесі $y_{\max}(1) = 8$.

$x = 4$ кризистік нүктесінің сол жағынан оң жағына қарай өткенде туындының таңбасы минустан плюске ауысады, яғни ол минимум нүктесі $y_{\min}(4) = -19$.

8.3. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

Айталық $[a;b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болсын. Онда бұл кесіндіде ол функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайтыны белгілі (Анализге кіріспе бөлімін қараңыз). Ол мәндерді табу үшін функцияның барлық кризистік нүктелеріндегі мәндерін және кесіндінің ұштарындағы мәндерін табамыз да, оларды салыстырамыз.

Мысал. $y=-3x^4+6x^2-1$ функциясының $[0;2]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табалық.

Шешуі. $y'=-12x^3+12x=-12x(x^2-1)$. Осыдан, функцияның $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$ үш кризистік нүктесі болатынын көру қыйын емес. $x=-1$ кризистік нүктесі $[0;2]$ кесіндісінде жатпайды. Сондықтан $f(1)=2,\ f(0)=-1,$ $f(2)=-25$ мәндерін тауып, оларды салыстырамыз. Олай болса функцияның ең үлкен мәні 2-ге, ал ең кіші мәні минус 25-ке тең.

8.4. Қисықтың ойыстығы мен дөңестігі және иілу нүктелері

1-анықтама. Айталық $(a;b)$ аралығында $y=f(x)$ теңдеуімен анықталған қисық берілсін. Егер осы қисық $(a;b)$ аралығының кез келген нүктесінде өзіне жүргізілген жанамалардың төменгі жағында жатса *дөңес*, ал жоғарғы жағында жатса *ойыс* деп аталады.

1-теорема. Егерде $(a;b)$ аралығының барлық нүктелерінде $y=f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы $f''(x)<0$ болса, онда бұл аралықта $y=f(x)$ қисығы дөңес, ал $f''(x)>0$ болса ойыс болады.

2-анықтама. $y=f(x)$ үзіліссіз қисығының дөңес бөлігінен ойыс бөлігіне немесе ойыс бөлігінен дөңес бөлігіне көшетін нүкте оның *иілу нүктесі* деп аталады.

2-теорема. Айталық қисық $y = f(x)$ теңдеуімен анықталсын. Егерде x_0 нүктесінде $f''(x_0) = 0$ немесе бұл нүктеде екінші ретті туынды болмаса және осы нүктеден өткенде $f''(x)$ туындысының таңбасы өзгерсе, онда $(x_0, f(x_0))$ иілу нүктесі болады.

Мысал. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ функциясын ойыстыққа және дөңестікке зерттеп, оның иілу нүктесін табалық.

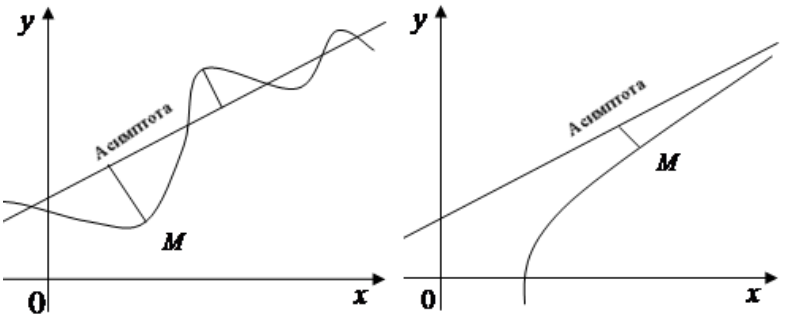
Шешуі. $y' = 3x^2 - 6x - 9, y'' = 6x - 6$. Осыдан $x = 1$ болғанда $y'' = 0$ болады. Олай болса берілген функцияның анықталу облысын, яғни $(-\infty;+\infty)$ аралығын $(-\infty;1)$ және $(1;+\infty)$ аралықтарына бөліп, екінші ретті туындының таңбаларын айқындаймыз:

$(-\infty;\ 1)$ аралығында $y'' < 0,$ яғни қисық дөңес;

$(1;\ +\infty)$ аралығында $y'' > 0,$ яғни қисық ойыс, онда $x = 1$ нүктесі қисықтың иілу нүктесі.

8.5. Қисықтың асимптоталары

Анықтама. Егерде l түзуімен $y = f(x)$ қисығындағы өзгермелі M нүктесінің ара қашықтығы M нүктесі шексіздікке алыстаған сайын нөлге ұмтылса, онда l түзуі осы қисықтың *асимптотасы* деп аталады (8.1 а,б-сурет).



а) б)

8.1-сурет

1. Вертикаль (тік) асимптоталар. Егерде

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a-0} = f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty$$

шарттары орындалса, онда $x=a$ түзуі $y=f(x)$ қисығының *вертикаль асимптотасы* деп аталады.

Мысал. $x=2$ түзуі $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ қисығының вертикаль асимптотасы, себебі

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\infty.$$

2. Горизонталь асимптоталар. Егер $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ шегі бар болса, онда $y=b$ түзуі $y=f(x)$ қисығының *горизонталь асимптотасы* деп аталады.

Мысалы, $y=-2$ түзуі $y=\dfrac{2-4x}{2x+1}$ қисығының горизонталь асимптотасы, себебі

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-4x}{2x+1}=-2$$

3. Көлбеу асимптоталар. Көлбеу асимптоталар $y=kx+b$ теңдеуі түрін-де ізделінеді. Мұндағы k-мен b төмендегі теңдіктер арқылы табылады:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ \ b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Мысалы, $y=x+2$ түзуі $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ қисығының көлбеу асимптотасы болады, себебі,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-2}=1;\ \ b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

4. Функцияны зерттеудің жалпы схемасы мынадай:

1) функцияның анықталу облысы табылады;

2) функцияның жұп-тақтығы анықталып, үзіліс нүктелері, координата өстерімен қиылысу нүктелері табылады;

3) функцияның монотондық аралықтары, төңіректік экстремумдары табылады;

4) функция графигінің дөңестік, ойыстық аралықтары және иілу нүктелері табылады;

5) функцияның асимптоталары табылады және шексіздіктегі жағдайы зерттеледі;

6) функцияның графигі сызылады.

8.6. Скаляр аргументтің вектор функциясы және оның туындысы

Кеңістіктегі қисық

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

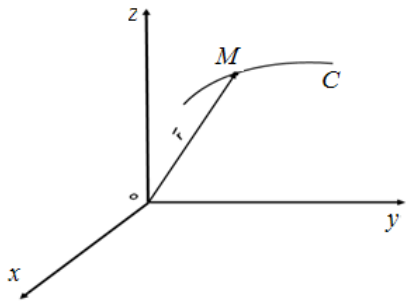
параметрлі теңдеулермен берілсін.

$x(t),\ y(t),\ z(t)$ функциялардың анықталу обылыстарынан алынған t-ның әрбір мәніне (8.1) теңдігі бойынша нақты $M(x,y,z)$ нүкте сәйкес келеді. Ал, әрбір M нүктеге оның *радиус-векторы* деп аталатын $\bar{r} = \overline{OM}$ векторы сәйкес келіп, оның бастапқы нүктесі координаталар бас нүктесімен, ал соңғы нүктесі M нүктесімен беттеседі (8.2-сурет). $\bar{r}$ векторының координата өстеріне проекциялары M нүктесінің координаталарына тең және олар (8.1) теңдігі арқылы анықталады.

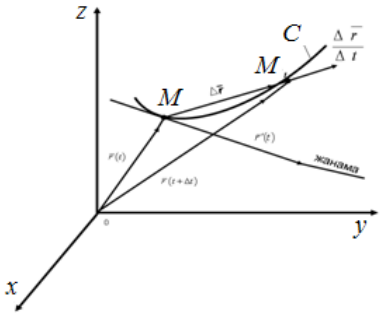
Сонымен, t параметрдің әр бір мәніне қандай да бір ереже бойынша нақты вектор сәйкес келеді екен. Бұл сәйкестікті

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \qquad (8.2)$$

түрде жазамыз.



8.2-сурет



8.3-сурет

1-анықтама. (8.2) формуламен анықталатын $\bar{r}(t)$ векторы скаляр t аргументтің *вектор функциясы* деп аталады.

2-анықтама. $\bar{r}(t)$ радиус - векторының соңғы нүктесімен сызылатын C қисығы *годограф* деп аталады. Кез келген қисықты оның ағымдағы нүктесінің радиус - векторының годографы деп қарастыруға болады.

3-анықтама. Вектор функция өсімшесі $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$- дің аргумент өсімшесі Δt -ға қатынасының $\Delta t \to 0$ дағы шегі $\bar{r}(t)$ вектор функциясының туындысы деп аталады да ол $\bar{r}'(t)$ немесе $\frac{d\bar{r}}{dt}$ деп белгіленеді.

Сонымен, $\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \bar{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$. $\bar{r}(t)$ вектор функциясы туындысының координаталардағы өрнегі (8.2) теңдіктен туынды табу анықтамасына сәйкес табылады, ол мынадай болады:

$$\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k} \qquad (8.3)$$

Енді $\bar{r}'(t)$ -ның бағытын анықтайық.

$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ векторы $\Delta\bar{r}$ векторына коллинеар болып, MM_1 қиюшыны бойлай бағытталған (8.3-сурет). $\Delta t \to 0$да M_1 нүктесі M нүктеге ұмтылады, ал MM_1 қиюшы C қисықтың M нүктесіндегі жанамасымен беттеседі.

Сонымен, $\bar{r}'(t)$ векторы $O\overline{M} = \bar{r}(t)$ радиус-векторы годографының жанамасын бойлай бағытталған екен.

Енді кеңістікте (8.1) теңдеулермен берілген қисықтың $t = t_0$-ге сәйкес $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіне жүргізілген жанаманың теңдеуін табайық. Жанама - түзу болғандықтан, кеңістіктегі M_0 нүктеден өтетін түзудің

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

теңдеуінен пайдаланымыз. Мұндағы m, n, p-түзудің бағыттаушы векторының проекциялары. $\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}$ векторы қисықтың (годографтың) M_0 нүктесіндегі жанамасы бойлай бағытталғандықтан оның проекцияларын бағыттаушы вектордың проекциялары ретінде қабылдауымызға болады,яғни $m = x'(t_0),\ n = y'(t_0),\ p = z'(t_0)$. Онда жанаманың ізделген теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \qquad (8.4)$$

түрде жазылады.

4-анықтама. Кеңістіктегі қисыққа нормаль жазықтық деп жанамаға перпендикуляр болып, жанасу нүктесінен өтетін жазықтықты айтады.

Жанасу нүктесі M_0-ден өтетін нормал жазықтықтың теңдеуін шығарайық.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

болатындығы белгілі. Мұндағы A, B, C-лар жазықтыққа нормал вектордың $\overline{N}\{A, B, C\}$ проекциялары. Онда нормал

жазықтықтың анықтамасы бойынша, $\bar{N}$ вектор ретінде $\bar{r}'(t_0)\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ векторды қабылдаса болады. Онда нормал жазықтықтың ізделген теңдеуін

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0 \quad (8.5)$$

түрде жазуға болады.

Енді скаляр аргументтің вектор функциясының бірінші, екінші ретті туындыларының механикалық мағынасын қарастырайық.

Қозғалыстағы материалдық нүктенің t мезеттегі лездік жылдамдығының сан мәні $\left|\bar{V}(t)\right| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ екендігі белгілі. Мұндағы S-жол. Қозғалыстағы нүктенің радиус – векторы $\bar{r}(t)$- ның туындысы $\bar{r}'(t)$ қозғалыс жылдамдығы $\bar{V}(t)$- ға тең екендігін көрсетеміз.

$$\bar{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

векторы $\bar{r}(t)$ векторының годографына жанаманы бойлай бағытталғанын анықтадық (8.3-сурет). Онда $\bar{r}'(t)$ векторы жылдамдық векторы $\bar{V}$ - мен бағыттас екен. Бұл векторлардың ұзындықтарының да тең екенін көрсетейік.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta S}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\bar{r}\right|}{\Delta S}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Бұл арада $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left|\Delta\bar{r}\right|}{\Delta S} = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\left|\Delta\bar{r}\right|}{\Delta S}=1$

теңдігін пайдаландық.

Сонымен, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right| = \bar{r}'(t)=\left|\bar{V}(t)\right|$

Онда, $\bar{r}'(t)=\bar{V}(t)$.

Басқаша айтқанда, материалдық нүктенің қозғалыс жылдамдығы $\bar{V}(t)$ оның вектор функциясының туындысы $\bar{r}'(t)$ -ға тең екен.

Вектор функциясының туындысы $\bar{r}'(t)$ -да скаляр аргумент t -ның функциясы болуы мүмкін. Одан t бойынша туынды алсақ $\bar{r}(t)$ вектор функциядан t бойынша алынған екінші ретті туынды шығады, ол $\bar{r}''(t)$ немесе $\frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2}$ деп белгіленеді. Онда

$$\bar{r}''(t)=\frac{d\bar{r}'(t)}{dt}=\frac{d\bar{V}(t)}{dt}. \qquad (8.6)$$

Қозғалыс жылдамдығынан уақыт бойынша алынған туынды қозғалыстың үдеуі деп аталады да $\bar{a}(t)$ векторымен белгіленеді.

Сонымен, $\bar{r}(t)$ вектор – функцияның екінші ретті туындысы $\bar{r}''(t)$ қозғалыстағы материалдық нүктенің t мезеттегі үдеуіне тең екен.

8.7. Комплекс сандар

Нақты сандар ішінде теріс санның квадрат түбірі жоқтығы, сондықтан дискриминанты нөлден кіші квадрат теңдеулерді шешу мүмкін еместігі орта мектеп математикасынан белгілі. Бірақ, математиканың өзінің және оның әр түрлі қолдануларының әрі қарай дамуы үшін сандар туралы ұғымды теріс саннан квадрат түбір табу мүмкін болатындай етіп кеңейту қажет.

1-анықтама. $z=x+iy$ түріндегі өрнек *комплекс сан* деп аталады, мұндағы x және y- нақты сандар, ал i - жорымал бірлік.

Жорымал бірлік $i=\sqrt{-1}$ немесе $i^2=-1$ теңдікпен анықталады. x саны z санның *нақты бөлігі*, ал y саны

жорымал бөлігі деп аталады да $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ деп белгіленеді.

Нақты x саны z комплекс санның $y = 0$ болғандағы дербес жағдайы болады.

$z = x + iy$ және $\overline{z} = x - iy$ сандары *түйіндес комплекс сандар* деп аталады.

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ екі комплекс санның нақты және жорымал бөліктері өзара тең болса, яғни $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, онда $z_1 = z_2$ болады. $z = x + iy$ комплекс сан тек қана $x = 0$, $y = 0$ болғанда ғана нөлге тең болады.

Комплекс сандарға арифметикалық амалдар төмендегіше анықталады.

1. Комплекс сандарды қосу (алу)

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i\left(y_1 \pm y_2\right). \tag{8.7}$$

2. Комплекс сандарды көбейту

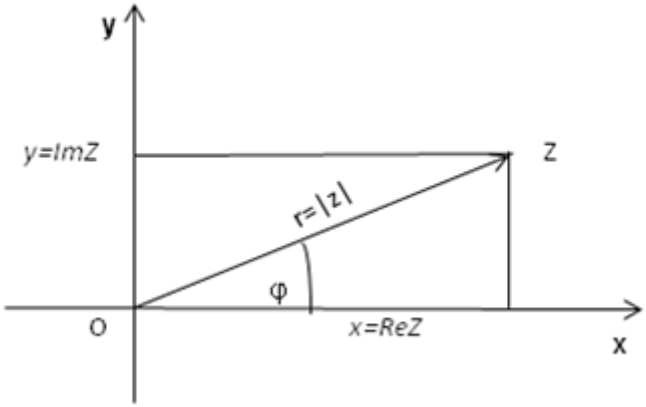
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{8.8}$$

3. Комплекс сандарды бөлу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x^2{}_2 + y^2{}_2}, \ (z_2 \neq 0). \tag{8.9}$$

Нақты сандар геометриялық тұрғыдан сандар өсінің нүктелері мен кескінделетіні белгілі, ал комплекс сандар Oxy жазықтығының нүктелері арқылы кескінделеді.

2-анықтама. Егер әр бір $z = x + iy$ комплекс санына Oxy жазықтықтың бір нүктесі сәйкес келсе және керісінше, әр бір нүктеге бір комплекс сан сәйкес келсе онда xOy комплекс жазықтық деп аталады (8.4-сурет) және z арқылы белгіленеді.



8.4-сурет

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (8.10)$$

$O\overline{Z}$ векторымен OX өсі арасындағы φ бұрышы z комплекс санның *аргументі* деп аталады да $Argz$ - пен белгіленеді. $Argz$ -тің мәндерінің ішінде $(-\pi, \pi]$ аралықта орналасатынын оның *бас мәні* деп атап $\arg z$ -пен белгілейді, яғни $-\pi < \arg z \le \pi$. Мысалы,

$$\arg 3 = 0;\ \arg 2i = \frac{\pi}{2};\ \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}.$$

(8.4)-суреттен

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad (8.10)$$

теңдіктерді жаза аламыз. Онда $z = x + iy$ комплекс саны

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (8.11)$$

(8.11) теңдік z комплекс санының *тригонометриялық түрде* жазылуы деп аталады.

Комплекс сандарды қосқанда (алғанда) олардың радиус векторлары параллелограм ережесі бойынша қосылады

(алынады). Екі комплекс санның көбейтіндісінің (қатынасының) модулі олардың модулдерінің көбейтіндісіне (қатынасына) тең, ал аргументі олардың аргументінің қосындысына (айырмасына) тең, яғни егер $z = z_1 \cdot z_2$ болса, онда $|z| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$Argz = \varphi_1 + \varphi_2 = Argz_1 + Argz_2 ; \qquad (8.12)$$

егер $z = \frac{z_1}{z_2}, (z_2 \neq 0)$ болса, онда $|z| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, (r_2 = |z_2| \neq 0)$,

$$Argz = \varphi_1 - \varphi_2 = Argz_1 - Argz_2 \qquad (8.13)$$

Екі комплекс сан көбейтіндісінің (8.12) формулаларын қолданып комплекс санды дәрежеге көтерудің келесі формуласын алуға болады

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (8.14)$$

(8.14)-формула *Муавр формуласы* деп аталады.

Муавр формуласын қолданып, $\sqrt[n]{z}$ түбірден шығару формуласын алуға болады. Ол үшін

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

деп жазып аламыз. (8.14) формуланы қолданамыз.

$$z = \left[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi), \text{ немесе}$$

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Бұдан, $\rho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Онда:

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Мұндағы $k = 0,1,2,\ldots,n-1.$ Ал k -ның қалған мәндерінде түбірдің алынған мәндері қайталанады.

Сонымен, комплекс санның n -ші дәрежелі түбірі n түрлі мәнге ие екен.

Эйлер формуласы деп аталатын

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

формуласының көмегімен z комплекс санды көрсеткішті түрде өрнектеуге болады.

$$z = re^{i\varphi},$$

мұнда $r = |z|,\ \varphi = Argz.$

Көрсеткішті түрде берілген комплекс сандарды көбейту, бөлу, дәрежеге көтеру және түбір шығару амалдары жеңіл орындалатынын ескертеміз.

Сегізінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Функцияның аралықта өспелі (кемімелі) болуының қажетті шартын жазыңыз.
2. Функцияның аралықта өспелі (кемімелі) болуының жеткілікті шартын жазыңыз.
3. Функцияның төңіректік экстремумының анықтамасын беріңіз.
4. Функция экстремумы бар болуының қажетті шартын жазыңыз.
5. Функция экстремумы бар болуының жеткілікті шартын жазыңыз.
6. Қисықтың дөңестігі ұғымының анықтамасын беріңіз.
7. Қисықтың ойыстығы ұғымының анықтамасын беріңіз.
8. Қандай шарттар орындалғанда қисық дөңес (ойыс) болады?
9. Қисықтың вертикаль асимптотасының анықтамасын беріңіз.

10. Қисықтың горизонталь асимптотасының анықтамасын беріңіз.

11. Қисықтың көлбеу асимптотасының анықтамасын беріңіз.

12. Функцияны зерттеудің жалпы схемасын жазыңыз.

13. Қандай функцияны скаляр аргументтің вектор функциясы деп атайды?

14. Годограф деген не?

15. Вектор функция туындысының координаталардағы өрнегін жазыңыз.

16. Вектор функция туындысының бағытын анықтаңыз.

17. Кеңістіктегі қисыққа жанаманың теңдеуін жазыңыз.

18. Кеңістіктегі қисыққа нормаль жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

19. Вектор функцияның бірінші, екінші ретті туындыларының механикалық мағынасын баяндаңыз.

20. Комплекс сан дегеніміз қандай сан?

21. Комплекс санның тригонометриялық формасын жазыңыз.

22. Муавр формуласын жазыңыз.

23. Комплекс саннан түбір шығару формуласын жазыңыз.

24. Комплекс санның көрсеткішті формасын жазыңыз.

9 тарау. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДАР

9.1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

Математикада және оның әртүрлі салада қолданылуларында мынадай есептер жиі кездеседі: берілген $y=f(x)$ функциясы үшін $F'(x)=f(x)$ теңдігі орындалатындай, яғни туындысы осы $f(x)$ функциясына тең $y=F(x)$ функциясын табу керек. Зер салып қарасаңыздар, мұндай есептерді шығару алдыңғы дифференциалдық есептеулер бөлімінде қарастырған мәселелерге кері. Берілген туындысы арқылы сол функцияның өзін іздеу әдістерін қарастыратын математиканың бөлімі интегралдық есептеулер деп аталады.

Интегралдық есептеулердің негізгі ұғымдарының бірі – алғашқы функция ұғымы.

1-анықтама. Егер де X аралығының барлық x нүктелері үшін $F'(x)=f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының *алғашқы функциясы* деп аталады.

Мысалы, $f(x)=x^2$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)=\frac{x^3}{3}$ функциясы болады, себебі

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'}{3}=\frac{3x^2}{3}=x^2.$$

Осы мысалдан мынаны байқау қиын емес:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+C,$$

мұндағы $C=const$, түріндегі функциялардың барлығы $f(x)=x^2$ функциясының алғашқы функциялары болады, себебі

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2.$$

Сонымен, алғашқы функциялар туралы төмендегідей жалпы қорытынды жасауға болады.

Теорема. Егер $F(x)$ функциясы қандайда бір X аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда бұл $f(x)$ функциясының алғашқы функциялары $F(x)+C$, мұндағы $C=const$, түрінде өрнектеледі.

Осы тұжырымды дәлелдей кетейік. Шынында да, айталық

$$F'(x)=f(x)$$

болсын. Сонда

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+0=f(x).$$

Бұл деп отырғанымыз $F(x)+C$ функциялары $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы екендігін көрсетеді.

Керісінше, $f(x)$ функциясының $F(x)$–тен басқа тағы да бір $\varphi(x)$ алғашқы функциясы бар болсын делік.

$$\varphi(x)-F(x)=\Phi(x)$$

деп белгілейік. Бір жағынан

$$F'(x)=f(x) \text{ және } \varphi'(x)=f(x)$$

болса, екінші жағынан

$$\Phi'(x)=\left[\varphi(x)-F(x)\right]'=\varphi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Осыдан $\Phi(x)=C$ екендігі шығады, яғни

$$\varphi(x)=F(x)+C.$$

Сөйтіп, жоғарыдағы теореманы толық дәлелдедік.

Бұл дәлелденген теорема интегралдық есептеулердің тағы да бір негізгі түсінігін ендіруге мүмкіндік береді.

2-анықтама. Егер де $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда

$$F(x)+C,\ C=const,$$

өрнегі $f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп аталады да, былай белгіленеді: $\int f(x)dx$ (былай оқылады: «интеграл эф икс дэ икс»).

Сонымен, анықтама бойынша

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,.$$

$\int$ таңбасы - интеграл таңбасы, $f(x)$ функциясы - интеграл астындағы функция, ал $f(x)dx$ көбейтіндісі интеграл астындағы өрнек деп аталады.

$f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табуды оны *интегралдау* деп атайды.

9.2. Анықталмаған интегралдың қасиеттері

1º. Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең, яғни

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2º. Анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең, яғни

$$d\int f(x)dx = f(x)dx\,.$$

3º. $F(x)$ функциясының дифференциалының анықталмаған интегралы осы функция мен тұрақты санның қосындысына тең, яғни

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4º. Тұрақты санды интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни, егер $C = const$ болса, онда

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx\,.$$

5º. Қосындының анықталмаған интегралы қосылғыштардың анықталмаған интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\,.$$

6º. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,,$$

мұндағы a мен b тұрақтылар.

Бірінші қасиеттің дәлелдемесі жоғарыдағы бірінші анықтамадан, ал екінші және үшінші қасиеттер дифференциалдың анықтамасы мен бірінші қасиеттен, 4, 5, 6 - қасиеттер екінші анықтамадан шығады.

9.3. Интегралдау кестесі

Төмендегі интегралдар кестесі анықталмаған интегралдың анықтамасы мен туындылар кестесінен тікелей шығады.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$
3. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$
4. $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C$
5. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
6. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$
7. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\, \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsin\, x + C$
14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
16. $\int tgx\, dx = -ln|cos\, x| + C$
17. $\int ctgx\, dx = ln|sin\, x| + C$

Мысалы, 17-формуланың дұрыстығын дәлелдейік, ол үшін теңдіктің оң жағынан туынды аламыз. Сонда

$$\left(\ln|\sin x| + C\right)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 0 = ctgx.$$

Сөйтіп, біз интеграл астындағы функцияны алдық. Бұл формуланың дұрыстығын көрсетеді. Қалған формулалардың барлығы осыған ұқсас дәлелденіледі.

9.4. Негізгі интегралдау әдістері

9.4.1. Айнымалыларды алмастыру әдісі

Көп жағдайларда интегралдау айнымалысын басқа бір айнымалымен алмастыру интеграл астындағы өрнекті ықшамды түрге келтіруге және ол интегралға алдыңғы тақырыптағы кестенің формулаларын қолдануға мүмкіндік береді. Мұндай әдісті *айнымалыны алмастыру әдісі* деп атайды. Бұл әдіс келесі теореманың негізінде жүзеге асады.

1-теорема. Айталық $x=\varphi(t)$ функциясы T аралығында анықталған және дифференциалданатын болсын. Сонымен қатар осы $x=\varphi(t)$ функциясының мәндерінің жиыны X аралығында $y=f(x)$ функциясы анықталсын. Егер $F(x)$ функциясы X аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F[\varphi(t)]$ функциясы T аралығында $f[\varphi(t)]$ функциясының алғашқы функциясы болады, яғни T аралығында

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \qquad (9.1)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша бұл теңдіктің сол жағынан

$$F'[\varphi(t)] = F'_x[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

теңдігін аламыз, ал ол (9.1) теңдіктің оң жағындағы интеграл астындағы функцияны береді.

(9.1) теңдікті анықталмаған интегралда *айнымалыны алмастыру формуласы* деп атайды.

Мысалдар.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ интегралын есептелік. Ол үшін

$$\sqrt{x}=t$$

алмастыруын жасалық. Сонда

$$x = t^2, \text{ ал } dx = 2tdt$$

болады. Осыларды берілген интегралға апарып қойсақ, яғни

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = 2\left(t - arctgt\right) + C.$$

t – ның орнына қайтадан x айнымалысын қойсақ

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2\left(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x}\right) + C.$$

2. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ интегралын есептелік. Бұл интегралды есептеу үшін

$$x = 2\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

тригонометриялық алмастыруы өте ыңғайлы. Шынында да бұл алмастыру арқылы интеграл астындағы өрнек

$$4 - x^2 = 4 - 4\sin^2 t = 4\left(1 - \sin^2 t\right) = 4\cos^2 t,$$

ал

$$dx = 2\cos t dt$$

түріне келеді. Олай болса

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int \cos t \cdot 2\cos t\, dt = 2\int 2\cos^2 t dt.$$

Соңғы интегралға

$$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$$

«дәрежені төмендету» формуласын пайдалансақ

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int \left(1 + \cos 2t\right) dt = 2t + \sin 2t + C \qquad (9.2)$$

Жоғарыдағы

$$x = 2\sin t$$

алмастыруынан

$$\sin t = \frac{x}{2} \text{ және } t = \arcsin\frac{x}{2}.$$

Олай болса

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

ал

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t.$$

Осыларды (9.2) теңдіктің оң жағына апарып қойсақ

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2} + C.$$

9.4.2. Бөлшектеп интегралдау әдісі

Бұл әдіс екі функцияның көбейтіндісін дифференциалдау ережесіне негізделген және ол берілген интегралды одан қарапайым интегралға алып келеді.

1-теорема. Айталық $u(x)$ және $v(x)$ функциялары X аралығында дифференциалданатын болсын. Онда

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{9.3}$$

теңдігі орындалады.

Осы теңдікті *бөлшектеп интегралдау формуласы* деп атайды.

Ескерту! Осы бөлшектеп интегралдау әдісінің негізінде дәлелденетін және рекурренттік деп аталатын келесі формула есептер шығаруда жиі пайдаланылады.

$$J_n = \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n},\ n\in N$$

болсын. Онда

$$J_n = J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\cdot J_{n-1}. \tag{9.4}$$

Мысалы, $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ интегралын есептеу үшін (9.4) формуланы пайдаланамыз.

Сонда $J_2 = J_1 + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} - \frac{J_1}{2} = \frac{1}{2} arctgx + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + C$.

Ескерту! 9.4.1 тақырыбындағы бірінші теореманың практикада жиі қолданылатын дербес жағдайы келесі теорема болып табылады.

2-теорема. Егер

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

болса, онда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \qquad (9.5)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеу.

$$ax + b = t$$

алмастыруын жасасақ

$$dx = \frac{dt}{a}$$

болады. Олай болса

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a} F(t) + C.$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы t — ның орнына $ax+b$ — ны қойып (9.5) теңдікті аламыз.

Мысалдар.

1. $\int (2x+1)^4 dx$ интегралын есептелік. Бұл интеграл (9.5) теңдіктің негізінде қысқаша былай есептелінеді:

$$\int (2x+1)^4 dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^4 d(2x+1) = \frac{(2x+1)^5}{10} + C.$$

Ескерту! (9.1) формуланы оңнан солға қарай да қолдануға болады. Бұл жағдайда оны «дифференциалдың астына енгізу» әдісі деп атайды.

2. $\int x^2 \cdot e^{3+5x^3} dx$ интегралын есептелік. Айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы

$$x^2 dx = \frac{1}{15} d\left(3 + 5x^3\right)$$

теңдігін аламыз (шын мәнінде осы арада $t = 3 + 5x^2$ алмастыруы айқын түрде көрінбей тұр). Сонымен

$$\int x^2 \cdot e^{3+5x^3} dx =$$

$$= \int e^{3+5x^3} \cdot \frac{1}{15} d\left(3 + 5x^3\right) = \frac{1}{15} \int e^{3+5x^3} d\left(3 + 5x^3\right) = \frac{1}{15} e^{3+5x^3} + C \cdot$$

3. $\int ln\, x dx$ интегралын есептелік. Ол үшін (9.3) формуланың сол жағындағы $ln\, x$ – ті u деп, ал dx – ті dv деп белгілейік. Сонда

$$du = \frac{1}{x} dx \text{, ал } v = x$$

болады (бұл арада $c = 0$ деп аламыз). Бұдан былай ыңғайлы болу үшін бөлшектеп интегралдау әдісін пайдаланамыз да төмендегі жазу түрін қолданамыз. Сөйтіп,

$$\int ln\, x dx = \left| \begin{array}{l} u = ln\, x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot ln\, x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x ln\, x - x + C .$$

4. $\int arcsin\, x\, dx$ интегралын есептелік.

$$\int arcsin\, x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = arcsin\, x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot arcsin\, x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \tag{9.6}$$

Соңғы интегралды есептеу үшін

$$\sqrt{1 - x^2} = t$$

алмастыруын жасалық. Сонда

$$t^2 = 1 - x^2$$

болады. Осы теңдіктің екі жағын да дифференциалдап

$$2tdt = -2xdx$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$xdx = -tdt\,.$$

Олай болса

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{t\,dt}{t} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C\cdot$$

Осыны (9.6) теңдіктің оң жағындағы интегралға апарып қойсақ

$$\int arcsin\, x\, dx = x \cdot arcsin\, x - \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Ескерту! Кейбір интегралдарды есептегенімізде бөлшектеп интегралдау формуласын бірнеше рет қолдануға тура келеді.

5. $\int x^2 e^x dx$ интегралын есептелік.

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\int xe^x dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C\cdot$$

Ескертулер!

1) $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin mx dx$, $\int x^n \cos mx dx$ интегралдары $u = x^n$, ал қалған интеграл астындағы өрнектерді dv арқылы белгілей отырып, x айнымалы-сының дәрежесі n нөлге тең болғанша n рет бөлшектеп интегралдаудың көмегімен есептелінеді;

2) $\int x^k \arcsin x dx$, $\int x^k \arccos x dx$, $\int x^k arcctgx dx$, $\int x^k arctgx dx$ интегралдары $x^k dx = dv$, ал қалған интеграл астындағы өрнектерді u арқылы белгілеп, бөлшектеп интегралдаудың көмегімен есептеледі.

3) $\int x^k \ln^n x dx$ түріндегі интегралдар $u = \ln^n x$, ал $dv = x^k dx$ белгілеулері арқылы логарифмнің дәрежесі нөлге тең болғанша n рет бөлшектеп интегралдаудың көмегімен есептелінеді.

9.5. Рационал функцияларды интегралдау

Мына түрдегі бөлшек $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, (мұндағы $P(x)$ пен $Q(x)$ көпмүше-ліктер), рационал функция деп аталынады. Егер $P(x)$ – тің дәрежесі $Q(x)$ – тің дәрежесінен кіші болса, онда ол дұрыс, ал үлкен болса бұрыс бөлшек деп аталады. Кез келген бұрыс бөлшектің алымын бөліміне бөліп, оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысы түрінде өрнектеуге болады. Мысалы, $\frac{x^3}{x+1}$ бөлшегі бұрыс бөлшек. Оның алымын бөліміне бөлейік

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2-x+1 \\ \hline -x^2 & \\ -x^2-x & \\ \hline x & \\ x+1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

Олай болса, берілген бөлшек, яғни

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

түріне жіктеледі.

Анықтама. Мына түрдегі рационал бөлшектерді

I. $\frac{A}{x-a}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $(k\geq 2)$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $\left(k\geq 2, \frac{p^2}{4}-q<0\right)$

сәйкес I, II, III және IV түріндегі қарапайым рационал бөлшектер деп атайды. Бұл бөлшектердегі A, B, a, p, q –нақты сандар.

Осы арада алгебра курсында дәлелденетін төмендегі теоремаға тоқтала кетелік.

Теорема. Кез келген дұрыс бөлшек жоғарыдағы I-IV түріндегі қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктелінеді.

Бұл теоремаға түсініктеме бере кетелік. Теоремада айтылған жіктеліну $\frac{P(x)}{Q(x)}$ дұрыс бөлшегінің бөліміндегі $Q(x)$ көпмүшелігінің түбірлеріне байланысты.

Егер $Q(x)$ көпмүшелігінің түбірі нақты және қарапайым болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I-түрдегі; ал егер $Q(x)$–тің түбірі нақты және еселі болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I-II түріндегі; ал $Q(x)$–тің қарапайым комплекс түбірі болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I-III түріндегі және $Q(x)$–тің еселі комплекс түбірлері болса, онда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегі I-IV түріндегі қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктелінеді.

Енді қарапайым рационал бөлшектерді интегралдау мәселелерін қарастыралық.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C \cdot$

III.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{2}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

IV. $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx +$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} \cdot$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы бірінші интеграл

$$x^2+px+q=t$$

алмастыруының көмегімен шешіледі, ал екінші интеграл

$$x+\frac{p}{2}=t$$

алмастыруы және $q-\frac{p^2}{4}=b^2$ белгілеуі арқылы жоғарыдағы рекурренттік формуланы қолданып шешуге болатын $\int \frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}$ түріндегі интегралға келеді.

Осы тақырыпта айтылған теориялық мәселелердің практикалық тұрғыдан қалай қолданылатындығына нақты мысал қарастыралық.

Мысал. $\int \frac{x^2+4}{x^3-4x}dx$ интегралын есептелік. Ол үшін бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктелік, яғни

$$x^3-4x=x(x-2)(x+2).$$

Жоғарыда тұжырымдалған теорема бойынша

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

жіктелуін аламыз, себебі бөлшектің бөлімінің түбірлері $x=0$, $x=2$ және $x=-2$ нақты сандар және олар еселі емес. A, B және C сандарын табу үшін «анықталмаған коэффициенттер әдісі» деп аталатын келесі тәсілді қолданамыз.

Соңғы бөлшектің екі жағын ортақ бөлімге келтіріп

$$x^2+4=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктен -

$x=0$ деп алсақ, $4=(-2)\cdot 2A$ теңдігі шығады, яғни $A=-1$ болады;

$x=2$ деп алсақ, $8=2\cdot 4B$ теңдігі шығады, яғни $B=1$ болады;

$x=-2$ деп алсақ, $8=(-2)\cdot(-4)C$ теңдігі шығады, яғни $C=1$ болады.

Сөйтіп, A, B және C сандарын айқындаймыз. Олай болса берілген бөлшек

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$$

түріне жіктеледі. Бұл бөлшектің интегралы үш интегралдың қосындысына тең, яғни

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-4x}dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+2}=-ln|x|+ln|x+2|+ln|x-2|+C\cdot$$

9.6. Иррационал функцияларды интегралдау

1. $\int R\left[x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right]dx$ түріндегі интеграл, (мұндағы m_1, n_1, m_2, $n_2,\ldots$ бүтін сандар, ал a мен b тұрақтылар), $ax+b=t^k$, мұндағы k саны n_1, $n_2,\ldots$ сандарының ең кіші ортақ еселігі, алмастыруының көмегімен рационал функцияның интегралына келтіріледі.

Ескерту! Жоғарғы интегралда R белгілеуі интеграл астындағы өрнектің рационал функциясы дегенді білдіреді.

2. $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}\ldots\right]dx$ интегралы $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі.

3. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ интегралы, мұндағы $m,n,p-$ рационал сандар, төмендегі үш жағдайда рационал функциялардың интегралына келтіріледі. Атап айтқанда:

1) p бүтін сан болғанда $x=t^k$ (мұндағы k,m мен n бөлшектерінің ең кіші ортақ еселігі) алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі;

2) егер $\frac{m+1}{n}$ бүтін сан болса, онда $a+bx^n=t^s$ (мұндағы s, $p-$ның бөлімі) алмастыруы қолданылады;

3) егер $\frac{m+1}{n}+P$ бүтін сан болса, онда $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$ (мұндағы s, $p-$ның бөлімі) алмастыру арқылы берілген интегралды рационал функцияның интегралына келтіреміз;

4) $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, $a\neq 0$ түріндегі интеграл:

а) егер $a>0$ болса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$;

ә) егер $c>0$ болса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$;

б) егер α квадрат үшмүшеліктің түбірі болса, $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-a)t$ Эйлер алмастырулары арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі.

Мысал. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ интегралын есептелік. $a=1>0$ болғандықтан $\sqrt{x^2+4x-4}=x+t$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $x^2+4x-4=x^2+2xt+t^2$ болады. Осыдан $x=\frac{t^2+4}{2(2-t)};\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{4t-t^2+4}{(2-t)^2}dt$ теңдіктерін аламызда оны берілген интегралға апарып қоямыз. Сонда

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}=2\int\frac{dt}{t^2+4}=arctg\frac{t}{2}+C=arctg\frac{\sqrt{x^2+4x-4}-x}{2}+C\cdot$$

9.7. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

1. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ түріндегі интегралдар «универсал» деп аталатын «$tg\frac{x}{2}=t$» түріндегі алмастырудың көмегімен рационал функциялардың интегралдарына келтіріледі. Өйткені, интеграл астындағы $\sin x,\ \cos x$ және dx – тер t арқылы өрнектеледі. Шынында да

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Мысал. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \cdot$

2. $\int sin^m x cos^n x dx$, мұндағы m мен n бүтін сандар, түріндегі интегралдар:

а) m тақ болғанда $cos x = t$;

ә) n тақ болғанда $sin x = t$;

б) m мен n жұп болғанда $tgx = t$ алмастырулары арқылы есептелінеді.

Мысал. $\int sin^2 x cos^3 x dx$ интегралын $sin x = t$ алмастыруы арқылы шығарамыз, яғни

$$\int sin^2 x cos^3 x dx$$

$$= \int t^2\left(1-t^2\right)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{sin^3 x}{3} - \frac{sin^5 x}{5} + C \cdot$$

3. $\int sin\alpha x cos\beta x dx$, $\int sin\alpha x sin\beta x dx$, $\int cos\alpha x cos\beta x dx$ интегралдары тригонометрия курсынан белгілі

$$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$sin\alpha sin\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)\right],$$

формулаларының көмегімен тез есептелінеді.

Мысал. $\int sin3x cos5x dx$ интегралын есептеу керек.

$$\int sin3x cos5x dx = \frac{1}{2}\int sin8x dx - \frac{1}{2}\int sin2x dx = \frac{1}{16}\int sin8x d(8x) -$$

$$-\frac{1}{4}\int sin2x d(2x) = \frac{cos2x}{4} - \frac{cos8x}{16} + C \cdot$$

4. $\int sin^m x cos^n x dx$ интегралындағы m мен n жұп сандар, бірақ біреуі теріс болса, онда бұл интегралды $tgx = t$ немесе $ctgx = t$ алмастыруының көмегімен есептейміз.

Мысал.

$$\int \frac{sin^2 x dx}{cos^6 x} = \int \frac{sin^2 x\left(sin^2 x + cos^2 x\right)^2}{cos^2 x cos^4 x} dx = \int tg^2 x\left(1 + tg^2 x\right)^2 dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} tgx = t, x = arctgt \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$= \int t^2\left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C \cdot$$

Элементарлық функциялар арқылы «өрнектелмейтін» интегралдар туралы түсінік

Элементарлық функциялардың туындылары да элементар функциялар болатындығы белгілі. Алғашқы функцияны (анықталмаған интегралды) табу операциясы мұндай қасиеттерге ие болмайды, яғни алғашқы функциялары элементарлық функция болмайтын функциялар кездеседі. Бұл жағдайда олардың интегралдары элементарлық функциялар арқылы «өрнектелмейді» деп атайды. Оларға, мысалы $\int e^{-x^2} dx$, $\int sin x^2 dx$, $\int cos x^2 dx$, $\int \frac{sin x}{x} dx$, $\int \frac{cos x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{ln x}$ және т.б. интегралдары жатады, яғни туындылары e^{-x^2}, $sin x^2$, $cos x^2$ т.с.с. функциялары болатын элементарлық функциялар табылмайды. Мұндай элементарлық функциялар арқылы «өрнектелмейтін» интегралдарды жоғарыдағы интегралдау әдістері арқылы есептеу еш нәтиже бермейді. Алайда, бұдан ол интегралдарды есептеу мүмкін емес деген қорытынды жасауға болмайды.

Тоғызыншы тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. $y = f(x)$ функциясының алғашқы функциясы деп қандай функцияны айтады?

2. Бір ғана функцияның екі алғашқы функцияларының айырымы $\cos x$ функциясына тең бола ала ма?

3. Анықталмаған интеграл: сан ба, әлде функция ма немесе функциялар жиыны ма?

4. Анықталмаған интегралдың қасиеттерін тұжырымдаңыз?

5. $tg5x$ функциясын интеграл таңбасының алдына шығаруға бола ма?

6. Екі функцияның көбейтіндісінің интегралы олардың интегралдарының көбейтіндісіне тең бола ма?

7. Екі функцияның қатынасының интегралы олардың интегралдарының қатынасына тең бола ма?

8. Айнымалыны алмастыру әдісі дифференциалдың қандай қасиетіне негізделген?

9. $\int arctg^5 x dx$ интегралын $arctgx = t$ алмастыруы арқылы есептеуге бола ма?

10. Айнымалыны алмастыру формуласын жазыңыз?

11. $arcsin x = t$ алмастыруын қолдану үшін $\int \frac{arcsin^3 x}{\ldots\ldots\ldots} dx$ интеграл асты функциясының бөлімі неге тең болу керек?

12. Бөлшектеп интегралдау формуласын алу үшін қандай дифференциал-дау ережесі қолданылады?

13. Бөлшектеп интегралдау әдісінің мәнісі неде?

14. $\int x^3 arctgx dx$, $\int x^4 \ln x dx$, $\int x^5 e^{2x} dx$ интегралдарында қай өрнекті u, қай өрнекті dv арқылы белгілеу керек? Мағынасын түсіндіріңіз.

15. Рационал бөлшек қай жағдайда дұрыс, қай жағдайда бұрыс деп аталынады?

16. Дұрыс бөлшек қандай шарттарды қанағаттандырғанда қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктелінеді?

17. Анықталмаған коэффициенттер әдісінің мағынасын түсіндіріңіз?

18. Рационал функцияларды интегралдаудың алгоритмін тұжырымдаңыз.

19. $(2A-3B)+(6A+8B)i=8-10i$ (мұндағы $i-$жорымал бірлік, яғни i^2-1) теңдігінен A мен B қалай табылады?

20. Иррационал функцияларды интегралдаудың қандай әдісінбілесіз?

21. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ түріндегі интегралды табу үшін қандай алмастыру орындалады?

22. $\int tg^m xdx-$ды интегралдау үшін қандай алмастыру орындалады?

23. $\int \sin^m x\cos^n xdx$-ды интегралдау үшін қандай алмастыру орындалады?

24. $\int \sin mx\cos nxdx$ қалай интегралданады?

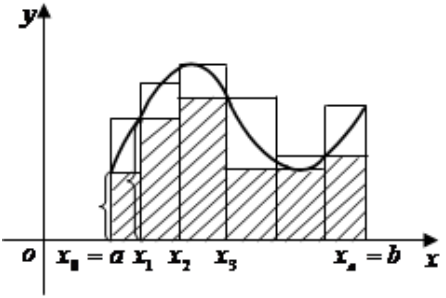
25. $\int R(\sin x)\cos xdx-$ды интегралдау үшін қандай алмастыру қажет?

26. $\int R(\cos x)\sin xdx$ қалай интегралданады?

10 тарау. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

10.1. Анықталған интеграл түсінігі, оның геометриялық мағынасы

$[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз, теріс емес $y=f(x)$ функциясы берілсін. Oxy жазықтығындағы $y=f(x)$ функциясының графигімен, Ox өсімен және $x=a$, $x=b$ вертикаль түзулерімен шектелген $aABb$ фигурасын *қисық сызықты трапеция* деп атайды (10.1-сурет).



10.1-сурет

Осы қисық сызықты трапецияның ауданы S – ті қалай табуға болады? Осы сауалдың жауабын ізделік. Мектеп математика пәнінде дөңгелектің ауданын табу үшін оған іштей және сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштардың қабырғаларының санын көбейтіп, олардың аудандарын табады да дөңгелектің ауданы ретінде сол көпбұрыштардың аудандарының шегін алатыны белгілі. Бұл әдіс сонау Архимед заманынан бері қолданылып келеді.

Осы айтылғандарды негізге ала отырып жоғарыдағы $y=f(x)$ қисығына жақын орналасқан сынық сызықты қарастыралық. Сол сынық сызықтар арқылы құрылған фигура трапециялардан (тіктөртбұрыштардан) тұрады. Олардың ауданы $\overline{S}$ – ті планиметриядан белгілі формулаларды пайдаланып таба

аламыз. Сынық сызықтарды $y = f(x)$ қисығына өте жақын етіп алғандықтан $S \approx \overline{S}$ жуық теңдігі орындалады.

Осыдан мынандай қорытынды жасауға болады: сынық сызықтардың $y = f(x)$ қисығына шексіз жақындағандағы $\overline{S}$ ауданының шегін, іздеп отырған қисық сызықты трапецияның ауданы S ретінде алуға болады.

Осы пайымдаулар сапалық сипатқа ие. Оларды практикада қолдану үшін сынық сызықтарды таңдау және шекке көшу мәселелерін қатаң түрде анықтап алған жөн.

Осындай жолдарды пайдалану арқылы анықталған интеграл түсінігіне келеміз.

Айталық $[a;b]$ кесіндісінде теріс емес $y = f(x)$ функциясы берілсін. Осы кесіндіні $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нүктелері арқылы n ұсақ бөлікке бөлелік және

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

болсын. Әрбір ұсақ $[x_{k-1}; x_k]$ бөліктен ξ_k нүктелерін таңдап алалық (мұндағы $k = 1,2,\ldots,n$). $[x_{k-1}; x_k]$ ұсақ бөлігінің ұзындығын Δx_k арқылы белгілейік. Сонда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (10.1)$$

түріндегі қосынды $y = f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі *интегралдық қосындысы* деп аталады. Бұл интегралдық қосынды $[a;b]$ кесіндісін бөлу әдісіне және ұсақ бөліктерден ξ_k нүктелерін таңдау әдісіне тәуелді. (10.1) интегралдық қосындының әрбір қосылғышы қабырғалары $f(\xi_k)$ және Δx_k болатын тіктөртбұрыштың ауданын береді.

$[x_{k-1}; x_k]$ ($k = 1,2,\ldots,n$) ұсақ бөліктердің ұзындықтарының ең үлкенін $\max\limits_k \Delta x_k$ арқылы белгілейік.

1-анықтама. Егер де $\max\limits_{k}\Delta x_k$ нөлге ұмтылғанда (10.1) интегралдық қосындысының шегі бар болса және ол шек $[a;b]$ кесіндісін бөлу әдісі мен ξ_k нүктелерін таңдаудан тәуелсіз болса, онда ол шекті $y=f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісі бойынша алынған *анықталған интегралы* деп атайды да былай белгілейді

$$\int_a^b f(x)dx\cdot$$

Бұл жағдайда $y=f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде *интегралданатын функция* деп аталады. Сонымен анықтама бойынша:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\limits_{k}\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\cdot \qquad (10.2)$$

a саны интегралдың төменгі, ал b саны жоғарғы шегі деп аталады.

$y=f(x)$ – интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ – ті интеграл астындағы өрнек деп атайды.

Ескерту! Анықталған интеграл интегралдау айнымалысына тәуелсіз, яғни

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy=\ldots$$

Белгілеулері мен атауларында ұқсастықтар бар болғанына қарамастан анықталған және анықталмаған интегралдарының бір-бірінен айырмашылы-ғы жер мен көктей. Өйткені, $\int f(x)dx$ интегралы алғашқы функцияларының жиыны; ал $\int_a^b f(x)dx$ қандай да бір сан.

Анықталған интегралдың анықтамасында $a<b$ деп ұйғардық.

Егер $b=a$ болса, онда

$$\int_a^a f(x)dx=0\cdot$$

Жоғарыдағы айтылғандардан анықталған интегралдың геометриялық мағынасы шығады: анықталған интеграл қисық сызықты трапецияның ауданын береді.

Анықталған интегралдың анықтамасындағы a саны интегралдың төменгі, b саны жоғарғы шектері, ал $[a;b]$ интегралдау аралығы және x интегралдау айнымалысы деп аталады.

2-анықтама. Егер $f(x)$ функциясы үшін (10.2) шек бар болса, онда ол функцияны $[a;b]$ кесіндісінде *интегралданатын функция* деп атайды.

Егер $[a;b]$ кесіндісінде $f(x)\geq 0$ болса, онда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралы $x=a$, $x=b$ түзулерімен, $y=f(x)$ қисығымен және Ox өсімен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданын береді.

Осы арада «анықталған интегралдың бар болуы» деп аталатын төмендегі теореманы бере кеткенді жөн көрдік.

Теорема. Егер де $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда бұл функция осы кесіндіде интегралданады.

10.2. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері

1º. Тұрақты санды интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни, егер $c=const$ болса, онда

$$\int\limits_a^b cf(x)dx=c\int\limits_a^b f(x)dx\cdot$$

2º. Бірнеше функциялардың қосындыларының интегралы олардың интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\int\limits_a^b[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx+\int\limits_a^b f_2(x)dx+\ldots+\int\limits_a^b f_n(x)dx\cdot$$

Бұл екі қасиеттің дәлелдеуі шектер туралы теоремалардан шығады.

3º. Егер де $[a;b]$ кесіндісінде анықталған $f(x)$ пен $\varphi(x)$ функциялары $f(x)\le\varphi(x)$ шартын қанағаттандырса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (10.3)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу.

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [\varphi(t_k) - f(t_k)]\Delta x_k \ge 0 \qquad (10.4)$$

себебі $[a;b]$ кесіндісінің кез келген нүктесі үшін $f(x)\le\varphi(x)$. (10.4) теңсіздіктен (10.3) теңсіздік шығады.

4º. Егер де m мен M сандары $f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісіндегі сәйкес ең кіші және ең үлкен мәндері болса, онда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (10.5)$$

теңсіздігі орындалады. Бұл қасиет

$$\int_a^b m dx = m(b-a),\ \int_a^b M dx = M(b-a)$$

теңсіздіктері мен 3-қасиеттің негізінде дәлелденіледі.

5º. Егер де $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда осы кесіндінің c нүктесі табылады да

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (10.6)$$

теңдігі орындалады.

Осы қасиетті «орта мән туралы теорема» деп те атайды. Оның дәлелдеуі 4^0-қасиеттен және кесіндіде үзіліссіз

функциялардың қасиетінен (Анализге кіріспе бөлімін қараңыз) шығады.

6º. Кез келген a,b және c сандары үшін

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

теңдігі орындалады.

10.3. Анықталған интегралдарды есептеу. Ньютон – Лейбниц формуласы

Егер $\int_a^b f(x)dx$ анықталған интегралының жоғарғы шегі b өзгеріп отыратын, ал төменгі шегі a өзгермейтін болсын деп жорысақ, онда анықталған интеграл әртүрлі мәндер қабылдай отырып, жоғарғы шектің функциясы болады, яғни

$$\int_a^x f(t)dt = \varphi(x)\cdot$$

Осы $\varphi(x)$ функциясы үшін төмендегі теореманың дұрыстығын дәлелделік.

1-теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\varphi'(x) = f(x)$ теңдігі орындалады, яғни жоғарғы шек бойынша алынған анықталған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең.

Дәлелдеу. Айталық Δx аргументтің өсімшесі болсын. Алдыңғы тақырыптағы 6º-қасиет бойынша

$$\varphi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\cdot$$

Осыдан

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктің оң жағына 5º-қасиетті қолданып

$$\Delta\varphi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$

теңдігін аламыз. Соңғы теңдіктің екі жағын Δx – ке бөліп, оны нөлге ұмтылдырып шекке көшсек

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$$

теңдігі шығады, себебі $x < \xi < x + \Delta x$.

Осы теореманың негізінде келесі тұжырымды дәлелдеу қиын емес.

2-теорема. Егер де $F(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясының қандай да бір алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (10.7)$$

теңдігі орындалады.

Осы (10.7) теңдік *Ньютон-Лейбниц формуласы* деп аталады.

Сонымен, Ньютон-Лейбниц формуласы анықталған интегралдарды есептеу үшін, интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясын тауып, x айнымалысының орнына интеграл шектерін қойып, олардың айырмасын табуды көрсетеді. Мысалдар келтірелік:

1) $\int_1^2 x^6 dx = \frac{x^7}{7}\Big|_1^2 = \frac{2^7}{7} - \frac{1^7}{7} = \frac{128}{7} - \frac{1}{7} = \frac{127}{7}$.

2) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$.

10.4. Анықталған интегралдарды есептеу әдістері

10.4.1. Анықталған интегралдарда айнымалыны алмастыру

Теорема. Егер де $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал $[\alpha;\beta]$ кесіндісінде анықталған $x=\varphi(t)$ функциясының осы кесіндіде үзіліссіз туындысы бар болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

теңдігі орындалады. Мұндағы $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Дәлелдеу. Айталық $F(x)$, $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болсын, яғни

$$F'(x)=f(x)$$

немесе

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Теореманың шарты бойынша соңғы функция $[\alpha;\beta]$ кесіндісінде интегралданады. Ньютон – Лейбниц формуласы бойынша

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx\cdot$$

Мысалы, $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$ интегралын есептелік. Ол үшін $x=2\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ алмастыруын жасасақ, интеграл астындағы функция $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4sin^2t}=2cost$, ал $dx=2costdt$ түріне келеді және интегралдау шектері 0 мен $\frac{\pi}{2}$ аралығында өзгереді, себебі $x=0$ болғанда $t=0$ және $x=2$ болғанда $t=\frac{\pi}{2}$-ге тең.

Сонымен,

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

10.4.2. Бөлшектеп интегралдау

Анықталған интегралда бөлшектеп интегралдау формуласы

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

теңдігі арқылы анықталады.

Бұл теңдікті алу үшін $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары мен олардың туындылары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз деп ұйғарылады. Төменгі интегралдарды есептелік.

1-мысал.

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix}\right| = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x} = \ln 2 - 0 -$$

$$-\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 - 1 + \ln(1+x)\Big|_0^1 =$$

$$= ln2 - 1 + ln2 - 0 = 2ln2 - 1 = ln4 - lne = ln\frac{4}{e}.$$

2-мысал. $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ интегралды есептеу үшін рекурренттік формула қорытып шығарайық (мұндағы n -оң бүтін сан).

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d(\sin x) = \left|\begin{matrix} u = \cos^{n-1} x; & dv = d(\sin x); \\ du = = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right| =$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\left(1-\cos^2 x\right)dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n.$$

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

Осындай жолмен $J_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} J_{n-4}$, онда

$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} J_{n-4}$; $n = 2m$ - жұп сан болса, онда

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0.$$

$n = 2m+1$-тақ сан болса, онда

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot J_1.$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}; \qquad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Сонымен,

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

3-мысал. $J_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ интегралды да 2-мысалдағыдай жолмен интегралдасақ:

$$J_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}.$$

n -тақ сан болса,

$$J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots(m+3)(m+1)}.$$

m -тақ сан болса,

$$J_{m,n}=\frac{(m-1)(m-3)\cdots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots(n+3)(n+1)}.$$

m және *n* жұп сан болса,

$$J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3\cdot 1(m-1)(m-3)(m-5)\cdots 3\cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

10.5. Меншіксіз интегралдар

10.5.1. Бірінші текті меншіксіз интегралдар

Біз алдыңғы тақырыптарда анықталған интегралдың бар болуы үшін интегралдау аралығы шекті, ал интеграл астындағы функцияның шектелген болуының қажеттілігін көрдік. Көптеген мәселелерде бұл екі шарттың біреуі немесе екеуі де орындалмайтын жағдайлары жиі кездеседі.

Алдымен интегралдау аралығы $[a;+\infty]$ сәулесі болатын жағдайды қарастырайық. Айталық $y=f(x)$ функциясы осы сәуленің барлық x мәндерінде анықталған және үзіліссіз болсын. Бұл жағдайда $b>a$ шартын қанағаттандыратын кез келген b үшін

$$J(b)=\int_a^b f(x)dx$$

интегралы бар болады. b өзгерген сайын интегралдың мәні де өзгеріп отырады. b плюс шексіздікке ұмтылғанда $(b\to+\infty)$ $J(b)$ функциясының шегі болуы да, болмауы да мүмкін.

Анықтама. Егер $J(b)$ функциясының b шексіздікке ұмтылғанда тиянақты бір санға тең шегі бар болса, онда ол шекті $y = f(x)$ функциясының $[a; +\infty)$ аралығы бойынша алынған бірінші текті меншіксіз интегралы деп атайды да былай белгілейді

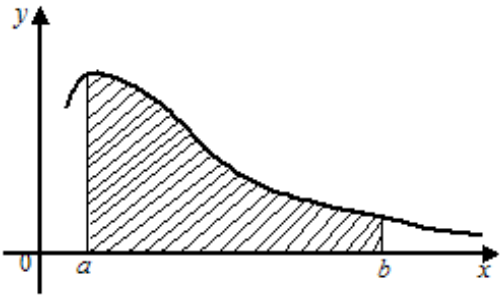
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \cdot \qquad (10.8)$$

Сөйтіп, бұл анықтама бойынша

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \cdot$$

Егер $\lim\limits_{b\to+\infty} J(b)$ шегі бар болса (10.8) интегралды *жинақты,* ал шегі болмаса, онда (10.8) интегралды *жинақсыз* деп атайды.

Егер $[a; +\infty)$ аралығында $f(x)\geq 0$ болса, онда (10.8) интеграл геометрия-лық тұрғыдан $x = a$ түзуімен, Ox өсімен және $y = f(x)$ қисығымен қоршал-ған «шексіз» фигураның ауданын береді (10.2-сурет).



10.2-сурет

Жоғарыда берілген анықтамаға ұқсас $(-\infty; a]$ және $(-\infty; +\infty)$ аралықтары үшін төмендегі меншіксіз интегралдар анықталады.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{a} f(x)dx, \qquad (10.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{a} f(x)\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx. \quad (10.10)$$

(10.10) теңдікті былай түсінеміз: егер бұл теңдіктің оң жағындағы әрбір меншіксіз интегралдар бар болса, онда анықтама бойынша, сол жағындағы меншіксіз интеграл да бар болады.

1-мысал. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интегралын есептейік. $y = \frac{1}{1+x^2}$

функциясы $[1;+\infty)$ аралығында үзіліссіз болғандықтан, бұл функция осы аралықта жататын кез келген кесіндіде интегралданады. Олай болса

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[arctgb - arctg1\right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} arctgb - \lim_{b\to+\infty} arctg1 = arctg(+\infty) - arctg1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Сонымен, $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

2-мысал. Алдағы уақытта жиі пайдаланылатын $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ меншіксіз интегралын қарастыралық. Осы интеграл α −ның қандай мәндерінде жинақты және жинақсыз болатындығын көрсетелік.

Егер $\alpha = 1$ болса, онда

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty\cdot$$

Егер $\alpha \neq 1$ болса, онда

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx \cdot$$

Бұл интегралдың жинақтылығы мен жинақсыз болуы

$$\lim_{b \to +\infty} b^{-\alpha+1}$$

шегінің бар болуы мен болмауына байланысты. Егер $\alpha > 1$ болса, онда

$$\lim_{b \to +\infty} b^{-\alpha+1} = 0$$

ал егер $\alpha < 1$ болса, онда

$$\lim_{b \to +\infty} b^{-\alpha+1} = \infty .$$

Сөйтіп, мынадай қорытындыға келдік:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

интегралы $\alpha > 1$ болғанда жинақты, ал $\alpha \leq 1$ болғанда жинақсыз.

Енді практикада жиі ұшырайтын меншіксіз интегралдардың жинақты немесе жинақсыз болу мәселелерін айқындауда өте тиімді теореманы дәлелдеусіз келтірелік және оның қолданылуын нақты мысалдар арқылы көрсетелік.

1-теорема. Егер x тің $(x \geq a)$ барлық мәндерінде $\varphi(x)$ пен $f(x)$ функциялары $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ шарттарын қанағаттандырса, онда:

1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралының жинақтылығынан $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ интегралының жинақтылығы шығады және

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

теңсіздігі орындалады.

2) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ интегралы жинақсыз болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақсыз болады.

3-мысал. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$ интегралы жинақты және оның мәні 1-ден кіші болады, өйткені $x \ge 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x – тер үшін

$\frac{1}{x^2\left(1+e^x\right)} < \frac{1}{x^2}$ теңсіздігі орындалады және $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралы жоғарыдағы қорытынды бойынша жинақты $(\alpha = 2)$ және оның мәні 1-ге тең.

4-мысал.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$$

интегралы жинақсыз, себебі

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

теңсіздігі орындалады және

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty\cdot$$

Жоғарыдағы теорема берілген аралықта теріс мәндер қабылдамайтын функциялардың меншіксіз интегралдары туралы мағлұмат береді, ал берілген аралықта таңбасы өзгеріп отыратын функцияның меншіксіз интегралы туралы мағлұматты төмендегі теорема береді.

2-теорема. Егер $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ интегралы жинақты болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақты болады.

Бұл жағдайда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы *абсолют жинақты* деп аталады.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$$

интегралы абсолют жинақты. Шынында да $x \geq 1$ теңсіздігін қанағаттан-дыратын барлық $x-$тер үшін

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3},$$

ал

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^b = \frac{1}{2}\cdot$$

Олай болса $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ интегралының жинақтылығы шығады.

10.5.2. Екінші текті меншіксіз интегралдар

Айталық $y = f(x)$ функциясы $[a;b)$ жартылай интервалында анықталсын. Егер $y = f(x)$ функциясы $x = b$ нүктесінің кез келген аймағында шектелмеген, бірақ осы жартылай интервалдың ішінде жатқан кез келген кесіндіде шектелген болса, онда мұндай нүктені ерекше нүкте деп атаймыз.

Айталық $y = f(x)$ функциясы $[a;b)$ жартылай аралығында шектелмеген, бірақ $[a;b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, түріндегі кез келген кесіндіде интегралданатын болсын.

Анықтама. Егер

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

шегі бар болса, онда ол шекті шектелмеген $y = f(x)$ функциясының *екінші текті меншіксіз интегралы* деп атайды да, былай жазады:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \cdot \qquad (10.11)$$

Осыған ұқсас, егер $x = a$ нүктесі ерекше нүктесі болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \ , \qquad (10.12)$$

ал $x = c$ нүктесі $[a;b]$ кесіндісінің ерекше нүктесі болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (10.13)$$

екінші текті меншіксіз интегралдары анықталынады.

Ескерту! (10.13) теңдік оң жағындағы меншіксіз интегралдардың екеуі де бар болған жағдайда ғана орындалады.

Мысалы. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ интегралын зерттелік. Интеграл астындағы $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының $[1;0]$ кесіндісінде жалғыз $x = 0$ ерекше нүктесі бар. Сондықтан

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln \varepsilon = +\infty$$

Сонымен $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ меншіксіз интегралы жинақсыз екен.

10.6. Анықталған интегралды жуықтап есептеу

Анықталған интегралдарды интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясы белгілі болған жағдайда Ньютон-Лейбниц формуласы арқылы есептеу өте ыңғайлы.

Алайда, көп жағдайда интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясы элементарлық функциялар арқылы өрнектеле бермейді немесе ол күрделі түрде беріледі. Осындай жағдайларда анықталған интегралды жуықтап есептеу формулалары пайдаланылады. Бұл формулалар-ды пайдаланудың негізгі идеясы мынада: интеграл астындағы функция, интегралы тікелей Ньютон-Лейбниц формуласы арқылы есептелінетін қарапайым функциялармен (мысалы, көпмүшелікпен) алмастырылады.

10.6.1. Тіктөртбұрыштар формуласы

Айталық $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз $y=f(x)$ функциясы беріліп,

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралын есептеу қажет болсын. Ол үшін $[a;b]$ кесіндісін $a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b$ нүктелері арқылы бірдей етіп n – бөлікке бөлелік. Олардың ұзындығы

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

болсын. $y=f(x)$ функциясының $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ нүктелеріндегі мәндерін $y_0,y_1,y_2,\ldots y_n$-дермен белгілейік те, мынадай қосындылар құралық:

$$y_0\Delta x+y_1\Delta x+\ldots+y_{n-1}\Delta x,$$

$$y_1\Delta x+y_2\Delta x+\ldots+y_n\Delta x.$$

Бұл қосындылар

$$\int_a^b f(x)dx$$

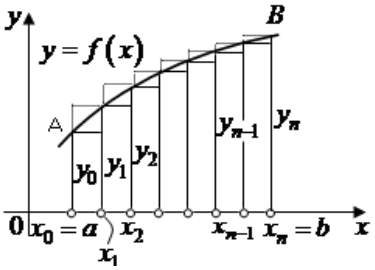
интегралының жуық мәнін береді, яғни

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right), \qquad (10.14)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right). \qquad (10.15)$$

(10.14) мен (10.15) жуық теңдіктері *тіктөртбұрыштар формуласы* деп аталады.

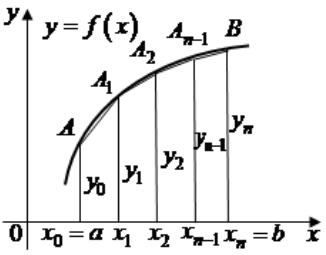
Егер $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде оң және өспелі болса, онда (10.14) формула $aABb$ қисық сызықты трапецияның ішінде, ал (10.15) формула сол трапеция сыртында жататын баспалдақты фигуралардың аудандарын береді (10.3-сурет).



10.3-сурет

10.6.2. Трапеция формуласы

Егер $y = f(x)$ қисығын баспалдақты сызықтармен емес, іштей сызылған сынық сызықтармен алмастырсақ, онда анықталған интегралдың мәні (10.14) немесе (10.15) формулалары мен салыстырғанда дәлірек есептелетініне ешқандай күмән жоқ. Бұл жағдайда $aABb$ қисық сызықты трапециясының ауданын жоғары жағынан $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$ хордаларымен шектелген трапециялардың аудандарымен ауыстыруға болады (10.4-сурет). Бірінші трапецияның ауданы



10.4-сурет

$$\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x,$$

екіншісінің ауданы

$$\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x, \text{ т.с.с.}$$

Олай болса

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} - y_n}{2}\Delta x$$

немесе

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \quad (10.16)$$

(10.16) жуық теңдігін *трапеция формуласы* деп атайды.

10.6.3. Парабола немесе Симпсон формуласы

Анықталған интегралдарды жуықтап есептеудің тағы бір әдісіне тоқталайық. Алдыңғы тақырыптағы сынық сызықтардың орнына параболаның бөліктерін алайық. Негізгі жуықтау формуласын алу үшін, алдымен бірнеше тұжырымдарды дәлелдейік.

Бірінші лемма. Абциссалары әртүрлі кез келген $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ және $M_3(x_3,y_3)$ нүктелері арқылы

$$y = ax^2 + bx + c \quad (10.17)$$

түріндегі жалғыз ғана парабола өтеді.

Дәлелдеу. a,b,c белгісіз коэффициенттерін табу үшін берілген M_1, M_2, M_3 нүктелерінің координаталарын (10.17) теңдеудегі x пен y −тің орнына қойып

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{cases} \qquad (10.18)$$

жүйесін аламыз. Бұл жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$$

нөлден өзгеше, себебі шарт бойынша x_1, x_2, x_3 сандары әртүрлі. Олай болса (10.18) жүйенің жалғыз ғана шешімі бар. Бірінші лемма дәлелденді.

Екінші лемма. $M_1(-h, y_1)$, $M_2(0, y_2)$, $M_3(h, y_3)$ нүктелерінен өтетін

$$y = ax^2 + bx + c$$

параболасымен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданы

$$S = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

формуласы арқылы есептелінеді.

Дәлелдеу. Бұл жағдайда (10.18) жүйе мына түрде жазылады

$$\begin{cases} ah^2 - bh + c = y_1, \\ c = y_2, \\ ah^2 + bh + c = y_3. \end{cases}$$

Осыдан

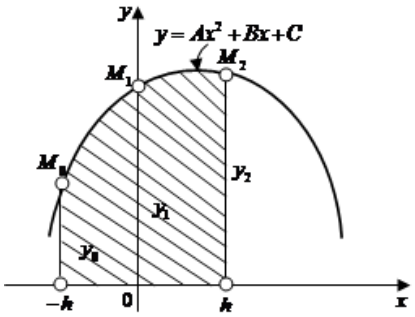
$$2ah^2 + 2c = y_1 + y_3.$$

Сондықтан

$$S=\int_{-h}^{h}\left(ax^2+bx+c\right)dx=\int_{-h}^{h}\left(ax^2+c\right)dx+b\int_{-h}^{h}xdx=$$

$$=2\int_{0}^{h}\left(ax^2+c\right)dx=2\left(\frac{ax^3}{3}+cx\right)\Bigg|_0^h=\frac{h}{3}\left(2ah^2+6c\right)=\frac{h}{3}\left(y_1+4y_2+y_3\right).$$

Екінші лемма дәлелденді. Енді $y=f(x)$ функциясының графигімен қоршалған қисық сызықты қарастыралық (10.5-сурет). $[a;b]$ кесіндісін бірдей етіп



10.5-сурет

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{2n-1}<x_n=b$$

нүктелері арқылы $2n$ бөлікке бөлейік. Әрбір үш

$$M_0M_1M_2,\ M_3M_4M_5,\ \ldots,\ M_{2n-2}M_{2n-1}M_{2n}$$

нүктелері арқылы өтетін параболалар жүргізейік. Сөйтіп, жоғары жағынан осы параболалармен шектелген қисық сызықты трапециялар аламыз. Екінші лемма бойынша $[x_{2k},x_{2k+2}]$ бөліктегі қисық сызықты трапецияның ауданы

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}}f(x)dx\approx\frac{b-a}{2n}\left(y_{2k}+4y_{4k+1}+y_{2k+2}\right),$$

мұндағы

$$y_k=f(x_k),\ 0\le k\le 2n.$$

Осы жуық теңдіктерді бір-біріне қосып,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}\right) \qquad (10.19)$$

жуық теңдігін аламыз. Немесе бұл жуық теңдікті ашып жазсақ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + y_{2n} + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2n}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + ...y_{2n-1}\right)\right] \qquad (10.20)$$

Осы (10.20) жуық теңдігін *парабола немесе Симпсон формуласы* деп атайды.

Жоғарыдағы үш тақырыпта қарастырылған анықталған интегралдарды жуықтап есептеу формулаларын қолданып

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

интегралының жуық мәндерін табалық. $[1;2]$ кесіндісін бірдей етіп он бөлікке бөлелік. Сонда,

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$$

болады. Төмендегі кестені құралық.

10.1-кесте

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
$x_0 = 1{,}0$	$y_0 = 1{,}00000$	$x_6 = 1{,}6$	$y_6 = 0{,}62500$
$x_1 = 1{,}1$	$y_1 = 0{,}90909$	$x_7 = 1{,}7$	$y_7 = 0{,}58824$
$x_2 = 1{,}2$	$y_2 = 0{,}83333$	$x_8 = 1{,}8$	$y_8 = 0{,}55556$
$x_3 = 1{,}3$	$y_3 = 0{,}76923$	$x_9 = 1{,}9$	$y_9 = 0{,}52632$
$x_4 = 1{,}4$	$y_4 = 0{,}71429$	$x_{10} = 2{,}0$	$y_{10} = 0{,}50000$
$x_5 = 1{,}5$	$y_5 = 0{,}66667$		

(10.14) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot \left(y_0 + y_1 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 7{,}18773 = 0{,}71877 \cdot$$

(10.15) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot \left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}\right) = 0{,}1 \cdot 6{,}68773 = 0{,}66877 \cdot$$

(10.16) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{1+0{,}5}{5} + 7{,}18773\right) = 0{,}69377 \cdot$$

(10.20) формула бойынша

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{3}\left[y_0 + y_{10} + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right)\right] =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left(1 + 0{,}5 + 2 \cdot 2{,}72818 + 4 \cdot 3{,}45955\right) = 0{,}69315 \cdot$$

Шын мәнінде бұл интегралдың жетінші таңбаға дейінгі дәлдікпен алынған мәні, яғни

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = ln\,2 = 0{,}6931472$$

санына тең.

Осы есептелінген мәндерді салыстыра отырып, мынадай қорытындыға келеміз: $[1;2]$ кесіндісін бірдей етіп он бөлікке бөлгенімізде

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

интегралының Симпсон формуласы бойынша бес таңбасы, трапеция формуласы бойынша үш, ал төртбұрыштар формуласы бойынша тек қана бір таңбасы сәйкес келеді екен.

Оныншы тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. $[a;b]$ кесіндісінде интегралданатын $y=f(x)$ функциясының анықталған интегралы деп нені айтамыз?

2. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{егер } x \text{ рационал сан болса,} \\ 0, \text{ егер } x \text{ иррационал сан болса,} \end{cases}$

функциясының интегралданбайтындығын дәлелдеңіз?

3. Өзі интегралданбайтын, бірақ квадраты интегралданатын функцияға мысал келтіріңіз?

4. Өздері интегралданбайтын, бірақ қосындысы интегралданатын екі функцияны табыңыздар?

5. $[a;b]$ кесіндісінде теріс емес функцияның интегралы теріс болуы мүмкін бе?

6. Жоғары шегі айнымалы интегралдың туындысы неге тең?

7. Ньютон – Лейбниц фомуласын жазыңыз.

8. Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласын жазыңыз.

9. Бөлшектеп интегралдау формуласын жазыңыз.

10. Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдар дегеніміз не? Олардың бір-бірінен айырмашылықтары қандай?

11. $[a, \infty)$ аралығы бойынша алынған меншіксіз интегралдың анықтамасын беріңіз.

12. Меншіксіз интеграл қашан жинақсыз болады?

13. Меншіксіз интегралдың геометриялық мағынасын баяндаңыз.

14. $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$ аралықтары бойынша алынған меншіксіз интеграл қалай анықталады?

15. Үзілісті функциядан алынған меншіксіз интегралының анықтамасын беріңіз.

16. Анықталған интегралды жуық есептеудің тіктөртбұрыштықтар формуласын жазыңыз.

17. Анықталған интегралды жуық есептеудің трапеция формуласын жазыңыз.

11 тарау. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ

11.1. Анықталған интегралдың қолдануларының жалпы схемасы

Геометрияның, механиканың, физиканың, химияның, биологияның және жалпы жаратылыстану ғылымдарының көптеген есептері интегралдық қосынды әдісін қолдану арқылы шешіледі. Нақтырақ айтқанда, қандайда бір шаманың мәнін табу үшін интегралдық қосынды құрып оның шегін есептеу қажет болады. Ол төмендегідей басқыштар арқылы орындалады.

1. Ізделініп отырған шаманы Q-мен белгілесек, онда оны өзінің кішкене бөлшектерінің қосындысы арқылы өрнектейді, яғни

$$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_k + \ldots \Delta Q_n.$$

2. ΔQ_k-ның мәні ізделініп отырған шамамен байланысты $f(x)$ функциясының ξ_k нүктесіндегі мәні $f(\xi_k)$ мен Δx_k-ның көбейтіндісі ретінде табылады, яғни

$$\Delta Q_k = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k,$$

мұндағы $\xi_k \in \Delta x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ал x_k - үзіліссіз $f(x)$ функциясының анықталу облысы болатын $[a,b]$ аралықты n бөлікке бөлгенде шығатын нүктелері.

3. Ізделініп отырған шама Q-дің жуық мәні жазылады:

$$Q \approx Q_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_k)\Delta x_k + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

4. Q_n интегралдық қосындының $n \to \infty$ дағы, немесе әрбір Δx_k-ның ұзындығы нөлге ұмтылғандағы шегі есептеледі. Бұл шектің мәні $f(x)$ функциядан $[a,b]$ аралық бойынша алынған анықталған интегралды береді.

Сонымен,

$$Q = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta x_k = \int_a^b f\left(x\right) dx.$$

Енді осы схема бойынша практикада жиі ұшырасатын геометриялық және механикалық шамаларды анықтауға көшелік.

11.2. Жазық фигуралардың аудандарын есептеу

а) Декарттық координаталар жүйесінде фигуралардың аудандарын есептеу.

Біз жоғарыда

$$y = f(x) \geq 0, \ x \in [a;b]$$

болған жағдайда, $y = f(x)$ қисығымен, Ox өсімен және $x = a$, $x = b$ түзулері мен шектелген фигураның ауданы

$$S = \int_a^b f(x) dx \tag{11.1}$$

интегралына тең болатындығын көрсеткенбіз.

Егер

$$f(x) \leq 0, \ x \in [a;b]$$

болса, онда

$$S = -\int_a^b f(x) dx \tag{11.2}$$

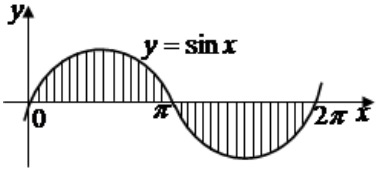
деп аламыз.

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде өзінің таңбасын бірнеше рет өзгертетін болса (яғни функцияның графигі біресе Ox өсінің жоғары, біресе төменгі жақтарында жатса), онда ауданды

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \tag{11.3}$$

формуласы арқылы есептейміз.

1-мысал. $y = \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$, синусоидасымен және Ox өсімен қоршалған жазық фигураның ауданын табалық (11.1-сурет).



11.1-сурет

$[0;\pi]$ кесіндісінде $f(x) \ge 0$, ал $[\pi, 2\pi]$ кесіндісінде $f(x) \le 0$. Олай болса (11.3) формула бойынша

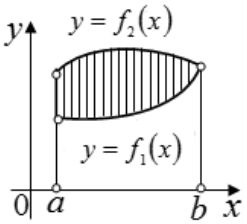
$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4 \text{ (кв. б)}.$$

Егер жазық фигура (11.2-сурет) жоғары жағынан теріс емес $y_2 = f_2(x)$ функциясының графигімен, ал төменгі жағынан теріс емес $y_1 = f_1(x)$ функциясының графигімен және бүйір жақтары $x = a, x = b$ түзулерімен қоршалған болса, онда оның ауданы

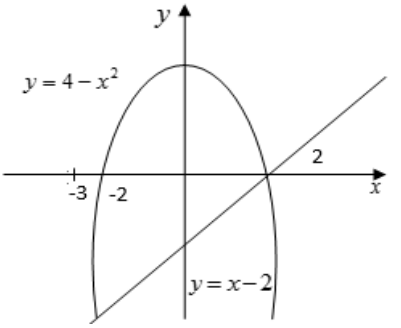
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad (11.4)$$

формуласы арқылы табылады.



11.2-сурет

2-мысал. $y = 4 - x^2$ параболасымен және $y = x - 2$ түзуімен шектелген жазық фигураның ауданын табалық (11.3-сурет).



11.3-сурет

а) Алдымен парабола мен түзудің қиылысу нүктелерін табалық. Ол үшін $4 - x^2 = x - 2$ теңдеуін шешеміз, яғни $x^2 + x - 6 = 0.$ Осыдан $x_1 = -3,\ \ x_2 = 2.$ Сонымен

$$S = \int_{-3}^{2}\left[4 - x^2 - (x-2)\right]dx = \int_{-3}^{2}\left(6 - x - x^2\right)dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2} = 12 - 2 - \frac{8}{3} - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9\right) =$$

$$= 7\frac{1}{3} + 13\frac{1}{2} = 20\frac{5}{6}$$ кв.бірлік.

ә) Теңдеуі параметрлік түрде берілген қисықтармен қоршалған фигуралардың аудандарын табу.

Айталық қисықтың теңдеуі

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t) \qquad (11.5)$$

параметрлік түрде берілсін. Мұндағы

$$\alpha \le t \le \beta,$$

ал

$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$$

(11.5) теңдеу $[a;b]$ кесіндісінде анықталған қандай да бір $y = f(x)$ функциясын береді. Олай болса, бұл функцияның графигімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$$

интегралына тең. Осы интегралда

$$x = \varphi(t)$$

алмастыруын жасасақ, онда

$$dx = \varphi'(t)dt$$

болады.

Демек,

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (11.6)$$

формуласын аламыз.

3-мысал. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипсімен шектелген жазық фигураның ауданын табалық. Ол үшін эллипстің жоғарғы бөлігімен шектелген фигураның ауданын тауып, оны екі еселесек болады. Бұл жағдайда x минус a −дан плюс a −ға дейін өзгеретін болғандықтан t, π −ден 0 −ге дейін өзгереді.

Демек, (11.6) формула бойынша

$$S = 2\int_\pi^0 b\sin t(-a\sin t)\,dt = -2ab\int_\pi^0 \sin^2 t dt = 2ab\int_\pi^0 \sin^2 t dt =$$

$$= 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_0^\pi = \pi ab \text{ (кв.б).}$$

б) Полярлық координаталар жүйесінде ауданды есептеу.

Егер қисық

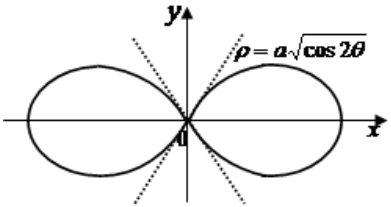
$$\rho = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta,$$

теңдеуі арқылы полярлық координаталар жүйесінде берілсе, онда осы қисықтың доғасымен және $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ радиус-векторлармен шектелген сектордың ауданы

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta \qquad (11.7)$$

формуласы бойынша есептеледі.

4-мысал. Лемниската деп аталатын қисықпен шектелген жазық фигураның ауданын табалық (11.4-сурет).



11.4-сурет

Лемнискатаның теңдеуі

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}\,,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

Демек, (11.7) формула бойынша

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta = \frac{4a^2}{2} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \text{ (кв.б).}$$

11.3. Қисық доғасының ұзындығын есептеу

1) Егер қисықтың теңдеуі декарт координаталар жүйесінде берілсе, яғни

$$y = f(x),\ a \le x \le b\,,$$

болса, онда ол қисықтың доғасының ұзындығы

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx \qquad (11.8)$$

формуласы арқылы табылады.

1-мысал. $x^2 + y^2 = R^2$ шеңберінің ұзындығын табалық. Ол үшін шеңбердің бірінші ширекте жатқан бөлігінің ұзындығын тауып, төрт еселесек жеткілікті.

Шеңбердің теңдеуінен

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\,.$$

Осыдан

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Демек,

$$l = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 4\int_0^R \frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 2\pi R.$$

2) Егер қисықтың теңдеуі параметрлік түрде берілсе, онда ол қисықтың доғасының ұзындығы

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt \cdot \qquad (11.9)$$

формуласы арқылы табылады.

2-мысал. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроидасының ұзындығын табалық. Бұл қисық, координаталар өстеріне қарағанда симметриялы болғандықтан, оның бірінші ширекте жатқан бөлігінің ұзындығын тауып, оны төрт еселесек жеткілікті. Бұл бөлікте параметр t нөлден $\frac{\pi}{2}$–ге дейін өзгереді. Астроиданың теңдеуінен

$$x'_t = \varphi'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,$$
$$y'_t = \psi'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$$

болатындығына көз жеткізу қиын емес. Демек, (11.9) формула бойынша

$$l_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4\cos^2 t}\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt = 12a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a\cdot$$

3) Егер қисықтың теңдеуі полярлық координаталар жүйесінде берілсе, онда ол қисықтың доғасының ұзындығы

$$l = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\rho'(\theta)\right]^2 + \left[\rho(\theta)\right]^2}\,d\theta \qquad (11.10)$$

формуласымен есептелінеді.

3-мысал. $\rho = a(1+\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$, кардиоидасының ұзындығын табалық.

$$l = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\, d\theta =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 8a \sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

11.4. Айналу денесінің көлемі

Айталық $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз $y = f(x)$ функциясы берілсін.

$$y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$$

сызықтарымен шектелген қисық сызықты трапецияны Ox өсінің бойымен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін табалық.

Ол үшін $[a;b]$ кесіндісін

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

нүктелері арқылы n бөлікке бөліп, әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ кесіндісінен ξ_k нүктелерін $(k = 1,2,\ldots,n)$ таңдап

$$\sum_{k=1}^{n} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k \qquad (11.11)$$

қосындысын құралық. Бұл қосындының әрбір қосылғышы биіктігі $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ал табанының радиусы $f(\xi_k)$ болатын цилиндрдің көлемін береді. Онда (11.11) қосынды қарастырылып отырған денеміздің жуық көлемін береді. $[a;b]$ кесіндісін неғұрлым ұсақ бөліктерге бөлген сайын (11.11) қосынды соғұрлым берілген дененің көлемін дәлірек сипаттайды. Осы айтылғандардан

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k \qquad (11.12)$$

болатынын аңғару қиын емес. Екінші жағынан (11.11) қосынды үзіліссіз

$$\varphi(x)=\pi f^2(x)$$

функциясы үшін интегралдық қосынды болады. Олай болса (11.12) теңдіктің оң жағындағы шек бар және ол

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

интегралына тең. Демек,

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (11.13)$$

Мысал. $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$ және $x=1$ сызықтарымен шектелген жазық фигураны Ox өсінің бойымен айналдырғанда пайда болатын дененің көлемін табалық. (11.13) формула бойынша

$$V_x=\pi\int_0^1\left(e^{-x}\right)^2dx=\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\approx 1{,}36 \text{ (куб.б).}$$

11.5. Доғаның статикалық моментін және ауырлық центрінің координаталарын табу

Жазықтықтағы материалдық қисық $y=f(x)$ теңдеуімен берілсін. $f(x)$ және $f'(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын делік. $[a,b]$ аралықты $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<\ldots<x_n=b$ нүктелері арқылы n бөлікке бөлейік. Бөлінген нүктелерде Ox өсіне перпендикулярлар тұрғызамыз. Онда $f(x)$ қисықтың $AB=l$ доғасы n ұсақ доғашаларға бөлінеді. Олардың ұзындықтарын

Δl_k -лар мен белгілейміз. Әрбір ұсақ доғаның массасын оның қандайда бір M_k нүктесінің массасымен ауыстырсақ, онда осы ұсақ доғалардың моменттерінің жуық өрнектерін анықтауға болады.

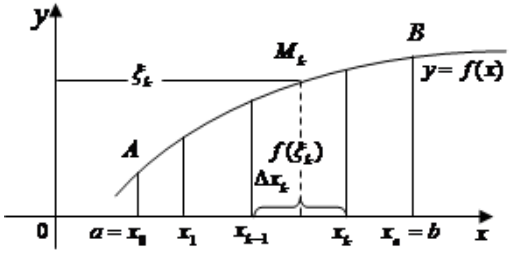
1-анықтама. Материалдық M_k нүктесінің Ox өсіне қарағандағы статикалық моменті деп оның массасымен Ox өсіне дейінгі ара қашықтығының көбейтіндісін айтады, яғни

$$\Delta M_k^x = \delta \Delta l_k f\left(\xi_k\right). \qquad (11.14)$$

Мұндағы δ - тұрақты тығыздық, $\delta\Delta l_k - M_k$ нүктесінің массасы, $f\left(\xi_k\right) - M_k$ нүктесінен Ox өсіне дейінгі арақашықтық.

M_k нүктесінің Oy өсіне қарағандағы статикалық моментін де осы сияқты анықтауға болады (11.5-сурет).

$$\Delta M_k^y = \delta \Delta l_k \xi_k. \qquad (11.15)$$



11.5-сурет

Бүкіл AB доғасының Ox өсіне қарағандағы статикалық моментінің жуық мәні, барлық ұсақ доғашалардың сәйкес моменттерінің қосындысы ретінде анықталады:

$$M_n^x = \sum_{k=1}^{n} \delta \Delta l_k f\left(\xi_k\right).$$

Осы сияқты

$$M_n^y = \sum_{k=1}^{n} \delta \Delta l_k \xi_k .$$

Соңғы теңдіктерде шекке көшу арқылы AB доғасының Ox өсіне қарағандағы статикалық моментінің

$$M_x = \delta \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx \qquad (11.16)$$

және Oy өсіне қарағандағы статикалық моментінің

$$M_y = \delta \int_a^b x \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} \, dx \qquad (11.17)$$

формулаларын аламыз.

2-анықтама. Материалдық AB доғасының қандайда бір $C(x, y)$ нүктесінің массасы доғаның бүкіл массасына тең болсын делік. Егер $C(x, y)$ нүкте массасының кез келген өске қарағандағы статикалық моменті AB доғасының сәйкес өске қарағандағы статикалық моментіне тең болса, онда $C(x, y)$ нүктені AB доғасының ауырлық центрі деп атайды.

2-анықтамадан ауырлық центрдің координаталарын табатын төмендегі формулалар шығады:

$$mx_c = M_y \Rightarrow x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad (11.18)$$

$$my_c = M_x \Rightarrow y_c = \frac{M_x}{m}. \qquad (11.19)$$

Соңғы теңдіктерде доғаның массасы m-нің орнына $m = \delta l$-ді, және M_x пен M_y-тердің мәндерін қойып, AB доғасының ауырлық центрі $C(x, y)$-тің координаталарын табатын төмендегі формулаларды аламыз:

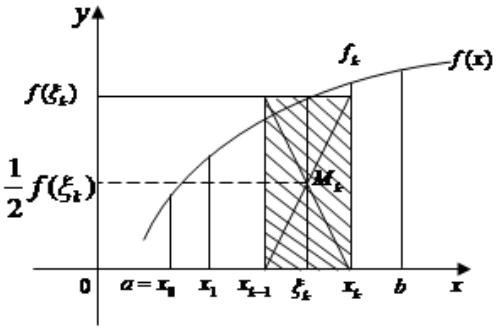
$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx}{l}; \qquad (11.20)$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}{l}. \qquad (11.21)$$

Мұндағы $l = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$

11.6. Жазық фигураның статикалық моментін және ауырлық центрінің координаталарын табу

Тұрақты δ тығыздыққа ие біртектес жазық фигура $y = f(x)$ функциясы, Ox өсі, $x = a$ және $x = b$ түзулерімен қоршалған болсын (11.6-сурет). $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын делік.



11.6-сурет

Бұл фигураны $x_{k-1}f_{k-1}f_kx_k$ қисық сызықты ұсақ ауданшаларға бөліп, оларды тіктөртбұрышты $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ ұсақ ауданшалармен алмастырамыз, мұндағы $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$. Әрбір ұсақ тіктөртбұрышты ауданшаның массасы $\delta\cdot f(\xi_k)\Delta x_k$-ған тең. Тіктөртбұрыштардың массаларын олардың геометриялық центрлеріндегі материалдық M_k нүктелердің массаларымен

алмастырамыз. Онда, k -ші ұсақ тіктөртбұрыштың Ox өсіне қарағандағы статикалық моменті:

$$M_k^x = \delta f(\xi_k)\Delta x_k \cdot \frac{1}{2} f(\xi_k).$$

Берілген қисық сызықты фигураның статикалық моменті барлық ұсақ тіктөртбұрыштықтардың статикалық моменттерінің қосындысына жуық тең болады.

$$M_k^x = \delta \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_k)\Delta x_k.$$

Осыған ұқсас, Oy өсіне қарағандағы статикалық моменттің жуық мәні

$$M_k^y = \delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k \ f(\xi_k)\Delta x_k$$

болады. Соңғы теңдіктерде шекке көшіп, жазық фигураның координата өстеріне қарағандағы статикалық моменттері үшін төмендегі формулаларды аламыз:

$$M_x = \frac{\delta}{2}\int_a^b y^2 dx, \qquad (11.22)$$

$$M_y = \delta \int_a^b x\, y\, dx. \qquad (11.23)$$

Ауырлық центрінің координаталарын алдыңғы тақырыптағыға ұқсас анықтаймыз.

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \ \ y_c = \frac{M_x}{m} \qquad (11.24)$$

M_x, M_y-тердің орнына (11.22), (11.23)-формулалардағы мәндерін қоямыз. Онда:

$$x_c = \frac{\int_a^b xydx}{S}, \qquad (11.25)$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2 \cdot S} \qquad (11.26)$$

Мұндағы $S = \int_a^b y dx.$

11.7. Инерция моменттері

1-анықтама. m массалы материалдық нүктенің қандайда бір өске қарағандағы инерция моменті деп оның массасының өске дейінгі ара қашықтығының квадратына көбейтіндісін айтады, яғни

$$J = mr^2.$$

δ тығыздыққа ие материалдық доғаның Ox өсіне қарағандағы инерция моменті

$$J_x = \delta \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

ал Oy өсіне қарағандағы инерция моменті

$$J_y = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

формулалары арқылы табылады.

Тығыздығы δ болатын жазық фигураның Ox өсіне қарағандағы инерция моменті

$$J_x = \delta \int_c^d y^2 x dy,$$

ал Oy өсіне қарағандағы инерция моменті

$$J_y = \delta \int_a^b x^2 y dx$$

формулалары арқылы табылады.

Он бірінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтай-тын сауалдар

1. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасын айтыңыз.
2. Жазық фигураның ауданын табу формуласын жазыңыз.
3. $[a,b]$ кесіндіде таңбалары әр түрлі функциядан алынған анықталған интегралмен сәйкес жазық фигуралар арасында қандай байланыс бар?
4. Теңдеулері параметрлі түрде берілген қисықтармен қоршалған жазық фигураның ауданын табу формуласын жазыңыз.
5. Жазық фигураның абсцисса өсін айналғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табу формуласын жазыңыз.
6. Жазық фигураның ордината өсін айналғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табу формуласын жазыңыз.
7. Доғаның статикалық моменті және ауырлық центрінің координаталарын анықтаңыз.
8. Жазық фигураның статикалық моментін және ауырлық центрін анықтаңыз.
9. Инерция моменттерінің формулаларын жазыңыз.

12 тарау. КӨП АЙНЫМАЛЫНЫҢ ФУНКЦИЯЛАРЫ

12.1. Екі айнымалының функциясы, оның анықталу облысы және графигі

Жаратылыстану ғылымдарының, экономиканың және т.б. салалардың көптеген мәселелері көп айнымалы шамалардың функцияларына мысал болады. Бірақ мұндай тәуелділіктерді зерттегенде, үйренуге жеңіл болу мақсатында, айнымалы шамалардың бір бөлігін тұрақты деп қабылдап, бір, екі және т.с.с. айнымалы шамалардың функциясына келтіреді. Бір айнымалының функциясы ұғымы мен оның дифференциалдық және интегралдық есептерін алдыңғы тарауларда қарастырдық. Енді екі айнымалы шаманың функциясы ұғымы мен оның дифференциалдық есептерін қарастыралық.

Негізгі ұғымдар

x, y айнымалыларының қосағы, яғни (x, y) мәндерінен тұратын жиынды D арқылы, ал айнымалы z-тің нақты мәндерінен тұратын жиынды Z арқылы белгілейік.

1-анықтама. Егер x, y екі тәуелсіз айнымалының әрбір қосағына, яғни $(x, y) \in D$ мәніне айнымалы z-тің тек бір ғана мәні сәйкес келсе, онда z шамасы x, y тәуелсіз шамаларының *функциясы* деп аталады және $z = f(x, y)$ арқылы белгіленеді.

Мұндағы D жиыны функцияның *анықталу облысы* деп, ал Z функцияның *өзгеру облысы немесе мәндерінің жиыны* деп аталады.

Екі айнымалы функциясының анықталу облысы бүкіл жазықтық немесе оның қандайда бір бөлігі болуы мүмкін. Берілген облысты жазықтықтан бөліп тұратын сызық оның шекарасы деп аталады.

Облыстың ішінде орналасқан, оның шекарасында жатпайтын нүктелерді облыстың *ішкі нүктелері* деп атайды. Тек қана ішкі нүктелерден құралған облыс *ашық облыс* деп аталады.

Егер облысқа оның шекарасының нүктелері де енсе, онда ол *тұйық облыс* деп аталады.

Егер облыстың кез келген M нүктесі үшін $|OM| < C$ теңсіздігі орындалса, онда ол *шектелген облыс* деп аталады (мұндағы O-координаталар бас нүктесі, C-тұрақты сан).

Бір айнымалының функциясына ұқсас, екі айнымалының функциясы да аналитикалық (формуламен) әдісте, кесте әдісінде, тағы басқа әдістерде берілуі мүмкін. Біз көбінесе аналитикалық әдістермен берілген функцияларды қарастырамыз.

Аналитикалық әдіспен берілген функцияларды зерттеу оның анықталу облысын табудан басталады.

1-мысал. $z = 3x - 2y$ функциясының анықталу облысын табалық.

Шешуі. $3x - 2y$ өрнек x пен y-тің кез келген мәнінде нақты мәнге ие, яғни берілген функцияның анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болады.

2-мысал. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функциясының анықталу облысын табалық.

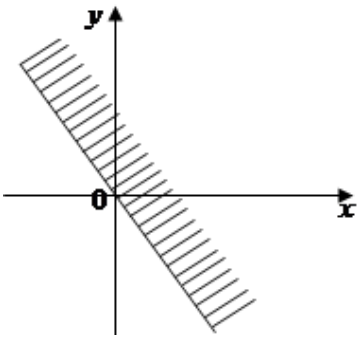
Шешуі. z нақты мәнге ие болуы үшін түбір астындағы өрнек теріс сан болмауы қажет, яғни

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

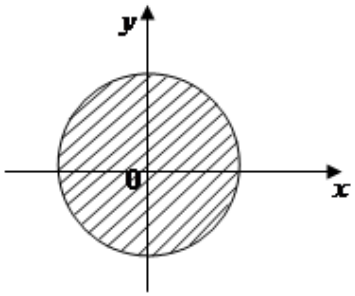
теңсіздігі орындалуы тиіс.Осыдан

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын $M(x, y)$ нүктелер жиыны центрі координаталар жүйесінің бас нүктесінде жататын, ал радиусы бірге тең дөңгелектің іші мен оның шекарасы (12.1-сурет).



12.1-сурет



12.2-сурет

3-мысал. $z=\ln(x+y)$ функциясының анықталу облысын табалық.

Шешуі. Логарифм ұғымы тек қана оң сандар үшін анықталғандықтан $x+y>0$ болуы қажет. Бұл теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны жарты жазықтықты құрайды (12.2-сурет). Бұл арада $y=-x$ түзуінің нүктелер жиыны функцияның анықталу облысына енбейді.

Біз, бұрын бір айнымалының функциясының графигі жалпы жағдайда жазықтықтағы қандай да бір қисық болатындығымен танысқан едік. Ал, $z=f(x,y)$ екі айнымалының функциясының графигі жалпы жағдайда кеңістіктегі қандай да бір бет болады. Аналитикалық геометрия бөлімінде кейбір екі айнымалы функциялардың графиктері және оларды салудың қима әдісі баяндалған болатын. $z=f(x,y)$ функциясының графигін салу дегеніміз кеңістіктегі денені жазықтықта кескіндеу болғандықтан, бір айнымалы функцияның графигіне қарағанда анағұрлым күрделілеу болып келеді. Сондықтан екі айнымалы функцияны зерттегенде және графигін құрғанда деңгей сызығы ұғымы пайдаланылады.

2-анықтама. $z=f(x,y)$ функциясының мәндері тұрақты C шамасына тең болатын Oxy жазықтығындағы барлық нүктелердің жиыны $z=f(x,y)$ функциясының *деңгей сызығы* деп аталады.

$f(x,y)=C$ теңдеуі деңгей сызығының теңдеуі, ал C деңгей деп аталады.

4-мысал. $z=x^2+y^2-1$ функциясының графигін салыңыз.

Шешуі. Z айнымалысы минус бірден кіші мәндерді қабылдамайды, яғни функция мәндерінің жиыны $[-1;+\infty[$ жартылай интервалы. $z=C, Oxy$ жазықтығына параллель жазықтықтардың теңдеуі. Берілген функцияның $z=C\geq -1$ жазықтықтарымен қимасында пайда болатын сызықтарды анықталық.

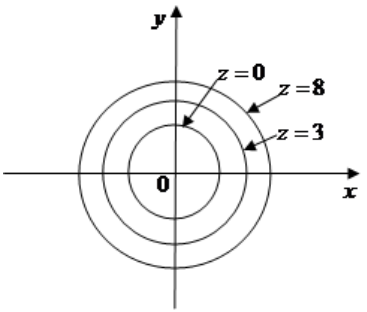
$z=-1$ болса, онда $x^2+y^2=0$, бұл $O(0;0)$ нүктесін анықтайды.

$z=0$ болса, онда $x^2+y^2=1$, бұл центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы бірге тең шеңбер.

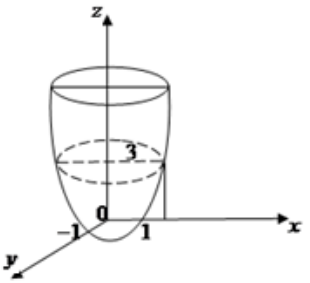
$z=3$ болса, онда $x^2+y^2=4$, бұл центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы екіге тең шеңбер.

$z=8$ болса, онда $x^2+y^2=9$, ол центрі координаталар бас нүктесінде жататын, радиусы үшке тең шеңбер.

Осы табылған теңдеулер берілген функция өрнектейтін бетпен сәйкес жазықтықтардың қимасының теңдеулері болады және олар деңгей сызықтарын анықтайды (12.3 – сурет).



12.3-сурет



12.4-сурет

Егер деңгей сызықтарын сәйкес жазықтықтарда орналастырсақ, онда $z=x^2+y^2-1$ функциясы параболоид деп аталатын бетті береді (12.4 – сурет).

12.2. Екі айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі

1-анықтама. Радиусы r-ге тең центрі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде жататын дөңгелектің ішінде орналасқан барлық $M(x,y)$ нүктелердің жиынын $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің r-*радиусты аймағы* деп атайды.

2-анықтама. Егер мейлінше аз, оң ε саны үшін $r>0$ саны табылып, $|MM_0|<r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $M(x,y)$ нүктелер үшін

$$|f(x,y\ )-A\ |<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесі $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ нүктесіне ұмтылғандағы *шегі* деп аталады және ол былай жазылады:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Мұндағы $|MM_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$.

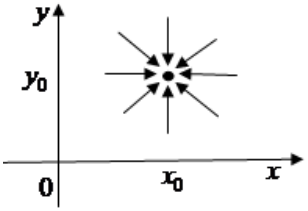
Мысалы, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ шегін есептелік.

Шешуі. $M(x,y)$ нүктенің $M_0(0,0)$ нүктеге ұмтылғандағы, немесе r нөлге ұмтылғандағы шекті есептейміз. Мұндағы $r=MM_0$ немесе $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Сонымен,

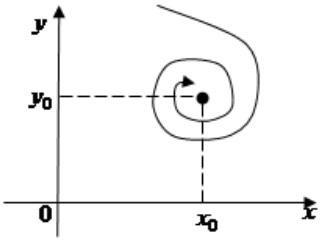
$$\lim_{M\to M_0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}{r^2+1-1}=2.$$

Екі айнымалы функциясы шегінің анықтамасы бір айнымалы функцияның нүктедегі шегінің анықтамасына ұқсас болғандықтан, олар үшін орындалатын барлық теоремалар екі айнымалы функциясының шегі үшін де орындалады. Дегенмен кейбір айырмашылықтарын да айта кетелік.

Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ және керісінше де орынды болатындығы белгілі. Ал $f(x,y)$ функциясының шегін қарастырғанымызда $M(x,y)$ нүктесі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіне шексіз көп бағыт бойынша (12.5-сурет) және күрделі траекториялармен де (12.6-сурет) ұмтылуы мүмкін.



12.5-сурет



12.6-сурет

Анықтама бойынша, $M(x,y)$ нүктесі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіне кез келген бағытта және кез келген траекториямен ұмтылғанда, функция бір, тек қана бір A санына ұмтылуы тиіс. Енді $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ шегінің болмайтындығын дәлелдейік. $M(x,y)$ нүктесі $O(0,0)$ нүктесіне $y=kx$ түзуінің бойымен ұмтылсын. Егер $y=kx$ болса, онда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Сонымен, шектің мәні түзудің бұрыштық коэффициентіне тәуелді болып қалды. Егер $k=1$ болса, шек $\dfrac{1}{2}$-ге тең; $k=2$ тең болса, шек $\dfrac{2}{5}$-ге тең және т.с.с.

Яғни $M(x,y)$ нүктесі $O(0,0)$ нүктесіне $y=kx$ түріндегі шексіз көп түзулердің бойымен ұмтылса, онда шек те әртүрлі мәндерді қабылдайды екен, онда берілген функцияның $O(0,0)$ нүктесіндегі шегі жоқ.

Енді функцияның нүктеде үзіліссіздігі ұғымын берелік.

Айталық $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі $f(x,y)$ функциясының анықталу облысында жатсын.

3-анықтама. Егер

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)= f(x_0,y_0) \tag{12.1}$$

теңдігі орындалса, онда $f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктеде *үзіліссіз* деп аталады. Мұндағы $M(x,y)$ нүктесі $M_0(x_0,y_0)$ нүктесіне $f(x,y)$ функциясының анықталу облысынан шықпайтын кез келген жолмен ұмтылады.

4-анықтама. Егер қандайда бір $N_0(x_0,y_0)$ нүктеде (12.1) теңдік орындалмаса, онда $N_0(x_0,y_0)$ нүктесі $f(x,y)$ функциясының *үзіліс нүктесі* деп аталады. (12.1) теңдік мынадай жағдайларда орындалмауы мүмкін:

1) $f(x,y)$ функциясы $N_0(x_0,y_0)$ нүктенің қандай да бір аймағының барлық нүктелерінде анықталғанымен $N_0(x_0,y_0)$ нүктесінің өзінде анықталмаған болса;

2) $f(x,y)$ функциясы $N_0(x_0,y_0)$ нүктесінің қандай да бір аймағының барлық нүктелерінде анықталғанымен

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \tag{12.2}$$

шегі жоқ болса;

3) $f(x,y)$ функциясы $N_0(x_0,y_0)$ нүктенің қандай да бір аймағының барлық нүктелерінде анықталған және (12.2) шек бар, бірақ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0).$$

12.3. Екі айнымалы функцияның дербес және толық өсімшесі

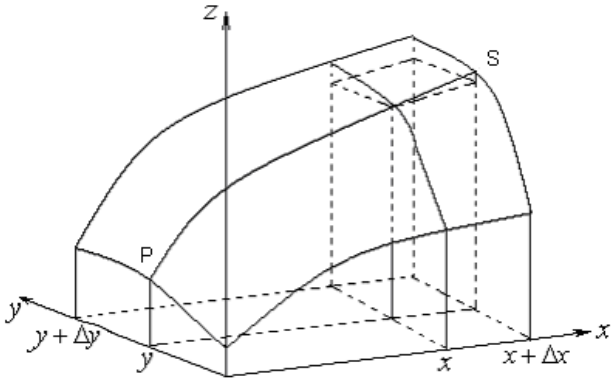
$z=f(x,y)$ беттің $y=const$ жазықтығымен қимасы болатын PS қисығын қарастырайық (12.7-сурет).

PS қисығының бойында $z = f(x, y)$ функциясы тек қана x –тің функциясы болады, себебі y тұрақты мән қабылдайды.

Айнымалы x-ке Δx өсімше берелік. Онда z-те өсімше алады, оны z-тің x бойынша дербес өсімшесі деп атайды да $\Delta_x z$ пен белгілейді. Сонда

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Осыған ұқсас, $z = f(x, y)$ беттің $x = const$ жазықтығымен қимасын қарастырып, y-ке өсімше берсек, z -те у-ке тәуелді өсімше алады, оны z-тің y бойынша дербес өсімшесі деп атайды да $\Delta_y z$ пен белгілейді.



12.7-сурет

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Егер x-ке Δx өсімше, y-ке Δy өсімше берсек, онда функция Δz толық өсімшесін алады, яғни

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Ескерту! Жалпы жағдайда $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

12.4. Екі айнымалы функцияның дербес туындылары

1-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының x бойынша *дербес туындысы* деп оның x бойынша дербес өсімшесі $\Delta_x z$ -тің Δx өсімшеге қатынасының Δx нөлге ұмтылғандағы шегін айтады және ол былай белгіленеді:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ f'_x(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x.$$

Сонымен, анықтама бойынша,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Осы сияқты z функциясының y бойынша дербес туындысы төмендегідей табылады:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Дербес туындының анықтамасынан, оны есептеудің жай туындыны есептеуден ешқандай айырмашылығы жоқ екені көрініп тұр. Басқаша айтқанда, $\frac{\partial z}{\partial x}$ туындыны тауып болғанша y айнымалысын тұрақты деп есептесек, $z = f(x, y)$ функциясы тек қана x-тің функциясы, ал x айнымалысын тұрақты деп қарасақ, онда $z = f(x, y)$ функциясы тек қана у-тің функциясы болады. Олай болса дербес туындыларды табу үшін бір айнымалының функциясын дифференциялдау ережелері пайдаланылады.

1-мысал. $z = x^2 - 3xy + 4xy^2$ функциясының дербес туындыларын табалық.

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y + 4y^2;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8yx.$$

2-мысал. $z = \sqrt{x + 3y}.$

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2\sqrt{x+3y}}.$$

3-мысал. $z = arctg\,\frac{y}{x}.$

Шешуі.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

12.5. Екі айнымалы функцияның толық дифференциалы

Бір айнымалының функциясының дифференциалы функция өсімшесінің бас бөлігі ретінде немесе Δx-ке сызықты тәуелді қосылғыш ретінде анықталғаны белгілі. Сол сияқты екі айнымалының функциясының дифференциалы да анықталады.

$z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі анықтама бойынша

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (12.3)$$

$f(x, y)$ функциясы қарастырылып отырған (x, y) нүктеде үзіліссіз дербес туындыларға ие болсын деп ұйғарайық. (12.3) теңдікті төмендегіше түрлендірелік

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \qquad (12.4)$$

Квадрат жақшалардағы өрнектерге Лагранж теоремасын қолданалық.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad (12.5)$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y, \quad (12.6)$$

Мұндағы $x < \bar{x} < x + \Delta x, \quad y < \bar{y} < y + \Delta y$.

(12.5), (12.6) теңдіктерді (12.4) теңдікке қойсақ

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (12.7)$$

Дербес туындылар үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Соңғы теңдіктерді төмендегіше жазуға болады:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_1, \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \varepsilon_2. \quad (12.9)$$

(12.8), (12.9) теңдіктерді есепке алып (12.7) теңдікті төмендегіше жазамыз.

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \quad (12.10)$$

Мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$-лер Δx және Δy-тер нөлге ұмтылғанда нөлге ұмтылатын шексіз аз шамалар. (12.10) теңдіктегі соңғы екі қосылғыш $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ шамасына қарағанда жоғары ретті

шексіз аз шамалар. Шынында да, егер $\rho \to 0,$ онда $\frac{\varepsilon_1 \Delta x}{\rho} \to 0,\ \frac{\varepsilon_2 \Delta y}{\rho} \to 0,$ себебі $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \le 1,\ \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \le 1,$ ал $\varepsilon_1, \varepsilon_2$-лер шексіз аз шамалар.

1-анықтама. Егер $z = f(x, y)$ функциясының қандайда бір $M(x, y)$ нүктесіндегі өсімшесі (12.10) формула түрінде өрнектелетін болса, онда $f(x, y)$ функциясы осы нүктеде дифференциалданатын функция деп аталады.

2-анықтама. Функцияның дербес туындыларының сәйкес тәуелсіз айнымалыларының өсімшелеріне көбейтінділерінің қосындысы, яғни

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y, \tag{12.11}$$

$z = f(x, y)$ функциясының *толық дифференциалы* деп аталады.

Функцияның туындысы сияқты оның дифференциалының мәндері де әр бір нүктеде әртүрлі.

Мысалы. $z = \frac{x}{y}$ функциясының толық дифференциалының: а) $(0;2)$ ә) $(1;1)$ нүктелердегі мәндерін табайық:

Шешуі:

а) $dz\Big|_{\substack{x=0\\y=2}} = \left(\frac{1}{y}\cdot\Delta x - \frac{x}{y^2}\Delta y\right)_{\substack{x=0\\y=2}} = \frac{1}{2}\Delta x;$

ә) $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left(\frac{1}{y}\cdot\Delta x - \frac{x}{y^2}\Delta y\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = \Delta x - \Delta y.$

Тәуелсіз айнымалылардың $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін олардың дифференциалдары деп атап, сәйкесінше dx, dy-тар мен белгілесек, онда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{12.12}$$

Сонымен, егер $z = f(x, y)$ функциясы үзіліссіз дербес туындыларға ие болса, онда ол $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданады және оның толық дифференциалы (12.12) формуламен өрнектеледі.

Функцияның толық дифференциалы жуық есептеулерде мынадай алгоритмде қолданылады:

1) берілген өрнек $f(x, y)$ функциясының $P(a, b)$ нүктесіндегі жуық мәні ретінде өрнектеледі;

2) $P(a, b)$ нүктесіне жақын және $f(x_0, y_0)$-ді есептеу жеңіл болатын $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі таңдалынады;

3) $f(x_0, y_0)$ мәні есептелінеді;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ дербес туындылары табылады;

5) табылған мәндер

$$f(a,b) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0 y_0)(b - y_0) \tag{12.13}$$

жуық теңдігі арқылы есептелінеді.

Мысалы. $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$ мәнін жуықтап есептелік.

Шешуі. 1) $f(x, y) = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ функциясын қарастырамыз, $a = 1{,}97$; $b = 1{,}02$.

2) $x_0 = 2, y_0 = 1$ нүктесін таңдаймыз;

3) $f(x_{0,} y_0\ ) = f(2{,}1\ ) = arctg1 = \frac{\pi}{4}$;

4) $f'_x(x, y) = \frac{y}{y^2 + (x - y)^2}$; $f'_x(x, y) = -\frac{x}{y^2 + (x - y)^2}$;

$f'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{2}$; $f'_y(x_0, y_0) = -1$; $a - x_0 = -0{,}03$; $b - y_0 = 0{,}02$.

Онда (12.13) формула бойынша

5)

$$arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)\approx arctg1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}03-0{,}02=\frac{\pi}{4}-0{,}015-0{,}02\approx 0{,}75.$$

Функцияның толық дифференциалы қателіктерді бағалауда да қолданылады.

Айталық u айнымалысы x, y айнымалылардың функциясы болсын, яғни

$$u=f(x,y).$$

x, y шамаларды анықтағанда $\Delta x, \Delta y$ қателіктер жіберілген болсын делік. Онда аргументтердің жуық мәндерімен есептелген u -дың мәні

$$\Delta u=f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\ \right)-f\left(x, y\ \right)$$

қателікпен анықталады. Енді сол қателікті бағалайық. $\Delta x, \Delta y$ -тердің өте аз мәндерінде толық өсімшені толық дифференциалмен жуық алмастыруға болады:

$$\Delta u\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Мұндағы дербес туындылардың мәндерімен $\Delta x, \Delta y$ -тердің мәндерінің қателіктері оң немесе теріс сандар болуы мүмкін. Онда $|\Delta u|$ -дың бағасы үшін келесі теңсіздікті жазамыз.

$$|\Delta u|\le\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|\cdot$$

Егер $|\Delta_M u|,\ |\Delta_M x|,\ |\Delta_M y|$ -лар мен абсолюттік қателіктердің максимум-дарын яғни шектік мәндерін белгілесек, онда былай жазуға болады

$$|\Delta_M u|\approx\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\ |\Delta_M x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta_M y|. \qquad (12.14)$$

12.6. Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау

Екі айнымалының $z = f(x, y)$ функциясы берілсін. Бұл функцияның аргументтері x пен y тәуелсіз айнымалы t-ның функциялары болсын, яғни $x = x(t)$, $y = y(t)$. Онда z бір тәуелсіз айнымалы t-ның күрделі функциясы болады. Осы z-тің t бойынша туындысы, яғни $\frac{dz}{dt}$-ны табу есебін қарастырайық. Бұл есепті шешу үшін $x(t)$, $y(t)$ функцияларының t нүктесінде туындылары бар болсын, ал $z = f(x, y)$ функциясы сәйкес $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданатын болсын деп ұйғарамыз.

t-ға Δt өсімше береміз. Онда x және y айнымалылары да сәйкес Δx және Δy өсімшелерін алады, ал $z = f(x, y)$ функциясы Δz өсімшесін алады. z функциясы дифференциалданатын болғандықтан оның толық өсімшесі Δz-ті төмендегіше жазуға болады:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y), \qquad (12.15)$$

мұнда $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho} = 0$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

(12.15) формуланың екі жағын Δt-ға бөліп, Δt-ны нөлге ұмтылдырып шекке көшеміз.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t}. \qquad (12.16)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t} \cdot$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

x және y функциялары Δt бойынша дифференциалданатын болғандық-тан, олар үзіліссіз болады, онда $\Delta t\to 0$ да $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$. Олай болса, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon}{\rho}=0\cdot$

Сонымен,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta t}=0\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=0\cdot$$

Соңғы теңдікті есепке алсақ (12.16) формула төмендегіше жазылады.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (12.17)$$

(12.17) формуланы t-ның күрделі функциясы z-тен t бойынша алынған туындының формуласы деп атайды.

Енді $z=f(x,y)$ функциясында $y=y(x)$ болған жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда айнымалы z тек қана бір x-тің функциясы болады $z=f(x,y(x))$. Сондықтан, бұл жағдайда соңғы формула былай жазылады

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

$\frac{dx}{dx}=1$ болғандықтан,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (12.18)$$

(12.18) формуланың сол жағында да, оң жағында да z-тен x бойынша алынған туындылар тұр. Мұндағы $\frac{\partial z}{\partial x}$-екі айнымалының функциясы $z=f(x,y)$-тен x бойынша алынған

дербес туынды, яғни y-ті уақытша тұрақты деп қабылдап x бойынша алынған туынды, ал сол жағындағы $\frac{dz}{dx}$-бір айнымалының күрделі функциясы $z = f\left(x, y(x)\right)$-тен алынған туындының мәнін береді. Сондықтан (12.18) формуламен анықталатын туындыны толық туынды деп атайды.

Енді $z = F(u, \vartheta)$ функциясындағы u және ϑ-лар тәуелсіз айнымалы x және y-тердің функциясы болсын:

$$u = \varphi(x, y), \quad \vartheta = \psi(x, y).$$

Бұл жағдайда z тәуелсіз айнымалы x және y-тердің күрделі функциясы болады (u мен ϑ - аралық аргументтер).

(12.17) формуланы қолданып $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларды табамыз. Ол үшін (12.17) формуладағы $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}$ және $\frac{dy}{dt}$-лардың орнына $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ дербес туындыларды аламыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \qquad (12.19)$$

Осыған ұқсас $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туынды да табылады:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}. \qquad (12.20)$$

Енді айқындалмаған функцияны дифференциалдау ережесін қарасты-райық.

Кез келген

$$F(x, y) = 0 \qquad (12.21)$$

теңдеуі айқындалмаған функцияны анықтай бермейтіндігін 5-тарауда нақты мысалдармен талдаған едік. $F(x, y)$ функциясы

қандай шарттарды қанағаттандырғанда (12.21) теңдеуі жалғыз айқындалмаған функцияны анықтайды деген заңды сұраққа келесі теорема жауап береді.

Теорема. Егер $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$ және $F'_y(x,y)$ функциялары қандай да бір $M_0(x_0,y_0)$ нүктенің аймағында анықталған және үзіліссіз, ал осы нүктеде $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ болса, онда (12.21) теңдеу x_0-дің аймағында үзіліссіз, дифференциалданатын жалғыз $y=y(x)$ айқындалмаған функцияны анықтайды және y-тен x бойынша алынған туынды төмендегі формула арқылы табылады

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (12.22)$$

Дәлелдеу. $F(x,y)$ функциясында $y=y(x)$ болғандықтан (12.18) формуланы қолданамыз

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

(12.21) бойынша $F(x,y)$ функциясы нөлге тепе-тең болғандықтан оның толық туындысы да нөлге тең болады, яғни

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

(12.22) теңдік дәлелденді.

Енді $F(x,y,z)=0$ теңдеуін қарастыралық. Егер $\frac{\partial z}{\partial x}$ дербес туындысын тапқымыз келсе, онда y -ті тұрақты деп есептейміз. Бұл жағдайда (12.22) формуланы қолдануға болады, яғни

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (12.23)$$

Осы сияқты

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (12.24)$$

(12.23) және (12.24) теңдіктерде $F'_z(x,y,z)\neq 0$ деп ұйғарылады.

12.7. Жоғары ретті дербес туындылар

$z=f(x,y)$ екі айнымалының функциясы берілсін. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ дербес туындылар жалпы жағдайда x және y айнымалылардың функциялары болуы мүмкін. Сондықтан, олардың да дербес туындылары болуы мүмкін. Бұл жағдайда $z=f(x,y)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары төртеу болады, яғни

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Бұл арада мынадай заңды сұрақ туады. Дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау ретіне тәуелді ме? Басқаша айтқанда $f''_{xy}(x,y)$ және $f''_{yx}(x,y)$ туындылары өзара тең бе, жоқ па?

Бұл сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

Теорема. Егер $z=f(x,y)$ функциясы және оның $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ дербес туындылары $M(x,y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында анықталған және үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Дәлелдеуін тізімде келтірілген әдебиеттерден оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Екінші ретті дербес туындыларды дифференциалдау арқылы үшінші ретті дербес туындыларды аламыз, олардың саны 8-ге тең, яғни

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Осылайша $(n-1)$ -ретті дербес туындыларды дифференциалдау арқылы n -ретті туындыларды алуға болады.

12.8. Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласы

$z = f(x,y)$ функциясы және оның $(n+1)$-ретке дейінгі дербес туындылары қандайда бір $M(a,b)$ нүктенің аймағында үзіліссіз болсын. Онда бір айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласына ұқсас екі айнымалының функциясын $(x-a)$ мен $(y-b)$ айырмаларының дәрежелері және қандайда бір қалдық мүшенің қосындысынан тұратын n -ретті көпмүшелік түрінде өрнектеуге болады. Осы айтылғандарды $n=2$ болатын жағдайы үшін көрсетейік. Бұл жағдайда

$$\begin{aligned} f(x,y) &= A_0 + D(x-a) + E(y-b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2\right] + R_2, \end{aligned} \tag{12.25}$$

болады, мұндағы A_0, D, E, A, B, C -лар x және y -тен тәуелсіз коэффициенттер, ал R_2 -қалдық мүше.

$f(x,y)$ функциясында x -ті тұрақты десек, онда бір ғана y -тің функциясы үшін Тейлор формуласы төмендегідей болады

$$f(x,y)=f(x,b)+\frac{y-b}{1}\cdot f'_y(x,b)+ \\ +\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}f''_{yy}(x,b)+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{yyy}(x,\eta_1), \tag{12.26}$$

мұндағы $\eta_1=b+\theta_1(y-b),\ 0<\theta_1<1.$ $f(x,b), f'_y(x,b), f''_{yy}(x,b)$ функцияларды $(x-a)$-ның дәрежелері бойынша Тейлор формуласына жіктейміз.

$$f(x,b)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}\cdot f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xxx}(\xi_1,b), \tag{12.27}$$

мұндағы $\xi_1=x+\theta_2(x-a),\ 0<\theta_2<1;$

$$f'_y(x,b)=f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}\cdot f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2,b), \tag{12.28}$$

мұндағы $\xi_2=x+\theta_3(x-a),\ 0<\theta_3<1;$

$$f''_{yy}(x,b)=f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_3,b), \tag{12.29}$$

мұндағы $\xi_3=x+\theta_4(x-a),\ 0<\theta_4<1;$

(12.27), (12.28), (12.29) өрнектерді (12.26) формулаға қоямыз.

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}\cdot f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xxx}(\xi_1,b)+ \\ +\frac{y-b}{1}\left[f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}\cdot f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2,b)\right]+ \\ +\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\cdot\left[f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}\cdot f'''_{yyx}(\xi_3,b)\right]+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{yyy}(x,\eta_1).$$

Соңғы теңдіктің қосылғыштарын (12.25) формулаға ұқсас орналастырамыз:

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)f'_x(a,b)+(y-b)f'_y(a,b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 f''_{xx}+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b)+(y-b)^2 f''_{yy}(a,b)\right]+R_2 \tag{12.30}$$

(12.30) формула $n=2$ жағдайы үшін *Тейлор формуласы* деп аталады.

Мұндағы

$$R_2=\left[\frac{1}{3!}(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1,b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,b)+3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3,b)+\right.$$
$$\left.+(y-b)^3 f'''_{yyy}(a,\eta_1)\right]$$

қалдық мүше деп аталады. n-нің кез келген мәні үшін Тейлор формуласын осылайша анықтауға болады.

12.9. Бағыт бойынша алынған туынды. Градиент

$z=f(x,y)$ функциясының анықталу облысында жататын $M_0(x,y)$ нүктесін және бағыттаушы косинустары $\cos\alpha,\cos\beta=\sin\alpha$, $(\beta=90^\circ-\alpha)$ болатын l түзуін қарастырайық. l бағыты бойынша $M_0(x,y)$ нүктесі $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$ нүктесіне жылжыса, онда $z=f(x,y)$ функциясы $\Delta_l Z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ өсімшесін алады. Бұл өсімше $f(x,y)$ функциясының l бағыт бойынша өсімшесі деп аталады.

$$\Delta x=\Delta l\cos\alpha,\ \ \Delta y=\Delta l\cos\beta \tag{12.31}$$

болғандықтан

$$\Delta_l z=f(x+\Delta l\cos\alpha,y+\Delta l\cos\beta)-f(x,y) \tag{12.32}$$

1-анықтама. $z=f(x,y)$ функциясының l бағыт бойынша өсімшесі $\Delta_l z$ -тің Δl шамасына қатынасының Δl нөлге ұмтылғандағы шегі (егер ол бар болса), яғни

$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$, $z = f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша алынғын туындысы деп аталады және ол $\frac{\partial z}{\partial l}$ немесе z'_l арқылы белгіленеді.

$z'_l = \frac{\partial z}{\partial l}$ туындысы функцияның l бағыты бойыншы өзгеру жылдамдығын сипаттайды. Бұрын қарастырылған $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары $z = f(x, y)$ функциясының Ox және Oy өстеріне параллель бағыттары бойынша туындылары болады.

$\Delta_l z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ жуық теңдігін және (12.31) теңдіктерді ескерсек

$$\Delta_l z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\right)\Delta l.$$

Осыдан $\Delta x \to 0$ және $\Delta y \to 0$ шекке көшсек

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta \qquad (12.33)$$

теңдігі шығады, (12.33)-формула $z = f(x, y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысы деп аталады.

1-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясының $\bar{l} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ бағыты бойынша алынған туындысының $M(1;1)$ нүктедегі мәнін табыңыз.

Шешуі. $\bar{l}$ -дің бағыттаушы косинустарын табамыз.

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5};\ \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

(12.33) формула бойынша

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{4}{5}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{3}{5}=2x\cdot\frac{4}{5}+2y\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}(4x+3y)\cdot$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{2}{5}(4\cdot1+3\cdot1)=\frac{14}{5}.$$

2-анықтама. Координаталары $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ болатын ∇z вектор $z=f(x,y)$ функциясының градиенті деп аталады да, былай жазылады:

$$gradz=\nabla z=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

Теорема. $z=f(x,y)$ функциясынан $\bar{l}$ бағыты бойынша алынған туынды оның градиентінің $\bar{l}$ бағытындағы проекциясына тең.

Дәлелдеу. $\bar{l}=\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\cos\beta.$ ∇z векторымен $\bar{l}$ векторының скаляр көбейтіндісін табамыз.

$$\nabla z\cdot\bar{l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta,\ \text{немесе}\ \nabla z\cdot\bar{l}=\frac{\partial z}{\partial l}.$$

∇z пен $\bar{l}$ арасындағы бұрышты φ мен белгілесек:

$$|\nabla z|\cdot|\bar{l}|\cos\varphi=|\nabla z|\cos\varphi=\frac{\partial z}{\partial l};$$

немесе

$$\Pi p_{\bar{l}}\nabla z=\frac{\partial z}{\partial l}.$$

Егер векторлар бірдей бағытталса, онда скалярлық көбейтінді ең үлкен мән қабылдайтыны белгілі. Сондықтан

функцияның берілген нүктедегі градиентінің бағыты оның осы нүктедегі өзгеру жылдамдығының ең үлкен мәніне тең.

$z = f(x, y)$ функциясының градиентіне перпендикуляр бағыт бойынша алынған туынды нөлге тең.

Егер дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі градиентінің модулі нөлге тең болмаса, онда ол осы нүкте арқылы өтетін деңгей сызығына перпендикуляр болады.

12.10. Екі айнымалы функцияның экстремумы

$z = f(x, y)$ функциясы берілсін.

1-анықтама. Егер $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің қандай да бір аймағынан алынған барлық (x, y) нүктелері үшін $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ $[f(x_0, y_0) < f(x, y)]$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде төңіректік максимумға (минимумға) ие деп аталады.

$z = f(x, y)$ функциясының төңіректік максимумын және минимумын оның төңіректік экстремумы деп атайды.

1-теорема. Егер дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде төңіректік экстремумы болса, онда осы нүктеде функцияның дербес туындылары нөлге тең болуы $\left(f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0\right)$ немесе дербес туындылары болмауы қажет .

Дәлелдеу. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде функцияның төңіректік максимумы болсын делік. $z = f(x, y)$ функциясында $y = y_0$ деп, оны x-ке тәуелді бір айнымалының функциясы ретінде қарастырамыз. Теореманың шарты бойынша $f(x, y_0)$ функциясының $x = x_0$ нүктесінде максимумы болғандықтан

$$\left.\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0 \cdot$$

Осы сияқты $f'_y(x_0,y_0)=0$ теңдігі де дәлелденеді.

Функцияның төңіректік экстремумының қажеттілік шарты орындалатын нүктелер оның кризистік нүктелері деп аталады.

Екі айнымалының функциясын оның кризистік нүктелерінде зерттеу үшін экстремумның жеткілікті шарты деп аталатын төмендегі теореманы тұжырымдалық.

2-теорема. $z=f(x,y)$ функциясы үшін мынадай шарттар орындалсын: а) $f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің қандайда бір аймағында анықталған; ә) $f(x,y)$ функциясы үшін $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі кризистік нүкте болсын; б) $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінің аймағында функцияның үзіліссіз екінші ретті дербес туындылары бар болсын.

Егер $\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2 > 0$ және $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$нүктесінде $f(x,y)$ функциясының төңіректік максимумы, ал $\Delta>0$ және $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде $f(x,y)$ функциясының төңіректік минимумы болады. Ал егер $\Delta<0$ болса, онда $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінде төңіректік экстремум болмайды.

Бұл теореманың дәлелдеуін тізімде келтірілген оқулықтардан оқып алуды студенттердің өздеріне ұсынамыз.

Сонымен, $z=f(x,y)$ функцияны төңіректік экстремумға зерттеу мынадай алгоритм бойынша жүргізіледі:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары табылады.

2. $\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}$ жүйені шешіп функцияның кризистік нүктелері анықталады.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ екінші ретті дербес туындылары табылады.

4. Екінші ретті дербес туындылардың кризистік нүктелердегі мәндері есептеледі.

5. Δ-ның және z''_{xx}-тың таңбалары бойынша 2-теоремаға негізделіп тұжырым жасалады.

Мысалы: $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясын зерттейік.

1. $z'_x = 3x^2 - 3y,\ \ z'_y = 3y^2 - 3x;$

2. $\begin{cases}3x^2 - 3y = 0,\\ 3y^2 - 3x = 0\end{cases}$ жүйені шешіп, $(0;0), (1;1)$нүктелерді табамыз.

3. $z''_{xx} = 6x,\ z''_{yy} = 6y,\ z''_{xy} = -3;$

4. $z''_{xx}(0,0) = 0,\ z''_{yy}(0,0) = 0,\ z''_{xy}(0,0) = -3.\ z''_{xx}(1,1) = 6,\ z''_{yy}(1,1) = 6,\ z''_{xy}(1,1) = -3.$

5. $\Delta_1 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ болғандықтан $(0,0)$ нүктеде функцияның төңіректік экстремумы жоқ.

$\Delta_2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0;\ \ z''_{xx}(1,1) = 6 > 0$ болғандықтан (1, 1) нүктеде функцияның төңіректік минимумы болады.

$z = f(x, y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін оның анықталу облысының ішіндегі кризистік нүктелері табылады. Одан кейін функцияның облысты қоршап тұрған сызықтардағы (облыстың шекарасы) ең үлкен және ең кіші мәндерін тауып, оларды кризистік нүктелердегі функцияның мәндерімен салыстыру арқылы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері анықталады.

12.11. Шартты экстремум

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға келтірілетін көптеген практикалық есептерді қарастырғанда оның аргументтері толық тәуелсіз болмай, басқа бір қосымша шарттармен байланыста болуы (мысалы, қандай да бір теңдеуді қанағаттандыруы) мүмкін болатын жағдай жиі ұшырасады.

$z = f(x, y)$ функциясының аргументтері $\varphi(x, y) = c$ теңдеуді қанағаттандыратын төңіректік экстремумдарын табуды қарастырайық. $\varphi(x, y) = c$ байланыс теңдеуі деп аталады.

Байланыс теңдеуінен y-ті x арқылы өрнектеп, одан кейін y-тің мәнін $z = f(x, y)$-тегі y-тің орнына қойсақ, онда берілген функциядан шартты экстремумды табу бір аргументті функцияның төңіректік экстремумын табуға келтіріледі. Жалпы жағдайда байланыс теңдеуіндегі y-ті x арқылы айқын өрнектей алмауымыз да мүмкін. Онда келесі әдіс қолданылады.

Лагранж функциясы деп аталатын мынадай функция құрылады:

$$L(x, y, \lambda) = \lambda[\varphi(x, y) - c] + f(x, y)$$

Мұндағы, λ-Лагранж көбейткіші деп аталады.

$z = f(x, y)$ функциясының $\varphi(x, y) = c$ шартты қанағаттандыратын төңіректік экстремумын табу үшін

$$\begin{aligned} L'_x &= f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ L'_y &= f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda &= \varphi(x, y) - c = 0 \end{aligned}$$

жүйені шешіп (x, y) кризистік нүктені және λ-ны табамыз. Мұндағы λ–аралық байланыстырушы (көмекші) шама болып, ол кейінгі есептеулерде қатыспайды.

Соңғы жүйе екі айнымалының функциясының шартты экстремумын табу үшін қажеттілік шарт болады. Нақты есептің мағынасына сәйкес, табылған кризистік нүктеде функция сипаты тұжырымдалады.

12.12. Ең кіші квадрат әдісі

x пен y айнымалы шамалар арасындағы тәуелділікті анықтау үшін жүргізілген тәжірибенің нәтижелері мына кесте түрінде берілсін:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Осы нәтижелерді аналитикалық түрде көрсететін формулаларды анықтайық. Айталық, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2),\ldots,M_n(x_n, y_n)$ нүктелері қандай да бір түзудің маңайында орналасқан болсын делік. Бұл x пен y арасындағы тәуелділік $Y = ax + b$ түзуіне жақын деген сөз. Онда a мен b коэффициенттерді ұтымды табу арқылы берілген нүктелерге жақын өтетін түзуді анықтау қажет болады. Ол үшін берілген нүктелердің түзуден ауытқуы деп аталатын $Y_i - y_i$ шамаларды табамыз.

2-анықтама. $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2$ шамаға ең кіші мән беретін a және b шамаларын табу жолы ең кіші квадрат әдісі деп аталады.

x_i, y_i –лер тұрақты болғандығы себепті 2-анықтамадағы қосынды a мен b-ның функциясы болады, яғни

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 = F(a,b).$$

a мен b-ны табу үшін екі айнымалының функциясының төңіректік экстремумын табудың қажеттілік шартын пайдаланамыз:

$$\begin{cases} F'_a = 0, \\ F'_b = 0. \end{cases}$$

Сонда a мен b-ларды табу үшін мынадай жүйе шығады:

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0, \\ 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \quad (12.34)$$

Жүйеден табылған a мен b-ның мәндерінде $F(a,b)$ функциясының минимумы болатындығын екінші теоремаға негізделіп дәлелдеу қиын емес.

Егер тәжірибенің нәтижелеріне сәйкес нүктелер қандай да бір қисықтың маңайына орналасқан болса, онда жуық формуланы $y=ax^2+bx+c$ түрінде іздейміз. a, b және c-ларды табу үшін

$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2=F(a,b,c)$ функциясын құрамыз.

Функцияның кризистік нүктелері $\begin{cases} F_a'=0, \\ F_b'=0, \\ F_c'=0 \end{cases}$ жүйеден анықталады.

Он екінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Екі айнымалы функциясының анықтамасын беріңіз.
2. Екі айнымалының функциясы қандай әдістермен беріледі?
3. Ашық және тұйық облыстар деп қандай облыстарды атайды?
4. Екі айнымалы функциясының геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.
5. Деңгей сызығының анықтамасын беріңіз.
6. Екі айнымалы функциясының графигі қалай сызылады?
7. Жазықтықтағы нүкте аймағының анықтамасын беріңіз.
8. Екі айнымалы функциясының шегінің анықтамасын беріңіз.

9. Екі айнымалы функциясының шегінің бір айнымалы функциясының шегінен қандай айырмашылығы бар?

10. Екі айнымалы функциясының үзіліссіздігінің анықтамасын беріңіз.

11. Қандай жағадайларда $f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0,y_0)$ нүктеде үзіліске ие?

12. Екі айнымалы функциясының дербес өсімшелерінің формуласын жазыңыз және олардың геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.

13. Толық өсімшенің формуласын жазыңыз, суретте көрсетіңіз.

14. $f(x,y)$ функциясының x бойынша дербес туындысының анықтамасын беріңіз.

15. $f(x,y)$ функциясының y бойынша дербес туындысының анықтамасын беріңіз.

16. $f(x,y)$ функциясының дербес туындылары қандай ережелер арқылы табылады?

17. $f(x,y)$ функциясының толық дифференциалының анықтамасын беріңіз.

18. $f(x,y)$ функциясының толық дифференциалының жуық есептеулерде қолданылуы алгоритмін баяндаңыз.

19. Есептеулердегі қателіктер қалай бағаланады?

20. Күрделі функцияның толық туындысын табу формуласын жазыңыз.

21. Күрделі функцияның дербес туындыларының формулаларын жазыңыз.

22. Қандай шарттар орындалғанда жалғыз айқындалмаған функция анықталады?

23. Айқындалмаған функцияның туындысын табу формуласын жазыңыз.

24. Екінші және үшінші ретті дербес туындылар қалай табылады?

25. Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласын жазыңыз.

26. $f(x,y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысының анықтамасын беріңіз.

27. $f(x,y)$ функциясының l бағыты бойынша алынған туындысының формуласын жазыңыз.

28. $f(x,y)$ функциясы градиентінің анықтамасын беріңіз.

29. $f(x,y)$ функциясы градиентімен оның l бағыты бойынша алынған туындысының арасындағы байланысты анықтайтын теореманы тұжырымдаңыз және оны дәлелдеңіз.

30. Градиенттің қасиеттерін баяндаңыз.

31. Төңіректік максимумның (минимумның) анықтамасын беріңіз.

32. Төңіректік экстремумға ие болудың қажеттілік шартын жазыңыз.

33. Функцияның кризистік нүктелері деп қандай нүктелерді айтады?

34. Экстремумы бар болудың жеткілікті шартын жазыңыз.

35. $z = f(x,y)$ функциясын төңіректік экстремумға зерттеудің алгоритмін жазыңыз.

36. $z = f(x,y)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндері қалай табылады?

37. Шартты экстремум деген не?

38. Шартты экстремумды табу үшін құрылған Лагранж функциясын жазыңыз.

39. Шартты экстремум қалай табылады?

40. Ең кіші квадраттар әдісінің анықтамасын беріңіз.

41. Ең кіші квадраттар әдісі қандай есептерді шешуде қолданылады?

13 тарау. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

13.1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар

1-анықтама. Тәуелсіз айнымалы x, ізделініп отырған функция $y = f(x)$ және оның $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ туындыларын байланыстыратын теңдеу *дифференциалдық теңдеу* деп аталады және ол келесі түрде жазылады

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Егер ізделініп отырған функция $y = f(x)$ бір аргументтің функциясы болса, онда теңдеу *қарапайым дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

2-анықтама. Теңдеуге енген туындының ең жоғары ретін *дифференциалдық теңдеудің реті* деп атайды.

3-анықтама. $F(x, y, y') = 0$ түріндегі теңдеулер бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу, ал

$$y' = f(x, y) \tag{13.1}$$

түріндегі теңдеу y'*-ке қарағанда шешілген теңдеу* деп аталады.

4-анықтама. (13.1) теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын y функциясы оның *шешімі* деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің шешімін табуды оны интегралдау, ал шешімінің графигі *интеграл қисығы* деп аталады.

(13.1) дифференциалдық теңдеудің геометриялық мағынасын анықтайық. $f(x, y)$ функциясының анықталу облысы D-ның әрбір $M(x, y)$ нүктесіне бұрыштық коэффициенті $f(x, y)$-ке тең болатын кесіндіні (бағытты) сәйкес қоямыз, яғни $tg\alpha = f(x, y)$. Сонда (13.1) дифференциалдық теңдеуге D обылысындағы бағыттар өрісі сәйкес келеді. Олай болса, (13.1) дифференциалдық теңдеуді шешу дегеніміз әрбір нүктесіндегі жанамасының бағыты бағыттар өрісіндегі кесіндінің

бағытымен беттесетін интеграл қисықтарын табу деген сөз. Мұндай қисықтар шексіз көп, демек (13.1) теңдеуінің шешімі де шексіз көп.

Көптеген практикалық есептерде (13.1) дифференциалдық теңдеудің берілген (x_0, y_0) нүктесінен өтетін нақты бір интеграл қисығын табу қажет болады. Белгісіз у функциясының x_0-дегі мәнін беру - бастапқы шарттың берілуі деп аталады және ол былай жазылады:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 \text{ немесе } y(x_0) = y_0. \qquad (13.2)$$

Дифференциалдық теңдеулер теориясының төмендегі негізгі теоремасы (13.1) теңдеудің шешімінің бар болуының шарттарын береді.

Теорема. Егер $y' = f(x, y)$ теңдеуінің оң жағындағы $f(x, y)$ функциясы және оның $f'_y(x, y)$ дербес туындысы D облысының барлық (x, y) нүктелерінде анықталған және үзіліссіз болса, онда бұл дифференциалдық теңдеудің $y(x_0) = y_0$ шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар болады.

Мұндағы (x_0, y_0), D облысының кез келген ішкі нүктесі, D, $f(x, y)$

функциясының анықталу облысы. Бұл теорема (13.1) дифференциалдық теңдеудің жалғыз шешімі бар болуының *Коши теоремасы* деп аталады. Оның дәлелдеуін әдебиеттер тізімінде келтірілген оқулықтардан оқып алуды оқырманның өздеріне ұсынамыз.

$y' = f(x, y)$ теңдеудің $y(x_0) = y_0$ шартты қанағаттандыратын шешімін табу есебін *Коши есебі* деп атайды.

Коши теоремасының геометриялық мағынасы мынадай: D облысының кез келген (x_0, y_0) нүктесі арқылы (13.1) теңдеудің бір ғана интеграл қисығы өтеді.

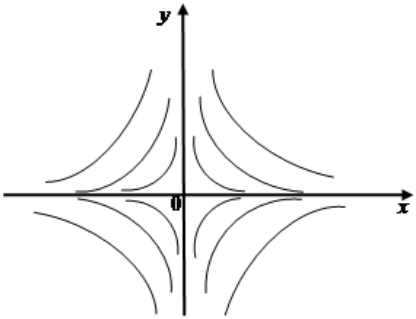
5-анықтама. Төмендегі екі шартты қанағаттандыратын $y=\varphi(x,c)$ функциясы (13.1) теңдеудің *жалпы шешімі* деп аталады:

1) тұрақты c-ның кез келген мәнінде $y=\varphi(x,c)$ функциясы (13.1) теңдеуінің шешімі болады;

2) D облысының ішкі (x_0,y_0) нүктесі үшін c-ның жалғыз $c=c_0$ мәні бар, яғни $y=\varphi(x,c_0)$ және бұл функция $y(x_0)=y_0$ бастапқы шартын қанағаттандырады.

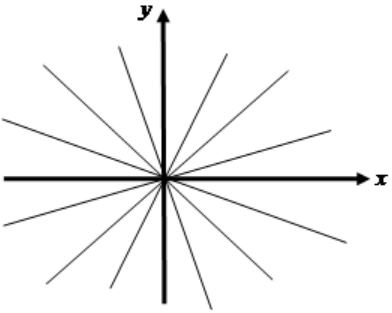
6-анықтама. c-ның нақты c_0 мәнінде (13.1) теңдеуінің жалпы шешімі $y=\varphi(x,c)$ функциясынан шығатын $y=\varphi(x,c_0)$ функциясы (13.1) теңдеудің *дербес шешімі* деп аталады.

1-мысал. $y'=-\dfrac{y}{x}$ теңдеудің жалпы шешімі $y=\dfrac{c}{x}$. Бұл гиперболалар өрісін анықтайды (13.1-сурет).



13.1-сурет

2-мысал. $y'=\dfrac{y}{x}$ теңдеудің жалпы шешімі $y=cx$, бұл $O(0,0)$ нүктесінен өтетін барлық түзулерді анықтайды (13.2-сурет). $O(0,0)$ нүктесінде Коши теоремасының шарты бұзылады, берілген теңдеудің оң жағы $O(0,0)$ нүктесінде анықталмаған.



13.2-сурет

13.2. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

Анықтама.

$$f_1(x)\,f_2(y)dx-\varphi_1(x)\varphi_2(y)dy=0 \tag{13.3}$$

немесе

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{13.4}$$

түріндегі теңдеулер *айнымалылары ажыратылатын* дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

(13.3) теңдеуді шешу үшін онда элементар түрлендірулер жүргіземіз, яғни (13.3) теңдеудің екі жағын $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$-ке бөлеміз. Сонда

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx=\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy.$$

Бұл теңдіктің екі жағын интегралдасақ

$$\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+c. \tag{13.5}$$

(13.5) өрнек (13.3) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі болады.

Ескерту! (13.4) теңдеуінің екі жағын $f_2(y)$–ке бөлгенде оның кейбір шешімі жоғалуы мүмкін.

3-мысал. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі. Элементар түрлендірулер нәтижесінде берілген теңдеуді $\frac{dx}{1-x}=\frac{dy}{1+y}$ түрге келтіреміз. Теңдеудің екі жағын интегралдаймыз.

$$\ln|1+y|=-\ln|1-x|+\ln C,$$
$$\ln(1+y)(1-x)=\ln C,$$
$$(1+y)(1-x)=C.$$

13.3. Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. Егер $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ теңдігі орындалса, онда $f(x,y)$ функциясы n өлшеулі *біртекті функция* деп аталады.

1-мысал. $f(x,y)=x^3+y^3$ - үш өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3y^3+\lambda^3y^3=\lambda^3(x^3+y^3)=\lambda^3f(x,y).$$

2-мысал. $f(x,y)=xy-y^2$ - екі өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2xy-\lambda^2y^2=\lambda^2f(x,y).$$

3-мысал. $f(x,y)=\frac{x+y}{x}$ - нөл өлшеулі біртекті функция, себебі,

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x}=\frac{x+y}{x}=f(x,y),$$

яғни

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0f(x,y).$$

2-анықтама. Егер $y'=f(x,y)$ дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x,y)$ нөл өлшеулі біртекті функция болса, онда берілген теңдеу *біртекті дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Біртекті дифференциалдық теңдеу мынадай әдіспен шешіледі. Шарт бойынша $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ болғандықтан, мұнда $\lambda = \frac{1}{x}$ десек, $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ болады. Басқаша айтқанда, нөл өлшеулі біртекті функция тек қана аргументтердің қатынасына тәуелді. Бұл жағдайда $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ теңдеуін шешу үшін $y = ux$ алмастыруын жасаймыз. Соңғы теңдіктен туынды алып берілген теңдеуге қоямыз. Сонда

$$y' = u'x + u;\ u'x + u = f(u);\ u'x = f(u) - u.$$

Айнымалыларды ажыратсақ $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$ теңдігі шығады.

Соңғы теңдікті интегралдап u-ды табамыз. Оның мәнін $y = ux$-ке қойсақ, іздеген функция табылады.

4-мысал. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$ теңдеудің шешімін табалық.

Шешуі. $y = ux;\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u;$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{x + xu}{x};\ \frac{du}{dx} \cdot x = 1 + u - u;\ \frac{du}{dx} \cdot x = 1;\ du = \frac{dx}{x};\ u = \ln|x| + C;$$

Сонымен $y=x(\ln|x|+C)$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

13.4. Біртекті теңдеулерге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + C}{a_1 x + b_1 y + C_1} \tag{13.6}$$

түріндегі теңдеулер біртекті теңдеуге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер деп аталады. Егер (13.8) теңдеуде $C_1 = C = 0$ болса, онда ол біртекті теңдеу болады. Егер

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k$$

алмастыруын жасасақ, онда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$. Осыларды (13.6) теңдеуге қоялық. Сонда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + C}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + C_1}. \tag{13.7}$$

болады. Мұндағы h және k тұрақтыларын

$$\begin{cases} ah + bk + C = 0, \\ a_1h + b_1k + C_1 = 0 \end{cases} \tag{13.8}$$

жүйені қанағаттандыратындай етіп таңдаймыз, Онда (13.7) теңдеу

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

түріне келеді. Бұл біртекті дифференциалдық теңдеу, оны шешіп табылған x_1, y_1-лердің орнына $x_1 = x - h, \ y_1 = y - k$ мәндерін қоямыз да (13.6) дифференциалдық теңдеудің шешімін аламыз.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

анықтауышы нөлге тең болған жағдайда (13.8) жүйенің жалғыз шешімі болмайтыны белгілі. Бұл жағдайда $ab_1 - a_1b = 0$, яғни $a_1 = a\lambda, \ b_1 = b\lambda.$ a_1 мен b_1-дің мәндерін (13.6) теңдеуге қойсақ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + C}{\lambda(ax + by) + C_1} \tag{13.9}$$

шығады. (13.9) теңдеуде $z = ax + by$ алмастыруын жасасақ.

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \tag{13.10}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \qquad (13.11)$$

шығады. (13.9) теңдеуді, (13.11) және $z=ax+by$ алмастыруы арқылы келесі түрде жазамыз.

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+C}{\lambda z+C_1}.$$

Бұл алдын қарастырылған айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

(13.6) теңдеуді интегралдауға қолданылған әдісті кез келген

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+C}{a_1x+b_1y+C_1}\right)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді интегралдауға да қолдануға болады.

Мысал. $(x+y+2)dx+(3x+3y-1)dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0$

болғандықтан, $z=x+y$ алмастыруын орындаймыз

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}.$$

Берілген теңдеуді $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y+2}{3(x+y)-1}$

түрінде жазып, мұндағы $\frac{dy}{dx}$-тің орнына $\left(\frac{dz}{dx}-1\right)$-ді, ал $(x+y)$-тің орнына z-ті жазамыз:

$$\frac{dz}{dx}-1=-\frac{z+2}{3z-1};$$

$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{z+2}{3z-1}=\frac{2z-3}{3z-1};\quad \frac{3z-1}{2z-3}dz=dx;$$

Осыдан

$$\int\frac{3z-1}{2z-3}dz=\int dx+c;\quad \frac{3}{2}\int\frac{2z-3}{2z-3}dz+\frac{7}{2}\int\frac{dz}{2z-3}=x+C;$$

$$\frac{3}{2}z+\frac{7}{4}\ln|2z-3|=x+c;\ 7\ln|2x+2y-3|=c_1-2x-6y.$$

13.5. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. $y'+p(x)y=q(x)$ түріндегі теңдеулер *бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер* деп аталады. Мұндағы $p(x),\ q(x)$ функциялары x-ке тәуелді берілген функциялар. Енді сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің Бернулли әдісін баяндалық.

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{13.12}$$

теңдеудің шешімін $y=u(x)\cdot\vartheta(x)$ түрінде іздейміз, мұндағы $u(x),\ \vartheta(x)$ функцияларының біреуі (13.12) теңдеудің шешімі, ал екіншісі кез келген функция. Осы y функциясының туындысын алып (13.12) теңдеуге қойсақ

$$u'\vartheta+uv'+p(x)\cdot u\vartheta=q(x),\quad u'\vartheta+u(\vartheta'+p(x)\vartheta)=q(x). \tag{13.13}$$

Соңғы теңдіктен $\vartheta'+p(x)\vartheta=0$ теңдеуін қанағаттандыратындай етіп ϑ функциясын таңдаймыз, яғни оны шешеміз.

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}=-p(x)dx,\ \ \ln\vartheta=-\int p(x)dx;\ \ \vartheta=e^{-\int p(x)dx}.$$

Табылған ϑ функциясын (13.13) теңдікке қоямыз да

$$u'\cdot e^{-\int pdx}=q(x),\quad du=q(x)\ell^{\int p(x)dx}dx;$$

$$u = \int qe^{\int pdx}dx + C;$$

функциясын табымыз. Олай болса $y = \left(\int qe^{\int pdx}dx + C\right)\cdot e^{-\int p|x|dx}$.

Мысал. $y' - ytgx = 2x\sec x$ теңдеуінің шешімін ізделік.

Шешуі. $y = u\vartheta$ түрінде іздейміз. Туындысын алып берілген теңдеуге қоямыз

$$u'\vartheta + u\vartheta' - u\vartheta tgx = 2x\sec x,\ u'\vartheta + u\left(\vartheta' - \vartheta tgx\right) = 2x\sec x.$$

ϑ-ны кез келген функция десек, оны $\vartheta' - \vartheta tgx = 0$ теңдеуден табуға болады.

$$\vartheta' = \vartheta tgx,\ \frac{d\vartheta}{\vartheta} = tgxdx,\ \ln\vartheta = -\ln|\cos x|;\ \vartheta = \frac{1}{\cos x};$$

$$u'\cdot\frac{1}{\cos x} = 2x\cdot\frac{1}{\cos x};\ u' = 2x,\ du = 2xdx;\ u = x^2 + C.$$

Сонымен, $y = \frac{1}{\cos x}\left(x^2 + C\right)$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

2-анықтама. $y' + p(x)y = q(x)\cdot y^n$ түріндегі теңдеу *Бернулли теңдеуі* деп аталады.

Бернулли теңдеуі сызықты емес, бірақ ол қарапайым түрлендіру арқылы сызықты теңдеуге келтіріледі.

Теңдеудің екі жағын y^n-ге бөлсек

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x)$$

теңдеуін аламыз $y^{-n+1} = z$ деп белгілесек, онда $(-n+1)y^{-n}\cdot y' = z'$. Осыларды соңғы теңдеуге қойсақ:

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x),\quad z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

түріндегі сызықтық дифференциалдық теңдеуді аламыз. Ол теңдеу жоғарыда баяндалған әдіспен шешіледі.

13.6. Толық дифференциалдық теңдеулер

Үзіліссіз және дифференциалданатын $M(x,y)$, $N(x,y)$ функциялары берілсін.

Анықтама. Егер $M(x,y)$, $N(x,y)$ функциялары үшін

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{13.14}$$

теңдігі орындалатын болса, онда

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{13.15}$$

теңдеуі *толық дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Айталық (13.15) теңдеудің сол жағы қандайда бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болсын, яғни

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

Олай болса

$$M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\ \ N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot \tag{13.16}$$

(13.16) теңдіктердің біріншісін y бойынша, ал екіншісін x бойынша дифференциалдайық, яғни

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Екінші ретті туындыларды үзіліссіз десек, онда

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

теңдігін аламыз, яғни (13.14) теңдік (13.15) теңдеудің сол жағы қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болуы үшін қажетті шарт болады екен. Енді (13.14) шарттың жеткілікті де шарт екенін көрсетелік, яғни егер (13.14) теңдік орындалса, онда (13.15) теңдеудің сол жағы қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болады.

$M(x,y)$ қандай да бір $u(x,y)$ функциясынан x бойынша алынған дербес туындыға тең болсын делік, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y).$$

Осы соңғы теңдеуді интегралдап:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

теңдігін аламыз, мұндағы x_0, берілген теңдеудің шешімінің анықталу облысынан алынған кез келген нүктенің абсциссасы. x бойынша интегралдағанымызда y-ті тұрақты деп есептегендіктен интегралданатын тұрақты C-ны жалпы жағдайда y-ке тәуелді деп қабылдау мүмкін. $\varphi(y)$ функциясын (13.16) формулалардың екінші теңдігі орындалатындай етіп таңдаймыз. Ол үшін соңғы теңдіктің екі жағын y бойынша дифференциалдап нәтижесін $N(x,y)$-ке теңестіреміз

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

болғандықтан

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx + \varphi'(y) = N(x,y) \quad \text{немесе}$$

$$N(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y);$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y);$$

$$\varphi'(y) = N(x_0;y).$$

Соңғы теңдікті интегралдасақ

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C_1\cdot$$

$\varphi(y)$-тің мәнін орнына қоямыз:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C_1.$$

Мұндағы $P(x_0,y_0)$- аймағында (13.15) теңдеудің шешімі бар болатын нүкте.

Сонымен, егер (13.14) теңдік орындалса, онда (13.15) теңдіктің сол жағы $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болады, яғни

$$du(x,y)=0.$$

Соңғы теңдеуді интегралдасақ $u(x,y)=c$ шығады. Сондықтан (13.15) теңдеудің жалпы шешімі

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=C \qquad (13.17)$$

түрінде болады.

13.7. Толық дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық көбейткіш

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (13.18)$$

теңдеудің сол жағы қандайда бір функцияның толық дифференциалы болмасын делік. Мынадай жағдай болуы мүмкін: (13.18) теңдеудің екі жағын қандай да бір $\mu(x,y)$ функциясына көбейткеннен кейін оның сол жағы белгілі бір

функцияның толық дифференциалы болып, ал жаңа теңдеудің жалпы шешімі берілген теңдеудің де жалпы шешімі болады. Осындай $\mu(x,y)$ функциясы (13.18) теңдеудің *интегралдық көбейткіші* деп аталады.

$\mu(x,y)$ интегралдық көбейткішті табу үшін (13.18) теңдеудің екі жағын $\mu(x,y)$-ке көбейтелік:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Соңғы теңдеу толық дифференциалдық теңдеу болуы үшін

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

теңдіктің орынды болуы қажетті және жеткілікті. Олай болса

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

немесе

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Соңғы теңдеудің екі жағын $\mu(x,y)$-ке бөліп төмендегі теңдеуді аламыз

$$M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \qquad (13.19)$$

(13.19) теңдеуді қанағаттандыратын кез келген $\mu(x,y)$ функциясы (13.18) теңдеудің интегралдық көбейткіші болады.

Жалпы жағдайда (13.19) теңдеуден $\mu(x,y)$-ті табу есебі (13.18) теңдеуді шешу есебіне қарағанда әлдеқайда күрделірек. Тек қана кейбір жағдайларда ғана (13.19) теңдіктен $\mu(x,y)$ функциясын таба аламыз. (13.18) теңдеудің тек қана y-ке тәуелді интегралдық көбейткіші бар болсын делік. Онда

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0.$$

Бұл жағдайда (13.19) теңдеуден

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

теңдеуін аламыз. Егер $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ өрнек x-ке тәуелді болмаса, онда соңғы теңдеуді интегралдап тек қана y-тен тәуелді $\mu(y)$-ті анықтап аламыз.

Осыған ұқсас, егер $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$ өрнек y-ке тәуелді болмаса, онда тек қана x-ке тәуелді $\mu(x)$ төмендегі формуламен анықталады:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

13.8. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер

n-ші ретті дифференциалдық теңдеу жалпы жағдайда

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (13.20)$$

түрінде жазылатыны жоғарыда айтылған еді. Айталық (13.20) теңдеу

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (13.21)$$

түрінде болсын. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге ұқсас (13.21) теңдеудің де жалғыз шешімінің бар болу теоремасының тұжырымын берелік.

Теорема. Егер (13.21) теңдеудің оң жағындағы $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ функ-циясы және оның $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ аргументтер бойынша дербес туындылары

$x = x_0,\ y = y_0, y' = y'_0,\ldots,y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ нүктелері ішінде жататын облыста үзіліс-сіз болса, онда (13.20) теңдеудің

$$\begin{cases} y\Big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \\ \ldots\ldots \\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (13.22)$$

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз $y = y(x)$ шешімі бар болады.(13.22) шарттар бастапқы шарттар деп аталады. Бұл теореманың дәлелдеуін «Дифференциалдық теңдеулер» пәні бойынша толығырақ жазылған оқулықтардан оқып алуға болады.

1-анықтама. (13.21) теңдеудің жалпы шешімі деп төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $y = \varphi(x, C_1, C_2,\ldots,C_n)$ функциясын айтады:

а) $C_1, C_2,\ldots,C_n$ тұрақтылардың кез келген мәнінде φ функциясы (13.21) теңдеуді қанағаттандырады;

ә) $y = \varphi(x, C_1, C_2,\ldots,C_n)$ теңдіктен (13.22) шарттарды қанағаттандыра-тындай $C_1, C_2,\ldots,C_n$ тұрақтыларын табуға болады.

2-анықтама. $C_1, C_2,\ldots,C_n$ тұрақтылардың нақты мәндерінде $y = \varphi(x, C_1, C_2,\ldots,C_n)$ жалпы шешімінен шығатын функцияны (13.21) теңдеудің дербес шешімі деп атайды.

Дербес шешімнің графигі дифференциалдық теңдеудің интеграл қисығы деп аталады.

13.9. Реті төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Жалпы жағдайда екінші ретті дифференциалдық теңдеудің шекті түрдегі шешімі табылмайды. Сондықтан, тікелей интегралданатын немесе реті төмендетілетін жағдайларды қарастырамыз.

1. $y'' = f(x)$ теңдеуі берілсін. Екі жағын интегралдап

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуді тағы да интегралдап

$$y = \int\left[\int f(x)dx\right]dx + C_1 x + C_2$$

теңдеуін аламыз, мұндағы C_1, C_2 - тұрақты шамалар.

2. $y'' = f(y)$ теңдеуі берілсін. $y' = p$ деп белгілейміз. p - ны y -тің функциясы десек, онда:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Берілген теңдеуге осы мәндерді қойып:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y);\ pdp = f(y)dy$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеуді интегралдаймыз

$$\int pdp = \int f(y)dy + C_1;\ \frac{p^2}{2} = \int f(y)dy + C_1;\ p^2 = 2\int f(y)dy + 2C_1;$$

$$p = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1};$$

$p = \frac{dy}{dx}$ болғандықтан

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}.$$

Соңғы теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеу болғандықтан

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}} = \pm(x + C_2).$$

3. $y'' = f(y')$ теңдеуі берілсін. $y' = p$ деп белгілесек $y'' = \frac{dp}{dx}$; Онда

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

Осы теңдеудің айнымалыларын ажыратсақ

$$\frac{dp}{f(p)} = dx; \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1.$$

4. $y'' = f(x, y')$ теңдеуі берілсін. $y' = p;$ $y'' = \frac{dp}{dx};$ $\frac{dp}{dx} = f(x, p).$ Соңғы теңдеу бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

5. $y'' = f(y, y')$ теңдеуі берілсін.

$$y' = p; y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}; p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Бұл да бірінші ретті дифференциалдық теңдеу.

1-мысал. $y'' = \cos x$ теңдеудің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. Екі рет интегралдап шешімін табамыз, яғни

$$y' = \sin x + C_1; \; y = \int (\sin x + C_1)dx = -\cos x + C_1 x + C_2$$

2-мысал. $y'' = y^{-3}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. $y' = p$ деп белгілейміз.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}; \; p\frac{dp}{dy} = y^{-3},$$

Соңғы теңдеудің айнымалыларын ажыратып интегралдау арқылы

$$pdp = y^{-3}dy; \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2}; \quad p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}};$$

теңдеуін аламыз. Енді p -ның орнына y' - ті қоямыз

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}.$$

Айнымалыларын ажыратып интегралдасақ

$$\frac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx; \int\frac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\left(x + C_2\right).$$

Бұл интегралды табу үшін $C_1 y^2 - 1 = t^2$ алмастыруын жасаймыз.

$$2C_1 ydy = 2tdt \quad ydy = \frac{tdt}{C_1}$$

$$\int\frac{tdt}{C_1 \cdot t} = \frac{t}{C_1} = \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{C_1}; \; \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{C_1} = \pm\left(x + C_2\right).$$

Сонымен, $y^2 - \frac{1}{C_1^2} = \left(x + C_2\right)^2$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі.

3-мысал. $y'' = \frac{y'}{x}$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. $y' = p$; $y'' = \frac{dp}{dx}$ деп белгілеп, орындарына қоямыз

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x};$$

Соңғы теңдеуді интегралдап, яғни

$$\ln p = \ln x + \ln C_1; \quad p = C_1 x;$$

$\frac{dy}{dx} = C_1 x;\ dy = C_1 x dx;\ y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ - жалпы шешімін табамыз.

4-мысал. $y'' = \frac{(y')^2}{y}$ теңдеудінің жалпы шешімін табалық.

Шешуі. $y' = p; \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}; \qquad p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y};$

$\ln p = \ln y + \ln C_1;\ p = C_1 y$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y; \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx;\ \ln y = C_1 x + \ln C_2;$$

$y = C_2 e^{c_1 x}$ функциясы ізделініп отырған теңдеудің жалпы шешімі.

13.10. Сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама. Ізделініп отырған y функциясына және оның $y',\ y'',\ldots,y^{(n-1)},\ y^{(n)}$ туындыларына қарағанда бірінші дәрежелі теңдеу n*-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу* деп аталады және ол төмендегі түрде жазылады:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (13.23)$$

мұндағы $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n,\ f(x)$-тар x-тің берілген функциялары немесе тұрақты сандар, $a_0 \neq 0$, оларды x-тің барлық мәндерінде үзіліссіз болсын деп ұйғарамыз. $f(x)$ функциясы (13.23) теңдеудің оң жағы деп аталады.

Егер $f(x) \neq 0$ болса, онда (13.23) теңдеу *біртекті емес*, ал $f(x) \equiv 0$ болса, онда ол *біртекті* теңдеу деп аталады. Сонымен n-ретті сызықты біртекті теңдеу

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (13.24)$$

түрінде болады екен.

Біз алдағы уақытта n-ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің негізгі қасиеттерін екінші ретті біртекті сызықтық теңдеу үшін тұжырымдаймыз.

1-теорема. Егер y_1 және y_2 функциялары екінші ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің, яғни

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (13.25)$$

теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда $(y_1 + y_2)$ функциясы да оның шешімі болады.

Дәлелдеу. y_1, y_2-лердің туындыларын алып (13.25) теңдеуге қоямыз

$$\begin{cases} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \end{cases} \quad (13.26)$$

$(y_1 + y_2)$ функциясының туындыларын алып (13.25) теңдеуге қойып, (13.26) теңдіктерді ескерсек

$$(y_1'' + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

яғни $y_1 + y_2$ функциясы (13.25) теңдеудің шешімі екен.

2-теорема. Егер y_1, (13.25) теңдеуінің шешімі болса, онда Cy_1 функциясы да осы (13.25) теңдеудің шешімі болады (мұндағы C-тұрақты).

Дәлелдеу. Cy_1-ді (13.25) теңдеуге қоямыз

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C(y_1'' + ay_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

яғни Cy_1-де (13.25) теңдеудің шешімі екен.

2-анықтама. Егер (13.25) теңдеудің y_1, y_2 шешімдерінің қатынасы $[a;b]$ кесіндісінде тұрақты санға тең болмаса, яғни $\frac{y_1}{y_2} \neq const$, онда y_1 мен y_2 $[a;b]$ кесіндісінде *сызықты тәуелсіз* деп аталады. Ал, егер $\frac{y_1}{y_2} = \lambda,\ \lambda = const$ болса, онда y_1 мен y_2 $[a;b]$ кесіндісінде *сызықты тәуелді* деп аталады.

3-анықтама. Егер y_1 мен y_2, x айнымалысының функциялары болса, онда

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

анықтауышы сол функциялардың *Вронский анықтауышы* деп аталады.

3-теорема. Егер y_1 және y_2 функциялары $[a;b]$ аралықта сызықты тәуелді болса, онда олардың Вронский анықтауышы сол аралықта нөлге тең.

Дәлелдеу. Теореманың шарты бойынша: $y_2 = \lambda y_1,\ \lambda = const.$ Онда $y_2' = \lambda y_1'.$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

4-теорема. Егер (13.25) теңдеудің y_1 және y_2 екі шешімінің $W(y_1, y_2)$ Вронский анықтауышы $[a,b]$ аралықтың қандайда бір $x = x_0$ нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол сол аралықтың кез келген x нүктесінде де нөлге тең болмайды.

Дәлелдеу. y_1 және y_2-лер (13.25) теңдеудің шешімі болғандықтан

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0,$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Бірінші теңдеуді y_2-ге, екіншісін y_1-ге көбейтіп екінші теңдеуден бірінші теңдеуді алсақ

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + a_1 \left(y_1 y_2' - y_2 y_1' \right) = 0. \qquad (13.27)$$

(13.27) теңдеудегі жақшаның іші Вронский анықтауышына тең, ал алдынғы екі қосылғыш Вронский анықтауышының туындысына тең, яғни

$$W' = \left(y_1 y_2' - y_2 y_1' \right)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Олай болса (13.27) теңдеу төмендегіше жазылады

$$W' + a_1 W = 0. \qquad (13.28)$$

(13.28) теңдеудің $W\Big|_{x = x_0} = W_0$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімін табалық. (13.28) теңдеудің айнымалыларын бөлелік. Сонда

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx,$$

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C,$$

$$W = C \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \qquad (13.29)$$

(13.29) формула *Лиувиль формуласы* деп аталады.

Енді бастапқы шартты пайдаланып C-ның мәнін анықтайық. (13.29) нің сол және оң жағындағы x-тің орнына x_0 -ді қоямыз.

$$W\Big|_{x=x_0} = C\cdot e^{0} \text{ немесе } C = W_0,$$

яғни

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \qquad (13.30)$$

Соңғы функция (13.28) теңдеудің дербес шешімі болады. Шарт бойынша $W_0 \neq 0$ болғандықтан W анықтауышы x-тің кез келген мәнінде нөлге тең болмайтындығы (13.30) теңдеуден көрініп тұр.

Сонымен теорема дәлелденді.

Ескерту! Егер $[a,b]$ аралығының қандай да бір x_0 нүктесінде Вронский анықтауышы нөлге тең болса, онда ол сол аралықтың кез келген x нүктесінде де нөлге тең болады. Бұл тұжырым (13.29) формуладан тікелей шығады, яғни, егер $x = x_0$ болғанда $W = 0$ болса, онда $W\Big|_{x=x_0} = c = 0,$ демек, кез келген x-те $W = 0.$

5-теорема. Егер y_1 және y_2-лер (13.25) теңдеудің $[a;b]$ кесіндісіндегі сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда олардың Вронский анықтауышы сол кесіндінің кезкелген нүктесінде де нөлге тең болмайды.

Дәлелдеу. Теореманы кері жориық, яғни $[a;b]$ кесіндісінің қандайда бір x_0 нүктесінде $W(y_1, y_2) = 0$ болсын делік. Онда.

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \qquad (13.31)$$

жүйені қанағаттандыратын, екеуі бірден нөлге тең болмайтын C_1 және C_2 сандары табылады . Олай болса,

$$\varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

функциясын қарастырамыз. $\varphi(x)$ функциясы 1 мен 2-теоремалар бойынша (13.25) теңдеудің шешімі болады, сонымен қатар $\varphi \neq 0.$ Кері жағдайда $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$ болып, y_1 мен y_2 функциялары сызықты тәуелді болады. Бұл теореманың шартына қайшы келер еді. (13.31) жүйеден $\varphi(x_0) = 0$ $\varphi'(x_0) = 0$ теңдіктері шығады. Бұл бастапқы шарттарды (13.25) теңдеудің $y(x) \equiv 0$ шешімі де қанағаттандырады. Демек, (13.25) теңдеудің берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын екі ($y(x) \equiv 0$ және $\varphi(x)$) шешімі бар екен. Бұл Коши есебінің тұжырымына қайшы келеді, олай болса, $W(y_1, y_2) \neq 0$. Теорема дәлелденді.

Сонымен, (13.25) теңдеудің кез келген екі $y_1(x)$ және $y_2(x)$ шешімдері үшін төмендегі екі тұжырым орындалады:

1) егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ сызықты тәуелді болса, онда кез келген x үшін $W(y_1, y_2) = 0$.

2) егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ сызықты тәуелсіз болса, онда кез келген x үшін $W(y_1, y_2) \neq 0$.

6-теорема. Егер $y_1(x)$ мен $y_2(x)$ функциялары (13.25) теңдеудің сызық-ты тәуелсіз шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (13.32)$$

оның жалпы шешімі болады, мұндағы C_1, C_2- кез келген тұрақтылар.

Дәлелдеу. 1 және 2-теоремалар бойынша C_1 және C_2-нің кез келген мәнінде (13.32) функция (13.25) теңдеуді қанағаттандырады, демек жалпы шешім анықтамасының 1-шарты орындалып тұр. Енді (13.32) дан кез келген $y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ бастапқы шартты қанағаттандыратын

жалғыз дербес шешім бөліп алу мүмкіндігі болатынын көрсетсек болғаны.

Бастапқы шарттарды (13.32) теңдікке қоямыз

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y_0' = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' \end{cases} \tag{13.33}$$

мұндағы $y_{10} = y_1\big|_{x=x_0}$, $y_{20} = y_2\big|_{x=x_0}$, $y_{10}' = y_1'\big|_{x=x_0}$, $y_{20}' = y_2'\big|_{x=x_0}$.

(13.33) жүйенің анықтауышы Вронский анықтауышының $x = x_0$-дегі мәні болғандықтан, ол нөлге тең емес, яғни

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = y_{10}y_{20}' - y_{20}y_{10}' \neq 0.$$

Олай болса, (13.33) жүйенің жалғыз шешімі (C_1, C_2) табылады. Бұл (13.32) дан берілген бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім бөліп алу мүмкін деген сөз. Сонымен, (13.32) функция (13.25) теңдеудің жалпы шешімі екен, теорема дәлелденді.

Енді біртекті емес сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық, яғни

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{13.34}$$

(13.34) теңдеудің жалпы шешімінің құрылымын төмендегі теорема анықтайды.

7-теорема. Біртекті емес (13.34) теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі мен (13.34) теңдеудің қандайда бір дербес шешімінің қосындысына тең.

Дәлелдеу. Біртекті теңдеудің жалпы шешімін $\overline{y}$-пен, ал (13.34) теңдеудің қандай да бір дербес шешімін $\tilde{y}$ арқылы белгілейік.

$$y = \overline{y} + y \tag{13.35}$$

қосындысы (13.34) теңдеудің жалпы шешімі екендігін дәлелдейік. Ол үшін (13.35) мен оның туындыларын (13.34) теңдеуге қоямыз.

$$\left(\bar{y}+y\right)''+a_1\left(\bar{y}+y\right)'+a_2\left(\bar{y}+y\right)=f\left(x\right),$$

немесе

$$\left(\bar{y}''+a_1\bar{y}'+a_2\bar{y}\right)+\left(y''+a_1y'+a_2y\right)=f\left(x\right)$$

$\bar{y}$ біртекті теңдеудің шешімі болғандықтан, бірінші жақшаның ішіндегі өрнек нөлге тең, ал $\tilde{y}$ (13.34) теңдеудің шешімі болғандықтан екінші жақшаның ішіндегі өрнек $f\left(x\right)$-ке тең. Олай болса (13.35) өрнек (13.34) теңдеудің шешімі екен. Енді оның жалпы шешім екендігін дәлелдейік. Ол үшін $y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0'$ бастапқы шарттарды (13.35) теңдікке қоямыз. Мұндағы $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз.

$$\begin{cases}y_0=C_1y_{10}+C_2y_{20}+y_0,\\ y_0'=C_1y_{10}'+C_2y_{20}'+y_0\end{cases}$$

немесе

$$\begin{cases}C_1y_{10}+C_2y_{20}=y_0-y_0,\\ C_1y_{10}'+C_2y_{20}'=y_0'-y_0\end{cases}$$

Соңғы жүйенің анықтауышы y_1 және y_2 функцияларының $x=x_0$ нүктесіндегі Вронский анықтауышы. y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз болған-дықтан $W\left(y_1,y_2\right)\neq 0$. Олай болса соңғы жүйеден жалғыз нақты C_1,C_2 табылады. Сонымен (13.35) өрнек берілген бастапқы шарттарды қанағаттан-дыратын (13.34) теңдеудің жалғыз шешімі. Теорема толығымен дәлелденді.

Сонымен, егер біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\bar{y}$ белгілі болса, онда біртекті емес теңдеудің жалпы шешімін табу мәселесі оның қандайда бір дербес шешімін табуға байланысты екен.

Енді біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табудың жалпы әдісін баяндалық.

13.10.1. Тұрақтыны вариациялау әдісі

Біртекті (13.25) теңдеудің жалпы шешімін қарастыралық, яғни

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 . \qquad (13.36)$$

(13.36) теңдеудегі C_1 мен C_2 x-тің қандайда бір функциялары болсын деп ұйғаралық.

(13.36) теңдікті x бойынша дифференциалдаймыз, яғни

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2 .$$

C_1 мен C_2-ні

$$C_1' y_1 + C_2' y_1 = 0 \qquad (13.37)$$

шарты орындалатындай етіп таңдаймыз. Осы айтылғанды ескерсек

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' .$$

Соңғы теңдікті тағы да x бойынша дифференциалдаймыз

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' .$$

Осы табылған y, y', y'' мәндерін (11) теңдеуге қоямыз.

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + a_1\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + a_2\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = f(x)$$

Немесе

$$C_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$$

y_1 мен y_2 біртекті теңдеудің шешімдері болғандықтан жақшалардың іші нөлге тең болады. Онда

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \qquad (13.38)$$

Сонымен, егер C_1 мен C_2 (13.37) пен (13.38) теңдеулер жүйесін, яғни

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

жүйесін қанағаттандырса, онда (13.36) функция (13.34) біртекті емес теңдеудің шешімі болады.

Соңғы жүйенің анықтауышы сызықты тәуелсіз y_1 мен y_2 функция-ларының Вронский анықтауышы болғандықтан, ол нөлге тең емес, онда оның нақты жалғыз C_1 және C_2 шешімі табылады. C_1 мен C_2-нің табылған мәндерін (13.36) теңдеуге қойып (13.34) біртекті емес теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

13.11. Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1-анықтама.

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (13.39)$$

түріндегі теңдеу *коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу* деп аталады. Мұндағы p мен q тұрақты шамалар.

Егер (13.39) теңдеуде $f(x) \equiv 0$ болса, онда

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (13.40)$$

теңдеуі біртекті сызықты теңдеу деп аталады.

Егер $f(x) \neq 0$ болса, онда (13.39) теңдеу сызықты біртекті емес деп аталады.

1-теорема. Егер (13.39) теңдеуде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болса, онда оның $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жалғыз шешімі бар болады. Бұл теореманы дәлелсіз қабылдаймыз.

Енді (13.40) теңдеудің жалпы шешімін табу мәселесіне көшелік. (13.40) теңдеудің шешімін

$$y = e^{kx} \tag{13.41}$$

түрінде іздейміз. Мұндағы k – нақты сан. (13.41) функциясының бірінші және екінші ретті туындыларын алып (13.40) тең деуге қойып $\left(k^2 + pk + q\right)e^{kx} = 0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуде $e^{kx} \neq 0$ болғандықтан

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{13.42}$$

болады.(13.42) теңдеу (13.40) теңдеудің *сипаттаушы теңдеуі* деп аталады.

(13.40) теңдеу шешімдерінің түрлерін (13.42) теңдеу шешімдері арқылы анықтайтын мына теореманы дәлелделік.

2-теорема. 1) Егер k_1, k_2-лер (13.42) теңдеудің өзара тең емес $\left(k_1 \neq k_2\right)$ нақты түбірлері болса, онда (13.40) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{13.43}$$

түрінде анықталады. Мұндағы C_1 мен C_2 кез-келген тұрақты шамалар;

2) Егер $k_1 = k_2 = k$ болса, онда (13.40) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{kx} \tag{13.44}$$

түрінде анықталады;

3) Егер $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ комплекс сандары болса, онда (13.40) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = \left(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x\right)e^{\alpha x} \tag{13.45}$$

түрінде анықталады.

Дәлелдеу. 1) $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = e^{k_2 x}$ функциялары (13.40) теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері болады, себебі

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq const,\quad (k_1\neq k_2).$$

Онда 6-теорема бойынша (13.43) функциясы (13.40) теңдеудің жалпы шешімі болады.

2) $k_1=k_2=k$ болса, онда $y_1=e^{kx}$ функциясы (13.40) теңдеудің бір шешімі. Енді $y=xe^{kx}$ функциясы (13.40) теңдеудің шешімі болатындығын және y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз екендігін көрсетелік. Шынында да,

$$y_2''+py_2'+qy_2=2ke^{kx}+k^2xe^{kx}+p\left(e^{kx}+xke^{kx}\right)+$$
$$+qxe^{kx}=e^{kx}\left[x\left(k^2+pk+q\right)+\left(p+2k\right)\right]=0,$$

себебі, $k^2+pk+q=0$ теореманың шарты бойынша және $p=-2k=-\left(k_1+k_2\right)$ (Виета теоремасы). Онда, y_2 функциясы (13.40) теңдеудің шешімі, ал $\frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{x}$ болғандықтан. y_1 мен y_2 сызықты тәуелсіз. Олай болса (13.44) функция (13.40) теңдеудің жалпы шешімі болады.

3) $k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta$ комплекс сандар (13.42) теңдеудің шешімі болсын. Онда

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}\qquad(13.46)$$

функциялары (13.40) теңдеудің дербес шешімдері болады.

Алдымен, нақты аргументтің қандай да бір

$$y=u(x)+i\vartheta(x)\qquad(13.47)$$

функциясы (13.40) теңдеудің шешімі болса, онда $u(x),\ \vartheta(x)$ функциялары да (13.40) теңдеудің шешімі болатындығын көрсетелік. Ол үшін (13.47) функциясын (13.40) теңдеуге қоямыз

$$\left[u(x)+i\vartheta(x)\right]''+p\left[u(x)+i\vartheta(x)\right]'+q\left[u(x)+i\vartheta(x)\right]=0$$

немесе

$$\left(u'' + pu' + qu\right) + i\left(\vartheta'' + p\vartheta' + q\vartheta\right) = 0.$$

Комплекс функция оның нақты бөлігі де, жорымал бөлігі де нөл болғанда ғана нөлге тең болатындықтан

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$\vartheta'' + p\vartheta' + q\vartheta = 0$$

теңдіктерін жаза аламыз. Бұл $u(x), \vartheta(x)$ функциялары (13.40) теңдеуді қанағаттандырады деген сөз.

(13.46) теңдіктерді Эйлер формуласы бойынша жазсақ

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша, y_1 функциясы (13.40) теңдеудің шешімі болғандықтан

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

функциялары да (13.40) теңдеудің шешімдері болады. $\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = ctg\beta x \neq const,$ онда $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ функциялары сызықты тәуелсіз.

Сонымен, $y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$ функциясы (13.40) теңдеудің жалпы шешімі болады екен.

1-мысал. $y'' - 11y' + 18 = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 11k + 18 = 0$. Мұның түбірлері $k_1 = 2,\ k_2 = 9$. Сондықтан, (13.43) формула бойынша, берілген теңдеудің жалпы шешімі $y = C_1e^{2x} + C_2e^{9x}$ функциясы болады.

2-мысал. $y'' - 4y' + 4y = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2 - 4k + 4 = 0$. Мұның түбірлері $k_1 = k_2 = 2$. Онда (13.44) формула бойынша

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

3-мысал. $y''-6y'+13y=0$ теңдеуінің шешімін табалық.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуі $k^2-6k+13=0$. Мұның түбірлері $k_{1,2}=3\pm 2i$ комплекс сандары; $\alpha=3;\quad \beta=2$. Онда (7) формула бойынша

$$y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{3x}$$

функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады.

Енді (13.39) теңдеудің жалпы шешімін табуға көшейік. (13.39) теңдеудің жалпы шешімі (13.40) теңдеудің жалпы шешімі $\overline{y}$ пен (13.39) теңдеудің дербес шешімі $\tilde{y}$-тің қосындысына тең екені белгілі.

Көптеген жағдайларда (13.39) теңдеудің дербес шешімін сұрыптау тәсілі деп аталатын әдіспен тапқан қолайырақ. Солардан кейбіреулерін қарастырайық.

1. (13.39) теңдеудің оң жағы

$$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$$

түрінде болсын. Мұндағы $P_n(x)$ n-ші дәрежелі көпмүшелік.

Төмендегі жағдайлар болуы мүмкін:

а) e-нің дәреже көрсеткішіндегі α

$$k^2+pk+q=0$$

сипаттаушы теңдеуінің түбірлеріне тең емес. Бұл жағдайда (13.39)-нің дербес шешімін

$$\tilde{y}=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n)e^{\alpha x}=Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (13.48)$$

түрінде іздейміз.Мұндағы $A_0,A_1,\ldots,A_n$ белгісіз коэффициенттерді (13.48) функция (13.39) теңдеуді қанағаттандыратындай етіп табамыз. (13.48) функцияны екі рет дифференциалдап (13.39) теңдеуге қойсақ

$$Q_n''(x)+(2\alpha+p)Q_n'(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_n(x)=P_n(x) \quad (13.49)$$

болады. Мұндағы $Q_n(x)-n$-ші дәрежелі көпмүшелік, онда $Q_n'(x)-n-1$-ші дәрежелі, ал $Q_n''(x),\ (n-2)$-ші дәрежелі көпмүшелік болады. Сонымен, (13.49) теңдіктің сол жағында да оң жағында да n-ші дәрежелі көпмүшеліктер. Бірдей дәрежелі мүшелердің алдындағы коэффициенттерді теңестіріп $A_0, A_1, \ldots, A_n$ белгісіз коэффициенттерді анықтайтын $n+1$ теңдеу аламыз. Оларды шешіп, тиісті мәндерін (13.48) теңдікке қойсақ дербес шешімі табылады.

ә) α саны сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің біреуіне тең болсын. Бұл жағдайда дербес шешімді (13.48) теңдеу түрінде іздей алмаймыз. Себебі (13.49) теңдеудің сол жағы, $\alpha^2+p\alpha+q=0$ болғандықтан, $n-1$-дәрежелі көпмүшелік болып, ал оң жағы n-дәрежелі көпмүшелік болады. Демек, $A_0, A_1, \ldots, A_n$-коэффициенттерінің ешбір мәнінде (13.49) теңдік тепе-теңдікке айналмайды. Сондықтан бұл жағдайда дербес шешімді

$$\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x} \qquad (13.50)$$

түрінде іздейміз.

б) Сипаттаушы теңдеудің екі түбірі бір-біріне тең болып ол α санына тең болсын. Бұл жағдайда (13.49) теңдеудің сол жағындағы екі жақшаның іші де нөлге тең болады. Шынында Вьета теоремасы бойынша $\alpha+\alpha=-p$ және $\alpha^2+p\alpha+q=0,\ \alpha$-сипаттаушы теңдеудің түбірі. Олай болса, (13.49) теңдіктің сол жағы $n-2$-дәрежелі көпмүшелік, сондықтан дербес шешім

$$\tilde{y} = x^2Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (13.51)$$

түрінде ізделінуі тиіс.

II. (13.39) теңдеудің оң жағы

$$f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (13.52)$$

түрінде болсын. Мұндағы $P(x)$ пен $Q(x)$ - көпмүшеліктер.

а) $\alpha+i\beta$ комплекс саны сипаттаушы теңдеудің түбіріне тең болмасын. Бұл жағдайда (13.39) теңдеуінің дербес шешімі

$$\tilde{y} = u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (13.53)$$

түрінде ізделінеді. Мұндағы $u(x)$ пен $v(x)$ -дәрежелері $P(x)$ пен $Q(x)$-тердің ең үлкен дәрежесіне тең көпмүшеліктер.

ә) $\alpha + i\beta$ комплекс саны сипаттаушы теңдеудің түбіріне тең болсын. Бұл жағдайда (13.39) теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{y} = x\left[u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right] \qquad (13.54)$$

түрінде ізделінеді.

Ескерту! (13.39)-нің дербес шешімінің (13.53) және (13.54) түрлері (13.52) теңдіктегі $P(x)$ пен $Q(x)$ көпмүшеліктерінің біреуі нөлге тең болған жағдайда да сақталуы тиіс.

13.12. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (13.55)$$

бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық. Мұндағы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ -дер x -тің ізделініп отырған функциялары.

(13.55) жүйе нормал жүйе деп аталады.

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}, \ldots, y_n\big|_{x=x_0} = y_{n0} \qquad (13.56)$$

бастапқы шарттарды және (13.55) жүйені қанағаттандыратын $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функцияларын табу жүйені шешу деп аталады.

(13.55) жүйе белгісіздерді шығарып тастау әдісі деп аталатын төмендегі әдіспен шешіледі:

(13.55) жүйенің бірінші теңдеуін x бойынша дифференциалдаймыз

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}.$$

Мұндағы $\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx},...,\frac{dy_n}{dx}$-тардың орнына (13.55) жүйедегі мәндерін қоямыз

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n).$$

Соңғы теңдікті және x бойынша дифференциалдап, алдыңғыға ұқсас $\frac{dy_1}{dx},...,\frac{dy_n}{dx}$-тардың орнына және (13.55) жүйедегі мәндерін қоямыз

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,...,y_n).$$

Осылайша жалғастыра отырып, соңында

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$$

теңдікті аламыз. Сонымен, төмендегідей жүйе пайда болады.

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n).
\end{aligned} \tag{13.57}$$

(13.57) жүйенің алдыңғы $n-1$ теңдеуінен $y_2, y_3, ..., y_n$-дерді x, y_1, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$-лардың функциялары ретінде анықтаймыз. Яғни

$$\begin{aligned}
&y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}),\\
&y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)})
\end{aligned} \tag{13.58}$$

(13.58) дегі $y_2, y_3, ..., y_n$-дердің мәндерін (13.57) жүйенің соңғы теңдеуіне қоямыз.

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}). \tag{13.59}$$

(13.59) теңдеуді шешіп y_1-ді анықтаймыз:

$$y_1 = y_1(x, c_1, c_2, ..., c_n). \tag{13.60}$$

(13.60) теңдеуді n-1 рет дифференциалдап $y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}$-ларды табамыз да, оларды (13.58) жүйеге қоямыз. Соңында

$$\begin{cases} y_2 = y_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ y_3 = y_3(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{cases} \tag{13.61}$$

табылады. (13.60), (13.61) шешімінен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $c_1, c_2, \ldots, c_n$ -дердің мәндері табылады.

1-ескерту! Егер (13.55) жүйе сызықты болса, онда (13.59) теңдеу де сызықты болады.

2-ескерту! Кейбір жағдайда $y_2, y_3, \ldots, y_n$ белгісіздерді (13.57) жүйенің алдыңғы $n-1$ теңдеуінен емес, ал одан аз теңдеуінен де шығарып тастауы мүмкін. Мұндай жағдайда n -ші ретті (13.59) теңдеу орнына реті n -нен аз теңдеу алынады.

Сонымен, баяндалған әдіс арқылы теңдеу жүйесінен жоғары ретті бір теңдеуге өту мүмкін екен. Енді, керісінше, жоғары ретті бір теңдеуден бірінші ретті жүйеге өту есебін қарастыралық. Бізге үшінші ретті теңдеу берілсін, яғни

$$y''' = f(x, y, y', y'').$$

$y = y_1,\ y' = y_2,\ y'' = y_3$ деп алмастыру жасап

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = f(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Соңғы жүйе үшінші ретті теңдеуге төмендегідей мағынада пара-пар: егер $y(x)$ - үшінші ретті теңдеудің шешімі болса, онда $y_1(x) = y(x),\ y_2(x) = y'(x)$ және $y_3(x) = y''(x)$-лар

жүйенің шешімі болады. Ал, егер y_1, y_2, y_3-тер жүйенің шешімі болса, онда $y(x) = y_1(x)$ үшінші ретті теңдеудің шешімі болады.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dz} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

түріндегі жүйе автономдық жүйе деп аталады. Соңғы жүйенің ерекшеліктерінің бірі - теңдеулердің оң жағындағы функциялар t-ға тікелей тәуелді емес. Бұл жүйе де жоғарыда баяндалған әдіспен интегралданады.

13.13. Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі

Айталық, сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі берілсін.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (13.62)$$

Мұндағы a_{ij} - тұрақты коффициенттер, t - аргумент, ал $x_1(t),\ x_2(t), \ldots,\ x_n(t)$ - ізделініп отырған функциялар. (13.62) жүйе коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесі деп аталады.

(13.62) жүйені де n - ретті бір сызықты дифференциалдық теңдеуге келтіріп шешуге болады, бірақ біз бұл арада басқа әдісті баяндаймыз.

(13.62) жүйенің дербес шешімін

$$x_1 = a_1 e^{kt},\ x_2 = a_2 e^{kt},...,\quad x_n = a_n e^{kt} \qquad (13.63)$$

түрінде іздейміз. (13.63) функциялар (13.62) жүйенің шешімі болатындай етіп $a_1, a_2, ..., a_n$ және k-ларды анықтаймыз. Ол үшін (13.63)-ні (13.62) жүйеге қоямыз.

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_2)e^{kt} \\ k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_2)e^{kt} \\ - \\ k\alpha_n e^{kt} = (a_n\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_2)e^{kt} \end{cases}$$

Соңғы жүйедегі теңдеулердің екі жағын да e^{kt}-ға қысқартып түрлендіреміз.

Нәтижеде $a_1, a_2, ..., a_n$-дерге қарағанда n белгісізді n біртекті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \qquad (13.64)$$

(13.64) жүйенің нөлден өзгеше шешімі оның анықтауышы нөлге тең болғанда ғана болады. Олай болса k-ның

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & ... & a_{2n} \\ - \ - & - \ - & - \ - & - \ - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (13.65)$$

теңдеуін қанағаттандыратын мәндерін табуды қарастырамыз. (13.65) теңдеу (13.62) жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп аталады.

1. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі болсын, оларды $k_1, k_2, ..., k_n$ арқылы белгілейік. Әрбір k_i түбірі үшін (13.64) жүйенің

$$a_1^{(i)}, \quad a_2^{(i)}, ..., a_n^{(i)}$$

шешімдерін анықтаймыз. Сонда (13.62) жүйенің шешімі k_1 түбірі үшін $x_1^{(1)} = a_1^{(1)} e^{k_1 t}$, $x_2^{(1)} = a_2^{(1)} e^{k_1 t}$, ..., $x_n^{(1)} = a_n^{(1)} e^{k_1 t}$;
k_2 түбірі үшін $x_1^{(2)} = a_1^{(2)} e^{k_2 t}$, $x_2^{(2)} = a_2^{(2)} e^{k_2 t}$, ..., $x_n^{(2)} = a_n^{(2)} e^{k_2 t}$;
- - - - - - - - - - - - - - - - -
k_n түбірі үшін $x_1^{(n)} = a_1^{(n)} e^{k_n t}$, $x_2^{(n)} = a_2^{(n)} e^{k_n t}$, ..., $x_n^{(n)} = a_n^{(n)} e^{k_n t}$ функциялары болады. Демек,

$$\begin{cases} x_1 = c_1 a_1^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 a_1^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + c_n a_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 = c_1 a_2^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 a_2^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + c_n a_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ x_n = c_1 a_n^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 a_n^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + c_n a_n^{(n)} e^{k_n t} \end{cases} \qquad (13.66)$$

функциялар жүйесі (13.62) жүйенің жалпы шешімі болады. (13.66) функциялар жүйесін тиісті туындыларын алғаннан кейін (13.62) дифференциалдық теңдеулер жүйесіне тікелей апарып қойып, оны қанағаттандыратынына көз жеткізуге болады. Сонымен қатар, бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $c_1, c_2, ..., c_n$ тұрақтыларын да (13.66) жүйеден табуға болады.

2. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері әртүрлі, бірақ арасында комплекс түбірлері болсын. Мысалы, екі түйіндес комплекс түбірлері болсын делік:

$$k_1 = a + ib, \; k_2 = a - ib.$$

Бұл түбірлерге төмендегі шешімдер сәйкес келеді:

$$x_j^{(1)} = a_j^{(1)} e^{(a+ib)t}, \; (j = 1,2,...,n) \qquad (13.67)$$

$$x_j^{(2)} = a_j^{(2)} e^{(a-ib)t}. \quad (j = 1,2,...,n) \qquad (13.68)$$

Мұндағы $a_j^{(1)}$, $a_j^{(2)}$ коэффициенттері (13.64) жүйе арқылы анықталады.

Егер (13.67) мен (13.68)-лер жүйенің шешімі болса, онда олардың нақты және жорымал бөліктері де жүйенің шешімі болатындығын көрсету қиын емес, олай болса:

$$x_j^{(1)} = e^{at}\left(l_j^{(1)} \cos bt + l_j^{(2)} \sin bt\right), \qquad (13.69)$$

$$x_j^{(2)} = e^{at}\left(l_j^{-(1)} \sin bt + l_j^{-(2)} \cos bt\right), \qquad (13.70)$$

(13.62) жүйенің дербес шешімдері болады. Мұндағы $l_j^{(1)}, l_j^{(2)}, l_j^{-(1)}, l_j^{-(2)}$-лер $a_j^{(1)}$ және $a_j^{(2)}$-лер арқылы анықталатын нақты сандар.

(13.69), (13.70) функциялардың сәйкес комбинациялары берілген жүйенің жалпы шешімінің құрамына енеді.

Біртекті (13.62) жүйені шешудің баяндалған әдісін Эйлер әдісі деп атайды.

Он үшінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді жазыңыз.
2. Дифференциалдық теңдеудің шешімінің анықтамасын беріңіз.
3. $y' = f(x, y)$ дифференциалдық теңдеудің геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.
4. Коши теоремасын баяндаңыз.
5. Коши есебі деген не?
6. Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің анықтамасын беріңіз.
7. Дербес шешім деген не?
8. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу тек қана екі шешімге ие болуы мүмкін бе?

9. Дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің геометриялық мағынасы не?

10. Айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.

11. Біртекті функцияның анықтамасын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.

12. Біртекті дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.

13. Біртекті дифференциалдық теңдеуді шешу әдісін баяндаңыз.

14. Біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулерді шешу әдісін баяндаңыз.

15. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіз.

16.Сызықты дифференциалдық теңдеулерді шешудің Бернулли әдісін баяндаңыз.

17. Сызықты дифференциалдық теңдеудің шешімі қандай түрде ізделінеді?

18. Бернулли теңдеуінің анықтамасын беріңіз және шешу әдісін баяндаңыз.

19. Қандай теңдеу толық дифференциалдық теңдеу деп аталады?

20. Толық дифференциалдық теңдеу болу үшін қажетті және жеткілікті шартты жазыңыз.

21. Толық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін беретін формуланы жазыңыз.

22. Қандай жағдайда интегралдық көбейткішті жеңіл жолмен анықтауға болады?

23. Интегралдық көбейткішті табатын формулаларды жазыңыз.

24. Қандай теңдеулер екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады?

25. Сызықты тәуелсіз шешімдердің анықтамасын беріңіз.

26. Сызықты тәуелді шешімдердің анықтамасын беріңіз.

27. Екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің формуласын жазыңыз.

28. Вронский анықтауышы деп қандай анықтауышты айтады?

29. Сипаттаушы теңдеу деп қандай теңдеуге айтылады?

30. Сипаттаушы теңдеудің әр түрлі нақты түбірлеріне сәйкес жалпы шешім қандай болады?

31. Сипаттаушы теңдеудің түбірлері еселі болғанда дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қандай болады?

32. Сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қандай болады?

33. Дербес шешімді сұрыптау тәсілін баяндаңыз.

34. Қандай жүйе дифференциалдық теңдеулердің нормаль жүйесі деп аталады?

35. Белгісіздерді шығарып тастау әдісін баяндаңыз.

36. Қандай жүйелер бір жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеуге келеді?

37. Жоғары ретті бір теңдеуден бірінші ретті жүйеге қалай өтіледі?

38. Коэффициенттері тұрақты сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің Эйлер әдісін баяндаңыз.

14 тарау. ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ

14.1. Сан қатары туралы түсінік

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ сан тізбегін қарастыралық.

1-анықтама.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (14.1)$$

түріндегі өрнек *сан қатары* деп аталады.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ сандары қатардың мүшелері, ал a_n *саны қатардың жалпы мүшесі* деп аталады.

Мына түрдегі

$$S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

қосындылары, яғни қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындылары (14.1) қатардың *дербес қосындылары* деп аталады.

Енді

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots \qquad (14.2)$$

сан тізбегін қарастыралық.

2-анықтама. Егерде (14.2) тізбектің шегі S бар болса, онда (14.1) қатар *жинақты,* S саны (14.1) *қатардың қосындысы* деп аталады.

Егер (14.2) тізбектің шегі болмаса, онда (14.1) қатар *жинақсыз* деп аталады.

(14.1) қатар жинақты болған жағдайда, оны келесі түрде жазуға болады

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ \text{немесе}\ S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (14.3)$$

Біз, шын мәнінде, қатарлармен көптен бері таныспыз, өйткені, осы уақытқа дейін e мен π сандарын білеміз, яғни $e = 2,718\ldots$, ал $\pi = 3,14\ldots$ екендігі белгілі. Осы сандарды (14.3) теңдік бойынша былай жазуға болады

$$e = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \ldots$$

Егер $\{a_n\}$ тізбегі ретінде, өзімізге мектеп математика пәнінен таныс бірінші мүшесі $b \neq 0$, ал еселігі q болатын геометриялық прогрессияны қарастырсақ, онда

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots \qquad (14.4)$$

қатарын аламыз. $q \neq 1$ болғанда бұл қатардың дербес қосындысы

$$S_n = b + bq + \ldots + bq^{n-1} = \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}$$

түрінде болады. Осыдан:

1) егер $|q| < 1$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}\right) = \frac{b}{1-q},$$

яғни (14.4) қатар жинақты және оның қосындысы

$$S = \frac{b}{1-q}$$

болады;

2) егер $|q| > 1$ болса, онда $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, яғни (14.4) қатар жинақсыз;

3) егер $q = 1$ болса, онда $S_n = nb$ болады және $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, яғни (14.4) қатар жинақсыз;

4) егер $q = -1$ болса, онда (4) қатар былай жазылады

$$b - b + b - b + \ldots$$

Мұндай қатардың дербес қосындылары

$$S_1 = b,\ S_2 = 0,\ S_3 = b,\ S_4 = 0,\ldots$$

болады. Ал мұндай тізбектің шегі болмайтындығы белгілі (Анализге кіріспе бөлімін қараңыз).

Сонымен мынандай қорытындыға келдік:

(14.4) геометриялық қатар $|q| < 1$ болғанда жинақты, ал $|q| \geq 1$ болғанда жинақсыз.

Енді

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \qquad (14.5)$$

қатарын қарастыралық. Бұл қатардың жалпы мүшесін, яғни $\frac{1}{n(n+1)}$-ді мына түрде жазуға болады

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad (14.6)$$

(14.6) теңдікті пайдаланып (14.5) қатардың дербес қосындысы S_n – ді былай жазуға болады

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Жақшаларды ашсақ бірінші мен соңғы қосылғыштардан басқалары өзара жойылып кетеді. Демек,

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

болады. Олай болса

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

яғни (14.5) қатар жинақты екен.

Жинақты қатардың қасиеттері.

1°. Егер де (14.1) қатар жинақты болса, онда осы қатардан саны шекті мүшелерін алып тастағаннан кейінгі қатар да жинақты болады.

2°. Егер (14.1) қатар жинақты және оның қосындысы S-ке тең болса, онда қандайда бір c саны үшін

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$$

қатары да жинақты болады және оның қосындысы cS-ке тең.

Мынадай қатарларды қарастыралық

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (14.7)$$

$$(a_1 + b_1) + (a_1 + b_2) + \ldots (a_n + b_n) + \ldots \qquad (14.8)$$

3°. Егер (14.1) мен (14.7) қатарлары жинақты және олардың қосындылары сәйкес S_1 мен S_2-ге тең болса, онда (14.8) қатар да жинақты болады және оның қосындысы $(S_1 + S_2)$-ге тең болады.

Қатарды зерттегенімізде біздің алдымызда негізінен екі мәселе тұрады. Олардың біріншісі берілген қатарды жинақтылыққа зерттеу; екіншісі жинақты қатардың қосындысын табу.

Алдымен қатардың жинақты болуының қажетті шартын қарастыралық.

Теорема. Егер қатар жинақты болса, онда оның жалпы мүшесінің шегі нөлге тең болады, яғни

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Дәлелдеу. Айталық (14.1) қатар жинақты және оның қосындысы S-ке тең болсын. Кез келген натурал n саны үшін $S_n = S_{n-1} + a_n$ теңдігі орындалады. Олай болса осы теңдіктен $a_n = S_n - S_{n-1}$ теңдігін алып, шекке көшсек

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Ескерту! Осы теоремаға пара-пар мынадай тұжырымдама жасауға болады:

Егер қатардың жалпы мүшесінің шегі нөлге ұмтылмаса, онда ол қатар жинақсыз болады.

Мысал келтірелік.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0,$$

яғни бұл қатар жинақсыз.

3-анықтама.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (14.9)$$

қатары *гармониялық қатар* деп аталады.

Ескерту! (14.9) гармониялық қатар жинақсыз, оның дәлелдеуін [18, 37 т.б.] кітаптардан оқып алуды ұсынамыз. Бұл ескертуден мынадай қорытынды жасаймыз: жоғарыда дәлелденген теорема қатардың жинақты болуының тек қажетті ғана шарты бола алады, себебі, мысалы (14.9) гармониялық қатар үшін

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

бірақ ол қатар жинақсыз.

14.2. Оң қатарлар

Бұл тақырыпта барлық мүшелері оң

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (14.10)$$

қатарын қарастырамыз.

Енді осындай қатарлардың жинақтылық мәселесіне тоқталалық.

1-теорема. Оң қатар жинақты болу үшін оның дербес қосындыларының шектеулі болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Жеткіліктілігі. Қатар оң болғандықтан кез келген n үшін $S_n = S_{n-1} + a_n$ теңдігі орындалады, олай болса қатардың дербес қосындыларының тізбегі өспелі болады.

Олай болса, өзімізге Анализге кіріспе бөлімінен белгілі тұжырым бойынша $\{S_n\}$ тізбегінің шегі бар болады.

Қажеттілігі. Айталық (14.10) қатар жинақты болсын. Онда жинақтылықтың анықтамасы бойынша оның дербес қосындыларының шегі бар болады. Олай болса тізбектің шектерінің қасиеті бойынша қатардың дербес қосындыларының тізбегі шектелген болады.

Ескерту! Бұл критерийдің практикалық қолдануына қарағанда теориялық маңызы зор. Алайда, ол төмендегі қатар жинақтылығының жеткілікті шарттарының негізі болады.

Қатар жинақтылығының жеткілікті шарттары.

2-теорема (салыстыру белгісі).

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (14.10)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (14.11)$$

оң қатарлары үшін $a_n \le b_n \ \ (n = 1,2,\ldots)$ теңсіздіктері орындалса, онда (14.11) қатардың жинақтылығынан (14.10) қатардың жинақтылығы шығады; ал (14.1) қатар жинақсыз болса, онда (14.11) қатар да жинақсыз болады.

Дәлелдеу. (14.10) мен (14.11) қатардың дербес қосындыларын сәйкес S_n және σ_n арқылы белгілесек, онда кез келген n үшін

$$S_n \le \sigma_n \qquad (14.12)$$

теңсіздігі орындалады. (14.11) қатар жинақты болғандықтан $\{\sigma_n\}$ тізбегі шектелген болады, яғни барлық n-дер үшін қандайда бір C саны табылады да $\sigma_n \le C$ теңсіздігі орындалады. Олай болса (14.12) теңсіздік бойынша $\{S_n\}$ тізбегі де шектелген болады. Сондықтан (14.10) қатар жинақты болады.

1-мысал.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots \qquad (14.13)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots \qquad (14.14)$$

қатарларын қарастырайық. Кез келген n үшін

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$$

теңсіздігі орындалады және (14.14) қатар жинақты. Олай болса 1-теорема бойынша (14.13) қатарда жинақты болады.

2-мысал.

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \qquad (14.15)$$

қатары мен гармониялық қатарды қарастырайық. Кез келген $n\geq 2$ үшін

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

теңсіздігі орындалады және гармониялық қатар жинақсыз болғандықтан (14.15) қатар да жинақсыз болады.

3-теорема (салыстыру белгісі). Егерде (14.10) және (14.11) қатарлар үшін

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=d\neq 0 \qquad (14.16)$$

шегі бар болса, онда бұл екі қатар бір мезгілде не жинақты, не жинақсыз болады.

3-мысал. Жалпы мүшесі

$$a_n=\frac{n+3}{n^3+3n^2+5n+1} \qquad (14.17)$$

болатын қатар мен жалпы мүшесі

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

болатын (14.13) қатарды қарастырайық. Бұл қатарлар үшін

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n+3)}{n^3+3n^2+5n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2+7n+3}{n^3+3n^2+5n+1} = 1.$$

Олай болса жалпы мүшесі (14.17) теңдігі болатын

$$\frac{4}{10} + \frac{5}{31} + \ldots + \frac{n+3}{n^3+3n^2+5n+1} + \ldots$$

қатары да жинақты, себебі (14.13) қатар жинақты.

4-теорема. (Даламбер белгісі). Егерде (14.10) қатар үшін

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

болса, онда:

1) $d < 1$ болғанда (14.10) қатар жинақты;

2) $d > 1$ болғанда (14.10) қатар жинақсыз болады.

4-мысал.

$$\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots + \frac{3^n}{n!} + \ldots \qquad (14.18)$$

қатарын қарастырайық. Бұл қатарда

$$a_n = \frac{3^n}{n!},\ a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

яғни (14.18) қатар жинақты.

5-мысал.

$$1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\ldots \qquad (14.19)$$

қатары үшін

$$a_n=\frac{n^n}{n!},\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\,n!}{n^n n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

яғни (14.19) қатар жинақсыз.

5-теорема (Коши белгісі). Егер (14.10) қатар үшін

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=d$$

болса, онда:

1) $d<1$ болғанда (14.10) қатар жинақты;

2) $d>1$ болғанда (14.10) қатар жинақсыз болады.

6-мысал. $\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n+\ldots$ қатар жинақты, себебі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\frac{1}{3}<1.$$

7-мысал. $\frac{6}{4}+\left(\frac{10}{7}\right)^2+\left(\frac{14}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{4n+2}{3n+1}\right)^n+\ldots$ қатары жинақсыз, себебі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n+2}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{3n+1}=\frac{4}{3}>1.$$

6-теорема (интегралдық белгі). Айталық $[1;+\infty)$ аралығында анықталған $y=f(x)$ функциясы монотонды кемімелі болсын

және кез келген натурал n үшін $a_n = f(n)$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда (14.10) қатардың жинақты болуы үшін

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

меншіксіз интегралдың жинақты болуы қажетті және жеткілікті.

8-мысал.

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots \qquad (14.20)$$

қатары α-ның қандай мәндерінде жинақты немесе жинақсыз болатынын көрсетелік. Мұндағы α кез келген оң сан.

Ол үшін $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ $(x\geq 1)$ функциясын қарастыралық. Бұл функция $[1;+\infty)$ аралығында кемиді, себебі оның туындысы осы аралықта теріс. Шынында да

$$f'(x)=-\frac{\alpha}{x^{\alpha}}<0.$$

Сондықтан (14.20) қатардың жинақты немесе жинақсыз болуы

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad (14.21)$$

меншіксіз интегралына байланысты. (14.21) меншіксіз интеграл $\alpha>1$ болғанда жинақты, ал $\alpha\leq 1$ болғанда жинақсыз. Шынында да

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_1^N=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}+\frac{1}{\alpha-1}\right].$$

Соңғы шек α-ға байланысты. Егер $\alpha>1$ болса, ол $\frac{1}{\alpha-1}$-ге тең. Егер $\alpha\leq 1$ болса, ол шексіздікке тең. Олай болса (14.20) қатар $\alpha>1$ болғанда жинақты, ал $\alpha\leq 1$ болғанда жинақсыз болады.

9-мысал.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\ldots$$

қатары жинақты, себебі $\alpha=\frac{3}{2}>1.$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

қатары жинақсыз, себебі $\alpha=\frac{2}{3}<1.$

14.3. Таңбалары айнымалы қатарлар

Алдыңғы тақырыпта мүшелері оң қатарлар жөніндегі мәселелерді қарастырдық. Енді мүшелерінің таңбалары әртүрлі болып келетін қатарлар жөнінде әңгіме қозғалық.

Таңбалары айнымалы қатарлардың ішінде мүшелерінің таңбалары ауысып отыратын, яки таңбалары ауыспалы қатарлар жиі кездеседі. Егер де бірінші мүшесінің таңбасы оң деп ұйғарсақ, онда таңбалары ауыспалы қатар мына түрде жазылады:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots, \qquad (14.22)$$

мұндағы $a_n(n=1,2,\ldots)$ оң сандар.

Лейбниц теоремасы. Егер (14.22) таңбалары ауыспалы қатар төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

1) $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\ldots\geq a_n\ldots,$ яғни мүшелері кемімелі болса;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ болса, онда бұл қатар жинақты болады және $n\to\infty$ оның қосындысы қатардың бірінші мүшесі a_1-ден аспайды.

Дәлелдеу. Кез келген n үшін $a_n>a_{n+1}$ болғандықтан n шексіздікке ұмтылғанда a_n нөлге ұмтылады. (1) қатардың жұп мүшелерінен тұратын

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

дербес қосындысын қарастырайық. Теореманың бірінші шарты бойынша жақшалардың ішіндегі айырмалардың барлығы оң болады. Сондықтан $\{S_{2n}\}$ тізбегі өспелі тізбек.

Енді S_{2n} -ді мына түрде жазалық

$$S_{2n} = a_1 - \left[(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}\right].$$

Квадрат жақшаның ішіндегі өрнек оң. Олай болса кез келген n үшін $S_{2n} < a_1$ болады, яғни $\{S_{2n}\}$ тізбегі шектелген тізбек. Сонымен $\{S_{2n}\}$ тізбегі өспелі, шектелген тізбек екен. Олай болса $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ болады.

Екінші жағынан $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ және шарт бойынша

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Олай болса

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S\,.$$

Сонымен

$$0 < S < a_1.$$

1-мысал. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$ қатары жинақты, себебі жоға-рыдағы Лейбниц теоремасының екі шарты да орындалады. Шынында да

1) $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots > \frac{1}{n^2} > \ldots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$

14.3.1. Абсолют және шартты жинақты қатарлар

Айталық

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ... \qquad (14.23)$$

таңбалары ауыспалы қатар берілсін. Осы қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған

$$|a_1| + |a_2| + ...+ |a_n| + ... \qquad (14.24)$$

оң қатарын қарастырайық.

1-анықтама. Егер (14.24) қатар жинақты болса, онда (14.23) қатар *абсолют жинақты* қатар деп аталады.

Теорема. Кез келген абсолют жинақты қатар жинақты болады.

1-мысал.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \qquad (14.25)$$

қатарының абсолют жинақты екендігін дәлелделік. Ол үшін оның мүшелерінің абсолют шамаларынан тұратын.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \qquad (14.26)$$

қатарын құралық.

Біріншіден $\sin\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$ теңсіздігі орындалатындықтан, екіншіден, (14.26) қатардың мүшелері жинақты

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$$

қатарының сәйкес мүшелерінен аспайтындықтан (4) қатар жинақты болады. Олай болса (3) қатар абсолют жинақты.

2-анықтама. Егер (14.23) қатар жинақты, ал (14.24) қатар жинақсыз болса, онда (14.23) қатар *шартты жинақты қатар* деп аталады.

Мысалы,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$$

қатары шартты жинақты қатар. Себебі, бұл қатар Лейбниц теоремасы бойынша жинақты. Екіншіден, бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған оң қатар гармониялық қатар. Ал ол қатардың жинақсыз екені белгілі.

14.4. Дәрежелі қатарлар

1-анықтама.

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (14.27)$$

түріндегі қатар *функциялық қатар* деп аталады. Мұндағы $u_1(x),u_2(x),\ldots$ x-тің қандай да бір функциялары. Олардағы x-ке әртүрлі мәндер бере отырып, біз әртүрлі сан қатарын аламыз. Ол қатарлар жинақты болуы да, болмауы да мүмкін.

2-анықтама. (14.27) функциялық қатар жинақты болатын x-тің мәндерінің жиыны оның *жинақтылық облысы* деп аталады.

3-анықтама.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (14.28)$$

түріндегі қатар *дәрежелі қатар* деп аталады. Мұндағы $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ тұрақты сандар. Олар дәрежелі қатардың коэффициенттері деп аталады.

Дәрежелі қатарлар функциялық қатардың дербес жағдайы болады.

Кез келген дәрежелі қатардың жинақтылық облысы бос жиын болмайды, себебі (14.28) қатар $x=0$ болғанда жинақты.

Дәрежелі қатарлар үшін келесі тұжырымның маңызы өте зор.

Абель теоремасы. Егер де (14.28) қатар нөлден өзгеше $x=x_0$ мәнінде жинақты болса, онда ол $|x|<|x_0|$ теңсіздігін

қанағаттандыратын x-тің барлық мәндерінде абсолют жинақты болады. Егер де (14.28) қатар $x = x_1$ мәнінде жинақсыз болса, онда $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанғаттандыратын x-тің барлық мәндерінде де жинақсыз болады.

Дәлелдеу. Шарт бойынша

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots \qquad (14.28)$$

қатары жинақты болғандықтан n шексіздікке ұмтылғанда оның жалпы мүшесі $a_n x_0^n$ нөлге ұмтылады. Демек $\{a_n x_0^n\}$ тізбегі шектелген тізбек. Олай болса, қандайда бір M оң саны табылады да барлық n - дер үшін $|a_n x_0^n| < M$ теңсіздігі орындалады.

(14.28) қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (14.29)$$

қатарын қарастыралық.

Айталық $|x| < |x_0|$ болсын, онда $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$; $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ болғандықтан (14.29) қатардың мүшелері

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots. \qquad (14.30)$$

жинақты қатарының сәйкес мүшелерінен аспайды. (14.30) қатар еселігі $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ болатын геометриялық қатар болғандықтан ол жинақты болады.

Сондықтан (14.29) қатар жинақты, олай болса (14.28) қатар абсолют жинақты болады.

Енді теореманың екінші бөлімін дәлелделік. Кері жориық, яғни (14.28) қатар $x = x_1$ мәнінде жинақсыз, бірақ $|x| > |x_1|$

шартын қанағаттандыратын x-тер үшін (14.28) қатар жинақты болсын делік. Онда теореманың бірінші бөлімі бойынша (14.28) қатар $x = x_1$ мәнінде жинақты болады. Сөйтіп қарама-қайшылыққа келдік. Теорема толық дәлелденді.

Абель теоремасы геометриялық тұрғыдан келесі мәселелерді білдіреді: егер (14.28) қатар x_0 нүктесінде жинақты болса, онда ол қатар $\left(-|x_0|;\ |x_0|\right)$ аралығының барлық ішкі нүктелерінде абсолют жинақты болады, ал бұл аралықтың сыртқы нүктелерінде жинақсыз болады.

1-теорема. Дәрежелі қатар үшін тек төмендегі үш жағдай ғана болады:

1) жалғыз ғана $x = 0$ нүктесінде жинақты болады;

2) x-тің барлық мәндерінде жинақты болады;

3) R оң саны табылады да $(-R;R)$ аралығының ішкі нүктелерінде жинақты, ал сыртқы нүктелерінде жинақсыз болады. $(-R;R)$ аралығының шеткі $x = -R$ және $x = R$ нүктелерінде жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін.

Бұл теоремадан мынадай қорытынды шығады: дәрежелі қатардың жинақтылық облысы не жалғыз ғана нүкте болады, не бүкіл сан өсі болады, не $(-R;R)$ түріндегі аралықтар болады.

4-анықтама. $(-R;R)$ аралығы дәрежелі қатардың *жинақтылық аралығы,* ал R *саны жинақтылық радиусы* деп аталады.

Ескерту! Жоғарыдағы теореманың бірінші жағдайында $R = 0$, ал екінші жағдайында $R = \infty$ деп аламыз.

Енді дәрежелі қатардың жинақтылық радиусын табу мәселесін қарастыралық.

2-теорема. Егер де

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad (14.31)$$

шегі бар және ол нөлден өзгеше болса, онда дәрежелі қатардың жинақтылық радиусы

$$R = \frac{1}{D} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{14.32}$$

шамасына тең болады.

1-мысал.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{14.33}$$

қатарының жинақтылық радиусын табалық. Бұл қатар үшін $a_n = \frac{1}{n!}$. Олай болса $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. Сондықтан (14.32) теңдіктің негізінде

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

яғни (14.33) қатар бүкіл сан өсінде жинақты болады.

2-мысал.

$$x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots \tag{14.34}$$

дәрежелі қатарының жинақтылық радиусын табалық.

Қатардың жалпы мүшесі $(nx)^n$-ке тең. Сондықтан $n > \frac{1}{|x|}$ шартын қанағаттандыратын x-тің нөлден өзгеше мәндері үшін $(n|x|)^n > 1$ болады. Бұл теңсіздік (14.34) қатардың барлық $x \neq 0$ үшін жинақсыз болатындығын көрсетеді. Олай болса (14.34) қатардың жинақтылық облысы тек $x = 0$ нүктесінен ғана тұрады, яғни жинақтылық радиусы нөлге тең.

14.4.1. Дәрежелі қатарлардың қасиеттері

Айталық жинақтылық интервалы $(-R, R)$ болатын дәрежелі қатардың қосындысы $f(x)$ функциясына тең, яғни

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (14.35)$$

болсын. Бұл жағдайда $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінеді деп айтады.

Дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау туралы теорема. Айталық $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінсін, яғни (14.35) теңдік орындалсын. (14.27) дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау арқылы алынған

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \qquad (14.36)$$

қатарын қарастыралық. Сонда:

1) (14.36) қатардың да жинақтылық радиусы R-ге тең болады;

2) $(-R,R)$ аралығында $f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ бар болады және

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \qquad (14.37)$$

теңдігі орындалады.

14.4.2. Дәрежелі қатарды мүшелеп интегралдау туралы теорема

Егер де $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында дәрежелі қатарға жіктелінсе, онда бұл функция осы аралықта интегралданады және қосындының интегралы қатардың мүшелерінің интегралдарының қосындыларына тең болады

Басқаша айтқанда, егер $[\alpha;\beta]\subset(-R,R)$ болса, онда

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta a_0dx+\int_\alpha^\beta a_1xdx+\int_\alpha^\beta a_2x^2dx+\ldots+\int_\alpha^\beta a_nx^ndx+\ldots$$

теңдігі орындалады.

5-анықтама. Егер кез келген мейлінше кіші $\varepsilon>0$ саны үшін сондай бір оң N саны табылып, $n>N$ теңсіздікті

қанағаттандыратын барлық $n-$дер үшін $\left|R_n(x)\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда (14.27) қатар бірқалыпты жинақталады деп аталады. Мұндағы $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots,\ x,$ (14.27) қатардың бірқалыпты жинақталу облысының нүктесі.

Вейерштрасс белгісі. Егер $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ функциялары $\left|u_1(x)\right|\le M_1,\left|u_2(x)\right|\le M_2,\ldots,\left|u_n(x)\right|\le M_n,\ldots$ теңсіздіктерін қанағаттандырса және

$$M_1+M_2+\ldots+M_n+\ldots$$

сан қатары жинақты болса, онда $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ функциялы қатар бірқалыпты және абсолют жинақты болады.

3-теорема. Үзіліссіз функциялардан құралған бірқалыпты жинақты қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

4-теорема. Егер берілген қатардың туындысынан шыққан қатар бірқалыпты жинақты болса, онда берілген қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

14.5. Функциялардың дәрежелі қатарларға жіктелінуі. Маклорен қатары

Практикада берілген функцияны дәрежелі қатарға қалай жіктеу мәселесін білудің маңызы өте зор. Ол үшін төмендегі екі мәселені білуге тиіспіз:

1) берілген аралықта функцияны дәрежелі қатардың қосындысы түрінде өрнектеуге бола ма?

2) егер болса, ол қатар қалай табылады?

Біз екінші сауалдың жауабын іздеуден басталық.

Қандайда бір $[-R,R]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы дәрежелі қатардың қосындысына жіктеледі деп ұйғаралық, яғни

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^4+\ldots \qquad (14.38)$$

болсын. Осы қатардың $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ коэффициенттерін табалық.

Алдынғы тақырыпта жинақтылық облысында жататын кез келген $[-R;R]$ кесіндісінде (14.38) дәрежелі қатарды қалауымызша мүшелеп дифференциалдауға болатыны жөнінде айтқанбыз. Сондықтан $(\alpha;\beta)$ аралығында жатқан кез келген x үшін

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots$$
$$f''(x)=2\cdot1\cdot a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2+\ldots$$
$$f'''(x)=3\cdot2\cdot1\cdot a_3+4\cdot3\cdot2\cdot a_4x+\ldots$$
$$---------------------$$
$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots3\cdot2\cdot1\cdot a_n+\ldots$$

Осы алынған теңдіктер мен (14.38) теңдіктен $x=0$ деп ұйғара отырып

$$f(0)=a_0,$$
$$f'(0)=a_1,$$
$$f''(0)=2\cdot1\cdot a_2,$$
$$--------$$
$$f^{(n)}(0)=n!a_n$$

теңдіктердің немесе кез келген n үшін $(n=0,1,2,\ldots)$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

формуласын аламыз.

Анықтама. Айталық $f(x)$ функциясы $x=0$ нүктесінің аймағында анықталсын және осы нүктеде оның барлық туындылары бар болсын. Сонда

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (14.39)$$

қатары $f(x)$ функциясының Маклорен қатары деп аталады.

Енді жоғарыдағы екінші сауалдың жауабын келесі тұжырым түрінде беруге болады.

1-теорема. Егер де $f(x)$ функциясы $x=0$ нүктесінің аймағында дәрежелі қатарға жіктелсе, ол міндетті түрде Маклорен қатары болады.

Функцияның Маклорен қатарына жіктелуінің жеткілікті шарты.

Айталық $f(x)$ шексіз дифференциалданатын функция болсын. Оған (14.39) Маклорен қатарын құруға болады. Қандай шарттар орындалғанда осы Маклорен қатарының қосындысы $f(x)$ функциясымен сәйкес келетіндігін көрсетелік. Біз «Бір айнымалы функциясының дифференциалдық есептеулер» бөлімінде

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

түріндегі Маклерон формуласы жөнінде айтқанбыз. Мұндағы

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \ 0<c<x \qquad (14.40)$$

қалдық мүше болатын.

Егер $S_n(x)$ арқылы Маклорен қатарының дербес қосындысын белгілесек, Маклорен формуласы былай жазылады

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x). \qquad (14.41)$$

(14.41) теңдіктен Маклорен қатарының $f(x)$ функциясына жинақталу мәселесінің n шексіздікке ұмтылғанда қалдық $R_n(x)$-тің шегін зерттеу мәселесіне байланысты екендігіне көз жеткізу қиын емес.

2-теорема. Айталық $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ аралығында анықталған және шексіз дифференциалданатын

болсын. Егер де осы аралықтың барлық нүктелері үшін қандай да бір M саны табылып

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M \quad (n = 0,1,2,...) \tag{14.42}$$

теңсіздігі орындалса, онда осы интервалда Маклорен қатары $f(x)$ функциясына жинақты болады.

Дәлелдеу. (14.41) формуласы бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ болатынын дәлелдесек жеткілікті. Теореманың шарттарынан және (14.40) теңдіктен

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

теңсіздігі шығады.

Бұл теңсіздіктің оң жағы жинақты (14.33) қатарының, яғни

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

қатарының мүшелерінен тұрақты M санымен ғана өзгешеленеді. Қатар жинақтылығының қажетті белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. Осыдан қатардың қалдық мүшесінің шегі нөлге тең болатындығы шығады.

14.5.1. e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $arctgx$ және $(1+x)^\alpha$ функциясының Маклорен қатарына жіктелінулері

1) $f(x) = e^x$. $(-d,d)$ аралығының кез келген x нүктесі үшін

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^d.$$

Олай болса алдыңғы тақырыптағы теорема бойынша $(-R,R)$ аралығындағы x үшін e^x функциясы өзінің Маклорен

қатарының қосындысына тең. Екінші жағынан кез келген n үшін $f^{(n)}(0)=e^0=1$ болғандықтан

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (14.43)$$

Дәл осылай етіп төмендегі жіктеулерге көз жеткізу қиын емес.

2) $f(x)=\sin x$.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad (14.44)$$

3) $f(x)=\cos x$.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (14.45)$$

4) $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ қатары геометриялық қатар болғандықтан $|x|<1$ болғанда жинақты және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$ функциясына тең, яғни

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^4+\ldots \qquad (14.46)$$

(14.46) теңдіктен $x=-t$ алмастыруын жасап

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots \qquad (14.47)$$

теңдігін аламыз. Осы соңғы теңдікті 0-ден x-ке дейін мүшелеп интегралдасақ, яғни

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\left(1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots\right)dt$$

Немесе

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots \qquad (14.48)$$

формуласын аламыз.

Дәл осы жолмен (14.46) теңдіктен $x=-t^2$ алмастыруын жасап

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (14.49)$$

формуласын аламыз.

5) $f(x)=(1+x)^\alpha$, мұндағы α кез келген сан.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (14.50)$$

Ескерту! Егер (14.50) формулада $\alpha = n \in N$ болса, онда бұл формула өзімізге мектеп математика пәнінен белгілі Ньютон биномымен сәйкес келеді.

14.6. Дәрежелі қатардың жуық есептеулерге қолданылуы

1. Логарифмдік функцияның мәндерін есептейік. 14.5-тақырыбының (14.48) формуласынан x-ті минус x-ке алмастырсақ

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

14.5-тақырыбының (14.48) формуласынан соңғы теңдікті алсақ

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots.\right). \quad (14.51)$$

Мұнда $|x|<1;\ \frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ деп алмастыру орындаймыз; онда

$$x = \frac{1}{2n+1}.$$

Кез келген $n>0$-де $0<x<1$, сондықтан

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+.....\right),$$

осыдан

$$\ln(n+1)-\ln n=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+...\right). \quad (14.52)$$

(14.52) қатарда $n=1$ десек,

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+...\right). \quad (14.53)$$

*ln*2-ні берілген дәлдікпен есептеу үшін (14.53) қатардың n мүшесінің қалдығын бағалайық.

$$R_n=2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}+\frac{1}{(2n+5)\cdot 3^{2n+5}}+...\right)<$$

$$<2\left(\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+1)3^{2n+3}}+\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+5}}+\right)=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{3^{2n+3}}+\frac{1}{3^{2n+5}}+...\right)=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{(2n+1)3^{2n-1}\cdot 4}.$$

Егер *ln*2–ні 10^{-6} дәлдікпен есептеу қажет болса, онда n-нің мәнін $R_n<10^{-6}$ болатындай етіп алынады. (14.53) формуладан 6 мүшенің қосындысын алсақ *ln*2 10^{-6} дәлдікпен есептелген болады.

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\right).$$

(14.52) - формулада $n=2$ десек

$$\ln 3\approx\ln 2+2\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\ldots\right).$$

Осылайша кез келген бүтін санның логарифмін берілген дәлдікпен есептей аламыз.

2. Анықталған интегралды жуық есептеу.

а) $\int_o^a e^{-x^2} dx$ -ды жуықтап есептелік.

e^{-x^2} -ның алғашқы функциясы элементар функциямен өрнектелмейді. Сондықтан e^x -тің жіктелуінде x -ті минус x^2 -қа алмастырсақ:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

Соңғы теңдікті $(0, a)$ аралықта мүшелеп интегралдасақ:

$$\int_o^a e^{-x^2} dx = a - \frac{a^3}{1!\cdot 3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \frac{a^7}{3!\cdot 7} + \frac{a^9}{4!\cdot 9} - \dots$$

Бұл формуладан пайдаланып берілген интегралды кез келген а үшін кез келген дәлдікпен жуық есептеуге болады.

б) $\int_o^a \frac{\sin x}{x} dx$ интегралды есептейік.

$sinx$ -тің жіктелуінен пайдаланып

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

жіктелуін аламыз, оны мүшелеп интегралдасақ

$$\int_o^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3!\cdot 3} + \frac{a^5}{5!\cdot 5} - \frac{a^7}{7!\cdot 7} + \dots$$

Бұл интеграл да кез келген a үшін кез келген дәлдікпен жуық есептеледі.

3. Дифференциалдық теңдеулерді дәрежелі қатардың көмегімен интегралдау.

$$y'' = F(x, y, y') \tag{14.54}$$

теңдеуінің $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу есебін қарастыралық.

Бұл есепті шешу үшін $y = f(x)$-ті мынадай Маклорен қатары түрінде іздейміз.

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \tag{14.55}$$

Мұндағы $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots$-терді (14.54) теңдеудің және бастапқы шарттың көмегімен анықтаймыз. Бастапқы шарттардан:

$$f(0) = y_0; \quad f'(0) = y_0'.$$

(14.54) теңдеуден

$$f''(0) = y''\big|_{x=0} = F\left(0, y_0, y_0^1\right).$$

(14.54) теңдеудің екі жағын x бойынша дифференциалдаймыз:

$$y''' = F_x'(x, y, y') + F_y'(x, y, y')\cdot y' + F_{y'}'(x, y, y')\cdot y'' \tag{14.56}$$

$$f'''(0) = y'''\big|_{x=0} = F_x'(0, y_0, y_0') + F_y'(0, y_0, y_0')\cdot y_0' + F_{y'}'(0, y_0, y_0')$$

(14.56) теңдеудің екі жағын дифференциалдап $f^{IV}(0)$-ді, т.с.с. анықталады. Табылғандарды (14.55) формулаға қойып берілген есептің қатар түріндегі шешімін аламыз (қатардың жинақтылық облысында).

Мысалы, $y'' = e^y + x$ теңдеудің $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табайық.

Шешуі.

$$f(0) = 1;\ f'(0) = 0;$$

$$f''(0) = y''\big|_{x=0} = e;$$

$$y''' = e^y \cdot y' + 1.$$

$$f'''(0) = y'''\big|_{x=0} = e\cdot 0 + 1 = 1.$$

$$y^{IV} = e^y \cdot \left(y^1\right)^2 + e^y \cdot y''$$

$$f^{IV}(0)=y^{IV}\big|_{x=0}=e\cdot 0+e\cdot e=e^2$$

(14.55) формулаға қойсақ

$$f(x)=1+\frac{e}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{e^2}{24}x^4+\ldots$$

14.7. Фурье қатары

Табиғаттың, техниканың тағы басқа салалардың көптеген құбылыстары белгілі бір уақыт аралығынан кейін қайталанып отырады. Мұндай құбылыстарды периодты деп атайды. Электрмагниттік тербелістердің таралуымен байланысты құбылыстар, шатун және поршеннің мотор ішіндегі қозғалысы тағы басқалар периодты құбылыстарға мысал болады. Периодты құбылыстарды математикалық тұрғыдан үйрену үшін оларды периодты функциялар арқылы өрнектейді. Периодты функциялардың анықтамасы 5-тарауда берілген.

$\sin x$ және $\cos x$ функциялары ең қарапайым периодты функциялар, олардың периоды 2π -ге тең.

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x,\ \cos(x\pm 2\pi)=\cos x.$$

$\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ функциялары да периодты, бірақ олардың периоды $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Шынында да,

$$\sin\left[\omega\left(x\pm\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]=\sin(\omega x\pm 2\pi)=\sin\omega x\cdot$$

2π саны да $\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ функцияларының периоды болады, бірақ ең кіші периоды емес, сондықтан оларды да 2π периодты функциялар деп атаса болады.

Егер $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ қатынасы рационал сан болса, онда $a\sin\omega_1 x+b\cos\omega_2 x$ қосындының да периодты функция болатындығын дәлелдеуге болады.

Гармоникалық құбылыстар ең қарапайым периодты құбылыстар болып, олар $\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ периодты функцияларымен өрнектеледі. Күрделірек периодты құбылыстар $\sin\omega x$ және $\cos\omega x$ функцияларының шектеулі немесе шексіз сандағы қосындылары түрінде өрнектеледі.

Алдағы уақытта керек болатын келесі формулаларды келтіреміз:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos p x\cdot\cos k x\,d x=\begin{cases}0, & егер \quad p\neq k;\\ \pi, & егер \quad p=k.\end{cases} \tag{14.57}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin p x\cdot\sin k x\,d x=\begin{cases}0, & егер \quad p\neq k;\\ \pi, & егер \quad p=k.\end{cases} \tag{14.58}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin p x\cdot\cos k x\,d x=0, \tag{14.59}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos k x\,d x=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin k x\,d x=0\cdot \tag{14.60}$$

(14.57) – (14.60) формулалардың дұрыстығын тексеруді студенттердің өздеріне ұсынамыз.

1-анықтама.

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$$

түріндегі қатар тригонометриялық қатар деп аталады.

Мұндағы $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_n,b_n,\ldots$ сандары тригонометриялық қатардың коэффициенттері деп аталады.

Тригонометриялық қатар көбінесе келесі түрде жазылады:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n x+b_n\sin n x\right). \tag{14.61}$$

Егер (14.61) қатар жинақты болса, онда оның мүшелері 2π периодты болғандықтан, қосындысы да 2π периодты функция болады.

2-анықтама. Егер (14.61) қатардың қосындысы $f(x)$ - ке тең болса, яғни

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (14.62)$$

онда $f(x)$ функциясы тригонометриялық қатарға жіктеледі деп айтылады.

Енді, (14.62) қатары $[-\pi,\pi]$ сегментінде $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын болсын деп ұйғаралық та, оны мүшелеп интегралдайық.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)\cdot$$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0$ болғандықтан

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx=\frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=a_0\pi\cdot$$

Соңғы теңдіктен

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (14.63)$$

a_n коэффициентті анықтау үшін (14.62) теңдіктің екі жағын $\cos kx$-ке көбейтіп, кейін мүшелеп $[-\pi,\pi]$ сегментінде интегралдаймыз, мұндағы k - натурал сан.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\cos kx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx\right). \qquad (14.64)$$

(14.57)-(14.60) формулаларға негізделіп (14.64) теңдікті келесі түрде жазамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \pi ,$$

осыдан

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx. \qquad (14.65)$$

Осыған ұқсас, (14.62) теңдіктің екі жағын $\sin kx$-ке көбейтіп $[-\pi,\pi]$ сегментінде мүшелеп интегралдау нәтижесінде

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx . \qquad (14.66)$$

Сонымен, егер 2π периодты $f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ сегментінде бірқалыпты жинақты (14.62) қатардың қосындысы болса, онда оның коэффициенттері (14.63), (14.65) және (14.66) формулалары арқылы анықталады екен.

3-анықтама. (14.63), (14.65) және (14.66) формулалар арқылы анықталатын коэффициенттерді Эйлер-Фурье коэффициенттері (немесе Фурье коэффициенттері) деп атайды.

4-анықтама. Коэффициенттері Эйлер-Фурье формулалары, яғни (14.63), (14.65) және (14.66) теңдіктер арқылы анықталатын

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

тригонометриялық қатар $f(x)$ функциясының Фурье қатары деп аталады.

Сонымен, егер периодты $f(x)$ функциясы бірқалыпты жинақталатын тригонометриялық қатардың қосындысы болса, онда ол қатар Фурье қатары болады екен.

(14.63), (14.65) және (14.66) формулаларды қорытып шығарарда, біз (14.62) қатар $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақталатын болсын деп ұйғарған едік. Енді келесі сұрақ туындайды:

$f(x)$ функциясы қандай шарттарды қанағаттандырғанда оның Фурье қатары жинақты болады және қатардың қосындысы $f(x)$-ке тең болады?

Бұл сұраққа келесі теорема жауап береді.

Дирихле теоремасы. Егер 2π периодты $f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде үзік – монотонды және шектелген болса, онда бұл функцияның Фурье қатары сан өсінің барлық нүктелерінде жинақты болады. $f(x)$ функциясының үзіліссіз нүктелеріндегі мәні қатардың қосындысы $S(x)$-ке тең. Ал әрбір x_i үзіліс нүктесінде қатардың қосындысы келесі формуламен анықталады

$$S(x_i)=\frac{1}{2}[\lim_{x\to x_i-0} f(x)+\lim_{x\to x_i+0} f(x)].$$

Бұл теоремадан Фурье қатарымен өрнектелетін функциялар тобының кең екендігі көрініп тұр. Сондықтан Фурье қатары жаратылыстану ғылымда-рында, әсіресе математикада кеңінен қолданылады.

14.8. Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатары

1. Егер $f(x)$ - жұп функция болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx\,.$$

Шынында да,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx +$$

$$+\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

2. Егер $f(x)$ - тақ функция болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0 \cdot$$

Фурье қатарына жұп $f(x)$ функциясын жіктеуден басталық. Бұл жағдайда $f(x)\cdot\sin kx$ - тақ, $f(x)\cdot\cos x$ - жұп функция болады. Онда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kxdx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = 0,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда $f(x)\cdot\sin kx$ - жұп, ал $f(x)\cdot\cos kx$ - тақ функция болады. Сондықтан

$$a_0 = a_k = 0,$$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin kxdx = 0,$ онда тақ функцияның Фурье қатары $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ түрінде болады.

Сонымен, жұп функция тек қана косинустар бойынша, ал тақ функция тек қана синустар бойынша жіктеледі екен.

14.9. $2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу

$f(x)-2l$ периодты функция болсын.

$$x=\frac{lt}{\pi}$$

алмастыруын орындаймыз. Онда $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ функциясы t-ның 2π периодты функциясы болады. Соңғы функцияның Фурье қатарына жіктелуі келесі түрде болады:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

мұндағы

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ktdt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin ktdt.$$

Соңғы теңдіктерде x айнымалысына көшеміз.

$$x=\frac{lt}{\pi};\quad t=\frac{\pi}{l}x;\quad dt=\frac{\pi}{l}dx;$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

Сонымен, $2l$ периодты $f(x)$ функциясы үшін Фурье қатары келесі түрде болады.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right).$$

$2l$ периодты жұп $f(x)$ функциясы үшін

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\quad a_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,\quad b_k=0,$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

$2l$ периодты тақ $f(x)$ функциясы үшін

$$a_0=a_k=0,\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Енді $[0,l]$ сегментінде берілген $f(x)$ функциясын қарастыралық. Егер бұл функцияны $[-l,0]$ сегментінде үзік – монотонды түрде қалауымызша жалғастырсақ (қосымша анықтасақ), онда оны Фурье қатарына жіктеуге болады. Дербес жағдайда, берілген функцияны $[-l,0]$ сегментінде $f(-x)=f(x)$ болатындай етіп қосымша анықтасақ, онда жұп функция шығады. Мұндай жағдайды « $f(x)$ функциясы жұп жалғастырылды» деп атайды.

Жұп жалғастырылған $f(x)$ функциясы тек қана косинустар бойынша Фурье қатарына жіктеледі.

Егер $[0,l]$ сегментінде берілген $f(x)$ функциясын $[-l,0]$ сегментінде $f(-x)=-f(x)$ болатындай етіп, қосымша анықтасақ, онда тақ функция шығады. Бұл жағдайда « $f(x)$ функциясы тақ жалғастырылды» деп атайды.

Тақ жалғастырылған $f(x)$ функциясы тек қана синустар бойынша Фурье қатарына жіктеледі.

Сонымен, $[0,l]$ сегментінде берілген үзік – монотонды функцияны косинустар бойынша да синустар бойынша да Фурье қатарына жіктеуге болады екен.

Он төртінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Сан қатарының анықтамасын беріңіз.
2. Дербес қосындылар деген не?
3. Жинақты қатар деп қандай қатарды айтады?
4. Жинақсыз қатар деп қандай қатарды айтады?
5. Жинақты қатарлардың қасиеттерін атаңыз.
6. Қатардың жинақтылығының қажеттілік шартын жазыңыз.
7. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ болса, қатар жинақты болама?
8. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, кез келген қатар жинақты болама?
9. Қандай қатар гармоникалық қатар деп аталады?
10. Гармоникалық қатар жинақты ма немесе жинақсыз ба?
11. Мүшелері оң қатарларды салыстыру белгісін жазыңыз.
12. Жинақтылықтың Даламбер, Коши белгілерін жазыңыз.
13. Жинақтылықтың интегралдық белгісін жазыңыз.
14. Таңбалары ауыспалы қатар деп қандай қатарға айтылады?
15. Лейбниц теоремасын жазыңыз және дәлелдеңіз.
16. Абсолютті және шартты жинақтылықтың анықтамасын беріңіз.
17. Дәрежелі қатардың жинақтылық облысының анықтамасын беріңіз.
18. Абель теоремасын жазыңыз, дәлелдеңіз.
19. Қатардың жинақтылық радиусы, жинақтылық аралығы деген не?
20. Қатардың жинақтылық радиусы қалай табылады?
21. Дәрежелі қатардың қасиеттерін атаңыз.
22. Қандай қатарды Маклорен қатары деп атайды?
23. Маклорен қатарының $f(x)$ функциясына жинақты болуының қажетті және жеткілікті шартын беріңіз.
24. e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $arctgx$ және $(1+x)^\alpha$ функцияларының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.
25. Дәрежелі қатардың қалдығын бағалау не үшін қажет?
26. Логарифмдік функцияның мәндері қалай жуық есептеледі?

27. Анықталған интегралды дәрежелі қатардың көмегімен жуық есептеу әдісін баяндаңыз

28. Дифференциалдық теңдеулер дәрежелі қатардың көмегімен қалай интегралданады?

29. Қандай қатар тригонометриялық қатар деп аталады?

30. Фурье коэффициенттері қандай формулалар арқылы өрнектеледі?

31. Қандай қатар Фурье қатары деп аталады?

32. Дирихле теоремасын баяндаңыз.

33. Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатарын жазыңыз.

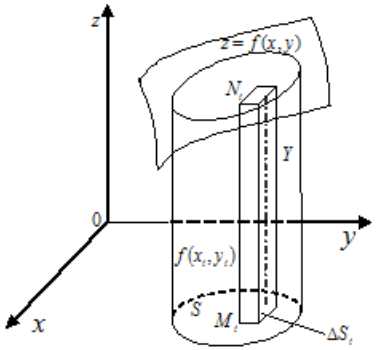
34. $2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеңіз.

35. $[0,l]$ сегментінде берілген функцияны Фурье қатарына жіктеу әдісін баяндаңыз.

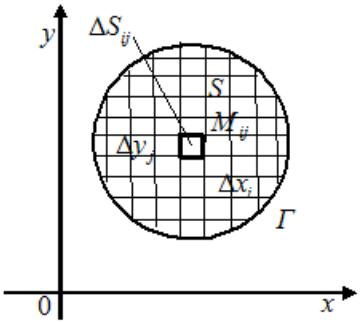
15 тарау. ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

15.1. Екі еселі интеграл және оның негізгі қасиеттері

Айталық, тұйық S облысында анықталған, оң $z = f(x, y)$ функциясы берілсін. Жоғары жағынан $z = f(x, y)$ бетімен, төменгі жағынан S облысымен, ал бүйір жағынан жасаушылары OZ өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен шектелген цилиндрлік дененің көлемін табу есебін қарастырайық (15.1-сурет).



15.1-сурет



15.2-сурет

Аталған дененің V көлемін табу үшін, оның табаны S-ті аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ болатын n ұсақ бөліктерге бөліп, әрқайсысынан кез келген бір $M_i(x_i, y_i)$ нүктелерін таңдалық. Сонда

$$f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (15.1)$$

көбейтіндісі табанының ауданы ΔS_i, биіктігі $f(x_i, y_i)$ болатын ұсақ цилиндрдің көлемін береді. Онда осы (15.1) өрнектердің қосындысы, көлемі жағынан берілген қисық бетті дененің көлеміне жуық болатын, ұсақ цилиндрлердің көлемдерінің қосындысын береді, яғни

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i . \qquad (15.2)$$

Егер берілген дененің табаны S-ті қалауымызша көп ұсақ бөліктерге бөлсек, онда (15.2) формула ол дененің көлемін қалаған дәлдікпен табу мүмкіндігін береді.

Ұсақ бөліктердің аудандарының ең үлкенін $\max\limits_{i} \Delta S_i$ арқылы белгілейік.

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ қосындысы $f(x, y)$ функциясының S облысындағы екі өлшемді интегралдық қосындысы деп аталады.

Анықтама. Егер де $\max\limits_{i} \Delta S_i$ шамасы нөлге ұмтылғанда (15.2) интегралдық қосындының шегі бар болса және ол шек S облысын ұсақ бөліктерге бөлу әдісі мен әрбір бөліктен M_i нүктелерді таңдау әдісіне тәуелсіз болса, онда ол шекті $z = f(x, y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған екі еселі интегралы деп атайды да, былай белгілейді

$$\iint\limits_{S} f(x, y)dS.$$

Мұндағы S-ті интегралдау облысы, ал dS-ті аудан элементі деп атайды. Сонымен анықтама бойынша:

$$\iint\limits_{S} f(x, y)dS = \lim_{\max\limits_{i} \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i . \qquad (15.3)$$

Енді «Екі еселі интегралдың бар болуы» деп аталатын төмендегі теореманы тұжырымдалық.

Теорема. Егер тұйық S облысында $z = f(x, y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда (15.3) екі еселі интегралы бар болады және ол S облысын ұсақ бөліктерге бөлу және әрбір бөліктен M_i нүктелерін таңдау әдісінен тәуелсіз болады.

Алдағы уақытта қарастырылатын екі еселі интегралдардағы $f(x, y)$ функциясын берілген облыста үзіліссіз деп ұйғарамыз.

Жоғарыда айтылғандардан екі еселі интегралдың геометриялық мағынасы шығады: егер $f(x,y)\geq 0$ болса, онда (15.3) екі еселі интеграл табаны S облысы болатын жоғары жағынан $z=f(x,y)$ бетімен шектелген цилиндрлік дененің көлемін береді.

Теорема бойынша екі еселі интегралдың мәні ұсақ ΔS_i-лердің түрінен тәуелсіз болғандықтан кейінгі қарастырылатын есептерде S облысын бөліктерге бөлудің ықшамды әрі ұтымды әдістерін таңдаймыз. Солардың бірі S облысын ox және oy координаталар өстеріне параллель түзулер арқылы бөліктерге бөліп, ΔS_i ұсақ бөлікті қабырғалары $\Delta x_i, \Delta y_i$ болатын тіктөрт-бұрыштықтар ретінде қарастыруға болады. Бұл жағдайда облыстың шекарасымен іргелес бөліктер ғана тіктөртбұрыш құрмайды (15.2-сурет).Олай болса (15.3) формуладағы аудан элементі dS төмендегіше жазылады

$$dS = dxdy.$$

Сонымен (15.3) формула

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_i \qquad (15.4)$$

түрінде жазылады. Облыстың шекарасымен іргелес тіктөртбұрыш болмайтын ұсақ бөліктер (15.4) шектің мәніне әсер етпейтінін көрсетуге болады.

Енді екі еселі интегралдың негізгі қасиеттеріне тоқталық.

1. Тұрақты санды екі еселі интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни егер $c=const$ болса, онда

$$\iint\limits_S cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_S f(x,y)dxdy.$$

2. Бірнеше функциялардың қосындыларының екі еселі интегралы олардың екі еселі интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\iint\limits_S \left[f_1(x,y) + f_2(x,y) + ... + f_n(x,y) \right] dxdy = \iint\limits_S f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_S f_2(x,y)dxdy + ... + \\ + \iint\limits_S f_n(x,y)dxdy.$$

3. Егер $S = S_1 + S_2$ болса, онда

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy.$$

4. Егер S облысында $f(x,y) \geq 0$ болса, онда

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy \geq 0.$$

5. Егер S облысында $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$ болса, онда

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_S \varphi(x,y)dxdy.$$

Бұл қасиеттердің дәлелдеуі екі еселі интегралдың анықтамасынан және шектер туралы теоремалардан шығады.

15.2. Екі еселі интегралды есептеу

Oxy жазықтығында орналасқан S облысын қарастыралық.

Анықтама. Егер S облысының ішкі нүктесі арқылы Oy өсіне параллель болып өтетін түзу оның шекарасын тек қана екі нүктеде қиып өтсе, онда мұндай облыс Oy өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс деп аталады (15.3-сурет).

Ox өсінің бағыты бойынша дұрыс облыста осы сияқты анықталады.

Егер облыс Oy өсінің бағыты бойынша да, Ox өсінің бағыты бойынша да дұрыс болса, онда ол дұрыс облыс деп аталады.

Интегралдау облысы S төмендегі сызықтармен қоршалған Oy өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс болсын (15.3-сурет), яғни

$$x=a,\ x=b,\ y=y_1(x), y=y_2(x), \tag{15.5}$$

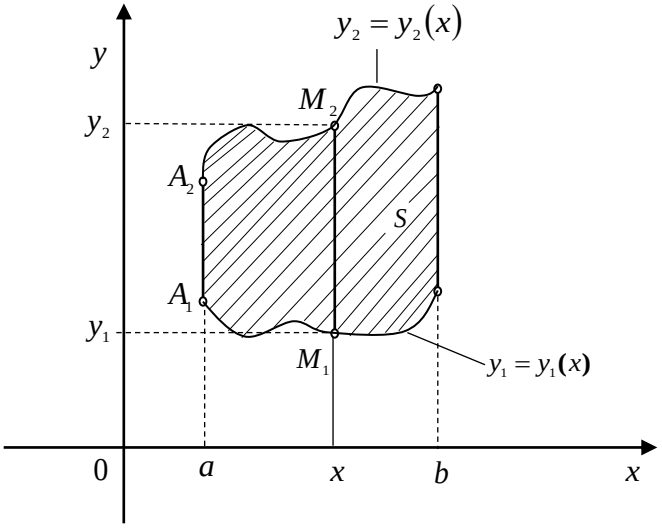
мұндағы $a<b,\ y_1(x)\le y_2(x)$. $f(x,y)$ функциясы S облысында үзіліссіз болсын делік.

$$J_s=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \tag{15.6}$$

өрнегін қарастыралық.

(15.6) өрнектің оң жағы $f(x,y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған қайталамалы интеграл деп аталады. Оның мәнін табу үшін алдымен жақшаның іші y бойынша интегралданады, ал x тұрақты ретінде қарастырылады. Сонда жақшаның ішіндегі интеграл x-тің қандайда бір функциясын береді, яғни

$$\delta(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$



15.3-сурет

Содан соң $\delta(x)$ функциясын $[a,b]$ аралығында x бойынша интегралдаймыз

$$J_s = \int_a^b \delta(x)dx.$$

Бірнеше жағдайларды қарастырайық.

1) $f(x,y) \geq 0$ болсын делік.

Бұл жағдайда, табаны S облысы болатын жоғарыдан $z = f(x,y)$ бетімен, бүйір жағынан жасаушылары Oz өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен шектелген дененің көлемі V

$$V = \iint_S f(x,y)dxdy \qquad (15.7)$$

екі еселі интегралымен анықталатыны белгілі. Енді осы дененің көлемін Oz өсіне параллель жазықтықтармен қимасының ауданы бойынша есептелік.

Аталған денемен $x = const$, $a < x < b$, жазықтығының қимасы 15.4-суретте штрихталған $\sigma(x)$ ауданын береді. $\sigma(x)$ ауданы төменнен $y_1 \leq y \leq y_2$ кесіндімен, жоғарыдан $z = f(x,y)$, $x = const$ қисығымен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданына тең, яғни

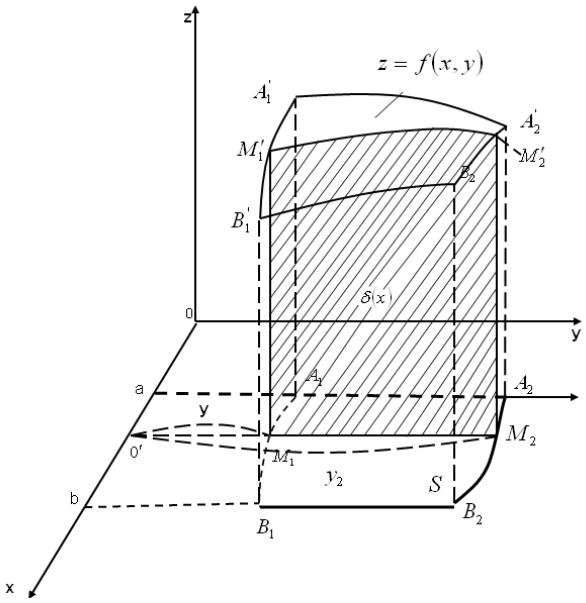
$$\sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Онда 15.4-суреттегі дененің көлемі

$$V = \int_a^b \sigma(x)dx.$$

$\sigma(x)$-тің орнына оның мәнін қоямыз.

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \qquad (15.8)$$



15.4-сурет

(15.7), (15.8) формулалардың сол жақтары өзара тең болғандықтан, олардың оң жақтары да өзара тең болады, яғни

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \qquad (15.9)$$

Сонымен, екі еселі интегралды есептеу (15.9) қайталанбалы интегралды есептеуге, яғни екі анықталған интегралды есептеуге келтіріледі екен.

(15.9) формуланың оң жағы төмендегіше түрде де жазылады

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Соңғы теңдіктерде ішкі интегралдар y бойынша, ал сыртқы интеграл x бойынша алынады.

2) $S = S_1 \cup S_2$ болып, S_1 облысында $f(x,y) \geq 0$, ал S_2 облысында $f(x,y) < 0$ болсын делік. Онда екі еселі интегралдың үшінші қасиеті бойынша

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy = V_1 - V_2 \quad (15.10)$$

болады. Бұл жағдайда да V_1 мен V_2 үшін (15.9) формула орынды болады.

Практикалық есептерде жиі кездесетін бір дербес жағдайды да айта кетелік

S облысы $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ тіктөртбұрыш, ал $f(x,y) = X(x)Y(y)$ болсын. Мұндағы $X(x)$ функциясы $[a,b]$ аралықта, ал $Y(y)$ функциясы $[c,d]$ аралықта үзіліссіз болсын делік. Онда (15.9) формула бойынша

$$\iint\limits_S X(x)Y(y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d X(x)Y(y)dy \right) dx = \int\limits_a^b X(x)dx \int\limits_c^d Y(y)dy. \quad (15.11)$$

(15.11) формуланың оң жағындағы ішкі интегралдың мәні тұрақты сан болғандықтан оны интеграл белгісінің сыртына шығаруға болады, яғни

$$\iint\limits_S X(x)Y(y)dxdy = \int\limits_a^b X(x)dx \cdot \int\limits_c^d Y(y)dy. \quad (15.12)$$

Демек, (15.12) екі еселі интегралдың мәні екі анықталған интегралдың көбейтіндісіне тең екен.

3) S облысы Ox өсінің бағыты бойынша дұрыс облыс болсын, яғни

$$c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$$

функцияларымен қоршалған болсын. Онда (15.9) формулаға ұқсас

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \quad (15.13)$$

формуласын аламыз. Дербес жағдайда S облысы $a \le x \le b,\ \ c \le y \le d$ тіктөрбұрыш болса, онда

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Соңғы теңдіктің оң жақтарын теңестірсек

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

формуласы шығады.

4) Егер S облысы Ox өсінің бағыты бойынша да Oy өсінің бағыты бойынша да дұрыс болмаса, онда S облысын Ox немесе Oy өстерінің бағыттары бойынша дұрыс облыстарға бөлеміз де, ол облыстар бойынша берілген функциядан алынған қайталанбалы интегралды есептеп, нәтижелерін қосамыз.

15.3. Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру

Екі еселі интегралды есептеуді жеңілдететін әдістердің бірі онда айнымалыларды ауыстыру.

Oxy жазықтығында L сызығымен қоршалған S облысы берілсін. S-тің нүктелерінің x және y координаталары u және ϑ жаңа айнымалының функциялары болсын делік, яғни

$$x = \varphi(u,\vartheta), \quad y = \psi(u,\vartheta). \tag{15.14}$$

Мұндағы φ және ψ функциялары қандай да бір S' облысында анықталған, бірмәнді, үзіліссіз және олардың үзіліссіз туындылары бар болсын деп ұйғарайық. Онда (15.14) формулалар бойынша u және ϑ-ның әрбір қос мәніне x және y-тің бір қос мәні сәйкес келеді.

x-пен y-тің берілген мәдеріне сәйкес u және ϑ -ның мәндерін (15.14) формуладан табу мүмкін болсын деп ұйғарайық.

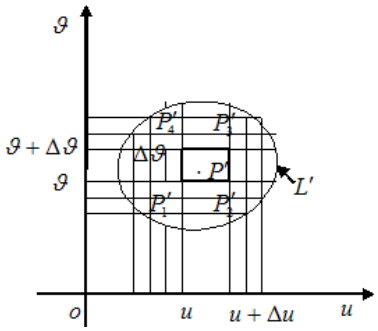
Тікбұрышты $ou\vartheta$ координаталар жүйесін қарастырымыз (15.5-сурет). Жоғарыда айтылғандарды негізге алсақ, S облысының әрбір $P(x,y)$ нүктесіне (15.6-сурет) u,ϑ жазықтығынан бір $P'(u,\vartheta)$ нүктесі (15.14) формула бойынша сәйкес келеді (15.5-сурет). u және ϑ-лар P нүктесінің қисық сызықты координаталары деп аталады.

Егер жылжымалы $M(x,y)$ нүктесі S облысын қоршаған L сызығының бойымен жылжыса, онда оған сәйкес $N(u,\vartheta)$ жылжымалы нүктесі $ou\vartheta$ жазықтығында тұйық L' сызығын сызады. L' сызығымен қоршалған облысты S'-пен белгілейміз.

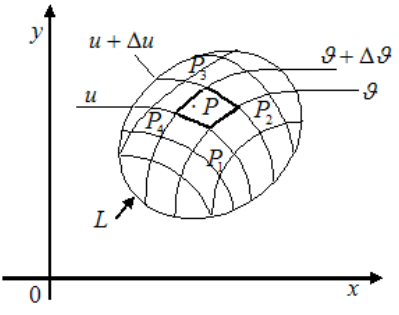
Сонымен, (15.14) формулалар S және S' облыстарының нүктелері арасында өзара бірмәнді сәйкестікті орнатады, басқаша айтқанда, S облысын S' облысына өзара бірмәнді бейнелейді.

S' облысындағы $u=const$ түзуін қарастырайық. (15.14) формула бойынша бұл түзуге Oxy жазықтығында жалпы жағдайда қандай да бір қисық сәйкес келеді. Осыған ұқсас $Ou\vartheta$ жазықтығындағы $\vartheta=const$ түзуіне Oxy жазықтығында қандай да бір қисық сәйкес келеді (15.6-сурет). S' облысын $u=const$ және $\vartheta=const$ түзулері арқылы тіктөртбұрыштарға бөлелік (15.5-сурет). $Ou\vartheta$ жазықтығында $u=const$, $u+\Delta u=const$, $\vartheta=const$, $\vartheta+\Delta\vartheta=const$ түзулері-мен қоршалған тіктөртбұрыштықтың ауданын $\Delta S'$-пен белгілелік, ал $\Delta S'$-ке сәйкес қисықсызықты тіктөрбұрыштықтың ауданын ΔS пен белгілейік. Сонда

$$\Delta S' = \Delta u \cdot \Delta\vartheta .$$



15.5-сурет



15.6-сурет

Жалпы жағдайда ΔS және $\Delta S'$ аудандары әртүрлі болуы мүмкін. S облысында үзіліссіз $f(x,y)$ функциясы берілсін. $z=f(x,y)$ функциясының S облысындағы әрбір мәніне $z=F(u,\vartheta)$ функциясының S облысындағы сондай мәні сәйкес келеді. Мұндағы

$$F(u,\vartheta)=f[\varphi(u,\vartheta),\psi(u,\vartheta)].$$

z функциясының S облысы бойынша төмендегі интегралдық қосындысын

$$\sum f(x,y)\Delta S=\sum F(u,\vartheta)\Delta S \qquad (15.15)$$

қарастырайық.

Oxy жазықтығындағы $P_1P_2P_3P_4$ қисық сызықты төртбұрыштықтың ауданы ΔS-ті есептелік. ΔS-тің төбелерінің координаталары

$$\begin{aligned}
&P_1(x,y); && x_1=\varphi(u,\vartheta), && y_1=\psi(u,\vartheta),\\
&P_2(x_2,y_2); && x_2=\varphi(u+\Delta u,\vartheta), && y_2=\psi(u+\Delta u,\vartheta),\\
&P_3(x_3,y_3); && x_3=\varphi(u+\Delta u,\vartheta+\Delta\vartheta), && y_3=\psi(u+\Delta u,\vartheta+\Delta\vartheta),\\
&P_4(x_4y_4); && x_4=\varphi(u,\vartheta+\Delta\vartheta), && y_4=\psi(u,\vartheta+\Delta\vartheta).
\end{aligned} \qquad (15.16)$$

болады.

Қисық сызықты төртбұрыштықтың ауданын есептегенде олардың қабырғаларын қос-қостан параллель түзулер деп қабылдап, функциялардың өсімшелерін олардың сәйкес дифференциалдарымен алмастырамыз. Онда

$$x_1 = \varphi(u,\vartheta), \qquad y_1 = \psi(u,\vartheta),$$

$$x_2 = \varphi(u,\vartheta) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, \qquad y_2 = \psi(u,\vartheta) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,$$

$$x_3 = \varphi(u,\vartheta) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta, \quad y_3 = \psi(u,\vartheta) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta,$$

$$x_4 = \varphi(u,\vartheta) + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta, \qquad y_4 = \psi(u,\vartheta) + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta.$$

Бұл жағдайда P_1, P_2, P_3, P_4 қисық сызықты төртбұрышты параллелограмм деп қарастыруға болады. Ал оның DS ауданы P_1, P_2, P_3 үшбұрыштың ауданының екі еселенгеніне тең. Онда аналитикалық геометрия бөліміндегі өзімізге белгілі формулалар бойынша

$$\Delta S \approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta\right)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta - \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta\right)\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right| \Delta u\cdot\Delta\vartheta;$$

Мұндағы $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \end{vmatrix}$ анықтауышы $\varphi(u,\vartheta)$ және $\psi(u,\vartheta)$ функциялары-ның Якоби анықтауышы немесе Якобиан деп аталады.

Сонымен,

$$\Delta S \approx |J|\Delta S'. \tag{15.17}$$

(15.17) жуық теңдіктің мәнін (15.15) ге қоямыз

$$\sum f(x,y)\Delta S \approx \sum F(u,\vartheta)\cdot|J|\Delta S'.$$

Соңғы жуық теңдіктен $\Delta S'$ ауданның диаметрін нөлге ұмтылдырып шекке көшеміз.

$$\iint\limits_{S} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S'} F(u,\vartheta)|J|dud\vartheta. \qquad (15.18)$$

Соңғы формула екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласы деп аталады. Бұл (15.18) формула $f(x,y)$ функциясынан S облысы бойынша алынған екі еселі интегралды есептеу мәселесін S' облысы бойынша алынған екі еселі интегралды есептеуге алып келеді.

15.4. Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу

Алдыңғы тақырыпта қарастырылған екі еселі интегралда айнымалыны ауыстырудың дербес жағдайы тік бұрышты Декарттық координаталар жүйесінен полярлық координата жүйесіне көшу болады. Бұл жағдайда $u = \theta,\ \vartheta = \rho$, яғни

$$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta. \qquad (15.19)$$

Oxy жазықтығындағы AB қисығы $(\rho = \rho_1)$ (15.7-сурет). $O\theta\rho$ жазықтығындағы $A'B'$ түзуіне (15.8-сурет), ал Oxy жазықтығындағы DC қисығы $(\rho = \rho_2)$ $O\theta\rho$ жазықтығындағы $D'C'$ түзуіне көшеді.

Oxy жазықтығындағы AD және BC түзулері $O\theta\rho$ жазықтығындағы $A'D'$ және $B'C'$ түзулеріне, ал L_1 және L_2 қисықтары L_1' мен L_2' қисықтарына көшеді. Якобианды есептелік:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial\rho} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -\rho. \qquad (15.20)$$

$|J| = \rho$ болғандықтан

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} F(\theta,\rho)\rho d\rho \right) d\theta . \qquad (15.21)$$

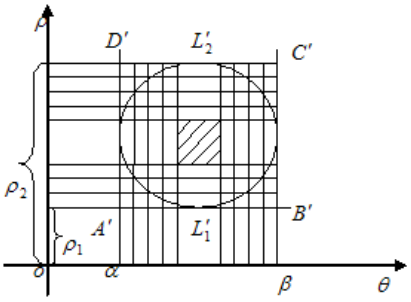
Соңғы формула екі еселі интегралда полярлық координата жүйесіне көшу формуласы деп аталады.

Мысал. $\iint\limits_S e^{x^2+y^2} dxdy$ екі еселі интегралын есептелік.

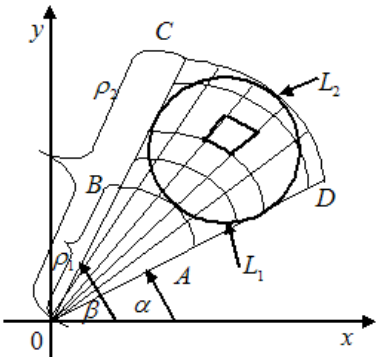
Мұндағы $S - x^2 + y^2 = 4$ дөңгелектің бірінші квадранттағы бөлігі.

Шешуі. $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$ деп полярлық координата жүйесіне көшеміз. x және y декарт координаталарын θ және ρ полярлық координаталарына ауыстыру Якобианы $|J| = \rho$. (15.21) формуланы қолдансақ

$$\iint\limits_S e^{x^2+y^2} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{4}\left(e^4 - 1\right).$$



15.7-сурет



15.8-сурет

15.5. Екі еселі интегралдардың геометрияда және физикада қолданулары

Көптеген практикалық есептерді шешкенде интегралдық қосынды әдісіне негізделетін жалпы принцип анықталған интегралдың қолданулары бөлімінде баяндалған еді. 15.1 тақырыбында екі еселі интегралдың анықтамасын бергенде де осы жалпы принцип қолданылды.

Әртүрлі мағыналы есептер қарастырылғанда ізделініп отырған Q шамасы Oxy жазықтығының қандай да бір S облысы және S-те анықталған $f(x,y)$ функциясы мен байланысқандығын байқаймыз. Q-ді табу төмендегі ретпен орындалады:

а) S облысы кез келген әдіспен n ұсақ бөліктерге бөлінеді, яғни

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i, \tag{15.22}$$

мұндағы ΔS, i-ші ұсақ бөліктің ауданы.

ә) Әрбір ΔS_i-ге ізделініп отырған Q шаманың ұсақ бөлігі ΔQ_i сәйкес келеді. ΔQ_i-дің мәні $f(x,y)$ функциясының ΔS_i-ден кез келген әдіспен алынған M_i нүктесіндегі мәнімен ΔS_i-дің көбейтіндісінің жуық мәні ретінде анықталады, яғни

$$\Delta Q_i \approx f(M_i)\Delta S_i. \tag{15.23}$$

б) Ізделініп отырған шама Q-дің жуық мәні табылады:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i. \tag{15.24}$$

(15.24) теңдіктің оң жағы $f(x,y)$ функциясының интегралдық қосындысы деп аталады. ΔS_i бөліктердің аудандары кішірейген сайын (15.24) жуық теңдік неғұрлым дәл теңдікке жақындай түседі.

(15.24) теңдіктің n шексіздікке ұмтылғандағы немесе ΔS_i-дің ең үлкені-нің ауданы нөлге ұмтылғандағы шегі есептеледі, яғни

$$Q = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i = \iint\limits_S f\left(x, y\right)ds. \qquad (15.25)$$

Мұндағы $f(x, y)dS$ өрнегі ізделінген шама элементі деп аталады және dQ-мен белгіленді, онда

$$dQ = f\left(x, y\right)ds.$$

Сонымен,

$$Q = \iint\limits_S dQ. \qquad (15.26)$$

15.5.1. Көлемді есептеу. Төменнен Oxy жазықтығындағы S облысымен, жоғарыдан $z = f\left(x, y\right)$ бетімен, бүйір жақтарынан жасаушылары OZ өсіне параллель, бағыттаушысы S облысының шекарасы болатын цилиндрлік бетімен қоршалған цилиндрлік дененің көлем элементі $dV = f\left(x, y\right)dS$ болғандықтан, аталған дененің көлемі (15.26) формула бойынша

$$V = \iint\limits_S dV = \iint\limits_S f\left(x, y\right)dxdy. \qquad (15.27)$$

Егер дене жоғарыдан $f\left(x, y\right) \geq 0$, төменнен $\varphi\left(x, y\right) \geq 0$ беттерімен шектелген цилиндрлік дене болып, $f\left(x, y\right)$ пен $\varphi\left(x, y\right)$ беттерінің $\left[f\left(x, y\right) \geq \varphi\left(x, y\right) \right]$ Oxy жазықтығына проекциясы S облысы болса, онда ол дененің көлемі

$$V = \iint\limits_S f\left(x, y\right)dxdy - \iint\limits_S \varphi\left(x, y\right)dxdy \qquad (15.28)$$

формуласымен есептеледі.

15.5.2. Ауданды есептеу. Аудан элементі $dS = dx \cdot dy$ болғандықтан, (15.26) формула бойынша S облысының ауданы

$$S = \iint\limits_S ds = \iint\limits_S dxdy \qquad (15.29)$$

формуламен есептеледі.

Мысал. $y^2 = 2x$ параболасымен және $y = x$ түзуімен қоршалған фигураның ауданын есептеңіз.

Шешуі. Парабола мен түзудің теңдеулерін жүйе түрінде шешіп, олардың қиылысу нүктелерін табамыз. Яғни $x^2 = 2x$, $x_1 = 0,\ x_2 = 2;\ y_1 = 0;\ y_2 = 2.$ Сонымен, қиылысу нүктелері: $A(0;0)$ және $B(2;2)$ болады.

Олай болса

$$S = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_x^{\sqrt{2x}} dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\sqrt{2x} - x \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 2 = \frac{2}{3}.$$

15.5.3. Беттің ауданын есептеу. Теңдеуі $z = f(x,y)$ болатын беттің ауданын есептелік. $f(x,y)$ функциясының дербес туындылары үзіліссіз болсын деп ұйғаралық. $f(x,y)$ бетінің Oxy жазықтығына проекциясы S тұйық облысы болсын. S облысын аудандары $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ болатын ұсақ бөліктерге бөлейік те, әр бөліктен $P_i(\xi_i, \eta_i)$ нүктелерін алалық. S облысындағы P_i нүктесіне $f(x,y)$ бетінің

$$M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$$

нүктесі сәйкес келеді. $f(x,y)$ беттің M_i нүктесіне жанама жазықтық жүргіземіз. Жанама жазықтықтың теңдеуі

$$z - z_i = f_x'(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y'(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i), \qquad (15.30)$$

ал нормалдың теңдеуі

$$\frac{x-\xi_i}{-f_x'(\xi_i,\eta_i)}=\frac{y-\eta_i}{-f_y'(\xi_i,\eta_i)}=\frac{z-z_i}{1} \qquad (15.31)$$

болатыны «Математика-1» бөлімінен белгілі. Жанама жазықтықтан Oxy жазықтығына проекциясы ΔS_i болатын ұсақ ауданды $\Delta\delta_i$ мен белгілейік. Егер жанама жазықтық пен Oxy жазықтығы арасындағы бұрышты γ_i арқылы белгілесек, онда

$$\Delta S_i=\Delta\delta_i\cos\gamma_i$$

немесе

$$\Delta\delta_i=\frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}$$

теңдіктің орындалатындығы аналитикалық геометриядан белгілі. Жанама жазықтықтың нормалымен Oz өсі арасындағы бұрышта γ_i-ге тең болғандықтан және (15.31) теңдеуге негізделіп

$$\cos\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{1+\left[f_x'(\xi_i,\eta_i)\right]^2+\left[f_y'(\xi_i,\eta_i)\right]^2}}$$

теңдікті жаза аламыз. Онда

$$\Delta\delta_i=\sqrt{1+f_x'^2(\xi_i,\eta_i)+f_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\cdot\Delta S_i.$$

$\Delta\delta_i$ ұсақ аудандардың қосындысы $f(x,y)$ теңдеуімен анықталатын беттің ауданы δ-ның жуық мәнін береді, яғни

$$\delta\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta\delta_i$$

Соңғы жуық теңдіктің $\max\Delta S_i\to 0$ ұмтылғандағы шегін есептеп $f(x,y)$ беттің ізделген ауданын табамыз.

$$\delta=\lim_{\max\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x'^2(\xi_i,\eta_i)+f_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\cdot\Delta S_i.$$

Соңғы теңдіктің оң жағы интегралдық қосынды. Шарт бойынша берілген функцияның дербес туындылары үзіліссіз болғандықтан ол интегралдық қосындының шегі бар болады және ол екі еселі интегралға тең, яғни

$$\delta = \iint\limits_S \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy . \qquad (15.32)$$

Сонымен $z = f(x, y)$ беттің ауданы (15.32) формуламен есептеледі екен.

Интеграл астындағы өрнек бет ауданының элементі болады, яғни

$$d\delta = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\, dxdy .$$

15.6. Екі еселі интегралдардың физикада қолданылулары

а) Материалдық жазық фигураның массасы. Ауданы S-ке тең жазық фигураның $M(x, y)$ нүктесіндегі беттік тығыздығы $\delta(x, y)$ болсын. Жазық фигураның $M(x, y)$ нүктесі жататын шексіз аз аудан элементі dS-ті қарастыралық. dS аудан элементінде $\delta(x, y) = \delta$ тұрақты деп қабылдасақ, онда dS элементінің массасы, яғни элементарлық масса dm төмендегі теңдікпен анықталады

$$dm = \delta dS . \qquad (15.33)$$

(15.33) теңдікті S бойынша интегралдасақ, онда ауданы S-ке тең материалдық жазық фигураның массасын аламыз, яғни

$$m = \iint\limits_S dm = \iint\limits_S \delta ds. \qquad (15.34)$$

ә) Материалдық жазық фигураның статикалық моменттері.

Егер dm элементарлық массаны Ox және Oy өстерінен y және x қашықтықтағы материалдық нүкте деп қарастырсақ, онда жазық фигураның элементарлық статикалық моменті үшін

$dS_x = ydm = y\delta(x,y)dS$ және $dS_y = xdm = x\delta(x,y)dS$

формулаларын аламыз. Соңғы теңдіктерді S облысы бойынша интегралдасақ, онда ауданы S-ке тең жазық фигураның координата өстеріне қарағандағы статикалық моменттерін есептейтін төмендегі формулалары шығады.

$$S_x = \iint\limits_S y\delta(x,y)\,dS. \tag{15.35}$$

$$S_y = \iint\limits_S x\delta(x,y)dS. \tag{15.36}$$

б) Ауырлық центрінің координаталарын табу.

Жазық фигураның қандай да бір өске қарағандағы статикалық моменті, массасы осы жазық фигураның массасына тең, ал өзі оның ауырлық центрінде орналасқан материалдық нүктенің сол өске қарағандағы статикалық моментіне тең болатындығы механикада Вариньон теоремасы деп аталатын теоремада дәлелденген. Ауданы S-ке тең жазық фигураның ауырлық центрінің координаталарын (x_c, y_c)-мен белгілесек:

$$S_y = mx_c,\ S_x = my_c,$$

Осылардан

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint\limits_S x\delta(x,y)dS}{\iint\limits_S \delta(x,y)dS}. \tag{15.37}$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\iint\limits_S y\delta(x,y)dS}{\iint\limits_S \delta(x,y)dS}. \tag{15.38}$$

в) Жоғарыдағыларға ұқсас, S ауданды жазық фигураның элементарлық инерция моменттері үшін

$$dJ_x = y^2dm = y^2\delta(x,y)dS,$$
$$dJ_y = x^2dm = x^2\delta(x,y)dS$$

формулаларды жаза аламыз. Соңғы теңдіктерді S облысы бойынша интегралдасақ

$$J_x = \iint\limits_S dJ_x = \iint\limits_S y^2 \delta(x,y) dS, \tag{15.39}$$

$$J_y = \iint\limits_S dJ_y = \iint\limits_S x^2 \delta(x,y) dS. \tag{15.40}$$

Координаталар бас нүктесіне қарағандағы инерция моменті

$$J_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2) \delta(x,y) dS. \tag{15.41}$$

(15.39), (15.40), (15.41) теңдіктерден

$$J_0 = J_x + J_y \tag{15.42}$$

болатындығы шығады.

15.7. Үш еселі интеграл

Кеңістікте тұйық V облысы және онда анықталған, үзіліссіз $u = f(x,y,z)$ функциясы берілсін. V денесін көлемдері $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ болатын n ұсақ бөліктерге бөлейік те, олардың әрқайсысынан кез келген бір $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктелерін алалық. $f(x,y,z)$ функциясының M_i нүктесіндегі мәнін $f(M_i)$ мен белгілеп, төмендегі қосындыны құралық.

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i . \tag{15.43}$$

Бұл қосынды үш өлшемді интегралдық қосынды деп аталады. ΔV_i-лердің ең үлкенінің диаметрін d арқылы белгілеп, V облысын шексіз көп бөліктерге бөлсек, d нөлге ұмтылады.

Анықтама. Егер (15.43) қосындының d нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса және ол шек V -ны ұсақ бөліктерге бөлу әдісіне және әрбір ΔV_i-ден M_i нүктелерін таңдау әдісіне

тәуелді болмаса, онда оны $f(x, y, z)$ функциясынан V облысы бойынша алынған үш еселі интеграл деп атайды да төмендегіше белгілейді:

$$J = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z) dV. \quad (15.44)$$

Теорема. Егер тұйық V облысында $u = f(x, y, z)$ функциясы үзіліссіз болса, онда (15.44) үш еселі интегралы бар болады және ол V облысын ұсақ бөліктерге бөлу әдісінен және әрбір бөліктен M_i нүктелерді таңдау әдісіне тәуелсіз болады.

Егер $f(x, y, z)$ функциясы V көлемде үзіліссіз таралған қандайда бір заттың көлемдік тығыздығы болса, онда $f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ көбейтінді ΔV_i көлемінің массасының жуық мәнін береді, мұндағы $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$. Олай болса (15.43) интегралдық қосынды V көлемді дененің массасының жуық мәніне тең болады. Ал (15.43)-нің d нөлге ұмтылғандағы шегі, яғни (15.44) теңдік V көлемді дененің массасына тең болады.

Сонымен, үш еселі интегралдың физикалық мағынасы төмендегіше болады.

Егер $Oxyz$ кеңістіктің V көлемінде қандайда бір заттың массасының таратылу тығыздығы $f(x, y, z)$ функциясымен берілсе, онда

$$m = \iiint_V f(x, y, z) dV \quad (15.45)$$

теңдігі көлемі V болатын дененің массасын береді. Дербес жағдайда, егер $f(x, y, z) \equiv 1$ болса, онда V облысының массасы оның көлеміне тең болады. Сондықтан V облыстың көлемі

$$V = \iiint_V dV \quad (15.46)$$

формуламен есептеледі.

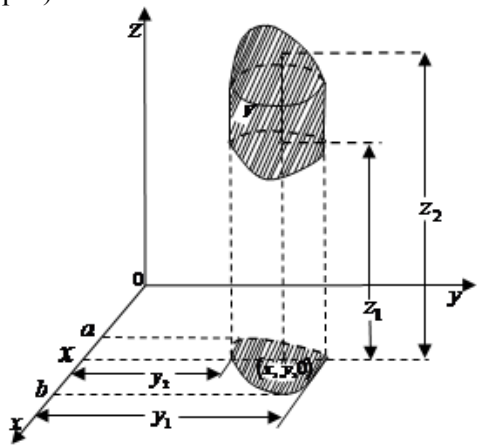
Енді үш еселі интегралды есептеуді қарастыралық. V облысы төмендегі қасиеттерге ие болсын.

1. Координаталар өстеріне параллель және V-ның ішкі нүктелерінен өтетін түзулер V облысының шекарасын тек қана екі нүктеде қиып өтетін болсын.

2. V облысының координаталар жазықтықтарына проекциялары дұрыс облыстар болсын.

3. V облысының координаталар жазықтықтарына параллель жазықтықтармен қиған бөліктері де 1) және 2) қасиеттерге ие болсын.

Аталған қасиеттерге ие болатын V облысы үш өлшемді дұрыс облыс деп аталады. Үш өлшемді дұрыс облысқа эллипсоид, шар, тікбұрышты параллелепипед, тетраэдр т.с.с. мысал бола алады. Біз бұл оқу құралында дұрыс облыстарды ғана қарастырамыз. V облысы төменнен $z_1 = z_1(x, y)$, ал жоғарыдан $z_2 = z_2(x, y)$ беттерімен қоршалсын. Сонымен бірге V облысының Oxy координаталар жазықтығындағы проекциясы S дұрыс облыс болсын, яғни $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$ функцияларымен қоршалған болсын (15.9-сурет).



15.9-сурет

Әрбір $(x,y)\in S$ нүктесіндегі z-тің мәніне төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын мәндер сәйкес келеді

$$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y).$$

Онда екі еселі интегралды есептеуге ұқсас пайымдау жүргізсек

$$J_V=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iint\limits_S\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dxdy= \\ =\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx. \tag{15.49}$$

Сонымен, үш еселі интегралды есептеу (15.49) қайталанбалы үш интегралды есептеуге келтіріледі екен.

Енді үш еселі интегралдың негізгі қасиеттеріне көшелік:

1. Тұрақты коэффициентті үш еселі интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни

$$\iiint\limits_V cf(x,y,z)dV=c\iiint\limits_V f(x,y,z)dV.$$

2. Бірнеше функциялардың қосындысының үш еселі интегралы олардың үш еселі интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\iiint\limits_V\left[f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)\right]dxdydz=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz+\iiint\limits_V\varphi(x,y,z)dxdydz.$$

3. Егер интегралдау облысында $f(x,y,z)\ge 0$ болса, онда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\ge 0.$$

4. Егер интегралдау облысында $\varphi(x,y,z)\le f(x,y,z)$ болса, онда

$$\iiint\limits_V\varphi(x,y,z)dV\le\iiint\limits_V f(x,y,z)dV.$$

5. Егер V облысы k бөлікке бөлінген болса, яғни $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_k$, онда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV + \ldots + \iiint\limits_{V_k} f(x,y,z)dV.$$

6. Егер $f(x,y,z)$ функциясының V облысындағы ең кіші және ең үлкен мәндері сәйкес m және M болса, онда V облысында

$$mV \le \iiint\limits_V f(x,y,z)dV \le MV$$

теңсіздіктер орындалады. Мұндағы V -интегралдау облысының көлемі.

7. Егер $f(x,y,z)$ функциясы тұйық V облысында үзіліссіз болса, онда V -дан қандайда бір P нүктесі табылып, сол нүктеде

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = f(P)V$$

теңдік орындалады.

15.8. Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру

$Oxyz$ тік бұрышты координаталар кеңістігінде тұйық V облысы мен $Ou\vartheta w$ тік бұрышты координаталар кеңістігінде тұйық V' облысы берілсін.

$$\begin{cases} x = x(u,\vartheta,\omega), \\ y = y(u,\vartheta,\omega), \\ z = z(u,\vartheta,\omega). \end{cases} \qquad (15.50)$$

(15.50) теңдіктері V облысын V' облысына өзара бірмәнді бейнелесін. Жүйенің оң жағындағы функциялар мен олардың 1-ретті дербес туындылары да үзіліссіз болсын деп ұйғаралық. Онда екі еселі интегралда айнымалы-ларды алмастыру тақырыбындағыдай ұқсас пайымдаулар жасап

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |J|$$

теңдігін аламыз. Мұндағы ΔV мен $\Delta V'$ қарастырылып отырған облыстардың көлем элементтері , ал

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix} \qquad (15.51)$$

анықтауышы $x(u,\vartheta,\omega),\ y(u,\vartheta,\omega), z(u,\vartheta,\omega)$ функцияларының Якоби анық-тауышы.

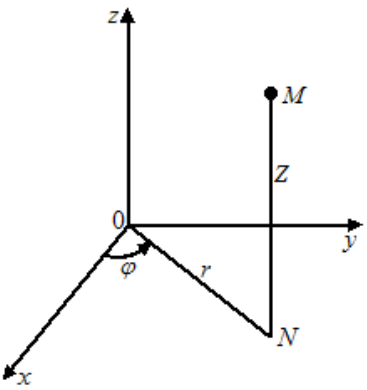
Егер $f(x,y,z)$ функциясы V облысында үзіліссіз және $\Delta V, \Delta V'$ облыстары арасында жоғарыда айтылғандай өзара бірмәнді сәйкестік орнатылған болса, онда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V'} f\left[x(u,\vartheta,\omega), y(u,\vartheta,\omega), z(u,\vartheta,\omega)\right]|J|dV' \qquad (15.52)$$

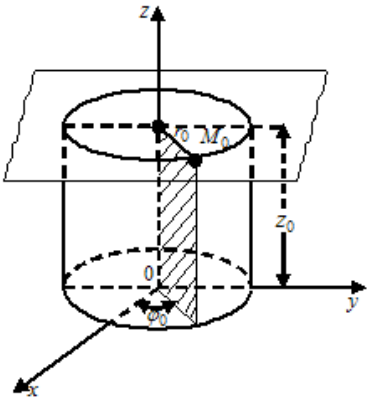
формуласы шығады. Бұл формула үш еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласы деп аталады.

Дербес жағдайларды қарастыралық.

1. Үш еселі интегралдарда цилиндрлік координаталарлар жүйесіне көшу. Көптеген практикалық есептерді қарастырғанда цилиндрлік координаталар жиі қолданылады. $Oxyz$ кеңістігінде кез келген M нүктесін қарастыралық. M нүктесінің Oxy жазықтығындағы проекциясын N деп белгілелік. N нүктесін r және φ полярлық координаталар арқылы анықтап, оларға M нүктесінің аппликатасы z-ті біріктірсек, онда $Oxyz$ кеңістігіндегі M нүктесінің орны r, φ және z сандары арқылы анықталады (15.10-сурет).



15.10-сурет



15.11-сурет

r, φ және z сандары M нүктесінің цилиндрлік координаталары деп аталады. Кеңістіктегі кез келген нүктенің цилиндрлік координаталары мен оның декарттық координаталары арасында төмендегідей байланыс бар

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z\,. \qquad (15.53)$$

Декарттық координаталар жүйесінде $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі $x = x_0,\ \ y = y_0,\ z = z_0$ жазықтықтарының қиылысу нүктесі болады. Ал цилиндрлік координаталар жүйесінде $M_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ нүктесі $r = r_0, \varphi = \varphi_0, z = z_0$ беттерінің қиылысу нүктесі болады (15.11-сурет). Мұндағы $r = r_0$ теңдеуі жасаушысы Oz өсіне параллель болатын радиусы r_0-ге тең дөңгелек цилиндрді өрнектейді. $\varphi = \varphi_0$ теңдеуі Oz өсінен өтіп, Oxz жазықтығымен φ_0 бұрыш жасайтын жарты жазықтықты, ал $z = z_0$ теңдеуі аппликатасы z_0-ге тең, Oxy жазықтығына параллель жазықтықты береді.

$z = f(x, y)$ теңдеуіне кеңістікте қандай да бір бет сәйкес келеді. Егер x, y, z айнымалыларының орнына олардың (14.53) формуладағы өрнектерін қойсақ, онда беттің цилиндрлік координаталардағы теңдеуі $z = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ болады.

Енді $\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$ үш еселі интегралын цилиндрлік координаталарға көшіп есептеу мәселесін қарастыралық.

(14.50) формулаға сәйкес (15.53) теңдіктердің Якобианын есептелік.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r.$$

(14.50) формула бойынша

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrdzd\varphi \cdot \qquad (15.54)$$

Егер V облысы жоғарыдан $h(x, y)$ төменнен $g(x, y)$ беттерімен қоршалған болса, онда 15.7 тақырыбының нәтижелерін қолданып (15.54) формуланы төмендегіше жазуға болады

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iint\limits_S \left(\int\limits_{g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz \right) rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \left(\int\limits_{g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz \right) rdr \right) d\varphi, \qquad (15.55)$$

мұндағы S облысы V облысының Oxy жазықтығына проекциясы, ал $\varphi = \alpha, \quad \varphi = \beta, r_1 = r_1(\varphi), r_2 = r_2(\varphi)$, S облысын қоршаған беттер.

(15.55) формула үш еселі интегралды цилиндрлік координаталарға көшіп есептеу формуласы деп аталады.

2. Үш еселі интегралдарды сфералық координаталар жүйесіне көшіп есептеу. $Oxyz$ тік бұрышты координаталар кеңістігінде кез келген M нүктесін алып, одан координаталар бас нүктесіне дейінгі ара қашықтықты r-мен белгілелік және OM кесіндісін Oxy жазықтығына проекциялаймыз (15.12-сурет). Ox өсімен ON кесіндісі арасындағы бұрышты φ-мен, ал $r = OM$-мен Oz өсі арасындағы бұрышты θ-мен белгілейік. r, φ, θ сандары кеңістіктегі M нүктесінің сфералық координаталары төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандырды

$$0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi.$$

15.12-суреттегі тікбұрышты үшбұрыш ONK-дан $x = ON\cos\varphi,\quad y = ON\sin\varphi$, ал тікбұрышты OMN үшбұрышынан $MN = r\cos\theta$ теңдіктерді жазамыз. Онда декарт координаталарының сфералық координаталардағы өрнегі төмендегіше болады

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{15.56}$$

(15.50) формулаға сәйкес бұл функциялардың Якобианын есептелік.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

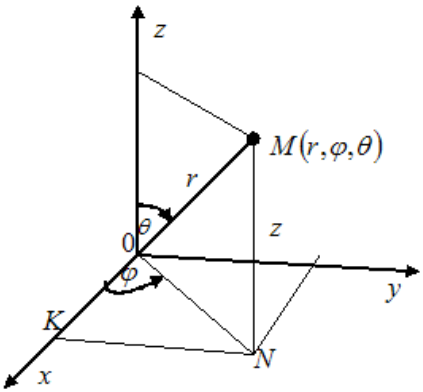
$$= r^2 \sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \sin\theta \left(\cos^2\theta \begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} - \sin^2\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} \right) = -r^2 \sin\theta.$$

(15.52) формула бойынша

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \tag{15.57}$$

(15.57) формула үш еселі интегралдарды сфералық координаталарға көшу арқылы есептеу формуласы деп аталады.



15.12-сурет

15.9. Үш еселі интегралдардың қолданылулары

Үш еселі интегралдың физикалық есептерді шешуге қолдану принциптері екі еселі интегралдың қолданылуына ұқсас. Кейбір физикалық есептерді қарастыралық.

15.9.1. Статикалық моменттерді анықтау. Массасы m-ге тең материалдық нүктенің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті деп нүктенің массасы мен аппликатасының көбейтіндісін айтатындығы белгілі, яғни $S_{xy} = mz$. Осы сияқты Oyz және Oxz жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері де анықталады, яғни $S_{yz} = mx, S_{xz} = my.$ Егер материалдық нүктелердің жүйесі берілсе, онда оның статикалық моменті материалдық нүктелердің сәйкес статикалық моменттерінің қосындысы ретінде анықталады.

Кеңістіктегі әрбір нүктенің тығыздығы $\delta = \delta(x, y, z)$ болатын V денесі берілсін. Осы дененің S_{xy} статикалық моментін табалық.

V денесін көлемдері $\Delta V_i (i = 1,2,\ldots,n)$ болатын ұсақ n денелерге бөлелік. Әрбір ΔV_i ұсақ денеден кез келген $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктесін таңдалық. ΔV_i-дің әрбір нүктесінің тығыздығы P_i нүктесінің тығыздығына жуық тең деп ұйғарсақ, онда ΔV_i-дің массасы Δm_i үшін төмендегі жуық теңдікті жаза аламыз:

$$\Delta m_i \approx \delta(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i .$$

Әрбір ұсақ ΔV_i денені Δm_i массалы $P_i(x_i, y_i, z_i)$ материалдық нүкте деп қарасақ, онда осы нүктенің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті ΔS_{xy}^i үшін келесі жуық теңдікті жаза аламыз

$$\Delta S_{xy}^i \approx z_i \Delta m_i \approx z_i \delta(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i .$$

Онда V дененің Oxy жазықтығына қарағандағы статикалық моменті

$$S_{xy} \approx \sum_{i=1}^{n} z_i \delta(x_i, y_i, z_i) V_i . \qquad (15.58)$$

(15.58) теңдікте $n \to \infty$ шекке көшсек, статикалық моменттің дәл мәні үшін келесі формуланы аламыз

$$S_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z_i \delta(x_i, y_i, z_i) V_i = \iiint_V z\delta(x,y,z)dV . \quad (15.59)$$

Осы сияқты Oyz және Oxz жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттерін табамыз

$$S_{yz} = \iiint_V x\delta(x,y,z)dV,\ S_{xz} = \iiint_V z\delta(x,y,z)dV . \quad (15.60)$$

15.9.2. Ауырлық центрінің координаталарын табу. V денесінің ауырлық центрінің координаталары келесі формулар арқылы табылады

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m},\ y_c = \frac{S_{xz}}{m},\ z_c = \frac{S_{xy}}{m} . \quad (15.61)$$

Егер S_{yz}, S_{xz}, S_{xy}-тердің (15.59), (15.60) формулаларындағы мәндерін және m-нің мәнін (15.61) теңдікке қойсақ

$$x_c = \frac{\iiint_V x\delta(x,y,z)dV}{\iiint_V \delta(x,y,z)dV},\ y_c = \frac{\iiint_V y\delta(x,y,z)dV}{\iiint_V \delta(x,y,z)dV},\ z_c = \frac{\iiint_V z\delta(x,y,z)dV}{\iiint_V \delta(x,y,z)dV} \quad (15.62)$$

Егер V денесі біртекті болса, яғни $\delta(x,y,z) = const$, онда (15.62) теңдіктер төмендегіше болады

$$x_c = \frac{\iiint_V xdv}{V},\ y_c = \frac{\iiint_V ydv}{V},\ z_c = \frac{\iiint_V zdv}{V}. \quad (15.63)$$

Бұл арада $\iiint_V dV = V$ теңдігі ескеріледі.

15.9.3. Инерция моментін анықтау. Массасы m-ге тең материалдық нүктенің Ox өсіне қарағандағы инерция моменті деп нүктенің массасы мен оның Ox өсіне дейінгі арақашықтық квадратының көбейтіндісін айтады, яғни $J_x = \left(y^2 + z^2\right) m$.

Oy және Oz өстеріне қарағандағы инерция моменттері де осы сияқты анықталады, яғни

$$J_y = \left(x^2 + z^2\right)m,\ J_z = \left(x^2 + y^2\right)m.$$

Әрбір нүктесінің тығыздығы $\delta = \delta(x, y, z)$ болатын V денесін ұсақ бөліктерге бөліп, әрбір ұсақ бөлікті бір материалдық нүкте деп қарастыру және статикалық моменттерді анықтағандағыға ұқсас пайымдаулар жүргізу нәтижесінде V дененің инерция моменттерінің келесі формулаларын аламыз:

$$J_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)dV,$$

$$J_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)dV,$$

$$J_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\delta(x, y, z)dV.$$

15.10. Қисық сызықты интегралдар

15.10.1. Бірінші текті қисық сызықты интегралдар

l қисығының теңдеуі $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\quad (\alpha \le t \le \beta)$ параметрлік түрде берілсін.

1-анықтама. Егер φ, ψ функциялары және олардың туындылары үзіліссіз болса, онда l қисығы тегіс немесе жатық деп аталады.

Тегіс l қисығы және осы қисықта анықталған, үзіліссіз $f(x, y)$ функциясы берілсін.

2-анықтама. $f(x, y)$ функциясынан l қисығы бойынша алынған бірінші текті қисық сызықты интеграл деп келесі

$$\int_l f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (15.64)$$

интегралын айтады.

Мұндағы dl доға дифференциалы немесе доға элементі, ол

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\,.$$

теңдігі бойынша табылады.

Егер l қисығы $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$ теңдеуі арқылы берілсе, онда x-ті параметр ретінде қарастырып (15.64) теңдікті келесі түрде жазамыз.

$$\int_l f(x,y)dl = \int_a^b f[x,\ y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx\,.$$

Енді l қисығы материалдық қисық болсын делік. Егер $f(x,y)$ функциясын доғаның кез келген $M(x,y)$ нүктесінің сызықты тығыздығы деп қарастырсақ, яғни $f(x,y)=\delta(x,y)$, онда доға элементінің элементарлық массасы

$$dm = \delta\, dl\,. \qquad (15.65)$$

(15.65) теңдікті l қисығы бойынша интегралдасақ, онда l материалдық қисықтың массасы үшін келесі формуланы аламыз

$$m = \int_l \delta dl\,. \qquad (15.66)$$

Соңғы теңдік бірінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын береді.

Бірінші текті қисық сызықты интегралдың келесі қасиеттерін атап өтелік.

1) интегралдау бағыты өзгергенде бірінші текті қисық сызықты интегралдың мәні өзгермейді, яғни

$$\int_{l^+} f(x,y)dl = \int_{l^-} f(x,y)dl\,.$$

Мұндағы l^+, l^-, l -қисығы бойынша өзара қарама-қарсы бағытта интегралдауды білдіреді.

2) егер $l = l_1 \cup l_2$ болса, онда

$$\int_l f(x,y)dl = \int_{l_1} f(x,y)dl + \int_{l_2} f(x,y)dl .$$

Кеңістікте $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ z = \eta(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta)$ теңдеулерімен берілген тегіс l қисығында анықталған, үзіліссіз $f(x,y,z)$ функциясынан l бойынша алынған бірінші текті қисық сызықты интеграл (1) теңдікке ұқсас келесі түрде анықталады:

$$\int_l f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\ \psi(t),\ \eta(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \eta'^2(t)}dt ,$$

мұндағы

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \eta'^2(t)}dt$ доға дифференциалы немесе доға элементі.

15.11. Екінші текті қисық сызықты интегралдар

Тегіс l қисығы $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta)$ теңдеулерімен берілсін делік. l қисығында $P(x,y),\ \ Q(x,y)$ функциялары үзіліссіз болсын.

1-анықтама. $P(x,y),\ \ Q(x,y)$ қос функциядан l қисығы бойынша алынған екінші текті қисық сызықты интеграл деп келесі

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt \qquad (15.67)$$

интегралын айтады.

Мұндағы $dx = \varphi'(t)dt,\ \ dy = \psi'(t)dt$.

(15.67) теңдіктің сол жағында жақша қойылмаса да, екі қосылғышта интегралға тиісті деп қабылданады.

Егер l қисығы $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$ теңдеуімен берілсе, онда (15.67) формула келесі түрде болады

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x)]dx. \tag{15.68}$$

Егер l қисығы $x = x(y)$ $(c \le x \le d)$ теңдеуімен берілсе, онда

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]dy. \tag{15.69}$$

Екінші текті қисық сызықты интегралдардың келесі қасиеттерін атап өтелік.

1) интегралдау бағыты өзгергенде екінші текті қисық сызықты интегралдың таңбасы қарама-қарсысына өзгереді, яғни

$$\int_{l^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{l^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy;$$

2) егер $l = l_1 \cup l_2$ болса, онда

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{l_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{l_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Кеңістіктегі $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \eta(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ тегіс l қисығы бойынша онда анықталған, үзіліссіз $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ үш функциялардан алынған екінші текті қисық сызықты интеграл келесі теңдік арқылы анықталады:

$$\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\eta(t))\eta'(t)]dt. \tag{15.70}$$

15.12. Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы

Қандай да бір материалдық нүкте, үзіліссіз өзгеретін айнымалы $F\{P(x,y), Q(x,y)\}$ күшінің әсерінен, теңдеуі $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ \ (a\le t\le\beta)$ болатын l қисығы бойлап оның кез келген $M(x,y)$ нүктесінен оған шексіз жақын $M_1(x+dx,\ y+dy)$ нүктесіне жылжысын делік. Ығысу векторын $\overline{dl}=\overline{MM_1}$ десек, онда $\overline{dl}$ векторының компоненттері dx, dy, яғни $\overline{dl}\{dx,dy\}$ болады. Шексіз аз $\left|\overline{dl}\right|$ аралықта $\overline{F}$ күшін тұрақты деп қабылдасақ, онда ол күштің осы аралықта орындаған элементарлық жұмысы $\overline{F}$ векторымен $\overline{dl}$ векторының скалярлық көбейтіндісіне тең екені аналитикалық геометрия бөлімінен белгілі, яғни

$$dA=\overline{F}\cdot\overline{dl}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (15.71)$$

(15.71) өрнекті l қисығы бойынша интегралдап орындалған жұмыстың келесі өрнегіне ие боламыз

$$A=\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (15.72)$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интеграл физикалық мағынасы жағынан айнымалы $\overline{F}$ күшінің l қисығы бойынша орындаған жұмысын береді екен. Мұндағы $P(x,y), Q(x,y)$ функциялары $\overline{F}$ күшінің Ox және Oy өстеріне түскен проекциялары.

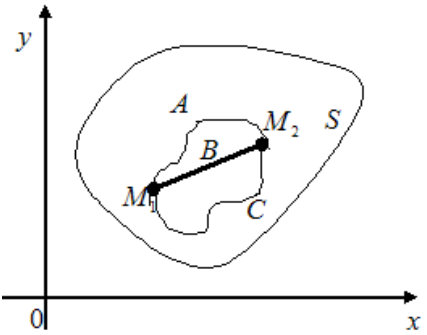
Егер қисық және әсер етуші күш кеңістікте берілсе, яғни $\overline{F}\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ күшінің $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\eta(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta)$ қисығы (l) бойлап орындаған жұмысы

$$A=\int_l P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \qquad (15.73)$$

формула арқылы анықталады.

15.13. Екінші текті қисық сызықты интегралдардың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты

Тұйық S облысы және онда үзіліссіз $P(x,y), Q(x,y)$ функциялары берілсін. S облысының кез келген екі $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ нүктесін таңдап, оларды облыстан шықпай біріктіретін бірнеше қисықтарды, яғни M_1AM_2, $M_1BM_2, M_1CM_2, \ldots$ қисықтарын қарастыралық (15.13-сурет).



15.13-сурет

1-анықтама. Егер

$$\int\limits_{M_1AM_2} Pdx+Qdy = \int\limits_{M_1BM_2} Pdx+Qdy = \int\limits_{M_1CM_2} Pdx+Qdy = \ldots \quad (15.74)$$

теңдіктері орындалса, онда

$$\int\limits_{M_1M_2} Pdx+Qdy \quad (15.75)$$

екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз деп аталады.

Теорема. Егер $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ өрнегі S облысында қандай да бір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы

болса, яғни $du = Pdx + Qdy$, онда (15.75) екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының түрінен тәуелсіз болады.

Дәлелдеу. S облысының кез келген $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерін біріктіретін кез келген тегіс l қисығы $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ теңдеулерімен берілсін. Мұндағы

$$\varphi(\alpha) = x_1,\ \varphi(\beta) = x_2, \psi(\alpha) = y_1,\ \psi(\beta) = y_2. \quad (15.76)$$

Теореманың шарты бойынша

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du[\varphi(t),\ \psi(t)] \quad (15.77)$$

Онда (15.67), (15.76) теңдіктерді қолданып, келесі теңдіктерді аламыз

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta du\left[\varphi(t), \psi(t)\right] = u\left[\varphi(t), \psi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta =$$
$$= u\left[\varphi(\beta), \psi(\beta)\right] - u\left[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\right] = u(M_2) - u(M_1). \quad (15.78)$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интегралдың мәні l қисығының түрінен тәуелді болмай, оның тек қана бастапқы және соңғы нүктелерінің координаталарынан тәуелді екен.

1-салдар. Егер (15.77) теңдік орындалса, онда (15.78) теңдіктерді қолданып келесі формуланы жазамыз

$$\int_l Pdx + Qdy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1). \quad (15.79)$$

Соңғы формуланы жалпылаған Ньютон-Лейбниц формуласы деп атайды.

2-салдар. Егер $P(x, y) + Q(x, y)$ өрнегі қандай да бір функцияның толық дифференциалы болса және l қисығы тұйық болса, онда

$$\oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Мұндағы $\oint_l$ белгісі тұйық l қисығы бойынша интегралданады дегенді білдіреді.

15.14. Потенциалдық күштің жұмысы

Енді соңғы теореманың физикалық мағынасын берелік. S облысында $\overline{F}\{P(x,y),Q(x,y)\}$ күштерінің өрісі анықталған болсын делік, яғни S облысының әрбір нүктесіне сәйкес $\overline{F}$ күші анықталған болсын. Мысалы, жер бетінің айналасындағы кез келген m массалы материалдық нүктеге сан мәні mg болатын ауырлық күш әсер етеді, бұл жер бетінің айналасында ауырлық күштер өрісі бар деген сөз. Мұндағы g -ауырлық күштің үдеуі.

Электр тоғымен зарядталған дененің маңайында байқалатын кернеулердің векторлық өрісі де күштер өрісіне мысал болады.

1-анықтама. Егер $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ теңдіктері орындалатын $u=u(x,y)$ функциясы бар болса, онда $\overline{F}\{P(x,y),\ Q(x,y)\}$ - потенциалдық күш, $\overline{F}$ күштерінің өрісі потенциалдық өріс, ал u функциясы потенциал деп аталады.

Соңғы анықтамаға сүйеніп

$$Pdx + Qdy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}du = du$$

теңдіктерді жазамыз. Онда потенциалдық $\overline{F}$ күшінің $M_1(x_1,y_1)$ және $M_2(x_2,y_2)$ нүктелерді біріктіретін жол бойлап орындаған жұмысы келесі формуламен анықталады:

$$A = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} du = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1).$$

Сонымен, потенциалдық күштің жұмысы жолдың (интегралдау қисығының) түрінен тәуелсіз болады екен. Дербес жағдайда, егер жол (қисық) тұйық болса, онда орындалған жұмыс нөлге тең, яғни $A = 0$.

Он бесінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар

1. Екі еселі интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Екі еселі интегралдың бар болуы туралы теореманы баяндаңыз.
3. Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасын беріңіз.
4. Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттерін жазыңыз.
5. Қайталанбалы интеграл деп қандай интегралды айтады?
6. Дұрыс облыстың анықтамасын беріңіз.
7. Екі еселі интегралды қайталанбалы интегралға келтіру жолдарын баяндаңыз.
8. Нүктенің қисық сызықты координаталары деген не?
9. S облысын S' облысына өзара бірмәнді бейнелеу формулаларын жазыңыз.
10. Якобиан айнымалыларды алмастыру функциялары арқылы қалай өрнектеледі?
11. Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру формуласын жазы-ңыз.
12. Екі еселі интегралда полярлық координата жүйесіне көшу формула-сын жазыңыз.
13. Геометриялық және физикалық шамаларды екі еселі интегралдың көмегімен есептеудің жалпы принципін баяндаңыз.
14. Кеңістіктегі дененің көлемін есептейтін формуланы жазыңыз.
15. Екі еселі интегралдың көмегімен жазық фигуралардың ауданы қалай есептеледі.
16. Беттің ауданын табу формуласын келтіріп шығарыңыз.
17. Материалдық жазық фигураның массасын табу формуласын жазыңыз.
18. Жазық фигураның статикалық моменттерін табатын формулаларды жазыңыз.
19. Ауырлық центірінің координаталарын табу формулаларын жазыңыз.

20. Материалдық жазық фигураның инерция моменттерінің формула-ларын жазыңыз.

21. Үш еселі интегралдың анықтамасын беріңіз.

22. Үш еселі интегралдың бар болуы теоремасын баяндаңыз.

23. Үш еселі интегралдың физикалық мағынасын ашыңыз.

24. Қандай облысты үш өлшемді дұрыс облыс деп атайды?

25. Үш еселі интегралды қайталанба интегралға келтіру жолын баяндаңыз.

26. Үш еселі интегралдың қасиеттерін жазыңыз.

27. V облысын V' облысына өзара бірмәнді бейнелейтін формулаларды жазыңыз.

28. Үш еселі интегралдарда айнымалыларды ауыстыру формуласын жазыңыз.

29. Кез келген нүктенің декарттық координаталарын цилиндрлік координаталармен өрнектейтін формулаларды жазыңыз.

30. Үш еселі интегралды цилиндрлік координаталарға көшу арқылы есептеу формуласын жазыңыз.

31. Кез келген нүктенің декарттық координаталарын сфералық координа-талармен өрнектейтін формулаларын жазыңыз.

32. Үш еселі интегралды сфералық координаталарға көшіп есептеу формуласын жазыңыз.

33. Материалдық нүктенің координаталар жазықтықтарына қарағандағы статикалық моменттері дегеніміз не?

34. Тығыздығы $\delta(x, y, z)$ болатын дененің координаталар жазықтықтары-на қарағандағы статикалық моменттерін анықтайтын формулаларды жазыңыз.

35. Тығыздығы $\delta(x, y, z)$ болатын дененің ауырлық центрінің коорди-наталарын табатын формулаларды жазыңыз.

36. Біртекті дененің ауырлық центрінің координаталарын табатын формулаларды жазыңыз.

37. Материалдық нүктенің координата өстеріне қарағандағы инерция моменттері деген не?

38. Тығыздығы $\delta(x, y, z)$ болатын дененің координата өстеріне қараған-дағы инерция моменттерін табатын формулаларды жазыңыз.

39. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасын беріңіз.

40. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын түсіндіріңіз.

41. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттерін жазыңыз.

42. Екінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасын беріңіз.

43. Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасын түсіндіріңіз.

44. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шартын баяндаңыз.

45. Потенциалдық өрістің анықтамасын беріңіз.

46. Потенциалдық күштің жұмысының формуласын жазыңыз.

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 2009. – 167с.

2. Божанов Е. Т. Курс высшей математики для технических и экономических специальностей.-Алматы: 2010.-392с.

3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 2007. – 357с.

4. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Куницкая Е. С. Математический анализ. Интегральное исчисление. Учеб. пособие для студентов-заочников 2 курса физ.-мат. фак. пед. интов. - 2-е изд. - М. 2006. – 192с.

5. Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С., Мордкович А. Г. Математический анализ. Дифференциальное исчисление. -М.: Просвещение, 1978.-160с.

6. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г. Производная и интеграл. Пособие для учителей. - М. 2008. - 96с.

7. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Куницкая Е. С. Математический анализ. Дифферециальное исчисление. - 2-е, перераб. Издание. - М. 2005. - 175с.

8. Виленкин И. В. Высшая математика в упражнениях и задачах. – 2009. -448с.

9. Виленкин И. В. Высшая математика в упражнениях и задачах.– 2008. – 448с.

10. Виленкин И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. – Ростов: Феникс, 2004. – 416с.

11. Грабарь М. И., Краснянская К. А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметр. Методы. – М.: Педагогика, 1997. – 134с.

12. Дүйсек А. К., Қасымбеков С. Қ. Жоғары математика оқу құралы, Алматы, ҚБТУ, 2004. – 440 б.

13. Зорич В. А. Математический анализ, ч.1. – М.: Наука, 1991. – 544с.

14. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1982. – 616с.

15. Кибалко П. И. Профессиональная направленность преподавания курса математического анализа в педвузе: Дис...канд. – Минск, 1985. –190 с.

16. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2-х томах. Т.1: Пер. с нем. / Под ред. М. И. Постникова. – М.: Наука / Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 456с.

17. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач: Дис... док. пед. наук. - М.: 1992. –380 с.

18. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. - М. Наука, 2003. – 671с.

19. Қазақша-орысша (орысша-қазақша) терминологиялық сөздік. Математика. – Алматы. 2008. – 231б.

20. Қуандышева Е. С. Математика. – М. 2005. – 536с.

21. Махмеджанов Н. М. Сборник задач по высшей математике.–Алматы. – 2009. – 408 с.

22. Метельский Н. В. Дидактика математики: общая методика и ее проблемы (учеб.пособие для вузов.- 2-е изд., перераб. –Минск: Изд. БГУ, 1982. – 256с.

23. Низамов Р.А. Дидактические основы активизации учебной деятельности студентов. - Казань, КГУ, 2009. – 302с.

24. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. –М.2011. – 256с.

25. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. –М. 2010. – 608с.

26.Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. –М.2008. – 256с.

27. Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. –Минск. – 2010.

28. Самаров К. Л. Задачи с решениями по высшей математике и математическим методам в экономике. – М. 2007. – 548с.

29. Самаров К. Л. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. – М. 2009. – 576с.

30. Сатыбалдиев О. С., Қаңлыбаев Қ. И. Математиканы оқыту әдістемесі. Оқулық, ЖШС РПБК «Дәуір». – Алматы: 2013. – 368 бет.

31. Сатыбалдиев О. С., Сулейменов З. И. Жоғары математика I. - ҚазҰТУ-дың Ғылыми-техникалық баспа орталығы. Алматы, 2010. – 412 бет.

32. Сатыбалдиев О. С., Сулейменов З. И. Жоғары математика II. - ҚазҰТУ-дың Ғылыми-техникалық баспа орталығы. – Алматы, 2008. – 105 бет.

33. Сатыбалдиев О. С., Сулейменов З. И. Жоғары математика III. – «ҰҒТАО» АҚ баспаханасы. – Алматы, 2009. – 185 бет.

34. Сатыбалдиев О. С., Сулейменов З. И. Жоғары математика IV. - «ҰҒТАО» АҚ баспаханасы. – Алматы, 2010. – 259 бет.

35. Сатыбалдиев О. С. Сулейменов З.И. Математика I. - ҚазҰТУ-дың Ғылыми-техникалық баспа орталығы. – Алматы, 2010. – 411 бет.

36. Сатыбалдиев О. С. Сулейменов З.И. Математика II. - ҚазҰТУ-дың Ғылыми-техникалық баспа орталығы. Алматы, 2011. – 397 бет.

37.Шипачев В. С. Задачник по высшей математике. – М. 2008. – 304с.

МАЗМҰНЫ

	Алғы сөз	3
1 тарау.	Сызықтық алгебраның элементтері	6
1.	Анықтауыштар	6
1.1.	Бірінші, екінші, үшінші және *n*-ретті анықтауыштар, оларды есептеу	6
1.2.	Анықтауыштардың негізгі қасиеттері және оларды есептеу	8
1.3.	Матрицалар	13
1.3.1.	Матрица ұғымы, оларға сызықты амалдар қолдану және олардың қасиеттері	13
1.3.2.	Кері матрица	17
1.3.3.	Матрицаның рангісі	20
1.4.	Сызықтық теңдеулер жүйесі	23
1.4.1.	Негізгі түсініктер	23
1.4.2.	Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу. Кронекер-Капелли теоремасы	25
1.4.3.	Ерекше емес сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі. Крамер формуласы	26
1.4.4.	Сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісі арқылы шешу.....	29
1.4.5.	Біртектес теңдеулер жүйесі	31
	Бірінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	32
2 тарау.	Векторлық алгебра	35
2.1.	Вектор ұғымы және оларға сызықтық амалдар қолдану	35
2.2.	Векторлардың сызықтық комбинациясы. Базис. Векторлардың скаляр көбейтіндісі. Сызықтық кеңістіктер	40
2.3.	Векторлық көбейтінді, оның қасиеттері және қолданылуы	45
2.4.	Үш вектордың аралас көбейтіндісі және олардың қасиеттері	48
	Екінші тараудың теориялық материалдарын тиянақтайтын сауалдар	51
3 тарау.	Жазықтықтағы аналитикалық геометрия	53

3.1.	Жазықтықтағы координаталар жүйесі	53
3.1.1.	Негізгі түсініктер	53
3.1.2.	Координаталар әдісінің жазықтықтағы қолданулары	55
3.1.3.	Координаталар жүйесін түрлендіру	57
3.2.	Жазықтықтағы қисықтар	60
3.2.1.	Негізгі түсініктер	60
3.3.	Жазықтықтағы түзудің теңдеулері	63
3.3.1.	Бұрыштық коэффициенті берілген түзудің теңдеуі	63
3.3.2.	Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі	64
3.3.3.	Берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі.....	64
3.3.4.	Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі	65
3.3.5.	Екі түзудің арасындағы бұрыш	65
3.3.6.	Түзудің кесінділері арқылы берілген теңдеуі...	66
3.3.7.	Түзудің нормаль теңдеуі	67
3.3.8.	Түзуге дейінгі ара қашықтық	68
3.4.	Жазықтықтағы екінші ретті қисықтар.....	69
3.4.1.	Шеңбер.....	70
3.4.2.	Эллипс.....	72
3.4.3.	Гипербола	75
3.4.4.	Парабола	80
3.5.	Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеулері..	83
3.5.1.	Координаталар өстеріне параллель және оларға қарағанда симметриялы екінші ретті қисықтардың теңдеулері	83
3.5.2.	Екінші ретті сызықтардың жалпы теңдеулері	86
	III-тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	88
4 тарау.	Кеңістіктегі аналитикалық геометрия	89
4.1.	Кеңістіктегі жазықтық	89
4.1.1.	Жазықтықтың жалпы және кесінділер арқылы берілген теңдеулері.....	89
4.1.2.	Жазықтықтың нормал теңдеуі.....	92
4.2.	Кеңістіктегі түзулер	93
4.2.1.	Түзудің параметрлік және канондық теңдеулері. Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі	93

4.2.2.	Түзу екі жазықтықтың қиылысуы. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасулары	94
4.2.3.	Екі түзудің арасындағы бұрыш. Нүктеден түзуге дейінгі ара қашықтық. Екі түзудің арасындағы ең қысқа ара қашықтық.....	97
4.3.	Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтар.....	98
4.4.	Кеңістіктегі беттер. Сфера. Айналу, цилиндрлік және конустық беттер.....	100
4.5.	Екінші ретті беттер	101
	4-тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын студенттер үшін өзін-өзі тексеру сауалдары	105
5 тарау.	Анализге кіріспе	107
5.1.	Функция және оның графигі	107
5.2.	Функцияның берілу тәсілдері	109
5.3.	Функциялардың графиктерін түрлендіру	112
5.4.	Күрделі және айқындалмаған функциялар	115
5.5.	Шектелген функциялар	119
5.6.	Жұп және тақ функциялар	120
5.7.	Периодты функциялар	123
5.8.	Монотонды функциялар	125
5.9.	Кері функция	129
5.10.	Сан тізбегі және оның шегі. Шектер теориясы..	134
5.11.	Шексіз аз және шексіз үлкен тізбектер	141
5.12.	Шексіз аз тізбектердің қасиеттері.....	143
5.13.	Жинақты тізбектердің қасиеттері.....	144
5.14.	Теңсіздіктерде шекке көшу	147
5.15.	Анықталмаған өрнектер	149
5.16.	Монотонды тізбек және оның шегі туралы теорема	158
5.17.	e саны	159
5.18.	Функция шегі	161
5.19.	Бір жақты шектер	164
5.20.	Шектер туралы теоремалар	166
5.21.	Күрделі функцияның шегі	170
5.22.	Бірінші тамаша шек	170
5.23.	Екінші тамаша шек	172

5.24.	Шексіз аз функциялар және оларды салыстыру	173
5.25.	Үзіліссіз функциялар	175
5.26.	Функцияның үзіліс нүктелері	180
5.27.	Нүктедегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері.	184
5.28.	Күрделі функцияның үзіліссіздігі	186
5.29.	Монотонды функцияның шектері және үзіліссіздігі	186
5.30.	Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері	187
	Бесінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	188
6 тарау.	Туынды және дифференциал	191
6.1.	Туындының анықтамасы	191
6.2.	Туындының геометриялық және механикалық мағыналары	196
6.3.	Негізгі элементар функциялардың туындылары	198
6.4.	Дифференциалдаудың негізгі ережелері	200
6.5.	Кері функцияның туындысы	202
6.6.	Күрделі және айқындалмаған функцияның туындысы	203
6.7.	Күрделі-көрсеткішті функцияның туындысы және логарифмдік дифференциалдау	205
6.8.	Параметрлі түрде берілген функцияның туындысы	207
6.9.	Туындылар кестесі	208
6.10.	Функцияның дифференциалы	208
	Алтыншы тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	212
7 тарау.	Жоғары ретті туындылар және дифференциалдар	213
7.1.	Жоғары ретті туындылар	213
7.2.	Жоғары ретті дифференциалдар	214
7.3.	Дифференциалдық есептеулердің негізгі теоремалары	215
7.4.	Лопиталь ережесі	218
7.5.	Тейлор формуласы	221
7.5.1.	Функциялардың Тейлор формуласына жіктелуіне мысалдар	222

7.5.2.	Тейлор формуласының жуықтап есептеулерде қолданулары	223
	Жетінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	225
8 тарау.	Туындыны функцияларды зерттеуге, геометрия және механика есептерін шешуге қолдану..	226
8.1.	Функцияның өсуі мен кемуі туралы теоремалар	226
8.2.	Функцияның экстремумдары	227
8.3.	Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері	230
8.4.	Қисықтың ойыстығы мен дөңестігі және иілу нүктелері	230
8.5.	Қисықтың асимптоталары	231
8.6.	Скаляр аргументтің вектор функциясы және оның туындысы	233
8.7.	Комплекс сандар	237
	Сегізінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	241
9 тарау.	Анықталмаған интегралдар	243
9.1.	Алғашқы функция және анықталмаған интеграл	243
9.2.	Анықталмаған интегралдың қасиеттері	245
9.3.	Интегралдау кестесі	246
9.4.	Негізгі интегралдау әдістері	247
9.4.1.	Айнымалыларды алмастыру әдісі	247
9.4.2.	Бөлшектеп интегралдау әдісі	249
9.5.	Рационал функцияларды интегралдау	253
9.6.	Иррационал функцияларды интегралдау	257
9.7.	Тригонометриялық функцияларды интегралдау	258
10 тарау.	Анықталған интеграл	263
10.1.	Анықталған интеграл түсінігі, оның геометриялық мағынасы	263
10.2.	Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері	266
10.3.	Анықталған интегралдарды есептеу. Ньютон – Лейбниц формуласы	268
10.4.	Анықталған интегралдарды есептеу әдістері	270

10.4.1.	Анықталған интегралдарда айнымалыны алмастыру	270
10.4.2.	Бөлшектеп интегралдау	271
10.5.	Меншіксіз интегралдар.....	273
10.5.1.	Бірінші текті меншіксіз интегралдар.....	273
10.5.2.	Екінші текті меншіксіз интегралдар.....	278
10.6.	Анықталған интегралды жуықтап есептеу.....	280
10.6.1.	Тіктөртбұрыштар формуласы.....	280
10.6.2.	Трапеция формуласы.....	281
10.6.3.	Парабола немесе Симпсон формуласы.....	282
	Онынши тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар.....	287
11 тарау.	Анықталған интегралдың қолданулары.....	288
11.1.	Анықталған интегралдың қолдануларының жалпы схемасы.....	288
11.2.	Жазық фигуралардың аудандарын есептеу	289
11.3.	Қисық доғасының ұзындығын есептеу.....	293
11.4.	Айналу денесінің көлемі.....	295
11.5.	Доғаның статикалық моментін және ауырлық центрінің координаталарын табу	296
11.6.	Жазық фигураның статикалық моментін және ауырлық центрінің координаталарын табу	299
11.7.	Инерция моменттері.....	301
	Он бірінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтай-тын сауалдар.....	302
12 тарау.	Көп айнымалының функциялары	303
12.1.	Екі айнымалының функциясы, оның анықталу облысы және графигі	303
12.2.	Екі айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі	306
12.3.	Екі айнымалы функцияның дербес және толық өсімшесі	309
12.4.	Екі айнымалы функцияның дербес туындылары	311
12.5.	Екі айнымалы функцияның толық Дифференциалы	312
12.6.	Күрделі және айқындалмаған функцияларды дифференциалдау	317

12.7.	Жоғары ретті дербес туындылар	321
12.8.	Екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласы	322
12.9.	Бағыт бойынша алынған туынды. Градиент ...	324
12.10.	Екі айнымалы функцияның экстремумы.....	327
12.11.	Шартты экстремум	330
12.12.	Ең кіші квадрат әдісі	331
	Он екінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	332
13 тарау.	Дифференциалдық теңдеулер	335
13.1.	Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар	335
13.2.	Айнымалылары ажыратылатын дифференциал-дық теңдеулер	338
13.3.	Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер	339
13.4.	Біртекті теңдеулерге келтірілетін дифференциал-дық теңдеулер	340
13.5.	Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер	343
13.6.	Толық дифференциалдық теңдеулер	345
13.7.	Толық дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық көбейткіш.....	347
13.8.	Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер.....	349
13.9.	Реті төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер	351
13.10.	Сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер	354
13.10.1.	Тұрақтыны вариациялау әдісі	362
13.11.	Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер	363
13.12.	Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі	369
13.13.	Коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесі	373
	Он үшінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	376
14 тарау.	Қатарлар теориясы	379

14.1.	Сан қатары туралы түсінік	379
14.2.	Оң қатарлар	383
14.3.	Таңбалары айнымалы қатарлар	389
14.3.1.	Абсолют және шартты жинақты қатарлар	391
14.4.	Дәрежелі қатарлар	392
14.4.1.	Дәрежелі қатарлардың қасиеттері	395
14.4.2.	Дәрежелі қатарды мүшелеп интегралдау туралы теорема	396
14.5.	Функциялардың дәрежелі қатарларға жіктелінуі. Маклорен қатары	397
14.5.1.	$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), arctgx$ және $(1+x)^\alpha$ функциясының Маклорен қатарына жіктелінулері	400
14.6.	Дәрежелі қатардың жуық есептеулерге қолданылуы	402
14.7.	Фурье қатары	406
14.8.	Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатары	410
14.9.	$2l$ периодты функцияны Фурье қатарына жіктеу	412
	Он төртінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	414
15 тарау.	Еселі интегралдар	416
15.1.	Екі еселі интеграл және оның негізгі қасиеттері	416
15.2.	Екі еселі интегралды есептеу	419
15.3.	Екі еселі интегралда айнымалыларды ауыстыру	424
15.4.	Екі еселі интегралда полярлық координаталар жүйесіне көшу	428
15.5.	Екі еселі интегралдардың геометрияда және физикада қолданулары	430
15.5.1.	Көлемді есептеу.....	431
15.5.2.	Ауданды есептеу.....	432
15.6.	Екі еселі интегралдардың физикада қолданылулары	434
15.7.	Үш еселі интеграл.....	436
15.8.	Үш еселі интегралда айнымалыларды алмастыру	440

15.9.	Үш еселі интегралдардың қолданылулары	445
15.9.1.	Статикалық моменттерді анықтау.....	446
15.9.2.	Ауырлық центрінің координаталарын табу.....	447
15.9.3.	Инерция моментін анықтау.....	448
15.10.	Қисық сызықты интегралдар.....	448
15.10.1.	Бірінші текті қисық сызықты интегралдар.....	448
15.11.	Екінші текті қисық сызықты интегралдар.....	450
15.12.	Екінші текті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы	452
15.13.	Екінші текті қисық сызықты интегралдардың интегралдау қисығының түрінен тәуелсіздік шарты	453
15.14.	Потенциалдық күштің жұмысы	455
	Он бесінші тарау бойынша теориялық материалдарды тиянақтайтын сауалдар	456
	Библиографиялық тізім	459

Оқулық басылым

О. С. Сатыбалдиев
З. И. Сулейменов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫ

Оқулық

РБ бастығы *З. А. Ғұбайдулина*
Редакторы *А. И. Бейсебаева*
Компьютерде беттеген *А. С. Сайбулатова*

Басуға қол қойылды 25.04.2016 ж.
Таралымы 300 дана. Пішімі 60х84х 1/16. № 1 баспаханалық қағаз.
Е.-б.т. 29,4. Ш.б.т. 27,4. Тапсырыс № 736. Бағасы келісімді.

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университетінің басылымы

Қ. И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТЗУ Оқу-баспа орталығы,
Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-228-941-1

